# A semântica algébrica para as lógicas modais e seu interesse filosófico

**Samir Bezerra Gorsky**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FILOSOFIA E
CIÊNCIAS HUMANAS DA
UNIVERSIDADE DE CAMPINAS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM FILOSOFIA (ÁREA DE LÓGICA)

Orientador:
**Prof. Dr. Walter A. Carnielli**
Banca Examinadora:
**Prof. Dr. Marcelo E. Coniglio - CLE - UNICAMP**
**Prof. Dr. Marcelo Finger - IME - USP**

30 de julho de 2008

**Samir Bezerra Gorsky**

**A Semântica Algébrica para as lógicas modais e seu interesse filosófico**

Dissertação de Mestrado apresentada ao *Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade* Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 04/07/ 2008

BANCA

Prof. Dr. Walter Alexandre Carmielli (orientadora)

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (membro)

Prof. Dr. Marcelo Finger (membro)

Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano (suplente)

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa (suplente)

Julho/2008

# A semântica algébrica para as lógicas modais e seu interesse filosófico

**Samir Bezerra Gorsky**

Orientador:
**Prof. Dr. Walter A. Carnielli**

UNICAMP
30 de julho de 2008

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP**

Gorsky, Samir Bezerra
G687s Semântica algébrica para as lógicas modais
e seu interesse filosófico / / Samir Bezerra Gorsky. - - Campinas, SP : [s. n.], 2008.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

1. Filosofia. 2. Lógica.
3. Semântica 4. Álgebra.
5. Ontologia. 6. Epistemologia.
I. Carnielli, Walter A. (Walter Alexandre), 1952- 5 - Título II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

(cn/ifch)

Título em inglês: Algebraic semantics for modal logics and its philosophical interest

Palavras-chave em inglês (keywords) : Philosophy; Logic; Semantics; Algebra; Ontology; Epistemology

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: Walter Alexandre Carnielli, Marcelo Finger, Marcelo Esteban Coniglio

Data da defesa: 04-07-2008

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

*O presente trabalho é dedicado a todos aqueles que vivem em algum dos mundos possíveis* ἐξ ῶη δὲ ἥ γένεςίς ἐστι τοῖς ουσι καὶ τὴν φιτορὰν εἴς ταυτα γίνεσται κατὰ τὸ κρεών· διδὶναι γὰρ αὐ̃τὰ δίκην καὶ τίσιν ἀλλήλοις τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν του κρόνου τάξιν

*Anaximandro*

# Agradecimentos

Agradeço a todos que me apoiaram em meus estudos e pesquisas, a todos os colegas do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) pelo apoio mútuo e pelo compromisso com o conhecimento, aos professores Nelson Gonçalves Gomes (UNB-Brasília) por ter me incentivado a estudar Lógica, Itala Maria Loffredo D´Ottaviano (CLE-UNICAMP), Claudio Pizzi (Dipartimento di Filosofia e Scienze Sociali Università di Siena), Marcelo Esteban Coniglio (CLE-UNICAMP) e Marcelo Finger (IME-USP), à minha família, à Venessa Alessandra Silva, pelo conpanherismo, aos funcionários do Centro de Lógica, Epistemologia e História da ciência (CLE-UNICAMP) e do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH-UNICAMP). Em especial agradeço ao meu orientador Professor Walter Alexandre Carnielli pela dedicação, pela disposição e pelo incentivo nesses anos de desenvolvimento de idéias.

# Resumo

No século XX tivemos um considerável avanço sobre o entendimento formal do significado das modalidades. Os trabalhos de Jónsson, McKinsey e Tarski na década de quarenta permitiram a construção dos resultados de completude algébrica para os sistemas modais. Estes resultados, porém, não receberam a devida atenção. Na década de cinqüenta, Kripke propôs uma semântica interessante para estes sistemas. Tal semântica, hoje conhecida como semântica de Kripke ou semântica dos mundos possíveis, causou um grande impacto no âmbito da filosofia analítica. Os artigos escritos por Lemmon na decada de 60 têm por objetivo apresentar uma síntese destas duas semânticas. Um interessante resultado mostrado nestes artigos é que a completude semântica pode ser deduzida de resultados algébricos por meio de um teorema central. Um dos resultados mais surpreendente e interessante do trabalho do Lemmon é o teorema da representação. Esse teorema de representação para a lógica modal tem como conseqüência a conexão entre o ponto de vista algébrico e o ponto de vista da semântica dos mundos possíveis (ou semântica de Kripke). O objetivo inicial do presente trabalho era estender este mesmo resultado algébrico para os sistemas da classe "$G^{mnpq}$" proposta por Lemmon e Scott nas "Lemmon notes". Argumentaremos que as semânticas algébricas para as lógicas modais podem servir de base para respostas às diversas críticas direcionadas ao desenvolvimento da lógica modal. Mostraremos, por fim, como que a semântica algébrica, sendo uma semântica que não usa o conceito de mundos possíveis, pode ser considerada útil por defensores do antirealismo modal.

# Abstract

In XX century we had a considerable advance on the understanding of the formal meaning of modalities. The Jónsson, McKinsey and Tarski works in fourties enabled the construction of the results of algebraic completeness for the modal systems. In fifties Kripke proposed a interesting semantic for these systems. Such semantics, today known as possible world's semantics, or Kripke's semantics, caused a great impact in the context of analytical philosophy. Articles written by Lemmon in the decade of 60 are supposed to present a synthesis of these two semantics, the algebraic semantic and the possible world's semantic. One interesting result shown in these articles is that the semantic completeness can be inferred from algebraic results through a central theorem. One of the most surprising and interesting results in the paper of Lemmon is the theorem of representation for modal algebras. This theorem of representation for the modal algebra is as a result the connection between the point of view and algebraic point of view of the semantics of possible worlds (or Kripke's semantics). The initial objective of the present work was to extend this same result for algebraic systems of Class $G^{mnpq}$ proposed by Lemmon and Scott in the "Lemmon notes". We argue that the algebraic semantic for modal logic can serve as a basis for answers to the various criticisms directed to the development of modal logic. We'll show, finally, that the algebraic semantics, as a semantics that does not use the concept of possible worlds, may be deemed useful by supporters of modal antirealism.

# Sumário

# Introdução

A lógica modal é o estudo de determinada classe de sistemas lógicos que são caracterizados por abrigarem em sua linguagem um ou mais operadores de modalidade (ver *An Introduction to Modal Logic* [HC96] prefácio). Esses operadores qualificam asserções sobre a veracidade das proposições. Uma asserção P verdadeira pode ser qualificada modalmente da seguinte maneira: (i) "P é necessariamente verdadeira" (ii) "P é possivelmente verdadeira" ou (iii) "P é verdadeira". Tal modalidade recebe o nome de "modalidade alética"(Aletéia - $\alpha\lambda\eta\theta\epsilon\iota\alpha$ - significa verdade em grego), ou seja, diz respeito ao modo como a asserção é verdadeira. Podemos ainda utilizar outras modalidades (não aléticas) como por exemplo "deve ser o caso que P", "acredita-se que P", "sempre foi verdadeiro que P" ou "é demonstrável que P" (cf. *Enciclopédia de Termos Lógico-filosóficos* [JB06].

A formalização das modalidades não-aléticas dá surgimento aos diversos tipos de lógicas modais correntemente conhecidas. Temos, desta forma, uma riqueza de interpretações a respeito dos operadores modais. A riqueza e a diversidade conceitual de tais interpretações resultam em um poderoso método com conseqüências bem acentuadas em disciplinas como a filosofia da linguagem ("semântica dos mundos possíveis"), matemática construtiva (lógica intuicionista), fundamentos teóricos de computação (lógica dinâmica, lógica temporal e lógica de programação) e teoria das categorias (semântica dos feixes). Paralelamente, temos ainda, um incremento do estudo de modalidades com motivações mais matemáticas. Asserções como a de que certa proposição "é demonstrável na aritmética de Peano", ou "é verdadeira localmente" etc. podem ser tratadas modalmente de acordo com certos sistemas como o GL (cf. *Modalità e Multimodalità* [eCP00]). Tais sistemas são interessantíssimos uma vez que sua semântica possui propriedades muito particulares.

O grande desafio para os estudiosos e pesquisadores da lógica modal no século XX foi encontrar a semântica que melhor se adequasse ao significado intuitivo das diversas modalidades. Em 1959 Saul Kripke, baseado no que ele considerava uma idéia de Leibniz, propôs uma “semântica dos mundos possíveis”(hoje também conhecida como “semântica de Kripke”)(cf. *A completeness theorem in modal logic* [Kri59] e *Semantic analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi* [Kri63]). Porém, outros trabalhos e projetos foram propostos com intuitos e resultados tão importantes quanto os citados como por exemplo *Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting* [Tar48b]. Bull e Segerberg, dois importantes autores em lógica modal, citam trabalhos e fontes alternativas sobre a semântica para as lógicas modais em *Basic Modal Logic* [BS84]. Neste mesmo texto ([BS84], temos ainda uma afirmação muito interessante que motiva o presente trabalho. O trecho mencionado é o seguinte:

> “A particularly interesting paper with implications for modal logic is *Boolean algebras with operators* [Tar51]. If it had been widely read when it was published, the history of modal logic would have looked different” (*Basic Modal Logic* [BS84] pg. 9).

O artigo citado de Jónsson e Tarski trata de uma classe de álgebra que mais tarde foi usada por Lemmon ([Lem66]) para obter resultados de completude algébrica de alguns sistemas modais. Podemos então presumir que Bull e Segerberg estão defendendo que, se as semânticas algébricas para as lógicas modais fossem levadas a sério desde o início, teríamos então uma outra história para as lógicas modais. A grande questão que surge dado este ponto de vista é a seguinte: teriam os filósofos contemporâneos algum interesse pela lógica modal formalizada, se sua semântica não fosse uma semântica dos mundos possíveis e sim determinada por uma classe de álgebras? Não teria a lógica modal, caso sua semântica mais importante fosse algébrica, se tornado apenas uma área pouco importante ou lateral da matemática? O presente trabalho pretende defender uma proposta em favor da orientação de Bull e Segerberg; pretendemos argumentar que as semântica algébrica para a lógica modal não tirariam o brilho das modalidades enquanto instrumento filosófico. Tal defesa partirá da idéia de que temos duas maneiras de olharmos para as lógicas modais. Podemos ilustrar estas “duas maneiras” de olharmos para tais lógicas com o seguinte texto de Boécio:

> “Peço-te, portanto que agora me digas se achas que o acaso existe realmente e, caso exista, em que ele consiste. “Apresso-me a cumprir minha promessa e abrir-te o caminho que leva dire-

tamente à tua pátria. Ora, essas questões, embora seu entendimento seja útil desviarão um pouco do nosso caminho, e temo que tais desvios te fatiguem e talvez até te impeçam de percorreres até o fim o caminho reto." "Não", disse eu, "não tens nada a temer, pois essa será para mim uma ocasião de refrear minha inquietude e de me instruir sobre temas que tanto me interessam. Cada ponto de tua argumentação me parecerá irrefutável, e nenhuma das conclusões será posta em dúvida." "Vou então satisfazer o teu desejo", e logo começou da seguinte maneira: "Se definirmos o acaso como um acontecimento produzido acidentalmente e não por uma seqüência de qualquer tipo de causa, longe de consentir na definição, considero essa palavra absolutamente desprovida de sentido, salvo a significação da realidade a que ela se refere. Com efeito, se Deus obriga todas as coisas a se dobrarem às suas leis, onde haveria lugar para o acaso? Nada pode ser feito a partir do nada: esse é um axioma cuja verdade jamais foi contestada, embora os antigos o fizessem princípio, não do princípio criador, mas da matéria criada, isto é, da natureza sob todas as suas formas. Ora, se um fato se produzisse sem causa, poderíamos dizer que ele surgiu do nada. E, se isso não pode ocorrer, também o acaso, tal como o acabamos de definir, não pode se produzir." "Mas quê!", disse eu, "não há nada que possa ser chamado de "acaso" ou "acidente"? Ou existirá uma outra realidade, que escapa a compreensão dos homens, à qual possam corresponder essas palavras?" Ela res-pondeu: "Aristóteles, a quem eu tanto amo, nos fornece na sua Física uma definição ao mesmo tempo breve e próxima da verdade." "E qual é?", perguntei. "Ele diz que toda vez que uma ação é realizada com um determinado fim, mas algo além do que estava sendo procurado acontece por uma razão ou outra, isto se chama acaso, como por exemplo quando alguém cava o solo para fazer um plantio e encontra ali um tesouro que estava escondido. Pode-se crer com certeza que isso aconteceu fortuitamente e, no entanto, o que ocorre não provém do nada; o acontecimento tem causas próprias, cujo conteúdo imprevisto e inesperado parece ter sido produzido pelo acaso. Pois, se o agricultor não tivesse sulcado o solo e o homem que colocou ali seu dinheiro não o tivesse escondido no local, o ouro nunca teria sido descoberto. Tais são portanto as causas desse ganho fortuito que resulta de uma série de circunstâncias e não de um ação intencional. Com efeito, nem aquele que enterrou o ouro nem aquele que revolveu seu campo agiram com a finalidade de que esse ouro fosse descoberto; mas, como eu já disse, acontece, por uma soma de circunstâncias, que um revolveu a terra justamente onde o outro havia escondido o ouro. Podemos portanto definir o acaso como um acontecimento inesperado, resultado de uma somatória de circunstâncias, que aparece no meio de ações realizadas com uma finalidade precisa; ora, o que provoca um tal conjunto de circunstâncias é justamente a ordem que procede de um encadeamento inevitável e tem como fonte a Providência, que dispõe todas as coisas em seus lugares e tempo.""

(Boécio, A Consolação da Filosofia, V. 1)

A questão inicial do texto de Boécio acima (o acaso realmente existe?) é central em um discurso sobre uma lógica que trate do necessário e do possível (ou seja, a lógica modal). A resposta negativa à esta indagação nos leva a pensar as leis da natureza a partir da ausência de acaso e, portanto, o conceito de necessidade como algo intrinsecamente ligado a toda e qualquer realidade, sendo assim um conceito inevitável a toda filosofia que se aventure a pensar a realidade. A resposta positiva traz consigo a idéia de que os mundos possíveis podem se proliferar *ad infinitum*. A existência do acaso nos leva a pensar as meras possibilidades como objetos igualmente factíveis com relação aos meros acasos. Daí, a questão sobre a existência do acaso é indubitavelmente uma questão sobre a existência de mundos possíveis. É bem conhecida, no âmbito da filosofia analítica, a idéia de mundos possíveis e o papel que esta idéia desempenha em discussões sobre a necessidade e a possibilidade. A resposta apresentada no texto acima e atribuída (no próprio texto) a Aristóteles mostra que este filósofo foi muito cuidadoso com tal questão. O acaso, segundo tal resposta, seria apenas uma aparência de acaso. Este conceito se evidenciaria apenas quando as causas dos fatos estivessem ocultas ou fossem ignoradas. Portanto, seguindo este raciocínio, percebemos que, segundo o texto citado acima, o acaso não existiria metafisicamente. Sua existência seria meramente epistêmica, e indicaria uma diferença entre o que é conhecido e o que simplesmente é. A partir desta temática, o seguinte trabalho desenvolverá uma pesquisa acerca da formalização e do entendimento sobre as lógicas modais. Analisaremos portanto a importância do conceito de mundos possíveis para o significado de proposições modais e a possibilidade de se construir uma semântica tão eficiente quanto esta, porém, sem o uso deste conceito. A semântica referida é a semântica algébrica. Mostraremos alguns resultados interessantes desta semântica com relação à lógica modal e por fim faremos um exposição do debate filosófico em torno deste tema. Entre os resultados formais apresentados abaixo, destacamos a completude dos sistemas da classe $G^{mnpq}$ (ver capítulos 3 e 4) e a representação para álgebras modais (capítulo 3). A hipótese a ser analisada por este trabalho é a de que a lógica modal continuaria sendo uma ferramenta importante para a filosofia analítica mesmo quando considerada do ponto de vista de uma semântica estritamente matemática (que satisfizesse critérios importantes de uma semântica para os sistemas modais). Os resultados sobre a semântica algébrica para os sistemas modais apresentados neste trabalho são baseados nos trabalhos de Lemmon na década de sessenta (*An Introduction to Modal Logic (The "Lemmon Notes")* [Lem77], *An extension Algebra and the Modal System T* [Lem60] e *Algebraic Semantics for Modal Logic I and II* [Lem66] e sua estrutura é a seguinte: primeiro faremos uma breve introdução algébrica, passando em seguida para a apresentação dos dos trabalhos de Lemmon; em seguida usaremos o livro de W. Carnielli e C. Pizzi, *Modalità e Multimodalità* [eCP00] para uma breve incursão no conceito de multimodalidade (capítulo 2), e por fim generalizaremos os resultados de Lemmon para a classe de sistemas $G^{mnpq}$ e indicaremos a construção das semânticas algébricas para as lógicas multimodais usando o mesmo método dos artigos de Lemmon citados acima.

# Capítulo 1

# Lógica Modal

## 1.1 Introdução histórico-filosófica às lógicas modais

### 1.1.1 Aristóteles, Diodorus Cronos e os Megáricos

A origem da lógica modal se confunde com a origem da própria lógica como um todo. Ambas têm nascimento nas obras de Aristóteles que atribuiu dois capítulos do seu *De Interpretatione* aos estudos das interconexões lógicas entre o necessário, o possível, o impossível e o permitido. Esses textos, porém são confusos em algumas de suas partes. Aristóteles teve dificuldades em construir uma negação sobre uma sentença modal. Uma de suas dúvidas recai, por exemplo, na negação de uma sentença do tipo "possível p". Para ele, a negação dessa sentença poderia ser de dois tipos: "possível não p" ou "não possível p". Uma outra dificuldade se refere às implicações entre sentenças modais (cf. Prior Analytics A, 13 [Ari38]).

Para um desenvolvimento dos temas acima tomemos a seguinte notação informal: para uma sentença $\mathbf{A}$, $\Box\mathbf{A}$ significa "$\mathbf{A}$ é necessário" e $\Diamond\mathbf{A}$ significa que "$\mathbf{A}$ é possível". Neste caso é evidente para Aristóteles que $\Box\mathbf{A}$ e $\neg\Box\mathbf{A}$, $\Diamond\mathbf{A}$ e $\neg\Diamond\mathbf{A}$ são pares de sentenças contraditórias entre si, por outro lado, os pares de sentenças $\Box\mathbf{A}$ e $\Box\neg\mathbf{A}$, $\Diamond\mathbf{A}$ e $\Diamond\neg\mathbf{A}$ não são contraditórias entre si. É aceitável que o necessário implica o possível em uma certa interpretação:

$\Box\mathbf{A} \rightarrow \Diamond\mathbf{A}$ (1)

Aristóteles está também inclinado a aceitar que:

$\Diamond\mathbf{A} \rightarrow \Diamond\neg\mathbf{A}$ (2)

Podemos entender a proposição acima da seguinte maneira "o que é possível ser é também possível não ser". Todavia, a proposição (1) e a proposição (2) resultam, por transitividade da implicação, em um absurdo (se tomadas como verdadeiras). Para resolver este paradoxo aparente é preciso que se faça a distinção entre dois sentidos de possibilidade. A possibilidade que aparece na proposição (1) é, portanto distinta da possibilidade que aparece na proposição (2). Dizemos que a possibilidade no sentido de (1) é uma "possibilidade própria" enquanto a possibilidade no sentido (2) é uma "contingência". Aristóteles, no capítulo 13 do *De Interpretatione*, chega bem próximo de fazer esta mesma distinção. Ainda neste mesmo capítulo Aristóteles formula outros dois princípios modais (cf. [Ari38]). O primeiro diz que "o que é por necessidade é também atual", o segundo diz que "a atualidade de algo implica na sua possibilidade". Podemos então representar esses dois princípios da seguinte forma (em nossa notação informal):

$\Box\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ (3)

$\mathbf{A} \rightarrow \Diamond\mathbf{A}$ (4)

Ainda a partir do princípio de transitividade da implicação concluímos que (1) é conseqüência de (3) e (4). Esta inferência, contudo, não aparece na obra do estagirita.

Um outro conceito modal importante é o de "impossibilidade". Para Aristóteles a impossibilidade seria algo com a mesma força que a necessidade, porém com um "sentido" oposto. A sentença "impossível $\mathbf{A}$" será denotado aqui como ($|\mathbf{A}$). Podemos então definir a impossibilidade em termos de necessidade da seguinte maneira:

$|\mathbf{A} \leftrightarrow \Box\neg\mathbf{A}$ (5)

Uma definição equivalente mas geralmente não encontrada na obra aristotélica é a seguinte:

$|\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\Diamond\mathbf{A}$ (6)

Aristóteles desenvolve, nos *Primeiros Analíticos*, um silogismo modal, ou seja, um silogismo que admite premissas e conclusões com sentenças modais

([Ari89] A, cc. 3, 8-22). Neste pequeno resumo histórico não trataremos desta parte da lógica modal aristotélica. Para maiores informações sobre o assunto ver *Aristotle's De Interpretatione: Contradiction and Dialectic* [Ros49], *Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic* [Luk57] e *Aristotle's Modal Syllogisms* [Mac63].

Porém, dois aspectos deste desenvolvimento devem ser aqui mencionados. Primeiramente, Aristóteles distingue cuidadosamente dois tipos de "ser possível". Em sentido primitivo, esta expressão tem como significado: "aquilo que não é necessário, e se assumirmos como sendo o caso não terá conseqüências impossíveis" ([Ari89] 38a 18-22). No segundo sentido ele diz que o necessário é permitido e portanto devemos concluir que o sentido da expressão acima é dado simplesmente por: "aquilo que se assumirmos como sendo o caso não terá conseqüências impossíveis" ([Ari89] A, 32a 20-21). Escreveremos $\mathbf{QA}$ para o primeiro sentido e preservaremos $\Diamond\mathbf{A}$ para o segundo. Temos então:

$\mathbf{QA} \leftrightarrow \neg\Box\mathbf{A} \wedge \neg|\mathbf{A}$ (7)

$\Diamond\mathbf{A} \leftrightarrow \neg|\mathbf{A}$ (8)

A partir das fórmulas acima podemos finalmente resolver o impasse originário do *De Interpretatione* (cf. [Ari38]). A definição de contingência em (7) $\neg\Box\mathbf{A} \wedge \neg|\mathbf{A}$ é equivalente à $\Diamond\neg A \wedge \Diamond A$. É evidente que (8) se enquadra bem com (6), enquanto (7) possui uma estrutura muito similar à de (2) no seguinte sentido: se substituirmos em (2) $\Diamond$ por $\mathbf{Q}$ teremos:

$\mathbf{QA} \rightarrow \mathbf{Q}\neg\mathbf{A}$ (9)

Que é uma conseqüência de (5) e (7). Com efeito, basta seguirmos o seguinte raciocínio:

1) $\mathbf{QA}$ (hipótese)
2) $\mathbf{QA} \leftrightarrow \neg\Box\mathbf{A} \wedge \neg|\mathbf{A}$ (Definição de $\mathbf{Q}$)
3) $\neg\Box\mathbf{A} \wedge \neg|\mathbf{A}$ (1, 2 MP)
4) $\neg\Box\neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg|\mathbf{A}$ (3 substituição de equivalentes)
5) $\neg|\neg\mathbf{A} \wedge \neg\Box\neg\mathbf{A}$ (4 definição de $|$)
6) $\neg|\neg\mathbf{A} \wedge \neg\Box\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{Q}\neg\mathbf{A}$ (Definição de Q)
7) $\mathbf{Q}\neg\mathbf{A}$ (5, 6 MP)

8) $\mathbf{QA} \rightarrow \mathbf{Q}\neg\mathbf{A}$ (1, 7 teorema da dedução)

Uma conseqüência a mais de (7) e (8) é:

$\mathbf{QA} \rightarrow \Diamond\mathbf{A}$ (10)

Assim a contingência aparece como sendo uma possibilidade mais restrita que a possibilidade própria. Em outros termos, dizemos que a contingência é mais fraca que a possibilidade própria, mas do ponto de vista lógico ela é mais forte uma vez que possui um conjunto maior de conseqüências.

Há uma citação de Aristóteles que estabelece ligações entre a necessidade e a implicação. Observemos por exemplo a seguinte passagem *De Interpretatione* (34a5-24): "We must first say that, if when A is it is necessary that B should be, then if A is possible it is also necessary that B should be possible.... So that if one calls the premisse A and the conclusion B, it will result not only that B will be necessary if A is necessary, but also that it will be possible if A is possible". É natural encontrarmos nesta citação duas importantes intuições: (a) Que um condicional necessário com o antecedente possível possui um conseqüente possível; (b) Que um condicional necessário com um antecedente necessário possui o conseqüente necessário. Mais precisamente, podemos expressar as duas idéias acima com as seguintes fórmulas da notação informal:

$\Box(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\Diamond\mathbf{A} \rightarrow \Diamond\mathbf{B})$ (11)

$\Box(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\Box\mathbf{A} \rightarrow \Box\mathbf{B})$ (12)

As seguintes formulações ainda são coerentes com a citação de Aristóteles:

$\Box(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \Box(\Diamond\mathbf{A} \rightarrow \Diamond\mathbf{B})$ (13)

$\Box(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \Box(\Box\mathbf{A} \rightarrow \Box\mathbf{B})$ (14)

$\Box(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\Diamond\mathbf{A} \rightarrow \Box\Diamond\mathbf{B})$ (15)

Os megáricos e estóicos também desenvolveram um importante trabalho em lógica modal. Boécio possui um importante texto *Comentários sobre o De Interpretatione de Aristóteles, Segunda parte, Segunda edição. ed. Meiser, pg. 234* que trata da definição diodoréia das modalidades:

"Diodorus define o possível como aquilo que é ou será; o impossível como aquilo que, sendo falso, não será verdadeiro; o necessário como aquilo que, sendo verdadeiro, não será falso; e o não-necessário como aquilo que é ou será falso." Nesta citação podemos perceber uma importante conexão entre as modalidades aléticas e temporais. A concepção dos conceitos temporais a partir de modalidades foi trabalhada Prior. (ver [Pri55], [Pri67] e [Piz74]). Temos ainda muitas outras referências e relatos de trabalhos megáricos e estóicos sobre lógica. Alguns autores modernos porém, defendem que não existem avanços maiores do que aqueles já alcançados por Aristóteles (cf. [Lem77], [Kne63] e [Pri62]).

### 1.1.2 Idade Média

Na Idade Média as noções modais receberam muita atenção da parte dos lógicos. Temos por exemplo trabalhos que tratam tanto dos silogismos modais quanto os que tratam das questões entre a noção *De re* e *De dicto*. Podemos encontrar em muitos autores da época um tratamento cuidadoso sobre os princípios modais aristotélicos e suas variantes. Alguns desses princípios receberam uma descrição latina como por exemplo o princípio (3) deste texto: "*A necesse esse ad esse valet consequentia*", e o princípio (4): "*Ab esse ad posse valet consequentia*". Em Ockhan e outros encontramos princípios de rejeição como por exemplo: O impossível não se segue do possível, e o contingente não se segue do necessário. Pseudo-Scotus adiciona as seguintes variações:

$\neg\Box\mathbf{A} \leftrightarrow \Diamond\neg\mathbf{A}$ (16)

$\neg\Diamond\mathbf{A} \leftrightarrow \Box\neg\mathbf{A}$ (17)

Dos quais o (16) está já implícito nos princípios aristotélicos (5) e (6). Pseudo-Scotus apresenta ainda importantes idéias modais. Em adição ao necessário e possível ele considera como modais sentenças do tipo "é duvidoso que...", "sabe-se que...", "acredita-se que...", "deseja-se que". Pseudo-Scotus aponta as similaridades entre estas modalidades e as modalidades aléticas convencionais. Temos portanto uma certa antecipação medieval ao que chamamos modernamente de lógica modal epistêmica, deôntica etc. Além do mais, ele estende os princípios (11) e (12) vistos acima a essas outras modalidades.

