Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Estruturas Complexas com Auto-Espaços Nilpotentes e Solúveis

Tese de Doutorado

Edson Carlos Licurgo Santos[1]

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin**

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP, processo nº 02/13020-5.

Estruturas Complexas com Auto-Espaços Nilpotentes e Solúveis

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Edson Carlos Licurgo Santos** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 25 de junho de 2007.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (Orientador) (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC - UNICAMP)
Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Laura Barberis (Università di Cordoba - Argentina)
Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes (IF-USP - São Carlos)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Santos, Edson Carlos Licurgo

Sa59e Estruturas complexas com auto-espaços nilpotentes e solúveis/ Edson Carlos Licurgo Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Álgebra de. 2. Grupos nilpotentes. 3. Grupos solúveis. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Complex structures having nilpotent and solvable eigenspaces

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie algebras. 2. Nilpotent groups. 3. Solvable groups

Área de concentração: Geometria

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC–Unicamp)
Prof^a^. Dr^a^. Maria Laura Barberis (Univ. Córdoba)
Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes (USP-São Carlos)

Data da defesa: 25/06/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutor em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de junho de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Prof. (a). Dr (a). MARIA LAURA BARBERIS

Prof. (a) Dr. (a) ESMERINDO DE SOUSA BERNARDES

Dedicatória

Este trabalho é dedicado a minha esposa Maria e aos meus filhos Daniel e Davi.

Agradecimentos

Quero expressar minha gratidão às seguintes pessoas e instituições:

À FAPESP, pelo apoio financeiro;

À secretaria de pós-graduação do IMECC-UNICAMP;

À minha esposa e meus filhos, pela paciência e incentivo.

Aos amigos do IMECC e de fora, que para não cometer injustiça, não vou citar nomes;

À banca examinadora, pelas valorosas contribuições.

Resumo

Seja $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ uma álgebra de Lie com uma estrutura complexa integrável J. Os $\pm i$-auto-espaços de J são subálgebras complexas de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ isomorfas a álgebra $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ com colchete $[X * Y]_J = \frac{1}{2}([X,Y] - [JX, JY])$. Consideramos, no capítulo 2, o caso onde estas subálgebras são nilpotentes e mostramos que a álgebra de Lie original $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ é solúvel. Consideramos também o caso 6-dimensional e determinamos explicitamente a única álgebra de Lie possível $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. Finalizamos esse capítulo pruduzindo vários exemplos ilustrando diferentes situações, em particular mostramos que para cada s existe $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J tal que $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ é s-passos nilpotente. Exemplos similares para estruturas hipercomplexas são também construidos.

No capítulo 3 consideramos o caso onde os $\pm i$-auto-espaços de J são subálgebras complexas solúveis e a álgebra complexa é uma álgebra de Lie semi-simples. Mostramos que, se a álgebra real é compacta, uma tal estrutura complexa depende unicamente de um subespaço da subálgebra de Cartan. Finalizamos esse capítulo considerando o caso em que as subálgebras solúveis complexas estão contidas em subálgebras de Borel de uma órbita aberta da ação dos automorfismos internos da álgebra real. Mostramos que, assim como no caso compacto, as estruturas complexas são determinandas, de modo único, por subespaços da subálgebra de Cartan.

Ao final da tese apresentamos um procedimento, elaborado em MAPLE, que possibilita testar a identidade de Jacobi quando os colchetes de Lie são dados pelas constantes de estrutura.

Abstract

Let $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ be a Lie algebra with an integrable complex structure J. The $\pm i$ eigenspaces of J are complex subalgebras of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ isomorphic to the algebra $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ with bracket $[X * Y]_J = \frac{1}{2}([X,Y] - [JX, JY])$. We consider, in chapter three, the case where these subalgebras are nilpotent and prove that the original Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ must be solvable. We consider also the 6-dimensional case and determine explicitly the possible nilpotent Lie algebras $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. We finish this chapter by producing several examples illustrating different situations, in particular we show that for each given s there exists $\mathfrak{g}$ with complex structure J such that $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ is s-step nilpotent. Similar examples of hypercomplex structures are also built.

In Chapter 3 we consider the case where the $\pm\, i$ eigenspaces of J are solvable complex subalgebras and $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ is a semisimple Lie algebra. We prove that, if $\mathfrak{g}$ is compact, such a complex structure comes from a subspace of the Cartan subalgebra. We finish this chapter by considering the case where the solvable complex subalgebras are contained in Borel subalgebras of an open orbit of the action of inner automorphisms of the real algebra.

At the end of the thesis we present an algorithm, made in MAPLE, that allow us to verify the Jacobi identity when the Lie brackets are defined by the structure constants.

Sumário

Introdução

Dada uma algebra de Lie real $\mathfrak{g}$ com uma estrutura complexa J, podemos escrever $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$, onde $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são os auto-espaços de J correspondentes aos autovalores i e $-i$, respectivamente. Estes auto-espaços são subálgebras de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ se, e somente se, J é uma estrutura complexa integrável, isto é, anula o tensor de Nijenhuis.

No capítulo 2 consideramos estruturas complexas para as quais os auto-espaços são subálgebras nilpotentes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Mostramos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}^{1,0}$ (ou equivalentemente $\mathfrak{g}^{0,1}$) é uma subálgebra nilpotente (ver teorema 2.8). A demonstração deste resultado é baseada num resultado dado por Goto [11], a saber, que uma álgebra de Lie semi-simples não pode ser escrita como soma de duas subálgebras nilpotentes.

Numa outra direção, aplicamos a classificação dada por Salamon [14] para determinar quais álgebras de Lie solúveis 6-dimensionais possuem estrutura complexa com $\mathfrak{g}^{1,0}$ nilpotente.

Atualmente as estruturas complexas sobre álgebras de Lie solúveis e nilpotentes são bastante estudadas. (ver, por exemplo, Dotti-Fino [7], [8], [9], [10], Barberis-Dotti [3] e Salamon [14]). Em particular, estruturas complexas abelianas foram consideradas em [9], onde foi provado que estas somente ocorrem em álgebras de Lie solúveis, e em [3], onde foi dada uma caracterização das álgebras de Lie solúveis que possuem estruturas complexas abelianas.

É importante observar que Cordero-Fernández-Gray-Ugarte [5], introduziram o conceito de estrutura complexa nilpotente impondo a condição de que a série ascendente de ideais $\mathfrak{a}_l(J)$, definida indutivamente por $\mathfrak{a}_0(J) = \{0\}$ e

$$\mathfrak{a}_l(J) = \{X \in \mathfrak{g}; [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_{l-1}(J) \text{ e } [JX, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_{l-1}(J)\}$$

acabe em $\mathfrak{g}$. Observamos que se J é nilpotente então a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é também nilpotente. Logo este conceito é mais forte que a condição de nilpotência dos auto-espaços $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$.

Desenvolvemos o capítulo 2 do seguinte modo. Na seção 2.1, seguimos Bartolomeis [4] e definimos um novo colchete de Lie $[*]_J$ sobre $\mathfrak{g}$ dado por $[X * Y]_J = \frac{1}{2}([X,Y] - [JX, JY])$. Este colchete satisfaz a identidade de Jacobi se, e somente se, J é integrável. Neste caso denotamos a álgebra de Lie obtida por $\mathfrak{g}_*$. Esta álgebra $\mathfrak{g}_*$ é uma álgebra de Lie complexa (com estrutura complexa J) isomorfa tanto a $\mathfrak{g}^{1,0}$ quanto a $\mathfrak{g}^{0,1}$. Observamos que estas álgebras são também isomorfas a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada pelo colchete $[X,Y]_J = \frac{1}{2}([JX,Y] + [X,JY])$.

Na seção 2.2 demonstramos que $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente. Como mencionamos anteriormente a demonstração deste resultado é baseada num lema de [11], cuja demonstração é reproduzida aqui com algumas modificações.

Na seção 2.3 determinamos as álgebras de Lie solúveis 6-dimensionais $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J tal que $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente. Mostramos que, para estas álgebras, $s = 1$ (isto é, $\mathfrak{g}_*$ é abeliana) ou $s = 2$ e existe uma base $\{f_1, \ldots, f_6\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ são dados por

$$[f_1 * f_3] = [f_4 * f_2] = -f_5, \;\; [f_1 * f_4] = [f_2 * f_3] = -f_6.$$

Logo existe apenas uma possibilidade para $\mathfrak{g}_*$ em dimensão 6.

Finalizamos o capítulo 2 com a seção 2.4, onde construimos exemplos de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J para a qual $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente para cada s dado. Construimos também exemplos similares de estruturas hypercomplexas.

Tendo sido estudadas as estruturas complexas cujos auto-espaços são nilpotentes, passamos a estudar as estruturas complexas, sobre álgebras de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$, cujos auto-espaços são solúveis. Na seção 3.1 exibimos uma maneira de se construir estruturas complexas com auto-espaço solúvel, a qual chamamos de estrutura complexa solúvel, através dos subespaços de uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ que satisfazem a condição

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} \text{ e } V \cap \tau(V) = \{0\}, \tag{1}$$

onde τ é a conjugação em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ associada a $\mathfrak{g}$.

Mostramos na seção 3.2 que a maneira exibida na seção 3.1 é o único modo de se obter estruturas complexas solúveis sobre álgebras de Lie semi-simples compactas. Em vista dos resultados de Snow [6], onde se prova que, sobre álgebras de Lie compactas, toda estrutura complexa é solúvel, podemos dizer que a maneira exibida na seção 3.1 é o único modo de se obter qualquer estrutura complexa sobre álgebras de Lie semi-simples compactas.

Na seção 3.3, consideramos estruturas complexas solúveis sobre álgebras de Lie semi-simples não compactas. Utilizamos o trabalho [17] de Wolf e mostramos que, fixada uma órbita aberta $\mathcal{A}$ da ação dos automorfismos internos da álgebra real sobre o conjunto das subálgebras de Borel, existe uma subálgebra de Cartan tal que toda subálgebra solúvel complexa, contida em alguma subálgebra de Borel de $\mathcal{A}$, é determinada por subespaços desta subálgebra de Cartan que satisazem a condição (1). Além disso, subálgebras solúveis contidas em subálgebras de Borel que não estão em órbitas abertas não determinam estruturas complexas.

Finalizamos a tese apresentando, no apêndice A, um procedimento elaborado em MAPLE que possibilita a rápida checagem da identidade de Jacobi de colchetes de Lie não nulos, fornecidos por suas constantes de estrutura. Este procedimento, cuja elaboração contou com a participação de Esmerindo de Sousa Bernardes (IFSC-USP), permite também saber quais são os possíveis valores das constantes de estrutura de um colchete de Lie, que se supõe não nulo, para que permaneça válida a identidade de Jacobi. Em outras palavras, o procedimento é bastante útil na construção de exemplos de álgebras de Lie de baixa dimensão.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo vamos introduzir os objetos de nosso estudo. Estaremos ocupados com definições, conceitos e resultados básicos que vão embasar os capítulos vindouros.

1.1 Álgebras de Lie

Lembramos que um **grupo de Lie** é um grupo G que é também uma variedade diferenciável tal que a aplicação $(g, h) \longrightarrow gh^{-1}$ é diferenciável (ver, por exemplo, [21] ou [18]). O exemplo clássico de grupo de Lie é o grupo das transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$.

A álgebra de Lie de um grupo de Lie, da qual tratemos nesta seção sempre nos servindo de [15], pode ser definida como sendo o espaço vetorial dos campos de vetores invariantes à direita, o espaço vetorial dos campos de vetores invariantes à esquerda ou ainda como o espaço tangente na identidade munido do colchete de Lie. Mais geralmente temos

Definição 1.1 *Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma* ***álgebra de Lie*** *se existe um produto (colchete)*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz:

1. bilinearidade,

2. anti-simetria , isto é, $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e

3. a identidade de Jacobi, isto é, $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$ é chamado de *subálgebra* de $\mathfrak{g}$. Já um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que satisfaz $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ é dito um *ideal* de $\mathfrak{g}$. O exemplo clássico de álgebra de Lie é o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n, com entradas num corpo $\mathbb{K}$, munido do colchete $[X, Y] = XY - YX$.

Definição 1.2 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Uma aplicação linear $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ que satisfaz $\rho([X, Y]) = [\rho X, \rho Y]$, isto é, que é um homomorfismo é chamada de* ***representação*** *de $\mathfrak{g}$ em V.*

Estaremos particularmente interessados na *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$, que é dada por $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, onde $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.3 *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:*

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} & \textit{e} & \mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] & & \mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\
\vdots & & \vdots \\
\mathfrak{g}^{(k)} = \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] & & \mathfrak{g}^{k} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}\right]
\end{array}
$$

onde $[A, B]$ denota o subespaço gerado por $\{[X, Y]\,; X \in A, Y \in B\}$, se A e B são subconjuntos de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^{(k)}, \ldots$ é a ***série derivada*** *de $\mathfrak{g}$ e que $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \ldots, \mathfrak{g}^k, \ldots$ é a* ***série central descendente*** *de $\mathfrak{g}$.*

Temos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ e $\mathfrak{g}^{k}$ são ideais de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$, $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^{k}$ e $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Definição 1.4 *Dada um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que*

1) $\mathfrak{g}$ é ***solúvel*** *se existir $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$ e*

2) $\mathfrak{g}$ é ***nilpotente*** *se existir $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$.*

O teorema de Engel diz que $\mathfrak{g}$ é nilpotente se, e somente se, $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel, chamado *radical solúvel*, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.5 *Dada um álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que:*

1) $\mathfrak{g}$ é ***semi-simples*** *se o radical solúvel de $\mathfrak{g}$ é nulo.*

2) $\mathfrak{g}$ é ***simples*** *se $\dim \mathfrak{g} \neq 1$ e os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$.*

Temos que as álgebras simples são também semi-simples. Além disso, se $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $\mathfrak{g}$ se decompõe em soma direta de ideais simples. Isto possibilita estender os resultados do caso simples para o caso semi-simples.

A *forma de Cartan-Killing* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a forma bilinear simétrica denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dada por $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,(X)\,\mathrm{ad}\,(Y))$. Envolvendo as definições anteriores temos os critérios de Cartan-Killing:

1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e $Y \in \mathfrak{g}$.

2. A forma de Cartan-Killing é não-degenerada, isto é, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ implica $X = 0$ se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é semi-simples.

O primeiro passo na direção das definições dos conceitos de peso (posteriormente raízes) e de subálgebra de Cartan é o seguinte teorema.

Teorema 1.6 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, um corpo algebricamente fechado, e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$, uma álgebra de Lie nilpotente, em V. Então existem funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de $\mathfrak{g}$ tais que se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

então V_{λ_i} é invariante pela representação ρ, isto é, $\rho(X)\ (V_{\lambda_i}) \subset V_{\lambda_i}, \forall\ X \in \mathfrak{g}$ $1 \leq i \leq s$ e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Definição 1.7 *Um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ para o qual*

$$0 \neq V_\lambda = \{v \in V; \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

*é chamado de **peso.** Aqui $\mathfrak{g}$, V e a representação ρ são quaisquer.*

O subespaço V_λ da definição acima é dito *subespaço de pesos associado* a λ. A dimensão de V_λ é chamada de *multiplicidade* de λ.

Proposição 1.8 *Se $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação, isto é, uma aplicação linear que satisfaz $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

é a decomposição primária de $\mathfrak{g}$, onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g}; (D - \lambda_i)^n X = 0,\ \textit{para algum } n \geq 1\},$$

então $\left[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}\right] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de D.

Como ad (X) é uma derivação, para cada $X \in \mathfrak{g}$, podemos reescrever a proposição acima em termos de ad (X). Neste caso, zero é sempre autovalor, pois $X \in \ker \operatorname{ad}(X)$. Denotamos por $\mathfrak{g}_0(X)$ o auto espaço generalizado associado ao autovalor nulo de ad (X).

Podemos agora definir subálgebras de Cartan.

Definição 1.9 *Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que é nilpotente e cujo normalizador em $\mathfrak{g}$ é o próprio $\mathfrak{h}$, isto é, $\{X \in \mathfrak{g}; \operatorname{ad}(X)\,\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}$, é dita* ***subálgebra de Cartan****.*

No teorema 1.6, vamos tomar $V = \mathfrak{g}$ e ρ a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$. Como a representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em si mesma é nilpotente, o funcional nulo é sempre um peso dessa representação. Denotamos por $\mathfrak{g}_0$ o subespaço correspondente. As condições da definição de $\mathfrak{h}$ permitem ver que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Os pesos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ são chamados de *raízes.* Seu conjunto é denotado por Π e este gera o dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. Existem subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}$ e, além disso, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0\,(X)$. Outro fato relevante é que as subálgebras de Cartan são conjugadas entre si, isto é, uma é imagem da outra por automorfismos de $\mathfrak{g}$. O grupo dos automorfismo de $\mathfrak{g}$ é denotado $Aut(\mathfrak{g})$ e o grupo dos automorfismo internos de $\mathfrak{g}$, gerado pelo conjunto $\{\exp(\operatorname{ad}(X)), X \in \mathfrak{g}\}$, é denotado por $Int(\mathfrak{g})$

Por tudo que vimos até aqui, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre o corpo dos complexos, dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, denotando por Π o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, podemos escrever

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha\,(H)\,X\}$ e este é unidimensional.

