Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Sistemas Elípticos Semilineares Não-homogêneos

por

Ederson Moreira dos Santos †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Co-orientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

†Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.

Sistemas Elípticos Semilineares Não-homogêneos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ederson Moreira dos Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de outubro de 2007.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Orientador

Francisco Odair Vieira de Paiva

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva.

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro.

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento.

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Dos Santos, Ederson Moreira

D74s Sistemas elípticos semilineares não-homogêneos / Ederson Moreira dos Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientadores : Djairo Guedes de Figueiredo; Francisco Odair Vieira de Paiva

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas hamiltonianos. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Cálculo das variações. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Paiva, Francisco Odair Vieira de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Nonhomogeneous semilinear elliptic systems.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Hamiltonian systems. 2. Elliptic differential equations. 3. Calculus of variations.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Francisco Odiar Vieira de Paiva (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves (UNB)
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento (UFSCar)
Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (UNB)

Data da defesa: 10/10/2007

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 10 de outubro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

Prof. (a). Dr (a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES

Prof. (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO

Prof. (a) Dr. (a) MARCELO FERNANDES FURTADO

Aos meus pais
Aparecida e Nelson

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me amparado durante esta jornada.

À Flávia, não apenas pelo apoio durante a fase final deste trabalho, mas também pelo seu carinho e companhia.

Ao Prof. Djairo, ao qual sou imensamente grato pelo auxílio prestado através de suas valiosas sugestões e por sempre estar disposto à discutir sobre os assuntos desta tese. Muito obrigado pela orientação!

Aos Profs. Marcelo Furtado, Pedro Ubilla e Orlando Lopes pelas frutíferas discussões matemáticas. Em especial ao primeiro por ter me apresentado os trabalhos [40] e [42] .

Aos Profs. Odair, José Valdo, Marcelo Montenegro, Arnaldo e Marcelo Furtado por gentilmente terem aceito o convite para cômpor a banca examinadora.

Aos amigos Leonelo Iturriaga e Giovane Cesar pelo esclarecimento de algumas dúvidas com o Latex.

Aos amigos do IMECC e do DMA-UEM que proporcionaram boas discussões matemáticas e também momentos de descontração.

À Cidinha, Ednaldo e Tânia por estarem sempre a disposição para solucionar as questões burocráticas.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho consideramos duas classes de sistemas não-homogêneos, sendo que em certos casos uma dessas classes tranforma-se em um sistema gradiente, enquanto que a outra em um sistema de tipo Hamiltoniano.

Analisamos as questões de existência, não-existência, unicidade e multiplicidade de soluções.

Para obter nossos resultados empregamos o método de subsolução e super-solução, minimização de funcionais, teorema da função implícita, teorema de multiplicadores de Lagrange, Teorema do Passo da Montanha, um teorema de representação de Riesz para alguns espaços de Sobolev e o Princípio de Concentração de Compacidade.

ABSTRACT

In this work we consider two classes of nonhomogeneous systems, where in certain cases one of these classes turns to be a gradient system, while the other one becomes a system of Hamiltonian type.

We are concerned about the questions of existence, nonexistence, uniqueness and multiplicity of solutions.

To obtain our results we apply the method of subsolutions and supersolutions, minimization of functionals, the Lagrange multiplier theorem, the Mountain Pass Theorem, a Riesz's representation theorem for certain Sobolev spaces and the Concentration-Compactness Principle.

CONTEÚDO

Notações Básicas

Neste texto usaremos as seguintes notações:

$\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$: o espaço euclidiano com pontos $x = (x_1, \cdots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$ (números reais); $|x| = (\sum x_i^2)^{1/2}$.

∂S: a fronteira do conjunto S; $\overline{S} = S \cup \partial S$ é o fecho de S.

$A \backslash A' = \{x \in A : x \notin A'\}$.

$S' \subset\subset S$: significa que S' está estritamente contido em S e que o fecho S' é compacto e está contido em S.

$\mathcal{X}_S$: a função característica de S.

$\delta_x = \mathcal{X}_{\{x\}}$: a massa de Dirac em x.

Ω: um domínio (aberto e conexo) limitado de $\mathbb{R}^N$ de fronteira regular.

$\eta(x)$: denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em x.

$|\Omega|$: o volume de Ω.

$B(x, r)$: a bola aberta de centro x e raio r; $B[x, r]$: a bola fechada de centro x e raio r.

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$: o conjunto das funções contínuas definidas em Ω.

$C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$: o espaço de Banach das funções contínuas definidas em $\overline{\Omega}$ com norma $|u|_{0,\Omega} = \max\{|u(x)| : x \in \overline{\Omega}\}$.

$C^k(\Omega)$: o conjunto das funções que possuem todas as derivadas de ordem menor ou igual a k contínuas em Ω com k um inteiro não negativo ou $k = \infty$.

Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, onde cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado de multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ e

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N}(x).$$

Denotamos por $u_{x_i}(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ e $u_{x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. E mais $\nabla u = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_N})$ e $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$.

$C^k(\overline{\Omega})$: o espaço de Banach de todas as funções em $C^k(\Omega)$ cujas derivadas de ordem menor ou igual a k possuem extensões contínuas a $\overline{\Omega}$ com norma $|u|_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{0,\Omega}$.

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$: o espaço de Hölder com norma $|u|_{k,\alpha,\Omega}$ onde k é um inteiro não-negativo e $\alpha \in [0,1]$.

$supp(u)$: se $u : A \to \mathbb{R}$, $supp(u)$ (o suporte de u em A) é o fecho em A do conjunto $\{x \in A : u(x) = 0\}$.

$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$: o conjunto de todas as funções em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ de suporte compacto.

$C_c^\infty(\Omega)$: o conjunto de todas as funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $supp(u) \subset\subset \Omega$.

$|u|_{r,\Omega}$: a norma de uma função $u \in L^r(\Omega)$.

$W^{k,p}(\Omega)$: o espaço de Sobolev com norma $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ (que envolve todas as derivadas fracas até ordem k).

$H^{-1}(\Omega)$: o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

q.t.p. : quase todo ponto, isto é, a menos de um subconjunto de medida nula.

Se $N \geq 3$ então $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$.

Se $N \geq 5$ então $2_* = \frac{2N}{N-4}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ em $L^{2_*}(\Omega)$.

$\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$: denota o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

$\varphi_1 = \varphi_1(\Omega)$: denota a primeira autofunção positiva de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ satisfazendo $\int_\Omega \varphi \, dx = 1$.

u_*, v_*: sempre que $f \in C^1(\overline{\Omega})$ e(ou) $g \in C^1(\overline{\Omega})$, u_*, v_* representarão respectivamente as soluções do problemas de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_* & = & f \text{ em } \Omega, \\ u_* & = & 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta v_* & = & g \text{ em } \Omega, \\ v_* & = & 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ indica convergência forte.

$\rightharpoonup$ indica convergência fraca.

$u^+ = \max\{u, 0\}$.

PM: abreviação para Princípio do Máximo.

PMF: abreviação para Princípio do Máximo Forte.

Solução forte: no sentido do Capítulo 9 em [29].

Introdução

O assunto tratado neste trabalho tem sua origem no problema não-homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u^p + \epsilon f(x) \text{ em } \Omega, \\ u &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, é um domínio limitado de fronteira regular. A função f é $C^1(\overline{\Omega})$ e não identicamente nula; $p > 1$ e $\epsilon > 0$ é um parâmetro.

O problema de encontrar múltiplas soluções para (1) envolvendo o expoente crítico de Sobolev $p = 2^* - 1$ foi pioneiramente tratado por Tarantello [42] e em seguida por Dai-Gu [13] e Dai-Yang [14], todos no caso em que $\lambda = 0$.

Como uma solução u de (1) deve satisfazer $u > 0$ em Ω, é natural impor alguma hipótese de positividade sobre a parte não-homogênea f. Em [42], a autora supõe que $f \geq 0$ em Ω, no entanto os autores de [13] observaram que o problema (1) pode ser tratado apenas com a hipótese $u_* \geq 0$ em Ω, onde u_* é definida como nas Notações Básicas do início deste texto.

Para o bom desempenho do método empregado em [42], a hipótese $f \geq 0$ é fundamental e, embora seja aplicado para o caso $\lambda = 0$ seu funcionamento é verificado quando λ é qualquer valor de $[0, \lambda_1)$. No Capítulo 1 veremos a não existência de solução para $\lambda \geq \lambda_1$.

Por outro lado, embora o método utilizado em [13] e [14] permita que f troque de sinal em Ω, este não pode ser aplicado para todos os valores de λ em $(-\infty, \lambda_1)$.

Surge então nessa história o trabalho de Deng [22]. Em tal artigo, o autor permite que λ seja qualquer valor em $(-\infty, \lambda_1)$ e supõe que $f \geq 0$ em Ω, embora seu método funcione apenas com $u_* \geq 0$ em Ω, mas exige que f se anule sobre $\partial\Omega$.

No Capítulo 1 discutiremos sobre o problema (1) e forneceremos um resultado baseado na continuidade de λ_1 em relação a Ω, o que preenche as lacunas apresentadas acima. Também neste capítulo discutiremos sobre a hipótese de positividade introduzida em [13] e mais, apresentaremos uma simplificação de um resultado de Fortunato-Jannelli [26] sobre multiplicidade de soluções não-positivas para a equação do problema (1) em domínios cilíndricos.

A idéia inicial era considerar problemas semelhantes ao problema (1) envolvendo o operador biharmônico, e mais geralmente o poliharmônico, com condição de fronteira do tipo Navier. No entanto, o problema não-homogêneo

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= u^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega, \\ u, \Delta u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

com $q = 2_* - 1$ já foi considerado por Guedda [30], onde 2_* é definido como nas Notações Básicas do início deste texto.

Da equivalência entre a equação (2), quando $g \in C^1(\overline{\Omega})$, e o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u &= v \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= u^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

passamos então a considerar o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u &= v^p + \epsilon f(x) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= u^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega, \\ u, v &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

analisando suas características em relação à posição do par de potências (p, q) em toda a região do plano $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, e também os sistemas

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + bv + v^p + \epsilon f(x) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= cu + dv + u^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega, \\ u, v &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + bv + u^p + \epsilon f(x) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= cu + dv + v^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega, \\ u, v &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

quando $p, q > 1$, onde a parte não-homogênea nos três últimos sistemas satisfaz:

(P) $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ não são simultaneamente identicamente nulas e $u_*, v_* \geq 0$ em Ω.

A existência de alguns resultados relativos ao sistema (3), por exemplo os de Cao-Han [11], Han-Liu [31] e Montenegro [39], estimulou a busca por novos resultados para tal sistema no caso onde o par de potências (p, q) estava fora da região considerada por tais pesquisadores, além da procura pelo aprimoramento dos resultados em regiões onde o par (p, q) já havia sido considerado.

Como introduzido por Clément et al. [12] e Hulshof-Van der Vorst [32], uma importante hipérbole no estudo de (3), quando $N \geq 3$, é dada por

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{N}$$

e dizemos que o sistema (3) é subcrítico, crítico ou super crítico quando o par de potências (p, q) está respectivamente, abaixo, sobre ou acima de tal hipérbole. No entanto, a hipérbole

$$p\,q = 1$$

também assume um papel importante para o estudo de (3), uma vez que tal sistema pode ser classificado da seguinte forma:

- superlinear se $p\,q > 1$;
- sublinear se $p\,q < 1$.

Os resultados da literatura matemática referente ao sistema (3) no caso superlinear, de Cao-Han [11] e Han-Liu [31], estão restritos à condição $p, q \geq 1$ e nossa principal contribuição neste caso foi a de abordar tal assunto quando uma das potência é menor que 1.

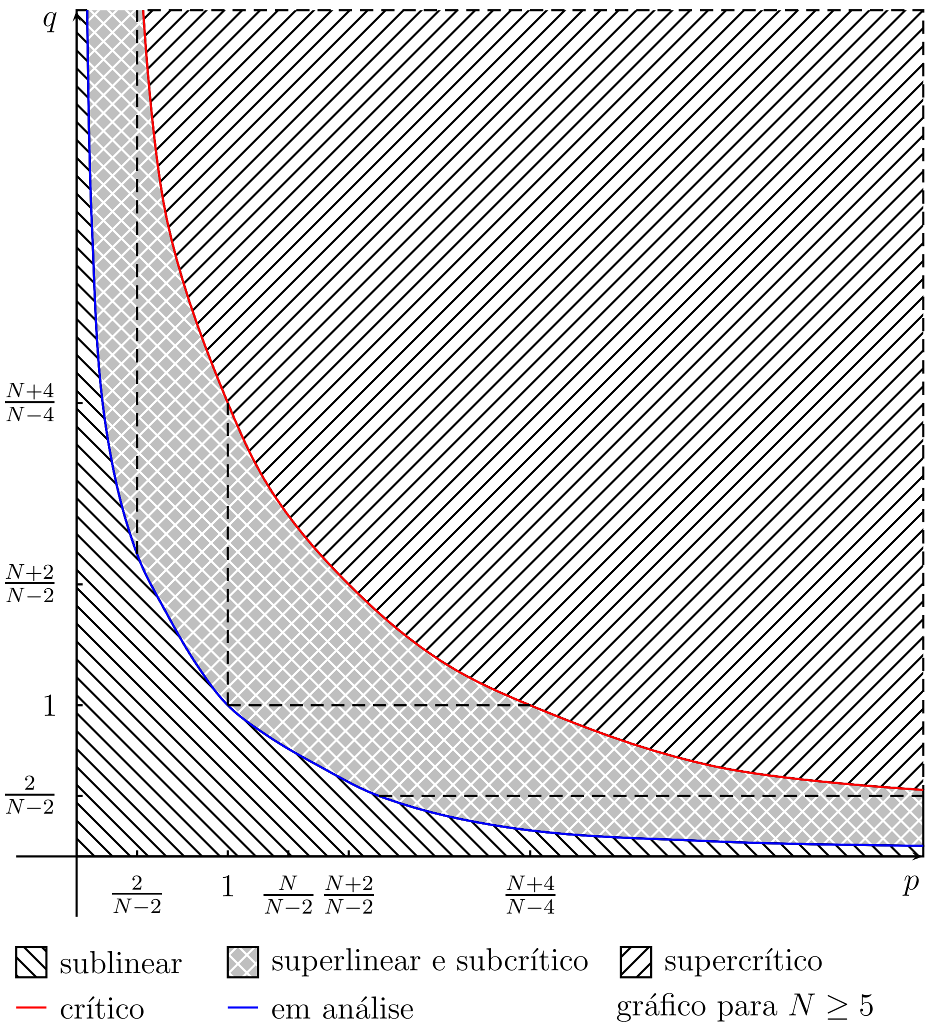
No caso sublinear, o sistema (3) é uma caso particular dos sistema abordados por Montenegro [39], mas os resultados obtidos em tal artigo, referentes à soluções positivas exigem que f e g sejam funções não-negativas, enquanto que em nossos resultados exigimos somente que a condição (P) acima seja satisfeita, permitindo desse modo que f e g mudem de sinal em Ω.

Procurando obter mais resultados sobre o sistema (3), foi considerado o caso particular onde $f \equiv 0$. Neste caso, o sistema (3) é equivalente à equação quasilinear

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta\left((-\Delta u)^{1/p}\right) & = & u^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega, \\ u, -\Delta u & > & 0 \text{ em } \Omega, \\ u, \Delta u & = & 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{6}$$

que se transforma na equação (2) quando $p = 1$.

Para apresentar os resultados obtidos referentes ao sistema (3), consideremos o gráfico:



- Se $N \geq 1$ e $p\,q < 1$; para cada $\epsilon \geq 0$ mostramos a existência e unicidade de solução no Capítulo 2.

- Se $N \geq 1$ e $p\,q > 1$; no Capítulo 2 mostramos a existência de no mínimo uma solução quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Ainda nesse capítulo, se $\epsilon > 0$ é grande o bastante e $p, q \geq 1$, mostramos a não-existência de solução.

- Se $N \geq 1$, $p\,q > 1$ e $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} > 1 - \dfrac{2}{N}$; no Capítulo 3 mostramos a existência de no mínimo duas soluções para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno quando $f \equiv 0$.

- Se $N \geq 3$, $f \equiv 0$, $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} = 1 - \dfrac{2}{N}$ e com a seguinte hipótese adicional

$$\begin{cases} N = 3,4,5,6: \; p < \dfrac{N}{N-2}, \\ N = 7, \cdots, 12: \; \dfrac{1}{2} < p < \dfrac{N}{N-2}, \\ N \geq 13: \dfrac{N+6}{2N-6} \leq p < \dfrac{N}{N-2}, \end{cases}$$

verificamos no Capítulo 4 a existência de no mínimo duas soluções, quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Observamos que, consta como um problema em aberto a questão de não-existência de solução para (6) para valores grandes de ϵ, no caso em que $p\,q > 1$ com uma das potências p ou q menor que 1.

A busca por múltiplas soluções de (6) no caso superlinear ($p\,q > 1$), tanto subcrítico $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}$ (Capítulo 3) quanto crítico $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{N}$ (Capítulo 4), é realizada por meio da teoria de Pontos Críticos. E mais, a possibilidade de se obter tais pontos críticos, está intimamente ligada a um tipo de compacidade para o funcional, a conhecida condição de Palais-Smale. Lembramos então que, se E é um espaço de Banach, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, dizemos que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, ou de forma mais abreviada, que I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$, se toda seqüência $(u_n) \subset E$ tal que $I(u_n) \to c$ e $\|I'(u_n)\|_{E'} \to 0$ possui uma subseqüência convergente. E dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, ou simplesmente que I satisfaz (PS), se satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. No caso subcrítico, mostramos que o funcional associado a esse problema satisfaz a condição (PS), enquanto que no caso crítico o Princípio de Concentração de Compacidade de Lions [37] é utilizado para localizar os níveis c onde o funcional associado satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$. Em ambos os casos, para empregar a Teoria de Pontos Críticos no tratamento da equação (6), provamos um Teorema de Representação de Riesz, Teorema D.7, que oferece uma caracterização do espaço dual do espaço de Sobolev $W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$.

No Capítulo 5, estudamos o sistema (5) e obtemos resultados de existência de solução para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e de não-existência quando ϵ é grande o bastante. Um resultado de multiplicidade de solução é obtido quando tal sistema é gradiente e subcrítico, empregando para isso métodos semelhantes àqueles aplicados nos Capítulo 1 e 3.

Por fim, no Apêndice E apresentamos algumas identificações dos espaços de Sobolev em intervalos limitados de $\mathbb{R}$, que podem ser úteis para o tratamento de EDO's não-lineares.

CAPÍTULO 1

Uma equação semilinear não-homogênea

Nesta capítulo consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ u &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 1$ de fronteira regular, para $p > 1$ onde $\epsilon \geq 0$ é um parâmetro e a função f satisfaz a condição a seguir

(P) $f \in C^1(\overline{\Omega})$ não identicamente nula e $u_* \geq 0$ em Ω.

Primeiramente, observe que:

$$\int_\Omega f\varphi_1\,dx = \int_\Omega (-\Delta u_*)\varphi_1\,dx \int_\Omega u_*(-\Delta\varphi_1)\,dx = \lambda_1 \int_\Omega u_*\varphi_1\,dx > 0. \tag{1.2}$$

Assim, se (1.1) tem solução, segue de (1.2) e de

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1\,dx = \lambda \int_\Omega u\varphi_1\,dx + \int_\Omega u^p\varphi_1\,dx + \epsilon \int_\Omega f\varphi_1\,dx$$

que $\lambda < \lambda_1$.

Logo, o estudo de (1.1) é restrito ao caso $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$.

O problema (1.1) é um problema bastante explorado, no entanto temos como objetivo preencher algumas lacunas deixadas por outros pesquisadores.

1.1 Caso homogêneo

Nesta seção tratamos do problema (1.1) quando $\epsilon = 0$, isto é

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u^p \text{ em } \Omega, \\ u &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Seja $p > 1$ e no caso em que $N \geq 3$ também suponha $p < 2^* - 1$. Nesse caso pode-se aplicar o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [2] ao funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \left|u^+\right|^{p+1} dx$$

para se obter uma solução de (1.3).

Quando $N \geq 3$, $p \geq 2^* - 1$ e $\lambda \leq 0$, pode-se aplicar o multiplicador de Pohozaev $x \cdot \nabla u$ para mostrar a não existência de solução para (1.3) quando Ω é um domínio estrelado em relação a origem.

Se $N \geq 3$, $p \geq 2^* - 1$ e $\lambda \in (0, \lambda_1)$, uma excelente referência para (1.3) é o artigo de Brezis-Nirenberg [5], onde os autores introduzem o conceito de que $N = 3$ é a dimensão crítica para o estudo de (1.3) com $p = 2^* - 1$.

No caso $N \geq 4$ e $p = 2^* - 1$, Fortunato-Jannelli [26] provaram um teorema de multiplicidade de solução referente ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + |u|^{2^*-2} u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

quando o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um cilindro. Vejamos

Teorema 1.1 (Fortunato-Jannelli)**.** *Seja $\Omega = \omega \times (a, b)$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ com $N \geq 4$ é um domínio limitado de fronteira regular e $\lambda > 0$. Então, para cada $R > 0$ existe uma solução u_R de (1.4) tal que $I_\lambda(u_R) \geq R$, onde*

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 \, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx. \tag{1.5}$$

Como mostrado originalmente por Brezis-Nirenberg [5], um das dificuldades ao se estudar o problema (1.4) é que o funcional I_λ definido em (1.5) não satisfaz a condição de Palais-Smale em toda reta real. O método dos autores de [26] consiste basicamente em considerar a restrição do funcional I_λ a certos subespaços fornecidos pela simetria do domínio. Isto garante mais compacidade, uma vez que tais restrições satisfazem a condição de Palais-Smale em intervalos cada vez maiores, permitindo assim aplicar o Teorema do Passo da Montanha.

Apresentamos uma demonstração bem mais simples para o Teorema 1.1. A idéia consiste basicamente em encontrar uma solução positiva num sub-cilindro de $\omega \times (a, b)$ e estender esta solução, via simetria do domínio, para uma solução de (1.4) no cilindro todo. Tal demonstração fornece uma outra informação além daquela do Teorema 1.1, especificamente a quantidade de conjuntos nodais de tais soluções.

A demonstração apresentada a seguir para o Teorema 1.1 é de fato inspirada em alguns dos cálculos de [26].

Demonstração do Teorema 1.1

Considere por simplicidade e sem perda de generalidade $(a, b) = (0, \pi)$. Denote por $\{\mu_j\}_j$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\omega))$ e por $\{v_j\}_j$ as auto-funções associadas a tais autovalores. Aqui, x' representará um ponto genérico de ω e t um ponto arbitrário de $(0, \pi)$. Então $\{v_j(x') \sin(k\, t)\}_{j,k}$ são as auto-funções de $(-\Delta, H_0^1(\omega \times (0, \pi)))$ e $\{\mu_j + k^2\}_{j,k}$ seus respectivos autovalores.

Dado $\lambda > 0$, seja $m_0(\lambda) = \min\{m \in \mathbb{N} : \mu_1 + m^2 > \lambda\}$, e para cada $m \in \mathbb{N}$ considere $\Omega_m = \omega \times (0, \pi/m)$. Como $\mu_1 + m^2$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega_m))$, então para cada $m \geq m_0$, segundo [5], existe uma solução positiva u_m para

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + |u|^{2^*-2}\, u \text{ em } \Omega_m, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega_m, \end{cases}$$

via minimização e Princípio Variacional de Ekeland. Se

$$I_{\lambda,m}(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} |\nabla u|^2\, dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega_m} u^2\, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\Omega_m} |u|^{2^*}\, dx,$$

novamente por [5]

$$I_{\lambda,m}(u_m) \geq \frac{1}{N}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1 + m^2}\right)^{N/2} S^{N/2}.$$

Como $\{v_j(x') \sin(k\, mt)\}_{j,k}$ é uma base de $H_0^1(\Omega_m)$, u_m pode ser escrita como $u_m(x', t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_{j,k}\, v_j(x') \sin(k\, mt)$, com $x' \in \overline{\omega}$ e $t \in [0, \pi/m]$.

Agora, considere $\overline{u}_m$ a extensão natural de u_m a $\overline{\Omega}$ dada por

$$\overline{u}_m(x',t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_{j,k}\, v_j(x') \sin(k\, mt),\ \ x' \in \overline{\omega},\ t \in [0,\pi].$$

Tal extensão é exatamente uma série de m reflexões de u_m, e o seu comportamento é idêntico ao da função $\sin(m\,t)$ em $[0,\pi]$ em relação à sua restrição a $[0,\pi/m]$. Então $\overline{u}_m$ é uma solução de (1.3), tem exatamente m conjuntos nodais e

$$I_\lambda(\overline{u}_m) \geq \frac{m}{N}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1 + m^2}\right)^{N/2} S^{N/2} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

1.2 Caso não-homogêneo

Nesta seção vamos melhorar um resultado de Deng [22] referente a equação (1.1) com $\epsilon > 0$. Em seu trabalho Deng mostrou o teorema que segue.

Teorema 1.2 (Deng)**.** *Seja $p > 1$ e $f \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $f \geq 0$ é não identicamente nula em Ω e $f \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Então:*

- *para cada $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ existe ϵ^* com $0 < \epsilon^* < +\infty$, tal que (1.1) tem solução minimal para todo ϵ em $(0, \epsilon^*]$ e não tem solução para $\epsilon > \epsilon^*$;*

- *e para cada $\lambda \in [0, \lambda_1)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, existe uma segunda solução para (1.1), qualquer que seja $1 < p < +\infty$ se $N = 1, 2$ e desde que $1 < p \leq 2^* - 1$ quando $N \geq 3$.*

Para provar esse teorema Deng procede da seguinte maneira. Para encontrar a primeira solução é utilizado o método de subsolução e super-solução, onde $u_s = 0$ é a subsolução e a super-solução é da forma $u_S = \delta\varphi_1$.

Para que u_S seja super-solução, a necessidade de se exigir que $f \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ é pelo fato de que, a desigualdade

$$\lambda_1 \delta\varphi_1 \geq \lambda\delta\varphi_1 + (\delta\varphi_1)^p + \epsilon f,\ \text{ em } \Omega \tag{1.6}$$

deve ser verificada. Observe que tal desigualdade não é verificada por exemplo quando $f \equiv 1$ em Ω, uma vez que φ_1 anula-se em $\partial\Omega$. Uma vez encontradas a subsolução e a super-solução, aplica-se o método de iteração monotônica para obter uma solução de (1.1) nas condições do Teorema 1.2 e com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Define-se então

$$\epsilon^* = \sup\{\epsilon > 0 : (1.1) \text{ admite solução}\}.$$

O método de subsolução e super-solução permite mostrar a existência de solução minimal para (1.1) em todo o intervalo $(0, \epsilon^*)$ e também para ϵ^* como um caso limite.

Seja u_ϵ a solução minimal de (1.1). Para obter uma segunda solução u de (1.1), escreve-se $u = u_\epsilon + w$ onde w é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w + (w + u_\epsilon)^p - u_\epsilon^p \text{ em } \Omega, \\ w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

a qual é obtida via métodos variacionais. A hipótese $\lambda \geq 0$ e $\epsilon \in (0, \epsilon)$ é crucial para realização dos cálculos de Deng.

Nossa contribuição sobre a equação (1.1) é que obtemos os mesmos resultados do Teorema 1.2, no entanto com condições mais fracas sobre f. E isso é uma conseqüência do próximo resultado.

Teorema 1.3. *Suponha (P), $1 < p < +\infty$ e $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. Então existe $\epsilon^* > 0$ tal que (1.1) tem uma solução positiva minimal u_ϵ para $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$ e não admite solução para $\epsilon > \epsilon^*$. Além disso, $u_\epsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\alpha \in (0, 1)$.*

Uma vez demonstrado o resultado de existência de solução para (1.1) sob as hipóteses do Teorema 1.3, procedemos de forma análoga à [22] para a obtenção de todos os resultados desse trabalho com f não necessariamente se anulando sobre $\partial\Omega$ e também podendo trocar de sinal em Ω.

Demonstração do Teorema 1.3

Esta demonstração é baseada na continuidade de λ_1 em relação a Ω, como apresentada em [10] e [17]. Para ser mais preciso, dado qualquer $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$, existe um domínio limitado $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$ de fronteira regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ e $\lambda < \lambda_1(\Omega') < \lambda_1(\Omega)$, onde a segunda desigualdade segue apenas de $\Omega \subset\subset \Omega'$.

Dado $\lambda < \lambda_1(\Omega)$, considere $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de fronteira regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ e $\lambda < \lambda_1(\Omega') < \lambda_1(\Omega)$. É claro que $u_s = \epsilon u_*$ é uma subsolução de (1.1). O objetivo agora é encontrar uma super-solução de (1.1) da forma $u_S = \delta\varphi_1'$, onde $\varphi_1' = \varphi_1(\Omega')$ e $\lambda_1' = \lambda_1(\Omega')$.

No entanto, $\delta\varphi_1'$ é uma super-solução de (1.1) se, e somente se $\delta(\lambda_1' - \lambda)\varphi_1' - (\delta\varphi_1')^p \geq \epsilon f$ em Ω, mas essa desigualdade é satisfeita se

$$(\lambda_1' - \lambda)\delta\varphi_1' - (\delta\varphi_1')^p \geq \epsilon\, |f|_{\infty,\Omega} \text{ em } \Omega.$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é possível encontrar $\delta > 0$ também pequeno tal que a desigualdade anterior seja verificada, pois $\varphi_1' \geq \alpha > 0$ em $\overline{\Omega}$ para uma certa constante α e $p > 1$.

Por outro lado, é necessário que $u_S \geq u_s$, isto é, $\delta\varphi_1' \geq \epsilon u_*$ em $\overline{\Omega}$. Mas tal desigualdade também pode ser realizada para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, uma vez que $\varphi_1' \geq \alpha > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Então por um processo de iteração monotônica aplicado à subsolução $u_s = \epsilon u_*$, obtém-se uma solução u_ϵ de (1.1) para $\epsilon > 0$ pequeno o bastante.

A solução u_ϵ obtida acima é a solução positiva minimal. De fato, uma vez que qualquer solução u de (1.1) satisfaz $u > u_s = \epsilon u_*$ em Ω, pode-se mostrar por indução que $u > u_n$ em Ω, onde u_n é qualquer elemento da seqüência construída pelo método de iteração monotônica aplicado a subsolução $u_s = \epsilon u_*$. Conseqüentemente, como o método iterativo acima também garante que $u_n \to u$ pontualmente em $\overline{\Omega}$, tomando-se o limite quando $n \to \infty$, obtém-se que $u \geq u_\epsilon$ em Ω.

Quanto a não-existência de solução para ϵ grande, foi observado em (1.2) que (P) garante que $\int_\Omega f\varphi_1\,dx > 0$. Por outro lado, a função $j(t) := (\lambda_1 - \lambda)t - t^p$ definida em $[0, +\infty)$ é limitada superiormente e seu valor máximo é $\alpha_p = (\lambda_1 - \lambda)^{\frac{p}{p-1}} \dfrac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}$. Assim, se (1.1) possui uma solução, então usando φ_1 como uma função teste e integrando (1.1) por partes tem-se

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1\,dx = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi_1\,dx = \lambda\int_\Omega u\varphi_1\,dx + \int_\Omega u^p\varphi_1\,dx + \epsilon\int_\Omega f\varphi_1\,dx$$

e assim

$$\epsilon \leq \alpha_p \frac{\int_\Omega \varphi_1\,dx}{\int_\Omega f\varphi_1\,dx}.$$

Seja $\epsilon^* = \sup\{\epsilon > 0 : \text{(1.1) possui uma solução}\}$. A estimativa acima fornece uma cota superior para ϵ^*.

Como a existência de solução implica na existência de solução minimal para (1.1), fica mostrada a existência de solução minimal para (1.1) para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$. Finalmente, procedendo como em [22], mostra-se a existência de solução minimal para (1.1) também para $\epsilon = \epsilon^*$, através de um argumento de aproximação.

A questão de regularidade é uma conseqüência de algumas imersões de Sobolev, do Teorema D.3 sobre a teoria de solução forte, do Teorema H.1 sobre desigualdades de interpolação, do Teorema H.2 e das estimativas de Schauder.

O processo de iteração monotônica e a regularidade são feitos através de argumentos comumente utilizados, por isso foram omitidos aqui, no entanto, podem ser feitos como na demonstração do Teorema 2.3.

1.3 Hipótese de positividade

Tratamos nesta seção da hipótese de positividade (P). Pelo Princípio do Máximo, sabemos que toda função não-negativa $f \in C^1(\overline{\Omega})$ e não identicamente nula satisfaz (P). No entanto, existem funções que trocam de sinal em Ω e também satisfazem (P). Apresentamos a seguir alguns exemplos no caso unidimensional.

Exemplo 1.4. *Considere* $\Omega = (0,2)$, $f_1(t) = -6t + 8$ *e* $f_2(t) = 12t^2 + -24t + 10$. *Observe que* f_1 *e* f_2 *mudam de sinal em* $(0,2)$, *mas* $u_{1*}(t) = t(t-2)^2$ *é positiva em* Ω *e* $u_{2*}(t) = -t(t-1)^2(t-2)$ *é positiva em* $(0,1) \cup (1,2)$ *com* $u_{2*}(1) = 0$.

Por outro lado, também pelo Princípio do Máximo, toda função não-positiva $f \in C^1(\overline{\Omega})$ não satisfaz (P). No entanto, mostramos via multiplicador de Pohozaev uma outra condição que assegura a não validade da hipótese (P).

Proposição 1.5. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado de fronteira regular e estrelado em relação a origem. Suponha que*

$$\frac{N+2}{2} f(x) + x \cdot \nabla f(x) < 0, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Então u_* *assume valor negativo em algum ponto de* Ω.

Demonstração. Da regularidade de $\partial\Omega$ e f tem-se que u_*, a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_* &= f \text{ em } \Omega, \\ u_* &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

está em $C^2(\overline{\Omega})$. Integrando a expressão abaixo por partes e lembrando que a condição de contorno fornece $\nabla u_* = \frac{\partial u_*}{\partial \eta}\eta$ em $\partial\Omega$, obtém-se que

$$\int_\Omega -\Delta u_*(x \cdot \nabla u_*)\, dx = -\frac{N-2}{2}\int_\Omega u_*(-\Delta u_*)\, dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u_*|^2 (x \cdot \eta)\, dS. \tag{1.9}$$

Por outro lado, uma vez que $u_* = 0$ em $\partial\Omega$ integra-se a expressão $f(x)(x \cdot \nabla u_*)$ por partes para obter

$$\int_\Omega f(x)(x \cdot \nabla u_*)\, dx = -\int_\Omega (Nf(x) + x \cdot \nabla f(x))u_*(x)\, dx. \tag{1.10}$$

Segue de (1.8), (1.9) e (1.10) que

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u_*|^2 \,(x\cdot\eta)\,dS = \int_{\Omega}\left(\frac{N+2}{2}f(x) + x\cdot\nabla f(x)\right)u_*(x)\,dx.$$

Pelo fato de o domínio Ω ser estrelado em relação a origem, segue de (1.7) que u_* deve assumir valores negativos em Ω.

■

Mais informações sobre este assunto de positividade podem ser encontradas em [8] e [9].

CAPÍTULO 2

Uma classe de sistemas semilineares não-homogêneos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, um domínio limitado de fronteira regular. Vamos considerar neste domínio o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + bv + v^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= cu + dv + u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &> 0, \text{ em } \Omega \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

que é de tipo Hamiltoniano quando $a = d$.

Neste capítulo, estamos empenhados na procura por soluções clássicas do sistema (2.1).

Quando $a = b = c = d = 0$, o sistema (2.1) pode ser classificado da seguinte forma: sublinear quando $p\,q < 1$ e superlinear quando $p\,q > 1$. Neste capítulo, tratamos o caso $p\,q < 1$ de forma completa, no entanto alguns aspectos para o caso $p\,q > 1$ também serão abordados.

Uma vez que estamos interessados em soluções positivas, é natural impor alguma condição de positividade na parte não-homogênea. Por isso, neste capítulo assumimos a seguinte hipótese:

(P) $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ não são simultaneamente identicamente nulas e $u_*, v_* \geq 0$ em Ω.

Observe que (2.1) é uma extensão para uma classe de sistemas da equação (1.1), tratada no primeiro capítulo e a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que aparece em (2.1) assume o papel de λ em (1.1). Aqui vamos supor que:

(H1) A é cooperativa, isto é, os termos b e c satisfazem $b, c \geq 0$.

(H2) Os autovalores de A são menores que λ_1.

A hipótese $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ que aparece no estudo de (1.1) em [22] é a condição necessária e suficiente para a verificação do princípio do máximo forte para a equação linear

$$-\Delta u = \lambda u + f, \text{ em } \Omega.$$

Em virtude de alguns resultados encontrados em de Figueiredo-Mitidieri [20], referentes ao princípio do máximo forte para o sistema linear

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + bv + f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= cu + dv + g \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

nossa hipótese (H2), sobre a matriz cooperativa A, é exatamente a extensão natural da hipótese $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ no problema (1.1).

Neste ponto podemos enunciar nosso primeiro resultado.

Teorema 2.1. *Suponha (P), (H1) e (H2) e que $p, q > 1$. Então existe $\epsilon^* > 0$ tal que (2.1) possui uma solução minimal positiva (u_ϵ, v_ϵ) para $0 < \epsilon < \epsilon^*$ e não possui solução para $\epsilon > \epsilon^*$. Além disso, $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\alpha \in (0,1)$.*

O Teorema 2.1 estende um resultado de [11] e [31]. As hipóteses (P), (H1), (H2) e $p, q > 1$ garantem que o sistema (2.1) tem o mesmo comportamento da equação (1.1) tratada sob as hipóteses do Teorema 1.3 e permitem o emprego do método de subsolução e super-solução sem nenhuma surpresa.

O próximo resultado, que trata o sistema (2.1) quando $A \equiv 0$, apresenta algo mais interessante que o resultado anterior e estende uma vez mais um resultado encontrado em [11] e [31]. Nesse resultado, mostramos que é possível empregar o método de subsolução e super-solução apenas sob a hipótese $pq > 1$, incluindo dessa forma casos quando uma das equações de (2.1) é sublinear e a outra é superlinear.

Teorema 2.2. *Suponha $p, q > 0$ tais que $p\,q > 1$, além disso que a hipótese (P) seja satisfeita e $A \equiv 0$. Assim;*

(i) se $p, q \geq 1$ então existe $\epsilon^* > 0$ tal que (2.1) tem uma solução minimal positiva (u_ϵ, v_ϵ) para $0 < \epsilon < \epsilon^*$ e não possui solução para $\epsilon > \epsilon^*$. Além disso, $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) se $p < 1$ ou $q < 1$ então existe $\epsilon^* > 0$ tal que (2.1) possui uma solução minimal positiva (u_ϵ, v_ϵ) para $0 < \epsilon < \epsilon^*$. Além disso, $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\alpha = \min\{p, q\}$.

A questão sobre a não-existência de solução para (2.1) quando $p\,q > 1$ e $A \equiv 0$, no caso onde uma das potências esteja em $(0, 1)$ para $\epsilon > 0$ suficientemente grande, ainda permanece em aberto.

Quando $A \equiv 0$ e o produto $p\,q < 1$, temos um outro resultado referente ao sistema (2.1). Nesse caso, o sistema (2.1) possui uma característica sublinear, e o nosso resultado estende alguns dos resultados de [36] e [39].

Teorema 2.3. *Além da hipótese (P) suponha que $p, q > 0$ com $p\,q < 1$ e $A \equiv 0$. Então, para cada $\epsilon > 0$, o sistema (2.1) tem uma única solução $(u, v) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\alpha = \min\{p, q\}$.*

2.1 Demonstração dos Teoremas

2.1.1 Demonstração do Teorema 2.1

Esta demonstração é baseada na continuidade de λ_1 em relação a Ω.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere a matriz 2×2

$$B(t) = \begin{pmatrix} -c & t - d \\ t - a & -b \end{pmatrix}.$$

O seguinte lema é a chave para iniciarmos a demonstração do Teorema 2.1.

Lema 2.4. *Se as hipóteses (H1) e (H2) são verificadas então existe um domínio limitado Ω' de fronteira regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ e $B(\lambda_1(\Omega'))$ possui um autovalor positivo com autovetores de entradas de mesmo sinal.*

Demonstração. Pelas hipóteses (H1) e (H2) tem-se que

$$a, d < \lambda_1(\Omega) \text{ e } (\lambda_1(\Omega) - a)(\lambda_1(\Omega) - d) - bc > 0.$$

Então, o maior autovalor de $B(\lambda_1(\Omega))$

$$\lambda = \lambda(\lambda_1(\Omega)) = \frac{-(b+c) + \sqrt{(b+c)^2 + 4\left((\lambda_1(\Omega) - a)(\lambda_1(\Omega) - d) - bc\right)}}{2}$$

é positivo e com autovetores da forma

$$(\sigma, \theta) = \left(\sigma, \frac{\lambda_1(\Omega) - a}{\lambda(\lambda_1(\Omega)) + b}\sigma\right), \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Pela continuidade de λ_1 em relação a Ω, existe um domínio limitado de fronteira regular Ω' tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ e tal que todas as desigualdades, identidades e afirmações de positividade acima são verificas quando $\lambda_1(\Omega)$ é substituído por $\lambda_1(\Omega')$.

■

Com isso, estamos prontos para demonstrar o Teorema 2.1.

É claro que $(u_s, v_s) := (\epsilon u_*, \epsilon v_*)$ é um par subsolução para (2.1).

Seja Ω' como no Lema 2.4 e denote, $\lambda_1' := \lambda_1(\Omega')$ e $\varphi_1' := \varphi_1(\Omega')$. Procura-se encontrar um par super-solução de (2.1) da forma $(u_S, v_S) = (\sigma\varphi_1', \theta\varphi_1')$, onde (σ, θ) é um autovetor de $B(\lambda_1(\Omega'))$, com entradas positivas, associado ao autovalor positivo $\lambda = \lambda(\lambda_1(\Omega'))$.

É evidente que (σ, θ) pode ser considerado tão pequeno quanto se queira. Dessa forma, é imposto que

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \lambda_1'(\sigma\varphi_1') & = & -\Delta(\sigma\varphi_1') & \geq & a(\sigma\varphi_1') + b(\theta\varphi_1') + (\theta\varphi_1')^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ \lambda_1'(\theta\varphi_1') & = & -\Delta(\theta\varphi_1') & \geq & c(\sigma\varphi_1') + d(\theta\varphi_1') + (\sigma\varphi_1')^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \end{array}\right.$$

isto é,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda(\theta\varphi_1') - (\theta\varphi_1')^p = \left((\lambda_1' - a)\sigma - b\theta\right)\varphi_1' - (\theta\varphi_1')^p & \geq & \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ \lambda(\sigma\varphi_1') - (\sigma\varphi_1')^q = \left(-c\sigma + (\lambda_1' - d)\theta\right)\varphi_1' - (\sigma\varphi_1')^q & \geq & \epsilon g \text{ em } \Omega. \end{array}\right.$$

No entanto, as desigualdades acima são satisfeitas se

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda(\theta\varphi_1') - (\theta\varphi_1')^p = \left((\lambda_1' - a)\sigma - b\theta\right)\varphi_1' - (\theta\varphi_1')^p & \geq & \epsilon\,|f|_\infty \text{ em } \Omega, \\ \lambda(\sigma\varphi_1') - (\sigma\varphi_1')^q = \left(-c\sigma + (\lambda_1' - d)\theta\right)\varphi_1' - (\sigma\varphi_1')^q & \geq & \epsilon\,|g|_\infty \text{ em } \Omega, \end{array}\right.$$

mas essas últimas desigualdades são trivialmente verificadas para $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente, pois $p, q > 1$ e $\varphi_1' \geq \alpha > 0$ em $\overline{\Omega}$ para alguma constante α.

Por outro lado, é necessário que $u_S \geq u_s$ e $v_S \geq v_s$ em Ω, isto é, que $\sigma\varphi_1' \geq \epsilon u_*$ e $\theta\varphi_1' \geq \epsilon v_*$ em $\overline{\Omega}$, o que é verdade para ϵ pequeno o bastante, pois $\varphi_1' \geq \alpha > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Então através de uma iteração monotônica aplicada ao par subsolução (u_s, v_s) obtém-se a existência de um par solução (u_ϵ, v_ϵ) de (2.1) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Na verdade, o par solução (u_ϵ, v_ϵ) obtido acima é o par solução minimal para o sistema (2.1). De fato, uma vez que qualquer par solução (u, v) de (2.1) satisfaz $u > u_s = \epsilon u_*$ e $v > v_s = \epsilon u_*$ em Ω, pode-se mostrar que $u > u_n$ e $v > v_n$ em Ω, onde (u_n, v_n) é qualquer elemento da seqüência construída pelo método de iteração monotônica aplicado ao par subsolução (u_s, v_s). Conseqüentemente, tomando o limite, chega-se que $u \geq u_\epsilon$ e $v \geq v_\epsilon$.

De um lado, por (P) tem-se que

$$\int (f+g)\,\varphi_1\,dx = \int (\nabla u_* + \nabla v_*)\,\nabla\varphi_1\,dx = \lambda_1 \int (u_* + v_*)\,\varphi_1\,dx > 0.$$

Por outro lado, de (H1) e (H2) segue que a função $j(t,s) := (\lambda_1 - a)t - t^q + (\lambda_1 - d)\,s - s^p$ definida sobre $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ é limitada superiormente e seu valor máximo é $\alpha_{p,q} = (\lambda_1 - a)^{\frac{q}{q-1}} \frac{q-1}{q^{\frac{q}{q-1}}} + (\lambda_1 - d)^{\frac{p}{p-1}} \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}$. Se (2.1) possui uma solução, então usando φ_1 como função teste, integrando (2.1) por partes, e pela hipótese (H1) concluí-se que

$$\int ((\lambda_1 - a)u - u^q + (\lambda_1 - d)v - v^p)\,\varphi_1\,dx \geq \epsilon \int (f+g)\varphi_1\,dx,$$

e portanto

$$\epsilon \leq \alpha_{p,q} \frac{\int \varphi_1\,dx}{\int (f+g)\varphi_1\,dx}.$$

Seja então $\epsilon^* = \sup\{\epsilon > 0 : \text{(2.1) possui uma solução}\}$. A estimativa acima para ϵ fornece uma cota superior para ϵ^*.

A questão de regularidade é feita através de imersões de Sobolev, dos Teoremas D.3, H.1, H.2 e das estimativas de Schauder.

O processo de iteração monotônica e a questão sobre a regularidade das soluções são feitas através de argumentos comumente utilizados e podem ser feitos de modo semelhante à demonstração do Teorema 2.3.

■

2.1.2 Demonstração do Teorema 2.2

A única dificuldade para se aplicar o método de subsolução e super-solução para os problemas considerados neste capítulo é em relação a existência de super-solução.

A técnica empregada para mostrar a existência de um par super-solução para (2.1), sob as hipóteses do Teorema 2.2, é uma adaptação do método encontrado em [18] e [19]. Para a realização de tal adaptação utilizamos as notações abaixo:

$$\begin{cases} -\Delta e_1 &= 1 \text{ em } \Omega, \\ e_1 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta e_2 &= e_1^p \text{ em } \Omega, \\ e_2 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta e_3 &= e_1^q \text{ em } \Omega, \\ e_3 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta e_4 &= v_*^p \text{ em } \Omega, \\ e_4 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta e_5 &= u_*^q \text{ em } \Omega, \\ e_5 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Com o intuito de apresentar com clareza a adaptação do método de subsolução e super-solução empregado em [18] e [19], o seguinte caso particular de (2.1) será considerado

$$\begin{cases} -\Delta u &= v^p \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

o qual pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} -\Delta\left((-\Delta u)^{1/p}\right) &= u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, -\Delta u &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u, -\Delta u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Como antes, (u_s, v_s) denota um par candidato a subsolução e (u_S, v_S) um par candidato a super-solução de (2.1) ou (2.2).

