# Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática


---

**Dissertação de Mestrado**

# Aplicações Harmônicas no Grupo Unitário

por


**Lino Anderson da Silva Grama**

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros**



Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

# Aplicações Harmônicas no Grupo Unitário

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Lino Anderson da Silva Grama** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de Fevereiro de 2008.

**Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros.

Prof. Dr. Paolo Piccione.

Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE em MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Grama, Lino Anderson da Silva
G761a Aplicações harmônicas no grupo unitário / Lino Anderson da Silva Grama -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador: Caio José Colletti Negreiros
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Mapas harmônicos. 2. Aplicações holomorfas. 3. Classes características. 4. Lie, Grupos de. I. Negreiros, Caio José Colletti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Harmonic maps into unitary group

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Harmonic maps. 2. Holomorphic maps. 3.Characteristic classes. 4. Lie groups.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paolo Piccione (IME-USP)
Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva (IME-USP)

Data da defesa: 19/02/2008

**Dissertação de Mestrado defendida em 19 de fevereiro de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Paolo Piccione

Prof. (a). Dr (a). PAOLO PICCIONE

Prof. (a). Dr (a). MARCOS MARTINS ALEXANDRINO DA SILVA

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por mais esta oportunidade de aprendizado e por sempre estar presente na minha vida.

À minha mãe Sônia, por sempre me apoiar e me ensinar a ter paciência.

À minha namorada Roberta, minha companheira de todas as horas, por me encorajar a prosseguir no estudos e, principalmente, por compreender minha ausência durante estes anos.

Ao meu orientador, Prof. Caio Negreiros, pelo respeito, honestidade, paciência e amizade durante estes anos.

Aos Professores Luiz A.B. San Martin e Pedro J. Catuogno pelas várias sugestões e dicas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. José C. S. Kiihl, meu orientador de iniciação científica, pelo encorajamento e pela amizade.

Aos amigos Anderson Araújo, João Paulo Bressan, Luis Lucinger e Thiago Ferraiol, pelo companherismo e pelas discussões matemáticas.

À todos amigos da Pós-Graduação do IMECC/UNICAMP.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/UNICAMP.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

# RESUMO

O principal objetivo desta dissertação é apresentar a construção e a classificação das aplicações harmônicas de $S^2$ em $U(n)$, baseado nas idéias de K.Uhlenbeck. Apresentamos um exemplo de aplicação harmônica em $U(4)$ e provamos que tal exemplo é, de fato, uma aplicação harmônca não-holomorfa na variedade de Grassman $G_2(\mathbb{C}^4)$, de 2-planos em $\mathbb{C}^4$. Demonstramos o teorema de Valli sobre o espectro da energia e, por fim, parametrizamos o conjunto $\mathrm{Harm}(S^2, U(n))$, de todas aplicações harmônicas de $S^2$ em $U(n)$, fornecendo uma classificação para tais aplicações, seguindo o trabalho de J.C.Wood.

# ABSTRACT


This dissertation is concerned with the construction and classification of harmonic maps from $S^2$ on $U(n)$, according to K. Uhlenbeck.

We construct an example of harmonic map on $U(4)$ and prove that this example is, in fact, a non-holomorphic harmonic map in the Grassmann manifold $G_2(\mathbb{C}^4)$ of 2-plans on $\mathbb{C}^4$.

We also prove the theorem of Valli on the spectrum of energy and, finally, describe the parametrization of the space $\text{Harm}(S^2, U(n))$, of all harmonics maps from $S^2$ in $U(n)$, provide the classification for such maps, following the work of J.C.Wood.

# ÍNDICE

# Introdução

Sejam $(M, g)$ e $(N, h)$ variedades Riemannianas compactas. Uma aplicação diferenciável $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ diz-se harmônica se $f$ é um ponto crítico do funcional energia

$$E(f) = \int_M |df|^2 v_g.$$

Aplicações harmônicas aparecem naturalmente em vários contextos como Geometria, Análise e Física Matemática. Seus exemplos mais simples são as funções harmônicas e as geodésicas. A base da teoria moderna de Aplicações Harmônicas foi dada por J.Eells [13], E.Calabi [4] e S.S.Chern [8] nos anos 60 e até hoje constitui uma área muito rica e ativa da Matemática.

Dois problemas centrais da teoria de Aplicações Harmônicas são:

a) A existência de tais aplicações, ou se uma aplicação $f$ dada pode ser "deformada" em uma aplicação harmônica, isto é, se existe uma aplicação harmônica na classe de homotopia de $f$.

b) A classificação das aplicações harmônicas.

Esta dissertação trata sobre o problema de classificação de aplicações harmônicas. Entretanto, quando $M$ e $N$ são variedades arbitrárias, o problema é extremamente complicado. Mesmo quando o domínio é a esfera $S^2$ vários casos são problemas em aberto, como por exemplo se $N$ é um espaço homogêneo não-simétrico (em [23] é tratado o caso de variedades bandeira). O objetivo deste trabalho é estudar as aplicações harmônicas de $S^2$ em espaços simétricos $G/K$, mais especificamente quando $G/K$ é uma variedade de Grassmann.

Os exemplos não-triviais mais simples de aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow G/K$, com $G/K$ um espaço simétrico compacto, ocorrem quando $G/K = S^n$ ou $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Em 1967, E. Calabi classificou todas aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow S^n$ [4] e em 1983 J.Eells e J.C. Wood classificaram as aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ [12].

Tecnicamente, a caracterização das aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow S^n$ e $S^2 \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ utilizam as mesmas ferramentas, que hoje conhecemos como Teoria *Twistor*. Para saber mais sobre a Teoria *Twistor* recomendamos [11],[3].

Durante os anos 80, houve várias tentativas de estender os resultados da Teoria Twistor para espaços simétricos compactos mais gerais. Entretanto, com exceção dos casos originais $G/K = S^n$ ou $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ a construção twistor não produz todas aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow G/K$. Mesmo no caso em que $G/K = G_2(\mathbb{C}^4)$, existem aplicações harmônicas que não podem ser obtidas via Teoria *Twistor*. A classificação completa das aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow G_2(\mathbb{C}^4)$ foi feita por J. Ramanathan em sua tese de Doutorado [27]. Esta foi a primeira classificação de aplicações harmônicas em espaços que eram diferentes de esferas e planos projetivos. Outros autores classificaram as aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow G_k(C^n)$, onde $k = 2, 3, 4, 5$, porém a classificação geral permanecia em aberto.

Em 1985, K.Uhlenbeck classificou as aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$, com $k, n$ arbitrários, via a classificação das aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow U(n)$. Tal classificação chamou a atenção ao fato de que podemos estudar aplicações harmônicas num espaço simétrico compacto $G/K$ via aplicações harmônicas no grupo de Lie $G$, pois é conhecido que um espaço simétrico compacto $G/K$ pode ser mergulhado de forma totalmente geodésica no seu grupo de isometrias $G$.

O trabalho de K.Uhlenbeck foi um marco na Teoria de Aplicações Harmônicas. Além de utilizar as técnicas de Análise Complexa, introduziu o uso da teoria de Sistemas Integráveis às aplicações harmônicas. Mais especificamente, introduziu um tipo de transformação de Bäcklud, que na teoria de Sistemas Integráveis fornecem novas soluções para um sistema de equações diferenciais parciais a partir de uma solução dada [37], que foi chamado de *uniton*. Um dos resultados fundamentais é que *toda aplicação harmônica* $S^2 \longrightarrow U(n)$ *pode ser obtida a partir de uma aplicação constante "adicionando" um número finito de unitons.*

Neste trabalho, apresentaremos as construções de Uhlenbeck que se encontram nos artigos [34], [35] e [36]. Estas construções são no caso em que $G/K = G_k(\mathbb{C}^n)$ e $G = U(n)$. Fornecemos também, uma classificação das aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow U(n)$, exibindo uma parametrização do conjunto $\mathrm{Harm}(S^2, U(n))$ de todas aplicações harmônicas $S^2 \longrightarrow U(n)$. Ressaltamos que em 1997, Burtsall e Guest [2] estenderam o trabalho de Uhlenbeck para os casos de espaços simétricos $G/K$ com $G$ um grupo de Lie simples e compacto, porém as idéias e as técnicas básicas são as mesmas que foram utilizadas no caso $G = U(n)$.

Este trabalho se organiza da seguinte forma: No capítulo 1, relembramos os principais conceitos e enunciamos vários resultados que são utilizados no decorrer do trabalho. Por se tratar de resultados clássicos, a maioria das demonstrações deste capítulo são omitidas, mas sempre citamos referências onde podem ser encontradas.

No capítulo 2, o principal objetivo é a demonstração do Princípio da Monodromia, que fornece condições necessárias e suficientes para que uma função $f : M \longrightarrow G$ seja a "primitiva" de uma 1-forma $\omega$ com valores em $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie do grupo de Lie $G$. Este resultado é fundamental para as construções realizadas no capítulo 4. Antes da demonstração do teorema principal, revisamos rapidamente os conceitos de forma com valores em espaços vetoriais e forma de Maurer-Cartan.

No capítulo 3, inicialmente apresentamos os principais resultados da Teoria de Aplicações Harmônicas. A abordagem principal é o estudo de aplicações harmônicas via aplicações holomorfas. Na segunda parte do capítulo, iniciamos o estudo das aplicações harmônicas em grupos de Lie, com ênfase no grupo Unitário $U(n)$.

No capítulo 4, apresentamos a teoria desenvolvida por Uhlenbeck. Demonstramos um resultado central sobre a Adição de Uniton, que mostra como construir uma nova aplicação harmônica em $U(n)$, a partir de uma aplicação harmônica dada. Construímos um exemplo de uma aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(4)$. Provamos que o exemplo construído é, de fato, uma aplicação harmônica não-holomorfa $S^2 \longrightarrow G_2(\mathbb{C}^4)$. Demonstramos também o Teorema de Valli sobre o espectro da energia.

No capítulo 5, construímos uma parametrização do conjunto $\mathrm{Harm}(S^2, U(n))$, baseado no artigo [36] de J.C.Wood. O resultado principal é que toda aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(n)$ pode ser "fatorada" em um número finito de "parcelas". Para demonstração deste teorema utiliza-se a técnica de redução da energia, que tem como base o teorema de Valli.

No decorrer deste trabalho, todos os objetos (variedades, aplicações, fibrados, etc...) são diferenciáveis (isto é, $C^\infty$), exceto quando dito explicitamente o contrário.

# CAPÍTULO 1

# Conceitos Preliminares

Neste capítulo, enunciamos as principais definições e resultados utilizados no decorrer do trabalho.

## 1.1 Variedades Complexas e Aplicações Holomorfas

Nesta seção vamos estabelecer os principais conceitos e resultados referentes às variedades complexas e aplicações holomorfas. Tais resultados serão amplamente utilizados no decorrer do trabalho. As principais referências aqui são [19], [33].

Dada uma função $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(p) = (z^1(p), ..., z^n(p))$, temos que cada função $z^j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ possui uma parte real e imaginária, ou seja, $z^j(p) = x^j(p) + y^j(p)$. Desta forma, podemos olhar a função $f$ como uma aplicação $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $f(p) = (x^1(p), y^1(p), ..., x^n(p), y^n(p))$.

**Definição 1.1.1.** *Uma função $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é holomorfa se*

$$\frac{\partial x^k}{\partial p_j} - \frac{\partial y^k}{\partial q_j} = 0 \quad e \quad \frac{\partial x^k}{\partial q_j} + \frac{y^k}{p_j} = 0$$

*onde $x^k(p) = x^k(p_1, q_1, ..., p_n, q_n)$ e $y^k(p) = y^k(p_1, q_1, ..., p_n, q_n)$.Estas são as equações de Cauchy-Riemann generalizadas.*

**Definição 1.1.2** (Variedade Complexa)**.** *Uma estrutura complexa em um espaço topológico $M$ é uma família $\{U_\alpha, \varphi_\alpha; \alpha \in A\}$, onde $U_\alpha$ é aberto em $M$ e $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{C}^n$ tal que:*

1. $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$;

2. *Para cada par de índices* $\alpha, \beta \in A$, *a função* $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *é holomorfa.*

*Então* $(M, \{U_\alpha, \varphi_\alpha; \alpha \in A\})$ *é chamada de variedade complexa. Cada par* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *é chamado de sistema de coordenadas locais complexo (ou carta complexa) e a família* $\{U_\alpha, \varphi_\alpha; \alpha \in A\}$ *é chamado de atlas complexo e o inteiro* $n$ *é chamado de dimensão complexa de* $M$.

Note que uma variedade complexa de dimensão $n$ é, de maneira natural, uma variedade real de dimensão $2n$. De fato, dado um ponto $p \in M$, considere um sistema de coordenadas locais complexo $(U, \varphi)$, com $p \in U$ e $\varphi(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p))$. Agora, cada função complexa $z_j$ pode ser decomposta em termos da parte real e imaginária, ou seja, $z_j(p) = x_j(p) + iy_j(p)$. Esta decomposição induz uma aplicação

$$p \mapsto (x_1(p), y_1(p), \ldots, x_n(p), y_n(p))$$

sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. Estas funções definem um sistema de coordenadas locais *real* para $M$.

**Definição 1.1.3** (Variedade Quase-Complexa)**.** *Seja* $M$ *uma variedade diferenciável real. Uma estrutura quase-complexa em* $M$ *é uma aplicação que a cada ponto* $x \in M$ *associa uma transformação linear* $J_x : T_xM \to T_xM$, *tal que* $J_x^2 = -\operatorname{Id}$. *Uma variedade quase-complexa é um par* $(M, J)$ *onde* $M$ *é uma variedade diferenciável e* $J$ *é uma estrutura quase-complexa.*

**Proposição 1.1.4.** *Toda variedade quase-complexa possui dimensão par e é orientável.*

**Demonstração:** Ver [19] página 121.

A orientação de uma variedade quase-complexa $M$ determinada pela proposição anterior é denominada orientação natural (ou canônica).

**Proposição 1.1.5.** *Toda variedade complexa é quase-complexa.*

**Demonstração:** Seja $M$ uma variedade complexa. Dado um ponto $p \in M$, considere o sistema de coordenadas locais $(U, \varphi)$, com $p \in U$ e $\varphi(p) = (z_1(p), ..., z_n(p)) \in \mathbb{C}^n$, onde $z_j(p) = x_j(p) + iy_j(p)$. Assim, $\varphi(p) = (x_1(p), y_1(p), ..., x_n(p), y_n(p))$. O conjunto $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \right), \left( \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p \right), ..., \left( \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right), \left( \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_p \right) \right\}$ forma uma base de $T_pM$. Definimos $J_p : T_pM \to T_pM$ por:

$$J\left( \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_p \quad \text{e} \quad J\left( \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_p \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p.$$

Claramente $J_p^2 = -\mathrm{Id}$. Vamos mostrar que esta aplicação está bem definida, isto é, não depende do sistema de coordenadas escolhido. Seja $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ outro sistema de coordenadas, com $p \in \tilde(U)$ e $\tilde{\varphi}(p) = (\tilde{z_1}(p), ..., \tilde{z_n}(p))$ com $\tilde{z_j}(p) = v_j(p) + iw_j(p)$ e $\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial w_j}\Big|_p$ e $\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial w_j}\Big|_p\right) = -\frac{\partial}{\partial v_j}\Big|_p$. Vamos mostrar que $\tilde{J} = J$. De fato, escrevendo $\frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial}{\partial y_j}$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial v_j}, \frac{\partial}{\partial w_j}\right\}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\\
\frac{\partial}{\partial y_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial w_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right)
\end{aligned}$$

Como $M$ é complexa, $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é holomorfa e então, pelas equações de Cauchy-Riemann para $w_j$ e $v_j$ temos $\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial w_k}{\partial y_j}$ e $\frac{\partial v_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial w_k}{\partial x_j}$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k} - \frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\\
\frac{\partial}{\partial y_j} &= \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial w_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right) - \frac{\partial v_k}{\partial y_j} = \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)\right) = \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}$$

e analogamente, $\tilde{J}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Então, como $J$ e $\tilde{J}$ coincidem na base de $T_pM$, concluímos que $J = \tilde{J}$. ■

**Observação 1.1.6.** *A estrutura quase-complexa construída na proposição anterior é denominada estrutura quase-complexa canônica da variedade complexa.*

Seja $(M, J)$ uma variedade quase-complexa. Observe que $J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ vista como transformação linear real não possui autovalores. Consideramos então o espaço tangente complexificado $\mathbb{C} \otimes TM$, que é a complexificação de cada fibra $T_xM$, $x \in M$. Para cada $x \in M$, consideramos ainda o endomorfismo $J_x^{\mathbb{C}} : T_x^{\mathbb{C}}M \longrightarrow T_x^{\mathbb{C}}M$, $(J_x^{\mathbb{C}})^2 = -\,\mathrm{Id}$, que é a extensão de $J_x$ ao corpo $\mathbb{C}$. A partir de agora, vamos trabalhar somente o espaço tangente complexificado. Por abuso de notação, continuaremos a escrever $J_x$ no lugar de $J_x^{\mathbb{C}}$. Desta forma, $J_x$ possui autovalores $+\,i$ e $-\,i$.

**Definição 1.1.7.** *Sejam $Aut_{J_x}(i)$ e $Aut_{J_x}(-i)$ os autoespaços de $J_x$ associados aos autovalores $+i$ e - $i$ respectivamente. Definimos o espaço tangente holomorfo $T_x^{1,0}M$ como*

$$T_x^{1,0}M = Aut_{J_x}(i),$$

*e o espaço tangente anti-holomorfo $T_x^{0,1}M$ como*

$$T_x^{0,1}M = Aut_{J_x}(-i).$$

*Um vetor $v$ no espaço tangente complexificado é do tipo $(1,0)$ se $v \in T^{1,0}M$ e do tipo $(0,1)$ se $v \in T^{0,1}M$.*

Desta forma, obtemos uma decomposição do espaço tangente $T_x^{\mathbb{C}}M = T_x^{1,0}M \oplus T_x^{0,1}M$ e do fibrado tangente $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$, onde $T^{0,1}M$ é o fibrado tangente holomorfo e $T^{0,1}M$ é o fibrado tangente anti-holomorfo. Observe que $T^{1,0}$ é uma distribuição regular de $TM \otimes \mathbb{C}$, isto é, $T_x^{1,0}$ é um subespaço vetorial de $T_x^{\mathbb{C}}M$, com mesma dimensão para todo $x \in M$. A decomposição no fibrado tangente complexificado induz uma decomposição no fibrado cotangente complexificado $T^*M \otimes \mathbb{C}$ de maneira natural:

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = (T^{1,0}M)^* \oplus (T^{0,1}M)^*,$$

assim como no fibrado das potências exteriores:

$$\Lambda^r M \otimes \mathbb{C} = \sum_{p+q=r} \Lambda^p((T^{1,0}M))^* \otimes \Lambda^q(T^{0,1})^*.$$

**Proposição 1.1.8.** *Um vetor $Z$ no espaço tangente complexificado é do tipo $(1,0)$ (respectivamente (0,1)) se, e somente se, $Z$ é da forma $Z = X - iJX$ (respectivamente ($Z = X + iJX$)), para algum vetor $X$ no espaço tangente real.*

**Demonstração:** Ver [19].

O próximo resultado nos dá informações sobre quando uma estrutura quase-complexa é uma estrutura complexa. Este resultado é central na teoria de Variedades Complexas.

**Teorema 1.1.9** (Newlander-Nirenberg, [24])**.** *Uma estrutura quase-complexa é uma estrutura complexa se, e somente se, $T^{1,0}M$ é uma distribuição integrável, isto é, $[T^{1,0}M, T^{1,0}] \subset T^{1,0}M$*

Neste caso, dizemos que a estrutura $J$ é integrável. A condição de integrabilidade pode ser também expressa em função da torção de $J$, como se segue:

**Definição 1.1.10.** *A torção de $J$ é o tensor*

$$N(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY], \quad X,Y \in TM.$$

*Este tensor é conhecido com tensor de Nijenhius. Dizemos que $J$ não tem torção se $N(X,Y) \equiv 0$.*

**Proposição 1.1.11.** *$J$ é integrável se, e somente se, $J$ não tem torção.*

**Demonstração:** Suponha que $J$ é integrável, isto é, $[T^{1,0}M, T^{1,0}] \subset T^{1,0}M$. Os elementos de $T^{1,0}M$ são da forma $X - iJX$. Seja $Z = [X - iJX, Y - iJY]$. Então

$$Z = [X,Y] - [X,iJY] - [iJX,Y] + [iJX,iJY] = [X,Y] - [JX,JY] - i([X,JY] + [JX,Y])$$

Como $Z \in T^{1,0}M$, temos $-J([X,JY] + [JX,Y]) = [X,Y] - [JX,JY]$. Então, $[X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY] = 0$, ou seja, $N(X,Y) = 0$.
Reciprocamente, suponha que $N(X,Y) = 0$. Dado $Z = [X - iJX, Y - iJY]$, escrevemos $Z = [X,Y] - [JX,JY] - i([X,JY] + [JX,Y])$. Mas como $N(X,Y) = 0$ temos:

$$[X,Y] - [JX,JY] = -J[JX,Y] - J[X,JY] = -J([X,JY] + [JX,Y])$$

e como $-J^2 = \mathrm{id}$, temos $Z = [X,Y] - [JX,JY] - i(J \circ -J([X,JY] + [JX,Y])) = [X,Y] - [JX,JY] - iJ([X,Y] - [JX,JY])$ e assim temos $Z \in T^{1,0}M$. ∎

Como aplicação da proposição anterior, vamos mostrar que toda variedade quase-complexa $M$ de dimensão 2 é uma variedade complexa (de dimensão complexa 1). De fato, seja $J$ uma estrutura quase-complexa em $M$. Então, existe $X \in T_xM$ tal que $\{X, J_x(X)\}$(conforme [19], página 114) é uma base de $T_xM$. Logo todo campo $Y$ é localmente combinação linear de $X$ e $JX$. Mas,

$$\begin{aligned} N(X,JX) &= [X,JX] + J[JX,JX] + J[X,JJX] \\ &= [X,JX] + [JX,X] = 0 \end{aligned}$$

Assim, $J$ é integrável e $M$ é variedade complexa, chamada ***Superfície de Riemann***.

**Definição 1.1.12.** *a) Seja $(M,J)$ uma variedade quase-complexa. Uma métrica Riemanniana $g$ é dita Hermitiana se $g(JX,JY) = g(X,Y)$ para todo par de campo de vetores. Dizemos que uma variedade quase-complexa $(M,J)$ com métrica Hermitiana $g$ é uma variedade quase-Hermitiana $(M,J,g)$.*

*b) Definimos a 2-forma Kähler* $\Omega \in C^\infty(M, \Lambda^2 TM^*)$ *como* $\Omega(u,v) = g(u, Jv)$.

*c) Uma variedade quase-Hermitiana é dita quase-Kähler se* $d\Omega = 0$.

*d) Uma variedade (M,J,g) é dita Kähler se é quase-Kähler e além disso, J é integrável.*

Seja $M$ uma variedade complexa e $z_1, \ldots, z_n$ um sistema de coordenadas complexas com $z_j = x_j + iy_j$. Definimos os operadores

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Pela construção da estrutura quase-complexa canônica, temos que $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$ é base de $T^{1,0}M$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right\}$ é base de $T^{0,1}M$.

**Definição 1.1.13.** *Uma aplicação diferenciável* $\phi : (M, J) \longrightarrow (N, J')$ *entre variedades quase-complexas é holomorfa em* $x \in M$, *se a diferencial comuta com as estruturas quase-complexas. Isto é,*

$$J'_{\phi(x)} \circ d\phi_x = d\phi_x \circ J_x.$$

*Dizemos que* $\phi$ *é holomorfa, se a definição acima vale para todo* $x \in M$.

**Exemplo 1.1.14.** *Considere* $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *de classe* $C^\infty$, *onde* $J(x, y) = (-y, x)$ *é a estrutura quase-complexa canônica do* $\mathbb{R}^2$. *Neste caso, temos*

$$J \circ df = df \circ J \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

*Este último par de equações são as Equações de Cauchy-Riemann, ou seja, a definição acima estende a noção de função complexa holomorfa usual.*

**Proposição 1.1.15.** *Uma aplicação diferenciável* $\phi : (M, J) \longrightarrow (N, J')$ *entre variedades quase-complexas é holomorfa se, e somente se,* $\bar{\partial}\phi = 0$

**Demonstração:** Ver [19].

**Exemplo 1.1.16.** *Vamos novamente considerar uma função* $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *de classe* $C^\infty$ *e* $J(x, y) = (-y, x)$ *a estrutura quase-complexa canônica do* $\mathbb{R}^2$*. Pela proposição acima,* $f$ *é holomorfa se, e somente se,* $\bar{\partial} f = 0$*. Agora, lembrando da definição do operador* $\bar{\partial}$ *temos:*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

*Igualando a zero as partes real e imaginária temos*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Novamente, obtemos as Equações de Cauchy-Riemann, ou seja, verificamos o conhecido resultado de variáveis complexas: "Uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se, e somente se, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann".

## 1.2 Fibrados Vetoriais

Nesta seção vamos descrever as principais propriedades do fibrados vetoriais $C^\infty$ e holomorfos. Este último, terá papel central nas construções realizadas no Capítulo 4. Primeiramente, iniciamos com os fibrados $C^\infty$. Ao final da seção, enunciamos o teorema de Koszul-Malgrange, que relaciona os conceitos de conexão e estrutura complexa em fibrados complexos.

**Definição 1.2.1** (Fibrado Vetorial $C^\infty$)**.** *Um fibrado vetorial* $C^\infty$ *de posto (ou dimensão)* $n$ *é uma tripla* $\xi = (E, \pi, M)$ *onde* $E$ *(espaço total) e* $M$ *(base do fibrado) são variedades diferenciáveis e* $\pi : E \longrightarrow M$ *é uma aplicação* $C^\infty$*, com uma estrutura de espaço vetorial em* $\pi^{-1}(x)$ *(fibra sobre* $x$*), para todo* $x \in M$ *tal que a seguinte condição de trivialidade é satisfeita: existe uma cobertura de* $M$ *por abertos* $U_\alpha$ *e uma família de difeomorfismos* $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ *tal que* $h_\alpha|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow x \times \mathbb{R}^n$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais para cada* $x \in M$*. A família* $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ *é chamada de trivialização local do fibrado.*

**Observação 1.2.2.** *Quando não houver perigo de confusão, vamos chamar um fibrado vetorial* $C^\infty$ *simplesmente de fibrado vetorial real.*

**Definição 1.2.3.** *Seja* $\xi = (E, \pi, M)$ *um fibrado vetorial real e* $U \subset M$ *um aberto. Uma aplicação diferenciável* $s : U \longrightarrow E$ *é uma seção local de* $\xi$ *se* $\pi \circ s = \mathrm{Id}_U$*. Se* $U = M$ *dizemos que* $s$ *é uma seção global ou simplesmente uma seção de* $\xi$*. O conjunto de todas seções de* $\xi$ *será denotado por* $C^\infty(M, E)$*.*

**Definição 1.2.4.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial real. Dizemos que a seção $s \in C^\infty(M, E)$ se anula em $x_0 \in M$, se $s(x_0) = \vec{0} \in \pi^{-1}(x_0)$. Dizemos que a seção $s$ nunca se anula se $s(x) \neq \vec{0}$ para todo $x \in M$.*

**Definição 1.2.5.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial real de posto $n$. Uma coleção $s_1, \ldots, s_n$ de seções locais chama-se um referencial local sobre $U$ se, para todo $p \in U$ o conjunto $\{s_1(p), \ldots, s_n(p)\}$ forma uma base de $\pi^{-1}(p)$. Se $U = M$ dizemos que o referencial é global.*

**Definição 1.2.6** (Morfismo de Fibrados)**.** *Sejam $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M_1)$ e $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M_2)$ dois fibrados vetoriais. Um morfismo de fibrados é uma aplicação diferenciável $\Psi : E_1 \longrightarrow E_2$ que transforma fibras de $\xi_1$ linearmente em fibras de $\xi_2$, isto é, $\Psi$ cobre uma aplicação diferenciável $\psi : M_1 \longrightarrow M_2$ :*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \end{tikzcd}$$

*e para cada $p \in M_1$, a aplicação entre fibras $\Psi^p := \Psi|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi^{-1}(\psi(p))$ é linear.*

Dizemos que dois fibrados $\xi_1$ e $\xi_2$ são isomorfos se $M_1 = M_2$ e existem morfismos $\Psi_1 : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$ e $\Psi' : \xi_2 \longrightarrow \xi_1$ que cobrem a identidade e são inversos um do outro. Neste caso, cada aplicação entre fibras $\Psi^p$ é um isomorfismo linear.