Temos também que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não-degenerada sobre $\mathfrak{h}$. Logo, a aplicação $\mathfrak{h} \ni H \longmapsto \alpha_H\,(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle \in \mathfrak{h}^*$ é um isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$. Para cada $\mathfrak{h}^*$, denotamos por H_α sua imagem pela inversa desse isomorfirmo. Segue que $\alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$.

Fixando estas notações, podemos definir a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{h}^*$ pondo $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$. Denotamos por

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha H_\alpha ; a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

o subespaço real gerado por $H_\alpha, \alpha \in \Pi$, e por $(\mathfrak{h}^*)_\mathbb{R} = \left\{ \sum\limits_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha;\, a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$ o subespaço real do dual $\mathfrak{h}^*$ gerado pelas raízes.

Fixada uma ordem lexicográfica, dada por uma base de $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$, o conjunto $\Sigma \subset \Pi$, formado pelas raízes simples, isto é, pelos elementos α que são positivos e para os quais não existem raízes positivas β, γ satisfazendo $\alpha = \beta + \gamma$, é um sistema simples de raízes. Isto significa que Σ é uma base de $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$ e toda raíz β é escrita como $\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l$, com $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq l$. Reciprocamente, podemos partir de um sistema de raízes e definir uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$.

Finalizamos esta seção lembrando mais três importantes definições.

Definição 1.10 *Uma **conjugação** em um espaço vetorial complexo é uma transformação antilinear τ que satisfaz $\tau^2 = 1$, onde 1 é a identidade.*

Definição 1.11 *Seja $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie sobre o corpo dos complexos. Uma **forma real** de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra $\mathfrak{g}_0$ da realificada de $\mathfrak{g}$, que é o subespaço dos pontos fixos de uma conjugação τ que satisfaz $\tau[X,Y] = [\tau X, \tau Y]$. Neste caso $\mathfrak{g}$ é a complexificada de $\mathfrak{g}_0$.*

Definição 1.12 *Dizemos que uma álgebra de Lie rel é **compacta** se sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.*

1.2 Subálgebras de Borel

Para uma escolha de raízes positivas $\Pi^+ \subset \Pi$, seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{n}^+ = \sum\limits_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$. A subálgebra $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ é chamada de **subálgebra de Borel** gerada por Π^+. Se supomos que $\mathfrak{g}$ é complexa e semi-simples, então toda subálgebra solúvel de $\mathfrak{g}$ é conjugada, por um automorfismo interno de $\mathfrak{g}$, a uma subálgebra de $\mathfrak{b}$, conforme [2]. Em particular, subálgebras de Borel são subálgebras solúveis maximais, no sentido que toda subálgebra solúvel está contida em alguma subálgebra de Borel. Em álgebras de Lie semi-simples as subálgebras de Borel são justamente as subálgebras solúveis maximais.

Sejam G um grupo de Lie complexo semi-simples conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{b}$ uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Seja $P = \{g \in G; \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\}$ o normalizador de $\mathfrak{b}$ em G. Temos que a álgebra de Lie de P é $\mathfrak{b}$. Como G é complexo, P é conexo e é o único subgrupo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{b}$.

Seja $G_{r_k}(\mathfrak{g})$ o conjunto das grassmannianas dos subespaços de dimensão k, onde $k = \dim \mathfrak{b}$. Temos que $\varphi : G \times G_{r_k}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G_{r_k}(\mathfrak{g})$, dada por $\varphi(g, V) = \mathrm{Ad}(g) V$, é uma ação de G sobre $G_{r_k}(\mathfrak{g})$. Também, $\psi : G/P \longrightarrow G_{\mathfrak{b}}$, dada por $\psi(gP) = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b}$, é uma bijeção entre G/P e a órbita de $\mathfrak{b}$ da ação φ, pois $\mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g^{-1})$, para todo $g \in G$. Desta forma G/P se identifica com $G_{\mathfrak{b}} = \{\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b}; g \in G\}$. O conjunto G/P é visto como uma variedade complexa e conhecido na literatura como variedade "flag".

Agora, dada uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}_1$ de $\mathfrak{g}$, temos que existe $X \in \mathfrak{g}$, tal que $\exp(\mathrm{ad}(X))\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$. Como $\exp(\mathrm{ad}(X)) = \mathrm{Ad}(\exp(X))$, então $\mathfrak{b}_1 \in G_{\mathfrak{b}}$ e podemos identificar G/P como o conjunto das subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$.

Consideramos uma forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$, o subgrupo $G_{\mathfrak{u}}$ de G com álgebra de Lie $\mathfrak{u}$ e a restrição a $G_{\mathfrak{u}}$ da ação natural de G em G/P. Então $G_{\mathfrak{u}}$ atua transitivamente sobre G/P. De fato, a órbita da origem G_1 de G/P é aberta. Como $G_{\mathfrak{u}}$ é compacto, então G_1 é fechada. Portanto $G_1 = G/P$, pois G/P é conexo. Os detalhes desta construção podem ser visto, por exemplo, em [17].

Temos então que o grupo dos automorfismos internos de $\mathfrak{u}$ atua transitivamente sobre o conjunto das subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$.

1.3 Estruturas complexas

Definição 1.13 *Uma* ***estrutura complexa*** *sobre uma álgebra de Lie real* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *é um endomorfismo J sobre $\mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -I$. No que segue vamos sempre supor que J é integrável, isto é, $N_J = 0$, onde N_J é o tensor de Nijenhuis de J:*

$$N_J(X,Y) = J[X,Y] - [JX,Y] - [X,JY] - J[JX,JY].$$

Dada uma estrutura complexa J sobre $\mathfrak{g}$, sua complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ pode ser escrita como $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$, onde

$$\mathfrak{g}^{1,0} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}; JX = iX\} \text{ e } \mathfrak{g}^{0,1} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}; JX = -iX\}$$

são os $\pm i$-auto-espaços de J. Temos $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são subálgebras complexas $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, pois J é integrável .

Por outro lado, se denotamos por τ a conjugação em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ associada a forma real $\mathfrak{g}$, ou seja, $\tau(X+iY) = X - iY$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então a álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ tem uma estrutura complexa J se $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ possui uma decomposição

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{q} \oplus \tau(\mathfrak{q}) \tag{1.1}$$

onde $\mathfrak{q}$ é uma subálgebra complexa de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. De fato, dada uma subálgebra complexa satisfazendo (1.1), definimos uma estrutura complexa J sobre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ pondo $J(X) = -iX$ e $J(\tau(X)) = i\tau(X)$, para $X \in \mathfrak{q}$. Temos que $J \circ \tau = \tau \circ J$, o que mostra que podemos definir J sobre $\mathfrak{g}$. Além disso, a integrabilidade de J segue do fato de que $\mathfrak{q}$ é uma subálgebra. Obtemos desta forma uma correspondência 1-1 entre estruturas complexas J e subálgebras $\mathfrak{q}$ que satisfazem (1.1).

Queremos agora lembrar uma importante definição.

Definição 1.14 *Sejam J_1 e J_2 duas estruturas complexas sobre uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$. Dizemos que J_1 e J_2 são **equivalentes** se existe $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ tal que $\phi \circ J_1 = J_2 \circ \phi$.*

Podemos observar que, em termos de subálgebras complexas, $\mathfrak{q}_1$ e $\mathfrak{q}_2$ determinam estruturas complexas equivalentes se existe $\phi \in Aut\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)$ tal que $\phi \circ \tau = \tau \circ \phi$ e $\phi(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_2$. De fato, os automorfismos de $\mathfrak{g}$ são os automorfismo de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ que comutam com τ.

Vamos também necessitar da seguinte definição envolvendo estruturas complexas.

Definição 1.15 *Dizemos que uma estrutura complexa J sobre $\mathfrak{g}$ é **adaptada** se ela comuta com $\mathrm{ad}(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, isto é, se*

$$[X, JY] = J\,[X, Y]\,.$$

No caso de J ser uma estrutura complexa adaptada $\mathfrak{g}$ passa a ser uma álgebra de Lie complexa se definimos a multiplicação por escalares complexos através de J. Os detalhes podem ser vistos em [19], capítulo IX.

Podemos observar que se J é uma estrutura complexa adaptada, então J é integrável. De fato,

$$\begin{aligned} & J[X,Y] - [JX,Y] - [X,JY] - J[JX,JY] \\ = \; & J[X,Y] - J[X,Y] - J[X,Y] + J[X,Y] \\ = \; & -J[X,Y] + [JX,Y] = 0. \end{aligned}$$

Definição 1.16 *Uma **estrutura hipercomplexa** sobre uma álgebra de Lie real $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ é um par de estruturas complexas $\{J_1, J_2\}$ tal que $J_1 \circ J_2 = -J_2 \circ J_1$.*

1.4 Decomposição de Bruhat das Grassmannianas

Vamos transcrever aqui a parte do trabalho de San Martin [24] que faz a identificação das Grassmannianas dos subespaços k-dimensionais de $\mathbb{C}^d$ com o conjunto das matrizes complexas $d \times k$, módulo uma relação de equivalência. Esta construção é necessária para o desenvolvimento das seções 3.2 e 3.3.

Para $1 \leq k \leq d-1$ denotamos por $\mathrm{Gr}_k(d)$ as Grassmannianas dos subespaços k-dimensional de $\mathbb{C}^d$. Vamos usar uma das maneiras canônicas de representar algebricamente os elementos de $\mathrm{Gr}_k(d)$. Fixada uma base β de $\mathbb{C}^d$, um conjunto de k vetores linearmente independente é dado por uma matriz $d \times k$ cujas colunas são as coordenadas dos vetores com relação à base β. Desta forma, um subespaço k-dimensional será descrito por uma matriz $d \times k$ de posto k. Denotamos por $B_k(d)$ o conjunto destas matrizes. Dois elementos $p, q \in B_k(d)$ definem o mesmo subespaço k-dimensional se, e somente se, as colunas de p são combinações lineares das colunas de q, que é equivalente à existência de uma $k \times k$ matriz inversível a tal que $p = qa$. Isto define uma relação de equivalência em $B_k(d)$, denotada por $\sim$. O conjunto das classes de equivalência desta relação estão em correspondência 1-1 com os elementos de $\mathrm{Gr}_k(d)$. Esta correspondência permite uma descrição algébrica das Grassmannianas.

Como a imagem de um subespaço k-dimensional por uma aplicação linerar inversível é um subespaço de mesma dimensão, existe uma ação natural de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{Gr}_k(d)$, para qualquer $1 \leq k \leq d-1$. Nos termos da descrição dos subespaços k-dimensional como classes de equivalência em $B_k(d)$, esta ação é justamente a multiplicação de uma matriz $d \times d$ por uma matriz $d \times k$. Como qualquer matriz $d \times k$ de posto k pode ser completada a uma matriz $d \times d$ com determinante 1, então a ação de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{Gr}_k(d)$ é transitiva, isto é, quaisquer dois subespaços são aplicados um no outro por um elemento de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$. Isto faz de $\mathrm{Gr}_k(d)$ um espaço homogêneo de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$. A isotropia é o subgrupo H_k daquelas matrizes que, em alguma base, são escritas em blocos diagonais de tamanho k e $d-k$ como

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Logo $\mathrm{Gr}_k(d) = \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})/H_k$. A restrição da ação de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ ao subgrupo $\mathrm{SO}(d, \mathbb{R})$ das matrizes ortogonais com determinante 1 é também transitiva sobre $\mathrm{Gr}_k(d)$. A isotropia desta ação é o subgrupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

que é isomorfo a $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(d-k)/\{\pm 1\}$. Portanto $\mathrm{Gr}_k(d)$ é uma variedade compacta de dimensão $k(d-k)$.

Como $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ é simples, podemos considerar a decomposição de Bruhat das Grassmannianas, na qual realmente estamos interessados. Consideramos uma base $\beta = \{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathbb{C}^d$ e denotamos por N_β o grupo unipotente das aplicações lineares cujas matrizes, com relação a base β, são triangulares inferiores com 1 na diagonal principal. A decomposição de Bruhat (ou melhor, uma decomposição de Bruhat) é a decomposição de $\mathrm{Gr}_k(d)$ em N_β-órbitas. O número das órbitas é finito e ele é precisamente $N_\beta \xi$, onde ξ é um subespaço k-dimensional gerado por subconjuntos de k elementos de β. Existe somente uma órbita aberta (e portanto densa) que é a órbita $N_\beta \xi_0$, onde ξ_0 é o subespaço gerado pelos k primeiros vetores da base. Claro que, mudando a base, a decomposição também muda. Nos termos da representação acima dos subespaços como matrizes $d \times k$, esta órbita aberta corresponde as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},$$

onde 1 indica a matriz identidade de ordem k e x é uma matriz arbitrária $(d-k) \times k$. De fato, ξ_0 é representado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $n \in N_\beta$ em blocos como

$$n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ y & b \end{pmatrix}$$

com a e b inversíveis, temos que $n\xi_0$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ ya^{-1} \end{pmatrix}.$$

Observamos que, assim como N_β, as componentes desta decomposição são, como variedades, difeomorfas a espaços Euclidianos.

Capítulo 2

Auto-espaços nilpotentes

Neste capítulo consideramos estruturas complexas para as quais os auto-espaços são subálgebras nilpotentes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Mostramos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}^{1,0}$ (ou equivalentemente $\mathfrak{g}^{0,1}$) é uma subálgebra nilpotente (ver teorema 2.8).

Usando teoria geral e aplicando a classificação dada por Salamon [14] mostramos, de dois modos diferentes que, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel de dimensão 6, então existe uma única subálgebra complexa $\mathfrak{g}^{1,0}$ nilpotente, independentemente da estrutura complexa J. Exemplos de estruturas complexas com $\mathfrak{g}^{1,0}$ nilpotente são apresentados no final do capítulo.

2.1 O colchete *

Para estudar a estrutura complexa J definimos em $\mathfrak{g}$ um novo colchete de Lie $[*]_J$, tal que as realificadas de $\mathfrak{g}^{1,0}$ e de $\mathfrak{g}^{0,1}$ são álgebras de Lie isomoformas a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$.

Definição 2.1 *Seja* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *uma álgebra de Lie com uma estrutura complexa* J. *Definimos*

$$[*]_J : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \text{por}$$
$$[X * Y]_J = \frac{1}{2}\left([X,Y] - [JX, JY]\right).$$

É fácil ver que $[*]_J$ é bilinear, anti-simétrica. Além disso $N_J = 0$ implica na identidade de Jacobi de $[*]_J$.

