Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Representações Torcidas de Quivers.

Daniela Moura Prata [1]

Orientador: Prof. Dr. Marcos Jardim

Campinas - SP
Fevereiro, 2008

[1] Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e da FAPESP.

REPRESENTAÇÕES TORCIDAS DE QUIVERS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Daniela Moura Prata e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de Fevereiro de 2008

Marcos Jardim

Prof. Dr:. Marcos Benevenuto Jardim
Orientador

Banca Examinadora:

1 Marcos Benevenuto Jardim
2 Flavio Ulhoa Coelho
3 Plamen Emilov Kochloukov

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

	Prata, Daniela Moura
P887r	Representações torcidas de quivers / Daniela Moura Prata -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.
	Orientador : Marcos Benevenuto Jardim
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Categorias (Matemática). 2. Quivers. 3. Representações de quivers. I. Jardim, Marcos Benevenuto . II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Twisted representations of quivers.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Categories (Mathematics). 2. Quivers.
3. Representations of quivers.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Flavio Ulhoa Coelho (IME-USP)
Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 26/02/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de fevereiro de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Prof. (a). Dr (a). FLAVIO ULHOA COELHO

Prof. (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV *"mas como está escrito: Nem olhos viram, nem ouvidos ouviram, nem jamais penetrou em coração humano o que Deus tem preparado para aqueles que o amam."(1 Co 2:9)*

Agradecimentos

A Deus que, literalmente, me trouxe até aqui com Seus braços de Amor, em asas como de águia.

Agradeço ao meu orientador Prof. Marcos Jardim por sua orientação, paciência e amizade.

À minha família: meu pai Décio, minha avó Romilde, minha irmã Dayana, meu irmão Danilo, minha tia Maria e meu futuro marido Alexandre; que me cercaram de amor e companheirismo.

Em especial à minha mãe, Luzia, pelo seu amor, sua dedicação e seu incentivo.

Às minhas irmãs em Cristo, Lívia, Manuela, Martina, Regina e Valéria, e aos irmãos de Barão Geraldo por sua amizade e pelas orações.

Aos meus amigos do mestrado e do doutorado por sua amizade e ajuda, especialmente minha amiga Maribel, pela amizade, carinho e pelas muitas horas de estudo.

Aos meus amigos e professores da graduação, pela amizade e apoio.

Aos meus professores e à secretaria do IMECC, em especial Tânia.

Agradeço à CAPES e à FAPESP pelo apoio financeiro durante o mestrado e por serem órgãos tão sérios no incentivo ao desenvolvimento do país.

Resumo

Nesta dissertação o principal objetivo é introduzir na categoria de representações torcidas de um quiver Q as definições e resultados já co-nhecidos para categorias de representações de quivers. O conceito de re-presentações torcidas foi introduzido por Gothen e King em [11] para estudar problemas envolvendo fibrados vetoriais sobre variedades algébricas. King também mostrou em [16] que, sobre certas condições, as representações semi-estáveis de um quiver são parametrizadas por uma variedade algébrica projetiva, normal, irredutível. Mostramos que o mesmo vale para representações torcidas de quivers.

Nosso principal resultado, que é original, mostra equivalência entre a categoria de representações $M-$ torcidas de um quiver Q, $Rep_M Q$, e a categoria de representações de um quiver $\tilde{Q}$, $Rep\,\tilde{Q}$, onde $\tilde{Q}$ depende de Q e dos espaços de M. Essa equivalência nos permitiu desenvolver um pouco da teoria já conhecida para $Rep\,\tilde{Q}$ na linguagem de $Rep_M Q$, reescrever resultados clássicos como o Teorema de Gabriel e de Kac para a categoria de representações torcidas e também relacionar $Rep\,Q$ com $Rep_M Q$.

Abstract

The main goal of this thesis is to introduce for the category of twisted representations of a quiver Q the definitions and results one already knows for categories of representations of quivers. The concept of twisted representations was introduced by Gothen and King in [11] to study problems concerning vector bundles over algebraic varieties. King also showed in [16] that under certain conditions, semi-stable representations of a quiver are parametrized by an irreducible, normal projective algebraic variety. We show that we have the same results for twisted representations.

Our main and original result provides an equivalence between the category of twisted representations of a quiver Q, $Rep_M Q$, and the category of representations of a quiver $\tilde{Q}$, $Rep\,\tilde{Q}$, where $\tilde{Q}$ depends on Q and on the twisting factors. With this equivalence we developed the existing theory of representations of quivers for twisted representations, we rewrote classical results like Gabriel's theorem and Kac's theorem for the category of twisted representations and found a relation between $Rep\,Q$ and $Rep_M Q$.

Introdução

Um quiver Q nada mais é do que um grafo orientado. Representações de quivers estão intimamente relacionadas com representações de álgebras associativas. Na verdade é possível mostrar que, se A é uma álgebra associativa de dimensão finita, então a categoria de representações de A é equivalente à categoria de representações de um quiver com relações. Este resultado pode ser encontrado em [6]. Quivers também estão relacionados com álgebras de Kac-Moody, que são álgebras de Lie de dimensão infinita. Dado um quiver, podemos associar uma matriz de Cartan generalizada e dela construir uma álgebra de Kac-Moody e um sistema de raízes. Kac mostrou em [14] que existe uma correspondência $1-1$ entre as representações indecomponíveis do quiver e as raízes positivas do sistema associado à matriz de Cartan.

Em 1994, a partir do conceito geométrico de estabilidade, King definiu em [16] estabilidade para módulos de dimensão finita sobre álgebras associativas de dimensão finita, e construiu espaços de moduli de representações. Ele mostrou que as representações semi-estáveis de um quiver, para um vetor dimensão fixo, são parametrizadas por uma variedade algébrica projetiva, irredutível e normal.

Em 2005, Gothen e King introduziram em [11] o conceito de representação torcida de quivers. Eles estavam interessados em estudar fibrados vetoriais com alguma estrutura adicional, e esses fibrados poderiam ser vistos como representações torcidas de quivers numa categoria adequada. Por exemplo, um fibrado de Higgs sobre uma curva algébrica X pode ser visto como uma representação M-torcida do quiver de Jordan

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "a"] \end{tikzcd}$$

na categoria de fibrados vetoriais, onde M é um fibrado de linha sobre X.

Neste trabalho, estamos interessados em adaptar as definições e resultados já conhecidos sobre a categoria de representações de um quiver para a categoria de representações torcidas de um quiver. Vamos ver que os resultados são praticamente os mesmos, pois mostramos que existe uma equivalência entre essas categorias. A existência dessa equivalência é nosso principal teorema, e dele seguem outros resultados interessantes, como, por exemplo, que a categoria de representações de Q é equivalente a uma subcategoria plena da categoria de representações torcidas de Q. Dividimos essa dissertação em três capítulos que estão organizados da seguinte forma.

No primeiro capítulo estudamos teoria de categorias. Começamos com definições básicas e vemos resultados importantes que serão utilizados em demonstrações dos capítulos posteriores. Definimos também as noções de categoria abeliana e categoria tensorial, pois nosso estudo de representações e representações torcidas de quivers se restringe apenas a esse tipo de categorias, mais precisamente na categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita. Terminamos o capítulo com alguns resultados de álgebra linear que serão úteis na demonstração de nosso teorema principal.

No segundo capítulo estudamos quivers e representações de quivers. Definimos a álgebra de caminhos associada a um quiver e vemos como a categoria de módulos sobre essa álgebra está relacionada com categoria de representações do quiver. Vemos também como montar um sistema de raízes a partir de um quiver e os resultados clássicos como o Teorema de Gabriel, que classifica os quivers de acordo com seu grafo associado, e o Teorema de Kac, que relaciona as raízes com representações indecomponíveis.

Finalmente no terceiro capítulo definimos representações torcidas e demonstramos o teorema principal, nosso resultado original, que estabelece uma equivalência entre a categoria de representações torcidas de um quiver Q com a categoria de representações de outro quiver que é obtido a partir de Q. Vemos que os resultados enunciados no capítulo anterior para representações, como os teoremas de Gabriel e Kac, também valem para representações torcidas. Enunciamos e demonstramos esses resultados nessa nova linguagem, bem como os novos resultados que obtivemos a partir do teorema. Para finalizar, definimos o conceito de estabilidade para representações torcidas e vemos como aplicar nosso teorema para calcular representações torcidas indecomponíveis através de um exemplo.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos necessários para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Categorias

Vamos discutir algumas noções básicas de teoria de categorias. As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [10]. Outras referências são [18, 12, 1].

Definição 1. *Uma* categoria $\mathcal{C}$ *consiste em*

1. *uma classe* $Obj(\mathcal{C})$ *cujos elementos são chamados* objetos *de* $\mathcal{C}$ *;*

2. *uma coleção de conjuntos* $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$*, um para cada par de objetos* $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$*, cujos elementos são chamados* morfismos *e são denotados por* $\varphi : X \to Y$*;*

3. *uma coleção de aplicações*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

para cada tripla de objetos $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$*. Uma aplicação dessa coleção associa o par* $\varphi : X \to Y$*,* $\psi : Y \to Z$ *a um morfismo de* X *a*

Z denotado por $\psi \circ \varphi$ ou $\psi\varphi : X \to Z$, que é chamado composição *ou* produto *de φ e ψ.*

As seguintes condições devem ser satisfeitas

(a) para cada objeto $X \in Obj(\mathcal{C})$ existe um morfismo identidade

$$id_X : X \to X$$

tal que

$$\varphi \circ id_X = \varphi \ \text{ e } \ id_X \circ \psi = \psi$$

se $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$;

(b) a composição de morfismos é associativa , isto é, para $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ e $\xi : Z \to U$ temos

$$(\xi\psi)\varphi = \xi(\psi\varphi).$$

Vamos denotar $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ por $Hom(X,Y)$ quando for claro no contexto a categoria na qual estivermos trabalhando. Também denotaremos por $Mor(\mathcal{C}) = \cup_{X,Y \in Obj(\mathcal{C})} Hom(X,Y)$.

Exemplo 1. *A categoria dos conjuntos denotada por Set é uma categoria cujos objetos são os conjuntos, e dados dois conjuntos $X, Y \in Obj(Set)$, temos que $Hom(X,Y)$ é o conjunto de todos os mapas $\varphi : X \to Y$. O morfismo $id_X : X \to X$ é a identidade, e a composição*

$$Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) \to Hom(X,Z)$$

é dada de maneira usual.

Exemplo 2. *Os grupos formam uma categoria cujos objetos são os grupos e morfismos são os homomorfismos de grupos.*

Exemplo 3. *Espaços vetoriais também formam uma categoria, cujos objetos são os espaços vetoriais e os morfismos são as transformações lineares.*

Definição 2. *Sejam $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e $\varphi : X \to Y$ um morfismo. Dizemos que φ é um* isomorfismo *se existe um morfismo $\psi : Y \to X$ tal que*

$$\psi \circ \varphi = id_X \text{ e } \varphi \circ \psi = id_Y.$$

Nesse caso dizemos que X e Y são isomorfos.

Definição 3. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma* subcategoria *de $\mathcal{D}$ se*

1. *$Obj(\mathcal{C}) \subset Obj(\mathcal{D})$;*
2. *$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \subset Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$;*
3. *a composição de morfismos em $\mathcal{C}$ coincide com a composição de morfismos em $\mathcal{D}$, e se $X \in Obj(\mathcal{C})$, o morfismo $id_X : X \to X$ coincide com o morfismo id_X em $\mathcal{D}$.*

Definição 4. *Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de uma categoria $\mathcal{D}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é* plena *se*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$$

para quaisquer $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$.

Definição 5. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um* funtor covariante *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste em:*

1. *Uma aplicação entre $Obj(\mathcal{C})$ e $Obj(\mathcal{D})$ que associa X a $F(X)$;*
2. *uma aplicação entre $Mor(\mathcal{C})$ e $Mor(\mathcal{D})$ que associa $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a $F(\varphi) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$*

tal que

$$F(id_X) = id_{F(X)}, \ \forall X \in Obj(\mathcal{C}),$$
$$F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi), \ \forall \varphi, \psi \in Mor(\mathcal{C})$$

quando $\varphi\psi$ for bem definido.

De modo análogo, definimos um funtor contravariante *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, exceto que $F(\varphi) \in Hom(F(Y), F(X))$, para $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $F(\varphi\psi) = F(\psi)F(\varphi)$, $\forall\ \varphi, \psi \in Mor(\mathcal{C})$ quando $\varphi\psi$ for bem definida.*

Exemplo 4. *Dada uma subcategoria* $\mathcal{C}$ *e* $X \in Obj(\mathcal{C})$*, o funtor*

$$H_X : \mathcal{C} \to Set$$

definido por

$$H_X(Y) = Hom(X, Y) \quad \text{para } Y \in Obj(\mathcal{C}),$$

$$H_X(f)(\varphi) = f \circ \varphi$$

com $f : Y \to Y'$ *e* $\varphi \in Hom(X, Y)$ *é um funtor covariante.*

Nesse trabalho, quando utilizarmos o termo funtor, queremos dizer funtor covariante.

Definição 6. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *um funtor entre duas categorias.*

1. *Dizemos que* F *é* fiel *se para quaisquer* $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ *temos que*

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

   é injetivo;

2. *dizemos que* F *é* pleno *se para quaisquer* $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ *temos que*

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

   é sobrejetivo.

Definição 7. *Sejam* F, G *funtores entre duas categorias* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$*. Um* morfismo de funtores*,* $f : F \to G$*, é uma família de morfismos em* $\mathcal{D}$

$$f(X) : F(X) \to G(X)$$

uma para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$*, tal que para qualquer morfismo* $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

A composição de morfismos de funtores e o morfismo identidade de funtores são definidos de maneira clara. Temos então que os funtores entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ formam uma categoria, que denotamos por $Funct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Definição 8. *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores entre categorias. Dizemos que F e G são* isomorfos *se dado $\varphi : F \to G$ um morfismo de funtores, existe $\psi : G \to F$ tal que $\psi\varphi = id_F$ e $\varphi\psi = id_G$. Isto é equivalente a dizermos que*

$$\varphi(X) : F(X) \to G(X)$$

é isormorfismo para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$.

Definição 9. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F é* equivalência de categorias *se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que GF é isomorfo ao funtor $id_{\mathcal{C}}$ e FG é isomorfo a $id_{\mathcal{D}}$.*

Nesse caso, dizemos que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes, *e dizemos que o funtor G é* quasi-inverso *a F.*

Teorema 5. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Então F é equivalência de categorias se, e somente se,*

(a) *F é um funtor pleno e fiel;*

(b) *qualquer objeto $Y \in Obj(\mathcal{D})$ é isomorfo a um objeto $F(X)$ para algum $X \in Obj(\mathcal{C})$.*

Quando ocorre a condição (b) dizemos que F é essencialmente sobrejetivo.

Demonstração. Suponhamos que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ seja equivalência de categorias e seja $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ o funtor quasi-inverso. Como GF é isomorfo a $id_{\mathcal{C}}$ e FG é isomorfo a $id_{\mathcal{D}}$, sejam

$$f(X) : GF(X) \longrightarrow X, \;\; X \in Obj(\mathcal{C})$$
$$g(Y) : FG(Y) \longrightarrow Y, \;\; Y \in Obj(\mathcal{D})$$

os isomorfismos de funtores $f : GF \to id_{\mathcal{C}}$ e $g : FG \to id_{\mathcal{D}}$. Se $Y \in Obj(\mathcal{D})$ temos que Y é isomorfo a $F(X)$, onde $X = G(Y) \in Obj(\mathcal{C})$, logo vale (b). Vamos mostrar que F é pleno e fiel.

Seja $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X')$. Temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} GF(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "GF(\varphi)"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ GF(X') \arrow[r, "f(X')"'] & X' \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\varphi \circ f(X) = f(X') \circ GF(\varphi)$, então podemos escrever φ a partir de $F(\varphi)$ da seguinte forma

$$\varphi = f(X') \circ GF(\varphi) \circ f(X)^{-1} \tag{1.1}$$

o que nos mostra que F é fiel. De modo análogo, temos que G também é fiel. Vamos mostrar que F é pleno.

Seja $\psi \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X'))$ e seja

$$\varphi = f(X') \circ G(\psi) \circ f(X)^{-1} \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X').$$

Temos por (1.1) que $\varphi = f(X') \circ GF(\varphi) \circ f(X)^{-1}$ e como $f(X')$ e $f(X)$ são isomorfismos,

$$GF(\varphi) = G(\psi).$$

Como G é fiel, temos que $F(\varphi) = \psi$, logo F é pleno.

Reciprocamente, suponhamos que valem os itens (a) e (b) do teorema. Queremos mostrar que existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ que é quasi-inverso a F.

Seja $Y \in Obj(\mathcal{D})$ e fixemos $X_Y \in Obj(\mathcal{C})$ e o isomorfismo

$$g(Y) : F(X_Y) \to Y. \tag{1.2}$$

Vamos contruir o funtor G.

Seja $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $G(Y) = X_Y$, $\forall\ Y \in Obj(\mathcal{D})$. Se $\psi \in Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y')$, definimos

$$G(\psi) = g(Y')^{-1} \circ \psi \circ g(Y) \in Hom_{\mathcal{D}}(FG(Y), FG(Y'))$$

e por (a) temos que $Hom_{\mathcal{D}}(FG(Y), FG(Y')) = Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y'))$.

Mostremos agora que G é funtor. De fato, se $\psi' \in Hom_{\mathcal{D}}(Y', Z)$, temos

$$\begin{aligned} G(\psi'\psi) &= g(Z)^{-1} \circ (\psi'\psi) \circ g(Y) \\ &= g(Z)^{-1} \circ \psi' \circ (g(Y')g(Y')^{-1}) \circ \psi \circ g(Y) \\ &= (g(Z)^{-1} \circ \psi' \circ g(Y')) \circ (g(Y')^{-1} \circ \psi \circ g(Y)) \\ &= G(\psi') \circ G(\psi). \end{aligned}$$

Claramente

$$g = \{g(Y)\} : FG \longrightarrow id_{\mathcal{D}}$$

é isomorfismo de funtor pois por (1.2) temos que $g(Y)$ é isomorfismo para cada $Y \in Obj(\mathcal{D})$. Temos também que

$$g(F(X)) : FG(F(X)) \longrightarrow F(X)$$

é isomorfismo, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, e por (a),

$$g(F(X)) = F(f(X))$$

para um único isomorfismo

$$f(X) : GF(X) \longrightarrow X.$$

Logo, $f = \{f(X)\} : GF \to id_{\mathcal{C}}$ é isomorfismo de funtores e portanto

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

é equivalência de categorias.