Outra notável antecipação dos medievais se dá no campo dos paradoxos da implicação. As sugestões do estóico Filo vão em direção da análise que é feita do "se...então..." como uma implicação material passível de ser estudada através de uma tabela de verdade apropriada. Por outro lado Diodorus tinha sugerido que o 'se...então...' poderia ser pensado como uma implicação material necessária. Podemos então representar a idéia de Diodorus em nossa notação informal da seguinte forma: sendo '$\rightarrow$' a implicação material, definimos '$A \Rightarrow B$' como '$\Box(A \rightarrow B)$', daí '$\Rightarrow$' representa o 'se...então' de Diodorus. Muitos autores medievais defendem que um condicional é verdadeiro se, e só se ele for necessariamente verdadeiro. Portanto, para estes autores, afirmar que 'se A, então b' é afirmar que não é possível ser o caso que A sem ser o caso que B. Tal princípio pode ser formulado informalmente da seguinte maneira:

$\Box(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg\Diamond(A \wedge \neg B)$ (18)

($\wedge$ é usado aqui como conjunção)

Pedro Abelardo (1079-1142) é considerado o primeiro lógico medieval a fornecer contribuições originais para a lógica aristotélica. Seus trabalhos sobre o silogismo aristotélico pode ser achado no seu *Dialectica*. Outros trabalhos de Abelardo contém ainda alguns trechos sobre esse assunto como por exemplo *Logica ingredientibus*, porém é na *Dialectica* que encontramos o seu desenvolvimento mais completo (cf. *Twelfth Century Logic: Texts and Studies.* [MP58]). A lógica desenvolvida na *Dialectica* besea-se nas obras de Boécio (comentários e monografias). Abelardo é normalmente considerado como sendo o lógico medieval que introduziu a distinção entre *de dicto* e *de re*. As noções básicas da teoria modal de Abelardo são encontradas na introdução aos capítulos XII e XIII de um longo comentário seu ao *De Interpretatione* (cf. [MP58]). Segundo Abelardo, a lógica modal é uma teoria sobre termos que tratam dos raciocínios sobre os advérbios da linguagem. Tais advérbios descrevem o modo do vir-a-ser dos objetos (e. g. rapidamente, necessariamente, etc.). Advérbios que não modificam a dinâmica do vir-a-ser dos objetos são chamados termos modais secundários. Ele observa que Aristóteles (no De Interpretatione, cap. 12 e 13) trata dos modos nominais e não dos modos adverbiais (e. g. "é necessário que", "é possível que"). Abelardo, apesar de aceitar a passagem da verdade para o necessário no caso do condicional verdadeiro, vê com uma certa desconfiança o princípio (17) (cf. *An Introduction to Modal Logic (The "Lemmon Notes")* p. 5 [Lem77] e *The Development of Logic* [Kne63]). De acordo com o princípio (17) podemos inferir que "se Sócrates é uma pedra, então Sócrates é um burro", isso se dá pelo fato da sentença 'Sócrates é uma pedra' ser impossível, daí temos a impossibilidade de Sócrates ser uma pedra sem que ele seja um burro. Abelardo constatou que, se A é impossível, então '$A \Rightarrow B$' é verdadeira para qualquer proposição B:

$\neg\Diamond A \rightarrow (A \Rightarrow B)$ (19)

Por outro lado: se B é necessário, então não é possível que A seja o caso sem que B também o seja.

$\Box B \rightarrow (A \Rightarrow B)$ (20)

Argumentos similares aos que foram vistos acima são encontrados em Pseudo-Scotus e Ockhan. Por exemplo em Ockhan encontramos os seguintes princípio: (a) Qualquer coisas, o que quer que ela seja, segue-se do impossível. (b) O necessário segue-se de qualquer coisas, o que quer que ela seja. O princípio (a) corresponde ao (19) e o (b) ao (20). (para maiores detalhes ver *The Development of Logic* cap. 4)

### 1.1.3 Idade Moderna

No contexto da filosofia moderna dois grandes pensadores desenvolveram importantes teorias sobre o conceito de necessidade. São eles: Leibniz e Hume. Podemos citar ainda os pensamentos de Kant em sua *Crítica da razão pura*, onde encontramos uma interessante relação entre a necessidade e o conhecimento a priori. Os demais filósofos da modernidade não serão tratados com dedalhes dado os propósitos desta dissertação. Faremos abaixo uma pequena exposição das principais idéias destes autores com relação às categorias modais aléticas, epistêmicas, etc. Primeiramente apresentaremos o pensamento leibniziano e a introdução do conceito de mundos possíveis para o entendimento dos conceitos de necessidade e possíbilidade. Em seguida consideraremos o problema da origem epistêmica dos conceitos modais tendo em vista as idéias de Hume contidas na obra *Investigação sobre o entendimento humano*. Tal tema envolve portanto um raciocínio multimodal uma vez que usa conceitos epistêmicos como *o conhecimento* e conceitos modais aléticos como *a necessidade* e *a contingência*. Os autores da modernidade citados acima, apesar de desenvolverem idéias importantes sobre os conceitos modais, não estavam interessados no desenvolvimento de uma lógica que tratasse de tais conceitos. Seus interesses visavam apenas suas incursões metafísicas. Portanto a lógica modal não foi tratada de forma direta na filosofia da modernidade. Os conceitos modais trabalhados pelos filósofos da modernidade porém, foram muito úteis para o desenvolvimento formal da lógica modal no século XX.

Leibniz faz referência a mundos possíveis quando defende que o mundo atual "é o melhor dos mundos possíveis" (em francês: *le meilleur des mondes possibles*). Esta frase aparece em 1710 no texto *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal* (Teodiceia) e está relacionada à solução do problema da existência do mal. Este problema pode ser pensado a partir da seguinte questão *Como pode haver injustiça e sofrimento no mundo se Deus é onipresente, onisciente, onipotente e onibenevolente?*

Leibniz também tem como projeto construir uma teoria que de conta da conciliação entre a liberdade humana e a necessidade física (dada pelo determinismo das leis da natureza). Para Leibniz os mundos possíveis seriam idéias complexas na mente de Deus. O conceito de um indivíduo está intimamente relacionado ao mundo possível ao qual este indivíduo pertence. Portanto cada indivíduo deve necessariamente estar presente em apenas um mundo possível (o mundo possível ao qual ele pertence) (ver o artigo *Possible Worlds* de Robert Stalnaker [Sta76]).

Já para Hume, o problema sobre o conceito de necessidade aparece ao se pensar a estrutura da causalidade. Na obra *Investigação sobre o entendimento humano*, seção VII, Hume trata da idéia de conexão necessária e na seção VIII o tema é *liberdade e necessidade*. A questão para Hume é descobrir a origem da idéia de conexão necessária entre uma causa e um efeito. É muito conhecida a polêmica passagem na qual é afirmado que não há motivos para se acreditar que há uma conexão necessária entre *o dia de amanhã* e *o nascer do sol*, ou seja, que *o sol nascerá amanhã* é apenas uma contingência.

Hume investiga três tipos de relação causa/efeito. O primeiro é a relação entre dois eventos da natureza, por exemplo, quando uma bola de bilhar bate em uma outra e o movimento desta outra é o efeito do choque com a primeira (causa). O segundo trata da relação entre a vontade e o corpo. O fato do pensamento poder movimentar o corpo sugere uma conexão do tipo causa/efeito entre pensamento e corpo. Por último Hume trata da relação entre dois pensamentos e investiga a possibilidade da relação causa/efeito entre estes. O primeiro tipo de relação é questionado por Hume. Para ele não motivo racional para a crença na conexão necessária entre um fenômeno

A e outro B qualquer. Porém na seguinte passagem da seção VII da obra citada de Hume temos a constatação deste de que tal idéia está inerente a nosso pensamento.

> Não há idéias mais obscuras e incertas em metafísica do que as de poder, força, energia ou conexão necessária, às quais necessitamos reportar-nos constantemente em todas as nossas inquirições. (David Hume *Investigação sobre o entendimento Humano* [Hum80] seção VII)

Hume termina por negar a realidade com relação a qualquer tipo de conexão causal na natureza. Por conseguinte, a conclusão se impõe. Não existe nenhuma impressão autêntica de que exista uma relação causa/efeito que seja necessária. O que acontece é que eu acredito na causalidade e Hume explica essa crença, partindo do hábito e da associação das idéias.

As idéias de Hume causaram grande impacto sobre Kant que expressou tal impacto como sendo *um acordar de um sono dogmático*. Grande parte da principal obra deste filósofo (*Crítica da razão pura*) esta voltada para o tema do limite do conhecimento humano. Este tema está intimamente ligado ao tema da causalidade e, portanto, ao da relação causa/efeito necessária. A solução encontrada por Kant é extrema. Ele internaliza no sujeito do conhecimento tal relação através da noção de *sintéticos a priori* e, portanto, transfere a problemática do conhecimento (como conhecemos o mundo?) para a problemática da metafísica (como o mundo é?). A conseqüência do pensamento Kantiano é drástica, não podemos mais ter contato epistêmico com o mundo em-si. E daí a conclusão de uma impossibilidade de pesquisa epistêmica metafísica sobre as relações de causa/efeito (necessárias).

### 1.1.4 A Lógica Modal Contemporânea

O estudo contemporâneo das propriedades formais das modalidades começou realmente com o trabalho de C. I. Lewis, embora possamos encontrar algumas antecipações no trabalho de Hugh MacColl, *Symbolic Logic and its Applications* de 1906 (cf. [Mac06]).

Lewis toma como ponto de partida os paradoxos da implicação material tal como aparecem nos *Principia Mathematica* de Bertrand Russell. Ele então constrói um sistema lógico contendo uma implicação que evita estes paradoxos. Esta implicação é chamada de implicação *estrita*, e sua formalização se encontra no trabalho de Lewis *Survey of Symbolic Logic* de 1918. A sua definição se dá em termos de conjunção, negação e um operador primitivo de impossibilidade:

$A \Rightarrow B =_{df} (|A \wedge \neg B)$ (21)

Tal qual seus predecessores medievais, Lewis diz que esta definição leva aos paradoxos da implicação estrita (ver os princípios (20) e (21)), e considera que tais paradoxos são "inescapáveis" conseqüências dos princípios lógicos usados cotidianamente ([Lan32] p. 175).

Mais tarde, em *Symbolic Logic* (escrito juntamente com C. H. Langford), encontramos uma clara exposição da formalização das noções modais. Nesta obra, $\Diamond$ é tomado como primitivo ao invés de $|$ e a implicação estrita pode então ser definida da seguinte forma:

$A \Rightarrow B =_{df} \neg\Diamond(A \wedge \neg B)$

Encontramos ainda, neste mesmo texto, a descrição de cinco sistemas distintos de lógica modal S1-S5. Estes sistemas são chamados hoje em dia de sistemas de Lewis. O primeiro sistema de Lewis a ser apresentado foi o S1, estendido sucessivamente para o S2 e o S3. O sistema S3 é equivalente ao sistema apresentado no *Survey of symbolic logic*. S4 e S5 são discutidos no apêndice II de *Symbolic Logic* (cf. [Lew18] e [Lan32]).

Entre os anos de 1931 e 1933 Gödel apresenta alguns estudos no campo da lógica modal (cf. [Göd32] e [Göd33]). Ele sugere um sistema no qual tomamos (3) e (12) como como axiomas. A esses axiomas Gödel adiciona ainda:

$\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (22)

mais a seguinte regra de inferência: de $\vdash A$ infira $\vdash \Box A$. Além do mais, ele demonstra que este sistema é equivalente ao sistema S4 de Lewis, embora tal prova só tenha sido publicada em [Tar48b].

Os cinco sistemas de Lewis contém a lógica clássica como lógica subjacente e isso já era conhecido pelo próprio Lewis. Todavia ele não usa esse fato na formulação destes sistemas preferindo usar a implicação estrita na formulação dos axiomas. A primeira formulação dos sistemas S1-S3 a la Gödel (com o cálculo proposicional de base separado) aparece em [Lem57].

Apesar de termos o aparecimento desses trabalhos no início da década de trinta, pouco se sabia sobre os sistemas estudados. O sistema S3, por exemplo não foi demonstrado como distinto de S2 até o trabalho de Parry, *The Postulates of strict implication* de 1934. Um artigo base deste período é o *Modalities in the Survey system of srict implication* do mesmo autor também publicado em 1939 (cf. [Par34] e [Par40]). Neste artigo são claras as diferenças entre S2 e S3 onde encontramos, por exemplo, que S3 possui (13) e (14) como teoremas enquanto em S2 isso não ocorre. Feys também contribuiu notoriamente para o desenvolvimento da lógica modal nesta época. Nos anos de 1937 e 1938 Feys publicou um trabalho sobre lógica modal em duas partes chamado *Les Logique Nouvelles des Modalités* [Fey37]. Neste trabalho o sistema T (que Feys chamou de 'logique t´) foi desenvolvido pela primeira vez. Tal sistema é construído com o uso dos axiomas que Gödel usou para o S4 menos o axioma 22. Este sistema, que Lewis não conhecia ainda, tinha a curiosa propriedade de ser mais forte que S2 e mais fraco que S4 mas que era independente de S3. Vale notar que von Wright desenvolveu um sistema equivalente em 1951 no seu *An Essay in Modal Logic* [vW51].

Na década de 40 o desenvolvimento da lógica a modal foi bastante rápido, torna-se portanto difícil tratá-lo com detalhes. Podemos, contudo, indicar alguns excelentes compêndios sobre o assunto como por exemplo *Formal logic* de Prior (1955) e *Modal logics* de Feys (1965) (cf. [Pri55] e [Dop65]). McKinsey, em 1941, apresenta uma caracterização algébrica para os sistemas S2 e S4, tal caracterização tem como resultado a demonstração da decidibilidade de tais sistemas (cf. [McK41]). Tais técnicas servirão então como modelos para trabalhos posteriores. No artigo *On the Syntactical Construction of Systems of Modal Logic* de 1945, McKinsey explica o que significa o tratamento sintático das lógicas modais [McK45] (ver [Lem77] secção 2). em 1946 aparecem alguns textos de Carnap e Barcan onde uma primeira aproximação entre as operações modais e os quantificadores é desenvolvida (cf. [Car48] e [Mar46]). Ohnish e Mastumoto produziram a primeira formulação das lógicas modais ao estilo de Gentzen em 1957 e 1959 ([Mat57]). Temos ainda, com relação à dedução natural o trabalho de Fitch de 1952, *Symbolic Logic, an Introduction.*

Muitas variações sobre as lógicas modais aparecem nesse período. A lógica epistêmica, a lógica deôntica e a lógica do tempo são as mais conhecidas. Os principais autores responsáveis pelo aparecimento destas variações juntamente com suas semânticas são von Wright, Arthur Prior e Saul Kripke. Saul Kripke combina a lógica modal e o processo de decisão baseado no tableaux semântico de Beth para daí derivar uma interessante semântica para as lógicas modais. Esta semântica, hoje conhecida como semântica dos mundos possíveis, é a maneira mais usual se trabalhar com lógicas modais. É também a partir destas semânticas que podemos ver a oposição entre contextos intensionais e extensionais. O termo *intentio* é medieval e foi originalmente empregado como tradução da palavra árabe *ma'na* que era usada para designar uma espécie de alma do sentido de uma palavra. Mais tarde, a lógica de Port Royal fez uma distinção entre *comprehension* e *extension* de um termo geral (ver *intensão* e *extensão* em [Abb00]). Esta distinção se faz de forma análoga à forma como Mill distingue *conotação* de *denotação*, ou seja, extensão é o conjunto de coisas para os quais o termo se aplica; compreensão é o conjunto de propriedade que este conjunto implica. No século XIX Willian Hamilton substituiu *comprehension* por *intension*. As lógicas modais são também conhecidas como lógicas intensionais pelo fato delas tratarem de raciocínios com proposições intensionais ([Abb00]).

## 1.2 Aspectos Formais da Lógica Modal

A lógica modal, quando formalizada, tem como lógica subjacente a lógica proposicional (para mais detalhes sobre a lógica proposicional ver *Introduction to Mathematical Logic* de Mendelson [Men97] e *Mathematical Logic* de Shoenfield [Sho73]). O sistema proposicional será tomado aqui como algo conhecido. Os sistemas tratados neste trabalhos são resultantes da expansão da lógica proposicional. Esta expansão pode ser analisada de dois pontos de vista diversos. Esses dois pontos de vista são: o ponto de vista da linguagem e o ponto de vista dos modelos (semântica). Do ponto de vista da linguagem temos o acréscimo de símbolos que são normalmente antepostos às proposições. Do ponto de vista dos modelos temos normalmente a semântica conhecida como semântica dos mundos possíveis.

Em [Kri63] Kripke mostrou como modelos normais podem ser usados para se provar completude de forma construtiva e outros resultados para o sistema T. Este resultado é estendido ainda para sistemas mais fortes como por exemplo S4 e S5. Segue-se abaixo uma apresentação de modelos e estruturas ao modo de Kripke porém com ligeiras modificações. A origem histórica deste tratamento semântico por estruturas é um tanto difícil de se determinar. Hintikka e Prior usaram métodos semânticos similares. Prior parece ter derivado suas idéias de notas de Meredith não publicadas (The cauculus of properties - ver [Tho63]). Uma análise destas estruturas nos mostram interconexões entre "mundos possíveis" que parece, se deve a Geach. Suas relações com o tratamento algébrico do sistema S4 está implícito em [Lem59]. (cf. [Lem66] p. 56)

A base axiomática para os sistemas lógicos consiste de (a) a especificação da linguagem na qual as fórmulas serão expressas (i. e. uma lista de símbolos primitivos, um conjunto de regras de formação especificando quais seqüências de símbolos serão fórmulas); (b) Um conjunto de fórmulas (conhecidas como axiomas); e (c) definições e um conjunto de regras de inferência. O conjunto de fórmulas obtido a partir da aplicação das regras de inferência sobre os axiomas é denominado conjunto teoremas. Nesta seção apresentaremos a linguagem, algumas definições e operações básicas em lógica modal (cf. *A New Introduction to Modal Logic* [HC96] e *Modal Logic* [BdRV01]).

**Tipo de similaridade Modal**

Um tipo de similaridade modal é um par $\tau = (O, \rho)$ onde $O$ é um conjunto não vazio e $\rho$ é uma função $O \rightarrow \mathbb{N}$. Os elementos de $O$ são chamados operadores modais, usa-se $\triangle$ ("triângulo"), $\triangle_0, \triangle_1$,..., para denotar elementos de $O$. A função $\rho$ associa para cada operador $\triangle \in O$ uma aridade finita, indicando o número de argumentos para o qual $\triangle$ pode se aplicado.

### 1.2.1 Linguagem modal e multimodal

Uma linguagem modal $ML(\tau, \Phi)$ é construída a partir de um tipo de similaridade modal

$\tau = (O, \rho)$ e de um conjunto de letras proposicionais $\Phi$.

O conjunto $Form(\tau, \Phi)$ de fórmulas modais sobre $\tau$ e $\Phi$ é dado pelas seguintes regras de formação.

$$\varphi := p \,|\bot|\, \neg\varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \triangle(\varphi_1, ..., \varphi_{\rho(\triangle)})$$

Onde $p$ varia sobre os elementos de $\Phi$

Obs: o tipo de similaridade da linguagem modal básica é $\tau_0$

**Definição 1.2.1.** Chamaremos de Subfórmula de uma fbf A a fbf que ocorre como parte (própria ou imprópria de A).

### 1.2.2 Operadores duais

Definição de operadores duais para triângulos não nulos.

Para cada $\triangle \in O$ o dual $\nabla$ de $\triangle$ é definido como:

$\nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n) := \neg\triangle(\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n)$

Obs: O dual de um triângulo de aridade no mínimo 2 é chamado de "nabla".

**Definição 1.2.2.** Seja $\tau$ um tipo de similaridade modal. Um $\tau$-enquadramento é uma n-upla $\mathfrak{F}$ consistindo dos seguintes ingredientes:

i) Um conjunto não vazio W

ii) Para cada $n \geq 0$, e cada operador modal n-ário $\triangle$ no tipo de similaridade $\tau$, uma $(n+1)$-ária $R_\triangle$

Enquadramentos são simplesmente estruturas relacionais. Se $\tau$ contém somente um número finito de operadores modais $\triangle_1, ..., \triangle_n$ então o enquadramento pode ser denotado por $\mathfrak{F} := (W, R_{\triangle_1}, ..., R_{\triangle_n})$; caso o número de operadores modais seja infinito denota-se $\mathfrak{F} := (R_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ ou $\mathfrak{F} := (W, \{R_\triangle : \triangle \in \tau\})$. Tal enquadramento pode ser estendido em um modelo da mesma maneira em que é feito na linguagem modal básica, ou seja, adicionando uma valoração. Desta forma, um $\tau$-modelo é um par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ onde $\mathfrak{F}$ é um $\tau$-enquadramento, e V uma valoração com domínio $\Phi$ e contradomínio $\mathscr{P}(W)$, onde $W$ é o universo de $\mathfrak{F}$.

Define-se a satisfação ou verdade de uma fórmula $\varphi$ em um ponto (estado, ou mundo) w, em um modelo $\mathfrak{M} = (W, \{R_\triangle : \triangle \in \tau)$ (notação: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$) indutivamente da seguinte maneira.

i) As cláusulas para os casos atômicos e booleanos são os mesmos que os definidos para a linguagem básica modal.

ii) Para $\rho(\triangle)$ 0 define-se:

$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ sse para algum $v_1, ..., v_n \in W$ com $R_\triangle wv_1, ..., v_n$ tem-se, para cada i, $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi_i$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ sse para todo $v_1, ...v_n \in W$ com $R_\triangle wv_1, ...v_n$ tem-se, para cada i, $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi_i$

Quando $\rho(\triangle) = 0$ (quando $\triangle$ é uma modalidade 0-ária) então $R_\triangle$ é uma relação unária e:

$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle$ sse $w \in R_\triangle$

Assim uma modalidade 0-ária não acessa outros pontos (estados ou mundos). Com efeito, sua semântica é idêntica àquela da variável proposicional, salvo que a relação unária é usada para interpretá-la e não é dada pela valoração mas sim são partes do enquadramento subjacente. Frequentemente escreve-se $w \Vdash \varphi$ para $\mathfrak{M}, w \vdash \varphi$ quando $\mathfrak{M}$ é claro no contexto. O conceito de verdade global (ou universalmente verdadeiro) em um modelo é definido como na linguagem modal básica e significa simplesmente verdadeiro em todos os mundos do modelo.

### 1.2.3 Enquadramento

Um Enquadramento para a linguagem modal básica é um par $\mathfrak{F}$ = (W, R) tal que:

i) W é um conjunto não vazio.

ii) R é uma relação binária em W.

### 1.2.4 Modelo

Um modelo para a linguagem modal básica é um par $\mathfrak{M}$ = ($\mathfrak{F}$, V), onde $\mathfrak{F}$ é um enquadramento para a linguagem modal básica e V é uma função que associa um subconjunto V($p$) de W para cada variável proposicional $p$ em $\Phi$. Formalmente, V é uma função $V : \Phi \rightarrow P(W)$, onde P(W) denota o conjunto das partes de W. Informalmente podemos pensar V($p$) como sendo o conjunto de pontos ou mundos em nosso modelo onde $p$ é verdadeiro. A função V é chamada *valoração*. Dado um modelo $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, \mathrm{V})$, nó dizemos que $\mathfrak{M}$ é baseado no enquadramento $\mathfrak{F}$, ou que $\mathfrak{F}$ é o enquadramento subjacente a $\mathfrak{M}$.

### 1.2.5 Verdade em $\mathfrak{M}$

Suponha que $w$ é um estado em um modelo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Definimos indutivamente a noção de uma fórmula $\varphi$ ser verdadeira em $\mathfrak{M}$ em um estado $w$ da seguinte forma:

$\mathfrak{M}, w \models p$ sse $w \in V(p)$, onde $p \in \Phi$
$\mathfrak{M}, w \models \perp$ nunca
$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$ sse não $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$ sse $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ ou $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$ sse para algum v $\in$ W tal que Rwv, $\mathfrak{M}, v \models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$ sse para todo v $\in$ W tal que Rwv, $\mathfrak{M}, v \models \varphi$

### 1.2.6 Globalmente verdadeiro (ou válido) em um modelo $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \models \varphi$)

Uma fórmula $\varphi$ é globalmente verdadeira (ou válida) em um modelo $\mathfrak{M}$ (notação: $\mathfrak{M} \models \varphi$) se for satisfeita em todos os pontos (mundos) em $\mathfrak{M}$, ou seja, se $\mathfrak{M}, w \models \varphi$, para todo w $\in$ W.

**Definição 1.2.3.** Uma fórmula Satisfatível

Uma fórmula $\varphi$ é satisfatível em um modelo $\mathfrak{M}$ se há algum ponto em $\mathfrak{M}$ para o qual $\varphi$ é verdadeira.

**Definição 1.2.4.** Uma fórmula é falsificável ou refutável em um modelo se sua negação é satisfatível.

Obs: Qualquer fórmula precedida por $\Box$ será verdadeira em qualquer ponto final de qualquer modelo.

Notação:

Escrevemos $\Diamond^n\varphi$ para $\varphi$ precedido por n ocorrências de $\Diamond$ e $\Box^n\varphi$ para $\varphi$ precedido por n ocorrências de $\Box$.

### 1.2.7 Relações

Pode-se, se assim for o caso, associar cada um desses operadores definidos com suas próprias relações de acessibilidade. Portanto, temos indutivamente que:

$R^0xy$ é definido indutivamente como $x = y$
$R^{n+1}xy$ é definido indutivamente como $\exists z(Rxz \wedge R^n zy)$

Sob essa definição, para qualquer modelo $\mathfrak{M}$ e ponto w em $\mathfrak{M}$, vale $\mathfrak{M}, w, \models \Diamond^n\varphi$ sse existe um v tal que $R^n wv$ e $\mathfrak{M}, w, \models \Diamond\varphi$.

**Definição 1.2.5.** $R^P$ é a relação conversa de $R^F$

$\forall xy(R^F xy \leftrightarrow R^P yx)$

A conversa de uma relação $R$ é denotada por $R^\vee$

**Definição 1.2.6.** Enquadramento Bidirecional

Um enquadramento da forma $(T, R, R^\vee)$ é chamado de enquadramento bidirecional e um modelo construído sobre tal enquadramento de modelo bidirecional.