Proposição 2.2 *Se* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *uma álgebra de Lie com uma estrutura complexa* J, *então o colchete* $[*]_J$ *satisfaz a identidade de Jacobi.*

Demonstração: Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos que

$$
\begin{aligned}
& [X,[Y*Z]_J]_J + [Z,[X*Y]_J]_J + [Y,[Z*X]_J]_J \\
= & \left[X, \frac{1}{2}\left([Y,Z]-[JY,JZ]\right)\right]_J + \left[Z, \frac{1}{2}\left([X,Y]-[JX,JY]\right)\right]_J \\
& + \left[Y, \frac{1}{2}\left([Z,X]-[JZ,JX]\right)\right]_J \\
= & \frac{1}{2}\left(\left[X, \frac{1}{2}\left([Y,Z]-[JY,JZ]\right)\right] - \left[JX, J(\frac{1}{2}\left([Y,Z]-[JY,JZ]\right))\right]\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\left[Z, \frac{1}{2}\left([Z,Y]-[JX,JY]\right)\right] - \left[JZ, J(\frac{1}{2}\left([X,Y]-[JX,JY]\right))\right]\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\left[Y, \frac{1}{2}\left([Z,X]-[JZ,JX]\right)\right] - \left[JY, J(\frac{1}{2}\left([Z,X]-[JZ,JX]\right))\right]\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\left[X, \frac{1}{2}\left([Y,Z]-[JY,JZ]\right)\right] - \left[JX, \frac{1}{2}\left([JY,Z]+[Y,JZ]\right)\right]\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\left[Z, \frac{1}{2}\left([X,Y]-[JX,JY]\right)\right] - \left[JZ, \frac{1}{2}([JX,Y]+[X,JY])\right]\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\left[Y, \frac{1}{2}\left([Z,X]-[JZ,JX]\right)\right] - \left[JY, \frac{1}{2}[JZ,X]+[Z,JX])\right]\right) \\
= & \frac{1}{4}\{([X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]) + ([X,[JY,JZ]]+[JY,[JZ,X]] \\
& + [JZ,[X,JY]]) + ([Z,[JX,JY]]+[JX,[JY,Z]]+[JY,[Z,JX]]) \\
& + ([JZ,[JX,Y]]+[JX,[Y,JZ]]+[Y,[JZ,JX]])\} \\
= & \ 0.
\end{aligned}
$$

A última igualdade se deve a validade da identidade de Jacobi para o colchete $[\cdot,\cdot]$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Vale observar que para uma estrutura complexa J qualquer a permutação cíclica de $[X*[Y*Z]]$ é igual a permutação cíclica de $\frac{1}{4}[JX, N_J(JY,Z)]$. No que segue denotamos a álgebra de Lie $(\mathfrak{g},[*]_J)$ por $\mathfrak{g}_*$. Em geral os colchetes $[\cdot,\cdot]$ e $[*]$ são diferentes. Claro que, $[\cdot,\cdot]=[*]$ se, e somente se, $[X,Y]=-[JX,JY]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Se J é uma estrutura complexa adaptada então,

$$
\begin{aligned}
[X,Y] &= -[X,JJY] = -J[X,JY] = J[JJX,JY] \\
&= -J[JY,JJX] = [JY,JX] \\
&= -[JX,JY],
\end{aligned}
$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Isto mostra que se J é adaptada então $[\cdot,\cdot] = [*]$. Reciprocamente, como veremos na proposição 2.3, se $[\cdot,\cdot] = [*]$, então $\mathfrak{g}_*$ (e consequentemente $\mathfrak{g}$) é complexa com relação a J.

Proposição 2.3 *Seja* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *uma álgebra de Lie com estrutura complexa* J. *Então* J *é adaptada a* $(\mathfrak{g}, [*]_J)$. *Logo* $\mathfrak{g}_*$ *é uma álgebra de Lie complexa.*

Demonstração: Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos que

$$\begin{aligned} J\,[X * Y]_J &= \frac{1}{2}(J([X,Y] - [JX, JY])) = \frac{1}{2}([JX,Y] + [X, JY]) \\ &= \frac{1}{2}([JX,Y] - [JJX, JY]) = [JX * Y]_J\,, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Da proposição acima concluimos que $[X * *Y]_J = [X * Y]_J$ onde

$$[X * *Y]_J = \frac{1}{2}\left([X * Y]_J - [JX * JY]_J\right)$$

é o colchete $*$ da álgebra $\mathfrak{g}_*$. Uma outra conseqüência da proposição anterior é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 2.4 *Seja* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *uma álgebra de Lie com estrutura complexa* J. *Então* J *é integrável com relação a* $[*]_J$.

Demonstração: Como J é adaptada a $(\mathfrak{g}, [*]_J)$, então pela observação feita no final da seção 1.3, J é integrável com relação a $[*]_J$. $\square$

Observação: A discussão acima mostra que a condição $N_J = 0$ juntamente com $[X, Y] = -[JX, JY]$ é equivalente ao fato de J ser adaptada. Se G é um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a condição de integrabilidade $N_J = 0$ diz que J pode ser estendido a uma estrutura complexa sobre G que é invariante a esquerda, isto é, as translações a esquerda são aplicações holomorfas. A condição extra $[X, Y] = -[JX, JY]$ é a que falta para tornar J bi-invariante em G.

Observação: Uma estrutura complexa J pode dar ainda outra estrutura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$, a saber

$$[X, Y]_J = \frac{1}{2}\left([JX, Y] + [X, JY]\right).$$

Temos também que o colchete $[\cdot,\cdot]_J$ satisfaz a identidade de Jacobi se, e somente se, J é integrável com relação ao colchete original. Além disso, a álgebra de Lie obtida desta forma é isomorfa a $\mathfrak{g}_*$. De fato, um cálculo fácil, usando $N_J = 0$, mostra que $-J\,[X * Y]_J = [-JX, -JY]_J$. Logo $-J$ é um isomorfismo entre $[*]_J$ e $[\cdot,\cdot]_J$.

Em geral, se uma estrutura complexa J é adaptada a $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$, então $\mathfrak{g}^{1,0}$ é um ideal de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. De fato, se $X \in \mathfrak{g}^{1,0}$ e $Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, então

$$J[X,Y] = [JX,Y] = [iX,Y] = i[X,Y],$$

o que mostra que $[X,Y] \in \mathfrak{g}^{1,0}$. De modo análogo se motra que $\mathfrak{g}^{0,1}$ é também um ideal de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Esta observação juntamente a proposição 2.3 nos dá o seguinte corolário.

Corolário 2.5 *Seja $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ uma álgebra de Lie com estrutura complexa J. Então $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são ideais da complexificada $\mathfrak{g}_*^{\mathbb{C}}$.*

Além disso, temos também a seguinte proposição.

Proposição 2.6 *Seja J uma estrutura complexa sobre $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$. Então as álgebras de Lie complexas $(\mathfrak{g}, [*]_J)$, $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ são isomorfas.*

Demonstração: Observamos que $\mathfrak{g}^{1,0} = \{X - iJX; X \in \mathfrak{g}\}$. Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{1,0}$ dada por $\varphi(X) = \frac{1}{2}(X - iJX)$. Como, para todo $X \in \mathfrak{g}$ tem-se $\varphi(JX) = i\varphi(X)$, então φ é uma aplicação linear complexa. Além disso, como J é integrável, então

$$\begin{aligned}
[\varphi(X), \varphi(Y)] &= [\frac{1}{2}(X - iJX), \frac{1}{2}(Y - iJY)] \\
&= \frac{1}{4}([X,Y] + [X, -iJY] + [-iJX, Y] + [-iJX, -iJY]) \\
&= \frac{1}{4}([X,Y] - [JX,JY] - i[JX,Y] + [X,JY]) \\
&= \frac{1}{4}([X,Y] - [JX,JY]) - \frac{1}{4}iJ([X,Y] - [JX,JY]) \\
&= \frac{1}{2}\left([X*Y]_J - iJ\,[X*Y]_J\right) \\
&= \varphi\,[X*Y]_J
\end{aligned}$$

Logo φ é um isomorfismo entre $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ e $\mathfrak{g}^{1,0}$. Analogamente, $\mathfrak{g}^{0,1} = \{X + iJX; X \in \mathfrak{g}\}$ e $\psi(X) = \frac{1}{2}(X + iJX)$ é um isomorfismo entre $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ e $(\mathfrak{g}^{0,1})$. □

Esta proposição permite concluir que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente se $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Também, se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então $\mathfrak{g}_*$ é solúvel. A recíproca de ambas as afirmações não é verdadeira em geral. De fato, existem exemplos onde $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente e $\mathfrak{g}$ é solúvel, mas não é nilpotente (ver exemplo 2.12). Também existem exemplos onde $\mathfrak{g}_*$ é solúvel e $\mathfrak{g}$ é simples, como veremos no capítulo 3. Na próxima seção vamos mostrar que $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente.

Agora, se J_1 e J_2 são estruturas complexas equivalentes, então $\left(\mathfrak{g}, [*]_{J_1}\right)$ e $\left(\mathfrak{g}, [*]_{J_2}\right)$ são isomorfas como álgebras reais. De fato, seja $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ tal que $\phi \circ J_1 = J_2 \circ \phi$. Logo,

$$\begin{aligned}
[\phi X, \phi Y]_{J_2} &= \frac{1}{2}([\phi X, \phi Y] - [J_2\phi X, J_2\phi Y]) \\
&= \frac{1}{2}([\phi X, \phi Y] - [\phi J_1 X, \phi J_1 Y]) \\
&= \frac{1}{2}(\phi [X, Y] - \phi [J_1 X, J_1 Y]) \\
&= \phi(\frac{1}{2}([X, Y] - [J_1 X, J_1 Y])) \\
&= \phi [X, Y]_{J_1}.
\end{aligned}$$

Para uso futuro vamos explicitar a série central descendente de $\mathfrak{g}_*$. Temos, indutivamente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_*^0 &= \mathfrak{g}, \\
\mathfrak{g}_*^k &= \operatorname{span}\left\{[X, Y] - [JX, JY]; X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}_*^{k-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Em particular, $\mathfrak{g}_*$ é abeliano se, e somente se,

$$[JX, JY] = [X, Y], \forall\ X, Y \in \mathfrak{g}.. \tag{2.1}$$

De acordo com [3] uma estrutura complexa J sobre uma álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ é dita abeliana se a condição (2.1) for satisfeita. Temos que esta condição implica na nulidade do tensor de Nijenhuis. Motivados por este fato, diremos que uma estrutura complexa J sobre $\mathfrak{g}$ é *s-passos nilpotente* se é integrável e $\mathfrak{g}_*$ *é* s-passos nilpotente. Observamos que este conceito é diferente do conceito de estrutura complexa nilpotente dado em [5].

2.2 $\mathfrak{g}$ é solúvel se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente

Em [9], Proposição 3.1, foi demonstrado que estruturas complexas abelianas somente podem ocorrer em álgebras de Lie solúveis. Nossa proposta nesta seção é generalizar este resultado mostrando que se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ é solúvel. Nossa demonstração é baseada em um lema de Goto [11]. Para este lema, que-remos apresentar aqui uma demonstração um pouco mais detalhada e com algumas modificações.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Denotamos por Π o sistema de raízes correspondente. Seja Π^+ o conjunto de raízes positivas com relação a escolha de uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}$. Escrevemos $\mathfrak{n}^+ = \sum\limits_{\alpha\in\Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$, onde $\mathfrak{g}_\alpha$ é o espaço de raíz correspondente a α. Então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-,$$

onde $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in\Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\Pi^- = -\Pi^+$. Também, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ e, como vimos na seção 1.2, as subálgebras de Borel são subálgebras solúveis maximais de $\mathfrak{g}$ e são todas elas conjugadas por um automorfismo interno de $\mathfrak{g}$ à subalgebra $\mathfrak{b}$ (ver também [2], [16] ou [12]).

Lema 2.7 (Goto, [10]) *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Sejam $d = \dim \mathfrak{g}$ e $l = \dim \mathfrak{h}$ o posto de $\mathfrak{g}$. Supomos que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra nilpotente. Então*

$$\dim \mathfrak{n} \leq \frac{d-l}{2} = \dim \mathfrak{b} - l$$

onde $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Borel.

Demonstração: Como $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$. Denotamos por $\mathfrak{a}$ o conjunto de todos os elementos semi-simples de $\mathfrak{n}$. Se $A \in \mathfrak{a}$ sua adjunta $\mathrm{ad}(A)$ é uma transformação linear semi-simples de $\mathfrak{g}$. Logo $\mathrm{ad}(A)$, restrita a $\mathfrak{n}$, é nilpotente e temos $\mathrm{ad}\,(A) = 0$ sobre $\mathfrak{n}$. Segue que $\mathfrak{a}$ é um ideal de $\mathfrak{n}$ contido no centro $\mathfrak{z}\,(\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{n}$.

Afirmamos que $\mathfrak{a}$ está contido em uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{b}$. Para mostrar isto, vamos lembrar que as subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ são exatamente as subálgebras abelianas maximais cujos elementos são semi-simples (ver [16], Capítulo III). Esta caracterização vale também para as subálgebras de Cartan de $\mathfrak{b}$. De fato, $\mathfrak{h}$ é também uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{b}$ e, consequentemente, qualquer subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{b}$ é abeliana maximal e seus elementos são semi-simples, pois $\mathfrak{h}_1$ é conjugada a $\mathfrak{h}$ por um automorfismo interno de $\mathfrak{b}$. Reciprocamente, se $\mathfrak{h}_2$ é abeliana maximal e seus elementos são semi-simples, então $\mathfrak{h}_2$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e, consequentemente, de $\mathfrak{b}$. Agora, $\mathfrak{a}$ é abeliana e seus elementos são semi-simples. Logo $\mathfrak{a}$ está contida em uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{b}$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}.$$

Além disso, como qualquer elemento de $\mathfrak{a}$ é semi-simples, temos que

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{a}.$$

Seja $\Theta = \{\alpha \in \Pi^+ : \alpha(H) = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$ e seja $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Theta} \mathfrak{g}_\alpha$. Temos que, $\mathfrak{m}_1$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{b}$. Logo $\mathfrak{h} + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}_1$. Portanto

$$\dim \mathfrak{m}_1 \geq \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{n} + l - k \tag{2.2}$$

onde $k = \dim \mathfrak{a}$.

Por outro lado, se pomos $\mathfrak{m}_2 = \sum_{\alpha\in\Pi^+\setminus\Theta} \mathfrak{g}_\alpha$ então $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$. Afirmamos que $\dim \mathfrak{m}_2 \geq k$. De fato, seja Σ o sistema simples de raíz contido em Π^+. Σ é uma base do dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. Logo existem pelo menos k raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \Sigma$, $s \geq k$, que não estão em Θ. Logo os espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$, estão contidos em $\mathfrak{m}_2$, o que mostra que $\dim \mathfrak{m}_2 \geq k$.

Combinando esta igualdade com (2.2) temos que

$$\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{m}_1 + \dim \mathfrak{m}_2 \geq \dim \mathfrak{n} + l,$$

o que mostra que $\dim \mathfrak{n} \leq \dim \mathfrak{b} - l$, como queríamos. □

Agora estamos preparados para o principal resultado desta seção.

Teorema 2.8 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com estrutura complexa, tal que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: Escrevemos a complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$ como soma direta de duas subálgebras nilpotentes.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}.$$

Vamos supor que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ não é solúvel. Seja $\mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)$ o radical solúvel de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. A álgebra de Lie $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{r}\left(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\right)$ é semi-simples. Sejam $\mathfrak{n}_1$ e $\mathfrak{n}_2$ as respectivas projeções de $\mathfrak{g}^{1,0}$ e $\mathfrak{g}^{0,1}$ sobre $\mathfrak{s}$. Temos que, $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$. Além disso, tanto $\mathfrak{n}_1$ como $\mathfrak{n}_2$ são subálgebras nilpotentes de $\mathfrak{s}$. Logo, pelo lema 2.7, $\dim \mathfrak{n}_1 < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{s}$ e $\dim \mathfrak{n}_2 < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{s}$. Isto é uma contradição a menos que se tenha $\mathfrak{s} = \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{g}$ solúvel. □

Em vista do resultado acima, é natural querermos relacionar o grau de nilpotência de $\mathfrak{g}_*$ como grau de solubilidade de $\mathfrak{g}$. Vale mencionar aqui que, nesta direção, foi demonstrado por Andrada-Barberis-Dotti-Ovando [1] (ver também [13]) que $\mathfrak{g}$ é 2-passos solúvel se $\mathfrak{g}_*$ é abeliana.

2.3 Álgebras de Lie de dimensão 6

Nesta seção queremos determinar quais as álgebras de Lie nilpotentes 6-dimensional são $\mathfrak{g}_*$ para alguma estrutura complexa integrável. Começamos observando que não há o que fazer no caso 4-dimensional. De fato, se $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente então é abeliana pois é uma álgebra de Lie complexa 2-dimensional. No caso 6-dimensional temos que $\mathfrak{g}^{1,0}$, $\mathfrak{g}^{0,1}$ e $\mathfrak{g}_*$ são subálgebras complexas 3-dimensional e portanto são nilpotentes ou são isomorfas a álgebra de Heisenberg. Queremos aqui deixar uma demonstração para este fato, apesar do mesmo já ser bastante conhecido.