$\square$

Proposição 6. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor pleno e fiel entre as categorias. Então $\mathcal{C}$ é equivalente a uma subcategoria plena de $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Como F é pleno e fiel, considere $\mathcal{D}'$ tal que

1. todos os objetos $\overline{X} \in Obj(\mathcal{D}')$ são da forma $\overline{X} = F(X)$, com $X \in Obj(\mathcal{C})$;
2. todos os morfismos $\overline{\varphi} \in Hom_{\mathcal{D}'}(\overline{X}, \overline{Y})$ são da forma $\overline{\varphi} = F(\varphi)$ com $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Então $\mathcal{D}'$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{D}$. De fato, claramente $\mathcal{D}'$ é uma subcategoria de $\mathcal{D}$, e se $\overline{\varphi} \in Hom_{\mathcal{D}}(\overline{X}, \overline{Y})$ para $\overline{X}, \overline{Y} \in Obj(\mathcal{D}')$ temos que $\overline{X} = F(X), \overline{Y} = F(Y)$ com $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Como F é pleno e fiel, $\overline{\varphi} = F(\varphi)$ com $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, logo $\overline{\varphi} \in Hom_{\mathcal{D}'}(\overline{X}, \overline{Y})$ e portanto $Hom_{\mathcal{D}'}(\overline{X}, \overline{Y}) = Hom_{\mathcal{D}}(\overline{X}, \overline{Y})$, o que nos mostra que $\mathcal{D}'$ é subcategoria plena de $\mathcal{D}$.

Também temos claramente que $\overline{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$, a restrição de F a $\mathcal{D}'$, satisaz o teorema (5), portanto F induz uma equivalência de categorias entre $\mathcal{C}$ e uma subcategoria plena de $\mathcal{D}$. $\square$

Definição 10. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é uma* categoria linear sobre um corpo k*(ou* $k-$linear*) se para todo $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tem estrutura de espaço vetorial sobre k e a composição de morfismos é $k-$linear, isto é,*

$$(f + g)h_1 = fh_1 + gh_1$$

$$h_2(f+g) = h_2 f + h_2 g$$
$$(\lambda f)h_1 = f(\lambda h_1) = \lambda(f h_1)$$
com $\lambda \in k, f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $h_1 \in Hom_{\mathcal{C}}(U,X)$, $h_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$.

Definição 11. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria* $k-$*linear. Dizemos que* $\mathcal{C}$ *é*

1. *do* tipo finito *se possui uma quantidade finita de classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis;*
2. *do* tipo manso *se possui uma quantidade infinita de classes de isomorfismos de objetos indecomponíveis mas as classes podem ser divididas em famílias e cada família está em bijeção com o corpo* k*;*
3. *do* tipo selvagem *se não for do tipo finito nem do tipo manso.*

1.2 Categorias Abelianas

Definição 12. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria,* $X_1, X_2 \in Obj(\mathcal{C})$*. Um objeto* Y *com duas aplicações*

$$i_1 : X_1 \to Y \text{ e } i_2 : X_2 \to Y$$

é dito coproduto *ou* soma direta *de* X_1 *e* X_2*, se vale a seguinte propriedade:*

para cada objeto Z *e quaisquer dois morfismos* $f_1 : X_1 \to Z$ *e* $f_2 : X_2 \to Z$*, existe um único morfismo* $f : Y \to Z$ *tal que*

$$f_1 = f \circ i_1 \text{ e } f_2 = f \circ i_2,$$

isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"] & \\ X_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "f_1"'] & Z & X_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[l, "f_2"] \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Esse coproduto é único a menos de isomorfismo e denotamos por

$$Y = X_1 \oplus X_2.$$

Se em uma categoria, quaisquer dois objetos tem coproduto, dizemos que a categoria tem coprodutos finitos.

Definição 13. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{C}$ é* aditiva *se*

1. *tem coprodutos finitos;*
2. *para quaisquer dois objetos $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tem estrutura de grupo abeliano, e a aplicação composição*

$$\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

é bilinear, isto é,

$$\varphi(f_1 + f_2, g) = \varphi(f_1, g) + \varphi(f_2, g)$$

e

$$\varphi(f, g_1 + g_2) = \varphi(f, g_1) + \varphi(f, g_2),$$

onde $f, f_1, f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g, g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$;

3. *a categoria tem um objeto zero $0 \in Obj(\mathcal{C})$. Esse objeto tem a propriedade que para cada $X \in Obj(\mathcal{C})$, existem únicos morfismos*

$$\varphi : X \to 0 \;\; e \;\; \psi : 0 \to Y,$$

para cada $Y \in Obj(\mathcal{C})$.

Exemplo 7. *A categoria dos grupos abelianos é uma categoria aditiva.*

Definição 14. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\varphi : X \to Y$ um morfismo, com $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Definimos o* núcleo *de φ pelo par (K, k) onde $K \in Obj(\mathcal{C})$, $k : K \to X$ é um morfismo e $\varphi \circ k = 0$ satisfazendo a seguinte propriedade: para qualquer morfismo $j : K_1 \to X$ tal que $\varphi \circ j = 0$, existe um único morfismo $h : K_1 \to K$ tal que $j = k \circ h$. Denotaremos por* $\ker \varphi = (K, k)$.

Definição 15. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\varphi : X \to Y$ um morfismo, com $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Definimos o* conúcleo *de φ pelo par (K', c) onde $K' \in Obj(\mathcal{C})$, $c : Y \to K'$ e $c \circ \varphi = 0$ satisfazendo a seguinte propriedade: para qualquer morfismo $c_1 : Y \to K'_1$ com $c_1 \circ \varphi = 0$, existe um único morfismo $h : K' \to K'_1$ tal que $c_1 = h \circ c$. Vamos denotar o conúcleo de φ por* $\operatorname{coker} \varphi = (K', c)$.

Definição 16. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Dizemos que φ é um* monomorfismo *se*

$$\varphi \circ i_1 = \varphi \circ i_2 \Longrightarrow i_1 = i_2$$

para todo morfismo $i_1 : Z \to X$ e $i_2 : Z \to X$, com $Z \in Obj(\mathcal{C})$.

Dizemos que φ é um epimorfismo *se*

$$p_1 \circ \varphi = p_2 \circ \varphi \Longrightarrow p_1 = p_2$$

para todo morfismo $p_1 : Y \to Z$ e $p_2 : Y \to Z$, com $Z \in Obj(\mathcal{C})$.

Definição 17. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Dizemos que Y é* subobjeto *de X se existe um monomorfismo $\varphi : Y \to X$.*

Definição 18. *Uma categoria $\mathcal{C}$ aditiva é dita* abeliana *se*

1. *Todo morfismo tem núcleo e conúcleo;*
2. *todo monomorfismo é o núcleo de seu conúcleo;*
3. *todo epimorfismo é o conúcleo seu núcleo;*
4. *todo morfismo pode ser expresso como a composição de um epimorfismo e de um monomorfismo.*

Exemplo 8. *A categoria dos módulos sobre um anel R é uma categoria abeliana. Em particular, se R é um corpo, temos que a categoria dos espaços vetoriais é abeliana.*

Definição 19. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $X \in Obj(\mathcal{C})$. Dizemos que X é* decomponível *se existem objetos $X_1, X_2 \in Obj(\mathcal{C})$ e aplicações*

$$i_1 : X_1 \to X \text{ e } i_2 : X_2 \to X$$

tais que X é a soma direta de X_1 e X_2.

O objeto X é dito indecomponível *se não for decomponível.*

Definição 20. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $X \in Obj(\mathcal{C})$. Dizemos que X é* simples *se seus únicos subobjetos são 0 e X. Temos então que todo objeto simples é indecomponível.*

Proposição 9. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ equivalência de categorias abelianas. Então F preserva soma direta, isto é, se $X, X_1, X_2 \in Obj(\mathcal{C})$ com $X = X_1 \oplus X_2$ então $F(X) = F(X_1) \oplus F(X_2)$.*

Demonstração. Sejam $X, X_1, X_2 \in Obj(\mathcal{C})$ e suponhamos que $X = X_1 \oplus X_2$. Então existem morfismos $i_1 : X_1 \to X$ e $i_2 : X_2 \to X$ tais que vale a propriedade (1.3). Vamos mostrar que $F(X) = F(X_1) \oplus F(X_2)$.

Considere os morfismos

$$\bar{i}_1 := F(i_1) : F(X_1) \to F(X)$$

e

$$\bar{i}_2 := F(i_2) : F(X_2) \to F(X).$$

Sejam $\overline{Y} \in Obj(\mathcal{D})$ e $\varphi_1 : F(X_1) \to \overline{Y}$, $\varphi_2 : F(X_2) \to \overline{Y}$ morfismos quaisquer. Como $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{D}$ sabemos que existem $Y \in Obj(\mathcal{C})$ e $\varphi : \overline{Y} \to F(Y)$ isomorfismo.

Sejam

$$\overline{f}_1 := \varphi \circ \varphi_1 : F(X_1) \to F(Y)$$

e

$$\overline{f}_2 := \varphi \circ \varphi : F(X_2) \to F(y).$$

Existem $f_1 \in Hom(X_1, Y)$ e $f_2 \in Hom(X_2, Y)$ tais que $F(f_1) = \overline{f}_1$ e $F(f_2) = \overline{f}_2$, e como $X = X_1 \oplus X_2$ existe um único morfismo $f : X \to Y$ tal que

$$f \circ i_1 = f_1 \text{ e } f \circ i_2 = f_2$$

isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"'] & \\ X_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "f_1"'] & Y & X_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[l, "f_2"] \end{tikzcd}$$

logo, como F é funtor,

$$F(f)F(i_1) = F(f_1) \text{ e } F(f)F(i_2) = F(f_2),$$

isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[d, "F(f)"'] & \\ F(X_1) \arrow[ur, "\bar{i}_1"] \arrow[r, "\overline{f}_1"'] & F(Y) & F(X_2) \arrow[ul, "\bar{i}_2"'] \arrow[l, "\overline{f}_2"] \end{tikzcd}$$

comuta. Seja $g = \varphi^{-1} \circ F(f) : F(X) \to \overline{Y}$, onde φ^{-1} é o morfismo inverso de φ. Então o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[d, "g"'] & \\ F(X_1) \arrow[ur, "\bar{i}_1"] \arrow[r, "\varphi_1"'] & \overline{Y} & F(X_2) \arrow[ul, "\bar{i}_2"'] \arrow[l, "\varphi_2"] \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

De fato,

$$\begin{aligned} g\bar{i}_1 &= (\varphi^{-1}F(f))F(i_1) = \varphi^{-1}(F(f)F(i_1)) \\ &= \varphi^{-1}F(f_1) = \varphi^{-1}\overline{f}_1 = \varphi^{-1}(\varphi\varphi_1) = \varphi_1 \end{aligned}$$

e analogamente,

$$g\bar{i}_2 = \varphi_2.$$

Como f é único, $F(f)$ é único e portanto g é o único morfismo tal que o diagrama (1.4) comuta, portanto $F(X)$ é soma direta de $F(X_1)$ e $F(X_2)$ e F preserva somas diretas.

$\square$

Corolário 10. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ equivalência de categorias abelianas. Então $X \in Obj(\mathcal{C})$ é indecomponível se, e somente se, $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ é indecomponível.*

Demonstração. Suponhamos que $X \in Obj(\mathcal{C})$ seja indecomponível e seja $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ o funtor quasi-inverso de F. Se $F(X) = Y_1 \oplus Y_2$ então $GF(X) = G(Y_1) \oplus G(Y_2)$ e como X é isomorfo a $GF(X)$ teríamos que X é indecomponível, contradição.

Reciprocamente, suponhamos que $F(X)$ é indecomponível. Segue da proposição anterior que X é indecomponível. $\square$

1.3 Categorias Tensorias

As definições desta seção podem ser encontradas em [15].

Definição 21. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita* tensorial *(ou* monoidal*) se existe*

1. *um funtor*

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

   chamado produto tensorial*;*

2. *um objeto $I \in Obj(\mathcal{C})$ chamado* unidade*;*

3. *três isomorfismos naturais*

(a) associatividade*:*

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$;

(b) identidade à esquerda*:*

$$\lambda_X : I \otimes X \to X, \text{ para todo } X \in Obj(\mathcal{C});$$

(c) identidade à direita*:*

$$\rho_X : X \otimes I \to X, \text{ para todo } X \in Obj(\mathcal{C}).$$

Esses isomorfismos mostram que o produto tensorial é associativo e possui I como identidade à direita e à esquerda. Eles devem satisfazer as seguintes condições (chamadas condições de coerência)

(i) para quaisquer $X, Y, Z, U \in Obj(\mathcal{C})$ o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes U \arrow[r, "\alpha_{X,Y,Z} \otimes id_U"] \arrow[d, "\alpha_{X\otimes Y,Z,U}"'] & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes U \arrow[r, "\alpha_{X,Y\otimes Z,U}"] & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes U) \arrow[d, "id_X \otimes \alpha_{Y,Z,U}"] \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes U) \arrow[rr, "\alpha_{X,Y,Z\otimes U}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes U))
\end{tikzcd}$$

(ii) Para todo $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "\rho_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes \lambda_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 11. *Seja R um anel comutativo. A categoria dos módulos à esquerda sobre R, $R - Mod$, é uma categoria tensorial com produto $\otimes$ e identidade R. Temos também que a categoria dos espaços vetoriais é tensorial, pois é caso particular quando R é corpo.*

1.4 Alguns resultados de álgebra linear

Nos próximos capítulos vamos utilizar alguns resultados de álgebra linear que enunciaremos aqui. Como referência temos [17, 2].

Sejam k um corpo, V, W, M espaços vetoriais de dimensão finita sobre k e $L(V, W)$ o espaço das transformações lineares entre V e W.

Lema 12. *Existe um isomorfismo canônico entre $L(V, W)$ e $V^* \otimes W$.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V^* \times W &\rightarrow L(V, W) \\ (f, w) &\mapsto \Phi(f, w), \end{aligned}$$

onde $\Phi(f, w)(v) = f(v)w$, com $f \in V^*, w \in W$ e $v \in V$. Temos que

1. Φ é bilinear.

   De fato, sejam $f, g \in V^*$, $w, w' \in W$, $v \in V$ e $\lambda \in k$. Então

   $$(\lambda f + g)(v)w = ((\lambda f)(v) + g(v))w = \lambda f(v)w + g(v)w$$

   logo, $\Phi(\lambda f + g, w) = \lambda\Phi(f, w) + \Phi(g, w)$. Também temos que

   $$f(v)(\lambda w + w') = f(v)(\lambda w) + f(v)w' = \lambda f(v)w + f(v)w'$$

   logo $\Phi(f, \lambda w + w') = \lambda\Phi(f, w) + \Phi(f, w')$.

2. Para cada $f \in V^*$ e $w \in W$, temos que $\Phi(f, w) \in L(V, W)$.

   De fato, sejam $v, v' \in V$ e $\lambda \in k$. Então claramente

   $$f(\lambda v + v')w = \lambda f(v)w + f(v')w.$$

Pela propriedade universal do produto tensorial, temos que à Φ corresponde uma aplicação $\Psi : V^* \otimes W \to L(V, W)$, dada por

$$\Psi(f \otimes w)(v) = f(v)w, \ f \in V^*, w \in W, v \in V.$$

Vamos mostrar que Ψ é um isomorfismo.

Sabemos que $\dim(V^* \otimes W) = \dim(L(V, W))$. Suponhamos que $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e sejam $\{f_1, \ldots, f_n\}$ base de V e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W. Existe uma base $\{f^1, \ldots, f^n\}$ de V^* tal que $f^i(f_j) = \delta_{ij}$, e $\{f^i \otimes w_j\}$ é base de $V^* \otimes W$ com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Note que se $v \in V$, então $f^j(v)$ é a projeção da $j-$ésima coordenada de v na base $\{f_i\}$. Observe também que para cada $1 \leq i \leq k \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ temos

$$\Psi(f^i \otimes w_j)(f_k) = f^i(f_k)w_j = \delta_{ik}w_j$$

logo a matriz $m \times n$ de $\Psi(f^i \otimes w_j)$ possui 1 na posição (ji) e 0 nas demais. Então Ψ leva base de $V^* \otimes W$ em base de $L(V, W)$ e portanto é um isomorfismo como queríamos mostrar.

$\square$

Lema 13. *Existe um isomorfismo canônico entre $L(V, W \otimes M)$ e $L(V, W) \otimes M$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, sabemos que $L(V, W \otimes M) \simeq V^* \otimes (W \otimes M)$. Pelas propriedades de produto tensorial e usando novamente o lema anterior temos que

$$L(V, W \otimes M) \simeq V^* \otimes (W \otimes M) \simeq (V^* \otimes W) \otimes M \simeq L(V, W) \otimes M$$

de onde segue o resultado. $\square$

Lema 14. *Existe um isomorfismo canônico entre $L(M \otimes V, W)$ e $M^* \otimes L(V, W)$.*

Demonstração. De fato, temos os seguintes isomorfismos canônicos

$$L(M \otimes V, W) \simeq (M \otimes V)^* \otimes W \simeq (M^* \otimes V^*) \otimes W \simeq$$

$$M^* \otimes (V^* \otimes W) \simeq M^* \otimes L(V, W).$$

$\square$

Lema 15. *Existe um isomorfismo canônico entre* $L(M^* \otimes V, W)$ *e* $L(V, W \otimes M)$.

Demonstração. Segue dos dois lemas anteriores. $\square$

Capítulo 2

Quivers e Representações

Neste capítulo temos como referência [3, 4, 19, 21].