**Exemplo 1.2.7.**

1. *Seja $M$ uma variedade diferenciável. O fibrado tangente $TM$ e o fibrado cotangente $T^*M$ são fibrados vetoriais. As seções destes fibrados são os campos de vetores e as 1-formas diferenciais respectivamente. Mais geralmente, temos o fibrado das potências exteriores $\Lambda^k(T^*M)$ cuja as seções são as $k$-formas diferenciais. Se $\phi : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, então a diferencial $d\phi : TM \longrightarrow TN$ é um morfismo de fibrados vetoriais.*

2. *Seja $M$ uma variedade diferenciável. O fibrado trivial $n$-dimensional é o fibrado $\varepsilon^n_M = (M \times \mathbb{R}^n, \pi, M)$, onde $\pi : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é a projeção no primeiro fator. Note que as seções de $\varepsilon^n_M$ é o conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Em geral, um fibrado vetorial de posto $n$ sobre $M$ diz-se trivial se é isomorfo a $\varepsilon^n_M$.*

3. *O Plano Projetivo real $\mathbb{RP}^n$ é o conjunto as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Também podemos ver $\mathbb{RP}^n$ como espaço quociente de $S^n$, no qual os pontos antípodas são identificados. Consideramos o fibrado $\gamma^1_n = (E, \pi, \mathbb{RP}^n)$, onde*

$$E = \left\{ ([x], v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}; v = \lambda x;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

*e $\pi : E \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ é dado por $\pi([x], v) = [x]$. Este fibrado chama-se fibrado de linha canônico (ou fibrado tautológico).*

4. *Este exemplo é uma generalização do exemplo anterior. Seja $G_k(\mathbb{R}^n)$ a variedade de Grassmann real de $k-$planos em $\mathbb{R}^n$. Seja $\gamma_n^k = (E, \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$, onde*

$$E = \{(S, x); S \text{ é um subespaço de dimensão } k \text{ em } \mathbb{R}^n \text{ e } x \in S\},$$

*e $\pi : E \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ é dado por $\pi(S, v) = S$. Este é o fibrado canônico (ou tautológico) sobre $G_k(\mathbb{R}^n)$.*

**Proposição 1.2.8.** *Um fibrado $\xi = (E, \pi, M)$ é trivial se, e somente se, possui um referencial global.*

**Demonstração:** Ver [22], página 18.

**Exemplo 1.2.9.** *$TS^2$ não é trivial. Para ver isto, lembre que as seções de $TS^2$ são os campos de vetores. Mas pelo teorema de Hopf-Poincaré, se $n$ é par, então todo campo de vetores tangentes sobre $S^n$ admite uma singularidade, isto é, para todo campo de vetores tangente $X : S^2 \longrightarrow TS^2$, exite $p \in S^2$ tal que $X(p) = 0$. Assim, não pode existir um referencial global para $TS^2$ e pela proposição acima, $TS^2$ não é trivial.*

**Exemplo 1.2.10.** *O fibrado de linha canônico $\gamma_n^1$ não é trivial. Vamos mostrar que toda seção de $s : \mathbb{RP}^n \longrightarrow E$ se anula em algum ponto, isto é, $s(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{RP}^n$ e consequentemente, não existe um referencial global. De fato, dada uma seção $s : \mathbb{RP}^n \longrightarrow E$, consideramos a composição $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n \longrightarrow E$, que para cada $x \in S^n$ associa o par $([x], t(x)x)$, onde $t : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $t(-x) = -t(x)$. Como $S^n$ é conexo, segue do teorema do valor intermediário que existe $x_0 \in S^n$ tal que $t(x_0) = 0$. Logo $s([x_0]) = ([x_0], 0)$ e a seção se anula em $x_0$.*

**Definição 1.2.11** (Fibrado *pull-back*)**.** *Seja $\psi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $\xi = (E, \pi, N)$ um fibrado vetorial sobre $N$. O fibrado pull-back de $\xi$ por $\psi$ é o fibrado $\psi^*\xi = (\psi^*E, \tilde{\pi}, M)$, onde o espaço total é dado por $\psi^*E = \{(p, v) \in M \times E; \psi(p) = \pi(v)\}$ e a projeção $\tilde{\pi} : \psi^*E \longrightarrow M$ dada por $\tilde{\pi}(p, v) = p$.*

Observe que a fibra de $\psi^*\xi$ sobre $p$ é isomorfa à fibra de $\xi$ sobre $\psi(p)$. Em outras palavras, o *pull-back* de $\xi$ por $\psi$ é um fibrado vetorial em que a fibra sobre cada ponto da pré-imagem $\psi^{-1}(q)$ é uma cópia da fibra sobre $q$.

**Definição 1.2.12** (Subfibrado)**.** *Um fibrado vetorial* $\eta = (F, \tau, N)$ *é um subfibrado do fibrado vetorial* $\xi = (E, \pi, M)$ *se* $F$ *é uma subvariedade de* $E$ *e a inclusão* $i : F \hookrightarrow E$ *é um morfismo de fibrados.*

**Exemplo 1.2.13.** *Seja* $\xi = (E, \pi, M)$ *e* $N \subset M$ *uma subvariedade. Definimos* $\eta = (E_N, \tau, N)$ *a restrição do fibrado* $\xi$ *a* $N$*, com espaço total* $E_N = \{\pi^{-1}(p);\, p \in N\}$ *e a projeção* $\tau : E_N \longrightarrow N$ *é a restrição de* $\pi$ *a* $N$*. Temos assim que* $\eta$ *é um subfibrado de* $\xi$*.*

Sejam $V$ e $W$ dois espaços vetoriais de dimensão finita. A partir destes, podemos criar novos espaços vetoriais, por exemplo $V \oplus W$, $V \otimes W$, $V^*$, $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$, etc... A idéia agora é fazer a mesma coisa com fibrados vetoriais, ou seja, construir novos fibrados a partir de fibrados conhecidos. Para isso, admitiremos o seguinte princípio geral: *"toda construção funtorial com espaços vetoriais pode ser transportada para fibrados vetoriais"[14].*

Sejam $\xi = (E, \pi, M)$ e $\eta = (F, \tau, M)$ dois fibrados vetoriais sober a mesma base $M$. Definimos os seguintes fibrados (a demonstração de que os fibrados abaixo são realmente fibrados vetoriais pode ser encontrada em [14] ou [17]):

- Soma direta (ou Soma de Whitney) $\xi \oplus \eta$, cujo espaço total é dado por $E \oplus F = \{(v, w) \in E \times F : \pi(v) = \tau(w)\}$ e a projeção é dada por $E \oplus F \longrightarrow M$, $(v, w) \mapsto \pi(v) = \tau(w)$. Note que as fibras são somas diretas $\pi^{-1}(p) \oplus \tau^{-1}(p)$.

- O produto tensorial $\xi \otimes \eta$, onde o espaço total é o conjunto $\{\pi^{-1}(p) \otimes \tau^{-1}(p);\, p \in M\}$.

- O fibrado dual $\xi^*$, onde as fibras são os espaços duais $(\pi^{-1}(p))^*$ e o espaço total é o conjunto $\{(\pi^{-1}(p))^*;\, p \in M\}$.

- O fibrado $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$, onde as fibras são os espaços de homorfismos $\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(p), \tau^{-1}(p))$. Verifica-se que $\mathrm{Hom}(\xi, \eta) \cong \xi^* \otimes \eta$.

**Definição 1.2.14** (Fibrado Vetorial Complexo)**.** *Seja* $M$ *uma variedade (não necessariamente complexa). Um fibrado vetorial complexo de posto (ou dimensão)* $n$ *é uma tripla* $\xi = (E, \pi, M)$ *onde* $E$ *(espaço total) e* $M$ *(base do fibrado) são variedades diferenciáveis e* $\pi : E \longrightarrow M$ *é uma aplicação* $C^\infty$*, com uma estrutura de espaço vetorial complexo em* $\pi^{-1}(x)$ *(fibra sobre* $x$*), para todo* $x \in M$ *tal que a seguinte condição de trivialidade é satisfeita: existe uma cobertura de* $M$ *por abertos* $U_\alpha$ *e uma família de difeomorfismos* $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ *tal que* $h_\alpha|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow x \times \mathbb{C}^n$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais complexos para cada* $x \in M$*. A família* $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ *é chamada de trivialização local do fibrado complexo.*

**Definição 1.2.15** (Fibrado Holomorfo)**.** *Seja $(M, J_M)$ uma variedade complexa. Um fibrado vetorial holomorfo é um fibrado complexo $\xi = (E, \pi, M)$ junto com uma estrutura de variedade complexa em $E$, (ou seja, $(E, J_E)$ é uma variedade complexa) tal que para todo $x$, exite um aberto $U \subset (M, J_M)$ e uma aplicação $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^k$ que é biholomorfa entre variedades complexas. As funções $\varphi_U$ são chamadas trivializações holomorfas.*

Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado holomorfo. Uma seção $s : M \longrightarrow E$ é uma seção holomorfa se $s$ é uma aplicação holomorfa entre variedades complexas. Seja $U \in M$ um aberto trivializante. Um referencial local $\{s_1, \ldots, s_k\}$ sobre $U$ é holomorfo se todas funções $s_i$ são holomorfas. Em termos do referencial local, qualquer seção $s$ pode ser escrita como $s(x) = \Sigma f_i(x).s_i(x)$, onde $f_i \in C^\infty(M)$. Assim $s$ é holomorfa se, e somente se, as funções $f_i$ são holomorfas. Se $U = M$, dizemos que o referencial holomorfo é global.

**Definição 1.2.16** (Métrica Hermitiana)**.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado complexo. Uma métrica hermitiana em $\xi$ é um produto interno hermitiano em cada fibra $\pi^{-1}(x)$ de $E$, variando diferenciavelmente $\forall x \in M$, isto é, se $e = \{e_1, \cdots, e_k\}$ é um referencial local para $E$, então as funções $h_{ij}(x) = \langle e_i(x), e_j(x)\rangle$ são $C^\infty$.*

**Definição 1.2.17** (Fibrado Hermitiano)**.** *Sejam $M$ uma variedade complexa. Dizemos que um fibrado $\xi = (E, \pi, M)$ é hermitiano se é holomorfo e está munido com uma métrica hermitiana.*

**Definição 1.2.18.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial sobre $M$. Definimos uma 1-forma $\rho$ com valores em $E$ como uma seção no fibrado $T^*M \otimes E$, isto é, uma aplicação $\rho : TM \longrightarrow E$ tal que restrita a cada fibra de $TM$, temos uma aplicação linear $\rho_x : T_xM \longrightarrow E_x$.*

De forma análoga, definimos uma $k-$forma com valores em $E$ como uma seção no fibrado $\Lambda^p T^*M \otimes E$. O conjunto de todas $k-$formas com valores em $E$ será denotado por $A^k(E)$, ou seja, $A^k(E) = C^\infty(M, \Lambda^k T^*(M) \otimes E)$.

Se $M$ é uma variedade complexa, temos $(r, s)$-formas com valores em $E$ definindo $A^{r,s}(E) = C^\infty(M, (\Lambda^r(T^{1,0}M)^* \otimes \Lambda^s(T^{0,1}M)^*) \otimes E)$. Usaremos a notação $\Lambda^{p,q}(M)$ para o espaço $\Lambda^r(T^{1,0}M)^* \otimes \Lambda^s(T^{0,1}M)^*$.

**Observação 1.2.19.** *a) Quando escrevemos $k-$formas com valores em $E$, estamos cometendo um abuso de linguagem. O que queremos dizer é $k-$formas com valores no fibrado $\xi$. Porém, iremos manter esta notação pois, na maioria das vezes, a indicação do espaço total $E$ ajuda a compreender o real significado do objeto em questão.*

*b)* $A^0(E) = C^\infty(M, E)$

*c)* $A^1(E) = C^\infty(M, T^*M \otimes E)$

**Definição 1.2.20** (Conexão)**.** *Uma conexão num fibrado vetorial* $(E, \pi, M)$ *é um operador linear*

$$\nabla : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

*tal que vale a regra de Leibnitz:* $\forall f \in C^\infty(M)$ *e* $\forall s \in C^\infty(M, E)$ *temos*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\,\nabla s$$

**Observação 1.2.21.** *Com as notações introduzidas acima, podemos escrever*

$$\nabla : A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$$

Note que se $s \in C^\infty(M, E)$ então $\nabla s \in C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ e daí, se $X \in C^\infty(M, TM)$ então $\nabla s(X) := \nabla_X s \in C^\infty(M, E)$, ou seja, se $X \in C^\infty(M, TM)$, temos o operador

$$\nabla_X : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, E)$$

chamada de derivada covariante de $s \in C^\infty(M, E)$ ao longo do campo $X$.

Seja $U$ um aberto trivializante e $e = \{e_1, \cdots, e_k\}$ um referencial de $\pi^{-1}(U) \subset E$ sobre $U$. Então, $\nabla e_i \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U) \otimes T^*U)$ e $\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j$, onde $\omega_{ij} \in C^\infty(U, T^*U) =$ 1-formas com valores em $\mathbb{C}$. A matriz $(\omega_{ij})$ é chamada **matriz de conexão** associada a $\nabla$ na base local. Seja $s \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U))$. Então $s = \sum s_i e_i$ e

$$\nabla s = \nabla\left(\sum_i s_i e_i\right) = \sum_i ds_i \otimes e_i + \sum_i s_i \nabla e_i = \sum_j \left(ds_j + \sum_i s_i \omega_{ij}\right) \otimes e_j$$

e portanto a matriz de conexão determina a conexão (junto com a base). Pode se provar que $\omega_{ij} = \sum_l \Gamma^j_{il} dx_l$, onde $\Gamma^j_{il}$ são os símbolos de Cristoffell da conexão. De forma mais compacta escrevemos simplesmente

$$\nabla = d + \omega,$$

onde $\omega$ é a matriz de conexão.

**Definição 1.2.22** (Conexão *pull-back*)**.** *Sejam $M, N$ variedades diferenciáveis, $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. A* conexão pull-back *de $\nabla$ por $\phi$ (denotada por $\phi^{-1}\nabla$) é a única aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rcl} \phi^{-1}\nabla : TM \times C^{\infty}(M, \phi^{-1}TN) & \longrightarrow & TN \\ (\xi, X) & \longmapsto & \phi^{-1}\nabla_{\xi}X \end{array}$$

*tal que, para $\xi \in T_pM, X \in C^{\infty}(M, TM), Y \in C^{\infty}(M, \phi^{-1}TN$ e $f \in C^{\infty}(M)$, temos:*

1. *$\phi^{-1}\nabla_{\xi}Y \in T_{\phi(p)}N$;*
2. *$\phi^{-1}\nabla_{\xi}(fY) = (\xi f)Y(\phi(p)) + f(p)\phi^{-1}\nabla_{\xi}Y$;*
3. *$\phi^{-1}\nabla_X Y \in C^{\infty}(M, \phi^{-1}TN)$;*
4. *Se $Z \in C^{\infty}(N, TN)$ então $Z \circ \phi \in C^{\infty}(M, \phi^{-1}TN)$ e $\phi^{-1}\nabla_{\xi}(Z \circ \phi) = \nabla_{d\phi_p(\xi)}Z$.*

**Definição 1.2.23** (Curvatura da Conexão)**.** *Seja $\nabla$ uma conexão no fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, M)$. Definimos a curvatura de $\nabla$ como a aplicação*

$$R : C^{\infty}(M, TM) \times C^{\infty}(M, TM) \times C^{\infty}(M, E) \longrightarrow C^{\infty}(M, E)$$

*tal que $R(X, Y, s) = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s$. Dizemos que uma conexão é plana se $R(X, Y, s) \equiv 0$.*

Podemos definir a matriz de 2-formas da curvatura $\Omega = (\Omega_{ij})$ de forma análoga ao que foi feito acima para matriz de 1-formas da conexão [26]. Verifica-se que a 1-forma de conexão e a 2-forma de curvatura estão relacionadas pela equação de estrutura

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj},$$

ou de forma mais compacta, $\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega$, onde $\omega = (\omega_{ij})$ é a matriz de 1-forma de conexão.

**Definição 1.2.24.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial sobre uma variedade $M$ e $\nabla$ a conexão de Levi-Civita em $TM$. O operador diferencial exterior*

$$d : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

*relativo à conexão $\nabla$ é definido por*

$$d\rho(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (\nabla_{X_i}\rho)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}),$$

*onde $\rho \in A^p(E)$ e $\hat{X}_i$ significa que o termo foi omitido.*

**Observação 1.2.25.** *A relação $d^2 = 0$ é valida somente para fibrados planos. Note que $d^2 = 0$ é a base para construção da cohomologia de de Rham. [9]*

**Definição 1.2.26.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial sobre uma variedade $M$. Relativo às estruturas Riemannianas em $\xi$ e $TM$ definimos o operador co-diferencial*

$$d^* : A^p(E) \longrightarrow A^{p-1}(E)$$

*que é caracterizado como o adjunto do operador diferencial $d$ via a fórmula*

$$\int_M \langle d\omega, \rho\rangle \, \nu_g = \int_M \langle \omega, d^*\rho\rangle \nu_g,$$

*onde $\omega \in A^{p-1}(E)$, $\rho \in A^p(E)$ e $\nu_g$ é o elemento de volume associado a métrica $g$ em $TM$.*

**Lema 1.2.27.** *Seja $\{E_i\}$ uma base de $T_xM$, $X_j$ vetores em $T_xM$ e $g^{st}$ é a inversa da matriz $g(E_s, E_t)$. Então para $\rho \in A^p(E)$ temos*

$$(d^*\rho)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = -\sum_{s,t} g^{st}(\nabla_{E_t}\rho)(E_s, X_1, \ldots, X_{p-1}).$$

*Em particular, se $\rho \in A^1(E)$, $d^*\rho = -$traço $\nabla\rho$.*

**Demonstração:** Ver [9], página 8.

Para fibrados $C^\infty$ a diferencial exterior não está definida nos espaços de seções. Uma importante diferença entre fibrados $C^\infty$ e fibrados holomorfos é a existência do operador $\bar{\partial}$ que sempre está bem definido.

**Definição 1.2.28** (Operador $\bar{\partial}$)**.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado holomorfo. Definimos o operador*

$$\bar{\partial} : A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p,q+1}(E)$$

*da seguinte forma: Tome um referencial local $e = \{e_1, \cdots, e_k\}$ de $E$ sobre $U$. Se $\sigma \in A^{p,q}(E)$, então $\sigma = \sum \omega_i \otimes e_i$, com $\omega_i \in \Lambda^{p,q}(U)$ e definimos*

$$\bar{\partial}\sigma = \sum \bar{\partial}\omega_i \otimes e_i.$$

**Lema 1.2.29.** *A definição acima não depende da escolha do referencial.*

**Demonstração:** Seja $e' = \{e'_1, \cdots, e'_k\}$ um outro referencial local de $E$ sobre $U$, seja $(g_{ij})$ a "matriz de passagem" do referencial $e$ para o referencial $e'$, isto é, cada entrada da matriz são funções $g_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $e(x) = \sum_j g_{ij}(x)\, e'_j(x)$, $\forall x \in U$. Então,

$$\sigma = \sum_i \omega_i \otimes e_i = \sum_i \omega_i \otimes \sum_j g_{ij} e'_j = \sum_j \sum_i g_{ij}\omega_i \otimes e'_j$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\sigma &= \sum_j \bar{\partial}\left(\sum_i g_{ij}\omega_i\right) \otimes e'_j \\
&= \sum_j \sum_i g_{ij}\, \bar{\partial}\omega_i \otimes e'_j \\
&= \sum_i \bar{\partial}\omega_i \otimes \sum_j g_{ij} e'_j \\
&= \sum_i \bar{\partial}\omega_i \otimes e_i
\end{aligned}$$

e assim, $\bar{\partial}$ não depende da escolha do referencial.

A idéia agora é relacionar os conceitos de conexão e estrutura complexa de um fibrado vetorial complexo. O primeiro passo neste sentido é definir o conceito de compatibilidade da conexão. Seja $M$ uma variedade complexa. Podemos decompor o fibrado cotangente $T^*M$ em $(T^{1,0}M)^* \oplus (T^{0,1}M)^*$. Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado holomorfo. Dado uma conexão $\nabla$, podemos decompo-la em partes $(1,0)$ e $(0,1)$, ou seja, $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$ com:

$$\nabla^{1,0} : A^0(E) \longrightarrow A^{1,0}(E)$$

$$\nabla^{0,1} : A^0(E) \longrightarrow A^{0,1}(E)$$

**Definição 1.2.30.** *Dizemos que $\nabla$ é compatível com a estrutura complexa se $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.*

**Definição 1.2.31.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado hermitiano. Uma conexão $\nabla$ é compatível com a métrica se $d\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla\xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla\eta\rangle$, $\forall \xi, \eta \in C^\infty(M, E)$.*

**Lema 1.2.32.** *Se $\xi = (E, \pi, M)$ é hermitiano, então existe uma única conexão $\nabla$ em $\xi$ compatível com a métrica e com a estrutura complexa.*

**Demonstração:** Seja $e = \{e_1, \cdots, e_k\}$ um referencial holomorfo para $\pi^{-1}(U)$, com $U$ aberto trivializante e $h_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Suponha que exista uma conexão $\nabla$ satisfazendo as hipóteses. Vamos mostrar que ele é única. Como $\nabla$ é compatível com a estrutura complexa, temos que a matriz de conexão $\omega$ é formada somente por 1-formas do tipo $(1,0)$, pois caso contrário, poderíamos ter $\nabla^{0,1}e_i \neq 0$, para algum $i$, o que é um absurdo. Como $\nabla$ é compatível com a métrica, temos:

$$\begin{aligned}
dh_{ij} &= d\left\langle e_i, e_j\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla e_i, e_j\right\rangle + \left\langle e_i, \nabla e_j\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_k \omega_{ik} e_k, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \sum_k \omega_{j,k} e_k \right\rangle \\
&= \sum_k \omega_{ik}\left\langle e_k, e_j\right\rangle + \sum_k \overline{\omega_{jk}}\left\langle e_i, e_k\right\rangle \\
&= \sum_k \omega_{ik} h_{kj} + \sum_k \overline{\omega_{jk}} h_{ik} \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Como $dh_{ij} = \partial h_{ij} + \overline{\partial} h_{ij}$ separamos a expressão (1.1) na parte $(1,0)$ e $(0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\partial h_{ij} &= \textstyle\sum_k \omega_{ik} h_{kj}, \text{ ou seja, } \partial h = \omega h; \\
\overline{\partial} h_{ij} &= \textstyle\sum_k \overline{\omega_{jk}} h_{ik}, \text{ ou seja, } \overline{\partial} h = h \overline{\omega}^t
\end{aligned}$$

A única solução desse sistema é $\omega = \partial h \,.h^{-1}$. Assim, a conexão é única. Então definimos a conexão pela matriz de 1-formas. ■

O próximo teorema é o resultado principal desta seção.

**Teorema 1.2.33** (Koszul-Malgrange, [21])**.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial complexo com conexão $\nabla$ sobre uma superfície de Riemann $M$. Então existe uma única estrutura complexa sobre $E$ para o qual $\xi = (E, \pi, M)$ é um fibrado holomorfo e $\nabla$ é compatível com a estrutura complexa.*

Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial complexo com conexão $\nabla$ sobre uma superfície de Riemann $M$, munido com a estrutura complexa de Koszul-Malgrange. Dizemos que uma seção $\sigma$ é holomorfa com respeito a $\nabla$ se, e somente se, $\nabla^{0,1}\sigma = 0$, ou equivalentemente, se e somente se, $\nabla_v \sigma = 0\,,\ \forall v \in T^{0,1}M$.

## 1.3 Classes Características

Nesta seção apresentaremos os resultados básicos sobre classes características utilizados no trabalho, de forma bastante resumida. As principais referências são [22], [20], [17].

Classes características são classes de cohomologia associadas a fibrados vetoriais. Elas são as seguintes:

1. **Classes de Stiefel-Whitney** $w_i(E) \in H^i(M, \mathbb{Z}_2)$, para fibrados vetoriais reais $(E, \pi, M)$.

2. **Classes de Chern** $c_i(E) \in H^{2i}(M, \mathbb{Z})$, para fibrados vetoriais complexos $(E, \pi, M)$.

3. **Classes de Pontryagin** $p_i(E) \in H^{4i}(M, \mathbb{Z})$, para fibrados vetoriais reais $(E, \pi, M)$.

4. **Classe de Euler** $e(E) \in H^n(M, \mathbb{Z})$, para fibrados vetoriais reais orientáveis $(E, \pi, M)$.

Não trataremos aqui sobre classes de Pontryagin. As classes de Stiefel-Whitney e Chern são semelhantes, embora a primeira trate sobre fibrados vetoriais reais e a segunda sobre fibrados vetoriais complexos. Primeiramente, apresentaremos as classes de Stiefel-Whitney.

**Teorema 1.3.1.** *Sejam $\xi = (E_1, \pi_1, M)$ e $\eta = (E_2, \pi_2, M)$ fibrados vetoriais reais sobre a mesma base $M$. Existe uma única sequência de funções $w_1, w_2, \ldots,$ que associa a cada fibrado $\xi$ a classe $w_i(\xi) \in H^i(M, \mathbb{Z}_2)$, tal que:*

1. *$w_i(f^*(\xi)) = f^*(w_i(\xi))$, para um fibrado pull-back $f^*(\xi)$.*

2. *$w_n(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=n} w_i(\xi) \cup w_j(\eta)$, onde $\cup$ é o produto cup da cohomologia e $w_0 = 1$.*

3. *$w_i(\xi) = 0$ se $i >$ posto$(E_1)$.*

4. *O fibrado de linha canônico $\gamma_1^1$ sobre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ possui a classe de Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_1^1)$ não nula.*

**Demonstração:** Ver [22].

Abaixo, seguem algumas consequências da definição das classes de Stiefel-Whitney.

**Proposição 1.3.2.** *Sejam $\xi = (E_1, \pi_1, M)$ e $\eta = (E_2, \pi_2, M)$ fibrados vetoriais sobre mesma base $M$, e $\varepsilon_M^n$ o fibrado trivial sobre a base $M$. Então, valem as seguintes afirmações:*

*a) Se $\xi$ é isomorfo a $\eta$, então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$, para todo $i$;*

*b) $w_i(\varepsilon) = 0$, para todo $i$;*

*c) $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$, para todo $i$;*

*d) Se $\xi$ tem uma seção que nunca se anula, então $w_n(\xi) = 0$.*

**Demonstração:** Ver [22].

**Observação 1.3.3.** *Um problema importante em topologia é verificar se um fibrado vetorial dado é trivial ou não. O item b) da proposição acima oferece uma condição necessária para isto. Mas ela não é suficiente. Por exemplo, o fibrado tangente $TS^n$ da esfera $S^n$ possui classe de Stiefel-Whitney (total) $w(TS^n) = w(S^n) = 1$ [22]. Mas pelo exemplo (1.2.9), vimos que $TS^2$ não é trivial. Em outras palavras, a classe de Stiefel-Whitney não detecta a não-trivialidade de $TS^2$.*

Passamos agora às classes de Chern.