Lema 2.9 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente 3-dimensional, então $\mathfrak{g}$ é no máximo 2-passos nilpotente. Em particular, $\mathfrak{g}$ é abeliano ou isomorfa a álgebra de Heisenberg.*

Demonstração: Se $\dim \mathfrak{g}^1 = 0$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana. Se $\dim \mathfrak{g}^1 = 1$, então $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é 2-passos nilpotente, ou $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^1$, o que contradiz o fato de $\mathfrak{g}$ ser nilpotente. Se $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$, então $\mathfrak{g}^1$ é abeliana ou existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}^1$ tal que $[X, Y] = Y$. Neste caso $Y \in \mathfrak{g}^k$, para todo k, o que contradiz o fato de $\mathfrak{g}$ ser nilpotente. Logo $\mathfrak{g}^1$ é abeliana. Agora, seja $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}^1$. Então $\mathrm{ad}(X)\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{g}^1$, e como $\mathrm{ad}\,(X)$ restrita a $\mathfrak{g}^1$ é nilpotente existe uma base $\{Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}^1$ tal que $[X, Y] = 0$, $[X, Z] = Y$ e $[Y, Z] = 0$. Mas isto contradiz o fato de que $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$. Portanto $\mathfrak{g}$ é 2-passos nilpotente. $\square$

Vamos considerar agora uma álgebra de Lie real 6-dimensional $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J, tal que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente, mas não é abeliana. Então $\mathfrak{g}^{1,0}$ é a álgebra de Heisenberg, pois é 3-dimensional e não é abeliana. Logo existe uma base $\{\omega_1 = e_1 - iJe_1, \omega_2 = e_2 - iJe_2, \omega_3 = e_3 - iJ_3\}$ de $\mathfrak{g}^{1,0}$, onde $\{e_1, e_2, e_3, Je_1, Je_2, J_3\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, tal que o único colchete não nulo é

$$[\omega_1, \omega_3] = \omega_2.$$

Logo

$$[e_1 - iJe_1, e_3 - iJe_3] = e_2 - iJe_2.$$

Desenvolvendo esta igualdade obtemos

$$[e_1, e_3] - [Je_1, Je_3] = e_2 \text{ e } [e_1, Je_3] + [Je_1, e_3] = Je_2.$$

Isto significa que

$$[e_1 * e_3] = \frac{1}{2}e_2 \text{ e } [e_1 * Je_3] = \frac{1}{2}Je_2.$$

Agora, como J sobre $\mathfrak{g}_*$ é adaptada, conforme proposição 2.3, temos que

$$[Je_1 * Je_3] = -\frac{1}{2}e_2 \text{ e } [Je_1 * e_3] = \frac{1}{2}Je_2.$$

De modo similiar, $[\omega_1, \omega_2] = 0 = [\omega_2, \omega_3]$ implicam na nulidade dos demais colchetes em $\mathfrak{g}_*$. Podemos observar que a álgebra $\mathfrak{g}_*$ é isomorfa a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, com colchetes não nulos dados por

$$[f_1 * f_3] = [f_4 * f_2] = -f_5, \ \ [f_1 * f_4] = [f_2 * f_3] = -f_6, \tag{2.3}$$

onde $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$. Formalmente temos

Teorema 2.10 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão 6 com uma estrutura complexa J não-abeliana. Se J é s-passos nilpotente, então $s = 2$ e existe uma base $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ são*

$$[f_1 * f_3] = [f_4 * f_2] = -f_5, \ \ [f_1 * f_4] = [f_2 * f_3] = -f_6. \tag{2.4}$$

Eis um exemplo de estrutura complexa com a propriedade do teorema anterior.

Exemplo 2.11 *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie com colchetes não nulos dados por*

$$[e_1, e_2] = -e_3 \qquad [e_1, e_3] = -e_4 \qquad [e_2, e_3] = -e_5 \qquad [e_1, e_4] = [e_2, e_5] = -e_6,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ é uma base $\mathfrak{g}$. Seja J a estrutura complexa dada por

$$Je_1 = -e_2 \qquad Je_4 = -e_5 \qquad Je_3 = -e_6.$$

Temos que

$$\mathfrak{h} = \mathrm{g}_J^{(1,0)} = \operatorname{span}\{\omega_1 = e_1 - iJe_1, \omega_2 = e_4 - iJe_4, \omega_3 = e_3 - iJ_3\}.$$

Pelo teorema 2.10, J é 2-passos nilpotente. Isto também pode ser visto observando que

$$[\omega_1, \omega_2] = 0 \qquad [\omega_1, \omega_3] = -\omega_2 \qquad [\omega_2, \omega_3] = 0,$$

$\mathfrak{h}^1 = \operatorname{span}\{\omega_2\}$, $\mathfrak{h}^2 = 0$. *Neste exemplo temos que*

$$[e_1 * e_3]_J = [e_6 * e_2]_J = -\frac{1}{2}e_4 \qquad [e_2 * e_3]_J = [e_1 * e_6]_J = -\frac{1}{2}e_5.$$

Se $\psi(e_i) = f_i$, para $i = 1, 2, 3$, $\psi(e_4) = 2f_5$, $\psi(e_5) = f_6$ e $\psi(e_6) = f_4$, vemos que a álgebra $*$ deste exemplo é isomorfa a álgebra de Lie dada pelas igualdades (2.3).

Há uma outra maneira de demonstrar o teorema 2.10 sem que se tenha a necessidade de usar o lema 2.9, mas usando a classificação dada por Salamon em [14]. Vejamos esta demonstração. Os subespaços $\mathfrak{g}_*^k$ têm dimensão par pois eles são invariantes por J. Podemos descartar os casos $\dim \mathfrak{g}_*^1 = 6$ e $\dim \mathfrak{g}_*^1 = 0$ pois $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente e não é abeliana. Consideramos separadamente os casos $\dim \mathfrak{g}_*^1 = 4$ e $\dim \mathfrak{g}_*^1 = 2$ e aplicamos a classificação dada em [14].

Supomos que $\dim \mathfrak{g}_*^1 = 4$. Pelo teorema 3.1 de [14], existe uma base $\{f_i, 1 \leq i \leq 6\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ são

$$[f_1 * f_2] = -f_3, \ \ [f_1 * f_3] = -f_4, \ \ [f_2 * f_3] = -f_5, \ \ [f_1 * f_4] = [f_2 * f_5] = -f_6.$$

Nese caso,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_*^1 &= \operatorname{span}\{f_3, f_4, f_5, f_6\}, \\ \mathfrak{g}_*^2 &= \operatorname{span}\{f_4, f_5, f_6\}, \end{aligned}$$

contradizendo o fato de que $\dim \mathfrak{g}_*^2$ é par. Logo, podemos supor que $\dim \mathfrak{g}_*^1 \neq 4$.

No caso $\dim \mathfrak{g}_*^1 = 2$ temos, pelo teorema 3.3 de [14], cinco possibilidades. Mais precisamente, existe uma base $\{f_i, 1 \leq i \leq 6\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ podem ser dados num dos seguintes casos:

(1) $[f_1 * f_2] = -f_5$, $[f_1 * f_4] = [f_2 * f_5] = -f_6$.

(2) $[f_1 *, f_2] = -f_5$, $[f_1 * f_3] = -f_6$.

(3) $[f_1 * f_3] = [f_4 * f_2] = -f_5$, $[f_1 * f_4] = [f_2 * f_3] = -f_6$.

(4) $[f_1 * f_2] = -f_5$, $[f_1 * f_4] = [f_2 * f_3] = -f_6$.

(5) $[f_1 *, f_2] = -f_5$, $[f_3 * f_4] = -f_6$.

Pelo exemplo 2.11 existe uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com estrutura complexa 2-passos nilpotente J, tal que $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ é isomorfa a álgebra (3) dada acima. Resta mostrar que os outros casos não ocorrem. Isto também mostra que $s = 2$.

No caso (1),

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_*^1 &= \operatorname{span}\{f_5, f_6\}, \\ \mathfrak{g}_*^k &= \operatorname{span}\{f_6\}, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que $\dim \mathfrak{g}_*^2$ é par.

Nos outros casos ((2), (4) e (5)) temos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_*^1 &= \operatorname{span}\{f_5, f_6\}, \\ \mathfrak{g}_*^2 &= \{0\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

No caso (2), $[f_1 * f_2] = -f_5$, $[f_1 * f_3] = -f_6$. Como $\mathfrak{g}_*^1$ é J-invariante podemos escrever

$$\begin{aligned} Jf_5 &= af_5 + bf_6, \\ Jf_6 &= cf_5 + df_6, \\ Jf_i &= \sum_{j=1}^{6} a_{ij} f_j, 1 \leq i \leq 4. \end{aligned}$$

Mas $J^2 = -I$ implica que $a = -d$. Além disso, pela proposição 2.3, temos

$$-(af_5 + bf_6) = -Jf_5 = J[f_1 * f_2] = [Jf_1 * f_2] = -a_{11} f_5.$$

Logo $b = 0$ e $a = a_{11}$, e isto contradiz o fato de que $J^2 = -I$.

No caso (4), $[f_1 * f_2] = -f_5$, $[f_1 * f_4] = [f_2 * f_3] = -f_6$. Neste caso, procedendo como no caso anterior, temos

$$-(cf_5 - af_6) = -Jf_6 = J[f_2 * f_3] = [Jf_2 * f_3] = -a_{22} f_6.$$

Logo $c = 0$ e $a = -a_{22}$, o que contradiz o fato de que $J^2 = -I$.

Finalmente, no caso (5), $[f_1 * f_2] = -f_5$, $[f_3 * f_4] = -f_6$. Procedendo como nos dois últimos casos obtemos $b = 0$ e $a = a_{11}$, o que mais uma vez, contradiz o fato de que $J^2 = -I$. Isto esgota todos os casos e completa a demonstração do teorema.

2.4 Exemplos em que $\mathfrak{g}_*$ é nilpotente

Nesta seção queremos construir exemplos de estruturas complexas e hipercomplexas sobre álgebras de Lie solúveis. Começamos usando o teorema 2.10 para construir exemplos relacionando as estruturas de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}_*$. Isto requer uma preparação.

Seja $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ uma base $\mathfrak{g}_*$ com colchetes não nulos dados por (2.4). Nosso objetivo é colher informações sobre a estrutura complexa J e o colchete original $[\cdot, \cdot]$. Para isto escrevemos

$$Jf_i = \sum_{j=1}^{6} a_{ij} f_j, 1 \leq i \leq 4$$

e

$$\begin{aligned} Jf_5 &= af_5 + bf_6 \\ Jf_6 &= cf_5 + df_6. \end{aligned}$$

Isto é possível pois $\mathfrak{g}_*^1$ é J-invariante. De $J^2 = -I$ temos a restrição $a = -d$.

Agora, pela proposição 2.3, temos que $J\,[f_1 * f_2]_J = [Jf_1 * f_2]_J$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= [a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3 + a_{41}f_4 + a_{51}f_5 + a_{61}f_6 * f_2]_J \\ &= a_{31}\,[f_3 * f_2]_J + a_{41}\,[f_4 * f_2]_J \\ &= a_{31}f_6 - a_{41}f_5, \end{aligned}$$

e, consequentemente $a_{31} = a_{41} = 0$. Também, $J\,[f_1 * f_3]_J = [Jf_1 * f_3]_J$. Logo, $J(-f_5) = [Jf_1 * f_3]_J$ e então

$$J(f_5) = a_{11}f_5 + a_{21}f_6 = af_5 + bf_6,$$

o que implica que $a_{11} = a$ e $a_{21} = b$. Aplicando $J\,[f_1 * f_3]_J = [Jf_1 * f_3]_J$ nos outros colchetes em (2.4) e usando $J^2 = -I$, obtemos $a = d = 0$, $a_{11} = a_{31} = a_{41} = 0$, $a_{22} = a_{32} = a_{42} = 0$, $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, $a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0$, $a_{43} = -a_{34} = b$, $b^2 = 1$, $a_{54} = a_{63}$, $a_{64} = -a_{53}$, $a_{52} = a_{61}$ e $a_{62} = -a_{51}$. Em suma,

$$\begin{aligned} Jf_1 &= bf_2 + a_{51}f_5 + a_{61}f_6 \\ Jf_2 &= -bf_1 + a_{61}f_5 - a_{51}f_6 \\ Jf_3 &= bf_4 + a_{53}f_5 + a_{63}f_6 \\ Jf_4 &= -bf_3 + a_{63}f_5 - a_{53}f_6 \\ Jf_5 &= bf_6 \\ Jf_6 &= -bf_5. \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $b = 1$ e $a_{51} = a_{61} = a_{53} = a_{63} = 0$ temos

$$\begin{aligned} -f_5 = [f_1 * f_3]_J &= \frac{1}{2}([f_1, f_3] - [Jf_1, Jf_3] \\ &= \frac{1}{2}([f_1, f_3] - [f_2, f_4]). \end{aligned}$$

De modo similitar obtemos os colchetes

$$\begin{aligned} [f_1, f_3] &= [f_2, f_4] - 2f_5 \\ [f_1, f_4] &= -\,[f_2, f_3] - 2f_6 \\ [f_1, f_5] &= [f_2, f_6] \\ [f_1, f_6] &= -\,[f_2, f_5] \\ [f_3, f_5] &= [f_4, f_6] \\ [f_3, f_6] &= -\,[f_4, f_5]\,. \end{aligned}$$

Observando estas igualdades, podemos construir um exemplo onde $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ é nilpotente, mas $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ não o é.

Exemplo 2.12 *Sejam $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial real 6-dimensional e $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ uma base fixada de $\mathfrak{g}$. Então $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ é uma álgebra de Lie se os colchetes não nulos são dados por*

$$[f_1, f_2] = f_1, \ [f_2, f_4] = 2f_5, \ [f_2, f_3] = -2f_6.$$

Além disso, o endomorfismo $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dado por

$$Jf_1 = f_2, \ Jf_3 = f_4, \ Jf_5 = f_6$$

é uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}$.. Temos que $\mathfrak{g}^1 = \operatorname{span}\{f_1, f_5, f_6\}$ e $\mathfrak{g}^k = \operatorname{span}\{f_1\}$, para todo $k \geq 2$. Isto mostra que $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ não é nilpotente. Mais ainda, os colchetes não nulos de $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ são

$$[f_1 * f_3]_J = [f_4 * f_2]_J = -f_5, \qquad [f_1 * f_4]_J = [f_2 * f_3]_J = -f_6,$$

o que mostra que $(\mathfrak{g}, [*]_J)$ é 2-passos nilpotente.

Observação: No exemplo 2.11 temos uma álgebra de Lie nilpotente munida de uma estrutura complexa. Já no exemplo 2.12 temos uma álgebra de Lie que não é nilpotente munida de uma outra estrutura complexa. Logo as álgebras de Lie dos dois exemplos não são isomorfas. No entanto, o colchete $*$ nos dá álgebras de Lie isomorfas.

É possível construir vários outros exemplos com a mesma propriedade, mesmo que a estrutura complexa seja definada do mesmo modo nas duas álgebras.

Exemplo 2.13 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie cujos colchetes não nulos são dados por*

$$[e_2, e_4] = 2e_5, \ [e_2, e_3] = -2e_6.$$

Não é difícil ver que se consideramos $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dada, como no exemplo 2.11, por

$$Je_1 = -e_2 \qquad Je_4 = -e_5 \qquad Je_3 = -e_6,$$

temos uma estrutura complexa. Apesar da estrutura complexa ser definida neste exemplo exatamente como no exemplo 2.11, as álgebras de Lie não são isomorfas, pois a primeira é 4-passos nilpotente e a segunda é 2-passos nilpotente.

Queremos agora mostrar que é possível construir exemplos de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ com estrutura complexa J tal que $\mathfrak{g}_*$ é s-passos nilpotente, qualquer que seja o número $s \geq 1$ dado. Tal como em [3], trabalhamos com certas álgebras afim $\mathfrak{aff}\,(\mathcal{A})$ e com estruturas complexas naturais sobre estas álgebras.

Proposição 2.14 *Para todo $s \geq 1$ existe uma estrutura complexa s-passos nilpotente.*

Demonstração: Primeiramente cuidamos do caso $s = 3$ com mais detalhes. Seja $\mathcal{A}$ o espaço das matrizes reais 4×4 triangulares superiores, com zeros na diagonal. Temos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa não-comutativa. Em geral $ABC \neq 0$ e $ABCD = 0$ para $A, B, C, D \in \mathcal{A}$.