2.1 Quivers

Definição 22. *Um* quiver Q *é um par* $Q = (Q_0, Q_1)$ *de conjuntos onde*

- Q_0 *é o conjunto de* vértices*;*
- Q_1 *é o conjunto de* flechas *entre os vértices;*

e temos os mapas início t *e* término h

$$t, h : Q_1 \to Q_0.$$

Para $a \in Q_1$*, temos que* $t(a)$ *é o vértice inicial de* a *e* $h(a)$ *é o vértice final.*

Nesse trabalho vamos considerar apenas quivers finitos, isto é, Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos.

Exemplo 16. *Considere o seguinte quiver*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "a"] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Ele possui apenas um vértice e uma flecha e é chamado quiver de Jordan.

Exemplo 17. *Temos também outros exemplos*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, shift left, "c"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 3 \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & 2 \arrow[d, "c"] \arrow[dr, "d"] & \\ & 3 \arrow[r, "e"'] & 4 \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "a"] \\ 2 \arrow[ur, "b"] & 3 \arrow[l, "c"'] \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Definição 23. *Um* caminho *em Q é uma seqüência*

$$p = a_1 a_2 \cdots a_n$$

tal que $h(a_{i+1}) = t(a_i)$, $i = 1, \cdots, n-1$.

$$\xrightarrow{a_n} \xrightarrow{a_{n-1}} \cdots \xrightarrow{a_2} \xrightarrow{a_1}$$

Dizemos que o caminho começa em $t(a_n)$ e termina em $h(a_1)$.

Para cada vértice $i \in Q_0$, denotamos por e_i o caminho trivial*, que começa e termina em i. Dizemos que n é o* comprimento *do caminho e denotamos por $\mid p \mid$. Os caminhos triviais tem comprimento zero, isto é $\mid e_i \mid = 0$.*

Por exemplo, os quivers (2.2) e (2.3) no exemplo acima têm os seguintes caminhos respectivamente

$$\{e_1, e_2, e_3, a, b, c, ba, ca\}$$

e

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, a, b, c, d, e, da, eb, ec, ca, eca\}.$$

Definição 24. *Seja Q um quiver. Dizemos que Q possui um* laço *se tem uma flecha $a \in Q_1$ tal que $t(a) = h(a)$.*

Exemplo 18. *O quiver de Jordan*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "a"] \end{tikzcd}$$

possui um laço.

Definição 25. *Seja Q um quiver e p um caminho não trivial com $\mid p \mid \geq 1$. Dizemos que p é um* ciclo orientado *se $h(p) = t(p)$. Em particular um laço é um ciclo orientado.*

Exemplo 19. *O caminho $p = cab$ do exemplo (2.4) é um ciclo orientado.*

Definição 26. *Seja k um corpo. A* álgebra de caminhos *kQ associada ao quiver Q é o $k-$espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos em Q, com o produto dado por concatenação, isto é, se $p = a_1 a_2 \cdots a_n$ e $q = b_1 b_2 \cdots b_m$ são caminhos, temos*

$$pq = \begin{cases} a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m & se \;\; t(p) = h(q) \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}.$$

Também temos

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i & se \;\; i = j \\ 0 & se \;\; i \neq j \end{cases},$$

$$e_i p = \begin{cases} p & se \;\; h(p) = i \\ 0 & se \;\; h(p) \neq i \end{cases},$$

$$pe_i = \begin{cases} p & se \;\; t(p) = i \\ 0 & se \;\; t(p) \neq i \end{cases}.$$

A álgebra de caminhos tem unidade dada por $\sum_{i \in Q_0} e_i$.

Podemos ver no exemplo (2.1) que a álgebra de caminhos é o $k-$espaço vetorial com base em $\{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, assim $kQ \simeq k[t]$ e portanto é uma álgebra de dimensão infinita.

Já no exemplo (2.2), a álgebra de caminhos é o $k-$espaço com base no conjunto

$$\{e_1, e_2, e_3, a, b, c, ba, ca\},$$

logo é uma álgebra de dimensão finita. Com relação à dimensão da álgebra de caminhos, temos o seguinte lema.

Lema 20. *Seja Q um quiver. A álgebra de caminhos kQ tem dimensão infinita se, e somente se, Q possui um ciclo orientado.*

Demonstração. Suponhamos que Q não possua nenhum ciclo orientado. Então para todo $p \in kQ$, temos $t(p) \neq h(p)$. Como o número de flechas de Q é finito e para todo caminho $p \in kQ$, $t(p) \neq h(p)$, temos que o número de geradores de kQ é finito, logo $\dim kQ < \infty$, contradição, portanto Q possui um ciclo orientado.

Reciprocamente, se Q possui um ciclo orientado p, então $\{p, p^2, p^3, \ldots\}$ gera uma subálgebra de dimensão infinita de kQ, portanto $\dim kQ = \infty$.

$\square$

Definição 27. *Uma* relação *R em Q é uma soma de caminhos $p_i \in kQ$, que começam e terminam nos mesmos vértices, isto é,*

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i, \;\; com\, t(p_i) = t(p_j) \;\, e\, h(p_i) = h(p_j), \;\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Definição 28. *Sejam $R_j = \sum_{i=1}^{n_j} p_i^j$ relações, com $j = 1, \ldots, m$, onde $p_i^j \in kQ$ são caminhos com*

$$t(p_i^j) = t(p_l^j) \;\, e\, h(p_i^j) = h(p_l^j),$$

para todo $i, l = 1, \ldots, n_j$ *e* $j = 1, \ldots, m$. *Definimos a* álgebra de caminhos do quiver com relações kQ/I, *pelo quociente da álgebra de caminhos* kQ *pelo ideal* I, *onde* I *é o ideal gerado por* R_j, $j = 1, \ldots, m$.

Por exemplo, considere o quiver Q abaixo.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & 2 \arrow[d, "b"] \\ 3 \arrow[r, "d"'] & 4 \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Podemos impor a relação $ba + dc$.

A álgebra de caminhos kQ é o $k-$espaço vetorial gerado por

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, a, b, c, d, ba, dc\}.$$

Seja $I =< ba + dc >$. Então a álgebra de caminhos do quiver com relações é o quociente kQ/I.

2.2 Representações de quivers

Definição 29. *Sejam* Q *um quiver e* $\mathcal{C}$ *uma categoria. Uma* representação *de* Q *em* $\mathcal{C}$ *consiste em*

- *uma coleção* $\{V_i \mid i \in Q_0\}$, *com* $V_i \in Obj(\mathcal{C})$;
- *uma coleção*

$$\{\phi_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)} \mid a \in Q_1\}$$

onde $\phi_a \in Hom_{\mathcal{C}}(V_{t(a)}, V_{h(a)})$.

Nesta dissertação estaremos interessados apenas no caso em que $\mathcal{C}$ é abeliana.

Definição 30. *Sejam V e W duas representações de Q. Um* morfismo

$$f : V \to W$$

é uma coleção de morfismos $f_i \in Hom_{\mathcal{C}}(V_i, W_i)$, $i \in Q_0$, tal que para cada flecha $a \in Q_1$, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$\psi_a \circ f_{t(a)} = f_{h(a)} \circ \phi_a, \forall a \in Q_0.$$

Sejam $(V, \phi), (W, \psi)$ e (U, η) representações de um quiver Q numa categoria $\mathcal{C}$. Sejam $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ e $g : (W, \psi) \to (U, \eta)$ morfismos entre as representações. Definimos a composição gf pela coleção

$$\{(gf)_i : V_i \to U_i \mid i \in Q_0\}, \text{ onde } (gf)_i = g_i \circ f_i.$$

Temos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d, "g_{t(a)}"'] & W_{h(a)} \arrow[d, "g_{h(a)}"] \\
U_{t(a)} \arrow[r, "\eta_a"] & U_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

dessa forma, obtemos a categoria das representações de Q em $\mathcal{C}$, $Rep(Q, \mathcal{C})$, cujos objetos são representações de quivers e os morfismos entre os objetos são os morfismos entre representações.

De fato, para mostrarmos que $Rep(Q, \mathcal{C})$ é uma categoria, precisamos verificar que a composição é associativa e que existe um morfismo identidade que satisfaz uma condição já enunciada na definição de categorias.

Temos que dada uma representação (V, ϕ) o morfismo identidade é a coleção

$$id_V = \{id_{V_i} \mid i \in Q_0\},$$

onde $id_{V_i} : V_i \to V_i$ é o morfismo identidade em $\mathcal{C}$. Claramente o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "id_{V_{t(a)}}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "id_{V_{h(a)}}"] \\ V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"'] & V_{h(a)} \end{tikzcd}$$

e se $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$, $f' : (W, \psi) \to (V, \phi)$, $g : (W, \psi) \to (U, \eta)$ e $h : (U, \eta) \to (Z, \xi)$ são morfismos de representações, então

1. $f \circ id_V = f$ e $id_V \circ f' = f'$;
2. $(hg)f = h(gf)$, pois

$$(h_i g_i) f_i = h_i(g_i f_i), \forall i \in Q_0.$$

Logo $Rep(Q, \mathcal{C})$ é uma categoria.

Considere um conjunto de relações $R = \{R_1, \ldots, R_m\}$ em Q onde

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_j^i,$$

com $p_j^i = a_{j1}^i \ldots a_{jl_j}^i$ e seja (V, ϕ) uma representação de Q numa categoria aditiva $\mathcal{C}$. Seja

$$\phi_{p_j^i} = \phi_{a_{j1}^i} \circ \phi_{a_{j2}^i} \circ \ldots \circ \phi_{a_{jl_j}^i}.$$

Se (V, ϕ) satisfaz as relações de R então temos $\sum_{j=1}^{n_i} \phi_{p_j^i} = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$.

Por exemplo, considere o quiver (2.5) com a relação $ba+cd$. Se (V, ϕ) é uma representação de Q como no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_3"'] & V_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ V_3 \arrow[r, "\phi_4"'] & V_4 \end{tikzcd}$$

então (V, ϕ) satisfaz a relação se $\phi_2\phi_1 + \phi_4\phi_3 = 0$.

Podemos definir a categoria de representações do quiver com relações $Rep((Q, R), \mathcal{C})$, considerando as representações de Q que satisfazem as relações de R. É natural esperar que tanto $Rep(Q, \mathcal{C})$ quanto $Rep((Q, R), \mathcal{C})$ herdem algumas das estruturas da categoria original $\mathcal{C}$. Na proposição abaixo veremos que para $Rep(Q, \mathcal{C})$ de fato isso ocorre. Vamos trabalhar apenas com quivers sem relações.

Lema 21. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Todo morfismo f em $\mathcal{C}$ pode ser expresso como $f = hg$, onde h é um monomorfismo e g um epimorfismo. Dada outra decomposição $f' = h'g'$ com h' monomorfismo e g' epimorfismo e um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f'"] \\ \bullet \arrow[r, "n"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

existe um único morfismo k tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g"'] & \bullet \arrow[d, "g'"] \\ \bullet \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & \bullet \arrow[d, "h'"] \\ \bullet \arrow[r, "n"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

isto é, $kg = g'm$ e $nh = h'k$.

Demonstração. Ver ([18]) página 195. $\square$

Proposição 22. *A categoria das representações de Q numa categoria aditiva/abeliana $\mathcal{C}$ é uma categoria aditiva/abeliana.*

Demonstração. Mostremos primeiro que $\mathcal{R} = Rep(Q, \mathcal{C})$ é uma categoria aditiva se $\mathcal{C}$ for aditiva.

(*i*) $Rep(Q, \mathcal{C})$ possui um objeto zero.

De fato, como a categoria $\mathcal{C}$ é aditiva, seja $0 \in Obj(\mathcal{C})$ o objeto zero de $\mathcal{C}$ e considere $X = (V, \phi)$ onde $V_i = 0$, para todo $i \in Q_0$ e $\phi_a = 0 \in Hom_{\mathcal{C}}(0, 0)$, para todo $a \in Q_1$. É fácil verificar que X é o objeto zero de $Rep(Q, \mathcal{C})$.

(*ii*) Se $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{R})$ então $Hom_{\mathcal{R}}(X, Y)$ é um grupo abeliano e

$$Hom_{\mathcal{R}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{R}}(Y, Z) \rightarrow Hom_{\mathcal{R}}(X, Z)$$

é bilinear.

Sejam $X = (V, \phi)$, $Y = (W, \psi)$ e $Z = (U, \eta)$ objetos de $Rep(Q, \mathcal{C})$. Como $Hom_{\mathcal{C}}(V_i, W_i)$ é grupo abeliano, para todo $i \in Q_0$, temos que $Hom_{\mathcal{R}}(X, Y)$ é grupo abeliano.

Também segue que $Hom_{\mathcal{R}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{R}}(Y, Z) \rightarrow Hom_{\mathcal{R}}(X, Z)$ é bilinear pois para cada $i \in Q_0$ temos que

$$Hom_{\mathcal{C}}(V_i, W_i) \times Hom_{\mathcal{C}}(W_i, U_i) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(V_i, U_i)$$

é bilinear.

(*iii*) $Rep(Q, \mathcal{C})$ possui coprodutos.

Sejam (V, ϕ) e (W, ψ) objetos de $Rep(Q, \mathcal{C})$. Como $\mathcal{C}$ é aditiva, temos que $U_i = V_i \oplus W_i$, para todo $i \in Q_0$, é objeto de $\mathcal{C}$ com as aplicações $l_i : V_i \rightarrow U_i$ e $h_i : W_i \rightarrow U_i$.

Queremos definir a soma direta de (V, ϕ) e (W, ψ). Para cada $i \in Q_0$, seja $U_i = V_i \oplus W_i$ e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "l_{t(a)}"'] \arrow[dr, dashed, "c_a"] & V_{h(a)} \arrow[d, "l_{h(a)}"] \\
U_{t(a)} \arrow[r, dashed] & U_{h(a)} \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] \arrow[u, "h_{t(a)}"] \arrow[ur, dashed, "d_a"'] & W_{h(a)} \arrow[u, "h_{h(a)}"']
\end{tikzcd}$$

onde $c_a = l_{h(a)} \circ \phi_a$ e $d_a = h_{h(a)} \circ \psi_a$.

Pela propriedade (1.3) de coprodutos, temos que existe um único morfismo

$$\eta_a : U_{t(a)} \to U_{h(a)}$$

tal que $c_a = \eta_a l_{t(a)}$ e $d_a = \eta_a h_{t(a)}$. Logo,

$$l_{h(a)}\phi_a = \eta_a l_{t(a)} \text{ e } h_{h(a)}\psi_a = \eta_a h_{t(a)}.$$

Considere (U, η) a representação com $U_i = V_i \oplus W_i$, para cada $i \in Q_0$, e $\eta_a : U_{t(a)} \to U_{h(a)}$, $a \in Q_1$, dado como acima. Então (U, η) é a soma direta de (V, ϕ) e (W, ψ), com os morfismos

$$L = \{l_i\}_{i \in Q_0} : (V, \phi) \to (U, \eta) \text{ e } H = \{h_i\}_{i \in Q_0} : (W, \psi) \to (U, \eta).$$

De fato, sejam $(Z, \lambda) \in Rep(Q, \mathcal{C})$, $f^1 : (V, \phi) \to (Z, \lambda)$ e $f^2 : (W, \psi) \to (Z, \lambda)$ morfismos. Como $U_i = V_i \oplus W_i$, $i \in Q_0$, existem únicos morfismos $f_i : U_i \to Z_i$ tais que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
& U_i \arrow[d, "f_i"] & \\
V_i \arrow[ur, "l_i"] \arrow[r, "f_i^1"'] & Z_i & W_i \arrow[ul, "h_i"'] \arrow[l, "f_i^2"]
\end{tikzcd}$$

logo,

$$f = \{f_i\}_{i \in Q_0} : (U, \eta) \to (Z, \lambda)$$

é o único morfismo tal que

$$\begin{tikzcd}
 & (U,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
(V,\phi) \arrow[ur, "L"] \arrow[r, "f^1"'] & (Z,\lambda) & (W,\psi) \arrow[ul, "H"'] \arrow[l, "f^2"]
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

comuta, isto é, $f \circ L = f^1$ e $f \circ H = f^2$.

De fato, temos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "l_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "l_{h(a)}"] \\
U_{t(a)} \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & U_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
Z_{t(a)} \arrow[r, "\lambda_a"'] & Z_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

pois como $f_{t(a)}l_{t(a)} = f^1_{t(a)}$ e $f_{h(a)}l_{h(a)} = f^1_{h(a)}$ temos

$$\lambda_a(f_{t(a)}l_{t(a)}) = \lambda_a f^1_{t(a)} = f^1_{h(a)}\phi_a = (f_{h(a)}l_{h(a)})\phi_a$$

assim $f \circ L = f^1$ e de modo análogo, $f \circ H = f^2$.

Se $g = \{g_i\}_{i \in Q_0} : (U,\eta) \to (Z,\lambda)$ é morfismo que faz o diagrama (2.6) comutar, então para cada $i \in Q_0$, o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd}
 & U_i \arrow[d, "g_i"] & \\
V_i \arrow[ur, "l_i"] \arrow[r, "f^1_i"'] & Z_i & W_i \arrow[ul, "h_i"'] \arrow[l, "f^2_i"]
\end{tikzcd}$$

isto é, $g_il_i = f^1_i$ e $g_ih_i = f^2_i$. Como $f_i : U_i \to Z_i$ é único, temos que $f_i = g_i$ para cada $i \in Q_0$, então f é único e portanto (U,η) é a soma direta de (V,ϕ) e (W,ψ), e $Rep(Q,\mathcal{C})$ possui coprodutos.

Pelos itens $(i),(ii)$ e (iii) acima, temos que $Rep(Q,\mathcal{C})$ é uma categoria aditiva. Suponhamos agora que $\mathcal{C}$ é abeliana. Para mostrarmos que $Rep(Q,\mathcal{C})$ é abeliana, temos de verificar mais quatro condições.