Primeiramente, veja que $u_s = \epsilon^p e_4$ sempre é uma subsolução de (2.3), pois

$$-\Delta u_s = \epsilon^p v_*^p \to -\Delta\left((-\Delta u_s)^{1/p}\right) = \epsilon g \leq u_s^q + \epsilon g.$$

Para encontrar uma super-solução para (2.3) as idéias dos autores de [18] e [19], quando consideram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

são seguidas. Para encontrar uma super-solução para (2.4), sob hipóteses adicionais sobre g, impõem-se que

$$\inf\left\{\frac{g(u)}{u} : u > 0\right\} < \frac{1}{|e_1|_\infty},$$

e encontra-se uma super-solução da forma $w = \dfrac{M}{|e_1|_\infty} e_1$, onde M satisfaz $\dfrac{g(M)}{M} < \dfrac{1}{|e_1|_\infty}$.

Isso induz à procura por uma super-solução de (2.3) da forma $u_S = m^p e_2$. Desse modo, deseja-se que a desigualdade $m \geq (m^p e_2)^q + \epsilon g = m^{p\,q} e_2^q + \epsilon g$ em Ω seja satisfeita. Para isso, basta impor

$$m\left(1 - m^{p\,q-1}\,|e_2|_\infty^q\right) \geq \epsilon\,|g|_\infty. \tag{2.5}$$

Por outro lado, é necessário que $u_S \geq u_s$, ou seja

$$m^p e_2 \geq \epsilon^p e_4. \tag{2.6}$$

Pelo PM, basta impor que $-\Delta(m^p e_2 - \epsilon^p e_4) = m^p e_1^p - \epsilon^p v_*^p \geq 0$, no entanto tal desigualdade ocorre se, e somente se $me_1 - \epsilon v_* \geq 0$ que por sua vez pode ser obtida se $-\Delta(me_1 - \epsilon v_*) = m - \epsilon g \geq 0$. Desse modo, a desigualdade (2.6) é satisfeita com

$$m \geq \epsilon\,|g|_\infty. \tag{2.7}$$

Mas (2.7) é verificada se (2.5) for verificada. Portanto, é suficiente garantir que (2.5) é satisfeita. No entanto tal desigualdade é satisfeita para

$$\epsilon \leq \epsilon_0, \text{ com } \epsilon_0 = \max\left\{\frac{m(1 - m^{p\,q-1}\,|e_2|_\infty^q)}{|g|_\infty} : m > 0\right\},$$

pois $p\,q > 1$.

Dos cálculos acima, observa-se que $(u_s, v_s) = (\epsilon^p e_4, \epsilon v_*)$ é um par subsolução e $(u_S, v_S) = (m^p e_2, me_1)$ é uma par super-solução para (2.2).

Seguindo as idéias apresentadas acima, aplica-se o método de subsolução e super-solução para encontrar uma solução de (2.2) sob as hipóteses (P) e $p\,q > 1$, quando $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Observação 2.5. *É claro que o método acima também funciona quando é substituido $\epsilon g(x)$ em (2.3) por $\epsilon g(x) u^r$ com $0 < r$ e com $g(x) \geq 0$ em Ω. Esta obervação será empregada no Capítulo 4 para o caso em que $0 < r < \frac{1}{p}$, quando (2.3) é um problema do tipo côncavo-convexo.*

Primeiro caso: $q \geq 1$

Os candidatos para subsolução e super-solução para (2.1) com $A \equiv 0$ são

$$u_s = \epsilon^p e_4 + \epsilon u_*, \;\; v_s = \epsilon v_*, \;\; u_S = m^p e_2 + \epsilon u_* \text{ e } v_S = me_1.$$

Tais candidatos são de fato subsolução e super-solução quando ϵ é suficientemente pequeno, pois

$$\begin{cases} -\Delta u_s = \epsilon^p v_*^p + \epsilon f = (v_s)^p + \epsilon f, \\ -\Delta v_s = \epsilon g \leq (u_s)^q + \epsilon g, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_S = m^p e_1^p + \epsilon f = (v_S)^p + \epsilon f, \\ -\Delta v_S = m \geq (u_S)^q + \epsilon g = (m^p e_2 + \epsilon u_*)^q + \epsilon g, \end{cases}$$

onde a última desigualdade está sendo imposta.

O que precisa ser feito é mostrar que $u_s \leq u_S$, $v_s \leq v_S$ e que (u_S, v_S) é, de fato, um par super-solução. Para isso, basta impor que

$$m \geq (m^p |e_2|_\infty + \epsilon |u_*|_\infty)^q + \epsilon |g|_\infty . \tag{2.8}$$

Desde que $q \geq 1$, tem-se que $(a+b)^{1/q} \leq a^{1/q} + b^{1/q}$, para todo $a, b \geq 0$. Dessa forma, (2.8) é verificada se, e somente se $m^{1/q} \geq m^p |e_2|_\infty + \epsilon |u_*|_\infty + \epsilon^{1/q} |g|_\infty^{1/q}$, que por sua vez é verificada se, e somente se

$$m^{1/q} \left(1 - m^{\frac{pq-1}{q}} |e_2|_\infty\right) \geq \epsilon |u_*|_\infty + \epsilon^{1/q} |g|_\infty^{1/q} . \tag{2.9}$$

Assim, (2.8) é verificada se (2.9) for também verificada.

Por outro lado, deseja-se que $u_S \geq u_s$ e $v_S \geq v_s$, isto é, $m^p e_2 \geq \epsilon^p e_4$ e $m e_1 \geq \epsilon v_*$. Mas, $-\Delta(m^p e_2 - \epsilon^p e_4) = m^p e_1^p - \epsilon^p v_*^p \geq 0$ se, e somente se $m e_1 \geq \epsilon v_*$, e para que $-\Delta(m e_1 - \epsilon v_*) = m - \epsilon g \geq 0$, basta impor que

$$m \geq \epsilon |g|_\infty . \tag{2.10}$$

No entanto, (2.10) é verificada se (2.9) for verificada. Sendo assim, é suficiente verificar (2.9). Mas (2.9) é trivialmente verificada se ϵ for suficientemente pequeno, mais precisamente, se $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ onde ϵ_0 é tal que

$$\epsilon_0 |u_*|_\infty + (\epsilon_0)^{1/q} |g|_\infty^{1/q} = \max\{m^{1/q}(1 - m^{\frac{pq-1}{q}} |e_2|_\infty) : m > 0\}.$$

Segundo caso: $p \geq 1$

Pode-se proceder de forma análoga ao caso $q \geq 1$ considerando

$$u_s = \epsilon u_*, \ v_s = \epsilon^q e_4 + \epsilon v_*, \quad u_S = m e_1 \text{e} \ \ v_S = m^q e_5 + \epsilon v_*.$$

Em ambos os casos $p \geq 1$ ou $q \geq 1$, o método de iteração monotônica permite concluir sob as hipóteses do Teorema 2.2, que (2.1) possui uma solução para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Para finalizar, define-se

$$\epsilon^* = \sup\{\epsilon > 0 : (2.1) \text{ admite solução}\}.$$

2.1.3 Demonstração do Teorema 2.3

Fica evidente na demonstração que segue que a condição $p\,q < 1$ implica que o parâmetro ϵ não é importante neste caso. Por este motivo, sem perda de generalidade consideramos $\epsilon = 1$.

Para mostrar que (2.1) possui uma solução sob as condições do Teorema 2.3, procedemos utilizando um método iterativo. Aplicamos tal método a partir de uma subsolução evidente para construir uma seqüência crescente de subsoluções limitadas superiormente por uma constante e, através de imersões de Sobolev, demonstramos que tal seqüência converge para uma solução do problema em questão. Ressaltamos que o argumento descrito acima é baseado em alguns cálculos encontrados em [36], enquanto que o método empregado para obter a unicidade é uma adaptação de um argumento em [39].

A demonstração do Teorema 2.3 no caso quando $f \equiv g \equiv 0$ pode ser encontrada em [36].

A existência

Primeiramente, $(u_0, v_0) := (u_*, v_*)$ é um par subsolução para (2.1), lembre-se aqui que $A \equiv 0$, pois

$$-\Delta u_0 = -\Delta u_* = f \leq v_0^p + f,\ -\Delta v_0 = -\Delta v_* = g \leq u_0^q + g.$$

Agora, defina indutivamente (u_{n+1}, v_{n+1}) para $n \geq 0$ como sendo a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} &=& v_n^p + f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v_{n+1} &=& u_n^q + g \text{ em } \Omega, \\ u_{n+1}, v_{n+1} &=& 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo PMF e pela hipótese de que f e g não são identicamente nulas simultaneamente, prova-se por indução que $u_n \leq u_{n+1}$, $v_n \leq v_{n+1}$ em Ω para todo $n \geq 0$; sendo que para cada n, no mínimo uma dessas desigualdades é estrita e a desigualdade estrita pode alternar entre u_n e v_n no caso quando f ou g é zero. Para ver isso, basta analisar

$$-\Delta\,(u_1 - u_0) = v_0^p,\ -\Delta\,(v_1 - v_0) = u_0^q \text{ em } \Omega,$$

e para $n \geq 1$

$$-\Delta (u_{n+1} - u_n) = v_n^p - v_{n-1}^p, \; -\Delta (v_{n+1} - v_n) = u_n^q - u_{n-1}^q \text{ em } \Omega.$$

Uma vez construída a seqüência (u_n, v_n) não decrescente em cada componente, o próximo passo na demonstração é fornecido pelo próximo lema.

Lema 2.6. *Existe uma constante $C > 0$ tal que $0 \leq u_n, v_n < C$ em Ω para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Por contradição, suponha que a afirmação não seja verdadeira. Pela simetria do sistema (2.1) quando $A \equiv 0$ pode-se supor que $\alpha_n = |u_n|_\infty \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ e α_n é crescente.

Seja $\beta_n = \alpha_n^{\frac{q+1}{p+1}}$, escreva $u_n = \alpha_n U_n$ e $v_n = \beta_n V_n$. Então

$$\begin{aligned} -\Delta U_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_{n+1}}(-\Delta u_{n+1}) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}(v_n^p + f) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}((\beta_n V_n)^p + f) \\ -\Delta V_{n+1} &= \frac{1}{\beta_{n+1}}(-\Delta v_{n+1}) = \frac{1}{\beta_{n+1}}(u_n^q + g) = \frac{1}{\beta_{n+1}}((\alpha_n U_n)^q + g). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Seja $\theta = \dfrac{p\,q - 1}{p+1} < 0$. Uma vez que α_n e β_n crescem com n,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{n+1}}((\beta_n V_n)^p + f) &\leq \frac{|f|_\infty}{\alpha_{n+1}} + \frac{\alpha_n^{p(q+1)/(p+1)} V_n^p}{\alpha_{n+1}} \\ &\leq \frac{|f|_\infty}{\alpha_n} + \alpha_n^{(p\,q+p-p-1)/p+1} V_n^p = \frac{|f|_\infty}{\alpha_n} + \alpha_n^\theta V_n^p \end{aligned} \tag{2.12}$$

e

$$\frac{1}{\beta_{n+1}}((\alpha_n U_n)^q + g) \leq \frac{|g|_\infty}{\beta_n} + \alpha_n^{q-(q+1)/(p+1)} U_n^q = \frac{|g|_\infty}{\beta_n} + \alpha_n^\theta U_n^q \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.13}$$

pois $|U_n|_\infty = 1$ e $\alpha_n, \beta_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. De (2.13) e da segunda equação de (2.11) segue que $|V_n|_\infty \to 0$ quando $n \to +\infty$. No entanto, de (2.12) e da primeira equação de (2.11) isso implicaria que $|U_n|_\infty \to 0$, o que é uma contradição.

∎

Utilizamos a limitação acima para construir uma solução para o sistema. Como

$$-\Delta u_{n+1} = v_n^p + f, \; -\Delta v_{n+1} = u_n^q + g,$$

segue das estimativas do Teorema D.4 que u_n e v_n são limitadas em $H^2(\Omega)$ e portanto em $H_0^1(\Omega)$. Passando a uma subseqüência se necessário, tem-se que para certas $u, v \in$

$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u, \ v_n \rightharpoonup v, \quad \text{em } H^2(\Omega) \text{ e } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\to u, \ v_n \to v, \quad \text{em } L^2(\Omega), \\ u_n &\to u, \ v_n \to v, \quad \text{q.t.p..} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$u_n^p \to u^p, \ v_n^q \to v^q, \ \text{em } L^r(\Omega), \ \forall \, r \geq 1.$$

Agora, tomando o limite nas identidades

$$\int \nabla u_{n+1} \nabla \varphi = \int v_n^p \varphi + \int f \varphi \, dx \quad \text{e} \quad \int \nabla v_{n+1} \nabla \psi = \int u_n^q \psi + \int g \psi \, dx$$

válidas para quaisquer φ e ψ funções de $H_0^1(\Omega)$, obtém-se que

$$\int \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int v^p \varphi \, dx + \int f \varphi \, dx \quad \text{e} \quad \int \nabla v \nabla \psi \, dx = \int u^q \psi \, dx + \int g \psi \, dx.$$

Isto é, u e v em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u &=& v^p + f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &=& u^q + g \text{ em } \Omega, \\ u, v &=& 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

no sentido de $H_0^1(\Omega)$ e através das estimativas do Teorema D.4 tem-se que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ para todo $1 \leq r < +\infty$ e portando pelas imersões de Sobolev, $u, v \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ para qualquer $0 < \gamma < 1$. Aplicando então os Teoremas H.1, H.2 e as estimativas de Schauder conclui-se que $u, v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ onde $\alpha := min\{p, q\}$. Finalmente, aplicando o PMF, conclui-se que (u, v) é uma solução de (2.1).

Segue diretamente do PMF, através de um argumento semelhante àquele utilizado na demonstração do Teorema 2.1, que a solução recém-construída é a solução positiva minimal de (2.2).

A unicidade

No caso em que $p, q < 1$, podemos mostrar a unicidade através de um argumento bem simples, semelhante àquele utilizado em [14] quando uma equação sublinear é considerada. No caso geral quando $p\,q < 1$, aplicamos a adaptação de um argumento encontrado em [39].

Seja (u, v) a solução previamente construída. Por contradição suponha que existe uma segunda solução $(\tilde{u}, \tilde{v})$ para (2.1) e observe que pelo PMF, $\tilde{u} > u$ e $\tilde{v} > v$ em Ω. Considere então os conjuntos:

$$S = \{s > 0 : u - u_* > s^{\frac{q+1}{q}}(\tilde{u} - u_*),\ v - v_* > s^{\frac{p+1}{p}}(\tilde{v} - v_*) \text{ em } \Omega\},$$

$$S' = \{s > 0 : u > s^{\frac{q+1}{q}}\tilde{u},\ v > s^{\frac{p+1}{p}}\tilde{v} \text{ em } \Omega\}.$$

A demonstração consiste basicamente dos seguintes lemas.

Lema 2.7. *Os conjuntos S e S' estão contidos em* $(0, 1)$.

Demonstração. Isto é uma conseqüência direta do fato que $\tilde{u} > u$ e $\tilde{v} > v$ em Ω.

■

Através do lema anterior, é fácil ver que S é um subconjunto de S', no entanto temos mais que isso. Veja:

Lema 2.8. *Os conjuntos S e S' são idênticos.*

Demonstração. Se $s \in S' \subset (0, 1)$ então

$$-\Delta\left(u - u_* - s^{\frac{q+1}{q}}(\tilde{u} - u_*)\right) = v^p - s^{\frac{q+1}{q}}\tilde{v}^p > v^p - s^{\frac{q+1}{q}}\frac{1}{s^{p+1}}v^p = (1 - s^{\frac{1-p\,q}{q}})v^p > 0$$
$$-\Delta\left(v - v_* - s^{\frac{p+1}{p}}(\tilde{v} - v_*)\right) = u^q - s^{\frac{p+1}{p}}\tilde{u}^q > u^q - s^{\frac{p+1}{p}}\frac{1}{s^{q+1}}u^q = (1 - s^{\frac{1-p\,q}{p}})u^q > 0$$

e portanto pelo PMF, $s \in S$.

■

Lema 2.9. *S' é não-vazio.*

Demonstração. Este lema é demonstrado fazendo-se uso do Lema de Hopf.

Sabe-se que $\tilde{u} > u > 0$ e $\tilde{v} > v > 0$ em Ω. Portanto:

$$-\Delta(\tilde{u} - u) = \tilde{v}^p - v^p > 0,\ \tilde{u} - u > 0 \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e } \ \tilde{u} - u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega,$$
$$-\Delta(\tilde{v} - v) = \tilde{u}^q - u^q > 0,\ \tilde{v} - v > 0 \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e } \ \tilde{v} - v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

Como $\partial\Omega$ é regular, pelo Lema de Hopf, obtém-se que $\dfrac{\partial(\tilde{u} - u)}{\partial\eta} < 0$ e $\dfrac{\partial(\tilde{v} - v)}{\partial\eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta} < \frac{\partial u}{\partial\eta} \leq 0,\ \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta} < \frac{\partial v}{\partial\eta} \leq 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

O próximo passo é mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0, \ \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \tag{2.14}$$

Não é possível aplicar o Lema de Hopf diretamente para mostrar (2.14) uma vez que as desigualdade $v^p + f \geq 0$, $u^q + g \geq 0$ em Ω podem não ser verificadas, no entanto, tal problema pode ser transposto. Por enquanto, suponha que (2.14) é verificada e considere as seguintes constantes

$$a = \min_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}, \ b = \min_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}, \ a' = \min_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \ b' = \min_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

Para $s > 0$ suficientemente pequeno, as desigualdades $s^{\frac{q+1}{q}} a - a' > 0$ e $s^{\frac{p+1}{p}} b - b' > 0$ são válidas. Então

$$\frac{\partial (s^{\frac{q+1}{q}} \tilde{u})}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \geq s^{\frac{q+1}{q}} a - a' > 0, \ \frac{\partial (s^{\frac{p+1}{p}} \tilde{v})}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \geq s^{\frac{p+1}{p}} b - b' > 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(s^{\frac{q+1}{q}} \tilde{u} - u) > 0, \ \frac{\partial}{\partial \eta}(s^{\frac{p+1}{p}} \tilde{v} - v) > 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Uma vez que $s^{\frac{q+1}{q}} \tilde{u} - u = s^{\frac{p+1}{p}} \tilde{v} - v = 0$ sobre $\partial\Omega$, tem-se que $s^{\frac{q+1}{q}} \tilde{u} - u < 0$ e $s^{\frac{p+1}{p}} \tilde{v} - v < 0$ em uma vizinhança de $\partial\Omega$.

Seja $K \subset\subset \Omega$ um conjunto compacto, tomado como o complementar em Ω de tal vizinhança. É claro que para s suficientemente pequeno $s^{\frac{q+1}{q}} \tilde{u} - u < 0$ e $s^{\frac{p+1}{p}} \tilde{v} - v < 0$ em K. Portanto, $s^{\frac{q+1}{q}} \tilde{u} - u < 0$ e $s^{\frac{p+1}{p}} \tilde{v} - v < 0$ em Ω para s suficientemente pequeno.

Agora é preciso mostrar (2.14). Como $u > u_*$ e $v > v_*$ em Ω, escrevendo $u = \underline{u} + u_*$ e $v = \underline{v} + v_*$ tem-se, $\underline{u}, \underline{v} > 0$ em Ω e

$$\frac{\partial u_*}{\partial \eta} \leq 0, \ \frac{\partial v_*}{\partial \eta} \leq 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{2.15}$$

uma vez que $u_*, v_* \geq 0$ em Ω e se anulam sobre $\partial\Omega$.

Por outro lado,

$$-\Delta \underline{u} = -\Delta u - \Delta u_* = v^p + f - f = v^p > 0 \text{ em } \ \Omega,$$
$$-\Delta \underline{v} = -\Delta v - \Delta v_* = u^q + g - g = u^q > 0 \text{ em } \ \Omega$$

e $\underline{u} = \underline{v} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então pelo Lema de Hopf

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} < 0, \ \frac{\partial \underline{v}}{\partial \eta} < 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16) segue que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ mostrando a validade de (2.14), como desejado.

■

Da definição do conjunto S é claro que, se $s \in S$ então $(0, s) \subset S$. Isto implica que S é um intervalo aberto pela esquerda. O próximo lema contém a última propriedade do conjunto S, importante na demonstração do resultado de unicidade.

Lema 2.10. *S é um intervalo aberto.*

Demonstração. Pela última observação, basta mostrar que para cada $s \in S$ existe $\epsilon > 0$ tal que $s + \epsilon \in S$. Se $s \in S$, então

$$\begin{aligned} -\Delta(u - u_* - s^{\frac{q+1}{q}}(\tilde{u} - u_*)) &= v^p - s^{\frac{q+1}{q}}\tilde{v}^p > 0 \\ -\Delta(v - v_* - s^{\frac{p+1}{p}}(\tilde{v} - v_*)) &= u^q - s^{\frac{p+1}{p}}\tilde{u}^q > 0 \end{aligned}$$

pois $S = S'$ pelo Lema 2.8. Além disso, $u - u_* - s^{\frac{q+1}{q}}(\tilde{u} - u_*) = v - v_* - s^{\frac{p+1}{p}}(\tilde{v} - v_*) = 0$ sobre $\partial\Omega$ e ambas são positivas em Ω. Então pelo Lema de Hopf

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(u - u_* - s^{\frac{q+1}{q}}(\tilde{u} - u_*)) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(v - v_* - s^{\frac{p+1}{p}}(\tilde{v} - v_*)) < 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(u - u_*) < s^{\frac{q+1}{q}}\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{u} - u_*) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(v - v_*) < s^{\frac{p+1}{p}}\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{v} - v_*) < 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Seguindo o argumento aplicado na demonstração do Lema 2.9 para mostrar que $S' \neq \emptyset$, mostra-se que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $s + \epsilon \in S$.

■

A demonstração do resultado de unicidade é uma conseqüência dos lemas acima.

Seja $s_* = \sup S$. Como $S \subset (0, 1)$ é claro que $s_* \leq 1$. Na verdade a desigualdade estrita $s_* < 1$ ocorre, pois $\tilde{u} > u$ e $\tilde{v} > v$. Mas $s_* < 1$ implica que

$$\begin{aligned} -\Delta(u - u_* - s_*^{\frac{q+1}{q}}(\tilde{u} - u_*)) &= v^p - s_*^{\frac{q+1}{q}}\tilde{v}^p \geq v^p - s_*^{\frac{q+1}{q}}\frac{1}{s_*^{p+1}}v^p = (1 - s_*^{\frac{1-pq}{q}})v^p > 0, \\ -\Delta(v - v_* - s_*^{\frac{p+1}{p}}(\tilde{v} - v_*)) &= u^q - s_*^{\frac{p+1}{p}}\tilde{u}^q \geq u^q - s_*^{\frac{p+1}{p}}\frac{1}{s_*^{q+1}}u^q = (1 - s_*^{\frac{1-pq}{p}})u^q > 0. \end{aligned}$$

Adicionando a este fato a informação de que todas as funções envolvidas nas duas últimas desigualdades se anulam sobre $\partial\Omega$, pode-se aplicar o PMF para concluir que $s_* \in S$. No entanto, isso é uma contradição pois o Lema 2.10 garante que S é um conjunto aberto.

CAPÍTULO 3

Uma equação quasilinear subcrítica não-homogênea

Neste capítulo estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta\left((-\Delta u)^{1/p}\right) & = & u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, -\Delta u & = & 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de fronteira regular, com $N \geq 1$. No problema (3.1) denotamos $u^q := |u|^{q-1} u$ e $(-\Delta u)^{1/p} := |-\Delta u|^{(1/p)-1} (-\Delta u)$ onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro e g está no espaço dual de um espaço de Banach apropriado que será apresentado logo abaixo.

Para facilitar a notação representaremos por $\int f\,dx$ a integral $\int_\Omega f\,dx$ de uma função f em $L^1(\Omega)$ e por $|h|_r$ a norma $|h|_{r,\Omega}$ de uma função $h \in L^r(\Omega)$.

Neste capítulo, E representará o espaço de Sobolev $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e E' o seu dual topológico. Suporemos $g \in E'$. Vamos considerar o espaço E munido da norma (veja Teorema D.4)

$$\|u\| = \left(\int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{p+1}},\ u \in E,$$

e E' com

$$|\varphi|_* = \sup\{\rangle\varphi, u\langle : \|u\| = 1\},\ \varphi \in E'.$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca de (3.1) se

$$\int |\Delta u|^{(1/p)-1}\,\Delta u \Delta v\,dx = \int |u|^{q-1}\,uv\,dx + \epsilon\int gv\,dx,\ \forall\, v \in E$$

onde $\langle g, v\rangle := \int gv\,dx$.

Estudamos (3.1) sob as seguintes hipóteses:

(H1) Superlinearidade: $p, q > 0$ e $p\,q > 1$.

(H2) Subcriticalidade: Se $N \geq 3$ então $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} > 1 - \dfrac{2}{N}$.

(H3) $g \in E'$, $g \neq 0$.

Os resultados que aqui obtemos estendem alguns dos resultados em [11], uma vez que tal artigo não trata do caso quando uma das potências p ou q está em $(0, 1)$.

Com as hipóteses acima, as soluções fracas de (3.1) são precisamente os pontos críticos do funcional

$$I(u) = \frac{p}{p+1}\int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx - \frac{1}{q+1}\int |u|^{q+1}\,dx - \epsilon\int gu\,dx. \tag{3.2}$$

Tal funcional é bem definido em E e é de classe C^1.

Observamos que se u é uma função de E então nada pode ser dito sobre o valor de $-\Delta u$ sobre $\partial\Omega$. Isto nos leva a acreditar que o espaço E poderia não ser o melhor espaço para se procurar por soluções de (3.1), pois não é evidente que um ponto crítico de I satisfaz a condição de contorno $-\Delta u = 0$ sobre $\partial\Omega$, mesmo quando g é uma função regular definida sobre $\overline{\Omega}$. No entanto, observamos que quando $p = 1$, o problema (3.1) envolve o operador biharmônico sob condições de fronteira de Navier e $E = H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ é exatamente o espaço apropriado para procurar por soluções fracas para tal problema. Para esclarecer esse ponto, precisamos de algum resultado que assegure a regularidade das soluções fracas de (3.1). Nesta direção, observamos que a equação (3.1), com parte não homogênea g suficientemente regular, é equivalente (veja Teorema 3.1) ao sistema Hamiltoniano

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& v^p \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &=& u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &=& 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. . \tag{3.3}$$

estudado no capítulo anterior.

O resultado abaixo fornece a regularidade das soluções fracas de (3.1) e mostra exatamente a equivalência entre (3.1) e (3.3).

Teorema 3.1. *Suponha que (H1), (H2) sejam satisfeitas e que $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Seja $u \in E$ uma solução fraca de (3.1). Se $v = (-\Delta u)^{1/p}$ então (u, v) é uma solução clássica de (3.3). Além* *disso, (u,v) pertence a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = \min\{p,q\}$ quando $p<1$ ou $q<1$ e α é um número qualquer em $(0,1)$ se $p \geq 1$ e $q \geq 1$.*

Definição 3.2. *Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca não-negativa de (3.1), e escrevemos $u \geq 0$, se u é um ponto crítico de I e satisfaz $u, -\Delta u \geq 0$ q.t.p. em Ω. Também, dizemos que $g \in E'$ satisfaz $g \geq 0$ se*

$$\int gu\,dx \geq 0,\ \forall\, u \in E \text{ tal que, } -\Delta u \geq 0 \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Observamos que a condição $g \geq 0$ apresentada logo acima é mais fraca que $\int gu\,dx \geq 0$, para toda $u \in E$ tal que $u \geq 0$ q.t.p em Ω. Por exemplo, existem funções $g \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo a condição de positividade acima que trocam de sinal em Ω. Informações adicionais sobre este assunto estão apresentadas na seção: A hipótese de positividade, deste capítulo.

Sejam

$$K = \left(\frac{1}{p\,q}\right)^{\frac{1}{p\,q-1}} \frac{p\,q-1}{p\,q} \quad \text{e} \quad R = \min_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{|u|_{q+1}^{\frac{p+1}{p}}}.$$

Iniciamos observando que I é limitado inferiormente sobre a Variedade de Nehari (veja Lema 3.12)

$$\mathcal{N} = \{u \in E : \langle I'(u), u\rangle = 0\}.$$

Dessa forma, a primeira idéia que surge é tentar obter um ponto crítico de I através de uma minimização sobre $\mathcal{N}$, ou seja, procura-se mostrar que

$$c_0 := \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) \tag{3.4}$$

define um valor crítico de I. Mostramos que I assume seu valor mínimo sobre $\mathcal{N}$ quando ϵ é suficientemente pequeno. Nesta direção adicionamos ao conjunto de hipóteses apresentado acima a seguinte condição:

(H4) $0 < \epsilon < \epsilon^* := \dfrac{K R^{\frac{p(q+1)}{(p\,q-1)(p+1)}}}{|g|_*}$.

A idéia de minimizar I sobre $\mathcal{N}$, a qual é concretizada sob a hipótese (H4) segundo o Teorema 3.4 abaixo, é tão boa que os pontos de $\mathcal{N}$ onde I assume o valor c_0 não fornecem apenas pontos críticos de I, mas sim mínimos locais de I quando considerado em todo o espaço E, como é observado no Lema 3.23.

Por outro lado, para cada $u \in E \backslash \{0\}$, a função

$$j(t) := I(tu) = \frac{p}{p+1} t^{\frac{p+1}{p}} \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1} t^{q+1} |u|_{q+1}^{q+1} - \epsilon t \int gu\,dx$$

é duas vezes diferenciável em $(0,+\infty)$. Em particular, se $u \in E$ é um mínimo local para I então $j'(1) = 0$ e $j''(1) \geq 0$. Como $j''(1) = \frac{1}{p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - q\,|u|_{q+1}^{q+1}$ temos que, para todo mínimo local u de I

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} \geq 0. \tag{3.5}$$

Assim, surge a importância da seguinte partição de $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &= \{u \in \mathcal{N} : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} > 0\}, \\ \mathcal{N}_0 &= \{u \in \mathcal{N} : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} = 0\} \text{ e} \\ \mathcal{N}^- &= \{u \in \mathcal{N} : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} < 0\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sob a hipótese (H4) o item (iv) do Lema 3.16 garante que $\mathcal{N}_0 = \{0\}$. Então através do Lema 3.23 e da desigualdade (3.5) podemos concluir que se $u_0 \in \mathcal{N}$ é tal que $I(u_0) = c_0$ então $u_0 \in \mathcal{N}^+$, e conseqüentemente

$$c_0 = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}^+} I(u).$$

Como desejamos encontrar uma segunda solução para (3.1), a discussão do último parágrafo nos motiva a investigar o problema de minimização

$$c_1 := \inf_{u \in \mathcal{N}^-} I(u),$$

principalmente pelo resultado fornecido pelo Lema 3.24.

Toda essa discussão nos permite mostrar:

Teorema 3.3. *Suponha que (H1), (H2) e (H3) sejam satisfeitas. Então a equação (3.1) admite no mínimo duas soluções fracas sob (H4) e no mínimo uma solução fraca se $\epsilon = \epsilon^*$. Além disso, tais soluções são não-negativas se $g \geq 0$.*

O teorema acima é uma conseqüência dos próximos três teoremas.

Teorema 3.4. *Sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4), c_0 é assumido em um ponto $u_0 \in \mathcal{N}^+$, o qual é um mínimo local para I quando considerado em todo o espaço E. Além disso, $u_0 \geq 0$ se $g \geq 0$.*

Teorema 3.5. *Suponha (H1), (H2), (H3) e (H4) satisfeitas. Então $c_1 > c_0$ e c_1 é alcançado em um ponto $u_1 \in \mathcal{N}^-$ que é um ponto crítico de I. Além disso $u_1 \geq 0$ se $g \geq 0$.*

Utilizando um argumento de aproximação baseado no Teorema 3.4, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) e com* $\epsilon = \epsilon^*$, c_0 *é assumido em um ponto* $u_0 \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ *que é um ponto crítico de* I. *Além disso,* $u_0 \geq 0$ *se* $g \geq 0$.

Os Teoremas 3.4 e 3.5 são demonstrados via Princípio Variacional de Ekeland, Teorema da Função Implícita, Multiplicadores de Lagrange, a imersão compacta de E em $L^{q+1}(\Omega)$ e do Teorema D.7, sendo este último um Teorema de representação de Riesz para o espaço dual de $W^{2,r} \cap W_0^{1,r}(\Omega)$, para qualquer $1 < r < +\infty$.

Também temos um resultado de não-existência de solução não-negativa para (3.1). Mais precisamente:

Teorema 3.7. *Suponha (H1) com* $p, q \geq 1$, *(H2), (H3) e que* $g \geq 0$. *Então (3.1) não possui solução fraca não-negativa se* $\epsilon > K \dfrac{\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}}{\int g\varphi_1 \, dx}$.

Consta como problema em aberto provar um resultado de não-existência quando algum dos expoentes p ou q é menor que 1.

Seja u_0 a solução de (3.1) dada pelo Teorema 3.4. A condição (H1) mais o fato que u_0 é um mínimo local garantem que I tem uma geometria de passo da montanha.

Fixe $T > 0$ suficientemente grande tal que $e := Tu_0 \in U_2$ (veja o parágrafo anterior ao Lema 3.16 e a Observação 3.17) e $I(e) < I(u_0)$. Considere

$$\mathcal{F} = \{h : [0,1] \to E \text{ contínua, } h(0) = u_0, \, h(1) = e\}.$$

Mostrando que I satisfaz a condição (PS), podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obter um outro resultado.

Teorema 3.8. *Sob (H1), (H2), (H3) e (H4), o valor*

$$c = \inf_{h \in \mathcal{F}} \max_{t \in [0,1]} I(h(t))$$

define um valor crítico para I *e* $c \geq c_1$.

Não conseguimos ainda determinar se $c > c_1$ ou se $c = c_1$. Desse modo não há como enunciar um resultado adicional sobre multiplicidade de soluções para (3.1).

Como conseqüência imediata dos Teoremas 3.1, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e do princípio do máximo forte apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Suponha (H1), (H2) e* $g \in C^1(\overline{\Omega})$ *com* $g \geq 0$ *como na Definição 3.2 porém não identicamente nula. Então o sistema Hamiltoniano*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & v^p \ \textit{em } \Omega, \\ -\Delta v & = & u^q + \epsilon g \ \textit{em } \Omega, \\ u, v & > & 0 \ \textit{em } \Omega, \\ u, v & = & 0 \ \textit{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

possui no mínimo duas soluções clássicas se (H4) é verificada; no mínimo uma solução clássica se $\epsilon = \epsilon^*$ *e, não possui solução clássica se* $\epsilon > K \dfrac{\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}}{\int g\varphi_1\, dx}$ *com* $p, q \geq 1$. *Além disso, tais soluções estão em* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, *onde* $\alpha = \min\{p, q\}$ *quando* $p < 1$ *ou* $q < 1$ *e* α *é um número qualquer em* $(0, 1)$ *se* $p \geq 1$ *e* $q \geq 1$.

No teorema acima utilizamos o princípio do máximo forte para mostrar a positividade das soluções, observando que $-\Delta(v - \epsilon v_*) = u^q \geq 0$ em Ω.

Para cada ϵ satisfazendo (H4) denotamos por $u_{0,\epsilon}$ e $u_{1,\epsilon}$ as soluções de (3.1) dadas pelo Teoremas 3.4 e 3.5 respectivamente. Finalizamos nosso conjunto de resultados fazendo uma análise do comportamento de $u_{0,\epsilon}$ e $u_{1,\epsilon}$ quando ϵ tende a zero.

Teorema 3.10. *Sob (H1), (H2), (H3) com a condição adicional que* $g \geq 0$ *tem-se que* $u_{0,\epsilon} \to 0$ *e* $u_{1,\epsilon} \to u$ *em* E *quando* $\epsilon \to 0$ *de forma que, se* $v = (-\Delta u)^{1/p}$ *então* (u, v) *é uma solução clássica de*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & v^p \ \textit{em } \Omega, \\ -\Delta v & = & u^q \ \textit{em } \Omega, \\ u, v & > & 0 \ \textit{em } \Omega, \\ u, v & = & 0 \ \textit{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

e mais, $(u, v) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, *onde* $\alpha = \min\{p, q\}$ *quando* $p < 1$ *ou* $q < 1$ *e* α *é qualquer número em* $(0, 1)$ *se* $p \geq 1$ *e* $q \geq 1$.

Finalizamos esta introdução com uma observação relacionada a alguns dos resultados encontrados em [27]. Todos os resultados enunciados acima podem ser obtidos se substituímos $\epsilon g(x)$ por $\epsilon g(x) u^r$ com $0 < r < \frac{1}{p}$ e $g \in C^1(\overline{\Omega})$ com $g \geq 0$ em Ω, o qual é um problema do tipo côncavo-convexo.

3.1 Resultados Preliminares

Uma série de lemas são necessários para se obter a demonstração dos teoremas apresentados na seção anterior. Em todo esta seção, mesmo que implicitamente, vamos supor que as hipóteses (H1) e (H3) estejam satisfeitas e enfatizamos que nenhum resultado desta seção, exceto o Lema 3.15, depende da hipótese de compacidade (H2) e sim apenas que

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \geq 1 - \frac{2}{N}.$$

Quando utilizamos a hipótese (H4) ou $\epsilon = \epsilon^*$ em nossas demonstrações, utilizamos na verdade, respectivamente, (3.8) ou (3.9) abaixo. Sendo assim, a primeira proposição diz que todos os resultados que dependem de (H4) ou $\epsilon = \epsilon^*$ podem ser obtidos substituindo (H4) por (3.8) e $\epsilon = \epsilon^*$ por (3.9).

Proposição 3.11. *Se a hipótese (H4) é satisfeita então*

$$\int gu\,dx < \frac{K}{\epsilon}\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}},\ \forall\ u \in E,\ |u|_{q+1} = 1. \tag{3.8}$$

Se $\epsilon = \epsilon^*$ então

$$\int gu\,dx \leq \frac{K}{\epsilon}\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}},\ \forall\ u \in E,\ |u|_{q+1} = 1. \tag{3.9}$$

Demonstração. Suponha que ϵ satisfaz (H4). Então para cada $u \in E$ tal que $|u|_{q+1} = 1$

$$\int gu\,dx \leq |g|_* \|u\| < \frac{K}{\epsilon} R^{\frac{p(q+1)}{(p\,q-1)(p+1)}} \|u\| \leq \frac{K}{\epsilon}\|u\|^{\frac{q+1}{p\,q-1}}\|u\| = \frac{K}{\epsilon}\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}}.$$

De modo semelhante, é possível mostrar que (3.9) é verificada se $\epsilon = \epsilon^*$.

■

Agora, vamos apresentar um lema que permite a utilização do nosso método uma vez que este consiste basicamente de minimizações de I sobre $\mathcal{N}$ ou em partes de $\mathcal{N}$.

Lema 3.12. *I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Se $u \in \mathcal{N}$ então $\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - |u|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int gu\,dx = 0$. Logo

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{p}{p+1}\int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx - \frac{1}{q+1}\int |u|^{q+1}\,dx - \epsilon\int gu\,dx \\ &= \left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx + \left(\frac{1}{q+1} - 1\right)\epsilon\int gu\,dx \\ &\geq \frac{p\,q-1}{(p+1)(q+1)}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{q}{q+1}\epsilon\,|g|_*\,\|u\| \geq -\frac{q}{(p+1)(q+1)}\left(\frac{p\,q}{p\,q-1}\right)^p (\epsilon\,|g|_*)^{p+1}. \end{aligned}$$

■

Dado $u \in E$ com $u \neq 0$, defina $i : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $i(t) := t^{1/p} \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q \, |u|_{q+1}^{q+1}$.

A motivação para se considerar a função i definida acima surge da expressão

$$\langle I'(tu), tu \rangle = t \left(t^{1/p} \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q \, |u|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int gu \, dx \right).$$

Dessa forma, para $t > 0$ tem-se $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se $i(t) = \epsilon \int gu \, dx$. Por outro lado, como conseqüência de (H1), para cada $u \in E \backslash \{0\}$, $i(t)$ é limitada superiormente, $i(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e $i(t)$ assume seu valor máximo em

$$t_{max} := \left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p \, q \, |u|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{p\,q-1}}.$$

O próximo lema mostra claramente o propósito da hipótese (H4).

Lema 3.13. *Se $\epsilon > 0$ é tal que (3.8) é verificada, então para cada $u \in E \backslash \{0\}$, existe um único $t^+ = t^+(u) > 0$ tal que $t^+ u \in \mathcal{N}^-$. Em particular, $t^+ > t_{max}$ e $I(t^+ u) = \max_{t \geq t_{max}} I(tu)$. Além disso, se $\int gu \, dx > 0$, existe também um único $t^- = t^-(u) > 0$ tal que $t^- u \in \mathcal{N}^+$. Em particular, $t^- < t_{max}$ e $I(t^- u) \leq I(tu)$ para todo $t \in [0, t^+]$.*

Demonstração. Seja $u \in E \backslash \{0\}$ e considere $j : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $j(t) = I(tu)$. Então, $j \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) \cap C^2((0, +\infty), \mathbb{R})$ e

$$j'(t) = i(t) - \epsilon \int gu \, dx, \quad j''(t) = i'(t), \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Se $\int gu \, dx \leq 0$, existe um único $t > 0$ tal que $i(t) = \epsilon \int gu \, dx$, isto é, tal que $tu \in \mathcal{N}$. Denotando este t por t^+, tem-se que $t^+ > t_{max}$ e $i'(t^+) < 0$, isto é,

$$0 > i'(t^+) = \frac{1}{p} \frac{1}{(t^+)^2} \left(\|t^+ u\|^{\frac{p+1}{p}} - p \, q \left| t^+ u \right|_{q+1}^{q+1} \right),$$

o que é equivalente a dizer que $t^+ u \in \mathcal{N}^-$. Assim, no caso em que $\int gu \, dx \leq 0$, $j'(t) = 0$ se, e somente se $t = t^+$ e, além disso $j'(t) > 0$ em $(0, t^+)$ e $j'(t) < 0$ em $(t^+, +\infty)$, provando que $I(t^+ u) = \max_{t \geq 0} I(tu)$.

No caso em que $\int gu \, dx > 0$, segue de (3.8) que

$$\begin{aligned} i(t_{max}) - \epsilon \int gu \, dx &= K \left(\frac{\|u\|^{q(p+1)}}{|u|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{1}{p\,q-1}} - \epsilon \int gu \, dx \\ &> K \left(\frac{\|u\|^{q(p+1)}}{|u|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{1}{p\,q-1}} - K \, |u|_{q+1} \frac{\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}}}{|u|_{q+1}^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}}} = 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, pode-se concluir que existem exatamente dois pontos t^+ e t^- com $0 < t^- < t_{max} < t^+$ tais que $i(t^-) = i(t^+) = \epsilon \int gu\,dx$, isto é, $t^-u, t^+u \in \mathcal{N}$. Das desigualdades $i'(t^-) > 0$, $i'(t^+) < 0$ tem-se que $t^-u \in \mathcal{N}^+$ e $t^+u \in \mathcal{N}^-$. Dessa forma, no caso em que $\int gu\,dx > 0$, $j'(t) = 0$ se, e somente se $t \in \{t^-, t^+\}$ e, além disso $j'(t) < 0$ em $(0, t^-) \cup (t^+, +\infty)$ e $j'(v) > 0$ em (t^-, t^+). Donde segue então que $I(t^-u) = \min_{t\in[0,t^+]} I(tu)$ e $I(t^+u) = \max_{t\geq t^-} I(tu)$.

Observa-se em particular que, tanto no caso $\int gu\,dx \leq 0$ quanto no caso $\int gu\,dx > 0$, $I(t^+u) = \max_{t\geq t_{max}} I(tu)$.

■

Observação 3.14. *Os cálculos acima mostram que sob a hipótese (3.8), em particular se a condição (H4) é satisfeita, para cada $u \in E\backslash\{0\}$:*

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u\} \ e \ t^+u \in \mathcal{N}^- \quad se \quad \int gu\,dx \leq 0;$$
$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u, t^-u\},\ t^+u \in \mathcal{N}^-,\ t^-u \in \mathcal{N}^+,\ I(t^-u) < I(t^+u) \quad se \quad \int gu\,dx > 0.$$

Em particular, quando (3.8) é verificada, $\mathcal{N}_0 = \{0\}$.

No entanto, se $\epsilon = \epsilon^*$ então para cada $u \in E\backslash\{0\}$

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u\} \ e \ t^+u \in \mathcal{N}^- \quad se \quad \int gu\,dx \leq 0.$$

Mas para o caso $\int gu\,dx > 0$ dois fatos podem ocorrer:

- *se $\int gu\,dx = \epsilon^* i(t_{max})$ então*

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t_{max}u\} \quad e \quad t_{max}u \in \mathcal{N}_0.$$

- *se $\int gu\,dx > \epsilon^* i(t_{max})$*

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u, t^-u\},\ t^+u \in \mathcal{N}^-,\ t^-u \in \mathcal{N}^+ \quad e \quad I(t^-u) < I(t^+u).$$

Em particular, quando $\epsilon = \epsilon^*$ e $\int gu\,dx > 0$, existe $t_0 = t_0(u) > 0$ tal que $t_0u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ e $I(t_0u) = \min\{I(tu) : t > 0, tu \in \mathcal{N}\}$.

Baseado na imersão compacta de E em $L^{q+1}(\Omega)$, dada pela hipótese (H2), provamos o seguinte lema.

Lema 3.15. *Para cada $\epsilon \in \mathbb{R}$, o ínfimo*

$$\mu_0 = \inf_{u \in E,\, |u|_{q+1}=1} \left(K\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}} - \epsilon \int gu\, dx \right)$$

é assumido. Em particular, se $\epsilon > 0$ é tal que (3.8) é verificada então $\mu_0 > 0$.

Demonstração. Como $\dfrac{q(p+1)}{p\,q-1} > 1$ segue que $\mu_0 > -\infty$. Seja (w_n) uma seqüência minimizante para μ_0. Mais uma vez de $\dfrac{q(p+1)}{p\,q-1} > 1$ tem-se que (w_n) é limitada em E. Como E é espaço de Banach reflexivo e está compactamente imerso em $L^{q+1}(\Omega)$, pode-se supor que, para algum elemento $w_0 \in E$, $w_n \rightharpoonup w_0$ em E (Teorema F.2) e $w_n \to w_0$ em $L^{q+1}(\Omega)$ (Teorema F.6). Então $|w_0|_{q+1} = 1$ e $\mu_0 = K\|w_0\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}} - \epsilon \int g w_0\, dx$. Uma vez que μ_0 é alcançado por w_0 é óbvio que $\mu_0 > 0$ se (3.8) for verificada.

∎

Para $u \in E$ com $u \neq 0$ seja

$$\Psi(u) = K \frac{\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}}}{|u|_{q+1}^{\frac{q+1}{p\,q-1}}} - \epsilon \int gu\, dx.$$

Se $t > 0$ e $|u|_{q+1} = 1$ então

$$\Psi(tu) = t\left(K\|u\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}} - \epsilon \int gu\, dx \right).$$

Logo, pelo Lema 3.15, dado $\gamma > 0$

$$\inf_{u \in E,\, |u|_{q+1} \geq \gamma} \Psi(u) = \inf_{u \in E,\, |u|_{q+1} \geq \gamma} \Psi\left(|u|_{q+1} \frac{u}{|u|_{q+1}} \right) \geq \gamma \mu_0. \tag{3.10}$$

Em particular, se (3.8) é verificada então o ínfimo dado por (3.10) é estritamente positivo.

Suponha que $\epsilon > 0$ satisfaz (3.8). Da continuidade de $t_{max} : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ e da unicidade de t^+ fornecida no Lema 3.13, mostramos que $t^+ : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ é contínua. Segue daí que a função

$$\Phi : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ \Phi(u) = t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) - \|u\|$$

é contínua. Em particular,

$$\mathcal{N}^- = \Phi^{-1}(0) = \left\{ u \in E\backslash\{0\} : t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\| \right\}$$

é um conjunto fechado de $E\backslash\{0\}$, e através do item (iii) do Lema 3.16 podemos concluir que $\mathcal{N}^-$ também é um conjunto fechado de E. Por outro lado,

$$U_2 = \Phi^{-1}\left((-\infty, 0)\right) = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\| > t^+\left(\tfrac{u}{\|u\|}\right)\right\}$$
$$U_1^* = \Phi^{-1}\left((0, +\infty)\right) = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\| < t^+\left(\tfrac{u}{\|u\|}\right)\right\}$$

são conjuntos abertos de $E\backslash\{0\}$ e portanto de E. Mais uma vez, empregando o item (iii) do Lema 3.16 concluimos que $U_1 = U_1^* \cup \{0\}$ é um conjunto aberto de E.

