Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Equações de Convolução em Espaços de Aplicações Quase-Nucleares de um Dado Tipo e uma Dada Ordem

por

Vinícius Vieira Fávaro †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP, processo 04/13520-3.

Equações de Convolução em Espaços de Aplicações Quase-Nucleares de um Dado Tipo e uma Dada Ordem

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Vinícius Vieira Fávaro** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 16 de julho de 2007.

Mário C Matos

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio.

Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva.

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino.

Tese, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Fávaro, Vinicius Vieira

F277e Equações de convolução em espaços de aplicações quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem / Vinicius Vieira Fávaro -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Mário Carvalho de Matos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Funções holomorfas. 3. Espaços localmente convexos. I. Matos, Mário Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Convolution equations on spaces of entire functions of a given type and order.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Banach spaces. 2. Holomorphic mappings. 3. Locally convex spaces.

Área de concentração: Análise Funcional

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva (UFRJ)
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino (UFPB)

Data da defesa: 16/07/2007

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 16 de julho de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

Prof. (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof. (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO ROBERTO DA SILVA

Prof. (a) Dr. (a). DANIEL MARINHO PELLEGRINO

Aos meus queridos familiares

AGRADECIMENTOS

Eu não poderia deixar de agradecer primeiramente a Deus, por abençoar tanto a minha vida, desde a minha existência; por me guiar durante esta etapa de doutoramento, por iluminar sempre os caminhos pelos quais devo seguir, por sempre me dar força e colocar entusiasmo e empenho em tudo que eu faço.

Ao meu orientador, Mário Matos, pela credibilidade que depositou em mim, pela paciência com o meu desconhecimento de certos assuntos e por toda ajuda que me concedeu com o seu extenso conhecimento matemático. Tive muita sorte de tê-lo como orientador.

À minha mãe, Júnia, por todos os sacrifícios que fez por mim, por tudo que sempre me ensinou e proporcionou, além do amor e dedicação que sempre teve por mim.

Aos meus irmãos, Tatinho e Lucília, pelo amor e dedicação que sempre tiveram por mim, por ajudarem a me criar e por mostrarem a importância que a família tem na vida de uma pessoa.

Ao meu pai que me incentivou a fazer doutorado e que sempre me ajudou em tudo que precisei.

À minha namorada, Fernanda, por me propocionar uma vida mais feliz, por entender a importância que esse doutorado tem na minha vida e pelo carinho e amor que sempre me deu. Além disso, à toda sua familia sou grato.

À minha cunhada, Tatinha, e aos meus sobrinhos, Thais, Carlos Jr., Daniel, Thales, Tatiana, Lucas, Leandro e Nathália, pelo carinho e amor que sempre me deram.

Aos companheiros que iniciaram comigo no doutorado e foram importantíssimos na primeira etapa do mesmo. Aos tantos amigos de república que foram como uma família: Allan, Ariosvaldo, Carlin, Helson, Marcelo, Neiton, Rafael, Ricardo e Weber. Agradeço também aos amigos, Bruno, Daniela, Edcarlos, Ederson, Fábio, Germano, José Antônio, Josué, Juan, e Ximena; aos demais amigos de curso, tanto do IMECC/UNICAMP, quanto da FAMAT/UFU, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória.

Aos professores do IMECC-UNICAMP e aos professores da FAMAT-UFU, em especial aos professores Geraldo Botelho, que me iniciou na Análise, e Jorge Mujica.

Aos funcionários do IMECC, em especial Cidinha, Tânia e Ednaldo.

Agradeço também aos demais amigos e familiares que acabei não mencionando nominalmente, mas que, de certa forma, tiveram uma fatia de contribuição neste trabalho, já que fizeram parte de momentos inesquecíveis de vivência e aprendizado durante toda minha vida.

À FAPESP pelo apoio financeiro indispensável.

Aos membros da banca examinadora da minha tese de doutorado, pelas valiosas contribuições para esta versão final.

ABSTRACT

In this work we introduce the spaces of $(s; m(r,q))$-summing functions of a given type and order defined in E, and the spaces of $(s;(r,q))$-quasi-nuclear functions of a given type and order defined in E, and we prove that the Fourier-Borel transform identify the dual of the space of $(s;(r,q))$-quasi-nuclear functions of a given type and order defined in E, with the space of $(s'; m(r',q'))$-summing functions of a corresponding type and order defined in E'. We also prove division theorems for $(s; m(r,q))$-summing functions of a given type and order and division theorems involving the Fourier-Borel transform. As a consequence we prove the existence and approximation results for convolution equations on the spaces of $(s;(r,q))$-quasi-nuclear functions of a given type and order.

RESUMO

Neste trabalho introduzimos os espaços de funções $(s; m(r,q))$-somantes de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em E, e os espaços de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em E, e provamos que a transformada de Fourier-Borel identifica o dual do espaço de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em E, com o espaço de funções $(s'; m(r',q'))$-somantes de um correspondente tipo e uma correspondente ordem, definidas em E'. Provamos também teoremas de divisão para funções $(s; m(r,q))$-somantes de um dado tipo e uma dada ordem e teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel. Como conseqüência, provamos resultados de existência e aproximação de soluções de equações de convolução nos espaços de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem.

CONTEÚDO

Introdução

A área do conhecimento matemático na qual este trabalho se insere é a Análise Funcional.

Em 1955, B. Malgrange publicou o artigo [7] sobre existência e aproximação de soluções para equações de convolução em espaços de funções inteiras definidas em $\mathbb{C}^n$. Uma questão natural que surge advinda deste artigo é saber se valeriam resultados semelhantes para espaços de funções inteiras definidas num espaço de Banach arbitrário. Essa questão foi respondida, em 1966, por C. Gupta em sua tese de doutorado, orientada por L. Nachbin, defendida na Universidade de Rochester e publicada em [3], onde ele provou resultados desse tipo para funções inteiras nucleares de tipo limitado. Em seguida, em 1967, L. Nachbin e C. Gupta estenderam esses resultados para espaços de funções inteiras nucleares, não necessariamente de tipo limitado. Tais resultados podem ser encontrados em [4].
Mais tarde, em 1978, M.C. Matos provou em [9] resultados desse tipo para funções nucleares holomorfas em bolas abertas de espaços de Banach. Todos os artigos acima mencionados usam duas ferramentas fundamentais:

- A transformada de Fourier-Borel que identifica o dual topológico do espaço de funções inteiras com um espaço de funções inteiras de tipo exponencial, utilizando para isso um resultado de dualidade que identifica o dual do espaço dos polinômios homogêneos nucleares com um espaço de polinômios homogêneos.

- Teoremas de divisão para funções inteiras de tipo exponencial.

Em 1967, A. Martineau estudou em [8] as chamadas equações diferenciais parciais de ordem infinita sob a ótica das equações de convolução em espaços de funções inteiras de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em $\mathbb{C}^n$.
Nos artigos [10] e [11], publicados em atas de congressos realizados em 1984 e 1986, respectivamente, Matos generalizou os resultados de A. Martineau para o caso de funções inteiras nucleares de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em espaços de Banach. Novamente as transformadas de Fourier-Borel e os teoremas de divisão tiveram papéis fundamentais nas demonstrações dos resultados de existência e aproximação.

Em 1983, num congresso sobre ideais de operadores, A. Pietsch sugeriu o estudo de módulos de aplicações multilineares entre espaços de Banach e isto impulsionou o estudo de vários módulos de polinômios homogêneos e, até mesmo, de outras aplicações não-lineares. Entre os módulos estudados estão os espaços dos polinômios homogêneos $(s;r)$-nucleares e os espaços dos polinômios absolutamente $(p;q)$-somantes. Tais resultados podem ser encontrados em [20].
Com o impulso no estudo da teoria desses módulos, Matos publicou o artigo [12] no qual estuda as aplicações multilineares $(s;r)$-nucleares e, conseqüentemente, os polinômios homogêneos $(s;r)$-nucleares. Nesse artigo foi demonstrado um resultado que identifica o dual topológico do espaço dos polinômios homogêneos $(s;r)$-nucleares definidos do espaço de Banach E no espaço de Banach F com o espaço dos polinômios homogêneos absolutamente $(s';r')$-somantes definidos de E' em F', onde s' e r' denotam os conjugados de s e r, respectivamente. A partir dessa dualidade ele identificou, através da transformada de Fourier-Borel, o dual topológico das aplicações inteiras $(s;r)$-nucleares com um espaço de funções de tipo exponencial ligado aos polinômios homogêneos absolutamente $(s';r')$-somantes.

Matos continuou obtendo progressos na teoria de aplicações não-lineares absolutamente somantes, como pode ser comprovado nos artigos [13] e [14] publicados em 2003 e 2004, respectivamente.
Em 2005, no livro [15] intitulado "Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations", Matos além de fazer um apanhado geral dos resultados obtidos em alguns de seus artigos como [13] e [14], ainda continuou obtendo progressos na teoria, mais precisamente, introduziu o conceito de aplicações n-lineares $(s;(r_1,q_1),\ldots,(r_n,q_n))$ - nucleares e, conseqüentemente, polinômios n-homogêneos $(s;(r,q))$-nucleares. Além disso, provou um resultado que identifica o dual do espaço dos polinômios homogêneos $(s;(r,q))$-

nucleares definidos do espaço de Banach E no espaço de Banach F com o espaço dos polinômios homogêneos $(s'; m(r', q'))$-somantes em 0 de E' em F' (conceito este também introduzido em seu livro). Com esse resultado de dualidade, surge a questão natural da possibilidade de se obter uma identificação, através da transformada de Fourier-Borel, do dual do espaço das funções inteiras $(s; (r, q))$-nucleares de tipo limitado com um espaço de funções de tipo exponencial ligado aos polinômios homogêneos $(s'; m(r', q'))$-somantes. Nesse mesmo livro, essa questão foi respondida de maneira afirmativa, mas não com o dual do espaço das funções inteiras $(s; (r, q))$-nucleares de tipo limitado e sim com o dual do espaço das funções inteiras $(s; (r, q))$-quase-nucleares de tipo limitado. Para isso, Matos dedicou um capítulo de seu livro para o estudo dos polinômios $(s; (r, q))$-quase-nucleares e das funções inteiras $(s; (r, q))$-quase-nucleares de tipo limitado, mais ainda, provou também resultados de divisão para funções inteiras de tipo exponencial $(s; m(r, q))$-somantes, o que leva a resultados de existência e aproximação de soluções de equações de convolução em espaços bem mais gerais do que os estudados anteriormente.

Com os resultados, acima mencionados, obtidos por Matos em seu livro [15], surge a questão natural de tentar generalizar os resultados por ele obtidos em [10] e [11], utilizando os conceitos de polinômios $(s; (r, q))$-quase-nucleares e polinômios $(s; m(r, q))$-somantes para definir novos espaços de funções de um dado tipo e uma dada ordem.
Sendo assim, o objetivo dessa tese é generalizar os resultados de [10] e [11], isto é, obter resultados de dualidade dados pelas transformadas de Fourier-Borel definidas sobre tais espaços, obter teoremas de divisão para espaços de funções $(s; m(r, q))$-somantes de um dado tipo e uma dada ordem e obter resultados de existência e aproximação de soluções de equações de convolução sobre espaços de funções $(s; (r, q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, introduzimos os espaços de polinômios $(s; m(r, q))$-somantes em 0 e os espaços de polinômios $(s; (r, q))$-quase-nucleares. Além disso, enunciamos um resultado de dualidade entre espaços desse tipo que é de fundamental importância para as demonstrações dos isomorfismos das transformadas de Fourier-Borel. Neste capítulo, damos também os conceitos de limites indutivo e projetivo e alguns resultados envolvendo-os, pois esses conceitos são necessários no capítulo 2. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [2], [21] e [22] para a teoria de limites indutivo e projetivo, e [15] para o restante do conteúdo do capítulo.

- No capítulo 2, definimos os espaços de funções inteiras de um dado tipo e uma dada ordem, que são generalizações dos espaços definidos por Matos em [10]. Além disso, desenvolvemos a teoria necessária para provar os resultados envolvendo a transformada de Fourier-Borel definidas sobre tais espaços. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [10] e [15].

- No capítulo 3, definimos as transformadas de Fourier-Borel e provamos os isomorfismos algébrico e topológico destas transformadas, mais especificamente:

  Na seção 3.1, definimos as transformadas e provamos os isomorfismos algébricos.

  Na seção 3.2, caracterizamos os conjuntos limitados destes espaços de funções inteiras, pois tais caracterizações são necessárias para as demonstrações dos isomorfismos topológicos.

  Na seção 3.3, provamos os isomorfismos topológicos das transformadas de Fourier-Borel, nos casos em que são possíveis.

  As principais referências utilizadas neste capítulo foram [2], [10] e [15].

- No capítulo 4, definimos os operadores de convolução e desenvolvemos a teoria necessária para a prova dos Teoremas de divisão. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [11], [10] e [15].

- No capítulo 5, provamos Teoremas de divisão para funções $(s; m(r,q))$-somantes de um dado tipo e uma dada ordem e, como conseqüência, provamos Teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [4] e [11].

- No capítulo 6, provamos Teoremas de existência e aproximação de soluções para equações de convolução. Tais Teoremas são conseqüência dos Teoremas de divisão obtidos no capítulo 5. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [6] e [11].

CAPÍTULO 1

Preliminares

O intuito deste capítulo é familiarizar o leitor com as principais definições e resultados que serão usados ao longo da tese, principalmente com as definições e resultados obtidos por Matos em seu livro [15], pois estes são de fundamental importância para o conteúdo da tese. Mas primeiramente, vamos apresentar as principais notações e definições básicas necessárias para o desenvolvimento da tese.

1.1 Notações e Definições Básicas

O conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam os corpos dos números reais e complexos, respectivamente. Para nós, $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Se E é um espaço normado, denotamos por $B_A(0) \subseteq E$ a bola aberta de centro 0 e raio A de E.

Se E e X são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, denotamos por $\mathcal{P}(^nE; X)$ o espaço de Banach de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de E em X, com a norma

$$\|P\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|P(y)\|,$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^nE; X)$. Se $X = \mathbb{K}$, denotamos $\mathcal{P}(^nE; \mathbb{K}) = \mathcal{P}(^nE)$.

O dual topológico do espaço de Banach E é denotado por E'.

Denotamos por c_0 o espaço de Banach de todas as seqüências em $\mathbb{K}$ que convergem para 0, com a norma usual denotada por $\|\cdot\|_\infty$.

Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $\ell_p(E)$ o espaço de Banach de todas as seqüências absolutamente p-somáveis de elementos de E, com a norma usual denotada por $\|\cdot\|_p$. Para $0 < p < 1$, $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial topológico metrizável e completo, com a p-norma usual denotada por $\|\cdot\|_p$. Para $p = \infty$, $\ell_\infty(E)$ denota o espaço de Banach de todas as seqüências limitadas de elementos de E, com a norma usual denotada por $\|\cdot\|_\infty$. Se $E = \mathbb{K}$, denotamos $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ e $\ell_\infty(\mathbb{K}) = \ell_\infty$.

Para $0 < p \leq \infty$, denotamos por $\ell_p^w(E)$ o espaço de todas as seqüências fracamente absolutamente p-somáveis de elementos de E, isto é, as seqüências $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$ tais que $(\langle x', x_n \rangle)_{n=1}^\infty \in \ell_p$, para todo $x' \in E'$. Denotando

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\|x'\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^\infty |\langle x', x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

temos que para $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_{w,p}$ define uma p-norma e para $1 \leq p \leq +\infty$, define uma norma em $\ell_p^w(E)$. Em ambos os casos, $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial topológico metrizável e completo.

Para $k \in (1, +\infty)$, denotamos por k' o seu conjugado, isto é, o número que satisfaz

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

Para $k = 1$, escrevemos $k' = +\infty$ e para $k = +\infty$, escrevemos $k' = 1$.

Para $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, denotamos $A^{-1} = \frac{1}{A}$. Para $A = 0$, escrevemos $A^{-1} = +\infty$ e para $A = +\infty$, escrevemos $A^{-1} = 0$.

Demais definições e notações necessárias serão apresentadas durante a tese.

1.2 Polinômios Nucleares e Polinômios Somantes

Sejam E e X espaços de Banach.

Definição 1.2.1. Se $0 < q \leq s \leq +\infty$, uma seqüência $(x_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de E é dita ser *misto* (s, q)*-somável em* E se $x_n = \tau_n x_n^0$, para cada n, com $(\tau_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_n^0)_{n=1}^\infty \in \ell_s^w(E)$, onde

$$\frac{1}{s(q)'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}.$$

Denotamos por $\ell_{m(s,q)}(E)$ o espaço vetorial de todas as seqüências misto (s,q)-somáveis de E. Para $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s,q)}(E)$, definimos

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s,q)} = \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|\left(x_j^0\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possibilidades de representação $x_j = \tau_j x_j^0$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $\left(x_j^0\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Em $\ell_{m(s,q)}(E)$, $\|\cdot\|_{m(s,q)}$ é uma norma para $q \geq 1$ e uma q-norma para $0 < q < 1$. Em ambos os casos, $\left(\ell_{m(s,q)}(E), \|\cdot\|_{m(s,q)}\right)$ é um espaço vetorial topológico metrizável completo.

Definição 1.2.2. Para $0 < q \leq s \leq +\infty$ e $p \geq q$, um polinômio P n-homogêneo de E em X é *$(p; m(s,q))$-somante em 0* se $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, para cada seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s,q)}(E)$. Denotamos o espaço vetorial de tais polinômios por $\mathcal{P}_{(p;m(s,q))}(^nE;X)$. Denotando por $\|P\|_{(p,m(s;q))}$ o ínfimo das constantes M que satisfazem a seguinte desigualdade

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}\right)^n,$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, temos que $\|\cdot\|_{(p,m(s;q))}$ define uma p-norma em $\mathcal{P}_{(p;m(s,q))}(^nE;X)$, que o torna um espaço vetorial topológico metrizável e completo.

Sejam $s \in \left]0,+\infty\right]$, $q,r \in [1,+\infty]$, tais que $q' \leq r' \leq +\infty$ e

$$1 \leq \frac{1}{s} + \frac{n}{q'}.$$

Definição 1.2.3. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;X)$ é dito ser *$(s;(r,q))$-nuclear* se existem $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s$ ($\in c_0$, se $s = +\infty$), $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(X)$ e $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(r',q')}(E')$, tais que

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\varphi_j(x)^n y_j,$$

para todo $x \in E$. Neste caso, denotamos

$$P = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\varphi_j^n y_j.$$

Denotamos o espaço de todos esses polinômios por $\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^{n}E;X\right)$. Chamando

$$\frac{1}{t_n}=\frac{1}{s}+\frac{n}{q'}$$

e

$$\|P\|_{N,(s;(r,q))}=\inf\left\|\left(\lambda_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s}\left\|\left(y_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}\left\|\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(r',q')}^{n},$$

sendo o ínfimo tomado sobre todas as representações de P conforme a definição, temos uma t_n-norma em $\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^{n}E;X\right)$ que o torna um espaço vetorial topológico metrizável completo.

Definição 1.2.4. Um espaço de Banach E tem a *propriedade da aproximação λ-limitada* se para todo subconjunto compacto K e $\varepsilon>0$, existe um operador linear contínuo de tipo finito T de E em E tal que $\|T\|\leq\lambda$ e $\|x-T(x)\|\leq\varepsilon$, para todo $x\in K$.

Observação 1.2.5. Vários espaços de Banach têm a propriedade da aproximação λ-limitada. Apenas para motivação, vamos citar alguns exemplos: Os espaços ℓ_p, para $1\leq p<+\infty$, o espaço c_0 e o espaço $C(K)$ das funções contínuas definidas num compacto de um espaço de Banach têm a propriedade da aproximação 1-limitada. Mais geralmente, todo espaço de Banach com uma base de Schauder tem a propriedade da aproximação 1-limitada.

Teorema 1.2.6. *Se $s\in[1,+\infty]$ e E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, então o dual topológico de $\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^{n}E;X\right)$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{P}_{(s';m(r',q'))}\left({}^{n}E';X'\right)$ através da aplicação*

$$\mathcal{B}\left(\Psi\right)\left(\varphi\right)\left(y\right)=\Psi\left(\varphi^{n}y\right),$$

para todo $y\in X$, $\varphi\in E'$ e Ψ no requerido dual.

Demonstração. Ver Matos [15], Teorema 7.3.2, pág.145. □

1.3 Polinômios Quase-Nucleares

Nesta seção construiremos o espaço dos polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares. Para maiores detalhes da teoria, ver Matos [15], seções 8.2 e 8.3.

Durante toda esta seção considere que E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada e $s, q, r \in [1, +\infty]$ são tais que

$$1 \leq \frac{1}{t_n} = \frac{1}{s} + \frac{n}{q'}.$$

Vimos no Teorema 1.2.6 que o dual topológico de $\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE, \mathbb{K}\right) = \mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$ é $\mathcal{P}_{(s';m(r',q'))}\left({}^nE', \mathbb{K}\right) = \mathcal{P}_{(s';m(r',q'))}\left({}^nE'\right)$ através da aplicação

$$\mathcal{B}\left(\Psi\right)\left(\varphi\right) = \Psi\left(\varphi^n\right),$$

para todo $\varphi \in E'$ e Ψ no requerido dual.

Considerando então

$$U = \left\{P \in \mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right); \|P\|_{N,(s;(r,q))} \leq 1\right\}$$

e o seu bipolar U^{oo}, segue do Teorema do Bipolar que U^{oo} é o menor subconjunto absolutamente convexo e fechado na topologia fraca de $\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$. Além disso, o funcional de Minkowski

$$p_{U^{oo}}\left(P\right) = \inf\left\{\lambda > 0; P \in \lambda U^{oo}\right\}$$

é uma norma em $\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$.

É possível provar que

$$p_{U^{oo}}\left(P\right) \leq \|P\|_{N,(s;(r,q))}, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right).$$

Agora, considerando o espaço normado $\left(\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right), p_{U^{oo}}\right)$, denotaremos o seu completamento por $\left(\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right), \|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)$. É claro que a restrição da norma $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ à $\left(\mathcal{P}_{N,(s;(r,q))}\left({}^nE\right), p_{U^{oo}}\right)$ é $p_{U^{oo}}$ e é possível provar também que $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$ está contido em $\mathcal{P}\left({}^nE\right)$ e

$$\|P\| \leq \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right).$$

Definição 1.3.1. Cada $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$ é chamado de *polinômio escalar n-homogêneo $(s;(r,q))$-quase-nuclear sobre E.*

Observação 1.3.2. Da mesma forma que foi construído o espaço dos polinômios n-homogêneos $(s;(r,q))$-quase-nucleares sobre E, podemos construir o espaço das aplicações n-lineares $(s;(r,q))$-quase-nucleares sobre E^n, que é denotado por $\mathcal{L}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$.

Denotando por $\mathcal{L}_s\left({}^nE\right)$ o espaço de todas as aplicações n-lineares simétricas sobre E, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.3.3. *Os espaços* $\mathcal{L}_{\tilde{N}s,(s;(r,q))}\left({}^nE\right) = \mathcal{L}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right) \cap \mathcal{L}_s\left({}^nE\right)$ *e* $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$ *são isomorfos.*

Demonstração. Ver Matos [15], Teorema 8.2.2, pág.161. □

Outros dois resultados dessa teoria que serão utilizados na tese são os seguintes:

Proposição 1.3.4. *O espaço dos polinômios de tipo finito definidos sobre* E*, denotado por* $\mathcal{P}_f\left({}^nE\right)$, *é denso em* $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$.

Demonstração. Ver Matos [15], Observação 8.2.3, pág.162. □

Proposição 1.3.5. *Se* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$, $k = 1, \ldots, n$ *e* $x \in E$, *então* $\hat{d}^kP(x) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^kE\right)$ *e*

$$\left\|\hat{d}^kP(x)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \frac{n!}{(n-k)!} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|x\|^{n-k}.$$

Além disso,

$$\left\|\widehat{\check{P}x^{n-k}}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|x\|^{n-k},$$

onde $\check{P}$ *é a aplicação* n*-linear simétrica associada a* P.

Demonstração. Ver Matos [15], Proposição 8.3.1, pág.163. □

Agora vamos enunciar um resultado de dualidade entre espaços de polinômios quase-nucleares e polinômios somantes. Este resultado é de fundamental importância para provar os isomorfismos das transformadas de Fourier-Borel.

Teorema 1.3.6. *O dual topológico de* $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$ *é isometricamente isomorfo a* $\mathcal{P}_{(s';m(r',q'))}\left({}^nE'\right)$ *através da aplicação*

$$\mathcal{B}(\Psi)(\varphi) = \Psi(\varphi^n),$$

para todo $\varphi \in E'$ *e* Ψ *no requerido dual.*

Demonstração. Ver Matos [15], pág.161. □

1.4 As Topologias Limites Indutivo e Projetivo

No próximo capítulo, precisaremos das definições das topologias limite indutivo e limite projetivo. Essas definições e alguns resultados que envolvem essas teorias serão usados freqüentemente na tese. As demonstrações e maiores detalhes dessas teorias podem ser encontrados em [2], [6], [17], [21] e [22].

Proposição 1.4.1. *Seja* $(E_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ *uma família de espaços localmente convexos e, para cada* $\gamma \in \Gamma$, *seja* u_γ *uma aplicação linear de* E_γ *no espaço vetorial* E, *tal que* $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$ *gera* E. *Então existe uma topologia mais fina localmente convexa em* E, *tal que as aplicações* u_γ *são contínuas.*

Definição 1.4.2. O espaço E com esta topologia é chamado o *limite indutivo* dos espaços localmente convexos E_γ pelas aplicações u_γ.

Proposição 1.4.3. *Sejam* E *o limite indutivo dos espaços localmente convexos* E_γ *pelas aplicações* u_γ *e* t *uma aplicação linear de* E *num espaço localmente convexo* X. *Então* t *é contínua se, e somente se, para cada* γ, $t \circ u_\gamma$ *é uma aplicação contínua de* E_γ *em* X.

Proposição 1.4.4. *Seja* X *um espaço vetorial e, para cada* $\gamma \in \Gamma$, *seja* v_γ *uma aplicação linear de* X *num espaço localmente convexo* X_γ, *tal que* $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma^{-1}(0) = \{0\}$. *Então existe uma topologia mais fraca em* X, *compatível com a estrutura algébrica sobre a qual as aplicações* v_γ *são contínuas. Com esta topologia,* X *é um espaço localmente convexo.*

Definição 1.4.5. O espaço X com esta topologia é chamado o *limite projetivo* dos espaços localmente convexos X_γ pelas aplicações v_γ.

Proposição 1.4.6. *Sejam* E *um espaço localmente convexo e* t *uma aplicação linear de* E *no limite projetivo* X *dos espaços localmente convexos* X_γ *pelas aplicações* v_γ. *Então* t *é contínua se, e somente se, para cada* γ, $v_\gamma \circ t$ *é uma aplicação contínua de* E *em* X_γ.

Definição 1.4.7. Um espaço localmente convexo E é um *espaço DF*, se admite uma seqüência fundamental de subconjuntos limitados e se todo subconjunto M do dual forte de E que seja uma união de uma seqüência de subconjuntos equicontínuos, também é equicontínuo.

Lembramos que uma *família (ou sistema) fundamental de subconjuntos limitados* de um espaço vetorial topológico L, é uma família $\mathcal{L}$ de subconjuntos limitados de L tal que todo subconjunto limitado de L está contido em algum membro de $\mathcal{L}$.

Proposição 1.4.8. *Seja E o limite indutivo localmente convexo de uma seqüência E_i de espaços DF pelas aplicações lineares u_i, tal que a união das imagens dos E_i gera E. Então E é um espaço DF.*

Demonstração. Ver Grothendieck [2], Proposição 5, pág.171. □

Proposição 1.4.9. *Seja X o limite indutivo localmente convexo de uma seqüência X_i de espaços DF pelas aplicações lineares u_i, tal que a união das imagens dos X_i gera X. Então, os subconjuntos limitados de X são aqueles contidos no fecho da união finita de imagens de subconjuntos limitados dos X_i pelas aplicações u_i.*

Demonstração. Ver Grothendieck [2], Proposição 5, pág. 171. □

Proposição 1.4.10. *Se E é um espaço DF, então seu dual forte é um espaço de Fréchet, isto é, um espaço localmente convexo, metrizável e completo.*

Demonstração. Ver Grothendieck [2], Corolário 4, pág.166. □

CAPÍTULO 2

Espaços de Funções Inteiras de um Dado Tipo e uma Dada Ordem

Durante toda a tese, estudaremos definições e resultados envolvendo polinômios $(s, m(r;q))$-somantes e polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares. Apesar de usarmos as letras s, r e q em ambos os casos, para as definições envolvendo polinômios $(s, m(r;q))$-somantes, consideraremos $0 < q \leq r \leq +\infty$, $s \geq q$ e $s \in [1, +\infty]$, já para as definições envolvendo polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares, consideraremos $s \leq q$, $r \leq q$ e $s, r, q \in [1, +\infty]$. Com estas condições estes espaços estão bem definidos, os espaços de polinômios $(s, m(r;q))$-somantes são espaços de Banach e ainda, os principais resultados da teoria e o Teorema de dualidade 1.3.6 são verdadeiros.

A partir de agora, considere E um espaço de Banach complexo.

2.1 Definições e Resultados Concernentes

Definição 2.1.1. Se $\rho > 0$, denotamos por $\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\|f\|_{(s,m(r;q)),\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty,$$

que é normado com $\|\cdot\|_{(s,m(r;q)),\rho}$. Denotamos por $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^j E)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

que é normado com $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$.

Proposição 2.1.2. *Para cada $\rho > 0$, os espaços $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s,(r,q)),\rho}(E)$ e $\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f_m(0) - \widehat{d^j} f_n(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \varepsilon, \tag{2.1}$$

para $m, n \geq n_\varepsilon$. Daí segue que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\left(\widehat{d^j} f_n(0)\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^j E)$ e converge para um elemento $P_j \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^j E)$. Assim, fazendo $n \to \infty$ em (2.1), temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f_m(0) - P_j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \varepsilon, \tag{2.2}$$

para todo $m \geq n_\varepsilon$. Defina

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} P_j(x),$$

para todo $x \in E$ e vamos provar que $f \in \mathcal{H}(E)$. Para isto é suficiente mostrar que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Note que,

$$\rho^{-j} \|P_j\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f_{n_\varepsilon}(0) - P_j \right\|_{\tilde{N};(s,(r,q))} + \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f_{n_\varepsilon}(0) \right\|_{\tilde{N};(s,(r,q))} \leq \varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}.$$

Assim, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} \leq \limsup_{j\to\infty} \rho \left(\frac{\varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}}{j!} \right)^{\frac{1}{j}} = 0,$$

pois

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}}=0.$$

Como $\|P\|\leq\|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}$, para todo $P\in\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^{j}E\right)$, $j\in\mathbb{N}$, temos que

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}P_j\right\|^{\frac{1}{j}}\leq\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}P_j\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))}=0$$

Agora,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left\|P_j\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left\|\widehat{d^j}f_{n_\varepsilon}(0)-P_j\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}+\left\|f_{n_\varepsilon}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}<+\infty,$$

logo $f\in\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ e segue de (2.2) que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f. Portanto $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ é Banach.

Usando o fato que $\|P\|\leq\|P\|_{(s,m(r;q))}$, para todo $P\in\mathcal{P}_{(s,m(r;q))}\left({}^{j}E\right)$, $j\in\mathbb{N}$, a demonstração para os espaços $\mathcal{B}_{(s;m(r,q)),\rho}(E)$ segue de maneira análoga. □

Observação 2.1.3. Poderíamos ter definido os espaços $\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ para $s\in\left]0,+\infty\right]$, mas para $s\in\left]0,1\right[$, os espaços $\mathcal{P}_{(s,m(r;q))}\left({}^{j}E\right)$ são s-normados e é possível provar (demonstração similar a da Proposição 2.1.2) que os espaços $\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ são apenas espaços vetoriais topológicos metrizáveis completos, mas para a próxima definição é hipótese essencial que tais espaços sejam espaços localmente convexos.