1. Todo morfismo possui núcleo e conúcleo.

   Seja $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ um morfismo. Queremos definir $\ker f$. Como para cada $i \in Q_0$, $f_i : V_i \to W_i$ é morfismo em $\mathcal{C}$, que é uma categoria abeliana, temos que f_i possui núcleo (V'_i, μ_i)

$$\mu_i : V'_i \to V_i, \text{ com } f_i\mu_i = 0, \forall i \in Q_0.$$

   Para cada $a \in Q_1$, como $\phi_a\mu_{t(a)} : V'_{t(a)} \to V_{h(a)}$ é morfismo tal que $f_{h(a)}(\phi_a\mu_{t(a)}) = 0$ pois $\psi_a f_{t(a)} = f_{h(a)}\phi_a$, existe um único $\phi'_a : V'_{t(a)} \to V'_{h(a)}$ tal que $\phi_a\mu_{t(a)} = \mu_{h(a)}\phi'_a$.

   Tomando

$$\mu = \{\mu_i\}_{i\in Q_0} : (V', \phi') \to (V, \phi),$$

   onde $V' = \{V'_i\}_{i\in Q_0}$ e $\phi' = \{\phi'_a\}_{a\in Q_1}$, temos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
V'_{t(a)} \arrow[r, "\phi'_a"] \arrow[d, "\mu_{t(a)}"'] & V'_{h(a)} \arrow[d, "\mu_{h(a)}"] \\
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

   logo, $f \circ \mu = 0$. Mostremos que $\ker f = ((V', \phi'), \mu)$ é de fato o núcleo de f.

   Seja $g : (M, \varepsilon) \to (V, \phi)$ morfismo tal que $f \circ g = 0$. Como $f_i g_i = 0$ para todo $i \in Q_0$, $g_i : M_i \to V_i$, existem únicos $h_i : M_i \to V'_i$ tais que $g_i = \mu_i \circ h_i$, para cada $i \in Q_0$. Logo existe um único $h = \{h_i\}_{i\in Q_0} : (M, \varepsilon) \to (V', \phi')$ tal que $\mu \circ h = g$, e portanto f possui núcleo.

   De maneira análoga, é fácil ver que f possui conúcleo.

2. Todo monomorfismo é núcleo de seu conúcleo.

   Seja $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ um monomorfismo. Então $f_i : V_i \to W_i$ é monomorfismo para cada $i \in Q_0$, e como $\mathcal{C}$ é abeliana, se $(W'_i, c_i) = \operatorname{coker} f_i$ temos que $(V_i, f_i) = \ker c_i$, $\forall i \in Q_0$. Como $c_{h(a)}\psi_a : W_{t(a)} \to$

$W'_{h(a)}$ é tal que $(c_{h(a)}\psi_a)f_{t(a)} = 0$ pois $\psi_a f_{t(a)} = f_{h(a)}\phi_a$, para cada $a \in Q_1$, existe único $\psi'_a : W'_{t(a)} \to W'_{h(a)}$ com $c_{h(a)}\psi_a = c_{t(a)}\psi'_a$

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d, "c_{t(a)}"'] & W_{h(a)} \arrow[d, "c_{h(a)}"] \\
W'_{t(a)} \arrow[r, "\psi'_a"'] & W'_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

e portanto $((W', \psi'), c) = \operatorname{coker} f$. Temos que $(V_i, f_i) = \ker c_i$ e daí segue que $((V, \phi), f) = \ker c$, portanto f é o núcleo de seu conúcleo.

3. Todo epimorfismo é o conúcleo de seu núcleo.

   Seja $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ um epimorfismo. Então temos que $f_i : V_i \to W_i$ é epimorfismo para cada $i \in Q_0$. Como $\mathcal{C}$ é abeliana, seja $(V'_i, k_i) = \ker f_i$. Então $f_i k_i = 0, \forall i \in Q_0$. Temos que $\phi_a k_{t(a)} : V'_{t(a)} \to V_{h(a)}$ é tal que $f_{h(a)}(\phi_a k_{t(a)}) = 0$ pois $\psi_a f_{t(a)} = f_{h(a)}\phi_a$, logo existem únicos $\phi'_a : V'_{t(a)} \to V'_{h(a)}$, $a \in Q_1$, tais que $\phi_a k_{t(a)} = k_{h(a)}\phi'_a$ e assim $((V', \phi'), k) = \ker f$.

$$\begin{tikzcd}
V'_{t(a)} \arrow[r, "\phi'_a"] \arrow[d, "k_{t(a)}"'] & V'_{h(a)} \arrow[d, "k_{h(a)}"] \\
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

   Temos também que $(W_i, f_i) = \operatorname{coker} k_i$ pois $\mathcal{C}$ é abeliana e f_i é epimorfismo, portanto $((W, \psi), f) = \operatorname{coker} k$, o que mostra que um epimorfismo é conúcleo de seu núcleo.

4. Todo morfismo se escreve como a composição de um epimorfismo com um monomorfismo.

Seja $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ um morfismo. Como $\mathcal{C}$ é abeliana, sabemos que para cada $i \in Q_0$, $f_i : V_i \to W_i$ pode ser escrito da forma $f_i = h_i g_i$, onde $g_i : V_i \to W'_i$ é epimorfismo e $h_i : W'_i \to W_i$ é monomorfismo, com $W'_i \in Obj(\mathcal{C})$. Como

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

comuta, pelo lema (21), para cada $a \in Q_1$ existem únicos

$$\psi'_a : W'_{t(a)} \to W'_{h(a)}$$

tais que

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "g_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "g_{h(a)}"] \\ W'_{t(a)} \arrow[r, "\psi'_a"] \arrow[d, "h_{t(a)}"'] & W'_{h(a)} \arrow[d, "h_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $\psi'_a g_{t(a)} = g_{h(a)} \phi_a$ e $\psi_a h_{t(a)} = h_{h(a)} \psi'_a$. Logo, tomando a representação (W', ϕ') e os morfismos $h = \{h_i\}_{i \in Q_0} : (W', \psi') \to (W, \psi)$ e $g : \{g_i\}_{i \in Q_0} (V, \phi) \to (W, \psi)$ temos que g é epimorfismo, h é monomorfismo e $f = h \circ g$.

Portanto $Rep(Q, \mathcal{C})$ é uma categoria abeliana como queríamos mostrar.

□

De agora em diante, vamos considerar apenas representações de quivers na categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo k. Essa categoria será denotada por $Rep\, Q$.

Definição 31. *Dizemos que uma representação* (W, ψ) *é uma* subrepresentação *de* (V, ϕ) *(ou* (W, ψ) *é um* subobjeto *de* (V, ϕ) *em* $Rep\, Q$*) se*

1. $W_i \subset V_i, \forall i \in Q_0$;
2. $\phi_{a|W_{t(a)}} = \psi_a, \forall a \in Q_1$.

Definição 32. *Sejam* (V, ϕ) *e* (W, ψ) *representações de* Q *e considere o morfismo* $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$*. Definimos o* kernel de f, $\ker f$*, pela subrepresentação* (V', ϕ') *de* (V, ϕ) *dada por*

1. $V_i' = \ker f_i \subset V_i, \ \forall i \in Q_0$;
2. $\phi_a' = \phi_{a|V_i'}, \ \forall a \in Q_1$.

Aqui usamos que $\phi_a(\ker f_{t(a)}) \subset \ker f_{h(a)}$*, o que é fácil de verificar pois* f *é morfismo.*

Também definimos a imagem de f, $\mathrm{Im} f$*, como sendo a subrepresentação* (W', ψ') *de* (W, ψ) *dada por*

1. $W_i' = \mathrm{Im} f_i \subset W_i, \ \forall i \in Q_0$;
2. $\psi_a' = \psi_{a|\mathrm{Im} f_{t(a)}}, \ \forall a \in Q_1,$ *onde* $\psi_a' : \mathrm{Im} f_{t(a)} \to \mathrm{Im} f_{h(a)}$.

Definição 33. *Seja* (W, ψ) *subrepresentação de* (V, ϕ)*. Definimos a representação* quociente V/W *por* (U, η) *onde*

1. $U_i = V_i / W_i, i \in Q_0$;
2. $\eta_a : U_{t(a)} \to U_{h(a)}$ *é a aplicação induzida por* ϕ_a *pois* $\phi_a(W_{t(a)}) \subseteq W_{h(a)}$.

Definição 34. *Seja* $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ *um morfismo. Definimos o* conúcleo de f, $\mathrm{coker} f$ *pela representação quociente* $W/\mathrm{Im} f$.

Observe que as definições de $\ker f$ e coker$f$ deste capítulo coincidem com as definições no sentido categórico. De fato, seja $f : (V,\phi) \to (W,\psi)$ morfismo, e considere o núcleo de f a representação (V',ϕ') como na definição (32). Temos que no sentido categórico, $\ker f = ((V',\phi'), i)$, onde $i_j = V'_j \to V_j$ é a inclusão, para $j \in Q_0$. Claramente $f \circ i = 0$ e se $g : (W',\psi') \to (V,\phi)$ é morfismo tal que $f \circ g = 0$, isto é, $f_j g_j = 0, j \in Q_0$, para cada j existe um único $l_j : W'_j \to V'_j$ tal que $i_j l_j = g_j$.

$$\begin{tikzcd}
W'_j \arrow[r, "l_j"] \arrow[dr, "g_j"'] & V'_j \arrow[d, "i_j"] \\
& V_j
\end{tikzcd}.$$

Logo, $l : (W',\psi') \to (V',\phi')$ é único tal que $i \circ l = g$. Com efeito l é morfismo. Considere

$$\begin{tikzcd}
W'_{t(a)} \arrow[r, "\psi'_a"] \arrow[d, "l_{t(a)}"'] \arrow[dr, dashed] & W'_{h(a)} \arrow[d, "l_{h(a)}"] \\
V'_{t(a)} \arrow[r, "\phi'_a"'] \arrow[d, "i_{t(a)}"'] & V'_{h(a)} \arrow[d, "i_{h(a)}"] \\
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"'] & V_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

Como para cada $a \in Q_1$, $f_{h(a)}(\phi_a g_{t(a)}) = 0$, existe um único $m : W'_{t(a)} \to V'_{h(a)}$ tal que $i_{h(a)} m = \phi_a g_{t(a)}$. Mas temos que

$$i_{h(a)} l_{h(a)} \psi'_a = g_{h(a)} \psi'_a = \phi_a g_{t(a)}$$

e

$$i_{h(a)} \phi'_a l_{t(a)} = \phi_a i_{t(a)} l_{t(a)} = \phi_a g_{t(a)}.$$

Da unicidade de m, segue que $\phi'_a l_{t(a)} = l_{h(a)} \psi'_a$, logo $l : (W',\psi') \to (V',\phi')$ é morfismo, e é único pois para cada $i \in Q_0$, l_i é único. Portanto, $\ker f = ((V',\phi'), i)$.

De maneira análoga verificamos que o conúcleo de f dado por $W/\mathrm{Im}f$ coincide com a definição no sentido categórico, considerando o par $(W/\mathrm{Im}f, p)$ onde p é a projeção $p_i : W_i \to W_i/\mathrm{Im}f_i$, $i \in Q_0$.

Definição 35. *A representação* (V, ϕ) *dada por* $V_i = 0$ *para todo* $i \in Q_0$ *e* $\phi_a = 0$ *para todo* $a \in Q_1$ *é chamada de* representação trivial *ou* representação zero.

Definição 36. *Uma representação não trivial* (V, ϕ) *é dita* irredutível *ou* simples *se suas únicas subrepresentações são a trivial e ela mesma.*

Proposição 23. *Seja* Q *um quiver sem ciclos orientados. Então para cada* $i \in Q_0$*, as representações dadas por* $V_i = k$ *e* $V_j = 0$ *se* $j \neq i$*,* $\phi_a = 0$ *para todo* $a \in Q_1$ *são as únicas representações simples.*

Demonstração. Vamos denotar por V_i a representação descrita no enunciado, para cada $i \in Q_0$. Claramente, toda representação da forma V_i é simples. Seja (V, ϕ) uma representação simples não nula em $RepQ$. Como Q é finito e não tem ciclos orientados, podemos escolher $j \in Q_0$ tal que $V_j \neq 0$ e $\phi_a = 0$ $\forall a \in Q_1$ com $t(a) = j$.

Seja

$$W_i = \begin{cases} V_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_a = 0, \forall a \in Q_1.$$

Então se $i_l : W_l \to V_l$ é a inclusão, $l \in Q_0$, ou $i_{t(a)} = 0$ ou $\phi_a = 0$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] & V_{h(a)} \\ W_{t(a)} \arrow[u, "i_{t(a)}"] \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \arrow[u, "i_{h(a)}"'] \end{tikzcd}$$

comuta, logo (W, ψ) é subrepresentação não trivial de (V, ϕ). Como (V, ϕ) é simples, devemos ter $V_i = 0, \forall i \neq j$ e $\dim V_j = 1$.

$\square$

Se o quiver Q possui ciclos orientados, então podemos ter outras representações simples, além das que são descritas na proposição acima, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 24. *Considere o quiver*

$$1 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} 2$$

Para cada $\lambda \in k - \{0\}$ claramente a representação dada por

$$k \underset{1}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} k$$

é simples.

Definição 37. *Sejam (V, ϕ) e (W, ψ) duas representações de Q. Definimos a* representação soma direta *(U, η) por*

1. *$U_i = V_i \oplus W_i$, para cada $i \in Q_0$;*
2. *$\eta_a : V_{t(a)} \oplus W_{t(a)} \to V_{h(a)} \oplus W_{h(a)}$, onde $\eta_a(v \oplus w) = \phi_a(v) \oplus \psi_a(w)$.*

Definição 38. *Uma representação (V, ϕ) de um quiver Q é dita* decomponível *se for isomorfa à soma direta de duas representações não triviais. Caso contrário dizemos que a representação é* indecomponível.

Exemplo 25. *Toda representação simples é indecoponível, mas a recíproca não vale. De fato, considere o quiver*

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

e a representação $(\{\mathbb{C}, \mathbb{C}\}, \lambda)$ onde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ é a multiplicação escalar. Temos que essa representação é indecomponível, mas possui uma subrepresentação própria dada por $(\{0, \mathbb{C}\}, 0)$.

Na verdade, como trabalhamos com representações na categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita, temos que toda representação pode ser escrita como uma soma finita de representações indecomponíveis de maneira única, a menos de isomorfismo e permutação. Para mais detalhes, veja [4].

Exemplo 26. *Considere o quiver*

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

e a representação (V, ϕ) *tal que* $V_1 = k^2$, $V_2 = k^2$ *e* ϕ_a *é dada pela matriz*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

com $\lambda, \mu \in k^*$. *Essa representação não é simples pois*

$$k \xrightarrow{\lambda} k \quad e \quad k \xrightarrow{\mu} k$$

são subrepresentações de (V, ϕ) *e além disso ela é decomponível, pois pode ser escrita como soma direta dessas duas representações.*

Definição 39. *Seja* A *uma álgebra e* R *seu radical. Dizemos que* A *é básica se a álgebra* A/R *é isomorfa a um produto de cópias de* k.

Nosso próximo resultado relaciona a categoria das representações de Q com a categoria $mod - kQ$, com k corpo algebricamente fechado. É possível mostrar que dada uma álgebra associativa A qualquer de dimensão finita, existe uma álgebra básica associada A' tal que $mod - A$ é equivalente a $mod - A'$. Dada A' uma álgebra básica de dimensão finita, existe um quiver com relações tal que as categorias $mod - A'$ e $mod - kQ/I$ são equivalentes, onde I é o ideal gerado pelas relações de Q. Temos então que o estudo de módulos sobre álgebras associativas de dimensão finita se reduz ao estudo de representações de quivers com relações. Para mais detalhes veja [6].

Proposição 27. *Seja* Q *um quiver e* A *sua álgebra de caminhos. Então a categoria das representações de* Q, $Rep\, Q$, *é equivalente à categoria dos* $A-$*módulos de dimensão finita,* $mod - A$.

Demonstração. Vamos construir um funtor $F : Rep\, Q \to Mod - A$ que é equivalência de categorias.

Seja (V, ϕ) uma representação de Q. Fazemos

$$F(V,\phi) = \overline{V} = \bigoplus_{i\in Q_0} V_i.$$

Vamos mostrar que $\overline{V}$ tem estrutura de $A-$módulo. Para isso, vamos definir um homomorfismo $\rho : A \to End(\overline{V})$. Para cada $i \in Q_0$ definimos

$$\rho(e_i)_{|V_j} = \begin{cases} id_{V_j} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

e para cada $a \in Q_1$ definimos

$$\rho(a)_{|V_i} = \begin{cases} \phi_a & \text{se } i = t(a) \\ 0 & \text{se } i \neq t(a) \end{cases}.$$

Como A é gerado por e_i, $i \in Q_0$, e pelos caminhos de Q, que são concatenação das flechas $a \in Q_1$, podemos estender a ação para A de maneira única, de modo que ρ seja homomorfismo e portanto $\overline{V}$ é um $A-$módulo.

Se $f : (V,\phi) \to (W,\psi)$ é um morfismo de representações, vamos definir o homomorfismo de $A-$módulos $F(f) = \overline{f} : \overline{V} \to \overline{W}$. Temos que

$$F(f) : \bigoplus_{i\in Q_0} V_i \to \bigoplus_{i\in Q_0} W_i$$

dado por $\overline{f} = \bigoplus_{i\in Q_0} f_i$ é um homomorfismo.

De fato, devemos mostrar que

$$m\overline{f}(v) = \overline{f}(mv),\ \forall m \in A,\ \forall v \in \overline{V}.$$

É fácil ver que $e_i\overline{f}(v) = \overline{f}(e_iv)$ para todo $i \in Q_0$, e $a\overline{f}(v) = \overline{f}(av)$, pois

$$\psi_a \circ f_{t(a)} = f_{h(a)} \circ \phi_a\ \forall a \in Q_1,$$

logo, também estendendo para todo $m \in A$, temos que $\overline{f}$ é um homomorfismo de $A-$módulos.

Vamos agora construir um funtor inverso

$$G : Mod - A \to Rep\, Q.$$

Para cada V módulo sobre A, como temos que $\sum_{i \in Q_0} e_i = 1_A$ com

$$\begin{cases} e_i e_i = e_i \\ e_i e_j = 0 \quad \text{se} \;\; i \neq j \end{cases}$$

temos que V pode ser escrito como $V = \sum_{i \in Q_0} e_i V$, onde $e_i V = V_i$ são espaços vetoriais sobre k.