### 1.2.8 Enquadramentos e validade

As linguagens modais podem ser vistas como ferramentas para se falar sobre modelos.

a) Validade em um ponto (ou estado) $w$ (notação: $\mathfrak{F}, w \models \varphi$)

Uma fórmula $\varphi$ é válida em um ponto (ou mundo) w de um enquadramento $\mathfrak{F}$ (notação: $\mathfrak{F}, w \models \varphi$) se $\varphi$ é verdadeiro em w para todo modelo

$(\mathfrak{F}, V)$ baseado em $\mathfrak{F}$.

b) Válido em um enquadramento $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \models \varphi$)

$\varphi$ é válido em um enquadramento $\mathfrak{F}$ (notação: $\mathfrak{F} \models \varphi$) se é válido em todo ponto (ou mundo) em $\mathfrak{F}$.

c) Válido em uma classe de enquadramentos

Uma fórmula $\varphi$ é válida em uma classe de enquadramentos F (notação $F \models \varphi$) se é válida em todo enquadramento $\mathfrak{F}$ em F.

d) Validade

Uma fórmula $\varphi$ é válida (notação: $\models \varphi$) se é válida na classe de todos os enquadramentos.

e) Lógica de F ($\Lambda_F$)

O conjunto de todas as fórmulas que são válidas em uma classe de enquadramentos F é chamado a lógica de F (notação: $\Lambda_F$).
Assim $\Lambda_F = \{\varphi \in Form(\tau, \Phi : F \models \varphi\}$

### 1.2.9 Enquadramentos gerais

a) Enquadramento geral $(\mathfrak{F}, A)$

Um enquadramento geral $(\mathfrak{F}, A)$ é um enquadramento $\mathfrak{F}$ junto com uma restrita, mas bem-comportada e apropriada coleção A de valorações admissíveis.

b) Valorações bem-comportadas e apropriadas

É uma coleção de valorações fechadas sob as operações de conjuntos correspondentes a nossos conectivos e operadores modais.

### 1.2.10 A propriedade dos modelos finitos

A principal idéia dos modelos finitos é encontrarmos o modelo que satisfaz a fórmula e as subfórmulas da fórmula em questão. Obviamente tal modelo deverá ser finito pois as fórmulas possuem tamanhos finitos (Ver Hughes and Cresswell [HC96] Cap. 8).

## 1.3 A classe $G^{mnpq}$ de sistemas modais

Apresentaremos abaixo alguns sistemas modais. Historicamente os sistemas modais foram apresentados primeiramente pelo método axiomático. Isto antes da descoberta de uma maneira apropriada de se definir a o conceito de validade para proposições modais. Pelo método axiomático é possível definir um conjunto de fórmulas ou teoremas sem que se precise de qualquer referência a seus significados (ver *A New Introduction to Modal Logic* de Hughes e Cresswell [HC96] e *Modalities and Multimodalities* de Walter Carnielli e Claudio Pizzi [eCP07]).

### 1.3.1 O sistema K

Existem fórmulas modais válidas em qualquer arranjo de qualquer enquadramento. Chamaremos o conjunto destas fórmulas de fórmulas K-válidas. Todas as fórmulas válidas na lógica proposicional são também K-válidas uma vez que cada estado ou mundo é maximal consistente com relação às fórmulas proposicionais. Além das fórmulas proposicionais a seguinte fórmula modal (normalmente denominada fórmula K) é K-válida:

$$\mathrm{K} = \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

**Teorema 1.3.1.** *A fórmula K é K-válida.*

*Demonstração.* A prova de que K é K-válida é a seguinte: se K não fosse K-válida então, pela semântica da implicação haveria algum mundo ou estado $w$ em um dado enquadramento tal que:

(i) $\Box(A \to B)$ seria válida;

(ii) $\Box A$ seria válida; e

(iii) $\Box B$ não seria válida.

Por (iii) existe um mundo acessível ao mundo $w$ em que $\Box B$ não seria válida em que $B$ não vale (chamemos este mundo de $w'$). Como $wRw'$ e por (ii) $\Box A$ é válida temos que $A$ é válida em $w'$. Portanto em $w'$, $A$ vale mas $B$ não e daí $A \to B$ não vale em $w'$. Como $wRw'$ e $A \to B$ não vale em $w'$, $\Box(A \to B)$ também não pode valer em $w'$, mas isto conflita com a informação (i). Logo K é K-válida.

$\Box$

**Definição 1.3.2.** Um K-sistema (ou Sistema K) é um sistema da lógica modal que tem como conjunto de teoremas justamente as fórmulas modais que são K-válidas.

Podemos definir o K-sistema como um sistema axiomático da seguinte forma:

Os axiomas de tal sistemas são os teoremas da lógica proposicional clássica (ver *Introduction to Mathematical Logic* [Men97] e *Mathematical Logic* [Sho73]) mais o esquema K:

$$\mathrm{K} = \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Onde $A$ e $B$ são variáveis proposicionais.

As regras de inferência para tal sistema são as seguintes:

(SU) A regra da substituição uniforme. Esta regra permite a substituição das variáveis proposicionais de um teorema por fórmulas sem que este deixe de ser teorema.

(MP) Modus Ponens. Se $A \to B$ e $A$ são teoremas, então $B$ é teorema.

(RN) Regra da necessitação modal. Se $A$ é teorema, então $\Box A$ é teorema.

O sistema K (K-sistema) é considerado a base dos sistemas normais e também o mais fraco destes.

### 1.3.2 Extensões do sistema K

Os dois sistemas mais conhecidos e estudados da lógica modal são os sistemas de Lewis S4 e S5. Ambos os sistemas são extensões de K. Um outro sistema importante bem conhecido que também é extensão de K é o sistema T. O sistema T pode ser axiomatizado pela simples adição do seguinte axioma-esquema (T) ao sistema K:

(T): $\Box A \rightarrow A$

O sistema S4 resulta do sistema T com a adição do seguinte axioma-esquema 4:

(4): $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

S5 pode ser definido através de S4 ou diretamente a partir de T. Para definirmos S5 a partir do sistema S4 precisamos do axioma-esquema (B) (que tem esta denominação por referência a Brouwer [Kri63]).

B: $\Diamond\Box A \rightarrow A$

Para se obter S5 diretamente por T adicionamos a T o esquema denominado (E):

E: $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

Como resultado sobre a axiomática das extensões de T temos que, E é equivalente dedutivamente a 4 e B quando tomados conjuntamente (estes resultados são devidos à Mackinsey-Tarski [Tar48b], o caso de S4 é anunciado por Gödel [Göd33]).

Os sistemas vistos acima são comumente tomados como pontos de partida para a definição de outros. Por exemplo, com respeito à lógica deôntica (onde $\Box$ é interpretado como 'é obrigatório que') o axioma (T) foi considerado muito forte e portanto insatisfatório, em seu lugar foi escolhido um axioma mais fraco:

D: $\Box A \rightarrow \Diamond A$

(Ver [vW51] e [Pri55]).

Um outro exemplo são as várias generalizações de (4):

$(4)^n$: $\Box^n A \to \Box^{n+1} A$

Onde $(4)^1 = (4)$.

Temos ainda, em conexão com S4, um sistema chamado S4.2 construído a partir do esquema G:

$G^{1111}: \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$

Chamaremos ($G^{1111}$) de (G) (ver [Lem59]).

Os resultados de completude para T, S4 e S5 são dados em [Kri59], usando uma técnica a partir dos tableaux semânticos. Os primeiros resultados para K está implicito no trabalho de Kripke. Mostraremos abaixo uma maneira de estender os resultado obtidos por Kripke para um grande número de extensões do sistema K (ver [Lem77]. Precisaremos, portanto, usar uma generalização do esquema G, ao qual chamaremos $G^{mnpq}$:

$G^{mnpq}$: $\Diamond^m\Box^n A \to \Box^p\Diamond^q A$

É interessante observarmos que todos os esquemas supracitados como extensão de K são casos particulares de $G^{mnpq}$. Desta forma T é o caso em que: $m, p, q = 0, n = 1$; $4^n$ o caso em que $m, q = 0, p = n + 1$; E o caso em que: $q = 0, m, n, p = 1$; e assim por diante. Começaremos então por estabelecer um resultado de completude para $G^{mnpq}$. Este resultado nos dará também um resultado para um grande número de extensões do sistema K discutido na literatura especializada.

Os nomes dos sistemas modais configuram um certo problema. Para melhor compreensão do texto aqui apresentado mostraremos abaixo a maneira como estaremos nomeando os sistemas. Esta forma de nomeação segue a linha proposta por Lemmon [Lemmon 1977] com ligeiras modificações. Adotamos primeiramente um sistema de nomes para axiomas (T, B, 4, $4^n$, etc) de modo que os nomes dos sistemas possam ser construídos pela concatenação do nome do axioma com o símbolo K. desta forma, para esquemas $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_n$, $KZ_1, KZ_2, KZ_3, ..., KZ_n$ serão os nomes resultantes para estes sistemas. Algumas convenções serão adotadas: chamaremos de T o sistema KT, de D o sistema KD, de S4 o sistema KT4 e de S5 o sistema

KT5. Os sistemas mais básicos são os seguintes: K, D, T, S4, B e S5. Eles estão ordenados pela seguinte relação de inclusão:

$K \subseteq D \subseteq T \subseteq S4 \subseteq S5$ (1)
$K \subseteq D \subseteq T \subseteq B \subseteq S5$ (2)

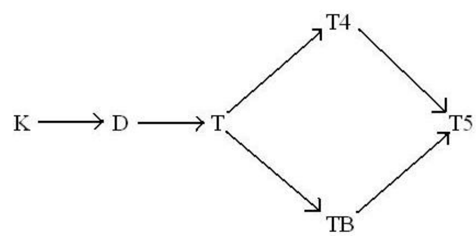


**Figura 1: Tabela de inclusão dos sistemas modais normais**

Agora considere os sistemas K$G^{mnpq}$ ($G^{mnpq}$ só se torna um axioma definido por uma dada escolha de m, n, p e q). Mostraremos que a provabilidade em K$G^{mnpq}$ é equivalente a validade em todos os enquadramentos qua satisfazem a seguinte condição:

$g^{mnpq}$: $\forall w_1, w_2, w_3 (w_1 R^m w_2 \wedge w_1 R^p w_3 \rightarrow \exists w_4 (w_2 R^n w_4 \wedge w_3 R^q w_4))$

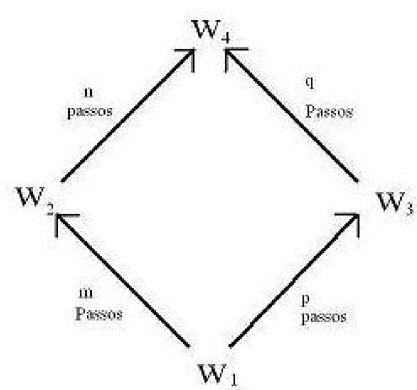


**Figura 2: A estrutura relacional subjacente a $g^{mnpq}$.**

Note que $g^{mnpq}$, assim como $G^{mnpq}$, possui m,n,p e q como parâmetros e que só se torna uma condição definida quando estes são fixados.

A seguir mostraremos que qualquer teorema de K$G^{mnpq}$ é válido em todo enquadramento $\mathfrak{F}$ que satisfaça $g^{mnpq}$. Os enquadramentos com essa propriedade ("incestual") também são chamados "enquadramentos de Church-Rosser". Observemos que as regras de derivação de K$G^{mnpq}$ (RN e MP) preservam validade em qualquer enquadramento $\mathfrak{F}$ e que os axiomas de K são válidos em qualquer $\mathfrak{F}$.

**Teorema 1.3.3.** *Seja* $F = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F}$ *satisfaz* $g^{mnpq}\}$. $F \models G^{mnpq}$

*Demonstração.* Tome $\mathfrak{F}$ que satisfaça $g^{mnpq}$. Precisamos mostrar que:

$\mathfrak{F} \models \Diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^p \Diamond^q A$ para qualquer A.

Seja $\mathfrak{M}$ um $\mathfrak{F}$-modelo e $w_1 \in W$, suponha:

$\mathfrak{M}, w_1 \models \Diamond^m \Box^n A$

Pela definição de verdade temos que, para algum $w_2$ tal que $w_1 R^m w_2$, $\mathfrak{M}, w_2 \models \Box^n A$. Para mostrar que $\mathfrak{M}, w_1 \models \Box^p \Diamond^q A$, assuma $w_1 R^p w_3$. Como $\mathfrak{F}$ satisfaz $g^{mnpq}$, devemos concluir que existe $w_4$ tal que $w_2 R^n w_4$, $w_3 R^q w_4$. Como $w_2 R^n w_4$, $\mathfrak{M}, w_2 \models \Box^n A$, segue-se que $\mathfrak{M}, w_4 \models A$. Como $w_3 R^q w_4$ temos $\mathfrak{M}, w_3 \models \Diamond^q A$ Logo:

$\mathfrak{M}, w_1 \models \Box^p \Diamond^q A$

$\Box$

**Corolário 1.3.4.** *Se* $\models_{KG^{mnpq}} A$ *então* $F \models A$

A reciproca deste corolário nos dá a completude. Para obter tal resultado é suficiente mostrar que: $\mathfrak{F}_K = \langle W_{KG^{mnpq}}, R_{KG^{mnpq}} \rangle$, onde $W_{KG^{mnpq}}$ é o conjunto de extensões maximais consistentes de K$G^{mnpq}$ que satisfazem $g^{mnpq}$. Tal conjunto existe pois o sistema K$G^{mnpq}$ é consistente uma vez que existe $\mathfrak{F}$ que satisfaça $g^{mnpq}$ para algum *m, n, p* e *q*. Por definição, tais sistemas são normais (para definição de sistema normal ver [Lem77] p. 53). Se mostrarmos que $\mathfrak{F}_{KG^{mnpq}}$ satisfaz $g^{mnpq}$ teremos conseguido a prova da conversa do corolário acima. Provaremos, contudo, algo um pouco mais forte.

**Teorema 1.3.5.** *Para algum K-sistema S consistente e normal, se S contém $G^{mnpq}$ então $\mathfrak{F}_S$ satisfaz $g^{mnpq}$ (Definir esta expressão).*

*Demonstração.* Seja S um K-sistema normal consistente contendo $G^{mnpq}$ (i.e. tal que $G^{mnpq} \subseteq S$). Para mostrar que $\mathfrak{F}_S$ satisfaz $g^{mnpq}$, precisamos mostrar:

$$\forall w_1, w_2, w_3(w_1 R^m_S w_2 \wedge w_1 R^p_S w_3 \rightarrow \exists w_4(w_2 R^n_S w_4 \wedge w_3 R^q_S w_4))$$

Assuma, para $w_1, w_2, w_3 \in W_S$, as seguintes relações: $w_1 R^m_S$ e $w_1 R^p_S w_3$. Sabemos que $w_1 R^i_S w_2$ sse $\{A : \Box^i A \in w_1\} \subseteq w_2$, portanto $\{A : \Box^m A \in w_1\} \subseteq w_2$ e $\{A : \Box^p A \in w_1\} \subseteq w_2$. Agora considere o seguinte conjunto:

$$\Gamma = \{A : \Box^n A \in w_2\} \cup \{A : \Box^q A \in w_3\}$$

Mostraremos que $\Gamma$ é S-consistente. caso não o fosse, haveriam sentenças $B_1, ..., B_j, C_1, ..., C_k$ tais que $\Box^n B_i \in w_2 (1 \leq i \leq j), \Box^q C_i \in w_2 (1 \leq i \leq k)$ e $\models_S \neg(B \wedge C)$, onde $B = B_1, ..., B_j, C = C_1, ..., C_k$. Agora $\models_K \Box^n(A_1 \wedge ... \wedge A_m) \leftrightarrow \Box^n A_1 \wedge ... \wedge \Box^n A_m)$. Portanto $\Box^n B \in w_2, \Box^q C \in w_3$ também. Temos $\models_S \neg(B \wedge C)$, $\models_S B \rightarrow \neg C$ por cpc, daí $\models_S \Box^n B \rightarrow \neg C$. Dado que $w_2$ é uma extensão de S, $\Box^n \neg C \in w_2$. Mas $\{A : \Box^m A \in w_1\} \subseteq w_2$. Portanto $\Diamond^m \Box^n \neg C \in w_1$. Como $G^{mnpq} \subseteq S \subseteq w_1$, temos $\Box^p \Diamond^q \neg C \in w_1$. Dado $\{A : \Box^p A \in w_1\} \subseteq w_2$, concluímos que $\Diamond^q \neg C \in w_2$, i.e., $\neg \Box^q C \in w_3$, contradizendo a consistência de $w_3$. Isto mostra que $\Gamma$ é S-consistente, e portanto possui uma extensão maximal consistente, digamos $w_4$. Por definição de $\Gamma$, $\{A : \Box^n A \in w_2\} \subseteq w_4, \{A : \Box^q A \in w_3\} \subseteq w_4$; em outros termos, $w_2 R^n_S w_4, w_3 R^q_S w_4$. Assim $\mathfrak{F}$ satisfaz $g^{mnpq}$.

$\Box$

**Corolário 1.3.6.** $\models_{KG^{mnpq}} A$ *sse* $\mathfrak{F} \models A$ *para todo* $\mathfrak{F} \in F$

## 1.4 Conclusão

Apresentamos neste capítulo uma introdução histórica sobre o tema da(s) modalidade(s) e das considerações lógicas sobre tal assunto. Vimos que o desenvolvimento formal das lógicas modais só foi possível, de fato, após o desenvolvimento formal da lógica proposicional básica. Apresentamos ainda a formalização de alguns sistemas modais e de alguns resultados teóricos, formais e metateórico sobre estes sistemas (para maiores informações sobre os sistemas modais ver: *Modal Logic* de Patrick Blackburn and Maarten de Rijke e Yde Venema [BdRV01], *Basic Modal Logic* de Robert Bull e Krister Segerberg [BS84] *Modalità e Multimodalità* de Claudio Pizzi e Walter Carnielli [eCP00] e sua versão em inglês *Modalities and Multimodalities* [eCP07], *Normal Multimodal Logics* de Laurent Catach [Cat88], *Modal Model Theory* de C. C. Chang [Cha73] *Modal Logic: An Introduction* de Brian F. Chellas [Che80], *Modal Logic* de Alexander Chagrov and Michael Zakharyaschev [CZ97], *Basic Modal Logic* de Melvin C. Fitting [Fit93], *An Introduction to Modal Logic* [HC68] e *A New Introduction to Modal Logic* [HC96] de G. E. Hughes e M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic (The "Lemmon Notes")* de Edward John Lemmon [Lem77], *A Short Introduction to Modal Logic* de Grigori Mints [Min92], *First Steps in Modal Logic* de Sally Popkorn [Pop94] e *Advanced Modal Logic* de M. Zakharyaschev e F. Wolter and A. Chagrov [ZWC01]).

# Capítulo 2

# Lógica Multimodal

## 2.1 Introdução histórico-filosófica à multimodalidade

Faremos abaixo uma apresentação da lógica multimodal a partir do ponto de vista da história da filosofia. Como já foi apresentado uma breve história da lógica modal no capítulo 1 deste trabalho, faremos apenas uma exposição complementar visando a apresentação de alguns exemplos de questões filosóficas que envolvam a lógica multimodal como pano de fundo.

### 2.1.1 A necessidade e o tempo

O conceito de necessidade ('ananke'($\alpha\nu\alpha\gamma\kappa\epsilon$) em Grego, aparece pela primeira vez na literatura filosófica no seguinte fragmento de Anaximandro:

> ἐξ ὧη δὲ ἡ γένεςίς ἐστι τοῖς ουσι καὶ τὴν φιτορὰν εἰς ταυτα γίνεσται κατὰ τὸ κρεών· διδὶναι γὰρ αὐτὰ δίκην καὶ τίσιν ἀλλήλοις τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν του κρόνου τάξιν
>
> "ex hõn dè he génesís esti tois oûsi kaì tèn phthoran eis taûta gínesthai katà tò khereón; didónai gàr autà díken kaì tísin allélois tês adikías katà tèn tou khrónou táxin."
>
> "De onde as coisas tiram o seu nascimento; de fato, reciprocamente pagam a pena e a culpa da injustiça, segundo a ordem

do tempo.”

Nietzsche traduziu o trecho acima da seguinte maneira:

> “De onde as coisas têm seu nascimento, para lá também devem afundar-se na perdição, segundo a necessidade; pois elas devem expiar e ser julgadas pela injustiça, segundo a ordem do tempo.”

Abaixo, uma tradução feita por Cavalcante de Souza do trecho de Anaximandro:

> “...princípio dos seres...ele disse (que era) o ilimitado...pois donde a geração é para os seres, é para onde também a corrupção se gera segundo o necessário; pois concedem eles mesmos justiça e deferência uns aos outros pela injustiça, segundo a ordenação do tempo.”

Segundo Reale ([Ant03] p. 20), no fragmento citado há uma ligação entre nascimento e dissolução, culpa e injustiça, e da necessidade com a expiação desta culpa. O tempo é tomado como juiz para com a injustiça da imposição dos contrários. (outros pré-socráticos apesar de usarem o termo necessidade não os fazem da maneira como é feito por Anaximandro). A causa da origem das coisas é uma espécie de “injustiça”, a causa da dissolução e da morte das coisas é uma espécie de “expiação” de tal injustiça.

Nota-se ainda que, neste fragmento pré-socrático, aparecem os conceitos de necessidade e de tempo. Esta deve ser também a primeira vez que temos o uso do conceito de tempo na literatura filosófica. É de fato curioso que tais conceitos apareçam juntos em um mesmo fragmento quando estes são usados pela primeira vez com relação aos textos pré-socráticos (dentre aqueles que temos acesso hoje em dia). Portanto é natural pensarmos uma relação entre tais conceitos em seus usos primitivos.

Para Anaximandro o princípio de todas as coisas era infinito e da mesma forma os mundos existentes era em número infinito. Cada mundo tem nascimento, vida e morte, e o mundo atual coexiste com inúmeros mundos que também nascem e morrem de modo análogo (cf. [Ant03]). Podemos assim notar um germe do que existe hoje em termos de semântica dos mundos possíveis (sobre Anaximandro ver ainda os estudos dos filósofos Heidegger e Nietzsche [Hei78] e [Nie54]).

No âmbito da cultura grega o conceito de necessidade tem seu principal desenvolvimento filosófico com a obra de Aristóteles. O significado mais geral de necessidade encontrado nos escritos do peripatético (Aristóteles) é o que define necessidade como “aquilo que tem que ser assim e não pode ser de outra maneira”. Essa definição aparece na Metafísica (1015a e 1015b).

Há na obra aristotélica um grande desenvolvimento sobre conceitos modais aléticos, ou seja, aqueles que tratam do modo como a verdade está sendo entendida. As sentenças nesse caso podem ser verdadeiras por necessidade ou não, ou serem apenas “possivelmente” verdadeiras, em outros casos ainda dizemos algo como “contingentemente” verdadeira. Uma importante referência com relação aos estudos sobre as modalidades aléticas tratadas por Aristóteles é a obra de Jaako Hintikka: Time and necessity. Como o próprio título da obra indica, Hintikka faz um estudo das inter-relações entre modalidades aléticas e modalidades do tempo (passado, futuro etc.) na obra do estagirita (Aristóteles) (cf.[Hin]).

Aristóteles distingue diferentes tipos de potencialidades em [Met. $\Delta$, 12]. Observa-se também que há um contraste dos chamados *potenciais*. Alguns fatos potenciais são chamados assim porque são fontes de mudanças ou movimento. Outras potencialidades não envolvem relação com o movimento [ver início de Met. $\Theta$, 6]. Da mesma forma há um contraste entre possibilidade que envolve mudança e possibilidade que é equivalente à “não necessariamente falso”. Assim temos uma diferença entre possibilidade própria e contingência.

Outra questão interessante é sobre o valor de verdade das sentenças que envolvem a noção de tempo. Os termos que costumam gerar incômodos lógicos se refere ao tempo presente. O problema está na variação do valor de verdade de palavras ou expressões como “agora” ou “nesse instante”. Por exemplo, uma frase como “agora está chovendo” deverá ser considerada incompleta com relação ao seu valor de verdade por este não estar determinado univocamente.

As frases modais temporais podem ser divididas em duas classes: as definidas e as indefinidas. As definidas estão formuladas como datas e as indefinidas com noções abertas de temporalidades, ou seja, termos como “agora”, “é dia”, “hoje” etc.

As noções modais aléticas em Aristóteles são as vezes relacionadas de certa forma com as noções modais temporais. Essa relação entre tempo e necessidade diferencia o modo como os antigos entendiam a necessidade do modo como os modernos a entendem. Aristóteles ainda diferencia o "necessário" (apodítico) e as verdades gerais (assertóricos), ou seja entre necessidade e universalidade. [Aristóteles; Reth. III 141 $8^a$ 3 - 5; Eth. Nic. VI 2. $1139^b$ 7 - 9; De Caelo I $12283^b$ 13ss] (*Time and Modality*, cap IX [Hin].

Há uma acepção sobre a inter-relação do temporal e do alético que, indiscutivelmente, tem desempenhado um papel muito mais importante na história do pensamento ocidental - na história da metafísica, teologia, lógica, filosofia da natureza e mesmo poesia especulativa - que qualquer outra acepção com respeito a seus relacionamentos. Essa acepção é a de que algo que é possível tem que ser realizado em algum ponto do tempo (no passado, no presento ou no futuro). [Hintikka; Time and Modality] [Moderns studies in philosophy: Leibiniz; Leibniz on plenitude, relations and the "reign of law"] [Arthur O. Lovejoy; "The principle of plenitude"]. Essa acepção ganhou o nome de princípio da plenitude.

O historiador das idéias, Arthur O. Lovejoy, foi o primeiro pensador moderno a discutir filosoficamente este importante princípio. Agostinho trouxe este princípio dos neo-platônicos para a teologia cristã primitiva. O argumento ontológico de Anselmo usa a implicação do princípio para mostrar que a natureza deve ser tão completa quanto possível, e argumenta sobre a existência de uma perfeição no sentido de uma "completude" da natureza. A crença de Tomás de Aquino na plenitude de deus conflita com a crença de que deus tem o poder de não criar tudo o que pode ser criado, e portanto rejeita o princípio. A insistência de Giordano Bruno sobre as infinidades de mundos não foi baseada nas teorias de Copérnico, ou na observação, mas na aplicação desse principio a deus. Leibniz acreditava que o melhor dos mundos possíveis atualizava todas as possibilidades genuínas e argumentou, na Teodicéia, que o melhor dos mundos possíveis contém todas as possibilidades e que por termos apenas uma experiencia finita da eternidade não podemos chegar a um termo sobre disputas envolvendo a perfeição. Kant endossava neste princípio mas não em sua verificação empírica.

Em termos contemporâneos podemos pensar a aplicação do princípio de plenitude no chamado "Infinite monkey theorem". O "Infinite monkey theorem" e a lei zero-um de Komogorov, formulados por matemáticos contemporâneos, ecoa o princípio da plenitude. Pode-se ver também que tal princípio ajuda a sustentar posições em física contemporânea especificamente a interpretação dos muito-mundos da mecânica quântica e as especulações cornucopianas de Tipler Frank do estado final do universo.[Lovejoy, A. O., 1957 (1936)."Plenitude and Sufficient Reason in Leibniz and Spinoza" in The Great Chain of Being, A Study of the History of an Idea, 1933. Harvard UP: 144-82.] [Erkka Maula; Plato on plenitude, 1967 12-50].

Formalização do princípio da plenitude: Cada possibilidade é realizada em algum momento do tempo.

Seja T a formulação deste princípio de modo a estar de acordo com as intenções de Aristóteles. Assim temos:

(T) Nenhuma possibilidade genuína permanece inatualizada durante toda a infinidade do tempo.

$(T)_1$ O que nunca é, é impossível.

$(T)_2$ O que sempre é, é por necessidade.