Definição 2.1.4. Se $A\in(0,+\infty)$, denotamos por $Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$ o espaço vetorial complexo $\bigcup_{\rho<A}\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, com a topologia limite indutivo localmente convexa. O espaço $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é o espaço vetorial complexo $\bigcup_{\rho<A}\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, com a topologia limite indutivo localmente convexa. Consideramos também os espaços vetoriais complexos

$$Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)=\bigcap_{\rho>A}\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$$

e

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)=\bigcap_{\rho>A}\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E),$$

com a topologia limite projetivo.

Para $A=+\infty$, consideramos os espaços vetoriais complexos

$$Exp_{(s,m(r;q)),\infty}(E)=\bigcup_{\rho>0}\mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$$

e

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty}(E) = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E),$$

com a topologia limite indutivo localmente convexa e para $A = 0$, consideramos os espaços

$$Exp_{(s,m(r;q)),0}(E) = Exp_{(s,m(r;q)),0,0}(E) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$$

e

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) = Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,0}(E) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E),$$

com a topologia limite projetivo.

Estamos considerando as topologias limite indutivo e projetivo dadas pelas inclusões naturais.

Proposição 2.1.5. *Se* $f \in \mathcal{H}(E)$ *é tal que* $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE)$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$, *então*

(a) *Para cada* $A \in (0, +\infty]$,

$f \in Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$ *se, e somente se,* $\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} < A.$

(b) P*ara cada* $A \in [0, +\infty)$,

$f \in Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ *se, e somente se,* $\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A.$

Demonstração. (a) Se $f \in Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$, existe $\rho < A$ tal que $f \in \mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, logo

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty, \tag{2.3}$$

assim

$$\frac{1}{r_c} = \limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq \rho < A,$$

onde r_c denota o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} z^j, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Por outro lado, se

$$\alpha = \limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} < A,$$

então para todo $\rho \in \left]\alpha, A\right[$, segue que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}$$

é convergente. Assim, $f \in \mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ e, portanto, $f \in Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$.
Note que tal demonstração vale para $A = +\infty$.
(b) Se $f \in Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, então $f \in \mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, para todo $\rho > A$. Assim,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq \rho,$$

para todo $\rho > A$ e, conseqüentemente

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A.$$

Contrariamente, se

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A,$$

segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} < \rho,$$

para todo $\rho > A$. Assim, segue que $f \in \mathcal{B}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, para todo $\rho > A$, portanto $f \in Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$.
Note que tal demonstração vale para $A = 0$. □

Proposição 2.1.6. *Se $f \in \mathcal{H}(E)$ é tal que $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então*
(a) *Para cada $A \in (0, +\infty]$,*
$f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ se, e somente se, $\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} < A$.
(b) P*ara cada $A \in [0, +\infty)$,*
$f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ se, e somente se, $\limsup_{j\to\infty} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} \leq A$.

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 2.1.5. □

Devido a estas duas proposições, chamaremos os elementos de $Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$ de *funções inteiras de tipo exponencial* $(s, m(r;q))$*-somante estritamente menor que* A. Para $A = +\infty$, retiramos "estritamente menor que A".
Os elementos de $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ serão chamados *funções inteiras de tipo exponencial* $(s;(r,q))$*-quase-nuclear estritamente menor que* A. Para $A = +\infty$, retiramos "estritamente menor que A".
Já os elementos de $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ serão chamados de *funções inteiras de tipo exponencial* $(s, m(r;q))$*-somante menor ou igual a* A e os elementos de $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ serão

chamados de *funções inteiras de tipo exponencial* $(s;(r,q))$*-quase-nuclear menor ou igual a* A.

Proposição 2.1.7. (a) $Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$ *e* $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *são espaços DF, para todo* $A \in (0,+\infty]$.

(b) $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ *e* $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ *são espaços de Fréchet, para todo* $A \in [0,+\infty)$.

Demonstração. (a) Temos que os espaços $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, com $\rho < A$, são espaços DF, pois são espaços de Banach. Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de números positivos estritamente crescente, convergindo para A. É claro que, algebricamente,

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) = \bigcup_{\rho<A} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),a_n}(E).$$

Vamos provar que a topologia limite indutivo dada pelos $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, $\rho < A$, e a topologia limite indutivo dada pelos $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),a_n}(E)$, $n \in \mathbb{N}$, coincidem. Vamos denotá-las por τ_ρ e τ, respectivamente. Pela definição dessas topologias segue que $\tau_\rho \subseteq \tau$. Agora, basta mostrar que

$$id\colon \left(Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E), \tau_\rho\right) \longrightarrow \left(Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E), \tau\right)$$

é contínua ou, equivalentemente (proposição 1.4.3), que para todo $\rho < A$,

$$id \circ i_\rho\colon \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \overset{i_\rho}{\hookrightarrow} \left(Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E), \tau_\rho\right) \overset{id}{\longrightarrow} \left(Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E), \tau\right)$$

é contínua. Para isto, seja $\rho < A$, então existe $n_\rho \in \mathbb{N}$ tal que $\rho < a_{n_\rho} < A$. Note que a inclusão $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \overset{j_\rho}{\hookrightarrow} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),a_{n_\rho}}(E)$ é contínua, pois $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),a_{n_\rho}} \leq \|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$. Como $id \circ i_\rho = id \circ i_{a_{n_\rho}} \circ j_\rho$ e $id \circ i_{a_{n_\rho}}$ é contínua (pois é a inclusão $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),a_{n_\rho}}(E) \hookrightarrow \left(Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E), \tau\right)$) segue que $id \circ i_\rho$ é contínua e, portanto, $\tau = \tau_\rho$.
Assim, $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é um espaço DF, pois é o limite indutivo de uma seqüência de espaços DF(Proposição 1.4.8). A demonstração para $Exp_{(s,m(r;q)),A}(E)$ é análoga.
(b) Pela Proposição 1.4.4, $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são localmente convexos. E como o limite projetivo de espaços vetoriais topológicos de Hausdorff completos é completo, segue que $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são completos. Só falta provar que $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são metrizáveis. Provemos que $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ é metrizável, pois para $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ é análogo. Seja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência estritamente decrescente de números positivos, convergindo para A. É claro que, algebricamente,

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) = \bigcap_{\rho>A} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),b_n}(E).$$

Sabemos que a topologia limite projetivo em $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ coincide com a topologia gerada pela família de normas $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$, $\rho > A$. Temos que a topologia gerada pelas normas $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$, $\rho > A$, contém a topologia gerada pelas normas $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),b_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Para provar a inclusão contrária, sejam $\rho > A$ e $\varepsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho > b_{n_0} > A$. Logo,

$$\left\{f \in \mathcal{H}(E) : \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),b_{n_0}} < \varepsilon\right\} \subseteq \left\{f \in \mathcal{H}(E) : \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} < \varepsilon\right\}$$

e obtemos a inclusão contrária. Assim, temos uma base de vizinhanças enumerável para a topologia limite projetivo, logo $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ é metrizável. □

Agora construiremos espaços similares para funções inteiras de uma dada ordem finita.

Definição 2.1.8. Se $\rho > 0$ e $k > 1$, denotamos por $\mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\|f\|_{(s,m(r;q)),k,\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^j f(0)\right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty,$$

que é normado com $\|\cdot\|_{(s,m(r;q)),k,\rho}$. Denotamos por $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

que é normado com $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}$.

Proposição 2.1.9. *Para cada $\rho > 0$ e $k > 1$, os espaços $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s,(r,q)),\rho}(E)$ e $\mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s,(r,q)),\rho}(E)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\left(\widehat{d}^j f_m(0) - \widehat{d}^j f_n(0)\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \varepsilon, \tag{2.4}$$

para $m, n \geq n_\varepsilon$. Daí segue que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\left(\widehat{d}^j f_n(0)\right)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^jE\right)$ e converge para um elemento $P_j \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^jE\right)$. Assim, fazendo $n \to \infty$ em (2.4), temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \left(\widehat{d}^j f_m(0) - P_j\right) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \varepsilon, \tag{2.5}$$

para todo $m \geq n_\varepsilon$. Defina

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} P_j(x),$$

para todo $x \in E$ e vamos provar que $f \in \mathcal{H}(E)$. Para isto é suficiente mostrar que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Note que,

$$\rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \left(\widehat{d}^j f_{n_\varepsilon}(0) - P_j\right) \right\|_{\tilde{N};(s,(r,q))} +$$
$$+\rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f_{n_\varepsilon}(0) \right\|_{\tilde{N};(s,(r,q))} \leq \varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}.$$

Assim, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} \leq \limsup_{j\to\infty} \frac{\rho\,(ke)^{\frac{1}{k}} \left(\varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\right)^{\frac{1}{j}}}{j^{\frac{1}{k}}} = 0,$$

e, portanto,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|^{\frac{1}{j}} \leq \limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} P_j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Agora,

$$\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \|f - f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} + \|f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} < \varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} < +\infty,$$

logo $f \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ e segue de (2.5) que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f. Portanto $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ é Banach.

A demonstração para os espaços $\mathcal{B}^k_{(s;m(r,q)),\rho}(E)$ é análoga. $\square$

Definição 2.1.10. Se $A \in (0, +\infty)$ e $k > 1$, denotamos por $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ o espaço vetorial complexo $\bigcup\limits_{\rho<A} \mathcal{B}^{k}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, com a topologia limite indutivo localmente convexa. O espaço $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é o espaço vetorial complexo $\bigcup\limits_{\rho<A} \mathcal{B}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, com a topologia limite indutivo localmente convexa. Consideramos também os espaços vetoriais complexos

$$Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E) = \bigcap_{\rho>A} \mathcal{B}^{k}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$$

e

$$Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) = \bigcap_{\rho>A} \mathcal{B}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E),$$

com a topologia limite projetivo.

Para $A = +\infty$ e $k > 1$, consideramos os espaços vetoriais complexos

$$Exp^{k}_{(s,m(r;q))}(E) = Exp^{k}_{(s,m(r;q)),\infty}(E) = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{B}^{k}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$$

e

$$Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E) = Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty}(E) = \bigcup_{\rho>0} \mathcal{B}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E),$$

com a topologia limite indutivo localmente convexa e para $A = 0$ e $k > 1$, consideramos os espaços vetoriais complexos

$$Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0}(E) = Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,0}(E) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}^{k}_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$$

e

$$Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) = Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,0}(E) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E),$$

com a topologia limite projetivo.

Estamos considerando as topologias limite indutivo e projetivo dadas pelas inclusões naturais.

Proposição 2.1.11. *Se $f \in \mathcal{H}(E)$ é tal que $\widehat{d}^{j} f(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}(^{j}E)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então*

(a) *Para cada $A \in (0, +\infty]$,*

$f \in Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ se, e somente se, $\limsup\limits_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d}^{j} f(0) \right\|^{\frac{1}{j}}_{(s,m(r;q))} < A.$

(b) *Para cada $A \in [0, +\infty)$,*

$f \in Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ se, e somente se, $\limsup\limits_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d}^{j} f(0) \right\|^{\frac{1}{j}}_{(s,m(r;q))} \le A.$

Demonstração. (a) Se $f \in Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$, existe $\rho < A$ tal que $f \in \mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, logo

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty, \tag{2.6}$$

assim

$$\frac{1}{r_c} = \limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq \rho < A,$$

onde r_c denota o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} z^j, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Por outro lado, se

$$\alpha = \limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} < A,$$

então para todo $\rho \in \left]\alpha, A\right[$, segue que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}$$

é convergente. Assim, $f \in \mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ e, portanto, $f \in Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$.

Note que tal demonstração vale para $A = +\infty$.

(b) Se $f \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, então $f \in \mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, para todo $\rho > A$. Assim,

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq \rho,$$

para todo $\rho > A$ e, conseqüentemente,

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A.$$

Contrariamente, se

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A,$$

segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} < \rho,$$

para todo $\rho > A$. Assim, segue que $f \in \mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, para todo $\rho > A$ e, portanto, $f \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$.

Note que tal demonstração vale para $A = 0$. $\square$

Proposição 2.1.12. *Se* $f \in \mathcal{H}(E)$ *é tal que* $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$, *então*

(a) *Para cada* $A \in (0, +\infty]$,

$f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *se, e somente se,* $\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} < A.$

(b) *Para cada* $A \in [0, +\infty)$,

$f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ *se, e somente se,* $\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq A.$

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 2.1.11. □

Devido a estas duas proposições, chamaremos os elementos de $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ de *funções inteiras* $(s, m(r;q))$*-somantes de ordem* k *e tipo estritamente menor que* A. Para $A = +\infty$, retiramos "estritamente menor que A".

Os elementos de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ serão chamados *funções inteiras* $(s;(r,q))$*-quase-nucleares de ordem* k *e tipo estritamente menor que* A. Para $A = +\infty$, retiramos "estritamente menor que A".

Já os elementos de $Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ serão chamados de *funções inteiras* $(s, m(r;q))$*-somantes de ordem* k *e tipo menor ou igual a* A e os elementos de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ serão chamados de *funções inteiras* $(s;(r,q))$*-quase-nucleares de ordem* k *e tipo menor ou igual à* A.

Apesar de não termos considerado o caso $k = 1$ na Definição 2.1.10, o próximo resultado garante que os espaços das Definições 2.1.10 e 2.1.4 são equivalentes.

Proposição 2.1.13. *Para* $k = 1$, *os espaços das Definições 2.1.10 e 2.1.4 coincidem algebricamente e são isomorfos topologicamente.*

Demonstração. Se $f \in \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \infty.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{e}\right)^j \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \frac{1}{e^j}\frac{j^j}{j!} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \tag{2.7}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \frac{1}{e^j} e^j \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \infty,$$

e assim $\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \subseteq \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Além disso, a inclusão

$$k\colon \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \longrightarrow \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$$

é contínua, por (2.7), e dessa inclusão segue que

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \subseteq Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

e

$$Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \subseteq Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E).$$

Agora, se $f \in \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{e}\right)^j \left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \infty,$$

daí

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{e}\right)\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^j f(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \rho.$$

Pelas propriedades de limite superior, dado $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{e}\right)^j \frac{1}{j!}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(\rho+\varepsilon)^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como

$$\lim_{j\to\infty}\frac{j}{e}\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}} = 1,$$

segue que

$$\lim_{j\to\infty}\frac{e}{j}(j!)^{\frac{1}{j}} = 1,$$

e, portanto,

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq (\rho+\varepsilon)\limsup_{j\to\infty} C(\varepsilon)^{\frac{1}{j}}\,\frac{e}{j}(j!)^{\frac{1}{j}} = \rho+\varepsilon.$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que para todo $\delta > \rho$

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \delta,$$

logo

$$\sum_{j=0}^{\infty}\delta^{-j}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \infty,$$

e assim $f \in \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E)$, para todo $\delta > \rho$.

Portanto $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \subseteq Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \subseteq Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$.

Para provar que tais espaços são topologicamente isomorfos, considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \arrow[r, shift left, "id"] & Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \arrow[l, shift left, "id^{-1}"] \\
\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \arrow[u, hook, "i_\rho"] \arrow[r, hook, "k"] & \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \arrow[u, hook, "j_\rho"']
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama, i_ρ, j_ρ e k denotam as inclusões canônicas nos correspondentes espaços e id a aplicação identidade. Agora, pela Proposição 1.4.3, temos que id é contínua se, e somente se, para todo $\rho < A$, $id \circ i_\rho$ é continua. Mas $id \circ i_\rho = j_\rho \circ k$ e como k e j_ρ são contínuas, segue que $id \circ i_\rho$ é contínua. Para provar que id^{-1} é contínua, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \arrow[r, shift left, "id"] & Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \arrow[l, shift left, "id^{-1}"] \\
\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E) \arrow[u, hook, "i_\delta"] & \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \arrow[u, hook, "j_\rho"'] \arrow[l, hook', "l"]
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama, i_δ, j_ρ e l denotam as inclusões canônicas nos correspondentes espaços (para l estamos considerando $\rho < \delta$) e id a aplicação identidade. Agora, pela Proposição 1.4.3 temos que id^{-1} é contínua se, e somente se, para cada $\rho < A$, $id^{-1} \circ j_\rho$ é continua. Tomando $\rho < \delta < A$, temos que $id^{-1} \circ j_\rho = i_\delta \circ l$ e como $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta} \leq \|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$, segue que l é contínua. Como i_δ também é contínua, segue que $id^{-1} \circ j_\rho$ é contínua. Portanto, os espaços $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ são topologicamente isomorfos.

Vamos provar agora que os espaços $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são topologicamente isomorfos. Para isto, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \arrow[r, shift left, "id"] \arrow[d, hook, "i_\rho"] & Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \arrow[l, shift left, "id^{-1}"] \arrow[d, hook, "j_\rho"] \\
\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \arrow[r, hook, "k"] & \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)
\end{tikzcd}$$

Pela Proposição 1.4.6 temos que id é contínua se, e somente se, para todo $\rho > A$, $j_\rho \circ id$ é contínua. Mas, $j_\rho \circ id = k \circ i_\rho$ e como k e i_ρ são contínuas, segue que $j_\rho \circ id$ é contínua. Para provar que id^{-1} é contínua, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \arrow[r, shift left, "id"] \arrow[d, hook, "i_\rho"] & Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \arrow[l, shift left, "id^{-1}"] \arrow[d, hook, "j_\delta"] \\
\mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) & \mathcal{B}^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E) \arrow[l, hook', "l"]
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama, i_ρ, j_δ e l denotam as inclusões canônicas nos correspondentes espaços (para l estamos considerando $\delta < \rho$) e id a aplicação identidade. Pela Proposição 1.4.6 temos que id^{-1} é contínua se, e somente se, para cada $\rho > A$, $i_\rho \circ id^{-1}$ é contínua. Tomando $\rho > \delta > A$, temos que $i_\rho \circ id^{-1} = l \circ j_\delta$ e como $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \leq \|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}$, segue que l é contínua. Como j_δ também é contínua, segue que $i_\rho \circ id^{-1}$ é contínua. Portanto, os espaços $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são topologicamente isomorfos.
A demonstração para o caso $(s, m(r;q))$ é análoga. □

Proposição 2.1.14. (a) *$Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ são espaços DF, para todo $A \in (0, +\infty]$ e $k > 1$.*
(b) *$Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são espaços de Fréchet, para todo $A \in [0, +\infty)$ e $k > 1$.*

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 2.1.7. □

Agora vamos considerar os espaços de ordem infinita similares aos da Definição 2.1.10, mas para isto precisamos de algumas novas definições:

Definição 2.1.15. Se $A \in [0, +\infty)$, denotamos por $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ tal que $\widehat{d}^j f(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A,$$

munido da topologia localmente convexa gerada pela família de seminormas $\left(p^\infty_{(s,m(r;q)),\rho}\right)_{\rho > A}$, onde

$$p^\infty_{(s,m(r;q)),\rho}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}.$$

Denotamos por $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$

tal que $\widehat{d^j}f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} \leq A,$$

munido da topologia localmente convexa gerada pela família de seminormas $\left(p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\right)_{\rho>A}$, onde

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Proposição 2.1.16. *Se $A \in [0,+\infty)$, então $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ e $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ são espaços de Fréchet.*

Demonstração. Façamos a demonstração para $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$, pois para $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ é análoga.

Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de números reais estritamente decrescente convergindo para A. Então a família de seminormas $\left(p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ gera a mesma topologia que a família de seminormas $\left(p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\right)_{\rho>A}$ em $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$. Logo, $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo e metrizável, faltando agora apenas provar a sua completude. Sejam $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ e $\rho > A$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f_k(0) - \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f_l(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \varepsilon, \tag{2.8}$$

para $k, l \geq k(\varepsilon)$. Logo, $\left(\frac{1}{j!}\widehat{d^j}f_k(0)\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e converge para um elemento $P_j \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$. Segue de (2.8) que existe $0 \leq M_\rho < +\infty$ tal que $p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f_k) < M_\rho$, para todo $k \in \mathbb{N}$, daí

$$\left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f_k(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \frac{M_\rho}{\rho^{-j}},$$

para $j, k \in \mathbb{N}$ e, conseqüentemente,

$$\|P_j\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \left\| P_j - \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f_k(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} + \frac{M_\rho}{\rho^{-j}}.$$

Fazendo $k \to \infty$, temos que

$$\|P_j\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \frac{M_\rho}{\rho^{-j}},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, assim

$$\limsup_{j\to\infty} \|P_j\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} \leq \rho,$$

e como $\rho > A$ foi tomado arbitrário, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \|P_j\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}} \leq A.$$

Assim, a função

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x), \qquad x \in B_{\frac{1}{A}}(0),$$

está em $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$. Além disso, fazendo $l \to \infty$ em (2.8), segue que

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f_k - f) \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Portanto $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é convergente em $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$. $\square$

Denotaremos os espaços $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ e $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ por $Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, respectivamente. Também denotaremos

$$Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0}(E) = Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,0}(E)$$

e

$$Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) = Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,0}(E).$$

Agora, vamos usar as definições dos espaços $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ e $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$ para definirmos novos espaços, como segue:

Seja $L = \bigcup_{\rho<A} \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ e sobre L defina a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \iff \text{ existe } \rho \in (0,A) \text{ tal que } f|_{B_{\frac{1}{\rho}}(0)} = g|_{B_{\frac{1}{\rho}}(0)}.$$

É imediata a demonstração que $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos por $L/\sim$ o conjunto das classes de equivalência dos elementos de L e para cada $f \in L$, denotamos sua classe por $[f]$. Defina as seguintes operações em $L/\sim$:

$$[f] + [g] = \left[f|_{B_{\frac{1}{\rho}}(0)} + g|_{B_{\frac{1}{\rho}}(0)} \right], \text{ onde } \rho \in (0,A) \text{ é tal que}$$

$$f|_{B_{\frac{1}{\rho}}(0)}, g|_{B_{\frac{1}{\rho}}(0)} \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right).$$

$$\lambda [f] = [\lambda f], \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Com estas operações, $L /\sim$ se torna um espaço vetorial. Da mesma forma fazemos o caso $(s, m(r; q))$.
Para cada $\rho \in (0, A)$, considere a aplicação $i_\rho \colon \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right) \longrightarrow L /\sim$ dada por $i_\rho(f) = [f]$.

Definição 2.1.17. Para $A \in (0, +\infty]$, definimos $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$ como sendo o espaço vetorial complexo $L /\sim$, com a topologia limite indutivo localmente convexa, com relação à família de inclusões $(i_\rho)_{\rho\in(0,A)}$.
Da mesma forma definimos os espaços $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$.

Usando essas idéias vamos definir também os seguintes espaços:

Definição 2.1.18. Para $\rho > 0$, considere o espaço vetorial $\mathcal{H}^{\infty}_{(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ de todas $f \in \mathcal{H}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ tal que $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty,$$

que é Banach com a norma $p^{\infty}_{(s,m(r;q)),\rho}$. Considere o espaço vetorial $\mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ de todas $f \in \mathcal{H}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ tal que $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

que é Banach com a norma $p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$. A demonstração que tais espaços são Banach é similar às feitas nas Proposições 2.1.2 e 2.1.9.
Analogamente ao que fizemos acima, definimos uma relação de equivalência em $L = \bigcup_{\rho<A} \mathcal{H}^{\infty}_{(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ e definimos também as inclusões $i\rho$. Daí para $A \in (0, +\infty]$, definimos

$$Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}(E) = L /\sim = \bigcup_{\rho<A} \mathcal{H}^{\infty}_{(s,m(r;q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right) /\sim,$$

com a topologia limite indutivo localmente convexa. Definimos também

$$Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) = \bigcup_{\rho<A} \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right) /\sim,$$

com a topologia limite indutivo localmente convexa.

A próxima Proposição garante que as Definições 2.1.17 e 2.1.18 são equivalentes, como segue:

Proposição 2.1.19. *Os espaços* $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$ *e* $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *coincidem algebricamente e são topologicamente isomorfos. Da mesma forma, temos a equivalência nas definições dos espaços* $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$ *e* $Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}(E)$.

Demonstração. Vamos fazer a demonstração para os espaços $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$, pois a demonstração para os espaços $Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$ é análoga.

Seja $[f] \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, então $f \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$, para algum $\rho < A$. Assim

$$\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^{j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

daí

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^{j}f(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \rho,$$

e, portanto, $f \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$, o que implica $[f] \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$. Agora, se $[f] \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$, então $f \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$, para algum $\rho < A$. Assim,

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^{j}f(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \rho.$$

Então, para $\rho < \delta < A$, temos que $f|_{B_{\frac{1}{\delta}}(0)} \in \mathcal{H}\left(B_{\frac{1}{\delta}}(0)\right)$ e

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^{j}f(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} < \delta,$$

logo

$$\sum_{j=0}^{\infty}\delta^{-j}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^{j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

e, portanto, $f|_{B_{\frac{1}{\delta}}(0)} \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\delta}}(0)\right)$. Como $f \sim f|_{B_{\frac{1}{\delta}}(0)}$, segue que $[f] = \left[f|_{B_{\frac{1}{\delta}}(0)}\right] \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. Assim, temos que os espaços $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$

coincidem algebricamente.

Para provar o isomorfismo topológico, considere o seguite diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right) \arrow[r, shift left, "id"] & Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \arrow[l, shift left, "id^{-1}"] \\
\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right) \arrow[u, hook, "i_\rho"] & \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right) \arrow[l, hook, "k_\rho"] \arrow[u, hook, "j_\rho"']
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama, i_ρ, j_ρ e k_ρ denotam as inclusões canônicas nos correspondentes espaços e id denota a aplicação identidade. Pela Proposição 1.4.3 temos que id^{-1} é contínua se, e somente se, para cada $\rho < A$, a aplicação $id^{-1} \circ j_\rho$ é contínua. Mas $id^{-1} \circ j_\rho = i_\rho \circ k_\rho$ e como, para todo $\delta > \rho$ temos que $p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(f) \leq p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f)$, qualquer que seja $f \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$, segue que k_ρ é contínua. Logo, $id^{-1} \circ j_\rho$ é contínua e, portanto, id^{-1} é contínua. Para provar a continuidade de id, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right) \arrow[r, shift left, "id"] & Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \arrow[l, shift left, "id^{-1}"] \\
\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right) \arrow[u, hook, "i_\rho"] \arrow[r, "k"] & \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho'}}(0)\right) \arrow[u, hook, "j_{\rho'}"']
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama, k denota a aplicação $k(f) = f|_{B_{\frac{1}{\rho'}}(0)}$, onde $\rho < \rho' < A$. Temos que id é contínua se, e somente se, para cada $\rho < A$, a aplicação $id \circ i_\rho$ é contínua. Mas $id \circ i_\rho = j_{\rho'} \circ k$ e como

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho'}\left(f|_{B_{\frac{1}{\rho'}}(0)}\right) \leq p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f),$$

segue que k é contínua. Logo $id \circ i_\rho$ é contínua e, portanto, id é contínua. □

Devido a esta Proposição, denotaremos os espaços $\mathcal{H}_{b(s,m(r;q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$ e $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(\overline{B_{\frac{1}{A}}(0)}\right)$ por $Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, respectivamente. Também denotaremos

$$Exp^{\infty}_{(s,m(r;q))}(E) = Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),\infty}(E)$$

e

$$Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E) = Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty}(E).$$

Como

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} = 1,$$

faz sentido usar as notações acima para os espaços de ordem infinita e também faz sentido usar as notações $\|\cdot\|_{(s,m(r;q)),\infty,\rho}$ e $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\rho}$ para $p^{\infty}_{(s,m(r;q)),\rho}$ e $p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}$, respectivamente.

Observação 2.1.20. Como é usual, denotaremos os elementos destes espaços simplesmente por f, ao invés da sua classe $[f]$ e estes espaços denotaremos sem mencionar a relação de equivalência, desde que isso não cause confusão.

Proposição 2.1.21. (a) *$Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ são espaços DF, para todo $A \in (0,+\infty]$.*
(b) *$Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ são espaços de Fréchet, para todo $A \in [0,+\infty)$.*

Demonstração. O ítem (b) é a Proposição 2.1.16 e a demonstração do ítem (a) segue análoga à demonstração do ítem (a) da Proposição 2.1.7. □

Provaremos agora um resultado de convergência da série de Taylor nestes espaços e provaremos que as funções exponenciais são elementos de tais espaços. Mais do que isso, provaremos que, de certa forma, o subespaço gerado por elas é denso nos correspondentes espaços (no caso dos espaços de funções quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem).

Proposição 2.1.22. (a) *Se $k \in [1,+\infty]$ e $A \in (0,+\infty]$, então a série de Taylor em 0 de cada elemento de $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ (respectivamente, $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$), converge para o próprio elemento na topologia do espaço.*
(b) *Se $k \in [1,+\infty]$ e $A \in [0,+\infty)$, então a série de Taylor em 0 de cada elemento de $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ (respectivamente, $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$), converge para o próprio elemento na topologia do espaço.*

Demonstração. Para cada f no correspondente espaço, temos que:

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q)),\rho} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}.$$

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q)),k,\rho} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}, \ k \in (1,+\infty).$$

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \ k \in (1, +\infty).$$

$$p^{\infty}_{(s,m(r;q)),\rho} \left(f - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}.$$

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(f - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Como a topologia dos espaços $Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, $k \in [1, +\infty]$, e dos espaços $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, $k \in [1, +\infty]$, são geradas pelas correspondentes famílias de seminormas, e como as igualdades acima valem para qualquer $\rho > 0$, fazendo $n \to \infty$ nelas, temos a convergência nos espaços $Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, $k \in [1, +\infty]$.
Agora, como as topologias dos espaços $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, $k \in [1, +\infty]$, são localmente convexas, para cada um deles existe uma família dirigida de seminormas a qual define a topologia do mesmo. Digamos que $(q_i)_{i \in I}$ define a topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, pois para os espaços $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ é análogo. Então, uma seqüência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ se, e somente se, $q_i(f_n) \to q_i(f)$, para cada $i \in I$. Como para $\rho < A$ a inclusão $i_\rho \colon \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é contínua, existe $C > 0$ tal que

$$q_i(g) = q_i(i_\rho(g)) \le C \|g\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

para toda $g \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ e $i \in I$. Assim, $\|f_n - f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \longrightarrow 0$ implica que $q_i(f_n) \to q_i(f)$. Portanto, fazendo $n \to \infty$ nas 6 igualdades acima, temos a convergência nos espaços $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, para $k \in [1, +\infty]$. □

Proposição 2.1.23. (a) *Se $k \in (1, +\infty]$ e $A \in (0, +\infty]$, então e^φ pertence a $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, para todo $\varphi \in E'$.*
(b) *Se $k \in (1, +\infty]$ e $A \in [0, +\infty)$, então e^φ pertence a $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, para todo $\varphi \in E'$.*
(c) *Se $k = 1$ e $A \in (0, +\infty]$, então e^φ pertence a $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, para todo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| < A$.*
(d) *Se $k = 1$ e $A \in [0, +\infty)$, então e^φ pertence a $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, para todo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| \le A$.*

Demonstração. É um resultado de M.C. Matos, em [15], que

$$\left\| \widehat{d}^j (e^\varphi)(0) \right\| = \|\varphi\|^j = \left\| \widehat{d}^j (e^\varphi)(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Então,

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{1}{j!}\left\|\widehat{d}^{j}\left(e^{\varphi}\right)(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}}=\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{1}{j!}\|\varphi\|=0,$$

daí segue da Proposição 2.1.12 que (a) e (b) estão provados para $k\in(1,+\infty)$.

Agora,

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\widehat{d}^{j}\left(e^{\varphi}\right)(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}}=\limsup_{j\to\infty}\|\varphi\|=\|\varphi\|,$$

então, se $\|\varphi\|<A$, (c) segue de 2.1.6 e se $\|\varphi\|\leq A$, (d) também segue de 2.1.6.