**Teorema 1.3.4.** *Sejam $\xi = (E_1, \pi_1, M)$ e $\eta = (E_2, \pi_2, M)$ fibrados vetoriais complexos sobre a mesma base $M$. Existe uma única sequência de funções $c_1, c_2, \ldots$, que associa a cada fibrado $\xi$ a classe $c_i(\xi) \in H^{2i}(M, \mathbb{Z})$, tal que:*

1. *$c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$, para um fibrado pull-back $f^*\xi$.*

2. *$c_n(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=n} c_i(\xi) \cup c_j(\eta)$, onde $\cup$ é o produto cup da cohomologia e $c_0 = 1$.*

3. *$c_i(\xi) = 0$, se $i >$ posto$(E_1)$.*

4. *O fibrado de linha canônico $\gamma_1^1$ sobre $\mathbb{C}P^1$ possui classe de Chern $c_1(\gamma_1^1)$ não nula.*

**Demonstração:** Ver [22].

Observe que se $\xi$ é um fibrado vetorial complexo de posto $n$, podemos considerar $\xi$ como um fibrado real de posto $2n$, com orientação induzida. Denotaremos por $\xi_{\mathbb{R}}$ o fibrado real subjacente orientado ao fibrado complexo $\xi$. As classes de Stiefel-Whitney e Chern estão relacionadas da seguinte forma pela próxima proposição.

**Proposição 1.3.5.** *Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial complexo de posto $n$ e $\xi_{\mathbb{R}}$ o fibrado real subjacente. Então, $w_{2i+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0$ e $w_{2i}(\xi_{\mathbb{R}})$ é a imagem de $c_i(\xi)$ pelo homomorfismo de coeficientes $H^{2i}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2i}(M, \mathbb{Z}_2)$.*

**Demonstração:** Ver [17], página 83.

**Proposição 1.3.6.** *Seja $\xi$ é um fibrado vetorial de posto $n$, então $c_1(\Lambda^n\xi) = c_1(\xi)$*

**Demonstração:** Ver [18], página 246.

**Proposição 1.3.7.** *Seja $\xi$ é um fibrado de linha holomorfo sobre uma variedade compacta com $c_1(\xi) < 0$ ,(isto é $c_1(\xi)$ avaliado num gerador de $H_2(M,\mathbb{Z})$) então $\xi$ não tem seção não nula.*

**Demonstração:** Ver [20], página 54.

**Proposição 1.3.8.** *Seja $\xi$ um fibrado vetorial e $\xi^*$ o fibrado dual. Então $c_i(\xi^*) = (-1)^i\, c_i(\xi)$.*

**Demonstração:** Ver [22], página 168.

**Proposição 1.3.9.** *Sejam $\xi$ e $\eta$ fibrados de linha sobre a mesma base. Então $c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta)$.*

**Demonstração:** Ver [17], página 86.

Vamos agora, descrever a classe de Euler. Maiores detalhes são encontrados em [22] e [17]. Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial real. O isomorfismo de Thom

$$\Phi : H^i(M) \longrightarrow H^{i+n}(D(E), S(E)),$$

definido por $\Phi(b) = \pi^*(b) \cup c$, para uma classe de Thom $c \in H^n(D(E), S(E))$, ou seja, a classe $c$ restrita a cada fibra é um gerador de $H^n(D(E), S(E))$([17]). A aplicação $\Phi$ é um isomorfismo sempre que classes de Thom existirem [17]. Classes de Thom com coeficientes em $\mathbb{Z}$ existem para todo fibrado vetorial real orientado e com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ existe para todo fibrado vetorial [17].

**Definição 1.3.10.** *Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial real orientado. A classe de Euler $e(\xi) \in H^n(M,\mathbb{Z})$ é a restrição da classe de Thom à seção zero de $\xi$, isto é, se $c \in H^n(D(E), S(E); \mathbb{Z}))$ é uma classe de Thom, então $e(\xi)$ é a imagem de $c$ pela composição*

$$H^n(D(E), S(E); \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(D(E), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(M, \mathbb{Z}),$$

*onde a primeira aplicação é a usual passagem da cohomologia relativa para a cohomologia absoluta e a segunda aplicação é a induzida pela inclusão $M \hookrightarrow D(E)$ como seção nula.*

Pela definição acima, a classe de Euler depende da escolha de $c$. Porém pode-se mostrar [17] que a classe de Euler $e(\xi)$ depende somente da escolha de uma orientação em $\xi$.

**Proposição 1.3.11.** *Seja $\xi = (E_1, \pi_1, M)$ e $\eta = (E_2, \pi_2, M)$ fibrados reais e orientáveis. Então, valem as seguintes afirmacões:*

*a) O fibrado pull-back $f^*\xi$ também é orientável e $e(f^*\xi) = f^*(e(\xi))$.*

*b) A soma $\xi \oplus \eta$ também é orientável e $e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \cup e(\eta)$.*

*c) Suponha que o fibrado $\xi$ tenha posto $n$ (real). Então o homomorfismo de coeficientes $H^n(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(M, \mathbb{Z}_2)$ leva a classe de Euler $e(\xi)$ na classe top de Stiefel-Whitney $w_n(\xi)$. Se $\zeta = (E, \pi, M)$ é um fibrado complexo de posto $n$, temos $e(\zeta_{\mathbb{R}}) = c_n(\zeta) \in H^{2n}(M, \mathbb{Z})$, onde $\zeta_{\mathbb{R}}$ é o fibrado real subjacente a $\zeta$, de posto $2n$ e orientável.*

*d) $e(\xi) = -e(\xi)$, se as fibras de $\xi$ tem dimensão ímpar.*

*e) $e(\xi) = 0$ se $\xi$ possui uma seção que nunca se anula.*

**Demonstração:** Ver [17], página 91.

A seguinte proposição justifica o nome "Classe de Euler":

**Proposição 1.3.12.** *Seja $M$ é uma variedade diferenciável compacta e orientável e $TM$ o fibrado tangente a $M$. Então a classe de Euler $e(TM)$ avaliada num gerador de $H_n(M, \mathbb{Z})$ é igual a $\chi(M)$, a característica de Euler de $M$.*

**Demonstração:** Ver [22], página 130.

**Exemplo 1.3.13.** *Uma outra maneira de ver que $S^2$ não é paralelizável (isto é, possui fibrado tangente trivial) é utilizando a classe de Euler. De fato, $e(TS^2) = \chi(S^2) = 2$ e pelo ítem e) da proposição 1.3.11, $TS^2$ não tem seção que nunca se anula, ou seja, não vai existir um referencial global linearmente independente. Portanto, $TS^2$ não é trivial.*

## 1.4 Grupos e Álgebras de Lie

Nesta seção, primeiramente apresentaremos a construção da álgebra de Lie de um grupo de Lie. Concentramos mais nossa atenção no grupo unitário $U(n)$, provando propriedades sobre este grupo.

**Definição 1.4.1.** *Um grupo de Lie real (respectivamente complexo) $G$ é uma variedade $C^\infty$ (respectivamente complexa) com estrutura de grupo tal que a aplicação $\rho : G \times G \longrightarrow G$, dada por $\rho(x, y) = x.y^{-1}$ é $C^\infty$ (respectivamente holomorfa).*

Como consequência desta definição, pode-se mostrar que as aplicações $\mu : G \times G \longrightarrow G$, $\mu(x, y) = x.y$ e $i : G \longrightarrow G$, $i(x) = x^{-1}$ são $C^\infty$ (respectivamente holomorfa).

**Exemplo 1.4.2.** *Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$ o grupo das transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$, ou equivalentemente, o grupo das matrizes invertíveis. Esse grupo é um conjunto aberto do espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ e portanto é uma variedade diferenciável. O produto neste grupo é proveniente do produto usual de matrizes. De forma análoga define-se $GL(n, \mathbb{C})$.*

Dado $g \in G$, definimos a translação à esquerda $E_g : G \longrightarrow G$ e a translação à direita $D_g : G \longrightarrow G$ definidas respectivamente por $E_g(h) = gh$ e $D_g(h) = hg$. Estas aplicações são difeomorfismos sendo $E_{g^{-1}}$ e $D_{g^{-1}}$ as inversas das aplicações $E_g$ e $D_g$.

**Definição 1.4.3.** *Um subgrupo $H$ de $G$ que também é uma subvariedade de $G$ é um subgrupo de Lie de $G$.*

**Teorema 1.4.4** (Cartan)**.** *Todo subgrupo fechado $H$ de um grupo de Lie $G$ é um subgrupo de Lie.*

**Demonstração:** Ver [31] página 98.

**Definição 1.4.5.** *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido com um produto (colchete) $[.,.]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

*a) O colchete é bilinear, isto é, linear em cada entrada.*

*b) Anti-simetria, isto é, $[A, B] = -[B, A]$, para todo $A, B \in \mathfrak{g}$.*

*c) Identidade de Jacobi: para todo $A, B, C \in \mathfrak{g}$ temos*

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]].$$

Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma sub-álgebra de Lie se $\mathfrak{h}$ for fechado por colchetes, isto é, se $x, y \in \mathfrak{h}$ então $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

**Exemplo 1.4.6.** *a) $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é a álgebra formada pelas matrizes $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes: $[A, B] = AB - BA$*

*b) Um exemplo importante de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável, munido com o colchete de Lie de campos de vetores.*

**Definição 1.4.7.** *Seja $G$ um grupo de Lie. Um campo de vetores $X$ em $G$ é dito*

a) *invariante à esquerda, se para todo $g, h \in G$, $d(E_g)_h(X(h)) = X(gh)$ ou de forma mais resumida $(E_g)_*X = X$.*

b) *invariante à direita, se para todo $g \in G$, $(D_g)_*X = X$.*

Os campos invariantes são completamente determinados por seus valores no elemento neutro $e \in G$, pois para todo $g \in G$ a condição de invariância à esquerda, por exemplo, implica que $X(g) = d(E_g)_e(X(e))$. Portanto, cada elemento de $T_eG$ determina um único campo invariante à direita e um único campo invariante à esquerda.

Dado $A \in T_eG$, denotaremos por $A^E$ o campo invariante à esquerda tal que $A^E(e) = A$ e $A^D$ o campo invariante à direita tal que $A^D(e) = A$. Denote por $\mathrm{Inv}^E$ o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda. Este conjunto é um subespaço vetorial do espaço de todos os campos de vetores. Analogamente, $\mathrm{Inv}^D$ é também um subespaço vetorial (em geral, diferente do subespaço dos campos invariantes à esquerda). As aplicações $A \in T_eG \mapsto A^E \in \mathrm{Inv}^E$ e $A \in T_eG \mapsto A^D \in \mathrm{Inv}^D$ são isomorfismos entre os espaços vetoriais correspondentes.

**Lema 1.4.8.** *Seja $X$ e $Y$ campos invariantes à esquerda num grupo de Lie $G$. Então o colchete de Lie $[X, Y]$ é invariante à esquerda. A mesma afirmação vale para campos invariantes à direita.*

**Demonstração:** Ver [31] página 59.

Em outras palavras, os espaços $\mathrm{Inv}^D$ e $\mathrm{Inv}^E$ são sub-álgebras de Lie da álgebra de Lie de todos os campos de vetores em $G$. Em particular, ambos espaços admitem estrutura de álgebra de Lie.

O espaço tangente $T_eG$ é isomorfo tanto a $\mathrm{Inv}^E$ quanto a $\mathrm{Inv}^E$. Através dos isomorfismos, o colchete de Lie restrito ao subespaço de campos invariantes induz colchetes $[.,.]_D$ e $[.,.]_E$ em $T_eG$. Estes colchetes são dados por $[A, B]_E = [A^E, B^E](e)$ e $[A, B]_D = [A^D, B^D](e)$, com $A, B \in T_eG$.

**Proposição 1.4.9.** *Sejam $A, B \in T_eG$. Então, $[A, B]_D = -[A, B]_E$.*

**Demonstração:** Ver [31] página 60.

A proposição acima mostra que as estruturas de álgebra de Lie induzidas por $\mathrm{Inv}^E$ e $\mathrm{Inv}^D$ são isomorfas.

**Definição 1.4.10.** *Seja $G$ um grupo de Lie. A álgebra de Lie de $G$, denotado por $\mathfrak{g}$, é qualquer uma das sub-álgebras isomorfas $\mathrm{Inv}^E$, $\mathrm{Inv}^D$, $(T_eG, [.,.]_E)$ ou $(T_eG, [.,.]_D)$.*

Neste trabalho, estamos interessados principalmente no grupo Unitário.

**Definição 1.4.11.** *O grupo Unitário, denotado por $U(n)$, é definido como*

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C});\; A.A^* = A^*.A = I\},$$

*onde* $A^* = \bar{A}^T$.

**Proposição 1.4.12.** *$U(n)$ é um grupo de Lie.*

**Demonstração:** Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Primeiramente, observe que $AA^*$ é uma matriz Hermitiana, isto é, $(AA^*)^* = AA^*$. Seja $\mathrm{Her}(n)$ o espaço vetorial formado por todas matrizes Hermitinas. Como $\mathrm{Her}(n)$ é subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{C})$, temos que $\mathrm{Her}(n)$ é uma sub-variedade $M_n(\mathbb{C})$, e a aplicação $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Her}(n)$, dada por $f(X) = XX^*$ é diferen-ciável. Assim $U(n) = f^{-1}(I)$. Para mostrar que $U(n)$ é uma variedade diferenciável, vamos mostrar que $I$ é valor regular de $f$, ou seja, vamos mostrar que $df_A : T_A(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow T_{f(A)}(\mathrm{Her}(n))$ é sobrejetiva para todo $A \in f^{-1}(I)$. Identificamos $T_A(M_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$ e $T_{f(A)}\mathrm{Her}(n) = \mathrm{Her}(n)$. Um cálculo direto mostra que $df_A B = BA^* + AB^*$. Então, dado $C \in \mathrm{Her}(n)$, vamos exibir $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $df_A B = C$, ou equivalentemente, $BA^* + AB^* = C$. Como $C \in \mathrm{Her}(n)$, podemos escrever $C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^*$ e então, resolvemos a equação $BA^* = \frac{1}{2}C$. Como $AA^* = I$, multiplicamos ambos os membros à direita por $A$ e obtemos $B = \frac{1}{2}CA$. Então,

$$df_A B = (\frac{1}{2}CA)A^* + A(\frac{1}{2}CA)^* = \frac{1}{2}CAA^* + \frac{1}{2}AA^*C^* = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^* = C.$$

Assim, $I$ é um valor regular e consequentemente $f^{-1}(I) = U(n)$ é uma variedade diferenciável. Portanto, $U(n)$ é um grupo de Lie. ■

**Proposição 1.4.13.** *$U(n)$ é compacto e conexo.*

**Demonstração:** Compacidade: Segue a demonstração da proposição anterior que $U(n)$ é fechado. Observe que cada elemento de $U(n)$ pode ser visto como uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ e assim segue que $U(n)$ é limitado. Pelo teorema de Heine-Borel, temos que $U(n)$ é compacto.

Conexidade: Vamos mostrar que toda matriz em $U(n)$ pode ser ligada à identidade através de um caminho contido em $U(n)$. Observe que dado $A \in U(n)$, existe uma base ortonormal formada por autovetores de $A$ tal que

$$A = T^{-1}\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})T,$$

onde $T \in U(n)$. Note que todos autovalores de $A$ tem módulo 1.

Tendo em mente as considerações acima, fixe uma matriz $A \in U(n)$ e considere a curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow U(n)$, dada por

$$\gamma(t) = T^{-1}\text{diag}(e^{it\theta_1}, \ldots, e^{it\theta_n})T,$$

onde $T \in U(n)$ é a matriz de mudança de base. Observe que $\gamma(t) \in U(n)$, para todo $t \in [0,1]$, e que $\gamma(0) = I$ e $\gamma(1) = A$. Assim $U(n)$ é conexo por caminhos e consequentemente conexo. ■

**Proposição 1.4.14.** *A álgebra de Lie de $U(n)$ é o conjunto*

$$\mathfrak{u}(n) = \{D \in M_n(\mathbb{C}); D + D^* = 0\},$$

*ou seja, o conjunto das matrizes anti-hermitianas.*

**Demonstração:** Vamos calcular o espaço tangente $T_IU(n)$. Considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U(n)$ tal que $\alpha(0) = I$ e $v = \alpha'(0) \in T_IU(n)$. Como $\alpha(t) \in U(n)$, para todo $t$, temos que

$$\alpha(t).(\alpha(t))^* = I. \tag{1.2}$$

Derivando a equação (1.2) no tempo $t = 0$, temos

$$\alpha'(0).(\alpha(0))^* + \alpha(0).(\alpha'(t))^*,$$

ou equivalentemente, $v + v^* = 0$. Portanto, $T_IU(n) \subset \mathfrak{u}(n))$.

Mostraremos agora a inclusão contrária: $\mathfrak{u}(n) \subset T_IU(n)$. Seja $X \in \mathfrak{u}(n)$ e considere a curva $\alpha(t) = e^{tX}$. Note que $\alpha(t) \in U(n),\ \forall t$. De fato,

$$\alpha(t).(\alpha(t))^* = e^{tX}.e^{tX^*} = e^{t(X+X^*)} = e^0 = I.$$

Temos também que $X \in T_IU(n)$, pois, $\alpha(0) = I$ e $\alpha'(t) = X.e^{tX}$. Fazendo $t = 0$, obtemos $\alpha'(0) = X$, o que demonstra a inclusão. Assim, $\mathfrak{u}(n) = T_IU(n)$ é a algebra de Lie de $U(n)$, com o colchete dado pelo comutador de matrizes. ■

**Observação 1.4.15.** *$U(n)$ **não é um grupo de Lie complexo**. Isso porque $\mathfrak{u}(n)$ **não** é um subespaço vetorial **complexo** de $M_n(\mathbb{C})$. De fato, dado $X \in \mathfrak{u}(n)$, observe que $iX$ em geral não pertence a $\mathfrak{u}(n)$. Tome, por exemplo, $X = diag\ (i, 0, \ldots, 0)$. Temos $X + X^* = 0$. Mas $iX = diag\ (-1, 0, \ldots, 0)$ e $(iX)^* = diag\ (-1, 0, \ldots, 0)$ e $iX + (iX)^* \neq 0$.*

# CAPÍTULO 2

# A Forma de Maurer-Cartan

O principal objetivo desse capítulo é a demonstração do Princípio da Monodromia, que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow G$ num grupo de Lie $G$ seja a "primitiva" de uma 1-forma com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Este resultado é fundamental para o desenvolvimento da Teoria de Aplicações Harmônicas em grupos de Lie, quando o domínio da aplicação é simplesmente conexo. Na última seção apresentamos alguns resultados que relacionam os conceitos de holonomia e monodromia. A principal referência para este é capítulo é [32].

## 2.1 A Forma de Maurer-Cartan

Nesta seção vamos definir a forma de Maurer-Cartan e apresentar suas principais propriedades.

**Definição 2.1.1.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $V$ espaço vetorial de dimensão finita. Uma 1-forma em $M$ com valores em $V$ é uma aplicação $\omega : TM \longrightarrow V$ tal que $\omega_p : T_pM \longrightarrow V$ é linear para todo $p \in M$.*

Uma definição mais geral é a de $p-$formas com valores num espaço vetorial $V$:

**Definição 2.1.2.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $V$ espaço vetorial de dimensão finita. Uma p-forma em $M$ com valores em $V$ é uma aplicação $\omega : TM \oplus \ldots \oplus TM \longrightarrow V$ tal que a restrição a cada fibra $\omega_p : T_pM \oplus \ldots \oplus T_pM \longrightarrow V$ é multilinear e anti-simétrica para todo $p \in M$.*

**Observação 2.1.3.** *Quando $V = \mathbb{R}$ (ou dim $V = 1$), temos as usuais formas (ou p-formas) diferenciais em $M$.*

O conjunto de todas $p$-formas em $M$ com valores em $V$ possui uma estrutura de espaço vetorial e será denotado por $A^p(M,V)$. Observe que $A^0(M,V)$ é o conjunto das funções em $M$ com valores em $V$.

Sejam $M, N$ variedades diferenciáveis e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Definimos a aplicação induzida $f^* : A(N,V) \longrightarrow A(M,V)$ por

$$(f^*\omega)_x(X_1, \dots, X_p) = \omega_{f(x)}(f_*X_1, \dots, f_*X_p),$$

onde $X_1, \dots, X_p \in T_xM$ e $f_*X_i = df_xX_i$, $\forall i = 1, \dots, p$. Observe que se $\omega$ é uma $p$-forma em $N$, então $f^*\omega$ é uma $p$-forma em $M$. Dizemos que $f^*\omega$ é o *pull-back* de $\omega$ por $f$. Em alguns casos, utilizamos a notação $f^*\omega = \omega f_*$ para escrever de forma resumida a definição da aplicação induzida.

Seja $\omega_1$ uma $p$-forma com valores em $V_1$ e $\omega_2$ uma $q$-forma com valores em $V_2$. O produto exterior de $\omega_1$ com $\omega_2$, que será denotado por $\omega_1 \wedge \omega_2$, é uma $(p+q)$-forma com valores em $V_1 \otimes V_2$, definida por

$$\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \otimes \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}),$$

onde $\sigma$ é uma permutação tal que se $r < s$ então $\sigma(r) < \sigma(s)$ sempre que $\sigma(r)$ e $\sigma(s)$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots p\}$ ou $\sigma(r)$ e $\sigma(s)$ pertencem ao conjunto $\{p+1, p+2, \dots p+q\}$.

**Teorema 2.1.4** (Diferencial Exterior)**.** *Existe um único operador $d : A^p(M,V) \longrightarrow A^{p+1}(M,v)$, definido para todo $p \in M$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

*a)* $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

*b)* $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$ *onde* $k =$grau$(\omega_1)$.

c) $d(d\omega) = 0$, ou de forma abreviada $d^2 = 0$.

d) Se $f \in A^0(M,E)$, isto é, $f$ é uma função, então $df = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

*O operador $d$ é chamado de diferencial exterior.*

**Demonstração:** Ver [32], página 58.

**Proposição 2.1.5** (Naturalidade de $d$). *Se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, então o seguinte diagrama comuta para todo $p$:*

$$\begin{array}{ccc} A^p(N,V) & \xrightarrow{d} & A^{p+1}(N,V) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ A^p(M,V) & \xrightarrow{d} & A^{p+1}(M,V) \end{array}$$

*Em outras palavras, se $\omega \in A^p(N,V)$ então vale $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.*

**Demonstração:** Ver [32], página 59.

**Lema 2.1.6.** *Seja $V$ espaço vetorial de dimensão finita, $M$ uma variedade diferenciável, $\omega$ uma 1-forma em $M$ com valores em $V$ e $X$ , $Y$ campos de vetores em $M$. Então $d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$.*

**Demonstração:** É suficiente verificar esta fórmula para $1-$formas do tipo $\omega = f\,dg$, pois toda $1-$forma é, localmente, a soma de fatores deste tipo. Então, $d\omega = df \wedge dg$ e

$$d\omega(X,Y) = df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) = X(f)Y(g) - Y(f)X(g). \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) &= X(f\,dg(Y)) - Y(f\,dg(X)) - f\,dg([X,Y]) \\ &= X(f)dg(Y) + fX(dg(Y)) - Y(f)dg(X) \\ &\quad -fY(dg(X)) - f\,dg([X,Y]) \\ &= X(f)Y(g) + fXY(g) - Y(f)X(g) \\ &\quad -fYX(g) - f[X,Y](g) \\ &= X(f)Y(g) + f[X,Y](g) - f[X,Y](g) - Y(f)X(g) \\ &= X(f)Y(g) - Y(f)X(g). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto, da igualdade entre as equações (2.1) e (2.2), concluímos a demonstração. ■

**Definição 2.1.7.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\omega_1$,$\omega_2$ 1-formas com valores em $\mathfrak{g}$. Definimos a 2-forma com valores em $\mathfrak{g}$, $[\omega_1,\omega_2]$ por $[\omega_1,\omega_2](X,Y) = [\omega_1(X),\omega_2(Y)] + [\omega_2(X),\omega_1(Y)]$. Em particular, temos $[\omega(X),\omega(Y)] = \frac{1}{2}[\omega,\omega](X,Y)$.*

Seja $G$ um grupo de Lie com algebra de Lie $\mathfrak{g} \approx T_eG$, onde $e$ é o elemento neutro de $G$.

**Definição 2.1.8.** *A* ***forma de Maurer-Cartan de G****, denotada por $\omega_G$, é uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ definida por $(\omega_G)_g(v) = (dE_{g^{-1}})_g(v)$, $v \in T_gG$.*

Note que a forma de Maurer-Cartan é uma trivialização do fibrado tangente de $G$, pois $dE_{g^{-1}}$ é um isomorfismo $\forall g \in G$.

**Proposição 2.1.9** (Equação Estrutural)**.** *Seja $\omega_G$ a forma de Maurer-Cartan de $G$ e $X, Y$ campos de vetores em $G$. Então, vale a equação estrutural de Maurer-Cartan $d\omega_G(X,Y) + [\omega_G(X), \omega_G(Y)] = 0$, ou equivalentemente, $d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0$.*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, podemos supor que $X$ e $Y$ são invariantes à esquerda. Pelo lema 2.1.6, temos a seguinte fórmula geral:

$$d\omega_G(X,Y) = X(\omega_G(Y)) - Y(\omega_G(X)) - \omega_G([X,Y]). \tag{2.3}$$

Como $X$ é invariante à esquerda, temos $(dE_g)_a(X(a)) = X(ga)$, $\forall a, g \in G$. Então

$$\omega_G(X(g)) = (dE_{g^{-1}})_g(X(g)) = X(gg^{-1}) = X(e) \text{ (constante)},$$

e portanto $X(\omega_G(Y)) = Y(\omega_G(X)) = 0$. Se $X$ e $Y$ são invariantes à esquerda, então $[X,Y]$ é invariante à esquerda e $\omega_G([X,Y]) = [X,Y](e)$. Mas $[X,Y](e) = [X(e), Y(e)]$, onde o colchete do lado direito da igualdade é o da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e então temos:

$$\omega_G([X,Y]) = [X,Y](e) = [X(e), Y(e)] = [\omega_G(X), \omega_G(Y)].$$

Assim a equação (2.3) pode ser escrita como

$$d\omega_G(X,Y) + [\omega_G(X), \omega_G(Y)] = 0,$$

ou equivalentemente,

$$d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0.$$

■

**Exemplo 2.1.10.** *Se $G = \mathbb{R}$, a forma de Maurer-Cartan é exatamente a forma $dx$. Se $G = (\mathbb{R}^+, .)$ temos $e = 1$ e $\omega(x,v) = (E_{x^{-1}})_*(v) = \frac{1}{x}\,dx(v)$, onde o operador $dx$ é o operador usual restrito a $\mathbb{R}^+$.*

**Exemplo 2.1.11.** $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. *O espaço total do fibrado tangente é dado por* $TS^1 = \left\{(e^{i\theta}, ire^{i\theta}); r, \theta \in \mathbb{R}\right\}$. *Em particular,* $\mathfrak{g} = T_eS^1 = \{(1, ir); r \in \mathbb{R}\}$. *A ação a esquerda de* $S^1$ *em* $TS^1$ *é dada por*

$$\begin{array}{cccccc} S^1 & \times & TS^1 & & \to & TS^1 \\ (e^{i\varphi} & , & (e^{i\theta}, ire^{i\theta})) & & \mapsto & (e^{i(\theta+\varphi)}, rie^{i(\theta+\varphi)}). \end{array}$$

*E então, a forma de Maurer-Cartan de* $G$ *é*

$$\omega_G(e^{i\theta}, ire^{i\theta}) = (dE_{e^{-i\theta}})_{e^{i\theta}}(ire^{i\theta}) = (1, ir).$$

**Exemplo 2.1.12.** $G = GL(n)$. *A forma de Maurer-Cartan em um ponto* $v \in T_gG$ *é*

$$\omega(v) = (dE_{g^{-1}})_g(v) = g^{-1}v \in T_eG.$$

*A notação clássica da forma de Maurer-Cartan em* $GL(n)$ *é* $g^{-1}dg$. *Vamos agora escrever explicitamente a forma de Maurer-Cartan em* $GL(2)$ :
*Seja* $g = (x_{ij})$ *onde* $x_{ij}$ *são funções coordenadas em* $GL(2)$. *Então* $dg = (dx_{ij})$ *e*

$$g^{-1}dg = (x_{ij})^{-1}(dx_{ij}).$$

*Escrendo as matrizes, temos:*

$$\begin{aligned} \omega_{GL(2)} &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_{22}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} & \frac{-x_{12}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} \\ \frac{-x_{21}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} & \frac{x_{11}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_{22}dx_{11}-x_{12}dx_{21}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} & \frac{x_{22}dx_{12}-x_{12}dx_{22}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} \\ \frac{-x_{21}dx_{11}+x_{11}dx_{21}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} & \frac{-x_{21}dx_{12}-x_{11}dx_{22}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Esta é a representação explícita de* $\omega$ *como uma matriz* $2 \times 2$ *de 1-formas definida em* $GL(2)$ *que é construída a partir das funções coordenadas em* $M_2$ *restrito a* $GL(2)$. *Através de uma construção análoga, obtemos a forma de Maurer-Cartan de* $GL(n)$.