Denotamos por $\mathcal{A}_k = \operatorname{span}\{A_1A_2 \cdots A_k;\ A_j \in \mathcal{A}\}$. Seja $\mathfrak{aff}\,(\mathcal{A})$ a álgebra de Lie $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ com colchetes dados por

$$[(A,B),(C,D)] = (AC - CA, AD - CB)\,, \forall\ A,B,C,D \in \mathcal{A}.$$

A álgebra $\mathfrak{aff}\,(\mathcal{A})$ é o produto semidireto de $\mathcal{A}$ (considerado como subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$, isto é, para cada $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \ni B \mapsto AB \in \mathcal{A}$) e $\mathcal{A}$ (considerado como uma álgebra de Lie abeliana), com a representação canônica, ou seja,

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{A}) \text{ dada por } \rho(X) = L_X,$$

onde $L_X(Y) = XY$, para todo $Y \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são dois subconjuntos de $\mathcal{A}$, denotamos $(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \{(B,C)\,; B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$. Seja J o endomofismo de $\mathfrak{aff}\,(\mathcal{A})$ definido por

$$J(A,B) = (B,-A),\ \forall\ A,B \in \mathcal{A}.$$

Temos que $J^2 = -I$ e, além disso

$$\begin{aligned}
&J\,[(A,B),(C,D)] - [J(A,B),(C,D)] - [(A,B),J(C,D)] - J[J(A,B),J(C,D)] \\
&= J(AC - CA, AD - DB\ ) - [(B,-A),(C,D)] \\
&\qquad - [(A,B),(D,-C)] - J[(B,-A),(D,-C)] \\
&= (AD - CB, CA - AC) - (BC - CB, BD + CA) \\
&\qquad - (AD - DA, -AC - DB) - J(BD - DB, -BC + DA) \\
&= (AD - CB, CA - AC) + (-BC + CB, -BD - CA) \\
&\qquad + (-AD + DA, AC + DB) + (BC - DA, BD - DB) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto J é uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} 2\left[(A,B)*(C,D)\right] &= \left[(A,B),(C,D)\right] - \left[(B,-A),(D,-C)\right] \\ &= (AC-CA, AD-CB) - (BD-DB, -BC+DA) \\ &= (AC-CA+DB-BD, AD-DA+BC-CB)\,. \end{aligned}$$

Isto mostra que J não é uma estrutura complexa abeliana.

Se consideramos

$$(X,Y) = (AC-CA+DB-BD, AD-DA+BC-CB)\,,$$

temos que

$$\left[(E,F),(X,Y)\right] - \left[J(E,F), J(X,Y)\right] \in (\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3)$$

e este colchete é, em geral, não nulo. Um cálculo análogo mostra que

$$\mathfrak{g}_*^3 \subset (\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4) = \{(0,0)\}\,.$$

Portanto J é uma estrutura complexa 3-passos nilpotente sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$.

Para o caso geral consideramos $\mathcal{A}$ o espaço das matrizes reais $(s+1)\times(s+1)$ triangulares superiores com zeros na diagonal. Novamente $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa e não-comutativa. Definimos o colchete e J como antes. Por um cálculo similiar vemos que $\mathfrak{g}_*^{s-1} \subset (\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_s)$ e $\mathfrak{g}_*^{s-1}$ não é o subespaço nulo. Mais ainda, $\mathfrak{g}_*^{s} \subset (\mathcal{A}_{s+1}, \mathcal{A}_{s+1}) = \{(0,0)\}$. Portanto J é uma estrutura complexa s-passos nilpotente sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$. $\square$

Queremos agora dar exemplos de estruturas hipercomplexas. Pelo lema 3.1 de [9] temos que se J_1, J_2 são estruturas complexas que anti-comutam e J_1 é abeliana, então J_2 também o é. Também, pela proposição 3.1 de [8], uma álgebra de Lie nilpotente 8-dimensional que possui uma estrutura hipercomplexa é 2-passos nilpotente. Como $\mathfrak{g}_*^2 \subset \mathfrak{g}^2 = \{0\}$, segue que J_i é s-passos nilpotente e $s \leq 2$. Além disso, se uma das estruturas complexas é 2-passos nilpotente, então pelo lema 3.1 de [9], a outra também o é.

Em geral dizemos que uma estrutura hipercomplexa dada por um par $\{J_1, J_2\}$ de estruturas complexas que anti-comutam é s-passos nilpotente se tanto J_1 como J_2 são s-passos nilpotente para o mesmo s.

Dado um par $\{J_1, J_2\}$ de estruturas complexas que anti-comutam, com J_1 sendo s-passos nilpotente, a menos que seja $s=1$, ainda não podemos afirmar nem mesmo que J_2 é também t-passos nilpotente, para algum t. Exemplos devem ser procurados, pelos comentários feitos acima, em álgebras de Lie 12-dimensional ou mais.

A seguir apresentamos um exemplo de estrutura hipercomplexa 2-passos nilpotente.

Exemplo 2.15 *Seja $\mathfrak{n}$ uma álgebra de Lie 8-dimensional com colchetes não nulos dados por*

$$[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = -e_6 \qquad [e_1, e_3] = -[e_2, e_4] = -e_7 \qquad [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = -e_8,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ é uma base de $\mathfrak{n}$. Seja $\{J_1, J_2\}$ a estrutura hipercomplexa sobre $\mathfrak{n}$ dada por

$$\begin{array}{llll} J_1e_1 = e_2 & J_1e_3 = e_4 & J_1e_5 = e_6 & J_1e_7 = e_8 \\ J_2e_1 = e_3 & J_2e_2 = -e_4 & J_2e_5 = e_7 & J_2e_6 = -e_8 \end{array}$$

Temos que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{J_2}^{(0,1)} = \operatorname{span}\{\omega_j = e_j + iJ_2e_j, 1 \leq j \leq 8\}$$

Agora,

$$\begin{array}{lll} [\omega_1, \omega_2] = \omega_6 & [\omega_1, \omega_3] = 0 & [\omega_1, \omega_4] = 0 \\ [\omega_2, \omega_3] = 0 & [\omega_2, \omega_4] = 0 & [\omega_3, \omega_4] = 0 \end{array}$$

Logo $\mathfrak{h}^1 = \operatorname{span}\{\omega_6\}$ e $\mathfrak{h}^2 = \{0\}$. Portanto J_2 é 2-passos nilpotente. Pelo observado acima temos que $\{J_1, J_2\}$ é uma estrutura hipercomplexa 2-passos nilpotente.

O teorema 3.1 de [10] diz que a estrutura hipercomplexa de uma estrutura HKT sobre qualquer álgebra de Lie 2-passos nilpotente é abeliana. Logo a estrutura hipercomplexa $\{J_1, J_2\}$ do exemplo 2.15 não é a estrutura hipercomplexa de uma estrutura HKT.

Em [3], proposição 3.5, para todo inteiro positivo k é apresentado uma álgebra de Lie k-passos nilpotente tendo uma estrutura hipercomplexa abeliana. Queremos construir estruturas hipercomplexas s-passos nilpotente para cada $s \geq 1$.

De modo similar a proposição 2.14, se consideramos $\mathcal{A}$ o espaços da matrizes complexas $(s+1)\times(s+1)$ triangulares superiores com zeros na diagonal e definimos o endomorfismo K sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ pondo

$$K(A, B) = (-iA, iB), \forall A, B \in \mathcal{A},$$

então K é uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ e que $KJ = -JK$, onde J é definida na demonstração da proposição 2.14. Temos que

$$\begin{aligned} 2\,[(A,B) * (C,D)] &= [(A,B),(C,D)] - [(-iA,iB),(-iC,iD)] \\ &= (AC - CA, AD - CB) - (-AC + CA, AD + CB) \\ &= 2(AC - CA, 0) \end{aligned}$$

Logo K é também s-passos nilpotente sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$. A combinação desta observação com a proposição 2.14 nos dá a seguinte proposição:

Proposição 2.16 *Para todo $s \geq 1$ existe uma estrutura hypercomplexa s-passos nilpotente.*

Capítulo 3

Auto-espaço solúvel em álgebra semi-simples

Neste capítulo consideramos estruturas complexas que possuem auto-espaços solúveis. Classificamos, através de subespaços de uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie complexa, as estruturas complexas solúveis sobre álgebras de Lie compactas. De modo análogo, utilizando as órbitas abertas da ação do grupo dos automorfismos internos de uma álgebra real não compacta no conjunto das subálgebras de Borel, estudamos estruturas complexas solúveis sobre álgebras de Lie reais não compactas.

3.1 Construção das subálgebras solúveis

Vamos considerar uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}_0$. Denotamos por τ a conjugação em $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ associada a forma real $\mathfrak{g}_0$, ou seja, $\tau(X + iY) = X - iY$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_0$. Vimos na seção 1.3 que a álgebra de Lie real $\mathfrak{g}_0$ tem uma estrutura complexa integrável se, e somente se, $\mathfrak{g}$ possui uma decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \tau(\mathfrak{q}) \tag{3.1}$$

onde $\mathfrak{q}$ é uma subálgebra complexa de $\mathfrak{g}$. Mais explicitamente, dada uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}_0$ escrevemos $\mathfrak{g}$ como soma direta dos auto-espaços dos autovalores $\pm i$. Reciprocamente, dada a decomposição (3.1) definimos uma estrutura complexa sobre $\mathfrak{g}_0$ de modo que $\mathfrak{q}$ e $\tau(\mathfrak{q})$ são os auto-espaços dos autovalores $\pm i$.

Queremos determinar as estruturas complexas J para as quais os $\pm i$ auto-espaços $\mathfrak{q}$ e $\tau(\mathfrak{q})$ são subálgebras complexas solúveis. Em outras palavras, queremos obter as estruturas complexas J para as quais se tem $[*]_J$ uma álgebra de Lie solúvel. A estas estruturas, chamaremos de **estruturas complexas solúveis**. Em termos das subálgebras complexas nosso objetivo é, considerando uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}_0$, determinar as subálgebras complexas solúveis de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ para as quais vale (3.1).

Como toda álgebra de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$ se decompõe em soma direta de ideais simples, no que segue estaremos supondo que $\mathfrak{g}$ é uma algébra de Lie complexa simples. Neste caso qualquer forma real de $\mathfrak{g}$ é também simples.

Dada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, seja Π o correspondente sistema de raízes. Fixado um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$, nossa proposta é encontrar as subálgebras complexas solúveis $\mathfrak{q}$ que são escritas na forma

$$\mathfrak{q} = V \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $V \subset \mathfrak{h}$ satisfaz

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h},\ V \cap \tau(V) = \{0\}, \tag{3.2}$$

$\mathfrak{n}^+ = \sum\limits_{\alpha\in\Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{n}^- = \sum\limits_{\alpha\in\Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\tau(\mathfrak{q}) = \tau(V) \oplus \mathfrak{n}^-$. Para cada $V \subset \mathfrak{h}$ satisfazendo (3.2) escrevemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}^+ &= V \oplus \mathfrak{n}^+,\ \mathfrak{q}^- = \tau(V) \oplus \mathfrak{n}^-, \\ \mathfrak{p}^+ &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,\ \mathfrak{p}^- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-. \end{aligned}$$

Primeiramente queremos determinar os subespaços $V \subset \mathfrak{h}$ que dão origem a estruturas complexas equivalentes. Para tal necessitamos de alguns lemas.

Lema 3.1 $\mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+) = \mathfrak{n}^+$, *onde* $\mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+)$ *denota o nil-radical de* $\mathfrak{q}^+$.

Demonstração: Temos que $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{q}^+ \subset \mathfrak{p}^+$, $\mathfrak{n}^+$ é um ideal de $\mathfrak{p}^+$ e $\mathfrak{n}^+$ é nilpotente. Logo, $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+)$. Por outro lado, $\mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+) = \mathfrak{n}^+ \oplus (\mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+) \cap V)$, pois $\mathfrak{q}^+ = V \oplus \mathfrak{n}^+$ e $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+)$. Dado $X \in (\mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+) \cap V)$, se $X \neq 0$, então existe $\alpha \in \Pi$ tal que $\alpha(X) \neq 0$. De fato, se supomos que $\alpha(X) = 0$ para todo $\alpha \in \Pi$, como $X \in \mathfrak{h}$ e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Pi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H) X\}$, então $[X, Y] = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Logo $X = 0$. Esta contradição garante que existe $\alpha \in \Pi$ tal que $\alpha(X) \neq 0$. Além disso,

$$\alpha(X) X_\alpha = [X, X_\alpha] = \mathrm{ad}(X)(X_\alpha), \text{ pois } X \in V \subset \mathfrak{h}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}^n(X)(X_\alpha) &= [X, \ldots, [X, X_\alpha] \ldots] \\ &= (\alpha(X))^n X_\alpha \neq 0, \text{ já que } \alpha(X) \neq 0, \end{aligned}$$

o que nos dá que $\mathrm{ad}(X)$ não é nilpotente, o que é uma contradição pois $X \in \mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+)$. Portanto $X = 0$ e $\mathfrak{rn}(\mathfrak{q}^+) = \mathfrak{n}^+$, como queríamos demonstrar. □

Vamos supor agora que existe um automorfismo interno ϕ de $\mathfrak{g}$, que deixa $\mathfrak{g}_0$ invariante, tal que

$$\phi(\mathfrak{q}^+) = \mathfrak{q}_1^+,$$

onde

$$\mathfrak{q}^+ = V \oplus \mathfrak{n}^+, \ \mathfrak{q}_1^+ = V_1 \oplus \mathfrak{n}^+,$$

com V e V_1 satisfazendo (3.2). Pelo Lema 3.1 temos que $\phi(\mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^+$.

Lema 3.2 *Se* $n = \exp(\mathrm{ad}(Z))$*, com* $Z \in \mathfrak{n}^+$*, então para todo* $X \in V$*,* $nX = X + Y$*, com* $Y \in \mathfrak{n}^+$.

Demonstração: Como $Z \in \mathfrak{n}^+$, temos que $\mathrm{ad}(Z)$ é nilpotente. Digamos que $\mathrm{ad}(Z)^k = 0$. Logo,

$$nX = \exp(\mathrm{ad}(Z))X = X + \mathrm{ad}(Z)X + \cdots + \mathrm{ad}(Z)^{k-1}X = X + Y,$$

onde $Y = \mathrm{ad}(Z)X + \cdots + \mathrm{ad}(Z)^{k-1}X$. Notamos que

$$\mathrm{ad}(Z)X = [Z, X], \cdots, \mathrm{ad}(Z)^{k-1}X = [Z, \ldots, [Z, X] \ldots]$$

são elementos de $\mathfrak{n}^+$, pois $\mathfrak{n}^+$ é um ideal de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. □

Seja G o grupo dos automofismos internos de $\mathfrak{g}_0$. Temos que G é o grupo dos automofismos internos de $\mathfrak{g}$ que deixam $\mathfrak{g}_0$ invariante. Sejam H o subgrupo de G gerado por $\{\exp(\mathrm{ad}(X)); X \in \mathfrak{h}\}$, N o subgrupo de G gerado por $\{\exp(\mathrm{ad}(X)); X \in \mathfrak{n}^+\}$ e $B = HN$. Temos que

$$B = HN = NH$$

é o normalizador de $\mathfrak{n}^+$ em G, ou seja,

$$B = \{x \in G; Ad(x)\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+\}.$$

Como $\phi(\mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^+$ e $\phi = \exp(\mathrm{ad}(X)) = Ad(\exp(X))$, para algum $X \in \mathfrak{g}$, então $\phi \in B$.

Lema 3.3 *Com as mesmas notações,* $\phi(\mathfrak{q}^+) = \mathfrak{q}^+$.

Demonstração: Escrevemos $\phi = nh$, com $n \in N$ e $h \in H$. Para todo $X \in V$, temos que

$$\phi(X) = nh(X) = nX = X + Y, \text{ com } Y \in \mathfrak{n}^+.$$

A segunda igualdade vem do fato de que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra abeliana e portanto $\exp(\mathrm{ad}(Z)) = I$ sobre $\mathfrak{h}$, se $Z \in \mathfrak{h}$. A última igualdade é devida ao lema 3.2, pois $V \subset \mathfrak{h}$. □

Podemos então concluir que $V = V_1$, se ϕ é um automorfismo interno. Em outras palavras, se

$$\mathfrak{q}^+ = V \oplus \mathfrak{n}^+,\ \mathfrak{q}_1^+ = V_1 \oplus \mathfrak{n}^+,$$

com $V \neq V_1$ satisfazendo (3.2) e $\mathfrak{q}^+$ é isomorfo a $\mathfrak{q}_1^+$, então este isomorfismo não é um automorfismo interno de $\mathfrak{g}$ que deixa $\mathfrak{g}_0$ invariante.

O exemplo seguinte mostra um caso em que $\mathfrak{q}^+$, $\mathfrak{q}_1^+$ não são isomorfos.

Exemplo 3.4 *Consideramos o caso onde a álgebra de Lie complexa é* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, *a forma real compacta de* $\mathfrak{g}$ *é* $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(3) = \{A \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}); A = -\overline{A}^t\}$, $\mathfrak{h}$ *é o conjunto das matrizes diagonais ,* $\mathfrak{n}^+$ *é o conjunto das matrizes triangulares superiores e* $\mathfrak{n}^-$ *é o conjunto das matrizes triangulares inferiores, com zeros na diagonal. Denotamos por* τ *a conjugação associada a* $\mathfrak{u}$, *ou seja,* $\tau(A) = -\overline{A}^t$.