Finalmente,

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^{j}\left(e^{\varphi}\right)(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{j}}=\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{j!}\|\varphi\|=0,$$

daí segue da Definição 2.1.18 que (a) está provado para $k=+\infty$. Já o caso (b) com $k=+\infty$ segue da Definição 2.1.15. □

Proposição 2.1.24. *Seja $r\leq s$, então*

(a) *Se $k\in(1,+\infty]$ e $A\in(0,+\infty]$, segue que e^{φ} pertence a $Exp_{(s,m(r;q)),A}^{k}(E)$, para todo $\varphi\in E'$.*

(b) *Se $k\in(1,+\infty]$ e $A\in[0,+\infty)$, segue que e^{φ} pertence a $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}^{k}(E)$, para todo $\varphi\in E'$.*

(c) *Se $k=1$ e $A\in(0,+\infty]$, segue que e^{φ} pertence a $Exp_{(s,m(r;q)),A}^{1}(E)$, para todo $\varphi\in E'$ tal que $\|\varphi\|<A$.*

(d) *Se $k=1$ e $A\in[0,+\infty)$, segue que e^{φ} pertence a $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}^{1}(E)$, para todo $\varphi\in E'$ tal que $\|\varphi\|\leq A$.*

Demonstração. Como $r\leq s$, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos $r\leq ns$. Usando isto, vamos provar que $\varphi^{n}\in\mathcal{P}_{(s,m(r;q))}\left({}^{n}E\right)$ e $\|\varphi^{n}\|_{(s,m(r;q))}=\|\varphi\|^{n}$. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(r;q)}(E)$, então existem $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{r(q)'}$ e $\left(x_j^0\right)_{j=1}^{\infty}\in\ell_r^w(E)$ tais que $x_j=\tau_j x_j^0$, para cada $j\in\mathbb{N}$. Assim,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(x_j)|^{ns}\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(\tau_j x_j^0\right)\right|^{ns}\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\tau_j|^{ns}\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^{ns}\right)^{\frac{1}{s}}\leq$$

$$\leq\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^{ns}\right)^{\frac{1}{s}}=\|\varphi\|^{n}\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^{ns}}{\|\varphi\|^{ns}}\right)^{\frac{1}{ns}n}\leq$$

$$\leq\|\varphi\|^{n}\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{r(q)'}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^{r}}{\|\varphi\|^{r}}\right)^{\frac{1}{r}n}\leq\|\varphi\|^{n}\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{r(q)'}^{n}\left\|\left(x_j^0\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,r}^{n}$$

e como a decomposição $x_j = \tau_j x_j^0$ foi arbitrária, segue que

$$\left\| \left(\varphi^n \left(x_j \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_s \leq \|\varphi\|^n \left\| \left(x_j \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(r;q)}^n$$

e pela Definição 1.2.2, segue que $\varphi^n \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))} \left({}^n E \right)$ e $\|\varphi^n\|_{(s,m(r;q))} \leq \|\varphi\|^n$. Como a desigualdade contrária é clara, temos $\left\| \widehat{d}^n \left(e^{\varphi} \right) (0) \right\|_{(s,m(r;q))} = \|\varphi^n\|_{(s,m(r;q))} = \|\varphi\|^n$ e portanto a demonstração segue análoga à demonstração da Proposição 2.1.23. □

Proposição 2.1.25. (1) *O subespaço vetorial gerado pelos* e^{φ}, $\varphi \in E'$, *é denso em:*

(1.a) $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A} (E)$ *se* $k \in (1, +\infty]$ *e* $A \in (0, +\infty]$.

(1.b) $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A} (E)$ *se* $k \in (1, +\infty]$ *e* $A \in [0, +\infty)$.

(2) *O subespaço vetorial gerado pelos* e^{φ}, $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| < A$, *é denso em* $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A} (E)$ *se* $A \in (0, +\infty]$.

(3) *O subespaço vetorial gerado pelos* e^{φ}, $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| \leq A$, *é denso em* $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A} (E)$ *se* $A \in (0, +\infty)$.

Demonstração. Para os três casos denotaremos por g o fecho dos correspondentes subespaços gerados. Note que basta mostrar que $\mathcal{P}_f \left({}^j E \right) \subseteq g$, para cada $j \in \mathbb{N}$, pois como $\mathcal{P}_f \left({}^j E \right)$ é denso em $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))} \left({}^j E \right)$ (Proposição 1.3.4), para cada $j \in \mathbb{N}$, o resultado segue da Proposição 2.1.22. Para provar que $\mathcal{P}_f \left({}^j E \right) \subseteq g$, basta mostrar que $\varphi^n \in g$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi \in E'$. Provaremos isto por indução sobre n. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, temos

$$e^{\lambda\varphi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^j \varphi^j$$

convergindo nos correspondentes espaços e

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \left\| \frac{e^{\lambda\varphi} - 1}{\lambda} - \varphi \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = \lim_{|\lambda| \to 0} |\lambda| \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \left\| \frac{e^{\lambda\varphi} - 1}{\lambda} - \varphi \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} = \lim_{|\lambda| \to 0} |\lambda| \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho},$$

$$\lim_{|\lambda| \to 0} p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\frac{e^{\lambda\varphi} - 1}{\lambda} - \varphi \right) = \lim_{|\lambda| \to 0} |\lambda| \, p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \varphi^j \right).$$

Como

$$\left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

$$\left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \leq \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho},$$

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \varphi^j \right) \leq p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^j \right),$$

sempre que $|\lambda| \leq 1$, segue que os três limites anteriores são todos iguais a zero. Assim, $\varphi \in g$, para todo $\varphi \in E'$, nos correspondentes espaços. Agora, suponha que $\varphi^j \in g$, para cada $j \leq n-1$, então

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \left\| \frac{1}{\lambda^n} \left(e^{\lambda\varphi} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \lambda^j \varphi^j \right) - \varphi^n \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = \lim_{|\lambda| \to 0} |\lambda| \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \left\| \frac{1}{\lambda^n} \left(e^{\lambda\varphi} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \lambda^j \varphi^j \right) - \varphi^n \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} = \lim_{|\lambda| \to 0} |\lambda| \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho},$$

$$\lim_{|\lambda| \to 0} p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\frac{1}{\lambda^n} \left(e^{\lambda\varphi} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \lambda^j \varphi^j \right) - \varphi^n \right) = \lim_{|\lambda| \to 0} |\lambda| \, p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \varphi^j \right).$$

Como

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \leq \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^j \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho},$$

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \varphi^j \right) \leq p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \varphi^j \right),$$

sempre que $|\lambda| \leq 1$, segue que os limites acima são todos iguais a zero. Portanto, $\varphi^n \in g$, para todo $\varphi \in E'$, nos correspondentes espaços. □

CAPÍTULO 3

A Transformada de Fourier-Borel

Introduziremos neste capítulo a transformada de Fourier-Borel e provaremos os isomorfismos algébrico e topológico (nos casos possíveis) da mesma.

3.1 O Isomorfismo Algébrico da Transformada de Fourier-Borel

Definição 3.1.1. Se $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$, para $k \in (1,+\infty]$ e $A \in (0,+\infty]$, ou $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$, para $k \in (1,+\infty]$ e $A \in [0,+\infty)$, definimos a *transformada de Fourier-Borel de* T, denotada por FT, como a função definida sobre E' dada por $FT(\varphi) = T(e^{\varphi})$.
Se $T \in \left[Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$, para $A \in (0,+\infty]$, definimos a *transformada de Fourier-Borel de* T, denotada por FT, como a função definida sobre $B_A(0) \subset E'$ dada por $FT(\varphi) = T(e^{\varphi})$.

Observação 3.1.2. • Segue da Proposição 2.1.23 que a aplicação FT está bem definida, em qualquer um dos casos.
• Note que não definimos a transformada de Fourier-Borel para $T \in \left[Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$. Esse caso será tratado mais adiante, em particular.

Notação 3.1.3. Denotamos

$$\theta(k) = \frac{k}{(k-1)^{\frac{k-1}{k}}},$$

para $k \in (1, +\infty)$. Como $\lim_{k \to 1} \theta(k) = 1 = \lim_{k \to \infty} \theta(k)$, escrevemos $\theta(1) = \theta(\infty) = 1$.

Teorema 3.1.4. *Se E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada, então a transformada de Fourier-Borel*

$$F \colon \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \right]' \longrightarrow Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E'),$$

dada por $FT(\varphi) = T(e^{\varphi})$, é um isomorfismo algébrico entre estes espaços, para $k \in [1, +\infty]$ e $A \in (0, +\infty]$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar o caso $k \in (1, +\infty)$. Seja $T \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \right]'$, então segue da Proposição 1.4.3 que, para cada $\rho \in (0, A)$ existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$|T(f)| \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = C(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^{j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para toda $f \in \mathcal{B}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Assim, para $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^{j}E)$ temos

$$|T(P)| \leq C(\rho) \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Seja $T_j = T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^{j}E)}$, então pelo Teorema 1.3.6 existe $\mathcal{B}T_j \in \mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}(^{j}E')$ com $\mathcal{B}T_j(\varphi) = T_j(\varphi^j)$, para todo $\varphi \in E'$ e $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$. Assim,

$$\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))} = \|T_j\| \leq C(\rho) \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}}, \tag{3.1}$$

para cada $\rho \in (0, A)$, e podemos escrever

$$FT(\varphi) = T(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\varphi^{j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j(\varphi), \tag{3.2}$$

para todo $\varphi \in E'$. De (3.1), temos

$$\limsup_{j \to \infty} \left(\frac{j}{k'e} \right)^{\frac{1}{k'}} \frac{1}{(j!)^{\frac{1}{j}}} \|\mathcal{B}T_j\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \limsup_{j \to \infty} (C(\rho))^{\frac{1}{j}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{j}{k'e} \right)^{\frac{1}{k'}} \left(\frac{1}{j!} \right)^{\frac{1}{j}} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \limsup_{j \to \infty} (C(\rho))^{\frac{1}{j}} \frac{j}{e(j!)^{\frac{1}{j}}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} = \frac{1}{\rho\theta(k)},$$

para todo $\rho \in (0, A)$, e esta útima igualdade vale pois

$$\theta(k) = \frac{k}{(k-1)^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{k}{(k-1)^{\frac{1}{k'}}} = \frac{k}{\left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}} = \frac{k}{(k)^{\frac{1}{k'}}}(k')^{\frac{1}{k'}} = (k)^{\frac{1}{k}}(k')^{\frac{1}{k'}}.$$

Portanto,

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{1}{k'}}\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}}\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{A\theta(k)},$$

e como

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{1}{k'}} = +\infty,$$

segue que

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}}\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}^{\frac{1}{j}} = 0.$$

Como $\|\mathcal{B}T_j\| \leq \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$, segue que o raio de convergência da série (3.2) é $+\infty$. Portanto, segue da Proposição 2.1.11 que $FT \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E')$.
Agora, vamos provar que F é sobrejetora, para isto considere $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E')$.
Segue da Proposição 2.1.11 e das propriedades de limite superior que, para cada $\rho \in (0, A)$, existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\frac{1}{j!}\left\|\widehat{d}^jH(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq C(\rho)\frac{1}{(\rho\theta(k))^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.3.6, existe $T_j \in \left[\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)\right]'$ tal que $\mathcal{B}T_j = \widehat{d}^jH(0)$ e $\|T_j\| = \left\|\widehat{d}^jH(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}$. Portanto,

$$\frac{1}{j!}\|T_j\| \leq C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\frac{1}{(\theta(k))^j}\left(\frac{k'e}{j}\right)^{\frac{j}{k'}}. \tag{3.3}$$

Para $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, defina

$$T_H(f) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T_j\left(\widehat{d}^jf(0)\right).$$

Vamos provar que $T_H \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ e $FT_H = H$. Temos que

$$|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\|T_j\|\left\|\widehat{d}^jf(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}. \tag{3.4}$$

Da desigualdade (3.3) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j!}\left\|T_j\right\|\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} &\leq C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\frac{1}{(\theta(k))^j}\left(\frac{k'e}{j}\right)^{\frac{j}{k'}}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&= C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\left(\frac{(k-1)^{\frac{k-1}{k}}}{k}\right)^j\left(\frac{ke}{(k-1)j}\right)^{j\left(\frac{k-1}{k}\right)}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&= C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\frac{1}{k^j}\left(\frac{ek(k-1)}{(k-1)j}\right)^{j\left(\frac{k-1}{k}\right)}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&= C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\left(\frac{ek}{kj}\right)^j\left(\frac{ek}{j}\right)^{\frac{-j}{k}}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&= C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left(\frac{e}{j}\right)^j\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{j\to\infty}\frac{e}{j}(j!)^{\frac{1}{j}}=1,$$

dado $\varepsilon>0$, existe $D(\varepsilon)>0$ tal que

$$\left(\frac{e}{j}\right)^j\leq D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^j\frac{1}{j!},$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Logo,

$$\frac{1}{j!}\left\|T_j\right\|\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq C(\rho)D(\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^j\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

e segue de (3.4) que

$$\begin{aligned}
|T_H(f)| &\leq C(\rho)D(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{1+\varepsilon}\right)^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&= C(\rho)D(\varepsilon)\left\|f\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}},
\end{aligned}$$

para toda $f\in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, $\varepsilon>0$ e $\rho\in(0,A)$. Para concluir que $T_H\in\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$, só falta mostrar que

$$|T_H(f)|\leq D\left\|f\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

para toda $f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $\rho \in (0,A)$, onde D é uma constante positiva. Para isto, seja $\rho \in (0,A)$, então existem $\varepsilon > 0$ e $D(\varepsilon) > 0$ tais que $\rho(1+\varepsilon) < A$ e

$$|T_H(f)| \leq C(\rho) D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} \right)^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} =$$

$$= C(\rho) D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = C(\rho) D(\varepsilon) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}.$$

Assim, $T_H \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \right]'$ e

$$FT_H(\varphi) = T_H(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T_H(\varphi^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T_j(\varphi^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j(\varphi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \widehat{d}^j H(0)(\varphi) = H(\varphi),$$

para todo $\varphi \in E'$, portanto $FT_H = H$.

Agora vamos provar o caso $k = 1$.

Seja $T \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \right]'$, então para cada $\rho \in (0,A)$ existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$|T(f)| \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} = C(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para toda $f \in \mathcal{B}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Portanto, para $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$ temos

$$|T(P)| \leq C(\rho) \frac{j!}{\rho^j} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Seja $T_j = T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)}$, então pelo Teorema 1.3.6 existe $\mathcal{B}T_j \in \mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}({}^jE')$ com $\mathcal{B}T_j(\varphi) = T_j(\varphi^j)$, para todo $\varphi \in E'$ e $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$. Assim,

$$\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))} = \|T_j\| \leq C(\rho) \frac{j!}{\rho^j}, \tag{3.5}$$

para cada $\rho \in (0,A)$, e podemos escrever

$$FT(\varphi) = T(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T(\varphi^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j(\varphi), \tag{3.6}$$

para todo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| < A$. De (3.5), temos

$$\limsup_{j \to \infty} \left\| \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j \right\|_{(s',m(r';q'))}^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{\rho},$$

para todo $\rho \in (0, A)$. Logo,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!}\mathcal{B}T_j \right\|_{(s',m(r';q'))}^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{A},$$

e como $\|\mathcal{B}T_j\| \leq \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!}\mathcal{B}T_j \right\|^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{A}.$$

Portanto, segue da Definição 2.1.15 que $FT \in \mathcal{H}_{b(s',m(r';q'))}(B_A(0)) = Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,\frac{1}{A}}(E')$.

Para provar a sobrejetividade de F, seja $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,\frac{1}{A}}(E')$. Então

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{\widehat{d}^j H(0)}{j!} \right\|_{(s',m(r';q'))}^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{A}. \tag{3.7}$$

Pelo Teorema 1.3.6, existe $T_j \in \left[\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)\right]'$ tal que $\mathcal{B}T_j = \widehat{d}^j H(0)$ e $\|T_j\| = \left\|\widehat{d}^j H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}$. Para $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, defina

$$T_H(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T_j\left(\widehat{d}^j f(0)\right).$$

Vamos provar que $T_H \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ e $FT_H = H$. Temos que

$$\left|\frac{1}{j!}T_j\left(\widehat{d}^j f(0)\right)\right| \leq \frac{1}{j!}\|T_j\| \left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \frac{1}{j!}\left\|\widehat{d}^j H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Por (3.7), para cada $\rho \in (0, A)$, existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$\frac{1}{j!}\left\|\widehat{d}^j H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq C(\rho)\frac{1}{\rho^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, as duas desigualdades acima implicam que

$$|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{j!}T_j\left(\widehat{d}^j f(0)\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} C(\rho)\frac{1}{\rho^j}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = C(\rho)\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho},$$

e como esta desigualdade vale para cada $\rho \in (0, A)$ e para cada $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, segue que $T_H \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$. Como

$$FT_H(\varphi) = T_H(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T_H\left(\varphi^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T_j\left(\varphi^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\mathcal{B}T_j(\varphi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\widehat{d}^j H(0)(\varphi) = H(\varphi),$$

para todo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| < A$, segue que $FT_H = H$.

Agora vamos provar o caso $k = +\infty$.

Seja $T \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ então para cada $\rho \in (0, A)$ existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$|T(f)| \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\rho} = C(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para toda $f \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right)$. Portanto, para $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$ temos

$$|T(P)| \leq C(\rho) \rho^{-j} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Seja $T_j = T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)}$, então pelo Teorema 1.3.6, existe $\mathcal{B}T_j \in \mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}({}^jE')$ com $\mathcal{B}T_j(\varphi) = T_j(\varphi^j)$, para todo $\varphi \in E'$ e $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$. Assim,

$$FT(\varphi) = T(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\varphi^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j(\varphi), \tag{3.8}$$

para todo $\varphi \in E'$ e

$$\limsup_{j\to\infty} \|\mathcal{B}T_j\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} = \limsup_{j\to\infty} \|T_j\|^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{\rho},$$

para cada $\rho \in (0, A)$. Portanto,

$$\limsup_{j\to\infty} \|\mathcal{B}T_j\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \frac{1}{A},$$

e como

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}} = 0,$$

temos que

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}} \|\mathcal{B}T_j\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} = 0.$$

Como $\|\mathcal{B}T_j\| \leq \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$ segue que o raio de convergência da série (3.8) é $+\infty$, daí segue da Proposição 2.1.5 que $FT \in Exp_{(s',m(r';q')),0,\frac{1}{A}}(E')$.

Para provar a sobrejetividade de F, seja $H \in Exp_{(s',m(r';q')),0,\frac{1}{A}}(E')$. Então

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|\widehat{d^j} H(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \frac{1}{A}. \tag{3.9}$$

Pelo Teorema 1.3.6, existe $T_j \in \left[\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^jE\right)\right]'$ tal que $\mathcal{B}T_j = \widehat{d^j}H(0)$ e $\|T_j\| = \left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}$. Para $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, defina

$$T_H(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T_j\left(\widehat{d^j}f(0)\right).$$

Vamos provar que $T_H \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ e $FT_H = H$. Temos que

$$\left|\frac{1}{j!}T_j\left(\widehat{d^j}f(0)\right)\right| \leq \frac{1}{j!}\|T_j\| \left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \frac{1}{j!}\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Por (3.9), para cada $\rho \in (0, A)$, existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq C(\rho)\frac{1}{\rho^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, as duas desigualdades acima implicam que

$$|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{j!}T_j\left(\widehat{d^j}f(0)\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} C(\rho)\frac{1}{j!\rho^j}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = C(\rho)\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\rho},$$

e como esta desigualdade vale para cada $\rho \in (0, A)$ e para cada $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, segue que $T_H \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$. Da mesma forma já feita anteriormente, segue que $FT_H = H$.

Em qualquer um dos casos, F é claramente linear. Agora, se $FT = 0$, então $T(e^{\varphi}) = 0$, para todo $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| < A$, no caso $k = 1$ e para todo $\varphi \in E'$ no caso $k \in (1, +\infty]$. Pela densidade na Proposição 2.1.25 segue que $T = 0$ e assim F é injetora. □

Teorema 3.1.5. *Se E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada, então a transformada de Fourier-Borel*

$$F\colon \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]' \longrightarrow Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)A)^{-1}}(E'),$$

dada por $FT(\varphi) = T(e^{\varphi})$, é um isomorfismo algébrico entre estes espaços, para $k \in (1, +\infty]$ e $A \in [0, +\infty)$.

Demonstração. Da mesma forma que foi feito no Teorema 3.1.4 segue que F é linear e injetora.

Primeiramente vamos provar o caso $k \in (1, +\infty)$.
Seja $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$, então existem $\rho > A$ e $C(\rho) > 0$ tais que

$$|T(f)| \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = C(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\widehat{d^j} f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Assim, para $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$ temos

$$|T(P)| \leq C(\rho) \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Seja $T_j = T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)}$, então pelo Teorema 1.3.6, existe $\mathcal{B}T_j \in \mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}({}^jE')$ com $\mathcal{B}T_j(\varphi) = T_j(\varphi^j)$, para todo $\varphi \in E'$ e $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$. Assim,

$$FT(\varphi) = T(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T(\varphi^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j(\varphi), \tag{3.10}$$

para todo $\varphi \in E'$, e

$$\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))} = \|T_j\| \leq C(\rho) \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{1}{k'}} \frac{1}{(j!)^{\frac{1}{j}}} \|\mathcal{B}T_j\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \limsup_{j\to\infty} (C(\rho))^{\frac{1}{j}} \left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{1}{k'}} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\rho (j!)^{\frac{1}{j}}} =$$

$$= \frac{1}{\rho e} \limsup_{j\to\infty} \frac{j}{(j!)^{\frac{1}{j}}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} = \frac{1}{\rho\theta(k)} < \frac{1}{A\theta(k)},$$

e como

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{1}{k'}} = +\infty,$$

temos

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|\frac{\mathcal{B}T_j}{j!}\right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} = 0.$$

Como $\|\mathcal{B}T_j\| \leq \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$, segue que o raio de convergência da série (3.10) é $+\infty$. Portanto, segue da Proposição 2.1.11 que $FT \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)A)^{-1}}(E')$.
Para provar a sobrejetividade, seja $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)A)^{-1}}(E')$. Então,

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{1}{k'}} \left\|\frac{\widehat{d^j} H(0)}{j!}\right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} < \frac{1}{A\theta(k)}.$$

Assim, existem $\rho > A$ e $C(\rho) > 0$ tais que

$$\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}} \left\| \frac{\widehat{d^j} H(0)}{j!} \right\|_{(s',m(r';q'))} \leq C(\rho) \frac{1}{\rho^j (\theta(k))^j}, \tag{3.11}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.3.6, existe $T_j \in \left[\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)\right]'$ tal que $\mathcal{B}T_j = \widehat{d^j} H(0)$ e $\|T_j\| = \left\|\widehat{d^j} H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}$. Para $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, defina

$$T_H(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T_j\left(\widehat{d^j} f(0)\right).$$

Vamos provar que $T_H \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$. Segue de (3.11) e do fato que $\|T_j\| = \left\|\widehat{d^j} H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}$ que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{j!} T_j\left(\widehat{d^j} f(0)\right)\right| &\leq C(\rho) \left(\frac{k'e}{j}\right)^{\frac{j}{k'}} \frac{j!}{\rho^j} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{j}{k}} \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{j}{k'}} \left\|\frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \\ &= C(\rho) \frac{1}{\rho^j} \left(\frac{j}{ek}\right)^{\frac{j}{k}} \left(\frac{e}{j}\right)^j j! \left\|\frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{e(j!)^{\frac{1}{j}}}{j} = 1,$$

para cada $\varepsilon > 0$, existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{e}{j}\right)^j j! \leq D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\left|\frac{1}{j!} T_j\left(\widehat{d^j} f(0)\right)\right| \leq C(\rho) D(\varepsilon) \left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^j \left(\frac{j}{ek}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\rho}{1+\varepsilon} > A$, então

$$\begin{aligned} |T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\frac{1}{j!} T_j\left(\widehat{d^j} f(0)\right)\right| &\leq C(\rho) D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^j \left(\frac{j}{ek}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \\ &= C(\rho) D(\varepsilon) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

para toda $f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Portanto, $T_H \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$ e o fato que $FT_H = H$ segue como feito no Teorema 3.1.4.

Agora vamos provar o caso $k = +\infty$.

Seja $T \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$, então existem $\rho > A$ e $C(\rho) > 0$ tais que

$$|T(f)| \leq C(\rho)\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\rho} = C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para toda $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Assim, para $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$ temos

$$|T(P)| \leq C(\rho)\rho^{-j}\|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Seja $T_j = T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)}$, então pelo Teorema 1.3.6, existe $\mathcal{B}T_j \in \mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}({}^jE')$ com $\mathcal{B}T_j(\varphi) = T_j(\varphi^j)$, para todo $\varphi \in E'$ e $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$. Assim,

$$FT(\varphi) = T(e^{\varphi}) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T\left(\varphi^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\mathcal{B}T_j(\varphi) \tag{3.13}$$

para todo $\varphi \in E'$, e

$$\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))} = \|T_j\| \leq C(\rho)\rho^{-j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\limsup_{j\to\infty}\|\mathcal{B}T_j\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \frac{1}{\rho}\limsup_{j\to\infty}(C(\rho))^{\frac{1}{j}} = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{A}, \tag{3.14}$$

e como

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j!}\right)^{\frac{1}{j}} = 0,$$

temos

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{\mathcal{B}T_j}{j!}\right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} = 0.$$

Como $\|\mathcal{B}T_j\| \leq \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$, segue que o raio de convergência da série (3.13) é $+\infty$. Portanto, usando (3.14) segue da Proposição 2.1.5 que $FT \in Exp_{(s',m(r';q')),A^{-1}}(E')$.

Para provar a sobrejetividade, seja $H \in Exp_{(s',m(r';q')),A^{-1}}(E')$. Então,

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\widehat{d}^j H(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} < \frac{1}{A}.$$

Assim, existem $\rho > A$ e $C(\rho) > 0$ tais que

$$\left\| \widehat{d}^j H(0) \right\|_{(s',m(r';q'))} \leq C(\rho) \frac{1}{\rho^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.3.6, existe $T_j \in \left[\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)\right]'$ tal que $\mathcal{B}T_j = \widehat{d}^j H(0)$ e $\|T_j\| = \left\| \widehat{d}^j H(0) \right\|_{(s',m(r';q'))}$. Para $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, defina

$$T_H(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T_j \left(\widehat{d}^j f(0) \right).$$

Vamos provar que $T_H \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$. Temos que

$$\begin{aligned} |T_H(f)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left| T_j \left(\widehat{d}^j f(0) \right) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d}^j H(0) \right\|_{(s',m(r';q'))} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \\ &\leq C(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\rho}, \end{aligned}$$

para toda $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Portanto, $T_H \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$ e o fato que $FT_H = H$ segue como feito no Teorema 3.1.4. □

Observação 3.1.6. Se $T \in \left[Exp^{1}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$, pela Proposição 2.1.23 a definição natural para a transformada de Fourier-Borel de T seria $FT(\varphi) = T(e^{\varphi})$, para todo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| \leq A$. Entretanto vamos provar que podemos definir FT para todo $\varphi \in E'$ num conjunto maior, de tal maneira que esta definição concorda com a definição natural. A Proposição 3.1.8 abaixo garante isso.

Definição 3.1.7. Suponha que E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada e seja $A \in [0, +\infty)$. Se $T \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$ definimos sua *transformada de Fourier-Borel* F por

$$FT(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j(\varphi)$$

para todo $\varphi \in E'$, tal que a série converge absolutamente. Aqui $T_j = T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)}$, $\mathcal{B}T_j \in \mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}({}^jE')$ é dada por $\mathcal{B}T_j(\varphi) = T_j(\varphi^j)$, para todo $\varphi \in E'$, e $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$. Isto é devido ao Teorema 1.3.6, já usado várias vezes anteriormente.

Proposição 3.1.8. *Suponha que E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada. Se $A \in [0, +\infty)$ e $T \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$, então existe $\rho > A$ tal que $FT \in \mathcal{H}^{\infty}_{(s',m(r';q'))}(B_\rho(0))$, onde $B_\rho(0)$ é a bola aberta em E'.*

Demonstração. Se $T \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$, existem $\delta > A$ e $C(\delta) > 0$ tais que

$$|T(f)| \leq C(\delta)\, \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta} = C(\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{-j} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para toda $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Assim, para $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$ temos

$$|T(P)| \leq C(\delta)\, \delta^{-j} j!\, \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Usando as notações da Definição 3.1.7, temos

$$\|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))} = \|T_j\| \leq C(\delta)\, j! \delta^{-j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\limsup_{j \to \infty} \left\| \frac{\mathcal{B}T_j}{j!} \right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Seja $\rho \in (A, \delta)$, então

$$\limsup_{j \to \infty} \left\| \frac{\mathcal{B}T_j}{j!} \right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} < \frac{1}{\rho}.$$

e como $\|\mathcal{B}T_j\| \leq \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))}$ temos que $FT \in \mathcal{H}(B_\rho(0))$. Alem disso,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \left\| \frac{1}{j!} \mathcal{B}T_j \right\|_{(s',m(r';q'))} < +\infty,$$

e, portanto, $FT \in \mathcal{H}^{\infty}_{(s',m(r';q'))}(B_\rho(0))$. □

Teorema 3.1.9. *Se E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada, então a transformada de Fourier-Borel*

$$F\colon T \in \left[Exp^{1}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]' \longrightarrow FT \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),\frac{1}{A}}(E'),$$

é um isomorfismo algébrico entre estes espaços, para $A \in [0, +\infty)$.

Demonstração. Pela Definição de $Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),\frac{1}{A}}(E')$ e pela Proposição 3.1.8, temos que $FT \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),\frac{1}{A}}(E')$, para todo $T \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$. A linearidade de F é óbvia. Agora suponha que $T \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$ é tal que $FT = 0$, então da Proposição 3.1.8, existe $\rho > A$ tal que $FT(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in E'$, com $\|\varphi\| < \rho$, ou seja, $\mathcal{B}T_j(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in B_\rho(0) \subseteq E'$, $\forall j \in \mathbb{N}$, e isto implica que $\mathcal{B}T_j = 0$. Portanto, $\|T_j\| = \|\mathcal{B}T_j\|_{(s',m(r';q'))} = 0$ e, conseqüentemente, $T_j(P) = 0$, para todo $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, isto é, $T|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)} = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 2.1.22 sabemos que a série de Taylor de cada elemento de $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ converge para ele na topologia do espaço, assim $T(f) = 0$, para toda $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, pois $\widehat{d^j}f(0) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Logo, temos que $T = 0$, provando assim que F é injetora.

Para provar a sobrejetividade, seja $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),\frac{1}{A}}(E')$, então existe $\rho > A$ tal que $H \in \mathcal{H}^{\infty}_{(s',m(r';q'))}(B_\rho(0))$. Portanto,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!} \right\|_{(s',m(r';q'))}^{\frac{1}{j}} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{1}{j!}\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq C(\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^j, \tag{3.15}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.3.6, existe $T_j \in \left[\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^jE)\right]'$ tal que $\mathcal{B}T_j = \widehat{d^j}H(0)$ e $\|T_j\| = \left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}$. Logo, segue de (3.15) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!}\left|T_j\left(\widehat{d^j}f(0)\right)\right| &\leq \frac{1}{j!}\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \\ &\leq C(\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^j\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, defina

$$T_H(f) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T_j\left(\widehat{d^j}f(0)\right),$$

daí segue que

$$|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left|T_j\left(\widehat{d^j}f(0)\right)\right| \leq C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^j\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \tag{3.16}$$

$$= C(\varepsilon)\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho}{1+\varepsilon}}, \tag{3.17}$$

para toda $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e $\varepsilon > 0$, tal que $\frac{\rho}{1+\varepsilon} > A$. Portanto, $T_H \in \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'$ e o fato que $FT_H = H$ segue como feito no Teorema 3.1.4. $\square$

3.2 Conjuntos Limitados

Nesta seção daremos caracterizações dos conjuntos limitados de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}$, para $k \in [1,+\infty]$ e $A \in (0,+\infty]$, e dos espaços $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e $Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}$, para $k \in [1,+\infty]$ e $A \in [0,+\infty)$. Estas caracterizações serão usadas para demonstrar que, em alguns casos, as transformadas de Fourier-Borel são isomorfismos topológicos.