O lema a seguir apresenta algumas propriedades dos conjuntos $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^+$, $\mathcal{N}^-$ e $\mathcal{N}_0$.

Lema 3.16. *Para cada $\epsilon > 0$:*

(i) $\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ é limitado. Mais precisamente, para qualquer $u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$

$$\|u\| < \left(\frac{q(p+1)}{p\,q-1}\epsilon\,|g|_*\right)^p.$$

(ii) $\mathcal{N}^-$ é não-limitado.

(iii) Para qualquer $u \in \mathcal{N}^-$

$$\|u\| > \left(\frac{R^{\frac{p(q+1)}{p+1}}}{p\,q}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$$

(observe que a limitação inferior não depende de ϵ).

Se $\epsilon > 0$ é tal que (3.8) é satisfeita, então:

(iv) $\mathcal{N}_0 = \{0\}$.

(v) $\mathcal{N}^-$ desconecta E no sentido de que, dado $u \in U_1$, $v \in U_2$ e $h : [0,1] \to E$ contínua com $h(0) = u$ e $h(1) = v$, a imagem de h intercepta $\mathcal{N}^-$. Além disso, $\mathcal{N}^+ \subset U_1$.

(vi) Seja $S_E = \{u \in E : \|u\| = 1\}$. Então, $T^+ : S_E \to \mathcal{N}^-$ definida por $T^+(u) = t^+(u)u$ é um homeomorfismo.

Demonstração. (i) Se $u \in (\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0)\backslash\{0\}$ então

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - |u|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int g u\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} \geq 0.$$

Uma vez que $p\,q > 1$, tem-se que

$$I(u) = -\frac{1}{p+1}\left(\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{q(p+1)}{q+1}|u|_{q+1}^{q+1}\right) < -\frac{1}{p+1}\left(\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}\right) \leq 0,$$

e então, usando o fato que $u \in \mathcal{N}$

$$0 > I(u) = \frac{p\,q-1}{(p+1)(q+1)}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{q}{q+1}\epsilon \int gu\,dx$$

implicando que

$$\|u\| < \left(\frac{q(p+1)}{p\,q-1}\epsilon\,|g|_*\right)^p.$$

(ii) Definindo

$$\lambda_0 = \inf_{u\in E,\,\|u\|=1} |u|_{q+1}\,,$$

tem-se $\lambda_0 = 0$. Caso contrário teria-se $\|u\| \leq \frac{1}{\lambda_0}|u|_{q+1}$ para todo $u \in E$, e assim E deveria ser um subespaço fechado de $L^{q+1}(\Omega)$, o que é certamente falso, uma vez que $C_c^\infty(\Omega) \subset E \subset L^{q+1}(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{q+1}(\Omega)$ e $E \neq L^{q+1}(\Omega)$.

Se $u \in E$ e $\|u\| = 1$ então pelo Lema 3.13

$$\|t^+(u)u\| = t^+(u) > \left(\frac{1}{p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}.$$

A última desigualdade mais o fato de $\lambda_0 = 0$ implicam que $\mathcal{N}^-$ é não-limitado.

(iii) Dado $u \in E\backslash\{0\}$, pelo Lema 3.13 existe um único $t^+(u) > 0$ tal que $t^+(u)u \in \mathcal{N}^-$ e

$$t^+ > \left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}} := t_{max}.$$

Mas observe que

$$\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}} = \frac{1}{p\,q}\frac{1}{\|u\|^{\frac{p\,q-1}{p}}}\frac{\|u\|^{q+1}}{|u|_{q+1}^{q+1}} \geq \frac{R^{\frac{p(q+1)}{p+1}}}{p\,q}\frac{1}{\|u\|^{\frac{p\,q-1}{p}}}.$$

Segue da última desigualdade que

$$t_{max} \geq \left(\frac{R^{\frac{p(q+1)}{p+1}}}{p\,q}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}\frac{1}{\|u\|}, \text{ isto é, } t_{max}\|u\| \geq \left(\frac{R^{\frac{p(q+1)}{p+1}}}{p\,q}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}.$$

Dessa forma

$$\|t^+(u)u\| > t_{max}\|u\| \geq \left(\frac{R^{\frac{p(q+1)}{p+1}}}{p\,q}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}.$$

Se $u \in \mathcal{N}^-$ então $t^+(u) = 1$. Esta observação e a última desigualdade demonstram a afirmação.

(iv) Sob a hipótese (H4), segue do Lema 3.13 que dado $u \in E\backslash\{0\}$, $\{tu : t > 0\}$ intercepta $\mathcal{N}$ no máximo duas vezes, uma vez em $\mathcal{N}^-$ (sempre) e outra vez em $\mathcal{N}^+$ (se, e somente se $\int gu\, dx > 0$), mas nunca em $\mathcal{N}_0$. De onde conclui-se que $\mathcal{N}_0 = \{0\}$.

(v) e (vi) Se $u \in \mathcal{N}^+$ então $\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} > 0$, e assim

$$t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) > t_{max}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \left(\frac{\|u\|^{q+1}}{p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}} > \left(\frac{\|u\|^{q+1}}{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}} = \|u\|,$$

isto é, $u \in U_1$. Portanto $\mathcal{N}^+ \subset U_1$.

Agora, sejam $u \in U_1$, $v \in U_2$ e $h : [0,1] \to E$ contínua tal que $h(0) = u$ e $h(1) = v$.

Se $h(t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$, então $\Phi \circ h : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $\Phi \circ h(0) = \Phi(u) > 0$, $\Phi \circ h(1) = \Phi(v) < 0$. Sendo assim, deve existir $t^* \in (0,1)$ tal que $\Phi \circ h(t^*) = 0$, isto é, $h(t^*) \in \mathcal{N}^-$.

Se $h(t) = 0$ para algum $t \in [0,1]$; seja $A = h^{-1}(0)$. Então A é um conjunto compacto de $[0,1]$ e $\alpha = \sup A < 1$ pois $h(1) \neq 0$. Assim, $h : [\alpha, 1] \to E$ satisfaz $h(\alpha) = 0$ e $h(t) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, 1]$. Uma vez que $0 \in U_1$ e U_1 é um conjunto aberto, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ e $h(\alpha+\delta) \in U_1$. Logo, a função $h : [\alpha+\delta, 1] \to \mathbb{R}$ possui as mesmas propriedades da função do último parágrafo. Portanto, pode-se concluir que existe $t^* \in (0,1)$ tal que $h(t^*) \in \mathcal{N}^-$.

Para finalizar, a função $T^+ : S_E \to \mathcal{N}^-$, dada por $T^+(u) = t^+(u)u$, é contínua pois t^+ é contínua. A continuidade de T^{-1} segue do fato que $T^{-1}(w) = \frac{w}{\|w\|}$.

■

Observação 3.17. *Se $u \in U_1$ e $u \neq 0$ então existe $T_0 > 0$ tal que $tu \in U_2$ para todo $t > T_0$.*

De fato, seja $T_0 = \dfrac{1}{\|u\|}t^+\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$. Então para $t > T_0$

$$t^+\left(\frac{tu}{\|tu\|}\right) = t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = T_0\|u\| < t\|u\| = \|tu\|,$$

isto é, $tu \in U_2$.

O próximo resultado será utilizado para garantir que algumas seqüências minimizantes de I em partes de $\mathcal{N}$ são seqüências (PS) para I e também para mostrar que um certo ponto crítico de I é um mínimo local.

Lema 3.18. *Seja $\epsilon > 0$ satisfazendo (3.8). Dado $u \in \mathcal{N}\backslash\{0\}$ existe $\delta > 0$ e uma função diferenciável positiva $t : \{w \in E : \|w\| < \delta\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $t(0) = 1$, $t(w)(u - w) \in \mathcal{N}$ para todo $w \in E$ com $\|w\| < \delta$, e*

$$\langle t'(0), v\rangle = \frac{(p+1)\displaystyle\int |\Delta u|^{(1/p)-1}\,\Delta u\Delta v\,dx - p(q+1)\int |u|^{q-1}\,uv\,dx - p\epsilon\int gv\,dx}{\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}}.$$

Demonstração. Defina $F : (0, +\infty) \times E \to \mathbb{R}$ por

$$F(t, w) = pt^{1/p}\|u - w\|^{\frac{p+1}{p}} - pt^q\,|u - w|_{q+1}^{q+1} - p\epsilon\int g(u - w)\,dx.$$

Dessa forma, $F \in C^1\left((0, +\infty) \times E, \mathbb{R}\right)$, $F(1, 0) = 0$ e, pelo item (iv) do Lema 3.16, $F_t(1, 0) = \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} \neq 0$. Então, o Teorema da Função Implícita garante a existência de $\delta > 0$ e $t : \{w \in E : \|w\| < \delta\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $F(t(w), w) = 0$ para todo $w \in E$, $\|w\| < \delta$; $t(0) = 1$ e $t(w) > 0$ para todo $w \in E$ com $\|w\| < \delta$. Então,

$$0 = t(w)F(t(w), w) = p\left(\|t(w)(u - w)\|^{\frac{p+1}{p}} - |t(w)(u - w)|_{q+1}^{q+1} - \epsilon\int g\left(t(w)(u - w)\right)\,dx\right)$$

ou seja, $t(w)(u-w) \in \mathcal{N}$ para todo $w \in E$ com $\|w\| < \delta$. Assim, diferenciando a identidade $F(t(w), w) = 0$ em relação a w, obtém-se

$$0 = \langle F_t(t(w), w)t'(w) + F_w(t(w), w), v\rangle, \text{ para todo } v \in E.$$

Em particular, se $w = 0$ então

$$0 = \langle F_t(1, 0)t'(0) + F_w(1, 0), v\rangle = F_t(1, 0)\langle t'(0), v\rangle + \langle F_w(1, 0), v\rangle.$$

E da última identidade

$$\begin{aligned}\langle t'(0), v\rangle &= -\frac{\langle F_w(1, 0), v\rangle}{F_t(1, 0)}\\ &= \frac{(p+1)\displaystyle\int |\Delta u|^{(1/p)-1}\,\Delta u\Delta v\,dx - p(q+1)\int |u|^{q-1}\,uv\,dx - p\epsilon\int gv\,dx}{\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1}}.\end{aligned}$$

■

A demonstração do Lema 3.12 apresentou uma cota inferior para c_0. Agora vamos apresentar uma cota superior negativa para c_0 e o fato de c_0 ser negativo é importante para realização de alguns de nossos cálculos.

Seja $\overline{u} \in E$, dada pelo Teorema D.7, tal que

$$\int gu\,dx = \int |\Delta\overline{u}|^{(1/p)-1}\,\Delta\overline{u}\Delta u\,dx,\ \forall u \in E.$$

Em particular $\int g\overline{u}\,dx = \|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} = |g|_*^{p+1} > 0$, pelo item (i) do Teorema D.7. Assim, pelo Lema 3.13 (supondo que (3.8) seja satisfeita), existe um único $t_* = t^-(\overline{u}) > 0$ tal que $t_*\overline{u} \in \mathcal{N}^+$. Usando respectivamente o fato que $t_*\overline{u} \in \mathcal{N}$ e $t_*\overline{u} \in \mathcal{N}^+$ obtemos

$$\begin{aligned} I(t_*\overline{u}) &= -\frac{1}{p+1}\|t_*\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{q}{q+1}\,|t_*\overline{u}|_{q+1}^{q+1} < -\frac{1}{p+1}\|t_*\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{p(q+1)}\|t_*\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} \\ &= -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right)\|t_*\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} = -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right) t_*^{\frac{p+1}{p}}\,|g|_*^{p+1}. \end{aligned}$$

Observe que t_* depende de ϵ. Da última desigualdade, do Lema 3.12 e quando ϵ satisfaz (3.8) temos

$$-\frac{q}{(p+1)(q+1)}\left(\frac{p\,q}{p\,q-1}\right)^p (\epsilon\,|g|_*)^{p+1} < c_0 < -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right) t_*^{\frac{p+1}{p}}\,|g|_*^{p+1}. \tag{3.11}$$

Vale notar que quando $\epsilon = \epsilon^*$, tomamos $t_* = t_0(\overline{u})$, dado pela Observação 3.14 para garantir que

$$-\frac{q}{(p+1)(q+1)}\left(\frac{p\,q}{p\,q-1}\right)^p (\epsilon\,|g|_*)^{p+1} < c_0 \le -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right) t_*^{\frac{p+1}{p}}\,|g|_*^{p+1}. \tag{3.12}$$

A seguir empregamos o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar que a condição (3.8) garante a existência de uma seqüência minimizante para c_0 e uma seqüência minimizante para c_1 com uma propriedade muito especial.

Lema 3.19. *Suponha que $\epsilon > 0$ satisfaz (3.8). Então existe uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}$ que também é uma seqüência (PS) para I.*

Demonstração. É claro que $\mathcal{N}$ é um conjunto fechado de E e portanto um espaço métrico completo. Uma vez que $c_0 > -\infty$ (Lema 3.12), o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema A.1) garante a existência de uma seqüência (u_n) em $\mathcal{N}$ satisfazendo

$$I(u_n) < c_0 + \frac{1}{n},\ I(w) \ge I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall w \in \mathcal{N}. \tag{3.13}$$

Uma vez que $u_n \in \mathcal{N}$, por (3.11)

$$I(u_n) = \frac{p\,q-1}{(p+1)(q+1)}\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{q}{q+1}\epsilon\int gu_n\,dx < c_0 + \frac{1}{n} < -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right) t_*^{\frac{p+1}{p}}\,|g|_*^{p+1} \tag{3.14}$$

para n suficientemente grande. Para tais valores de n, segue que $\displaystyle\int g u_n\, dx > 0$ e de

$$\frac{p\,q-1}{(p+1)(q+1)}\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} < \frac{q}{q+1}\epsilon \int g u_n\, dx \leq \frac{q}{q+1}\epsilon\, |g|_*\, \|u_n\|$$

obtém-se que

$$\|u_n\| < \left(\frac{q(p+1)}{p\,q-1}\epsilon\, |g|_*\right)^p.$$

Também segue de (3.14) que

$$\|u_n\| > \frac{p\,q-1}{p\,q(p+1)} \frac{t_*^{\frac{p+1}{p}}}{\epsilon}\, |g|_*^p. \tag{3.15}$$

O próximo passo é mostrar que existe uma subseqüência de (u_n), também denotada por (u_n), tal que $I'(u_n) \to 0$ em E'. A prova é feita por contradição.

Suponha então que 0 não é ponto aderente de $\{I'(u_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Assim, pode-se admitir que $I'(u_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja T o homeomorfismo dado pelo Teorema D.7 e $U_n = T^{-1}(I'(u_n))$. Da definição de T tem-se que $\langle T(U_n), U_n\rangle = \|U_n\|^{\frac{p+1}{p}}$, e do item (i) do Teorema D.7 sabe-se que $\|u\| = |T(u)|_*^p$ para todo $u \in E$. Assim, pode-se concluir que

$$\langle T(U_n), U_n\rangle = \|U_n\|^{\frac{p+1}{p}} = |I'(u_n)|_*^{p+1}$$

e

$$\langle I'(u_n), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle = \frac{|I'(u_n)|_*^{p+1}}{|I'(u_n)|_*^{p}} = |I'(u_n)|_*. \tag{3.16}$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$ por enquanto. Fazendo $u = u_n$ no Lema 3.18, sabe-se que para $w = \delta\frac{U_n}{\|U_n\|}$, com $0 < \delta < \delta_n$, δ_n também dado pelo Lema 3.18, e $\tau_n(\delta) := t_n\left(\delta\frac{U_n}{\|U_n\|}\right)$

$$w_{\delta,n} = \tau_n(\delta)\left[u_n - \delta\frac{U_n}{\|U_n\|}\right] \in \mathcal{N},\ \text{para todo } 0 < \delta < \delta_n.$$

Note aqui que $\tau_n(\delta)$ é uma função definida em $(0, \delta_n)$ enquanto que $t_n\left(\delta\dfrac{U_n}{\|U_n\|}\right)$ é a função do Lema 3.18.

De (3.13) e do fato que $w_{\delta,n} \in \mathcal{N}$ segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\|u_n - w_{\delta,n}\| &\geq I(u_n) - I(w_{\delta,n}) - \langle I'(w_{\delta,n}), u_n\rangle + \langle I'(w_{\delta,n}), u_n\rangle \\
&= I(u_n) - I(w_{\delta,n}) - \langle I'(w_{\delta,n}), u_n\rangle \\
&+ (1-\tau_n(\delta))\langle I'(w_{\delta,n}), u_n\rangle + \delta\tau_n(\delta)\langle I'(w_{\delta,n}), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Suponha que (veja Lema 3.20)

$$I(u_n) - I(w_{\delta,n}) - \langle I'(w_{\delta,n}), u_n\rangle = o(\delta). \tag{3.18}$$

Então,

$$\frac{1}{n}\|w_{\delta,n} - u_n\| \geq (1-\tau_n(\delta))\langle I'(w_{\delta,n}), u_n\rangle + \delta\tau_n(\delta)\langle I'(w_{\delta,n}), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle + o(\delta). \tag{3.19}$$

Mas $w_{\delta,n} - u_n = (\tau_n(\delta)-1)u_n - \delta\tau_n(\delta)\frac{U_n}{\|U_n\|}$ e da notação $\tau_n(\delta) = t_n\left(\delta\frac{U_n}{\|U_n\|}\right)$ segue que $\tau_n'(0) = \langle t_n'(0), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle$. Assim, dividindo (3.19) por $\delta > 0$ e tomando o limite com $\delta \to 0$, de (3.16) e (3.19) conclui-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(1 + |\tau_n'(0)|\,\|u_n\|\right) &\geq \frac{1}{n}\left\|\tau_n'(0)u_n - \frac{U_n}{\|U_n\|}\right\| = \frac{1}{n}\left\|\lim_{\delta\to 0}\frac{w_{\delta,n}-u_n}{\delta}\right\| \\ &\geq -\tau_n'(0)\langle I'(u_n), u_n\rangle + \langle I'(u_n), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle = |I'(u_n)|_*\,,\end{aligned}$$

isto é,

$$|I'(u_n)|_* \leq \frac{1}{n}\left(1 + |\tau_n'(0)|\,\|u_n\|\right) \leq \frac{C}{n}\left(1 + |\tau_n'(0)|\right) \tag{3.20}$$

uma vez que (u_n) é limitada. Em virtude de (3.20), o próximo passo é mostrar que $|\tau_n'(0)|$ é uniformemente limitada em relação a n.

Segue do Lema 3.18 que

$$|\tau_n'(0)| = \left|\langle t_n'(0), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle\right| \leq \frac{C_1}{\left|\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u_n|_{q+1}^{q+1}\right|}$$

pois (u_n) é limitada e $\left\|\frac{U_n}{\|U_n\|}\right\| = 1$. Assim, precisa ser mostrado que $\left|\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u_n|_{q+1}^{q+1}\right|$ está longe de zero. Por contradição, suponha que existe uma subseqüência de (u_n), também denotada por (u_n), tal que

$$\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u_n|_{q+1}^{q+1} = o(1). \tag{3.21}$$

Por (3.21) e (3.15)

$$|u_n|_{q+1}^{q+1} = \frac{1}{p\,q}\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} + o(1) \geq C,$$

isto é, $|u_n|_{q+1} \geq \gamma$ para algum $\gamma > 0$ e

$$\left(\frac{\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q}\right)^{\frac{p\,q}{p\,q-1}} - \left(|u_n|_{q+1}^{q+1}\right)^{\frac{p\,q}{p\,q-1}} = o(1). \tag{3.22}$$

De (3.21) e do fato que $u_n \in \mathcal{N}$,

$$\epsilon \int g u_n \, dx = \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - |u_n|_{q+1}^{q+1} = (p\,q-1)\,|u_n|_{q+1}^{q+1} + o(1). \tag{3.23}$$

Assim, de (3.10), (3.22), (3.23) e da definição de K com $\alpha = \frac{q+1}{p\,q-1}$

$$\begin{aligned} 0 &< \mu_0 \gamma^{1+\alpha} \leq |u_n|_{q+1}^{\alpha}\, \Psi(u_n) = |u_n|_{q+1}^{\alpha} \left(K \frac{\|u_n\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}}}{|u_n|_{q+1}^{\alpha}} - (p\,q-1)\,|u_n|_{q+1}^{q+1} \right) + o(1) \\ &= K\|u_n\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}} - (p\,q-1)\,|u_n|_{q+1}^{\frac{p\,q(q+1)}{p\,q-1}} + o(1) \\ &= K\|u_n\|^{\frac{q(p+1)}{p\,q-1}} - (p\,q-1) \left(\frac{\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q} \right)^{\frac{p\,q}{p\,q-1}} + o(1) = o(1) \end{aligned}$$

o que é claramente impossível.

Sendo assim, para concluir que $I'(u_n) \to 0$, basta provar que a identidade (3.18) é verificada. Isto será mostrado logo abaixo na forma de um lema.

■

Seja $r > 1$ um número real. Então, pelo teorema do valor médio para derivadas, dados $t, h \in \mathbb{R}$, existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$|t|^r + (r-1)\,|t+h|^r - r\,|t+h|^{r-2}\,(t+h)t = r\left(|t+h|^{r-2}\,(t+h) - |t+\theta h|^{r-2}\,(t+\theta h)\right) h. \tag{3.24}$$

E, utilizando esta última identidade, temos:

Lema 3.20. *A identidade (3.18) é válida.*

Demonstração. Seja $\kappa_{\delta,n} = I(u_n) - I(w_{\delta,n}) - \langle I'(w_{\delta,n}), u_n \rangle$. Pelo fato que $w_{\delta_n} \in \mathcal{N}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \kappa_{\delta,n} = {} & \frac{p}{p+1}\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}\,|u_n|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int g u_n \, dx - \frac{p}{p+1}\|w_{\delta,n}\|^{\frac{p+1}{p}} \\ + {} & \frac{1}{q+1}\,|w_{\delta,n}|_{q+1}^{q+1} + \epsilon \int g w_{\delta,n} \, dx - \int |\Delta w_{\delta,n}|^{(1/p)-1}\, \Delta w_{\delta,n} \Delta u_n \, dx \\ + {} & \int |w_{\delta,n}|^{q-1}\, w_{\delta,n} u_n \, dx + \epsilon \int g u_n \, dx + \|w_{\delta,n}\|^{\frac{p+1}{p}} - |w_{\delta,n}|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int g w_{\delta,n} \, dx \\ = {} & \frac{p}{p+1} \left(\|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{p}\|w_{\delta,n}\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{p+1}{p} \int |\Delta w_{\delta,n}|^{(1/p)-1}\, \Delta w_{\delta,n} \Delta u_n \, dx \right) \\ - {} & \frac{1}{q+1} \left(|u_n|_{q+1}^{q+1} + q\,|w_{\delta,n}|_{q+1}^{q+1} - (q+1) \int |w_{\delta,n}|^{q-1}\, w_{\delta,n} u_n \, dx \right). \end{aligned}$$

Seja $h_{\delta,n} = w_{\delta,n} - u_n$. Segue da última identidade e de (3.24) que existem $0 < \theta, \sigma < 1$ tais que

$$\begin{aligned}\kappa_{\delta,n} = & \int \Big(|\Delta w_{\delta,n}|^{(1/p)-1}\,\Delta w_{\delta,n} - |\Delta u_n + \theta\Delta h_{\delta,n}|^{(1/p)-1}\,(\Delta u_n + \theta\Delta h_{\delta,n})\Big)\,\Delta h_{\delta,n}\,dx \\ - & \int \big(|w_{\delta,n}|^{q-1}\,w_{\delta,n} - |u_n + \sigma h_{\delta,n}|^{q-1}\,(u_n + \sigma h_{\delta,n})\big)\,h_{\delta,n}\,dx.\end{aligned}$$

Assim, dividindo a última identidade por $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\kappa_{\delta,n}}{\delta} = & \int \Big(|\Delta w_{\delta,n}|^{(1/p)-1}\,\Delta w_{\delta,n} - |\Delta u_n + \theta\Delta h_{\delta,n}|^{(1/p)-1}\,(\Delta u_n + \theta\Delta h_{\delta,n})\Big)\,\frac{\Delta h_{\delta,n}}{\delta}\,dx \\ - & \int \big(|w_{\delta,n}|^{q-1}\,w_{\delta,n} - |u_n + \sigma h_{\delta,n}|^{q-1}\,(u_n + \sigma h_{\delta,n})\big)\,\frac{h_{\delta,n}}{\delta}\,dx.\end{aligned}$$

Então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $\kappa_{\delta,n} = o(\delta)$ como desejado.

■

Lema 3.21. *Se (3.8) é verificada, então existe uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}^-$ que também é uma seqüência (PS) para I.*

Demonstração. O item (vi) do Lema 3.16 garante que $\mathcal{N}^-$ é um conjunto fechado de E e portanto um espaço métrico completo. Pelo Princípio Variacional de Ekeland existe uma seqüência (u_n) em $\mathcal{N}^-$ satisfazendo

$$I(u_n) < c_1 + \frac{1}{n},\ I(w) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall w \in \mathcal{N}^-. \tag{3.25}$$

Pela estimativa obtida na demonstração do Lema 3.12 conclui-se que (u_n) é limitada e do item (iii) do Lema 3.16, que 0 não é ponto aderente de (u_n). O restante da demonstração é análoga a demonstração do Lema 3.19, a partir de (3.15).

■

Observação 3.22. *O Lema 3.18 é utilizado para garantir a existência de um mínimo absoluto de I sobre $\mathcal{N}$, que também é um mínimo local para I sobre E , quando a condição (3.8), e em particular quando (H4), é verificada. Como conseqüência e conforme discutido na introdução deste capítulo, obtemos que sob a hipótese (H4)*

$$c_0 = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{N}^+} I(u).$$

Um fato importante para a demonstração do Teorema 4.4 quando enfrentamos problemas por falta de compacidade, e ainda não mencionado, é que

$$c_0 = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0} I(u)$$

quando $\epsilon = \epsilon^*$.

Demonstração. Seja $\epsilon = \epsilon^*$ e $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $I(u_n) \to c_0$ quando $n \to \infty$. Pela desigualdade (3.12), pode-se supor, utilizando o mesmo argumento utilizado na demonstração do Lema 3.19, que $\int g u_n \, dx > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $w_n = t_0(u_n) u_n \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$, com t_0 como na Observação 3.14. Como $I(w_n) \leq I(u_n)$ obtém-se a identidade desejada.

■

Os próximo dois lemas apresentam propriedades importantes dos pontos que realizam os problemas de minimização envolvendo c_0 e c_1.

Lema 3.23. *Suponha (H1), (H3) e (3.8). Se $u \in \mathcal{N}$ é tal que $I(u) = c_0$, então $u \in \mathcal{N}^+$ e u é um mínimo local para I quando considerado em todo o espaço E.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}$ tal que $I(u) = c_0$. Como em (3.14), prova-se que $\int g u \, dx > 0$. Da existência de $t^+(u)$ e $t^-(u)$, assegurada pelo Lema 3.13 e de $I(t^-(u)u) < I(t^+(u)u)$ segue que $u \in \mathcal{N}^+$.

Como $u \in \mathcal{N}^+$, $t^- = 1$. Então pela desigualdade envolvendo t^- e t_{max}, dada no Lema 3.13,

$$1 < \left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\, q\, |u|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{p\,q-1}}.$$

Assim, para um certo $\delta > 0$ suficientemente pequeno

$$1 < \left(\frac{\|w-u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\, q\, |w-u|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{p\,q-1}}, \; \forall w \in E, \; \|w\| < \delta. \tag{3.26}$$

Pelo Lema 3.18, para o $\delta > 0$ acima ou até mesmo menor caso necessário, seja $t : \{w \in E : \|w\| < \delta\} \to \mathbb{R}$ tal que $t(w)(u-w) \in \mathcal{N}$ para todo $w \in E$ com $\|w\| < \delta$.

Uma vez que $t(w) \to 1$ quando $\|w\| \to 0$, pode-se assumir que

$$t(w) < \left(\frac{\|w-u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\, q\, |w-u|_{q+1}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{p\,q-1}}, \; \forall w \in E, \; \|w\| < \delta.$$

A última desigualdade e o Lema 3.13 implicam que $t(w)(u-w) \in \mathcal{N}^+$. Uma vez mais pelo Lema 3.13 e pelo fato que $I(u) = c_0$,

$$I(t(u-w)) \geq I(t(w)(u-w)) \geq I(u), \ \forall\, t \in \left[0, \left(\frac{\|w-u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\, q\, |w-u|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}\right].$$

Assim, através da desigualdade (3.26) pode-se concluir que $I(u-w) \geq I(u)$ para todo $w \in E$ com $\|w\| < \delta$, isto é, u é um mínimo local de I.

■

Lema 3.24. *Suponha que as hipóteses (H1) e (H3) estejam satisfeitas e $\epsilon \in \mathbb{R}$ qualquer. Se $u \in \mathcal{N}^-$ é tal que $I(u) = c_1$ então u é um ponto crítico de I.*

Demonstração. Considere o conjunto aberto $A = \{u \in E : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\, q\, |u|_{q+1}^{q+1} < 0\}$ e $G : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(u) = \langle I'(u), u\rangle = \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - |u|_{q+1}^{q+1} - \int g u \, dx.$$

Assim, $G \in C^1(A, \mathbb{R})$, $\mathcal{N}^- = G^{-1}(\{0\})$ e para cada $u \in \mathcal{N}^-$

$$\langle G'(u), u\rangle = \frac{p+1}{p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - (q+1)\,|u|_{q+1}^{q+1} - \int g u\, dx = \frac{1}{p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - q\,|u|_{q+1}^{q+1} < 0. \tag{3.27}$$

Se $u \in \mathcal{N}^-$ é tal que $I(u) = c_1$, então pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle I'(u), v\rangle = \lambda \langle G'(u), v\rangle, \ \forall\ v \in E,$$

e em particular

$$0 = \langle I'(u), u\rangle = \lambda \langle G'(u), u\rangle.$$

Segue da última identidade e de (3.27) que $\lambda = 0$ e, portanto que u é um ponto crítico de I.

■

3.2 A hipótese de positividade

Nesta seção, com o auxílio do Teorema D.7, vamos apresentar uma caracterização dos elementos de E' que satisfazem a Definição 3.2.

Lema 3.25. *Seja $g \in E'$. Então $g \geq 0$ (no sentido da Definição 3.2) se, e somente se a função $\overline{u}$, dada pelo Teorema D.7, tal que*

$$\int |\Delta \overline{u}|^{(1/p)-1} \Delta \overline{u} \Delta w \, dx = \int g w \, dx, \ \forall w \in E,$$

satisfaz $-\Delta \overline{u} \geq 0$ q.t.p. em Ω (e portanto $\overline{u} \geq 0$ q.t.p. em Ω).

Demonstração. Segue dos Teoremas D.3 e D.4 que $-\Delta : E \to L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ é um isomorfismo isométrico. Assim, se $g \geq 0$ no sentido da Definição 3.2 então para cada $f \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ com $f \geq 0$ q.t.p. em Ω, existe $w \in E$ tal que $-\Delta w = f$. Daí,

$$\int |\Delta \overline{u}|^{(1/p)-1} \left(-\Delta \overline{u}\right) f \, dx = \int |\Delta \overline{u}|^{(1/p)-1} \left(-\Delta \overline{u}\right) \left(-\Delta w\right) \, dx \int g w \, dx \geq 0.$$

De onde conclui-se que $-\Delta \overline{u} \geq 0$ q.t.p. em Ω.

■

O lema acima permite concluir que, no caso em que $g \in C^1(\overline{\Omega})$, a condição de positividade sobre g de que $v_* \geq 0$ em Ω, como considerada em [31] (com v_* como em Notações Básicas do início do texto) é equivalente a $g \geq 0$ no sentido da Definição 3.2.

De fato, seja w a solução (clássica) de

$$\begin{cases} -\Delta w &= v_*^p \text{ em } \Omega, \\ w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Em particular, tem-se que $w \in E$. Por outro lado, seja $\overline{u} \in E$, dada pelo Teorema D.7, tal que

$$\int |\Delta \overline{u}|^{(1/p)-1} \Delta \overline{u} \Delta u \, dx = \int g u \, dx, \ \forall u \in E.$$

Então para todo elemento $u \in E$

$$\begin{aligned} \int |\Delta \overline{u}|^{(1/p)-1} \Delta \overline{u} \Delta u \, dx &= \int g u \, dx = \int (-\Delta v_*) u \, dx = \int v_* (-\Delta u) \, dx \\ &= \int |\Delta w|^{(1/p)-1} \Delta w \Delta u \, dx. \end{aligned}$$

Logo, pela unicidade fornecida pelo Teorema D.7 tem-se que $w = \overline{u}$. Aplicando agora o Lema 3.25; tem-se que $g \geq 0$ no sentido da Definição 3.2 se, e somente se $-\Delta \overline{u} = v_*^p \geq 0$ q.t.p. (neste caso em todo ponto) em Ω. No entanto, observe que $v_*^p \geq 0$ em Ω se, e somente se $v_* \geq 0$ em Ω.

De tal equivalência concluímos que existem funções $g \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo $g \geq 0$ no sentido da Definição 3.2 que trocam de sinal em Ω (veja a última seção do Capítulo 1).

3.3 A condição de Palais-Smale

As demonstrações dos Teoremas 3.4, 3.5 e 3.6 são baseadas em minimizações de I sobre $\mathcal{N}$, e também em partes de $\mathcal{N}$. Para mostrar que I assume tais valores mínimos, utilizamos do fato que I satisfaz a condição (PS).

Pretendemos utilizar o Lema B.1 para mostrar que o funcional I satisfaz a condição (PS). Para isso, utilizamos o Lema D.7 que fornece uma representação de E'.

Pela definição de I temos que

$$\langle I'(u), w\rangle = \int |\Delta u|^{(1/p)-1}\, \Delta u \Delta w \, dx - \int |u|^{q-1}\, uw \, dx - \epsilon \int gw \, dx, \ \forall\, u, w \in E.$$

Assim, podemos escrever $I' = T + K$ onde T é o homeomorfismo dado por (D.3) e $K : E \to E'$ é dado por

$$\langle K(u), w\rangle = -\int |u|^{q-1}\, uw \, dx - \epsilon \int gw \, dx, \ \forall\, u, w \in E.$$

Segue da imersão compacta de E em $L^{q+1}(\Omega)$, dada pela hipótese (H2), que K é compacto. Dessa forma, o Lema B.1 garante que, para mostrar que I satisfaz (PS) basta mostrar que:

Lema 3.26. *Toda seqüência (PS) de I é limitada.*

Demonstração. Seja (u_n) uma seqüência (PS) para I. Assim, existe $C > 0$ e uma seqüência de números reais positivos $\sigma_n \to 0$ tal que, para todo n e para todo $w \in E$

$$|I(u_n)| = \left| \frac{p}{p+1} \int |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \, dx - \frac{1}{q+1} \int |u_n|^{q+1} \, dx - \epsilon \int g u_n \, dx \right| \leq C$$

e

$$|\langle I'(u_n), w\rangle| = \left| \int |\Delta u_n|^{(1/p)-1}\, \Delta u_n \Delta w \, dx - \int |u_n|^{q-1}\, u_n w \, dx - \epsilon \int gw \, dx \right| \leq \sigma_n \|w\|.$$

Da identidade

$$(q+1)I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle = \frac{p\,q-1}{p+1} \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} - \epsilon q \int g u_n \, dx$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{p\,q-1}{p+1} \|u_n\|^{\frac{p+1}{p}} &= (q+1)I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle + \epsilon q \int g u_n \, dx \\ &\leq (q+1)C + \sigma_n \|u_n\| + |\epsilon|\, q\, |g|_*\, \|u_n\|, \end{aligned}$$

mostrando que (u_n) é limitada.

■

Fica então mostrado que:

Lema 3.27. *Suponha (H1), (H2) e (H3). Para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}$ o funcional I satisfaz (PS).*

Demonstração. É uma conseqüência direta dos Lemas B.1 e 3.26 e da decomposição para I' apresentada acima.

■

3.4 Demonstração dos Teoremas

3.4.1 Demonstração do Teorema 3.1

Os argumentos apresentados abaixo mostram que as soluções fracas de (3.1) produzem soluções clássicas de (3.3) e que as soluções clássicas de (3.3) fornecem soluções fracas para (3.1).

Vamos dividir esta demonstração nos casos em que: $N \leq \frac{2}{p} + 2$ e $N > \frac{2}{p} + 2$. A hipótese de subcriticalidade (H2) permite aplicar um método de *bootstrap*. O ponto principal desse método consiste em mostrar que sob as hipóteses do Teorema 3.1, qualquer solução fraca u de (3.1) está em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < +\infty$.

Caso 1: $N \leq \frac{2}{p} + 2$

A condição $N \leq \frac{2}{p}+2$, garante via imersões de Sobolev que, em particular, E está imerso em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < +\infty$.

Seja $u \in E$ uma solução fraca de (3.1) e $v = (-\Delta u)^{1/p}$. O Teorema D.3 garante a existência de uma única solução forte para

$$\begin{cases} -\Delta w &= u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definida w e aplicando mais uma vez o Teorema D.3, considere z a solução forte de

$$\begin{cases} -\Delta z &= w^p \text{ em } \Omega, \\ z &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Da imersão de E em $L^r(\Omega)$ para todo $1 < r < +\infty$ e do Teorema D.3 segue que as funções w e z acima definidas estão em $W^{2,r}(\Omega)$ para todo $1 < r < +\infty$. Portanto, utilizando mais uma vez as imersões de Sobolev concluímos que $u, v \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \gamma < 1$.

Da densidade de $E_1 = \{\varphi \in C^2(\overline{\Omega}) : \varphi(x) = 0,\ \forall\, x \in \partial\Omega\}$ em E (veja Teorema D.1), da validade da seguinte identidade

$$\begin{aligned}\int |\Delta z|^{(1/p)-1} (-\Delta z)(-\Delta\varphi)\, dx &= \int w(-\Delta\varphi)\, dx = \int \nabla w \nabla\varphi\, dx = \int (-\Delta w)\varphi\, dx \\ &= \int (u^q + \epsilon g)\varphi\, dx = \int |\Delta u|^{(1/p)-1} (-\Delta u)(-\Delta\varphi)\, dx\end{aligned}$$

para qualquer $\varphi \in E_1$ e do Teorema D.7; segue que $z = u$, e assim, $w = (-\Delta z)^{1/p} = (-\Delta u)^{1/p} = v$. Utilizando os Teoremas H.1, H.2 e as estimativas de Schauder, concluímos que (u, v) é uma solução clássica de (3.3) com a regularidade apresentada no Teorema 3.1.

Caso 2: $N > \frac{2}{p} + 2$

Neste caso, existe $\overline{q} > q$ tal que $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\overline{q}+1} = 1 - \frac{2}{N}$, tem-se $E \hookrightarrow L^{\overline{q}+1}(\Omega)$ e não está imerso em $L^r(\Omega)$ qualquer que seja $r > \overline{q}+1$. Mesmo assim, vamos mostrar que toda solução fraca u de (3.1) está em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < +\infty$. Para isso aplicaremos um método iterativo.

Seja u uma solução fraca de (3.1). Em particular $u \in L^{\overline{q}+1}(\Omega)$. Definindo v, w, z como no caso anterior e procedendo de maneira análoga, mostra-se que $z = u$ e $v = w$, com (u, v) sendo uma solução forte de (3.3), no entanto, desta vez obtém-se $v \in W^{2,\frac{\overline{q}+1}{q}}(\Omega)$.

Se $p(qN - 2(\overline{q}+1)) - 2(\overline{q}+1) \leq 0$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < +\infty$ e o método para por aqui. No pior dos casos, quando $p(qN - 2(\overline{q}+1)) - 2(\overline{q}+1) > 0$ temos via imersão, a imersão (não-compacta) de Sobolev de $W^{2,\frac{\overline{q}+1}{q}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\overline{p}+1}(\Omega)$, que $v \in L^{\overline{p}+1}(\Omega)$ onde

$$\overline{p} + 1 = \frac{(\overline{q}+1)N}{qN - 2(\overline{q}+1)} > p + 1.$$

Segue que $u \in W^{2,\frac{\overline{p}+1}{p}}(\Omega)$, e tal espaço está imerso de forma não-compacta em $L^{\tilde{q}+1}(\Omega)$, onde

$$\tilde{q} + 1 = \frac{(\overline{q}+1)N}{p(qN - 2(\overline{q}+1)) - 2(\overline{q}+1)} > \overline{q} + 1$$

Em particular, neste caso

$$\kappa := \frac{N}{p(qN - 2(\overline{q}+1)) - 2(\overline{q}+1)} > 1.$$

Agora, se (u,v) é uma solução forte do sistema (3.3) e $u \in L^s(\Omega)$ com $s \geq \overline{q}+1$, então no pior dos casos quando $p(qN-2s)-2s > 0$, procedendo como no parágrafo anterior, obtém-se que $u \in L^{\overline{s}}(\Omega)$ onde

$$\overline{s} = \frac{sN}{p(qN-2s)-2s}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{s}}{s} = \frac{N}{p(qN-2s)-2s} > \frac{N}{p(qN-2(\overline{q}+1))-2(\overline{q}+1)} = \kappa > 1.$$

A última estimativa permite aplicar um método iterativo para regularizar as soluções fracas de (3.1). Na verdade, é a estimativa anterior que permite concluir que qualquer solução fraca u de (3.1) esteja em $L^r(\Omega)$ para qualquer $1 \leq r < +\infty$. Para se obter a regularidade $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ basta proceder exatamente como no caso em que $N \leq \frac{2}{p}+2$.

3.4.2 Demonstração do Teorema 3.4

Suponha que as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4) sejam verificadas. Pelo Lema 3.11, a desigualdade (3.8) também é verificada. Os Lemas 3.19 e 3.27, garantem a existência de uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}$, que também é uma seqüência $(\mathrm{PS})_{c_0}$ para I tal que $u_n \to u_0$ em E. Como $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ obtém-se que $u_0 \in \mathcal{N}$ e $I(u_0) = c_0$. Então aplicando o Lema 3.23 conclui-se que $u_0 \in \mathcal{N}^+$ e que u_0 é um mínimo local de I quando considerado em todo o espaço E.

Agora suponha que $g \geq 0$. Uma vez que $-\Delta u_0 \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, pelo Teorema D.3, o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= |-\Delta u_0| \text{ em } \Omega, \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução forte $v \in E$. Então $\|v\| = \|u_0\|$ e pelo princípio do máximo tem-se que $v \geq |u_0|$ em Ω. Como $-\Delta(v-u_0) \geq 0$ em todo ponto de Ω e $g \geq 0$, segue que $\displaystyle\int gv\,dx \geq \int gu_0 > 0$. Dessa forma

$$\|v\| = \|u_0\|, \; |v|_{q+1} \geq |u_0|_{q+1} \quad \text{e} \quad \int gv\,dx \geq \int gu_0 > 0. \tag{3.29}$$

Segue de (3.29) que as duas raízes positivas de

$$t^{1/p}\|v\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q\,|v|_{q+1}^{q+1} - \epsilon\int gv\,dx = 0,$$

e as duas raízes positivas de

$$t^{1/p}\|u_0\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q\,|u_0|_{q+1}^{q+1} - \epsilon\int g u_0\,dx = 0$$

estão relacionadas por $1 = t^-(u_0) \le t^-(v) \le t^+(v) \le t^+(u_0)$. Assim, pelo Lema 3.13

$$I(t^-(v)v) = \min_{t\in[0,t^+(v)]} I(tv) \le I(v) \le I(u_0), \tag{3.30}$$

onde a segunda desigualdade é obtida por (3.29) e a primeira desigualdade não é estrita se, e somente se $t^-(v) = 1$.

Como $I(t^-(v)v) \ge c_0$ e $I(u_0) = c_0$, conclui-se de (3.30) que $t^-(v) = 1$, ou seja, $v \in \mathcal{N}^+$ e $I(v) = I(u_0) = c_0$. Então pelo Lema 3.23, v também é um mínimo local de I. Se u_0 não satisfaz $-\Delta u_0, u_0 \ge 0$ q.t.p em Ω basta trocar u_0 por v.

3.4.3 Demonstração do Teorema 3.5

A demonstração do Teorema 3.5 segue os passos da demonstração do Teorema 3.4.

Os Lemas 3.21 e 3.27 e o fato que $\mathcal{N}^-$ é fechado, item (vi) do Lema 3.16), garantem a existência de $u_1 \in \mathcal{N}^-$ tal que

$$I(u_1) = c_1 \text{ e } \langle I'(u_1), w\rangle = 0\ \forall\, w \in E.$$

Se $g \ge 0$, seja v como na demonstração do Teorema 3.4 mas agora associado a u_1. Como anteriormente, tem-se

$$\|v\| = \|u_1\|,\ |v|_{q+1} \ge |u_1|_{q+1} \quad \text{e} \quad \int gv\,dx \ge \int gu_1\,dx. \tag{3.31}$$

Caso 1: $\int gu_1\,dx \le 0$

Como observado na demonstração do Lema 3.13,

$$I(u_1) = \max_{t\ge 0} I(tu_1) \ge I(t^+(v)u_1) \ge I(t^+(v)v) \tag{3.32}$$

onde a segunda desigualdade segue de (3.31) e a primeira desigualdade não é estrita se, e somente se $t^+(v) = t^+(u_1) = 1$. Como $I(u_1) = c_1$ e $I(t^+(v)v) \ge c_1$ conclui-se que $t^+(v) = t^+(u_1) = 1$, ou seja, $v \in \mathcal{N}^-$ e $I(v) = c_1$.

Caso 2: $\int g u_1 \, dx > 0$

Neste caso, como na Demonstração do Teorema 3.4, tem-se $t^+(v) \geq t^-(v) \geq t^-(u_1)$. Mais uma vez, como observado na demonstração do Lema 3.13

$$I(u_1) = \max_{t \geq t^-(u_1)} I(tu_1) \geq I(t^+(v)u_1) \geq I(t^+(v)v) \tag{3.33}$$

onde a segunda desigualdade segue de (3.31) e a primeira desigualdade não é estrita se, e somente se $t^+(v) = t^+(u_1) = 1$. Como $I(u_1) = c_1$ e $I(t^+(v)v) \geq c_1$ conclui-se que $t^+(v) = t^+(u_1) = 1$, ou seja, $v \in \mathcal{N}^-$ e $I(v) = c_1$.

Da análise acima fica mostrado que, se $g \geq 0$ então existe $v \in \mathcal{N}^-$ com $v, -\Delta v \geq 0$ q.t.p. em Ω e $I(v) = c_1$. Aplicando o Lema 3.24 obtém-se que v é um ponto crítico de I.

O último passo é mostrar que $c_1 > c_0$. Seja $u_1 \in \mathcal{N}^-$ tal que $I(u_1) = c_1$. Por contradição, suponha que $c_1 = c_0$. Da estimativa (3.11) tem-se $c_0 < 0$ e como na demonstração do Lema 3.19 obtém-se que $\int g u_1 \, dx > 0$. Mas então, pela Observação 3.14, $t^- u_1 \in \mathcal{N}$, na verdade em $\mathcal{N}^+$, e

$$c_0 \leq I(t^- u_1) < I(u_1) = c_1 = c_0,$$

o que é uma contradição.