Para cada $p \in A$ temos uma aplicação

$$\tilde{\phi}_p : V \to V$$

dada por $\tilde{\phi}_p(v) = pv, v \in V$. Se $a \in Q_1$ temos que

$$a(e_{t(a)} V) = e_{h(a)} a V \subset e_{h(a)} V$$

logo a induz por restrição uma transformação linear sobre k

$$\phi_a : V_{t(a)} \longrightarrow V_{h(a)}.$$

Definimos então para cada módulo V a representação $G(V) = (V, \phi)$ onde $V_i = e_i V$ para cada $i \in Q_0$ e $\phi_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)}$ como acima.

Se $f : V \to W$ é um homomorfismo de $A-$módulos temos que

$$f(V_i) = f(e_i V) = e_i f(V) \subset e_i W = W_i,$$

logo por restrição, temos uma coleção de $k-$transformações lineares

$$f_i : V_i \to W_i,\; i \in Q_0.$$

Para cada $a \in Q_1$, $af(v) = f(av), v \in V$, logo

$$a f_{t(a)}(v) = a f(e_{t(a)} v) = f(a e_{t(a)} v) = f(e_{h(a)} a v) = f_{h(a)}(av)$$

daí $\psi_a \circ f_{t(a)} = f_{h(a)} \circ \phi_a$, e portanto o diagrama

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, fazendo $G(f) = \{f_i\}_{i \in Q_0}$ temos que

$$G(f) : G(V) \to G(W)$$

é morfismo entre as representações de Q.

Precisamos mostrar agora que GF é isomorfo à $id_{Rep\,Q}$ e FG é isomorfo à id_{Mod-A}.

Seja $(V, \phi) \in Rep\ Q$. Temos que $F(V, \phi) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ e $e_i(F(V, \phi)) = \rho(e_i)(V_i)$. Seja $\varepsilon_i : V_i \to \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ a inclusão. Temos que

$$e_i(F(V, \phi)) = \varepsilon_i(V_i), i \in Q_0$$

e para cada $a \in Q_1$, $\phi_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)}$ induz uma aplicação

$$\phi_a : F(V, \phi) \to F(V, \phi).$$

A restrição de ϕ_a a $\varepsilon_{t(a)}(V_{t(a)})$ nos dá uma aplicação

$$\phi'_a : \varepsilon_{t(a)}(V_{t(a)}) \to \varepsilon_{h(a)}(V_{h(a)})$$

e para cada $a \in Q_1$ temos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "\varepsilon_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "\varepsilon_{h(a)}"] \\ \varepsilon_{t(a)}(V_{t(a)}) \arrow[r, "\phi'_a"'] & \varepsilon_{h(a)}(V_{h(a)}) \end{tikzcd}$$

Como $GF(V,\phi)$ é a representação dada pela coleção $\{\varepsilon_i(V_i)\}_{i\in Q_0}$, claramente temos que $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\in Q_0}$ é um isomorfismo de funtores entre id_{RepQ} e GF.

Considere agora $V, W \in Mod - A$ e seja $f : V \to W$ um homomorfismo de $A-$módulos. Temos que existem isomorfismos

$$\alpha : V \to \bigoplus_{i\in Q_0} e_iV \text{ e } \beta : W \to \bigoplus_{i\in Q_0} e_iW$$

logo, se $f_i = f_{|V_i}$ são as restrições $f_i : e_iV \to e_iW$, $i \in Q_0$, temos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \bigoplus e_iV \arrow[d, "\bigoplus f_i"] \\ W \arrow[r, "\beta"'] & \bigoplus e_iW \end{tikzcd}$$

portanto temos um isomorfismo entre funtores id_{Mod-A} e FG.

□

2.3 Sistemas de raízes associados à matriz de Cartan generalizada

Nesta seção veremos como montar um sistema de raízes a partir de um quiver, e veremos como encontrar representações indecomponíveis através desse sistema. A referência utilizada é [13].

Definição 40. *Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz. Dizemos que A é* matriz de Cartan generalizada *(MCG) se*

(i) $a_{ii} = 2$;

(ii) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_-$, $i \neq j$;

(*iii*) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$.

Se vale ainda a seguinte propriedade, dizemos que A é matriz de Cartan*.*

(*iv*) $a_{ij}a_{ji} \leq 3, \ i \neq j$.

Vamos construir uma matriz de Cartan generalizada associada a um quiver. Seja Q um quiver sem laços, com $\#Q_0 = n$.

Definição 41. *Dada (V, ϕ) uma representação de Q, o vetor $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ dado por $\alpha_i = \dim V_i, i \in Q_0$ é chamado de* vetor dimensão *da representação.*

Definição 42. *Definimos a* forma de Euler *ou* forma de Ringel *de um quiver Q como sendo a forma bilinear sobre $\mathbb{Z}^n$ dada por*

$$< \alpha, \beta >= \sum_{i \in Q_0} \alpha_i \beta_i - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{t(a)} \beta_{h(a)}.$$

Na base canônica de $\mathbb{Z}^n$, a forma de Euler é representada pela matriz $E = (a_{ij})$ onde

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \#\{a \in Q_1 \mid t(a) = i, h(a) = j\}.$$

Também definimos a forma de Cartan *como sendo a forma bilinear simétrica dada por*

$$(\alpha, \beta) =< \alpha, \beta > + < \beta, \alpha > .$$

Essa forma independe da orientação das flechas em Q. A matriz associada a essa forma é dada por $C = (c_{ij})$ onde $c_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ e é uma matriz de Cartan generalizada.

Também definimos a forma de Tits *de Q por*

$$q(\alpha) =< \alpha, \alpha >= \frac{1}{2}(\alpha, \alpha).$$

Exemplo 28. *Considere o quiver*

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

Temos que a forma de Euler é representada pela matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz de Cartan é dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar raízes associadas à matriz de Cartan.

Definição 43. *Uma matriz A é dita* simetrizável *se existem uma matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_j \in \mathbb{Z}_+$ e uma simétrica $B = (b_{ij})$ tal que $A = DB$.*

Note que a matriz de Cartan de um quiver é simétrica. Seja A uma MCG. Note que A^t também é MCG. Suponhamos que A^t seja simetrizável, $A^t = DB$. Seja $E = \mathbb{R}^n$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de E. Definimos a forma bilinear

$$(\alpha_i, \alpha_j) = d_i b_{ij}.$$

Seja $r_i : E \to E$ a reflexão ortogonal a $[\alpha_i]^{\perp}$, isto é,

$$r_i(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i.$$

Temos que ${r_i}^2 = \mathbf{1}_E$, logo r_i é invertível, $i = 1, \ldots, n$, e o conjunto de todas as composições de r_i forma um grupo, que denotaremos por $\mathcal{W}$ e chamamos de *grupo de Weyl*.

Definição 44. *Os vetores $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ são chamados* raízes simples *de A. O conjunto $\mathcal{R}^{re} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{W}\alpha_i$ são as* raízes reais *de A.*

Seja $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ e $\Gamma^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i$. Definimos as *raízes reais positivas* por $\mathcal{R}_+^{re} = \mathcal{R}^{re} \cap \Gamma^+$. Temos que se $\alpha \in \mathcal{R}_+^{re}$ então $q(\alpha) = 1$.

Definição 45. *Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz de Cartan generalizada e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ as raízes simples associadas. Definimos o* grafo de Coxeter *de A da seguinte forma:*

- *o grafo possui n vértices $1, \ldots, n$;*
- *o número de arestas entre os vértices i e j é dado por $a_{ij}a_{ji}$.*

Dado $\lambda \in E$, definimos o suporte de λ por

$$\operatorname{supp}(\lambda) = \{\alpha_i : (\lambda, \alpha_i) \neq 0\}.$$

Considere o grafo G_λ que consiste no grafo de Coxeter de A sem os vértices i tais que as raízes α_i não pertencem a $\operatorname{supp}(\lambda)$, e sem as arestas ligadas a esses vértices. Dizemos que $\operatorname{supp}(\lambda)$ é conexo se G_λ é conexo.

Por exemplo, considere o quiver

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4\,.$$

Sua matriz de Cartan é dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

as raízes simples são a base canônica de $\mathbb{R}^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, e o grafo de Coxeter de C é dado por

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

Se $\lambda = (1\ 2\ 0\ 3)$ temos que $\operatorname{supp}(\lambda) = \{e_1, e_2, e_4\}$ e G_λ é dado por

$$\bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet \qquad\qquad \bullet$$

nesse caso supp(λ) não é conexo.

Se $\lambda = (1\ 1\ 1\ 1)$ temos que $\mathrm{supp}(\lambda) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, G_λ é dado por

$$\bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet$$

e portanto é conexo.

Seja

$$K = \{\alpha \in \Gamma^+ : \mathrm{supp}(\alpha)\, \text{é conexo e}\ (\alpha, \alpha_i) \leq 0, \forall i\}.$$

Definimos as *raízes imaginárias positivas* de A por

$$\mathcal{R}_+^{im} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} wK.$$

Temos que $\mathcal{R}_+^{im} \subseteq \Gamma^+$. Se $\alpha \in \mathcal{R}_+^{im}$ então $q(\alpha) \leq 0$. Definimos também as *raízes imaginárias negativas* que são dadas por $\mathcal{R}_-^{im} = -\mathcal{R}_+^{im}$.

Exemplo 29. *Considere o quiver*

$$1 \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} 2\,.$$

Sua matriz de Cartan é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Temos que as raizes reais são

$$\mathcal{R}^{re} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}_+, |m - n| = 1\}$$

e as raízes imaginárias são

$$\mathcal{R}_+^{im} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Os detalhes podem ser encontrados em [7].

Exemplo 30. *Considere o quiver*

$$1 \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} 2\ .$$

Suas raízes reais são pares de números consecutivos com índice ímpar na seqüência de Fibonacci

$$(1,0),(3,1),(8,3),(21,8),\ldots$$
$$(0,1),(1,3),(3,8),(8,21),\ldots$$

e as raízes imaginárias são $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ *com*

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{p}{q}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Veja [5] para mais detalhes.

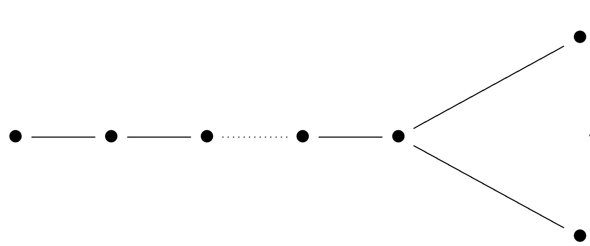
Definição 46. *Seja Q um quiver. Dizemos que*

1. *Q é do* tipo finito *se $Rep\,Q$ é do tipo finito;*
2. *Q é do* tipo manso *se $Rep\,Q$ é do tipo manso;*
3. *Q é do* tipo selvagem *se $Rep\,Q$ é do tipo selvagem.*

Definição 47. *Os* diagramas de Dynkin *dos tipos A, D e E são dados como abaixo*

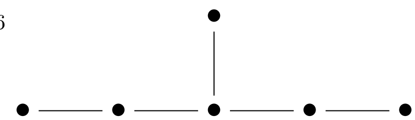
A_n com $n\geq 1$.

D_n

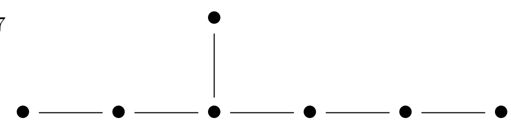


$n\geq 4.$

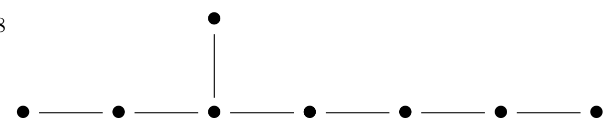
E_6



E_7



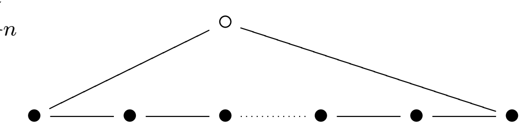
E_8



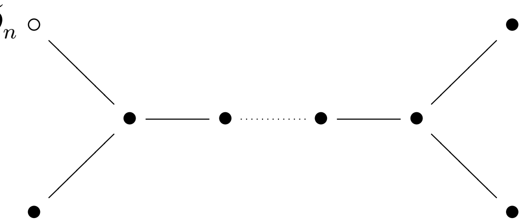
Aqui temos que n denota o número de vértices.

Os diagramas de Dynkin extendidos *dos tipos* $\tilde{A}, \tilde{D}$ *e* $\tilde{E}$*, que possuem* $n+1$ *vértices, são os seguintes*

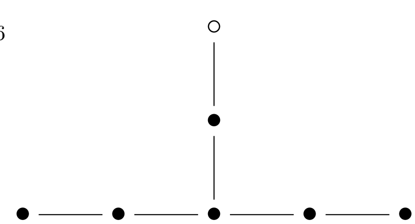
$\tilde{A}_n$



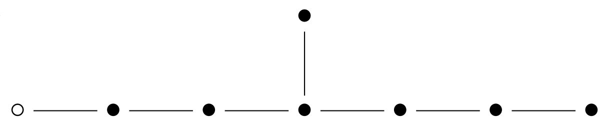
$\tilde{D}_n$



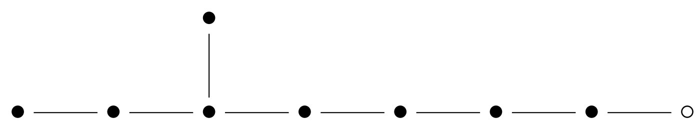
$\tilde{E}_6$



$\tilde{E}_7$



$\tilde{E}_8$



Definição 48. *Dado um quiver Q, o* grafo associado a Q *é o grafo ΓQ cujos vértices são os de Q e cujas arestas correspondem às flechas sem orientação.*

Sejam C a matriz de Cartan generalizada associada a Q e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ o conjunto das raízes simples de C. O Teorema de Gabriel classifica o tipo do quiver de acordo com seu grafo associado. A demonstração pode ser encontrada em [9].

Teorema 31 (Teorema de Gabriel)**.**

1. *Um quiver é do tipo finito se, e somente se, seu grafo associado é a união disjunta de diagramas de Dynkin do tipo A, D ou E;*

2. *um quiver é do tipo manso se, e somente se, seu grafo associado é a união disjunta de diagramas de Dynkin do tipos A, D ou E e diagramas de Dynkin extendidos dos tipos $\hat{A}, \hat{D}$ ou $\hat{E}$ com pelo menos um diagrama de Dynkin extendido;*

3. *as classes de isomorfismos de representações indecomponíveis de um quiver Q do tipo finito estão em bijeção com as raízes positivas de C. A correspondência é dada por*

$$V \mapsto \sum_{i \in Q_0} (\dim V_i)\alpha_i.$$

O próximo teorema também é um resultado clássico, que relaciona as representações indecomponíveis com as raízes de C e é uma generalização do item 3 do Teorema de Gabriel. Kac provou esse resultado em [14].

Teorema 32 (Teorema de Kac)**.** *Seja Q um quiver. Os vetores dimensão das representações indecomponíveis de Q correspondem às raízes positivas do sistema de raízes associado a Q. A correspondência é dada por*

$$d_V \mapsto \sum_{i \in Q_0} (d_V(i))\alpha_i.$$

No teorema de Kac, as raízes reais correspondem a vetores dimensão para os quais existe exatamente uma representação indecomponível, e as raízes imaginárias correspondem a vetores dimensão para os quais existem famílias de representações indecomponíveis.

Exemplo 33. *Considere o quiver*

$$1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2\ .$$

Ele é do tipo manso pois é um $\tilde{A}_1$. Vimos no exemplo (29) *que as raízes reais são*

$$\mathcal{R}^{re} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}_+, |m-n| = 1\}$$

e as raízes imaginárias positivas são

$$\mathcal{R}^{im}_+ = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para cada vetor dimensão (n,n), as representações indecomponíveis são da forma

$$\mathbb{C}^n \underset{J_\lambda}{\overset{Id}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^n\ ,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

ou seja, temos infinitas classes de isomorfismos de representações indecomponíveis mas elas podem ser divididas em famílias a um parâmetro.

Definição 49. *Seja $V = (V, \phi)$ uma representação de Q. Dizemos que (V, ϕ) é* representação de Schur *se $Hom(V,V) = k$. Dizemos que α é* raiz de Schur *se existe uma representação de Schur com vetor dimensão α.*

É fácil ver que se $V = (V, \phi)$ é decomponível, $Hom(V, V) \supseteq k^2$, logo toda representação de Schur é indecomponível. Existem raízes de Schur que não são raízes reais como vemos no exemplo abaixo.

Exemplo 34. *Considere o quiver*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "c"'] & & 3 \end{tikzcd}$$

Uma representação com vetor dimensão $(1, 2, 1)$ *da forma*

$$\begin{tikzcd} & k^2 \arrow[dr, "\phi_b"] & \\ k \arrow[ur, "\phi_a"] \arrow[rr, "\phi_c"'] & & k \end{tikzcd}$$

é indecomponível se ϕ_a *é injetiva,* ϕ_b *é sobrejetiva,* ϕ_c *é isomorfismo e ainda* $\phi_b \phi_a = 0$.

Nesse caso, temos que $(1, 2, 1)$ *é uma raiz real, contudo não é raiz de Schur. Para mais detalhes veja* [5].

Capítulo 3

Representações torcidas de quivers

Neste capítulo vamos fazer um paralelo ao que fizemos no anterior, mas agora com o conceito de representações torcidas de quivers. Esse conceito foi introduzido por Gothen e King em [11].

3.1 Teorema Principal

Definição 50. *Sejam Q um quiver e $\mathcal{C}$ uma categoria tensorial. Fixemos uma coleção de objetos de $\mathcal{C}$, $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$. Uma* representação $M-$torcida à direita de Q em $\mathcal{C}$ *consiste em*

- *uma coleção de objetos*

$$\{V_i \mid i \in Q_0\};$$

- *uma coleção de morfismos*

$$\{\varphi_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)} \otimes M_a \mid a \in Q_1\}.$$

A representação será denotada por (V, ϕ).