Denotaremos por $\mathcal{S}_A$ a familia de todas as seqüências $\alpha = (\alpha_j)_{j=0}^{\infty}$ de números reais $\alpha_j \geq 0$, tais que

$$\limsup_{j\to\infty} \alpha_j^{\frac{1}{j}} \leq A.$$

Proposição 3.2.1. *Para $k \in (1,+\infty)$, $A \in (0,+\infty]$ e $\alpha \in \mathcal{S}_{\frac{1}{A}}$, as seminormas $p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}$ e $p_{(s,m(r;q)),k,\alpha}$ definidas por*

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

$$p_{(s,m(r;q)),k,\alpha}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))},$$

são contínuas em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}$, respectivamente.
Para $k = 1$, $A \in (0,+\infty]$ e $\alpha \in \mathcal{S}_{\frac{1}{A}}$ as seminormas $p_{\tilde{N},(s;(r,q)),1,\alpha}$ e $p_{(s,m(r;q)),1,\alpha}$ definidas por

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),1,\alpha}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

$$p_{(s,m(r;q)),1,\alpha}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))},$$

são contínuas em $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^1_{(s,m(r;q)),A}$, respectivamente.
Para $k = +\infty$, $A \in (0,+\infty]$ e $\alpha \in \mathcal{S}_{\frac{1}{A}}$ as seminormas $p_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\alpha}$ e $p_{(s,m(r;q)),\infty,\alpha}$ definidas por

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\alpha}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

$$p_{(s,m(r;q)),\infty,\alpha}(f)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{(s,m(r;q))},$$

são contínuas em $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *e* $Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}$*, respectivamente.*

Demonstração. Para cada $\rho\in(0,A)$, temos que $\frac{1}{A}<\frac{1}{\rho}$ e como $\alpha\in\mathcal{S}_{\frac{1}{A}}$, existe $C(\rho)>0$ tal que $\alpha_j\leq C(\rho)\frac{1}{\rho^j}$, para todo $j\in\mathbb{N}$. Assim, para $k\in(1,+\infty)$, temos

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}(f)\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}=C(\rho)\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

$$p_{(s,m(r;q)),k,\alpha}(f)\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{(s,m(r;q))}=C(\rho)\|f\|_{(s,m(r;q)),k,\rho}.$$

Para $k=1$, temos

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),1,\alpha}(f)\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}=C(\rho)\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho},$$

$$p_{(s,m(r;q)),1,\alpha}(f)\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{(s,m(r;q))}=C(\rho)\|f\|_{(s,m(r;q)),\rho}.$$

Para $k=+\infty$, temos

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty,\alpha}(f)\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}=C(\rho)\,p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f),$$

$$p_{(s,m(r;q)),\infty,\alpha}(f)\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{(s,m(r;q))}=C(\rho)\,p^{\infty}_{(s,m(r;q)),\rho}(f).$$

Da topologia limite indutivo localmente convexa juntamente com as seis desigualdades acima segue a continuidade das seminormas nos correspondentes espaços. □

Para demonstrar a próxima proposição que dá uma caracterização dos conjuntos limitados de $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$, precisamos da Proposição 1.4.9 e de um outro resultado da teoria de espaços vetoriais topológicos que será enunciado na forma de lema.

Lema 3.2.2. *Um subconjunto L de um espaço localmente convexo X é limitado se, e somente se, cada seminorma contínua em X é limitada sobre L.*

Demonstração. Ver Grothendieck [2], pág.25. □

Proposição 3.2.3. *Para* $k \in (1, +\infty)$ *e* $A \in (0, +\infty]$, *um subconjunto* B *de* $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *ou de* $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ *é limitado se, e somente se, existe* $\rho \in (0, A)$ *tal que*

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho \tag{3.18}$$

ou

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho, \tag{3.19}$$

respectivamente.

Para $k = 1$ *e* $A \in (0, +\infty]$, *um subconjunto* B *de* $Exp^{1}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *ou de* $Exp^{1}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ *é limitado se, e somente se, existe* $\rho \in (0, A)$ *tal que*

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho \tag{3.20}$$

ou

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho, \tag{3.21}$$

respectivamente.

Para $k = +\infty$ *e* $A \in (0, +\infty]$, *um subconjunto* B *de* $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ *ou de* $Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ *é limitado se, e somente se, existe* $\rho \in (0, A)$ *tal que*

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho \tag{3.22}$$

ou

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho, \tag{3.23}$$

respectivamente.

Demonstração. Vamos utilizar o Lema 3.2.2 para provar que se valem (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23), então B é limitado no correspondente espaço. Seja p uma seminorma contínua no correspondente espaço, então para cada $\delta \in (0, A)$, existe $C(\delta) > 0$ tal que

$$p(f) \leq C(\delta) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\delta},$$

para toda $f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, ou

$$p(f) \leq C(\delta) \|f\|_{(s,m(r;q)),k,\delta},$$

para toda $f \in Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ e para cada $k \in [1,+\infty]$. Em particular, essas duas desigualdades valem para $\delta = \rho$, daí

$$\sup_{f\in B} p(f) \leq C(\rho) \sup_{f\in B} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \tag{3.24}$$

$$\sup_{f\in B} p(f) \leq C(\rho) \sup_{f\in B} \|f\|_{(s,m(r;q)),k,\rho}. \tag{3.25}$$

Para $k \in (1,+\infty)$, segue de (3.18) e (3.19) que

$$\sup_{f\in B} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

$$\sup_{f\in B} \|f\|_{(s,m(r;q)),k,\rho} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty.$$

Para $k = 1$, segue de (3.20) e (3.21) que

$$\sup_{f\in B} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \sup_{f\in B} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

$$\sup_{f\in B} \|f\|_{(s,m(r;q)),\rho} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \sup_{f\in B} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty.$$

Para $k = +\infty$, segue de (3.22) e (3.23) que

$$\sup_{f\in B} p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} < +\infty,$$

$$\sup_{f\in B} p^{\infty}_{(s,m(r;q)),\rho}(f) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^j} \sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty.$$

Assim, segue de (3.24) que $\sup_{f\in B} p(f) < +\infty$, sendo B um subconjunto de $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, e segue de (3.25) que $\sup_{f\in B} p(f) < +\infty$, sendo B um subconjunto de $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$, para $k \in [1,+\infty]$. Portanto, B é limitado no correspondente espaço.

Agora, suponha que B é limitado em $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ (para $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),A}(E)$ a demonstração é análoga), para $k \in (1,+\infty)$. Sabemos que esses espaços são limites indutivos de uma seqüência de espaços DF, denotados por $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho_n}(E)$, onde $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência estritamente crescente de números positivos, convergindo para A. Então, pela Proposição 1.4.9 B está contido no fecho, para a topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, de algum subconjunto limitado de algum $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho_n}(E)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que B está contido na bola unitária fechada de $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, onde $\rho \in (0, A)$. Agora, para obter o resultado, basta provar que o fecho para a topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ desta bola está contido numa bola de algum $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E)$, para algum $\delta \in (0, A)$. De fato, se isto for verdade temos

$$\sup_{f\in B} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\delta} \leq M,$$

para algum $M > 0$. Então,

$$\delta^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq M,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \delta,$$

provando assim (3.18).

Seja

$$B_{\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)} = \left\{f \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E); \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq 1\right\}$$

a bola unitária de $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Se g pertence ao fecho $\overline{B_{\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)}}$ de $B_{\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)}$ em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, existe uma rede $(g_i)_{i\in I}$ em $B_{\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)}$ convergindo para g na topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. Então,

$$\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \sup_{i\in I}\left\|\frac{\widehat{d}^j g_i(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq 1, \tag{3.26}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Se para cada $j \in \mathbb{N}$ definirmos a seminorma $p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}$ como

$$p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}(f) = \rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

onde $\alpha_j = \rho^{-j}$ e $\alpha_l = 0$, para $l \neq j$, segue da Proposição 3.2.1 que $p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}$ é uma seminorma contínua em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. E como $p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}(g_i) \longrightarrow p_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha}(g)$, segue de (3.26) que

$$\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^j}g\left(0\right)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq 1,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Pela arbitrariedade na escolha de g, segue que

$$\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{g\in B_{\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)}}\left\|\frac{\widehat{d^j}g\left(0\right)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq 1,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$, e assim

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{g\in B_{\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)}}\left\|\frac{\widehat{d^j}g\left(0\right)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq \rho^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Portanto, se $\delta\in(\rho,A)$, temos $\frac{\rho}{\delta}<1$ e daí

$$\sup_{g\in B}\|g\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\delta}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\delta^j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{g\in B}\left\|\frac{\widehat{d^j}g\left(0\right)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^j=\frac{1}{1-\frac{\rho}{\delta}}.$$

Logo, B está contido na bola fechada de centro 0 e raio $\frac{1}{1-\frac{\rho}{\delta}}$ de $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$.
A demonstração para $k=1$ e $+\infty$ segue de maneira análoga. □

Corolário 3.2.4. *Para $k\in[1,+\infty]$ e $A\in(0,+\infty]$, um subconjunto B de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ ou de $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ é limitado se, e somente se, existe $\rho\in(0,A)$ tal que B está contido e é limitado em $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$ ou em $\mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$, respectivamente.*

Demonstração. Segue diretamente da demonstração da Proposição anterior. □

Para demonstrar a próxima proposição que dá uma caracterização dos conjuntos limitados de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e $Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, precisamos de um resultado da teoria de espaços vetoriais topológicos que será enunciado na forma de lema. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Grothendieck [2], Proposição 11, pág. 24.

Lema 3.2.5. *Seja X um espaço vetorial topológico, cuja topologia seja a mais fraca tal que as aplicações f_i de X num espaço vetorial topológico X_i sejam contínuas. Então, um subconjunto L é limitado em X se, e somente se, para todo i, $f_i(L)$ é limitado em X_i.*

Proposição 3.2.6. *Para $k \in (1, +\infty)$ e $A \in [0, +\infty)$, um subconjunto B de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ ou de $Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ é limitado se, e somente se,*

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A \tag{3.27}$$

ou

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A, \tag{3.28}$$

respectivamente.

Para $k = 1$ e $A \in [0, +\infty)$, um subconjunto B de $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ ou de $Exp^1_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ é limitado se, e somente se,

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A \tag{3.29}$$

ou

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A, \tag{3.30}$$

respectivamente.

Para $k = +\infty$ e $A \in [0, +\infty)$, um subconjunto B de $Exp^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ ou de $Exp^\infty_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ é limitado se, e somente se,

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A \tag{3.31}$$

ou

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{(s,m(r;q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A, \tag{3.32}$$

respectivamente.

Demonstração. Seja $B \subseteq Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ limitado, para $k \in (1, +\infty)$, então pelo Lema 3.2.5 segue que B é limitado em $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, para todo $\rho > A$. Logo, para cada $\rho > A$ existe $M_\rho > 0$, tal que

$$\sup_{f\in B} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} < M_\rho,$$

daí

$$\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}<M_\rho,$$

e, portanto,

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}}\leq\rho,$$

para todo $\rho>A$, o que implica

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}}\leq A.$$

Para $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ decorre analogamente. Os casos $k=1$ e $+\infty$ também seguem de maneira análoga.

Agora, suponha que (3.27) seja satisfeita, então dado $\varepsilon>0$, existe $C(\varepsilon)>0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq C(\varepsilon)(A+\varepsilon)^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Assim dado $\rho>A$, temos

$$\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq C(\varepsilon)\left(\frac{A+\varepsilon}{\rho}\right)^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon>0$ tal que $\rho>A+\varepsilon$, temos $\frac{A+\varepsilon}{\rho}<1$ e, portanto, segue das duas desigualdades acima que

$$\begin{aligned}\sup_{f\in B}\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}&\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq\\&\leq C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A+\varepsilon}{\rho}\right)^j<+\infty.\end{aligned}$$

Logo, B é limitado em $\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, para cada $\rho>A$, assim B é limitado em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$.

Para $Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E)$ decorre analogamente. Os casos $k=1$ e $+\infty$ também seguem de maneira análoga. □

3.3 O Isomorfismo Topológico da Transformada de Fourier-Borel

Teorema 3.3.1. *Se E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada, então a transformada de Fourier-Borel F é um isomorfismo topológico entre os espaços $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'_{\beta}$ e $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E')$, para $k \in [1,+\infty]$ e $A \in (0,+\infty]$.*
A letra β usada acima significa que estamos considerando a topologia forte no dual.

Demonstração. Sabemos que $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é um espaço DF, então seu dual forte é um espaço de Fréchet (Proposição 1.4.10). Além disso $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E')$ também é um espaço de Fréchet e F é um isomorfismo, assim basta mostrar que F^{-1} é contínua, pois a continuidade de F segue do Teorema da Aplicação Aberta.
Provaremos a continuidade de F^{-1} mostrando que para cada seminorma contínua q em $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'_{\beta}$, existem $C > 0$ e uma seminorma contínua p em $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E')$ tais que

$$q\left(F^{-1}(H)\right) = q(T_H) \leq Cp(H),$$

para todo $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}(E')$ (aqui estamos usando a notação T_H já usada várias vezes nas demonstrações anteriores). Lembremos que a topologia forte no dual é a topologia da convergência sobre os limitados, ou seja, as seminormas que geram a topologia de $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'_{\beta}$ são da forma $p_B(S) = \sup_{f\in B} |S(f)|$, onde $S \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ e $B \subseteq Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é um subconjunto limitado.
Assim, para $k \in (1,+\infty)$, seja B um subconjunto limitado de $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. Pela Proposição 3.2.3 existe $\rho \in (0,A)$ tal que

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho.$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \sup_{f\in B} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(\rho+\varepsilon)^j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| = \sup_{f\in B}|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \tag{3.33}$$
$$\leq C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^j\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left\|\frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))}.$$

Como

$$\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} = (\theta(k))^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\frac{e^j}{j^j},$$

temos

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^j\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left\|\frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq \tag{3.34}$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}(\theta(k))^j(\rho+\varepsilon)^j\frac{j!}{j^j}e^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\left\|\frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))}.$$

Sabemos que

$$\lim_{j\to\infty}\frac{e}{j}(j!)^{\frac{1}{j}} = 1,$$

logo existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{j!}{j^j}e^j \leq D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^j, \tag{3.35}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, segue de (3.33), (3.34) e (3.35) que

$$\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}(\theta(k))^j(\rho+\varepsilon)^j\frac{j!}{j^j}e^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\left\|\frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)D(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}(\theta(k))^j(\rho+\varepsilon)^j(1+\varepsilon)^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\left\|\frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} =$$
$$= C(\varepsilon)D(\varepsilon)\|H\|_{(s',m(r';q')),k',\frac{1}{\theta(k)(\rho+\varepsilon)(1+\varepsilon)}}.$$

Assim, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $(\rho+\varepsilon)(1+\varepsilon) < A$, temos $\frac{1}{\theta(k)(\rho+\varepsilon)(1+\varepsilon)} > \frac{1}{\theta(k)A}$ e, portanto, segue a continuidade de F^{-1}.

Para $k = 1$, seja B um subconjunto limitado de $Exp^1_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. Pela Proposição 3.2.3 existe $\rho \in (0, A)$ tal que

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\sup_{f\in B}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho.$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{f\in B}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(\rho+\varepsilon)^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| = \sup_{f\in B}|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}\frac{1}{j!}\sup_{f\in B}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^j\left\|\frac{\widehat{d^j}H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} = C(\varepsilon)\|H\|_{(s',m(r';q')),\infty,\frac{1}{\rho+\varepsilon}}.$$

Assim, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $(\rho+\varepsilon) < A$, temos $\frac{1}{\rho+\varepsilon} > \frac{1}{A}$, daí segue a continuidade de F^{-1}.

Para $k = +\infty$, seja B um subconjunto limitado de $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. Pela Proposição 3.2.3, existe $\rho \in (0, A)$ tal que

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \rho.$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(\rho+\varepsilon)^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| = \sup_{f\in B}|T_H(f)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\widehat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d^j}f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^j\left\|\hat{d^j}H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} = C(\varepsilon)\|H\|_{(s',m(r';q')),\frac{1}{\rho+\varepsilon}}.$$

Assim, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $(\rho+\varepsilon) < A$, temos $\frac{1}{\rho+\varepsilon} > \frac{1}{A}$, daí segue a continuidade de F^{-1}. $\square$

Um problema em aberto é provar que a transformada de Fourier-Borel F para o caso abaixo é um isomorfismo topológico, mas é possível provar que F^{-1} é contínua, como segue:

Teorema 3.3.2. *Se $k \in [1,+\infty]$, $A \in [0,+\infty)$ e E' tem a propriedade da aproximação λ-limitada, então*

$$F^{-1}\colon Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)A)^{-1}}(E') \to \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right]'_{\beta},$$

é contínua.

Novamente β é usado para designar a topologia forte no dual.

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Pela Proposição 3.2.6,

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\right)^{\frac{1}{j}} \leq A.$$

Para $\rho > A$, existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\rho)\,\rho^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\widehat{d}^j H(0)\right\|_{(s',m(r';q'))}\sup_{f\in B}\left\|\frac{\widehat{d}^j f(0)}{j!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \\ &\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} j!\left\|\frac{\widehat{d}^j H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} = \\ &= C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}(\rho\theta(k))^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\frac{j!}{j^j}e^j\left\|\frac{\widehat{d}^j H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))}.\end{aligned}$$

Usando (3.35), segue que

$$\begin{aligned}\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| &\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}(\rho\theta(k))^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\frac{j!}{j^j}e^j\left\|\frac{\widehat{d}^j H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq \\ &\leq C(\rho)\,C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}(\rho(1+\varepsilon)\theta(k))^j\left(\frac{j}{k'e}\right)^{\frac{j}{k'}}\left\|\frac{\widehat{d}^j H(0)}{j!}\right\|_{(s',m(r';q'))} = \\ &= C(\rho)\,C(\varepsilon)\,\|H\|_{(s',m(r';q')),k',\frac{1}{\theta(k)\rho(1+\varepsilon)}},\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $\rho > A$. Assim,

$$\sup_{f\in B}\left|F^{-1}(H)(f)\right| \leq C(\rho)\,D(\varepsilon)\,\|H\|_{(s',m(r';q')),k',r},$$

para todo $r < \frac{1}{\theta(k)A}$ e isto implica que F^{-1} é contínua.
As demonstrações dos casos $k = 1$ e $k = +\infty$ são análogas. $\square$

CAPÍTULO 4

Operadores de Convolução

Deste capítulo em diante vamos considerar E um espaço de Banach complexo, E' com a propriedade da aproximação λ-limitada e $s, r, q \in [1, +\infty]$, com $s, r \leq q$.

Antes de definirmos os operadores de convolução, vamos provar um resultado necessário para o desenvolvimento da teoria.

4.1 Preliminares

Proposição 4.1.1. (a) *Se $a \in E$, $k \in [1, +\infty]$, $A \in (0, +\infty]$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, então $\widehat{d^n} f(\cdot)\, a \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e*

$$\widehat{d^n} f(\cdot)\, a = \sum_{j=0}^{\infty} (j!)^{-1} \widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}(a),$$

no sentido da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$.
(b) *Se $a \in E$, $k \in [1, +\infty]$, $A \in [0, +\infty)$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, então $\widehat{d^n} f(\cdot)\, a \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ e*

$$\widehat{d^n} f(\cdot)\, a = \sum_{j=0}^{\infty} (j!)^{-1} \widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}(a),$$

no sentido da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$.

Demonstração. É um resultado da teoria de holomorfia (ver Nachbin [19], Proposição 3, pág. 29) que vale a seguinte igualdade:

$$\widehat{d}^j f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \widehat{d^{j+n} f(0)\, x^n}, \tag{4.1}$$

para cada $x \in E$, logo

$$\widehat{d}^j f(x)\, a = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \widehat{d^{j+n} f(0)\, x^n}\,(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \widehat{d^{j+n} f(0)\, a^j}\,(x), \tag{4.2}$$

para cada $x \in E$. Pela Proposição 1.3.5, temos que $\widehat{d^{j+n} f(0)\, a^j} \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^n E\right)$ e

$$\left\| \widehat{d^{j+n} f(0)\, a^j} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \left\| \widehat{d}^{n+j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Primeiramente, considere $k \in [1, +\infty)$ e seja

$$L = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^{n+j} f(0)}{(n+j)!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n+j}}.$$

Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^{n+j} f(0)}{(n+j)!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(L+\varepsilon)^{n+j},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d^{j+n} f(0)\, a^j} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} &\leq \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d}^{n+j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j = \\
= \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{(n+j)!}{n!} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n+j}{k}} \left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{1}{(n+j)!} &\left\| \widehat{d}^{n+j} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j \leq \\
\leq \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{(n+j)!}{n!} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n+j}{k}} &C(\varepsilon)(L+\varepsilon)^{n+j} \|a\|^j = \\
= \left(\frac{n}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}} (n+1)\ldots(n+j) \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{k}} &C(\varepsilon)(L+\varepsilon)^{n+j} \|a\|^j.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+j}\right)^{\frac{1}{k}} \left[(n+1)\ldots(n+j)\right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{kn}} = 1,$$

para todo $\varepsilon > 0$, existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{n}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}} (n+1)\ldots(n+j)\left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{k}} \leq D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n .$$

Logo, segue das duas desigualdades anteriores que

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!}\left\|\widehat{d^{j+n}f(0)a^j}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n(L+\varepsilon)^{n+j}\|a\|^j =$$

$$= C(\varepsilon)D(\varepsilon)\|a\|^j(L+\varepsilon)^j[(1+\varepsilon)(L+\varepsilon)]^n ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Daí,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^{j+n}f(0)a^j}}{n!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq (1+\varepsilon)(L+\varepsilon),$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{\widehat{d^{j+n}f(0)a^j}}{n!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq L.$$

Assim, se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, então $L < A$ e portanto $\widehat{d^n}f(\cdot)a \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ (para $A \in (0,+\infty]$) e se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, então $L \leq A$ e portanto $\widehat{d^n}f(\cdot)a \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ (para $A \in [0,+\infty)$).
Considere agora o caso $k = +\infty$. A demonstração para $\mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}(E) = Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ pode ser encontrada em Matos [15], Proposição 9.1.3, pág. 174. Agora, para

$$f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) = \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right),$$

com $A \in (0,+\infty)$, temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{\widehat{d^{n+j}}f(0)}{(n+j)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n+j}} \leq A.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left\|\frac{\widehat{d^{n+j}}f(0)}{(n+j)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(A+\varepsilon)^{n+j},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\left\|\widehat{d^{j+n}f(0)\,a^{j}}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} &\leq \frac{1}{n!}\left\|\widehat{d}^{n+j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\|a\|^{j} = \\ &= (n+1)\dots(n+j)\,\frac{1}{(n+j)!}\left\|\widehat{d}^{n+j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\|a\|^{j} \leq \\ &\leq (n+1)\dots(n+j)\,\|a\|^{j}\,C(\varepsilon)\,(A+\varepsilon)^{n+j}.\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}\dots(n+j)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

para todo $\varepsilon > 0$, existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(n+1)\dots(n+j) \leq D(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^{n}.$$

Logo, segue das duas desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\left\|\widehat{d^{j+n}f(0)\,a^{j}}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} &\leq C(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^{n}(A+\varepsilon)^{n+j}\|a\|^{j} = \\ &= C(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,\|a\|^{j}(A+\varepsilon)^{j}\left[(1+\varepsilon)(A+\varepsilon)\right]^{n},\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Daí,

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{\widehat{d^{j+n}f(0)\,a^{j}}}{n!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq (1+\varepsilon)(A+\varepsilon),$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{\widehat{d^{j+n}f(0)\,a^{j}}}{n!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq A.$$

Assim, $\widehat{d}^{n}f(\cdot)\,a \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{A}}(0)\right) = Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}^{\infty}(E)$. Falta provar o resultado para os espaços $Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}^{\infty}(E)$. Se $f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}^{\infty}(E)$ então $f \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$, para algum $\rho < A$. Logo, $\widehat{d}^{n}f(\cdot)\,a \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$ e, portanto, $\widehat{d}^{n}f(\cdot)\,a \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}^{\infty}(E)$. Falta ainda provar a convergência da série na topologia do espaço correspondente.

Se $f \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, para algum $\rho > 0$, com $k \in [1, +\infty)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left\| \widehat{d^j} f(\cdot)\, a - \sum_{n=0}^{v} (n!)^{-1} \, \widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^n}\, (a) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_0} \\
&= \left\| \sum_{n=v+1}^{\infty} (n!)^{-1} \, \widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^n}\, (a) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_0} \\
&= \sum_{n=v+1}^{\infty} \rho_0^{-n} \left(\frac{n}{ke} \right)^{\frac{1}{k}} \left\| (n!)^{-1} \, \widehat{d^{j+n} f(0)\, a^j} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \\
&\leq \sum_{n=v+1}^{\infty} \rho_0^{-n} \left(\frac{n}{ke} \right)^{\frac{1}{k}} \left\| (n!)^{-1} \, \widehat{d^{j+n}} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j \\
&\leq C(\varepsilon)\, D(\varepsilon) \sum_{n=v+1}^{\infty} \rho_0^{-n} \left[(\rho + \varepsilon)(1 + \varepsilon) \right]^n \|a\|^j (\rho + \varepsilon)^j \\
&= C(\varepsilon)\, D(\varepsilon) \|a\|^j (\rho + \varepsilon)^j \sum_{n=v+1}^{\infty} \left[\rho_0^{-1} (\rho + \varepsilon)(1 + \varepsilon) \right]^n,
\end{aligned}$$

e a expressão desta última desigualdade tende a zero quando $v \to \infty$, para $\rho_0 > \rho$ e $\varepsilon > 0$ tal que $(\rho + \varepsilon)(1 + \varepsilon) < \rho_0$ (nestas desigualdades usamos o mesmo procedimento usado anteriormente para L, mas usando ρ). Agora, a convergência segue das topologias dos espaços, como feito na demonstração da Proposição 2.1.22. Para o caso $k = +\infty$, decorre de maneira análoga usando as desigualdades correspondentes. □

4.2 Definições e Resultados Concernentes

Definição 4.2.1. Para $k \in [1, +\infty]$ e $A \in (0, +\infty]$, um *operador de convolução em* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ é uma aplicação linear contínua

$$\mathcal{O} \colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

tal que

$$d(\mathcal{O} f)(\cdot)\, a = \mathcal{O}(df(\cdot)\, a),$$

para todo $a \in E$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$.

Para $k \in [1, +\infty]$ e $A \in [0, +\infty)$, um *operador de convolução em* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ é uma aplicação linear contínua

$$\mathcal{O}\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$$

tal que

$$d(\mathcal{O}f)(\cdot)\,a = \mathcal{O}(df(\cdot)\,a),$$

para todo $a \in E$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$.

Denotaremos os conjuntos de todos os operadores de convolução sobre $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e sobre $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ por $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}$ e $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$, respectivamente. Também usaremos as seguintes notações $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\infty} = \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ e $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,0} = \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$.

Proposição 4.2.2. *Em qualquer um dos casos da Definição 4.2.1, temos que*

$$\mathcal{O}\left(\widehat{d}^n f(\cdot)\,a\right) = \widehat{d}^n(\mathcal{O}f)(\cdot)\,a,$$

para todo $a \in E$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução finita. O caso $n = 1$, segue da Definição 4.2.1 de um operador de convolução. Suponha então a igualdade válida para n e vamos provar para $n+1$. Pela definição de derivada direcional (ver Nachbin [18], Definição 4, pág. 20), temos que

$$\widehat{d}^{n+1} f(\cdot)\,a = d^1 g(\cdot)\,a,$$

onde $g(x) = d^n f(x)(a, ..., a) = \widehat{d}^n f(x)\,a$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\left(\widehat{d}^{n+1} f(\cdot)\,a\right) &= \mathcal{O}\left(d^1 g(\cdot)\,a\right) = d^1(\mathcal{O}g)(\cdot)\,a = d^1\left[\mathcal{O}\left(\widehat{d}^n f(\cdot)\,a\right)\right](\cdot)\,a\\ &= d^1\left[\widehat{d}^n(\mathcal{O}f)(\cdot)\,a\right](\cdot)\,a := \widehat{d}^{n+1}(\mathcal{O}f)(\cdot)\,a.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.2.3. Vamos dar alguns exemplos de operadores de convolução:

(1) Claramente o operador identidade e o operador nulo são operadores de convolução.

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\mathcal{O}_n\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ dado por $\mathcal{O}_n(f) = \widehat{d}^n f(\cdot)\,a$ ou $\mathcal{O}_n\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ dado por $\mathcal{O}_n(f) = \widehat{d}^n f(\cdot)\,a$, com $a \in E$. Em qualquer um dos casos, $\mathcal{O}_n$ é um operador de convolução. De fato, a Proposição 4.1.1 garante que $\mathcal{O}_n$ está bem definido, em ambos os casos. Vamos provar a

continuidade de $\mathcal{O}_n$ já que a linearidade e a comutatividade com derivadas direcionais são claras. Para $k \in [1, +\infty)$, temos que

$$\|\mathcal{O}_n f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d^{j+n} f(0)\, a^n} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^n \|a\|^n \frac{(n+j)!}{j!} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left(\frac{ke}{j+n}\right)^{\frac{j+n}{k}} \rho^{-(j+n)} \left(\frac{j+n}{ke}\right)^{\frac{j+n}{k}} \frac{1}{(n+j)!} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho^n \|a\|^n \frac{(n+j)!}{j!} \left(\frac{j}{j+n}\right)^{\frac{j}{k}} \left(\frac{ke}{j+n}\right)^{\frac{n}{k}} \rho^{-(j+n)} \left(\frac{j+n}{ke}\right)^{\frac{j+n}{k}} \frac{1}{(n+j)!} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Como

$$\lim_{j\to\infty} \rho^{\frac{n}{j}} \|a\|^{\frac{n}{j}} \left[(j+1)\dots(j+n)\right]^{\frac{1}{j}} \left(\frac{j}{j+n}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{ke}{j+n}\right)^{\frac{n}{jk}} = 1,$$

para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\rho^n \|a\|^n (j+1)\dots(j+n) \left(\frac{j}{j+n}\right)^{\frac{j}{k}} \left(\frac{ke}{j+n}\right)^{\frac{n}{k}} \leq C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|\mathcal{O}_n f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \frac{C(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^n} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}}.$$

Por argumentos similares aos já usados anteriormente e tomando $\varepsilon > 0$ conveniente, segue a continuidade de $\mathcal{O}_n$ em ambos os casos.

(c) Mais geralmente, para $m \in \mathbb{N}$ fixo, $\mathcal{O} = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \mathcal{O}_n$ define um operador de convolução em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$, onde $\alpha_n \in \mathbb{C}$.

Observação 4.2.4. Definimos um operador de convolução da maneira tradicional, ou seja, sendo um operador que comuta com todas derivadas direcionais e, conseqüentemente (Proposição 4.2.2), comuta com todas as derivadas direcionais de todas as ordens. Poderíamos ter definido um operador de convolução substituindo a condição

$$d(\mathcal{O}f)(\cdot)\, a = \mathcal{O}(df(\cdot)\, a)$$

por

$$\tau_{-a}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(\tau_{-a} f)$$

para todo $a \in E$, onde $\tau_{-a}f(x) = f(x+a)$, para todo $x \in E$, nos casos em que $\tau_{-a}f$ está bem definida. Provaremos adiante que estas duas condições são equivalentes, ou seja, comutatividade por translações e comutatividade por derivadas direcionais são condições equivalentes. O próximo resultado dá uma representação de $\tau_{-a}f$.

Proposição 4.2.5. (a) *Para $k \in [1,+\infty)$, se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ e $a \in E$, então $\tau_{-a}f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ e*

$$\tau_{-a}f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(\cdot)\, a,$$

no sentido da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$.
(b) *Para $k \in [1,+\infty]$, se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e $a \in E$, então $\tau_{-a}f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e*

$$\tau_{-a}f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(\cdot)\, a,$$

no sentido da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$.