## 2.2 A derivada de Darboux

Seja $G$ um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\omega_G$ a forma de Maurer-Cartan de $G$, $M$ uma variedade diferenciável e $f : M \longrightarrow G$ uma aplicação diferenciável.

**Definição 2.2.1.** *A derivada de Darboux (à esquerda) de $f$ é a 1-forma em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$ definida por $\alpha = f^*\omega_G$ . A aplicação $f$ é chamada de integral ou primitiva de $\omega_G$.*

**Lema 2.2.2.** *Seja $f : M \longrightarrow G$ uma aplicação diferenciável e $\alpha = f^*\omega_G$ a derivada de Darboux de $f$. Então $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$.*

**Demonstração:** Dado $p \in M$ e $X, Y \in TM$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\alpha_p\,, \alpha_p](X,Y) &= [\alpha_p\,(X), \alpha_p\,(Y)] \\
&= [(f^*\omega_G)_p\,(X), (f^*\omega_G)_p\,(Y)] \\
&= [\omega_{G\,f(p)}(f_*\,X), \omega_{G\,f(p)}(f_*\,X)] \\
&= \frac{1}{2}[\omega_{G\,f(p)}\,, \omega_{G\,f(p)}](f_*\,X, f_*\,Y) \\
&= -\,d\omega_{G\,f(p)}(f_*\,X, f_*\,Y)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d\alpha_p\,(X,Y) = d(f^*\omega_G)_p\,(X,Y) = f^*(d\omega_G)_p\,(X,Y) = d\omega_{G\,f(p)}(f_*\,X, f_*\,Y)$$

e o resultado segue. ■

O próximo resultado nos dá informações sobre a unicidade da primitiva. Antes, porém, enunciamos um lema técnico.

**Lema 2.2.3.** *Sejam $f_1, f_2 : M \longrightarrow G$ e defina $h(x) = f_1(x).f_2(x)^{-1}$. Então*

$$h^*\omega_G = Ad(f_2(x))(f_1^*\omega_G - f_2^*\omega_G),$$

*onde $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta do grupo $G$.*

**Demonstração:** Ver [32] página 114.

**Teorema 2.2.4** (Unicidade da primitiva)**.** *Seja $M$ uma variedade conexa e $f_1, f_2 : M \longrightarrow G$ aplicações diferenciáveis tal que $f_1^*\omega_G = f_2^*\omega_G$. Então, exite um elemento $C \in G$ (a constante de integração) tal que $f_2(x) = C\,.\,f_1(x)$ para todo $x \in M$.*

**Demonstração:** Considere a aplicação $h : M \longrightarrow G$ dada por $h(x) = f_2(x).f_1(x)^{-1}$. Pelo lema 2.2.3, $h^*(\omega_G) = Ad(f_1)(f_2^*\omega_G - f_1^*\omega_G)$. Por hipótese, $f_1^*\omega_G = f_2^*\omega_G$ e assim $h^*\omega_G = 0$. Pela definição do *pull-back* de uma forma, temos $h^*\omega_G = \omega_G h_* = 0$ e vemos que $h_* : TM \longrightarrow TG$ induz a aplicação nula em cada espaço tangente. Como $M$ é conexa, temos que $h$ é constante, ou seja, $h(x) = C$ para todo $x \in M$, onde $C \in G$. Em particular, $f_2(x) = C\,.\,f_1(x)$ para todo $x \in M$. ■

## 2.3 Princípio da Monodromia

Nesta seção, vamos caracterizar 1-formas $\omega$ com valores em $\mathfrak{g}$ que são derivadas de Darboux. Primeiramente, vamos mostrar uma versão local do Princípio da Monodromia.

A demonstração que apresentaremos é devida a E.Cartan (citado em [32]). O principal ingrediente utilizado na demonstração é o Teorema de Frobenius. Vamos enunciar dois lemas que tratam sobre a teoria de distribuições utilizando formas diferencias com valores em espaços vetoriais, cuja demonstração pode ser encontrada em [32].

**Lema 2.3.1.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $\omega$ uma 1-forma diferencial com valores num espaço vetorial $V$. Suponha que $\dim\ker\omega_x$ é constante para todo $x \in M$. Então, $\ker\omega_x$ é uma distribuição.*

**Demonstração:** Ver [32], página 80.

**Lema 2.3.2.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $\omega$ uma 1-forma diferencial com valores num espaço vetorial $V$. Suponha que $n = \dim\ker\omega_x$ é constante para todo $x \in M$ e seja $D = \{\ker\omega_x; x \in M\}$ a distribuição determinada por $\omega$. Então*

$$D \text{ é integrável } \Leftrightarrow d\omega(X,Y) = 0 \text{ sempre que } \omega(X) = \omega(Y) = 0.$$

**Demonstração:** Ver [32], página 81.

**Teorema 2.3.3** (Versão Local). *Seja $M$ uma variedade diferenciável, $G$ um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\omega_G$ a forma de Maurer-Cartan de $G$. Seja $\omega$ uma 1-forma em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$ que satisfaz a equação estrutural $d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0$. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U$ de $p$ e uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow G$ tal que $\omega|_U = f^*\omega_G$.*

**Demonstração:** Sejam $\pi_G : M \times G \longrightarrow G$ e $\pi_M : M \times G \longrightarrow M$ as projeções canônicas. Definimos a forma $\Omega = \pi_M^*(\omega) - \pi_G^*(\omega_G)$ e $\mathcal{D} = \ker\Omega$. Primeiramente, vamos mostrar que $\mathcal{D}$ é realmente uma distribuição. Fixemos um ponto $(p,g) \in M \times G$ e definimos $\mathcal{D}_{(p,g)} = \{(v,u) \in T_pM \times T_gG; \omega(v) = \omega_G(u)\}$. Vamos mostrar que

$$(d\pi_M)_{(p,g)}|_{\mathcal{D}(p,g)} : \mathcal{D}_{(p,g)} \longrightarrow T_pM$$

é um isomorfismo. Tome $(v,u) \in \mathcal{D}_{(p,g)}$ tal que $(d\pi_M)_{(p,g)}(v,u) = 0$. Então $v = 0$ e como $\omega(v) = \omega_G(u)$, se $(v,u) \in \mathcal{D}$, temos que $\omega_G(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ e assim $(v,u) = 0$ e então $(d\pi_M)_{(p,g)}|_{\mathcal{D}(p,g)}$ é injetiva. Agora, se $v \in T_pM$, então $(v, \omega_G^{-1}(\omega(v))_p) \in \mathcal{D}_{(p,g)}$ (lembre que $\omega_G$, quando restrita a cada fibra é isomorfismo) e portanto $(d\pi_M)_{(p,g)}|_{\mathcal{D}(p,g)}$ é sobrejetiva. Em particular, verificamos que $\ker\omega$ tem posto constante igual a $\dim M$ e portanto, pelo lema 2.3.1, $\mathcal{D}$ é uma distribuição.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{D}$ é integrável. Calculando a derivada exterior de $\Omega$ e utilizando a hipótese que $\omega$ satisfaz a equação estrutural $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= d\pi_M^*(\omega) - d\pi_G^*(\omega_G) \\
&= \pi_M^*(d\omega) - \pi_G^*(d\omega_G) \\
&= \pi_M^*(-\frac{1}{2}[\omega, \omega]) - \pi_G^*(-\frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G]) \\
&= -\frac{1}{2}[\pi_M^*(\omega), \pi_M^*(\omega)] + \frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_G), \pi_G^*(\omega_G)].
\end{aligned}$$

Fazendo $\pi_M^*(\omega) = \pi_G^*(\omega_G) + \Omega$ e observando que se $\omega_p$ é uma $p-$forma e $\omega_s$ é uma $s-$forma, ambas com valores em $\mathfrak{g}$, então $[\omega_p, \omega_s] = (-1)^{rs+1}[\omega_s, \omega_p]$ (condição de simetria), temos:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= -\frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_G) + \Omega, \pi_G^*(\omega_G) + \Omega] + \frac{1}{2}[\pi_G^*\omega_G, \pi_G^*\omega_G] \\
&= -\frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_G), \pi_G^*(\omega_G)] - \frac{1}{2}[\pi_G^*\omega_G, \Omega] - \frac{1}{2}[\Omega, \pi_G^*(\omega_G)] - \frac{1}{2}[\Omega, \Omega] + \frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_G), \pi_G^*(\omega_G)] \\
&= -\frac{1}{2}[\pi_G^*(\omega_G), \Omega] - \frac{1}{2}[\Omega, \pi_G^*(\omega_G)] - \frac{1}{2}[\Omega, \Omega].
\end{aligned}$$

Então $d\Omega(X, Y) = 0$ sempre que $\Omega(X) = \Omega(Y) = 0$ e pelo lema 2.3.2, a distribuição $\mathcal{D} = \ker\omega$ é integrável.

Vamos agora construir, para cada $p \in M$, uma vizinhança $U$ e uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow G$ tal que $\omega|_U = f^*\omega_G$. Seja $\mathcal{L}$ a variedade integral maximal com respeito a distribuição $\mathcal{D}$ em torno do ponto $(p, g) \in M \times G$, isto é, $T_{(p,g)}\mathcal{L} = \mathcal{D}_{(p,g)}$. Já vimos que $(d\pi_M)_{(p,g)}|_{\mathcal{D}(p,g)} : \mathcal{D}_{(p,g)} \longrightarrow T_pM$ é um isomorfismo. Portanto, $\pi_M|_{\mathcal{L}}$ é um difeomorfismo local entre uma vizinhança de $(p, g)$ e uma vizinhança $U$ de $p \in M$. Seja $F : U \longrightarrow \mathcal{L}$ a aplicação inversa. Desde que $\pi_M \circ F = \mathrm{Id}_U$, $F$ deve ter a forma $F(p) = (p, f(p))$, onde $f : U \longrightarrow G$ é diferenciável. Note que $F^*\Omega = \Omega F_* = 0$, pois a imagem de $F$ é tangente a distribuição na qual $\Omega$ é identicamente nula. Assim temos:

$$\begin{aligned}
0 &= F^*(\Omega) = F^*(\pi_M^*(\omega)) - F^*(\pi_G^*(\omega_G)) \\
&= (\pi_M F)^*(\omega) - (\pi_G F)^*(\omega_G) \\
&= \omega - f^*(\omega_G),
\end{aligned}$$

e assim concluímos a demonstração. ■

O resultado principal deste capitulo é a caracterização de 1-formas $\omega$ com valores em $\mathfrak{g}$ que são derivadas de Darboux definidas globalmente. Neste caso, somente a equação estrutural não é suficiente para garantir a existência da derivada. É necessário também informações adicionais sobre a topologia de $M$, que aparecem através da representação da monodromia. Mais especificamente, vamos mostrar que uma 1-forma $\omega$ com valores em $\mathfrak{g}$ que satisfaz a equação estrutural determina um homomorfismo de grupos $\Phi_\omega : \pi_1(M, b) \longrightarrow G$ chamado de representação da monodromia. Uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ é a derivada de Darboux (global) de alguma aplicação $f : M \longrightarrow G$ se, e somente se, a representação da monodromia é trivial.

Antes, iremos provar alguns resultados preliminares que auxiliarão na demonstração do teorema principal. Uma aplicação $f : I = [0,1] \longrightarrow M$ tal que $f(0) = p$ e $f(1) = q$ sera denotada por $f : (I, 0, 1) \longrightarrow (M, p, q)$. Usaremos os seguintes resultados da topologia diferencial:

1. Seja $M$ uma variedade diferenciável e $I = [0,1]$. Então, toda aplicação contínua $\lambda : (I, 0, 1) \longrightarrow (M, p, q)$ é homotópica a uma aplicação diferenciável.

2. Se $\lambda_1, \lambda_2 : (I, 0, 1) \longrightarrow (M, p, q)$ são aplicações continuamente homotópicas, então elas são diferenciavelmente homotópicas.

Primeiramente, consideremos o caso particular em que $\dim M = 1$. Neste caso, a equação estrutural é satisfeita automaticamente, pois qualquer 2-forma numa variedade 1-dimensional é identicamente nula. Vamos assumir que $M = I = [a, b]$. Assim, temos o seguinte resultado de existência global:

**Teorema 2.3.4.** *Seja $\alpha$ uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$, definida em $I = [a, b]$. Então, existe uma única aplicação $f : (I, a) \longrightarrow (G, g)$ com derivada de Darboux $\alpha$, isto é, $\alpha = f^*(\omega_G)$.*

**Demonstração:** Pelo teorema 2.2.4 se a aplicação $f$ existir, ela será única. Pelo teorema de existência local, para cada ponto $p \in I$, existe um intervalo aberto $U$ talque $\alpha$ é a derivada de Darboux de alguma aplição em $G$. Estes abertos formam uma cobertura aberta de $I$. Como $I$ é compacto, existem finitos intervalos abertos $U_i$, $1 \leq i \leq n$ que cobrem $I$ e em cada intervalo $U_i$, $\alpha$ é a derivada de Darboux de um aplicação $\tilde{f}_i : U_i \longrightarrow G$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $U_i \cap U_j = \emptyset$ a menos que $|i - j| \leq 1$. Escolha $t_i \in U_i \cap U_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ e definimos $f_1 : U_1 \longrightarrow G$ por $f_1(x) = g(\tilde{f}_1(a))^{-1}\tilde{f}_1(x)$, e $f_{i+1} : U_{i+1} \longrightarrow G$ por $f_{i+1}(x) = \tilde{f}_i(t_i)(\tilde{f}_{i+1}(t_i))^{-1}\tilde{f}_{i+1}(x)$. Claramente, $f_1(a) = g$ e $f_{i+1}(t_i) = f_i(t_i)$. Note que $f_i$ também é uma primitiva de $\alpha$. Logo, pela unicidade da primitiva, $f_{i+1} = f_i$ em $U_i \cap U_{i+1}$. Definimos então $f(t) = f_i(t)$, $t \in U_i$ e obtemos uma aplicação

$f : I \longrightarrow G$ tal que $f(a) = g$ e $f^*(\omega_G) = \alpha$. ■

**Definição 2.3.5.** *A única aplicação diferenciável $f : I \longrightarrow G$ satisfazendo $f(a) = g$ e $f^*(\omega_G) = \alpha$ é chamada de desenvolvimento de $\alpha$ em $G$ ao longo de $I$ iniciado em $g$.*

**Definição 2.3.6.** *Seja $I = [a, b]$, $M$ uma variedade de dimensão arbitrária e $\alpha$ uma 1-forma diferenciável em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$. Dado um caminho diferenciável por partes $\sigma : (I, a, b) \longrightarrow (M, p, q)$, seja $\tilde{\sigma} : (I, a) \longrightarrow (G, g)$ o desenvolvimento da 1-forma $\sigma^*(\alpha)$ tal que $\tilde{\sigma}^*(\omega_G) = \sigma^*(\alpha)$. Dizemos que $\tilde{\sigma}$ é o desenvolvimento de $\alpha$ ao longo de $\sigma$ iniciado em $g$.*

Em geral, o ponto final $\tilde{\sigma}(1)$ do desenvolvimento não depende somente do ponto $q$, mas do caminho ligando $p$ a $q$. Vamos mostrar que quando a 1-forma $\alpha$ satisfaz a equação estrutural $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$, então $\tilde{\sigma}(1)$ depende somente da classe de homotopia de $\sigma$.

**Teorema 2.3.7.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $\sigma_0, \sigma_2 : (I, a, b) \longrightarrow (M, p, q)$ caminhos diferenciáveis e homotópicos. Se $\alpha$ é uma 1-forma diferenciável em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$ que satisfaz a equação estrutural, então seus desenvolvimentos iniciando em $g$, ao longo de $\sigma_0$ e $\sigma_1$ tem o mesmo ponto final.*

**Demonstração:** Seja $h : (I \times I, a \times I, b \times I) \longrightarrow (M, p, q)$ a homotopia entre $\sigma_0$ e $\sigma_1$. Como $\alpha$ é uma 1-forma que satisfaz a equação estrutural, $h^*\alpha$ também satisfaz a equação estrutural. Pelo teorema de existência local, cada ponto de $I \times I$ pertence a um aberto $W$ (que será um "quadrado" $U \times V$ na topologia produto) no qual $h^*\alpha$ é a derivada de Darboux de alguma função $f_1 : W \longrightarrow G$. Dado um ponto $t \in I$, o conjunto compacto $t \times I$ é coberto por um número finto desses abertos e utilizando um argumento análogo ao utilizado para intervalos no teorema 2.3.4, obtemos um conjunto aberto $I \times U$, com $U$ um intervalo aberto, no qual $h^*\alpha$ é a derivada de Darboux de alguma função $f_2 : I \times U \longrightarrow G$. Com uma análise similar ao teorema 2.3.4, podemos construir uma aplicação $H : I \times I \longrightarrow G$ tal que $H(a, a) = g$ e $H^*(\omega_G) = h^*(\alpha)$. Desde que $h(b, u) = q$ é constante para $u \in I$, segue que $h^*(\alpha) = H^*(\omega_G)$ é identicamente nula em $b \times I$ e logo $H$ é constante em $b \times I$. Em particular, $H(b, a) = H(b, b)$ e o desenvolvimento de $\alpha$ ao longo de $\sigma_0$ e $\sigma_1$ terminam no mesmo ponto de $G$. ■

Seja $I = [0, 1]$, $b \in M$ um ponto base fixo e $\lambda : (I, 0, 1) \longrightarrow (M, b, b)$ um caminho diferenciável fechado (laço). Pelo último teorema, podemos desenvolver $\alpha$ ao longo de $\lambda$ iniciando em $e$ e o ponto final $\Phi(\lambda) = \tilde{\lambda}(1) \in G$ do desenvolvimento não depende do laço $\lambda$, mas da sua classe de homotopia. Assim, temos uma aplicação bem definida $\Phi_\alpha : \pi_1(M, b) \longrightarrow G$.

**Definição 2.3.8.** *A aplicação $\Phi_\alpha : \pi_1(M,b) \longrightarrow G$ descrita acima é chamada de representação da monodromia de $\alpha$. O conjunto $\Gamma = \Phi_\alpha(\pi_1(M))$ é chamado de grupo de monodromia de $M$.*

**Proposição 2.3.9.** *A representação da monodromia é um homomorfismo de grupos.*

**Demonstração:** Ver [32], página 122.

Lembre-se que $M$ é conexa então $M$ é conexa por caminhos. Dado dois pontos $b_0$ e $b_1$, seja $\sigma : (I,0,1) \longrightarrow (M,b_0,b_1)$ um caminho ligando $b_0$ a $b_1$. Então a aplicação

$$c_\sigma : \pi_1(M,b_1) \longrightarrow \pi_0(M,b_0)$$

dada por $\lambda \mapsto \sigma \star \lambda \star \sigma^{-1}$, (onde $\sigma^{-1}$ é o caminho ligando $b_1$ a $b_0$) é um isomorfismo de grupos. Em outras palavras, o grupo fundamental de com ponto base $b_0$ é isomorfo ao grupo fundamental com ponto base $b_1$. Seja $\tilde{\sigma} : (I,0) \longrightarrow (G,e)$ o desenvolvimento de uma 1-forma $\alpha$ em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$ ao longo de $\sigma$ iniciado em $e$. Então, temos a aplicação $c_{\tilde{\sigma}} : G \longrightarrow G$ dada por $g \mapsto \tilde{\sigma}(1)g\tilde{\sigma}(1)^{-1}$.

**Lema 2.3.10.** *Sejam $\Phi_j : \pi_1(M,b_j) \longrightarrow G,\ j = 0,1$ as representações da monodromia com respeito a dois pontos base $b_0$ e $b_1$ e $\sigma : (I,0,1) \longrightarrow (M,b_0,b_1)$ um caminho ligando $b_0$ a $b_1$. Então o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M,b_0) \arrow[r, "\Phi_0"] & G \\
\pi_1(M,b_1) \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[u, "c_\sigma"] & G \arrow[u, "c_{\tilde{\sigma}}"']
\end{tikzcd}$$

**Demonstração:** Ver [32], página 123.

**Proposição 2.3.11.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável conexa, $b \in M$ , $f : (M,b) \longrightarrow (G,g)$ uma aplicação diferenciável e $\alpha = f^*\omega_G$. Então para qualquer curva $\sigma : (I,0,1) \longrightarrow (M,b,x)$, o desenvolvimento iniciando em $g$, termina em $f(x)$.*

**Demonstração:** Note que $(f \circ \sigma)^*\omega_G = \sigma^* f^* \omega_G = \sigma^*\alpha$, e pela unicidade do desenvolvimento, o desenvolvimento de $\alpha$ ao longo de $\sigma : (I,0,1) \longrightarrow (M,b,x)$ é exatamente $f \circ \sigma$ e assim $f(\sigma(1)) = f(x)$. ■

**Corolário 2.3.12.** *A representação da monodromia de uma derivada de Darboux é trivial.*

**Demonstração:** Defina $\alpha = f^*\omega_G$, onde $f : (M, b) \longrightarrow (G, g)$. Se necessário, substituímos $f$ por $E_{g^{-1}} \circ f$. Note que isto não altera a derivada de Darboux. De fato,

$$(E_{g^{-1}} \circ f)^*\omega_G = f^* \circ E^*_{g^{-1}}\omega_G = f^*(\omega_G(E_{g^{-1}})_*) = f^*(\omega_G) = \alpha,$$

pois a forma de Maurer-Cartan é invariante à esquerda. Assumimos então que $f : (M, b) \longrightarrow (G, e)$. Para todo laço $\lambda : (I, 0, 1) \longrightarrow (M, b, b)$ a proposição anterior diz que o desenvolvimento iniciado em $e$ ao longo de $\lambda$ termina em $f \circ \lambda(1) = f(b) = e$. Assim $\Phi_\alpha([\lambda]) = e$. ■

Vamos agora demonstrar o principal resultado desta seção, conhecido como Princípio da Monodromia.

**Teorema 2.3.13** (Principio da Monodromia)**.** *Seja $G$ um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $M$ uma variedade diferenciável conexa e $\alpha$ uma 1-forma em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$. Então $\alpha$ é a derivada de Darboux de alguma aplicação $f : M \longrightarrow G$ se, e somente se, $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$ e a representação da monodromia $\Phi_\alpha : \pi_1(M, b) \longrightarrow G$ é trivial.*

**Demonstração:** A implicação ($\Rightarrow$) é conseqüência imediata do lema 2.2.2 e do corolário 2.3.12. Para demonstrar a implicação ($\Leftarrow$), definimos $f : (M, b) \longrightarrow (G, e)$ pondo $f(x) =$ ponto final do desenvolvimento de $\alpha$ ao longo de qualquer caminho ligando $b$ até $x$. Pela invariância homotópica do desenvolvimento e pela boa definição da representação da monodromia, a função $f$ está bem definida. Vamos mostrar que $\alpha = f^*\omega_G$.

Note que o valor de $f(x)$ pode ser obtido da seguinte forma: se $x_0 \in M$, escolhemos um caminho que liga $b$ até $x_0$ e outro caminho que liga $x_0$ até $x$. Então, se o desenvolvimento do primeiro caminho inicia em $e$ e termina em $g_0$ e o desenvolvimento do segundo caminho inicia em $e$ e termina em $g$, o desenvolvimento do caminho composto inicia em $e$ e termina em $g_0 g$.

Como $\alpha$ satisfaz a equação estrutural, o teorema local de existência garante que para cada ponto $x_0 \in M$, existe um aberto $U$ que contém $x_0$ e também uma aplicação $f_U : U \longrightarrow G$ satisfazendo $f_U^*\omega_G = \alpha$. Se necessário, efetuamos a $f_U$ uma translação à esquerda por algum elemento de $G$ (lembre-se que a forma de Maurer-Cartan é invariante à esquerda) e assim podemos supor sem perda de generalidade que $f_U(x_0) = f(x_0)$. Agora, o desenvolvimento de $\alpha$ iniciado em $f(x_0)$ ao longo da curva $\sigma : (I, 0, 1) \longrightarrow (U, x_0, x)$ termina em $f_U(x)$. Pela observação feita no parágrafo anterior, o desenvolvimento também termina em $f(x)$, e assim, $f_U(x) = f(x)$ para todo $x \in U$. Então, $f^*\omega_G = f_U^*\omega_G = \alpha$ em $U$, e como $U$ é um aberto arbitrário, concluímos a demonstração. ■

## 2.4 Holonomia

Nesta seção vamos introduzir o conceito de Holomonia de uma conexão e enunciar um resultado que garante que os conceitos de holomonia e monodromia estão relacionados para fibrados com conexão plana.

Seja $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial com uma conexão $\nabla$ e $c : [0, 1] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável. O fibrado $c^*\xi$ possui uma conexão induzida, que ainda designamos por $\nabla$. Uma seção $s$ do fibrado $c^*\xi$ não é nada mais do que uma seção de $\xi$ ao longo de $c$, isto é, uma aplicação diferenciável $s : [0, 1] \longrightarrow E$ tal que $\pi(s(t)) = c(t)$. A derivada covariante de uma seção ao longo da curva $c$ é a seção ao longo de $c$ dada por

$$\frac{Ds}{Dt} = \nabla_{\frac{d}{dt}} s.$$

**Definição 2.4.1.** *Dizemos que uma seção é paralela se sua derivada coveriante é nula, isto é,* $\frac{Ds}{Dt} = 0$.

**Lema 2.4.2.** *Dada uma curva* $c : [0, 1] \longrightarrow M$ *e um vetor na fibra* $v_0 \in \pi^{-1}(c_0)$*, existe uma única seção* $s$ *ao longo de* $c$ *que é paralela e tem condição inicial* $v_0$*.*

Nas condições do lema acima, dizemos que os vetores $s(t) \in \pi^{-1}(c(t))$ são obtidos por *transporte paralelo ao longo de* $c$. Designamos por $\tau_t : \pi^{-1}(c(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(c(t))$ a operação de transporte paralelo, definido por $\tau_t(v_0) = s(t)$.