Também podemos definir uma representação $M-$torcida à esquerda de Q, *considerando a coleção de morfismos*

$$\{\varphi_a : M_a \otimes V_{t(a)} \to V_{h(a)} \mid a \in Q_1\}.$$

Neste trabalho vamos considerar apenas representações torcidas à direita, por isso quando lidarmos com representações torcidas, subentende-se que são à direita.

Definição 51. *Sejam* (V, ϕ) *e* (W, ψ) *representações* $M-$*torcidas de* Q *numa categoria tensorial* $\mathcal{C}$. *Um* morfismo

$$f : (V, \phi) \to (W, \psi)$$

é uma coleção de morfismos $f_i : V_i \to W_i$, $i \in Q_0$, *tais que o diagrama abaixo seja comutativo para cada* $a \in Q_1$

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "f_{h(a)} \otimes 1_{M_a}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \otimes M_a
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$(f_{h(a)} \otimes 1_{M_a}) \circ \phi_a = \psi_a \circ f_{t(a)}, \ \forall a \in Q_1.$$

Sejam Q um quiver, $\mathcal{C}$ uma categoria tensorial e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de objetos de $\mathcal{C}$. Podemos fazer a composição de morfismos entre representações torcidas de Q de maneira análoga ao que fizemos para representações. Sejam $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ e $g : (W, \psi) \to (U, \eta)$ morfismos entre representações $M-$torcidas de Q. Definimos $gf : (V, \phi) \to (U, \eta)$ por

$$\{(gf)_i = g_i \circ f_i : V_i \to U_i \mid i \in Q_0\}.$$

Vamos verificar que gf é morfismo de representações $M-$torcidas. De fato, para cada $a \in Q_1$, temos

$$\begin{gathered}\eta_a(g_{t(a)}f_{t(a)}) = (\eta_a g_{t(a)})f_{t(a)} \\ = ((g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\psi_a)f_{t(a)} = (g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(\psi_a f_{t(a)}) \\ = (g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})((f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\phi_a) \\ = ((g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(f_{h(a)} \otimes 1_{M_a}))\phi_a = ((g_{h(a)}f_{h(a)}) \otimes 1_{M_a})\phi_a.\end{gathered}$$

Dessa forma o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "g_{t(a)}f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "g_{h(a)}f_{h(a)}\otimes 1_{M_a}"] \\ U_{t(a)} \arrow[r, "\eta_a"'] & U_{h(a)} \otimes M_a \end{tikzcd}$$

para cada $a \in Q_1$, e é fácil ver que obtemos uma categoria $Rep_M(Q,\mathcal{C})$, a categoria das representações $M-$torcidas de Q em $\mathcal{C}$.

A partir de agora vamos trabalhar com representações torcidas de quivers na categoria de espaços vetoriais de dimensão finita, e vamos denotar a categoria das representações torcidas à direita de Q por $Rep_M Q$.

Seja R um conjunto de relações em Q, $R = \{R_1, \ldots, R_m\}$

$$R_i = p_1^i + \ldots + p_{n_i}^i$$

onde $p_j^i = a_{j1}^i a_{j2}^i \ldots a_{jl_j}^i$. Seja $M = \{M_a\}_{a \in Q_0}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita, $M_{p_j^i} = M_{a_{j1}^i} \otimes M_{a_{j2}^i} \otimes \ldots \otimes M_{a_{jl_j}^i}$, $j = 1, \ldots n_i, i = 1, \ldots, m$ e $\tilde{M} = \bigotimes_{a \in Q_1} M_a$. Se (V, ϕ) é uma representação $M-$torcida de Q, temos aplicações induzidas

$$\tilde{\phi}_{p_j^i} : V_{t(p_j^i)} \to V_{h(p_j^i)} \otimes M_{p_j^i}$$

onde

$$\tilde{\phi}_{p_j^i} = (\phi_{a_{j1}^i} \otimes 1_{M_{a_{j2}^i}} \otimes \ldots \otimes 1_{M_{a_{jl_j}^i}}) \circ (\phi_{a_{j2}^i} \otimes 1_{M_{a_{j3}^i}} \otimes \ldots \otimes 1_{M_{a_{jl_j}^i}}) \circ \ldots \circ (\phi_{a_{jl_j-1}^i} \otimes 1_{M_{a_{jl_j}^i}}) \circ \phi_{a_{jl_j}^i}.$$

Se $f_{p^i_j} : M_{p^i_j} \to \tilde{M}$ é a inclusão e $\phi_{p^i_j} = (1_{V_{h(p^i_j)}} \otimes f_{p^i_j}) \circ \tilde{\phi}_{p^i_j}$, temos que

$$\phi_{p^i_j} : V_{t(p^i_j)} \to V_{h(p^i_j)} \otimes \tilde{M},$$

para $j = 1, \ldots, n_i$ e se (V, ϕ) satisfaz as relações de R, devemos ter

$$\phi_{p^i_1} + \ldots + \phi_{p^i_{n_i}} = 0.$$

Por exemplo, considere o quiver

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & 2 \arrow[d, "c"] \arrow[dr, "d"] & \\
 & 3 \arrow[r, "e"'] & 4
\end{tikzcd}$$

e o conjunto de relações R em Q dado por $\{R_1, R_2\}$ onde $R_1 = p^1_1 + p^1_2$, $R_2 = p^1_1 + p^2_2$ com

$$p^1_1 = ca,\ p^1_2 = b,\ p^2_1 = d,\ p^2_2 = ec.$$

Seja (V, ϕ) uma representação $M-$torcida de Q que satisfaz R. Temos que $M_{p^1_1} = M_c \otimes M_a$, $M_{p^1_2} = M_b$, $M_{p^2_1} = M_d$ e $M_{p^2_2} = M_e \otimes M_c$. Seja

$$\tilde{M} = \bigotimes_{a \in Q_1} M_a.$$

Então

1. $\tilde{\phi}_{p^1_1} : V_1 \to V_3 \otimes M_{p^1_1}$, com $\tilde{\phi}_{p^1_1} = (\phi_c \otimes 1_{M_a}) \circ \phi_a$;
2. $\tilde{\phi}_{p^1_2} : V_1 \to V_3 \otimes M_{p^1_2}$, com $\tilde{\phi}_{p^1_2} = \phi_b$;
3. $\tilde{\phi}_{p^2_1} : V_2 \to V_4 \otimes M_{p^2_1}$, com $\tilde{\phi}_{p^2_1} = \phi_d$;
4. $\tilde{\phi}_{p^2_2} : V_2 \to V_4 \otimes M_{p^2_2}$, com $\tilde{\phi}_{p^2_2} = (\phi_e \otimes 1_{M_c}) \circ \phi_c$.

Se $f_{p_i^1} : M_{p_i^1} \to \tilde{M}$ e $f_{p_i^2} : M_{p_i^2} \to \tilde{M}$, $i = 1, 2$, são as inclusões e $\phi_{p_i^1} = (1_{V_3} \otimes f_{p_i^1}) \circ \tilde{\phi}_{p_i^1}$, $\phi_{p_i^2} = (1_{V_4} \otimes f_{p_i^2}) \circ \tilde{\phi}_{p_i^2}$, $i = 1, 2$, como (V, ϕ) satisfaz as relações devemos ter

$$\begin{cases} \phi_{p_1^1} + \phi_{p_2^1} &= 0 \\ \phi_{p_1^2} + \phi_{p_2^2} &= 0. \end{cases}$$

Definição 52. *Sejam Q um quiver e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Para cada $p = a_1 a_2 \cdots a_m \in kQ$, fazemos*

$$M_p = M_{a_1} \otimes \cdots \otimes M_{a_m},$$

se o caminho é não trivial, e se p é um caminho trivial, $p = e_i$, fazemos $M_p = k$. Assim definimos a álgebra de caminhos $M-$torcida *sobre k pelo espaço vetorial*

$$A_M = \bigoplus_p M_p$$

com a soma sobre todos os caminhos de Q, munido com o seguinte produto. Para $x_p \in M_p$ e $x_q \in M_q$ definimos

$$x_p x_q = \begin{cases} x_p \otimes x_q & se \;\; t(p) = h(q) \\ 0 & se \;\; t(p) \neq h(q) \end{cases},$$

$$x_p e_i = \begin{cases} x_p & se \;\; i = t(p) \\ 0 & se \;\; i \neq t(p) \end{cases},$$

$$e_i x_p = \begin{cases} x_p & se \;\; i = h(p) \\ 0 & se \;\; i \neq h(p) \end{cases},$$

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i & se \;\; i = j \\ 0 & se \;\; i \neq j \end{cases}.$$

Exemplo 35. *Considere o quiver*

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

e seja $M = M_a$ *um* $\mathbb{C}-$*espaço vetorial de dimensão finita, suponhamos* $\dim M_a = n$. *Então temos que*

$$A_M = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_a.$$

Sejam $\{e_1\}, \{e_2\}$ *bases de* $\mathbb{C}$ *e* $\{f_1, \cdots, f_n\}$ *base de* M_a. *Se* $v, w \in A_M$ *temos que*

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$$

e

$$w = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \sum_{j=1}^{n} c_j f_j,$$

com $\alpha_i, \gamma_i, \beta_j, c_j \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ *e* $j = 1, \cdots, n$. *Logo, o produto* vw *é dado por*

$$vw = \alpha_1\gamma_1 e_1 + \alpha_2\gamma_2 e_2 + \alpha_2(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j) + (\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j)\gamma_1.$$

Note que se M_a são espaços vetoriais unidimensionais, isto é, $M_a \simeq k, a \in Q_1$, temos que $A_M \simeq kQ$, a álgebra de caminhos do quiver. Ver definição (26).

Temos um resultado semelhante à proposição (27) que relaciona $Rep_M Q$ a A_{M^*}, onde $M^* = \{M_a^*\}_{a \in Q_1}$ são os duais de $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$, isto é, $A_{M^*} = \bigoplus_p M_p^*$, com $M_p^* = M_{a_1}^* \otimes \ldots \otimes M_{a_n}^*$ para $p = a_1 \ldots a_n$.

Proposição 36. *Seja* Q *um quiver e fixemos* $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ *uma coleção de* $k-$*espaços vetoriais de dimensão finita. Temos que a categoria das representações* $M-$*torcidas de* Q *é equivalente à categoria dos* $A_{M^*}-$*módulos.*

Demonstração. Vamos definir um funtor equivalência de categorias entre $Rep_M Q$ e $Mod - A_{M^*}$. Seja $(V,\phi) \in Rep_M Q$ e seja $\overline{V} = \bigoplus_{i\in Q_0} V_i$. Vamos definir uma ação $\rho : A_{M^*} \to End(\overline{V})$.

Definimos

$$\rho(e_i)_{|V_j} = \begin{cases} id_{V_i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases};$$

$$\rho(x_a)_{|V_i} = \begin{cases} (1_{V_{h(a)}} \otimes x_a) \circ \phi_a, & i = t(a) \\ 0, & i \neq t(a) \end{cases}$$

para $x_a \in M_a^*$, $a \in Q_1$. Se $x_p \in M_p^*$, $x_p = x_{a_1} \otimes \ldots \otimes x_{a_n}$, definimos

$\rho(x_p) = \rho(x_{a_1}) \circ \ldots \circ \rho(x_{a_n})$ e estendemos para A_{M^*} por linearidade. Dessa forma temos que $\overline{V}$ é um $A_{M^*}-$ módulo.

Dado um morfismo entre duas representações $f : (V,\phi) \to (W,\psi)$, vamos definir um homomorfismo de $A_{M^*}-$módulos,

$$\overline{f} = \bigoplus_{i\in Q_0} f_i : \bigoplus_{i\in Q_0} V_i \to \bigoplus_{i\in Q_0} W_i.$$

Temos de mostrar que $m\overline{f}(v) = \overline{f}(mv)$, $\forall m \in A_{M^*}, v \in \overline{V}$. De fato,

$$e_i\overline{f}(v) = e_i(\oplus f_j(v)) = f_i(e_i v) = \overline{f}(e_i v),$$

para $i \in Q_0$ e se $x_a \in M_a^*$ então

$$x_a\overline{f}(v) = x_a(\oplus f_i(v)) = (1_{W_{h(a)}} \otimes x_a)\psi_a(f_{t(a)}(v)) =$$

$$(1_{W_{h(a)}} \otimes x_a)(f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\phi_a(v) = (1_{W_{h(a)}} f_{h(a)}) \otimes (x_a 1_{M_a})\phi_a(v) =$$

$$(f_{h(a)} \otimes x_a)\phi_a(v) = f_{h(a)}(1_{V_{h(a)}} \otimes x_a)\phi_a(v) = \overline{f}(x_a(v)).$$

Definindo $F : Rep_M Q \to Mod - A_{M^*}$ tal que

- $F(V,\phi) = \overline{V}$, $(V,\phi) \in Rep_M Q$;

- $F(f) = \bigoplus_{i \in Q_0} f_i$, $f \in Hom_{Rep_M Q}((V, \phi), (W, \psi))$;

temos que F é um funtor. Vamos definir um funtor inverso

$$G : Mod - A_{M^*} \to Rep_M Q.$$

Seja $\overline{V}$ um módulo sobre A_{M^*}. Como $\sum_{i \in Q_0} e_i = 1_{A_{M^*}}$ e $e_i e_j = 0, i \neq j$, $e_i^2 = e_i$, temos que $\overline{V}$ pode ser escrito como $\overline{V} = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$, onde $V_i = e_i V$.

Note que se $x_a \in M_a^*$ temos

$$x_a(V_{t(a)}) = x_a(e_{t(a)}V) = e_{h(a)}(x_a V) \subset e_{h(a)}(V) = V_{h(a)}$$

e $x_a V_i = 0$ se $i \neq t(a)$, logo por restrição, a ação de M_a^* em $\overline{V}$ induz uma aplicação

$$\phi_a : M_a^* \otimes V_{t(a)} \to V_{h(a)}$$

dada por $\phi_a(x_a \otimes v) = x_a v$. Pelo lema (15) temos que $\phi_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)} \otimes M_a$.

Se $f : \overline{V} \to \overline{W}$ é homomorfismo de $A_{M^*}-$módulos, temos que

$$f(V_i) = f(e_i V) = e_i f(V) \subset e_i W = W_i$$

logo tomando a restrição $f_i = f_{|V_i}$, $i \in Q_0$, temos uma coleção de $k-$transformações lineares

$$f_i : V_i \to W_i, i \in Q_0.$$

Considere o funtor $G : Mod - A_{M^*} \to Rep_M Q$ tal que

- se $\overline{V}$ é $A_{M^*}-$módulo,
$$G(\overline{V}) = (V, \phi)$$
onde $V_i = e_i V$, $i \in Q_0$, e ϕ_a é dada como acima, $a \in Q_1$;

- se $f : \overline{V} \to \overline{W}$ é homomorfismo,

$$G(f) = \{f_i\}_{i \in Q_0},\ f_i = f_{|V_i}.$$

Temos que $G(f) : G(\overline{V}) \to G(\overline{W})$ é morfismo entre as representações (V, ϕ) e (W, ψ). De fato, para $a \in Q_1$ e $x_a \in M_a^*$,

$$\psi_a(1_{M_a^*} \otimes f_{t(a)})(x_a \otimes v) = \psi_a(x_a \otimes f_{t(a)}(v)) =$$
$$x_a f_{t(a)}(v) = f_{h(a)}(x_a v) = f_{h(a)}(\phi_a(x_a \otimes v)) =$$
$$f_{h(a)}\phi_a(x_a \otimes v),$$

logo, $a \in Q_1$, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
M_a^* \otimes V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "1_{M_a^*} \otimes f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
M_a^* \otimes W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

e daí

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "f_{h(a)} \otimes 1_{M_a}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \otimes M_a
\end{tikzcd}$$

também comuta, para toda $a \in Q_1$. De maneira análoga à proposição (27), vemos que GF é isomorfo à $id_{Rep_M Q}$ e FG é isomorfo à $id_{Mod-A_{M^*}}$. Portanto as categorias $Rep_M Q$ e $Mod{-}A_{M^*}$ são equivalentes, como queríamos mostrar.

$\square$

Sejam Q um quiver qualquer, $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita e $(V, \phi), (W, \psi) \in Rep_M Q$.

Definição 53. *Dizemos que* (W, ψ) *é uma* subrepresentação *de* (V, ϕ) *se*

1. $W_i \subset V_i, \forall i \in Q_0$;

2. $\phi_{a|W_{t(a)}} = \psi_a, \forall a \in Q_1$.

Definição 54. *Definimos a* soma direta *de* (V, ϕ) *e* (W, ψ) *pela representação* (U, η) *onde*

1. $U_i = V_i \oplus W_i, \forall i \in Q_0$;

2. $\eta_a = \phi_a \oplus \psi_a$ *para cada* $a \in Q_1$*, isto é,*

$$\eta_a : V_{t(a)} \oplus W_{t(a)} \to (V_{h(a)} \oplus W_{h(a)}) \otimes M_a$$

onde

$$\eta_a(v \oplus w) = \phi_a(v) \oplus \psi_a(w), v \in V_{t(a)} \text{ e } w \in W_{t(a)}.$$

Definição 55. *Uma representação* (V, ϕ) *é dita* decomponível *se pode ser escrita como a soma direta de duas subrepresentações não triviais. Caso contrário, dizemos que a representação é* indecomponível.

Como vimos anteriormente, para estudarmos representações de quivers, é suficiente estudarmos as representações indecomponíveis. No capítulo anterior, vimos os teoremas de Gabriel e Kac que nos fornecem uma maneira de encontrar as representações indecomponíveis de um quiver. Neste capítulo queremos fazer o mesmo para as representações torcidas. No final do capítulo teremos condições de encontrar os indecomponíveis na categoria de representações torcidas de um quiver.

Vamos agora ao nosso principal resultado, que relaciona a categoria de representações torcidas de um quiver Q à categoria de representações de um outro quiver $\tilde{Q}$ onde $\tilde{Q}$ é obtido através de Q.