3.4.4 Demonstração do Teorema 3.6

Empregamos um argumento de aproximação para obter a demonstração do Teorema 3.6. Com esse intuito, se $\epsilon = \epsilon^*$ então a desigualdade (3.9) é satisfeita e qualquer σ em $(0, \epsilon)$ satisfaz a desigualdade (3.8). Para cada σ em $(0, \epsilon)$ seja

$$I_\sigma(u) = \frac{p}{p+1} \int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \, dx - \frac{1}{q+1} \int |u|^{q+1} \, dx - \sigma \int g u \, dx$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_\sigma = \{u \in E : \langle I'_\sigma(u), u\rangle = 0\},\\
&\mathcal{N}_\sigma^+ = \{u \in \mathcal{N}_\sigma : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} > 0\},\\
&\mathcal{N}_{\sigma,0} = \{u \in \mathcal{N}_\sigma : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} = 0\},\\
&\mathcal{N}_\sigma^- = \{u \in \mathcal{N}_\sigma : \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} < 0\},
\end{aligned}$$

e $u_\sigma \in \mathcal{N}_\sigma^+$, fornecida pelo Teorema 3.4, com as seguintes propriedades

$$I_\sigma(u_\sigma) = \inf_{u \in \mathcal{N}_\sigma} I_\sigma(u) = c_{\sigma,0} \text{ e } \langle I'_\sigma(u_\sigma), w\rangle = 0, \ \forall w \in E.$$

O item (i) do Lema 3.16 garante que

$$\|u_\sigma\| < \left(\frac{q(p+1)}{p\,q-1}\sigma\,|g|_*\right)^p < \left(\frac{q(p+1)}{p\,q-1}\epsilon\,|g|_*\right)^p,\ \forall\,\sigma\in(0,\epsilon).$$

Agora, dado $u\in(\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0})\setminus\{0\}$ segue do fato $p\,q>1$ que

$$\epsilon\int gu\,dx = \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - |u|_{q+1}^{q+1} > \|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1}^{q+1} \geq 0.$$

Assim, pelo Lema 3.13, para cada $\sigma\in(0,\epsilon)$ existe um único t_σ^- com $0<t_\sigma^-<\left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q|u|_{q+1}^{q+1}}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$ tal que $t_\sigma^- u\in\mathcal{N}_\sigma^+$. Como $1\leq\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q|u|_{q+1}^{q+1}}$, o Lema 3.13 garante que $I_\sigma(t_\sigma^- u)\leq I_\sigma(u)$. Então, aplicando o item (i) do Lema 3.16

$$c_{\sigma,0}\leq I_\sigma(t_\sigma^- u)\leq I_\sigma(u) = I_\epsilon(u)+(\epsilon-\sigma)\int gu\,dx \leq I_\epsilon(u)+C(\epsilon-\sigma)$$

onde C é uma constante positiva que depende somente de ϵ. Assim, segue de (3.11) que para qualquer σ em $(0,\epsilon)$,

$$-\frac{q}{(p+1)(q+1)}\left(\frac{p\,q}{p\,q-1}\right)^p(\epsilon\,|g|_*)^{p+1} < c_{\sigma,0} \leq \inf_{u\in\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0}} I_\epsilon(u)+C(\epsilon-\sigma).$$

Pela Observação 3.22, tem-se que $c_{\epsilon,0}=\inf_{u\in\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0}} I_\epsilon(u)$. Seja (σ_n) uma seqüência crescente de números positivos tal que $\sigma_n\to\epsilon$ e $c_{\sigma_n,0}\to\overline{c}\leq c_{\epsilon,0}$. Então (u_{σ_n}) é uma seqüência (PS) para I_ϵ, e pelo Lema 3.27, pode-se supor que $u_{\sigma_n}\to u_0$ em E, para algum elemento $u_0\in E$. Uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'_{\sigma_n}(u_{\sigma_n}),w\rangle \\ &= \int|\Delta u_{\sigma_n}|^{(1/p)-1}\Delta u_{\sigma_n}\Delta w\,dx - \int|u_{\sigma_n}|^{q-1}u_{\sigma_n}w\,dx - \sigma_n\int gw\,dx, \end{aligned}$$

para todo $w\in E$ e para todo $n\in\mathbb{N}$, toma-se o limite quando $n\to+\infty$ para obter que $\langle I'_\epsilon(u_0),w\rangle=0$ para todo $w\in E$ e que $I_\epsilon(u_0)=c_\epsilon$. Uma vez que $u_{\sigma_n}\to u_0$ em E e $u_{\sigma_n}\in\mathcal{N}_{\sigma_n}^+$ conclui-se que $u_0\in\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0}$.

Se $g\geq 0$ então de $u_{\sigma_n}\geq 0$ e do fato que $u_{\sigma_n}\to u_0$ q.t.p. em Ω, conclui-se que $u_0\geq 0$ q.t.p. em Ω. Do isomorfismo isométrico entre E e $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, dado por $-\Delta$ através dos Teoremas D.3 e D.4), do homeomorfismo T entre E e E' dado pelo Teorema D.7 e do fato que $-\Delta u_{\sigma_n}\geq 0$ q.t.p. em Ω, segue que para qualquer $h\in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ com $h\geq 0$ q.t.p em Ω

$$0\leq\lim_{n\to+\infty}\int|\Delta u_{\sigma_n}|^{(1/p)-1}(-\Delta u_{\sigma_n})h\,dx = \int|\Delta u_0|^{(1/p)-1}(-\Delta u_0)h\,dx$$

e isso implica que $-\Delta u_0\geq 0$ q.t.p. em Ω.

3.4.5 Demonstração do Teorema 3.7

Seja $\overline{u} \in E$ dado pelo Teorema D.7 tal que

$$\langle g, v\rangle = \int |-\Delta\overline{u}|^{(1/p)-1}(-\Delta\overline{u})(-\Delta v)\,dx,\ \forall\, v \in E.$$

Uma vez que $g \geq 0$ e $g \neq 0$, o Lema 3.25 garante que $-\Delta\overline{u} \geq 0$ q.t.p. em Ω, e $-\Delta\overline{u}$ é não identicamente zero em Ω. Em particular

$$\int g\varphi_1\,dx = \langle g, \varphi_1\rangle = \int |-\Delta\overline{u}|^{(1/p)-1}(-\Delta\overline{u})(-\Delta\varphi_1)\,dx > 0.$$

Suponha que (3.1) possui uma solução fraca não-negativa u. Tomando $v = \varphi_1$ na definição de solução fraca, tem-se que

$$\lambda_1 \int (-\Delta u)^{1/p}\varphi_1\,dx = \int u^q\varphi_1\,dx + \epsilon\int g\varphi_1\,dx.$$

Aplicando a Desigualdade de Jensen (Teorema G.1) à última identidade obtém-se

$$\lambda_1\left(\int(-\Delta u)\varphi_1\,dx\right)^{1/p} \geq \int u^q\varphi_1\,dx + \epsilon\int g\varphi_1\,dx \geq \left(\int u\varphi_1\,dx\right)^q + \epsilon\int g\varphi_1\,dx,$$

e assim

$$\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}\left(\int u\varphi_1\,dx\right)^{1/p} - \left(\int u\varphi_1\,dx\right)^q \geq \epsilon\int g\varphi_1\,dx.$$

Como $p\,q > 1$, o valor máximo da função $l : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $l(t) = \lambda_1^{\frac{p+1}{p}} t^{1/p} - t^q$ é $K\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}$. Dessa forma,

$$\epsilon \leq K\frac{\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}}{\int g\varphi_1\,dx}.$$

3.4.6 Demonstração do Teorema 3.8

O item (v) do Lema 3.16 garante que $\mathcal{N}^+ \subset U_1$. Segue daí que $u_0 \in U_1$.

Da Observação 3.17 e de $q + 1 > \frac{p+1}{p}$, obtém-se a existência de $T > 0$ suficientemente grande tal que $e = Tu_0 \in U_2$ e $I(u_0) > I(e)$. Uma vez que I tem a geometria do passo da montanha com mínimo local em u_0 e satisfaz (PS), aplica-se o Teorema do Passo da Montanha para mostrar que c é um valor crítico para I. Além disso, o item (v) do Lema 3.16 garante que a imagem de qualquer $h \in \mathcal{F}$ intercepta $\mathcal{N}^-$, implicando assim que $c \geq c_1$.

3.4.7 Demonstração do Teorema 3.10

Seja (ϵ_n) uma seqüência decrescente de números positivos satisfazendo (H4), que converge para 0 e seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_{\epsilon_n,1}$ a solução de (3.1) dada pelo Teorema 3.5 que está em $\mathcal{N}_{\epsilon_n}^-$. Então $u_{\epsilon_n,1}$ é uma seqüência (PS) para

$$J(u) = \frac{p}{p+1}\int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx - \frac{1}{q+1}\int |u|^{q+1}\, dx,$$

que por sua vez satisfaz (PS) pelo Lema 3.27. Segue daí a existência de $u \in E$, com $u_{\epsilon_n,1} \to u$ em E , que é um ponto crítico de J. Uma vez que $-\Delta u_{\epsilon_n,1}, u_{\epsilon_n,1} \geq 0$ q.t.p. em Ω, pode-se mostrar como na demonstração do Teorema 3.6, que $-\Delta u, u \geq 0$ q.t.p. em Ω, e $u \neq 0$ pelo item (ii) do Lema 3.16. Argumentando como na demonstração do Teorema 3.1, mostra-se as outras afirmações do Teorema 3.10 sobre a função u que acaba de ser obtida.

A demonstração de que $u_{\epsilon,0} \to 0$ em E é baseada no fato de que $u_{\epsilon,0} \in \mathcal{N}_{\epsilon_n}^+$ e no item (i) do Lema 3.16.

CAPÍTULO 4

Uma equação quasilinear crítica não-homogênea

Neste capítulo consideramos o mesmo problema do capítulo anterior, mas sob hipóteses diferentes, sendo que a principal diferença é a questão de criticalidade. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de fronteira regular, com $N \geq 3$. Neste domínio vamos considerar

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\left((-\Delta u)^{1/p}\right) & = & u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, -\Delta u & \geq & 0 \text{ em } \Omega, \\ u, -\Delta u & = & 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

onde $u^q := |u|^{q-1} u$ e $(-\Delta u)^{1/p} := |-\Delta u|^{(1/p)-1} (-\Delta u)$, $\epsilon > 0$ é um parâmetro e g é uma função de $C^1(\overline{\Omega})$.

Aqui E e F representam, respectivamente, os espaços de Sobolev $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ e E' o espaço dual de E.

Consideremos E e E' munidos das normas do Capítulo 3.

É claro que $C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow E'$ através de

$$\langle g, u \rangle = \int_\Omega gu\, dx,\ \forall\, u \in E,\ g \in C^1(\overline{\Omega}).$$

A definição de solução fraca para (4.1) é a mesma do capítulo anterior e uma vez mais, a motivação para o estudo de (4.1) dá-se pela equivalência entre (4.1) e o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u &= v^p \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

da forma apresentada no Teorema 4.2.

Estudamos (4.1) sob as hipóteses

(H1) Criticalidade: $N \geq 3$, $p, q > 0$ e $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} = 1 - \dfrac{2}{N}$.

(H2)
- Se $N = 3, \cdots, 6$ então $p < \frac{N}{N-2}$.
- Se $N = 7, \cdots, 12$ então $\frac{1}{2} < p < \frac{N}{N-2}$.
- Se $N \geq 13$ então $\frac{N+6}{2N-6} \leq p < \frac{N}{N-2}$.

(H3) $g \in C^1(\overline{\Omega})$ com $g \neq 0$ e $v_* \geq 0$ em Ω.

Os resultados apresentados neste capítulo estendem alguns dos resultados encontrados em [11] e [31] uma vez que tais artigos não tratam o caso quando uma das potências p ou q está em $(0, 1)$ e são semelhantes àqueles apresentados no capítulo anterior. No entanto, a obtenção de tais resultados é uma tarefa com grau de dificuldade considerável, principalmente pelo fato de a hipótese (H1) afirmar que a imersão $E \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ não é mais compacta.

Definição 4.1. *Dizemos que um elemento $u \in E$ é não negativo e escrevemos $u \geq 0$, se u satisfizer $u, -\Delta u \geq 0$ q.t.p. em Ω.*

Das hipóteses acima, as soluções fracas de (4.1) são precisamente os pontos críticos não-negativos do funcional

$$I(u) = \frac{p}{p+1} \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \, dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u|^{q+1} \, dx - \epsilon \int_\Omega g u \, dx, \tag{4.3}$$

que está bem definido em E e é de classe C^1.

A principal dificuldade de se garantir a multiplicidade de soluções para a equação (4.1), quando ϵ é suficientemente pequeno, vem do fato que (H1) compromete a compacidade de I e uma possível falha da condição (PS) é esperada. Um dos objetivos deste capítulo é localizar os níveis livres deste efeito de não-compacidade. Com este intuito, aplicamos o Princípio de Concentração de Compacidade de P.L. Lions [37] apresentado no apêndice deste texto.

Sejam $K = \left(\frac{1}{p\,q}\right)^{\frac{1}{p\,q-1}} \frac{p\,q-1}{p\,q}$ e S a melhor constante de Sobolev para imersão de E em $L^{q+1}(\Omega)$. Vale observar a relação entre S e R do capítulo anterior.

Mostramos também aqui que I assume seu valor mínimo sobre a Variedade de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in E : \langle I'(u), u\rangle = 0\}$$

quando ϵ é suficientemente pequeno. Por isso, adicionamos ao conjunto de hipóteses acima a seguinte condição

(H4) $0 < \epsilon < \epsilon^* := \dfrac{KS^{\frac{pN}{2(p+1)^2}}}{|g|_*}$.

Observe que (H4) é exatamente a condição (H4) do capítulo anterior, uma vez que as potências p e q estão relacionadas por

$$q+1 = \frac{N(p+1)}{p(N-2)-2}, \quad q = \frac{N+2(p+1)}{p(N-2)+2}, \tag{4.4}$$

e portanto

$$\frac{p(q+1)}{(p\,q-1)(p+1)} = \frac{p}{p+1}\frac{q+1}{p\,q-1} = \frac{p}{p+1}\frac{N(p+1)}{p(N-2)-2}\frac{p(N-2)-2}{2(p+1)^2} = \frac{pN}{2(p+1)^2}.$$

Nosso primeiro resultado trata da regularidade das soluções fracas de (4.1) e da equivalência entre (4.1) e (4.2).

Teorema 4.2. *Seja $u \in E$ uma solução fraca de (4.1). Se $v = (-\Delta u)^{1/p}$ então $(u, v) \in E \times F$ é uma solução forte de (4.2).*

A hipótese (H1) não permite que seja aplicado um argumento de *bootstrap*, semelhante àquele da demonstração do Teorema 3.1, para obter uma regularidade maior das soluções fracas de (4.1) quando (p, q) é um ponto arbitrário sobre a hipérbole crítica. No entanto, se além de (H1) supusermos que $p, q > 1$ então um resultado de regularidade clássica pode ser encontrado em [32]. Por esse motivo, acreditamos que o Teorema 4.2 possa ser melhorado, no entanto o mesmo é suficiente para nossos propósitos.

O teorema abaixo é o primeiro resultado sobre a existência de soluções fracas para (4.1).

Teorema 4.3. *Sob as hipóteses (H1), (H3) e (H4) o ínfimo*

$$c_0 := \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) \tag{4.5}$$

é assumido em um ponto não-negativo $u_0 \in \mathcal{N}$, o qual é um mínimo local para I quando considerado em todo o espaço E.

Utilizando um argumento de aproximação baseado no Teorema 4.3, obtemos

Teorema 4.4. *Se as hipóteses (H1) e (H3) são satisfeitas e $\epsilon = \epsilon^*$ então c_0 é assumido em um ponto não-negativo u_0, o qual é um ponto crítico para I.*

Seguindo exatamente a mesma demonstração do Teorema 3.7 mostramos um resultado de não-existência.

Teorema 4.5. *Suponha satisfeitas as hipóteses (H1) com $p, q \geq 1$ e (H3). Então (4.1) não possui solução fraca não-negativa se $\epsilon > K \dfrac{\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}}{\int_\Omega g\varphi_1\, dx}$.*

Da mesma forma que no capítulo anterior, a questão de não-existência quando um dos expoentes p ou q é menor que 1 é ainda um problema em aberto.

No Capítulo 2, garantimos a existência de no mínimo uma solução clássica positiva $(u, v) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para o sistema (4.2) para valores de ϵ suficientemente pequenos sob hipóteses mais gerais que (H1) e (H3). Assim, supondo que (H1) e (H3) sejam satisfeitas considere

$$\epsilon^{**} = \min\{\sup\{\epsilon > 0 : (4.2) \text{ admite solução clássica}\}, \epsilon^*\}$$

e observe que se o Teorema 4.2 assegurasse regularidade clássica teríamos $\epsilon^{**} = \epsilon^*$.

Seja $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$. Para garantir a existência de uma segunda solução para a equação (4.1) argumentamos da seguinte forma. Se a solução u_0 de (4.1) fornecida pelo Teorema 4.3 não for tal que $(u_0, (-\Delta u_0)^{1/p})$ seja uma solução clássica de (4.2), fica garantida, pelos resultados do Capítulo 2, a existência de duas solução fracas para (4.1). Caso $(u_0, (\Delta u_0)^{1/p})$ seja uma solução clássica de (4.2) procedemos como abaixo.

Em todo o restante desta introdução estaremos supondo que $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$ e que a solução u_0 de (4.1) fornecida pelo Teorema 4.3 é tal que $(u_0, (-\Delta u_0)^{1/p})$ é uma solução clássica de (4.2).

Particionamos $\mathcal{N}$ em $\mathcal{N}^+$, $\mathcal{N}_0$ e $\mathcal{N}^-$ da mesma forma que em (3.6) e com argumentos fornecidos pelo Teorema do Passo da Montanha obtemos:

Teorema 4.6. *Suponha que (H1), (H2) e (H3) estejam satisfeitas, que $\epsilon \in (0, \epsilon^* *)$ e que $(u_0, (-\Delta u_0)^{1/p})$ seja uma solução clássica de (4.2). Então*

$$c_1 := \inf_{u \in \mathcal{N}^-} I(u) > c_0,$$

e c_1 é assumido em um ponto $u_1 \in \mathcal{N}^-$, o qual é um ponto crítico não-negativo para I.

A condição (H1) e o fato de que u_0 é um mínimo local dizem que o funcional I possui uma geometria do passo da montanha, e como já observado, também prejudica a compacidade de I. Seguindo as idéias dos trabalhos pioneiros de Brezis-Nirenberg [5] e Tarantello [42] vamos mostrar na Proposição 4.30, mesmo com a imersão $E \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ não sendo compacta, que I satisfaz $(\text{PS})_c$ para todo $c < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$, onde S é a melhor constante de Sobolev para a imersão de E em $L^{q+1}(\Omega)$ dada por

$$S = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \; dx, u \in \mathcal{D}^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1} \; dx \right\}.$$

Seja φ uma função extremal (um instanton) radialmente simétrica, com $\varphi(0) = 1$, $\varphi \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, onde S é assumido. Sabemos por Hulshof-Van der Vorst [33], que todas as funções extremais positivas são radialmente simétricas e são dadas por

$$\varphi_{\delta,a}(x) = \delta^{-\frac{N}{q+1}} \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right), \; x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.6}$$

com a variando em $\mathbb{R}^N$ e δ em $(0, +\infty)$.

Dados $a \in \mathbb{R}^N$ e $\rho > 0$ denotaremos por ξ_a uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $0 \leq \xi_a(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi_a \equiv 1$ em $B(a, \rho)$ e $supp(\xi_a) \subset B(a, 2\rho)$. Por conveniência, escrevemos

$$U_{\delta,a}(x) = \xi_a(x)\varphi_{\delta,a}(x), \; x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.7}$$

Suponha (H1), (H2) e (H3) satisfeitas e que $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$. Fixe $a \in \Omega$. Veremos na Proposição 4.31 a existência de $\rho > 0$, $R > 0$ e $\delta > 0$ tal que $e := u_0 + RU_{\delta,a} \in U_2$ (U_2 como no Lema 4.16), $I(u_0) > I(e)$ e

$$\max_{t \in [0,1]} I(u_0 + tRU_{\delta,a}) < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}.$$

Fixe tais a, ρ, R, δ e considere

$$\mathcal{F} = \{h : [0,1] \to E \text{ contínua}, \; h(0) = u_0, \, h(1) = e\}.$$

Assim, em virtude da Proposição 4.30, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obter um outro resultado.

Teorema 4.7. *Sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) e* $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$ *o valor*

$$c = \inf_{h \in \mathcal{F}} \max_{t \in [0,1]} I(h(t))$$

define um valor crítico para I *e* $c \geq c_1$.

Ainda não conseguimos determinar se $c > c_1$ ou $c = c_1$. Dessa modo, não há como enunciar um resultado adicional sobre multiplicidade de soluções para (4.1).

Como uma conseqüência imediata dos Teoremas 4.2, 4.3, 4.4, 4.6 e 4.5 apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *Suponha que (H1), (H2) e (H3) sejam satisfeitas. Então o sistema Hamiltoniano*

$$\begin{cases} -\Delta u &= v^p \text{ em } \Omega \\ -\Delta v &= u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

possui no mínimo duas soluções fortes se $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$, *no mínimo uma solução forte se* $\epsilon \in [\epsilon^{**}, \epsilon^*]$ *e não admite solução forte se* $\epsilon > K\frac{\lambda_1^{\frac{p+1}{p}}}{\int g\varphi_1\, dx}$ *e* $p, q \geq 1$.

Como observado no Capítulo 3, em virtude de alguns dos resultados encontrados em [27] e da Observação 2.5, todos os resultados enunciados acima podem ser obtidos se substituímos $\epsilon g(x)$ por $\epsilon g(x)u^r$ com $0 < r < \frac{1}{p}$ e $g \in C^1(\overline{\Omega})$ com $g \geq 0$ em Ω, o qual é um problema do tipo côncavo-convexo-crítico.

Para cada $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$ denotamos por $u_{0,\epsilon}$ e $u_{1,\epsilon}$ as soluções de (4.1) dadas pelos Teoremas 4.3 e 4.6 respectivamente e **supomos que o Teorema 4.2 seja melhorado, de forma que as soluções fracas de (4.1) produzam soluções clássicas de (4.2)**. Finalizamos o conjunto de resultados deste capítulo fazendo uma análise do comportamento de $u_{0,\epsilon}$ e $u_{1,\epsilon}$ quando ϵ tende a zero e Ω é um conjunto estrelado (starshaped) em relação a origem. Tal análise é motivada pelo resultado de não-existência de solução em $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ para o sistema homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u &= v^p \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= u^q \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

provado por Mitidieri em [38].

Teorema 4.9. *Sob as hipóteses (H1), (H2) e (H3) com Ω estrelado em relação a origem e supondo $(u_{0,\epsilon}, (-\Delta u_{0,\epsilon})^{1/p})$ uma solução clássica de (4.2) para cada $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$, tem-se que $u_{0,\epsilon} \to 0$ e $u_{1,\epsilon} \rightharpoonup 0$ em E quando $\epsilon \to 0$, mas $(u_{\epsilon_n,1})$ não converge (forte) para 0 em E.*

4.1 Resultados Preliminares

Para obter a demonstração dos teoremas enunciados na seção anterior vamos utilizar uma série de lemas. Em toda esta seção suporemos, mesmo que implicitamente, que as hipóteses (H1) e (H3) estão verificadas. Salientamos também que, nenhum resultado desta seção depende das restrições impostas por (H2).

Observamos que as hipóteses (H1) e (H3) deste capítulo implicam que as hipóteses (H1) e (H3) do capítulo anterior também estão satisfeitas. Dessa forma, podemos obter de maneira análoga todos os resultados da Seção 3.1, exceto o Lema 3.15; pois esses foram obtidos através de argumentos que não envolviam compacidade. Por isso, nos reservamos no direito de apenas indicar quais as demonstrações correspondentes. Todas as poucas diferenças em alguns enunciados são justificadas pela troca de R por S e pelas identidades apresentadas em (4.4).

Proposição 4.10. *Se a hipótese (H4) é satisfeita então*

$$\int_\Omega gu\,dx < \frac{K}{\epsilon}\|u\|^{\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}},\ \forall\, u \in E,\ |u|_{q+1,\Omega} = 1. \tag{4.10}$$

Se $\epsilon = \epsilon^*$ então

$$\int_\Omega gu\,dx \leq \frac{K}{\epsilon}\|u\|^{\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}},\ \forall\, u \in E,\ |u|_{q+1,\Omega} = 1. \tag{4.11}$$

Demonstração. Ver Proposição 3.11.

■

Lema 4.11. *I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Ver Lema 3.12.

■

Dado $u \in E\backslash\{0\}$ considere $i : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $i(t) := t^{1/p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q\,|u|^{q+1}_{q+1,\Omega}$. Observe que

$$\langle I'(tu), tu\rangle = t\left(t^{1/p}\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q\,|u|^{q+1}_{q+1,\Omega} - \epsilon\int_\Omega gu\,dx\right).$$

Dessa forma, quando $t > 0$, $tu \in \mathcal{N}$ se e somente se $i(t) = \epsilon \int_\Omega gu\,dx$. Por outro lado, (H1) implica que para cada $u \in E\backslash\{0\}$, $i(t)$ é limitada superiormente e mais $i(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ além de $i(t)$ assumir seu valor máximo em

$$t_{max} := \left(\frac{\|u\|^{\frac{p+1}{p}}}{p\,q\,|u|_{q+1,\Omega}^{q+1}} \right)^{\frac{p}{p\,q-1}}.$$

O próximo lema mostra claramente o propósito da hipótese (H4).

Lema 4.12. *Se $\epsilon > 0$ é tal que (4.10) é verificada, então para cada $u \in E\backslash\{0\}$, existe um único $t^+ = t^+(u) > 0$ tal que $t^+u \in \mathcal{N}^-$. Em particular $t^+ > t_{max}$ e $I(t^+u) = \max_{t \geq t_{max}} I(tu)$. Além disso, se $\int_\Omega gu\,dx > 0$, existe também um único $t^- = t^-(u) > 0$ tal que $t^-u \in \mathcal{N}^+$. Em particular, $t^- < t_{max}$ e $I(t^-u) \leq I(tu)$ para todo $t \in [0, t^+]$.*

Demonstração. Ver Lema 3.13.

■

Observação 4.13. *Seja $u \in E\backslash\{0\}$. Como no capítulo anterior, a hipótese (4.10) e em particular a condição (H4), garante que:*

$$(i) \int_\Omega gu\,dx \leq 0: \{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u\} \text{ e } t^+u \in \mathcal{N}^-;$$
$$(ii) \int_\Omega gu\,dx > 0: \{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u, t^-u\},\ t^+u \in \mathcal{N}^-,\ t^-u \in \mathcal{N}^+ \text{ e } I(t^-u) < I(t^+u).$$

Em particular, quando (4.10) é verificada, $\mathcal{N}_0 = \{0\}$. Ainda sob (4.10) e com $u \in E\backslash\{0\}$, como observado no Lema 3.13:

$$(i) \int_\Omega gu\,dx \leq 0: I(t^+u) = \max_{t \geq 0} I(tu);$$
$$(ii) \int_\Omega gu\,dx > 0: I(t^-u) = \min_{t \in [0,t^+]} I(tu) \text{ e } I(t^+u) = \max_{t \geq t^-} I(tu).$$

Agora, se $\epsilon = \epsilon^*$ então para cada $u \in E\backslash\{0\}$

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u\},\ t^+u \in \mathcal{N}^- \quad se \quad \int_\Omega gu\,dx \leq 0.$$

Mas para o caso onde $\int gu\,dx > 0$, dois fatos podem ocorrer:

- *se $\int_\Omega gu\,dx = \epsilon^* i(t_{max})$ então*

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t_{max}u\} \quad e \quad t_{max}u \in \mathcal{N}_0.$$

- *se* $\int_\Omega gu\,dx > \epsilon^* i(t_{max})$ *então*

$$\{tu : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+u, t^-u\},\ t^+u \in \mathcal{N}^-,\ t^-u \in \mathcal{N}^+ \quad e \quad I(t^-u) < I(t^+u).$$

Em particular, quando $\epsilon = \epsilon^*$ *e* $\int_\Omega gu\,dx > 0$*, existe* $t_0 = t_0(u) > 0$ *tal que* $t_0u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ *e* $I(t_0u) = \min\{I(tu) : t > 0, tu \in \mathcal{N}\}$.

O próximo lema é importante para a construção de seqüências que convergem para soluções de (4.1).

Lema 4.14. *Se (H4) é satisfeita então*

$$\mu_0 = \inf_{u\in E,\, |u|_{q+1,\Omega}=1} \left(K\|u\|^{\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}} - \epsilon \int_\Omega gu\,dx \right)$$

é positivo.

Demonstração. Uma vez que (H4) é válido, então $\epsilon = \epsilon^* - \tau$ para algum $\tau > 0$. Assim, para cada $u \in E$ tal que $|u|_{q+1,\Omega} = 1$, tem-se

$$K\|u\|^{\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}} - \epsilon \int_\Omega gu\,dx \geq \|u\| \left(K\|u\|^{\frac{N}{2(p+1)}} - \epsilon^* |g|_* \right) + \|u\|\tau |g|_* \geq (\epsilon^* - \epsilon) |g|_* S^{\frac{p}{p+1}}.$$

Portando $\mu_0 \geq \tau |g|_* S^{\frac{p}{p+1}}$.

■

Observação 4.15. *Acreditamos que* $\mu_0 > 0$ *mesmo quando apenas (4.10) é satisfeita. Uma possível demonstração de tal fato pode ser feita seguindo as idéias de [42] e algumas estimativas apresentadas em (G.2).*

Considere a aplicação $\Psi : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi(u) = K\frac{\|u\|^{\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}}}{|u|_{q+1,\Omega}^{\frac{N}{2(p+1)}}} - \epsilon \int_\Omega gu\,dx.$$

Para $t > 0$ e $|u|_{q+1,\Omega} = 1$, temos que

$$\Psi(tu) = t\left(K\|u\|^{\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}} - \epsilon \int_\Omega gu\,dx \right).$$

Assim, do Lema 4.14, dado $\gamma > 0$

$$\inf_{u\in E,\, |u|_{q+1,\Omega}\geq\gamma} \Psi(u) = \inf_{u\in E,\, |u|_{q+1,\Omega}\geq\gamma} \Psi\left(|u|_{q+1,\Omega}\frac{u}{|u|_{q+1,\Omega}}\right) \geq \gamma\mu_0. \tag{4.12}$$

Em particular, se (H4) é satisfeita então o ínfimo dado por (4.12) é positivo.

Suponha que $\epsilon > 0$ satisfaz (H4). Da continuidade de $t_{max} : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ e da propriedade de unicidade de t^+ mostramos que $t^+ : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Assim, a função

$$\Phi : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad \text{dada por} \quad \Phi(u) = t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) - \|u\|$$

é contínua. Em particular,

$$\mathcal{N}^- = \Phi^{-1}(0) = \left\{u \in E\backslash\{0\} : t^+\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|\right\}$$

é um conjunto fechado de $E\backslash\{0\}$, mais ainda podemos concluir que $\mathcal{N}^-$ também é um conjunto fechado de E através de (iii) do Lema 4.16. Por outro lado

$$\begin{aligned} U_2 &= \Phi^{-1}\left((-\infty,0)\right) = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\| > t^+\left(\tfrac{u}{\|u\|}\right)\right\} \\ U_1^* &= \Phi^{-1}\left((0,+\infty)\right) = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \|u\| < t^+\left(\tfrac{u}{\|u\|}\right)\right\} \end{aligned}$$

são conjuntos abertos de $E\backslash\{0\}$ e portanto de E, e mais uma vez pelo Lema 4.16 concluímos que $U_1 = U_1^* \cup \{0\}$ é um conjunto aberto de E.

O lema a seguir apresenta algumas propriedades dos conjuntos $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^+$, $\mathcal{N}^-$ e $\mathcal{N}_0$.

Lema 4.16. *Para cada $\epsilon > 0$ tem-se:*

(i) $\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ é limitado. Mais especificamente, para qualquer $u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$

$$\|u\| < \left(\frac{N+2(p+1)}{2(p+1)}\epsilon\, |g|_*\right)^p.$$

(ii) $\mathcal{N}^-$ é não-limitado.

(iii) Para qualquer $u \in \mathcal{N}^-$

$$\|u\| > \left(\frac{S^{\frac{pN}{p(N-2)-2}}}{p\,q}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$$

(observe que a limitação inferior não depende de ϵ).

No entanto, se $\epsilon > 0$ é tal que (H4) é satisfeita, então:

(iv) $\mathcal{N}_0 = \{0\}$.

(v) $\mathcal{N}^-$ *desconecta* E *no sentido de que, dados* $u \in U_1$, $v \in U_2$ *e* $h : [0,1] \to E$ *contínua satisfazendo* $h(0) = u$ *e* $h(1) = v$, *a imagem de* h *intercepta* $\mathcal{N}^-$. *Além disso,* $\mathcal{N}^+ \subset U_1$.

(vi) Seja $S_E = \{u \in E : \|u\| = 1\}$. *A aplicação* $T^+ : S_E \to \mathcal{N}^-$ *definida por* $T^+(u) = t^+(u)u$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Ver Lema 3.16.

■

O próximo resultado será utilizado para garantir que algumas seqüências minimizantes de I em partes de $\mathcal{N}$ são seqüências (PS) para I. Tal resultado mostrará também que um certo ponto crítico de I é um mínimo local.

Lema 4.17. *Seja* $\epsilon > 0$ *satisfazendo (H4). Dado* $u \in \mathcal{N}\backslash\{0\}$, *existe* $\delta > 0$ *e uma função diferenciável positiva* $t : \{w \in E : \|w\| < \delta\} \to \mathbb{R}$, *satisfazendo* $t(0) = 1$ *tal que para todo* $w \in E$ *com* $\|w\| < \delta$; $t(w)(u - w) \in \mathcal{N}$. *Além disso,*

$$\langle t'(0), v\rangle = \frac{(p+1)\displaystyle\int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1}\Delta u \Delta v\,dx - p(q+1)\int_\Omega |u|^{q-1}uv\,dx - p\epsilon\int_\Omega gv\,dx}{\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - p\,q\,|u|_{q+1,\Omega}^{q+1}}.$$

Demonstração. Ver Lema 3.18.

■

Uma vez que a demonstração do Lema 4.11 fornece uma cota inferior para c_0 apresentaremos uma cota superior negativa para c_0, e o fato de c_0 ser negativo é importante para realização de alguns de nossos cálculos.

Seja $\overline{u} \in E$, dada pelo Teorema D.7, tal que

$$\int_\Omega gu\,dx = \int_\Omega |\Delta\overline{u}|^{(1/p)-1}\Delta\overline{u}\Delta u\,dx,\ \forall u \in E.$$

Em particular, pelo item (i) do Teorema D.7, $\int_\Omega g\overline{u}\,dx = \|\overline{u}\|^{\frac{p+1}{p}} = |g|_*^{p+1} > 0$. Assim, o Lema 4.12 garante a existência de um único $t_* = t^-(\overline{u}) > 0$ tal que $t_*\overline{u} \in \mathcal{N}^+$. Procedendo como no capítulo anterior, prova-se que sob a condição (H4)

$$-\frac{q}{(p+1)(q+1)}\left(\frac{p\,q}{p\,q-1}\right)^p(\epsilon\,|g|_*)^{p+1} < c_0 < -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right)t_*^{\frac{p+1}{p}}\,|g|_*^{p+1}. \qquad (4.13)$$

Quando $\epsilon = \epsilon^*$, tomamos $t_* = t_0(\overline{u})$ dado pela Observação 4.13, para garantir que

$$-\frac{q}{(p+1)(q+1)}\left(\frac{p\,q}{p\,q-1}\right)^p (\epsilon\,|g|_*)^{p+1} < c_0 \leq -\left(\frac{p\,q-1}{p(p+1)(q+1)}\right) t_*^{\frac{p+1}{p}}\,|g|_*^{p+1}. \qquad (4.14)$$

A seguir empregamos o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar que a hipótese (H4) garante a existência de uma seqüência minimizante para c_0 e de uma seqüência minimizante para c_1 com uma propriedade muito especial.

Lema 4.18. *Se (H1), (H3) e (H4) são satisfeitas então existe uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}$ que também é uma seqüência (PS) para I.*

Demonstração. Ver Lema 3.19.

■

Lema 4.19. *Se (H1), (H3) e (H4) são verificadas, então existe uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}^-$ que também é uma seqüência (PS) para I.*

Demonstração. Ver Lema 3.21.

Observação 4.20. *Como na Observação 3.22, para $\epsilon = \epsilon^*$*

$$c_0 = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{N}^+\cup\mathcal{N}_0} I(u).$$

Os próximos dois lemas apresentam propriedades importantes dos pontos que realizam os problemas de minimização envolvendo c_0 e c_1.

Lema 4.21. *Suponha (H1), (H3) e (4.10). Se $u \in \mathcal{N}$ é tal que $I(u) = c_0$, então $u \in \mathcal{N}^+$ e u é um mínimo local para I quando I é considerado em todo o espaço E.*

Demonstração. Ver Lema 3.23.

Lema 4.22. *Suponha que as hipóteses (H1) e (H3) estejam satisfeitas e $\epsilon \in \mathbb{R}$ arbitrário. Se $u \in \mathcal{N}^-$ é tal que $I(u) = c_1$ então u é um ponto crítico de I.*

Demonstração. Ver Lema 3.24.

Observação 4.23. *Sejam $r, s > 1$ tais que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. O operador de Nemytskii $\aleph : L^r(\Omega) \to L^s(\Omega)$ dado por $\aleph(v) = |v|^{r-2}\,v$ não é fracamente seqüencialmente contínuo se $r \neq 2$, como apresentado no Exemplo D.6. Em virtude disso, concluímos que o operador T apresentado no Teorema D.7 não é fracamente seqüencialmente contínuo.*

Da definição de I temos que

$$\langle I'(u), w\rangle = \int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1}\,\Delta u \Delta w\,dx - \int_\Omega |u|^{q-1}\,uw\,dx - \epsilon\int_\Omega gw\,dx,\ \forall\, u, w \in E.$$

Dessa forma, podemos escrever $I' = T + K$ onde T é o homeomorfismo dado em (D.3) e $K : E \to E'$ é definido por

$$\langle K(u), w\rangle = -\int_\Omega |u|^{q-1}\,uw\,dx - \epsilon\int_\Omega gw\,dx,\ \forall\, u, w \in E.$$

É claro que K é fracamente seqüencialmente contínuo, o que não ocorre com I' acaso $p \neq 1$, em virtude da Observação 4.23. Tal observação evidencia ainda mais a dificuldade para se encontrar pontos críticos de I.

4.2 A condição de Palais-Smale

Empregaremos o Princípio de Concentração e Compacidade para obter mais informações sobre as seqüências (PS) do operador I, além daquelas já apresentadas no apêndice.

No capítulo anterior, a imersão de E em $L^{q+1}(\Omega)$ era compacta, o que permitiu mostrar que o funcional I satisfazia a condição (PS). Assim foi possível provar que toda seqüência (PS) para I admitia uma subseqüência convergente em E para uma solução de (3.1).

Neste capítulo, a imersão de E em $L^{q+1}(\Omega)$ não é mais compacta e isso impossibilita mostrar que I possui a propriedade do parágrafo anterior em todos os níveis. Inspirados em Silva-Soares [40], mostraremos na Proposição 4.28 que toda seqüência (PS) para I admite subseqüência que converge fraco para uma solução de (4.1). Também localizaremos na Proposição 4.30 os níveis c onde I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$.

Lema 4.24. *Qualquer seqüência (PS) de I é limitada.*

Demonstração. Veja Lema 3.26.

■

Nesta seção, quando considerarmos (u_n) uma seqüência (PS) para I, o elemento u em E representará aquele fornecido pelo Lema C.5.

Lema 4.25. *Se (H1) e (H3) são satisfeitas e (u_n) é uma seqüência (PS) do operador I então existe uma subseqüência, também denotada por (u_n), satisfazendo os itens (i)-(vii) do Lema C.5 com o fato de que J é no máximo finito.*

Demonstração. Seja $x_k \in \overline{\Omega}$ no suporte singular de μ e ν. Considere $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \le \zeta \le 1$ em $\mathbb{R}^N$, $\zeta \equiv 1$ em $B(0,1)$ e $supp(\zeta) \subset B(0,2)$. E mais, para qualquer $\theta > 0$ defina $\zeta_\theta(x) = \zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)$.

Assim, existem constantes positivas C_1 e $C_2 > 0$, que não dependem de θ, tal que $|\nabla\zeta_\theta(x)| \le \frac{C_1}{\theta}$ e $|\Delta\zeta_\theta(x)| \le \frac{C_2}{\theta^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Tem-se também, pelo Lema D.2, que $u_n\zeta_\theta \in E$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\theta > 0$.

Fixe $\theta > 0$. Da identidade

$$\Delta(u_n\zeta_\theta) = \Delta u_n\zeta_\theta + 2\nabla u_n\nabla\zeta_\theta + u_n\Delta\zeta_\theta,$$

da limitação uniforme em relação a n das normas em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ de $u_n, |\nabla u_n|, \Delta u_n$; da desigualdade fornecida pela Proposição G.2 e da limitação na norma uniforme de $\zeta_\theta, |\nabla\zeta_\theta|$ e $\Delta\zeta_\theta$ segue que $(u_n\zeta_\theta)$ é uma seqüência limitada em E. Portanto, $\langle I'(u_n), u_n\zeta_\theta\rangle = o(1)$, isto é,

$$\begin{aligned} o(1) \;=\; & \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}\zeta_\theta\,dx - \int_\Omega |u_n|^{q+1}\zeta_\theta\,dx - \epsilon\int_\Omega g\zeta_\theta u_n\,dx \\ & + \int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1}\Delta u_n u_n\Delta\zeta_\theta + 2\,|\Delta u_n|^{(1/p)-1}\Delta u_n\nabla u_n\nabla\zeta_\theta\,dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em E

$$\int_\Omega g\zeta_\theta u_n\,dx \overset{n\to\infty}{\rightarrow} \int_\Omega g\zeta_\theta u\,dx. \tag{4.16}$$

Observando que $\zeta_\theta \to \delta_{x_k}(x)$ para todo x em Ω e, portanto que $\zeta_\theta \to 0$ q.t.p. em Ω, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega g\zeta_\theta u\,dx \overset{\theta\to 0}{\rightarrow} 0. \tag{4.17}$$

Das identidades

$$\Delta\zeta_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2}\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right), \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{\tau} = 1$$

com $\tau = \frac{N}{2}$, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} & \left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1}\Delta u_n u_n\Delta\zeta_\theta\,dx\right| \\ & \le |\Delta u_n|^{1//p}_{\frac{p+1}{p},\Omega}\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1}\left|\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}}dx\right)^{1/(q+1)} |\Delta\zeta|^{1/2}_{\tau/2,\mathbb{R}^N} \\ & \le C\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1}\left|\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}}dx\right)^{1/(q+1)} \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde C é uma constante independente de n e θ.

Pela definição de convergência fraca*

$$\int_\Omega |u_n|^{q+1}\left|\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega \left|\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} d\nu. \tag{4.19}$$

Observando que $\left|\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} \overset{\theta\to 0}{\to} 0$ em todo ponto $x \in \Omega$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega \left|\Delta\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{q+1}{2}} d\nu \overset{\theta\to 0}{\to} 0. \tag{4.20}$$

Das identidades

$$\nabla\zeta_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\nabla\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right), \quad \frac{1}{p+1}+\frac{p}{p+1}=1,$$

e uma vez mais pela desigualdade de Hölder

$$\left|\int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1}\Delta u_n \nabla u_n \nabla\zeta_\theta\, dx\right| \leq C\left(\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u_n|^{\frac{p+1}{p}}\, dx\right)^{p/(p+1)}. \tag{4.21}$$

Agora, do fato que $\nabla u_n \to \nabla u$ em $\left(L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)\right)^N$, segue

$$\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u_n|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx. \tag{4.22}$$

Agora, pela Proposição G.8

$$\int_\Omega \frac{1}{\theta^{\frac{p+1}{p}}}\left|\nabla\zeta\left(\frac{x-x_k}{\theta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} |\nabla u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx = O(\theta^{N-\frac{p+1}{p}}). \tag{4.23}$$

Além disso, pela convergência fraca* no sentido das medidas e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}\zeta_\theta\, dx = \lim_{\theta\to 0}\int_\Omega \zeta_\theta\, d\mu = \mu_k \text{ e} \tag{4.24}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{q+1}\zeta_\theta\, dx = \lim_{\theta\to 0}\int_\Omega \zeta_\theta\, d\nu = \nu_k \tag{4.25}$$

uma vez que $\zeta_\theta(x) \to \delta_{x_k}(x)$ para todo $x \in \Omega$, quando $\theta \to 0$.

Assim, por (4.16)-(4.25), tomando o limite em (4.15) com $n \to \infty$ e depois com $\theta \to 0$, obtém-se que

$$0 = \mu_k - \nu_k, \ \forall k \in J.$$

Uma vez que $\mu_k \geq S\nu_k^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}$ tem-se $\nu_k \geq S\nu_k^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}$, para todo $k \in J$. Então, para cada $k \in J$

$$\nu_k = 0 \ \text{ ou } \ \nu_k \geq S^{\frac{1}{1-\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}}.$$

Finalmente, pelo fato de que $\sum_{k\in J} \nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} < +\infty$, J é no máximo finito.

■

De agora em diante podemos supor, a menos de se considerar uma subseqüência, que qualquer seqüência (PS) para o operador I satisfaz os itens (i)-(vii) do Lema C.5 com o fato adicional que J é no máximo finito.

Lema 4.26. *Se $K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j : j \in J\}$ então $u_n \to u$ em $L^{q+1}(K)$.*

Demonstração. Seja $\delta = dist(K, \{x_j : j \in J\})$. Para cada $\theta \in (0, \delta)$ considere $A_\theta = \{x \in \Omega : dist(x, K) < \theta\}$ e $\zeta_\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \zeta_\theta \leq 1$ e $\zeta_\theta \equiv 1$ sobre $A_{\theta/2}$ e mais $\zeta_\theta \equiv 0$ sobre $\Omega\backslash A_\theta$. Então,

$$\int_K |u_n|^{q+1}\, dx \leq \int_{A_\theta} \zeta_\theta\, |u_n|^{q+1}\, dx = \int_\Omega \zeta_\theta\, |u_n|^{q+1}\, dx.$$

Da última desigualdade segue que

$$\limsup_n \int_K |u_n|^{q+1}\, dx \leq \int_\Omega \zeta_\theta\, d\nu = \int_\Omega \zeta_\theta\, |u|^{q+1}\, dx \leq \int_{A_\theta} |u|^{q+1}\, dx.$$

Tomando o limite com $\theta \to 0$ na desigualdade acima, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\limsup_n \int_K |u_n|^{q+1}\, dx \leq \int_K |u|^{q+1}\, dx.$$

Por outro lado, uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{q+1}(K)$ tem-se que

$$\int_K |u|^{q+1}\, dx \leq \liminf_n \int_K |u_n|^{q+1}\, dx.$$

Como $L^{q+1}(K)$ é uniformemente convexo, segue do Teorema F.7 que $u_n \to u$ em $L^{q+1}(K)$.