Demonstração. O caso (b) com $k = +\infty$ foi provado por Matos em [15], Proposição 9.1.4, pág. 175. Provaremos (a) e (b), com $k \in [1,+\infty)$. Suponha que

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|^{\frac{1}{j}}_{\tilde{N},(s;(r,q))} = L < +\infty. \tag{4.3}$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{\widehat{d^j} f(0)}{j!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(L+\varepsilon)^j, \tag{4.4}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como

$$\tau_{-a}f(x) = f(x+a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(a)\, x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \widehat{d^j} f(x)\, a,$$

para cada $x \in E$, segue que

$$\widehat{d^n}(\tau_{-a}f)(0) = \widehat{d^n} f(a),$$

e pelas Proposições 4.1.1 e 1.3.5,

$$\left\| \widehat{d^n}(\tau_{-a}f)(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \left\| \widehat{d^n} f(a) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d^{n+j}} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j.$$

Daí, temos que

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d^n} \left(\tau_{-a} f\right)(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!j!} \left\| \widehat{d^{n+j}} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{(n+j)!}{n!j!} \left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{1}{(n+j)!} \left\| \widehat{d^{n+j}} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|a\|^j \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} 2^{n+j} \|a\|^j \left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{1}{(n+j)!} \left\| \widehat{d^{n+j}} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}$$

e esta uma desigualdade é válida pois

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}} \leq 1, \qquad \left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{k}} \leq \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} \qquad e \qquad \frac{(n+j)!}{n!j!} \leq 2^{n+j}.$$

Da desigualdade (4.4), temos que

$$\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}} \frac{1}{(n+j)!} \left\| \widehat{d^{n+j}} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon)(L+\varepsilon)^{n+j},$$

para todos $j, n \in \mathbb{N}$. Como

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{1}{k}} = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$, existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{1}{k}} \leq D(\varepsilon)\varepsilon^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon \|a\| (L+\varepsilon) < 1$, segue que

$$\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d^n} \left(\tau_{-a} f\right)(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\varepsilon) D(\varepsilon) 2^n (L+\varepsilon)^n \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varepsilon^j \|a\|^j (L+\varepsilon)^j =$$

$$= C(\varepsilon) D(\varepsilon) 2^n (L+\varepsilon)^n \frac{1}{1 - 2\varepsilon \|a\| (L+\varepsilon)}.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{\widehat{d^n}\left(\tau_{-a} f\right)(0)}{n!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq 2(L+\varepsilon),$$

conseqüentemente,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^n(\tau_{-a}f)(0)}{n!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}}\leq 2L<+\infty. \tag{4.5}$$

Assim, se $f\in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ segue de (4.5) que $\tau_{-a}f\in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$.
Se $f\in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ segue de (4.3) que $L=0$ e por (4.5) temos $\tau_{-a}f\in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$.
Agora, para provar a convergência seja $f\in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, então $f\in\mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),L}(E)$, para algum $L>0$. Seja $\varepsilon>0$ tal que $2\varepsilon\|a\|(L+\varepsilon)<1$, então se $\rho>2(L+\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\tau_{-a}f-\sum_{n=0}^{v}\frac{1}{n!}\widehat{d}^nf(\cdot)a\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} &= \left\|\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\widehat{d}^nf(\cdot)a\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}= \\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^j\left(\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\widehat{d}^nf(\cdot)a\right)(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\widehat{d}^j\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^nf(\cdot)a\right)(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq \\
&\leq\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{j!n!}\left\|\widehat{d}^j\left(\widehat{d}^nf(\cdot)a\right)(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}= \\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{j!n!}\left\|\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^j}(a)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq \qquad (4.6)\\
&\leq\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{1}{j!n!}\left\|\widehat{d}^{n+j}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\|a\|^n=
\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}}\left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}}\left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{j}{k}}\frac{(n+j)!}{j!n!}\left\|\frac{\widehat{d}^{n+j}f(0)}{(n+j)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\|a\|^n\leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}}2^{n+j}\left(\frac{n+j}{ke}\right)^{\frac{n+j}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^{n+j}f(0)}{(n+j)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\|a\|^n\leq \\
&\leq C(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty}\rho^{-j}\left(\frac{ke}{n+j}\right)^{\frac{n}{k}}(L+\varepsilon)^{n+j}2^{n+j}\|a\|^n\leq \\
&\leq C(\varepsilon)D(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty}\rho^{-j}\varepsilon^n(L+\varepsilon)^{n+j}2^{n+j}\|a\|^n.
\end{aligned}$$

Nestas desigualdades usamos a Proposição 4.1.1 e as desigualdades usadas na primeira parte da demonstração da presente Proposição.

Voltando em (4.6), segue da escolha de $\varepsilon > 0$ e da convergência das séries geométricas, que

$$\left\| \tau_{-a} f - \sum_{n=0}^{v} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \leq C(\varepsilon)\, D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=v+1}^{\infty} \rho^{-j} \varepsilon^n (L+\varepsilon)^{n+j}\, 2^{n+j} \|a\|^n \leq$$

$$\leq C(\varepsilon)\, D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} (L+\varepsilon)^j\, 2^j \sum_{n=v+1}^{\infty} \varepsilon^n (L+\varepsilon)^n\, 2^n \|a\|^n =$$

$$= C(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, \frac{1}{1 - 2\rho^{-1}(L+\varepsilon)} \cdot \frac{\varepsilon^{v+1} (L+\varepsilon)^{v+1}\, 2^{v+1} \|a\|^{v+1}}{1 - 2\varepsilon (L+\varepsilon) \|a\|}.$$

Portanto,

$$\lim_{v \to \infty} \left\| \tau_{-a} f - \sum_{n=0}^{v} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} = 0,$$

pois

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\varepsilon^{v+1} (L+\varepsilon)^{v+1}\, 2^{v+1} \|a\|^{v+1}}{1 - 2\varepsilon (L+\varepsilon) \|a\|} = 0.$$

Da mesma forma, se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, então $f \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),L}(E)$, para todo $L > 0$. Assim, se para cada $\delta > 0$, tomarmos $\varepsilon > 0$ e $L > 0$ tais que $\frac{\delta - 2\varepsilon}{2} > 0$, $L < \frac{\delta - 2\varepsilon}{2}$ e $2\varepsilon \|a\| (L+\varepsilon) < 1$, então $\delta > 2(L+\varepsilon)$ e procedendo de mesma maneira que anteriormente, mas usando δ ao invés de ρ, obtemos

$$\lim_{v \to \infty} \left\| \tau_{-a} f - \sum_{n=0}^{v} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta} = 0,$$

para todo $\delta > 0$. Agora, a convergência, tanto no item (a), quanto no item (b), segue da mesma maneira descrita na demonstração da Proposição 2.1.22. $\square$

Vamos provar agora um resultado auxiliar necessário para demonstrar a equivalência já mencionada entre comutatividade por translações e comutatividade por derivadas direcionais para operadores de convolução.

Proposição 4.2.6. (a) *Para* $k \in [1, +\infty)$, *se* $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ *e* $a \in E$, *então*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} (\tau_{-\lambda a} f - f) = \widehat{d}^1 f(\cdot)\, a,$$

no sentido da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$.

(b) *Para* $k \in [1, +\infty]$, *se* $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ *e* $a \in E$, *então*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} (\tau_{-\lambda a} f - f) = \widehat{d}^1 f(\cdot)\, a,$$

no sentido da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$.

Demonstração. Temos que

$$\tau_{-\lambda a} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)(\lambda a) = f(\cdot) + \lambda \widehat{d}^1 f(\cdot)\, a + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a,$$

então

$$\frac{\tau_{-\lambda a} f - f - \lambda \widehat{d}^1 f(\cdot)(a)}{\lambda} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a}{\lambda} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n-1} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a = \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n-2} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a.$$

Assim, fazendo as mesmas contas feitas na Proposição 4.2.5 para λ suficientemente pequeno $(\lambda \leq 1)$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n-2} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} &= C(\varepsilon) D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-2} \rho^{-j} \varepsilon^n (L+\varepsilon)^{n+j} 2^{n+j} \|a\|^n \leq \\ &\leq C(\varepsilon) D(\varepsilon) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \rho^{-j} \varepsilon^n (L+\varepsilon)^{n+j} 2^{n+j} \|a\|^n = \\ &= C(\varepsilon) D(\varepsilon) \frac{1}{1 - 2\rho^{-1}(L+\varepsilon)} \cdot \frac{\varepsilon^2 (L+\varepsilon)^2 2^2 \|a\|^2}{1 - 2\varepsilon (L+\varepsilon) \|a\|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{\tau_{-\lambda a} f - f - \lambda \widehat{d}^1 f(\cdot)(a)}{\lambda} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = \lim_{\lambda \to 0} |\lambda| \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n-2} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = 0,$$

pois

$$\lim_{\lambda \to 0} |\lambda|\, C(\varepsilon) D(\varepsilon) \frac{1}{1 - 2\rho^{-1}(L+\varepsilon)} \cdot \frac{\varepsilon^2 (L+\varepsilon)^2 2^2 \|a\|^2}{1 - 2\varepsilon (L+\varepsilon) \|a\|} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} (\tau_{-\lambda a} f - f) = \widehat{d}^1 f(\cdot)\, a,$$

em ambos os casos. □

Teorema 4.2.7. (a) *Se $k \in [1, +\infty)$ e $\mathcal{O}$ é uma aplicação linear contínua de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, então $\mathcal{O}$ é um operador de convolução se, e somente se,*

$$\mathcal{O}(\tau_a f) = \tau_a (\mathcal{O} f),$$

para todo $a \in E$ *e* $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$.
(b) *Se* $k \in [1,+\infty]$ *e* $\mathcal{O}$ *é uma aplicação linear contínua de* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ *em* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, *então* $\mathcal{O}$ *é um operador de convolução se, e somente se,*

$$\mathcal{O}(\tau_a f) = \tau_a(\mathcal{O}f),$$

para todo $a \in E$ *e* $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$.

Demonstração. Seja $\mathcal{O}$ um operador de convolução em qualquer um dos casos, então

$$\mathcal{O}\left(\widehat{d}^n f(\cdot)\, a\right) = \widehat{d}^n(\mathcal{O}f)(\cdot)\, a$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in E$. Pela Proposição 4.2.5, temos que

$$\tau_{-a} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n f(\cdot)\, a,$$

no senso da topologia de cada espaço e, portanto,

$$\mathcal{O}(\tau_{-a} f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{O}\left(\widehat{d}^n f(\cdot)(a)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d}^n(\mathcal{O}f)(\cdot)\, a = \tau_{-a}(\mathcal{O}f).$$

Logo,

$$\mathcal{O}(\tau_a f) = \tau_a(\mathcal{O}f).$$

Para a recíproca, seja $\mathcal{O}$ uma aplicação linear e contínua tal que $\mathcal{O}(\tau_a f) = \tau_a(\mathcal{O}f)$, para todo $a \in E$, então segue da Proposição 4.2.6 que

$$\begin{aligned} \widehat{d}^1(\mathcal{O}f)(\cdot)\, a &= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}\left(\tau_{-\lambda a}(\mathcal{O}f) - \mathcal{O}f\right) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}\left(\mathcal{O}(\tau_{-\lambda a} f) - \mathcal{O}f\right) = \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \mathcal{O}\left(\lambda^{-1}(\tau_{-\lambda a} f - f)\right) = \mathcal{O}\left(\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}(\tau_{-\lambda a} f - f)\right) = \mathcal{O}\left(\widehat{d}^1 f(\cdot)\, a\right), \end{aligned}$$

em qualquer um dos casos e, portanto, $\mathcal{O}$ é um operador de convolução. □

Definição 4.2.8. Para $k \in [1,+\infty)$, $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, definimos o *produto de convolução entre* T *e* f por

$$(T * f)(x) = T(\tau_{-x} f),$$

para todo $x \in E$.
Para $k \in [1, +\infty]$, $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, definimos o *produto de convolução entre* T *e* f também por

$$(T * f)(x) = T(\tau_{-x} f),$$

para todo $x \in E$.

Vamos mostrar que $T*$ define um operador de convolução no espaço $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, para $k \in [1, +\infty)$, e no espaço $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, para $k \in [1, +\infty]$. Mais ainda, vamos mostrar que todo operador de convolução nestes espaços é desta forma, mas para isto precisamos de alguns resultados preliminares.

Proposição 4.2.9. *Se* $k \in [1, +\infty]$ *e* $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$, *temos que existem* $C > 0$ *e* $\rho > 0$ *tais que*

$$|T(f)| \leq C \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}, \quad se\ k \in [1, +\infty),$$

$$|T(f)| \leq C p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(f), \quad se\ k = +\infty,$$

para todo $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ *(isso é devido a topologia de* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ *ser gerada pela família de normas* $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}$, $\rho > 0$, *se* $k \in [1, +\infty)$ *e por* $p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(\cdot)$, $\rho > 0$, *se* $k = +\infty$*). Então, para todo* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE)$ *com* $A \in \mathcal{L}_{\tilde{N}s,(s;(r,q))}(^nE)$ *tal que* $P = \hat{A}$, *o polinômio*

$$\begin{aligned} T\left(\widehat{A^{\cdot m}}\right) : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto T\left(A^{\cdot m} y^{n-m}\right) \end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^{n-m}E)$, *para cada* $m \leq n$ *e*

$$\left\|T\left(\widehat{A^{\cdot m}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \quad se\ k \in [1, +\infty),$$

$$\left\|T\left(\widehat{A^{\cdot m}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C\rho^{-m} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \quad se\ k = +\infty.$$

Demonstração. Primeiramente, suponha que $P \in \mathcal{P}_f(^nE)$ e $A \in \mathcal{L}_{fs}(^nE)$, onde $\mathcal{P}_f(^nE)$ denota os polinômios n-homogêneos de tipo finito definidos sobre E e $\mathcal{L}_{fs}(^nE)$ denota o espaço das aplicações n-lineares simétricas de tipo finito definidas sobre E. Então, P é da forma

$$\hat{A} = P = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j^n,$$

onde $\varphi_j \in E'$, $j = 1, ..., q$, e

$$T\left(\widehat{A \cdot^m}\right)(y) = T\left(A \cdot^m y^{n-m}\right) = T\left(\sum_{j=0}^{q} \varphi_j\left(\cdot\right)^m \varphi_j\left(y\right)^{n-m}\right) = \sum_{j=0}^{q} T\left(\varphi_j^m\right) \varphi_j\left(y\right)^{n-m},$$

para todo $y \in E$, logo

$$T\left(\widehat{A \cdot^m}\right) = \sum_{j=0}^{q} T\left(\varphi_j^m\right) \varphi_j^{n-m} \in \mathcal{P}_f\left({}^{n-m}E\right).$$

Além disso,

$$\left|T\left(\varphi_j^m\right)\right| \leq C \left\|\varphi_j^m\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} = C\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \left\|\varphi_j^m\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = C\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \left\|\varphi_j\right\|^m,$$

para $k \in [1, +\infty)$, e

$$\left|T\left(\varphi_j^m\right)\right| \leq Cp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\left(\varphi_j^m\right) = C\rho^{-m}\left\|\varphi_j^m\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = C\rho^{-m}\left\|\varphi_j\right\|^m$$

para $k = +\infty$. Portanto, se $k \in [1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \left\|T\left(\widehat{A \cdot^m}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} &\leq \sum_{j=0}^{q} \left|T\left(\varphi_j^m\right)\right| \left\|\varphi_j^{n-m}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \sum_{j=0}^{q} \left|T\left(\varphi_j^m\right)\right| \left\|\varphi_j\right\|^{n-m} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{q} C\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \left\|\varphi_j\right\|^m \left\|\varphi_j\right\|^{n-m} = C\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \sum_{j=0}^{q} \left\|\varphi_j\right\|^n, \end{aligned}$$

daí

$$\left\|T\left(\widehat{A \cdot^m}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \left\|P\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para todo $P \in \mathcal{P}_f\left({}^nE\right)$, pois

$$\left\|P\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \sum_{j=0}^{q} \left\|\varphi_j^n\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \sum_{j=0}^{q} \left\|\varphi_j\right\|^n.$$

Da mesma forma, se $k = +\infty$,

$$\left\|T\left(\widehat{A \cdot^m}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C\rho^{-m} \sum_{j=0}^{q} \left\|\varphi_j\right\|^n = C\rho^{-m}\left\|P\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para todo $P \in \mathcal{P}_f\left({}^nE\right)$. Portanto, provamos o resultado para os polinômios n-homogêneos de tipo finito, mas como $\mathcal{P}_f\left({}^nE\right)$ é denso em $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$ (Proposição 1.3.4), segue o resultado para todo $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^nE\right)$. □

Proposição 4.2.10. *Se $k \in [1, +\infty)$ e $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, temos que para todo $\rho > 0$, existe $C(\rho) > 0$ tal que*

$$|T(f)| \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

para todo $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ (isso é devido às propriedades da topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$). Então, para todo $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE)$ com $A \in \mathcal{L}_{\tilde{N}s,(s;(r,q))}(^nE)$ tal que $P = \hat{A}$, o polinômio

$$\begin{aligned} T\left(\widehat{A\cdot^m}\right) : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto T\left(A\cdot^m y^{n-m}\right) \end{aligned}$$

pertence a $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^{n-m}E)$, para cada $m \leq n$ e

$$\left\|T\left(\widehat{A\cdot^m}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\rho)\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Demonstração. Procedendo da mesma maneira que na Proposição 4.2.9, temos que para $P \in \mathcal{P}_f(^nE)$ e $A \in \mathcal{L}_{fs}(^nE)$, com P da forma

$$\hat{A} = P = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j^n,$$

onde $\varphi_j \in E'$, $j = 1, ..., q$, para cada $\rho > 0$, existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left|T\left(\varphi_j^m\right)\right| \leq C(\rho)\left\|\varphi_j^m\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} &= C(\rho)\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}}\left\|\varphi_j^m\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \\ &= C(\rho)\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}}\left\|\varphi_j\right\|^m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|T\left(\widehat{A\cdot^m}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\rho)\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \sum_{j=0}^{q} \|\varphi_j\|^n = C(\rho)\rho^{-m}\left(\frac{m}{ke}\right)^{\frac{m}{k}} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para todo $P \in \mathcal{P}_f(^nE)$. Portanto, provamos o resultado para os polinômios n-homogêneos de tipo finito, mas como $\mathcal{P}_f(^nE)$ é denso em $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE)$ (Proposição 1.3.4), segue o resultado para todo $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE)$. □

Teorema 4.2.11. (a) *Se $k \in [1, +\infty]$, $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, então $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e $T* \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$.*
(b) *Se $k \in [1, +\infty)$, $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, então $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ e $T* \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a linearidade de $T*$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f, g \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, no caso $k \in [1, +\infty]$, ou $f, g \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, no caso $k \in [1, +\infty)$, temos que

$$T * (f + \lambda g)(x) = T(\tau_{-x}(f + \lambda g)),$$

para cada $x \in E$. Então,

$$\tau_{-x}(f + \lambda g)(y) = (f + \lambda g)(y + x) = f(y + x) + \lambda g(y + x) = \tau_{-x} f(y) + \lambda \tau_{-x} g(y),$$

para todo $y \in E$, e conseqüentemente

$$\tau_{-x}(f + \lambda g) = \tau_{-x} f + \lambda \tau_{-x} g.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T * (f + \lambda g)(x) &= T(\tau_{-x}(f + \lambda g)) = T(\tau_{-x} f + \lambda \tau_{-x} g) = \\ &= T(\tau_{-x} f) + \lambda T(\tau_{-x} g) = T * f(x) + \lambda T * g(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo,

$$T * (f + \lambda g) = T * f + \lambda(T * g)$$

e, portanto, $T*$ é linear.

Agora, em qualquer um dos casos segue das Proposições 4.1.1 e 4.2.5 que

$$\begin{aligned} (T * f)(x) = T(\tau_{-x} f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T\left(\widehat{d}^n f(\cdot)(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}(x)\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}(x)\right). \end{aligned}$$

Vamos provar primeiro o ítem (a). Pela Proposição 4.2.9, temos que o polinômio $T\left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}\right)$ pertence a $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^n E)$ e

$$\left\| T\left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}\right) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \quad \text{se } k \in [1, +\infty),$$

$$\left\| T\left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j}\right) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C \rho^{-j} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}, \quad \text{se } k = +\infty,$$

com C e ρ como na Proposição 4.2.9. Se $k \in [1, +\infty)$ e $0 < \rho' < \rho$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| T \left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j} \right) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\rho')^{-j} \left(\frac{j}{ke} \right)^{\frac{j}{k}} \left\| \widehat{d}^{j+n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} =$$

$$= (\rho')^n C n! \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{j! n!} \left(\frac{j}{j+n} \right)^{\frac{j}{k}} \left(\frac{ke}{j+n} \right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{j+n}{ke} \right)^{\frac{j+n}{k}} (\rho')^{-(j+n)} \left\| \frac{\widehat{d}^{j+n} f(0)}{(j+n)!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$

$$\leq (\rho')^n C n! \left(\frac{ke}{n} \right)^{\frac{n}{k}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+n} (\rho')^{-(j+n)} \left(\frac{j+n}{ke} \right)^{\frac{j+n}{k}} \left\| \frac{\widehat{d}^{j+n} f(0)}{(j+n)!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$

$$\leq (\rho')^n C n! \left(\frac{ke}{n} \right)^{\frac{n}{k}} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho'}{2}},$$

e isto implica que

$$P_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T \left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j} \right) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))} ({}^n E),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, e

$$\|P_n\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| T \left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^j} \right) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq (\rho')^n C n! \left(\frac{ke}{n} \right)^{\frac{n}{k}} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho'}{2}}.$$

Daí,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{ke} \right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{P_n}{n!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} C^{\frac{1}{n}} \rho' \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho'}{2}}^{\frac{1}{n}} = \rho',$$

para todo $0 < \rho' < \rho$. Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{ke} \right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{P_n}{n!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} = 0,$$

e como

$$T * f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(x),$$

segue que $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$. Para provar a continuidade de $T*$, seja $\rho_1 > 0$, então para $0 < \rho' < \rho$ e $\rho' < \rho_1$, temos

$$\|T * f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{ke} \right)^{\frac{1}{k}} \rho_1^{-n} \|P_n\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq$$

$$\leq C \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho'}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho_1} \right)^n = C \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_1} \right)^{-1} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho'}{2}},$$

e como a topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ é gerada pela família de normas $\left(\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}\right)_{\rho>0}$, segue que $T*$ é contínua.

Se $k=+\infty$, então para $0<\rho'<\rho$, temos

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\rho^{-j}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}=$$

$$=(\rho')^{n}Cn!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+n)!}{j!n!}(\rho')^{-(j+n)}\left\|\frac{\widehat{d}^{j+n}f(0)}{(j+n)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq$$

$$\leq(\rho')^{n}Cn!\sum_{j=0}^{\infty}2^{j+n}(\rho')^{-(j+n)}\left\|\frac{\widehat{d}^{j+n}f(0)}{(j+n)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq(\rho')^{n}Cn!p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho'}{2}}(f),$$

e isto implica que

$$P_n=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)\in\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^{n}E),$$

para cada $n\in\mathbb{N}$, e

$$\|P_n\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq(\rho')^{n}Cn!p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho'}{2}}(f).$$

Daí,

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{P_n}{n!}\right\|^{\frac{1}{n}}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq\limsup_{n\to\infty}C^{\frac{1}{n}}\rho'\left(p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho'}{2}}(f)\right)^{\frac{1}{n}}=\rho',$$

para todo $0<\rho'<\rho$. Logo,

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{P_n}{n!}\right\|^{\frac{1}{n}}_{\tilde{N},(s;(r,q))}=0,$$

e como

$$T*f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P_n(x),$$

segue que $T*f\in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$. Para provar a continuidade de $T*$, seja $\rho_1>0$, então para $0<\rho'<\rho$ e $\rho'<\rho_1$, temos

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho_1}(T*f)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\rho_1^{-n}\|P_n\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq$$

$$\leq Cp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho_1}(f)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho'}{\rho_1}\right)^{n}=C\left(1-\frac{\rho'}{\rho_1}\right)^{-1}p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho'}{2}}(f),$$

e como a topologia de $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ é gerada pela família de normas $\left(p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(\cdot)\right)_{\rho>0}$, segue que $T*$ é contínua.

Vamos provar agora o ítem (b). Pela Proposição 4.2.10, temos que o polinômio $T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)$ pertence a $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^{n}E)$ e para todo $\rho>0$, existe $C(\rho)>0$ tal que

$$\left\|T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq C(\rho)\,\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Assim,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq C(\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\rho^{-j}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left\|\widehat{d}^{j+n}f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}=$$
$$=\rho^{n}C(\rho)\,n!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+n)!}{j!n!}\left(\frac{j}{j+n}\right)^{\frac{j}{k}}\left(\frac{ke}{j+n}\right)^{\frac{n}{k}}\left(\frac{j+n}{ke}\right)^{\frac{j+n}{k}}\rho^{-(j+n)}\left\|\frac{\widehat{d}^{j+n}f(0)}{(j+n)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}. \tag{4.7}$$

Agora,

$$\limsup_{j\to\infty}\binom{j+n}{n}^{\frac{1}{j+n}}=\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{(j+n)!}{j!n!}\right)^{\frac{1}{j+n}}=\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{(j+n)\ldots(j+1)}{n!}\right)^{\frac{1}{j+n}}=$$
$$=\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{j+n}}(j+n)^{\frac{1}{j+n}}\ldots(j+1)^{\frac{1}{j+n}}=1,$$

então, para todo $\varepsilon>0$, existe $D(\varepsilon)>0$ tal que

$$\binom{j+n}{n}\leq D(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^{j+n},$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Daí, voltando em (4.7), temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left\|T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq$$
$$\leq\rho^{n}C(\rho)\,D(\varepsilon)\,n!\left(\frac{ke}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{1+\varepsilon}\right)^{-(j+n)}\left(\frac{j+n}{ke}\right)^{\frac{j+n}{k}}\left\|\frac{\widehat{d}^{j+n}f(0)}{(j+n)!}\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}\leq$$
$$\leq C(\rho)\,D(\varepsilon)\,\rho^{n}n!\left(\frac{ke}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}}.$$

Logo, se

$$P_{n}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}T\left(\widehat{d^{j+n}f(0)\cdot^{j}}\right),$$

temos que

$$\|P_n\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\| T\left(\widehat{d^{j+n} f(0) \cdot^{j}} \right) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq C(\rho) D(\varepsilon) \rho^n n! \left(\frac{ke}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}},$$

para todo $\rho > 0$ e $\varepsilon > 0$. Daí,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{P_n}{n!} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} (C(\rho))^{\frac{1}{n}} \rho \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}}^{\frac{1}{n}} = \rho,$$

se ρ e ε forem escolhidos tais que $\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}} < +\infty$. Como

$$T * f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(x),$$

segue que $T * f \in Exp_{\tilde{N},(s;(r,q))}^{k}(E)$. Agora se $\rho_1 > 0$ é arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \|T * f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \rho_1^{-n} \|P_n\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} C(\rho) D(\varepsilon) \rho^n n! \left(\frac{ke}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{ke}\right)^{\frac{n}{k}} \rho_1^{-n} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}} = \\ &= C(\rho) D(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}} = C(\rho) D(\varepsilon) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)^{-1} \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

se ρ e ε forem escolhidos tais que $\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}} < +\infty$. E isto implica a continuidade de $T *$. Em qualquer um dos casos, temos que $T*$ comuta com translações. De fato,

$$\tau_a (T * f)(x) = (T * f)(x - a) = T\left(\tau_{-(x-a)} f\right) = T(\tau_{-x} \circ \tau_a (f)) = (T * \tau_a f)(x),$$

para todo $x \in E$. □

Definição 4.2.12. (a) Para $k \in [1, +\infty]$, definimos

$$\gamma_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}^{k} : \mathcal{A}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}^{k} \longrightarrow \left[Exp_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}^{k}(E)\right]'$$

por

$$\gamma_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}^{k}(\mathcal{O})(f) = (\mathcal{O} f)(0),$$

para $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$.
(b) Para $k \in [1, +\infty)$, definimos

$$\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))} \colon \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))} \longrightarrow \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$$

por

$$\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(\mathcal{O})(f) = (\mathcal{O}f)(0),$$

para $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ e $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$.
Claramente as aplicações $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ e $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ estão bem definidas.

Teorema 4.2.13. *As aplicações* $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$, *para* $k \in [1, +\infty]$, *e* $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$, *para* $k \in [1, +\infty)$, *são bijeções lineares.*

Demonstração. Considere as aplicações:

$$\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0} \colon \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]' \longrightarrow \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$$

dada por $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T)(f) = T*f$, para todo $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$, $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e $k \in [1, +\infty]$, e

$$\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))} \colon \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]' \longrightarrow \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$$

dada por $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(T)(f) = T * f$, para todo $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ e $k \in [1, +\infty)$. Para, $T, S \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T + \lambda S)(f) = (T + \lambda S) * f,$$

para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e

$$(T + \lambda S) * f(x) = (T + \lambda S)(\tau_{-x}f) = T(\tau_{-x}f) + \lambda S(\tau_{-x}f) = T * f(x) + \lambda(S * f)(x),$$

para todo $x \in E$. Logo,

$$\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T + \lambda S) = \Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T) + \lambda\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(S),$$

o que implica que $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ é linear.
Agora,

$$\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O})\right)(f)(x) = \left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O}) * f\right)(x) =$$
$$= \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O})(\tau_{-x}f) = \mathcal{O}(\tau_{-x}f)(0) = \tau_{-x}(\mathcal{O}f)(0) = (\mathcal{O}f)(x),$$

para todo $x \in E$, $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ e $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$. Portanto, $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0} \circ \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ é a identidade em $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$.
Por outro lado,

$$\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T)\right)(f) = \left(\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T)(f)\right)(0) = (T * f)(0) = T(\tau_0 f) = T(f),$$

para todo $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$. Portanto, $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0} \circ \Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ é a identidade em $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$. Assim, $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ é a inversa de $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ e, portanto, $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ é um isomorfismo.
Da mesma forma temos que $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ é a inversa de $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$. □

Definição 4.2.14. Para $k \in [1, +\infty]$ e $T_1, T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ definimos o *produto de convolução de* T_1 *por* T_2 *em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ por

$$T_1 * T_2 = \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2) \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]',$$

onde $\mathcal{O}_1 = T_1*$ e $\mathcal{O}_2 = T_2*$.
Para $k \in [1, +\infty)$ e $T_1, T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ definimos o *produto de convolução de* T_1 *por* T_2 *em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ por

$$T_1 * T_2 = \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2) \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]',$$

onde $\mathcal{O}_1 = T_1*$ e $\mathcal{O}_2 = T_2*$.