Teorema 37 (Teorema Principal)**.** *Seja* $Q = (Q_0, Q_1)$ *um quiver e seja* $M = \{M_a\}$*,* $a \in Q_1$*, uma coleção de* $k-$*espaços vetoriais de dimensão finita. Então a categoria de representações* $M-$*torcidas de* Q*,* $Rep_M Q$*, é equivalente à categoria de representações de* $\tilde{Q}$*,* $Rep\,\tilde{Q}$*, onde* $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1)$ *é obtido de* Q *da seguinte maneira:*

- *o conjunto de vértices é o mesmo, isto é,* $\tilde{Q}_0 = Q_0$*;*
- *para cada flecha* $a \in Q_1$*,* $\tilde{Q}_1$ *possui* $m = \dim M_a$ *flechas,* $a_1, \ldots, a_m$*, tais que*
$$\tilde{t}(a_j) = t(a) \text{ e } \tilde{h}(a_j) = h(a), j = 1, \ldots, m,$$
onde $\tilde{t}, \tilde{h}$ *são os mapas início e término de* $\tilde{Q}$ *respectivamente.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que Q é tal que $Q_0 = (1, 2)$ e $Q_1 = (a)$ com $t(a) = 1$ e $h(a) = 2$, isto é,

$$1 \xrightarrow{a} 2 .$$

Fixemos M_a um $k-$espaço vetorial de dimensão m. Queremos mostrar que $Rep_M Q$ é equivalente a $Rep\,\tilde{Q}$ onde $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1)$ com $\tilde{Q}_0 = Q_0$ e $\tilde{Q}_1 = (a_1, \ldots, a_m)$, $t(a_i) = t(a)$ e $h(a_i) = h(a)$, para $i = 1, \ldots, m$.

Para mostrarmos essa equivalência, vamos exibir um funtor que seja equivalência de categorias.

Seja $\{V, W\}, \{\phi : V \to W \otimes M_a\}$ uma representação de Q. Note que como V, W, M_a são $k-$espaços vetoriais de dimensão finita, pelo lema (13)

$$L(V, W \otimes M_a) \simeq L(V, W) \otimes M_a.$$

Temos então que se $\{h_1, \ldots, h_m\}$ é base de M_a, como $\phi \in L(V, W \otimes M_a)$, existem $\phi_1, \cdots, \phi_m \in L(V, W)$ tais que

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \phi_i \otimes h_i. \qquad (3.1)$$

Observe que $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ depende da base $\{h_1, \ldots, h_m\}$ fixada para M_a.

Fixe uma ordem para as flechas de $\tilde{Q}$ e considere o funtor

$$F : Rep_M Q \to Rep\, \tilde{Q}$$

tal que

- para cada objeto $(\{V_{t(a)}, V_{h(a)}\}, \phi) \in Rep_M Q$, temos

$$F(\{V_{t(a)}, V_{h(a)}\}, \phi) = (\{V_{t(a)}, V_{t(a)}\}, \tilde{\phi})$$

  onde $\tilde{\phi} = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ são obtidos como fizemos em (3.1), e ϕ_i está associado a $i-$ésima flecha de $\tilde{Q}$;

- para cada morfismo $f = \{f_{t(a)}, f_{h(a)}\}$ entre duas representações torcidas $(\{V_{t(a)}, V_{h(a)}\}, \phi)$ e $(\{W_{t(a),W_{h(a)}}\}, \psi)$

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "f_{h(a)} \otimes 1_{M_a}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi"'] & W_{h(a)} \otimes M_a \end{tikzcd}$$

  definimos $F(f) = f$.

Mostremos que $f = \{f_{t(a)}, f_{h(a)}\}$ é morfismo entre as representações

$(\{V_{t(a)}, V_{h(a)}\}, \{\phi_1, \ldots, \phi_m\})$ e $(\{W_{t(a)}, W_{h(a)}\}, \{\psi_1, \ldots \psi_m\})$, isto é que

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_j"'] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo $1 \leq j \leq m$.

De fato, temos que $\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes h_j$, $\psi = \sum_{j=1}^{m} \psi_j \otimes h_j$ e $\psi f_{t(a)} = (f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\phi$, logo,

$$(\sum_{j=1}^{m} \psi_j \otimes h_j) f_{t(a)} = (f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(\sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes h_j)$$

então

$$(\sum_{j=1}^{m} \psi_j \otimes h_j) f_{t(a)} = \sum_{j=1}^{m} ((\psi_j \otimes h_j) f_{t(a)}) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j f_{t(a)} \otimes h_j$$

e

$$(f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(\sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes h_j) = \sum_{j=1}^{m} (f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(\phi_j \otimes h_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} (f_{h(a)} \phi_j \otimes 1_{M_a} h_j) = \sum_{j=1}^{m} f_{h(a)} \phi_j \otimes h_j$$

logo,

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j f_{t(a)} \otimes h_j = \sum_{j=1}^{m} f_{h(a)} \phi_j \otimes h_j$$

e portanto

$$\psi_j \circ f_{t(a)} = f_{h(a)} \circ \phi_j, \text{ para } j = 1, \ldots m,$$

logo $F(f)$ é morfismo entre $F(X)$ e $F(Y)$. Mostremos que F é funtor.

Sejam $Z = (U, \eta) \in Rep_M Q$ e $g : (W, \psi) \to (U, \eta)$ um morfismo. Queremos mostrar que $F(gf) = F(g)F(f)$, ou seja, que o diagrama comuta para $1 \leq i \leq m$.

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "g_{t(a)}"'] & W_{h(a)} \arrow[d, "g_{h(a)}"] \\
U_{t(a)} \arrow[r, "\eta_i"] & U_{h(a)}
\end{tikzcd}$$

Temos que

$$\eta_i(g_{t(a)}f_{t(a)}) = (\eta_i g_{t(a)})f_{t(a)} = (g_{h(a)}\psi_i)f_{t(a)} =$$
$$g_{h(a)}(\psi_i f_{t(a)}) = g_{h(a)}(f_{h(a)}\phi_i) = (g_{h(a)}f_{h(a)})\phi_i,$$

para todo i com $i = 1, \ldots, m$, logo F é funtor. Mostremos agora que F satisfaz as condições do teorema (5).

1. $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é injetivo e sobrejetivo.

   Claramente é injetivo. Seja $g \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $g = \{g_i\}_{i \in Q_0}$ tal que

   $$\psi_i \circ g_{t(a)} = g_{h(a)} \circ \phi_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

   Então $f = \{g_i\}_{i \in Q_0} \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é tal que $F(f) = g$. De fato,

   $$\psi g_{t(a)} = (\sum_{j=1}^{m} \psi_j \otimes h_j)g_{t(a)} = \sum_{j=1}^{m}((\psi_j \otimes h_j)g_{t(a)}) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j g_{t(a)} \otimes h_j =$$

   $$\sum_{j=1}^{m} g_{h(a)}\phi_j \otimes h_j = \sum_{j=1}^{m} g_{h(a)}\phi_j \otimes 1_{M_a}h_j = \sum_{j=1}^{m}(g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(\phi_j \otimes h_j) =$$

   $$(g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(\sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes h_j) = (g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\phi.$$

   Portanto F é pleno e fiel.

2. Seja $\overline{Y} \in Obj(\mathcal{D})$, $\overline{Y} = (V, \overline{\phi})$ onde $V = \{V_{t(a)}, V_{h(a)}\}$ e $\overline{\phi} = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ com $\phi_j : V_{t(a)} \to V_{h(a)}$, $j = 1, \ldots, m$. Seja $X = (V, \phi)$ com

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes h_j.$$

Então $\overline{Y} = F(X)$. Pelo teorema (5) temos que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é equivalência de categorias.

Note que mudar a ordem das flechas em $\tilde{Q}$ é equivalente a mudar a ordem dos vetores na base escolhida.

Agora, se Q é um quiver com mais flechas, definimos um funtor que faz em cada flecha de Q o mesmo processo que fizemos anteriormente, dessa forma obtemos uma equivalência entre as categorias.

$\square$

Pergunta: Para demonstrar o teorema, escolhemos uma base para M, e vimos que o funtor F depende dessa base. Se escolhermos outra base para M, o novo funtor $F' : Rep_M Q \to Rep\,\tilde{Q}$ é isomorfo a F?

Corolário 38. *Sejam Q um quiver e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Então os indecomponíveis de $Rep_M Q$ estão em correspondência biunívoca com os indecomponíveis de $Rep\,\tilde{Q}$.*

Demonstração. O resultado segue do teorema anterior e do corolário (10) $\square$

Proposição 39. *Sejam Q um quiver e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Então dada $M' = \{M'_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de subespaços vetoriais, isto é, $M'_a \subset M_a$ é subespaço vetorial para cada $a \in Q_1$, existe um funtor*

$$F : Rep_{M'} Q \to Rep_M Q$$

que é pleno e fiel.

Demonstração. Vamos denotar $Rep_{M'}Q$ por $\mathcal{C}$ e $Rep_M Q$ por $\mathcal{D}$. Seja $X = (V, \phi) \in Obj(\mathcal{C})$. Temos que

$$\phi_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)} \otimes M'_a,$$

para cada $a \in Q_1$. Seja $\varepsilon_a : M'_a \to M_a$ a inclusão de M'_a em M_a. Considere a aplicação

$$\overline{\phi}_a : V_{t(a)} \to V_{h(a)} \otimes M_a$$

dada por $\overline{\phi}_a = (1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a) \circ \phi_a$, para cada $a \in Q_1$.

Definimos $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ da seguinte forma

- para $X = (V, \phi) \in Obj(\mathcal{C})$ temos

$$F(X) = (V, \overline{\phi})$$

  onde $\overline{\phi}_a = (1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a) \circ \phi_a, a \in Q_1$;

- se $f : X \to Y$ é morfismo, $X = (V, \phi)$, $Y = (W, \psi)$ objetos de $\mathcal{C}$ então $F(f) = f$ é morfismo entre $F(V, \phi)$ e $F(W, \psi)$.

De fato, temos de mostrar que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\phi}_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "f_{h(a)} \otimes 1_{M_a}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\psi}_a"'] & W_{h(a)} \otimes M_a \end{tikzcd}$$

Temos que

$$\overline{\psi}_a f_{t(a)} = ((1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)\psi_a) f_{t(a)} = (1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)(\psi_a f_{t(a)})$$
$$= (1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)(f_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})\phi_a$$

e

$$(f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\overline{\phi}_a = (f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)\phi_a$$

note que

$$(1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)(f_{h(a)} \otimes 1_{M'_a}) = (f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)$$

pois $1_{W_{h(a)}} f_{h(a)} = f_{h(a)} 1_{V_{h(a)}}$ e $\varepsilon_a 1_{M'_a} = 1_{M_a}\varepsilon_a$, logo

$$\overline{\psi}_a f_{t(a)} = (f_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\overline{\phi}_a$$

e $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$.

Se $g : Y \to Z$ é morfismo, com $Z = (U, \eta)$ temos que $gf : X \to Z$ está bem definido. De fato,

$$\eta_a(g_{t(a)} f_{t(a)}) = (\eta_a g_{t(a)}) f_{t(a)} = ((g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})\psi_a) f_{t(a)}$$

$$= (g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})(\psi_a f_{t(a)}) = (g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})((f_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})\phi_a)$$

$$= ((g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})(f_{h(a)} \otimes 1_{M'_a}))\phi_a = (g_{h(a)} f_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})\phi_a$$

isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M'_a \arrow[d, "f_{h(a)} \otimes 1_{M'_a}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d, "g_{t(a)}"'] & W_{h(a)} \otimes M'_a \arrow[d, "g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a}"] \\
U_{t(a)} \arrow[r, "\eta_a"'] & U_{h(a)} \otimes M'_a
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\phi}_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "f_{h(a)}\otimes 1_{M_a}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\psi}_a"] \arrow[d, "g_{t(a)}"'] & W_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "g_{h(a)}\otimes 1_{M_a}"] \\
U_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\eta}_a"'] & U_{h(a)} \otimes M_a
\end{tikzcd}$$

também comuta, logo $F(fg) = F(f)F(g)$ e portanto F é funtor.

Precisamos mostrar agora que F é pleno e fiel, isto é, que para cada objeto $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

é sobrejetivo e injetivo.

De fato, sejam $X = (V, \phi)$ e $Y = (W, \psi)$ objetos de $Rep_{M'}Q$ e seja $g = \{g_i\}_{i\in Q_0} \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$. Então o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
V_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\phi}_a"] \arrow[d, "g_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \otimes M_a \arrow[d, "g_{h(a)}\otimes 1_{M_a}"] \\
W_{t(a)} \arrow[r, "\overline{\psi}_a"'] & W_{h(a)} \otimes M_a
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\overline{\psi}_a g_{t(a)} = (g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})\overline{\phi}_a, \ \forall a \in Q_1,$$

logo

$$((1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)\psi_a)g_{t(a)} = (g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})((1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)\phi_a)$$

daí

$$(1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)(\psi_a g_{t(a)}) = (g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)\phi_a.$$

Note que

$$(g_{h(a)} \otimes 1_{M_a})(1_{V_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a) = (1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)(g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})$$

portanto

$$(1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)(\psi_a g_{t(a)}) = (1_{W_{h(a)}} \otimes \varepsilon_a)((g_{h(a)} \otimes 1_{M'_a})\phi_a).$$

Temos então que $f = \{g_i\}_{i \in Q_1} \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é tal que $F(f) = g$, logo $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é sobrejetivo.

Claramente F é injetivo, portanto é pleno e fiel, e segue o resultado.

□

Podemos agora relacionar $Rep\,Q$ a $Rep_M Q$.

Corolário 40. *A categoria $Rep\,Q$ é equivalente a uma subcategoria plena de $Rep_M Q$.*

Demonstração. Considere $M' = \{M'_a\}_{a \in Q_1}$ tal que $M'_a = k, \forall a \in Q_1$. Então $Rep_{M'} Q = Rep\,Q$ e da proposição anterior, temos que existe um funtor

$$F : Rep\,Q \to Rep_M Q$$

que é pleno e fiel. Logo, da proposição (6) segue o resultado.

□

Sejam Q um quiver e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Definimos a *matriz de Euler M-torcida* $E_M = (a_{ij})$ onde

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \{\sum_{a \in Q_1} \dim M_a \mid t(a) = i, h(a) = j\}.$$

Definimos também a *matriz de Cartan generalizada M-torcida* por $C_M = (c_{ij})$ onde $c_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$.

Exemplo 41. *Considere o quiver*

$$1 \xrightarrow{a_1} 2 \xleftarrow{a_2} 3$$

e sejam $\dim M_{a_1} = 2$*,* $\dim M_{a_2} = 3$*. Então*

$$E_M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$C_M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz E_M de Q é igual a matriz de Euler de $\tilde{Q}$ e C_M de Q é a matriz de Cartan de $\tilde{Q}$.

Teorema 42. *Sejam Q um quiver e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Temos então que a categoria de representações $M-$torcidas de Q é do tipo*

1. *finito se, e somente se,* $\dim M_a = 1$*, $\forall a \in Q_1$, e Q é do tipo finito;*
2. *manso se, e somente se,*
   - (a) $\dim M_a = 1$*, $\forall a \in Q_1$, e Q é do tipo manso; ou*
   - (b) *Q é a união disjunta de diagramas de Dynkin do tipo A, D, E com* $\dim M_a = 1$ *em todas as flechas a associadas e a união de um A_2 com* $\dim M = 2$ *na flecha associada; ou*

(c) Q é um A_2 com $\dim M_a = 2$;

3. *selvagem se, e somente se, não for nem do tipo finito, nem do tipo manso.*

Demonstração. Segue do teorema de Gabriel e do Teorema (37).

□

Teorema 43. *Seja Q um quiver qualquer e $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Então os vetores dimensão das representações torcidas indecomponíveis de Q correspondem às raízes positivas do sistema de raízes associado à matriz de Cartan generalizada torcida de Q.*

Demonstração. Sabemos pelo corolário (38) que os indecomponíveis de Q estão em equivalência com os de $\tilde{Q}$ e que a matriz de Cartan torcida de Q corresponde à matriz de Cartan de $\tilde{Q}$. Portanto basta aplicar o Teorema de Kac para o quiver $\tilde{Q}$.

□

3.2 Estabilidade em $Rep_M Q$

Nesta seção, as principais referências são [8, 19].

Seja Q um quiver finito sem ciclos orientados e considere $M = \{M_a\}_{a \in Q_1}$ uma coleção de $k-$espaços vetoriais de dimensão finita. Seja $F : Rep_M Q \to Rep\tilde{Q}$ o funtor equivalência de categorias. Nesta seção vamos definir o conceito de estabilidade na categoria $Rep_M Q$.

Vamos denotar por V_i, para cada vértice $i \in Q_0$, a representação simples (V, ϕ) dada por $V_i = k, \forall i \in Q_0$ e $\phi_a = 0, \forall \in Q_1$. Seja $\overline{V_i} = F(V_i)$ para cada $i \in Q_0$. Temos o seguinte resultado.

Proposição 44. *As únicas representações simples em $Rep_M Q$ são da forma V_i para cada $i \in Q_0$.*

Demonstração. A prova é análoga à da proposição (23). □

Lembrando que em $Rep\,\tilde{Q}$ também vale a proposição acima, (ver proposição (23)), temos que $\overline{V_i}$ é simples em $Rep\,\tilde{Q}$ se, e somente se, V_i é simples em $Rep_M Q$.

Como trabalhamos com representações de dimensão finita, temos que $Rep_M Q$ e $Rep\tilde{Q}$ são categorias artinianas e noetherianas, isto é, para qualquer objeto X dessas categorias, as seqüências de subobjetos X_i de X crescentes e decrescentes

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \text{ ou } X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$$

são estacionárias, isto é, existe n tal que $X_i = X_n$, para todo $i \geq n$. Temos então o teorema de Jordan-Hölder.

Teorema 45 (Jordan-Hölder)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana artiniana e noetheriana. Então todo objeto X de $\mathcal{A}$ possui uma série de Jordan-Hölder, isto é, uma série*

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X$$

tal que $X_1, X_2/X_1, \ldots, X_n/X_{n-1}$ são todos simples.