■

Lema 4.27. *Seja $K \subset\subset \Omega \backslash \{x_j : j \in J\}$. Então $\Delta u_n \to \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, $\theta > 0$ e ζ_θ como no lema anterior. Da desigualdade (G.1) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_K \left(|\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \right) (\Delta u_n - \Delta u)\, dx \\ &\le \int_\Omega \left(|\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \right) (\Delta u_n - \Delta u)\, \zeta_\theta\, dx \qquad (4.26) \\ &= \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \zeta_\theta - |\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \Delta u \zeta_\theta - |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \left(\Delta(u_n - u)\right) \zeta_\theta\, dx. \end{aligned}$$

Fixe $\theta > 0$. Uma vez que $I'(u_n) \to 0$ e $(\zeta_\theta u_n)$ é limitada em E, $\langle I'(u_n), \zeta_\theta u\rangle = o(1)$ e $\langle I'(u_n), \zeta_\theta u_n\rangle = o(1)$. Isto é,

$$o(1) = \int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \left(u \Delta\zeta_\theta + 2\nabla u \nabla\zeta_\theta + \zeta_\theta \Delta u\right) dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1} u_n \zeta_\theta u\, dx - \epsilon \int_\Omega g \zeta_\theta u\, dx \qquad (4.27)$$

e

$$o(1) = \int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \left(u_n \Delta\zeta_\theta + 2\nabla u_n \nabla\zeta_\theta + \zeta_\theta \Delta u_n\right) dx - \int_\Omega |u_n|^{q+1} \zeta_\theta\, dx - \epsilon \int_\Omega g \zeta_\theta u_n\, dx. \qquad (4.28)$$

Segue de (4.26)-(4.28), do fato que $\zeta_\theta u_n \rightharpoonup \zeta_\theta u$ em E (Lema D.2), do Lema 4.26, do Corolário D.8 e da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_K \left(|\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \right) (\Delta u_n - \Delta u)\, dx \\ &\le \int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \Delta\zeta_\theta (u - u_n)\, dx + 2 \int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \nabla\zeta_\theta \left(\nabla u - \nabla u_n\right) dx \\ &\quad - \int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \left(\Delta u_n - \Delta u\right) \zeta_\theta\, dx + o(1) \\ &\le C \left(\int_{A_\theta} |u - u_n|^{q+1}\, dx \right)^{1/(q+1)} + C \int_\Omega \left(|\nabla u - \nabla u_n|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \right)^{p/(p+1)} \\ &\quad - \int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \left(\Delta u_n - \Delta u\right) \zeta_\theta\, dx + o(1) \\ &= - \int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \left(\Delta u_n - \Delta u\right) \zeta_\theta\, dx + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_K \left(|\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n - |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \right) (\Delta u_n - \Delta u)\, dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty. \qquad (4.29)$$

No caso em que $\frac{p+1}{p} \ge 2$ segue de (4.29) e da desigualdade fornecida pela expressão (G.1) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_K |\Delta u_n - \Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx = 0.$$

No caso em que $1 < \frac{p+1}{p} < 2$, mais uma vez por (4.29) e (G.1) obtém-se que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_K \frac{|\Delta u_n - \Delta u|^2}{(|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{1-1/p}}\,dx = 0,$$

e pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_K |\Delta u_n - \Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx &= \int_K \frac{|\Delta u_n - \Delta u|^{\frac{p+1}{p}}}{(|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{\frac{\frac{p+1}{p}\frac{p-1}{p}}{2}}}(|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{\frac{\frac{p+1}{p}\frac{p-1}{p}}{2}}\,dx \\
&\leq \left(\int_K \frac{|\Delta u_n - \Delta u|^2}{(|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{1-1/p}}\,dx\right)^{\frac{p+1}{2p}} \left(\int_K (|\Delta u_n| + |\Delta u|)^{\frac{p+1}{p}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{2p}} \\
&\to 0 \text{ quando } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Em ambos os casos, conclui-se que $\Delta u_n \to \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$.

■

Uma vez que é possível escrever

$$\Omega\backslash\{x_j : j \in J\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

onde cada K_n é compacto, empregamos o argumento da diagonal para enunciar o seguinte resultado:

Corolário 4.28. *Se (u_n) é uma seqüência (PS) para I então existe uma subseqüência, também denotada por (u_n), tal que os itens (i)-(vii) do Lema C.5 são satisfeitos com J no máximo finito e*

(viii) $u_n \to u$ em $L^{q+1}(K)$ para todo $K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j : j \in J\}$,

(ix) $\Delta u_n \to \Delta u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$ para todo $K \subset\subset \Omega\backslash\{x_j : j \in J\}$ e

(x) $\Delta u_n \to \Delta u$ q.t.p. em Ω.

A seguinte proposição apresenta um resultado que poderia ser obtido mais diretamente se o operador de Nemytskii $\aleph$ fosse fracamente seqüencialmente contínuo.

Proposição 4.29. *Se (u_n) é uma seqüência (PS) para I então existe uma subseqüência, aqui também denotada por (u_n), tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E e u é uma solução fraca de (4.1).*

Demonstração. Suponha que (u_n) satisfaz todas as propriedades do Corolário 4.28. Pelo Teorema F.4, $|u_n|^{q-1} u_n \rightharpoonup |u|^{q-1} u$ em $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ e $|\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \rightharpoonup |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u$ em $L^{p+1}(\Omega)$.

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ na seguinte identidade

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{(1/p)-1} \Delta u_n \Delta w \, dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1} u_n w \, dx - \epsilon \int_\Omega g u_n \, dx = o(1), \ \forall \, w \in E,$$

conclui-se que

$$\int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1} \Delta u \Delta w \, dx - \int_\Omega |u|^{q-1} u w \, dx - \epsilon \int_\Omega g u \, dx = 0, \ \forall \, w \in E,$$

isto é, u é uma solução fraca de (4.1).

■

O resultado anterior não implica que I satisfaz a condição (PS). Este fato é tratado na próxima proposição.

Proposição 4.30. *I satisfaz $(PS)_\beta$ para cada $\beta < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma seqüência $(\mathrm{PS})_\beta$ para I com $\beta < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$. Pelo Corolário 4.28, pode-se supor que os itens (i)-(vii) do Lema C.5 e também que os itens (viii)-(x) do Corolário 4.28 são satisfeitos, onde u é uma solução fraca de (4.1), com J no máximo finito e mais, $\mu_k = \nu_k$, $\forall \, k \in J$ e para cada $k \in J$, $\nu_k = 0$ ou $\nu_k \geq S^{\frac{1}{1-\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}}$.

Por contradição suponha que exista um índice $k \in J$ tal que $\nu_k \neq 0$.

Uma vez que $\frac{pN}{2(p+1)} = \frac{1}{1-\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}}$,

$$\begin{aligned}
\beta &= \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} \int_\Omega |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \, dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u_n|^{q+1} \, dx - \epsilon \int_\Omega g u_n \, dx \right) \\
&\geq \frac{p}{p+1} \int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \, dx + \frac{p}{p+1} \sum_{j\in J} \nu_j - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u|^{q+1} \, dx - \frac{1}{q+1} \sum_{j \in J} \nu_j - \epsilon \int_\Omega g u \, dx \\
&\geq I(u) + \frac{2}{N} \nu_k \geq I(u) + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}.
\end{aligned}$$

Como u é uma solução fraca de (4.1) então $I(u) \geq c_0$ e assim, $\beta \geq c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$ o que é um absurdo.

Dessa forma, fica mostrado que J é o conjunto vazio. Adicionando a isto o fato que $L^{q+1}(\Omega)$ é uniformemente convexo, utiliza-se o Teorema F.7 para mostrar que $u_n \to u$ in $L^{q+1}(\Omega)$.

Escrevendo $u_n = u + v_n$, segue que $v_n \rightharpoonup 0$ em E; $\Delta v_n \to 0$ q.t.p. em Ω e $v_n \to 0$ em $L^{q+1}(\Omega)$.

O próximo objetivo é mostrar que $v_n \to 0$ em E, isto é, $\Delta v_n \to 0$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Por um resultado de Brezis-Lieb (Teorema F.3) tem-se que

$$|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} = |\Delta u + \Delta v_n|^{\frac{p+1}{p},\Omega}_{\frac{p+1}{p}} = |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} + |\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} + o(1).$$

Uma vez que u é uma solução fraca de (4.1)

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle I'(u_n), u_n\rangle = |\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} - |u_n|^{q+1}_{q+1,\Omega} - \epsilon\int_\Omega g u_n\,dx \\ &= |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} + |\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} - |u|^{q+1}_{q+1,\Omega} - \epsilon\int_\Omega g u\,dx + o(1) = |\Delta v_n|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p},\Omega} + o(1), \end{aligned}$$

isto é, $v_n \to 0$ em E. Portanto $u_n \to u$ em E, como desejado.

■

4.3 Primeira Solução

4.3.1 Demonstração do Teorema 4.3

A demonstração do Teorema 4.3 é feita de modo inteiramente análogo à demonstração do Teorema 3.4, uma vez que o Lema 4.30 garante que I satisfaz $(\mathrm{PS})_{c_0}$.

4.3.2 Demonstração do Teorema 4.4

A demonstração do Teorema 4.4 é obtida através de um argumento de aproximação idêntico àquele utilizado na demonstração do Teorema 3.6. O argumento é baseado na construção de uma seqüência $(\mathrm{PS})_{\overline{c}}$ para I, com $\overline{c} \le c_0$. Neste caso, para utilização eficaz do Lema 4.30 empregamos o fato fornecido pela Obervação 4.20 de que

$$c_0 = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{N}^+\cup\mathcal{N}_0} I(u).$$

4.4 Regularidade das Soluções

4.4.1 Demonstração do Teorema 4.2

Seja u uma solução fraca de (4.1) e considere $v = (-\Delta u)^{1/p}$. O Teorema D.3 garante a existência de uma única solução forte $w \in F$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta w &= u^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez definida $w \in F$ e aplicando mais uma vez o Teorema D.3, obtém-se a existência de $z \in E$, a solução forte de

$$\begin{cases} -\Delta z &= w^p \text{ em } \Omega, \\ z &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, o subespaço $E_1 = \{\varphi \in C^2(\overline{\Omega}) : \varphi(x) = 0, \ \forall\, x \in \partial\Omega\}$ é denso em E (veja Teorema D.1). Além disso,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Delta z|^{(1/p)-1} (-\Delta z)(-\Delta\varphi)\, dx &= \int_\Omega w(-\Delta\varphi)\, dx = \int_\Omega \nabla w \nabla\varphi\, dx \\ &= \int_\Omega (-\Delta w)\varphi\, dx = \int_\Omega (u^q + \epsilon g)\varphi\, dx \\ &= \int_\Omega |\Delta u|^{(1/p)-1} (-\Delta u)(-\Delta\varphi)\, dx \end{aligned}$$

para qualquer $\varphi \in E_1$. A identidade acima e o Teorema D.7 combinados com a densidade de E_1 em E mostram que $z = u$, e portanto que, $w = (-\Delta z)^{1/p} = (-\Delta u)^{1/p} = v$. Isto permite concluir que $(u, v) \in E \times F$ é uma solução forte para (4.2).

4.5 Algumas estimativas

Nesta seção empregaremos a hipótese (H2). Vale salientar que as restrições impostas através de tal hipótese estão relacionadas com algumas estimativas de [6] e [33].

Em toda esta seção estaremos supondo que $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$ e que a solução u_0 de (4.1) fornecida pelo Teorema 4.3 é tal que $(u_0, (-\Delta u_0)^{1/p})$ é uma solução clássica de (4.2). Vimos que u_0 é um mínimo local para I, e no Lema 4.16 que $\mathcal{N}^-$ desconecta U_1 de U_2 e que $u_0 \in U_1$.

Como $(u_0, (-\Delta u_0)^{1/p})$ é uma solução clássica de (4.2), podemos aplicar o PMF para concluir que $u_0 > 0$ em Ω. Fixe $a \in \Omega$.

As estimativas desta seção são essenciais para provar a existência de uma segunda solução fraca para (4.1) que é obtida com o auxílio do Teorema do Passo da Montanha.

O objetivo principal desta seção é provar a proposição a seguir. Para isso, considere $U_{\delta,a}$ como definida em (4.7).

Proposição 4.31. *Suponha que (H1), (H2), (H3) e $\epsilon \in (0, \epsilon^{*}*)$ são satisfeitas e fixe $a \in \Omega$. Então existem $R > 0$, $\rho > 0$, $\delta > 0$ de forma que $u_0 + RU_{\delta,a} \in U_2$; $I(u_0 + RU_{\delta,a}) < I(u_0)$ e*

$$\max_{t\in[0,1]} I(u_0 + tRU_{\delta,a}) < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}.$$

A demonstração da proposição acima é um tanto quanto elaborada. Por essa razão, dividimos sua prova em uma série de lemas.

Seja φ a função extremal radialmente simétrica decrescente ao longo dos raios que emanam da origem com $\varphi(0) = 1$, onde a constante de Sobolev S é assumida. Escrevemos

$$\psi(x) = (-\Delta\varphi(x))^{1/p}.$$

Uma vez que φ é uma função extremal para S, tem-se que para cada $\delta > 0$ e cada $a \in \mathbb{R}^N$, a função $\varphi_{\delta,a}$, dada por (4.6) também é extremal para S.

Hulshof e Van der Vorst [33] estudaram o comportamento assintótico de (φ, ψ). Mais precisamente eles mostraram o seguinte:

Lema 4.32. *Se $q \leq \frac{N+2}{N-2}$, então existem constantes positivas $l_1, l_2 > 0$, que dependem de p e N tais que:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{N-2}\varphi(x) = l_1, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{N-2}\psi(x) = l_2, \ \ se\ q > \dfrac{N}{N-2}, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{|x|^{N-2}}{log(|x|)}\psi(x) = l_2, \ \ se\ q = \dfrac{N}{N-2}, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{q(N-2)-2}\psi(x) \ = l_2, \ \ se\ q < \dfrac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{4.30}$$

Se $q > \frac{N+2}{N-2}$ então existem constantes positivas $l_1, l_2 > 0$, que dependem de p e N tais *que:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{N-2}\,\psi(x) = l_2, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{N-2}\,\varphi(x) = l_1, \;\; se\ p > \dfrac{N}{N-2}, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{|x|^{N-2}}{log(|x|)}\varphi(x) = l_1, \;\; se\ p = \dfrac{N}{N-2}, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{p(N-2)-2}\,\varphi(x) = l_1, \;\; se\ p < \dfrac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{4.31}$$

Observação 4.33. *A demonstração do Teorema 2 de [33], mais precisamente sua equação (4.2), mostra que a constante positiva l_1 do lema anterior também satisfaz*

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{N-1}\,|\nabla\varphi(x)| = (N-2)l_1, \;\; se\ p > \dfrac{N}{N-2}, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{|x|^{N-1}}{log(|x|)}\,|\nabla\varphi(x)| = (N-2)l_1, \;\; se\ p = \dfrac{N}{N-2}, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{p(N-2)-1}\,|\nabla\varphi(x)| = (p(N-2)-2)l_1, \;\; se\ p < \dfrac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{4.32}$$

Para facilitar nossa notação introduzimos as constantes

$$A = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{q+1}\,dx \quad \text{e} \quad B = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta\varphi|^{\frac{p+1}{p}}\,dx. \tag{4.33}$$

Aplicamos as estimativas dadas no Lema 4.32, Observação 4.33, (G.2) e o Lema G.5 para estimar as normas em E e em $L^{q+1}(\Omega)$ de $U_{\delta,a}$.

Observação 4.34. *Nas estimativas realizadas no próximo lema vamos empregar as identidades $q(N-2)-2 = pN$ e $\frac{1}{p} = \frac{p+1}{q+1}$ quando $p = \frac{N}{N-2}$.*

Lema 4.35. *Para qualquer $a \in \mathbb{R}^N$,*

$$|U_{\delta,a}|_{q+1,\Omega}^{q+1} = \begin{cases} A + O(\delta^{q(N-2)-2}) \;\; se\ p > \frac{N}{N-2}, \\ A + |\log\delta|^{q+1}\,O(\delta^{q(N-2)-2}) \;\; se\ p = \frac{N}{N-2}, \\ A + O(\delta^{pN}) \;\; se\ p < \frac{N}{N-2}, \end{cases} \tag{4.34}$$

e

$$\|U_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}} = \begin{cases} B + O(\delta^{N/p}) \;\; se\ p > \frac{N}{N-2}, \\ B + |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}}\,O(\delta^{N/p}) \;\; se\ p = \frac{N}{N-2}, \\ B + O(\delta^{\frac{p+1}{q+1}N}) \;\; se\ p < \frac{N}{N-2}. \end{cases} \tag{4.35}$$

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$ e lembre que $\xi_a \equiv 1$ em $B(a, \rho)$. O primeiro objetivo é estimar $|U_{\delta,a}|_{q+1,\Omega}^{q+1}$.

$$\begin{aligned}
|U_{\delta,a}|_{q+1,\Omega}^{q+1} &= \int_\Omega |\xi_a \varphi_{\delta,a}|^{q+1}\, dx = \int_\Omega \left|\xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{q+1} dx \\
&= \int_\Omega |\xi_a(x)|^{q+1}\frac{1}{\delta^N}\left|\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{q+1} dx \\
&= A + \int_\Omega \left(|\xi_a(x)|^{q+1} - 1\right)\frac{1}{\delta^N}\left|\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{q+1} dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\frac{1}{\delta^N}\left|\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{q+1} dx
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Se $p > \frac{N}{N-2}$, de (4.30), (4.31) e da Proposição G.6 tem-se

$$\varphi^{q+1}(x) \le C\,|x|^{-(q+1)(N-2)} = C\,|x|^{-(q+1)(N-2)} \quad \text{para todo} \;\; x \neq 0.$$

Então

$$\frac{1}{\delta^N}\varphi^{q+1}\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \le C\,|x-a|^{-(q+1)(N-2)}\,\delta^{q(N-2)-2} \quad \text{para todo} \;\; x \neq a.$$

Como $(q+1)(N-2) = q(N-2) - 2 + N > N$, segue da identidade (4.36) que

$$|U_{\delta,a}|_{q+1,\Omega}^{q+1} = A + O(\delta^{q(N-2)-2}).$$

Se $p = \frac{N}{N-2}$ então de (4.31) e da Proposição G.6,

$$\varphi^{q+1}(x) \le C\,|\log|x||^{q+1}\,|x|^{-(N+q(N-2)-2)}, \ \forall x \neq 0$$

e daí, se δ é tão pequeno que $|\log\delta| \ge 1$, (note que: $a + b \le (a+1)b$ para todo $a \ge 0$, e $b \ge 1$)

$$\frac{1}{\delta^N}\varphi^{q+1}\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \le C\left(|\log|x-a||^{q+1} + 1\right)|x-a|^{-(N+q(N-2)-2)}\,|\log\delta|^{q+1}\,\delta^{q(N-2)-2}$$

para todo $x \neq a$. Então de (4.36)

$$|U_{\delta,a}|_{q+1,\Omega}^{q+1} = A + |\log\delta|^{q+1}\,O(\delta^{q(N-2)-2}).$$

Se $p < \frac{N}{N-2}$, de (4.31) e da Proposição G.6

$$\varphi^{q+1}(x) \le C\,|x|^{-N(p+1)}, \ \forall\, x \neq 0$$

e daí

$$\frac{1}{\delta^N}\varphi^{q+1}\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \le C\,|x-a|^{-N(p+1)}\,\delta^{pN}, \ \forall x \neq a.$$

Assim de (4.36) segue que

$$|U_{\delta,a}|_{q+1,\Omega}^{q+1} = A + O(\delta^{pN}).$$

A estimativa de $\|U_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}}$ é feita através da análise da identidade

$$\begin{aligned} \Delta U_{\delta,a}(x) &= \xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \\ &+\delta^{-\frac{N}{q+1}}\left(2\nabla\xi_a(x)\delta^{-1}\nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)+\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right) \end{aligned}$$

e das estimativas fornecidas por (G.2).

Para tanto, cinco etapas são consideradas.

Primeiro Passo: Estimar

$$h_{\delta,a} := \int_\Omega \left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\xi_a(x)\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} dx.$$

Primeiramente é necessário observar que

$$\begin{aligned} &-(N+2(q+1))(p+1)+Np(q+1) = \\ &-\left(N+\frac{2N(p+1)}{p(N-2)-2}\right)(p+1)+pN\frac{N(p+1)}{p(N-2)-2} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} h_{\delta,a} &= \int_\Omega \frac{1}{\delta^N}\left|\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}}|\xi_a(x)|^{\frac{p+1}{p}}\,dx \\ &= B - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\frac{1}{\delta^N}\left|\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}}dx \\ &+\int_\Omega\left(|\xi_a(x)|^{\frac{p+1}{p}}-1\right)\frac{1}{\delta^N}\left|\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}}dx. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Se $q > \frac{N}{N-2}$ então de (4.30), (4.31) e da Proposição G.6 sabe-se que

$$\psi(x) = (-\Delta\varphi(x))^{1/p} \leq C\,|x|^{-(N-2)}, \quad \text{para todo} \quad x \neq 0$$

e daí,

$$\frac{1}{\delta^N}\left|\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{\frac{p+1}{p}} \leq C\,|x-a|^{-(N+p(N-2)-2)}\,\delta^{p(N-2)-2}, \quad \text{para todo} \quad x \neq a.$$

De (4.37)

$$h_{\delta,a} = B + O(\delta^{p(N-2)-2}) = B + O(\delta^{\frac{N(p+1)}{q+1}}).$$

Se $q = \frac{N}{N-2}$, de (4.31) e da Proposição G.6 tem-se

$$\psi(x) = (-\Delta\varphi(x))^{1/p} \leq C \left|\log |x|\right| |x|^{-(N-2)}, \quad \text{para todo } \; x \neq 0,$$

e daí, se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno tal que $|\log \delta| \geq 1$ então,

$$\frac{1}{\delta^N} \left| \Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \right|^{\frac{p+1}{p}} \leq C \left(\left|\log |x-a|\right|^{p+1} + 1 \right) |x-a|^{-(N+p(N-2)-2)} \left|\log \delta\right|^{p+1} \delta^{p(N-2)-2},$$

para todo $x \neq a$. Assim de (4.37)

$$h_{\delta,a} = B + |\log \delta|^{p+1} O\left(\delta^{\frac{(p+1)N}{q+1}}\right).$$

Se $q < \frac{N}{N-2}$ então de (4.31) e da Proposição G.6 tem-se

$$\psi(x) = (-\Delta\varphi(x))^{1/p} \leq C |x|^{-(q(N-2)-2)}, \quad \text{para todo } \; x \neq 0,$$

e assim

$$\frac{1}{\delta^N} \left| \Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \right|^{\frac{p+1}{p}} \leq C |x-a|^{-N(q+1)} \delta^{qN}, \quad \text{para todo } \; x \neq a,$$

Logo, de (4.37)

$$h_{\delta,a} = B + O(\delta^{qN}).$$

Segundo Passo: Estimar

$$i_{\delta,a} := \int_\Omega \left| \delta^{-\frac{N}{q+1}} \delta^{-1} 2\nabla\xi_a(x) \nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) + \delta^{-\frac{N}{q+1}} \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \Delta\xi_a(x) \right|^{\frac{p+1}{p}} dx.$$

Se $p > \frac{N}{N-2}$ então de (4.30)-(4.32) e da Proposição G.6

$$\varphi(x) \leq C |x|^{-(N-2)}, \quad |\nabla\varphi(x)| \leq C |x|^{-(N-1)}, \quad \text{para todo } \; x \neq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} &\left| \delta^{-\frac{N}{q+1}} \delta^{-1} 2\nabla\xi_a(x) \nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) + \delta^{-\frac{N}{q+1}} \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \Delta\xi_a(x) \right| \leq \\ &C\delta^{\frac{q(N-2)-2}{q+1}} \left(|x-a|^{-(N-1)} + |x-a|^{-(N-2)} \right), \end{aligned}$$

para todo $x \neq a$. Como $\frac{q(N-2)-2}{q+1} \frac{p+1}{p} = \frac{N}{p}$ e $\xi_a(x) \equiv 1$ em $B(a,\rho)$ tem-se

$$i_{\delta,a} \leq C\delta^{N/p} \int_{\Omega \setminus B(a,\rho)} \left(|x-a|^{-(N-1)} + |x-a|^{-(N-2)} \right)^{\frac{p+1}{p}} dx = O(\delta^{N/p}).$$

É importante observar que a estimativa acima pode ser feita para todo $\rho > 0$. No entanto, ela depende de ρ e deve ser vista como se $\rho > 0$ estivesse fixado.

Se $p = \frac{N}{N-2}$, então de (4.30)-(4.32) e da Proposição G.6

$$\varphi(x) \leq C\left|\log|x|\right||x|^{-(N-2)}, \quad |\nabla\varphi(x)| \leq C\left|\log|x|\right||x|^{-(N-1)}, \quad \text{para todo} \;\; x \neq 0.$$

Então, se δ é suficientemente pequeno tal que $|\log\delta| \geq 1$

$$\begin{aligned}&\left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-1}2\nabla\xi_a(x)\nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) + \delta^{-\frac{N}{q+1}}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right| \\ &\leq C|\log\delta|\,\delta^{\frac{q(N-2)-2}{q+1}}\left(\left|\log|x-a|\right|+1\right)\left(|x-a|^{-(N-1)} + |x-a|^{-(N-2)}\right)\end{aligned}$$

para todo $x \neq a$. Como $\xi_a(x) \equiv 1$ em $B(a,\rho)$

$$i_{\delta,a} = |\log\delta|^{\frac{p+1}{p}}\,O(\delta^{N/p}).$$

Se $p < \frac{N}{N-2}$, mais uma vez de (4.30)-(4.32) e da Proposição G.6

$$\varphi(x) \leq C|x|^{-(p(N-2)-2)}, \quad |\nabla\varphi(x)| \leq C|x|^{-(p(N-2)-1)}, \quad \text{para todo} \;\; x \neq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-1}2\nabla\xi_a(x)\nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) + \delta^{-\frac{N}{q+1}}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right| \\ &\leq C\delta^{\frac{pN}{q+1}}\left(|x-a|^{-(p(N-2)-2)} + |x-a|^{-(p(N-2)-1)}\right)\end{aligned}$$

para todo $x \neq a$. Como $\xi_a \equiv 0$ em $B(a,\rho)$,

$$i_{\delta,a} = O(\delta^{\frac{p+1}{q+1}N}).$$

Terceiro Passo: Estimar

$$\begin{aligned}j_{\delta,a} \;\; := \;\; \int_\Omega &\left|\xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{1/p}\cdot \\ &\left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\left(2\nabla\xi_a(x)\delta^{-1}\nabla\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right) + \varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right)\right| dx,\end{aligned}$$

através do primeiro e segundo passos.

Sejam $p, q > \frac{N}{N-2}$. Uma vez que $\left(-\frac{N}{q+1} - 2 + p(N-2)\right)\frac{1}{p} + \frac{q(N-2)-2}{q+1} = N-2$, segue das estimativas anteriores que

$$j_{\delta,a} = O(\delta^{N-2}).$$

Se $q = \frac{N}{N-2}$,

$$j_{\delta,a} \leq C\delta^{N-2}|\log\delta|,$$

e se $q < \frac{N}{N-2}$ então de

$$\left(-\frac{N}{q+1} - 2 + p(q(N-2)-2)\right)\frac{1}{p} + \frac{q(N-2)-2}{q+1} = q(N-2)-2$$

segue que

$$j_{\delta,a} = O(\delta^{q(N-2)-2}).$$

Se $p = \frac{N}{N-2}$, de modo semelhante ao caso $q = \frac{N}{N-2}$ conclui-se

$$j_{\delta,a} \leq C\delta^{N-2}\left|\log\delta\right|.$$

Se $p < \frac{N}{N-2}$ então da identidade $\frac{N}{q+1} + \frac{pN}{q+1} = \frac{(p+1)N}{q+1}$, obtém-se

$$j_{\delta,a} = O(\delta^{\frac{(p+1)N}{q+1}}).$$

Quarto Passo: Estimar

$$\begin{aligned} l_{\delta,a} \quad := \quad & \int_\Omega \left|\xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right| \cdot \\ & \qquad \left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\left(2\nabla\xi_a(x)\delta^{-1}\nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right)\right|^{1/p} dx, \end{aligned}$$

empregando as estimativas do primeiro e segundo passos.

Se $p, q > \frac{N}{N-2}$, pela identidade

$$-\frac{N}{q+1} - 2 + p(N-2) + \frac{q(N-2)-2}{q+1}\frac{1}{p} = \frac{pN}{q+1} + \frac{q(N-2)-2}{p(q+1)}$$

tem-se

$$l_{\delta,a} = O(\delta^{\frac{pN}{q+1}+\frac{q(N-2)-2}{(q+1)p}})$$

e se $q = \frac{N}{N-2}$ então

$$l_{\delta,a} = O(\delta^{\frac{pN}{q+1}+\frac{q(N-2)-2}{(q+1)p}})\left|\log\delta\right|^p.$$

Se $q < \frac{N}{N-2}$, através da identidade

$$-\frac{N}{q+1} - 2 + p(q(N-2)-2) + \frac{q(N-2)-2}{q+1}\frac{1}{p} = \left(p\,q + \frac{1}{p}\right)\frac{q(N-2)-2}{q+1}$$

conclui-se

$$l_{\delta,a} = O\left(\delta^{(p\,q+1/p)\frac{q(N-2)-2}{q+1}}\right).$$

Se $p = \frac{N}{N-2}$ tem-se

$$l_{\delta,a} = O(\delta^{\frac{pN}{q+1}+\frac{q(N-2)-2}{p(q+1)}})\left|\log\delta\right|^{1/p}$$

e se $p < \frac{N}{N-2}$, usando a identidade $\frac{pN}{q+1} + \frac{N}{q+1} = \frac{(p+1)N}{q+1}$, conclui-se que

$$l_{\delta,a} = O(\delta^{\frac{(p+1)N}{q+1}}).$$

Quinto Passo: Em virtude de (G.2), para calcular $\|U_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}}$, mais dois termos precisam ser estimados. No caso $\frac{p+1}{p} \leq 3$, isto é, quando $p \geq \frac{1}{2}$ tais termos são semelhantes à alguns termos que já foram calculados. Quando $\frac{p+1}{p} > 3$, ou seja, quando $p < \frac{1}{2}$, os termos abaixo precisam ser estimados.

$$\begin{aligned}
|r(\delta)| \leq\ & C\int_\Omega \left|\xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{(1/p)-1}\cdot \\
& \left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\left(2\nabla\xi_a(x)\delta^{-1}\nabla\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)+\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right)\right|^2 dx, \\
|s(\delta)| \leq\ & C\int_\Omega \left|\xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{2}\cdot \\
& \left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\left(2\nabla\xi_a(x)\delta^{-1}\nabla\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)+\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right)\right|^{(1/p)-1} dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $p < \frac{1}{2}$ é óbvio que $p < \frac{N}{N-2}$. Usando então as identidades,

$$\left(-\frac{N}{q+1} - 2 + p(N-2)\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{pN}{q+1}2 = \frac{(p+1)N}{q+1}$$

e

$$\left(-\frac{N}{q+1} - 2 + p(N-2)\right)2 + \frac{pN}{q+1}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{(p+1)N}{q+1}$$

pode-se concluir que

$$r(\delta), s(\delta) = O(\delta^{\frac{(p+1)N}{q+1}}).$$

Finalmente, através de uma análise das potências de δ nos cálculos realizados acima chega-se nas estimativas desejadas.

■

Lema 4.36. *Suponha (H1), (H2) e (H3) satisfeitas. Dados $a \in \mathbb{R}^N$ e $\rho > 0$, existem $R_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que*

$$u_0 + RU_{\delta,a} \in U_2 \quad e \quad I(u_0 + RU_{\delta,a}) < I(u_0)$$

para qualquer $R \geq R_0$ e qualquer $0 < \delta < \delta_0$.

Demonstração. Pelo Lema 4.35, tem-se a existência de $\delta_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que

$$|u_0 + RU_{\delta,a}|^{q+1}_{q+1,\Omega} \geq \frac{|u_0|^{q+1}_{q+1,\Omega}}{2} + \frac{R^{q+1}}{2}A$$

para todo $R \geq R_0$ e todo $\delta \in (0, \delta_0)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|u_0 + RU_{\delta,a}\|^{q+1} &\leq (\|u_0\| + R\,\|U_{\delta,a}\|)^{q+1} \\
&\leq 2^{q+1}\left(\|u_0\|^{q+1} + R^{q+1}\left(\|U_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p(q+1)}{p+1}}\right) \\
&= 2^{q+1}\left(\|u_0\|^{q+1} + R^{q+1}\left(B^{\frac{p(q+1)}{p+1}} + o(1)\right)\right).
\end{aligned}$$

Da combinação das duas últimas estimativas obtém-se

$$\left|\frac{u_0 + RU_{\delta,a}}{\|u_0 + RU_{\delta,a}\|}\right|_{q+1,\Omega}^{q+1} \geq \lambda > 0$$

para todo $R \geq R_0$ e todo $0 < \delta < \delta_0$ com $\delta_0 = \delta_0(A, B, \rho, a, p, q)$.

Por outro lado, dado $u \neq 0$, se $t > 0$ é de tal forma que $tu \in \mathcal{N}$ então

$$t^{1/p}\,\|u\|^{\frac{p+1}{p}} - t^q\,|u|_{q+1,\Omega}^{q+1} = \epsilon \int_\Omega gu\,dx.$$

Em particular, se $\|u\| = 1$ então

$$t^{1/p} - t^q\,|u|_{q+1,\Omega}^{q+1} = \epsilon \int_\Omega gu\,dx.$$

Da identidade acima e pelo fato de $q > \frac{1}{p}$, obtém-se a existência de uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$0 < t^+\left(\frac{u_0 + RU_{\delta,a}}{\|u_0 + RU_{\delta,a}\|}\right) < C_1$$

para todo $R \geq R_0$ e todo $0 < \delta < \delta_0$.

Observe que

$$\|u_0 + RU_{\delta,a}\| \geq R\|U_{\delta,a}\| - \|u_0\| = R\left(B^{\frac{p}{p+1}} + o(1)\right) - \|u_0\| \geq \frac{R}{2}B^{\frac{p}{p+1}} - 2\,\|u_0\|$$

para todo $0 < \delta < \delta_0$ e todo $R \geq R_0$, podendo-se tomar R_0 ainda maior se necessário. Da definição de U_2 conclui-se que

$$u_0 + RU_{\delta,a} \in U_2, \quad \text{para todo} \;\; R \geq R_0 \;\; \text{e todo} \;\; 0 < \delta < \delta_0.$$

O próximo passo é estimar a energia de $u_0 + RU_{\delta,a}$.

Para $R > 0$ e $0 < \delta < \delta_0$, existem constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4 tais que

$$\begin{aligned}
I(u_0 + RU_{\delta,a}) &= \frac{p}{p+1}\|u_0 + RU_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}|u_0 + RU_{\delta,a}|^{q+1}_{q+1,\Omega} \\
&\quad -\epsilon\int_\Omega g(u_0 + RU_{\delta,a})\,dx \\
&\leq \frac{p2^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}\Big(\|u_0\|^{\frac{p+1}{p}} + R^{\frac{p+1}{p}}(B + o(1))\Big) - \frac{R^{q+1}}{2(q+1)}A + \frac{2}{q+1}|u_0|^{q+1}_{q+1,\Omega} \\
&\quad -\epsilon\int_\Omega g u_0\,dx - \epsilon R\int_\Omega g U_{\delta,a}\,dx \\
&\leq C_1 + C_2 R^{\frac{p+1}{p}} - C_3 R^{q+1} + \epsilon C_4 R \to -\infty
\end{aligned}$$

quando $R \to +\infty$, o que finaliza a demonstração do lema.

■

Agora, fixe $a \in \Omega$ e considere $0 < \rho < 1$ tal que $B(a, 2\rho) \subset \Omega$. Seja $R_0 > 0$ obtido pelo lema anterior e $S_0 = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$.

Vamos estimar mais uma vez $I(u_0 + RU_{\delta,a})$. Como

$$I(u_0 + RU_{\delta,a}) = \frac{p}{p+1}\|u_0 + RU_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}|u_0 + RU_{\delta,a}|^{q+1}_{q+1,\Omega} - \epsilon\int_\Omega g(u_0 + RU_{\delta,a})\,dx, \tag{4.38}$$

e de (G.2),

$$\begin{aligned}
\|u_0 + RU_{\delta,a}\|^{\frac{p+1}{p}} = \int_\Omega \Big(&|\Delta u_0|^{\frac{p+1}{p}} + R^{\frac{p+1}{p}}|\Delta U_{\delta,a}|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{p+1}{p}R|\Delta u_0|^{(1/p)-1}\Delta u_0 \Delta U_{\delta,a} \\
&+ \tfrac{p+1}{p}R^{1/p}|\Delta U_{\delta,a}|^{(1/p)-1}\Delta U_{\delta,a}\Delta u_0\Big)\,dx + r_1(\delta,\rho,R) + s_1(\delta,\rho,R)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

e

$$\begin{aligned}
|u_0 + RU_{\delta,a}|^{q+1}_{q+1,\Omega} &= \int_\Omega \big(|u_0|^{q+1} + R^{q+1}|U_{\delta,a}|^{q+1} + (q+1)R|u_0|^{q-1}u_0 U_{\delta,a} + \\
&\quad +(q+1)R^q (U_{\delta,a})^q u_0\big)\,dx + r_2(\delta,\rho,R) + s_2(\delta,\rho,R),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

precisamos mostrar que:

Lema 4.37. *Se (H1), (H2), (H3) e $\epsilon \in (0, \epsilon^{**})$ são verificadas, então existe uma função positiva $C(\rho)$ com a propriedade de que $C(\rho) = o(1)$, de forma que para cada $R \in [0, R_0]$ e $\rho > 0$ próximo de zero, a igualdade abaixo é satisfeita*

$$\int_\Omega (U_{\delta,a})^q u_0\,dx + r_2(\delta,\rho,R) + s_2(\delta,\rho,R)\,dx = u_0(a)D\delta^{\frac{N}{q+1}} + o(\delta^{\frac{N}{q+1}})\ \textit{e},$$

$$\left|\int_\Omega R^{1/p}\left|\Delta U_{\delta,a}\right|^{(1/p)-1}\Delta U_{\delta,a}\Delta u_0\,dx + r_1(\delta,\rho,R) + s_1(\delta,\rho,R)\right| \leq C(\rho)R^{1/p}\delta^{\frac{N}{q+1}} + o(\delta^{\frac{N}{q+1}}),$$

onde $D = \int_{\mathbb{R}^N}\varphi^q(x)\,dx$.

Demonstração.

Primeiro Passo: Se $q > \frac{N}{N-2}$ então pelo Lema 4.32 e pelas Proposições G.6 e G.8,

$$\int_\Omega (U_{\delta,a})\,u_0\,dx = \delta^{-\frac{N}{q+1}}\int_\Omega \xi_a(x)u_0(x)\varphi^q\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\,dx = u_0(a)D\delta^{\frac{N}{q+1}} + o(\delta^{\frac{N}{q+1}}).$$

Segundo Passo: As estimativas de r_2 e s_2 são obtidas através de (G.2), do Lema 4.32 e das Proposições G.6 e G.8.

Primeiramente, observe que as potências $q^* = \frac{N^2+2N-4}{(N-2)^2}$, $p_* = \frac{N+6}{2(N-3)}$ são tais que $(N/(N-2), q^*), (p_*, 2)$ pertencem a hipérbole crítica $1/(p+1) + 1/(q+1) = 1 - 2/N$. É importante para os próximos cálculos os fatos de que $q^* > 2$ para $N = 2, \cdots, 8$ e $q^* < 2$ para $N \geq 9$.

Primeiro Caso: $q + 1 > 3$.

Por (G.2) tem-se que

$$\begin{aligned}
|r_2(\delta)| &\leq CR^2\delta^{-\frac{2N}{q+1}}\int_\Omega |u_0|^{q-1}\,\xi_a^2(x)\varphi^2\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\,dx,\\
|s_2(\delta)| &\leq CR^{q-1}\delta^{-\frac{(q-1)N}{q+1}}\int_\Omega |u_0|^2\,\xi_a^{q-1}(x)\varphi^{q-1}\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Da hipótese $p < \frac{N}{N-2}$, isto é, $q > q^*$ segue do Lema 4.32 que

$$\lim_{|x|\to+\infty}|x|^{p(N-2)-2}\,\varphi(x) = l_1 > 0.$$

Para realizar a análise de $r_2(\delta)$ é utilizado o Lema G.8 e três casos são considerados,

$$\begin{aligned}
2\left(p(N-2)-2\right) &> N, \quad \text{isto é,} \quad p > \tfrac{N+4}{2(N-2)},\\
2\left(p(N-2)-2\right) &= N, \quad \text{isto é,} \quad p = \tfrac{N+4}{2(N-2)},\\
2\left(p(N-2)-2\right) &< N, \quad \text{isto é,} \quad p < \tfrac{N+4}{2(N-2)}.
\end{aligned}$$

É importante observar que $\frac{2}{N-2} < \frac{N+4}{2(N-2)}$ para todo $N \geq 3$ e

$$\begin{aligned}
\tfrac{N+4}{2(N-2)} &> \tfrac{N}{N-2} \quad \text{para} \quad N = 3,\\
\tfrac{N+4}{2(N-2)} &= \tfrac{N}{N-2} \quad \text{para} \quad N = 4,\\
\tfrac{N+4}{2(N-2)} &< \tfrac{N}{N-2} \quad \text{para} \quad N \geq 5.
\end{aligned}$$

Para $N = 3, 4$; através das observações acima, no caso em que $\frac{2}{N-2} < p < \frac{N}{N-2}$,

$$|r_2(\delta)| \leq CR^2\delta^{-\frac{2N}{q+1}}O(\delta^{2(p(N-2)-2)}) = O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}).$$

Para $N = 5, 6, 7, 8$; mais uma vez pelo Lema G.8

$$|r_2(\delta)| = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) \ \text{ se } \ \frac{2}{N-2} < p < \frac{N+4}{2(N-2)}, \\ O(\delta^{\theta\frac{2pN}{q+1}}) \ \text{ para qualquer } \ 0 < \theta < 1 \ \text{ se } \ p = \frac{N+4}{2(N-2)}, \\ O(\delta^{\frac{(q-1)N}{q+1}}) \ \text{ se } \ \frac{N+4}{2(N-2)} < p < \frac{N}{N-2}. \end{cases}$$

Quando $N \geq 9$, como $q^* < 2$ obtém-se através do mesmo lema que

$$|r_2(\delta)| = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) \ \text{ se } \ \frac{2}{N-2} < p < \frac{N+4}{2(N-2)}, \\ O(\delta^{\theta\frac{2pN}{q+1}}) \ \text{ para qualquer } \ 0 < \theta < 1 \ \text{ se } \ p = \frac{N+4}{2(N-2)}, \\ O(\delta^{\frac{(q-1)N}{q+1}}) \ \text{ se } \ \frac{N+4}{2(N-2)} < p < \frac{N+6}{2(N-3)}. \end{cases}$$

A análise de $s_2(\delta)$, em virtude da identidade $p(N-2) - 2 = \frac{N^2}{q(N-2)-2}$, é realizada nos seguintes três casos,

$$\begin{aligned} &(q-1)\,(p(N-2)-2) > N, \quad \text{isto é,} \quad q > \tfrac{N-2}{2}, \\ &(q-1)\,(p(N-2)-2) = N, \quad \text{isto é,} \quad q = \tfrac{N-2}{2}, \\ &(q-1)\,(p(N-2)-2) < N, \quad \text{isto é,} \quad q < \tfrac{N-2}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$q^* > \frac{N-2}{2} \quad \text{para} \quad N = 3, 4, 5, 6 \quad \text{e} \quad q^* < \frac{N-2}{2} \quad \text{para} \quad N \geq 7.$$

Também $(N-2)/2 \leq 2$ para $N \leq 6$ e $(N-2)/2 > 2$ para $N \geq 7$.

Através das observações acima, para $N = 3, 4, 5, 6$

$$|s_2(\delta)| = O(\delta^{\frac{2N}{q+1}}).$$

e para $N = 7, 8$

$$|s_2(\delta)| = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2N}{q+1}}) \ \text{ se } \ q > \frac{N-2}{2}, \\ O(\delta^{\theta\frac{2N}{q+1}}) \ \text{ para qualquer } \ 0 < \theta < 1 \ \text{ se } \ q = \frac{N-2}{2}, \\ O(\delta^{\frac{p(q-1)N}{q+1}}) \ \text{ se } \ q^* < q < \frac{N-2}{2}. \end{cases}$$

Finalmente, para $N \geq 9$

$$|s_2(\delta)| = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2N}{q+1}}) \ \text{ se } \ q > \frac{N-2}{2}, \\ O(\delta^{\theta\frac{2N}{q+1}}) \ \text{ para qualquer } \ 0 < \theta < 1 \ \text{ se } \ q = \frac{N-2}{2}, \\ O(\delta^{\frac{p(q-1)N}{q+1}}), \ \text{ se } \ 2 < q < \frac{N-2}{2}. \end{cases}$$

Segundo Caso: $q+1 \leq 3$.

Neste caso, as estimativas fornecidas por (G.2) dizem que,

$$|r_2(\delta)| \leq C \int_{\{|u_0| \geq RU_{\delta,a}\}} |u_0| \left(R\delta^{-\frac{N}{q+1}} \xi_a(x) \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right)^q dx,$$
$$|s_2(\delta)| \leq C \int_{|u_0|<RU_{\delta,a}} |u_0|^q R\delta^{-\frac{N}{q+1}} \xi_a(x)\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) dx.$$

Da hipótese $q > q^*$, o caso que agora será estudado é aquele quando $q^* < 2$, isto é, quando $N \geq 9$.

Para analisar $r_2(\delta)$, o primeira passo é notar que $q(p(N-2)-2) = N + 2(p+1) > N$.

Sejam $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha + \beta = q$. Fazendo $\beta(p(N-2)-2) < N$, e usando a identidade $\beta\Big(-\frac{N}{q+1} + p(N-2) - 2\Big) = \beta\frac{pN}{q+1}$ obtém-se

$$|r_2(\delta)| = O(\delta^{\theta\frac{pN}{p(N-2)-2}\frac{N}{q+1}}) \ \text{ para qualquer } \ 0 < \theta < 1.$$

Para analisar $s_2(\delta)$, o ponto de partida é observar que a hipótese $p < \frac{N}{N-2}$ garante que $p(N-2) - 2 < N - 2$.

Sejam $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha + \beta = q$. Fazendo $(1+\beta)(p(N-2)-2) < N$, isto é, $\beta < \frac{(1-p)N+2(p+1)}{p(N-2)-2} < q$ e da identidade $(1+\beta)\Big(-\frac{N}{q+1} + p(N-2) - 2\Big) = (1+\beta)\frac{pN}{q+1}$ tem-se

$$|s_2(\delta)| = O(\delta^{\theta\frac{pN}{p(N-2)-2}\frac{N}{q+1}}) \ \text{ para qualquer } \ 0 < \theta < 1.$$

Juntando todos os cálculos feitos até aqui conclui-se que para $N = 3, 4$

$$r_2(\delta) + s_2(\delta) = O(\delta^{\frac{2N}{q+1}}), \ \text{ se } \ \frac{2}{N-2} < p < \frac{N}{N-2};$$

para $N = 5$

$$r_2(\delta) + s_2(\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) & \text{se } \ \frac{2}{N-2} < p \leq 1, \\ O(\delta^{\frac{2N}{q+1}}) & \text{se } \ 1 < p < \frac{N}{N-2}; \end{cases}$$

para $N = 6, 7$

$$r_2(\delta) + s_2(\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) & \text{se } \ \frac{2}{N-2} < p \leq 1, \\ O(\delta^{\frac{2N}{q+1}}) & \text{se } \ 1 \leq p \leq \frac{N+8}{3N-8}, \\ O(\delta^{\frac{(q-1)N}{q+1}}) & \text{se } \ \frac{N+8}{3N-8} \leq p < \frac{N}{N-2}; \end{cases}$$

para $N = 8$

$$r_2(\delta) + s_2(\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) & \text{se } \ \frac{2}{N-2} < p < 1, \\ O(\delta^{\frac{\theta(q-1)N}{q+1}}) & \text{para qualquer } \ 0 < \theta < 1 \ \text{ se } \ p = 1, \\ O(\delta^{\frac{(q-1)N}{q+1}}) & \text{se } \ 1 < p < \frac{N}{N-2}; \end{cases}$$

para $N = 9, 10, 11$

$$r_2(\delta) + s_2(\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) \text{ se } \frac{2}{N-2} < p \leq \frac{N+8}{3N-8}, \\ O(\delta^{\frac{p(q-1)N}{q+1}}) \text{ se } \frac{N+8}{3N-8} \leq p \leq 1, \\ O(\delta^{\frac{(q-1)N}{q+1}}) \text{ se } 1 \leq p < \frac{N+6}{2(N-3)}, \\ O(\delta^{\frac{\theta pN}{p(N-2)-2}\frac{N}{q+1}}) \text{ para qualquer } 0 < \theta < 1 \text{ se } \frac{N+6}{2(N-3)} \leq p < \frac{N}{N-2}; \end{cases}$$

e para $N \geq 12$

$$r_2(\delta) + s_2(\delta) = \begin{cases} O(\delta^{\frac{2pN}{q+1}}) \text{ se } \frac{2}{N-2} < p \leq \frac{N+8}{3N-8}, \\ O(\delta^{\frac{p(q-1)N}{q+1}}) \text{ se } \frac{N+8}{3N-8} \leq p \leq \frac{N+6}{2(N-3)}, \\ O(\delta^{\frac{\theta pN}{p(N-2)-2}\frac{N}{q+1}}) \text{ para qualquer } 0 < \theta < 1 \text{ se } \frac{N+6}{2(N-3)} \leq p < \frac{N}{N-2}. \end{cases}$$

Fica claro então pelas estimativas acima e hipóteses deste lema que a primeira identidade em seu enunciado é verificada quando $N = 3, \cdots, 8$.