**Proposição 2.4.3.** *Seja* $\xi = (E, \pi, M)$ *um fibrado vetorial com conexão* $\nabla$ *e* $c : [0, 1] \longrightarrow M$ *uma curva diferenciável. Então, o transporte paralelo ao longo de* $c$ *é um isomorfismo linear.*

**Demonstração:** Como a equação diferencial que define o tranporte paralelo é linear, segue que $\tau_t$ é linear. Por outro lado, $\tau_t$ é invertível, pois sua inversa é o transporte paralelo ao longo da curva $c : [0, t] \longrightarrow M$, percorrida em sentido contrário. ■

Passamos agora aos grupos de Holonomia. Iniciamos com um fibrado $\xi = (E, \pi, M)$ com conexão $\nabla$. Para cada ponto $x \in M$, denotamos $C(x)$ o conjunto de todos os laços diferenciáveis com ponto base $x$, isto é $C(x) = \{c : [0, 1] \longrightarrow M;\ c \in C^\infty;\ c(0) = c(1) = x\}$. Observe que se $\alpha$ e $\beta$ pertencem a $C(x)$, então $\alpha.\beta$ (concatenação) também pertence a $C(x)$. Seja $\alpha \in C(x)$. Então o transporte paralelo ao longo de $\alpha(t)$ fornece o isomorfismo linear $H_x(\alpha) = \tau_1 : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x)$ (observe que $H_x(\alpha.\beta) = H_x(\alpha) \circ H_x(\beta)$). O conjunto de todos os isomorfismos desta forma formam um grupo, chamado de *grupo de holonomia de* $\nabla$ *com ponto base* $x$. e será denotado por $\Phi$.

**Lema 2.4.4.** *Se $\alpha$, $\beta \in C(x)$ são laços homotópicos, então $H_x(\alpha) = H_x(\beta)$.*

**Demonstração:** Ver [14]. ■

Seja $C^0(x) \subset C(x)$ o conjunto de todos os laços com ponto base $x$ que são homotópicos a zero. O subgrupo de holonomia restrito $\Phi^0(x) \subset \Phi(x)$ é o subgrupo do grupo de holonomia consistindo de transporte paralelo de todas curvas $\alpha \in C^0(x)$.

**Teorema 2.4.5.** *Seja $M$ uma variedade conexa e paracompacta e $\xi = (E, \pi, M)$ um fibrado vetorial com conexão $\nabla$. Sejam $\Phi(x)$ e $\Phi^0(x)$ os grupos de holonomia e o grupo de holonomia restrito da conexão $\nabla$, respectivamente. Então $\Phi^0(x)$ é um subgrupo normal de $\Phi(x)$*

**Demonstração:** Ver [19]. ■

Observe que uma 1-forma em $M$ com valores num espaço vetorial $V$, pode ser visto como uma seção no fibrado trivial $M \times V$. Observe ainda que se $\alpha$ é uma 1-forma em $M$ com valores em $V$, então a conexão $\nabla = d + \alpha$ é plana se, e somente se, $\alpha$ satisfaz a equação de estrutura $d\alpha + [\alpha, \alpha] = 0$ e esta equação é a base para construção do princípio da monodromia. O próximo resultado estabelece a conexão entre os conceitos de holonomia e monodromia:

**Teorema 2.4.6.** *Seja $\xi = (E, \phi, M)$ um fibrado vetorial com conexão $\nabla$ e $x \in M$.*

*a) se a conexão $\nabla$ de $\xi$ é plana, então $\Phi(x)$ é (isomorfo a) o grupo de monodromia de $M$ e $\Phi^0(x)$ é trivial.*

*b) Existe um epimorfismo canônico $\pi_1(M, x) \longrightarrow \Phi(x)/\Phi^0(x)$ (no caso de fibrados com conexão plana, esta será a representação da monodromia).*

**Demonstração:** Ver [32] ou [19]. ■

# CAPÍTULO 3

# Aplicações Harmônicas em Grupos de Lie

Iniciamos este capítulo com uma revisão sobre os principais resultados da teoria de aplicações harmônicas, estabelecendo a linguagem e os principais resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Na segunda parte, estudamos o caso particular de aplicações harmônicas onde o contra-domínio é um grupo de Lie.

## 3.1 Revisão sobre Aplicações Harmônicas

Nesta seção iremos revisar os principais resultados referentes à aplicações harmônicas utilizadas no decorrer deste trabalho. Terminanos a seção estabelecendo as primeiras relações entre aplicações harmônicas e holomorfas. As principais referências aqui são [9], [10], [11].

Nesta seção, $(M^m, g)$ e $(N^n, h)$ serão variedades riemannianas compactas, conexas e orientáveis. Seja $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável.

**Definição 3.1.1.** *A densidade da energia de $\phi$ é a função $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$. O funcional energia $E : C^\infty(M, N) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por*

$$E(\phi) = \int_M e(\phi)\nu_g.$$

*O número $E(\phi)$ é chamado de energia de $\phi$.*

**Observação 3.1.2.** *1. $d\phi$ pode ser visto com uma seção no fibrado $\Lambda^1(\phi^{-1}TN) = T^*M \otimes \phi^{-1}TN$ (isto é, $d\phi$ é uma 1-forma com valores em $\phi^{-1}TN$).*

*2. $|d\phi|$ é a norma de Hilbert-Shimidt (produto tensorial) da aplicação linear $d\phi(x)$.*

*3. Note que para qualquer aplicação $\phi : M \longrightarrow N$, temos $E(\phi) \geq 0$ e $E(\phi) = 0$ se, e somente se, $\phi$ é constante.*

**Definição 3.1.3** (Aplicação Harmônica)**.** *Uma aplicação diferenciável é dita harmônica se é um ponto crítico do funcional energia.*

Vamos descrever o significado de "ponto crítico do funcional energia": dado $v \in C^\infty(M, \phi^{-1}TN)$, consideramos a família de aplicações $\phi_t$ tal que $\phi_0 = \phi$ e $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = v$ (por exemplo, $\phi_t(x) = exp_{\phi(x)} tv$). Então, $\phi$ é harmônica se, e somente se, $D_v E(\phi) = \frac{dE(\phi_t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

**Definição 3.1.4.** *Dada uma aplicação diferenciável $\phi : M \longrightarrow N$, a segunda forma fundamental $\beta_\phi$ é uma seção no fibrado $T^*M \otimes T^*M \otimes \phi^{-1}TN$ (forma bilinear com valores em $\phi^{-1}TN$) definida por*

$$\beta_\phi(X, Y) = \nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi \cdot Y - d\phi \cdot (\nabla_X^M Y),$$

*onde $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ e $\nabla$ é a divergência generalizada.*

**Definição 3.1.5.** *Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ é totalmente geodésica se $\beta_\phi \equiv 0$.*

**Proposição 3.1.6.** *Uma aplicação diferenciável $\phi : M \longrightarrow N$ é harmônica se, e somente se, $\phi$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$, onde $\tau(\phi) = traço \nabla d\phi = traço \beta_\phi$ é uma seção no fibrado $\phi^{-1}TN$ chamada campo de tensão de $\phi$.*

**Demonstração:** Ver [9], página 14.

Dado $p \in M^m$, seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em $T_pM$. Então, a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita como

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}^{\phi^{-1}TN} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i)). \tag{3.1}$$

Além do mais, se o referencial provém de um sistema normal de coordenadas centrado em $p$ temos que $d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i) = 0$.

Aplicações harmônicas surgem naturalmente em geometria diferencial e em aplicações, especialmente na física-matemática. A seguir, apresentamos alguns exemplos de aplicações harmônicas:

- **Aplicação constante** $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ e a **aplicação identidade** $\phi : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ são trivialmente aplicações harmônicas;

- **Geodésicas.** Uma curva suave em $(N, h)$, isto é, uma aplicação $\phi : A \longrightarrow (N, h)$, onde $A$ é uma aberto de $\mathbb{R}$ ou é o círculo $S^1$ é harmônica se, e somente se, $\phi$ é uma geodésica parametrizada linearmente(isto é, parametrizado por um múltiplo constante do comprimento de arco). Neste caso, a equação de Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$ se reduz a $\nabla_{\dot{\phi}}\dot{\phi} = 0$. Mais geralmente, uma aplicação totalmente geodésica é harmônica. De fato, temos
$$\tau(\phi) = \text{traço}\nabla d\phi = \text{traço}\beta_\phi = 0.$$
Assim, por exemplo, a inclusão $i : S^{n-1} \longrightarrow S^n$ pelo equador é harmônica. Vale ressaltar que aplicações totalmente geodésica são muito raras;

- **Aplicações Harmônicas entre espaços euclidianos.** Uma função $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $A$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, é harmônica se, e somente se, é solução da equação de Laplace $\Delta\phi = 0$, onde
$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}, \quad (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$
Mais geralmente, uma aplicação $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é harmônica se, e somente se, cada componente é uma função harmônica;

- **Aplicações Holomorfas** entre variedades Kähler são harmônicas. Veja por exemplo [9];

- **Aplicações Conforme entre superfícies.** Uma aplicação diferenciável $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é dita conforme se para todo $p \in M$, temos que $d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}N$ é uma transformação linear conforme, isto é, existe um número $\lambda(p) \neq 0$ tal que
$$h(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)) = \lambda(p)^2\, g(X, Y), \quad X, Y \in T_pM.$$
Pode-se provar que localmente aplicações conformes entre superfícies se comportam como aplicações holomorfas e assim aplicações conformes entre superfícies são harmônicas;

- **Morfismos Harmônicos.** Uma aplicação diferenciável $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é um morfismo harmônico se, para toda função harmônica $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $V \subset N$, com $V \neq \emptyset$, a composição $f \circ \phi$ é harmônica em $\phi^{-1}(V)$. Morfismos harmônicos constituem uma importante classe de aplicações harmônicas e é um objeto de pesquisa por si só interessante, mas não trataremos sobre eles neste trabalho.

Enunciaremos somente uma caracterização dos morfismos harmônicos e daremos alguns exemplos. Uma refêrencia sobre o assunto é [1]. Uma aplicação diferenciável $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é chamada de *horizontalmente fracamente conforme* (ou *semi-conforme*) se, para cada $p \in M$ ocorre uma das duas possibilidades: a) $d\phi_p = 0$, ou seja, $p$ é um ponto crítico; ou b) $d\phi_p$ leva o espaço horizontal $H_p = \{\ker(d\phi_p)\}^{\perp}$ conformemente e sobrejetivamente em $T_{\phi(p)N}$. Nós temos a seguinte caracterização de morfismos harmônicos: *"Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ entre variedades Riemannianas é um morfismo harmônico se, e somente se, $\phi$ é uma aplicação harmônica e horizontalmente fracamente conforme."* São exemplos de morfismos harmônicos:

1. Quando $\dim\ N = 1$, os morfismos harmônicos são exatamente as aplicações harmônicas
2. Quando $\dim M = \dim N = 2$, os morfismos harmônicos são as aplicações (fracamente) conformes.
3. Uma submersão Riemanniana é um morfismo harmônico se as fibras são minimais. Um exemplo é o fibrado de Hopf $S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$;

- **Física.** O *modelo-$\sigma$ 2-dimensional não linear* consiste no estudo de aplicações harmônicas de $S^2$ em $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ e o *modelo chiral* consiste no estudo de aplicações harmônicas de $S^2$ em $U(n)$.

A proposição a seguir relaciona os conceitos de aplicação harmônica e aplicação totalmente geodésica.

**Proposição 3.1.7** (Lei da Composição)**.** *Sejam $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ e $\psi : (N, h) \longrightarrow (P, k)$ aplicações diferenciáveis. Então*

$$\nabla d(\psi \circ \phi) = d\psi \circ \nabla d\phi + \nabla d\psi(d\phi, d\phi); \tag{3.2}$$

$$\tau(\psi \circ \phi) = d\psi \circ \tau(\phi) + \mathit{traço} \nabla d\psi(d\phi, d\phi). \tag{3.3}$$

*Em particular, se $\phi$ e $\psi$ são totalmente geodésica então $\psi \circ \phi$ também é, e se $\phi$ é harmônica e $\psi$ é totalmente geodésica então $\psi \circ \phi$ é harmônica.*

**Demonstração:** Sejam $X$ e $Y$ campos de vetores em $M$. Então,

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi \circ \phi)(X, Y) &= \nabla_X^{(\psi\circ\phi)^{-1}TP}(d\psi.d\phi.Y) - d(\psi \circ \phi).\nabla_X^M Y \\
&= (\nabla_{d\phi.X}^{\psi^{-1}TP} d\psi)d\phi.Y + d\psi.\nabla_X^{\phi^{-1}TN}(d\phi.Y) - d\psi.d\phi\nabla_X^M Y \\
&= (\nabla_{d\phi.X}^{\psi^{-1}TP} d\psi)d\phi.Y + d\psi(\nabla_X^{\phi^{-1}TN}(d\phi.Y) - d\phi\nabla_X^M Y) \\
&= \nabla d\psi(d\phi.X, d\phi.Y) + d\psi(\nabla d\phi(X, Y)).
\end{aligned}$$

Tomando o traço, segue que

$$tr(\nabla d(\psi \circ \phi)) = tr(\nabla d\psi(d\phi, d\phi)) + tr(d\psi(\nabla d\phi)).$$

Portanto,

$$\tau(\psi \circ \phi) = tr\nabla d\psi(d\phi, d\phi) + \psi(\tau(\phi)),$$

e concluímos a demonstração.

**Observação 3.1.8.** *É importante observar que a composta de duas aplicações harmônicas, em geral, não é harmônica. De fato, considere as aplicações $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, ax+b)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 - y^2$. $f$ é harmônica pois é uma geodésica em $\mathbb{R}^2$ e $g$ é harmônica pois $g$ é uma função harmônica, isto é, $\Delta g = 0$. Entretanto, $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = (1 - a^2)x^2 - 2abx - b^2$, e se $a \neq \pm 1$, $g \circ f$ não é harmônica, pois $d^2(g \circ f) \neq 0$.*

Uma das principais técnicas para estudar aplicações harmônicas é a utilização da Análise e Geometria Complexa. A principal motivação para esta abordagem é o caso de funções holomorfas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. É conhecido da Análise Complexa que se $f = u + iv$ é holomorfa, então as partes real e imaginária de $f$ são harmônicas, isto é, $\Delta u = 0$ e $\Delta v = 0$. Por outro lado, dada uma função harmônica $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma função harmônica $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (chamada harmônica conjugada) tal que $g = u + iv$ é holomorfa. Assim, neste caso, o conceito de harmonicidade é equivalente ao conceito de holomorficidade. A idéia é tentar reduzir o estudo de aplicações harmônicas ao estudo de aplicações holomorfas, num contexto mais geral do que apresentado acima. Algumas justificativas para isto são:

- Aplicações holomorfas (equações de Cauchy-Riemann) são sistemas de equações diferenciais parciais de 1a. ordem, já aplicações harmônicas (equações de Euler-Lagrange) são sistemas de equações diferenciais parciais de 2a. ordem. Em Análise, isto é conhecido como redução de ordem do problema.

- Aplicações holomorfas são mais "tratáveis" que aplicações harmônicas (pelo menos a princípio) e os métodos de Geometria Complexa e Geometria Algébrica podem ser utilizados.

Historicamente, o uso de métodos de análise complexa no estudo de aplicações harmônicas iniciou-se com Weistrass, no caso de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

Neste sentido, a próxima proposição tem consequências importantes quando $M$ é uma superfície de Riemann. Antes, relembramos um fato elementar de Álgebra Linear.

**Lema 3.1.9.** *Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais de mesma dimensão e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe $\lambda \neq 0$ tal que $\langle T(v_1), T(v_2)\rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2\rangle$, para todo $v_1, v_2 \in V$;*

2. *Existe $\lambda > 0$ tal que $|T(v)| = \lambda |v|$ para todo $v \in V$;*

3. *Existe $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de $V$ tal que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é base ortogonal de $W$ e $T(v_i)$ tem o mesmo comprimento, para todo $i$.*

*Quando uma transformação linear satisfaz qualquer uma das hipóteses acima, dizemos que $T$ é uma transformação linear conforme.*

**Proposição 3.1.10.** *Seja $\psi : M^2 \longrightarrow N$ harmônica e $\phi : P^2 \longrightarrow M^2$ uma aplicação conforme. Então $\psi \circ \phi$ é harmônica.*

**Demonstração:** Dado $x_0 \in P^2$, temos que $d\phi_{x_0}$ é uma transformação linear conforme. Pelo lema acima, existe uma base ortonormal $\{e_i\}$ de $T_{x_0}P$ e uma base ortonormal $\{f_i\}$ de $T_{\phi(x_0)}M$ tal que $d\phi_{x_0}(e_i) = \lambda f_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, com $\lambda > 0$. Observando que $\phi$ é harmônica, pois é conforme entre superfícies, e usando a Lei da Composição vamos calcular o campo de tensão (equações de Euler-Lagrange) em $x_0$:

$$\begin{aligned}
\tau(\psi \circ \phi) &= d\psi \circ \tau(\phi) + \sum_{i=1}^{2} \nabla d\psi(d\phi.e_i, d\phi.e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \nabla d\psi(\lambda f_i, \lambda f_i) \\
&= \lambda^2 \sum_{i=1}^{2} \nabla d\psi(f_i, f_i) \\
&= \lambda^2 \tau(\psi.)
\end{aligned}$$

Como $\psi$ é harmônica, $\tau(\psi) = 0$ e assim $\tau(\psi \circ \phi) = 0$ e $\psi \circ \phi$ é harmônica. ■

**Observação 3.1.11.** *Pode-se provar um resultado mais geral: "Seja $\psi : M^m \longrightarrow N^n$ harmônica e $\phi : P^p \longrightarrow M^m$ um morfismo harmônico. Então $\psi \circ \phi$ é harmônica." A demonstração pode ser encontrada em [9].*

A proposição acima diz que a equação de Euler-Lagrange é invariante por transformações conformes no domínio. Dessa forma, se $M$ é uma superfície de Riemann podemos tomar um sistema de coordenadas conformes complexas $(\Omega, \mathbf{z})$, onde $\Omega \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ é um aberto de $\mathbb{C}$, e então uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ é harmônica se, e somente se, $\phi \circ \mathbf{z} : \Omega \longrightarrow N$ é harmônica. Desta forma, fica natural o uso dos métodos de Análise Complexa quando $M$ é uma superfície de Riemann. Vamos agora deduzir as equações de Euler-Lagrange utizando um sistema de coordenadas locais complexo para uma superfície de Riemann $M$.

**Teorema 3.1.12** (Equações de Euler-Lagrange para Superfícies)**.** *Seja $\phi : (M^2, g) \longrightarrow (N, h)$ uma aplicação diferenciável. Então $\tau(\phi) = \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial y}$.*

**Demonstração:** Dado $p \in M$ considere o sistema de coordenadas locais $(U, \varphi)$, com $p \in U$, normal e centrado em $p$. Seja $\{e_1, e_2\}$ o referencial ortonormal em $T_pM$, onde $e_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ e $e_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Assim a equação de Euler-Lagrange (3.1) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= \sum_{i=1}^{2} \nabla^{\phi^{-1}TN}_{e_i} d\phi(e_i) \\
&= \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\frac{\partial}{\partial x}} d\phi(\frac{\partial}{\partial x}) + \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\frac{\partial}{\partial y}} d\phi(\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla^{\phi^{-1}TN}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial y}
\end{aligned}$$

como desejávamos. ■

**Observação 3.1.13.** *Para simplificar a notação, escrevemos simplesmente $\tau(\phi) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial y}$.*

**Corolário 3.1.14.** *Seja $M$ uma superfície de Riemann e $(U, z)$ um sistema complexo de coordenadas locais para $M$. Então $\phi : M \longrightarrow N$ é harmônica se, e somente se, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$.*

**Demonstração:** De fato, esta equação é equivalente a $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial y}$. ■

No fibrado $(\phi^{-1}TN, \pi, M)$, considere a estrutura complexa de Koszul-Malgrange determinada por $\nabla^{\phi^{-1}TN}$. O corolário acima diz $\phi$ é harmônica se, e somente se, $\frac{\partial \phi}{\partial z} dz$ é uma seção holomorfa de $(T^{1,0})^*M \otimes \phi^{-1}TN$ (com relação a estrutura de Koszul-Malgrange).

## 3.2 Aplicações harmônicas em grupos de Lie

Nesta seção vamos descrever as Equações de Euler-Lagrange para aplicações $\phi : M \longrightarrow G$, onde $G$ é um grupo de Lie. Na sequência, iniciamos o estudo de aplicações harmônicas

$S^2 \longrightarrow U(n)$, descrevendo o funcional energia e estabelecendo a linguagem utilizada nos capítulos seguintes.

Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana compacta e orientável, $(G, \langle,\rangle)$ um grupo de Lie compacto com métrica bi-invariante, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e $\omega_G$ a forma de Maurer-Cartan de $G$. Lembre que o fibrado tangente $TG$ de um grupo de Lie $G$ é trivial, e uma trivialização é dada pela forma de Maurer-Cartan. Em $TG$ consideramos a conexão de Levi-Civita

$$\nabla^G = d + \frac{1}{2}\,\omega_G, \tag{3.4}$$

isto é, $\nabla^G_X(s) = ds + [\omega, s] = X(s) + [\omega, s]$ onde $s : G \longrightarrow \mathfrak{g}$ e $X$ são seções de $TG$. Dada uma aplicação $\phi : M \longrightarrow G$, definimos $\alpha = \phi^*(\omega_G)$ o *pull-back* da forma de Maurer-Cartan de $G$. Se $G$ é um grupo de matrizes, usaremos a notação (clássica) $\alpha = \phi^{-1}d\phi$. Temos que $\alpha$ é uma 1-forma em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$. Considere ainda o fibrado $(\phi^{-1}TG, \tilde{\pi}, M)$, *pull-back* do fibrado tangente $TG$ por $\phi$, e

$$D = \nabla^{\phi^{-1}TG} = d + \frac{1}{2}\,\alpha \tag{3.5}$$

o *pull-back* da conexão de Levi-Civita de $TG$. Note que $\alpha$ representa a diferencial $d\phi \in C^\infty(M, T^*M \otimes \phi^{-1}TG)$ na trivialização $\phi^{-1}TG \approx M \times \mathfrak{g}$.

**Teorema 3.2.1** (Equações de Euler-Lagrange)**.** *Seja $\phi : M \longrightarrow G$ uma aplicação diferenciável. Então*

$$\tau(\phi) = -d^*\alpha, \tag{3.6}$$

*onde $d^*$ é o operador codiferencial e $\alpha = \phi^{-1}d\phi$ é o pull-back da forma de Maurer-Cartan de $G$.*

**Demonstração:** Vamos calcular $\tau(\phi)$ em um ponto $p \in M$. Seja $(U, \varphi)$ sistema de coordenadas locais normal e centrado em $p$ e $\{e_i\}$ um referencial ortonormal de $T_pM$. Então,

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\phi^{-1}TG}_{e_i}(d\phi(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(d\phi(e_i)) + \frac{1}{2}[\alpha(e_i), d\phi(e_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(\alpha(e_i)) + \frac{1}{2}[\alpha(e_i), \alpha(e_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\phi^{-1}TG}_{e_i}(\alpha(e_i)) \\
&= \text{traço div } \alpha \\
&= -d^*\alpha,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do lema 1.2.27.

**Corolário 3.2.2.** *$\phi$ é harmônica se, e somente se, $d^* \alpha = 0$.*

Vamos agora considerar o caso onde $M^2$ é uma superfície. Na seção anterior provamos que a Equação de Euler-Lagrange é invariante por aplicações conformes. Da geometria diferencial das superfícies, sabemos que toda superfície admite um sistema local de coordenadas conforme ([5], página 271). Então, dada uma aplicação diferenciável $\phi : M^2 \longrightarrow G$, por abuso de notação vamos ainda escrever $\phi : \Omega \longrightarrow G$, com $\Omega$ aberto em $\mathbb{R}^2$ (ao invés de escrever $\phi \circ \varphi : \Omega \longrightarrow G$, onde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ é um aberto e $(\Omega, \varphi)$ é um sistema de coordenadas conforme). Neste caso, a equação e Euler-Lagrange é escrita como

$$\begin{aligned} d^*\alpha &= d^*(\phi^{-1}d\phi) = \left\{\nabla^{\phi^{-1}TG}_{\frac{\partial}{\partial x}}\left(\phi^{-1}d\phi\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\} + \left\{\nabla^{\phi^{-1}TG}_{\frac{\partial}{\partial y}}\left(\phi^{-1}d\phi\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\phi^{-1}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\phi^{-1}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

e $\phi$ é harmonica se, e somente se,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Definimos as aplicações parciais

$$\alpha_x = \phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x} \ \text{ e } \ \alpha_y = \phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

e assim temos $\alpha = \alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy$, com $\alpha_x,\ \alpha_y\ \in \mathfrak{g}$.

O funcional energia é dado por

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\iint_\Omega |d\phi|^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left|\phi^{-1}d\phi\right|^2 dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_\Omega |\alpha|^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_\Omega (\alpha, \alpha)\, dx\, dy,$$

onde $(\alpha, \alpha)$ é o produto interno em $\mathfrak{g} \otimes (\mathbb{R}^2)^*$. Assim,

$$\begin{aligned} E(\phi) &= \frac{1}{2}\iint_\Omega (\alpha, \alpha)\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{2}\iint_\Omega (\alpha_x \otimes dx + \alpha_y \otimes dy, \alpha_x \otimes dx + \alpha_y \otimes dy) dx\, dy \\ &= \frac{1}{2}\iint_\Omega (\alpha_x, \alpha_x) + (\alpha_y, \alpha_y) dx\, dy \\ &= \frac{1}{2}\iint_\Omega \left|\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 + \left|\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|^2 dx\, dy. \end{aligned}$$

Vamos agora considerar $G = U(n)$, o grupo unitário. Seguindo a notação clássica introduzida em [34], definimos a 1-forma em $M^2$

$$A = \frac{1}{2}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\phi^{-1}\,d\phi,$$

e as aplicações parciais

$$A_x = \frac{1}{2}\,\alpha_x = \frac{1}{2}\,\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad A_y = \frac{1}{2}\,\alpha_y = \frac{1}{2}\,\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

com $A_x,\ A_y \in \mathfrak{u}(n)$. Usando as aplicações parciais $A_x$ e $A_y$ podemos escrever:

$$d^*A = \frac{\partial}{\partial x}\,A_x + \frac{\partial}{\partial y}\,A_y; \tag{3.7}$$

$$dA + [A, A] = \frac{\partial}{\partial x}\,A_y - \frac{\partial}{\partial y}\,A_x + 2[A_x,\ A_y]. \tag{3.8}$$

**Lema 3.2.3.** *Seja $\phi : M^2 \longrightarrow U(n)$ uma aplicação diferenciável e $A = \frac{1}{2}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\phi^{-1}\,d\phi$. Então $dA + [A, A] = 0$.*

**Demonstração:** Primeiramente observe que $dA+[A, A] = 0$ se, e somente se, $d\alpha+\frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$, pois $dA + [A, A] = \frac{1}{2}\left(d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]\right)$. Agora, como $\alpha$ é o pull-back da forma de Maurer-Cartan de $U(n)$, pelo teorema 2.2.2 temos $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$ e o resultado segue. ■

**Observação 3.2.4.** *Considere a conexão $D = d + A$ (equação (3.5)) no fibrado $\phi^{-1}TU(n)$. A expressão $dA + [A, A]$ representa a curvatura desta conexão. O lema acima diz que a conexão $D$ é plana, ou seja, tem curvatura nula.*

**Teorema 3.2.5.** *Seja $M^2$ uma superfície simplesmente conexa e $A$ uma 1-forma em $M^2$ com valores em $\mathfrak{u}(n)$. Então,*

$$\textit{Existe } \phi : M^2 \longrightarrow U(n) \textit{ harmônica com } A = \tfrac{1}{2}\phi^{-1}d\phi \iff \begin{cases} \bullet\ d^*A = 0; \\ \bullet\ dA + [A, A] = 0. \end{cases}$$

**Demonstração:** Suponha que $\phi$ é uma aplicação harmônica. Então $d^*A$ não é nada mais, nada menos que a equação de Euler-Lagrange (a menos de mulplicação por $\frac{1}{2}$) e portanto igual a zero. A outra equação segue diretamente do lema 3.2.3. Para provar a recíproca, observe inicialmente que como $M^2$ é simplesmente conexo temos $\pi_1(M^2) = 0$ e consequentemente a representação da monodromia $\Phi_\omega : \pi_1(M^2) \longrightarrow U(n)$ é trivial. Como $dA + [A, A] = 0$, pelo pricípio da Monodromia, existe uma única (a menos de translação) aplicação diferenciável $\phi : M^2 \longrightarrow U(n)$ tal que $A = \phi^{-1}d\phi$. Como $d^*A = 0$, tal aplicação é harmônica, pois é solução da equação de Euler-Lagrange. ∎

Se $M^2$ é uma superfície de Riemann, seja $(U, z)$ um sistema local de coordenadas complexo para $M$. Escrevemos

$$A = A_z\, dz + A_{\bar{z}}\, d\bar{z},$$

onde $A_z = \frac{1}{2}(A_x - iA_y)$ e $A_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(A_x + iA_y)$, com $A_z, A_{\bar{z}} \in (\mathfrak{u}(n))^{\mathbb{C}} \approx \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Nos próximos dois lemas, demonstramos equações análogas às equações (3.7) e (3.8), utilizando sistema de coordenadas complexas.