## 2.2 Formalização das lógicas multimodais

As lógicas multimodais são definidas "por sistemas com um conjunto arbitrário de operadores modais que representam diversas modalidades e suas combinações" ("Le logiche multimodali sono sistemi con un insieme arbitrario di operatori modali che rappresentano diverse modalità e loro combinazioni". (cf. [Carnielli e Pizzi 2000] cap. 6 p. 127) Sabemos que as modalidades não são conceitos fáceis de compreender. Há muitas dificuldades quando tratamos de simples modalidades. Algumas modalidades lingüísticas talvez não possam ser tratadas logicamente.

Um exemplo do emprego da multimodalidade consiste na representação da propriedade de demonstrabilidade através da noção modal. O sistema modal que é conhecido por ter tais características é o sistema resultante da adição do axioma GL ($\Box(\Box p \to p) \to \Box p$) a K4. Este sistema, assim construído, é capaz de representar formalmente a idéia de demonstrabilidade na aritmética de Peano. Podemos, portanto, a partir deste sistema fazer um tratamento modal do Segundo Teorema de Incompletude de Gödel. Seguindo Smorinsky, é possível também introduzir um outro operador modal $\Box^d$, que representa a demonstrabilidade relativa a uma outra teoria. Obtemos deste modo uma sistema bimodal em que é possível demonstrar a completude via semântica de mundos possíveis de tipo multirelacional.

As lógicas multimodais ainda podem ser vistas como extensões da lógica proposicional. Neste caso estes sistemas seriam dados por acréscimos de um ou mais operadores modais não-verofuncionais à lógica proposicional.

Uma qualidade interessante destas lógicas é a capacidade que elas têm de traduzir o conceito de "cenário". O conceito de cenário é importante no tratamento lógico questões epistêmicas. Encontramos também o uso dos sistemas multimodais na lógica do tempo e na lógica dinâmica. Existe ainda a possibilidades de inter-relações entre operadores temporais e dinâmicos, temporais e epistêmicos, aléticos e temporais, temporais e deônticos, etc. Cada uma destas inter-relações remete a problemas filosóficos específicos. Deste modo os sistemas podem ser heterogêneos ou homogêneos. Homogêneos quando os diversos operadores modais se comportam da mesma forma, heterogêneos quando eles não se comportam assim. É muito fácil nos convencermos de que existem infinitos sistemas heterogêneos com distintos graus de complexidade. Queremos introduzir aqui uma teoria geral da multimodalidade. Tal teoria deve cobrir uma parte substancial do conjunto de sistemas multimodais possíveis, sem que, com isso se tenha a pretensão de abarcar todos estes sistemas (ver [Gol87]).

### 2.2.1 Linguagens multimodais

"Uma linguagem multimodal proposicional é definida como uma extensão da linguagem proposicional construída graças a um conjunto PM de parâmetros modais atômicos e ao conjunto 'Var' de enunciados atômicos (ou variáveis proposicionais)" (cf. [eCP00] cap. 6 p. 129 e [eCP07] cap. 7). Definiremos abaixo um *cálculo dos operadores modais* que consiste em definir operadores modais complexos a partir de parâmetros atômicos, passando ainda por uma representação paramétrica. Esta representação dos operadores modais nos permite definir e tratar simultaneamente uma ampla classe de operadores modais a partir daqueles atômicos.

### 2.2.2 Formação dos operadores multimodais

A classe PM dos parâmetros multimodais é definida por PM pelo fechamento com respeito a três operadores de formação $\cup$, $\bullet$ e $\lambda$.

(1) Se $a$ é um operador modal atômico então $a \in PM$;

(2) Seja $\lambda$ o operador modal identidade, $\lambda \in PM$;

(3) Se $a$, $b \in PM$, então $a \cup b \in PM$ e $a \bullet b \in PM$;

Por fim, a classe $OM$ dos operadores multimodais é definida do seguinte modo: se $a \in PM$ então $[a] \in OM$.

Podemos interpretar os elementos de $OM$ da seguinte maneira: O operador multimodal $[a \cup b]$ é uma função multimodal comum aos agentes $a$ e $b$.

O operador $[a \bullet b]$ representa uma função modal do agente $a$ sobre o agente $b$. Esta interpretação não é a única. Um outro modo de interpretar os operadores multimodais consiste em considera-los como processos. Neste caso temos um tratamento formalizado das noções de processo serial (no caso de $[a \bullet b]$), processo paralelo (no caso de $[a \cup b]$) e do processo identidade (no caso de $[\lambda]$). O operador modal neutro 0 opera como constante, interpretada como "il programa di fermata" (o programa de parada). Esta interpretação processual da lógica multimodal é inspirada na lógica modal dinâmica.

Acrescentando uma cláusula às clausulas de formação de FBF das lógicas modais temos as cláusulas de formação de FBF das lógicas multimodais. A cláusula a ser acrescentada é a seguinte:

Se $A \in FBF$ e $a \in OM$ então $[a]A \in FBF$.

Para qualquer operador $[a]$ definimos o seu dual como:

$< a > A =_{df} \neg[a]\neg A$.

A idéia chave que será usada para definir a semântica da lógica multimodal é que a todo parâmetro modal $a$ se associa uma relação $R_a$ de modo tal que a satisfactibilidade da fórmula modal $[a]A$ e $< a > A$ em um mundo $w$ de um certo modelo $\mathfrak{M}$ pertencente a um universo $W$ seja dada por duas condições.

(i) $\mathfrak{M}, w \models [a]A$ sse $\forall w_1 \in W(wR_aw_1 \rightarrow \mathfrak{M}, w_1 \models A)$

(ii) $\mathfrak{M}, w \models < a > A$ sse $\exists w_1 \in W(wR_aw_1 \wedge \mathfrak{M}, w_1 \models A)$

As condições acima são generalizações diretas dos sistemas modais já vistos nos capítulos anteriores. Além do mais, aos parâmetros modais complexos (isto é, aqueles obtidos através de aplicação de $\cup$, e $\lambda$) devemos associar novas relações binárias iniciais. Como conseqüência temos que a lógica multimodal pode ser vista como uma álgebra (ou cálculo) de relações binárias (cf. [Tar41] e [Tar51]).

Generalizações mais ou menos diretas dos sistemas D, T, B, S4 e S5 são propostas por diversos autores. Suponha, por exemplo, várias modalidades a saber: $\Box_{k^1}, \Box_{k^2}, ..., \Box_{k^r}$ e $\Diamond_{p^1}, \Diamond_{p^2}, ..., \Diamond_{p^s}$. A partir destas modalidades podemos introduzir novos axiomas que generalizam aqueles de D, T, B, S4 e S5. Como exemplo podemos formular a seguinte generalização de B:

$A \to \Box_{k^1}\Box_{k^2}...\Box_{k^r}\Diamond_{p^1}\Diamond_{p^2}...\Diamond_{p^s}A$

A demonstração de completude de tais sistemas é obtida graças a uma generalização adequada dos modelos canônicos.

### 2.2.3 Axiomatização dos sistemas multimodais

Para a aproximação geral sobre sistemas multimodais, seguiremos [eCP00] e [eCP07] e adotaremos a classificação dos sistemas multimodais em ordem de complexidade.
A ordem de complexidade é usada para definir três classes de sistemas a saber:

(1) Os sistemas basilares (basilari): que incluem os axiomas de interação e de interação estrita.

(2) Os sistemas afirmativos: que inclui outros axiomas aos sistemas basilares. Os axiomas acrescentados são da forma $G(a, b, \phi)$ que generalizam os precedentes.

(3) Os sistemas Catach-Sahlqvist, que incluem uma generalização ainda mais ampla do que a precedente. Chamamos esta fórmula de "Axiomas de Catach-Sahlqvist".

### 2.2.4 Sistemas basilares: Axiomas do tipo $G(a, b, c, d)$

A base destes sistemas será o sistema PC. A este sistema acrescentaremos axiomas e regras multimodais.

**(a)Axiomas para operadores multimodais**

Para Todo $a, b, ... \in PM$:

(i) $[a \cup b]p \equiv [a]p \wedge [b]p$ (axioma dos processos paralelos)

(ii) $[0]p$, para todo p (axioma da parada)

(iii) $[a \bullet b]p \equiv [a][b]p$ (axioma dos processos seriais)

(iv) $[\lambda]p \equiv p$ (axioma do processo neutro)

**(b) Axioma de normalidade**

$[a](p \to q) \to ([a]p \to [a]q)$ para algum $a \in PM$

**(c) Axiomas de interação estrita**

$G^{a,b,c,d} =_{df} < a > [b]p \to [c] < d > p$ para parâmetros arbitrários $a, b, c, d$ em PM

Os axiomas $G^{a,b,c,d}$ são denotados por $G(a, b, c, d)$; usaremos, de agora em diante, esta notação.

**(d) Regra de Necessitação Multimodal**

$RN_a :\vdash \alpha \Rightarrow \vdash [a]\alpha$ para todo $a \in PM$

É interessante notar que os axiomas de interação estrita satisfazem a equivalência:

$G(a, b, c, d) \equiv G(c, d, a, b)$

Este resultado se obtém facilmente por contraposição e pela definição de $< a >$.
É fácil ver ainda que os axiomas da forma:

$G^{m,n,p,q} : \Diamond^m \Box^n p \to \Box^p \Diamond^q p$

São casos particulares de G(a,b,c,d) Este esquema de axioma pode ser usado para definir a classe de sistemas $G^{mnpq}$. Devemos lembrar, no entanto, que no caso de $G^{mnpq}$ os parâmetros são números naturais enquanto no caso multimodal os parâmetros são modais.
A interpretação dos diferentes tipos de operadores multimodais é bem próxima da interpretação que é feita na lógica modal dinâmica acerca sobre os diferentes processos dinâmicos.

Desta forma teríamos a seguinte interpretação:

(i) O axioma dos processos paralelos $[a \cup b]p \equiv [a]p \wedge [b]p$ pode ser entendido como: "p será verdadeiro depois da execução de $[a \cup b]$ se, e somente se, $p$ será verdadeiro depois da execução de $a$ e $p$ será verdadeiro depois da execução de $b$".

(ii) O axioma dos processos seriais $[a \bullet b]p \equiv [a][b]p$ pode ser entendido como: "p será verdadeiro depois da execução de $a \bullet b$ se, e somente se, depois da execução de $a$ será verdadeiro que depois da execução de $b$ será verdadeiro que $p$.

Se os Axiomas de Normalidade e a Regra de Necessitação são introduzidas apenas por operadores atômicos, é fácil provar que tais propriedades se estendem a todos os operadores multimodais.

**Proposição 2.2.1.** *Para todo $c \in PM$ vale:*

*(i)* $[c](p \to q) \to ([c]p \to [c]q)$

*(ii)* $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash [c]\alpha$

*Demonstração.* Por indução sobre a complexidade dos operadores modais:

(1) Se $c$ é atômico o resultado vale por definição.

(2) Se $c$ é $\lambda$, o resultado é óbvio.

(3) Se $c$ é $a \cup b$:

a. $[a \cup b](p \to q) \equiv ([a](p \to q) \wedge [b](p \to q))$ (Axioma)
b. $[a \cup b]p \equiv [a]p \wedge [b]p$ (axioma)
c. $[a \cup b]q \equiv [a]q \wedge [b]q$ (axioma)
d. $[a](p \to q) \to ([a]p \to [a]q$ (hipótese de indução)
e. $[b](p \to q) \to ([b]p \to [b]q$ (hipótese de indução)
f. $[a \cup b]p \to q$ (hipótese 1)
g. $[a \cup b]p$ (hipótese 2)
h. $[a](p \to q)$ (de f., a. por MP e regra $\wedge$)

i. $[b](p \to q)$ (de e., a. por MP e regra $\wedge$)
j. $[a]p \wedge [b]p)$ (de g., b. por MP e regra $\wedge$)
l. $[a]q \wedge [b]q)$ (de d., e., h., i., g., por MP e regra $\wedge$)
m. $[a \cup b]q$ (de l. e c.)
n. $[a \cup b](p \to q) \to ([a \cup b]p \to [a \cup b]q)$ (de f., g., i. por teorema da dedução)

$\square$

A seguir daremos alguns exemplos de sistemas basilares particulares. Tais sistemas possuem os axiomas da forma G(a, b, c, d). Para formalização desses axiomas usaremos dois operadores modais distintos: $\square_1 = [a]$ e $\square_2 = [b]$.

$K_{1,2}$: $\square_2 p \to \square_1 p$ dado por $G(\lambda, b, a, \lambda)$

$D_{1,2}$: $\square_2 p \to \diamond_1 p$ dado por $G(\lambda, b, \lambda, a)$

$B_{1,2}$: $p \to \square_1 \diamond_2 p$ dado por $G(\lambda, \lambda, a, b)$

$4_{1,2}$: $\square_1 p \to \square_2 \square_1 p$ dado por $G(\lambda, a, b \bullet a, \lambda)$

$5_{1,2}$: $\diamond_1 p \to \square_2 \diamond_1 p$ dado por $G(a, \lambda, b, a)$

$4_{1,2}$: $\square_{2,1} p \to \square_1 + \square_2 p$ dado por $G(\lambda, b \bullet a, a \cup b, \lambda)$

Apesar do esquema $G(a, b, c, d)$ ser uma generalização bastante eficiente, sabemos que não se pode reduzir qualquer axioma a ele. Por exemplo, os axiomas pertencentes a algumas lógicas dinâmicas não podem ser representados por este esquema. Tais axiomas possuem as seguintes formulações.

$[b]\alpha \to ([a]\alpha \to [a][b]\alpha)$

$[b](\alpha \to [a]\alpha) \to ([a]\alpha \to [b]\alpha)$

### 2.2.5 Modelos relacionais multimodais e completude

É natural pensarmos que os sistemas multimodais devem possuir uma semântica que envolva mundos possíveis e relações de acessibilidade. Podemos pensar ainda que tais relações devam ter interações e compor novas relações. Deste modo devemos trabalhar com operações sobre relações de acessibilidade. Mostraremos abaixo que para entendermos a estrutura geral dos modelos multimodais, basta definirmos certas operações operações fundamentais e algumas relações especiais.

Seja $W$ um conjunto qualquer denominado conjunto de índices (esta noção generaliza aquela de conjunto de mundos possíveis. Uma relação binária é um subconjunto qualquer do produto cartesiano $W \times W$. Definimos, então, algumas relações particulares a saber:

(i) A relação vazia: $0 = \emptyset$;

(ii) A rlação total: $1 = W \times W$;

(iii) A relação diagonal ou identidade: $I = \{< w_1, w_1 >: w_1 \in W\}$

Definimos agora as seguintes operações sobre as relações:

(1) União: $R \cup S = \{< w_1, w_2 >: w_1 R w_2 \vee w_1 S w_2\}$;

(2) Intersecção: $R \cap S = \{< w_1, w_2 >: w_1 R w_2 \wedge w_1 S w_2\}$;

(3) Composição: $R \bullet S = \{< w_1, w_2 >: \exists w_3 (w_1 R w_3 \wedge w_3 S w_2)\}$

(4) Complemento: $R^c = \{< w_1, w_2 >:< w_1, w_2 >\notin R\}$;

(5) Inverso: $R^{-1} = \{< w_1, w_2 >:< w_2, w_1 >\in R\}$;

(6) Implicação relativa: $R \Rightarrow S = \{< w_1, w_2 >: \forall w_3 (w_1 R w_3 \rightarrow w_3 R w_2)\}$;

(7) Restrição: $R < S = \{< w_1, w_2 >: w_1 R w_2 \wedge \exists w_3 (w_3 R w_1)\}$.

A composição de relações $R \bullet S$ é chamada às vezes de produto relativo, e podemos encontrar na literatura a seguinte denotação $R/S$ chamada de redução.

As operações definidas acima são usadas como ferramentas para se trabalhar com as relações de acessibilidade e serão cruciais para a demonstração de completude dos sistemas. Em particular, a operação de implicação relativa e a operação de restrição são essenciais na demonstração de completude dos sistemas afirmativos axiomatizados pelo esquema $G(a, b, \varphi)$.

Dado que a completude dos sistemas basilares (axiomatizado pelo esquema $G(a, b, c, d)$) é um caso particular da completude dos sistemas afirmativos (axiomatizados pelo esquema $G(a, b, \varphi)$, julgamos conveniente apresentar duas provas distintas de completude dos sistemas afirmativos, uma para os sistemas basilares e outra para os sistemas afirmativos. No primeiro caso a prova é um pouco mais simples. Para tal será empregado um operador $\rho$ que associa parâmetros modais a operações sobre relações. No segundo caso temos uma prova mais elaborada. Usaremos neste caso uma operação $F^{\varphi}$ que associa fórmulas afirmativas a operações sobre relações. A operação $\rho$ pode ser obtida a partir da operação $F^{\varphi}$, o que esclarece o modo como a demonstração de completude para os sistemas basilares pode ser obtida como o caso particular daquela para os sistemas afirmativos.

**Definição 2.2.2.** Uma *estrutura multirelacional* (ou multiestrutura) é um par $F =< W, \Omega >$ na qual $W$ é um conjunto de índices, e $\Omega$ é um conjunto de relações binárias sobre $W$.

Se $< W, \Omega_1 >, < W, \Omega_2 >, ..., < W, \Omega_n >$ são multiestruturas sobre $W$, então a união destas multiestruturas é a multiestrutura $< W, \{R_1, R_2, ...., R_n, ...\} >$ tal que todos $R_i \in \cup\Omega_{1\leq j\leq n}$.

Se L é um sistema multimodal normal, $F =< W, \Omega >$ é uma multiestrutura para L se existe uma função $\rho : OM \to \Omega$ que satisfaça:

(1) $\rho(\lambda) = I$ (Relação de Identidade)

(2) $\rho(a \cup b) = \rho(a) \cup \rho(b)$ (União)

(3) $\rho(a \bullet b) = \rho(a) \bullet \rho(b)$ (Composição)

(4) $\rho(0) = 0$ (Relação Vazia)

Vale a pena observar que os símbolos $\cup$ e $\bullet$ usados acima possuem dois significados distintos: $a \cup b$ e $a \bullet b$ denotam operações sobre parâmetros modais, $\rho(a) \cup \rho(b)$ e $\rho(a) \bullet \rho(b)$ denotam operações sobre relações (união e composição de relações respectivamente).

Os conjuntos de fórmulas consistentes maximais são definidos exatamente como no caso monomodal (o que se justifica, obviamente, pelo fato de que esta noção é independente dos sistemas lógicos a que se aplica).

**Proposição 2.2.3.** *Proposição (6.3)*

*Seja $w$ um conjunto consistente maximal em um sistema L, e $\alpha$, $\beta$ fórmulas arbitrárias, então:*

*(i)* $\alpha \in w$ *sse* $w \vdash \alpha$*;*

*(ii)* $\alpha \in w$ *sse* $\neg\alpha \notin w$*;*

*(iii)* $\alpha \in w$ *ou* $\neg\alpha \in w$*;*

*(iv)* $\alpha \wedge \beta \in w$ *sse* $\alpha \in w$ *e* $\beta \in w$*;*

*(v)* $\alpha \vee \beta \in w$ *e* $\alpha \rightarrow \beta \in w$*, então* $\beta \in w$

*Demonstração.* Análogo ao caso monomodal.

$\square$

**Proposição 2.2.4.** *Proposição 6.4*

*Todo conjunto consistente de fórmulas* $\Gamma_0$ *pode ser estendido para um conjunto consistente maximal* $w$*.*

*Demonstração.* Análogo ao caso monomodal.

$\square$

**Definição 2.2.5.** Multimodelo

Um multimodelo $M =< W, \Omega, V >$ baseado sob uma multiestrutura $F =< W, \Omega >$ é dado pela adição de uma valoração $V$ à essa estrutura que associa a cada fórmula atômica um conjunto de mundos em $W$ (os casos são análogos aos que foram tratados no cap. 5 de [Carnielli e Pizzi 2000]).

**Definição 2.2.6.** Multimodelo canônico

Um multimodelo $M =< W, \Omega, V >$ para L é dito canônico se:

(1) $W = W^L$ é a classe das extensões maximais consistentes de $w_1, w_2, ...$

(2) $V = V^L$ é a função que associa a toda fórmula atômica $p$ uma subclasse de mundos $\{w \in W : p \in w\}$

(3) Para cada $a \in OM$, $\alpha \in L$ e $w \in W^L$ vale:

$< a > \alpha \in w$ sse $(\exists w_1 \in W^L)(wR_a w_1 \wedge \alpha \in w_1)$

**Definição 2.2.7.** Verdadeiro em um mundo da multiestrutura:

A noção de verdade de uma fórmula em um mundo da multiestrutura $(M, w \models \alpha)$ é definida no modo usual com a adição da seguinte cláusula:

$M, w_1 \models [a]\alpha$ sse $M, w_2 \models \alpha$ para todo $w_2$ tal que $< w_1, w_2 > \in \rho(a)$

Abaixo temos um teorema que é usado para a demonstração da completude para a lógica multimodal.

**Teorema 2.2.8.** *Teorema fundamental, primeira forma:*

*Se $M =< W, \Omega, V >$ é um modelo canônico para L, $w_1 \in W$ e $\alpha$ uma fórmula multimodal, então $M, w_1 \models \alpha$ sse $\alpha \in w_1$.*

Temos agora um método geral para se provar a completude para um sistema L. Este método consiste em separar uma certa classe de modelos canônicos através das propriedades de classes de relações (isto é, por uma condição C característica). Obtemos desta forma dois resultados fundamentais:

(1) Correção de L: Todos os axiomas $\alpha$ de L são válidos em todos os modelos que satisfazem a condição C.

(2) Completude de L: Se $\alpha$ é válida em todos os modelos que satisfazem a condição C, então $\alpha$ é um teorema de L.

Uma forma equivalente de completude consiste em provar que: se $\alpha$ é consistente, então $\alpha$ é válida em ao menos um modelo que satisfaça a condição C. Sabe-se que um modelo canônico próprio pode sempre ser definido. Temos portanto que mostrar que um modelo canônico próprio M para o sistema S satisfaz a condição C.

**Definição 2.2.9.** Multimodelo canônico próprio

Um multimodelo canônico $M =< W, \Omega, V >$ é próprio se toda relação de acissibilidade em $\Omega$ é definida deste modo:

$wR_a w' sse \{< a > \alpha : \alpha \in w'\} \subseteq w$

De modo equivalente podemos definir esta condição da seguinte forma:

$wR_a w' sse \{\alpha : [a]\alpha \in w\} \subseteq w'$

Uma forma mais geral para esta equivalência se segue abaixo. Tal forma será usada na demonstração de completude.

# Capítulo 3

# Semântica algébrica para a lógica modal

## 3.1 Introdução

Começaremos este capítulo com uma breve apresentação dos conceitos de semântica e completude para sistemas lógicos. Em seguida, abordaremos a temática da semântica algébrica. Este tipo de semântica é interessante quando relacionada às lógicas modais, pois é um exemplo de semântica que não faz referência a mundos possíveis. Apresentaremos um resultado de completude para as lógicas modais baseado nos artigos de Lemmon *Algebraic Semantics for Modal Logic I and II* [Lem66]. Por fim, mostraremos que as semânticas algébricas para as lógicas modais podem ser consideradas adequadas uma vez que existe o teorema de representação para as álgebras modais.

## 3.2 Semântica

"A semântica de uma língua natural ou formal, é o conjunto de regras e princípios de acordo com os quais as expressões dessa língua são interpretadas" [JB06]. Desta forma, a semântica é uma área do conhecimento que tem por tema o significado dos termos de uma linguagem. Na definição acima também aparece o conceito de "interpretação". Esta interpretação consiste em estabelecer:

(1) O sentido das diversas expressões (simples ou compostas) de uma linguagem.

(2) A referências dessas mesmas expressões.

Os itens acima remetem ao problema já conhecido sobre referência e sentido (ver [Fre92]). Este problema é posto para as linguagem formais de maneira *sui generis*. A tarefa central da interpretação de uma linguagem formal é a construção do conceito de verdade para uma dada interpretação. A partir deste conceito de verdade em L (L é uma linguagem formal qualquer) é possível definir os conceitos restantes da semântica.

**Definição 3.2.1.** Modelo: Uma interpretação I de L é um modelo de um conjunto $\Gamma$ de fórmulas de L se, e somente se, todas as fórmulas de L resultam verdadeiras para I.

**Definição 3.2.2.** Consistência: Um conjunto $\Gamma$ de fórmulas de L é consistente se, e somente se, $\Gamma$ tem um modelo.

**Definição 3.2.3.** Fórmula logicamente válida: Uma fórmula $\varphi$ de L é logicamente válida (denotação $\models_L \varphi$) se, e somente se, em todas as I que são modelos de $\Gamma$, $\varphi$ é verdadeira.

Definidos os elementos básicos de uma semântica para uma linguagem formal temos em mãos os instrumentos para a obtenção de resultados metateóricos. Como exemplos de tais resultados temos as provas de consistência e completude semântica para os sistemas formais. Em geral esses resultados fazem parte do que chamamos teoria de modelos.

Neste trabalho iremos nos concentrar nos resultados de completude dos sistemas modais. Grosso modo, dizemos que um sistema é completo se tudo o que queremos que seja teorema (ou seja, as fórmulas válidas ou verdadeiras) é de fato teorema. Segundo Church, a noção de completude, assim como a de consistência tem uma motivação semântica. A idéia é que os teoremas não devam ser conflitantes com as suas interpretações ([Chu56] pg. 109).

Podemos dizer que um dos maiores projetos que encontramos ao estudar lógica é o de se construir um sistema, ou conjunto de sistemas, que contenha(m) todas as verdades da lógica pura. Isto ainda não foi feito, podemos então perguntar; e as verdades da lógica proposicional, já foram formalizadas em algum sistema? A resposta a essa pergunta é afirmativa e podemos encontrar várias provas diferentes para essa resposta (ver *Introduction to mathematical Logic* [Chu56], *Mathematical Logic* [?], *Model Theory* [Kei92], *Introduction to Mathematical Logic* [Men97] etc. para maiores informações sobre a lógica proposicional). Comecemos então a analisar o caso proposicional para então passarmos para a lógica modal, que é um exemplo de sistema estendido da lógica proposicional.

Em primeiro lugar, notemos que a linguagem da lógica proposicional é adequada para expressar qualquer função veritativa (ou função de verdade). Isto não significa que a linguagem da lógica proposicional é capaz de expressar qualquer verdade sobre funções veritativas (funções de verdade). A linguagem proposicional não pode, por exemplo, expressar a verdade de que existe um número infinito enumerável de distintas funções veritativas. Porém podemos provar (i) que a linguagem da lógica proposicional (que contenha como conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ ) é adequada para expressar as funções veritativas (cf. [Hun73] pp 62-67). A partir deste resultado podemos então mostrar que: (ii) qualquer fórmula verofuncional $\varphi$ com conectivos arbitrários pode ser correlacionada a uma única fórmula na forma normal disjuntiva e com a mesma tabela de verdade. (iii) Qualquer fórmula na forma normal disjuntiva pode ser correlacionada a uma única fórmula da linguagem proposicional que tenha a mesma tabela de verdade que a primeira. Nada nos quarante, entretanto, que esta relação seja 1-1.

A completude será a idéia chave deste capítulo. Discutiremos um tipo especial de semântica (a semântica algébrica) e o resultado de completude desta semântica para certos sistemas modais.