As aplicações $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$ e $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ preservam produto, de fato: note primeiramente que

$$\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O}_1)(f) = \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_1*)(f) = (T_1 * f)(0) = T_1(f)$$

para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, portanto $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_1*) = T_1$. Daí,

$$\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2)(f) = (\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2(f))(0) = (T_1 * (T_2 * f))(0) = T_1(T_2 * f)$$

e

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\mathcal{O}_1\right) * \left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\mathcal{O}_2\right)(f) = \\
&= \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_1*)*\right) \circ \left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_2*)*\right)\right)(f) = \\
&= \left(\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_1*)*\right) \circ \left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_2*)*\right)(f)\right)(0) = \\
&= \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_1*)\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(T_2*) * f\right) = T_1(T_2 * f),
\end{aligned}$$

para toda $f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$. Logo,

$$\gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2) = \left(\gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\mathcal{O}_1\right) * \left(\gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\mathcal{O}_2\right).$$

Para $\gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ é análogo. Além disso, os produtos de convolução são associativos e os espaços têm um elemento neutro δ, com relação a esses produtos, dado por $\delta(f) = f(0)$. De fato, a associatividade é óbvia. Agora, para $T \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e $f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$, temos que

$$(T * \delta)(f) = \gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}((T*) \circ (\delta*))(f) = ((T*) \circ (\delta*)(f))(0) =$$
$$= (T * (\delta * f))(0) = T(\delta * f) = T(f),$$

e esta última igualdade é válida pois

$$(\delta * f)(x) = \delta(\tau_{-x} f) = \tau_{-x} f(0) = f(x),$$

para todo $x \in E$. Assim $T * \delta = T$ e, por outro lado,

$$(\delta * T)(f) = \gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}((\delta*) \circ (T*))(f) = (\delta * (T * f))(0) =$$
$$\delta(T * f) = T * f(0) = T(f).$$

Logo, $\delta * T = T$. Para $\gamma^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ é análogo. Com isso provamos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.15. *Os espaços* $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ *e* $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ *tornam-se álgebras com os respectivos produtos da Definição 4.2.14.*

A partir desta proposição vamos provar que a transformada de Fourier-Borel é um isomorfismo entre álgebras, como segue:

Teorema 4.2.16. (a) *Para* $k \in [1, +\infty]$, *a transformada de Fourier-Borel é um isomorfismo de álgebras entre* $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ *e* $Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$.
(b) *Para* $k \in [1, +\infty)$, *a transformada de Fourier-Borel é um isomorfismo de álgebras entre* $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ *e* $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.9, temos os isomorfismos entre tais espaços vetoriais. Para provar que a transformada de Fourier-Borel é um isomorfismo entre álgebras, basta mostrar que ela preserva produto, isto é, $F(T_1 * T_2) = (FT_1)(FT_2)$, em qualquer um dos casos.

Primeiramente, vamos provar (a), com $k \in (1, +\infty]$. Para $\varphi \in E'$, temos que

$$F(T_1 * T_2)(\varphi) = (T_1 * T_2)(e^{\varphi}) = \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2)(e^{\varphi}) = \tag{4.9}$$
$$= (T_1 * (T_2 * e^{\varphi}))(0) = T_1(T_2 * e^{\varphi}).$$

Agora, para $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e $x \in E$, temos que

$$(T * e^{\varphi})(x) = T(\tau_{-x}e^{\varphi}) = T\left(e^{\varphi}e^{\varphi(x)}\right) = e^{\varphi(x)}T(e^{\varphi}),$$

pois

$$\tau_{-x}e^{\varphi}(y) = e^{\varphi(y+x)} = e^{\varphi(y)}e^{\varphi(x)},$$

para todo $y \in E$. Logo, $T * e^{\varphi} = e^{\varphi}T(e^{\varphi})$ e voltando em (4.9) segue que

$$T_1(T_2 * e^{\varphi}) = T_1(e^{\varphi}T_2(e^{\varphi})) = T_1(e^{\varphi})T_2(e^{\varphi}) = FT_1(\varphi)FT_2(\varphi).$$

Portanto, $F(T_1 * T_2) = (FT_1)(FT_2)$.

Para $k = 1$, pela Definição 3.1.7, temos que

$$F(T_1 * T_2)(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(T_1 * T_2)_j\left(\varphi^j\right),$$

onde $(T_1 * T_2)_j = (T_1 * T_2)|_{\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^jE)}$ e a igualdade vale para todo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| < \rho$, para algum $\rho > 0$ (pela Proposição 3.1.8). Mas

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(T_1 * T_2)_j\left(\varphi^j\right) = (T_1 * T_2)(e^{\varphi}),$$

assim a demonstração segue como no caso $k \in (1, +\infty]$.

A prova de (b) decorre análoga à do caso (a). O único cuidado que deveríamos tomar é no caso $k = 1$, pois pela definição da transformada de Fourier-Borel deveríamos ter $\|\varphi\| < A$. Mas neste caso, $A = +\infty$, logo o resultado segue sem problemas de maneira análoga. □

Observação 4.2.17. Segue diretamente das definições e caracterizações de tais espaços que, para $k \in [1, +\infty]$ e $0 < A < B < +\infty$, as inclusões abaixo são verdadeiras:

$$Exp^k_{(s,m(r;q)),0}(E) \subset Exp^k_{(s,m(r;q)),A}(E) \subset Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E) \subset$$
$$\subset Exp^k_{(s,m(r;q)),B}(E) \subset Exp^k_{(s,m(r;q))}(E)$$

e

$$Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \subset Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \subset Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \subset$$
$$\subset Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}(E) \subset Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E).$$

Mais do que isso, tais inclusões são contínuas. De fato, sejam i_1 a inclusão $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \hookrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e q uma seminorma contínua em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, então para cada $0 < \rho < A$, existe $C(\rho) > 0$ tal que

$$q(i_1(f)) \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

para toda $f \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Então,

$$q(f) \leq C(\rho) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \subset \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Portanto i_1 é contínua.
Seja i_2 a inclusão $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \hookrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$. Temos que i_2 é contínua se, e somente se, $i_2 \circ i_\rho \colon \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ é contínua, para todo $0 < \rho < A$. Seja $\alpha > A$, então como $\rho < A < \alpha$, segue que $\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\alpha} \leq \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}$, para toda $f \in \mathcal{B}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$. Portanto, $i_2 \circ i_\rho$ é contínua.
As demais inclusões seguem de argumentos similares e o caso $(s, m(r;q))$ é análogo.
Portanto, se $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, então $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ e $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)\right]'$, para todo $A \in (0, +\infty]$ e $B \in [0, +\infty)$ (Aqui estamos considerando a restrição de T no respectivo espaço). Assim, para $T \in \left[Exp^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, podemos considerar $T * P \in \left[Exp^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$, para cada $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^nE)$.

Definição 4.2.18. O funcional $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$, com $A \in (0, +\infty]$ e $k \in [1, +\infty]$, é dito ser de *tipo zero* se ele também está em $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ ou, equivalentemente, se $FT \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$. O funcional $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)\right]'$, com $B \in [0, +\infty)$ e $k \in [1, +\infty]$, é dito ser de *tipo zero* se ele também está em $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ ou, equivalentemente, se $FT \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$.

Vamos provar que para funcionais de tipo zero faz sentido definir seus produtos de convolução com funções dos espaços onde tais funcionais estão definidos, obtendo funções do mesmo espaço, mas antes precisamos de um resultado auxiliar para a prova do caso $k = +\infty$.

Proposição 4.2.19. *Se* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE)$ *e* $T \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, *então para todo* $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, *com* $\rho > \varepsilon$, *existe uma constante* $C(\rho, \varepsilon) \geq 0$, *independente de* n, *tal que*

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(T * P) \leq C(\rho,\varepsilon)(\rho-\varepsilon)^{-n} \|P\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.$$

Demonstração. Primeiramente, suponha que $P = \varphi^n$, com $\varphi \in E'$. Para $x \in E$, temos

$$(T * P)(x) = T(\tau_{-x}P) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\hat{d}^j P(\cdot)x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{k+j}P(0)\cdot^k}(x)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} T\left(\frac{1}{(n-j)!} n! \varphi(\cdot)^{n-j} \varphi(x)^j\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \varphi(x)^j T\left(\varphi(\cdot)^{n-j}\right).$$

Assim,

$$T * P = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T\left(\varphi(\cdot)^{n-j}\right) \varphi^j$$

e, portanto,

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(T * P) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left|T\left(\varphi(\cdot)^{n-j}\right)\right| \|\varphi\|^j \rho^{-j}. \tag{4.10}$$

Agora, como $T \in \left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ temos que $FT \in Exp^{1}_{(s',m(r';q')),0}(E')$, logo

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|\hat{d}^j FT(0)\right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} = 0,$$

e como

$$\sup_{\phi\neq 0} \frac{|T(\phi^j)|}{\|\phi\|^j} = \left\|\hat{d}^j FT(0)\right\| \leq \left\|\hat{d}^j FT(0)\right\|_{(s',m(r';q'))},$$

segue que para cada $\delta > 0$, existe $\alpha(\delta) > 0$ tal que

$$\frac{|T(\varphi^j)|}{\|\varphi\|^j} \leq \left\|\hat{d}^j FT(0)\right\|_{(s',m(r';q'))} \leq \alpha(\delta)\delta^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, logo

$$\left|T\left(\varphi^j\right)\right| \leq \alpha(\delta)\delta^j \|\varphi\|^j, \tag{4.11}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, segue de (4.10) e (4.11) que, para $\delta = \varepsilon$,

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(T * P) \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha(\varepsilon)\varepsilon^{n-j} \|\varphi\|^{n-j} \|\varphi\|^j \rho^{-j} =$$

$$\alpha(\varepsilon)\|\varphi\|^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^{n-j}\rho^{-j} = \alpha(\varepsilon)\|\varphi\|^n \left(\rho^{-1}+\varepsilon\right)^n. \tag{4.12}$$

Tome $0 < \varepsilon' < \min\left(\rho, \frac{\varepsilon}{\rho(\rho-\varepsilon)}\right)$, então $\varepsilon' < \rho$ e $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{\rho(\rho-\varepsilon)}$ e daí,

$$\varepsilon'(\rho-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\rho} = 1 - \frac{\rho-\varepsilon}{\rho} \Longrightarrow \varepsilon'(\rho-\varepsilon) + \frac{\rho-\varepsilon}{\rho} < 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \varepsilon' + \frac{1}{\rho} < \frac{1}{\rho-\varepsilon} \Longrightarrow \left(\rho^{-1}+\varepsilon'\right)^n < \left(\frac{1}{\rho-\varepsilon}\right)^n = (\rho-\varepsilon)^{-n}.$$

Portanto, segue de (4.12) usando $\delta = \varepsilon'$ que

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(T * P) \leq \alpha(\varepsilon')\|\varphi\|^n\left(\rho^{-1}+\varepsilon'\right)^n \leq \alpha(\varepsilon')\|\varphi\|^n(\rho-\varepsilon)^{-n},$$

e como ε' depende apenas de ρ e ε, podemos escrever $\alpha(\varepsilon') = C(\rho,\varepsilon)$. Logo, isto implica o resultado para $P \in \mathcal{P}_f({}^nE)$ e pela densidade de $\mathcal{P}_f({}^nE)$ em $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^nE)$ segue o resultado.

$\square$

Teorema 4.2.20. *Para $k \in [1,+\infty]$, $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ e f em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ ou em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, com $A \in (0,+\infty]$ e $B \in [0,+\infty)$, se definirmos*

$$T * f = \sum_{n=0}^{\infty} T * \left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right),$$

então $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$. Mais ainda, $T*$ define um operador de convolução em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, respectivamente.

Demonstração. Primeiramente, suponha que $k \in [1,+\infty)$. Se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, então existe $\rho < A$ tal que $\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} < +\infty$. Pela inclusões da Observação 4.2.17, temos que $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$. Logo, tome $\varepsilon > 0$ tal que $\rho(1+\varepsilon) < A$, então para $\rho(1+\varepsilon) < \rho_1 < A$, segue como feito em (4.8), na demonstração do ítem (b) do Teorema 4.2.11, que

$$\|T * f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_1} \leq C(\rho(1+\varepsilon))D(\varepsilon)\left(1 - \frac{\rho(1+\varepsilon)}{\rho_1}\right)^{-1}\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}} =$$
$$= C(\rho(1+\varepsilon))D(\varepsilon)\left(1 - \frac{\rho(1+\varepsilon)}{\rho_1}\right)^{-1}\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} < +\infty, \tag{4.13}$$

portanto, $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$.
Se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, então $\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} < +\infty$, para todo $\rho > B$. Para $\rho > B$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\rho}{(1+\varepsilon)^2} > B$, então $\rho > \frac{\rho}{1+\varepsilon} > \frac{\rho}{(1+\varepsilon)^2}$ e como feito acima,

$$\|T * f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq C\left(\frac{\rho}{1+\varepsilon}\right)D(\varepsilon)\left(1 - \frac{\rho}{\rho(1+\varepsilon)}\right)^{-1}\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{(1+\varepsilon)^2}} < +\infty \tag{4.14}$$

e, portanto, $T * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$.
Falta provar que $T*$ define um operador de convolução em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$. A linearidade é clara; vamos provar que

$$T*\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

e

$$T*\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$$

são contínuos. Temos que

$$T*\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

é contínuo se, e somente se,

$$(T*) \circ i\rho\colon B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

é contínuo, para todo $\rho \in (0, A)$. Seja $p\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma contínua, então existe $\alpha(\rho_1) > 0$ tal que

$$p(f) \le \alpha(\rho_1) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_1},$$

para toda $f \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho_1}(E)$ (aqui ρ_1 é como em (4.13)). Assim,

$$p(T * f) \le \alpha(\rho_1) \|T * f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho_1} \le \alpha(\rho_1) K(\rho, \rho_1, \varepsilon) \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho},$$

para toda $f \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E) \subset B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho_1}(E)$, onde

$$K(\rho, \rho_1, \varepsilon) = C(\rho(1+\varepsilon)) D(\varepsilon) \left(1 - \frac{\rho(1+\varepsilon)}{\rho_1}\right)^{-1}.$$

Logo, $T*$ é contínuo.
Por outro lado, a continuidade de

$$T*\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E) \longrightarrow Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$$

segue de (4.14), pois a topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$ é gerada pela família de normas $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}$, $\rho > B$.
Agora, vamos provar que $d^1(T * f)(\cdot)x = T * (d^1 f(\cdot)x)$ em ambos os casos. Temos que a

aplicação $f \longmapsto d^1 f(\cdot)\, x$ é contínua, para qualquer $x \in E$, em ambos os casos. De fato, a aplicação

$$f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \overset{G}{\longmapsto} d^1 f(\cdot)\, x \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

é contínua se, e somente se,

$$f \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E) \overset{G \circ i_\delta}{\longmapsto} d^1 f(\cdot)\, x \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$$

é contínua, para todo $\delta \in (0, A)$. Seja $q\colon Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma contínua, então existe $\mu(\delta) > 0$ tal que

$$q(g) \leq \mu(\delta)\, \|g\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\delta}\,,$$

para toda $g \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E)$. Pelo que foi feito na demonstração da Proposição 4.1.1, temos que para $\rho \in (0, A)$,

$$\begin{aligned}
\left\| d^1 f(\cdot)\, x \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d^{j+1} f(0)\, x} \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \frac{1}{j!} \left\| \widehat{d}^{j+1} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} \|x\| = \\
= \|x\| \sum_{j=0}^{\infty} \rho\,(j+1) \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} &\left(\frac{ke}{j+1}\right)^{\frac{j+1}{k}} \rho^{-(j+1)} \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{j+1}{ke}\right)^{\frac{j+1}{k}} \left\| \widehat{d}^{j+1} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Note que,

$$\limsup_{j\to\infty} \rho^{\frac{1}{j+1}} (j+1)^{\frac{1}{j+1}} \frac{\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}\cdot\frac{j}{j+1}}}{\left(\frac{j+1}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}} = \limsup_{j\to\infty} \rho^{\frac{1}{j+1}} (j+1)^{\frac{1}{j+1}} e^{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{j}{j+1}\right)} = 1.$$

De fato,

$$\frac{\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}\cdot\frac{j}{j+1}}}{\left(\frac{j+1}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{e^{\frac{1}{k}\cdot\frac{j}{j+1}\ln\left(\frac{j}{ke}\right)}}{e^{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{j+1}{ke}\right)}} = \frac{e^{\frac{1}{k}\cdot\frac{j}{j+1}\left[\ln\left(\frac{j}{k}\right)-1\right]}}{e^{\frac{1}{k}\left[\ln\left(\frac{j+1}{k}\right)-1\right]}} = e^{\frac{1}{k}\left[\frac{j}{j+1}\left[\ln\left(\frac{j}{k}\right)-1\right]-\left[\ln\left(\frac{j+1}{k}\right)-1\right]\right]}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{j}{j+1}\left[\ln\left(\frac{j}{k}\right)-1\right] - \left[\ln\left(\frac{j+1}{k}\right)-1\right] &= \frac{j\left[\ln\left(\frac{j}{k}\right)-1\right]-(j+1)\left[\ln\left(\frac{j+1}{k}\right)-1\right]}{j+1} = \\
= \frac{\ln\left(\frac{j}{k}\right)^j - \ln\left(\frac{j+1}{k}\right)^{(j+1)} + 1}{j+1} &= \frac{\ln\left(\frac{j^j}{(j+1)^{j+1}}\right)+1}{j+1} = \frac{\ln\left(\left(\frac{j}{j+1}\right)^j \frac{1}{j+1}\right)+1}{j+1},
\end{aligned}$$

e como

$$\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j} \longrightarrow \frac{1}{e},$$

segue que

$$\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j} \frac{1}{j+1} \longrightarrow 0,$$

e, portanto,

$$\ln\left(\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j} \frac{1}{j+1}\right) + 1 \longrightarrow -\infty.$$

Como $j+1 \longrightarrow +\infty$, podemos aplicar a regra de L'Hospital no quociente

$$\frac{\ln\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{t} \frac{1}{t+1}\right) + 1}{t+1}, t \in \mathbb{R},$$

para obter

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j} \frac{1}{j+1}\right) + 1}{j+1} = \lim_{j\to\infty} \ln\left(\frac{j}{j+1}\right) = 0.$$

Logo,

$$\limsup_{j\to\infty} e^{\frac{1}{k}\left[\frac{j}{j+1}\left[\ln\left(\frac{j}{k}\right)-1\right]-\left[\ln\left(\frac{j+1}{k}\right)-1\right]\right]} = 1$$

e obtemos,

$$\limsup_{j\to\infty} \rho^{\frac{1}{j+1}} (j+1)^{\frac{1}{j+1}} \frac{\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}\cdot\frac{j}{j+1}}}{\left(\frac{j+1}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}} = \limsup_{j\to\infty} \rho^{\frac{1}{j+1}} (j+1)^{\frac{1}{j+1}} e^{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{j}{j+1}\right)} = 1,$$

como queríamos.

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{1}{\rho}(j+1)\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\left(\frac{ke}{j+1}\right)^{\frac{j+1}{k}} \leq \alpha(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{j+1},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, e voltando em (4.15), temos que

$$\begin{aligned} &\left\|d^1 f(\cdot)\, x\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \\ &\leq \alpha(\varepsilon)\|x\| \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-(j+1)} (1+\varepsilon)^{j+1} \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{j+1}{ke}\right)^{\frac{j+1}{k}} \left\|\widehat{d}^{j+1} f(0)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} = \\ &= \alpha(\varepsilon)\|x\|\,\|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Portanto, $d^1 f(\cdot)x \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}(E)$, sempre que $f \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho}{1+\varepsilon}}(E)$, $\rho \in (0, A)$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\delta(1+\varepsilon) < A$ temos que, para $f \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\delta}(E)$,

$$q\left(d^1 f(\cdot)x\right) \leq \mu(\delta(1+\varepsilon)) \left\|d^1 f(\cdot)x\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\delta(1+\varepsilon)} \leq$$
$$\leq \alpha(\varepsilon)\|x\| \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\delta(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}} = \alpha(\varepsilon)\|x\| \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\delta}.$$

Logo, G é contínua.

Para o outro caso, seja

$$f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E) \overset{H}{\longmapsto} d^1 f(\cdot)x \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E).$$

Seja $\rho > B$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\rho}{1+\varepsilon} > B$, então da mesma forma como feito acima para o caso $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, temos que

$$\left\|d^1 f(\cdot)x\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho} \leq \alpha(\varepsilon)\|x\| \|f\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\frac{\rho}{1+\varepsilon}},$$

para toda $f \in B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho}{1+\varepsilon}}(E)$, logo para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E) \subset B^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),\frac{\rho}{1+\varepsilon}}(E)$. Como a topologia de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$ é gerada pela família de normas $\|\cdot\|_{\tilde{N},(s;(r,q)),k,\rho}$, $\rho > B$, segue a continuidade de H.

Vamos provar agora que,

$$d^1(T * P)(\cdot)x = T * \left(d^1 P(\cdot)x\right),$$

para todo $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^n E)$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$d^1 P(\cdot)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{k+1} P(0)\cdot^k}(x) = \frac{n!}{(n-1)!} \check{P}\cdot^{n-1} x,$$

assim, para $y \in E$,

$$\left(T * \left(d^1 P(\cdot)x\right)\right)(y) = T\left(\tau_{-y}\left(d^1 P(\cdot)x\right)\right) =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T\left(\widehat{d}^m \left(d^1 P(\cdot)x\right)(\cdot)(y)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\widehat{d^{j+m} g(0)\cdot^j}(y)\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{((n-1)-m)!} T\left((n-1)!n\check{P}x\cdot^{(n-1)-m} y^m\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} nT\left(\check{P}x\cdot^{(n-1)-m} y^m\right),$$

onde $g = d^1 P(\cdot)x$. Por outro lado,

$$\widehat{d^j} P(\cdot)z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{k+j} P(0)\cdot^k}(z) = \frac{n!}{(n-j)!} \check{P}\cdot^{n-j} z^j,$$

logo

$$(T * P)(z) = T(\tau_{-z}P) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T\left(\widehat{d^j} P(\cdot)\, z\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} T\left(\frac{n!}{(n-j)!} \check{P} \cdot^{n-j} z^j\right),$$

para todo $z \in E$. Assim, para $y \in E$,

$$d^1 (T * P)(y)\, x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+1} (T * P)(0)\, y^m}\, (x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} T\left(\frac{n!}{(n-(m+1))!} \check{P} \cdot^{n-(m+1)} y^m x\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!\,(n-(m+1))!} T\left(\check{P} \cdot^{n-(m+1)} y^m x\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} nT\left(\check{P}x \cdot^{(n-1)-m} y^m\right).$$

Portanto, $d^1 (T * P)(y)\, x = T * (d^1 P(\cdot)\, x)(y)$, para todo $y \in E$. Utilizando isso e a continuidade das aplicações G e H, temos que

$$d^1 (T * f)(\cdot)\, x = T * \left(d^1 f(\cdot)\, x\right),$$

tanto para $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, quanto para $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$. De fato,

$$d^1 (T * f)(\cdot)\, x = d^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} T * \left(\frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)\right)(\cdot)\, x = \sum_{n=0}^{\infty} d^1 \left(T * \left(\frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)\right)(\cdot)\, x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T * \left(d^1 \left(\frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)(\cdot)\, x\right) = T * \left(\sum_{n=0}^{\infty} d^1 \left(\frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)(\cdot)\, x\right) =$$

$$= T * \left(d^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)(\cdot)\, x\right) = T * \left(d^1 f(\cdot)\, x\right).$$

Vamos provar agora o caso $k = +\infty$. Pela Proposição 4.2.19, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(T * \left(\frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)\right) \le C(\rho, \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho - \varepsilon)^{-n} \left\| \frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0) \right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))},$$

para cada $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, com $\rho > \varepsilon$. Se $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, então $f \in \mathcal{H}_{\tilde{N}b,(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{B}}(0)\right)$. Seja $\rho > B$ e tome $\varepsilon > 0$ tal que $\rho - \varepsilon > B$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho} \left(T * \left(\frac{1}{n!} \widehat{d^n} f(0)\right)\right) \le C(\rho, \varepsilon)\, p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho-\varepsilon}(f) < +\infty,$$

e, portanto, para cada $\rho > B$,

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\left(T * f\right) < +\infty.$$

o que implica que

$$T * f = \sum_{n=0}^{\infty} T * \left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f\left(0\right)\right)$$

converge na topologia de $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\left(E\right)$. Como a topologia de $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\left(E\right)$ é gerada pela família de normas $p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\left(\cdot\right)$, $\rho > B$, segue da desigualdade

$$p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\left(T * f\right) \leq C\left(\rho,\varepsilon\right) p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho-\varepsilon}\left(f\right)$$

que $T*$ é um operador linear contínuo em $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\left(E\right)$, já que a linearidade é óbvia. Agora, se $f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(E\right)$, existe $\rho < A$ tal que $f \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}\left(0\right)\right)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + 2\varepsilon < A$, então temos $\rho + \varepsilon < A$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho+\varepsilon}\left(T * \left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f\left(0\right)\right)\right) \leq C'\left(\rho,\varepsilon\right)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}\left\|\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f\left(0\right)\right\|_{\tilde{N},(s;(r,q))} =$$

$$= C'\left(\rho,\varepsilon\right) p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\left(f\right) < +\infty.$$

Note que denotamos $C'\left(\rho,\varepsilon\right)$ ao invés de $C\left(\rho,\varepsilon\right)$, pois usamos $\rho+\varepsilon$ ao invés de ε. Portanto, $T * f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho+\varepsilon}\left(E\right)$ e isto implica que $T * f \in Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(E\right)$.
Para provar a continuidade de $T*$ seja $q\colon Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(E\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma contínua, então existe $M > 0$ tal que

$$q\left(g\right) \leq M p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho+2\varepsilon}\left(g\right), \text{ para toda } g \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho+2\varepsilon}}\left(0\right)\right).$$

Daí,

$$q\left(T * f\right) \leq M p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho+2\varepsilon}\left(T * f\right) \leq C'\left(\rho,\varepsilon\right) M p^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),\rho}\left(f\right),$$

para toda $f \in \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}\left(0\right)\right) \subset \mathcal{H}^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(B_{\frac{1}{\rho+2\varepsilon}}\left(0\right)\right)$. Logo $T*$ é contínua. Da mesma forma que fizemos no caso $k \in [1,+\infty)$, prova-se que $T*$ comuta com as derivadas direcionais e, portanto, define um operador de convolução em $Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(E\right)$. □

Observação 4.2.21. As demonstrações dos Teoremas 4.2.11 e 4.2.20, corrigem a demonstração do Teorema 3.20 obtido por Matos em [11] para o caso 1-nuclear, já que este teorema usa a Proposição 3.17 de [11], a qual contém um erro em sua demonstração.

Definição 4.2.22. Se $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}$, com $k \in [1,+\infty]$ e $A \in (0,+\infty]$, dizemos que $\mathcal{O}$ é de *tipo zero* se $F\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\mathcal{O}\right) \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$, onde $\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\mathcal{O}\right)(f) = \mathcal{O}f(0)$, para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$.
Se $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}$, com $k \in [1,+\infty]$ e $B \in [0,+\infty)$, dizemos que $\mathcal{O}$ é de *tipo zero* se $F\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\mathcal{O}\right) \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$, onde $\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\mathcal{O}\right)(f) = \mathcal{O}f(0)$, para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$.

Teorema 4.2.23. *Se $k \in [1,+\infty]$ e $A \in (0,+\infty]$, então $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}$ é uma bijeção entre o espaço dos operadores de convolução de tipo zero em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e o espaço dos funcionais lineares contínuos de tipo zero em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$.*
Se $k \in [1,+\infty]$ e $B \in [0,+\infty)$, então $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}$ é uma bijeção entre o espaço dos operadores de convolução de tipo zero em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$ e o espaço dos funcionais lineares contínuos de tipo zero em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$.

Demonstração. Defina $\left(\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(T)\right)(f) = T * f$, para $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ de tipo zero e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$. Como T é de tipo zero, segue que $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ e pelo Teorema 4.2.20, temos

$$\begin{aligned}\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(T)\right)(f) &= \left(\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(T)\right)(f)(0) = (T*f)(0) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(T*\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right)\right)(0) = \sum_{n=0}^{\infty} T\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right) = T(f).\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\circ\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}$ é a aplicação identidade no subespaço de $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ dos funcionais de tipo zero.
Por outro lado, para $\mathcal{O}$ de tipo zero temos que $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(\mathcal{O}) \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ e, pelo Teorema 4.2.20, segue que

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(\mathcal{O})\right)(f)(x) &= \left(\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(\mathcal{O})\right)*f\right)(x) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(\mathcal{O})\right)*\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right)\right)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(\mathcal{O})\right)\left(\tau_{-x}\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right)\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{O}\left(\tau_{-x}\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right)\right)(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\tau_{-x}\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right)\right)(0) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\widehat{d}^n f(0)\right)(x) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\widehat{d}^n(\mathcal{O}f)(0)(x) &= \mathcal{O}f(x).\end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A} \circ \gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}$ é a aplicação identidade no subespaço de $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}$ dos operadores de tipo zero.

Agora, defina $\left(\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(T)\right)(f) = T * f$, para $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)\right]'$ de tipo zero e $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$. De maneira análoga ao que foi feito acima para $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, segue que $\Gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}$ é a inversa de $\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}$. □

Observação 4.2.24. (1) É claro que os elementos de $\left[Exp^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ são de tipo zero, logo $\gamma^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q))}$ é uma bijeção linear entre $\left[Exp^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ e $\mathcal{A}^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q))}$.

(2) Seja $k \in [1,+\infty]$, $B \in [0,+\infty)$ e $T_1, T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)\right]'$, com T_2 de tipo zero, então podemos definir $T_1 * T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)\right]'$ da seguinte maneira:

Se $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, tome

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Pela Observação 4.2.17 temos $T_1, T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e pela Definição 4.2.14, temos que $T_1 * T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$. Assim,

$$(T_1 * T_2)(f) = \lim_{n\to\infty}(T_1 * T_2)(P_n) = \lim_{n\to\infty}\gamma^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}((T_1*)\circ(T_2*))(P_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(T_1 * (T_2 * P_n))(0) = \lim_{n\to\infty} T_1(T_2 * P_n) = T_1\left(\lim_{n\to\infty} T_2 * P_n\right) = T_1(T_2 * f)$$

e esta última igualdade é válida pois P_n converge para f em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ e como T_2 é de tipo zero, $T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$. Mais ainda, pelo Teorema 4.2.20, temos que $T_2 * f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$ e T_2* é um operador de convolução em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$, logo contínuo e como $T_1 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)\right]'$, segue que $T_1 \circ (T_2*)$ é contínuo em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$. Portanto $T_1 * T_2$ é contínuo em $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}(E)$ e da mesma forma que fizemos na demonstração da Proposição 4.2.16, temos que $F(T_1 * T_2) = F(T_1)F(T_2)$.

(3) Da mesma forma que fizemos em (2), para $k \in [1,+\infty]$, $A \in (0,+\infty]$ e $T_1, T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$, com T_2 de tipo zero, definimos $T_1 * T_2(f) = T_1(T_2 * f)$, para toda $f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$ e obtemos $T_1 * T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ satisfazendo $F(T_1 * T_2) = F(T_1)F(T_2)$.

Definição 4.2.25. O produto $*$ tanto em (2), quanto em (3) é definido como o *produto de convolução de T_1 por T_2 em* $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\left(E\right)\right]'$ e $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}\left(E\right)\right]'$, respectivamente.

CAPÍTULO 5

Os Teoremas de Divisão

5.1 Resultados Necessários

Para provar os Teoremas de divisão, precisaremos de dois resultados de divisão obtidos por Matos em [11]. Tais resultados estão enunciados abaixo:

Proposição 5.1.1. *Sejam* $k \in [1, +\infty)$, $f \in Exp_{0,A}^{k}(E)$ *e* $g \in Exp_{0,B}^{k}(E)$, *com* $A, B \in [0, +\infty)$ *e* $g \neq 0$. *Se* f/g *é inteira em* E, *então* $f/g \in Exp_{0,L}^{k}(E)$, *onde*

$$L = \inf_{\lambda > 0} \left((A(1+\lambda))^k + (B(1+\lambda))^k \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) \right)^{k^{-1}}.$$

Demonstração. Ver Matos [15], Corolário 4.5, pág. 159. □

Proposição 5.1.2. *Sejam* $f \in Exp_{0,A}^{\infty}(E)$ *e* $g \in Exp_{0,B}^{\infty}(E)$, *com* $A \geq B \geq 0$ *e* $g \neq 0$. *Se* f/g *é holomorfa em* $B_{A^{-1}}(0) \subset E$, *então* $f/g \in Exp_{0,A}^{\infty}(E)$.

Demonstração. Ver Matos [15], Corolário 4.7, pág. 162. □

Observação 5.1.3. Os espaços $Exp_{0,A}^{k}(E)$ são os análogos dos espaços $Exp_{(s,m(r;q)),0,A}^{k}(E)$, mas com a norma usual de polinômios no lugar da norma $(s, m(r;q))$. Para mais detalhes, veja [10] e [11].