**Lema 3.2.6.** $d^*A = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial} A_z + \partial A_{\bar{z}} = 0$.

**Demonstração:** Usando as definições de $A_z$ e $A_{\bar{z}}$ e dos operadores $\partial$ e $\overline{\partial}$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} A_z + \partial A_{\bar{z}} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(A_x - iA_y) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(A_x + iA_y) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x - i\frac{\partial}{\partial x}A_y + i\frac{\partial}{\partial y}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + i\frac{\partial}{\partial x}A_y - i\frac{\partial}{\partial y}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\right).
\end{aligned}$$

Agora, pela equação (3.7) temos

$$\overline{\partial} A_z + \partial A_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y = 0 \Leftrightarrow d^*A = 0.$$

∎

**Lema 3.2.7.** $dA + [A, A] = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z] = 0$

**Demonstração:** Usando as definições de $A_z$ e $A_{\bar{z}}$ e dos operadores $\partial$ e $\overline{\partial}$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z] &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(A_x + iA_y) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(A_x + iA_y) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[A_x + iA_y, A_x - iA_y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}A_y + i\frac{\partial}{\partial y}a_x\right) + \frac{1}{2}\left(-2i\left[A_x, A_y\right]\right) \\
&= -\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x + 2[A_x, A_y]\right).
\end{aligned}$$

Agora, pela equação (3.8) temos

$$\overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x + 2[A_x, A_y] = 0 \Leftrightarrow dA + [A, A] = 0.$$

∎

**Teorema 3.2.8.** *Seja $M^2$ uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Uma aplicação diferenciável $\phi : M^2 \longrightarrow U(n)$ é harmônica se, e somente se,*

$$\overline{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = 0, \tag{3.9}$$

*onde $A = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ é a metade do pull-back de forma de Maurer-Cartan de $U(n)$.*

**Demonstração:** Seja $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi$. Se $\phi$ é harmônica, então

$$d^*A = \overline{\partial}A_z + \partial A_{\bar{z}} = 0 \tag{3.10}$$

e

$$dA + [A, A] = \overline{\partial}A_z - \partial A_{\bar{z}} + 2[A_{\bar{z}}, A_z] = 0. \tag{3.11}$$

De (3.10) temos que $\overline{\partial}A_z = -\partial A_{\bar{z}}$. Substituindo esta última igualdade em (3.11) temos $2(\overline{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z]) = 0$ e consequentemente $\overline{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = 0$. Reciprocamente, suponha que $\overline{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = 0$. Usando as definições de $A_z$ e $A_{\bar{z}}$ e do operador $\overline{\partial}$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}A_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}(A_x - iA_y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x - i\frac{\partial}{\partial x}A_y + i\frac{\partial}{\partial y}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\right);\\
[A_{\bar{z}}, A_z] &= \left[\frac{1}{2}(A_x + iA_y), \frac{1}{2}(A_x - iA_y)\right] = -\frac{1}{4}\,.i\,.2[A_x, A_y].
\end{aligned}$$

Então,

$$\overline{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y\right) - i\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x + 2[A_x, A_y]\right) = 0. \tag{3.12}$$

Igualando a zero as partes real e imaginária da equação (3.12) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y = 0 &\iff d^*A = 0;\\
\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x + 2[A_x, Ay] = 0 &\iff dA + [A, A] = 0.
\end{aligned}$$

Então, pelo teorema 3.2.5 temos que $\phi$ é harmônica. ■

Uma interpretação geométrica para o resultado acima é a seguinte: Seja $\underline{\mathbb{C}}^n = (M \times \mathbb{C}^n, \pi, M)$ o fibrado trivial sobre $M$, com a métrica Hermitiana usual em cada fibra $\mathbb{C}^n$. Em $\underline{\mathbb{C}}^n$, defina a conexão $D = d + A$. Vamos decompor $D$ nas partes $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Assim

$$D = D_z\, dz + D_{\bar{z}}\, d\bar{z}$$

onde $D_z = \dfrac{\partial}{\partial z} + A_z$ e $D_{\bar{z}} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} + A_{\bar{z}}$. Note que $U \longrightarrow A_z$ e $U \longrightarrow A_{\bar{z}}$ são seções do fibrado $\mathrm{End}(\underline{\mathbb{C}}^n)$. No fibrado $\underline{\mathbb{C}}^n$ considere a estrutura complexa de Koszul-Malgrange determinada pela conexão $D$. Desta forma $\underline{\mathbb{C}}^n$ passa a ser um fibrado vetorial holomorfo e uma seção local $\sigma$ sobre um aberto $U$ é holomorfa com respeito a $D$ se, e somente se, $D_{\bar{z}}\sigma = 0$.

Então, (3.9) é a condição para seção local $A_z : U \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{\mathbb{C}}^n)$ ser holomorfa com respeito a $D$, ou seja, transforma seções holomorfas (local) de $\underline{\mathbb{C}}^n$ em seções holomorfas (local) de $\underline{\mathbb{C}}^n$.

O objetivo central deste trabalho é o estudo de aplicações harmônicas de $S^2$ em $U(n)$, que também são conhecidas como *esferas harmônicas em* $U(n)$. Note que neste caso $M = S^2$, e toda teoria desenvolvida acima pode ser utilizada. Uma das questões centrais da teoria de aplicações harmônicas é garantir a *existência* de tais aplicações (que não seja a aplicação constante, que é uma solução trivial). No nosso caso, teremos que responder a seguinte questão: *"Existe aplicação harmônica de* $S^2$ *em* $U(n)$ *não-constante ?"* Para responder a esta pergunta, vamos utilizar um resultado clássico de Análise Global.

**Teorema 3.2.9** (Sacks-Uhlenbeck [29])**.** *Seja* $N$ *uma variedade Riemanniana compacta que não é do tipo* $K\pi(1)$*, isto é,* $\pi_1(N) \neq 0$ *e* $\pi_i(N) = 0, \forall i > 1$. *Então existe uma aplicação harmônica não-constante* $\phi : S^2 \longrightarrow N$.

Pelo teorema acima, o teremos que verificar os grupos de homotopia de $U(n)$.

**Lema 3.2.10.** $\pi_1(U(n)) \approx \mathbb{Z}$*, para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *e* $\pi_3(U(n)) \approx \mathbb{Z}$*, para todo* $n > 1$.

**Demonstração:** Considere a fibração

$$U(n) \longrightarrow U(n+1) \longrightarrow S^{2n+1}$$

e a sequência exata longa de homotopia

$$\cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(S^{2n+1}) \longrightarrow \pi_k(U(n)) \longrightarrow \pi_k(U(n+1)) \longrightarrow \pi_k(S^{2n+1}) \longrightarrow \cdots .$$

Note que se $k + 1 < 2n + 1$ (o que é equivalente a $k < 2n$), então $\pi_{k+1}(S^{2n+1}) = 0$ e $\pi_k(S^{2n+1}) = 0$, e assim $\pi_k(U(n)) \approx \pi_k(U(n+1))$, se $k < 2n$. Agora, se $k = 1$, então para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ temos $k < 2n$, e consequentemente,

$$\pi_1(U(1)) \approx \pi_1(U(2)) \approx \pi_1(U(3)) \approx \cdots .$$

Mas $U(1)$ é homeomorfo a $S^1$ e $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$. Vamos agora calcular $\pi_3(U(n))$. Observe que para $n \geq 2$, temos $k = 3 < 2n$ e assim

$$\pi_3(U(2)) \approx \pi_3(U(3)) \approx \pi_3(U(4)) \approx \cdots .$$

Agora, para calcular $\pi_3(U(2))$, considere a fibração $S^1 \longrightarrow U(2) \longrightarrow SU(2)$ e a sequência exata longa de homotopia

$$\cdots \longrightarrow \pi_3(S^1) \longrightarrow \pi_3(U(2)) \longrightarrow \pi_3(SU(2)) \longrightarrow \pi_2(S^1) \longrightarrow \cdots .$$

Como $SU(2)$ é homeomorfo a $S^3$ temos que $\pi_3(SU(2)) \approx \mathbb{Z}$. Observando que $\pi_i(S^1) = 0$, se $i > 1$, obtemos a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_3(U(2)) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

e consequentemente, $\pi_3(U(2)) \approx \mathbb{Z}$. ■

Uma consequência do lema acima é que $U(n)$, se $n > 1$, não é uma variedade do tipo $K\pi(1)$ e pelo teorema de Sacks-Uhlenbeck, existe uma aplicação harmônica não-constante de $S^2$ em $U(n)$, se $n > 1$.

**Observação 3.2.11.** *Uma consequência do teorema de classificação das aplicações harmônicas em $U(n)$ de Uhlenbeck é que toda aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(1)$ é constante.*

# CAPÍTULO 4

# Unitons

Neste capítulo, apresentaremos uma construção fundamental devida à K. Uhlenbeck [34], que basicamente ensina como construir uma nova aplicação harmônica $\tilde{\phi} : S^2 \longrightarrow U(n)$, a partir de uma aplicação harmônica $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$, através da "adição" de uma parcela holomorfa chamada *uniton*. Exibimos um exemplo de uma aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(4)$ e provamos o Teorema de Valli [35], sobre o espectro da energia. Nas seções 4.1, 4.2 e 4.3, a variedade diferenciável $M$ será $M = \Omega \subseteq \mathbb{C}$ (um domínio simplesmente conexo do plano), ou $M = S^2$. Na seção 4.5, $M = S^2$.

## 4.1 Soluções Estendidas

Seja $G$ um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e forma de Maurer-Cartan $\omega_G$, e considere $\phi : M \longrightarrow G$ uma aplicação diferenciável. Como no capítulo anterior, definimos uma 1-forma em $M$ com valores em $\mathfrak{g}$ por

$$A = \frac{1}{2}\,\phi^*(\omega_G) = A_z\,dz + A_{\bar{z}}\,d\bar{z},$$

onde $A_z$ e $A_{\bar{z}}$ são as partes $(1,0)$ e $(0,1)$ de $A$. Seja $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ a complexificação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Vamos considerar, nestas construções, a extensão da 1-forma $A$ ao corpo $\mathbb{C}$, mas por abuso de notação, ainda vamos denotá-la por $A$, isto é, $A : TM \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Definimos a família de 1-formas em $M$ com valores em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ por

$$A_\lambda = (1-\lambda^{-1})A_z\,dz + (1-\lambda)A_{\bar{z}}\,d\bar{z},$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

**Teorema 4.1.1.** *Seja $\phi : M \longrightarrow U(n)$ uma aplicação diferenciável. Então $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi$, com $\phi$ harmônica se, e somente se, $dA_\lambda + \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda] = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.*

**Demonstração:** Lembre que $dA + [A, A] = \overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar z} + 2[A_{\bar z}, A_z]$. Então,

$$\begin{aligned}
dA_\lambda + \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda] &= \overline{\partial}(1-\lambda^{-1})A_z - \partial(1-\lambda)A_{\bar z} + [(1-\lambda^{-1})A_z, (1-\lambda)A_{\bar z}] \\
&= \overline{\partial} A_z - \lambda^{-1}\overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar z} + \lambda \partial A_{\bar z} + [A_{\bar z} - \lambda A_{\bar z}, A_z - \lambda^{-1} A_z] \\
&= \overline{\partial} A_z - \lambda^{-1}\overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar z} + \lambda \partial A_{\bar z} + [A_{\bar z}, A_z] - \lambda^{-1}[A_{\bar z}, A_z] - \lambda[A_{\bar z}, A_z] + [A_{\bar z}, A_z \\
&= \lambda^0(\overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar z} + 2[A_{\bar z}, A_z]) - \lambda^{-1}(\overline{\partial} A_z - [A_{\bar z}, A_z]) + \lambda(\partial A_{\bar z} + [A_z, A_{\bar z}])
\end{aligned}$$

Agora, se $\phi$ é harmônica, os coeficientes de $\lambda^{-1}, \lambda^0, \lambda^{-1}$ são iguais a zero e $dA_\lambda + \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda] = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$. Reciprocamente, se $dA_\lambda + \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda] = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ temos:

$$\overline{\partial} A_z - \partial A_{\bar z} + 2[A_{\bar z}, A_z] = 0 \tag{4.1}$$

$$\overline{\partial} A_z - [A_{\bar z}, A_z] = 0 \tag{4.2}$$

$$\partial A_{\bar z} + [A_z, A_{\bar z}] = 0 \tag{4.3}$$

A equação (4.1) é equivalente a $dA + [A, A] = 0$. Somando as equações (4.2) e (4.3) obtemos $\overline{\partial} A_z + \partial A_{\bar z} = 0 = d^* A$ e segue do Teorema 3.2.5 que $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi$ com $\phi$ harmônica. ∎

Para cada $\lambda \neq 0$, defimos uma conexão $D_\lambda = d + A_\lambda$ no fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^n$ sobre $M$. O teorema acima diz que $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi$ com $\phi$ harmônica se, e somente se, a conexão $D_\lambda$ tem curvatura nula, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Seja $\omega_G$ a forma de Maurer-Cartan de $U(n)$. Se $\phi : M \longrightarrow U(n)$ é uma aplicação harmônica então, pelo Princípio da Monodromia, o Teorema 4.1.1 juntamente com fato de $M$ ser simplesmente conexo, garante que para cada $A_\lambda$, existe uma única $\Phi_\lambda : M \longrightarrow U(n)$ tal que $\Phi_\lambda^* \omega_G = A_\lambda$, ou equivalentemente, $\Phi_\lambda^{-1} d\Phi_\lambda = A_\lambda$. Assim,

$$\Phi_\lambda^{-1}\partial\Phi_\lambda dz + \Phi_\lambda^{-1}\overline{\partial}\Phi_\lambda d\bar z = (1-\lambda^{-1})A_z\, dz + (1-\lambda)A_{\bar z}\, d\bar z,$$

e portanto, para encontrar $\Phi_\lambda$ temos que resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \partial\Phi_\lambda = (1-\lambda^{-1})\Phi_\lambda^{-1}A_z \\ \overline{\partial}\Phi_\lambda = (1-\lambda)\Phi_\lambda^{-1}A_{\bar z} \end{cases} \tag{4.4}$$

Como a solução do sistema (4.4) é unicamente determinada pelo valor inicial de $\Phi_\lambda(p)$, com $p \in M$ um ponto base fixo, vamos tomar o valor inicial $\Phi_\lambda(p) = I$, onde $I$ é a identidade do grupo $U(n)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\phi(p) = I$. De fato, definindo $\tilde{\phi}(x) = (\phi(p))^{-1}.\phi(x)$, temos que se $\phi$ é harmônica, então $\tilde{\phi}$ também é harmônica e $\tilde{\phi}(p) = I$. Note que se $\lambda = 1$, $d\Phi_1 \equiv 0$ e $\Phi_1 = \phi(p) = I$.

**Teorema 4.1.2.** *Se $\phi : M \longrightarrow U(n)$ é uma aplicação harmônica com $\Phi(p) = I$, então existe um única $\Phi : \mathbb{C}^* \times M \longrightarrow (U(n))^{\mathbb{C}} = GL(n, \mathbb{C})$, $\Phi(\lambda, \bullet) = \Phi_\lambda(\bullet)$, satisfazendo (4.4) com*

1. $\Phi_1 = I$

2. $\Phi_{-1} = \phi$

3. $\Phi_\lambda(p) = I, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$

*Além do mais, $\Phi$ é analítica e holomorfa em $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Se $\phi$ é unitária, então $\Phi_\lambda$ é unitária para $|\lambda| = 1$.*

**Demonstração:** A existência e a unicidade seguem do teorema 4.1.1 e dos comentários acima. Note que $\phi$ é analítica, o que garante, junto com a integrabilidade do sistema (4.4) a regularidade de $\Phi$. Observe que $\Phi_\lambda^{-1} d\Phi_\lambda = A_\lambda$ é equivalente a $-d(\Phi_\lambda^{-1})\Phi_\lambda$ (pull-back à direita da forma de Maurer-Cartan). Então, podemos escrever o sistema (4.4) como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\partial \Phi_\lambda^{-1} & = & (1 - \lambda^{-1}) A_z \Phi_\lambda^{-1} \\ -\overline{\partial} \Phi_\lambda^{-1} & = & (1 - \lambda) A_{\bar{z}} \Phi_\lambda^{-1} \end{array} \right.$$

O par de equações adjuntas é

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\overline{\partial}(\Phi_\lambda^{-1})^* & = & (1 - \overline{\lambda^{-1}})(\Phi_\lambda^{-1})^*(A_z)^* \\ -\partial(\Phi_\lambda^{-1})^* & = & (1 - \overline{\lambda})(\Phi_\lambda^{-1})^*(A_{\bar{z}})^* \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Agora, se $\phi$ é unitária, temos $(A_z)^* = A_{\bar{z}}$ e se $|\lambda| = 1$, temos $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$. Assim o sistema (4.5) pode ser escrito como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\overline{\partial}(\Phi_\lambda^{-1})^* & = & -(1 - \lambda)(\Phi_\lambda^{-1})^* A_{\bar{z}} \\ -\partial(\Phi_\lambda^{-1})^* & = & -(1 - \lambda^{-1})(\Phi_\lambda^{-1})^* A_z \end{array} \right.$$

e pela unicidade da $\Phi$, segue que $(\Phi_\lambda^{-1})^* = \Phi_\lambda$, o que conclui a demonstração. ∎

Reciprocamente, temos o

**Teorema 4.1.3.** *Suponha* $\Phi : \mathbb{C}^* \times M \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ *analítica e holomorfa na primeira variável,* $\Phi_1 \equiv I$ *e as expressões*

$$\frac{\Phi_\lambda^{-1}\overline{\partial}\Phi_\lambda}{1-\lambda} \quad e \quad \frac{\Phi_\lambda^{-1}\partial\Phi_\lambda}{1-\lambda^{-1}}$$

*são constantes em* $\lambda$*. Então* $\phi = \Phi_{-1}$ *é harmônica.*

**Demonstração:** Seja $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z} = \dfrac{\Phi_\lambda^{-1}\partial\Phi_\lambda}{1-\lambda^{-1}}dz + \dfrac{\Phi_\lambda^{-1}\overline{\partial}\Phi_\lambda}{1-\lambda}d\bar{z}$. Então a família de 1-formas $A_\lambda = (1-\lambda^{-1})A_z\, dz + (1-\lambda)A_{\bar{z}}\, d\bar{z}$ será

$$A_\lambda = (1-\lambda^{-1})\frac{\Phi_\lambda^{-1}\partial\Phi_\lambda}{1-\lambda^{-1}}dz + (1-\lambda)\frac{\Phi_\lambda^{-1}\overline{\partial}\Phi_\lambda}{1-\lambda}d\bar{z} = \Phi_\lambda^{-1}\partial\Phi_\lambda dz + \Phi_\lambda^{-1}\overline{\partial}\Phi_\lambda d\bar{z} = \Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda,$$

ou seja, cada $A_\lambda$ é o pull-back da forma de Maurer-Cartan. Segue da equação estrutural da forma de Maurer-Cartan que $dA_\lambda + \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda] = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$. Pelo teorema 4.1.1, temos que $\phi = \Phi_{-1}$ é harmônica. ■

A aplicação $\Phi : \mathbb{C}^* \times M \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ é chamada de **Solução Estendida ou Aplicação Harmônica Estendida** da aplicação harmônica $\phi : M \longrightarrow U(n)$.

## 4.2 Variedades de Grassmann

Nesta seção enunciaremos, sem demonstrações, os principais resultados referentes à variedades de Grassmann que utilizaremos a seguir. Uma referência completa para o assunto é [19].

**Teorema 4.2.1.** *Seja*

$$G_k(\mathbb{C}^n) = \{W \subset \mathbb{C}^n \, \textit{(subespaço vetorial)} : \dim_{\mathbb{C}} W = k\},$$

*o conjunto formado por todos os* $k$*-planos em* $\mathbb{C}^n$*. Então* $G_k(\mathbb{C}^n)$ *possui uma estrutura de variedade complexa. Tal variedade é denominada Variedade de Grassmann.*

**Demonstração:** Ver [19] página 133.

**Teorema 4.2.2.** *A variedade de Grassmann* $G_k(\mathbb{C}^n)$ *é uma variedade Kähler.*

**Demonstração:** Ver [19] página 160.

Em $\mathbb{C}^n$, consideremos a métrica Hermitiana canônica. Um elemento de $G_k(\mathbb{C}^n)$ pode ser considerado ou como um subespaço vetorial $k$-dimensional $W$, ou como a projeção ortogonal Hermitiana sobre $W$. Com esta última interpretação, podemos identificar $G_k(\mathbb{C}^n)$ com o subconjunto de matrizes complexas $n \times n$, $p$, tais que $p^2 = p^* = p$, onde, $p^* = \overline{p}^T$ e posto $p = k$. Definimos a aplicação

$$^{\perp} : G_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow G_{n-k}(\mathbb{C}^n)$$

que associa a cada subespaço $W \subset \mathbb{C}^n$ o seu complemento ortogonal Hermitiano $W^{\perp}$.

Como espaço homogêneo, temos $G_k(\mathbb{C}^n) = \frac{U(n)}{U(k)\times U(n-k)}$. Assim, segue diretamente que $G_k(\mathbb{C}^n)$ é uma variedade compacta. Observe porém que, vista desta forma, não é claro que $G_k(\mathbb{C}^n)$ é uma variedade complexa.

**Definição 4.2.3** (Espaços Simétricos)**.** *Dizemos que um espaço homogêneo $G/H$ é um espaço simétrico de existe $\sigma \in Aut(G)$, com $\sigma^2 = 1$, tal que $H = Fix(\sigma)$.*

**Proposição 4.2.4.** *Suponha que $G$ é um grupo de Lie compacto, $\sigma : G \longrightarrow G$, $\sigma^2 = 1$ e $H = Fix(\sigma)$. Então a aplicação $c : G/H \longrightarrow G$, definida por $c(gH) = g\sigma(g^{-1})$, é um mergulho de $G/H$ em $G$ totalmente geodésico. Esta aplicação chama-se **Inclusão de Cartan**.*

**Demonstração:** Ver [7] página 77.

No caso da variedade de Grassmann $G_k(\mathbb{C}^n)$ a inclusão de Cartan é definida por

$$\begin{array}{rccc} c : & G_k(\mathbb{C}^n) & \longrightarrow & U(n) \\ & a & \longmapsto & a - a^{\perp}. \end{array}$$

Desta forma, identificamos $G_k(\mathbb{C}^n)$ com o seguinte subconjunto de $U(n)$:

$$G_k(\mathbb{C}^n) = \left\{ A \in U(n) : A^2 = I \text{ e dimensão do auto-espaço associado ao autovalor 1 é } k \right\}.$$

Dada uma aplicação diferenciável $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$, definimos $p^{\perp} : M \longrightarrow G_{n-k}(\mathbb{C}^n)$ como sendo a composta de $p$ com $^{\perp}$. Seja $\underline{p}$ o subfibrado do fibrado $\underline{\mathbb{C}}^n = M \times \mathbb{C}^n$, com fibra $\underline{p_x} = p(x)$, $x \in M$.

Note que a associação $p \longmapsto \underline{p}$ define uma correspondência $1-1$ entre aplicações diferenciáveis $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ e subfibrados vetoriais diferenciáveis de $\underline{\mathbb{C}}^n$ de posto $k$.

## 4.3 Unitons

**Definição 4.3.1.** *Seja $\phi : M \longrightarrow U(n)$ uma aplicação diferenciável. Uma aplicação $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ é chamada de **uniton** para $\phi$ se*

$$p^{\perp}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + A_{\bar{z}}\right) p = 0 \tag{4.6}$$

*e*

$$p^{\perp} A_z p = 0. \tag{4.7}$$

*As equações (4.6) e (4.7) são equivalentes a*

$$p\left(\frac{\partial}{\partial z} + A_z\right) p^{\perp} = 0 \tag{4.8}$$

*e*

$$p A_{\bar{z}} p^{\perp} = 0; \tag{4.9}$$

*onde* $A_{\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\phi^{-1}\overline{\partial}\phi$ *e* $A_z = \dfrac{1}{2}\phi^{-1}\partial\phi$.

Vamos dar uma interpretação da definição acima. Seja $C^{\infty}(\underline{p})$ o conjunto das seções do subfibrado $\underline{p}$. Lembre que $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + A_{\bar{z}}\right)$ é a parte $(0,1)$ da conexão $D = d + A$. Então a equação (4.6) é equivalente a

$$D_{\bar{z}}(s) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + A_{\bar{z}}\right)(s) \in C^{\infty}(\underline{p}), \quad \forall s \in C^{\infty}(\underline{p});$$

ou seja, $\underline{p}$ é um subfibrado holomorfo de $\underline{\mathbb{C}}^n$ com respeito a estrutura holomorfa de Koszul-Malgrange determinada pela conexão $D$. Agora, a equação (4.7) é equivalente a

$$A_z(s) \in C^{\infty}(\underline{p}), \ \ \forall s \in \underline{p};$$

ou seja, $\underline{p}$ é invariante pelo endomorfismo $A_z$.

Vamos agora demonstrar o principal teorema da seção.