## 3.3 Semântica algébrica

Ao analisarmos a história da lógica modal no século XX (ver capítulo 1 do presente trabalho) observamos que as lógicas modais foram estudadas primeiramente a partir de estruturas algébricas. Hugh MacColl foi o primeiro a fazer uma análise algébrica das proposições modais. Seu trabalho apareceu na revista *Mind* entre 1880 e 1906 em uma série de artigos sob o título *Symbolic Reasoning*(ver *Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution* [Gol00] p. 4). A conjunção segundo MacColl era simbolizada por $ab$, e $a+b$ foi usado para simbolizar a disjunção. A implicação entre $a$ e $b$ ($a$ implica $b$) tinha a seguinte forma: $a : b$ e a equivalência ficou $a = b$. A definição de equivalência era a mesma que conhecemos hoje em dia, ou seja, a composição de duas implicações $(a : b)(b : a)$. Para a negação MacCol usou o símbolo '. Assim, $a'$ representava a negação de $a$.

Boole usou $a = 1$ e $a = 0$ para "$a$ é verdadeiro" e "$a$ é falso" respectivamente, porem deu um aspecto modal às suas definições por causa de sua leitura temporal destas ($a$ é sempre verdadeiro e $a$ é sempre falso) (ver *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* [Boo54] capítulo XI). MacColl usou as letras gregas $\varepsilon$ e $\eta$ para se referir aos conceitos de 'certeza' e 'impossibilidade'. Tais letras faziam o mesmo papel que o 0 e 1 do trabalho de Boole. Mais tarde MacColl ainda introduziu o símbolo $\theta$ para designar aquilo que não é nem certo nem impossível. Por fim, as expressões: $(a = \varepsilon)$, $(b = \eta)$ e $(c = \theta)$ expressavam '$a$ é certeza', '$b$ é impossível' e '$c$ é variável' (nem certeza, nem impossível). Tais fórmulas foram abreviadas por questão de simplicidade. Suas novas formas eram: $a^{\varepsilon}$, $b^{\eta}$ e $c^{\theta}$. Foram acrescentados ainda as seguintes fórmulas: $d^{\tau}$ para '$d$ é verdadeiro' e $e^{\iota}$ para '$e$ é falso'. Desta forma, a expressão $a : b$ era equivalente a $(ab')^{\eta}$ (é impossível que $a$ e não-$b$).

Nos dias de hoje, temos visto um renovado interesse sobre a álgebra desenvolvida por MacColl. Por exemplo, o periódico *The Nordic Journal of Philosophical Logic* abriu espaço para o estudo dos trabalhos citados acima. Em particular o artigo *Hugh MacColl and the Algebra of Strict Implication* de Stephen Read (ver [Rea98]) apresenta uma argumentação sobre a interpretação do sistema apresentado por MacColl como sendo a lógica modal T desenvolvida mais tarde pelos trabalhos de Feys e von Wright (ver *Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution [Gol00].*

Antes de começarmos o estudo das álgebras modais devemos distinguir os diferentes sistemas modais. A distinção entre sistemas modais pode ser feita a partir de matrizes. Um importante teorema acerca da caracterização dos sistemas modais a partir de matrizes se deve a Dugundji que em 1940 publicou seus resultados que mostravam a não possibilidade de termos matrizes finitas características para alguns sistemas modais. Existem ainda outras técnicas para a distinção dos sistemas modais. Duas das mais importantes destas técnicas são, o método algébrico empregado por McKinsey e Tarski (1941 e 1948) (ver *A Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology* [McK41] e *Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting* [Tar48b]) e o método semântico de Kripke (1959 e 1963) (ver *A completeness theorem in modal logic* [Kri59] e *Semantic analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi* [Kri63]). Os artigos escritos por Lemmon na década de 60 têm por objetivo apresentar uma síntese destes dois métodos. Um interessante resultado mostrado nestes artigos é que a completude semântica pode ser deduzida de resultados algébricos por meio de um teorema central. No primeiro artigo Lemmon tem por objetivo mostrar que método algébrico McKinsey-Tarski, que é bem sucedido quando aplicado ao sistema $S4$, pode ser estendido para um grupo de seis sistemas modais onde o mais forte destes sistemas é o T. O segundo artigo trata de sistemas mais fortes e tinha-se como projeto um terceiro artigo que trataria da logica modal quantificada para todos os sistemas vistos (este terceiro artigo não chegou a ser escrito).

O método usado para trabalhar esses diferentes sistemas modais será o mesmo. Primeiro se estabelece uma correlação entre as matrizes regulares para cada sistema e um certo tipo de álgebra. Depois, usando as matrizes de Lindenbaum prova-se que cada sistema tem a propriedade do modelo finito e portanto que são decidíveis. Uma conseqüência disto é que poderemos restringir a nossa atenção para álgebras finitas. Por último será estabelecido o teorema de representação para cada sistema em termos de uma álgebra baseada no conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto. Essas representações resultam na conexão entre o ponto de vista algébrico e o ponto de vista da semântica dos mundos possíveis (ou semântica de Kripke).

### 3.3.1 Sistemas modais fracos

Os sistemas modais fracos costumam não receber uma atenção especial dos filósofos. Talvez porque parece que tais sistemas não consigam dar conta da diversidade de interpretações filosóficas sobre as modalidades. Todavia, do ponto de vista da teoria geral da semântica, tais sistemas tem sido mais observados, pois é apenas através do estudo das lógicas modais fracas que podemos nos dar conta das limitações existentes com relação à semântica padrão atual (ver *Some remarks on (weakly) weak modal logics* [Sch81]). Chamaremos de fraco (seguindo Lemmon, *Algebraic Semantics for Modal Logic I, [Lem66]* os sistema mais fracos ou equivalentes a T. Apresentamos a seguir os sistemas a serem analisados.
**Axiomas:**

**Ax. 1** $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

**Ax. 2** $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

**Ax. 3** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

**Ax. 4** $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

**Ax. 5** $\Box A \rightarrow \neg\Box\neg A$

**Ax. 6** $\Box A \rightarrow A$

**Regras:**

**Reg. 1** $A, A \rightarrow B \vdash B$

**Reg. 2** $A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow \Box B$

**Reg. 3** $A \vdash \Box A$

**Definições:**

**Df. 1** $A \vee B := \neg A \rightarrow B$

**Df. 2** $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$

**Df. 3** $A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

**Df. 4** $\Diamond A := \neg\Box\neg A$

**Df. 5** $A \Rightarrow B := \Box(A \rightarrow B)$

**Df. 6** $A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow B)$

**Df. 7** $\Box^n A := \Box \underbrace{...}_{'n' vezes} \Box A$

**Df. 8** $\Diamond^n A := \Diamond \underbrace{...}_{'n' vezes} \Diamond A$

**Df. 9** $A \Rightarrow^n B := \Box^n(A \rightarrow B)$

**Df. 10** $A \Leftrightarrow^n B := (A \Rightarrow^n B) \wedge (B \Rightarrow^n A)$

Os seis sistemas modais são definidos como se segue:

C2 = [A1 - A4 ; R1, R2]
D2 = [A1 - A5 ; R1, R2]
E2 = [A1 - A4, A6 ; R1, R2]
T(C) = [A1 - A4 ; R1, R3]
T(D) = [A1 - A5 ; R1, R3]
T = [A1 - A4, A6 ; R1, R3]

O cálculo proposicional é definido como [A1 - A3, R1] mais as definições D1 - D3. Portanto o cálculo proposicional clássico aparece como subestrutura dos sistemas modais apresentados. Vale ainda observar que em ambos os sistemas contendo A6 (E2 e T), A5 é dedutível e nos sistemas T(C), T(D) e T a regra R2 pode ser derivada. Portanto temos uma ordem de inclusão dos sistemas modais fracos , onde o sistema mais fraco pode ser visto como subsistema de um sistemas mais forte. Tal relação de ordem pode ser ilustrada pela seguinte tabela:

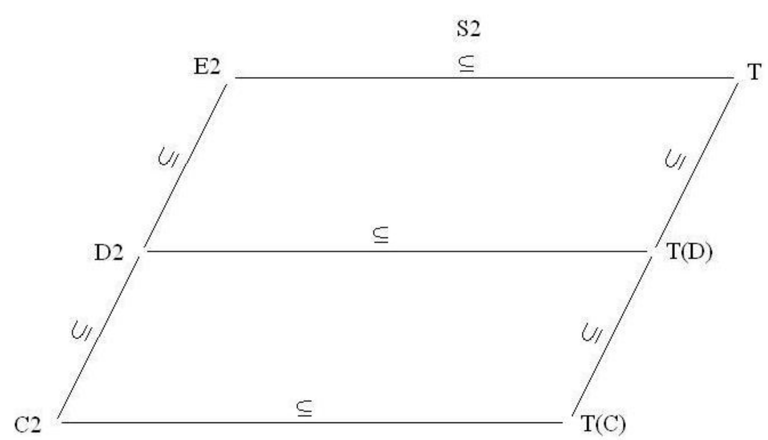


**Figura 3: Tabela de inclusão dos sistemas modais fracos**

**Teorema 3.3.1.** *A regra R2 é derivada nos sistemas T(C), T(D) e T.*

*Demonstração.* 1. $A \to B$ Pr.
2. $\Box(A \to B)$ 1, R3.

3. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ A4.
4. $\Box A \to \Box B$ 2,1 R1.

$\Box$

Primeiramente estudaremos o sistema C2. Podemos explicar tal decisão a partir do seu valor prático pois os resultados obtidos neste sistema podem facilmente ser estendido para os sistemas mais fortes. Por outro lado o sistema C2 é o sistema considerado minimal da lógica modal (embora alguns sistemas mais fracos possam ser encontrados).

Abaixo são apresentados alguns teoremas do sistema C2:

1) $\vdash_{C2} \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$
2) $\vdash_{C2} \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$
3) $\vdash_{C2} \Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
4) $\vdash_{C2} (\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$
5) $\vdash_{C2} \Box^n A \to (B \Rightarrow^n A)$
6) $\vdash_{C2} \Box\neg A \to (A \Rightarrow^n B$
7) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to (\Box^n A \Rightarrow^m \Box^n B)$
8) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to (\Diamond^n A \Rightarrow^m \Diamond^n B)$
9) $\vdash_{C2} \Box^n A \leftrightarrow (\neg A \Rightarrow^n A)$
10) $\vdash_{C2} \Box^n A \leftrightarrow ((B \to B) \Rightarrow^n A)$
11) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^n B) \leftrightarrow \neg\Diamond^n(A \wedge \neg B)$
12) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to ((B \Rightarrow^n C) \Rightarrow^m (A \Rightarrow^n C))$

Os seguintes teoremas de D2 e E2 não são teoremas de C2 (chamaremos estes resultados de (*)):

1) $\vdash_{D2} \Diamond(A \to)A)$
2) $\vdash_{D2} \Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$
3) $\vdash_{E2} A \to \Diamond A$

Um notável aspecto dos sistemas T(C), T(D) e T é resultado da regra R3 que prefixa o operador $\Box$ aos teoremas já demonstrados.

**Teorema 3.3.2.** *Se* $\vdash_{C2(D2,E2)} A$, *então* $\vdash_{T(C)(T(D),T)} \Box^n A$

Outro resultado interessante é o seguinte:

**Teorema 3.3.3.** $\vdash_T \Box(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$

Uma característica compartilhada por todos os seis sistemas visto mas que não aparece no sistema S2 é a possibilidade de substituição de equivalentes materiais no interior das fórmulas. O próximo teorema ilustra esta característica.

**Teorema 3.3.4.** *Para* $S \in \{C2, D2, E2, T(C), T(D), T\}$. *Se* $\vdash_S A \leftrightarrow B$, *então* $\vdash_S$ *...A...* $\leftrightarrow$ *...B... (onde ...B... resulta de ...A... por substituição de zero ou mais ocorrências de A em ...A... por B)*

*Demonstração.* Prova: A prova se dá por indução no tamanho de ...A..., fazendo usos essenciais de R2 e R3.

□

### 3.3.2 Álgebras e Matrizes

Qual é a relação entre Álgebras e sistemas modais? Sabe-se que existe uma forte conexão entre o sistema de Lewis S4 e as álgebras-fecho (cf. [Tar48a]). Uma conexão parecida acontece entre T e a generalização destas álgebras-fecho chamadas de álgebras-extensão (cf. [Lem60] e [Gol76]). Mas será que podemos ter um método geral para determinar em cada sistema modal qual álgebra deve estar relacionada?

Para estudarmos o sistema C2 usaremos uma outra generalização de álgebra chamada simplesmente álgebra modal (Para maiores esclarecimentos sobre álgebra ver [San81]).

**Definição 3.3.5.** Uma estrutura $\mathfrak{A} =< M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} >$ é uma *álgebra modal* sse M é um conjunto de elementos fechado sob as operações $\cup, \cap, -$ e $\mathbf{P}$ tais que:

(i) M é uma álgebra Booleana com respeito a $\cup, \cap$ e $-$ (Ver [San81] para definição de álgebra booleana)

(ii) Para $x, y \in M, \mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y$

**Definição 3.3.6.** $\mathbf{N}x := -\mathbf{P} - x$

**Teorema 3.3.7.** *Em qualquer álgebra Modal* $\mathfrak{A} =< M, \cup, \cap, -, \boldsymbol{P} >$*:*

*(i) Para* $x, y \in M$*,* $\boldsymbol{N}(x \cap y) = \boldsymbol{N}x \cap \boldsymbol{N}y$

*Esta é uma propriedade sobre a dualidade de* $P$ *e* $N$*.*

*(ii) Para* $x, y \in M$*, se* $x \leq y$*, então* $\boldsymbol{P}x \leq \boldsymbol{P}y$ *e* $\boldsymbol{N}x \leq \boldsymbol{N}y$ *(onde* $x \leq y$ *sse* $x \cup y = y$ *sse* $x \cap y = x$

*Monotonicidade da relação* $\leq$ *com relação a* $P$ *e* $N$*.*

*Demonstração.* (i) $\mathbf{N}(x \cap y) = -\mathbf{P} - (x \cap y) = -\mathbf{P}(-x \cup -y) = -(\mathbf{P} - x \cup \mathbf{P} - y) = -\mathbf{P} - x \cap -\mathbf{P} - y = \mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y$.

(ii) Suponha $x \leq y$, ou seja, $x \cup y = y$. Portanto $\mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y = \mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}y$, daí $\mathbf{P}x \leq \mathbf{P}y$. Por outro lado se $x \leq y$, então $x \cap y = y$ e portanto $\mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y = \mathbf{N}(x \cap y) = \mathbf{N}y$, logo $\mathbf{N}x \leq \mathbf{N}y$.

□

A seguir temos a apresentação da relação entre álgebras modais e matrizes.

**Definição 3.3.8.** Dada uma assinatura C, uma C-matriz é um par M $=$ $< A, D >$, onde $A =< A, C >$ é uma álgebra sobre C, e $D \subseteq A$. O conjunto D é normalmente referido como o conjunto de valores designados de M. As M-valorações de L(C) (L(C) é o conjunto de fórmulas da linguagem sobre C) são os C-homomorfismos $v : L(C) \rightarrow A$.

Em geral uma álgebra pode ser transformada em uma matriz se algum subconjunto D de seus elementos é tomado como o conjunto dos elementos designados. Portanto para cada álgebra com uma cardinalidade N de elementos temos a possibilidade de construir $2^N$ matrizes distintas.

Uma lógica proposicional pode ser interpretada como matriz da seguinte maneira: Tomamos as variáveis proposicionais de uma fbf da lógica para ser a imagem sobre os elementos da matriz. Interpretamos os conectivos da lógica como operações na (ou definíveis na) matriz; deste modo, cada fbf

A contendo n variáveis proposicionais está associada a uma (única) função-matriz $f^{(A)}$ de n variáveis.

**Definição 3.3.9.** Dizemos que A é *satisfeita* por uma matriz sse, sob uma dada interpretação, o valor de $f^{(A)}$ para toda n-upla de elementos da matriz permanece em D. Caso contrário dizemos que A é *falsificada* pela matriz.

**Definição 3.3.10.** Um sistema S é *satisfeito* por uma matriz sse todos os teoremas de S são satisfeitos pela matriz.

**Definição 3.3.11.** Um sistema é *caracterizado* por uma matriz (ou uma matriz é *característica* para um sistema) sse as fbfs do sistema satisfeitas pela matriz são todas teoremas e apenas os teoremas deste sistemas.

Recíprocamente, dada uma assinatura apropriada (ou seja, um conjunto de conectivos) e sua matriz-interpretação, temos que cada matriz determina uma lógica proposicional a saber: a lógica cujo os teoremas são exatamente a fbfs desta assinatura satisfeitas pela matriz sob a dada interpretação. Esta matriz também será a matriz característica para o sistema correspondente.

Mostramos a seguir como construímos uma matriz característica para uma dada lógica proposicional.

Para qualquer lógica proposicional L, seja $W_L$ o conjunto de suas fbfs (em termo dos conectivos $c_1, c_2, ..., c_n$), e $T_L$ o subconjunto de seus teoremas.

**Teorema 3.3.12.** *(Lindenbaum) Seja L uma lógica proposicional tal que $T_L$ é fechada sob substituição de variáveis proposicionais. Então existe uma matriz característica $\mathfrak{M}$ para L.*

*Demonstração.* Notemos que a matriz não precisa ser finita. Suponha que L possua os conectivos $c_1^{a_1}, ..., c_n^{a_n}$, tais que $c_i^{a_i}$ é $a_i$-ádico $(1 \leq i \leq n)$. Para os elementos da matriz tomaremos os membros de $W_L$ e para os elementos designados os membros de $T_L$. Definimos, para cada $c_i^{a_i}$ uma função-matriz $a_i$-ádica $c_i^*$ como se segue: para $w_1, ..., w_{a_i} \in W_L$ consideramos $c_i^*(w_1, ..., w_n)$ igual às fbfs que resultam da aplicação do conectivo $c_i^{a_i}$ às fbfs $w_1, ..., w_{a_i}$.

Seja $\mathfrak{M}_L =< W_L, T_L, c_1^*, ..., c_n^* >$. Interpretando $c_i^{a_i}$ como $c_i^*$, é fácil ver que todos os teoremas de L são satisfeitos por $\mathfrak{M}_L$. De fato, suponha $t \in T_L$, então qualquer valoração dos argumentos de $W_L$ para $f^{(T)}$ resulta como valor simplesmente a instanciação (por substituição) de t, que por hipótese está em $T_L$. Reciprocamente se $w \notin T_L$, então o valor de $f^W$ está fora de $T_L$ dado que estas valorações para estas variáveis consiste das variáveis proposicionais apropriadas de $w$. Logo $\mathfrak{M}_L$ é característica para L.

□

O teorema 3.3.12 nos mostra como conseguimos obter uma matriz característica a partir de uma lógica proposicional cujo o conjunto de teoremas é fechado para substituição de variáveis proposicionais. Como conseqüência temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.3.13.** *Existe uma matriz característica para cada um dos sistemas C2, D2, etc.*

Apresentamos acima um método geral de se conseguir matrizes características para os sistemas. Todavia os resultados não nos indicam as matrizes que seriam mais interessantes para os nossos estudos. Usamos um método que resulta em matrizes de Lindenbaum. Um sistema pode ter muitas matrizes não isomórficas. A matriz mais interessante para trabalharmos a lógica proposicional é aquela que resulta da álgebra Booleana de dois elementos (ou seja, a matriz da tabela de verdade).

As matrizes que mais nos interessam neste ponto são estruturas $\mathfrak{M} =< M, D, \cup, \cap, -, \mathbf{P} >$ tal que $D \subseteq M$ e $\cup, \cap$ são operadores diádicos, $-, \mathbf{P}$ monádicos em M onde M é fechado para tais operações.

**Definição 3.3.14.** Uma matriz $\mathfrak{M} =< M, D, \cup, \cap, -, \mathbf{P} >$ é *própria* sse $D \subset M$.

Usaremos ainda as seguintes definições:

**Definição 3.3.15.** $x \to y := -x \cup y$

**Definição 3.3.16.** $x \leftrightarrow y := (x \to y) \cap (y \to x)$

**Definição 3.3.17.** Uma matriz $\mathfrak{M} =< M, D, \cup, \cap, -, \mathbf{P} >$ é *regular* sse:

(i) $\mathfrak{M}$ é própria;

(ii) D é ideal aditivo de M;

(iii) se $x \leftrightarrow y \in D$, então $x = y$.

(Um conjunto $D \subseteq M$ é um *ideal aditivo* sse $x \in D, y \in D \Rightarrow x \cap y \in D$ e $x \in D, y \in M \Rightarrow x \cup y \in D$.)

Os conectivos dos sistemas modais podem ser interpretados em termos de operações nas matrizes. Por exemplo $\Box$ é interpretado como $\mathbf{N}$, os demais conectivos são interpretados da maneira usual, ou seja, $\vee$ como $\cup$, $\wedge$ como $\cap$, etc.

O próximo passo é mostrar como se constrói matrizes regulares a partir das matrizes de Lindenbaum. Vimos que existem matrizes de Lindenbaum para cada um dos seis sistemas estudados (C2, D2, E2, T(C) , T(D) e T). As matrizes regulares são construídas a partir de matrizes cujo os elementos são classes de equivalência sob o operador $\leftrightarrow$ das matrizes de Lindembaum. Partiremos então das seguintes definições:

Seja $W$ o conjunto das fbfs dos seis sistemas estudados. Seja T o conjunto dos teoremas de C2 (D2, etc.). Para $A \in W$, considere $E(A) = \{B : B \leftrightarrow A \in T\}$. Seja $\vee, \wedge, \neg, \Diamond$ funções em $W$ nas quais, para fbfs $A, B \in W$, formamos novas fbfs a saber: $A \vee B, A \wedge B, \neg B$ e $\Diamond A$. Definimos ainda novas funções $\vee_1, \wedge_1, \neg_1$ e $\Diamond_1$ sobre o conjunto de todos os conjuntos $E(A)$ da seguinte maneira:

$E(A) \vee_1 E(B) = E(A \vee B)$
$E(A) \wedge_1 E(B) = E(A \wedge B)$
$\neg_1 E(A) = E(\neg A)$
$\Diamond_1 A = E(\Diamond A)$

Chamamos de $W_1$ o conjunto de todos os conjuntos $E(A)$ para $A \in W$, e $T_1$ o conjunto de todos os conjuntos $E(A)$ para $A \in T$. Obviamente $T_1$ possui apenas um elemento, dado que, para $A, B \in T$, $A \leftrightarrow B \in T$.

Finalmente, definimos uma relação $\simeq$ sobre $W$ de forma que $A \simeq B$ sse $A \leftrightarrow B \in T$ (mostrar que $\simeq$ é uma relação de congruência? isto é uma conseqüência do fato de que todos os seis sistemas possuem o cálculo proposicional como base, junto com o teorema 3.3.4 visto acima). Estamos, portanto, justificados em tratar a estrutura $\langle W_1, T_1, \vee_1, \neg_1, \Diamond_1 \rangle$ como uma matriz; chamamos esta matriz de $\mathfrak{M}_1$. Mostraremos abaixo que $\mathfrak{M}_1$ é uma matriz característica para C2 (D2, etc.).

**Teorema 3.3.18.** $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ *é uma C2-matriz regular sse* $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ *é uma álgebra modal e* $d = 1$.

*Demonstração.* Seja $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ uma C2-matriz regular. Para provar que $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma Álgebra Booleana, precisamos tomar um conjunto de postulados para tais álgebras e mostrar que estes são satisfeitos pela matriz. (ver *The Elements of Mathematical Logic* [Ros50], *A Course in Universal Algebra* [San81] e *Algebraic Logic* [Hal55]). Dos sete postulados apresentados por Rosenbloom as provas da satisfação de A1, A6, A7 pela matriz são conseqüências triviais do fato de $\mathfrak{M}$ ser uma matriz. Para A2, prova-se que $x \cap y = y \cap x$ como se segue: $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ é um teorema de C2, daí $x \cap y \leftrightarrow y \cup x \in \{d\}$ pois $\mathfrak{M}$ é uma C2-matriz. Segue-se ainda, de (iii) da Definição 5 que $x \cap y = y \cap x$. A3, A4, A5 são conseqüências similares do fato de que C2 contém o cálculo proposicional clássico, junto com (iii) da Definição 5. Assim $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma álgebra modal. Visto que $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é uma Álgebra Booleana, podemos considerar $1 = x \cup -x$. dado que $\vdash_{C2} A \vee -A$, temos $x \cup -x \in \{d\}$, ou seja, $x \cup -x = d$, daí $d = 1$.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ uma álgebra modal. Dado que $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é uma álgebra Booleana, é óbvio que os esquemas A1-A3 são satisfeitos por $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$. A função-matriz correspondente a A4 é $-N(-x \cup y) \cup (-Nx \cup Ny) = P(x \cap -y) \cup (P-x \cup -P-y) = P((x \cap -y) \cup -x) \cup -P-y = P(-x \cup -y) \cup -P-y = (P-x \cup P-y) \cup -P-y = P-x \cup 1 = 1$, portanto o esquema A4 é satisfeito. Para R1, suponha $x = 1$ e $x \to y = 1$. Então $y = (x \cap -x) \cup y = (x \cup y) \cap (-x \cup y) = (1 \cup y) \cap 1 = 1$. Para R2, suponha $x \to y = 1$. Então $-x \cup y = 1$ e $x \leq y$, daí $Nx \leq Ny$ pelo teorema 6 (ii). Assim $Nx \to Ny = -Nx \cup Ny = 1$. Assim $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma C2-matriz. Que esta matriz é própria segue-se do fato que $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é uma álgebra Booleana e portanto contém ao menos 2 elementos. É óbvio que $\{1\}$ é um ideal aditivo de M. Finalmente, dado $x \leftrightarrow y = 1$, $x = y$ pela propriedade encontrada nas álgebras Booleanas, logo $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ é também regular.

$\square$

O teorema 3.3.18 nos indica como obtemos uma álgebra modal específica a partir de uma matriz regular e vice-versa (como obtemos uma matriz regular característica a partir da álgebra). Este teorema é uma generalização do teorema 4 que aparece em *An extension Algebras and the Modal System T* de Lemmon. O Teorema 3 do artigo de McKinsey *Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology* tem este mesmo resultado para o sistema S2 e o teorema 10 deste mesmo artigo o faz para o sistema S4 (cf. [Lem60] e [McK41] p. 120).

Em virtude deste teorema não precisaremos mais distinguir a álgebra modal e a sua matriz correspondente que toma 1 como valor designado.

Para os demais sistemas devemos definir as álgebras apropriadas. Portanto:

**Definição 3.3.19.** Uma álgebra é *deôntica* sse, além de ser modal, satisfaz o postulado:
(iv) $P1 = 1$

**Definição 3.3.20.** Uma álgebra é *epistêmica* sse, além de ser uma álgebra modal, satisfaz o postulado:

(v) $x \leq Px$

**Definição 3.3.21.** Uma álgebra é *normal* sse, além de ser uma álgebra modal, satisfaz o seguinte postulado:

(vi) $P0 = 0$

**Teorema 3.3.22.** *Toda álgebra epistêmica é também uma álgebra deôntica.*

*Demonstração.* Por (v) nós concluímos $1 \leq P1$. Como se trata de álgebra booleana temos $P1 \leq 1$, daí $P1 = 1$, que é (iv).

□

O teorema acima assegura que os resultados obtidos para as álgebras epistêmicas podem ser inferidos a partir das álgebras deônticas.