Para as dimensões $N = 9, 10, 11$, a desigualdade $p(q-1) > 1$ é equivalente a $q(q+1) > \frac{N}{2}$ no intervalo $\frac{N+8}{3N-8} < p \leq 1$. Tal desigualdade é verificada, uma vez que $q > \frac{N+4}{N-4}$ em tal intervalo e $\frac{N+4}{N-4}\frac{2N}{N-4} = q(q+1) > \frac{N}{2}$ é equivalente a $N(N-12) < 0$.

Para $N = 12$, da identidade $1 = \frac{N+6}{2(N-3)}$ e da discussão para as dimensões $N = 9, 10, 11$ obtém-se também a validade da primeira identidade deste lema.

Quando $N \geq 13$, a validade da primeira identidade é evidenciada de forma clara.

Terceiro Passo: Calcular

$$m_{\delta,a} := \int_\Omega |\Delta U_{\delta,a}|^{(1/p)-1} \Delta U_{\delta,a} \Delta u_0 \, dx.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \Delta U_{\delta,a}(x) &= \xi_a(x)\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \\ &\quad + \delta^{-\frac{N}{q+1}}\left(2\nabla\xi_a(x)\delta^{-1}\nabla\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right) \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} m_{\delta,a} &= \int_{B(a,\rho)} \left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\Delta\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{1/p} (-\Delta u_0(x)) \, dx \\ &\quad + \int_{B(a,2\rho)\setminus B(a,\rho)} |\Delta U_{\delta,a}|^{(1/p)-1} \Delta U_{\delta,a} \Delta u_0 \, dx. \end{aligned}$$

Como na demonstração do Lema 4.35, a condição $p < \frac{N}{N-2}$ fornece que

$$\left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)\right|^{1/p} \leq C\delta^{\frac{N}{q+1}} |x-a|^{-(N-2)}, \text{ para todo } x \neq a$$

e
$$\begin{aligned}&\left|\delta^{-\frac{N}{q+1}}\delta^{-2}\nabla\xi_a(x)\nabla\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)+\delta^{-\frac{N}{q+1}}\varphi\left(\tfrac{x-a}{\delta}\right)\Delta\xi_a(x)\right|\leq\\ &C\delta^{\frac{pN}{q+1}}\left(|x-a|^{-(p(N-2)-2)}+|x-a|^{-(p(N-2)-1)}\right),\ \text{para todo } x\neq a.\end{aligned}$$

Então
$$\begin{aligned}|m_{\delta,a}|\leq C\delta^{\frac{N}{q+1}}&\left(\int_{B(a,\rho)}\frac{|\Delta u_0|}{|x-a|^{N-2}}\,dx\right.\\ &\left.+\int_{B(a,2\rho)\setminus B(a,\rho)}|\Delta u_0|\left(|x-a|^{-(N-2)}+|x-a|^{-\frac{p(N-2)-2}{p}}+|x-a|^{-\frac{p(N-2)-1}{p}}\right)dx\right)\\ &=C(\rho)\delta^{\frac{N}{q+1}}\end{aligned}$$

(neste ponto que usamos a regularidade de $-\Delta u_0$).

Quarto Passo: Estimar $r_1(\delta)$ e $s_1(\delta)$.

As hipóteses deste lema garantem que em qualquer dimensão N, a potência p sempre satisfaz $p<\frac{N}{N-2}$ e $p>\frac{1}{2}$. Então, das estimativas fornecidas por (G.2)
$$\begin{aligned}|r_1(\delta)| &\leq C\int_{\{|\Delta u_0|\geq R|\Delta U_{\delta,a}|\}}|\Delta u_0|\,|R\Delta U_{\delta,a}|^{1/p}\,dx,\\ |s_1(\delta)| &\leq C\int_{\{|\Delta u_0|<R|\Delta U_{\delta,a}|\}}|\Delta u_0|^{1/p}\,|R\Delta U_{\delta,a}|\,dx.\end{aligned}$$

Assim, dos cálculos acima é evidente que (mais uma vez usando a regularidade de $-\Delta u_0$)
$$|r_1(\delta)|\leq C(\rho)R^{1/p}\delta^{\frac{N}{q+1}}.$$

Para estimar $s_1(\delta)$, sejam $\alpha,\beta>0$ tal que $\alpha+\beta=\frac{1}{p}$; $(1+\beta)p(N-2)<N$ e $(1+\beta)p>1$. Isto implica que
$$|s_1(\delta)|=o(\delta^{\frac{\theta N}{N-2}\frac{N}{q+1}}),\ \text{para qualquer } 0<\theta<1.$$

As três últimas estimativas demonstram a validade da segunda identidade do enunciado deste lema.

■

Lema 4.38. *Suponha que (H1), (H2), (H3) e $\epsilon\in(0,\epsilon^{**})$ sejam satisfeitas. Então, existe uma função positiva $C(\rho)$ com a propriedade de que $C(\rho)=o(1)$ tal que*
$$\begin{aligned}I(u_0+RU_{\delta,a})\leq c_0+\tfrac{p}{p+1}R^{\frac{p+1}{p}}B-\tfrac{1}{q+1}R^{q+1}A&\\ -\left(u_0(a)DR^q-C(\rho)R^{1/p}\right)\delta^{\frac{N}{q+1}}+o(\delta^{\frac{N}{q+1}})&\end{aligned}\tag{4.41}$$

para qualquer $R \in [0, R_0]$. *Se* $\rho > 0$ *é suficientemente pequeno tal que* $0 < C(\rho) < u_0(a)D\frac{B}{A}$ *então*

$$I(u_0 + RU_{\delta,a}) \leq c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} - \left(u_0(a)DS_0^q - C(\rho)S_0^{1/p}\right)\delta^{\frac{N}{q+1}} + o(\delta^{\frac{N}{q+1}})$$

para qualquer $R \in [0, R_0]$. *Em particular,* $I(u_0 + RU_{\delta,a}) < c_0 + \frac{2}{N}S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$ *para qualquer* $R \in [0, R_0]$ *e para todo* $\delta \in (0, \delta_0)$.

Demonstração. Uma vez que

$$I(u_0) = \frac{p}{p+1}\|u_0\|^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}|u_0|^{q+1}_{q+1,\Omega} - \epsilon\int_\Omega gu_0\,dx = c_0 \text{ e}$$

$$0 = R\langle I'(u_0), U_{\delta,a}\rangle = \int_\Omega |\Delta u_0|^{(1/p)-1}\Delta u_0 \Delta U_{\delta,a}\,dx - \int_\Omega |u_0|^{q-1}u_0 U_{\delta,a}\,dx - \epsilon\int_\Omega gU_{\delta,a}\,dx$$

segue de (4.38)-(4.40) e dos Lemas 4.35 e 4.37, que a desigualdade (4.41) é verificada.

Considere as funções $h, H : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$h(t) = \frac{p}{p+1}Bt^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}At^{q+1} - \left(u_0(a)Dt^q - C(\rho)t^{1/p}\right)\delta^{\frac{N}{q+1}},$$

$$H(t) = \frac{p}{p+1}Bt^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{q+1}At^{q+1}.$$

O máximo absoluto da função H é atingido em $S_0 = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$. Por outro lado, $u_0(a)Dt^q - C(\rho)t^{1/p} \geq 0$ se e somente se $t \geq \left(\frac{C(\rho)}{u_0(a)D}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$.

Suponha que $S_0 > \left(\frac{C(\rho)}{u_0(a)D}\right)^{\frac{p}{p\,q-1}}$, isto é, que $C(\rho) < u_0(a)D\frac{B}{A}$. Seja s_δ o ponto onde h assume seu valor máximo. De

$$h'(t) = Bt^{1/p} - At^q - \left(u_0(a)Dqt^{q-1} - \frac{C(\rho)}{p}t^{\frac{1-p}{p}}\right)\delta^{\frac{N}{q+1}},$$

e do fato $q > \frac{1}{p}$, tem-se $h'(S_0) < 0$ e portanto $s_\delta < S_0$ (faça o gráfico de h e H). Escrevendo $s_\delta = S_0(1 - \sigma_\delta)$ e utilizando o fato que $h'(s_\delta) = 0$

$$B\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{p\,q-1}}(1-\sigma_\delta)^{1/p} - A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{p\,q}{p\,q-1}}(1-\sigma_\delta)^q =$$
$$\left(u_0(a)DqS_0^{q-1}(1-\sigma_\delta)^{q-1} - \frac{C(\rho)}{p}S_0^{\frac{1-p}{p}}(1-\sigma_\delta)^{\frac{1-p}{p}}\right)\delta^{\frac{N}{q+1}}.$$

Dividindo a identidade acima por $(1-\sigma_\delta)^{\frac{1}{p}-1}$;

$$\frac{B^{\frac{p\,q}{p\,q-1}}}{A^{1/(p\,q-1)}}\left((1-\sigma_\delta) - (1-\sigma_\delta)^{\frac{p\,q-1}{p}+1}\right) = \left(u_0(a)DqS_0^{q-1}(1-\sigma_\delta)^{\frac{p\,q-1}{p}} - \frac{C(\rho)}{p}S_0^{\frac{1-p}{p}}\right)\delta^{\frac{N}{q+1}}.$$

Aplicando o Lema G.7 à identidade acima, conclui-se que $\sigma_\delta = O(\delta^{\frac{N}{q+1}})$. Expandindo os termos $(1-\sigma_\delta)^{\frac{p+1}{p}}$ e $(1-\sigma_\delta)^{q+1}$ obtém-se,

$$\begin{aligned}
I(u_0 + RU_{\delta,a}) &\leq c_0 + \frac{p}{p+1} s_\delta^{\frac{p+1}{p}} B - \frac{1}{q+1} s_\delta^{q+1} A \\
&\quad - \left(u_0(a) D s_\delta^q - C(\rho) s_\delta^{1/p} \right) \delta^{\frac{N}{q+1}} + o(\delta^{\frac{N}{q+1}}) \\
&= c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}} - \left(u_0(a) D S_0^q - C(\rho) S_0^{1/p} \right) \delta^{\frac{N}{q+1}} + o(\delta^{\frac{N}{q+1}}).
\end{aligned}$$

■

4.6 Segunda Solução

4.6.1 Demonstração do Teorema 4.7

Pelo item (v) do Lema 4.16, $\mathcal{N}^+ \subset U_1$, e portanto $u_0 \in U_1$.

Seja $R > 0$, $\delta > 0$, $a \in \Omega$ e $\rho > 0$ como na Proposição 4.31. Como I, que tem uma geometria do passo da montanha com mínimo local em u_0, satisfaz $(\mathrm{PS})_c$, Proposição 4.30, aplica-se então o Teorema do Passo da Montanha para mostrar que c é um valor crítico de I. Além disso, pelo item (v) do Lema 4.16, para qualquer $h \in \mathcal{F}$, a imagem de h intercepta $\mathcal{N}^-$ implicando que $c \geq c_1$.

4.6.2 Demonstração do Teorema 4.6

A Proposição 4.31 e o Teorema 4.7 garantem que $c_1 \leq c < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$. Logo, pela Proposição 4.30 tem-se que I satisfaz $(\mathrm{PS})_{c_1}$. A partir daí, a demonstração do Teorema 4.6 segue as mesmas idéias da demonstração do Teorema 3.5.

4.7 Comportamento das soluções quando $\epsilon \to 0$

4.7.1 Demonstração do Teorema 4.9

Seja (ϵ_n) uma seqüência decrescente de números positivos satisfazendo (H4) que converge para 0 e seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_{\epsilon_n,1}$ a solução de (3.1) em $\mathcal{N}_{\epsilon_n}^-$, dada pelo Teorema 4.6. Como na demonstração do Teorema 3.6, pode-se mostrar que $u_{\epsilon_n,1}$ é uma seqüência $(\mathrm{PS})_\beta$ para o funcional

$$J(u) = \frac{p}{p+1} \int |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} \, dx - \frac{1}{q+1} \int |u|^{q+1} \, dx,$$

com $\beta = \frac{2}{N} S^{\frac{pN}{2(p+1)}}$.

Pela Proposição 4.29, pode-se supor que $u_{\epsilon_n,1} \rightharpoonup u$ em E, onde u é um ponto crítico de I. Por outro lado, como Ω é estrelado em relação a origem, sabe-se por Mitidieri [38], que o zero é o único ponto crítico de I. Dessa forma, $u_{\epsilon_n,1} \rightharpoonup 0$ em E. Mas, o item (iii) do Lema 4.16 garante que a seqüência $(u_{\epsilon_n,1})$ não converge fortemente em E para 0.

A demonstração de $u_{\epsilon,0} \to 0$ em E é baseada no fato de que $u_{\epsilon,0} \in \mathcal{N}^+_{\epsilon_n}$ e no item (i) do Lema 4.16.

CAPÍTULO 5

Uma segunda classe de sistemas semilineares não-homogêneos

Consideramos neste capítulo, um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 1$, de fronteira regular e nesse domínio o sistema superlinear não-homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + bv + u^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= cu + dv + v^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

que é do tipo gradiente quando $b = c$.

Na primeira seção, estudamos (5.1) não assumindo $b = c$ e obtemos resultados através do método de subsolução e super-solução. Na segunda seção, quando $b = c$, empregamos técnicas variacionais supondo que as potências p e q são subcríticas.

5.1 Caso geral

Aqui estamos interessados no sistema superlinear

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + bv + u^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= cu + dv + v^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &> 0 \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

e procuraremos por soluções clássicas.

Uma vez que buscamos por soluções positivas, é natural impor alguma condição de positividade na parte não-homogênea. Por isso, nesta seção assumimos a seguinte hipótese,

(P) $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ são não simultaneamente identicamente nulas com $u_*, v_* \geq 0$ em Ω. Além disso, se $b = 0$ então $f \neq 0$ e quando $c = 0$ supomos que $g \neq 0$.

Observe que (5.2) é uma extensão para uma classe de sistemas da equação (1.1), tratada no primeiro capítulo e a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que aparece em (5.2) assume o papel de λ em (1.1).

Pelos motivos apresentados no Capítulo 2, vamos supor válidas nesta seção as hipóteses a seguir.

(H1) Os termos b e c da matriz A satisfazem: $b, c \geq 0$.

(H2) Os autovalores de A são menores que λ_1.

Com as hipóteses assumidas até aqui, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Suponha além das hipóteses (P), (H1) e (H2) que $p, q > 1$. Então existe $\epsilon^* > 0$ tal que o sistema (5.2) possui uma solução minimal positiva (u_ϵ, v_ϵ) para $0 < \epsilon < \epsilon^*$ e não possui solução para $\epsilon > \epsilon^*$. Além disso, $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\alpha \in (0, 1)$.*

Antes de demonstrarmos esse teorema, ressaltamos que um resultado de multiplicidade de solução para (5.2) é apresentado na próxima seção quando supomos $b = c$ permitindo o emprego de técnicas variacionais.

Demonstração do Teorema 5.1

Primeiramente suponha $b, c > 0$. Esta hipótese juntamente com (H2) garante que o maior autovalor de A

$$\lambda = \frac{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

satisfaz as desigualdades, $\lambda < \lambda_1(\Omega)$ e $\lambda > \max\{a, d\}$. Além disso, o autovalor λ tem autovetores associados da forma

$$(\sigma, \theta) = \left(\sigma, \frac{c}{\lambda - d}\sigma\right), \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Observe que as duas entradas de cada autovetor associado a λ têm o mesmo sinal, e portanto podem ser consideradas positivas e tão pequenas quanto se queira. Pela continuidade de λ_1 em relação a Ω, é garantida a existência de um domínio limitado Ω' de fronteira regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ e $\lambda < \lambda_1(\Omega') < \lambda_1(\Omega)$.

Sejam $\lambda_1' = \lambda_1(\Omega')$ e $\varphi_1' = \varphi_1(\Omega')$. É evidente que $(u_s, v_s) = (\epsilon u_*, \epsilon v_*)$ é um par subsolução para (5.2). O par super-solução para (5.2) será da forma $(u_S, v_S) = (\sigma\varphi_1', \theta\varphi_1')$, onde (σ, θ) é um autovetor de A associado a λ com entradas positivas. Mais precisamente, deseja-se que

$$\begin{cases} \lambda_1'(\sigma\varphi_1') &= -\Delta(\sigma\varphi_1') &\geq a(\sigma\varphi_1') + b(\theta\varphi_1') + (\sigma\varphi_1')^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ \lambda_1'(\theta\varphi_1') &= -\Delta(\theta\varphi_1') &\geq c(\sigma\varphi_1') + d(\theta\varphi_1') + (\theta\varphi_1')^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (\lambda_1' - \lambda)(\sigma\varphi_1') - (\sigma\varphi_1')^p &\geq \epsilon f, \text{ em } \Omega, \\ (\lambda_1' - \lambda)(\theta\varphi_1') - (\theta\varphi_1')^q &\geq \epsilon g, \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Aplicando-se o mesmo argumento da demonstração do Teorema 1.3, encontra-se uma super-solução (u_S, v_S) tal que $u_S \geq u_s$ e $v_S \geq u_S$ em Ω, desde que $\epsilon > 0$ seja pequeno o suficiente.

Quando no mínimo uma das identidades $b = 0$ e $c = 0$ ocorrer, basta considerar a matriz

$$A_\tau = \begin{pmatrix} a & b+\tau \\ c+\tau & d \end{pmatrix}.$$

Observe que se $\tau > 0$ é suficientemente pequeno, a matriz A_τ satisfaz (H2) e por isso os cálculos acima possibilitam a obtenção de um par super-solução (u_S, v_S) para

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + (b+\tau)v + u^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &= (c+\tau)u + dv + v^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

tal que $u_S \geq u_s = \epsilon u_*$ e $v_S \geq v_s = \epsilon v_*$ quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Conseqüentemente (u_S, v_S) é um par super-solução para (5.2).

Em ambos os casos, pode-se aplicar o método de iteração monotônica no par subsolução $(u_s, v_s) = (\epsilon u_*, \epsilon v_*)$ para se obter uma solução (u_ϵ, v_ϵ) de (5.2) quando $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Observe que se $b = 0$ $(c = 0)$ então $f \neq 0$ $(g \neq 0)$ e isso permite que o método iterativo forneça soluções positivas.

O restante da demonstração é análoga à demonstração do Teorema 1.3, exceto a questão de não-existência de solução para valores grandes de ϵ. Nesse caso pode ser feito o seguinte.

Quando $b = 0$ ou $c = 0$, o sistema (5.2) possui uma equação idêntica a equação (1.1) e assim pode-se aplicar o mesmo argumento da demonstração do Teorema 1.3. Se $b, c > 0$ então o maior autovalor de A tem entradas de mesmo sinal. Fixe então um autovetor (σ, θ) de A de entradas positivas associado a λ, sendo esse o maior autovalor de A. Da mesma forma que em (**??**), a condição (P) implica

$$\int \sigma f \varphi_1 + \theta g \varphi_1 \, dx > 0.$$

Agora, multiplique a primeira equação de (5.2) por $\sigma\varphi_1$ e a segunda por $\theta\varphi_1$. Integrando por partes e adicionando tais equações obtém-se

$$\begin{aligned}\int \sigma \nabla u \nabla \varphi_1 + \theta \nabla v \nabla \varphi_1 - (A(u,v), (\sigma\varphi_1, \theta\varphi_1)) \, dx \;&=\; \int \sigma u^p \varphi_1 + \theta v^q \varphi_1 \, dx \\ &\quad + \epsilon \int \sigma f \varphi_1 + \theta g \varphi_1 \, dx\end{aligned}$$

e assim,

$$\int \left(\sigma\left((\lambda_1 - \lambda)u - u^p\right) + \theta\left((\lambda_1 - \lambda)v - v^q\right)\right) \varphi_1 \, dx = \epsilon \int \sigma f \varphi_1 + \theta g \varphi_1 \, dx.$$

Pelas hipóteses de que $p > 1$ e $q > 1$, segue a existência de uma constante $C = C(\lambda, p, q) > 0$ tal que

$$\epsilon \leq C \frac{\int \varphi_1 \, dx}{\int \sigma f \varphi_1 + \theta g \varphi_1 \, dx}.$$

5.2 Caso gradiente

Nesta seção consideramos o sistema gradiente

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& au + bv + u^p + \epsilon f \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v &=& bu + dv + v^q + \epsilon g \text{ em } \Omega, \\ u, v &=& 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.4}$$

num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 1$, de fronteira regular. Por conveniência escrevemos $u^p := |u|^{p-1} u$ e $v^q := |v|^{q-1} v$, onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro e as funções f e g são $C^1(\overline{\Omega})$.

Observe que se $b = 0$, o sistema (5.4) é transformado em duas equações idênticas à equação (1.1). Por isso, suponha nesta seção $b \neq 0$.

Agora, considere A a seguinte matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Estudamos o sistema (5.4) sob as seguintes hipóteses:

(H1) Superlinearidade e subcriticalidade: $p, q > 1$ e $p, q < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$.

(H2) As funções $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ não são ambas identicamente nulas.

(H3) Os dois autovalores de A são menores que λ_1.

Para facilitar a notação, $\int h\,dx$ representará a integral de uma função h qualquer em $L^1(\Omega)$ e $|j|_r$ a norma de qualquer função $j \in L^r(\Omega)$. E mais, neste capítulo, H denotará o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \int \nabla u_1 \nabla u_2 + \nabla v_1 \nabla v_2 - (A(u_1, v_1), (u_2, v_2))\; dx, \tag{5.5}$$

para quaisquer $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in H$. Neste caso, para cada elemento $(u, v) \in H$, a norma $\|(u, v)\|$ será a norma induzida pelo produto interno (5.5).

Dados $(\varphi, \psi) \in H'$ e $(u, v) \in H$

$$\langle(\varphi, \psi), (u, v)\rangle := \int \varphi u + \psi v\,dx$$

e

$$|(\varphi, \psi)|_* = \sup\left\{\int \varphi u + \psi v\,dx : \|(u, v)\| = 1\right\}.$$

Fazendo uso dessas notações aqui introduzidas, observe que

$$\langle(h_1, h_2), (u, v)\rangle := \int h_1 u + h_2 v\,dx, \quad \forall\ h_1, h_1 \in C^1(\overline{\Omega}),\ \forall\ (u, v) \in H,$$

garante que $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow H'$.

Neste contexto, entendemos por uma solução fraca de (5.4) um par $(u, v) \in H$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \int \nabla u \nabla w\,dx &= \int auw + bvw\,dx + \int u^p w\ + \epsilon \int fw\,dx \\ \int \nabla v \nabla z\,dx &= \int buz + dvz\,dx + \int v^q z\ + \epsilon \int gz\,dx \end{aligned}$$

para todo $(w, z) \in H$.

Com isso, as hipóteses acima nos permitem concluir que as soluções fracas de (5.4) são precisamente os pontos críticos do seguinte funcional

$$I\left((u, v)\right) = \frac{1}{2}\|(u, v)\|^2 - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1}\;dx - \frac{1}{q+1}\int |v|^{q+1}\;dx - \epsilon\int fu + gv\,dx, \tag{5.6}$$

onde I é bem definido sobre H e é de classe C^2.

Definição 5.2. *Dizemos que um elemento* $(u,v) \in H$ *é não-negativo e denotamos* $(u,v) \geq 0$ *se* $u, v \geq 0$ *q.t.p. em* Ω.

A partir de agora, considere as seguintes notações:

$$|(u,v)|_{p+1} := \left(|u|_{p+1}^{p+1} + |v|_{q+1}^{p+1}\right)^{1/p+1}, \ \forall\,(u,v) \in H,$$

$$P := \min_{|(u,v)|_{p+1}=1} \{\|(u,v)\|\}, \ K := \frac{1}{q^{\frac{1}{p-1}}}\frac{p-1}{q}, \ \alpha := \frac{p+1}{p-1} \ \text{ e}$$

$$M = \inf\left\{\|(u,v)\| : (u,v) \in H\backslash\{(0,0)\} \text{ tal que } \|(u,v)\|^2 = p\,|u|_{p+1}^{p+1} + q\,|v|_{q+1}^{q+1}\right\}. \tag{5.7}$$

Pela simetria de (5.4) podemos supor sem perda de generalidade $q \geq p$.

Iniciamos observando, Lema 5.13, que I é limitado inferiormente sobre a variedade de Nehari

$$\mathcal{N} = \{(u,v) \in H : \langle I'((u,v)), (u,v)\rangle = 0\}.$$

Com isso, para provar os resultados desta seção, aplicamos um método de minimização semelhante àquele utilizado nos capítulos 3 e 4. Mostramos que I assume seu valor mínimo sobre $\mathcal{N}$ e também em partes de $\mathcal{N}$, quando ϵ é suficientemente pequeno. Por esta razão, adicionamos a seguinte hipótese

$$\text{(H4)}\ \ 0 < \epsilon < \epsilon^* := \min\left\{\frac{q-1}{q}\frac{1}{2P\,|(f,g)|_*}, \frac{p-1}{p}\frac{M}{|(f,g)|_*}, K\frac{P^\alpha}{|(f,g)|_*}\right\}.$$

Neste ponto estamos prontos para enunciar o primeiro resultado desta seção.

Teorema 5.3. *Suponha que as hipóteses (H1), (H2) e (H3) sejam verificadas. Então a equação (5.4) possui no mínimo duas soluções fracas se (H4) for satisfeita e no mínimo uma solução fraca se* $\epsilon = \epsilon^*$. *Além disso, tais soluções são não-negativas quando* $f, g \geq 0$ *em* Ω *e* $b \geq 0$.

A prova do teorema acima é uma conseqüência dos próximos três teoremas.

Teorema 5.4. *Sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4), o ínfimo*

$$c_0 := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} I\left((u,v)\right) \tag{5.8}$$

é assumido em um ponto $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}$, *onde* (u_0, v_0) *é um mínimo local para* I *quando considerado em todo o espaço* H. *Além disso,* $(u_0, v_0) \geq 0$ *quando* $f, g \geq 0$ *em* Ω *e* $b \geq 0$.

Para cada $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, a função

$$j(t) := I\left(t(u,v)\right) = \frac{1}{2}t^2\|(u,v)\|^2 - \frac{1}{p+1}t^{p+1}\left|u\right|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}t^{q+1}\left|v\right|_{q+1}^{q+1} - \epsilon t\int fu + gv\, dx$$

é duas vezes diferenciável em $(0,+\infty)$. Em particular, se $(u,v) \in E$ é um mínimo local para I então $j'(1) = 0$ e $j''(1) \geq 0$, sendo que a desigualdade $j''(1) \geq 0$ diz exatamente que

$$\|(u,v)\|^2 - p\left|u\right|_{p+1}^{p+1} - q\left|v\right|_{q+1}^{q+1} \geq 0. \tag{5.9}$$

Por isso, é importante para nossos cálculos que particionemos $\mathcal{N}$ como abaixo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^+ &= \{(u,v) \in \mathcal{N} : \|(u,v)\|^2 - p\left|u\right|_{p+1}^{p+1} - q\left|v\right|_{q+1}^{q+1} > 0\},\\
\mathcal{N}_0 &= \{(u,v) \in \mathcal{N} : \|(u,v)\|^2 - p\left|u\right|_{p+1}^{p+1} - q\left|v\right|_{q+1}^{q+1} = 0\} \text{ e}\\
\mathcal{N}^- &= \{(u,v) \in \mathcal{N} : \|(u,v)\|^2 - p\left|u\right|_{p+1}^{p+1} - q\left|v\right|_{q+1}^{q+1} < 0\}.
\end{aligned}$$

Sob (H4), o Lema 5.16 garante que $\mathcal{N}_0 = \{0\}$. Então, por (5.9) concluímos que $(u_0,v_0) \in \mathcal{N}^+$ e conseqüentemente

$$c_0 = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} I\left((u,v)\right) = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}^+} I\left((u,v)\right).$$

Assim, para encontrar um segundo ponto crítico para I é razoável que investiguemos o seguinte problema de minimização

$$c_1 := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}^-} I((u,v)).$$

Tal problema fornece o próximo resultado:

Teorema 5.5. *Suponha que as condições (H1), (H2), (H3) e (H4) sejam verificadas. Então $c_1 > c_0$ e c_1 é assumido em um ponto ponto crítico $(u_1,v_1) \in \mathcal{N}^-$ de I . Além disso, $(u_1,v_1) \geq 0$ se $f,g \geq 0$ em Ω e $b \geq 0$.*

Agora, pelo Teorema 5.4, como um caso limite, temos o resultado a seguir.

Teorema 5.6. *Se as hipóteses (H1), (H2) e (H3) são verificadas e $\epsilon = \epsilon^*$ então o ínfimo*

$$c_{0,+} := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}^+\cup\mathcal{N}_0} I\left((u,v)\right)$$

é assumido em um ponto crítico $(u_0,v_0) \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}^+$ de I . Além disso, $(u_0,v_0) \geq 0$ quando $f,g \geq 0$ em Ω e $b \geq 0$.

Da mesma forma que nos últimos dois capítulos podemos mostrar que para $\epsilon = \epsilon$ a identidade $c_0 = c_{0,+}$ é verificada.

A procura por um possível terceiro ponto crítico para I será feita utilizando o Teorema do Passo da Montanha. Para isso, introduzimos o funcional

$$I^+\left((u,v)\right) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \frac{1}{p+1}\left|u^+\right|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}\left|v^+\right|_{q+1}^{q+1} - \epsilon\int fu + gv\,dx.$$

Tal funcional está bem definido sobre H e é de classe C^2. Além disso, as soluções fracas não-negativas de (5.4) quando $f, g \geq 0$ em Ω, são pelo Lema 5.25, os pontos críticos de I^+ .

Considere (u_0, v_0) a solução fraca de (5.4) dada pelo Teorema 5.4 que é um mínimo local para I. Além disso, quando $f, g \geq 0$ em Ω, o Lema 5.26 garante que (u_0, v_0) é um mínimo local para I^+.

Fixe $T > 0$ suficientemente grande tal que $e = (Tu_0, Tv_0) \in U_2$, com U_2 dado pelo Lema 5.16 e $I(e) < I((u_0, v_0))$. Para o próximo resultado introduzimos o conjunto $\mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{F} = \{h : [0,1] \to H \text{ contínua},\ h(0) = (u_0, v_0),\ h(1) = e\}$$

e uma vez mostrado que I e I^+ satisfazem a condição (PS), aplicamos o Teorema do Passo da Montanha para obter o teorema a seguir.

Teorema 5.7. *Suponha que (H1), (H2), (H3) e (H4) sejam verificadas. Então o valor*

$$c = \inf_{h\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,1]} I(h(t))$$

define um valor crítico para I e $c \geq c_1$. Se $f, g \geq 0$ em Ω e $b \geq 0$

$$c^+ = \inf_{h\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,1]} I^+(h(t))$$

define um valor crítico para I e $c^+ \geq c_1$.

Observação 5.8. *Acreditamos que em certos domínios, por exemplo no caso $\Omega = B(0,1)$, sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) e $f, g \geq 0$ em Ω, o sistema (5.4) tem exatamente duas soluções não-negativas para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Observamos no Lema 5.16, que não $\mathcal{N}$ e sim $\mathcal{N}^-$ é uma variedade homeomorfa a esfera unitária de H. Uma vez confirmada a informação sobre o número exato de soluções para (5.4), concluímos que o valor crítico do passo da montanha é o valor mínimo de I sobre a variedade $\mathcal{N}^-$. Tal fato é na realidade esperado pois é verificado em outros problemas, como por exemplo no Teorema 4.2 de Willem*

[43]. E também que a solução minimal apresentada no primeira seção deste capítulo é a solução de energia mínima. No entanto, o "projeto" descrito aqui deve ser cuidadosamente verificado.

Sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) desta seção e com $f, g \geq 0$ em Ω, um resultado de não-existência de solução fraca não-negativa para o sistema (5.4) para valores grandes de ϵ, pode ser obtido como na seção anterior, já que o problema desta seção é um caso particular daquela.

Para cada ϵ satisfazendo (H4), denotamos por $(u_{0,\epsilon}, v_{0,\epsilon})$ e $(u_{1,\epsilon}, v_{1,\epsilon})$ as soluções de (5.4) dadas pelos Teoremas 5.4 e 5.5 respectivamente. O último resultado é obtido pelo comportamento de $(u_{0,\epsilon}, v_{0,\epsilon})$ e $(u_{1,\epsilon}, v_{1,\epsilon})$ quando ϵ tende a zero.

Teorema 5.9. *Sob as hipóteses (H1), (H2), (H3) com a condição adicional $f, g \geq 0$ em Ω e $b \geq 0$, tem-se $(u_{0,\epsilon}, v_{0,\epsilon}) \to (0,0)$ e $(u_{1,\epsilon}, v_{1,\epsilon}) \to (u,v)$ em H quando $\epsilon \to 0$ onde (u,v) é uma solução fraca não-trivial de*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & au + bv + u^p \ \textit{em}\ \Omega, \\ -\Delta v & = & bu + dv + v^q \ \textit{em}\ \Omega, \\ u, v & \geq & 0 \ \textit{q.t.p. em}\ \Omega, \\ u, v & = & 0 \ \textit{sobre}\ \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Através de argumentos de *bootstrap* pode-se mostrar que a solução fraca de (5.10) obtida no teorema acima é uma solução clássica, possibilitando então o emprego do princípio do máximo forte, para mostrar que essa solução é positiva em Ω. A mesma observação pode ser feita para as soluções fracas não-negativas de (5.4) sob as hipóteses aqui consideradas.

Para finalizar, é válido dizer que resultados semelhantes a esses podem ser obtidos substituindo ϵf e ϵg em (5.4) por $\epsilon f u^r$ e $\epsilon g v^s$ respectivamente, com $0 \leq r, s, < 1$. Dessa forma, tais resultados podem ser estendidos para sistemas gradientes de tipo côncavo-convexo.

5.2.1 Resultados preliminares

Uma série de resultados são necessários para provar os teoremas enunciados na seção anterior. O primeiro deles é um lema que fornece a estrutura ao espaço das funções admissíveis como soluções fracas de (5.4) e o segundo diz que a condição (H4) é bem definida.

Lema 5.10. *A hipótese (H3) garante que a identidade (5.5) realmente define um produto interno sobre H, cuja norma induzida é equivalente à norma*

$$\left(\int |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \, dx\right)^{1/2}, \ (u, v) \in H.$$

Em particular, o espaço H munido do produto interno (5.5) é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Primeiramente observe que a identidade (5.5) define uma forma bilinear sobre H. Por outro lado, a matriz A possui dois autovalores reais dados por

$$\lambda^+ = \frac{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda^- = \frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2}$$

e mais,

$$\lambda^-(x^2 + y^2) \leq (A(x, y), (x, y)) \leq \lambda^+(x^2 + y^2), \ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pela última desigualdade, a de Poincarè e (H3) obtém-se este lema.

■

Lema 5.11. *A constante M definida por (5.7) é positiva.*

Demonstração. Por contradição suponha que exista uma seqüência $((u_n, v_n))$ em $H\backslash\{(0,0)\}$ tal que $\|(u_n, v_n)\|^2 = p\,|u_n|_{p+1}^{p+1} + q\,|v_n|_{q+1}^{q+1}$ e $\theta_n := \|(u_n, v_n)\| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Por imersões de Sobolev, segue a existência de uma constante $C > 0$ tal que $|u_n|_{p+1}, |v_n|_{q+1} \leq C\theta_n$. Então

$$\theta_n^2 \leq pC^{p+1}\theta_n^{p+1} + qC^{q+1}\theta_n^{q+1}$$

o que é uma contradição pois $p > 1$ e $q > 1$.

■

Antes de enunciarmos o próximo resultado, é necessário a introdução de uma função. Para isso, dado $(u, v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, considere $i : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$i(t) := t\|(u, v)\|^2 - t^p\,|u|_{p+1}^{p+1} - t^q\,|v|_{q+1}^{q+1}.$$

A hipótese (H1) garante que $i(t)$ é limitada superiormente, $i(t) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e $i(t)$ assume seu valor máximo em t_{max}, onde t_{max} é a única solução de

$$0 = i'(t) = \|(u, v)\|^2 - pt^{p-1}\,|u|_{p+1}^{p+1} - qt^{q-1}\,|v|_{q+1}^{q+1}$$

que, em particular, satisfaz

$$0 = t_{max}^2 i'(t_{max}) = \|t_{max}(u,v)\|^2 - p\,|t_{max}u|_{p+1}^{p+1} - q\,|t_{max}v|_{q+1}^{q+1}.$$

Logo, pelo Lema 5.11

$$\begin{aligned} i(t_{max}) &= t_{max}\|(u,v)\|^2 - t_{max}^p\,|u|_{p+1}^{p+1} - t_{max}^q\,|v|_{q+1}^{q+1} \\ &= \frac{p-1}{p} t_{max}\|(u,v)\|^2 + \frac{q-p}{p} t_{max}^q\,|v|_{q+1}^{q+1} \geq \frac{p-1}{p} M\|(u,v)\|. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Desse modo, fica definida uma função contínua $t_{max} : H\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

Vale observar que a função $j : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $j(t) = I(t(u,v))$ está relacionada com i através de

$$j'(t) = i(t) - \epsilon \int fu + gv\,dx, \quad j''(t) = i'(t), \ \forall\ t > 0.$$

Corolário 5.12. *Se* $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$ *então*

$$t_{max}((u,v))\|(u,v)\| \geq M.$$

Demonstração. É uma conseqüência imediata da definição de M e de t_{max}.

■

O próximo lema permite a utilização do método de minimizar I sobre $\mathcal{N}$, para encontrar a primeira das duas soluções de (5.4).

Lema 5.13. *I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Se $(u,v) \in \mathcal{N}$ então $\|(u,v)\|^2 - |u|_{p+1}^{p+1} - |v|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int fu + gv\,dx = 0$. Assim

$$\begin{aligned} I\left((u,v)\right) &= \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \frac{1}{p+1}\,|u|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}\,|v|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int fu + gv\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}\|(u,v)\|^2 + \frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\,|v|_{q+1}^{q+1} - \frac{p}{p+1}\epsilon \int fu + gv\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}\|(u,v)\|^2 - \frac{p}{p+1}\epsilon \int fu + gv\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}\|(u,v)\|^2 - \frac{p}{p+1}\epsilon\,|(f,g)|_*\,\|(u,v)\| \geq -\frac{1}{2}\frac{p^2}{p^2-1}\epsilon^2\,|(f,g)|_*^2. \end{aligned}$$

■

O próximo lema mostra claramente o propósito da condição (H4).

Lema 5.14. *Se a hipótese (H4) é verificada, então para cada* $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$ *tem-se que* $\{t(u,v) : t \geq 0\} \cap \mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$ *e também existe um único* $t^+ = t^+((u,v)) > 0$ *tal que* $t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-$. *Em particular,* $t^+ > t_{max}$ *e* $I(t^+(u,v)) = \max_{t\geq t_{max}} I(t(u,v))$.

Além disso, se $\int fu + gv\,dx > 0$, *existe também um único* $t^- = t^-((u,v)) > 0$ *tal que* $t^-(u,v) \in \mathcal{N}^+$. *Em particular,* $t^- < t_{max}$ *e* $I(t^-(u,v)) \leq I(t(u,v))$ *para todo* $t \in [0,t^+]$.

Demonstração. Para $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, considere as funções $i,j : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ como definidas acima. Se $\int fu + gv\,dx \leq 0$ então existe um único t positivo tal que $i(t) = \epsilon \int fu + gv\,dx$, isto é, tal que $t(u,v) \in \mathcal{N}$.

Denotando tal t por t^+, tem-se que $t^+ > t_{max}$ e $i'(t^+) < 0$, ou seja,

$$0 > i'(t^+) = \frac{1}{(t^+)^2}\left(\|t^+(u,v)\|^2 - p\left|t^+u\right|_{p+1}^{p+1} - q\left|t^+v\right|_{q+1}^{q+1}\right),$$

o que é equivalente a $t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-$. Assim, no caso em que $\int fu+gv\,dx \leq 0$ então $j'(t) = 0$ se, e somente se $t = t^+$. Além disso, $j'(t) > 0$ em $(0,t^+)$ e $j'(t) < 0$ em $(t^+,+\infty)$, mostrando que $I(t^+(u,v)) = \max_{t\geq 0} I(t(u,v))$.

Quando $\int fu + gv\,dx > 0$, de (5.11) e (H4) obtém-se

$$i(t_{max}) - \epsilon\int fu + gv\,dx \geq \frac{p-1}{p}M\|(u,v)\| - \epsilon\left|(f,g)\right|_* \|(u,v)\| > 0.$$

Dessa forma, pode-se garantir a existência de exatamente dois pontos t^- e t^+ com $t^- < t_{max} < t^+$ tais que $i(t^-) = i(t^+) = \epsilon\int fu + gv\,dx$, ou seja, $t^-(u,v), t^+(u,v) \in \mathcal{N}$. Das desigualdades $i'(t^-) > 0$, $i'(t^+) < 0$ tem-se $t^-(u,v) \in \mathcal{N}^+$ e $t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-$. Assim, no caso em que $\int fu+gv\,dx > 0$ então $j'(t) = 0$ se, e somente se $t \in \{t^-,t^+\}$. Além disso, $j'(t) < 0$ em $(0,t^-)\cup(t^+,+\infty)$ e $j'(v) > 0$ em (t^-,t^+). Donde segue que $I(t^-(u,v)) = \min_{t\in[0,t^+]} I(t(u,v))$ e $I(t^+(u,v)) = \max_{t\geq t^-} I(t(u,v))$.

Observe que, tanto no caso $\int fu+gv\,dx \leq 0$ quanto no caso $\int fu+gv\,dx > 0$, $I(t^+(u,v)) = \max_{t\geq t_{max}} I(t(u,v))$.

■

Observação 5.15. *Para cada* $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, *os cálculos acima mostram que sob a hipótese (H4) temos;*

$$\{t(u,v) : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+(u,v)\} \text{ e } t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-, \quad \text{se} \quad \int fu + gv\,dx \leq 0;$$

$$\{t(u,v) : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+(u,v), t^-(u,v)\} \text{ e } t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-,\ t^-(u,v) \in \mathcal{N}^+,$$
$$I(t^-(u,v)) < I(t^+(u,v)), \quad \text{se} \quad \int gu\,dx > 0.$$

Em particular, quando (H4) é verificada, $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$.

Se $\epsilon = \epsilon^*$, *então para cada* $(u,v) \in H \backslash \{(0,0)\}$

$$\{t(u,v) : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+(u,v)\} \text{ e } t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-, \quad \text{se} \quad \int fu + gv\, dx\, dx \leq 0.$$

Mas para o caso $\int fu + gv\, dx > 0$ *dois fatos podem ocorrer:*

- *se* $\int fu + gv\, dx = \epsilon^* i(t_{max})$ *então*

$$\{t(u,v) : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t_{max}(u,v)\} \quad \text{e} \quad t_{max}(u,v) \in \mathcal{N}_0.$$

- *se* $\int fu + gv\, dx > \epsilon^* i(t_{max})$ *então*

$$\begin{aligned}&\{t(u,v) : t > 0\} \cap \mathcal{N} = \{t^+(u,v), t^-(u,v)\},\ t^+(u,v) \in \mathcal{N}^-,\ t^-(u,v) \in \mathcal{N}^+ \\ &\text{e} \quad I(t^-(u,v)) < I(t^+(u,v)).\end{aligned}$$

Em particular, quando $\epsilon = \epsilon^*$ *e* $\int fu + gv\, dx > 0$, *existe* $t_0 = t_0((u,v)) > 0$ *tal que* $t_0(u,v) \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ *e* $I(t_0(u,v)) = \min\{I(t(u,v)) : t > 0, t(u,v) \in \mathcal{N}\}$.

Suponha (H4) satisfeita. Da continuidade $t_{max} : H \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ e da unicidade de t^+, mostramos que $t^+ : H \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é contínua. Assim, a função

$$\Phi : H \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \ \text{ dada por } \ \Phi((u,v)) = t^+ \left(\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \right) - \|(u,v)\|$$

é contínua. Em particular,

$$\mathcal{N}^- = \Phi^{-1}(0) = \left\{ (u,v) \in H \backslash \{(0,0)\} : t^+ \left(\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \right) = \|(u,v)\| \right\}$$

é um conjunto fechado de $H \backslash \{(0,0)\}$. Mais ainda, podemos concluir que $\mathcal{N}^-$ também é um conjunto fechado de H, pelo item (iii) do Lema 5.16. Por outro lado,

$$\begin{aligned} U_2 = \Phi^{-1}((-\infty, 0)) &= \left\{ (u,v) \in H \backslash \{(0,0)\} : \|(u,v)\| > t^+ \left(\tfrac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \right) \right\} \quad \text{e} \\ U_1^* = \Phi^{-1}((0, +\infty)) &= \left\{ (u,v) \in H \backslash \{0\} : \|(u,v)\| < t^+ \left(\tfrac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \right) \right\} \end{aligned}$$

são conjuntos abertos de $H \backslash \{(0,0)\}$ e portanto de H, e mais uma vez pelo Lema 5.16 concluímos que $U_1 = U_1^* \cup \{0\}$ é um conjunto aberto de H.

O lema a seguir apresenta algumas propriedades dos conjuntos $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^+$, $\mathcal{N}^-$ e $\mathcal{N}_0$.

Lema 5.16. *Para cada* $\epsilon > 0$, *(i)* $\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$ *é limitado. Mais precisamente, para qualquer* $(u,v) \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0$

$$\|(u,v)\| < \frac{2p}{p-1}\epsilon\, |(f,g)|_* \,.$$

(ii) $\mathcal{N}^-$ *é não-limitado.*

(iii) Para qualquer $(u,v) \in \mathcal{N}^-$,

$$\|(u,v)\| > M$$

(observe que a limitação inferior não depende de ϵ*).*

Se $\epsilon > 0$ *é tal que (H4) é satisfeita, então*

(iv) $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$.

(v) $\mathcal{N}^-$ *desconecta* H *no sentido de que, dados* $(u,v) \in U_1$, $(w,z) \in U_2$ *e* $h : [0,1] \to E$ *contínua satisfazendo* $h(0) = (u,v)$ *e* $h(1) = (w,z)$, *a imagem de* h *intercepta* $\mathcal{N}^-$. *Além disso,* $\mathcal{N}^+ \subset U_1$.

(vi) Seja $S_H = \{(u,v) \in H : \|(u,v)\| = 1\}$. *A aplicação* $T^+ : S_H \to \mathcal{N}^-$ *definida por* $T^+((u,v)) = t^+((u,v))(u,v)$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. (i) Se $(u,v) \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}_0 \backslash \{(0,0)\}$ então

$$\|(u,v)\|^2 - |u|_{p+1}^{p+1} - |v|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int fu + gv\, dx = 0$$

e

$$\|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} \geq 0.$$

Uma vez que $p, q > 1$, tem-se

$$\begin{aligned} I((u,v)) &= -\frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|^2 - \frac{2p}{p+1}\,|u|_{p+1}^{p+1} - \frac{2q}{q+1}\,|v|_{q+1}^{q+1}\right) \\ &< -\frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Pelo fato de que $(u,v) \in \mathcal{N}$, $I((u,v)) < 0$ e $q \geq p$,

$$\begin{aligned} 0 > I((u,v)) &\geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \frac{1}{p+1}\left(|u|_{p+1}^{p+1} + |v|_{q+1}^{q+1}\right) - \epsilon \int fu + gv\, dx \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}\|(u,v)\|^2 - \frac{p}{p+1}\epsilon \int fu + gv\, dx, \end{aligned}$$

e portanto
$$\|(u,v)\| < \frac{2p}{p-1}\epsilon\,|(f,g)|_*.$$
(ii) Se $(u,v) \in H$ é tal que $\|(u,v)\| = 1$ então
$$\|t^+((u,v))(u,v)\| = t^+((u,v)) > t_{max}((u,v))$$
e
$$1 = p\,|u|_{p+1}^{p+1}(t_{max}((u,v)))^{p-1} + q\,|v|_{q+1}^{q+1}(t_{max}((u,v)))^{q-1}.$$
Como
$$\inf_{(u,v)\in H, \|(u,v)\|=1} |(u,v)|_{p+1} = 0$$
tem-se $\sup\{t_{max}((u,v)) : (u,v) \in E,\ \|(u,v)\| = 1\} = +\infty$. Portanto $\mathcal{N}^-$ é não-limitado.