**Teorema 4.3.2** (Uhlenbeck). *Seja $\phi : M \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica e $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ um uniton para $\phi$. Então, a aplicação produto*

$$\tilde{\phi} = \phi(p - p^{\perp}) : M \longrightarrow U(n)$$

*é harmônica.*

**Demonstração:** Seja $\Phi : \mathbb{C}^* \times M \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ a solução estendida de $\phi$. Definimos $\tilde{\Phi} : \mathbb{C}^* \times M \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ por $\tilde{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda(p + \lambda p^\perp)$. Vamos mostrar que $\tilde{\Phi}$ é uma solução estendida. Observando que $\tilde{\Phi}_\lambda^{-1} = (p + \lambda^{-1}p^\perp)\Phi_\lambda^{-1}$ e calculando as derivadas parciais $\partial\tilde{\Phi}_\lambda$ e $\overline{\partial}\tilde{\Phi}_\lambda$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\lambda^{-1}\partial\tilde{\Phi}_\lambda &= (1-\lambda^{-1})\big\{\lambda^{-1}p^\perp A_z p + (A_z - \partial p) - p^\perp A_z p \\ &\quad -p(\partial p^\perp + A_z p^\perp) + \lambda p(\partial p^\perp + A_z p^\perp)\big\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\lambda^{-1}\overline{\partial}\tilde{\Phi}_\lambda &= (1-\lambda)\big\{\lambda^{-1}p^\perp(\overline{\partial}p + A_{\bar{z}}p) + (A_{\bar{z}} + \overline{\partial}p) \\ &\quad -pA_{\bar{z}}p^\perp - p^\perp(\overline{\partial}p + A_{\bar{z}}p) + \lambda pA_{\bar{z}}p^\perp\big\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora, como $p$ é um uniton para $\phi$, as equações (4.10) e (4.11) podem ser escritas como

$$\tilde{\Phi}_\lambda^{-1}\partial\tilde{\Phi}_\lambda = (1-\lambda^{-1})(A_z - \partial p), \tag{4.12}$$

$$\tilde{\Phi}_\lambda^{-1}\overline{\partial}\tilde{\Phi}_\lambda = (1-\lambda)(A_{\bar{z}} + \overline{\partial}p), \tag{4.13}$$

e assim as funções $\dfrac{\tilde{\Phi}_\lambda^{-1}\partial\tilde{\Phi}_\lambda}{(1-\lambda^{-1})}$ e $\dfrac{\tilde{\Phi}_\lambda^{-1}\overline{\partial}\tilde{\Phi}_\lambda}{(1-\lambda)}$ não dependem de $\lambda$. Então, pelo teorema 4.1.3, $\tilde{\Phi}$ é uma solução estendida e

$$\tilde{\Phi}_{-1} = \Phi_{-1}(p - p^\perp) = \phi(p - p^\perp) = \tilde{\phi}$$

é harmônica. ■

**Corolário 4.3.3.** *Se $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi$ e $\tilde{A} = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^{-1}d\tilde{\phi}$, então*

$$\tilde{A}_z = A_z - \partial p$$

*e*

$$\tilde{A}_{\bar{z}} = A_{\bar{z}} + \overline{\partial}p.$$

**Demonstração:** Basta observar que

$$\tilde{A}_z = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^{-1}\partial\tilde{\phi} = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_{-1}^{-1}\partial\tilde{\Phi}_{-1} = \frac{1}{2}(1-(-1))(A_z - \partial p) = A_z - \partial p.$$

De forma análoga chegamos a expressão para $\tilde{A}_{\bar{z}}$. ■

Este processo de obter novas Aplicações Harmônicas a partir de uma aplicação dada chama-se **Adição de Uniton**. Observe que se $\phi$ é uma aplicação constante, adicionar um uniton consiste na multiplicação da aplicação constante por uma função holomorfa $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ (e se $M$ for uma variedade Kähler, $p$ tal aplicação holomorfa será harmônica).

Uma pergunta natural neste momento é como construir um uniton. Dada uma aplicação harmônica $\phi : M \longrightarrow U(n)$, lembre que $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ é um uniton para $\phi$ se, e somente se:

1. $\underline{p}$ é um fibrado holomorfo em relação a estrutura complexa de Koszul-Malgrange determinada por $D^\phi = d + A^\phi$;
2. $A_z : \underline{p} \longrightarrow \underline{p}$.

Neste caso, $A_z : U \longrightarrow \mathrm{End}(\underline{\mathbb{C}}^n)$ é uma aplicação (seção) holomorfa (com respeito a tal estrutura) e assim, para cada $x \in U \subset M$ temos $(A_z)_x : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ um endomorfismo e $\mathrm{Im}(A_z)_x$ e $\ker(A_z)_x$ denotam a imagem e o núcleo desse endomorfismo. O fato de $A_z$ ser holomorfa, implica que dim $\mathrm{Im}(A_z)_x$ é constante, exceto em um conjunto finito de pontos isolados. Denote por $M'$ o conjunto aberto tal que dim $\mathrm{Im}(A_z)_x$ é constante.

**Definição 4.3.4.** *Considere $A_z|_{M'} : M' \times \mathbb{C}^n \longrightarrow M' \times \mathbb{C}^n$ a restrição de $A_z$ ao aberto $M'$. Definimos $\eta_k$ o fibrado núcleo de $A_z|_{M'}$, isto é, $\eta_k = \{(p, v) : A_z(p)(v) = 0,\, p \in M'\} \subset M' \times \mathbb{C}^n$.*

**Lema 4.3.5.** *Se $\phi : M \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica então $\eta_k$ é um fibrado holomorfo em relação a estrutura complexa de Koszul-Malgrange determinada por $D^\phi = d + A^\phi$.*

**Corolário 4.3.6.** *Seja $\Phi_\lambda$ uma solução estendida para $\phi$ e $\eta \subset \eta_k$ qualquer subfibrado de $\eta_k$ homorfo em relação a estrutura complexa determinada por $D^\phi$. Denote por p a aplicação Grassmanianna referente a este subfibrado(lembre que existe uma correspondência entre subfibrados de posto k em $\underline{\mathbb{C}}^n$ e aplicações $p : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$). Então $\tilde{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda(p + \lambda p^\perp)$ é uma solução estendida.*

**Observação 4.3.7.** *O Lema acima diz que o fibrado núcleo é um uniton e qualquer subfibrado holomorfo contido no fibrado núcleo também será um uniton [34],[36]. Da mesma forma, o fibrado imagem é um uniton e qualquer subfibrado que contém o fibrado imagem também é um uniton.*

**Definição 4.3.8.** *Um uniton $p$ é chamado de uniton básico se, e somente se, $p \subset \underline{\ker} A_z$ ou $p \supset \underline{\mathrm{Im}} A_z$.*

A noção de uniton básico será utilizada no Capítulo 5, onde mostraremos que qualquer aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(n)$ é composta por um produto de unitons básicos.

**Observação 4.3.9.** *O conceito de uniton foi estendido para grupos de Lie simples e compacto em [2].*

**Observação 4.3.10.** *O conceito de uniton foi estendido para aplicações $\phi : M^m \longrightarrow U(n)$, onde $M^m$ é uma variedade complexa de dimensão $m$ (não necessariamente uma superfície de Riemann) em [25].*

## 4.4 Um exemplo de aplicação harmônica em $U(4)$

Nesta seção vamos exibir um exemplo de uma aplicação harmônica em $U(4)$, composta por mais de um uniton. No capítulo 3, provamos que aplicações harmônicas são invariantes por transformações conformes no domínio. Vamos utilizar este resultado considerando $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e como domínio da construção $\mathbb{C}$.

Iniciamos com qualquer aplicação constante $\phi_0 : S^2 \longrightarrow U(4)$. Note que neste caso a 1-forma $A^{\phi_0}$ é identicamente nula e a conexão $D^{\phi_0} = d + A^{\phi_0} = d$ é a conexão trivial em $\underline{\mathbb{C}}^4 = S^2 \times \mathbb{C}^4$. Considere a aplicação

$$p_0 : S^2 - \{\infty\} \approx \mathbb{C} \longrightarrow G_1(\mathbb{C}^4) \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^3$$

dado por $z \longmapsto p_0(z) = \operatorname{proj} W_z$, onde $W_z$ é o subespaço gerado por $(z, 1, 0, 0)$ e $\operatorname{proj} W_z$ é a projeção ortogonal Hermitiana no subespaço $W_z$. Explicitamente,

$$p_0(z)(v) = \left( \frac{(v_1\bar{z} + v_2)z}{z\bar{z}+1}, \frac{v_1\bar{z}+v_2}{z\bar{z}+1}, 0, 0 \right),$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4$. Fixando a base canônica, temos as matrizes de $p_0(z)$ e $p_0^\perp(z) = I - p_0(z)$

$$p_0(z) = \begin{pmatrix} \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \frac{z}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ \frac{\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \frac{1}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_0^\perp(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z\bar{z}+1} & \frac{-z}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

A partir daqui vamos escrever somente $p_0 = p_0(z)$ para simplificar a notação. As derivadas parciais de $p_0$ são

$$\partial p_0 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & \frac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{-\bar{z}^2}{(z\bar{z}+1)^2} & \frac{-\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{\partial} p_0 = \begin{pmatrix} \frac{z}{(z\bar{z}+1)^2} & \frac{-z^2}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & \frac{-z}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Então $p_0^{\perp}\overline{\partial} p_0 = 0$ e assim $p_0$ é uma aplicação holomorfa. Adicionamos o uniton $p_0$ a aplicação $\phi_0$ e obtemos a aplicação harmônica

$$\phi_1 = \phi_0(p_0 - p_0^{\perp}).$$

Para encontrar um uniton para $\phi_1$, devemos tomar um subfibrado $\underline{p_1}$ do fibrado núcleo do endomorfismo $A_z^{\phi_1}$, holomorfo com relação a estrutura complexa determinada por $D^{\phi_1}$. Pelo corolário 4.3.3, temos

$$\begin{aligned} A_z^{\phi_1} &= A_z^{\phi_0} - \partial p_0 = -\partial p_0; \\ A_{\bar{z}}^{\phi_1} &= A_{\bar{z}}^{\phi_0} + \overline{\partial} p_0 = \overline{\partial} p_0, \end{aligned}$$

pois como $\phi_0$ é constante, $A_z^{\phi_0} \equiv 0$ e $A_{\bar{z}}^{\phi_0} \equiv 0$ . Considere a aplicação

$$p_1 : S^2 - \{\infty\} \approx \mathbb{C} \longrightarrow G_1(\mathbb{C}^4) \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^3$$

dado por $z \longmapsto p_1(z) = \operatorname{proj} H_z$, onde $H_z$ é o subespaço gerado por $(0, 0, z, 1)$ e $\operatorname{proj} H_z$ é a projeção ortogonal Hermitiana no subespaço $H_z$. Explicitamente,

$$p_1(z)(v) = \left(0, 0, \frac{(v_3\bar{z} + v_4)z}{z\bar{z}+1}, \frac{v_3\bar{z} + v_4}{z\bar{z}+1}\right),$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4$. Fixando a base canônica, temos as matrizes de $p_1(z)$ e $p_1^{\perp}(z) = I - p_1(z)$

$$p_1(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \frac{z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \frac{\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \frac{1}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix}; \quad p_1^{\perp}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z\bar{z}+1} & \frac{-z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \frac{-\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix};$$

As derivadas parciais de $p_1$ são

$$\partial p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\bar{z}^2}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix}; \quad \overline{\partial} p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{z}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z^2}{(z\bar{z}+1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix};$$

Agora, para verificar que $p_1$ é um uniton para $\phi_1$, vamos mostrar que este sub-fibrado satisfaz as equações de uniton (4.6) e (4.7). De fato,

$$\begin{aligned} p_1^{\perp} A_z^{\phi_1} p_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{-\bar{z}^2}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{1}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para a equação $p_1^{\perp}(\overline{\partial} p_1 + A_{\bar{z}}^{\phi_1} p_1)$, temos:

$$p_1^{\perp} \overline{\partial} p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{z}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z^2}{(z\bar{z}+1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} p_1^{\perp} A_{\bar{z}}^{\phi_1} p_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{z}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z^2}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{z}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z^2}{(z\bar{z}+1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $p_1$ é um uniton para $\phi_1$ e

$$\phi_2 = \phi_1(p_1 - p_1^{\perp}) = \phi_0(p_0 - p_0^{\perp})(p_1 - p_1^{\perp})$$

é uma aplicação harmônica. Tomando $\phi_0 = \mathrm{Id}$, temos aplicação

$$\phi_2(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{-z\bar{z}+1}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-2z}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ \dfrac{-2\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-1+z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-z\bar{z}+1}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-2z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{-2\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-1+z\bar{z}}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix}$$

Note que a aplicação $\phi_2$ toma valores em $G_2(\mathbb{C}^4) \subset U(4)$. De fato, primeiramente observe que $\phi_2^2 = \mathrm{Id}$, ou equivalentemente, $\phi_2 : S^2 \longrightarrow GR(\mathbb{C}^4)$, onde $GR(\mathbb{C}^4) = \bigcup_{k=1}^{3} G_k(\mathbb{C}^4)$. Portanto a imagem (vista como um operador) é uma projeção hermitiana sobre um subespaço de $\mathbb{C}^4$. Para determinar a dimensão de tal subespaço, devemos calcular a dimensão do autoespaço associado ao autovalor 1. Um cálculo direto mostra que o polinômio característico de $\phi_2(z)$ é $(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, o auto-espaço associado ao autovalor 1 é $V(1) = \ker(\phi_2(z) - I)$. Mas,

$$\phi_2(z) - I = \begin{pmatrix} \dfrac{2z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-2z}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ \dfrac{-2\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-2}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-2z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{-2\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{-2}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix}$$

tem nulidade 2 para todo $z$, e portando $\dim V(1) = 2$. Assim, concluímos que $\phi_2 : S^2 \longrightarrow G_2(\mathbb{C}^4)$.

Considerando ainda $\phi_2$ como uma aplicação na variedade de Grassmann $G_2(\mathbb{C}^4)$, observe que $\phi_2$ não é holomorfa (com relação à estrutura complexa canônica em $G_2(\mathbb{C}^4)$). De fato, uma aplicação $h : S^2 \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ é holomorfa (com relação à estrutura complexa canônica em $G_k(\mathbb{C}^n)$) se, e somente se, $h^{\perp}\overline{\partial}h = 0$. Através de um cálculo direto temos:

$$\phi_2^{\perp}(z) = I - \phi_2(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{2z}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ \dfrac{2\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{2}{z\bar{z}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2z\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{2z}{z\bar{z}+1} \\ 0 & 0 & \dfrac{2\bar{z}}{z\bar{z}+1} & \dfrac{2}{z\bar{z}+1} \end{pmatrix}$$

e

$$\overline{\partial}\phi_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2z^2}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{-2}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{2z}{(z\bar{z}+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2z^2}{(z\bar{z}+1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-2}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{2z}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix}.$$

E assim $\phi_2^{\perp}\overline{\partial}\phi_2 \neq 0$. Concluímos então que $\phi_2$ é uma aplicação harmônica não-holomorfa.

**Observação 4.4.1.** Foi provado por Sacks-Uhlenbeck [29] que qualquer aplicação harmônica $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow N$, com $E(\phi) < \infty$ possui uma única extensão a uma aplicação harmônica $\tilde{\phi} : S^2 \longrightarrow N$, onde $N$ é uma variedade Riemanniana compacta. Veja também [9] para maiores detalhes.

**Observação 4.4.2.** A classificação das aplicações harmônicas em $G_2(\mathbb{C}^4)$ foi feita por J. Ramanathan. Esta foi a primeira classificação de aplicações harmônicas em variedades que não eram espaços projetivos. Em seguida, Chern-Wolfson e independentemente Burstsal-Wood classificaram as aplicações harmônicas em $G_k(\mathbb{C}^n)$, onde $k = 2, 3, 4, 5, 6$. Finalmente, Uhlenbeck forneceu uma classificação de todas aplicações harmônicas em $G_k(\mathbb{C}^n)$, $k$ arbitrário, via classificação das aplicações harmônicas em $U(n)$.

## 4.5 A relação entre as energias $E(\phi)$ e $E(\tilde{\phi})$.

Nesta seção vamos estabelecer a relação entre a energia de $\phi$ e $\tilde{\phi}$. Começaremos com alguns resultados de topologia que serão úteis na demonstração dos teoremas a seguir. Nesta seção $M = S^2$.

**Definição 4.5.1.** *Dada uma função $f : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$, definimos o grau topológico* $\mathrm{gr}(f)$ *de $f$ como o grau algébrico da aplicação induzida na cohomologia:*

$$f^* : H^2(G_k(\mathbb{C}^n), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Como todo homomorfismo $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é da forma $h(x) = c.x$, o grau da aplicação é a constante $c$ e portanto $\mathrm{gr}(f) = f^*(1_{H^2(G_k(\mathbb{C}^n))}) \in H^2(M)$. Equivalentemente, se $\tilde{\omega}$ é a forma Kähler em $G_k(\mathbb{C}^n)$ normalizada de modo a ser um gerador positivo de $H^2(G_k(\mathbb{C}^n), \mathbb{Z})$, temos

$$\mathrm{gr}(f) = \int_M f^*(\tilde{\omega}).$$

**Proposição 4.5.2.** *Seja $f : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$. Então temos*

$$\mathrm{gr}(f) = -c_1(\underline{p}),$$

*onde $c_1(\underline{p})$ é a primeira classe de Chern do fibrado $\underline{p} \subseteq M \times \mathbb{C}^n$, associado a $f$.*

**Demonstração:** Seja $\xi$ o fibrado tautológico sobre $G_k(\mathbb{C}^n)$ cuja primeira classe de Chern $c_1(\xi)$ avaliada num gerador canônico é -1. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^k \arrow[d, dash, dotted] & \mathbb{C}^k \arrow[d, dash, dotted] \\
f^*\xi \arrow[r] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"] & G_k(\mathbb{C}^n)
\end{tikzcd}$$

Então,

$$c_1(\underline{p}) = c_1(f^*\xi) = f^*(c_1(\xi)) = f^*(-1) = -f^*(1) = -\mathrm{gr}(f),$$

e o resultado segue. ■

**Teorema 4.5.3** (Lichenerowicz). *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades compactas Kähler. Então a quantidade*

$$\int_M \left(\|\partial f\|^2 - \|\overline{\partial} f)\|^2\right) = \int_M f^*(\tilde{\omega})$$

*é um invariante homotópico de $f$, onde $\tilde{\omega}$ é a forma Kähler em $N$, $\partial f$ e $\overline{\partial} f$ denotam as partes $(1,0)$ e $(0,1)$ da diferencial de $f$, respectivamente.*

**Demonstração:** Ver [9], página 48 ■

Seja agora $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$. Definimos $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi = A_x dx + A_y dy$ a metade do pull-back da forma de Maurer-Cartan. Foi visto anteriormente que

$$E(\phi) = 2\int_{S^2} (A, A),$$

onde o produto interno é o do espaço $\mathfrak{u}(n) \otimes T^*(S^2)$ e em $\mathfrak{u}(n)$ tomamos o produto interno usual $(A, B) = Tr(A.B^*)$, onde $B^* = \overline{B}^T$. Então $\phi$ é harmônica se, e somente se, $d^*A = 0$.

Podemos considerar $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e usar coordenadas complexas. Dessa forma $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ e $A = \frac{1}{2}\phi^{-1}d\phi = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$, com $-A_{\bar{z}} = A_z^*$.

**Lema 4.5.4.** $E(\phi) = 2\int_{S^2} (A, A) = -8\int_{\mathbb{C}} Tr(A_z, A_{\bar{z}})$

**Demonstração:** Primeiramente, lembre que $A_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(A_x + iA_y)$ e $A_z = \frac{1}{2}(A_x - iA_y)$. Então,

$$\begin{aligned} A_x &= A_z + A_{\bar{z}} \\ A_y &= i(A_z - A_{\bar{z}}) \\ A_x^* &= -A_{\bar{z}} - A_z \\ A_y^* &= i(A_{\bar{z}} - A_z) \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned} 2\int_{S^2}(A,A) &= 2\int_{S^2}(A,A) = 2\int_{S^2}(A_x, A_x) + (A_y, A_y) = 2\int_{S^2} Tr(A_x, A_x^*) + Tr(A_y, A_y^*) \\ &= 2\int_{\mathbb{C}} Tr((A_z + A_{\bar{z}}).(-A_{\bar{z}} - A_z)) + Tr((iA_z - iA_{\bar{z}}).(iA_{\bar{z}} - iA_z)) \\ &= 2\int_{\mathbb{C}} -2Tr(A_z.A_{\bar{z}}) - 2Tr(A_{\bar{z}}.A_z) \\ &= 2\int_{\mathbb{C}} -4Tr(A_{\bar{z}}, A_z) \\ &= -8\int_{\mathbb{C}} Tr(A_{\bar{z}}, A_z), \end{aligned}$$

pois $Tr(A_z.A_{\bar{z}}) = tr(A_{\bar{z}}.A_z)$. ■

**Teorema 4.5.5** (G.Valli). *Seja $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica. Seja $\tilde{\phi} = \phi(p - p^{\perp})$ a aplicação harmônica obtida de $\phi$ pela adição do uniton $p$. Se $\Delta E_p = E(\tilde{\phi}) - E(\phi)$ e $c_1(\underline{p})$ é a primeira classe de Chern do fibrado $\underline{p} \subseteq S^2 \times \mathbb{C}^n$, então*

$$\Delta E_p = -8\pi c_1(\underline{p}).$$

**Demonstração:** Como $\tilde{A} = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^{-1}d\tilde{\phi} = \tilde{A}_z dz + \tilde{A}_{\bar{z}} d\bar{z}$, sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}_z dz & = & A_z - \partial p \\ \tilde{A}_{\bar{z}} d\bar{z} & = & A_{\bar{z}} + \overline{\partial} p. \end{array} \tag{4.14}$$

Utilizando integração por partes e observando que $E(\tilde{\phi}) = -8\displaystyle\int_{\mathbb{C}} Tr(\tilde{A}_{\bar{z}}, \tilde{A}_z)$, temos

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{8}E(\tilde{\phi}) & = & -\int_{\mathbb{C}} Tr(A_{\bar{z}}.A_z) + \int_{\mathbb{C}} Tr(\overline{\partial}p.\partial p) + \int_{\mathbb{C}} Tr(\partial p.A_{\bar{z}}) - \int_{\mathbb{C}} Tr(\overline{\partial}p.A_z) \\ \frac{1}{8}\Delta E_p & = & \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + \int_{\mathbb{C}} Tr(\partial p.A_{\bar{z}}) - \int_{\mathbb{C}} Tr(\overline{\partial}p.A_z) \\ & = & \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + \int_{\mathbb{C}} Tr(\partial(p.A_{\bar{z}}) - (p.\partial A_{\bar{z}})) - \int_{\mathbb{C}} Tr(\overline{\partial}(p.A_z) - (p.\overline{\partial}A_z)) \\ & = & \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + \int_{\mathbb{C}} Tr(\partial(p.A_{\bar{z}}) - (p.\partial A_{\bar{z}}) - \overline{\partial}(p.A_z) + (p.\overline{\partial}A_z)) \\ & = & \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + \int_{\mathbb{C}} Tr(\partial(p.A_{\bar{z}}) + (\partial(p.A_{\bar{z}}))^* - (p.\partial A_{\bar{z}}) + (p.\overline{\partial}A_z)) \\ & = & \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + \int_{\mathbb{C}} Tr(-(p.\partial A_{\bar{z}}) + (p.\overline{\partial}A_z)). \end{array}$$

Lembrando que

$$\overline{\partial}A_z + [A_{\bar{z}}, A_z] = 0$$

$$\partial A_{\bar{z}} + [A_z, A_{\bar{z}}] = 0;$$

temos

$$\frac{1}{8}\Delta E_p = \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + 2\int_{\mathbb{C}} Tr(p.[A_z, A_{\bar{z}}]). \tag{4.15}$$

Agora usando o fato que $p^2 = p^* = p$ e $p^{\perp} = (1-p)$, e lembrando da definição do nosso produto interno $\langle A, A\rangle = |A|^2 = Tr(A.A^*)$ e $Tr(A.B) = Tr(B.A)$, onde $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, temos

$$\begin{aligned}
|p^{\perp}\partial p|^2 + |p\,\partial p|^2 &= Tr((1-p)\partial p.((1-p)\partial p)^*) + Tr(p\,\partial p.(p\,\partial p)^*)\\
&= Tr((\partial - p\,\partial p).(\overline{\partial} p - \overline{\partial} p.p)) + Tr(p\,\partial p\overline{\partial} p.p)\\
&= Tr(\partial p\overline{\partial} p) - Tr(\partial p\overline{\partial} p.p) - Tr(p\,\partial p\overline{\partial} p) + Tr(p\,\partial p\overline{\partial} p.p) + Tr(p\,\partial p\overline{\partial} p.p)\\
&= Tr(\partial p\overline{\partial} p)\\
&= |\partial p|^2.
\end{aligned}$$

De forma análoga temos

$$|\partial p|^2 = |p^{\perp}\partial p|^2 + |p^{\perp}\overline{\partial} p|^2. \tag{4.16}$$

Agora, como $p$ é um uniton, temos $p^{\perp}\left(\overline{\partial} + A_{\bar{z}}\right)p = 0$, ou equivalentemente, $p^{\perp}\overline{\partial} p = -p^{\perp}A_{\bar{z}}p$. Assim,

$$\begin{aligned}
|p^{\perp}\overline{\partial} p|^2 &= |p^{\perp}A_{\bar{z}}p|^2 = -Tr(p^{\perp}A_{\bar{z}}ppA_z p^{\perp}) = -Tr(p^{\perp}A_{\bar{z}}pA_z)\\
&= -Tr((1-p).A_{\bar{z}}pA_z) = -Tr(A_{\bar{z}}pA_z) + Tr(pA_{\bar{z}}pA_z) = -Tr(A_{\bar{z}}pA_z) + Tr(pA_{\bar{z}}A_z)\\
&= -Tr(A_{\bar{z}}ppA_z) + Tr(pA_{\bar{z}}A_z p)\\
|p^{\perp}\overline{\partial} p|^2 &= |pA_{\bar{z}}|^2 - |A_{\bar{z}}p|^2.
\end{aligned}$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
Tr(p.[A_z, A_{\bar{z}}]) &= Tr(pA_zA_{\bar{z}}) - Tr(pA_{\bar{z}}A_z) = Tr(pA_zA_{\bar{z}}p) - Tr(pA_{\bar{z}}A_zp)\\
&= -|pA_z|^2 + |A_zp|^2 = -|p^{\perp}\overline{\partial} p|^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.17) em (4.15) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\Delta E_p &= \int_{\mathbb{C}} |\partial p|^2 + 2\int_{\mathbb{C}} Tr(p.[A_z, A_{\bar{z}}] = \int_{\mathbb{C}} |p^{\perp}\partial p|^2 + |p^{\perp}\overline{\partial} p|^2 - 2\int_{\mathbb{C}} |p^{\perp}\overline{\partial} p|^2\\
&= \int_{\mathbb{C}} (|p^{\perp}\partial p|^2 - |p^{\perp}\overline{\partial} p|^2).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A idéia agora é usar o teorema de Lichnerowicz. Para isso vamos calcular a diferencial exterior da aplicação $(p - p^{\perp}) : S^2 \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$:

$$\begin{aligned}
|d(p-p^{\perp})|^2 &= 4|dp|^2 = 16|\partial p|^2 = 16(|p^{\perp}\partial p|^2 + |p^{\perp}\overline{\partial} p|^2)\\
&= 8(|p^{\perp}\partial p\,dz|^2 + |p^{\perp}\overline{\partial} p\,d\bar{z}|^2))
\end{aligned}$$

e assim as partes holomorfa e anti-holomorfa da aplicação são $\sqrt{8}p^{\perp}\partial p\,dz$ e $\sqrt{8}p^{\perp}\overline{\partial} p\,d\bar{z}$, respectivamente. Pela proposição 4.5.2 e pelo teorema 4.5.3 concluímos que:

$$\frac{1}{8}\Delta E_p = \int_M (|p^{\perp}\partial p|^2 - |p^{\perp}\overline{\partial} p|^2) = \int_M (p-p^{\perp})^*(\omega) = \mathrm{gr}(p-p^{\perp}) = -C(k)c_1(\underline{p})$$

onde $C(k)$ é uma constante que depende somente de $k =$ posto de $\underline{p}$.