**Teorema 3.3.23.** *A matriz* $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ *é uma D2- (E2-, T(C)-, T(D)-, T-) matriz regular sse* $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ *é uma álgebra deôntica* *(epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica) e $d = 1$.*

*Demonstração.* Em geral a prova se segue do teorema 3.3.18 acrescentado com as seguintes condições. Uma D2-matriz regular preenche a condição (iv) seguido do resultado (*) (2). Uma E2-matriz regular preenche a condição (v) seguido do resultado (*) (3). Uma T(C)-matriz preenche a condição (vi) seguido do teorema 4. Reciprocamente, dado (iv), $Nx \to Px = P{-}x \cup Px = P(-x \cup x) = P1 = 1$, desta forma o postulado A5 é satisfeito. Dado (v), $Nx \to x = P - x \cup x = (-x \cup P - x) \cup x$ (desde que $P - x = -x \cup P - x$) $= 1 \cup P - x = 1$, portanto o postulado A6 é satisfeito. Dado (vi), suponha $x = 1$. Então $Nx = -P - x = -P0 = -0 = 1$, daí R3 é satisfeito.

□

O resultado acima completa a relação entre álgebras e matrizes. Para cada álgebra é possível construir uma matriz regular adequada que identifica os teoremas do sistema. Como cada matriz está ligada a cada sistema lógico temos uma ponte entre a lógica e a álgebra. portanto, os resultados até aqui obtidos nos dão a completude para os seis sistemas modais da seguinte forma:

**Teorema 3.3.24.** *$\vdash_{C2(D2,E2,T(C),T(D),T)} A$ sse $A$ é satisfeita por todas álgebras modais (deôntica, epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica).*

*Demonstração.* Em virtude do teorema 3.3.18 temos que C2 é satisfeito por qualquer álgebra modal; reciprocamente qualquer não-teorema de C2 é falsificado pela C2-matriz regular característica deste sistema (ver teorema 3.3.12), e assim as álgebras modais equacionam a fórmula correspondente a este não teorema ao valor 0 (teorema 3.3.18). Os outros sistemas são casos similares que usam os teoremas 3.3.23 e 3.3.12).

□

Portanto, podemos considerar o resultado acima como sendo um resultado de completude algébrica para as lógicas modais uma vez que mostra que a semântica algébrica "identifica" os (todos) teoremas de um dado sistema modal.

### 3.3.3 A propriedade dos modelos finitos

Mostraremos a seguir que os resultados obtidos acima não são alterados se restringirmos o seu campo de atuação para as álgebras finitas. Mostraremos ainda que cada sistema possui a propriedade do modelo finito, ou seja, cada não-teorema A de cada sistema pode ser associado a uma matriz finita satisfazendo o sistema e falsificando A. Daí poderemos também concluir que cada sistema é decidível.

**Teorema 3.3.25.** *Seja* $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ *uma álgebra modal (deôntica, etc.), e seja* $a_1, ..., a_r$ *uma seqüência de elementos de M. Então existe uma álgebra modal (deôntica, etc.) finita* $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \cup_1, \cap_1, -_1, P_1\rangle$ *com no máximo* $2^{2^{r+1}}$ *elementos tais que:*

*(i) Para* $1 \leq i \leq r$, $a_i \in M_1$

*(ii) Para* $x, y \in M_1$, $x \cup_1 y = x \cup y$

*(iii) Para* $x, y \in M_1$, $x \cap_1 y = x \cap y$

*(iv) Para* $x \in M_1$, $-_1 x = -x$

*(v) Para* $x \in M_1$, *tal que* $Px \in M_1$, $P_1 x = Px$

*Demonstração.* Seja $M_1$ o conjunto de elementos de M obtidos de $P1, a_1, ..., a_r$ por qualquer número finito de aplicações de $\cup, \cap$ e $-$. Um resultado já conhecido da álgebra booleana nos indica que haverão não mais que $2^{2^{r+1}}$ elementos em $M_1$. Consideremos $\cup_1, \cap_1$, e $-_1$ iguais a $\cup, \cap, -$ mas restritos a $M_1$. Temos que é imediato o resultado para (i) a (iv). Para $x \in M_1$, dizemos que x é coberto por y sse $y \in M_1$, $Py \in M_1$ e $x \leq y$. Desde que $P1 \in M_1$ e também $1 \in M_1$ segue-se todo elemento é coberto por algum elemento. Se $x$ é coberto por $y_1, ..., y_n$ nós consideramos $P_1 x = Py_1 \cap ... \cap Py_n$, (uma vez que $P_1 x \in M_1$). Se $x$ está coberto por $y_1, ..., y_n$, então $x \leq y_i (1 \leq i \leq n)$, desta forma $Px \leq P_i$ pelo teorema 3.3.7 (ii) e $Px \leq P_1 x$. Reciprocamente, se $x \in M_1$ e $Px \in M_1$, então $x$ é coberto por si mesmo, pois $P_1 x = Px \cap Py_1 \cap ... \cap Py_n$, onde $y_1, ..., y_n$ são os outros elementos que cobrem $x$. Assim $P_1 x \leq Px$. Estes resultados nos mostram que (v) é satisfeito.

Resta mostrar que se $\mathfrak{M}$ é uma álgebra modal, (deôntica, epistêmica, etc.), então $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \cup_1, \cap_1, -_1, P_1\rangle$ é também uma álgebra modal (deôntica, epistêmica, etc.). O resultado geral para álgebras modal depende da prova de $P_1(x \cup_1 y) = P_1 x \cup_1 P_1 y$. A prova de $P_1 x \cup_1 y = P_1 x \cup_1 P_1 y$ pode ser encontrada no artigo *Solution of the Decision Problem for the Lewis systems S2 and S4, with an Application to Topology*, [McK41] p. 125. Para álgebras deônticas, precisamos mostrar que: dado $P1 = 1$, então $P_1 1 = 1$. Como $1, P1 \in M_1$, (v) se aplica e daí $P_1 1 = P1 = 1$. Para álgebras epistêmicas, precisamos mostrar que: dado $x \leq Px$, então $x \leq P_1 x$. Mas já mostramos que em geral $Px \leq P_1 x$. Para álgebras normais, precisamos mostrar que:

dado $P0 = 0$, então $P_1 0 = 0$. Como, se $P0 = 0$, então $P0 \in M_1$, temos (por (v) novamente) $P_1 0 = P0 = 0$. Os demais casos são combinações dos casos já mostrados.

□

**Teorema 3.3.26.** *Seja A uma fbf com r subfórmulas. Então* $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$ *sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deôntica etc.) com, no máximo,* $2^{2^{r+1}}$ *elementos.*

*Demonstração.* Se $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$, então, pelo teorema 3.3.24, A é satisfeito por todas álgebras modais (deônticas, etc.). Reciprocamente, suponha que A é um não-teorema de C2(D2, etc.) com r subfórmulas. Então A é falsificada com a matriz regular apropriada do teorema 3.3.12, a saber: $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$. Sejam $v_1, ..., v_n$ as variáveis proposicionais em A e $a_1, ..., a_n$ os elementos de M que são associados a $v_1, ..., v_n$ e que falsifica A. Suponha que, para esta função, os valores das subfórmulas de A diferentes de $v_1, ..., v_n$ são $a_{\cdot}n + 1, ..., a_r$. Podemos assumir que última fórmula é a própria A, visto que: $a_r \neq 1$. Como $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma álgebra modal (deôntica, etc.) (teoremas 3.3.18 e 3.3.23), portanto pelo teorema 3.3.25 existe uma álgebra modal (deôntica, etc.) $\mathfrak{M}_1$ com, no máximo, $2^{2^{r+1}}$ elementos satisfazendo a cinco condições daquele teorema. Podemos considerar (pela condição (i)) a mesma função que associa $a_1, ..., a_n$ a $v_1, ..., v_n$ na matriz $\mathfrak{M}_1$. É claro que esta função associa os mesmos valores para A (por (ii)-(v)) em $\mathfrak{M}_1$ que são associados em $\mathfrak{M}$ a saber: $a_r \neq 1$. Logo A é satisfeita por $\mathfrak{M}_1$.

□

**Corolário 3.3.27.** *Os sistemas C2, D2, E2, T(C), T(D), T possuem a propriedade do modelo finito, e são portanto decidíveis.*

**Corolário 3.3.28.** $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$ *sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deônticas, etc) finitas.*

### 3.3.4 Álgebras e modelos

Generalizaremos abaixo a noção de modelos kripkeanos. Mostraremos que, em termos de diferentes estruturas, os teoremas naturais de representação podem ser obtidos com relação às álgebras vistas acima. Dados estes teoremas, os resultados de completude de tipo kripkeano são conseqüências diretas dos resultados de completude da secção anterior.

**Definição 3.3.29.** Um enquadramento modal bissortido (e.m.b) é uma tripla ordenada $\Re = \langle K, Q, U \rangle$, onde $K$ é um conjunto não-vazio de elementos, $Q \subseteq K$ e $U$ uma relação binária definida em $K$.

Intuitivamente, podemos pensar $K$ como um conjunto de "estados possíveis" e interpretar $Uxy$ (Para $x, y \in K$) como "y é possivelmente acessível por x" ou "y é um mundo visível a x", etc.

Para entender o papel do subconjunto $Q$ é necessário lembrar que os sistemas mais fracos C2, D2 e E2 não possuem teoremas da forma $\Box A$ e, portanto, que são consistentes mesmo se adicionarmos o esquema $\Diamond A$ como teorema (em pelo menos um mundo deverá valer $\neg A$ e, da mesma forma, em pelo menos um mundo deverá valer $\neg\neg A$ isto para qualquer A). De um ponto de vista interpretativo, isto significa que podemos permitir a possibilidade de mundos nos quais tudo é possível (incluindo contradições), $Q$ portanto, é um conjunto de mundos com essas características (Este dispositivo foi sugerido por Lemmon em conversa com Saul Kripke como podemos constatar em [Lem66] p. 57).

**Definição 3.3.30.** Dado um enquadramento modal bissortido $\Re = \langle K, Q, U \rangle$, definimos $\Re^+$ (a álgebra em $\Re$), como $\langle M, \cup, \cap, -, P \rangle$, onde:

(i) $M = \wp K$

(ii) $\cup, \cap, -$ são como as operações (da teoria de conjuntos) união, intersecção e complemento restritas a M.

(iii) Para $A \in M$, $PA = \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$

**Teorema 3.3.31.** *Se $\Re$ é um enquadramento modal bissortido, então $\Re^+$ é uma álgebra modal.*

*Demonstração.* Que $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ é uma álgebra booleana é imediato da condição (ii) acima. Ainda, para $A, B \in \wp K$ temos:

$P(A \cup B) = \{x : \exists y(y \in A \cup B \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$
$= \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee \exists y(y \in B \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$
$= \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q\} \cup \{x : \exists y(y \in B \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$

$= PA \cup PB$
Portanto $\Re^+$ é uma álgebra modal.

$\square$

Seja $\emptyset$ o conjunto vazio. Por (iii) é imediato:

**Teorema 3.3.32.** *Na álgebra de qualquer enquadramento modal bissortido:*
*(i)* $P\emptyset = Q$
*(ii)* $Q \subseteq PA$*, para todo* $A$*.*

**Teorema 3.3.33.** *(Jósson-Tarski) Qualquer álgebra modal finita é isomorfa à álgebra de algum enquadramento modal bissortido finita.*

*Demonstração.* Seja $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ uma álgebra modal finita. Então, pelo teorema de representação de Stone, $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$ é isomórfico a álgebra de todos subconjuntos de um dado conjunto K. Seja $\varphi$ este isomorfismo. Para $A \subseteq K$, tomemos $P'A = \varphi P \varphi_{-1} A$ e $Q = \varphi(P0)$. Para $x, y \in K, Uxy$ sse $x \in P'\{y\}$. Seja $\Re = \langle K, Q, U\rangle$, que é evidentemente uma estrutura modelo. Mostraremos que $\mathfrak{M}$ é isomórfica a $\Re+$ sob $\varphi$. Seja $P^*$ a operação de possibilidade em $\Re_+$, ou seja, $P^*A = \{x : \exists y(y \in A0 \wedge Uxy\} \vee x \in Q\}$. É obvio que $\varphi$ é um isomorfismo com respeito a $\cup, \cap$ e $-$, portanto resta somente mostrar que $\varphi(Px) = P^*(\varphi x)$.

Primeiro provaremos que para $x \in M, \varphi(Px) \cup Q = \varphi(Px)$. Usando o teorema 3.3.7 (ii), $P0 \leq Px$ daí $Px \cup P0 = Px$. Desta forma $\varphi(Px) = \varphi(Px \cup P0) = \varphi(Px) \cup \varphi(P0) = \varphi(Px) \cup Q$, por definição de Q. Agora, considere um átomo $a \in M$. Claramente $\varphi a$ é um conjunto unitário $\{u\}$ para algum $u \in K$, e portanto temos:

$P^*(\varphi(a)) = \{x : \exists y(y \in \{u\} \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$
$= \{x : Uxu \vee x \in Q\}$
$= \{x : x \in P'u \vee x \in Q\}$
$= \varphi(Pa) \cup Q$
$= \varphi(Pa)$

Qualquer elemento $x \in M$ pode ser representado na forma $a_1 \cup ... \cup a_m$ para átomos $a_1, ..., a_m$. assim para $x \in M$:

$\varphi(Px) = \varphi(P(a_1 \cup ... \cup_m))$

$= \varphi(Pa_1 \cup ... \cup Pa_m$
$= \varphi(Pa_1) \cup ... \cup \varphi(Pa_m)$
$= P^*(\varphi(a_1)) \cup ... \cup P^*(\varphi(a_1))$
$= P^*(\varphi(a_1) \cup ... \cup \varphi(a_m))$
$= P^*(\varphi(a_1 \cup ... \cup a_m))$
$= P^*(\varphi(x))$

Logo, $\varphi$ é também um isomorfismo com respeito a P.

□

O teorema de Jósson-Tarski(outra versão): Qualquer álgebra booleana com operadores é imersível na álgebra complexa dos seus ultrafiltros (ver *Algebraic Tools for Modal Logic* [Ven01]). Este teorema é semelhante em termos de resultado ao teorema abaixo.

O resultado acima serve como argumento para o posicionamento de Bull e Segerberg com relação à semântica algébrica para a lógica modal (posicionamento este mencionado na introdução do presente trabalho). De fato, ele mostra que a semântica algébrica possui características desejáveis como a decidibilidade. Isto acontece pois podemos focar a atenção sobre as álgebras modais finitas. Portanto os processos de "busca de valores" não se transformam em buscas infinitas. Porém o resultado acima é referente ao caso geral, isto é, à álgebra modal. Resta-nos estender este resultado para os outros sistemas.

Para os outros cinco tipos de álgebras, precisamos de definições apropriadas sobre as correspondentes estruturas-modelo.

Definiremos um enquadramento modal bissortido *deôntico* como sendo um enquadramento modal bissortido $\langle K, Q, U \rangle$ na qual $U$ e $Q$ satisfazem a condição:

($\delta$) Para $x \in K, \exists y Uxy$ ou $x \in Q$.

um enquadramento modal bissortido *epistêmico* é um e.m. $\langle K, Q, U \rangle$ na qual $U$ e $Q$ satisfazem a seguinte condição:

($\varepsilon$) Para $x \in K, Uxx$ ou $x \in Q$.

(($\varepsilon$) é claramente equivalente à condição de que $U$ seja reflexiva em $K - Q$).

Finalmente, definimos uma e.m. *normal* (e.m.n.) como uma e.m. $\langle K, Q, U\rangle$ na qual $Q = \emptyset$. Poderíamos pensar em e.m. de um e.m. normal como sendo uma estrutura $\langle K, U\rangle$ ao invés de uma estrutura $\langle K, Q, U\rangle$: onde não aparecem mundos "estranhos" (queer). Podemos reescrever a condição (iii) para a álgebra sobre um e.m. normal do seguinte modo:

Para $A \in \wp K$:

(iii)' $PA = \{x : \exists y(y \in A \wedge Uxy)\}$

De maneira similar, para uma álgebra sobre um e.m. normal deôntica, a condição ($\delta$) pode aparecer na forma:

($\delta$)' para $x \in K, \exists y Uxy$

Para uma álgebra sobre um e.m. normal epistêmica, temos a condição que $U$ seja reflexiva. Assim as e.m.´s normais epistêmicas são idênticas com o que Kripke chama de e.m.´s normais.

**Teorema 3.3.34.** *Se $\Re$ é uma estrutura modelo deôntica (epistêmica, normal, etc.), então $\Re^+$ é uma álgebra deôntica (epistêmica, normal, etc.).*

*Demonstração.* Seja $\Re = \langle K, Q, U\rangle$ um e.m. deôntica. Para se provar que $\Re^+$ é uma álgebra deôntica é suficiente, em virtude do teorema 3.3.31, provar que $PK = K$. Mas $PK = \{x : \exists y(y \in K \wedge Uxy) \vee x \in Q\} = K$ por condição ($\delta$). Seja $\Re = \langle K, Q, U\rangle$ um e.m. epistêmica. Para se provar que $\Re^+$ é uma álgebra epistêmica é suficiente mostrar que (dado o teorema 3.3.31), para $A \subseteq K$, $A \subseteq PA$. Mas por ($\varepsilon$), para $x \in A, Uxx \vee x \in Q$, daí $\exists y(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q$, portanto $x \in PA$. Seja agora $\Re = \langle K, Q, U$ um e.m. normal. Para provarmos que $\Re^+$ é uma álgebra modal devemos (teorema 3.3.31), provar que $P\emptyset = \emptyset$. Entretanto, por teorema 3.3.32 (i), $P\emptyset = Q$, mas $Q = \emptyset$. Logo, temos o resultado esperado.

□

O teorema acima, tal como está apresentado, foi demonstrado originalmente por Lemmon no artigo *Algebraic Semantics for Modal Logic I* (ver [Lem66] p. 59). É interessante notar que no artigo *An extension Algebras* *and the Modal System T* [Lem60] Lemmon não chega a fazer o teorema de representação para T parando no teorema que mostra a obtenção de matrizes características para o referido sistema. Podemos então mostrar o teorema da representação.

**Teorema 3.3.35.** *Toda álgebra deôntica (epistêmica, normal, etc.) finita é isomórfica à álgebra de algum e.m. deôntica (epistêmica, normal, etc.) finita.*

*Demonstração.* Empregaremos a mesma terminologia e definições que foram usadas no teorema 3.3.33. A prova do isomorfismo é como a prova anterior. Resta, então, mostrar que $\Re$ é um e.m. deôntica (epistêmica, etc.). Primeiro suponha que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra deôntica. Dado que $P1 = 1$, pelo isomorfismo $\varphi P^*K = K$ ou $\{x : \exists y Uxy \vee x \in Q\} = K\}$. A condição $(\delta)$ se segue imediatamente, e $\Re$ é portanto um e.m. deôntica. Segundo, suponha que $\mathfrak{M}$ é uma álgebra epistêmica. Como para $x \in M, x \leq Px$, pelo isomorfismo $\varphi$, para todo $A \subseteq A, A \subseteq P^*A$. Portanto, em particular para $x \in K, \{x\} \subseteq P^*\{x\}$, daí $x \in P^*\{x\}$. Temos então que $\exists y(y \in \{x\} \wedge Uxy) \vee x \in Q$, e $(\epsilon)$ segue-se imediatamente resultando no fato de que $\Re$ é um e.m. epistêmica. Terceiro: suponha $\mathfrak{M}$ uma álgebra normal. Daí $P0 = 0$ e pelo isomorfismo $\varphi(P^*\emptyset) = \emptyset$. Por definição $Q = \varphi(P0) = P^*(\varphi(0)) = P^*\emptyset$, logo $Q = \emptyset$ e $\Re$ é um e.m. normal.

□

**Teorema 3.3.36.** $\vdash_{C2(D2,etc.)} A$
*(i) sse $A$ é satisfeita por $\Re^+$ para toda e.m. $\Re$ (e.m. dôntica, etc.).*
*(ii) sse $A$ é satisfeita por toda e.m. (e.m. deôntica, etc.) $\Re$ finita.*

*Demonstração.* Se $\vdash_{C2} A$, então $A$ é satisfeita por todas as álgebras modais (teorema 3.3.24), e portanto por $\Re^+$ para todas e.m. $\Re$ (teorema 3.3.31). Reciprocamente, se $A$ é um não-teorema de C2, então existem álgebras modais finitas falsifica quando esta fórmula (teorema 3.3.26), e daí $A$ é falsificada por $\Re^+$ para algum e.m. finita $\Re$ (teorema 3.3.33). Os outros casos são provados com emprego dos teoremas 3.3.34 e 3.3.35.

□

Falta-nos agora um resultado que mostre a equivalência desta completude para com a completude semântica (ao modo de Kripke). Conseguiremos por conseqüência direta do fato de que satisfatibilidade por $\Re^+$ para um e.m. $\Re$ é equivalente à validade em $\Re$ (no sentido kripkeano).

Em primeiro lugar, precisaremos de noções semânticas adequadas.

**Definição 3.3.37.** Um *modelo* para uma fbf $A$ em um e.m. $\langle K, Q, U\rangle$ é uma função binária $\Phi(v, k)$, onde $v$ corresponde às variáveis proposicionais de $A$ e $K$ aos elementos de $K$, cujo os valores se encontram no conjunto $\{T, F\}$.

A função definida acima consiste de uma valoração para cada variável proposicional de $A$ em cada mundo de $K$. Assim, nesta função $\Phi$ cada variável está associada a um conjunto de mundos de $K$. Este conjunto indica quais os mundos onde a variável em questão possui valor T. Da mesma forma, cada mundo está associado a um conjunto de variáveis a saber: as variáveis que são verdadeiras neste mundo.

**Definição 3.3.38.** Uma extensão única de $\Phi$, $\Phi'(B, k)$ (onde $B$ é uma subfórmula de $A$) é uma função definida como se segue:

(i) Se B é atômica (isto é, uma variável), $\Phi'(B, k) = \Phi(B, k)$
(ii) $\Phi'(\neg C, k) = T$ sse $\Phi'(C, k) = F$
(iii) $\Phi'(C \to D, k) = T$ sse $\Phi'(C, k) = F$ e/ou $\Phi'(D, k) = T$
(iv) $\Phi'(\Box C, k) = T$ sse $\Phi'(C, l) = T$ para todos $l \in K$ tal que $Ukl$ e/ou $k \notin Q$.

Como conseqüência desta definição, junto dom D1, D2 e D4, temos:

(v) $\Phi'(C \vee D, K) = T$ sse $\Phi'(C, l) = T$ para algum $l \in K$ e/ou $\Phi'(D, k) = T$
(vi) $\Phi'(C \wedge D, k) = T$ sse $\Phi'(C, k) = T$ e $\Phi'(D, k) = T$
(vii) $\Phi'(\Diamond C, k) = T$ sse $\Phi'(C, l)$ para algum $l \in K$ tal que $Ukl$ e/ou $k \in Q$

**Definição 3.3.39.** Dizemos que $A$ é verdadeira em um modelo $\Phi(v, k)$ para $l \in K$ em um modelo $\langle K, Q, U\rangle$ sse $\Phi'(A, l) = T$.

**Definição 3.3.40.** Dizemos que $A$ é válida em $\langle K, Q, U\rangle$ sse $A$ é verdadeira em todos modelos $\Phi(v, k)$ para todos $l \in K$ em $\langle K, Q, U\rangle$.

**Definição 3.3.41.** Dizemos que $A$ é válida sse $A$ é válida em todas e.m..

**Definição 3.3.42.** Dizemos que $A$ é D2- (E2, T(C)-, T(D)-, T-) válida sse $A$ é válida em todas e.m. deônticas (epistêmicas, normal, normal deônticas, normal epistêmicas).

Dada uma fbf $A$ qualquer e um modelo $\Phi(v, k)$ para $A$ em um e.m. $\Re = \langle K, Q, U\rangle$, podemos definir em termos de $\Phi$ uma valoração $\psi(\Phi)$ para as variáveis $v_1, ..., v_n$ de $A$ a partir de $\Re^+$ pela seguintes definições: $V(v_i) = \{x : x \in K \wedge \Phi(v_i, x) = T\}(1 \leq i \leq n)$, e $\psi(\Phi) = \langle V(v_i), ..., V(v_n)\rangle$. Reciprocamente, dada uma valoração $\psi = \langle A_1, ..., A_n\rangle(A_i \subseteq K)$ a partir de $\Re^+$ para as $n$ variáveis de $A$, podemos então definir um modelo $\Phi(\psi)(v, k)$´para $A$ em $\Re$, tomando $\phi(\psi)(v_i, x) = T$ sse $x \in A_i$. Para qualquer valoração $\psi$ de $\Re^+$ para as variáveis de $A$, e subfórmulas $B$ de $A$, seja $V_\Psi(B)$ o valor associado para $B$ em $\Re^+$ para a valoração $\psi$.

**Lema 3.3.43.** *(i) Seja $A$ uma fbf e $\Phi(v, k)$ um modelo para $A$ em $\Re = \langle K, Q, U\rangle$. Então para todo $x \in K\Phi'(A, x) = T$ sse $x \in V_{\psi(\Phi)}(A)$.*

*(ii) Seja $A$ uma fbf e $\psi$ uma valoração para as variáveis de $A$ a partir em $\Re^+$ para algum $\Re = \langle K, Q, U\rangle$. Então para todo $x \in K\Phi(\psi)'(A, x) = T$ sse $x \in V_\psi(A)$.*

*Demonstração.* (i) Por indução no comprimento de $A$. Se $A$ é uma das variáveis $v_1, ..., v_n$ o resultado vale por definição de $\psi(\Phi)$. Para o passo indutivo, suponha que o resultado vale para B e C. Primeiro notamos que pelos quantificadores lógicos:

$\forall y(Uxy \rightarrow \Phi'(B, y) = T) \leftrightarrow \forall y(Uxy \rightarrow y \in V_{\psi(\Phi)}(B))$

Agora suponha que $A$ tem a forma $B \rightarrow C$. Então para todo $x \in K$:

$\Phi'(B \rightarrow C, x) = T \leftrightarrow \Phi'(B, x) = F \vee \Phi'(C, x) = T$
$\leftrightarrow x \notin V_{\psi(\Phi)}(B) \vee x \in V_\psi(\Phi)(C)$
$\leftrightarrow x \in (-V_{\psi(\Phi)}(B) \cup V_{\psi(\Phi)}(C))$
$\leftrightarrow x \in V_{\psi(\Phi)}(B \rightarrow C)$

Uma prova similar é obtida se $A$ tem a forma $\neg B$. Suponha finalmente que $A$ tem a forma $\Box B$. Então, para todo $x \in K$:

$\Phi'(\Box B, x) = T \leftrightarrow \forall y(Uxy \rightarrow \Phi'(B, y) = T \wedge x \notin Q$
$\leftrightarrow \forall y(Uxy \rightarrow y \in V_{\psi(\Phi)}(B)) \wedge x \notin Q$ (por (1))
$\leftrightarrow x \in NV_{\psi(\Phi)}(B)$
$\leftrightarrow x \in V_{\psi(\Phi)}(\Box B)$.

A prova de (ii) é similar: notemos que o resultado vale para o caso onde $A$ é uma das variáveis $v_1, ..., v_n$ pela definição de $\Phi(\psi)$.