Seja V *o subespaço de* $\mathfrak{h}$ *gerado por*

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -(1+i) \end{pmatrix}.$$

Logo $\tau(V)$ *é o subespaço de* $\mathfrak{h}$ *gerado por*

$$h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Agora, seja V_1 *o subespaço de* $\mathfrak{h}$ *gerado por*

$$l_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+i) \end{pmatrix}.$$

Logo $\tau(V_1)$ é o subespaço de $\mathfrak{h}$ gerado por

$$l_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Observamos que $h_2 = il_1$ e portanto $V_1 = \tau(V)$. Queremos mostrar que $\mathfrak{q}^+ = V \oplus \mathfrak{n}^+$ não é isomorfo a $\mathfrak{q}_1^+ = V_1 \oplus \mathfrak{n}^+$. Basta motrar que $\mathfrak{q}^+/ < E_{13} >$ não é isomorfo a $\mathfrak{q}_1^+/ < E_{13} >$, onde $< E_{13} >$ é o subespaço gerado por E_{13}. Como $\{h_1, E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$ é uma base de $\mathfrak{q}^+$ e seus colchetes não nulos são dados por

$$\begin{aligned} [h_1, E_{12}] &= (1-i)E_{12},\ [h_1, E_{13}] = (2+i)E_{13}, \\ [h_1, E_{23}] &= (1+2i)E_{23},\ [E_{12}, E_{23}] = E_{13}, \end{aligned}$$

então $\mathfrak{q}^+/ < E_{13} >$ é isomorfo ao produto semidireto $\mathbb{C}\times_\rho\mathbb{C}^2$, onde

$$\rho = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Do mesmo modo, como $\{l_1, E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$ é uma base de $\mathfrak{q}_1^+$ e seus colchetes não nulos são dados por

$$\begin{aligned} [l_1, E_{12}] &= (i-1)E_{12},\ [l_1, E_{13}] = (1+2i)E_{13}, \\ [l_1, E_{23}] &= (2+i)E_{23}, [E_{12}, E_{23}] = E_{13}, \end{aligned}$$

então $\mathfrak{q}_1^+/ < E_{13} >$ é isomorfo ao produto semidireto $\mathbb{C}\times_\mu\mathbb{C}^2$, onde

$$\mu = \begin{pmatrix} i-1 & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Logo, se $\mathfrak{q}^+ = V \oplus \mathfrak{n}^+$ é isomorfo a $\mathfrak{q}_1^+ = V_1 \oplus \mathfrak{n}^+$, existe $\lambda = (a+ib) \in \mathbb{C}$, tal que

$$\begin{aligned} \lambda(1-i) &= i-1, \\ \lambda(1+2i) &= i+2. \end{aligned}$$

Da primeira equação temos $\lambda = -1$. Substituindo $\lambda = -1$ na segunda equação obtemos uma contradição. Isto mostra que $\mathfrak{q}^+ = V \oplus \mathfrak{n}^+$ e $\mathfrak{q}_1^+ = V_1 \oplus \mathfrak{n}^+$ definem estruturas complexas não equivalentes sobre $\mathfrak{su}(3)$. Os detalhes sobre o produto semidireto podem ser vistos em [22].

3.2 Formas reais compactas

Nesta seção consideramos o caso em que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}$ é uma forma real compacta. Neste caso, conforme [6], seção 3, toda estrutura complexa J, dada por uma subálgebra complexa $\mathfrak{q}$, é **regular**, ou seja, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, que é invariante pela conjugação associada a $\mathfrak{u}$, satisfazendo $[\mathfrak{h}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$. Além disso, conforme [6], seção 2, toda estrutura complexa regular sobre $\mathfrak{u}$ é determinada por uma subálgebra complexa contida em alguma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Portanto, toda estrutura complexa sobre $\mathfrak{u}$ é solúvel.

Fixada uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Além disso, temos uma construção canônica que nos dá uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$ contendo $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Como as formas reais compactas de $\mathfrak{g}$ são conjugadas por automorfismos internos de $\mathfrak{u}$, podemos supor que $\mathfrak{h}$ é invariante pela conjungação em $\mathfrak{g}$ associada a $\mathfrak{u}$. Podemos então enunciar o seguinte lema.

Lema 3.5 *Sejam $\mathfrak{u}$ uma álgebra de Lie real compacta. Denotamos por τ a conjugação em $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. Sejam $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, que é invariante por τ, e Π o sistema de raízes correspondente. Fixado um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$, então toda estrutura complexa solúvel é dada por*

$$\mathfrak{q} = V \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $V \subset \mathfrak{h}$ satisfaz (3.2).

Demonstração: Vamos supor que

$$\mathfrak{q} = V \oplus \mathfrak{n}^+,$$

onde $V \subset \mathfrak{h}$ satisfaz (3.2). Logo $\mathfrak{q}$ é solúvel. Como a forma real é compacta, então $\tau(\mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^-$ (ver, por exemplo, demonstração do lema 3.1 de [21]). Logo $\tau(\mathfrak{q}) = \tau(V) \oplus \mathfrak{n}^-$ e $\tau(\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{q} = \{0\}$, pois $V \cap \tau(V) = \{0\}$. Portanto

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \tau(\mathfrak{q}),$$

mostrando que $\mathfrak{q}$ é uma estrutura complexa solúvel.

Reciprocamente, vamos supor que $\mathfrak{q}_1$ é uma estrutura complexa solúvel, então $\mathfrak{q}_1$ é uma subálgebra sóluvel de $\mathfrak{g}$. Como as subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$ são justamente as subálgebras solúveis maximais de $\mathfrak{g}$, existe uma subálgebra de Borel $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_1^+$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_1^+$. Agora, como grupo dos automorfismos da forma real compacta

$\mathfrak{u}$ atua transitivamente sobre o conjunto das subálgebras de Borel de $\mathfrak{g}$, então existe um automorfismos ϕ de $\mathfrak{u}$ tal que $\phi(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_1^+)$=$\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Logo $\phi(\mathfrak{q}_1) \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Temos que

$$\mathfrak{q}=\phi(\mathfrak{q}_1) = V \oplus \mathfrak{n}^+,$$

para algum $V \subset \mathfrak{h}$ satisfazendo (3.2) se, e somente se, $\mathfrak{n}^+ \subset \phi(\mathfrak{q}_1)$. Em caso afirmativo $\mathfrak{q}_1$ e $\mathfrak{q}$ são estruturas complexas equivalentes, pois ϕ é um automorfismo de $\mathfrak{u}$, e o resultado fica demonstrado. Mas, a inclusão $\mathfrak{n}^+ \subset \phi(\mathfrak{q}_1)$ é conseqüência do lema 3.6 abaixo. □

Lema 3.6 *Com as mesmas notações do lema 3.5, se $\mathfrak{q}^{\pm}$ são subálgebras solúveis de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}^{\pm} \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^{\pm}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{q}^-$, então $\mathfrak{n}^{\pm} \subset \mathfrak{q}^{\pm}$.*

Demonstração: Primeiramente observamos que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^+) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^-)$. De fato, dado $H \in \mathfrak{h}$ escrevemos $H = A + B$, com $A \in \mathfrak{q}^+$ e $B \in \mathfrak{q}^-$. Da hipótese temos

$$A = H_1 + Y \text{ e } B = H_2 + Z$$

com H_1, $H_2 \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{n}^+$ e $Z \in \mathfrak{n}^-$. Logo $H = (H_1 + H_2) + Y + Z$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ e $H \in \mathfrak{h}$, então $Y = Z = 0$. Isso significa que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^+) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^-)$.

Agora, dado $X \in \mathfrak{n}^+$ escrevemos $X = A + B$, com $A \in \mathfrak{q}^+$ e $B \in \mathfrak{q}^-$. Da mesma forma,

$$A = H_1 + Y \text{ e } B = H_2 + Z$$

com H_1, $H_2 \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{n}^+$ e $Z \in \mathfrak{n}^-$. Logo $X = (H_1 + H_2) + Y + Z$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ e $X \in \mathfrak{n}^+$, então $H_1 + H_2 = 0$, $Y = X$ e $Z = 0$. Isso significa que todo $X \in \mathfrak{n}^+$ se decompõe em

$$X = (H + X) + (-H)$$

com $H + X \in \mathfrak{q}^+$ e $-H \in \mathfrak{q}^-$. Em outras palavras, para todo $X \in \mathfrak{n}^+$ existe $-H \in (\mathfrak{q}^- \cap \mathfrak{h})$ tal que $H + X \in \mathfrak{q}^+$. Analogamente, para todo $Y \in \mathfrak{n}^-$ existe $-H \in (\mathfrak{q}^+ \cap \mathfrak{h})$ tal que $H + Y \in \mathfrak{q}^-$.

Seja α uma raíz positiva. Como $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^+) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^-)$, temos que α não é identicamente nulo ou em $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^+$ ou em $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^-$. Logo, ou existe $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^+$ ou $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^-$ tal que $\alpha(H) \neq 0$. Vamos supor que exista $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^+$ com $\alpha(H) \neq 0$. Seja $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Então, pela decomposição acima dos elementos de $\mathfrak{n}^+$, existe $H_1 \in \mathfrak{h}$ tal que $H_1 + X_\alpha \in \mathfrak{q}^+$. Portanto

$$[H, H_1 + X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha \in \mathfrak{q}^+.$$

Como $\alpha(H) \neq 0$, então $X_\alpha \in \mathfrak{q}^+$ e $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{q}^+$.

Por outro lado, vamos supor que exista $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}^-$ com $\alpha(H) \neq 0$. Seja $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Então, pela decomposição acima dos elementos de $\mathfrak{n}^-$, existe $H_1 \in \mathfrak{h}$ tal que $H_1 + Y_\alpha \in \mathfrak{q}^-$. Portanto

$$[H, H_1 + Y_\alpha] = -\alpha(H) Y_\alpha \in \mathfrak{q}^-.$$

Como $\alpha(H) \neq 0$, então $Y_\alpha \in \mathfrak{q}^-$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{q}^-$. Isso significa que $\mathfrak{g}_\alpha = \tau(\mathfrak{g}_{-\alpha}) \subset \mathfrak{q}^+$. Em ambos os casos $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{q}^+$. Portanto $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{q}^+$ e, consequentemente, $\mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{q}^-$. $\square$

Mantendo as notações estabelecidas no enunciado do lema 3.5, o conjunto $\mathfrak{h}$, visto como espaço vetorial real, pode ser escrito na forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}.$$

O seguinte lema estabelece enunciados equivalentes para as condições (3.2).

Lema 3.7 *Se a forma real é a forma compacta e τ e a conjugação associada a ela, então as afirmações seguintes sobre um subespaço vetorial complexo $V \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ são equivalentes:*

i) $V \cap \tau(V) = \{0\}$;

ii) $V \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$;

iii) $V \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

Demonstração: Primeiramente queremos observar que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ é o -1-auto-espaço de τ (ver, por exemplo, a demonstração do lema 3.1 de [21]). Vamos supor que $V \cap \tau(V) = \{0\}$. Dado $X \in V \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, temos que $\tau(-X) = X$. Logo $X \in V \cap \tau(V) = \{0\}$. Da hipótese, $X = 0$. Dado $iX \in V \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, temos que $\tau(iX) = -i\tau(X) = iX$. Logo $iX \in V \cap \tau(V) = \{0\}$. Da hipótese, $iX = 0$. Isto mostra que $i)$ implica em $ii)$ e $iii)$.

Vamos agora mostrar que $ii)$ e $iii)$ são equivalentes. Vamos supor que $V \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$. Dado $iX \in V \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, temos que $X \in V$ e $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Da hipótese, $X = 0$. Portanto $iX = 0$. Reciprocamente, vamos supor que $V \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$. Dado $X \in V \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, temos que $iX \in V$ e $iX \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Da hipótese, $iX = 0$. Portanto $X = 0$. Resta mostrar que $ii)$ implica em $i)$.

Vamos supor que $V \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$. Dado $X \in V \cap \tau(V)$, existem $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tais que $X = X_1 + iX_2$. Também existe $Y \in V$, $Y = Y_1 + iY_2$, com $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tais que $\tau(Y) = X$. Logo $-Y_1 + iY_2 = X_1 + iX_2$ e $Y = -X_1 + iX_2$. Mais ainda,

$$X + Y = 2iX_2 \in i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}.$$

Como $X, Y \in V$, $X + Y \in V$ e, por hipótese, $X_2 = 0$. Logo $X = X_1 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap V$ e $X = 0$ devido a equivalência entre *ii*) e *iii*) mostrada anteriormente. Isto conclui a demonstração. □

O lema 3.7 permite estudar as estruturas complexas sobre $\mathfrak{u}$ estudando os subespaços complexos V de $\mathfrak{h}$ tais que $V \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$ (ou $V \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$). Consideramos $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 2m = n$. Logo $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = 2m = n$. Identificamos o subespaço real $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ com $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial real $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ com

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n.$$

Consideramos $\mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$, as grassmannianas dos subespaços de dimensão $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$, e $\mathrm{Gr}_m(\mathfrak{h},\mathbb{C})$ as grassmannianas dos subespaços de dimensão m em $\mathbb{C}^{2m}$. Temos que $\mathrm{Gr}_m(\mathfrak{h},\mathbb{C}) \subsetneqq \mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$. Além disso, um subespaço vetorial V de $\mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ é também um subespaço vetorial complexo de $\mathrm{Gr}_m(\mathfrak{h},\mathbb{C})$ se, quando escrevemos os elementos de V na forma $u+iv$ obtemos $-v+iu$ pertencente a V. Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}\}$ uma base $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}, i\alpha_1, \ldots, i\alpha_{2m}\}$ uma base de $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$. Então matriz da transformação linear $u + iv \longmapsto -v + iu$ é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde 1 representa a matriz identidade de ordem $2m$.

Consideramos agora a identificação de $\mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ com $B_{2m}(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$, dada na seção 1.4, e a órbita

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

onde x é uma matriz quadrada de ordem n.Temos que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},$$

para alguma matriz a,

$$\begin{aligned} &\iff \begin{pmatrix} -xa \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ &\iff a = x \text{ e} - xa = 1 \\ &\iff x^2 = -1 \end{aligned}$$

Portanto x deve ser uma estrutura complexa de $\mathbb{R}^n$. Além disso, como $\det x \neq 0$, temos que o subespaço dado por (3.3) intercepta $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ apenas no subespaço nulo. De fato, se consideramos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}\}$ base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ e $x = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2m$, então (3.3) é identificado ao espaço vetorial real W gerado por

$$\{\alpha_1 + x_{11} i\alpha_1 + \cdots + x_{2m1} i\alpha_{2m}, \ldots, \alpha_{2m} + x_{12m} i\alpha_1 + \cdots + x_{2m2m} i\alpha_{2m}\}.$$

Logo, se $v \in W$ e $v \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, então existem escalares a_i, b_j, $1 \leq i, j \leq 2m$, tais que

$$\begin{aligned} v &= a_1(\alpha_1 + x_{11} i\alpha_1 + \cdots + x_{2m1} i\alpha_{2m}) + \cdots \\ &\quad + a_{2m}(\alpha_{2m} + x_{12m} i\alpha_1 + \cdots + x_{2m2m} i\alpha_{2m}) \\ &= a_1\alpha_1 + \cdots + a_{2m}\alpha_{2m} + (a_1 x_{11} + \cdots + a_{2m} x_{12m}) i\alpha_1 + \cdots \\ &\quad + (a_1 x_{2m1} + \cdots + a_{2m} x_{2m2m}) i\alpha_{2m} \\ &= b_1\alpha_1 + \cdots + b_{2m}\alpha_{2m}. \end{aligned}$$

Usando a independência linear dos vetores $i\alpha_j$ obtemos um sistema de equações lineares homogêneo nas incógnitas a_k e coeficientes x_{ij}. Como $\det x \neq 0$, então $a_k = 0$, para $k = 1, \ldots, 2m$. Isto significa que $v = 0$, como queríamos. Podemos então, identificando (3.3) com x, para simplificar a notação, associar a cada elemento x da órbita aberta, que satisfaz $x^2 = -1$, uma estrutura complexa, conforme lema 3.5 . Pela conclusão do lema 3.3, se $x \neq y$ determinam estruturas complexas equivalentes, no sentido da definição 1.14, então existe $\phi \in Aut\left(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}\right)$ tal que $\phi \circ \tau = \tau \circ \phi$, $\phi(x) = y$, ϕ preserva as raízes simples e ϕ não é a identidade. Automorfismos com estas propriedades e as formas reais onde estes ocorrem são apresentados na tabela 3.1.

Como $\phi \circ \tau = \tau \circ \phi$, então ϕ deixa invariante a álgebra real e, consequentemente, o subespaço complexo $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. De fato, se $Y \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, então $\tau(\phi(Y)) = \phi(\tau(Y)) = \phi(-Y) = -\phi(Y)$ e $\phi(Y) \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Logo a matriz de ϕ na base $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}, i\alpha_1, \ldots, i\alpha_{2m}\}$ do espaço vetorial real $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

onde P também e dada na tabela 3.1 abaixo.