(iii) Dado $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, pelo Corolário 5.12 tem-se que $t_{max}((u,v))\|(u,v)\| \geq M$, e daí pelo Lema 5.14, $t^+((u,v))\|(u,v)\| > M$. Se $(u,v) \in \mathcal{N}^-$ então $t^+ = 1$ e portanto obtém-se a desigualdade desejada.

(iv) Sob a hipótese (H4) segue do Lema 5.14 que dado $(u,v) \in H\backslash\{(0,0)\}$, o conjunto $\{t(u,v) : t > 0\}$ intercepta $\mathcal{N}$ no máximo duas vezes; uma vez em $\mathcal{N}^-$ (sempre) e outra vez em $\mathcal{N}^+$ (se, e somente se $\int fu + gv\,dx > 0$), mas nunca em $\mathcal{N}_0$. Por isso $\mathcal{N}_0 = \{(0,0)\}$.

(v) e (vi) Se $(u,v) \in \mathcal{N}^+$ então $\|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} > 0$. Considere i associada a $\dfrac{(u,v)}{\|(u,v)\|}$ e observe que
$$t^+\left(\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|}\right) > \|(u,v)\| \ \text{ se, e somente se } \ i'(\|(u,v)\|) > 0.$$

No entanto
$$\begin{aligned} i'(\|(u,v)\|) &= 1 - p\frac{|u|_{p+1}^{p+1}}{\|(u,v)\|^{p+1}}\|(u,v)\|^{p-1} - q\frac{|v|_{q+1}^{q+1}}{\|(u,v)\|^{q+1}}\|(u,v)\|^{q-1} \\ &= \frac{\|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1}}{\|(u,v)\|^2} > 0, \end{aligned}$$
de onde conclui-se que $\mathcal{N}^+ \subset U_1$.

Agora, sejam $(u,v) \in U_1$, $(w,z) \in U_2$ e $h : [0,1] \to H$ contínua tal que $h(0) = (u,v)$ e $h(1) = (w,z)$.

Se $h(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$, então $\Phi \circ h : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $\Phi \circ h(0) = \Phi((u,v)) > 0$, $\Phi \circ h(1) = \Phi((w,z)) < 0$. Sendo assim, deve existir $t^* \in (0,1)$ tal que $\Phi \circ h(t^*) = 0$, ou seja, tal que $h(t^*) \in \mathcal{N}^-$.

Se $h(t) = (0,0)$ para algum $t \in [0,1]$, defina $A = h^{-1}(0)$. Dessa forma, A é um conjunto compacto de $[0,1]$ e $\alpha = \sup A < 1$ pois $h(1) \neq (0,0)$. Assim, $h : [\alpha, 1] \to H$ satisfaz $h(\alpha) = (0,0)$ e $h(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in (\alpha, 1]$.

Uma vez que $(0,0) \in U_1$ e U_1 é um conjunto aberto, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ e $h(\alpha + \delta) \in U_1$. Assim, a função $h : [\alpha + \delta, 1] \to H$ possui as mesmas propriedades da função h do último parágrafo. Portanto, pode-se concluir que existe $t^* \in (0,1)$ tal que $h(t^*) \in \mathcal{N}^-$.

E finalmente, a aplicação $T^+ : S_H \to \mathcal{N}^-$ dada por $T^+((u,v)) = t^+((u,v))(u,v)$ é contínua, pois t^+ é contínua. A continuidade de T^{-1} segue do fato que $T^{-1}((w,z)) = \dfrac{(w,z)}{\|(w,z)\|}$.

■

Observação 5.17. *Se $(u,v) \in U_1$ e $(u,v) \neq (0,0)$ então existe $T_0 > 0$ tal que $t(u,v) \in U_2$ para todo $t > T_0$.*

De fato, seja $T_0 = \dfrac{1}{\|(u,v)\|} t^+ \left(\dfrac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \right)$. Para $t > T_0$

$$t^+ \left(\frac{t(u,v)}{\|t(u,v)\|} \right) = t^+ \left(\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \right) = T_0 \|(u,v)\| < t\|(u,v)\| = \|t(u,v)\|,$$

isto é, $t(u,v) \in U_2$.

O próximo resultado será utilizado para garantir que algumas seqüências minimizantes de I em partes de $\mathcal{N}$ são seqüências (PS) para I e também para mostrar que um certo ponto crítico de I é um mínimo local.

Lema 5.18. *Seja $\epsilon > 0$ satisfazendo (H4). Dado $(u,v) \in \mathcal{N} \backslash \{(0,0)\}$, existe $\delta > 0$ e uma função diferenciável positiva $t : \{(w,z) \in H : \|(w,z)\| < \delta\} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $t(0) = 1$ e $t((w,z))((u,v) - (w,z)) \in \mathcal{N}$, para todo $(u,v) \in H$ com $\|(u,v)\| < \delta$. Mais ainda,*

$$\langle t'((0,0)), (w,z) \rangle =$$
$$\frac{2\left((u,v),(w,z)\right) - (p+1)\displaystyle\int |u|^{p-1} uw \, dx - (q+1)\int |v|^{q-1} vz \, dx - \epsilon \int fw + gz \, dx}{\|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1}}.$$

Demonstração. Defina $F : (0,+\infty) \times H \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} F(t,(w,z)) &= t\|(u,v) - (w,z)\|^2 - t^p\,|u-w|_{p+1}^{p+1} - t^q\,|v-z|_{q+1}^{q+1} - \\ &\quad -\epsilon \int f(u-w) + g(v-z)\, dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, $F \in C^1((0,+\infty) \times H, \mathbb{R})$ com $F(1,(0,0)) = 0$ e $F_t(1,(0,0)) = \|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} \neq 0$ pelo item (iv) do Lema 5.16.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\delta > 0$ e $t : \{(w,z) \in H : \|(w,z)\| < \delta\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $F(t((w,z)),(w,z)) = 0$ para todo $(w,z) \in H$ com $\|(w,z)\| < \delta$ e com as propriedades adicionais: $t((0,0)) = 1$ e $t((w,z)) > 0$ para todo $(w,z) \in H$ com $\|(w,z)\| < \delta$.

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= t((w,z))F(t((w,z)),(w,z)) \\ &= \|t((w,z))((u,v)-(w,z))\|^2 - |t((w,z))(u-w)|_{p+1}^{p+1} - |t((w,z))(v-z)|_{q+1}^{q+1} \\ &\quad -\epsilon \int ft((w,z))(u-w) + gt((w,z))(v-z)\,dx \end{aligned}$$

isto é, $t((w,z))((u,v)-(w,z)) \in \mathcal{N}$ para todo $(w,z) \in H$ tal que $\|(w,z)\| < \delta$.

Diferenciando a identidade $F(t((w,z)),(w,z)) = 0$ em relação a (w,z), obtém-se

$$0 = \langle F_t(t((w,z)),(w,z))t'((w,z)) + F_{(w,z)}(t((w,z)),(w,z)),(s,t)\rangle, \text{ para todo } (s,t) \in H.$$

Em particular, se $(w,z) = (0,0)$ então

$$\begin{aligned} 0 &= \langle F_t(1,(0,0))t'((0,0)) + F_{(w,z)}(1,(0,0)),(s,t)\rangle \\ &= F_t(1,(0,0))\langle t'((0,0)),(s,t)\rangle + \langle F_{(w,z)}(1,(0,0)),(s,t)\rangle \end{aligned}$$

e da última identidade

$$< \langle t'((0,0)),(s,t)\rangle = -\frac{\langle F_{(w,z)}(1,(0,0)),(s,t)\rangle}{F_t(1,(0,0))} =$$
$$\frac{2\left((u,v),(s,t)\right) - (p+1)\int |u|^{p-1}\,us\,dx - (q+1)\int |v|^{q-1}\,vt\,dx - \epsilon\int fs + gt\,dx}{\|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1}}.$$

■

A demonstração do Lema 5.13 forneceu uma cota inferior para c_0. Agora vamos apresentar uma cota superior negativa para c_0. O fato de c_0 ser negativo é importante para realização de alguns de nossos cálculos.

Seja $(\overline{u},\overline{v}) \in H$, dado pelo Teorema de Riesz, tal que

$$\int fu + gv\,dx = ((\overline{u},\overline{v}),(u,v)),\ \forall (u,v) \in H.$$

Em particular, $\int f\overline{u} + g\overline{v}\,dx = \|(\overline{u},\overline{v})\|^2 = \|(f,g)\|_*^2 > 0$. Assim pelo Lema 5.14, existe um único $t_* = t^-((\overline{u},\overline{v})) > 0$ tal que $t_*(\overline{u},\overline{v}) \in \mathcal{N}^+$. Então, usando respectivamente o fato que $t_*(\overline{u},\overline{v}) \in \mathcal{N}$ e $t_*(\overline{u},\overline{v}) \in \mathcal{N}^+$ obtemos

$$\begin{aligned}
I(t_*(\overline{u},\overline{v})) &= -\frac{1}{2}\|t_*(\overline{u},\overline{v})\|^2 + \frac{p}{p+1}\left|t_*\overline{u}\right|_{p+1}^{p+1} + \frac{q}{q+1}\left|t_*\overline{v}\right|_{q+1}^{q+1} \\
&\leq -\frac{1}{2}\|t_*(\overline{u},\overline{v})\|^2 + \frac{p}{p+1}\left|t_*\overline{u}\right|_{p+1}^{p+1} + \frac{q}{p+1}\left|t_*\overline{v}\right|_{q+1}^{q+1} \\
&< \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{p+1}\right)\|t_*(\overline{u},\overline{v})\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}\|t_*(\overline{u},\overline{v})\|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}t_*^2\left|(f,g)\right|_*^2.
\end{aligned}$$

Da última desigualdade e do Lema 5.13 temos que sob (H4), a desigualdade

$$-\frac{1}{2}\frac{p^2}{p^2-1}\epsilon^2\left|(f,g)\right|_*^2 < c_0 < -\frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1}t_*^2\left|(f,g)\right|_*^2 \tag{5.12}$$

é satisfeita.

Lema 5.19. *Sob a hipótese (H1), (H2) e (H3) o ínfimo*

$$\mu_0 = \inf_{|(u,v)|_{p+1}=1}\left\{K\|(u,v)\|^{\alpha+1} - \epsilon\int fu+gv\,dx\right\}$$

é assumido por um par $(w_0,z_0) \in H$ com $|(w_0,z_0)|_{p+1} = 1$. Em particular, se (H4) é verificada então $\mu_0 > 0$.

Demonstração. Como $\alpha = \frac{p+1}{p-1} > 1$, $\mu_0 > -\infty$. Seja $((w_n,z_n))$ uma seqüência minimizante para μ_0. Como $((w_n,z_n))$ é uma seqüência limitada no espaço de Hilbert H, e este por sua vez está compactamente imerso em $L^{p+1}(\Omega)\times L^{q+1}(\Omega)$, pode-se supor que para algum elemento $(w_0,z_0)\in H$, $(w_n,z_n) \rightharpoonup (w_0,z_0)$ em H e $(w_n,z_n)\to(w_0,z_0)$ em $L^{p+1}(\Omega)\times L^{q+1}(\Omega)$. Segue então que $|(w_0,z_0)|_{p+1} = 1$ e também que $\mu_0 = K\|(w_0,z_0)\|^{\alpha+1} - \epsilon\int fw_0+gz_0\,dx$. Uma vez que μ_0 é atingido por (w_0,z_0), é claro que $\mu_0>0$ se (H4) for satisfeita.

∎

Para $(u,v)\in H\backslash\{(0,0)\}$, seja

$$\Psi((u,v)) = K\frac{\|(u,v)\|^{\alpha+1}}{|(u,v)|_{p+1}^{\alpha}} - \epsilon\int fu+gv\,dx$$

e observe que se $t>0$ e $|(u,v)|_{p+1}=1$ então

$$\Psi(t(u,v)) = t\left(\|(u,v)\|^{\alpha+1} - \epsilon\int fu+gv\,dx\right).$$

Logo, pelo Lema 5.19 , dado $\gamma > 0$

$$\inf_{|(u,v)|_{p+1} \geq \gamma} \Psi((u,v)) \geq \gamma \mu_0. \tag{5.13}$$

Em particular, se (H4) é verificada então o ínfimo dado por (5.13) é estritamente positivo.

A seguir empregaremos o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar que a condição (H4) garante a existência de uma seqüência minimizante para c_0 e uma seqüência minimizante para c_1 com uma propriedade interessante.

Lema 5.20. *Suponha que (H1), (H2), (H3) e (H4) sejam verificadas. Então existe uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}$ que também é uma seqüência (PS) para I.*

Demonstração. É claro que $\mathcal{N}$ é um conjunto fechado de H e portanto um espaço métrico completo. Uma vez que $c_0 > -\infty$, o Princípio Variacional de Ekeland garante a existência de uma seqüência (u_n) em $\mathcal{N}$ satisfazendo,

$$I((u_n, v_n)) < c_0 + \frac{1}{n}, \ I((w,z)) \geq I((u_n, v_n)) - \frac{1}{n}\|(u_n, v_n) - (w,z)\|, \tag{5.14}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $(w,z) \in \mathcal{N}$.

Uma vez que $(u_n, v_n) \in \mathcal{N}$, tem-se por (5.12) que

$$\begin{aligned} I((u_n, v_n)) &= \frac{q-1}{2(q+1)}\|(u_n, v_n)\|^2 - \frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\,|u_n|_{p+1}^{p+1} - \frac{q}{q+1}\epsilon \int f u_n + g v_n\, dx \\ &\leq \frac{q-1}{2(q+1)}\|(u_n, v_n)\|^2 - \frac{q}{q+1}\epsilon \int f u_n + g v_n\, dx < c_0 + \frac{1}{n} \\ &< -\frac{1}{2}\frac{p-1}{p+1} t_*^2\, |(f,g)|_*^2 . \end{aligned} \tag{5.15}$$

para valores suficientemente grandes de n. Para tais valores de n, $\displaystyle\int f u_n + g v_n\, dx > 0$. Na verdade mais que isso

$$\frac{q-1}{2(q+1)}\|(u_n, v_n)\|^2 < \frac{q}{q+1}\epsilon \int f_n + g v_n\, dx \leq \frac{q}{q+1}\epsilon\, |(f,g)|_*\, \|(u_n, v_n)\|$$

e portanto

$$\|(u_n, v_n)\| < \frac{2q}{q-1}\epsilon\, |(f,g)|_*. \tag{5.16}$$

Também, segue de (5.15)

$$\frac{q}{q+1}\epsilon \int f u_n + g v_n\, dx > \frac{q-1}{2(q+1)}\|(u_n, v_n)\|^2 + \frac{p-1}{2(p+1)} t_*^2\, |(f,g)|_*^2 ,$$

implicando que

$$\|(u_n, v_n)\| > \frac{(q+1)(p-1)}{2q(p+1)} \frac{t_*^2}{\epsilon} |(f,g)|_* . \tag{5.17}$$

O próximo passo é mostrar que existe uma subseqüência de $((u_n, v_n))$, que também será denotada por $((u_n, v_n))$, tal que $I'((u_n, v_n)) \to 0$ em H'.

A prova é feita por contradição, por isso pode-se supor que $I'(u_n, v_n)) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja L o isomorfismo isométrico de Riesz entre H e H' e $U_n = L^{-1}(I'((u_n, v_n))$.Dessa forma, tem-se que

$$\langle I'((u_n, v_n)), U_n\rangle = \|U_n\|^2 = |I'((u_n, v_n))|_*^2$$

e

$$\langle I'((u_n, v_n)), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle = \frac{|I'((u_n, v_n))|_*^2}{|I'((u_n, v_n))|_*} = |I'((u_n, v_n))|_*. \tag{5.18}$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$ por enquanto. Fazendo $(u, v) = (u_n, v_n)$ no Lema 5.18, sabe-se que para $w = \delta\frac{U_n}{\|U_n\|}$, com $0 < \delta < \delta_n$

$$(w_{\delta,n}, z_{\delta,n}) = \tau_n(\delta)\left[(u_n, v_n) - \delta\frac{U_n}{\|U_n\|}\right] \in \mathcal{N},$$

onde δ_n é também dado pelo Lema 5.18 e $\tau_n := t_n\left(\delta\frac{U_n}{\|U_n\|}\right)$. Note aqui que $\tau_n(\delta)$ é uma função definida em $(0, \delta_n)$.

De (5.14) e do fato que $(w_{\delta,n}, z_{\delta,n}) \in \mathcal{N}$ segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\|(u_n, v_n) - (w_{\delta,n}, z_{\delta,n})\| \geq I((u_n, v_n)) - I((w_{\delta,n}, z_{\delta,n}))- \\
&-\langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n)\rangle + \langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n)\rangle \\
&= I((u_n, v_n)) - I((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})) - \langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n\rangle \\
&+(1-\tau_n(\delta))\langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n)\rangle + \delta\tau_n(\delta)\langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Suponha agora que

$$I((u_n, v_n)) - I((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})) - \langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n)\rangle = o(\delta), \tag{5.20}$$

então,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\|(w_{\delta,n}, z_{\delta,n}) - (u_n, v_n)\| \;\; &\geq \;\; (1-\tau_n(\delta))\langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n)\rangle + \\
&+\delta\tau_n(\delta)\langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), \tfrac{U_n}{\|U_n\|}\rangle + o(\delta).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Como $(w_{\delta,n}, z_{\delta,n}) - (u_n, v_n) = (\tau_n(\delta) - 1)(u_n, v_n) - \delta\tau_n(\delta)\frac{U_n}{\|U_n\|}$ e $\tau_n'(0) = \langle t_n'((0,0)), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle$, dividindo (5.21) por $\delta > 0$ e tomando o limite com $\delta \to 0$, as sentenças (5.18) e (5.21) auxiliam na seguinte conclusão.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(1 + |\tau_n'(0)|\,\|(u_n, v_n)\|\right) &\geq \frac{1}{n}\left\|\tau_n'(0)u_n - \frac{U_n}{\|U_n\|}\right\| = \frac{1}{n}\left\|\lim_{\delta\to 0}\frac{(w_{\delta,n}, z_{\delta,n}) - (u_n, v_n)}{\delta}\right\| \\
&\geq -\tau_n'(0)\langle I'((u_n, v_n)), (u_n, v_n)\rangle + \langle I'((u_n, v_n)), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle \\
&= |I'(u_n)|_*\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$|I'((u_n, v_n))|_* \leq \frac{1}{n}\left(1 + |\tau_n'(0)|\,\|(u_n, v_n)\|\right) \leq \frac{C}{n}\left(1 + |\tau_n'(0)|\right) \tag{5.22}$$

uma vez que $((u_n, v_n))$ é limitada.

Com essa última desigualdade, o próximo passo é mostrar que $|\tau_n'(0)|$ é uniformemente limitada em relação a n. No entanto, pelo Lema 5.18,

$$|\tau_n'(0)| = \left|\langle t_n'((0,0)), \frac{U_n}{\|U_n\|}\rangle\right| \leq \frac{C_1}{\left|\|(u_n, v_n)\|^2 - p\,|u_n|_{p+1}^{p+1} - q\,|v_n|_{q+1}^{q+1}\right|}$$

pois $((u_n, v_n))$ é limitada e $\left\|\frac{U_n}{\|U_n\|}\right\| = 1$. Com isso, precisa ser mostrado que $\left|\|(u_n, v_n)\|^2 - p\,|u_n|_{p+1}^{p+1} - q\,|v_n|_{q+1}^{q+1}\right|$ está longe de zero. Por contradição, suponha que existe uma subseqüência de $((u_n, v_n))$, também denotada por $((u_n, v_n))$, tal que

$$\|(u_n, v_n)\|^2 - p\,|u_n|_{p+1}^{p+1} - q\,|v_n|_{q+1}^{q+1} = o(1). \tag{5.23}$$

Por (5.17) e (5.23)

$$p\,|u_n|_{p+1}^{p+1} + q\,|v_n|_{q+1}^{q+1} = \|(u_n, v_n)\|^2 + o(1) \geq C$$

isto é, $|(u_n, v_n)|_{p+1} \geq \gamma$ para algum $\gamma > 0$. Ainda por (5.23) e pelo fato que $(u_n, v_n) \in \mathcal{N}$ tem-se

$$\epsilon\int f u_n + g v_n\,dx = \|(u_n, v_n)\|^2 - |u_n|_{p+1}^{p+1} - |v_n|_{q+1}^{q+1} = (p-1)\,|u_n|_{p+1}^{p+1} + (q-1)\,|v_n|_{q+1}^{q+1} + o(1). \tag{5.24}$$

As sentenças (H4), (5.13) e (5.24), as definições de K e α, notando que $|v_n|_{q+1} < 1$ por

(H4) e (5.16), permitem o seguinte cálculo

$$
\begin{aligned}
0 &< \mu_0 \gamma^{1+\alpha} \\
&\leq \left(|(u_n, v_n)|_{p+1} \right)^{\alpha} \Psi((u_n, v_n)) = K \|(u_n, v_n)\|^{\alpha+1} - \left(|(u_n, v_n)|_{p+1} \right)^{\alpha} \epsilon \int f u_n + g v_n \, dx \\
&= K \|(u_n, v_n)\|^{\alpha+1} - \left(|(u_n, v_n)|_{p+1} \right)^{\alpha} \left((p-1) |u_n|_{p+1}^{p+1} + (q-1) |v_n|_{q+1}^{q+1} \right) + o(1) \\
&\leq K \|(u_n, v_n)\|^{\alpha+1} - (p-1) \left(|u_n|_{p+1}^{p+1} + |v_n|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{\alpha}{p+1}} \left(|u_n|_{p+1}^{p+1} + |v_n|_{q+1}^{q+1} \right) + o(1) \\
&= K \|(u_n, v_n)\|^{\alpha+1} - (p-1) \left(|u_n|_{p+1}^{p+1} + |v_n|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{\alpha+p+1}{p+1}} + o(1) \\
&\leq K \|(u_n, v_n)\|^{\alpha+1} - \frac{p-1}{q^{\frac{\alpha+q+1}{q+1}}} \left(p |u_n|_{p+1}^{p+1} + q |v_n|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{\alpha+p+1}{p+1}} + o(1) \\
&= K \|(u_n, v_n)\|^{\alpha+1} - \frac{p-1}{q^{\frac{\alpha+p+1}{p+1}}} \|(u_n, v_n)\|^{2\frac{\alpha+p+1}{p+1}} + o(1) = o(1).
\end{aligned}
$$

o que é claramente impossível.

Sendo assim, para concluir que $I'(u_n) \to 0$ basta provar que a identidade (5.20) é verificada. Isto será provado logo abaixo na forma de um lema.

■

Considere $r > 1$ um número real. Então, pelo teorema do valor médio para derivadas, dados $t, h \in \mathbb{R}$, existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$
|t|^r + (r-1) |t+h|^r - r |t+h|^{r-2} (t+h) t = r \left(|t+h|^{r-2} (t+h) - |t+\theta h|^{r-2} (t+\theta h) \right) h. \tag{5.25}
$$

Utilizaremos a identidade (5.25) para mostrar (5.20).

Lema 5.21. *A identidade (5.20) é válida.*

Demonstração. Seja $\kappa_{\delta,n} = I((u_n, v_n)) - I((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})) - \langle I'((w_{\delta,n}, z_{\delta,n})), (u_n, v_n) \rangle$.

Pelo fato que $(w_{\delta_n}, z_{\delta,n}) \in \mathcal{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\kappa_{\delta,n} &= \frac{1}{2}\|(u_n, v_n)\|^2 - \frac{1}{p+1}|u_n|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}|v_n|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int f u_n + g v_n \, dx - \\
&\quad -\frac{1}{2}\|(w_{\delta,n}, z_{\delta,n})\|^2 - \frac{1}{p+1}|w_{\delta,n}|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}|z_{\delta,n}|_{q+1}^{q+1} - \\
&\quad -\epsilon \int f w_{\delta,n} + g z_{\delta,n} \, dx - ((w_{\delta,n}, z_{\delta,n}), (u_n, v_n)) + \int |w_{\delta,n}|^{p-1} w_{\delta,n} u_n \, dx + \\
&\quad + \int |z_{\delta,n}|^{q-1} z_{\delta,n} v_n \, dx + \epsilon \int f u_n + g v_n \, dx + \|(w_{\delta,n}, z_{\delta,n})\|^2 - \\
&\quad - |w_{\delta,n}|_{p+1}^{p+1} - |z_{\delta,n}|_{q+1}^{p+1} - \epsilon \int f w_{\delta,n} + g z_{\delta,n} \, dx \\
&= \frac{1}{2}\|(u_n, v_n) - (w_{\delta,n}, z_{\delta,n})\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{p+1}\left(|u_n|_{p+1}^{p+1} + p\,|w_{\delta,n}|_{p+1}^{p+1} - (p+1)\int |w_{\delta,n}|^{p-1} w_{\delta,n} u_n \, dx \right) \\
&\quad - \frac{1}{q+1}\left(|v_n|_{q+1}^{q+1} + q\,|z_{\delta,n}|_{q+1}^{q+1} - (q+1)\int |z_{\delta,n}|^{q-1} w_{\delta,n} v_n \, dx \right).
\end{aligned}$$

Sejam $h_{\delta,n} = w_{\delta,n} - u_n$ e $l_{\delta,n} = z_{\delta,n} - v_n$. Segue da última identidade e de (5.25) que existem $0 < \theta, \sigma < 1$ tais que

$$\begin{aligned}
\kappa_{\delta,n} &= \frac{1}{2}\|(h_{\delta,n}, l_{\delta_n})\|^2 - \int \left(|w_{\delta,n}|^{p-1} w_{\delta,n} - |u_n + \theta h_{\delta,n}|^{p-1}(u_n + \theta h_{\delta,n}) \right) h_{\delta,n} \, dx \\
&\quad - \int \left(|z_{\delta,n}|^{p-1} z_{\delta,n} - |v_n + \sigma l_{\delta,n}|^{p-1}(v_n + \sigma l_{\delta,n}) \right) l_{\delta,n} \, dx.
\end{aligned}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}
h_{\delta,n} &= w_{\delta,n} - u_n = (\tau_n(\delta) - 1)\, u_n - \delta \frac{U_{n1}}{\|U_n\|} \quad \text{e} \\
l_{\delta,n} &= z_{\delta,n} - v_n = (\tau_n(\delta) - 1)\, v_n - \delta \frac{U_{n2}}{\|U_n\|}
\end{aligned}$$

onde $U_n = (U_{n1}, U_{n2})$. Assim, dividindo por $\delta > 0$,

$$\frac{(h_{\delta_n}, z_{\delta,n})}{\delta} \to \tau_n'(0)(u_n, v_n) - \frac{U_n}{\|U_n\|}, \text{ quando } \delta \to 0.$$

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $\kappa_{\delta,n} = o(\delta)$ como desejado.

■

Lema 5.22. *Se (H1), (H2), (H3) e (H4) são verificadas, então existe uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}^-$ que também é uma seqüência (PS) para I.*

Demonstração. Uma vez que $\mathcal{N}^-$ é um conjunto fechado de H e portanto um espaço métrico completo, pelo Princípio Variacional de Ekeland existe uma seqüência $((u_n, v_n))$ em $\mathcal{N}^-$ satisfazendo

$$I((u_n, v_n)) < c_1 + \frac{1}{n},\ I((w, z)) \geq I((u_n, v_n)) - \frac{1}{n}\|(u_n, v_n) - (w, z)\|, \tag{5.26}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $(w, z) \in \mathcal{N}^-$.

Pelas estimativas da demonstração do Lema 5.13, $((u_n, v_n))$ é limitada e pelo Lema 5.16, $(0, 0)$ não é um ponto aderente a $((u_n, v_n))$. Com essas informações, basta proceder como na demonstração do Lema 5.20, a partir de (5.17).

■

Os próximo dois lemas apresentam propriedades importantes dos pontos que realizam os problemas de minimização envolvendo c_0 e c_1.

Lema 5.23. *Suponha (H1), (H2), (H3), (H4) e $b \geq 0$. Se $u \in \mathcal{N}$ é tal que $I((u, v)) = c_0$, então $(u, v) \in \mathcal{N}^+$ e (u, v) é um mínimo local para I quando I é considerado em todo o espaço E.*

Demonstração. Seja $(u, v) \in \mathcal{N}$ tal que $I((u, v)) = c_0$. Como em (5.15), prova-se que $\int fu + gv\, dx > 0$. Da existência de $t^+((u, v))$ e $t^-((u, v))$, assegurada pelo Lema 5.14 e de $I(t^-((u, v))(u, v)) < I(t^+((u, v))(u, v))$ segue que $(u, v) \in \mathcal{N}^+$.

Uma vez que $(u, v) \in \mathcal{N}^+$, $t^- = 1$. Então pela desigualdade envolvendo t^- e t_{max}, dada no Lema 5.14,

$$1 < t_{max}((u, v)).$$

Pelo Lema 5.18, para $\delta > 0$ até mesmo menor se necessário, considere $t : \{(w, z) \in H : \|(w, z)\| < \delta\} \to \mathbb{R}$ tal que $t((w, z))((u, v) - (w, z)) \in \mathcal{N}$ para todo $(w, z) \in H$ com $\|(w, z)\| < \delta$.

Da continuidade de t_{max} e desde que $t((w, z)) \to 1$ quando $\|w\| \to 0$, pode-se assumir que

$$t((w, z)) < t_{max}((u, v) - (w, z)),\ t_{max}((u, v) - (w, z)) > 1,\ \forall\, \|(w, z)\| < \delta. \tag{5.27}$$

A última desigualdade e o Lema 5.14 implicam que $t((w, z))((u, v) - (w, z)) \in \mathcal{N}^+$. Uma vez mais pelo Lema 5.14, e pelo fato de que $I((u, v)) = c_0$,

$$I(t((u, v) - (w, z)) \geq I(t((w, z))((u, v) - (w, z))) \geq I((u, v)),\ \forall\, t \in [0, t_{max}((u, v) - (w, z))]\,.$$

Assim, através da desigualdade (5.27) pode-se concluir que $I((u,v)-(w,z)) \geq I((u,v))$ para todo $(w,z) \in H$ com $\|(w,z)\| < \delta$, isto é, que (u,v) é um mínimo local para I.

■

Lema 5.24. *Suponha que as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estejam satisfeitas e $\epsilon \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Se $(u,v) \in \mathcal{N}^-$ é tal que $I((u,v)) = c_1$ então (u,v) é um ponto crítico de I.*

Demonstração. Considere o conjunto aberto $A = \{(u,v) \in E : \|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} < 0\}$ e $G : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$G((u,v)) = \langle I'((u,v)),(u,v)\rangle = \|(u,v)\|^2 - |u|_{p+1}^{p+1} - |v|_{q+1}^{q+1} - \int fu\,dx - \int gv\,dx.$$

Assim, $G \in C^1(A,\mathbb{R})$, $\mathcal{N}^- = G^{-1}(\{0\})$ e para cada $(u,v) \in \mathcal{N}^-$ tem-se

$$\begin{aligned}\langle G'((u,v)),(u,v)\rangle &= 2\|(u,v)\|^{\frac{p+1}{p}} - (p+1)\,|u|_{p+1}^{p+1} - (q+1)\,|v|_{q+1}^{q+1} - \textstyle\int fu + gv\,dx \\ &= \|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} < 0.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Se $(u,v) \in \mathcal{N}^-$ é tal que $I((u,v)) = c_1$, então pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle I'((u,v)),(w,z)\rangle = \lambda\langle G'((u,v)),(w,z)\rangle,\ \forall\ (w,z) \in H,$$

e em particular

$$0 = \langle I'((u,v)),(u,v)\rangle = \lambda\langle G'((u,v)),(u,v)\rangle.$$

Segue da última identidade e de (3.27) que $\lambda = 0$ e, portanto que (u,v) é um ponto crítico de I.

■

Lema 5.25. *Se $f,g \geq 0$ em Ω, então as soluções não-negativas de (5.4) são precisamente os pontos críticos de I^+.*

Demonstração. É claro que se (u,v) é uma solução fraca não-negativa de (5.4) então $(u,v) \geq 0$ é um ponto crítico de I^+. Por outro lado, um ponto crítico (u,v) de I^+ com $u,v \geq 0$ q.t.p. em Ω é também um ponto crítico de I. Assim, o que precisa ser feito é mostrar que se $f,g \geq 0$ em Ω então todo ponto crítico de I^+ é não-negativo.

Suponha então que $f,g \geq 0$ em Ω e seja $(u,v) \in H$ um ponto critico de I^+. Assim,

$$0 = \langle I'(u,v),(u^-,v^-)\rangle = -\|(u^-,v^-)\|^2 - \epsilon\int fu^- + gv^-\,dx,$$

implicando que $\|(u^-,v^-)\|^2 \leq 0$, ou seja, que $(u^-,v^-) = (0,0)$.

■

Lema 5.26. *Se (u_0, v_0) é um mínimo local para I e $(u_0, v_0) \geq 0$, então (u_0, v_0) também é um mínimo local para I^+.*

Demonstração. Isto segue do fato que $I^+((u,v)) \geq I((u,v))$ para todo $(u,v) \in H$. De fato, seja $\delta > 0$ tal que $I((u,v)) \geq I((u_0,v_0))$ para todo $(u,v) \in H$ tal que $\|(u,v)-(u_0,v_0)\| < \delta$. Suponha que $(u_0,v_0) \geq 0$. Então, para qualquer (u,v) em tal vizinhança de (u_0,v_0) tem-se que

$$I^+((u,v)) \geq I((u,v)) \geq I((u_0,v_0)) = I^+((u_0,v_0)).$$

■

5.2.2 A condição de Palais-Smale

As demonstrações dos Teoremas 5.4, 5.6 e 5.7 dependem do fato de I satisfazer a condição (PS). Vamos utilizar o Lema B.1 para mostrar que o funcional I realmente satisfaz tal condição.

Pela definição de I temos que

$$\langle I'((u,v)),(w,z)\rangle = ((u,v),(w,z)) - \int |u|^{p-1}\, uw\, dx - \int |v|^{q-1}\, vz\, dx - \epsilon \int fw + gv\, dx$$

para todo $(u,v),(w,z) \in H$.

Assim, podemos escrever $I' = L + K$, onde L é o isomorfismo isométrico entre H e H', fornecido pelo Teorema de Riesz para espaços de Hilbert, e $K : H \to H'$ é dado por

$$\langle K((u,v)),(w,z)\rangle = -\int |u|^{p-1}\, uw\, dx - \int |v|^{q-1}\, vz\, dx - \epsilon \int fw + gv\, dx,$$

para todo $(u,v),(w,z) \in H$. Segue da hipótese (H2) que K é compacto. Dessa forma, para mostrar que I satisfaz (PS) basta mostrar que a condição (i) do Lema B.1 é verificada.

Lema 5.27. *Toda seqüência (PS) de I é limitada.*

Demonstração. Seja $((u_n,v_n))$ uma seqüência (PS) para I. Assim, existe $C > 0$ e uma seqüência de números reais positivos $\sigma_n \to 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $(w,z) \in H$

$$|I((u_n,v_n)| = \left|\frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|^2 - \frac{1}{p+1}\,|u_n|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}\,|v_n|_{q+1}^{q+1} - \epsilon \int fu_n + gv_n\, dx\right| \leq C$$

e mais,

$$
\begin{aligned}
|\langle I'((u_n, v_n)), (w, z)\rangle| &= \left|((u_n, v_n), (w, z)) - \int |u_n|^{p-1} u_n w \, dx - \right. \\
&\left. - \int |v_n|^{q-1} v_n z \, dx - \epsilon \int fw + gz \, dx \right| \leq \sigma_n \|(w, z)\|.
\end{aligned}
$$

Da identidade

$$
\begin{aligned}
&(p+1)I((u_n, v_n)) - \langle I'((u_n, v_n)), (u_n, v_n)\rangle \\
&= \frac{p-1}{2}\|(u_n, v_n)\|^2 + \frac{q-p}{q+1}|v_n|_{q+1}^{q+1} - \epsilon p \int fu_n + gv_n \, dx
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{p-1}{2}\|u_n\|^2 &= (p+1)I((u_n, v_n)) - \langle I'((u_n, v_n)), (u_n, v_n)\rangle - \frac{q-p}{q+1}|v|_{q+1}^{q+1} \\
&+\epsilon p \int fu_n + gv_n \, dx \leq (p+1)C + \sigma_n \|(u_n, v_n)\| + |\epsilon| \, p \|(f, g)\|_* \|(u_n, v_n)\|,
\end{aligned}
$$

mostrando assim que $((u_n, v_n))$ é limitada.

■

Lema 5.28. *Para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}$, o funcional I satisfaz (PS).*

Demonstração. É uma conseqüência direta dos Lemas B.1 e 5.27 e da decomposição para I' apresentada acima.

■

5.2.3 Demonstração do Teorema 5.4

Suponha que as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4) sejam verificadas. Os Lemas 5.20 e 5.28, garantem a existência de uma seqüência minimizante de I sobre $\mathcal{N}$ que também é uma seqüência $(\mathrm{PS})_{c_0}$ para I tal que $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ em H.

Como $I \in C^1(E, H)$, obtém-se que $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}$ e $I((u_0, v_0)) = c_0$. Então aplicando o Lema 5.23 conclui-se que $(u_0, v_0) \in \mathcal{N}^+$ e que (u_0, v_0) é um mínimo local de I, quando I é considerado em todo o espaço H.

Agora, suponha que $f, g \geq 0$ em Ω e que $b \geq 0$. A hipótese $b \geq 0$ diz que

$$
\|(|u_0|, |v_0|)\| \leq \|(u_0, v_0)\|.
$$

Por outro lado, a hipótese de positividade de (P) sobre (f,g) implica que $\int f\,|u_0| + g\,|v_0|\;dx \geq \int fu_0 + gv_0\,dx > 0$. Pelo Lema 5.14, existe um único $t^- = t^-((|u_0|\,,|v_0|)) > 0$ tal que $t^-((|u_0|\,,|v_0|)) \in \mathcal{N}^+$. Assim, $1 = t^-((u_0,v_0)) \leq t^-((|u_0|\,,|v_0|) < t^+((|u_0|\,,|v_0|)) \leq t^+((u_0,v_0))$. Então

$$c_0 \leq I(t^-(|u_0|\,,|v_0|)) \leq I((|u_0|\,,|v_0|)) \leq I((u_0,v_0)) = c_0,$$

onde a primeira desigualdade é fornecida pela definição de c_0, a segunda pela propriedade de t^- e a terceira pelos fatos: $\|(|u_0|\,,|v_0|)\| \leq \|(u_0,v_0)\|$, $||u_0||_{p+1} = |u_0|_{p+1}$, $||v_0||_{q+1} = |v_0|_{q+1}$ e $\displaystyle\int f\,|u_0| + g\,|v_0|\;dx \geq \int fu_0 + gv_0\,dx$.

Sendo assim, $1 = t^-(|u_0|\,,|v_0|)$, isto é, $(|u_0|\,,|v_0|) \in \mathcal{N}^+$ e $I((|u_0|\,,|v_0|)) = I((u_0,v_0)) = c_0$. Logo, pelo Lema 5.23 $(|u_0|\,,|v_0|)$ também é um mínimo local de I. Se (u_0,v_0) não é não-negativa, basta trocar (u_0,v_0) por $(|u_0|\,,|v_0|)$.

5.2.4 Demonstração do Teorema 5.5

A demonstração do Teorema 5.5 é semelhante à demonstração do Teorema 5.4.

Os Lemas 5.22 e 5.28 e o fato que $\mathcal{N}^-$ é fechado garantem a existência de $(u_1,v_1) \in \mathcal{N}^-$ tal que

$$I((u_1,v_1)) = c_1 \text{ e } \langle I'((u_1,v_1)),(w,z)\rangle = 0\ \forall\,(w,z) \in H.$$

Se $f,g \geq 0$ em Ω, considere $(|u_1|\,,|v_1|) \in H$.

Caso 1: $\int fu_1 + gv_1\,dx \leq 0$

Como observado na demonstração do Lema 5.14,

$$I((u_1,v_1) = \max_{t\geq 0} I(t(u_1,v_1)) \geq I(t^+((|u_1|\,,|v_1|))(u_1,v_1)) \geq I(t^+((|u_1|\,,|v_1|))(|u_1|\,,|v_1|)) \tag{5.29}$$

onde a primeira desigualdade não é estrita se, e somente se $t^+((|u_1|\,,|v_1|)) = t^+((u_1,v_1)) = 1$. Como $I((u_1,v_1) = c_1$ e $I(t^+((|u_1|\,,|v_1|))(|u_1|\,,|v_1|)) \geq c_1$ conclui-se que $t^+((|u_1|\,,|v_1|)) = t^+((u_1,v_1)) = 1$, ou seja, $(|u_1|\,,|v_1|) \in \mathcal{N}^-$ e $I((|u_1|\,,|v_1|)) = c_1$.

Caso 2: $\int fu_1 + gu_1\, dx > 0$

Neste caso, como na demonstração do Teorema 5.4, tem-se $t^+((|u_1|, |v_1|)) \geq t^-((|u_1|, |v_1|)) \geq t^-((u_1, v_1))$. Mais uma vez, como observado na demonstração do Lema 5.14

$$I((u_1, v_1)) = \max_{t \geq t^-((u_1,v_1))} I(t(u_1, v_1)) \geq I(t^+((|u_1|, |v_1|))(u_1, v_1)) \geq I(t^+((|u_1|, |v_1|))(|u_1|, |v_1|)) \tag{5.30}$$

onde a primeira desigualdade não é estrita se, e somente se $t^+((|u_1|, |v_1|)) = t^+((u_1, v_1)) = 1$. Como $I((u_1, v_1)) = c_1$ e $I(t^+((|u_1|, |v_1|))(|u_1|, |v_1|)) \geq c_1$ conclui-se que $t^+((|u_1|, |v_1|)) = t^+((u_1, v_1) = 1$, ou seja, $(|u_1|, |v_1|) \in \mathcal{N}^-$ e $I((|u_1|, |v_1|)) = c_1$.

Dessa análise fica mostrado que, se $f, g \geq 0$ em Ω com $b \geq 0$ então existe $(u_1, v_1) \in \mathcal{N}^-$ com $(u_1, v_1) \geq 0$ e $I((u_1, v_1)) = c_1$ e aplicando o Lema 3.24 obtém-se que (u_1, v_1) é um ponto crítico de I.

O último passo é mostrar que $c_1 > c_0$. Para isso, seja $(u_1, v_1) \in \mathcal{N}^-$ tal que $I((u_1, v_1)) = c_1$. Por contradição, suponha que $c_1 = c_0$. Da estimativa (5.12) tem-se $c_0 < 0$ e como na demonstração do Lema 5.20, obtém-se $\int fu_1 + gv_1\, dx > 0$. Mas, pela Observação 5.15, $t^-(u_1, v_1) \in \mathcal{N}^+$ e

$$c_0 \leq I(t^-(u_1, v_1)) < I((u_1, v_1)) = c_1 = c_0,$$

o que é uma contradição.

5.2.5 Demonstração do Teorema 5.6

Será empregado um argumento de aproximação para se demonstrar o Teorema 5.6. Com esse intuito, observe que se $\epsilon = \epsilon^*$ então (H4) é satisfeita para qualquer $\sigma \in (0, \epsilon)$. Para cada $\sigma \in (0, \epsilon)$ sejam

$$I_\sigma((u, v)) = \frac{1}{2}\|(u, v)\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{q+1}|v|_{q+1}^{q+1} - \sigma \int fu + gv\, dx,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\sigma &= \{(u, v) \in H : \langle I'_\sigma((u, v)), (u, v)\rangle = 0\},\\
\mathcal{N}_\sigma^+ &= \{(u, v) \in \mathcal{N}_\sigma : \|(u, v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} > 0\},\\
\mathcal{N}_{\sigma,0} &= \{(u, v) \in \mathcal{N}_\sigma : \|(u, v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} = 0\},\\
\mathcal{N}_\sigma^- &= \{(u, v) \in \mathcal{N}_\sigma : \|(u, v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} < 0\}
\end{aligned}$$

e $(u_\sigma, v_\sigma) \in \mathcal{N}_\sigma^+$, como construída acima com as seguintes propriedades,

$$I_\sigma((u_\sigma, v_\sigma)) = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\sigma} I_\sigma((u, v)) = c_{\sigma,0} \quad \text{e} \quad \langle I'_\sigma((u_\sigma, v_\sigma)), (w, z))\rangle = 0,$$

para todo $(w,z) \in H$.

O Lema 5.16 garante que

$$\|(u_\sigma, v_\sigma)\| < \frac{2p}{p-1}\sigma\,|(f,g)|_* < \frac{2p}{p-1}\epsilon\,|(f,g)|_*\,,\ \forall\,\sigma \in (0,\epsilon).$$

Agora, dado $(u,v) \in \mathcal{N}_\epsilon^+ \cup \mathcal{N}_{\epsilon,0}\backslash\{(0,0)\}$ segue do fato que $p,q>1$ que

$$\epsilon\int fu + gv\,dx = \|(u,v)\|^2 - |u|_{p+1}^{p+1} - |v|_{q+1}^{q+1} > \|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} \geq 0.$$

Assim, pelo Lema 5.14, para cada $\sigma \in (0,\epsilon)$ existe um único $0 < t_\sigma^- < t_{max}((u,v))$ tal que $t_\sigma^-(u,v) \in \mathcal{N}_\sigma^+$.

Como

$$\|(u,v)\|^2 - pt_{max}^{p-1}\,|u|_{p+1}^{p+1} - qt_{max}^{q-1}\,|v|_{q+1}^{q+1} = 0,\ \ \|(u,v)\|^2 - p\,|u|_{p+1}^{p+1} - q\,|v|_{q+1}^{q+1} \geq 0,$$

e $p,q>1$, conclui-se que $t_{max}((u,v)) \geq 1$. Mais uma vez pelo Lema 5.14, $I_\sigma(t_\sigma^-(u,v)) \leq I_\sigma((u,v))$ e conseqüentemente, do item (i) do Lema 5.16

$$c_{\sigma,0} \leq I_\sigma(t_\sigma^-(u,v)) \leq I_\sigma((u,v)) = I_\epsilon((u,v)) + (\epsilon-\sigma)\int fu+gv\,dx \leq I_\epsilon((u,v)) + C(\epsilon-\sigma)$$

onde $C = C(\epsilon) > 0$. Assim, segue de (5.12) que para qualquer $\sigma \in (0,\epsilon)$

$$-\frac{1}{2}\frac{p^2}{p^2-1}\epsilon^2\,|(f,g)|_*^2 < c_{\sigma,0} \leq \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0}} I((u,v)) + C(\epsilon-\sigma).$$

Seja $c_\epsilon = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0}} I((u,v))$ e observe que $c_\epsilon = c_{0,+}$ do Teorema 5.6.

Considere (σ_n) uma seqüência crescente de números positivos tal que $\sigma_n \to \epsilon$ e $c_{\sigma_n,0} \to \overline{c} \leq c_\epsilon$. Dessa forma, $((u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n})$ é uma seqüência (PS) para I_ϵ, e pelo Lema 5.28 pode-se supor que $(u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n}) \to (u_0,v_0)$ em H para algum $(u_0,v_0) \in H$. Uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I_\sigma'((u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n}),(w,z)\rangle \\ &= ((u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n}),(w,z)) - \int |u_{\sigma_n}|^{p-1} u_{\sigma_n} w\,dx - \int |v_{\sigma_n}|^{q-1} v_{\sigma_n} z\,dx - \sigma_n\int fw+gz\,dx, \end{aligned}$$

para todo $(w,z) \in H$ e todo $n \in \mathbb{N}$, toma-se o limite com $n \to +\infty$ para obter $\langle I_\epsilon'((u_0,v_0)),(w,z)\rangle = 0$ para todo $(w,z) \in H$ e $I_\epsilon((u_0,v_0)) \leq c_\epsilon$.