□

O principal teorema acerca da aproximação entre álgebra e semântica pode agora ser enunciado:

**Teorema 3.3.44.** *Seja $\Re = \langle K, Q, U \rangle$ um e.m., e $A$ uma fbf qualquer. Então $A$ é satisfeita por $\Re^+$ sse $A$ é válida em $\Re$.*

*Demonstração.* Seja $A$ uma fbf satisfeita por $\Re^+$, e considere um modelo $\Phi(v, k)$ para $A$ em $\Re$. Então $V_{\psi(\Phi)}(A) = K$, daí pelo lema (i) $\Phi'(A, x) = T$ para todo $x \in K$. Assim $A$ é válida em $\Re$. Reciprocamente, suponha que $A$ seja válida em $\Re$ e considere uma valoração $\psi$ para suas variáveis. Então, para todo $x \in K$, $\Phi(\psi)'(A, x) = T$, daí pelo lema (ii) para todo $x \in Kx \in V_\psi(A)$, portanto $V_\psi(A) = K$ e $A$ é satisfeita por $\Re^+$.

□

**Corolário 3.3.45.** $\vdash_{C2(D2,E2,etc.)}$ *$A$ sse $A$ é válida (D2-válida, E2-válida, etc.).*

*Demonstração.* Usando-se o teorema 3.3.36 (i), o teorema 3.3.44 e as definições de validade obtemos o resultado de maneira direta. □

# Capítulo 4

# Semântica algébrica para outros sistemas e para a lógica multimodal

## 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é generalizar os resultados obtidos no capítulo anterior. Ao contrário da grande parte dos resultados do capítulo 3, os resultados abaixo não aparecem em nenhum dos trabalhos citados nesta dissertação.

Primeiramente apresentaremos, de maneira resumida, o contexto histórico do desenvolvimento das lógicas e de suas semânticas algébricas no século XX para depois apresentarmos as demonstrações formais propostas.

### 4.1.1 Contexto Histórico

Os primeiros trabalhos algébricos com intuitos lógicos foram desenvolvidos por George Boole em meados do século XIX. Em seu trabalho (e no de outros algebristas do século XIX) a distinção entre uma linguagem formal e uma semântica matemática rigorosa não era delineado. Estes algebristas faziam, na verdade, teorias algébricas e não teorias da lógica (ver *Propositional Consequence Relations and Algebraic Logic* [Jan06]).

Os trabalhos de Frege e Russsell introduziram uma perspectiva diferente no modo de se pensar e de se fazer a lógica. Nestes trabalhos o sistema lógico é dado por uma linguagem formal e um cálculo dedutivo (um conjunto de axiomas e um conjunto de regras de inferência). Este par é comumente chamado de *sistema lógico-dedutivo* e as fórmulas que podemos derivar a partir dele recebe o nome de **teoremas** do sistema.

Os sistemas introduzidos por Frege e Russell foram os conhecidos *sistemas da lógica clássica*. Logo após tais sistemas terem sido definidos apareceram os sistemas conhecidos como não-clássicos. A primeira tentativa realmente influente de se introduzir uma lógica diferente da lógica clássica foi feita dentro da tradição Frege-Russell de se apresentar um sistema de dedução lógico sem qualquer semântica. Tais sistemas ficaram conhecidos mais tarde como *sistemas de Lewis*. Outro importante passo para a constituição de sistemas não-clássicos foi a axiomatização da lógica intuicionista feita por Heyting em 1930 (*Propositional Consequence Relations and Algebraic Logic* [Jan06] p.1).

A idéia subjacente aos sistemas lógico-dedutivos desenvolvidos por Frege e Russell era a de que seus teoremas e deduções corresponderiam (intuitivamente) às verdades lógicas ou às deduções válidas. A noção de conseqüência lógica não era central nestes trabalhos. Este enfoque influenciou bastante a maneira de se estudar e pesquisar lógica (tanto a lógica clássica quanto a não-clássica). Tarski foi quem reverteu este quadro recolocando o conceito de conseqüência lógica (semântica e sintática) numa posição central em suas pesquisas. A partir disto, a teoria geral da algebrização de lógicas tem se desenvolvido em torno deste conceito.

Os primeiros esforços para o desenvolvimento de uma teoria geral da algebrização das lógicas pode ser encontrado nos estudos sobre a classe de lógicas implicativas (*implicative logic*) de Rasiowa (ver *An algebraic approach to non-classical logics* [Ras74]) e na apresentação sistemática de Wójcicki das investigações sobre a natureza geral da lógica proposicional (ver *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations* [Wój88]). Tais esforços seguem os estudos de Tarski, Lindenbaum, Łukasiewicz e outros autores da primeira metade do século XX.

## 4.2 O sistema G

O próximo passo deste trabalho é estender os resultados já obtidos para os sistemas G, $G^{mnpq}$ e alguns sistemas multimodais. Para tal, usaremos o método exposto acima usado por Lemmon em *Algebraic Semantics for Modal Logic I and II* [Lem66]. Usaremos as principais definições e grande parte dos teoremas apresentados no capítulo anterior

Definiremos a seguir o esquema de axioma G. Depois, dada a definição do esquema de axioma G passaremos para a definição do sistema G. Resumidamente, o sistema G é o sistema K mais o esquema de axioma G, ou seja, o esquema derivado de $G^{mnpq}$ quando todos os índices possuem valor 1.

Como já vimos anteriormente (capítulo 1 do presente trabalho) o esquema de axioma G pode ser apresentado da seguinte maneira:

G: $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$

Este esquema é uma instanciação do esquema $G^{mnpq}$ (chamado "incestual" por Lemmon e Scott, nas "Lemmon Notes"). Lembrando que o esquema $G^{mnpq}$ está definido neste trabalho como $G^{mnpq}$ (ver capítulo 1):

$G^{mnpq}$: $\Diamond^m\Box^n A \to \Box^p\Diamond^q A$

É interessante observarmos que todos os esquemas supracitados como extensão de K são casos particulares de $G^{mnpq}$. Desta forma T é o caso em que: $m, p, q = 0, n = 1$; $4^n$ o caso em que $m, q = 0, p = n + 1$; e o caso em que: $q = 0, m, n, p = 1$; e assim por diante.

definiremos agora um sistema que será chamado de sistema G. Nomenclatura esta baseada no nome do esquema de fórmula $G^{mnpq}$. Para isto usamos os axiomas já mencionados anteriormente assim como as regras de inferências definidas para os sistemas já trabalhados (C2, D2, etc.).

O sistema G pode então ser definido da seguinte forma:

**Definição 4.2.1.** Seja G a seguinte fórmula: $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$, ou seja, G é a instância do esquema $G^{mnpq}$ onde todos os parâmetros (m, n, p e q) recebem o valor 1.
O sistema G é o seguinte sistema:

G = [A1 - A4, G; R1, R3]

Este sistema será a base de nossa generalização. A partir da demonstração de completude, com relação à semântica algébrica, para tal sistema é que poderemos fazer a demonstração da completude, com relação à semântica algébrica, para todas os sistemas resultantes do acréscimo de instâncias do esquema $G^{mnpq}$ como axioma.

### 4.2.1 A álgebra modal G

No capítulo 3 desta dissertação definimos os principais elementos para se trabalhar com uma semântica algébrica para a lógica modal. Vimos como relacionar matrizes a essas álgebras e como obter resultados semânticos importantes a partir desta relação. Usaremos abaixo o mesmo método utilizado no capítulo 3 para obter os resultados para os sistemas G, $G^{mnpq}$ e para indicar a obtenção dos resultados para os sistemas multimodais.

Tomemos a definição de álgebra modal apresentada em 3.3.5 e definiremos abaixo a álgebra do sistema normal G da seguinte forma:

**Definição 4.2.2.** A álgebra modal G é uma álgebra modal normal (ver definição 3.3.21) na qual vale:

$$NP - x \cup NPx = 1$$

Tentaremos mostrar a seguir como poderíamos conseguir uma semântica algébrica para o sistema G usando o método apresentado no capítulo 3 e proposto por Lemmon [Lem66].

Começaremos pela relação entre as matrizes e o sistema G.

Usaremos o termo matriz para nos referirmos a uma estrutura tal qual foi definida em 3.3.8. A definições 3.3.9, 3.3.10 e 3.3.11 também serão de suma importância para a relação entre o sistema G e as matrizes.

**Teorema 4.2.3.** *Se* $\vdash_G A \leftrightarrow B$*, então* $\vdash_G ...A... \leftrightarrow ...B...$ *(onde ...B... resulta de ...A... por substituição de zero ou mais ocorrências de A em ...A...*

*por B)*

*Demonstração.* Prova: A prova se dá por indução no tamanho de ...A..., fazendo usos essenciais de R2 e R3.

□

O teorema acima confirma a possibilidade de substituição por equivalentes demonstráveis para o sistema G.

Os resultados do teorema 3.3.7 valem para a álgebra G uma vez que valem para qualquer álgebra modal.

Usando o teorema 3.3.12 podemos estender o corolário 3.3.13 da seguinte forma:

**Corolário 4.2.4.** *Existe uma matriz característica para cada um dos sistemas C2, D2, E2, T(C), T(D), T e G.*

Seguindo o método de Lemmon, sabemos que o corolário acima não é suficiente para construirmos uma semântica algébrica interessante para o sistema G. Precisamos de um resultado que especifique a matriz a ser relacionada com este sistema. Esta matriz específica tem que ser uma matriz regular característica para este sistema. Portanto precisamos do seguinte resultado:

**Teorema 4.2.5.** $\vdash_G \Box\Diamond\neg A \cup \Box\Diamond A$

**Teorema 4.2.6.** *A matriz $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma G-matriz regular sse $\langle M, \cup, \cap, -, P\rangle$ é uma álgebra G e $d = 1$.*

*Demonstração.* A prova se segue do teorema 3.3.18 acrescentado com a seguinte condição: Uma G-matriz regular preenche a condição $NP - x \cup NPx = 1$ seguido do resultado anterior. Chamemos a G-matriz de $\mathfrak{M}_G$. O teorema 3.3.23 nos mostra como relacionar álgebras e matrizes. Daí, podemos relacionar uma álgebra modal G à matriz regular característica $\mathfrak{M}_G$. Para tanto precisamos provar as duas parates do teorema acima.

Primeiro: Matriz $\Rightarrow$ Álgebra.

(a) Suponha que a matriz $\mathfrak{M}_G$ seja regular.

(b) A Matriz verifica os axiomas booleanos (pois o sistema G contém a lógica proposicional). O caso $P(x \cup y) = (Px \cup Py)$ foi mostrado ao se provar o teorema para o sistema C2.

(c) d = 1 Vale (foi provado para o caso C2).

(d) $NP - x \cup NPx = 1$ Vale pois $\vdash_G \Box\Diamond\neg A \vee \Box\Diamond A$

Segundo: Álgebra $\Rightarrow$ Matriz

(a) Os esquemas de axiomas A1-A3 são satisfeitos por $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, P\rangle$.

(b) A matriz-função de A4 também é satisfeita. O mesmo se dá para R1 (cf. [Lem66]).

(c) A regra R3:

seja x = 1.
$Nx = -P-x = -P-1 = -P0 = -0$ (pois é normal $P0 = 0$), daí $-0 = 1$

A função-matriz de G

$NP - x \cup NPx$

Mostraremos que esta função tem valor 1 na álgebra.

(i) $N1 = 1$

$P0 = 0$ sse $-P0 = -0$ sse $N - 0 = -0$ sse $N1 = 1$

(ii) Suponha que $NP - x = 0$

$NP - x = 0$ sse $PNx = 1$, como $P0 = 0$ temos $Nx = -0$ sse $Nx = 1$, como $N1 = 1$ concluímos $x = 1$

(iii) Se $x = 1$ então vejamos o que se dá no caso $NPx$

$Px = -0$ pois $x = 1$ daí $Px = 1$ e portanto $NPx = 1$ pois $N1 = 1$.

□

Pelo teorema teorema acima o sistema G possui uma matriz regular característica tal que D possui apenas um elemento.

Aplicamos agora o teorema 3.3.24 (adaptado) a saber:

**Teorema 4.2.7.** $\vdash_{C2(D2,E2,K,D,T,G)}$ *A sse A é satisfeita por todas álgebras modais (deôntica, epistêmica, normal, normal deôntica, normal epistêmica) e normal G.*

*Demonstração.* Pelo teorema 4.2.6 o sistema G é satisfeito por qualquer álgebra modal normal G. Reciprocamente, qualquer não teorema de G é falsificado pela G-matriz regular característica de G (corolário 4.2.4 e definição de matriz regular característica 3.3.11 e 3.3.17). e assim as álgebras modais normais G equacionam a fórmula, correspondente a este não teorema, ao valor 0 (teorema 4.2.6).

□

Temos, portanto, a completude algébrica do sistema G.

### 4.2.2 A completude Algébrica para classe de sistemas $G^{mnpq}$

A seguir estenderemos o resultado obtido para o sistema G ao sistema $G^{mnpq}$. Usaremos para tal, não obstante, o mesmo método, ou seja, construiremos uma matriz, uma matriz característica e depois definiremos uma álgebra a partir desta matriz característica. Tantos as matrizes como a álgebra serão baseadas no esquema de axioma $G^{mnpq}$. Para a obtenção da completude generalizada para todos os sistemas da classe $G^{mnpq}$ provaremos o mesmo teorema central usado para os casos dos sistemas vistos anteriormente.

Uma das principais dificuldades para a obtenção desta prova é o fato de estarmos tratando agora de um esquema de axioma no qual aparecem parâmetros. Esses parâmetros são interpretados como iterações de operadores modais de um mesmo tipo. Assim, uma fórmula na qual o operador de necessidade é iterado a ele mesmo cinco vezes (é necessário que é necessário que é necessário...etc) é representado da seguinte forma:

$\Box^5 A$

O nosso esquema $G^{mnpq}$ possui uma forma generalizada para estes parâmetros. Portanto, para uma prova sobre a classe de sistemas precisaremos de resultados gerais.

Nosso objetivo é obter um resultado sobre uma classe de sistemas e não sobre um único sistema, para tanto iremos definir tal classe.

### 4.2.3 A classe de sistemas $G^{mnpq}$

A classe de sistemas $G^{mnpq}$ pode ser definida como sendo um conjunto de sistemas que contém K mais uma instância do esquema $G^{mnpq}$. Como já vimos anteriormente tal esquema pode ser apresentado da seguinte maneira:

$G^{mnpq}$: $\Diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^p \Diamond^q A$

Todos os sistemas modais até agora apresentados fazem parte desta classe (com exceção dos sistemas não normais). O sistema minimal K é um caso interessante no qual todos os parâmetros recebem valor zero. Os demais casos já foram observados anteriormente.

Para a definição da classe de sistemas modais $G^{mnpq}$ usaremos os axiomas já mencionados anteriormente assim como as regras de inferências definidas para os sistemas já trabalhados (C2, D2, etc.). A classe de sistemas modais $G^{mnpq}$ pode então ser definida da seguinte forma:

**Definição 4.2.8.** $G^{mnpq} = \{A1 - A4, G^{m,n,p,q}; R1, R3\} \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}$

Onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

### 4.2.4 A álgebra modal G

Definiremos a classe de álgebras com relaçãos à classe de sistemas modais $G^{mnpq}$ da seguinte forma:

**Definição 4.2.9.** A classe de álgebras correspondentes aos sistemas da classe $G^{mnpq}$ é formada pelas algebras modais normais nas quais vale:

$$N^n P^m - x \cup N^p P^q x = 1$$

Onde fórmula $N^n P^m - x \cup N^p P^q x$ representa a generalização da função matriz da classe de fórmulas que são tomadas como axioma para os sistemas da classe $G^{mnpq}$.

A prova de completude para todos os sistemas de tal classe segue a mesma estrutura das provas para os sistemas vistos anteriormente. Temos, porem, que provar alguns resultados gerais.

**Teorema 4.2.10.** $\vdash_{G^{m,n,p,q}} \Box^m \Diamond^n \neg A \vee \Box^p \Diamond^q A$

*Demonstração.* A prova de segue-se de modificações simples no axioma $G^{mnpq}$ e de regras modais generalizadas. □

**Teorema 4.2.11.** $N^n P^m - x \cup N^p P^q x = 1$

*Demonstração.* A prova de (ii) depende de alguns resultados que mostraremos mais abaixo.

□

**Teorema 4.2.12.** *Para qualquer álgebra modal normal vale:* $N^n 1 = 1$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *(conjunto dos números naturais).*

**Teorema 4.2.13.** *Para qualquer álgebra modal normal vale:* $P^m 0 = 0$ *para* $m \in \mathbb{N}$ *(conjunto dos números naturais).*

As provas dos dois teoremas acima são simples. Basta usar o método de indução sobre os parâmetros.

Como o sistema base, ou seja K, é um dos sistemas já visto, temos apenas que estender a prova da completude algébrica deste sistema para a classe $G^{mnpq}$. Para isso é necessário e suficiente provar a seguinte equação:

$N^nP^m - x \cup N^pP^qx = 1$ para cada uma das instâncias $m, n, p, q \in \mathbb{N}$

Prova:

Se $N^nP^m - x = 1$ não temos que verificar coisa alguma.

Suponha $N^nP^m - x = 0$. Usando 4.2.12 e 4.2.13 temos $-P^nN^mx = 0$. Portanto $N^mx = 1$ pois $P^m0 = 0$ por 4.2.13. Concluímos disso que $x = 1$.

Agora temos que ver dois casos:

(1) $N^pP^qx = 1$

(2) $N^pP^qx = 0$

O caso (1) é trivial. Já o caso (2) temos: $P^qx = 0$ pois $N^p1 = 1$ daí $x = 0$ pois $P^q0 = 0$ o que contradiz $x = 1$ portanto vale (1).

O resultado acima nos dá a completude algébrica para classe dos sistemas modais normais $G^{mnpq}$.

## 4.3 A semântica algébrica para os sistemas multimodais G(a, b, c, d)

A seguir definiremos alguns conceitos que seriam fundamentais para a demonstração de completude algébrica para os sistemas multimodais normais da classe G(a, b, c, d) (à maneira como Lemmon fez para os sistemas fracos). Entretanto não faremos a demonstração de completude para tais sistemas deixando este problema como proposta para trabalhos futuros.

Se olharmos o presente texto como parte de um projeto de generalização dos resultados algébrico-semânticos para a lógica modal, poderemos propor os seguintes trabalhos. Primeiro, a partir dos resultados acimas:

(a) definir todos os sistemas da classe $G^{mnpq}$ que não são normais;

(b) mostrar a completude (ou incompletude) algébrica de todos os sistemas modais não-normais da classe $G^{mnpq}$;

(c) definir lógicas multimodais normais e não-normais e suas respectivas álgebras e

(d) demonstrar a completude (ou incompletude) algébrica dos sistemas multimodais normais e não-normais.

Com relação ao item (a), bastaria usarmos as definições aqui contidas sobre álgebras normais e generalizar as álgebras modais para os casos em que não vale a definição 3.3.21.

Com relação ao item (b), os casos gerais seriam, a princípio, mais complicados que os do caso normal uma vez que usamos o fato de que $P0 = 0$ para fazer a demonstração de completude.

O item (c) pode ser dividido em dois subitens. O primeiro seria com relação à definição de sistemas multimodais não-normais. Este pode ser facilmente executado. Basta construirmos sistemas multimodais tais como os definidos acima onde não valem a regra de necessitação multimodal, substituindo-a pela regra mais fraca similar à regra (R2) ou regra 2 dos sistemas fracos monomodais definidos no capítulo 3. O segundo subiotem trata da definição de álgebras multimodais. A princípio poderíamos pensar tais álgebras como ABO (álgebras booleanas com operadores) com mais de um operador. Tais operadores poderíam ser indexicados tendo assim um ponto de partida para se pensar as demais definições e os resultados algébricos para tais sistemas. Portanto, estruturas algébricas multimodais seriam do seguinte tipo:

$$A^m = \langle M, \cup, \cap, -, 1, P_{i \in I} \rangle$$

Onde M seria uma álgebra booleana com relação aos operadores $\cup$, $\cap$ e $-$, $A^m$ seria álgebra multimodal em questão e para cada $P_{i \in I}$ e $x, y \in M$ teríamos:

$$P_i(x \cup y) = P_i x \cup P_i y$$

A etapa mais difícil do projeto acima definido seria, portanto, demonstrar a completude algébrica dos sistemas multimodais não-normais. A completude algébrica dos sistemas modais normais G(a, b, c, d) parece (conjectura) ser algo parecido com a completude para a classe de sistemas $G^{mnpq}$.

Por fim poderíamos pensar uma classe de sistemas multimodais parcialmente normais e parcialmente não normais de tal forma que alguns operadores $P_{i \in I}$ fossem normais enquanto outros não.

# Capítulo 5

# Mundos possíveis *versus* semântica algébrica: o impacto filosófico de uma semântica algébrica para a lógica modal

## 5.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos a construção filosófica do conceito de mundo possível e a semântica algébrica para as lógicas modais de um ponto de vista filosófico. Analisaremos criticamente a semântica dos mundos possíveis e mostraremos os ganhos e perdas que uma semântica algébrica teria com relação à filosofia.

## 5.2 Os conceitos modais e os mundos possíveis

### 5.2.1 Questões ontológicas preliminares

É bastante usual encontrarmos o conceito de 'mundos possíveis' quando lemos um livro ou um artigo de filosofia analítica contemporânea. Isto acontece, não somente na metafísica analítica, mas em áreas bem diversas da filosofia como por exemplo a filosofia da linguagem, a filosofia da ciência, epistemologia e ética. O conceito de mundos possíveis é muito útil dentro da filosofia contemporânea e isto é de comum acordo entre os filósofos. Há, porém, um desacordo com relação à interpretação própria deste conceito. Segundo certas teorias, existe uma pluralidade de mundos possíveis. Um destes mundos é o nosso mundo atual, ou seja, nós e o nosso universo físico a nossa volta. Os outros mundos são meras possibilidades contendo meramente seres possíveis tais como cavalos alados e pedras falantes (ver *Concrete Possible Worlds* de Phillip Bricker [Bri] e *On the Plurality of Worlds* de David Lewis [Lew86]). A dificuldade com relação ao conceito de mundos possíveis está na tentativa de conciliar a ontologia concernente à aceitação da existência destes conceitos com as idéias básicas da lógica. Entre estas idéias básicas está a de não comprometimento ontológico. Um dos responsáveis por tal critério foi o filósofo austríaco Alexius Meinong (1853-1920). Meinong defendia que o fato de podermos pensar objetos que não existem indicaria uma classe de objetos com uma existência mais "fraca" que a existência dos objetos atuais. Entre os filósofos que defendiam a consistência da teoria meinongiana dos objetos podemos citar Terence Parsons e Roderick Chisholm. Outros filósofos, porém, passaram a defender que tal teoria seria de muita utilidade (e. g. Karel Lambert). A existência conforme esta teoria é uma propriedade do objeto tal como sua cor. Meinong afirma que podemos dividir os objetos em três categorias com relação à sua ontologia:

Existentes (Existenz, verbo: existieren): realidade atual (Wirklichkeit) que denota a existência material e temporal de um objeto.

Substanciais (Bestand, verbo: bestehen): que denotam a existência não-temporal de um objeto.

Dados (estar aí) (Gegebenheit, como no uso em Alemão de *es gibt*, i.e. há, está dado) denota ser um objeto e não possuir existência.

As concepções de Meinong fizeram ressurgir um certo platonismo dentro do pensamento logicista. "Por Platonismo, compreende-se, em geral, a concepção filosófica que afirma a existência de entidades abstratas, ou seja, entidades que não são materiais, como objetos físicos, nem espaço-temporais, como eventos ou processos, nem mentais, como representações ou sentimentos." [Ima05] A semântica dos mundos possíveis é bastante coerente com tal idéia. Russell parece aderir a este tipo de pensamento quando defende a subsistência de proposições e conceitos. Assim como Meinong e Moore, Russell concebe proposições como complexos não lingüísticos e não mentais, independentes do sujeito cognitivo e lingüístico.

A questão sobre a existência de objetos não atuais é semelhante à questão da existência de objetos meramente universais e nos faz lembrar a discussão medieval entre realistas e nominalistas. Segundo Guido Imaguire em seu artigo *O Platonismo de Russell na metafísica e na matemática* [Ima05], Russell será o responsável por fazer uma passagem do tipo de pensamento mais platônico para um pensamento mais reducionista (diferente do nominalismo) com relação à ontologia subjacente das teorias em lógica. Em tal artigo temos uma análise do surgimento e da superação do Platonismo (tal como o desenvolvido por Meinong) em B. Russell, tanto na sua filosofia da matemática como na sua metafísica. Primeiramente o artigo apresenta os argumentos que levaram Russell a aderir ao chamado "Platonismo Proposicional" - posição que será tecnicamente relevante na definição de números. Na seção seguinte deste artigo, discute-se até que ponto a teoria das descrições definidas determina, necessariamente, uma adesão ao nominalismo, e as dificuldades que surgem para o logicismo conseqüentes do abandono do platonismo. Finalmente, mostra-se como a posição madura de Russell caracteriza-se mais como um reducionismo do que propriamente como um nominalismo, e como este é fundado no princípio do mínimo vocabulário.

Após 1905 Russell passa a fazer concessões ao platonismo. No seu trabalho *The Problems of Philosophy* (1912) Russell atribui aos universais diádicos (relações) um tipo de ser diferente do ser atribuído às coisas materiais e do ser da consciência e dos "sense data". Ele afirma ainda que a doutrina das idéias de Platão é uma das teorias com maior sucesso para explicar tal tipo de ser. A posição madura de Russell é, por conseguinte, intermediária entre o platonismo e o nominalismo. A decisão acerca de um mínimo vocabulário tem a ver com a decisão sobre a subsistência ou não de um determinado universal e se dá a partir de uma análise lógico-semântica. Conforme o exposto no artigo de Imaguire um vocabulário para uma determinada teoria é dito mínimo quando ele satisfaz duas condições: (1) nenhum termo do vocabulário pode ser definido com auxílio dos outros termos do vocabulário; e (2) todas as proposições da teoria podem ser formuladas com todos os termos do vocabulário, mas não com apenas um subconjunto dele.

> "um vocabulário com os termos pai, filho, tio, primo etc. poderia ser reduzido ao vocabulário progenitor. Na filosofia da matemática a teoria das descrições torna possível construir um vocabulário mínimo lógico que não contenha os termos "classe", "o" ou os numerais. A existência de uma entidade x não pode ser

> consistentemente negada por uma determinada teoria se o termo que denota x pertence ao vocabulário mínimo desta teoria. Em Russell está, portanto, a origem do famoso princípio de comprometimento ontológico de uma teoria, reafirmado por Quine." (Guido Imaguire, *O Platonismo de Russell na metafísica e na matemática* [Ima05] p. 24)

Portanto, a partir das propostas inferidas das teorias de Russell sobre as descrições tivemos um certo conflito entre o platonismo inicial e o reducionismo (mais pragmático).

Ao aplicar o princípio acima ao problema dos universais podemos concluir que os universais não são expressos adequadamente em qualquer que seja a teoria. Isso se dá pois alguns termos universais seriam expressos por termos que não são nomes próprios lógicos. Segundo Russell, Hume e Berkeley não perceberam isso porque ignoraram em suas análises os universais diádicos ou relacionais.

Todavia, Russell não se compromete com uma rejeição definitiva dos universais. O argumento é o seguinte: a tese nominalista de que os universais são meros nomes não é sustentável, afinal, se um termo geral é aplicável a x e a y, então, mesmo ignorando o fato de que x e y devem partilhar um universal comum, deve subsistir entre x e y uma relação de semelhança, e, então, no mínimo, esta relação é um universal.

Quine criticou o argumento acima. O termo "é similar" deveria aparecer como valor de uma variável quantificada, caso contrário não haveria nenhum comprometimento ontológico com uma entidade abstrata correspondente. Daí pode-se falar de uma semelhança entre x e y sem com isso haver um comprometimento com a existência de tal semelhança. Para nominalistas como Quine tal argumento de Russell é um argumento falacioso.