Vamos mostrar que $C(k) = 8\pi$ para cada $k$, calculando explicitamente o segundo membro da equação (4.18). Inicialmente, tome $n = 2$ e

$$\underline{p} = \{(z, v)|v = (z, 1), a \in \mathbb{C}\} \cup \{(\infty, v)|v = (a, 0), a \in \mathbb{C}\} \subseteq S^2 \times \mathbb{C}^2$$

o fibrado de linha tautológico sobre $S^2 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ com primeira classe de Chern igual a $-1$. Definimos a aplicação $p$ como:

$$\begin{array}{rcl} p : S^2 - \{\infty\} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \\ z & \longmapsto & p(z) : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \dfrac{\langle (v_1, v_2), (z, 1)\rangle}{\|(z, 1)\|}.(z, 1), \end{array} \end{array}$$

ou seja, $p(z)$ é a projeção ortogonal Hermitiana sobre o subespaço 1-dimensional gerado por $(z, 1)$. Explicitamente,

$$p(z)(v_1, v_2) = \left( \frac{(v_1\bar{z} + v_2)z}{z\bar{z} + 1}, \frac{v_1\bar{z} + v_2}{z\bar{z} + 1} \right).$$

Fixando a base canônica de $\mathbb{C}^2$, temos a seguinte matriz do operador $p(z)$:

$$[p(z)]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} \dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z} + 1} & \dfrac{z}{z\bar{z} + 1} \\ \\ \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z} + 1} & \dfrac{1}{z\bar{z} + 1} \end{pmatrix};$$

e a partir de agora, para simplificar a notação, vamos escrever somente $p = p(z)$ e estaremos pensando na matriz do operado, na base fixada. Assim,

$$p^{\perp} = I - p = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z\bar{z} + 1} & \dfrac{-z}{z\bar{z} + 1} \\ \\ \dfrac{-\bar{z}}{z\bar{z} + 1} & \dfrac{z\bar{z}}{z\bar{z} + 1} \end{pmatrix};$$

e as derivadas parciais de $p$ são

$$\partial p = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{z}}{(z\bar{z} + 1)^2} & \dfrac{1}{(z\bar{z} + 1)^2} \\ \\ \dfrac{-\bar{z}^2}{(z\bar{z} + 1)^2} & \dfrac{-\bar{z}}{(z\bar{z} + 1)^2} \end{pmatrix}; \quad \overline{\partial} p = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{(z\bar{z} + 1)^2} & \dfrac{-z^2}{(z\bar{z} + 1)^2} \\ \\ \dfrac{1}{(z\bar{z} + 1)^2} & \dfrac{-z}{(z\bar{z} + 1)^2} \end{pmatrix};$$

Lembre que $|p^{\perp}\partial p|^2 = Tr(p^{\perp}\partial p.(p^{\perp}\partial p)^*) = Tr(p^{\perp}\partial p.\partial\overline{p}.p^{\perp})$. Da definição das matrizes acima segue que:

$$\overline{\partial}p.p^{\perp} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z^2}{(z\bar{z}+1)^2} \\ \\ \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-z}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix}; \quad p^{\perp}.\partial p = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2} \\ \\ \dfrac{-\bar{z}^2}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{-\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} \end{pmatrix};$$

$$p^{\perp}.\partial p.\overline{\partial}p.p^{\perp} = \begin{pmatrix} \dfrac{z\bar{z}+1}{(z\bar{z}+1)^4} & \dfrac{-z-\bar{z}z^2}{(z\bar{z}+1)^4} \\ \\ \dfrac{-\bar{z}^2-\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^2} & \dfrac{\bar{z}^2z^2+z\bar{z}}{(z\bar{z}+1)^4} \end{pmatrix};$$

e portanto $|p^{\perp}\partial p|^2 = \dfrac{1}{(z\bar{z}+1)^2}$.

Finalmente, note que $p^{\perp}\overline{\partial}p = 0$ e consequentemente $|p^{\perp}\overline{\partial}p|^2 = 0$ e portanto,

$$\Delta E_p = 8\int_{\mathbb{C}}(|p^{\perp}\partial p|^2 - |p^{\perp}\overline{\partial}p|^2) = 8\int_{\mathbb{C}}\frac{1}{(z\bar{z}+1)^2} = 8\pi,$$

e daí segue que $C(k) = 8\pi$. Por um cálculo análogo determinamos a mesma constante no ponto $\infty$. Para o caso geral, escolha soma diretas de cópias de $\underline{p}$ com produto $S^2 \times \mathbb{C}^m$. ■

**Observação 4.5.6.** O teorema de Valli reponde a questão proposta por Uhlenbeck em [34]: *"Existe uma interpretação topológica para o uniton"* ?

# CAPÍTULO 5

# Unicidade da Fatoração

Neste capítulo, demonstraremos que toda aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(n)$ pode ser fatorada num produto finito de *unitons*, de forma única. Este resultado é devido a K. Uhlenbeck [34]. Apresentaremos aqui uma interpretação deste resultado dado por Wood em [36].

## 5.1 Um Teorema de Existência e Unicidade de Fatoração

Seja $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica. Dizemos que $\phi$ é *fatorável* (com produto de $k$ unitons) se podemos escrever

$$\phi = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^{\perp}) \dots (\beta_k - \beta_k^{\perp}), \tag{5.1}$$

onde $\phi_0 : M \longrightarrow U(n)$ é uma aplicação constante e para cada $i = 1, \dots, k$, $\beta_i$ é um uniton para $\phi_{i-1} = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^{\perp}) \dots (\beta_{i-1} - \beta_{i-1}^{\perp})$. Observe que se $k = 0$, temos $\phi = \phi_0$. A expressão (5.1) é chamada ***fatoração*** de $\phi$.
Uhlenbeck [34] provou que qualquer aplicação harmônica $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ é fatorável com produto de $k$ unitons, com $k \leq n - 1$. Vamos dar aqui um método algébrico simples de fatoração devido a Wood [36], análogo ao método de Iteração de Aplicação de Gauss utilizado para caso de aplicações harmônicas em Grassmannianas. Este método tem a vantagem que os unitons envolvidos na fatoração são todos *unitons básicos*. Iniciamos com dois lemas auxiliares.

**Lema 5.1.1.** *Seja $\phi : M \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica e $\underline{\alpha}$ um uniton para $\phi$. Então*

$$\underline{\alpha} \supseteq \underline{\mathrm{Im}} A_z^\phi \Longleftrightarrow \underline{\alpha}^\perp \subseteq \underline{\ker} A_z^{\tilde{\phi}},$$

*onde $\tilde{\phi} = \phi(\alpha - \alpha^\perp)$.*

**Demonstração:** Derivando $\alpha\alpha^\perp = 0$ temos,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\alpha\right)\alpha^\perp + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp\right) = 0,$$

e portanto, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\alpha\right)\alpha^\perp = -\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp\right)$. Pelo corolário 4.3.3, temos

$$A_z^{\tilde{\phi}}\alpha^\perp = \left(A_z^\phi - \frac{\partial}{\partial z}\alpha\right)\alpha^\perp = A_z^\phi\alpha^\perp - \left(\frac{\partial}{\partial z}\alpha\right)\alpha^\perp = A_z^\phi\alpha^\perp + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp\right).$$

Note que

$$A_z^{\tilde{\phi}}\alpha^\perp = \alpha\left(A_z^\phi + \frac{\partial}{\partial z}\right)\alpha^\perp - \alpha^\perp A_z^\phi\alpha + \alpha^\perp A_z^\phi. \tag{5.2}$$

De fato, usando $\alpha + \alpha^\perp = I$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha\left(A_z^\phi + \frac{\partial}{\partial z}\right)\alpha^\perp - \alpha^\perp A_z^\phi\alpha + \alpha^\perp A_z^\phi &= \alpha A_z^\phi\alpha^\perp + \alpha\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp - \alpha^\perp A_z^\phi\alpha + \alpha^\perp A_z^\phi \\
&= \alpha A_z^\phi\alpha^\perp + \alpha\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp + \alpha^\perp A_z^\phi(-\alpha + I) \\
&= \alpha A_z^\phi\alpha^\perp + \alpha\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp + \alpha^\perp A_z^\phi\alpha^\perp \\
&= (\alpha + \alpha^\perp)A_z^\phi\alpha^\perp + \alpha\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp \\
&= A_z^\phi\alpha^\perp + \alpha\frac{\partial}{\partial z}\alpha^\perp \\
&= A_z^{\tilde{\phi}}\alpha^\perp.
\end{aligned}$$

Como $\underline{\alpha}$ é um uniton para $\phi$, o primeiro e o segundo termo de (5.2) são nulos, e portanto, $A_z^{\tilde{\phi}}\alpha^\perp = \alpha^\perp A_z^\phi$. O lema segue observando $A_z^{\tilde{\phi}}\alpha^\perp = 0$ se, e somente, $\underline{\alpha}^\perp \subseteq \underline{\ker} A_z^{\tilde{\phi}}$ e $\alpha^\perp A_z^\phi = 0$ se, e somente se, $\underline{\mathrm{Im}} A_z^\phi \subseteq \underline{\alpha}$. ∎

**Lema 5.1.2.** *Sejam $E$ e $F$ fibrados holomorfos de mesmo posto $r$ sobre uma superfície de Riemann compacta $M$ de gênero $p$ e $\mathcal{B} = A \otimes dz$ uma seção holomorfa de $(T^{1,0}M)^* \otimes L(E,F)$, isto é, $\mathcal{B}$ é uma 1-forma holomorfa com valores em $L(E,F)$. Se $A$ é um isomorfismo em cada fibra então $c_1(F) \geq c_1(E) + r(2-2p)$, onde $c_1(F)$ e $c_1(E)$ representam a primeira classe de Chern dos fibrados $F$ e $E$ respectivamente, avaliada num gerador de $H^2(M, \mathbb{Z})$.*

**Demonstração:** Considere a $r$-forma $\Lambda^r\mathcal{B}$. Note que ela é uma seção holomorfa no fibrado de linha $L = \otimes^r(T^{1,0}M)^* \otimes L(\Lambda^r E, \Lambda^r F)$. Agora, lembre que se $\xi^*$ é o fibrado dual de um fibrado $\xi$, então $c_i(\xi^*) = (-1)^i c_i(\xi)$ e que a classe de Chern *top* $c_n(\xi)$ é igual a classe de Euler $e(\xi)$. Assim,

$$\begin{aligned} c_1(L) &= -r.c_1(TM) - c_1(\Lambda^r E) + c_1(\Lambda^r F) \\ &= -r.e(TM) - c_1(\Lambda^r E) + c_1(\Lambda^r F). \end{aligned}$$

Agora, $e(TM)$ avaliada num gerador de $H^2(M)$ é igual a $\chi(M) = 2 - 2p$, onde $p$ é o gênero de $M$ e $c_1(\Lambda^r E) = c_1(E)$. Então,

$$c_1(L) = -r(2-2p) - c_1(E) + c_1(F).$$

Se $c_1(L) < 0$, $\Lambda^r\mathcal{B}$ é identicamente nulo e assim $A$ não pode ser um isomorfismo, o que contradiz a hipótese. Então $c_1(L) \geq 0$ e portanto

$$c_1(F) \geq c_1(E) + r(2-2p).$$

■

O próximo lema (devido a G. Valli) é análogo a um importante resultado (devido a Wolfson) que diz que a iterada da aplicação de Gauss de uma aplicação harmônica de $S^2$ em uma grassmanniana é zero a partir de um certo ponto.

**Lema 5.1.3.** *Seja $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica. Seja $\phi^0 = \phi$ e para cada $i = 1, 2, \ldots$ definimos*

$$\phi^{i+1} = \phi^i(\alpha^i - (\alpha^i)^\perp), \quad \textit{onde } \underline{\alpha}^i = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi^i}. \tag{5.3}$$

*Então $\phi^r$ é constante para algum $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

**Demonstração:** Primeiramente, note que $\underline{\alpha}^i$ é um uniton para $\phi^i$, para cada $i = 1, 2, \ldots$. Como $\underline{\alpha_i} = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi^i}$, pelo lema 5.1.1 temos que $(\underline{\alpha}^i)^\perp \subseteq \underline{\ker} A^{\phi^{i+1}}$. O endomorfismo $A_z^{\phi^{i+1}} : \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}^n$ é sobrejetivo sobre sua imagem (em quase toda fibra). Assim

$$A_z^{\phi^{i+1}} : \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi^{i+1}} = \underline{\alpha}^{i+1};$$

como $\underline{\mathbb{C}}^n = \alpha^i \oplus (\alpha^i)^\perp$, podemos restringir $A_z^{\phi^{i+1}}$ a uma aplicação holomorfa (morfismo de fibrados)

$$\psi^{i+1} : \underline{\alpha}^i \longrightarrow \underline{\alpha}^{i+1},$$

sobrejetiva em quase toda fibra e, consequentemente, *posto* $\underline{\alpha}^{i+1} \leq$ *posto* $\underline{\alpha}^i$. Globalmente, $\psi^{i+1}$ é uma seção holomorfa de $(T^{1,0}M)^* \otimes L(\underline{\alpha}^i, \underline{\alpha}^{i+1}) \approx (T^{1,0}M)^* \otimes (\underline{\alpha}^i)^* \otimes \underline{\alpha}^{i+1}$.
Temos então dois casos a considerar:
**1º Caso**: *posto* $\underline{\alpha}^{i+1} <$ *posto* $\underline{\alpha}^i$;
**2º Caso**: *posto* $\underline{\alpha}^{i+1} =$ *posto* $\underline{\alpha}^i$.
Vamos mostar que o 2º caso não pode acontecer para todo $i$. De fato, neste caso teríamos isomorfismo e pelo lema 5.1.2 segue que

$$c_1(\underline{\alpha}^{i+1}) \geq c_1(\underline{\alpha}^i) + 2r \geq c_1(\underline{\alpha}^i) + 2, \ \forall i, \tag{5.4}$$

pois o gênero de $S^2$ é igual a zero e $r \geq 1$ é o posto de $\underline{\alpha}^{i+1}$ (note que se posto $\underline{\alpha}^i =$ posto $\underline{\alpha}^{i+1} = 0$, $\phi$ é constante e este é o caso trivial). A desigualdade (5.4) nos diz que $c_1(\underline{\alpha}^i)$ deve ser positivo para todo $i$ maior do que ou igual a algum $i_0$. Mas então, pela fórmula de Valli, temos $E(\phi^{i+1}) - E(\phi^i) = -8\pi c_1(\underline{\alpha}^i)$. Assim,

$$\begin{aligned} E(\phi^{i+1}) &= E(\phi^i) - 8\pi c_1(\underline{\alpha_i}) \ \text{ e como } c_1(\underline{\alpha_i}) > 0, \ \forall i \geq i_0 \\ E(\phi^{i+1}) &< E(\phi^i) - 8\pi, \ \forall i \geq i_0. \end{aligned}$$

Mas como a energia $E$ de qualquer aplicação harmônica é não negativa, isto é um absurdo. Temos então que *posto* $\underline{\alpha}^{i+1} <$ *posto* $\underline{\alpha}^i$. Repetindo o argumento, temos que $\underline{\alpha}^r$ deve ser zero para algum $r$. Mas então $A_z^{\phi^r} = 0$ e $\phi^r$ é constante. ∎

Dado uma aplicação harmônica $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$, seja $r$ o menor inteiro não negativo tal que $\phi^r$ é constante. Dizemos que $r-1$ é a $A_z-$**ordem** de $\phi$. O Lema 5.1.3 diz que qualquer aplicação harmônica $S^2 \longrightarrow U(n)$ possui $A_z-$ordem finita.

Seja $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ uma aplicação harmônica de $A_z-$ordem finita igual a $r-1$. Definimos a sequência $\phi^i$ e $\underline{\alpha}^i$ como na equação (5.3). Vamos agora definir uma nova sequência, que será a “reversa” de (5.3):

$$\phi_i = \phi^{r-i}, \ \ \underline{\alpha_i} = \underline{\alpha}^{r-i} = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i}, \ \ \underline{\beta_i} = \underline{\alpha_i}^\perp \ \ (i = 1, \ldots, r). \tag{5.5}$$

Com esta nova sequência, obtemos uma fatoração $\phi = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^\perp) \ldots (\beta_r - \beta_r^\perp)$, onde $\phi_0$ é uma aplicação constante cada $\beta_i$ é um uniton para $\phi_{i-1} = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^\perp) \ldots (\beta_{i-1} - \beta_{i-1}^\perp)$. Chamamos este processo de ***fatoração por*** $A_z-$***imagens***. O próximo resultado é o principal desta seção. Nele caracterizamos a fatoração descrita acima.

**Teorema 5.1.4** (Unicidade da Fatoração)**.** *Toda aplicação harmônica* $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ *possui uma única fatoração da forma*

$$\phi = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^\perp) \ldots (\beta_r - \beta_r^\perp), \tag{5.6}$$

*onde* $\phi_0 : S^2 \longrightarrow U(n)$ *é uma aplicação constante e* $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *tal que, se definimos* $\phi_i = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^\perp) \ldots (\beta_i - \beta_i^\perp)$, $(i = 1, \ldots, r)$ *então*

1. $\underline{\beta_1} \neq \underline{\mathbb{C}}^n$*, ou equivalentemente,* $\phi_1$ *não é constante;*

2. $\underline{\beta_i}$ *é um uniton básico para* $\phi_{i-1}$, $(i = 1, \ldots, r)$*;*

3. $\underline{\ker}(A_{\bar{z}}^{\phi_i}|\underline{\beta_i}^\perp) = 0$, $(i = 1, \ldots, r)$.

*Além do mais, a* $A_z-$*ordem de* $\phi$ *é* $r - 1$ *e* $\underline{\beta_i}^\perp = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i}$, $(i = 1, \ldots, r)$, *isto é, (5.6) é uma fatoração de* $\phi$ *por* $A_z-$*imagens (Se* $\phi$ *é constante,* $r = 0$ *e (5.6) é reduzido a* $\phi = \phi_0$*).*

**Demonstração:** **Existência.** A fatoração de $\phi$ por $A_z-$imagens descrita acima possui todas propriedades requeridas. De fato, tome uma fatoração por $A_z-$imagens da aplicação $\phi$ que tenha $A_z-$ordem igual a $r - 1$ e então:

1. $\phi_1$ é, por definição, igual a $\phi^{r-1}$. Este último, por sua vez, é não constante, pois caso contrário a $A_z-$ordem de $\phi$ seria menor do que $r - 1$ e isso é uma contradição. Assim, $\phi_1$ é não constante.

2. Lembre que $\underline{\beta_i} = \underline{\alpha_i}^\perp$ e $\underline{\alpha_i} = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i}$. Pelo Lema 5.1.1, temos que $\underline{\beta_i} \subseteq \underline{\ker} A_z^{\phi_{i-1}}$ e portanto $\underline{\beta_i}$ é um uniton básico.

3. Primeiro, observe que $A_z^{\phi_1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i} = \underline{\alpha_i} = \underline{\beta_i}^\perp$ é sobrejetor. Sabemos que $A_{\bar{z}}^{\phi_i} = -(A_z^{\phi_i})^*$ e que $\underline{\ker}(A_{\bar{z}}^{\phi_i}|\underline{\beta_i}^\perp) = \Big\{(p, v) \in \underline{\beta_i}^\perp : A_{\bar{z}}^{\phi_i}(p)(v) = 0\Big\}$. Então, para cada $p \in M$ e $\forall u \in \mathbb{C}^n$, temos:

$$-\langle A_{\bar{z}}^{\phi_i}(p)(v), u\rangle = \left\langle v, A_z^{\phi_i}(p)(u)\right\rangle .$$

   Tome $(p, v) \in \underline{\ker}(A_{\bar{z}}^{\phi_i}|\underline{\beta_i}^\perp)$. Então,

$$\begin{aligned} A_{\bar{z}}^{\phi_i}(p)(v) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\langle A_{\bar{z}}^{\phi_i}(p)(v), u\rangle = 0, \ \ \forall u \\ &\Rightarrow \quad \langle v, A_z^{\phi_i}(p)(u)\rangle = 0, \ \ \forall u \\ &\Rightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0, \ \ \forall w \in \mathbb{C}^n \\ &\Rightarrow \quad v = 0, \end{aligned}$$

   pois $A_z^{\phi_1} : \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \underline{\beta_i}^\perp$ é sobrejetor.

**Unicidade.** Suponha que exista uma fatoração (5.6) satisfazendo (1), (2) e (3). Pela condição (2), temos que $\underline{\beta_i} \subset \underline{\ker} A_z^{\phi_{i-1}}$ e então, pelo lema 5.1.1 temos $\underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i} \subseteq \underline{\beta_i}^\perp$, $(i = 1, \ldots, r)$. Por outro lado, a condição (3), juntamente com fato que $A_{\bar{z}}^{\phi_i} = -(A_z^{\phi_i})^*$, diz que $A_z^{\phi_i} : \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \underline{\beta_i}^\perp$ é sobrejetiva e assim $\underline{\beta_i}^\perp = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i}$, ou equivalentemente, $\underline{\beta_i} = (\underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_i})^\perp$. Vamos considerar a sequência reversa $\phi^i = \phi_{r-i}$, $\underline{\alpha}^i = \underline{\beta}_{r-i}^\perp = \underline{\mathrm{Im}} A_z^{\phi_{r-i}}$. Observe que esta é a sequência definida em (5.3) e a condição (1) implica que a $A_z-$ordem de $\phi$ é precisamente $r-1$. Assim esta fatoração é por $A_z-$imagens e então temos a unicidade. ■

Usando o Teorema 5.1.4 vamos descrever uma parametrização de todas aplicações harmônicas $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$. Para isto, seja $\Sigma$ o conjunto das sequências finitas $(\phi_0, \underline{\beta_1}, \ldots, \underline{\beta_r})$, onde $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que:

1. $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$ é uma aplicação constante;

2. $\underline{\beta_1}, \ldots, \underline{\beta_r}$ são subfibrados de $\underline{\mathbb{C}}^n$ tal que, se definimos

$$\phi_i = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^\perp)\ldots(\beta_i - \beta_i^\perp), \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, r,$$

   o fibrado $\underline{\beta_i}$ é um subfibrado holomorfo de $\ker A_{\bar{z}}^{\phi^{i-1}}$ com $\underline{\beta_1} \neq \underline{\mathbb{C}}^n$. Seja $\Sigma_0 \subset \Sigma$ o subconjunto dos elementos $(\phi_0, \underline{\beta_1}, \ldots, \underline{\beta_r})$ tais que $\underline{\ker}(A_{\bar{z}}^{\phi_i} | \underline{\beta_i}^\perp) = 0$, para todo $i$. Esta última condição garante que *posto* $\underline{\beta_i} \neq 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$.

O próximo resultado é uma conseqüência imediata do teorema de existência e unicidade.

**Teorema 5.1.5.** *A função* $\Theta : \Sigma_0 \longrightarrow \mathrm{Harm}(S^2, U(n))$, *dada por* $(\phi_0, \underline{\beta_1}, \ldots, \underline{\beta_r}) \mapsto \phi$, *onde* $\phi$ *é definida por* $\phi = \phi_0(\beta_1 - \beta_1^\perp)\ldots(\beta_r - \beta_r^\perp)$, *é uma bijeção entre* $\Sigma_0$ *e o conjunto de todas aplicações harmônicas* $\phi : S^2 \longrightarrow U(n)$.

**Observação 5.1.6.** *Se* $M$ *é uma superfície de Riemann arbitrária, nem todas aplicações harmônicas* $\phi : M \longrightarrow U(n)$ *possuem* $A_z$*-ordem finita (isto é, a sequência (5.3) é constante para algum* $r$*). Por exemplo, para qualquer aplicação harmônica não constante* $\phi : T^2 \longrightarrow U(1)$ *a sequência (5.3) será* $\phi^{i+1} = \pm\,\phi^i$, *para todo i [36]. Portanto, as técnicas descritas neste capítulo não podem ser utilizadas, por exemplo, para classificação de aplicações harmônicas* $T^2 \longrightarrow U(n)$.

**Observação 5.1.7.** *A classificação das aplicações harmônicas de* $S^2$ *em um grupo de Lie simples e compacto* $G$ *(e consequentemente nos espaços simétricos compactos* $G/K$*), é construída em [2].*

# BIBLIOGRAFIA


[1] P.Baird and J.C.Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs **29**, Oxford University Press (2003)

[2] F.E.Burstall and M.A.Guest, *Harmonic two-spheres in compact symmetric spaces, revisited*, Math. Ann. **309** (1997) 541-572.

[3] Burstsall and Rawsley, *Twistor theory for riemmaniann symmetric spaces*, Lectures Notes in Math. **1424**, Spring (1990)

[4] E.Calabi, *Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres*, J.Differential Geometry **1** (1967), 111-125.

[5] M.P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Coleção Textos Universitários, SBM (2005).

[6] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA (2006).

[7] J.Cheeger and D.G.Ebin, *Comparsion theorems in Riemannian geometry*, North-Holland Publishing Company (1975).

[8] S.S.Chern, *Minimal surfaces in an Euclidean space of N dimensions*, in "Differential and Combinatorial Topology", Symp. in Honor of Marston Morse, Princeton University Press (1965), 187-198.

[9] J.Eells and L.Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, C.B.M.S. Region. Conf. Ser. **50** Am. Math. Soc. (1983).

[10] J.Eells and L.Lemaire, *Report on harmonic maps*, Bull.Lond.Math.Soc. **10** (1978), 11-68.

[11] J.Eells and L.Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull.Lond.Math.Soc. **20** (1988), 385-524.

[12] J.Eells and J.C.Wood, *Harmonic maps from surfaces into complex projective spaces*, Adv. in Math **49** (1983), 217-263.

[13] J.Eells and J.Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **109** (1964), 109-160.

[14] R.L.Fernandez, *Variedade Diferenciáveis, Notas de Aula* Universidade do Porto (2006).

[15] P.Griffiths and J.Harris, *Principles of algebraic geometry*, Jonh Wiley e Sons (1978).

[16] V.Guillemin and A.Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall Inc. (1974).

[17] A.Hatcher, *Vector bundles and K-theory*, Versão Preliminar (2007).

[18] D.Hussemoller, *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1966).

[19] S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry vol I e II*, Interscience Publishers (1969).

[20] S.Kobayashi, *Differential geometry os complex vector bundles*, Princeton University Press (1987).

[21] J.L.Koszul and B.Malgrange, *Sur certaines structures fibrées complexes*, Arch. Math **9** (1958) 102-109.

[22] J.W.Milnor and J.D.Stascheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1974).

[23] C.J.C.Negreiros, *Harmonic maps from compact Riemann surface into flag manifolds*, Thesis, University of Chicago (1987).

[24] A.Newlander and L.Niremberg, *Complex analytic coordenates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391-404.

[25] Y.Ohnita and G.Valli, *Pluriharmonic maps into compact Lie groups and factorization into unitons*, Proc. Lond. Math. Soc. **61** (1990), 546-570.

[26] P.Piazza, *Operatori ellittici e topologia*, Notas de Aula, University of Roma *“La Sapienza”* (2006).

[27] J.Ramanathan, *Harmonic maps from $S^2$ to $G_2(\mathbb{C}^4)$*, J. Differential Geometry **19** (1984) 207-219.

[28] A.Rigas, *Grupo de Lie via exemplos*, 19o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1993).

[29] J.Sacks and K.Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of two-spheres*, Ann. of Math **113** (1981), 1-24.

[30] L.A.B.San Martin, *Álgebras de Lie*, Editora Unicamp, (1997).

[31] L.A.B.San Martin, *Grupos de Lie*, Versão Preliminar, (2006).

[32] R.W.Sharpe, *Differential geometry: Cartan´s generalization of Klein´s Erlangen Program*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1997).

[33] S.R.Simanca, *Canonical metrics on compact almost complex manifolds*, Publicações Matemáticas, IMPA (2004).

[34] K.Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model)*, J. Differential Geometry **30** (1989), 1-50.

[35] G.Valli, *On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups*, Topology **27** (1988), 129-136.

[36] J.C.Wood, *Explicit construction and parametrization of harmonic two-spheres in the unitary group*, Proc. London Math. Soc. **58** (1989), 608-624.

[37] J.C.Wood, *Harmonic maps and integrable systems*, Aspects of Mathematics E23, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1994) 29-55.