Como
$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Px \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ PxP^{-1} \end{pmatrix} P,$$
então $x \neq y$ determinam estruturas complexas equivalentes se $y = PxP^{-1}$. Se ocorrer $x = PxP^{-1}$, para algum x, então x e PxP^{-1} determinam o mesmo V.

Na tabela 3.1 escrevemos $\widetilde{P}_k$ para designar a matriz quadrada
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
de ordem k, que tem 1 na diagonal secundária e zeros nas demais entradas.

Tabela 3.1: Formais reais compactas

Forma real compacta	ϕ	P
A_l	$\phi(\alpha_i) = \alpha_{n-i+1}$	$\widetilde{P}_n$
D_4	$\phi(\alpha_1) = \alpha_3$	$\begin{pmatrix} \widetilde{P}_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D_4	$\phi(\alpha_1) = \alpha_3, \phi(\alpha_3) = \alpha_4, \phi(\alpha_4) = \alpha_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
D_4	$\phi(\alpha_1) = \alpha_4, \phi(\alpha_3) = \alpha_1, \phi(\alpha_4) = \alpha_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
D_4	$\phi(\alpha_1) = \alpha_4, \phi(\alpha_4) = \alpha_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
D_l	$\phi(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$	$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix}$
E_6	$\phi(\alpha_1) = \alpha_5, \phi(\alpha_2) = \alpha_4$	$\begin{pmatrix} \widetilde{P}_5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3 Formas reais não compactas

Queremos estudar aqui as estruturas complexas solúveis sobre álgebras de Lie reais $\mathfrak{g}_0$ que não são compactas. É sabido que no caso das formas reais não compactas, o grupo dos automorfismos internos da forma real não atua transitivamente sobre o conjunto das subálgebras de Borel. Neste caso faz-se necessário uso dos resultados estabelecidos por J.A. Wolf em [17], em especial do teorema 4.5, para dar início ao estudo das estruturas complexas sobre tais álgebras reais.

Dada uma subálgebra soluvél $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$, existe uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{b}$. Vamos supor que $\mathfrak{b}$ está em uma órbita aberta da ação dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}_0$. Logo, pelo teorema 4.5 de [17], temos que existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{b}$. Além disso, se denotamos Π o sistema de raízes associado a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$, existe um sistema simples de raízes Σ tal que, para a conjugação τ associada a $\mathfrak{g}_0$, vale $\tau(\Pi^+) = \Pi^-$. Isto significa que $\tau(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\alpha\circ\tau}$ e que $\tau(\mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^-$. Como a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ é fixada por τ, se existir um subespaço $V \subset \mathfrak{h}$ satisfazendo (3.2), então $\mathfrak{q}$ determina uma estrutura complexa em $\mathfrak{g}_0$.

Por outro lado, procedendo como na seção 3.2, se $\mathfrak{q}_1$ determina uma estrutura complexa em $\mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{b}_1$ para alguma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}_1$ na mesma órbita aberta de $\mathfrak{b}$, então existe um automorfismo ϕ da álgebra real $\mathfrak{g}_0$ tal $\phi(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}$ e um subespaço $V \subset \mathfrak{h}$ satisfazendo (3.2), tal que $\mathfrak{q} = V \oplus \mathfrak{n}^+$. Portanto $\mathfrak{q}_1$ e $\mathfrak{q}$ são estruturas complexas equivalentes. Formalmente temos

Lema 3.8 *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma forma real não compacta uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotamos por τ a conjugação em $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$. Fixada uma órbita aberta $\mathcal{A}$ da ação dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}_0$ sobre o conjunto das subálgebras de Borel, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, que é invariante por τ, e um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$, onde Π é o sistema de raízes associado a $\mathfrak{h}$, tal que toda subálgebra solúvel complexa, contida em alguma subálgebra de Borel $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}$, é determinada por*

$$\mathfrak{q} = V \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $V \subset \mathfrak{h}$ satisfaz (3.2).

Há também para o caso das formas reais não compactas um lema que estabelece condições equivalentes para as dadas em (3.2).

Primeiramente lembramos $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{R}} V$ e que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ é invariante por τ. Consideramos, como em [15], $E^+ \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ o auto-espaço ratativo ao autovalor 1 e $E^- \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$

o auto-espaço relativo ao autovalor -1 de τ. Temos que

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = E^+ \oplus E^-$$

e o conjunto $\mathfrak{h}$, visto como espaço vetorial real, pode ser escrito na forma

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = E^+ \oplus E^- \oplus iE^+ \oplus iE^-. \tag{3.4}$$

Lema 3.9 *As seguintes afirmações sobre um subespaço vetorial complexo $V \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ são equivalentes:*

i) $V \cap \tau(V) = \{0\}$;

ii) $V \cap (E^+ \oplus iE^-) = \{0\}$;

iii) $V \cap (E^- \oplus iE^+) = \{0\}$;

Demonstração: Vamos supor que $V \cap \tau(V) = \{0\}$. Dado $X \in V \cap (E^+ \oplus iE^-)$ escrevemos $X = X_1 + iX_2$, com $X_1 \in E^+$ e $X_2 \in E^-$. Temos que $\tau(X) = \tau(X_1 + iX_2) = X_1 - i\tau(X_2) = X_1 + iX_2 = X$. Logo $\tau(X) = X$ e $X \in V \cap \tau(V) = \{0\}$. Da hipótese, $X = 0$.Dado $X \in V \cap (E^- \oplus iE^+)$ escrevemos $X = X_1 + iX_2$, com $X_1 \in E^-$ e $X_2 \in E^+$. Temos que $\tau(X) = \tau(X_1 + iX_2) = -X_1 - i\tau(X_2) = -X_1 - iX_2 = -X$. Logo $\tau(-X) = X$ e $X \in V \cap \tau(V) = \{0\}$. Da hipótese, $X = 0$. Isto mostra que *i*) implica em *ii*) e *iii*).

Vamos agora mostrar que *ii*) e *iii*) são equivalentes. Vamos supor que $V \cap (E^+ \oplus iE^-) = \{0\}$. Dado $X \in V \cap (E^- \oplus iE^+)$ escrevemos $X = X_1 + iX_2$, com $X_1 \in E^-$ e $X_2 \in E^+$. Temos que $iX \in V$ e $iX = -X_2 + iX_1 \in E^+ \oplus iE^-$. Da hipótese, $iX = 0$ e portanto $X = 0$. Reciprocamente, vamos supor que $V \cap (E^- \oplus iE^+) = \{0\}$. Dado $X \in V \cap (E^+ \oplus iE^-)$ podemos escrever $X = X_1 + iX_2$ com $X_1 \in E^+$ e $X_2 \in E^-$. Temos que $iX \in V$ e $iX = -X_2 + iX_1 \in E^- \oplus iE^+$. Da hipótese, $iX = 0$. Portanto $X = 0$. Resta mostrar que *ii*) implica em *i*).

Vamos supor que $V \cap (E^+ \oplus iE^-) = \{0\}$. Dado $X \in V \cap \tau(V)$ podemos escrever $X = X_1^+ + X_1^- + iX_2^+ + iX_2^-$, com X_1^+, $X_2^+ \in E^+$ e X_1^-, $X_2^- \in E^-$. Também existe $Y \in V$, $Y = Y_1^+ + Y_1^- + iY_2^+ + iY_2^-$, com Y_1^+, $Y_2^+ \in E^+$ e Y_1^-, $Y_2^- \in E^-$tal que $\tau(Y) = X$. Logo $Y_1^+ - Y_1^- - iY_2^+ + iY_2^- = X_1^+ + X_1^- + iX_2^+ + iX_2^-$ e $Y = X_1^+ - X_1^- - iX_2^+ + iX_2^-$. Mais ainda,

$$X + Y = 2(X_1^+ + iX_2^-) \in E^+ \oplus iE^-.$$

Como $X, Y \in V$, $X + Y \in V$ e, por hipótese, $X_1^+ + iX_2^- = 0$. Logo $X = X_1^- + iX_2^+ \in E^- \oplus iE^+$ e $X = 0$ devido a equivalência entre *ii*) e *iii*) mostrada anteriormente.

Isto conclui a demonstração. □

Proposição 3.10 *Subálgebras solúveis contidas em subálgebras de Borel que não estão em órbitas abertas não determinam estruturas complexas.*

Demonstração: Como, pelo teorema 4.5 de [17], uma condição necessária e suficiente para que uma órbita da ação mencionada seja aberta é justamente a existência, para cada subálgebra de Borel da órbita, de uma subálgebra de Cartan e um sistema simples de raízes satisfazendo a condição do lema 3.8, de modo que $\tau(\mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^-$, então subálgebras solúveis contidas em subálgebras de Borel que não estão em órbitas abertas não determinam estruturas complexas. □

Observação: Não podemos afirmar que estruturas complexas solúveis contidas em subálgebras de Borel de diferentes órbitas abertas deixam de ser equivalentes. É possível que a equivalência das estruturas complexas seja determinada por um automofismo de $\mathfrak{u}$, que não é interno.

Tal como no caso das formas reais compactas, o lema 3.9 permite estudar as estruturas complexas sobre $\mathfrak{g}_0$ estudando os subespaços complexos V de $\mathfrak{h}$ tais que $V \cap (E^+ \oplus iE^-) = \{0\}$. O procedimento é análogo ao adotado no caso compacto. Consideramos $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 2m = n$. Logo $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = 2m = n$. Identificamos o subespaço real $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ com $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial real $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ com

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n.$$

Consideramos $\mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$, as grassmannianas dos subespaços de dimensão $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$, e $\mathrm{Gr}_m(\mathfrak{h},\mathbb{C})$ as grassmannianas dos subespaços de dimensão m em $\mathbb{C}^{2m}$. Temos que $\mathrm{Gr}_m(\mathfrak{h},\mathbb{C}) \subsetneqq \mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ e que um subespaço vetorial V de $\mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ é também um subespaço vetorial complexo de $\mathrm{Gr}_m(\mathfrak{h},\mathbb{C})$ se, quando escrevemos os elementos de V na forma $u+iv$ obtemos $-v+iu$ pertencente a V. Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, i\beta_1, \ldots, i\beta_m\}$ uma base de $E^+ \oplus iE^-$ e $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, i\beta_1, \ldots, i\beta_m, \beta_1, \ldots, \beta_m, i\alpha_1, \ldots, i\alpha_m\}$ uma base de $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$. Então a matriz da transformação linear $u + iv \longmapsto -v + iu$ é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde 1 representa a matriz identidade de ordem $2m$.

Consideramos agora a identifação de $\mathrm{Gr}_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ com $B_{2m}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$, dada na seção 1.4, e a órbita

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

onde x é uma matriz quadrada de ordem n.Temos que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},$$

para alguma matriz a,

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -xa \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow a = x \text{ e} - xa = 1 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = -1. \end{aligned}$$

Portanto x deve ser uma estrutura complexa de $\mathbb{R}^n$. Além disso, como $\det x \neq 0$, temos que o subespaço dado por (3.5) intercepta $E^+ \oplus iE^-$ apenas no subespaço nulo. De fato, se consideramos as bases de $E^+ \oplus iE^-$ e $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ dadas anteriormente e $x = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2m$, então (3.5) é identificado ao espaço vetorial real W gerado por

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1 + x_{11}\beta_1 + \cdots + x_{m1}\beta_m + x_{m+11}i\alpha_1 + x_{2m1}i\alpha_m, \ldots, \\ &\ldots, i\beta_m + x_{12m}\beta_1 + \cdots + x_{m2m}\beta_m + x_{m+12m}i\alpha_1 + x_{2m2m}i\alpha_m\}. \end{aligned}$$

Logo, se $v \in W$ e $v \in i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, então existem escalares a_i, b_j, $1 \leq i, j \leq 2m$, tais que

$$\begin{aligned} v &= a_1(\alpha_1 + x_{11}\beta_1 + \cdots + x_{m1}\beta_m + x_{m+11}i\alpha_1 + x_{2m1}i\alpha_m) + \cdots \\ &\quad + a_{2m}(i\beta_m + x_{12m}\beta_1 + \cdots + x_{12m}\beta_m + x_{m+1m}i\alpha_1 + x_{2mm}i\alpha_m) \\ &= b_1\alpha_1 + \cdots + b_m\alpha_m + b_{m+1}i\beta_1 + \cdots + b_{2m}i\beta_m. \end{aligned}$$

Usando a independência linear dos vetores α_i e β_j obtemos um sistema de equações lineares homogêneo nas incógnitas a_k e coeficientes x_{ij}. Como $\det x \neq 0$, então $a_k = 0$, para $k = 1, \ldots, 2m$. Isto significa que $v = 0$, como queríamos.

Podemos então, identificando (3.5) com x, para simplificar a notação, associar a cada elemento x da órbita aberta, que satisfaz $x^2 = -1$, uma estrutura complexa, conforme lema 3.8 . Pela conclusão do lema 3.3, se $x \neq y$ determinam estruturas complexas equivalentes, no sentido da definição 1.14, então existe $\phi \in Aut\left(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}\right)$ tal que $\phi \circ \tau = \tau \circ \phi$, $\phi(x) = y$, ϕ preserva as raízes simples e ϕ não é a identidade.

Como $\phi \circ \tau = \tau \circ \phi$, então ϕ deixa invariante a álgebra real e, consequentemente, o subespaço complexo $E^+ \oplus iE^-$. De fato, $iY \in E^+$, então $\tau(\phi(iY)) = \phi(\tau(iY)) = \phi(-i\tau(Y)) = \phi(iY)$ e $\phi(iY) = i\phi(Y) \in E^+$. Logo a matriz de ϕ na base β do espaço vetorial real $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Px \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ PxP^{-1} \end{pmatrix} P,$$

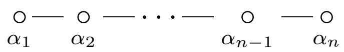
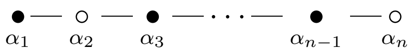
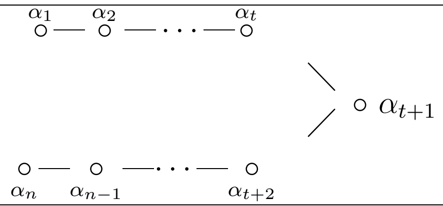
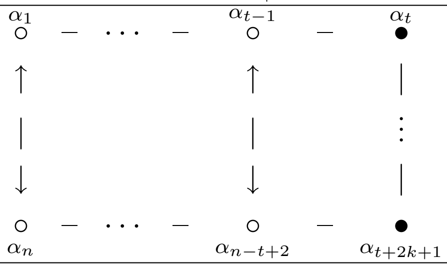
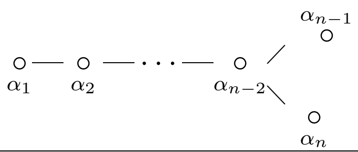
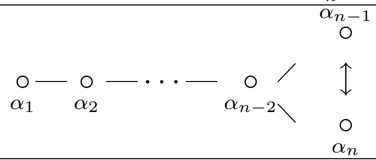
então $x \neq y$ determinam estruturas complexas equivalentes se $y = PxP^{-1}$. Se ocorrer $x = PxP^{-1}$, para algum x, então x e PxP^{-1} determinam o mesmo V.