Além disso, o ciclo de componentes simples de X, dado por

$$X_1 \oplus X_2/X_1 \oplus \ldots \oplus X_n/X_{n-1}$$

não depende da série de Jordan-Hölder escolhida, isto é, se X possui uma outra série

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_m = X,$$

então $m = n$ e $X_1 \simeq Y_1, X_i/X_{i-1} \simeq Y_i/Y_{i-1}$, se $i = 2, \cdots, n$.

Demonstração. Veja [6]. □

Definição 56. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Definimos seu* grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{A})$ *pelo quociente F/N, onde F é o grupo abeliano livre gerado por todos os objetos de $\mathcal{A}$ e N é o subgrupo gerado por*

$$\{X - X' - X'' \mid \textit{ existe seqüência exata}\, 0 \to X' \to X \to X'' \to 0\}.$$

Vamos ver qual é o grupo de Grothendieck de $Rep_M Q$. Antes, note que tanto em $Rep_M Q$ como em $Rep\,\tilde{Q}$ se duas representações são isomorfas então elas têm o mesmo vetor dimensão.

Exemplo 46. *Seja $\mathcal{A} = Rep_M Q$, e seja $n = \#Q_0$. Temos que $K_0(\mathcal{A}) \simeq \mathbb{Z}^n$. De fato, denotando por V_i, $i \in Q_0$, as representações simples de $Rep_M Q$, temos que cada representação $M-$torcida de Q é equivalente em $K_0(\mathcal{A})$ a seu ciclo de componentes simples, que é da forma $\oplus_{i\in Q_0} V_i^{\beta_i}$, para algum $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$. Logo temos que a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K_0(Rep_M Q) & \to & \mathbb{Z}^n \\ \oplus_{i\in Q_0} V_i^{\beta_i} & \mapsto & \beta \end{array}$$

é sobrejetiva e injetiva. De maneira análoga, vemos que $K_0(Rep\,\tilde{Q}) \simeq \mathbb{Z}^{\#\tilde{Q}_0}$. Como $\#\tilde{Q}_0 = \#Q_0 = n$ e $V_i \in Obj(Rep_M Q)$ é simples se, e somente se, $F(V_i) \in Obj(Rep\,\tilde{Q})$ é simples, com F o funtor equivalência de categorias, temos que F induz o isomorfismo de grupos

$$\overline{F} : K_0(Rep_M Q) \to K_0(Rep\,\tilde{Q})$$

que é a identidade.

Vamos agora definir em $Rep_M Q$ o conceito de estabilidade. Esse conceito pode ser estendido para categorias abelianas em geral, para mais detalhes, veja [20].

Seja (V, ϕ) objeto de $Rep_M Q$. Vamos denotar por $[V]$ a imagem em $K_0(Rep_M Q)$ da sua classe de isomorfismo. Denotamos também por $[\overline{V}]$ a imagem em $K_0(Rep\,\tilde{Q})$ da classe de isomorfismo do objeto $(\overline{V}, \overline{\phi})$ de $Rep\,\tilde{Q}$.

Definição 57. *Seja* $\theta : K_0(Rep_M Q) \to \mathbb{R}$ *uma função aditiva, isto é, um homomorfismo de grupos abelianos. Dizemos que a representação* (V, ϕ) *é*

- θ-semi-estável *se* $\theta([V]) = 0$ *e para toda subrepresentação* (W, ψ) *de* (V, ϕ) *temos* $\theta([W]) \geq 0$*;*
- θ-estável *se for* $\theta-$*semi-estável e as únicas subrepresentações* (W, ψ) *tais que* $\theta([W]) = 0$ *são* (V, ϕ) *e a representação nula.*

Dada uma função aditiva $\theta' : K_0(Rep\,\tilde{Q}) \to \mathbb{R}$ definimos de maneira análoga estabilidade em $Rep\,\tilde{Q}$.

Seja $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{Z}^n$ onde $n = \#Q_0$. Note que se (V, ϕ) é representação $M-$torcida de Q com vetor dimensão α temos que θ induz uma função aditiva $\theta : K_0(Rep_M Q) \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\theta([V]) = \sum_{i \in Q_0} \theta_i \alpha_i = < \theta, \alpha > .$$

Se $(\overline{V}, \overline{\phi})$ é representação de $\tilde{Q}$ com vetor dimensão β, temos que θ também induz uma função aditiva $\theta' : K_0(Rep\,\tilde{Q}) \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\theta'([\overline{V}]) = \sum_{i \in Q_0} \theta_i \beta_i = < \theta, \beta > .$$

A partir de agora, vamos considerar as funções aditivas θ e θ' dadas por produto interno com um vetor θ como acima. Lembrando que o funtor equivalência de categorias $F : Rep_M Q \to Rep\tilde{Q}$ preserva a dimensão das representações e que o isomorfismo induzido $\overline{F} : K_0(Rep_M Q) \to K_0(Rep\tilde{Q})$ é a identidade, se $(V, \phi) \in Rep_M Q$ com vetor dimensão α temos que

$$\theta([V]) = < \theta, \alpha > = \theta'([F(V)]).$$

Na verdade, $\theta = \theta' \circ \overline{F} = \theta'$, logo $\theta([F(V)]) = \theta([V])$ e daí segue que (V, ϕ) é θ-(semi)-estável se, e somente se $F(V, \phi)$ é θ-(semi)-estável em $Rep\,\tilde{Q}$.

Vamos fixar um vetor dimensão $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Sejam $R_M(Q,\alpha)$ o conjunto de todas as representações $M-$torcidas de Q com vetor dimensão α e $R(\tilde{Q},\alpha)$ o conjunto das representações de $\tilde{Q}$ com vetor dimensão α. Temos que $R_M(Q,\alpha)$ é subcategoria plena de $Rep_M Q$ e $R(\tilde{Q},\alpha)$ é subcategoria plena de $Rep\,\tilde{Q}$.

Considere também $R^{SS}_{\theta,M}(Q)$ o conjunto das representações θ-semi-estáveis de $Rep_M Q$ e $R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q})$ o conjunto das representações θ-semi-estáveis de $Rep\,\tilde{Q}$.

Proposição 47. *As representações $M-$torcidas de Q que são θ-semi-estáveis formam uma subcategoria abeliana plena de $Rep_M Q$, $R^{SS}_{\theta,M}(Q)$. O mesmo ocorre com as representações θ-semi-estáveis de $Rep\,\tilde{Q}$, $R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q})$.*

Demonstração. Vamos demonstrar apenas para representações $M-$torcidas de Q. A prova é igual para representações de $\tilde{Q}$. É claro que as representações θ-semi-estáveis formam uma subcategoria plena de $Rep_M Q$. Precisamos mostrar que ela é abeliana e para isso é suficiente mostrar que se $f : (V,\phi) \to (W,\psi)$ é morfismo entre representações semi-estáveis, então $\ker f$, $\mathrm{coker} f$ e $\mathrm{im} f$ são θ-semi-estáveis. Temos seqüências exatas

$$0 \to \ker f \to (V,\phi) \to \mathrm{im} f \to 0$$

e

$$0 \to \mathrm{im} f \to (W,\psi) \to \mathrm{coker} f \to 0$$

logo, $\theta([\ker f]) + \theta([\mathrm{imf}]) = 0$. Como $\ker f$ é subobjeto de (V,ϕ) e $\mathrm{im} f$ de (W,ψ), que são θ-semi-estáveis, temos que $\theta([\ker f]) \geq 0$ e $\theta([\mathrm{im} f]) \geq 0$, logo eles são nulos. Da mesma forma, temos que $\theta([\mathrm{coker} f]) + \theta([\mathrm{im} f]) = 0$ e portanto $\theta([\mathrm{coker} f]) = 0$. Seja (U,η) subobjeto de $\ker f$, então (U,η) é subobjeto de (V,ϕ) e daí $\theta([U]) \geq 0$ o que implica que $\ker f$ é θ-semi-estável. De maniera análoga, temos que $\mathrm{im} f$ é θ-semi-estável. Para mostrarmos que $\mathrm{coker} f$ é θ-semi-estável, seja (U',λ) subobjeto de $\mathrm{coker} f = (W,\psi)/\mathrm{im} f$. Se π é a projeção $\pi : (W,\psi) \to \mathrm{coker} f$, temos a seqüência exata

$$0 \to \mathrm{im} f \to \pi^{-1}((U',\lambda)) \to (U',\lambda) \to 0.$$

Assim, $\theta([U']) = \theta([\pi^{-1}(U')]) \geq 0$ pois (W, ψ) é θ-semi-estável. Portanto coker$f$ é θ-semi-estável, e os objetos semi-estáveis de $Rep_M Q$ formam uma subcategoria abeliana plena.

$\square$

As subcategorias da proposição acima são artinianas e noetherianas, logo nelas também vale o teorema de Jordan-Hölder.

Seja $G : R_{\theta,M}^{SS}(Q) \to R_{\theta}^{SS}(\tilde{Q})$ a restrição de $F : Rep_M Q \to Rep\,\tilde{Q}$ às representações θ-semi-estáveis.

Proposição 48. *O funtor G induzido por F é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. Sejam $X = (V, \phi)$ e (W, ψ) objetos de $\mathcal{C} = R_{\theta,M}^{SS}(Q)$. Como já vimos, $G(X) = F(X)$ e $G(Y) = F(Y)$ são objetos de $\mathcal{D} = R_{\theta}^{SS}(\tilde{Q})$. Vamos mostrar que

$$G : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$$

é fiel, pleno e essencialmente sobrejetivo.

Temos que $\mathcal{C}$ é subcategoria plena de $Rep_M Q$ e F é fiel, logo G é fiel. Também segue que G é pleno pois $\mathcal{D}$ é subcategoria plena de $Rep\,\tilde{Q}$ e F é pleno. Finalmente, se $\overline{Y} \in Obj(\mathcal{D})$, temos que $\overline{Y} = F(X)$ para $X \in Rep_M Q$. Como equivalência de categorias preserva θ-semi-estabilidade, temos que X é θ-semi-estável, logo $X \in Obj(\mathcal{C})$ e daí $\overline{Y} = G(X)$, o que mostra que G é essencialmente sobrejetivo e portanto G é equivalência de categorias.

$\square$

Proposição 49. *Seja X um objeto de $R_{\theta,M}^{SS}(Q)$. Então X é estável se, e somente se, X é simples.*

Demonstração. Suponhamos que X seja estável. Então $\theta([X]) = 0$ e se X' é subobjeto de X, como $\theta([X']) = 0$ temos que $X' = 0$ ou $X' = X$, logo X é simples.

Reciprocamente, suponhamos que X seja simples. Como seus únicos subobjetos são $X' = 0$ e $X' = X$, claramente X é estável.

$\square$

Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana com estrutura de estabilidade, como $Rep_M Q$, temos que os objetos semi-estáveis de $\mathcal{A}$ possuem uma filtração chamada *filtração de Harder-Narasimhan*, isto é, se $X \in Obj(\mathcal{A})$ é semi-estável, exite uma única filtração

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \ldots \supset X_1 \supset X_0 = 0$$

tal que X_i/X_{i-1} é estável, $\forall i$. Para mais detalhes veja [8].

Definição 58. *Dizemos que dois objetos $X, Y \in Obj(\mathcal{A})$ semi-estáveis são S-*equivalentes *se sua filtração de Harder-Narasimhan possui os mesmos fatores de composição.*

Seja $\mathcal{A} = R^{SS}_{\theta,M}(Q)$. Da proposição anterior, temos que os objetos estáveis de $\mathcal{A}$ são os objetos simples, logo uma filtração de Harder-Narasimhan de um objeto é o mesmo que uma série de Jordan-Hölder, e dois objetos X, Y θ-semi-estáveis são S-equivalentes, se eles possuem o mesmo ciclo de componentes simples.

Seja $R^{SS}_{\theta,M}(Q, \alpha)$ o conjunto das representações de $R^{SS}_{\theta,M}(Q)$ com vetor dimensão α e $R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q}, \alpha)$ o conjunto das representações de $R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q})$ com vetor dimensão α. Vamos denotar por $R^{SS}_{\theta,M}(Q, \alpha)/\sim$ o conjunto de moduli das representações θ-semi-estáveis de dimensão α a menos de S-equivalência e por $R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q}, \alpha)/\sim$ o conjunto de moduli das representações de $R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q}, \alpha)$ a menos de S-equivalência. Temos a seguinte proposição.

Proposição 50. *O funtor $F : Rep_M Q \to Rep\ \tilde{Q}$ induz uma bijeção entre os conjuntos*

$$R^{SS}_{\theta,M}(Q, \alpha)/\sim \ \ e\ R^{SS}_{\theta}(\tilde{Q}, \alpha)/\sim .$$

Demonstração. Veja [8, Proposição 2.9].

$\square$

King mostrou em [16] que $R_\theta^{SS}(\tilde{Q},\alpha)/\sim$ é uma variedade algébrica projetiva, irredutível e normal. Logo, pela proposição anterior, temos que à $R_{\theta,M}^{SS}(Q,\alpha)/\sim$ também pode ser dada uma estrutura de variedade algébrica projetiva, irredutível e normal.

3.3 Exemplo

Neste exemplo vamos mostrar como aplicar o Teorema (37) para calcular indecomponíveis de $Rep_M Q$. Seja $\tilde{Q}$ o quiver

$$1 \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} 2$$

e $k = \mathbb{C}$. Temos que todas as representações indecomponíveis de Q com vetor dimensão (n,n) são da forma

$$\mathbb{C}^n \underset{J_\lambda}{\overset{I_n}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^n$$

onde J_λ é a matriz na forma normal de Jordan com um autovalor. Para mais detalhes veja [7]. Seja $M = \mathbb{C}^2$. Temos que $Rep\,\tilde{Q}$ é equivalente a $Rep_M Q$, onde Q é da forma

$$1 \xrightarrow{a} 2\,.$$

Seja $G : Rep\,\tilde{Q} \to Rep_M Q$ o funtor equivalência entre as categorias e seja (W,ψ) a representação indecomponível $W_1 = W_2 = \mathbb{C}^n$ e $\psi = \{\psi_{a_1}, \psi_{a_2}\}$ com $[\psi_{a_1}] = I_n, [\psi_{a_2}] = J_\lambda$. Vamos calcular $G(W,\psi) = (V,\phi)$.

Se $\{e_1,\ldots,e_n\}$, $\{f_1,\ldots,f_n\}$ são bases de $\mathbb{C}^n$ e $\{x_1,x_2\}$ é base de $\mathbb{C}^2$ temos

$$\psi_{a_1}(e_i) = f_i,\ i = 1,\ldots,n;$$

$$\psi_{a_2}(e_1) = \lambda f_1,\ \psi_{a_2}(e_i) = f_{i-1} + \lambda f_i,\ i = 2,\ldots,n.$$

Logo $\phi_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$ é dada por

$$\phi_a(e_i) = \psi_{a_1}(e_i) \otimes x_1 + \psi_{a_2}(e_i) \otimes x_2,$$

isto é, se $i = 1$,

$$\phi_a(e_1) = f_1 \otimes x_1 + \lambda f_1 \otimes x_2,$$

e para $i = 2, \ldots, n$

$$\phi_a(e_i) = f_i \otimes x_1 + f_{i-1} \otimes x_2 + \lambda f_i \otimes x_2.$$

Se $\{f_1 \otimes x_1, \ldots, f_n \otimes x_1, f_1 \otimes x_2, \ldots, f_n \otimes x_2\}$ é base de $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$ então a matriz de ϕ_a é da forma

$$[\phi_a] = \begin{bmatrix} I_n \\ ... \\ J_\lambda \end{bmatrix}$$

e a representação M-torcida dada por $(V, \phi) = G(W, \psi)$, onde $V = W$ e $\phi = \phi_a$, é indecomponível de Q.

Referências Bibliográficas

[1] M. A. Arbib, E. G. Manes. *Arrows, structures and functors. The categorical imperative*. Academic Press, Inc., 1975.

[2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley. Massachusetts, 1969.

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. Smal∅. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 36. Cambridge University Press. Cambridge, 1995.

[4] H. Derksen. *Quiver representations*. Lecture notes, 2001. (http://www.math.lsa.umich.edu/%7Ehderksen/math711.w01/math711.html)

[5] H. Derksen, J. Weyman. *Quiver Representation*. Notices of the AMS 52 (2005), n.2, 200-206.

[6] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko. *Finite dimensional algebras*. Springer - Verlag, 1994.

[7] V. Fisher, E. Lopez, T. Macedo, L. Rabelo. *Quivers*. The Harvard College Mathematics Review. Vol 1, n.1, 2007.

[8] V. Futorny, M. Jardim, A. Moura. *On moduli spaces for abelian categories*. A ser publicado em Comm. Algebra (2008).

[9] P. Gabriel, A. V. Roiter. *Representations of finite-dimensional algebras*. Springer, 1997.

[10] S.I. Gelfand, Yu. I. Manin. *Methods of homological algebra*. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 1997.

[11] P. B. Gothen, A. D. King. *Homological algebra of twisted quiver bundles.* J. London Math. Soc. (2) 71 (2005), 85-99.

[12] P. J. Hilton, U. Stammbach. *A course in homological algebra.* Graduate Texts in Mathematics 4. Springer-Verlag, 1970.

[13] V. G. Kac. Infinite dimensional Lie algebras. Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[14] V. G. Kac. *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory.* Inventiones Math. 56 (1980), no.1, 57-92.

[15] C. Kassel. *Quantum groups.* Graduate Texts in Mathematics 155. Springer-Verlag, 1995.

[16] A. D. King. *Moduli of representations of finite-dimensional algebras.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 45 (1994), no. 180, 515-530.

[17] A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin. *Linear algebra and geometry.* Gordon and Breach, New York, 1981.

[18] S. MacLane. *Categories for the working mathematician.* Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag, 1971.

[19] R. Mendes. *Teoria geométrica dos invariantes e representações de quivers.* Dissert. Mestr. IMECC-UNICAMP (2006).

[20] A. Rudakov. *Stability for an abelian category.* Journal of Algebra 197 (1997), 231-245.

[21] A. Savage. *Finite-dimensional algebras and quivers.* Encyclopedia of Mathematical Physics. Volume 2, pages 313-320. Edited by J.-P. Françoise, G.L. Naber and Tsou S.T. Oxford: Elsevier, 2006.