Dos fatos, $(u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n}) \to (u_0,v_0)$ em H e $(u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n}) \in \mathcal{N}_{\sigma_n}^+$ conclui-se que $(u_0,v_0) \in \mathcal{N}_\epsilon^+ \cup \mathcal{N}_{\epsilon,0}$ e portanto, que $I_\epsilon((u_0,v_0)) = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\epsilon^+\cup\mathcal{N}_{\epsilon,0}} I_\epsilon((u,v)) = c_\epsilon$.

No caso em que $f,g \geq 0$ em Ω e $b \geq 0$, através de $(u_{\sigma_n}, v_{\sigma_n}) \geq 0$ e do fato que $u_{\sigma_n} \to u_0$, $v_{\sigma_n} \to v_0$ q.t.p. em Ω, conclui-se que $(u_0,v_0) \geq 0$.

5.2.6 Demonstração do Teorema 5.7

O Lema 5.16 garante que $\mathcal{N}^+ \subset U_1$ e portanto $(u_0, v_0) \in U_1$ com (u_0, v_0) dado pelo Teorema 5.4. Da Observação 5.17 e da fórmula de I, é possível obter $T > 0$ suficientemente grande tal que $e = (Tu_0, Tv_0) \in U_2$ e $I((u_0, v_)) > I(e)$.

Uma vez que I tem a geometria do passo da montanha com mínimo local em (u_0, v_0) e satisfaz (PS), aplica-se o Teorema do Passo da Montanha para mostrar que c é um valor crítico para I.

Além disso, o Lema 5.16 garante que a imagem de qualquer $h \in \mathcal{F}$ intercepta $\mathcal{N}^-$, implicando que $c \geq c_1$.

No caso $f, g \geq 0$ em Ω e $b \geq 0$, o Lema 5.26 garante que (u_0, v_0) também é um mínimo local para I^+. Assim I e I^+ satisfazem a condição (PS) e têm a geometria do passo da montanha com mínimo local em (u_0, v_0).

Seja $T > 0$ como antes. Mais uma vez pelo Teorema do Passo da Montanha, conclui-se que c^+ é um valor crítico para I^+ e pelo Lema 5.25 que c^+ é uma valor crítico para I com um ponto crítico não-negativo. O fato que $c^+ \geq c_1$ segue do fato que $I^+ \geq I$.

5.2.7 Demonstração do Teorema 5.9

Tome (ϵ_n) uma seqüência decrescente de números positivos satisfazendo (H4) que converge para 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $(u_{\epsilon_n,1}, v_{\epsilon_n,1})$ a solução de (5.4) dada pelo Teorema 5.5 , que está em $\mathcal{N}^-_{\epsilon_n}$. Assim $(u_{\epsilon_n,1}, v_{\epsilon_n,1})$ é uma seqüência (PS) para

$$J((u,v)) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} - \frac{1}{q+1}\int |v|^{q+1}\, dx,$$

que satisfaz (PS), pelo Lema 5.28. Segue daí a existência de $(u, v) \in H$ tal que $(u_{\epsilon_n,1}, v_{\epsilon_n,1})$ converge em H para (u, v) e $u_{\epsilon_n,1} \to u$, $v_{\epsilon_n,1} \to v$ q.t.p. em Ω. Portanto, (u, v) é um ponto crítico de J. Em particular, $(u, v) \geq 0$ e pelo item (iii) do Lema 5.16 conclui-se que $(u, v) \neq (0, 0)$.

A demonstração de $(u_{\epsilon,0}, v_{\epsilon,0}) \to (0, 0)$ em H é baseada no item (i) do Lema 5.16 e no fato que $(u_{\epsilon,0}, v_{\epsilon,0}) \in \mathcal{N}^+_{\epsilon_n}$.

APÊNDICE A

Princípio Variacional de Ekeland

O objetivo desta seção é apresentar o princípio variacional de Ekeland que foi bastante utilizado neste trabalho. Temos como referência básica para essa seção o artigo de Ekeland [24] e o livro de de Figueiredo [15].

Teorema A.1. *Seja* (X, d) *um espaço métrico completo e* $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função semicontínua inferiormente tal que* $\varphi(u_0) < +\infty$*, para algum* $u_0 \in X$*. Se* φ *é limitada inferiormente então, dados* $\lambda, \epsilon > 0$ *e* $\overline{u} \in X$ *satisfazendo*

$$\varphi(\overline{u}) \leq \inf_X \varphi + \epsilon,$$

existe $u_\lambda \in X$ *tal que* $d(\overline{u}, u_\lambda) \leq \lambda$*,*

$$\varphi(u_\lambda) < \varphi(\overline{u})$$

e

$$\varphi(u) > \varphi(u_\lambda) - (\epsilon/\lambda) d(u_\lambda, u),$$

para todo $u \in X \backslash \{u_\lambda\}$*.*

APÊNDICE B

Um critério de compacidade

Apresentamos neste apêndice uma condição suficiente para que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ definido sobre um espaço de Banach E satisfaça à condição de Palais-Smale.

Lema B.1. *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que*

(i) qualquer seqüência $(PS)_\beta$ é limitada;

(ii) existe um homeomorfismo $L : E \to E'$ e uma aplicação compacta $K : E \to E'$ tal que para todo $u \in E$
$$I'(u) = L(u) + K(u).$$

Então I satisfaz $(PS)_\beta$.

Demonstração. Seja (u_n) uma seqüência $(\mathrm{PS})_\beta$ de I. Dessa forma, (u_n) é limitada e $L(u_n) + K(u_n) = I'(u_n) \to 0$ em E'. Seja $v_n = K(u_n)$. Como K é um operador compacto, existe uma subseqüência (v_{n_k}) de (v_n) tal que $v_{n_k} \to v$ em E', para algum v. Portanto

$$u_{n_k} = L^{-1}(I'(u_{n_k}) - v_{n_k}) \to L^{-1}(-v).$$

■

APÊNDICE C

Princípio de Concentração e Compacidade

Aqui apresentamos alguns resultados sobre o Princípio de Concentração e Compacidade de P.L. Lions [37], o qual é fundamental para tratar o problema crítico (4.1).

Neste apêndice, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, representa um domínio limitado de fronteira regular e $p > 0$, $q > 0$ estão sobre a hipérbole crítica, isto é,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{N}.$$

Além disso, E representa o espaço de Sobolev $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

Começamos com um resultado de representação que relaciona duas medidas diferentes satisfazendo a desigualdade de Hölder no sentido inverso.

Lema C.1 ([37], Lema 1.2)**.** *Sejam μ e ν medidas finitas e não-negativas sobre $\mathbb{R}^N$, tais que para um par (r, s) com $1 \leq r < s < +\infty$, existe uma constante $C > 0$ satisfazendo*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^s \, d\nu \right)^{1/s} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^r \, d\mu \right)^{1/r}, \ \forall \, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Então existe um conjunto de índices J no máximo enumerável, uma família $\{x_j\}_{j \in J}$ de pontos de $\mathbb{R}^N$, e uma seqüência $\{\nu_j\}_{j \in J} \subset (0, +\infty)$ de forma que

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \mu \geq C^{-r} \sum_{j \in J} \nu_j^{r/s} \delta_{x_j}.$$

Em particular, $\sum_{j \in J} \nu^{r/s} < +\infty$.

Lema C.2. *Sejam* μ *e* ν *medidas finitas não-negativas sobre* $\mathbb{R}^N$*, tais que para um par* (r, s) *com* $1 \leq r < s < +\infty$*, existe uma constante* $C > 0$ *satisfazendo*

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^s \, d\nu\right)^{1/s} \leq C \left(\int_{\Omega} |\varphi|^r \, d\mu\right)^{1/r}, \ \forall \, \varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Então existe um conjunto de índices J *no máximo enumerável, uma família* $\{x_j\}_{j \in J}$ *de pontos de* $\overline{\Omega}$*, e uma seqüência* $\{\nu_j\}_{j \in J} \subset (0, +\infty)$ *tais que*

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \mu \geq C^{-r} \sum_{j \in J} \nu_j^{r/s} \delta_{x_j}.$$

Em particular, $\sum_{j \in J} \nu^{r/s} < +\infty$.

Demonstração. Se $\nu_1 = \mathcal{X}_{\overline{\Omega}} \nu$, $\mu_1 = \mathcal{X}_{\overline{\Omega}} \mu$, então ν_1 e μ_1 são duas medidas sobre $\mathbb{R}^N$ satisfazendo as hipóteses do Lema C.1. Segue-se então que

$$\mathcal{X}_{\overline{\Omega}} \nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \mathcal{X}_{\overline{\Omega}} \mu \geq C_0^{-r} \sum_{j \in J} \nu^{r/s} \delta_{x_j}.$$

De onde se conclui que $\{x_j : j \in J\} \subset \overline{\Omega}$, e finalmente que

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \mu \geq C^{-r} \sum_{j \in J} \nu_j^{r/s} \delta_{x_j}.$$

∎

Observação C.3. *Se* μ *é uma medida sobre* $\overline{\Omega}$ *então a identidade*

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap \overline{\Omega}),$$

para qualquer conjunto Boreliano $A \subset \mathbb{R}^N$*, define uma medida* $\tilde{\mu}$ *sobre* $\mathbb{R}^N$*.*

Lema C.4. *Sejam* μ *e* ν *medidas finitas não-negativas sobre* $\overline{\Omega}$*, tais que para para um par* (r, s) *com* $1 \leq r < s < +\infty$ *existe uma constante* $C > 0$ *satisfazendo*

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^s \, d\nu\right)^{1/s} \leq C \left(\int_{\Omega} |\varphi|^r \, d\mu\right)^{1/r}, \ \forall \, \varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Então existe um conjunto de índices J *no máximo enumerável, uma família* $\{x_j\}_{j \in J}$ *de pontos de* $\overline{\Omega}$*, e uma seqüência* $\{\nu_j\}_{j \in J} \subset (0, +\infty)$ *de tal forma que*

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \mu \geq C^{-r} \sum_{j \in J} \nu_j^{r/s} \delta_{x_j}.$$

Em particular, $\sum_{j \in J} \nu^{r/s} < +\infty$.

Demonstração. Este lema é apenas uma conseqüência da observação acima e do Lema C.2.

■

Se aplicamos o Lema C.4 e algumas imersões de Sobolev a $v_n = u_n - u$, obtemos então o seguinte resultado de P.L. Lions [37].

Lema C.5 ([37], Lema I.1)**.** *Dada uma seqüência limitada (u_n) em E, existe uma sub-seqüência, também denotada aqui por (u_n), tal que:*

(i) $u_n \rightharpoonup u$ *em* E.

(ii) $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω *e em* $L^\theta(\Omega)$, *para todo* $1 \leq \theta < q+1$.

(iii) $|\Delta u_n|^{\frac{p+1}{p}} \to \mu$ *fraco* no sentido das medidas sobre* $\overline{\Omega}$.

(iv) $|u_n|^{q+1} \to \nu$ *fraco* no sentido das medidas sobre* $\overline{\Omega}$.

(v) Existe um conjunto de índices J no máximo enumerável, podendo ser o conjunto vazio, uma família de pontos $\{x_j : j \in J\} \subset \overline{\Omega}$ e duas seqüência $\{\nu_j : j \in J\} \subset (0, +\infty)$ e $\{\mu_j : j \in J\} \subset (0, +\infty)$ de tal forma que:

– $\nu = |u|^{q+1} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$,

– $\mu \geq |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}} + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$,

– $S\, \nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} \leq \mu_j$ *para todo* $j \in J$.

– *Em particular,* $\sum_{j \in J} \nu_j^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{q+1}} < +\infty$.

(vi) $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ *in* $\left(W^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)\right)^N$.

(vii) $\nabla u_n \to \nabla u$ *q.t.p. em* Ω *e em* $(L^\sigma(\Omega))^N$, *para todo* $1 \leq \sigma < \sigma^*$, *com* $\sigma^* > \frac{p+1}{p}$ *dependendo da imersão crítica de Sobolev de* $W^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

APÊNDICE D

Algumas informações sobre o espaço de Sobolev $W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$

Seja $1 < r < +\infty$. Neste apêndice, exceto no caso que explicitarmos para E uma outra uma outra representação, E representará o espaço de Sobolev $W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$. Listamos abaixo todas as propriedades relativas a E utilizadas neste texto.

O primeiro é um resultado de densidade.

Teorema D.1 ([29], Exercício 9.6 pg 256)**.** *O subespaço* $\{\varphi \in C^2(\overline{\Omega}) : \varphi(x) = 0,\ \forall\, x \in \partial\Omega\}$ *é denso em* E.

O teorema anterior permite mostrar que:

Lema D.2. *Seja* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$*. Se* $u \in E$ *então* $u\varphi \in E$*. Além disso, se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E *então* $\varphi u_n \rightharpoonup \varphi u$ *em* E*.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, $E_1 = \{u : u \in C^2(\overline{\Omega}), u(x) = 0\,\forall\, x \in \partial\Omega\}$ é um subespaço denso de E. Isto garante a existência de um seqüência $(u_n) \subset E_1$ tal que $w_n \to u$ em E e q.t.p. em Ω. Mas daí, $(u_n\varphi) \subset E_1$ é uma seqüência de Cauchy em E e $u_n\varphi \to u\varphi$ q.t.p. em Ω. Dessa forma conclui-se que $u\varphi \in E$.

Agora suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em E. Pelo Corolário D.8, para mostrar que $\varphi u_n \rightharpoonup \varphi u$ em E, basta mostrar que $\Delta(\varphi u_n) \rightharpoonup \Delta(\varphi u)$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Da identidade

$$\Delta(\varphi u_n) = \Delta u_n \varphi + 2\nabla u_n \nabla\varphi + u_n \Delta\varphi,$$

e dos seguintes fatos: a convergência $u_n \rightharpoonup u_n$ implica que $\Delta u_n \rightharpoonup \Delta$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, $u_n \to u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, $\nabla u_n \to \nabla u$ em $\left(L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)\right)^N$ e as funções $\varphi, \nabla\varphi, \Delta\varphi$ são limitadas, segue a convergência desejada.

$\blacksquare$

Vamos apresentar abaixo um Teorema de Representação de Riesz para E. Para fazê-lo, utilizamos alguns resultados da teoria de solução forte apresentada no Capítulo 9 de [29] e alguns resultados sobre operadores de Nemytskii encontrados em [7] e [15].

Teorema D.3 ([29], Teorema 9.15)**.** *Seja $1 < s < +\infty$. Dada $f \in L^s(\Omega)$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução forte $u \in W^{2,s} \cap W_0^{1,s}(\Omega)$.

Teorema D.4 ([29], Lema 9.17)**.** *Seja $1 < s < +\infty$. Existe uma constante $C > 0$ (independente de u) tal que*

$$\|u\|_{W^{2,s}(\Omega)} \leq C\, |-\Delta u|_{s,\Omega}$$

para toda $u \in W^{2,s} \cap W_0^{1,s}(\Omega)$.

Segue do Teorema D.4 que

$$\|u\| = |-\Delta u|_{r,\Omega} \tag{D.1}$$

define uma norma sobre E equivalente à norma $\|\cdot\|_{W^{2,r}(\Omega)}$. No restante deste apêndice, consideraremos o espaço E munido da norma definida por (D.1).

Seja s com $1 < s < +\infty$ tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ e considere o operador de Nemytskii

$$\aleph : L^r(\Omega) \to L^s(\Omega),\ u \mapsto |u|^{r-2}\, u. \tag{D.2}$$

Teorema D.5 ([15], Capítulo 2)**.** *Sejam r, s e $\aleph$ como acima. Então:*

(i) Para $r > 1$, $\aleph$ é um homeomorfismo tal que $|\aleph(u)|_{s,\Omega} = |u|_{r,\Omega}^{r-1}$ para todo $u \in L^r(\Omega)$.

(ii) Para $r > 2$, $\aleph \in C^1(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$ e $(\aleph^{-1})'(0)$ não existe.

(iii) Para $1 < r < 2$, $\aleph^{-1} \in C^1(L^s(\Omega), L^r(\Omega))$ e $\aleph'(0)$ não existe.

(iv) Para $r = 2$, $\aleph$ é o operador identidade.

O exemplo a seguir mostra que o operador de Nemytskii $\aleph$ não é fracamente seqüencialmente contínuo, exceto no caso $r = 2$ onde neste caso ele é a identidade.

Exemplo D.6 ([7], Proposição 2.1). *Se $N = 1$, $\Omega = (0,1)$ e $r \neq 2$ então o operador de Nemytskii $\aleph$ definido em (D.2) não é fracamente seqüencialmente contínuo.*

Demonstração. De fato, seja $u_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que $u_0(0) = u(1)$, $\int_0^1 u_0(x)\,dx = 0$, $\int_0^1 |u_0|^{r-2} u_0\,dx = c_0 \neq 0$ e $|u_0|_{r,(0,1)} = 1$. Considere a extensão periódica de u_0 de período 1 a $[0,+\infty)$, e para cada $k \geq 1$ defina

$$u_k(x) := u_0(kx),\ x \in [0,1].$$

Dessa forma

$$|u_k|_{r,(0,1)}^r = \int_0^1 |u_k(x)|^r\ dx = \frac{1}{k}\int_0^k |u_0(x)|^r\ dx = 1$$

para todo $k \geq 1$. Para mostrar que (u_k) converge fracamente para zero em $L^r((0,1))$, é suficiente mostrar que para cada $c \in [0,1]$, $\int_0^c u_k\,dx \to 0$, em virtude da densidade das funções escada em $L^s((0,1))$. No entanto,

$$\int_0^c u_k\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{kc} u_0(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{kc-[kc]} u_0(x)\,dx = O(1/k) \to 0.$$

Por outro lado, para cada $k \geq 1$

$$\int_0^1 \aleph(u_k)\,dx = \frac{1}{k}\int_0^k |u_0|^{r-2} u_0\,dx = c_0 \neq 0.$$

Portanto, $(\aleph(u_k))$ não converge fracamente para zero em $L^s((0,1))$.

■

Enunciamos agora o nosso teorema de representação de Riesz.

Teorema D.7. *Seja $1 < r < +\infty$ e $E = W^{2,r} \cap W_0^{1,r}(\Omega)$. Dado $\varphi \in E'$ existe um único elemento $u \in E$ tal que*

$$\langle \varphi, w\rangle = \int |\Delta u|^{r-2}\,\Delta u \Delta w\,dx,\ \forall\, w \in E.$$

Além disso, a aplicação $T : E \to E'$ dada por

$$\langle T(u), w\rangle = \int |\Delta u|^{r-2}\,\Delta u \Delta w\,dx,\ \forall\, u, w \in E \tag{D.3}$$

satisfaz:

(i) Para $r > 1$, T é um homeomorfismo tal que $|T(u)|_* = \|u\|^{r-1}$ para todo $u \in E$.

(ii) Para $r > 2$, $T \in C^1(E, E')$ e $(T^{-1})'(0)$ não existe.

(iii) Para $1 < r < 2$, $T^{-1} \in C^1(E', E)$ e $T'(0)$ não existe.

(iv) Para $r = 2$, T é o isomorfismo isométrico dado pelo teorema de representação de Riesz em espaços de Hilbert.

Demonstração. Seja $s > 0$ tal que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$. Pelos Teoremas D.3 e D.4 $-\Delta : E \to L^r(\Omega)$ é um isomorfismo isométrico e portanto também seu operador dual $(-\Delta)^* : L^s(\Omega) \to E'$ dado por

$$\langle (-\Delta)^* (v), w \rangle = \langle v, -\Delta w \rangle = \int v(-\Delta w)\, dx, \ \forall v \in L^s(\Omega),\ w \in E.$$

Considere $\aleph$ o operador de Nemytskii definido por (D.2). É claro que $T = (-\Delta)^* \circ \aleph \circ (-\Delta)$. A última identidade e o Teorema D.5 provam este teorema.

∎

Como conseqüência, obtemos a seguinte caracterização para a convergência fraca em E.

Corolário D.8. *Seja (u_n) uma seqüência em E e s tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, isto é, $s = \frac{r}{r-1}$. Então, $u_n \rightharpoonup u$ em E se, e somente se $\Delta u_n \rightharpoonup \Delta u$ em $L^r(\Omega)$.*

Demonstração. Em virtude do Teorema D.7, $u_n \rightharpoonup u$ em E se, e somente se

$$\int |\Delta v|^{r-2} \Delta v \Delta u_n \, dx \to \int |\Delta v|^{r-2} \Delta v \Delta u \, dx, \quad \forall\ v \in E.$$

Por outro lado, $\Delta u_n \rightharpoonup \Delta u$ em $L^r(\Omega)$ se, e somente se

$$\int h \Delta u_n \, dx \to \int h \Delta u \, dx, \quad \forall\ h \in L^s(\Omega).$$

Agora, pelo Teorema D.3, para cada $h \in L^s(\Omega)$, existe uma única solução forte $v \in E$ de

$$\begin{cases} -\Delta v &= |h|^{\frac{1}{r-1}-1} h \text{ em } \Omega, \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Basta então notar que v assim definida satisfaz $|-\Delta v|^{r-2} (-\Delta v) = h$ q.t.p. em Ω.

∎

Sejam p e q dois números positivos. A partir de agora, E representará o espaço de Sobolev $W^{2,\frac{p+1}{p}} \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Quando $N \geq 3$, o conjunto dos pontos (x,y) em $\mathbb{R}^2$ tais que

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1 - \frac{2}{N}.$$

é denominado hipérbole crítica.

A observação seguinte apresenta a correspondência entre a possível imersão de E em $L^{q+1}(\Omega)$, e a posição do par (p,q) em relação a hipérbole crítica.

Observação D.9. *Se $N = 1, 2$ então não existe hipérbole crítica. Neste caso, E está compactamente imerso em $L^{q+1}(\Omega)$ para quaisquer $p, q > 0$. Se $N \geq 3$, E está compactamente imerso em $L^{q+1}(\Omega)$ se $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}$ ((p,q) está abaixo da hipérbole crítica); E está imerso, de forma não-compacta, em $L^{q+1}(\Omega)$ se $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{N}$ ((p,q) é um ponto da hipérbole crítica); E não está imerso em $L^{q+1}(\Omega)$ se $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < 1 - \frac{2}{N}$ ((p,q) está acima da hipérbole crítica).*

Os resultados citados na observação acima seguem diretamente das imersões de Sobolev. Através da relação entre $2\frac{p+1}{p}$ e N, e no caso em que $N > 2\frac{p+1}{p}$ da relação entre $q+1$ e $\dfrac{((p+1)/p)\,N}{N - 2\,((p+1)/p)}$.

APÊNDICE E

Espaços de Sobolev em intervalos de $\mathbb{R}$

No apêndice anterior, através do isomorfismo $-\Delta : W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \to L^r(\Omega)$ e de alguns operadores de Nemytskii, obtivemos uma boa representação para o espaço dual de $W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$, para qualquer valor r em $(1, +\infty)$, para estudar as equações de quarta-ordem quasilineares dos Capítulos 3 e 4. Neste sentido, embora não utilizados neste texto, os isomorfismos apresentados neste apêndice podem ser utilizados para o estudo de EDO's não-lineares.

Para obter os resultados deste apêndice aplicamos basicamente a desigualde de Jensen, o teorema da aplicação aberta, o fato de que se $u \in W^{m,p}((0,1))$ é tal que $u^{(m)} = 0$ q.t.p. em $(0,1)$ então u é um polinômio de grau $m-1$, e também a imersão $W^{1,p}((0,1)) \hookrightarrow C([0,1])$.

Neste ponto enunciamos o seguinte teorema de representação.

Teorema E.1. *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ um número real e $m \geq 1$ um número inteiro. Então $W^{m,p}((0,1))$ é topologicamente isomorfo a $L^p((0,1)) \times \mathbb{R}^m$.*

Demonstração do Teorema E.1

Primeiramente apresentamos a demonstração para o caso $m = 1$.

O caso $m = 1$

Considere $p \in [1, +\infty)$, embora a demonstração com $p = +\infty$ seja análoga. Defina $T : W^{1,p}((0,1)) \to L^p((0,1)) \times \mathbb{R}$ por $T(u) = (u', u(0))$. Então T está bem definida. Além disso T é linear e injetiva.

Por outro lado, dados $f \in L^p((0,1))$ e $c \in \mathbb{R}$ seja $u(t) = \int_0^t f(s)\,ds + c$. É claro que $u \in W^{1,p}((0,1))$ e $T(u) = (f, c)$, o que prova a sobrejetividade de T.

Além disso, dados $f \in L^p((0,1))$ e $c \in \mathbb{R}$, considere u como definida acima. Assim, pela desigualdade de Jensen (Teorema G.1)

$$\begin{aligned} |u|_{p,(0,1)}^p &= \int_0^1 \left| \int_0^t f(x)\,dx + c \right|^p dt \leq 2^p \int_0^1 \left[\left(\int_0^1 |f(x)|\ dx \right)^p + |c|^p \right] dt \\ &= 2^p \left[\left(\int_0^1 |f(x)|\ dx \right)^p + |c|^p \right] \leq 2^p \left[|f|_{p,(0,1)}^p + |c|^p \right] \end{aligned}$$

e

$$|u'|_{p,(0,1)}^p = |f|_{p,(0,1)}^p \,.$$

Assim,

$$\|u\|_{W^{1,p}((0,1))} \leq C \left(|f|_{p,(0,1)}^p + |c|^p \right)^{\frac{1}{p}} = C \|(f, b)\|_{L^p((0,1)) \times \mathbb{R}}$$

onde $C > 0$ é uma constante positiva que depende somente de p. Isso mostra que T^{-1} é contínua. Então pelo teorema da aplicação aberta, T é um isomorfismo linear topológico.

■

O caso geral $m \geq 1$

No caso geral com $m \geq 1$ procedemos de forma semelhante ao realizado acima, mas agora utilizando a imersão $W^{m,p}((0,1)) \hookrightarrow C^{m-1}([0,1])$ e definindo o isomorfismo por

$$T_{m,p}(u) := \left(u^{(m)}, u(0), u'(0), \cdots, u^{(m-1)}(0) \right).$$

No que segue, dada $f \in L^p((0,1))$ para casa inteiro $m \geq 1$ utilizamos as seguintes notações:

$$F_m(t) := \int_0^t \cdots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m)\,dt_m \cdots dt_1$$

and

$$A_m := F_m(1) = \int_0^1 \cdots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m)\,dt_m \cdots dt_1.$$

É imporatante observar que

$$T^{-1}_{m,p}(f, c_1, \cdots, c_m)(t) = F_m(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{k+1}}{k!} t^k.$$

■

Aplicações

Ao se trabalhar com equações envolvendo o operador poliharmônico sob condições de fronteira do tipo Navier (veja Capítulos 3 e 4 desta tese e também o artigo [28]), o seguinte isomorfismo pode ser útil:

$$T_{m,p,*} : W^{m,p}((0,1)) \to L^p((0,1)) \times \mathbb{R}^m.$$

Se $m = 2k$ então

$$T_{2k,p,*}(u) := (u^{(2k)}, u(0), u(1), u''(0), u''(1), \cdots, u^{(2(k-1))}(0), u^{(2(k-1))}(1))$$

com

$$T^{-1}_{2k,p,*}(f, c_1, \cdots, c_{2k})(t) = F_{2k}(t) + \sum_{j=0}^{2k-1} a_j t^j,$$

onde os coeficientes a_j podem ser obtidos explicitamente solucionando as seguintes equações na ordem apresentada abaixo.

Para $j = 0, \ldots, k-1$

$$(2j)! a_{2j} = c_{2j+1}$$

e para $j = k-1, \ldots, 0$

$$A_{2(k-j)} + \sum_{i=0}^{2(k-j)-1} \frac{(i+2j)!}{i!} a_{i+2j} = c_{2(j+1)}.$$

Se $m = 2k+1$ então

$$T_{2k+1,p,*}(u) := (u^{(2k+1)}, u(0), u(1), u''(0), u''(1), \cdots, u^{(2(k-1))}(0), u^{(2(k-1))}(1), u^{(2k)}(0))$$

com

$$T^{-1}_{2k+1,p,*}(f, c_1, \cdots, c_{2k+1})(t) = F_{2k+1}(t) + \sum_{j=0}^{2k} a_j t^j,$$

onde os coeficientes a_j podem ser obtidos explicitamente solucionando as seguintes equações na ordem apresentada abaixo.

Para $j = 0, \ldots, k$

$$(2j)!a_{2j} = c_{2j+1}$$

e para $j = k-1, \ldots, 0$

$$A_{2(k-j)+1} + \sum_{i=0}^{2(k-j)} \frac{(i+2j)!}{i!} a_{i+2j} = c_{2(j+1)}.$$

Segue então dos resultados acima que:

1. Seja $1 \leq p \leq +\infty$ e u um elemento de $W^{1,p}((0,1))$. Se (u_n) é uma seqüência em $W^{1,p}((0,1))$ tal que $u_n' \to u'$ em $L^p((0,1))$ e para algum $c \in [0,1]$, $u_n(c) \to u(c)$; então $u_n \to u$ uniformemente em $[0,1]$.

2. Seja p e u como no item acima e c qualquer número em $[0,1]$. Existe uma seqüência (u_n) em $C^\infty([0,1])$ tal que $u_n(c) = u(c)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u_n \to u$ uniformemente em $[0,1]$.

3. Se $1 \leq p \leq +\infty$ então $W_0^{1,p}((0,1))$ é topologicamente isomorfo a $\{f \in L^p((0,1)) : \int_0^1 f\,dx = 0\}$.

4. Se $1 \leq p \leq +\infty$ então $W^{2,p}((0,1)) \cap W_0^{1,p}((0,1))$ é topologicamente isomorfo a $L^p((0,1))$.

5. Generalizando, se $1 \leq p \leq +\infty$ e $k \geq 1$ é qualquer inteiro, então $\{u \in W^{2k,p}((0,1)) : u^{(2j)}(0) = u^{(2j)}(1) = 0 \;\forall\; 0 \leq j \leq k-1\}$ é topologicamente isomorfo a $L^p((0,1))$.

6. No sentido do Lema D.7, compondo os isomorfismos acima com alguns operadores de Nemytskii, é possível obter alguns teoremas de representação de Riesz para o espaço dual de alguns espaços de Sobolev sobre $(0,1)$.

APÊNDICE F

Alguns resultados de convergência

O primeiro resultado é um teorema compacidade na topologia fraca* sobre espaços de Banach separáveis.

Teorema F.1 ([3], Corolário III.26). *Se E é um espaço de Banach separável e (φ_n) é uma seqüência limitada em E', então existe uma subseqüência (φ_{n_k}) que converge fraco* em E'.*

O próximo resultado é um teorema de compacidade na topologia fraca sobre espaços de Banach reflexivos.

Teorema F.2 ([3], Teorema III.27). *Se E é um espaço de Banach reflexivo e (x_n) é uma seqüência limitada em E, então existe uma subseqüência (x_{n_k}) que converge fraco em E.*

O teorema seguinte, devido à Brezis-Lieb, relaciona convergência pontual e convergência de integrais nos espaços $L^r(\Omega)$.

Teorema F.3 ([4], Teorema 1). *Se $1 \leq r < +\infty$ e (f_n) é uma seqüência limitada de funções de $L^r(\Omega)$ que converge q.t.p em Ω para f, então $f \in L^p(\Omega)$ e*

$$|f|_{r,\Omega}^r = \lim_{n\to\infty}\Big(|f_n|_{r,\Omega}^r - |f - f_n|_{r,\Omega}^r\Big).$$

O próximo resultado relaciona convergência q.t.p. e convergência fraca nos espaços $L^r(\Omega)$.

Teorema F.4 ([35], Cap.1 Lema 4.8). *Se $1 < r < \infty$ e (f_n) é uma seqüência limitada de $L^r(\Omega)$ que converge q.t.p. em Ω para f, então $f_n \rightharpoonup f$ em $L^r(\Omega)$.*

O resultado a seguir é teste para garantir a convergência de seqüências.

Teorema F.5. *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma seqüência em E. Suponha que existe $u \in E$ tal que qualquer subseqüência de (u_n) admite uma subseqüência que converge para u. Então a própria seqüência (u_n) converge para u.*

Sejam E e F espaços de Banach. Denotamos por $L(E, F)$ os espaço de Banach dos operador lineares contínuos de E em F com a norma

$$\|T\|_{L(E,F)} = \sup\{\|T\,u\|_F : u \in E,\ \|u\|_E \leq 1\}.$$

Um operador $T \in L(E, F)$ é compacto se $T(B[0,1])$ é relativamente compacto na topologia forte de F. Vejamos uma aplicação do Teorema F.5.

Teorema F.6. *Se $T \in L(E, F)$ é compacto então T aplica seqüências fracamente convergentes em seqüências fortemente convergentes.*

O resultado a seguir fornece uma condição suficiente para que uma seqüência fracamente convergente seja fortemente convergente em espaços uniformemente convexos.

Teorema F.7 ([3], Proposição III.30)**.** *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo e (x_n) em E uma seqüência tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Então $x_n \to x$.*

APÊNDICE G

Algumas desigualdades

Este apêndice contém algumas das desigualdades utilizadas no texto.

Teorema G.1 (Desigualdade de Jensen)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado e $u \in L^1(\Omega)$. Então*

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u)\,dx.$$

Proposição G.2. *Seja $n \geq 2$ um inteiro e $s > 0$ um número real. Então*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i\right|^s \leq n^s \sum_{i=1}^n |a_i|^s, \quad \text{para qualquer ponto} \ \ a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição G.3 ([41])**.** *Para cada $r > 1$ existe uma constante $C_r > 0$, tal que para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$*

$$\left(|t|^{r-2}\,t - |s|^{r-2}\,s\right)(t-s) \geq \begin{cases} C_r\,|t-s|^r\,, \ r \geq 2 \\ C_r \dfrac{|t-s|^2}{(|t|+|s|)^{2-r}}, \ 1 < r < 2. \end{cases} \tag{G.1}$$

Brezis e Nirenberg em [6], obtiveram estimativas sutis para uma uma expansão tipo binômio de Newton para potências não necessariamente inteiras. Aplicamos tais estimativas em muitos dos cálculos realizados no estudo de (4.1).

Proposição G.4 ([6], Lema 4). *Para cada $r > 1$ existe $C = C_r > 0$, tal que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se:*

- *Se* $1 < r \leq 3$ *então*

$$\left||\alpha+\beta|^r - |\alpha|^r - |\beta|^r - r\alpha\beta\left(|\alpha|^{r-2} + |\beta|^{r-2}\right)\right| \leq \begin{cases} C\,|\alpha|\,|\beta|^{r-1} & \text{if } |\alpha| \geq |\beta| \\ C\,|\alpha|^{r-1}\,|\beta| & \text{if } |\alpha| \leq |\beta| \end{cases} \tag{G.2}$$

- *Se* $r \geq 3$ *então*

$$\left||\alpha+\beta|^r - |\alpha|^r - |\beta|^r - r\alpha\beta\left(|\alpha|^{r-2} + |\beta|^{r-2}\right)\right| \leq C\left(|\alpha|^{r-2}\beta^2 + \alpha^2\,|\beta|^{r-2}\right).$$

A seguir enunciamos algumas condições de integrabilidade.

Lema G.5. *Seja α um número real, $\rho > 0$ e $B(0,\rho) \subset \mathbb{R}^N$. Então $|x|^{-\alpha} \in L^1(B(0,\rho))$ se, e somente se $\alpha < N$ e $|x|^{-\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^N \backslash B(0,\rho))$ se, e somente se $\alpha > N$.*

Vamos agora enunciar mais alguns resultados auxiliares.

A proposição a seguir é uma aplicação direta da definição de limite e da continuidade da função em questão.

Proposição G.6. *Seja $f \in C\left([0,+\infty), \mathbb{R}\right)$ satisfazendo $f(0) = 1$, $f(t) > 0$ para todo $t > 0$ e mais, f é decrescente e*

$$\lim_{t\to+\infty} t^r f(t) = l \geq 0 \ \ \textit{para algum} \ \ l \geq 0.$$

Então existe $C_1, C_3 > 0$ tais que $f(t) \leq C_1 t^{-r}$ para todo $t > 0$ e $f(t) \leq C_3\,(t+1)^{-r}$ para todo $t \geq 0$. Além disso, se $l > 0$ então existe $C_2 > 0$ tal que $f(t) \geq C_2\,(t+1)^{-r}$ para todo $t \geq 0$.

Proposição G.7. *Sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $p > 1$ e $r > 0$. Suponha que δ_ϵ é uma função de $\epsilon > 0$ tal que $\delta_\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ e*

$$c_1\left((1-\delta_\epsilon) - (1-\delta_\epsilon)^p\right) = c_2\epsilon^r.$$

Então

$$(p-1)c_1\delta_\epsilon = c_2\epsilon^r + o(\epsilon^r).$$

Demonstração. Seja $f(t) = t^p$, $t \geq 0$. Expandindo f, tem-se que para cada $h < 1$

$$f(1-h) = f(1) - f'(1)h + \frac{f''(1-\theta h)}{2}h^2$$

para algum $0 < \theta < 1$, isto é,

$$(1-h)^p = 1 - ph + \frac{p(p-1)(1-\theta h)^{p-2}}{2}h^2.$$

Segue da última identidade que

$$(1-h) - (1-h)^p = (p-1)h - \frac{p(p-1)(1-\theta h)^{p-2}}{2}h^2, \quad \text{para todo} \;\; h < 1$$

com $0 < \theta = \theta(h) < 1$. Substituindo $h = \delta_\epsilon$ na identidade acima, segue que

$$c_1\left((1-\delta_\epsilon) - (1-\delta_\epsilon)^p\right) = c_1(p-1)\delta_\epsilon - \frac{c_1 p(p-1)(1-\theta\delta_\epsilon)^{p-2}}{2}\delta_\epsilon^2 = c_2\epsilon^r.$$

Da última identidade conclui-se que $\delta_\epsilon = O(\epsilon^r)$ e portanto

$$c_1(p-1)\delta_\epsilon = c_2\epsilon^r + o(\epsilon^r).$$

■

Proposição G.8. *Seja $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ uma função positiva, radialmente simétrica em relação a origem e decrescente ao longo dos raios que emanam da origem tal que*

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^r f(x) = l \geq 0,$$

e $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq s \leq \infty$.

- *Se $r > N$ então para cada x no conjunto de Lebesgue de u*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy = u(x)\delta^N \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,dy + o(\delta^N),$$

- *Se $r = N$ e $supp(u)$ é compacto então para cada x no conjunto de Lebesgue de u*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy = O(\delta^{\theta N}), \quad \textit{para todo} \;\; 0 < \theta < 1.$$

- *Se $r < N$ então para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$*

$$\int_{B(x,2\rho)} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy = O(\delta^r).$$

Além disso, se $l > 0$ e $u \geq 0$, então para cada x no conjunto de Lebesgue de u com $u(x) > 0$, existe $C = C(x,\rho) > 0$ com $C(x,\rho) \to 0$ quando $\rho \to 0$ e

$$\int_{B(x,2\rho)} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy \geq C\delta^r.$$

Demonstração. A demonstração do caso quando $r > N$ segue diretamente da Proposição G.6 e do Teorema 8.15 (de [25]).

Se $r = N$ e $supp(u)$ é compacto então dado qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \mapsto u(y)\,(1+|y-x|)^{\epsilon}$ está em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para qualquer que seja $1 \le s \le +\infty$. Seja $h(x) = f(x)\,(1+|x|)^{-\epsilon}$. Mais uma vez pela Proposição G.6 (acima) e pelo Teorema 8.15 (de [25]), segue que para cada $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy\right| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)| \left(1+\frac{|x-a|}{\delta}\right)^{\epsilon} h\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy \\
&\le \delta^{-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|\,(1+|y-x|)^{\epsilon}\, h\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy \\
&= \delta^{-\epsilon}\left(|u(x)|\,\delta^N \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy + o(\delta^N)\right) \\
&= \delta^{N-\epsilon}\,|u(x)| \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\,dx + o(\delta^{N-\epsilon}).
\end{aligned}$$

No caso quando $r < N$, a Proposição G.6 permite afirmar que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B(x,2\rho)} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy\right| &\le \int_{B(x,2\rho)} |u(y)|\, C_3 \left|1+\left(\frac{y-x}{\delta}\right)\right|^{-r} dx \\
&\le C_3\delta^r \int_{B(x,2\rho)} \frac{|u(y)|}{|y-x|^r}\, dy,
\end{aligned}$$

e o resultado segue da teoria de convolução de funções. Além disso, sob a hipótese adicional acima para o caso $r < N$, a Proposição G.6 fornece a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,2\rho)} u(y) f\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dy &\ge C_2\delta^r \int_{B(x,2\rho)} \frac{u(y)}{(\delta+|y-x|)^r}\, dy \\
&\ge C_2\delta^r \int_{B(x,2\rho)} \frac{u(y)}{(1+|y-x|)^r}\, dy = C(x,\rho)\delta^r.
\end{aligned}$$

■

APÊNDICE H

Desigualdades de Interpolação

Os resultados deste apêndice são utilizados para se obter regularidade $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de soluções dos problemas tratados neste texto.

Teorema H.1 ([29], Lema 6.36)**.** *Suponha que* $j+\beta < k+\alpha$ *com* $j = 0,1,2,\cdots$; $k = 1,2,3,\cdots$ *e* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira* $C^{k,\alpha}$. *Então a imersão* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$ *é compacta.*

Teorema H.2. *Se* $u \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $v \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$ *então* $uv \in C^{\gamma}(\overline{\Omega})$ *com* $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ *(ver [29] pg 53). Se* $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ *para algum* $\gamma \in (0,1]$ *e* $0 < \beta \leq 1$ *então* $u^{\beta} \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Para demonstrar a última afirmação deste teorema usa-se o Teorema H.1 para garantir que u é Lipschtiziana junto com a desigualdade

$$\frac{\left|t^{\beta}-s^{\beta}\right|}{|t-s|^{\beta}} \leq 2, \quad \text{para quaisquer} \quad t,s \in \mathbb{R} \quad \text{com} \quad t \neq s.$$

■

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*. Journal of Functional Analisys 122 (1994), 519-543.

[2] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applicattions*. Journal of Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[3] H. Brézis Analise Functionelle, Masson, Paris, 1983.

[4] H. Brézis, E. Lieb, *A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Integrals* . Proc. Amer. Math. Soc., vol. 88 (1983), 486-490.

[5] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*. Comm. Pure and Appl. Math. Vol. XXXVI (1983), 437-477.

[6] H. Brézis, L. Nirenberg, *A Minimization Problem with Critical Sobolev Exponent and Nonzero Data*, in Symmetry in Nature, Scuola Norm. Sup. Pisa (1989), 437-477.

[7] F.E. Browder, D.G. de Figueiredo, *J-Monotone nonlinear operators in Banach spaces*. Nederl. Akad. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. 28 (1966), 412-420.

[8] N.P. Cac, A.M. Fink, J.A. Gatica, *Nonnegative Solutions of the Radial Laplacian with Nonlinearity that Changes Sign*. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 1393-1398.

[9] N.P. Cac, J.A. Gatica, Y. Li, *Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign*. Nonlinear Anal. TMA. 37 (1999), 501-510.

[10] S. Cano-Casanova, J. López-Gómez, *Continuous dependence of principal eigenvalues with respect to perturbation of the domain around its Dirichlet boundary.* Nonlinear Analysis 47 (2001), 1797-1808.

[11] D. Cao, P. Han, *Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems with strongly indefinite structure and critical Sobolev exponents.* J. Math. Anal. Appl. 289 (2004), 200-215.

[12] P. Clément, D.G. de Figueiredo, E. Mitidieri, *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems*, Comm. PDE 17 (1992), 923-940.

[13] Q.Y. Dai, Y.G. Gu, *Positive solutions for non-homogeneous semilinear elliptic equations with data that changes sign*, Proc. Roy. Soc. Edingurgh 133A (2003), 297-306.

[14] Q.Y. Dai, J. Yang, *Positive solutions of inhomogeneous elliptic equations with indefinite data*, Nonlinear Analysis 58 (2004), 571-589.

[15] D.G. de Figueiredo, *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours.* Springer, 1989.

[16] D.G. de Figueiredo, P. Felmer, *On Superquadratic Elliptic Systems.* Trans. American Math. Soc. Vol. 343 no. 1 (1994), 99-116.

[17] D.G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, *On the first Fucik spectrum of an elliptic operator.* Differential Integral Equations 7 no. 5-6 (1994), 1285-1302.

[18] D.G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems.* J. Func. Anal. 199, n. 2 (2003), 452-467.

[19] D.G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, P. Ubilla, *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearirty and sublinearity.* J. Eur. Math. Soc. 8 (2006), 269-286.

[20] D.G. de Figueiredo, E. Mitidieri, *Maximum principles for linear elliptic systems.* Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 22 (1990), n. 1-2, 36-66.

[21] D.G. de Figueiredo, B. Ruf, *Elliptic Systems with Nonlinearities of Arbitrary Growth.* Mediterr. J. Math. 1 (2004), 417-431.

[22] Y.B. Deng, *Existence of Multiple Positive Solutions for* $-\Delta u = \lambda u + u^{\frac{N+2}{N-2}} + \mu f(x)$. Acta Mathematica Sinica, Neew Series Vol. 9 no. 3 (1993), 311-320.

[23] J.M. do Ó, P. Ubilla , *A multiplicity result for a class of superquadratic Hamiltonian systems*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003(2003), No. 15, 1-14.

[24] I. Ekeland, *On the variational principle*, J, Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[25] G.B. Folland, *Real Analysis*, Wiley-Interscience, 1984.

[26] D. Fortunato, E. Jannelli, *Infinitely many solutions for some nonlinear elliptic problems in symmetrical domains*. Proc. R. Soc. Edinburgh A 105 (1987), 205-213.

[27] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with nonsymmetric term*. Trans. American Math. Soc. Vol 323 n. 2 (1991), 877-895.

[28] Y. Ge *Positive solutions in semilinear critical problems for polyharmonic operators*. J. Math. Pures Appl. 84 (2005), 199-245

[29] D. Gilbarg, N.S. Trudinger , *Elliptic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.

[30] M. Guedda, *On nonhomogeneous biharmonic equations involving critical Sobolev exponent*. Portugaliae Mathematica Vol. 56 Fasc. 3 (1999), 299-308.

[31] P. Han, Z. Liu, *Multiple positive solutions of strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents and data that change sign*. Nonlinear Analysis 58 (2004), No 1-2, 229-243.

[32] J. Hulshof, R.C.A.M. Van der Vorst, *Differential Systems with Strongly Indefinite Variational Structure*. Journal of Functional Analysis 114 (1993), 32-58.

[33] J. Hulshof, R.C.A.M. Van der Vorst, *Asymptotic behavior of ground states*. Proc. American Math. Soc. vol. 124 n. 8 (1996), 2423-2431.

[34] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta Math. 30 (1906), 175-193.

[35] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèms elliptiques*. Springer-Verlag 1993.

[36] P. Korman, *Global solution curves for semilinear systems*. Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), 3-20.

[37] P.L. Lions, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations (The limit case, Part I.)*. Revista Matemática Iberoamericana Vol.1 n.1 (1985), 145-201.

[38] E. Mitidieri, *A Rellich type identity and applications*. Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), 125-151.

[39] M. Montenegro, *The Construction of Principal Spectral Curves for Lane-Endem Systems and Applications*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) Vol. XXIX (2000), 193-229.

[40] E.A.B. Silva, S.H.M. Soares, *Quasilinear Dirichlet problems with critical growth*. Nonlinear Analysis 43 (2001), 1-20.

[41] J. Simon, *Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans* $\mathbb{R}^N$. Lecture Notes in Mathematics vol. 665, Springer, Berlin, 1978.

[42] G. Tarantello, *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent*. Ann. Inst. Henri Poincarè, Vol. 9, n. 3, (1992), 281-304.

[43] M. Willem, *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 1996.