5.2 Teoremas de Divisão

Nesta seção provaremos Teoremas de divisão de funções em $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, para $k \in [1,+\infty]$ e $A \in [0,+\infty)$. A partir destes teoremas, provaremos Teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel.

Iniciaremos os resultados desta seção com um lema necessário para a demonstração do Teorema de divisão de funções em $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, para $k \in [1,+\infty)$.

Lema 5.2.1. *Se $\varepsilon > 0$, então existem constantes $D(\varepsilon) > 0$ e $M > 0$, com M independente de ε, tais que*

$$\frac{j}{j-l}\left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l}\left(\frac{j}{l}\right)^{l}\frac{l!\,(j-l)!}{j!} \leq D(\varepsilon)\,M\,(1+\varepsilon)^{l},$$

para todos $j,l \in \mathbb{N}$, com $1 \leq l \leq j-1$.

Demonstração. Temos que

$$\left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l}\left(\frac{j}{l}\right)^{l}\frac{l!\,(j-l)!}{j!} = \frac{1}{\left(1-\frac{l}{j}\right)^{j}}\frac{l!}{l^{l}}\frac{(j-l)^{l}}{j\,(j-1)\ldots(j-(l-1))},$$

e como

$$\lim_{j\to\infty}\frac{(j-l)^{l}}{j\,(j-1)\ldots(j-(l-1))} = \lim_{j\to\infty}\frac{\left(1-\frac{l}{j}\right)^{l}}{1\left(1-\frac{1}{j}\right)\ldots\left(1-\frac{(l-1)}{j}\right)} = 1$$

e

$$\lim_{j\to\infty}\left(1-\frac{l}{j}\right)^{j} = e^{-l},$$

segue que

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l}\left(\frac{j}{l}\right)^{l}\frac{l!\,(j-l)!}{j!} = \frac{l!}{l^{l}}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{l}{j}\right)^{j}}\frac{(j-l)^{l}}{j\,(j-1)\ldots(j-(l-1))} = \frac{l!}{l^{l}}e^{l}.$$

Além disso,

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{l!}{l^{l}}e^{l}\right)^{\frac{1}{l}} = \lim_{l\to\infty}\frac{e\,(l!)^{\frac{1}{l}}}{l} = 1,$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $D(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{l!}{l^{l}}e^{l} \leq D(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^{l},$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Vamos provar agora que a seqüência (a_j) é crescente, onde

$$a_j = \left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l} \left(\frac{j}{l}\right)^{l} \frac{l!\,(j-l)!}{j!}.$$

Temos que

$$a_{j+1} \geq a_j \Longleftrightarrow \left(\frac{j+1}{j+1-l}\right)^{j+1-l} \left(\frac{j+1}{l}\right)^{l} \frac{l!\,(j+1-l)!}{(j+1)!} \geq \left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l} \left(\frac{j}{l}\right)^{l} \frac{l!\,(j-l)!}{j!} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{(j+1)^{j+1-l}\,(j+1)^{l}\,(j+1-l)!\,(j-l)^{j-l}\,j!}{(j+1-l)^{j+1-l}\,(j+1)!j^{j-l}j^{l}\,(j-l)!} \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{(j+1)^{j}}{j^{j}} \frac{(j-l)^{j-l}}{(j+1-l)^{j-l}} \geq 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{j}\right)^{j} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j-l}\right)^{j-l}} \geq 1,$$

mas esta última desigualdade é verdadeira, pois a seqüência $\left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}\right)_{j=1}^{\infty}$ é crescente e $j-l<j$.

Assim, segue das desigualdades acima que para $j, l \in \mathbb{N}$, com $1 \leq l \leq j-1$,

$$\left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l} \left(\frac{j}{l}\right)^{l} \frac{l!\,(j-l)!}{j!} \leq \frac{l!}{l^l} e^{l} \leq D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{l}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{j}{j-l} = 1,$$

logo existe $M>0$ tal que

$$\frac{j}{j-l} \leq M,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\frac{j}{j-l}\left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l} \left(\frac{j}{l}\right)^{l} \frac{l!\,(j-l)!}{j!} \leq \frac{j}{j-l} D(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{l} \leq D(\varepsilon)\,M\,(1+\varepsilon)^{l},$$

para todos $j, l \in \mathbb{N}$, com $1 \leq l \leq j-1$. □

Teorema 5.2.2. *Sejam* $k \in [1,+\infty)$, $f \in Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ *e* $g \in Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,B}(E)$, *com* $A, B \in [0,+\infty)$ *e* $g \neq 0$. *Se* f/g *é inteira em* E, *então* $f/g \in Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,(L+B)}(E)$, *onde*

$$L = \inf_{\lambda>0}\left((A(1+\lambda))^{k} + (B(1+\lambda))^{k}\left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^{2}-1\right)\right)^{k^{-1}}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{(s,m(r;q))}$ e $\mathcal{P}_{(s,m(r;q))}\left({}^{j}E\right) \subset \mathcal{P}\left({}^{j}E\right)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{B}^{k}_{(s,m(r;q)),\rho}(E) \subset \mathcal{B}^{k}_{\rho}(E)$, para todo $\rho > 0$, e conseqüentemente, $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,A}(E) \subset Exp^{k}_{0,A}(E)$ e $Exp^{k}_{(s,m(r;q)),0,B}(E) \subset Exp^{k}_{0,B}(E)$. Logo, pela Proposição 5.1.1 temos que $h = f/g \in Exp^{k}_{0,L}(E)$. Assim,

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d^{j}}h(0)\right\|^{\frac{1}{j}} \leq L,$$

e conseqüentemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left\|\widehat{d^{j}}h(0)\right\| \leq C(\varepsilon)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} j!\,(L+\varepsilon)^{j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_{m(r;q)}(E)$, com $\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \leq 1$, então $\|x_m\| \leq 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\left|\widehat{d^{j}}h(0)(x_m)\right| \leq C(\varepsilon)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}} j!\,(L+\varepsilon)^{j},$$

para todos $j, m \in \mathbb{N}$. Suponha primeiramente que $g(0) \neq 0$. Como $f = g.h$ e h é inteira, segue da unicidade da representação de uma função holomorfa em série de potências, em torno de um ponto do seu domínio, que

$$\frac{\widehat{d^{j}}f(0)(x)}{j!} = \sum_{l=0}^{j}\frac{\widehat{d^{l}}g(0)(x)}{l!}\frac{\widehat{d^{j-l}}h(0)(x)}{(j-l)!} = g(0)\frac{\widehat{d^{j}}h(0)(x)}{j!} + \sum_{l=1}^{j}\frac{\widehat{d^{l}}g(0)(x)}{l!}\frac{\widehat{d^{j-l}}h(0)(x)}{(j-l)!},$$

para todo $x \in E$. Assim,

$$\widehat{d^{j}}h(0)(x_m) = \frac{1}{g(0)}\widehat{d^{j}}f(0)(x_m) - \frac{j!}{g(0)}\sum_{l=1}^{j}\frac{\widehat{d^{l}}g(0)(x_m)}{l!}\frac{\widehat{d^{j-l}}h(0)(x_m)}{(j-l)!}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{d^{j}}h(0)(x_m)\right| &\leq \frac{1}{|g(0)|}\left|\widehat{d^{j}}f(0)(x_m)\right| + \frac{1}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}\left|\widehat{d^{l}}g(0)(x_m)\right|\left|\widehat{d^{j-l}}h(0)(x_m)\right| = \\
&= \frac{1}{|g(0)|}\left|\widehat{d^{j}}f(0)(x_m)\right| + \frac{1}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left|\widehat{d^{l}}g(0)(x_m)\right|\left|\widehat{d^{j-l}}h(0)(x_m)\right| + \\
&+ \frac{|h(0)|}{|g(0)|}\left|\widehat{d^{j}}g(0)(x_m)\right| \leq \frac{1}{|g(0)|}\left|\widehat{d^{j}}f(0)(x_m)\right| + \frac{|h(0)|}{|g(0)|}\left|\widehat{d^{j}}g(0)(x_m)\right| + \\
&+ \frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}(j-l)!\,(L+\varepsilon)^{j-l}\left|\widehat{d^{l}}g(0)(x_m)\right|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \left(\widehat{d^j} h(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq \frac{1}{|g(0)|} \left\| \left(\widehat{d^j} f(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s + \frac{|h(0)|}{|g(0)|} \left\| \left(\widehat{d^j} g(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s +$$

$$+ \frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|} \left\| \left(\sum_{l=1}^{j-1} \binom{j}{l} \left(\frac{ke}{j-l} \right)^{\frac{j-l}{k}} (j-l)! (L+\varepsilon)^{j-l} \left| \widehat{d^l} g(0)(x_m) \right| \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq$$

$$\leq \frac{1}{|g(0)|} \left\| \left(\widehat{d^j} f(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s + \frac{|h(0)|}{|g(0)|} \left\| \left(\widehat{d^j} g(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s +$$

$$+ \frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|} \sum_{l=1}^{j-1} \binom{j}{l} \left(\frac{ke}{j-l} \right)^{\frac{j-l}{k}} (j-l)! (L+\varepsilon)^{j-l} \left\| \left(\widehat{d^l} g(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s .$$

Pela definição da noma $\|\cdot\|_{(s,m(r;q))}$, temos que

$$\left\| \left(\widehat{d^j} f(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} \left(\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \right)^j ,$$

$$\left\| \left(\widehat{d^j} g(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq \left\| \widehat{d^j} g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} \left(\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \right)^j$$

e

$$\left\| \left(\widehat{d^l} g(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq \left\| \widehat{d^l} g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} \left(\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \right)^l .$$

Como $\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \leq 1$, segue que

$$\left\| \left(\widehat{d^j} h(0)(x_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq \frac{1}{|g(0)|} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} + \frac{|h(0)|}{|g(0)|} \left\| \widehat{d^j} g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} +$$

$$+ \frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|} \sum_{l=1}^{j-1} \binom{j}{l} \left(\frac{ke}{j-l} \right)^{\frac{j-l}{k}} (j-l)! (L+\varepsilon)^{j-l} \left\| \widehat{d^l} g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} .$$

Seja $(y_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_{m(r;q)}(E)$ não nula e $z_m = \frac{y_m}{\left\|(y_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_{m(r;q)}}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, então $\|(z_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \leq 1$ e

$$\left\| \left(\widehat{d^j} h(0)(y_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s =$$

$$= \left\| \left(\widehat{d^j} h(0) \left(\|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} z_m \right) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s = \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{m(r;q)}^j \left\| \left(\widehat{d^j} h(0)(z_m) \right)_{m=1}^{\infty} \right\|_s \leq$$

$$\leq \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{m(r;q)}^j \left[\frac{1}{|g(0)|} \left\| \widehat{d^j} f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} + \frac{|h(0)|}{|g(0)|} \left\| \widehat{d^j} g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} \right] +$$

$$+ \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{m(r;q)}^j \frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|} \sum_{l=1}^{j-1} \binom{j}{l} \left(\frac{ke}{j-l} \right)^{\frac{j-l}{k}} (j-l)! (L+\varepsilon)^{j-l} \left\| \widehat{d^l} g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} .$$

Novamente pela definição da norma $\|\cdot\|_{(s,m(r;q))}$, temos que

$$\left\|\widehat{d}^j h(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq \frac{1}{|g(0)|}\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{(s,m(r;q))} + \frac{|h(0)|}{|g(0)|}\left\|\widehat{d}^j g(0)\right\|_{(s,m(r;q))} + \\ + \frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}(j-l)!\,(L+\varepsilon)^{j-l}\left\|\widehat{d}^l g(0)\right\|_{(s,m(r;q))}.$$

Agora, como $f \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $g \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,B}(E)$ segue da Proposição 2.1.11 que para cada $\varepsilon > 0$, existem $\alpha(\varepsilon) > 0$ e $\beta(\varepsilon) > 0$ tais que

$$\left\|\widehat{d}^j f(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq \alpha(\varepsilon)\, j! \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(A+\varepsilon)^j,$$

$$\left\|\widehat{d}^j g(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq \beta(\varepsilon)\, j! \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(B+\varepsilon)^j,$$

e

$$\left\|\widehat{d}^l g(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq \beta(\varepsilon)\, l! \left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}}(B+\varepsilon)^l.$$

Portanto,

$$\left\|\widehat{d}^j h(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|} j! \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(A+\varepsilon)^j + \frac{|h(0)|\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|} j! \left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(B+\varepsilon)^j + \\ + \frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}} l!\,(j-l)!\,(L+\varepsilon)^{j-l}(B+\varepsilon)^l.$$

Note que

$$\binom{j}{l} = \frac{j}{j-l}\binom{j-1}{l},$$

daí

$$\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\frac{1}{j!}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}} l!\,(j-l)! = \binom{j-1}{l}\frac{j}{j-l}\left(\frac{j}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{j}{l}\right)^{\frac{l}{k}}\frac{l!\,(j-l)!}{j!}.$$

Assim,

$$\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}}l!\,(j-l)!\,(L+\varepsilon)^{j-l}(B+\varepsilon)^{l}=$$

$$=\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\sum_{l=1}^{j-1}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}}\frac{1}{j!}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}}l!\,(j-l)!\,(L+\varepsilon)^{j-l}(B+\varepsilon)^{l}=$$

$$=\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}\frac{j}{j-l}\left(\frac{j}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{j}{l}\right)^{\frac{l}{k}}\frac{l!\,(j-l)!}{j!}(L+\varepsilon)^{j-l}(B+\varepsilon)^{l}\leq$$

$$\leq\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}\frac{j}{j-l}\left(\frac{j}{j-l}\right)^{j-l}\left(\frac{j}{l}\right)^{l}\frac{l!\,(j-l)!}{j!}(L+\varepsilon)^{j-l}(B+\varepsilon)^{l},$$

e pelo Lema 5.2.1, segue que

$$\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}}l!\,(j-l)!\,(L+\varepsilon)^{j-l}(B+\varepsilon)^{l}\leq$$

$$\leq\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!D(\varepsilon)\,M\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}(L+\varepsilon)^{j-l}\left[(1+\varepsilon)(B+\varepsilon)\right]^{l}.$$

Portanto,

$$\left\|\widehat{d^j}h(0)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq\frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|}j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(A+\varepsilon)^{j}+\frac{|h(0)|\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|}j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(B+\varepsilon)^{j}+$$

$$+\frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,M}{|g(0)|}\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}(L+\varepsilon)^{j-l}\left[(1+\varepsilon)(B+\varepsilon)\right]^{l}\leq$$

$$\leq\frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|}j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(A+\varepsilon)^{j}+\frac{|h(0)|\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|}j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(B+\varepsilon)^{j}+$$

$$+\frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,M}{|g(0)|}\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left[L+\varepsilon+(1+\varepsilon)(B+\varepsilon)\right]^{j}.$$

Como $A\leq L$, segue que

$$\left\|\widehat{d^j}h(0)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq\frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|}j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(L+\varepsilon)^{j}+\frac{|h(0)|\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|}j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}(B+\varepsilon)^{j}+$$

$$+\frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,M}{|g(0)|}\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left[L+\varepsilon+B+\varepsilon+\varepsilon B+\varepsilon^{2}\right]^{j}\leq$$

$$\leq\left(\frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|}+\frac{|h(0)|\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|}+\frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,M}{|g(0)|}\right)j!\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}\left(L+B+2\varepsilon+\varepsilon B+\varepsilon^{2}\right)^{j}.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\limsup_{j\to\infty}\left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d^j}h\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}}\leq L+B,$$

e pela Proposição 2.1.11, segue que $h\in Exp_{(s,m(r;q)),0,(L+B)}^{k}\left(E\right).$

Suponha agora que $g\left(0\right)=0$ e considere as funções $f_0\left(x\right)=f\left(x\right)+\psi\left(x\right)h\left(x\right)$ e $g_0\left(x\right)=g\left(x\right)+\psi\left(x\right),$ para todo $x\in E$, onde $\psi\in Exp_{(s,m(r;q)),0}^{k}\left(E\right),$ $\psi\left(0\right)\neq 0$ e ψ é não constante. Então $f_0=g_0h$ e $g_0\left(0\right)\neq 0$. Como pelas inclusões da Observação 4.2.17, $\psi\in Exp_{(s,m(r;q)),0,B}^{k}\left(E\right),$ então $g_0\in Exp_{(s,m(r;q)),0,B}^{k}\left(E\right).$ Portanto, se $f_0\in Exp_{(s,m(r;q)),0,L}^{k}\left(E\right),$ podemos aplicar o caso provado anteriormente para obter $h\in Exp_{(s,m(r;q)),0,(L+B)}^{k}\left(E\right).$

Vamos provar que $f_0\in Exp_{(s,m(r;q)),0,L}^{k}\left(E\right).$ Para isto temos que provar que $\psi h\in Exp_{(s,m(r;q)),0,L}^{k}\left(E\right).$ Temos que

$$\widehat{d^j}\left(\psi h\right)\left(0\right)\left(x_m\right)=j!\sum_{l=0}^{j}\frac{\widehat{d^l}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)}{l!}\frac{\widehat{d^{j-l}}h\left(0\right)\left(x_m\right)}{(j-l)!}=$$

$$=\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j}{l}\widehat{d^l}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)\widehat{d^{j-l}}h\left(0\right)\left(x_m\right)+\widehat{d^j}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)h\left(0\right),$$

e como $h\in Exp_{0,L}^{k}\left(E\right),$ segue que

$$\left|\widehat{d^{j-l}}h\left(0\right)\left(x_m\right)\right|\leq C\left(\varepsilon\right)\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}(j-l)!\left(L+\varepsilon\right)^{j-l},$$

se $\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)}\leq 1$. Daí,

$$\left|\widehat{d^j}\left(\psi h\right)\left(0\right)\left(x_m\right)\right|\leq\left|h\left(0\right)\right|\left|\widehat{d^j}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)\right|+\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j}{l}\left|\widehat{d^l}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)\right|\left|\widehat{d^{j-l}}h\left(0\right)\left(x_m\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|h\left(0\right)\right|\left|\widehat{d^j}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)\right|+C\left(\varepsilon\right)\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j}{l}\left|\widehat{d^l}\psi\left(0\right)\left(x_m\right)\right|\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}(j-l)!\left(L+\varepsilon\right)^{j-l},$$

Como $\psi\in Exp_{(s,m(r;q)),0}^{k}\left(E\right),$ existe $N\left(\varepsilon\right)>0$ tal que

$$\left\|\widehat{d^j}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq N\left(\varepsilon\right)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\varepsilon^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Da mesma forma que fizemos no caso anterior, segue que

$$\left\|\widehat{d^j}\left(\psi h\right)\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq$$

$$\leq\left|h\left(0\right)\right|\left\|\widehat{d^j}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}+C\left(\varepsilon\right)\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j}{l}\left\|\widehat{d^l}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}(j-l)!\left(L+\varepsilon\right)^{j-l}.$$

Como $\mathcal{P}_{(s,m(r;q))}\left({}^{0}E\right)=\mathbb{C}$, temos que $\left\|\widehat{d^{0}}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}=\left|\psi\left(0\right)\right|$, logo

$$\left\|\widehat{d^{j}}\left(\psi h\right)\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq$$

$$\leq\left|h\left(0\right)\right|\left\|\widehat{d^{j}}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}+C\left(\varepsilon\right)\left\|\widehat{d^{0}}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon\right)^{j}+$$

$$+C\left(\varepsilon\right)\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left\|\widehat{d^{l}}\psi\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(j-l\right)!\left(L+\varepsilon\right)^{j-l}\leq$$

$$\leq\left|h\left(0\right)\right|N\left(\varepsilon\right)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\varepsilon^{j}+C\left(\varepsilon\right)\left|\psi\left(0\right)\right|\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon\right)^{j}+$$

$$+C\left(\varepsilon\right)N\left(\varepsilon\right)\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}}l!\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(j-l\right)!\varepsilon^{l}\left(L+\varepsilon\right)^{j-l}.$$

Da mesma forma que fizemos no caso anterior, concluímos também que

$$\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\left(\frac{ke}{j-l}\right)^{\frac{j-l}{k}}\left(\frac{ke}{l}\right)^{\frac{l}{k}}l!\left(j-l\right)!\left(L+\varepsilon\right)^{j-l}\varepsilon^{l}\leq$$

$$\leq\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!D\left(\varepsilon\right)M\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}\left(L+\varepsilon\right)^{j-l}\left[\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right]^{l}.$$

Assim,

$$\left\|\widehat{d^{j}}\left(\psi h\right)\left(0\right)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq C\left(\varepsilon\right)\left|\psi\left(0\right)\right|\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon\right)^{j}+\left|h\left(0\right)\right|N\left(\varepsilon\right)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\varepsilon^{j}+$$

$$+C\left(\varepsilon\right)N\left(\varepsilon\right)D\left(\varepsilon\right)M\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}\left(L+\varepsilon\right)^{j-l}\left[\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right]^{l}\leq$$

$$\leq C\left(\varepsilon\right)\left|\psi\left(0\right)\right|\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon\right)^{j}+\left|h\left(0\right)\right|N\left(\varepsilon\right)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\varepsilon^{j}+$$

$$+C\left(\varepsilon\right)N\left(\varepsilon\right)D\left(\varepsilon\right)M\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon+\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right)^{j-1}=$$

$$=C\left(\varepsilon\right)\left|\psi\left(0\right)\right|\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon\right)^{j}+\left|h\left(0\right)\right|N\left(\varepsilon\right)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\varepsilon^{j}+$$

$$+\frac{C\left(\varepsilon\right)N\left(\varepsilon\right)D\left(\varepsilon\right)M}{\left(L+\varepsilon+\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right)}\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon+\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right)^{j}\leq$$

$$\leq\left(C\left(\varepsilon\right)\left|\psi\left(0\right)\right|+\left|h\left(0\right)\right|N\left(\varepsilon\right)+\frac{C\left(\varepsilon\right)N\left(\varepsilon\right)D\left(\varepsilon\right)M}{\left(L+\varepsilon+\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right)}\right)\left(\frac{ke}{j}\right)^{\frac{j}{k}}j!\left(L+\varepsilon+\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon\right)^{j}.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{1}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}\left(\psi h\right)(0)\right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq L,$$

e, portanto, $\psi h \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,L}(E)$. Como $A \leq L$, temos que $f \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E) \subset Exp^k_{(s,m(r;q)),0,L}(E)$, logo $f_0 \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,L}(E)$. □

Observação 5.2.3. Note que, se $B = 0$, então $L = A$ e $h = f/g \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$.

Exemplo 5.2.4. Vamos dar exemplos de $\psi \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0}(E)$, com $\psi(0) \neq 0$ e ψ não constante.

Se $k \neq 1$, então segue da Proposição 2.1.24 que $\psi = e^{\varphi}$, com $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$, satisfaz $e^{\varphi} \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0}(E)$, $e^{\varphi(0)} = 1$.

Se $k = 1$, segue da Proposição 2.1.24 que $e^{\varphi} \in Exp^1_{(s,m(r;q)),0}(E)$, se $\|\varphi\| = 0$. Daí, e^{φ} seria a função constante igual a 1 que não satisfaz as exigências sobre a função ψ.

Um exemplo de ψ que vale para todo $k \in [1, +\infty)$ é a função $\psi(x) = 1 + P(x)$, com $P \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^nE)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, não nulo. De fato,

$$\frac{\widehat{d^0}\psi(0)}{0!} = 1, \qquad \frac{\widehat{d^n}\psi(0)}{n!} = P \qquad \text{e} \qquad \frac{\widehat{d^j}\psi(0)}{j!} = 0, \qquad \text{se } j \neq 0,\ j \neq n,$$

logo $\psi \in \mathcal{H}(E)$, $\widehat{d^j}\psi(0) \in \mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}\psi(0)\right\|_{(s,m(r;q))} < +\infty,$$

para todo $\rho > 0$. Portanto, $\psi \in Exp^k_{(s,m(r;q)),0}(E) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}^k_{(s,m(r;q)),\rho}(E)$ e além disso, $\psi(0) = 1$ e ψ é não constante.

Teorema 5.2.5. *Sejam $f \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$ e $g \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,B}(E)$, com $A \geq B \geq 0$ e $g \neq 0$. Se f/g é holomorfa em $B_{A^{-1}}(0) \subset E$, então $f/g \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,(A+B)}(E)$.*

Demonstração. Primeiramente, note que como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{(s,m(r;q))}$ e $\mathcal{P}_{(s,m(r;q))}({}^jE) \subset \mathcal{P}({}^jE)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!}\widehat{d^j}f(0)\right\|^{\frac{1}{j}} \leq A$$

e

$$\limsup_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j!}\widehat{d^j}g(0)\right\|^{\frac{1}{j}}\leq B,$$

o que implica $f\in Exp_{0,A}^{\infty}(E)$ e $g\in Exp_{0,B}^{\infty}(E)$. Assim, pela Proposição 5.1.2 temos que $h=f/g\in Exp_{0,A}^{\infty}(E)$. Então, dado $\varepsilon>0$, existe $C(\varepsilon)>0$ tal que

$$\left\|\widehat{d^j}h(0)\right\|\leq C(\varepsilon)\,j!\,(A+\varepsilon)^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}\in\ell_{m(r;q)}(E)$, com $\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)}\leq\min\{1,A^{-1}\}$, então $\|x_m\|\leq\min\{1,A^{-1}\}$, para todo $m\in\mathbb{N}$. Logo,

$$\left|\widehat{d^j}h(0)(x_m)\right|\leq C(\varepsilon)\,j!\,(A+\varepsilon)^j,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Suponha primeiramente que $g(0)\neq 0$. Como $f=g.h$ e h é holomorfa na bola $B_{A^{-1}}(0)$, segue da unicidade da representação de uma função holomorfa em série de potências, em torno de um ponto do seu domínio, que

$$\widehat{d^j}f(0)(x)=g(0)\,\widehat{d^j}h(0)(x)+j!\sum_{l=1}^{j}\frac{\widehat{d^l}g(0)(x)}{l!}\frac{\widehat{d^{j-l}}h(0)(x)}{(j-l)!},$$

para todo $x\in B_{A^{-1}}(0)$. Assim,

$$\widehat{d^j}h(0)(x_m)=\frac{1}{g(0)}\widehat{d^j}f(0)(x_m)-\frac{j!}{g(0)}\sum_{l=1}^{j}\frac{\widehat{d^l}g(0)(x_m)}{l!}\frac{\widehat{d^{j-l}}h(0)(x_m)}{(j-l)!}$$

e

$$\left|\widehat{d^j}h(0)(x_m)\right|\leq\frac{1}{|g(0)|}\left|\widehat{d^j}f(0)(x_m)\right|+\frac{1}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}\left|\widehat{d^l}g(0)(x_m)\right|\left|\widehat{d^{j-l}}h(0)(x_m)\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{|g(0)|}\left|\widehat{d^j}f(0)(x_m)\right|+\frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}(j-l)!\,(A+\varepsilon)^{j-l}\left|\widehat{d^l}g(0)(x_m)\right|.$$

Logo,

$$\left\|\widehat{d^j}h(0)\right\|_{(s,m(r;q))}\leq$$

$$\leq\frac{1}{|g(0)|}\left\|\widehat{d^j}f(0)\right\|_{(s,m(r;q))}+\frac{C(\varepsilon)}{|g(0)|}\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}(j-l)!\,(A+\varepsilon)^{j-l}\left\|\widehat{d^l}g(0)\right\|_{(s,m(r;q))}.$$

Pela Definição 2.1.15, para cada $\varepsilon > 0$, existem $\alpha(\varepsilon) > 0$ e $\beta(\varepsilon) > 0$ tais que

$$\left\| \widehat{d}^j f(0) \right\|_{(s,m(r;q))} \leq \alpha(\varepsilon)\, j!\, (A+\varepsilon)^j,$$

e

$$\left\| \widehat{d}^l g(0) \right\|_{(s,m(r;q))} \leq \beta(\varepsilon)\, l!\, (B+\varepsilon)^l.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{d}^j h(0) \right\|_{(s,m(r;q))} &\leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|} j!\, (A+\varepsilon)^j + \frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|} \sum_{l=1}^{j} \binom{j}{l} l!\, (j-l)!\, (A+\varepsilon)^{j-l} (B+\varepsilon)^l \leq \\
&\leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|} j!\, (A+\varepsilon)^j + \frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|} j! \sum_{l=1}^{j} \binom{j}{l} (A+\varepsilon)^{j-l} (B+\varepsilon)^l \leq \\
\leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|} j!\, (A+\varepsilon)^j + \frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|} j!\, (A+B+2\varepsilon)^j &\leq \left(\frac{\alpha(\varepsilon)}{|g(0)|} + \frac{C(\varepsilon)\,\beta(\varepsilon)}{|g(0)|} \right) j!\, (A+B+2\varepsilon)^j.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j h(0) \right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A + B,$$

e como $B_{(A+B)^{-1}}(0) \subset B_{A^{-1}}(0)$, segue que h é holomorfa em $B_{(A+B)^{-1}}(0)$. Portanto, $h \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,(A+B)}(E)$.

Suponha agora que $g(0) = 0$ e considere as funções $f_0(x) = f(x) + e^{\varphi(x)} h(x)$ e $g_0(x) = g(x) + e^{\varphi(x)}$, para todo $x \in E$, onde $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Então $f_0 = g_0 h$ e $g_0(0) \neq 0$, e como pela Proposição 2.1.24, $e^{\varphi} \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,B}(E)$, então $g_0 \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,B}(E)$. Se $f_0 \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, podemos aplicar o caso provado anteriormente para obter $h \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,(A+B)}(E)$.

Vamos provar que $f_0 \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$. Para isto temos que provar que $e^{\varphi} h \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$. Temos que

$$\widehat{d}^j (e^{\varphi} h)(0)(x_m) = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \widehat{d}^l (e^{\varphi})(0)(x_m)\, \widehat{d}^{j-l} h(0)(x_m)$$

e como $h \in Exp^{\infty}_{0,A}(E)$, segue que

$$\left| \widehat{d}^{j-l} h(0)(x_m) \right| \leq C(\varepsilon)\, (j-l)!\, (A+\varepsilon)^{j-l},$$

para $\|(x_m)_{m=1}^{\infty}\|_{m(r;q)} \leq \min\{1, A^{-1}\}$. Daí,

$$\left|\widehat{d}^j (e^{\varphi} h)(0)(x_m)\right| \leq \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \left|\widehat{d}^l (e^{\varphi})(0)(x_m)\right| \left|\widehat{d}^{j-l} h(0)(x_m)\right| \leq$$
$$\leq C(\varepsilon) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \left|\widehat{d}^l (e^{\varphi})(0)(x_m)\right| (j-l)! (A+\varepsilon)^{j-l}.$$

Pela Proposição 2.1.24, $e^{\varphi} \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0}(E)$, logo existe $D(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\left\|\widehat{d}^l (e^{\varphi})(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq D(\varepsilon)\, l! \varepsilon^l,$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\left\|\widehat{d}^j (e^{\varphi} h)(0)\right\|_{(s,m(r;q))} \leq C(\varepsilon) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \left\|\widehat{d}^j (e^{\varphi})(0)\right\|_{(s,m(r;q))} (j-l)! (A+\varepsilon)^{j-l} \leq$$
$$\leq C(\varepsilon) D(\varepsilon) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} l! \varepsilon^l (j-l)! (A+\varepsilon)^{j-l} \leq$$
$$\leq C(\varepsilon) D(\varepsilon)\, j! \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \varepsilon^l (A+\varepsilon)^{j-l} = C(\varepsilon) D(\varepsilon)\, j! (A+2\varepsilon)^j.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|\frac{1}{j!}\widehat{d}^j (e^{\varphi} h)(0)\right\|_{(s,m(r;q))}^{\frac{1}{j}} \leq A,$$

e portanto, $e^{\varphi} h \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$. Como $f \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$, segue que $f_0 \in Exp^{\infty}_{(s,m(r;q)),0,A}(E)$. □

Utilizando estes resultados, vamos provar três Teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel, mas para isso precisamos do seguinte resultado provado por Gupta em [4].