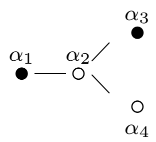
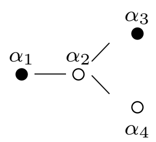
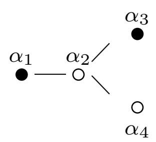
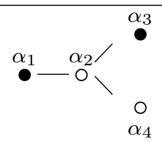
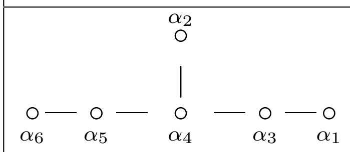
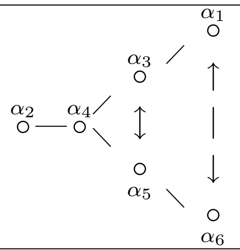
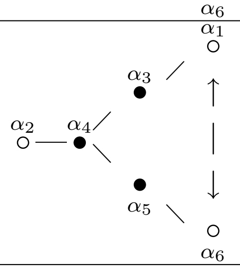
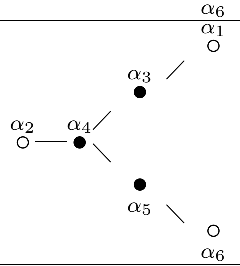
A tabela 3.2 abaixo apresenta, através dos diagramas de Satake, as formas reais não compactas, os possíveis isomofismos que preservam as raízes simples e as matrizes

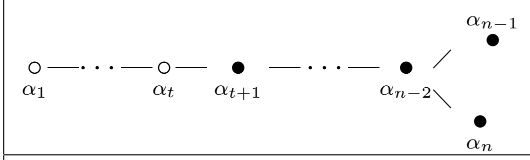
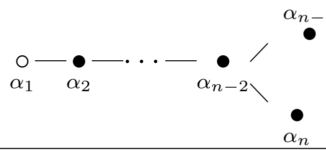
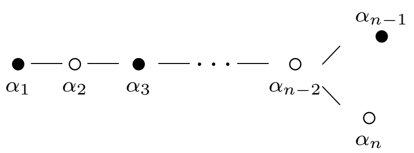
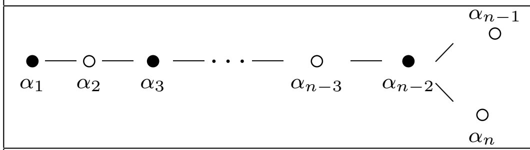
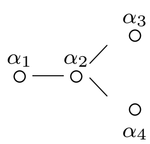
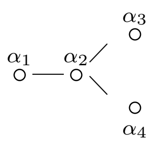
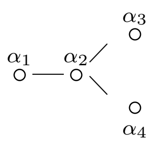
$$\begin{pmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

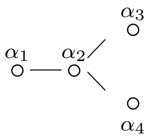
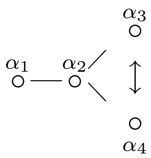
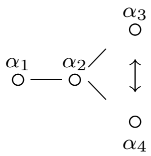
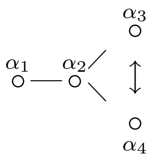
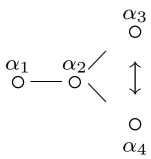
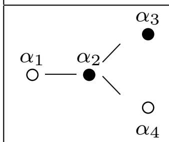
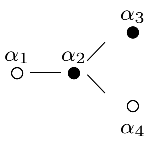
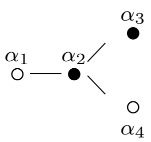
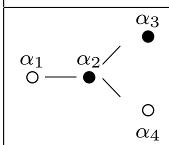
destes isomorfismos na base β de $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$.

Tabela 3.2: Formas reais não compactas

Diagrama de Satake da forma real $\mathfrak{u}$	E^+ iE^- ϕ	P
	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_i)=\alpha_{n-i+1}$	$\widetilde{P}_n$
		$\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}$ é impar
		$\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}$ é impar
	$\langle\{\alpha_{n-i+1}+\alpha_i\}\rangle$ $\left\langle\left\{\begin{array}{c} i\alpha_t,\ldots,i\alpha_{t+2k+1}, \\ \alpha_{n-i+1}-\alpha_i \end{array}\right\}\right\rangle$ $\phi(\alpha_i)=\alpha_{n-i+1}$, com $i=1,\ldots,t-1$	$\begin{pmatrix} I_{t-1} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_s & 0 \\ 0 & 0 & -I_{t-1} \end{pmatrix}$ $s=2k+2$
	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_{n-1})=\alpha_n$	$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2},\alpha_n+\alpha_{n-1}\}\rangle$ $\langle\{i(\alpha_n-\alpha_{n-1})\}\rangle$ $\phi(\alpha_{n-1})=\alpha_n$	$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

	$\langle\{\alpha_2,\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_1,i\alpha_3\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_2,\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_1,i\alpha_3\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3,\phi(\alpha_3)=\alpha_4,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_1$	Como $\phi(\alpha_4)=\alpha_1\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_2,\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_1,i\alpha_3\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3,\phi(\alpha_3)=\alpha_1,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_3$	Como $\phi(\alpha_4)=\alpha_3\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_2,\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_1,i\alpha_3\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4$	Como $\phi(\alpha_4)=\alpha_1\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_5,\phi(\alpha_2)=\alpha_4$	$\begin{pmatrix}\widetilde{P}_5&0\\0&1\end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5+\alpha_3,\alpha_6+\alpha_1\}\rangle$ $\{\alpha_5-\alpha_3,\alpha_6-\alpha_1\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_5,\phi(\alpha_2)=\alpha_4$	Como $\phi(\alpha_5+\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_3$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_2,\alpha_6+\alpha_1\}\rangle$ $\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6-\alpha_1\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_5,\phi(\alpha_2)=\alpha_4$	Como $\phi(\alpha_2)=\alpha_4\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_2,\alpha_1,\alpha_6\}\rangle$ $\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_5,\phi(\alpha_2)=\alpha_4$	Como $\phi(\alpha_2)=\alpha_4\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.

	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_t\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_{t+1},\ldots,i\alpha_n\}\rangle$ $\phi(\alpha_{n-1})=\alpha_n$	$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_1\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_2,\ldots,i\alpha_n\}\rangle$ $\phi(\alpha_{n-1})=\alpha_n$	$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-2},\alpha_n\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{n-1}\}\rangle$ $\phi(\alpha_{n-1})=\alpha_n$	Como $\phi(\alpha_n)=\alpha_{n-1}$ e $\alpha_{n-1}\in E^-$, então $E^+ + iE^-$ não é invariante por ϕ.
		$\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}$ é impar
	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3,\phi(\alpha_3)=\alpha_4,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4,\phi(\alpha_3)=\alpha_1,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

	$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\}\rangle$ $\{0\}$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4,\phi(\alpha_4)=\alpha_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	$\langle\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i(\alpha_4-\alpha_3)\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_3$ $=\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4)-\frac{1}{2}(\alpha_4-\alpha_3),$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i(\alpha_4-\alpha_3)\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3,\phi(\alpha_3)=\alpha_4,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_1$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_3$ $=\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4)-\frac{1}{2}(\alpha_4-\alpha_3),$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i(\alpha_4-\alpha_3)\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4,\phi(\alpha_3)=\alpha_1,\phi(\alpha_4)=\alpha_3$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_4$ $=\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4)+\frac{1}{2}(\alpha_4-\alpha_3),$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4\}\rangle$ $\langle\{i(\alpha_4-\alpha_3)\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_4$ $=\frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4)$ $+\frac{1}{2}(\alpha_4-\alpha_3),$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_2,i\alpha_3,i\alpha_4\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_3\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_2,i\alpha_3,i\alpha_4\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_3,\phi(\alpha_3)=\alpha_4,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_1$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_3\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_2,i\alpha_3,i\alpha_4\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4,\phi(\alpha_3)=\alpha_1,$ $\phi(\alpha_4)=\alpha_3$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_4\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.
	$\langle\{\alpha_1\}\rangle$ $\langle\{i\alpha_2,i\alpha_3,i\alpha_4\}\rangle$ $\phi(\alpha_1)=\alpha_4$	Como $\phi(\alpha_1)=\alpha_4\in E^-$ então E^++iE^- não é invariante por ϕ.

Apêndice A

Teste da identidade de Jacobi via Maple

Durante a elaboração das seções 2.3 e 2.4 foi necessário apresentar certas álgebras de Lie que satisfizessem certas propriedades preestabelecidas. Surgiu então a necessidade de termos uma ferramenta que possibilitasse a rápida verificação da identidade de Jacobi para alguns colchetes não-nulos. Criamos um procedimento em MAPLE que realizava esta tarefa com bastante eficiência. O precedimento foi enviado ao Professor Doutor Esmerindo de Sousa Bernardes (IFSC-USP) que o tornou mais ágil do ponto de vista computacional. Apresentamos aqui o procedimento já revisado pelo Professor Esmerindo, o qual chamamos de TesteJacobi. Aqui informamos os colchetes não nulos por suas constantes de estrutura.

> **restart**;

Parâmetros de entrada:

n: dimensão do espaço (...)

ce: constantes de estrutura conhecidas na forma de uma lista de índices$[(i,j,k) = Cijk, ...]$, com $i < j$.

Saída:

sols: lista com os possíveis conjuntos solução (...)

> $\mathbf{TesteJacobi := proc(n, ce)}$

> $\mathbf{local\ i, j, k, r, s, t, u, p, CE, Jac, eqns, sols};$

> $\mathbf{CE := array(sparse, 1..n, 1..n, 1..n, ce)};$

> $for\ i\ from\ 1\ to\ n-1\ do$

> $for\ j\ from\ i+1\ to\ n\ do$

> $for\ k\ from\ 1\ to\ n\ do$

$> \mathbf{CE[j,i,k]} := -\mathbf{CE[i,j,k]};$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{Jac} := \mathbf{array}(\mathbf{1..n}, \mathbf{1..n}, \mathbf{1..n}, \mathbf{1..n});$

$> for\ r\ from\ 1\ to\ n\ do$

$> for\ s\ from\ 1\ to\ n\ do$

$> for\ t\ from\ 1\ to\ n\ do$

$> for\ u\ from\ 1\ to\ n\ do$

$> \mathbf{Jac[r,s,t,u]} := \mathbf{simplify}(\mathbf{add}(\mathbf{CE[r,s,p]} * \mathbf{CE[p,t,u]} + \backslash$

$> \mathbf{CE[s,t,p]} * \mathbf{CE[p,r,u]} + \mathbf{CE[t,r,p]} * \mathbf{CE[p,s,u]}, \mathbf{p} = \mathbf{1..n}));$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{od};$

$> \mathbf{eqns} := \mathbf{convert}(\mathbf{Jac}, \mathbf{set});$

$> if$ $(nops(eqns) = 1$ *and* $op(eqns) = 0)$ *then return*(**"Estes colchetes satisfazem a identidade de Jacobi e temos uma álgebra de Lie"**) fi;

$> if$ $(nops(eqns) >= 1$ *and* $not(hastype(eqns, name)))$ *then return* (**"Estes colchetes NÃO satisfazem a identidade de Jacobi e NÃO temos uma álgebra de Lie"**) fi;

$> \mathbf{sols} := [\mathbf{solve}(\mathbf{eqns})];$

$> \mathbf{return}(\mathbf{sols})$

$> \mathbf{end}:$

Observamos que as duas primeiras entradas para as constantes de estrutura iniciais, (i, j, k), devem estar em ordem crescente $i < j$, devido a anti-simetria estabelecida na linha sete do procediento. Vejamos alguns exemplos, onde já aproveitamos para mostrar uma maneira de inserir as constantes de estutura, depois de já termos o procedimento funcionando.

Exemplo A.1 *Primeiramente fornecemos as constantes de estrutura:*

$> \mathbf{ce1} := [(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{5}) = -\mathbf{1}, (\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5}) = \mathbf{1}, (\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{6}) = -\mathbf{1}, (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{6}) = -\mathbf{1}];$

Em seguinda colocamos estes dados no procedimento:

$> \mathbf{TesteJacobi}(\mathbf{6}, \mathbf{ce1});$

O procedimento, neste caso, nos dará a seguinte resposta:

"Estes colchetes satisfazem a identidade de Jacobi e temos uma álgebra de Lie"

Exemplo A.2 *Fornecendo as constantes de estrutura:*

$> \mathbf{ce2} := [(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{5}) = -\mathbf{2}, (\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5}) = \mathbf{1}, (\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{6}) = \mathbf{2}, (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{2}) = -\mathbf{1}];$

Colocando os dados no procedimento:

$> \mathbf{TesteJacobi}(\mathbf{6}, \mathbf{ce1});$

Recebendo a resposta:

"Estes colchetes NÃO satisfazem a identidade de Jacobi e NÃO temos uma álgebra de Lie"

Exemplo A.3 *Neste exemplo, queremos saber quais os possíveis valores para certas constantes de estrutura, de modo a termos uma álgebra de Lie.*

$> \mathbf{x} := \mathbf{'x'};$

Fornecendo os colchetes que podem ser não nulos:

$> \mathbf{ce3} := [(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}) = \mathbf{x}[\mathbf{1}], (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{3}) = \mathbf{x}[\mathbf{2}], (\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5}) = \mathbf{x}[\mathbf{3}],$
$(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{6}) = \mathbf{x}[\mathbf{4}], (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{2}) = \mathbf{x}[\mathbf{5}], (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{6}) = \mathbf{x}[\mathbf{6}]];$

Recebendo a resposta e o tempo utilizado pelo procedimento para fornecê-las:

$> \mathbf{t0} := \mathbf{time}() : \mathbf{Sols} := \mathbf{TesteJacobi}(\mathbf{6}, \mathbf{ce3}); \mathbf{time}() - \mathbf{t0};$

$Sols := [\{x[5] = 0, x[4] = 0, x[2] = x[2], x[3] = x[3], x[1] = x[1], x[6] = 0\},$
$\{x[5] = 0, x[4] = 0, x[2] = 0, x[6] = x[6], x[3] = x[3], x[1] = x[1]\},$
$\{x[3] = 0, x[1] = 0, x[4] = x[4], x[5] = x[5], x[2] = x[2], x[6] = 0\},$
$\{x[5] = 0, x[1] = 0, x[4] = x[4], x[2] = x[2], x[3] = x[3], x[6] = 0\},$
$\{x[3] = 0, x[1] = 0, x[2] = -x[5], x[4] = x[4], x[5] = x[5], x[6] = x[6]\},$
$\{x[5] = 0, x[1] = 0, x[2] = 0, x[4] = x[4], x[6] = x[6], x[3] = x[3]\}]$

$\mathbf{.437}$

Referências Bibliográficas

[1] A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti and G. P. Ovando, *Product Structures on Four Dimensional Solvable Lie algebras*. Homology, Homotopy and Applications, **7** (2005), 9-37.

[2] A. Borel, *Groupes Linéaires Algébriques,* Ann. of Math. **64** (1956), 20–82.

[3] M. L. Barberis and I. Dotti, *Abelian Complex Structures on Solvable Lie Algebras,* J. Lie Theory, **14**(2004), 25-34.

[4] P. Bartolomeis: *$\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}$-Deformation Theory for Holomorphic and Symplectic Manifolds.* Complex, contact and symmetric manifolds, 75–103, Progr. Math., 234, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.

[5] L. A. Cordero, M. Fernandez, A. Gray and L. Ugarte, *Nilpotent Complex Structures*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **95(1)**, 2001, 45-55.

[6] D. Snow,*Invariant Complex Structures on Reductive Lie Groups*, J. Reine Angew. Math. **371** (1986), 191-215.

[7] I. Dotti and A. Fino, *Abelian Hypercomplex 8-Dimensional Nilmanifolds,* Ann.Global Anal.Geom. **18:** 47-59, 2000.

[8] I. Dotti and A. Fino, *Hypercomplex Eight-Dimensional Nilpotent Lie Groups,* J. Pure Appl. Algebra, **184** (2003), 41-57.

[9] I. Dotti and A. Fino, *Hypercomplex Nilpotent Lie Groups*, Contemp. Math. **288:** 310-314, 2001.

[10] I. Dotti and A. Fino, *HyperKahler Torsion Structures Invariant by Nilpotent Lie Groups,* Class. Quantum Grav. **19** (2002), 551-562.

[11] M. Goto, *Note on a Characterization of Solvable Lie Algebras*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, **26** (1962), 1-2.

[12] A. A. G. Michael, *On the Conjugacy Theorem of Cartan Subalgebras,* Hiroshima Math. J. **32** (2002), 155-163.

[13] P. Petravchuk, *Lie algebras Decomposable as Sum of an Abelian and a Nilpotent subalgebra*. Ukr. Math. J., **40** (1988), 385-388.

[14] S. Salamon, *Complex Structures on Nilpotent Lie Algebras*, J. Pure appl. Algebra, **157:** 311-33, 2001.

[15] L. A. B. San Martin, Álgebras de Lie. Editora da Unicamp, 1999.

[16] J. P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras. Springer-Verlag, New York, 1987.

[17] J. A. Wolf, *The action of a real semisimple group on a complex flag manifold*, Bull. Am. Math. Soc., 75, No. 6, 1121-1237 (1969).

[18] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction.*Progress in Mathematics **140**, Birkhauser, 2004.

[19] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry.* Vol. II, Interscience, 1963.

[20] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups,* Advances in Mathematics, **21** (1976), 293-329.

[21] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[22] V. Gorbatsevich, A. Onishchik and Vinberg E 1994, *Structure of Lie Groups and Lie Algebras* (English Transl. in Encycl. Math. Sc. 41) ed A. Onishichik and E. Vinberg (Berlin: Springer-Verlag).

[23] G. Ovando, *Complex, Symplectic and Kahler structures on four dimensional Lie Groups,* Revista de La Unión Matemática Argentina, **45** (2): 55-67, 2004.

[24] L. A. B. San Martin, *On global contrallability of discrete-time control systems,* Math. Control. Signals Systems 8 (1995), 279-297.