Lema 5.2.6. *Sejam U um subconjunto aberto e conexo de E, f e g funções holomorfas em U, com g não identicamente nula. Se para um subespaço afim S de E de dimensão 1 e para qualquer componente conexa S' de $S \cap U$ na qual g não é identicamente nula, a restrição $f|_{S'}$ é divisível por $g|_{S'}$, com o quociente sendo holomorfo em S', então f é divisível por g com o quociente sendo holomorfo em U.*

Demonstração. Ver Gupta [4], Proposição 2, pág. 65. □

Teorema 5.2.7. *Se* $k \in [1,+\infty]$ *e* $T_1, T_2 \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ *são tais que* $T_2 \neq 0$ *e* $T_1(P\exp\varphi) = 0$ *sempre que* $T_2 * P\exp\varphi = 0$, *com* $\varphi \in E'$ *e* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^nE)$, $n \in \mathbb{N}$, *então* FT_1 *é divisível por* FT_2 *com o quociente sendo um elemento de* $Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$.

Demonstração. Seja S um subespaço afim de E' de dimensão 1, então S é da forma $\{\varphi_1 + t\varphi_2; t \in \mathbb{C}\}$, onde $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$. Se $k > 1$, então FT_1 e FT_2 são funções inteiras e se $k = 1$, então existe uma bola de centro 0 e raio $\rho > 0$ na qual FT_1 e FT_2 são funções holomorfas. Em qualquer caso, se t_0 é um zero de ordem p de

$$g_2(t) = FT_2(\varphi_1 + t\varphi_2) = T_2(\exp(\varphi_1 + t\varphi_2)),$$

segue que

$$T_2\left(\varphi_2^j \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)\right) = 0,$$

para todo $j < p$. De fato, temos que

$$g_2(t) = T_2(\exp(\varphi_1 + t\varphi_2)) = (t - t_0)^p\,\Phi(t),$$

onde $\Phi(t_0) \neq 0$. Logo, toda derivada de ordem $j < p$ de g_2 é nula quando avaliada em t_0. Além disso, $g_2 = T_2 \circ \Psi$, onde $\Psi(t) = \exp(\varphi_1 + t\varphi_2)$, então aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} 0 = d(g_2)(t_0) &= d(T_2 \circ \Psi)(t_0) = d(T_2)(\Psi(t_0)) \circ d(\Psi)(t_0) = \\ &= T_2 \circ d(\Psi)(t_0) = T_2(\varphi_2 \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)). \end{aligned}$$

Aplicando sucessivas vezes, temos que para todo $j < p$,

$$T_2\left(\varphi_2^j \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)\right) = d^j(g_2)(t_0) = 0.$$

Agora, para $x, y \in E$, temos que

$$\left(T_2 * \varphi_2^j \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)\right)(x) = T_2\left(\tau_{-x}\left(\varphi_2^j \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)\right)\right)$$

e

$$\tau_{-x}\left(\varphi_2^j \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)\right)(y) = \left(\varphi_2^j \exp(\varphi_1 + t_0\varphi_2)\right)(y + x) = (\varphi_2(y + x))^j\, e^{(\varphi_1(y+x) + t_0\varphi_2(y+x))}.$$

Mas,

$$(\varphi_2(y+x))^j = (\varphi_2(y)+\varphi_2(x))^j = \sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(\varphi_2(y))^m(\varphi_2(x))^{j-m},$$

logo

$$\tau_{-x}\left(\varphi_2^j\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2)\right)(y) = \sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(\varphi_2(y))^m(\varphi_2(x))^{j-m}e^{\varphi_1(y)+t_0\varphi_2(y)}e^{\varphi_1(x)+t_0\varphi_2(x)}.$$

Daí,

$$T_2\left(\tau_{-x}\left(\varphi_2^j\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2)\right)\right) = T_2\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(\varphi_2(x))^{j-m}e^{\varphi_1(x)+t_0\varphi_2(x)}\varphi_2^m e^{\varphi_1+t_0\varphi_2}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(\varphi_2(x))^{j-m}e^{\varphi_1(x)+t_0\varphi_2(x)}T_2\left(\varphi_2^m\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2)\right),$$

e, portanto,

$$T_2*\varphi_2^j\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2) = \sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}\varphi_2^{j-m}\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2)\,T_2\left(\varphi_2^m\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2)\right) = 0,$$

para todo $j<p$. Assim, segue da hipótese que $T_1\left(\varphi_2^j\exp(\varphi_1+t_0\varphi_2)\right)=0$, para todo $j<p$, e pelo mesmo raciocínio que usamos para g_2, segue que t_0 é um zero de ordem pelo menos p de $g_1(t) = FT_1(\varphi_1+t\varphi_2) = T_1(\exp(\varphi_1+t\varphi_2))$. Portanto, para $k>1$, $FT_1|_S$ é divisível por $FT_2|_S$ com o quociente holomorfo em S. Como S é conexo, segue do Lema 5.2.6 que FT_1 é divisível por FT_2 e o quociente é holomorfo em E'. Para $k=1$, segue que $FT_1|_{S'}$ é divisível por $FT_2|_{S'}$ com o quociente holomorfo em S', onde $S' = S\cap B_\rho(0)$. Como S' é conexo, segue do Lema 5.2.6 que FT_1 é divisível por FT_2 e o quociente é holomorfo em $B_\rho(0)$.

Falta provar que em ambos os casos o quociente está em $Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$. Se $k>1$, então $FT_1, FT_2 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E') = \bigcup_{\delta>0}\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta}(E')$, daí temos que existem $\delta_1,\delta_2>0$ tais que $FT_1\in\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta_1}(E')$ e $FT_2\in\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta_2}(E')$. Como para $\delta>\delta_1$, temos $\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta_1}(E')\subset\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta}(E')$, então $\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta_1}(E')\subset\bigcap_{\delta>\delta_1}\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta}(E') = Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,\delta_1}(E')$. Analogamente, segue que $FT_2\in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,\delta_2}(E')$. Logo, pelo Teorema 5.2.2, $H = FT_1/FT_2 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(L+\delta_2)}(E')$, onde

$$L = \inf_{\lambda>0}\left((\delta_1(1+\lambda))^k + (\delta_2(1+\lambda))^k\left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2-1\right)\right)^{k^{-1}},$$

e pela Observação 4.2.17, segue que $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$.
Se $k = 1$, então $FT_1, FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q'))}(E')$ e existe $\rho > 0$ tal que FT_1 e FT_2 estão em $\mathcal{H}^{\infty}_{(s',m(r';q'))}\left(B_{\frac{1}{\rho}}(0)\right)$, onde $B_{\frac{1}{\rho}}(0) \subset E'$. Logo,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j (FT_1)(0) \right\|_{(s',m(r';q'))} < +\infty,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j (FT_2)(0) \right\|_{(s',m(r';q'))} < +\infty,$$

e, portanto,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j (FT_1)(0) \right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \rho,$$

$$\limsup_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j!} \widehat{d}^j (FT_2)(0) \right\|^{\frac{1}{j}}_{(s',m(r';q'))} \leq \rho.$$

Assim, $FT_1, FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,\rho}(E')$ e pelo Teorema 5.2.5, segue que $H = FT_1/FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,2\rho}(E')$ e pela Observação 4.2.17, segue que $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q'))}(E')$. □

Teorema 5.2.8. *Se* $k \in [1, +\infty]$ *e* $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ *são tais que* $T_2 \neq 0$ *e* $T_1(P\exp\varphi) = 0$ *sempre que* $T_2 * P\exp\varphi = 0$, *com* $\varphi \in E'$ *e* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE)$, $n \in \mathbb{N}$, *então* FT_1 *é divisível por* FT_2 *com o quociente sendo um elemento de* $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$.

Demonstração. Primeiramente, note que faz sentido usar o produto de convolução $T_2 * P\exp\varphi$ no caso $k = +\infty$, pois segue do que discutimos na Observação 4.2.17 que T_2 também pertence a $\left[Exp^{\infty}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$. Para $k > 1$, segue da Observação 4.2.17 que $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ e pelo Teorema 5.2.7, segue que $FT_1 = H.FT_2$, com $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$. Por outro lado, como $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ temos que $FT_1, FT_2 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$ e pelo Teorema 5.2.2, segue que $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$.
Para $k = 1$, temos que $FT_1, FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0}(E')$ e da mesma forma que fizemos na demonstração do Teorema 5.2.7, temos que existe $H \in \mathcal{H}(E')$, com $FT_1 = H.FT_2$. Logo, pelo Teorema 5.2.5 temos que $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0}(E')$. □

Teorema 5.2.9. (a) *Para* $k \in [1, +\infty]$ *e* $A \in (0, +\infty)$, *se* $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)\right]'$ *são tais que* T_2 *é de tipo zero,* $T_2 \neq 0$ *e* $T_1(P\exp\varphi) = 0$ *sempre que* $T_2 * P\exp\varphi = 0$, *com*

$\varphi \in E'$ *e* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^{n}E\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *então* FT_1 *é divisível por* FT_2 *com o quociente sendo um elemento de* $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}\left(E'\right)$.

(b) *Para* $k \in [1,+\infty]$ *e* $B \in (0,+\infty)$, *se* $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,B}\left(E\right)\right]'$ *são tais que* T_2 *é de tipo zero,* $T_2 \neq 0$ *e* $T_1\left(P\exp\varphi\right) = 0$ *sempre que* $T_2 * P\exp\varphi = 0$, *com* $\varphi \in E'$ *e* $P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^{n}E\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *então* FT_1 *é divisível por* FT_2 *com o quociente sendo um elemento de* $Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)B)^{-1}}\left(E'\right)$.

Demonstração. Primeiramente, note que pela Observação 4.2.17, $T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(E\right)\right]'$ e, portanto, faz sentido usar o produto de convolução $T_2 * P\exp\varphi$.

Vamos provar o caso (a). Seja $k > 1$, então segue da Observação 4.2.17 que $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(E\right)\right]'$ e pelo Teorema 5.2.7, existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}\left(E'\right)$ tal que $FT_1 = H.FT_2$. Temos que $FT_1 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}\left(E'\right)$ e como T_2 é de tipo zero, temos que $FT_2 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}\left(E'\right)$, assim segue do Teorema 5.2.2 e da observação 5.2.3 que $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)A)^{-1}}\left(E'\right)$.

Se $k = 1$, temos que $FT_1, FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,A^{-1}}\left(E'\right) = \mathcal{H}_{b(s',m(r';q'))}\left(B_A\left(0\right)\right)$. Da mesma forma que fizemos no Teorema 5.2.7, existe H holomorfa em $B_A\left(0\right) \subset E'$ tal que $FT_1 = H.FT_2$ em $B_A\left(0\right)$. Como T_2 é de tipo zero, temos que $FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0}\left(E'\right) = \mathcal{H}_{b(s',m(r';q'))}\left(E'\right)$ e pelo Teorema 5.2.5, segue que $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,A^{-1}}\left(E'\right)$.

Vamos agora provar o caso (b). Se $k > 1$, então segue da Observação 4.2.17 que $T_1, T_2 \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(E\right)\right]'$ e pelo Teorema 5.2.7, existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}\left(E'\right)$ tal que $FT_1 = H.FT_2$. Como T_2 é de tipo zero, temos que $FT_2 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}\left(E'\right)$. Além disso, $FT_1 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)B)^{-1}}\left(E'\right)$, então existe $\delta < \left(\theta\left(k\right)B\right)^{-1}$ tal que $FT_1 \in \mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta}\left(E'\right)$. Logo, $FT_1 \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,\delta}\left(E'\right)$, pois para $\rho > \delta$, temos que $\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\delta}\left(E'\right)$ está contido em $\mathcal{B}^{k'}_{(s',m(r';q')),\rho}\left(E'\right)$. Assim, segue do Teorema 5.2.2 que $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,\delta}\left(E'\right)$ e pela Observação 4.2.17 temos que $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)B)^{-1}}\left(E'\right)$.

Se $k = 1$, temos que $FT_1, FT_2 \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),B^{-1}}\left(E'\right) = \mathcal{H}_{b(s',m(r';q'))}\left(\overline{B_B\left(0\right)}\right)$. Logo, existe $\delta > B$ tal que $FT_1, FT_2 \in \mathcal{H}_{b(s',m(r';q'))}\left(B_\delta\left(0\right)\right)$ e procedendo da mesma forma que na demonstração do caso (a), temos que $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),0,\delta^{-1}}\left(E'\right) = \mathcal{H}_{b(s',m(r';q'))}\left(B_\delta\left(0\right)\right)$, com $FT_1 = H.FT_2$ em $B_\delta\left(0\right)$. Portanto, segue da Observação 4.2.17 que $H \in Exp^{\infty}_{(s',m(r';q')),B^{-1}}\left(E'\right)$. □

CAPÍTULO 6

Teoremas de Existência e Aproximação para Equações de Convolução

Neste capítulo provaremos os Teoremas de existência e aproximação de soluções para equações de convolução. Estes teoremas são aplicações dos Teoremas de divisão obtidos no capítulo anterior.

6.1 Teoremas de Aproximação

Teorema 6.1.1. (a) *Se* $k \in [1, +\infty]$ *e* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$, *então o subespaço vetorial de* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ *gerado pelas soluções exponenciais polinomiais da equação homogênea* $\mathcal{O} = 0$, *é denso no subespaço fechado de todas soluções da equação homogênea, isto é, o subespaço de* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ *gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{ P \exp \varphi; P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left({}^n E\right), n \in \mathbb{N}, \varphi \in E', \mathcal{O}\left(P \exp \varphi\right) = 0 \right\}$$

é denso em

$$\mathcal{K} = \ker \mathcal{O} = \left\{ f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E); \mathcal{O} f = 0 \right\}.$$

(b) *Se* $k \in [1, +\infty]$ *e* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$, *então o subespaço vetorial de* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ *gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{ P \exp\varphi; P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE), n \in \mathbb{N}, \varphi \in E', \mathcal{O}(P\exp\varphi) = 0 \right\}$$

é denso em

$$\mathcal{K} = \ker \mathcal{O} = \left\{ f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E); \mathcal{O}f = 0 \right\}.$$

Demonstração. (a) Se $\mathcal{O} \equiv 0$, então o resultado segue da Proposição 2.1.25 pois, neste caso, $\mathcal{K} = Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$. Suponha que $\mathcal{O} \neq 0$, então pelo Teorema 4.2.13, existe $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$, $T \neq 0$, tal que $\mathcal{O} = T*$. Agora, se $X \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ é tal que $X|_{\mathcal{L}} = 0$, então pelo Teorema 5.2.7, existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$ tal que $FX = H.FT$. Logo, existe $S \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ tal que $FS = H$ e pela demonstração da Proposição 4.2.16, segue que $FX = FS.FT = F(S * T)$, o que implica $X = S * T$. Logo, $X * f = (S * T) * f = S * (T * f) = S * (\mathcal{O}f) = 0$, para todo $f \in \mathcal{K}$, portanto $X(f) = (X * f)(0) = 0$, para todo $f \in \mathcal{K}$. Assim, mostramos que todo $X \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ que se anula em $\mathcal{L}$, também se anula em $\mathcal{K}$. Portanto, como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach, temos que o subespaço gerado por $\mathcal{L}$, denotado por $\mathcal{J}$, é denso em $\mathcal{K}$, pois caso contrário existiria $f_0 \in \mathcal{K}/\overline{\mathcal{J}}$ e pelo Teorema de Hahn-Banach existiria $X \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right]'$ tal que $X(f_0) \neq 0$ e $X|_{\mathcal{J}} = 0$.

(b) Se $\mathcal{O} \equiv 0$, então o resultado segue da Proposição 2.1.25. Suponha que $\mathcal{O} \neq 0$, então se $k \neq +\infty$, segue do Teorema 4.2.13 que existe $T \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, $T \neq 0$, tal que $\mathcal{O} = T*$. Se $k = +\infty$, como todo elemento de $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ é de tipo zero, segue do Teorema 4.2.23 que existe $T \in \left[Exp^\infty_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$, $T \neq 0$, tal que $\mathcal{O} = T*$. Agora, se $X \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ é tal que $X|_{\mathcal{L}} = 0$, então pelo Teorema 5.2.8 existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$ tal que $FX = H.FT$. Logo, existe $S \in \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)\right]'$ tal que $FS = H$. Para $k \neq +\infty$, segue da demonstração da Proposição 4.2.16 que $FX = FS.FT = F(S * T)$, o que implica $X = S*T$. Para $k = +\infty$, segue da Observação 4.2.24 que $FX = FS.FT = F(S * T)$, o que implica $X = S * T$. Assim como feito na parte (a), segue que $X|_{\mathcal{K}} = 0$ e pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que o subespaço gerado por $\mathcal{L}$ é denso em $\mathcal{K}$. □

Teorema 6.1.2. (a) *Se* $k \in [1, +\infty]$, $A \in (0, +\infty)$ *e* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$ *é de tipo zero, então o subespaço vetorial de* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ *gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{ P \exp\varphi; P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^nE), n \in \mathbb{N}, \varphi \in E', \mathcal{O}(P\exp\varphi) = 0 \right\}$$

é denso em

$$\mathcal{K} = \ker \mathcal{O} = \left\{ f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) ; \mathcal{O}f = 0 \right\}.$$

(b) *Se* $k \in [1, +\infty]$, $B \in (0, +\infty)$ *e* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}$ *é de tipo zero, então o subespaço vetorial de* $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}(E)$ *gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{ P \exp \varphi ; P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^{n}E), n \in \mathbb{N}, \varphi \in E', \mathcal{O}(P \exp \varphi) = 0 \right\}$$

é denso em

$$\mathcal{K} = \ker \mathcal{O} = \left\{ f \in Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}(E) ; \mathcal{O}f = 0 \right\}.$$

Demonstração. (a) Se $\mathcal{O} \equiv 0$, então o resultado segue da Proposição 2.1.25. Suponha que $\mathcal{O} \neq 0$, então pelo Teorema 4.2.23 existe $T \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \right]'$, $T \neq 0$ de tipo zero, tal que $\mathcal{O} = T *$. Agora, se $X \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \right]'$ é tal que $X|_{\mathcal{L}} = 0$, então pelo Teorema 5.2.9 existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)A)^{-1}}(E')$ tal que $FX = H.FT$. Logo, existe $S \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \right]'$ tal que $FS = H$ e pela Observação 4.2.24, segue que $FX = FS.FT = F(S * T)$, o que implica $X = S * T$. Logo, $X * f = (S * T) * f = S * (T * f) = S * (\mathcal{O}f) = 0$, para todo $f \in \mathcal{K}$, portanto $X(f) = (X * f)(0) = 0$, para todo $f \in \mathcal{K}$. Assim, mostramos que todo $X \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E) \right]'$ que se anula em $\mathcal{L}$, também se anula em $\mathcal{K}$. Portanto, como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach, temos que o subespaço gerado por $\mathcal{L}$ é denso em $\mathcal{K}$.

(b) Se $\mathcal{O} \equiv 0$, então o resultado segue da Proposição 2.1.25. Suponha que $\mathcal{O} \neq 0$, então segue do Teorema 4.2.23 que existe $T \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}(E) \right]'$, $T \neq 0$ de tipo zero, tal que $\mathcal{O} = T *$. Agora, se $X \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}(E) \right]'$ é tal que $X|_{\mathcal{L}} = 0$, então pelo Teorema 5.2.9 existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)B)^{-1}}(E')$ tal que $FX = H.FT$. Logo, existe $S \in \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}(E) \right]'$ tal que $FS = H$ e pela Observação 4.2.24, segue que $FX = FS.FT = F(S * T)$, o que implica $X = S * T$. Assim como feito na parte (a), segue que $X|_{\mathcal{K}} = 0$ e pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que o subespaço gerado por $\mathcal{L}$ é denso em $\mathcal{K}$. □

Teorema 6.1.3. (a) *Para* $k \in [1, +\infty]$, *se* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$, $\mathcal{O} \neq 0$, *então sua aplicação transposta*

$${}^{t}\mathcal{O} \colon \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \right]' \longrightarrow \left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \right]'$$

é tal que

(a.1) ${}^{t}\mathcal{O}\left(\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \right]' \right)$ *é o ortogonal de* $\ker \mathcal{O}$ *em* $\left[Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) \right]'$.

(a.2) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(E\right)\right]'\right)$ *é fechado para a topologia fraca-$*$ em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(E\right)\right]'$ *definida por* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}\left(E\right).$

(b) *Para* $k\in[1,+\infty]$, *se* $\mathcal{O}\in\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}$, $\mathcal{O}\neq 0$, *então sua aplicação transposta*

$${}^t\mathcal{O}\colon\ \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right)\right]'\longrightarrow\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right)\right]'$$

é tal que
(b.1) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right)\right]'\right)$ *é o ortogonal de* $\ker\mathcal{O}$ *em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right)\right]'.$
(b.2) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right)\right]'\right)$ *é fechado para a topologia fraca-$*$ em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right)\right]'$ *definida por* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q))}\left(E\right).$

(c) *Para* $k\in[1,+\infty]$ *e* $A\in(0,+\infty)$, *se* $\mathcal{O}\in\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$ *é de tipo zero e* $\mathcal{O}\neq 0$, *então sua aplicação transposta*

$${}^t\mathcal{O}\colon\ \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right)\right]'\longrightarrow\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right)\right]'$$

é tal que
(c.1) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right)\right]'\right)$ *é o ortogonal de* $\ker\mathcal{O}$ *em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right)\right]'.$
(c.2) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right)\right]'\right)$ *é fechado para a topologia fraca-$*$ em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right)\right]'$ *definida por* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}\left(E\right).$

(d) *Para* $k\in[1,+\infty]$ *e* $B\in(0,+\infty)$, *se* $\mathcal{O}\in\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}$ *é de tipo zero e* $\mathcal{O}\neq 0$, *então sua aplicação transposta*

$${}^t\mathcal{O}\colon\ \left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right)\right]'\longrightarrow\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right)\right]'$$

é tal que
(d.1) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right)\right]'\right)$ *é o ortogonal de* $\ker\mathcal{O}$ *em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right)\right]'.$
(d.2) ${}^t\mathcal{O}\left(\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right)\right]'\right)$ *é fechado para a topologia fraca-$*$ em* $\left[Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right)\right]'$ *definida por* $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),B}\left(E\right).$

Em qualquer um dos casos, o ortogonal de $\ker\mathcal{O}$ *é o conjunto*

$$(\ker\mathcal{O})^{\perp}=\left\{T\in \textit{domínio de }{}^t\mathcal{O};\ T\left(f\right)=0,\ \forall f\in\ker\mathcal{O}\right\}.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar os ítens (a.1), (b.1), (c.1) e (d.1). Em qualquer um desses casos, segue dos Teoremas 4.2.13 e 4.2.23 que existe T no domínio de ${}^t\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O} = T*$. Para cada X na imagem de ${}^t\mathcal{O}$, temos que $X = {}^t\mathcal{O}S$, para algum S no domínio de ${}^t\mathcal{O}$. Assim, $X(f) = ({}^t\mathcal{O}S)(f) = S(\mathcal{O}f) = 0$, para todo $f \in \ker\mathcal{O}$, portanto a imagem de ${}^t\mathcal{O}$ está contida em $(\ker\mathcal{O})^{\perp}$. Por outro lado, seja $X \in (\ker\mathcal{O})^{\perp}$, e vamos provar que $X = S * T$, para algum S no domínio de ${}^t\mathcal{O}$. Temos que $X(f) = 0$, para todo $f \in \ker\mathcal{O}$. Como $\mathcal{O} \neq 0$, temos que $T \neq 0$ e além disso, se $T * P\exp\varphi = 0$, então $\mathcal{O}(P\exp\varphi) = 0$, daí $P\exp\varphi \in \ker\mathcal{O}$ e, portanto, $X(P\exp\varphi) = 0$. Assim, segue dos Teoremas de divisão 5.2.7, 5.2.8 e 5.2.9 que existe $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q'))}(E')$, no caso (a.1), $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0}(E')$, no caso (b.1), $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),(\theta(k)A)^{-1}}(E')$, no caso (c.1), e $H \in Exp^{k'}_{(s',m(r';q')),0,(\theta(k)B)^{-1}}(E')$, no caso (d.1), tal que $FX = H.FT$. Portanto, em cada caso existe S no domínio de ${}^t\mathcal{O}$ tal que $H = FS$ e conseqüentemente $X = S * T$.

Agora, para f no domínio de $\mathcal{O}$ temos $X(f) = (S * T)(f) = S(T * f) = S(\mathcal{O}f) = ({}^t\mathcal{O}S)(f)$. Logo, $X = {}^t\mathcal{O}S$ e isto implica que $(\ker\mathcal{O})^{\perp}$ está contido na imagem de ${}^t\mathcal{O}$.

Vamos provar agora os ítens (a.2), (b.2), (c.2) e (d.2). Em qualquer um dos casos, temos que

$$\begin{aligned}(\ker\mathcal{O})^{\perp} &= \left\{T \in \text{domínio de } {}^t\mathcal{O};\ T(f) = 0,\ \forall f \in \ker\mathcal{O}\right\} = \\ &= \bigcap_{f\in\ker\mathcal{O}} \left\{T \in \text{domínio de } {}^t\mathcal{O};\ T(f) = 0\right\}.\end{aligned}$$

Agora, para cada $f \in \ker\mathcal{O}$, $\left\{T \in \text{domínio de } {}^t\mathcal{O};\ T(f) = 0\right\}$ é fechado no domínio de ${}^t\mathcal{O}$ para a topologia fraca-$*$. De fato, se $(R_i)_{i\in I}$ é uma rede em

$$\left\{T \in \text{domínio de } {}^t\mathcal{O};\ T(f) = 0\right\},$$

convergindo para R para a topologia fraca-$*$, então $R_i(g)$ converge para $R(g)$, para todo g pertencente ao domínio de $\mathcal{O}$. Em particular, $R_i(f)$ converge para $R(f)$ e como $R_i(f) = 0$, para todo $i \in I$, segue que $R(f) = 0$. Logo, $R \in \left\{T \in \text{domínio de } {}^t\mathcal{O};\ T(f) = 0\right\}$ e, com isto, $\left\{T \in \text{domínio de } {}^t\mathcal{O};\ T(f) = 0\right\}$ é fechado para a topologia fraca-$*$. Portanto, $(\ker\mathcal{O})^{\perp}$ é fechado no domínio de ${}^t\mathcal{O}$ para a topologia fraca-$*$. $\square$

6.2 Teorema de Existência

Enunciaremos e provaremos agora o Teorema de existência de soluções para equações de convolução, mas para isto precisaremos de um resultado, o que será enunciado na forma de lema.

Lema 6.2.1. *Se E e F são espaços de Fréchet e $u\colon E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear e contínua, então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) $u(E) = F$;
(b) ${}^t u\colon F' \longrightarrow E'$ *é injetora e* ${}^t u(F')$ *é fechado para a topologia fraca-$*$ de E' definida por E.*

Demonstração. Ver Horváth [6], Corolário 17, pág. 308. □

Teorema 6.2.2. (a) *Para $k \in [1, +\infty]$, se $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$, $\mathcal{O} \neq 0$, então*

$$\mathcal{O}\left(Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right) = Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E).$$

(b) *Para $k \in [1, +\infty]$ e $A \in (0, +\infty)$, se $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$ é de tipo zero e $\mathcal{O} \neq 0$, então*

$$\mathcal{O}\left(Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right) = Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E).$$

Demonstração. Vamos provar os dois ítens simultaneamente. Pelas Proposições 2.1.7, 2.1.14 e 2.1.21, temos que os espaços em questão são espaços de Fréchet. Pelo ítem (b) do Lema 6.2.1 e pelos ítens (a.2) e (c.2) do Teorema 6.1.3, para provar a sobrejetividade de $\mathcal{O}$, basta provar que ${}^t\mathcal{O}$ é injetora. Temos que $\mathcal{O} = T*$, para algum T no domínio de ${}^t\mathcal{O}$, então para todo S no domínio de ${}^t\mathcal{O}$ e f no domínio de $\mathcal{O}$,

$$\left({}^t\mathcal{O}\mathcal{S}\right)(f) = S(\mathcal{O}f) = S(T * f) = (S * T)(f).$$

Logo, ${}^t\mathcal{O}\mathcal{S} = S * T$ e se ${}^t\mathcal{O}\mathcal{S} = 0$, então $S * T = 0$ e $F(S * T) = 0$. Como $\mathcal{O} \neq 0$, segue que $T \neq 0$ e $FT \neq 0$ e como $F(S * T) = FS.FT$, temos que $FS = 0$. Portanto, $S = 0$ e isto implica que ${}^t\mathcal{O}$ é injetora. □

6.3 Considerações Finais

Não foi possível provar um Teorema de existência de solução para equações de convolução em $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$, nem em $Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),A}(E)$, com $A \in (0,+\infty)$, neste último caso para $\mathcal{O}$ um operador de convolução de tipo zero. O motivo é que não sabemos da existência de um resultado como o Lema 6.2.1, para espaços DF. As tentativas de demonstração desse lema para espaços DF "esbarram" na exigência de reflexibilidade do espaço, que no nosso caso não é reflexivo. O máximo que se consegue (até o momento) é um resultado, como o do Lema 6.2.1, para duais de Fréchet reflexivos, sendo assim, no caso em que E tem dimensão finita, o teorema é válido.

Obtendo um resultado desse para espaços DF, o Teorema de existência de solução decorre análogo ao Teorema 6.2.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Dieudonné, L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{LF})$. Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**1** (1949), 61-101.

[2] A. Grothendieck, *Topological Vector Spaces*. Gordon and Breach, New York, 1973.

[3] C. Gupta, *On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space*. Indag. Math. **32** (1970), 356-358.

[4] C. Gupta, *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space*. Séminaire d'Analyse Moderne, 2. Université de Sherbrooke. Sherbrooke, 1969.

[5] S. Hoffman, *Advanced Calculus*. Prentice-Hall, New Jersey, 1970.

[6] J. Hórvath, *Topological Vector Spaces and Distribuitions*. Addison-Wesley, 1966.

[7] B. Malgrange, *Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des equations des convolutions*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**6** (1955/56), 271-355.

[8] A. Martineau, *Équations différentielles d'ordre infini*. Bull. Soc. Math. France **95**(1967), 109-154.

[9] M.C. Matos, *On Malgrange theorem for nuclear holomorphic functions in open balls of a Banach space*. Math. Z. **171** (1980), 171-290.

[10] M.C. Matos, *On the Fourier-Borel transformation and spaces of entire functions in a normed space*, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II (G. I. Zapata, ed.), pp. 139-170. North-Holland Math. Studies, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[11] M.C. Matos, *On convolution operators in spaces of entire functions of a given type and order*, in: Complex Analysis, Functional Analysis and Approximation Theory (J. Mujica, ed.), pp. 129-171. North-Holland Math. Studies **125**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[12] M.C. Matos, *On multilinear mappings of nuclear type*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **6**(1993), 62-81.

[13] M.C. Matos, *Non-linear absolutely summing mappings*. Math. Nachr. **258** (2003), 71-89.

[14] M.C. Matos, *Mappings between Banach spaces that send mixed sequences into absolutely summable sequences*. J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 833-851.

[15] M.C. Matos, *Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations*. IMECC-UNICAMP, 2007. Web: http://www.ime.unicamp.br/~matos

[16] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*. North-Holland Math. Studies **120**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[17] J. Mujica, *Notas de Aulas de Espaços Vetoriais Topológicos*. IMECC-UNICAMP, 2004.

[18] L. Nachbin, *Lectures on the Theory of Distributions*. University of Rochester, 1963. Reproduzida pela Universidade de Recife, Textos de Matemática, n.15, 1964.

[19] L. Nachbin, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*. Springer, New York, 1969.

[20] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, in: Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, pp.185-199, Teubner, 1983.

[21] A.P. Robertson and W.J. Robertson, *Topological Vector Spaces*. Cambridge University Press, 1973.

[22] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*. Springer, New York, 1971.

ÍNDICE REMISSIVO