Russell, ainda que tenha "semantizado" a ontologia com seu princípio do mínimo vocabulário, não concordaria com a semantização radical proposta por Quine. Mesmo sem quantificar existencialmente sobre o predicado diádico da semelhança, a predicabilidade verdadeira de um termo geral aos termos que denotam x e y só pode ser justificada se x e y forem ontologicamente similares. A similaridade tem um fundamento in re. Existem várias maneiras de tratar o debate acima com relação aos mundos possíveis. E é isso que será apresentado abaixo. Analisaremos a proposta da semântica algébrica como sendo uma alternativa para se justificar a lógica modal perante uma crítica do tipo quineana. Com relação a este primeiro item podemos notar que a semântica algébrica responde bem a tais críticas uma vez que supera a idéia de compromisso ontológico. Além disto, esta semântica não faz menção a mundos possíveis. Dessa forma podemos supor seu comprometimento ontológico como sendo semelhante ao da lógica proposicional.

### 5.2.2 O tipo de verdade e os mundos possíveis

O conceito de verdade que se relaciona ao de mundos possíveis pode ser dividido em duas classes: 'verdade categórica' e 'verdade modal'. A verdade categórica descreve como as coisas são (factualmente). A verdade modal descreve como as coisas poderiam ser ou como elas deveriam ser (o que é possível e o que é necessário) (ver [Kri63]). A verdade categórica podem ser testadas empiricamente. Podemos por exemplo verificar empiricamente se no mundo atual uma determinada mesa é feita ou não de madeira. Isto não se dá quando passamos para as proposições modais. Neste caso os conceitos modais transcendem os conceitos categóricos. Os conceitos modais são problemáticos numa perspectiva que os categóricos não são, no seguinte sentido. Não há um teste empírico que verifique se uma mesa é necessariamente feita de madeira ou não. Através da observação podemos descobrir apenas as propriedades categóricas dos objetos, não suas propriedades modais (ver [Hum80]). Portanto, seria um problema para os empiristas tratar dos conceitos modais, uma vez que estes defendem, de um modo geral, que todo nosso conhecimento tenha como origem nossos testes empíricos ou nossas percepções sensíveis. Em todo o caso (independentemente de sermos empiristas ou não) os conceitos modais são um tanto misteriosos. Não parece que tais conceitos façam parte da constituição do nosso mundo atual. O que fazer diante disto? poderíamos tomar uma posição eliminativista com relação aos conceitos modais? Poderíamos considerar os conceitos modais como sendo ininteligíveis? Como atribuir valores lógicos às proposições modais? Como raciocinar com proposições modais? (cf. *From a Logical Point of View* [Qui53] e *The Philosophical Significance Modal Logic* [Ber60]) Se quizermos salvar uma boa parte do que foi feito em filosofia analítica nas últimas décadas devemos aceitar de alguma forma que as proposições modais são significativas. Desta forma, torna-se latente uma pesquisa filosófica que analise as proposições modais tal como providenciar condições de verdade para estas proposições sem que estas condições invoquem mais modalidades. A semântica algébrica neste caso pode ser uma saída. Para tal tipo de semântica as proposições modais são vistas ainda como proposições categóricas. Ao considerarmos tal semântica, as respostas com relação as questões eliminativistas a respeito das lógicas modais passam a ser negativas. A semântica algébrica portanto pode ser vista, a partir deste aspecto, como sendo uma maneira de justificar a existência de tal lógica para os empiristas mais radicais (como por exemplo Quine). Em nosso trabalho, podemos fazer um paralelo entre duas perpectivas: uma metafísica e outra epistâmica. Neste caso a verdade categórica estaria no âmbito da perpectiva metafísica enquanto que a semântica dos mundos possíveis seriam visto como a perspectiva epistêmica do ponto de vista modal.

Os problemas levantados acima nos sugerem uma solução bem natural, a saber: tais problemas podem ser tratados se encontrarmos uma maneira de traduzir proposições modais em proposições correspondentes categóricas. De fato, as proposições modais podem ser parafraseadas por proposições categóricas (usando o conceito de mundos possíveis) da seguinte maneira. Por exemplo: se, ao invés de 'é possível a existência dos unicórnios', usarmos a seguinte proposição, 'em algum mundo possível os unicórnios existem'. Noutro caso, ao invés de: 'é necessário que os seres humanos sejam animais', usarmos: 'em todos os mundos possíveis todos os seres humanos são animais'. Quando usamos tais paráfrases, os operadores modais 'possível' e 'necessário' tornam-se quantificadores existenciais e universais respectivamente. Estas paráfrases são algo mais do que pressuposições ontológicas. Elas são maneiras de analisarmos proposições modais. Conseguimos, deste modo, uma espécie de redução das proposições modais às proposições categóricas (ver *A Theory of Conditionals* de Robert Stalnaker [Sta68] e *Counterfactuals* de David Lewis [Lew73]). A introdução do conceito de mundos possíveis porém, nos trazem mais perguntas do que respostas. O que são os mundos possíveis? Qual a sua natureza e como eles se relacionam ao nosso mundo atual?

Segundo os filósofos que aceitam a existência de mundos possíveis temos a seguinte divisão acerca da natureza destes (mundos possíveis): eles podem ser abstratos ou concretos. Usaremos os termos 'abstrato' e 'concreto' deliberadamente. Todavia, existem quatro formas diferentes de se caracterizar a distinção abstrato/concreto (ver *On the Plurality of Worlds* [Lew86]).

(C1) Por meio de exemplos: Mundos (tipicamente) possuem partes que são paradigmaticamente concretas, tais como cavalos, elétrons e planetas.

(C2) Por meio de combinação: Mundos são particulares e não universais; são indivíduos e não conjuntos.

(C3) Por negatividade: Mundos não possuem partes que estão em relações causais espaço-temporais com um outro mundo.

(C4) Por meio de abstrações: Mundos são completamente determinados; eles não são abstrações de quaisquer coisas.

Chamaremos mundos de 'concretos' se eles satisfazem todas as quatro condições listadas acima. O 'espaço lógico' será a denominação do conjunto de mundos concretos. Os objetos contidos no espaço lógico (os mundos e suas partes concretas) são chamados 'possibilia'.

De certa forma podemos pensar os mundos possíveis concretos como sendo grandes planetas dentro do mundo atual. Dois mundos concretos não possuem objetos concretos em comum (os mundos não se sobrepõem). Assim, usamos a idéia de contraparte para nos referirmos a existência de um objeto concreto em um mundo possível diferente do atual. Por exemplo: ao invés de dizermos que um objeto é azul em um mundo possível e amarelo em outro dizemos que sua contraparte neste outro mundo é amarela. Estas contrapartes são objetos qualitativamente semelhantes ao objeto atual e desempenham o papel do objeto do mundo atual no mundo possível. Esta perspectiva sobre os objetos dos mundos possíveis nos leva ao conceito de modalidade de re. As modalidades são ditas de re quando atribuem propriedades modais ao objeto [ver Lewis 1968]. Podemos pensar os mundos possíveis de um modo diferente ao que foi exposto acima. De certa forma os mundos possíveis concretos não podem ser pensados como grandes planetas no mundo atual, pois eles não tem relações espaço-temporais com estes. Os mundos possíveis concretos são, portanto, empiricamente inacessíveis. Contudo, o fato destes mundos serem empiricamente inacessíveis não exclui uma acessibilidade cognitiva a eles. Acessamos outros mundos através de nossa representação mental e lingüística do modo como as coisas poderiam ser.

Os filósofos denominados realistas com relação à existência de mundos possíveis consideram que existência e existência atual não coincidem. Eles defendem que 'existir' e 'possuir algum tipo de ser' são coextensivos. Assim é possível pensar em um mundo que contém contrapartes de objetos com características bem distintas dos objetos atuais. Se dizemos que Pégasos não existe não estamos negando a existência de mundos possíveis no qual Pégasos exista. Daí, asserções ordinárias verdadeiras sobre a não existência de certos objetos não contam como pontos negativos para o realismo com relação a mundos concretos. É fácil notar que a existência de mundos possíveis deixa de ser uma questão se a lógica modal é sustentada semanticamente por uma semântica estritamente algébrica. Tal discussão passas a ser portanto uma discussão sobre um outro campo da filosofia (o conteúdo da imaginação e suas caracterizações ontológicas possíveis por exemplo) e não mais sobre o significado de proposições modais.

Definiremos o ponto de vista Lewisiano com relação à modalidade como sendo a análise das modalidades em termos de mundos possíveis concretos e suas partes. As seguintes teses são características do ponto de vista Lewisiano.

(1) Não existem modalidades primitivas

(2) Há uma pluralidade de mundos possíveis concretos

(3) Atualidade é um conceito indexical

(5) A modalidade 'de re' deve ser analisada em termos de contrapartes e não por identidades através dos mundos.

### 5.2.3 Modalidades não primitivas

A rejeição das modalidades primitivas é uma idéia central do ponto de vista Lewisiano. É esta rejeição que motiva a introdução de mundos possíveis. Temos ainda, a partir desta rejeição, a motivação para tomar estes mundos possíveis como sendo concretos. A suposição de que os mundos possíveis sejam entidades abstratas tem como conseqüência, de uma forma ou de outra, o aparecimento de modalidades primitivas. Portanto, tal idéia é bastante rejeitada por Lewis.

O que seria uma modalidade não primitiva? Alguns autores tomam o conceito *modalidades não primitivas* a partir de três teses (ver [Bri]) .

(i) A interpretação de *modalidades não primitivas* como uma tese de sobreposição

Dizemos que quando proposições de um tipo x se sobrepõem a proposições de um tipo y, a verdade ou falsidade da proposição resultante será *determinada* pelo valor de verdade das proposições de tipo y. Assim os mundos possíveis se sobrepõem às sentenças categóricas contidas neles. Desta forma, quando dois mundos possíveis diferem macroscopicamente, eles também diferirão microscopicamente. Os fatos macroscópicos não variam de mundo para mundo independentemente dos fatos microscópicos. Do ponto de vista algébrico tal sobreposição parece não ter sentido. A semântica das proposições modais não depende de qualquer tipo de arranjo de objetos transcendentes aos objetos da própria álgebra como ocorre com mundos possíveis.

(ii) A interpretação de *modalidades não primitivas* a partir do que Lewis chama de *princípio de recombinação*

A formulação inicial deste princípio é: "anything can coexist with anything else, and anything can fail to coexist with anything else´´ [Lew86]. Está definição pode ser entendida a partir de suas duas partes (metades) da seguinte forma:

A primeira metade (anything can coexist with anything else): quando temos duas ou mais coisas, possivelmente de mundos diferentes, estas poderão ser tomadas juntas em um único mundo dentro de algum arranjo permitido por suas formas e/ou tamanhos. De acordo com este princípio, vistos que mundos não compartilham objetos, o que acontece é a existência de duplicatas ou contrapartes dos objetos lado a lado em um único mundo e não a existência dos próprios objetos neste mundo singular. A segunda metade (anything can fail to coexist with anything else): quando duas coisas distintas coexistem em um mundo, haverá então um outro mundo no qual a duplicata ou contraparte de um existirá sem a duplicata ou contraparte do outro.

Segundo Lewis, o princípio de recombinação pode ser visto como expressão da idéia Humeana de que não existem conexões necessárias entre existentes distintos (ver [Lew86], p. 87). Porém, apenas a segunda parte do princípio está de acordo com a idéia humeana da não existência de conexões necessárias entre existentes distintos. A primeira parte do princípio de recombinação está de acordo com a negação de exclusões necessárias entre objetos possíveis. Uma maneira alternativa de capturar a idéia de que não há conexões necessárias entre objetos distintos é pensar a sobreposíção do modal sobre o categórico, o que estaria mais próximo da intenção de Hume. Podemos de certa forma concluir que a semântica algébrica não pode dar conta deste tipo de caracterização das modalidades primitivas. E neste caso a semântica dos mundos possíveis parece ser ainda a mais adequada. Esta adequação se dá quando pensamos a idéia humeana da não existência de conexões necessárias como objeto de formalização a partir das lógicas modais. Porém, tal fato sugere mais um ponto em favor da tese de se considerar a semântica dos mundos possíveis como sendo a contraparte epistêmica da lógica modal. De fato, a idéia de Hume recai sobre um aspecto de sua epistemologia e deste modo é de se esperar que o uso da semântica dos mundos possíveis seja a mais adequada para expressá-la.

(iii) O princípio de *modalidades não primitivas* se aplica apenas a indivíduos

Segundo a concepção de que o princípio de modalidades não primitivas se aplica apenas a indivíduos não podemos nos referir a conjuntos. Conjuntos, como são concebidos ordinariamente, possuem uma conexão necessária com seus membros. Um conjunto não só existe de acordo com seus membros como são definidos a partir deles. Por outro lado, indivíduos não existem sem que exista o seu unitário (singleton), o conjunto que tem este indivíduo como único membro. Esta qualificação é problemática para Lewis uma vez que sugere a aplicação do princípio de recombinação apenas a domínios concretos.

### 5.2.4 Há uma pluralidade de mundos possíveis concretos

Começaremos esta seção com uma pergunta: os mundos possíveis concretos existem?

Quais as teorias que poderão nos dar uma resposta a esta pergunta? Os estudiosos que tratam da teoria dos mundos possíveis concordam que estão comprometidos com a busca de uma teoria que seja "a melhor e mais completa teoria" sobre os mundos possíveis. Ser a melhor teoria nada mais é do que ser a mais verdadeira, simples, unificada, econômica, etc. e que possua alguma utilidade prática. Pensaremos então a construção de uma teoria que tenha como propósito discutir a questão da existência dos mundos possíveis. é interessante notar que as características listadas acima vão de encontro aos aspectos da semântica dos mundos possíveis. Os termos “simples, unificada, econômica” estão mais de acordo com uma semântica de tipo algébrica. Tendo em vista a discussão sobre os aspectos ontológicos das lógicas modais acima (as críticas quineanas por exemplo) podemos notar que o comprometimento ontológico das semânticas algébricas estão mais de acordo com a noção de “melhor teoria”.

### 5.2.5 O conceito indexical de atualidade

Abordaremos agora a noção de atualidade e as principais questões que se relacionam a esta noção. Do ponto de vista Lewisiano, apenas mundos meramente possíveis possuem existência. Portanto, de acordo com este ponto de vista, nada existe como atualidade e assim podemos definir esta concepção como *possibilista* (em oposição ao *atualismo*). Esta é uma concepção bastante anti-intuitiva. Como os Lewisianos acreditam que apenas mundos concretos meramente possíveis existam, eles não aceitam que haja uma identificação entre o atual e o concreto. A atualidade, neste caso, não poderia ser nem mesmo uma propriedade qualitativa, uma vez que os objetos atuais possuem duplicatas qualitativas em mundos meramente possíveis. O que seria então a *atualidade*? Qual a diferença entre objetos atuais e contrapartes meramente atuais?

Lewis opta por uma posição deflacionista com relação aos objetos atuais. Para ele não há diferença fundamental entre as propriedades das coisas meramente possíveis e as propriedades das coisas atuais. Porém, a frase “eu sou um objeto atual”, no sentido de que não sou uma mera possibilidade, é uma sentença verdadeira tal como a sentença “Eu estou aqui”. Isto se dá pelo fato de que ‘aqui’ significa o lugar de proferimento da palavra, ou seja, seu conteúdo semântico muda de acordo com o contexto. Com o conceito de atualidade temos algo parecido. O termo ‘atual’ significa (em português) o mundo possível concreto no qual a palavra ‘atual’ aparece. Desta forma, o conceito de atualidade tem uma estrutura indexical e relativa. Como exemplo, duas contrapartes diferentes em mundos possíveis distintos poderiam dizer “eu sou atual”. Estes dois proferimentos seriam verdadeiros mesmo sendo meramente possíveis entre si. Sendo ‘a’ a contraparte em $w_1$ e ‘b’ a contraparte em ‘$w_2'$ e supondo que exista algum tipo de acesso de $w_1$ a $w_2$ diríamos que ‘a’ é meramente possível a ‘b’ e vice-versa. Em todo caso, ‘a’ é atual e ‘b’ também o é, isto com relação a si próprios. Podemos ainda pensar a atualidade enquanto relação binária. Neste caso ‘... é atual a ...’ seria uma relação reflexiva. De fato podemos intuitivamente considera-la como sendo simétrica e transitiva também. Daí a atualidade pode ser vista como uma relação de equivalência onde suas partições definiriam mundos possíveis concretos.

Lewis não faz uma distinção ontológica entre um objeto e suas contrapartes em termos de atualidade e possibilidade. O que seria atual do ponto de vista Lewisiano? Se olharmos para a concepção de mundo de Lewis poderemos notar que "ser atual" expressa a propriedade de estar relacionado espaço-temporalmente ao contexto em que a palavra "atual" foi proferida.

A concepção de Lewis de atualidade não é muito intuitiva. Robert Adams parece observar isto na seguinte passagem:

> "We do not think the diference in respect of actuality between Henry Kissinger and the Wizard of Oz is just a diference in their relation to us"
> (*Theories of Actuality* [Ada74] p. 215).

Lewis defende a relatividade do conceito de atualidade argumentando que, se este fosse um conceito absoluto, não haveriam condições para determinar a atualidade de quaisquer objetos e assim, nem mesmo a atualidade de uma pessoa que proferisse a frase "eu sou atual" poderia ser considerada verdadeira. Pois, se alguma contraparte desta pessoa também proferisse a mesma sentença não haveria nenhuma diferença qualitativa para se decidir pela atualidade de uma e não de outra. Uma outra situação que podemos tomar como exemplo é a seguinte: suponha um objeto 'a' em um mundo $w_1$ e a contraparte de 'a' (chamaremos esta contraparte de 'c') em $w_2$. A única diferença entre os objetos de $w_1$ e suas contrapartes em $w_2$ é a posição de um elétron em uma estrela de uma constelação distante. Como poderíamos então determinar qual das duas contrapartes é atual a nós uma vez que não existe acessibilidade epistêmica à diferença entre os mundos (cf. *Paraconsistência, modalidades e cognoscibilidade* [CL03]. Como poderíamos determinar se nosso mundo é o $w_1$, ou o $w_2$, ou nenhum destes? Desta forma, que sentido tem a palavra atual se não podemos determiná-la, ou melhor, não há como compreendê-la epistemicamente? Assim nos resta aceitar que a atualidade seja um termo indexical, em outras palavras, um termo que tem seu significado definido apenas a partir do seu contexto de proferimento. Poderíamos, por fim, multiplicarmos os mundos indistinguivelmente atuais de tal forma que a ontologia subjacente a esta teoria seria insustentavelmente inflada. Lewis conclui ainda que aceitar a idéia de mundos possíveis concretos juntamente com a noção de atualidade absoluta têm como conseqüência o ceticismo sobre a atualidade (a não possibilidade de se ter acesso epistêmico ao que é atual). Porém, seria absurdo aceitar que nada é ou pode ser atual. Portanto, a negação da noção de atualidade como sendo absoluta é tomada como uma solução para este problema e daí a conclusão de que a atualidade é um conceito indexical.

# Capítulo 6

# Conclusão

Analisaremos abaixo o valor da semântica algébrica com relação ao desenvolvimento da filosofia analítica. Tomaremos este desenvolvimento a partir de sua ligação com as questões das lógicas modais do ponto de vista do desenvolvimento de sua formalização contemporânea. Começaremos pela questão do interesse filosófico sobre as lógicas modais e a relação entre este interesse e a semântica para tais lógicas.

**(1) O desenvolvimento da lógica modal não seria de menor interesse para a filosofia se as semânticas algébricas tivessem sido completamente desenvolvidas antes da semântica de Kripke:**

Vimos acima que a semântica de Kripke é de fato uma semântica adequada com relação à metalógica das lógicas modais. Porém, filosoficamente, a semântica dos mundos possíveis pode trazer muitos problemas. Questões metafísicas tornam-se intratáveis do ponto de vista desta semântica e a filosofia transfere os problemas semânticos para o campo da ontologia. A semântica algébrica parece desempenhar um importante papel para o tratamento de tais problemas. O fato da não haver menção a mundos possíveis anula a maioria das críticas feitas à lógica modal com relação a sua ontologia subjacente.

**(2) O Desenvolvimento das semânticas algébricas poderia ter acontecido no séc. XIX após os trabalhos de Schröder, Boole, etc (ver[Kne63]):**

De fato grande parte do instrumental algébrico usado já havia sido desenvolvido no final do século XIX. Tanto que a primeira tentativa de se formalizar os conceitos modais (com Hugh MacColl) foi por meios algébricos. Desta forma, se tal projeto tivesse sido levado a sério poderíamos nos encontrar hoje em um estágio bem mais avançado com relação ao desenvolvimento destas lógicas.

**(3) A lógica modal em seu estágio inicial, ou seja, tal como foi tratada por Aristóteles, já estaria madura para ser interpretada algebricamente. Tal semântica poderia ter sido desenvolvida com recursos do início do sec. XX (50 ou 60 anos antes de Kripke) (ver [Mac06]):**

Como foi apresentado no início deste trabalho (ver Capítulo 1, seção 1.1), a lógica modal aristotélica é quase que totalmente constituída por fórmulas que remetem ao esquema $G^{mnpq}$ com exceção da lógica da contingência. Demonstramos acima que todos os sistemas modais da classe $G^{mnpq}$ possuem uma semântica algébrica adequada. Concluímos, portanto, que grande parte da lógica modal aristotélica poderia ter sido algebrizada no início do século XX.

Mostramos acima que o presente trabalho tem como um de seus objetivos comprovar a importância de uma consideração mais respeitosa com relação à semântica algébrica para a lógica modal. Poderíamos portanto pensar melhor uma maneira de considerar tal semântica no âmbito filosófico. Seus resultados, como foram mostrados, são adequados.

A partir da década de trinta tivemos um considerável avanço sobre o entendimento formal do significado das modalidades. Os trabalhos de Jónsson, McKinsey e Tarski na década de quarenta permitiram a construção dos resultados de completude algébrica para os sistemas modais. Estes resultados, porém, não receberam a devida atenção. Na década de cinqüenta, Kripke propôs uma semântica interessante para estes sistemas. Tal semântica, hoje conhecida como semântica de Kripke ou semântica dos mundos possíveis, causou um grande impacto no âmbito da filosofia analítica. Os artigos escritos por Lemmon na decada de 60 têm por objetivo apresentar uma síntese destas duas semânticas. Um interessante resultado mostrado nestes artigos é que a completude semântica pode ser deduzida de resultados algébricos por meio de um teorema central. Um dos resultados mais surpreendente e interessante do trabalho do Lemmon é o teorema da representação (originalmente demonstrado por Jónsson e Tarski). Esse teorema de representação para a lógica modal tem como conseqüência a conexão entre o ponto de vista algébrico e o ponto de vista da semântica dos mundos possíveis (ou semântica de Kripke). O objetivo inicial do presente trabalho era estender este mesmo resultado algébrico para os sistemas da classe "$G^{mnpq}$" proposta por Lemmon e Scott nas "Lemmon notes". No capítulo anterior analisamos os aspectos filosóficos de tal representação algébrica. Para isso, argumentamos que as semânticas algébricas para as lógicas modais devem servir de base para respostas às diversas críticas filosóficas direcionadas ao desenvolvimento da lógica modal. Mostramos, por fim, como que a semântica algébrica, sendo uma semântica que não usa o conceito de mundos possíveis, pode ser considerada útil por defensores do antirealismo modal.

Os problemas que aparecem até aqui a partir da tentativa de se defender a existência concreta de mundos possíveis são incontáveis. A semântica algébrica para a lógica modal poderia portanto ser vista como uma alternativa para grande parte destes problemas. Principalmente com relação a estes últimos (os problemas que surgem da consideração da atualidade como um conceito indexical). A partir de uma semântica algébrica poderíamos seguir o caminho inverso ao que foi apresentado. Não seria preciso sustentar uma ontologia inflada com relação à atualidade uma vez que não estaríamos mais tratando de mundos possíveis e portanto não haveria qualquer compromisso ontológico com respeito a tais conceitos.

Citamos, no início deste trabalho, o texto de Boécio (e a explicação sobre o acaso, atribuída neste texto, à Aristóteles). A interpretação destes escritos sugere a não existência metafísica de mundo possíveis, mas apenas (de alguma forma) a existência epistêmica destes. O presente trabalho está em conformidade com tal ponto de vista, uma vez que podemos pensar a semântica algébrica das lógicas modais como o componente metafísico correspondente a tais lógicas (ver *Interactions of metaphysical and epistemic concepts* [CL07]).

Como existe, formalmente, uma "ponte" entre a semântica dos mundos possíveis e a semântica algébrica (pelo teorema da representação para álgebras booleana com operadores, mais especificamente para as álgebras modais) concluímos que as lógicas modais captam de alguma forma a possível adequação entre mente (epistêmico) e mundo (metafísico) com relação às modalidades. Sendo assim, de certa forma, temos agora uma explicação a mais do porquê da importância dada à lógica modal no âmbito da filosofia analítica.

# Referências Bibliográficas


[Abb00] Niccola Abbagnano. *Dicionário de Filosofia*. Martins Fontes, São Paulo, 2000.

[Ada74] Robert Adams. Theories of actuality. *Nous*, (8):211–231, 1974.

[Ant03] Giovanni Reale & Dario Antiseri. *História da Filosofia*, volume 1. Paulus, São Paulo, 2003.

[Ari38] Aristotle. *Aristotle, I, Categories. On Interpretation. Prior Analytics.* Harvard Universoty Press, Cambridge, 1938.

[Ari89] Aristotle. *Prior Analytics.* Hacket Publishing Company, 1989.

[BdRV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic.* Cambridge, 2001.

[Ber60] Gustav Bergmann. The philosophical significance modal logic. *Mind, New Series*, 69(276):466–485, 1960.

[Boo54] George Boole. *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Macmillan, 1954.

[Bri] Phillip Bricker. Concrete possible worlds. *Forthcoming in Contemporary Debates in Metaphysics. J. Hawthorne, T. Sider, and D. Zimmerman (eds.). Blackwell Publishing.*

[BS84] Robert Bull and Krister Segerberg. Basic modal logic. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic*, volume 165, chapter II.1, pages 1–88. Dordrecht, 1984.

[Car48] Rudolf Carnap. Modalities and quantification. *The Journal of Symbolic Logic*, 13(4):218–219, 1948.

[Cat88] Laurent Catach. Normal multimodal logics. In *Proceedings 7th National Conf. on Artif. Intelligence, AAAI'88, St. Paul, MI, USA, 21–26 Aug 1988, volume 2*, pages 491–495. American Assoc. for Artif. Intelligence, Menlo Park, CA, 1988.

[Cha73] C. C. Chang. Modal model theory. In A. R. D. Mathias and H. Rogers, editors, *Proceedings Cambridge Summer School on Math. Logic, Cambridge, UK, 1–21 Aug 1971*, volume 337, pages 599–617. Berlin, 1973.

[Che80] Brian F. Chellas. *Modal Logic: An Introduction*. 1980.

[Chu56] Alonzo Church. *Introduction to mathematical Logic*. Princeton University Press, New Jersey, 1956.

[CL03] A. Costa-Leite. Paraconsistência, modalidades e cognoscibilidade (Paraconsistency, modalities and cognoscibility, in Portuguese). Master's thesis, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brazil, 2003.

[CL07] Alexandre Costa-Leite. *Interactions of metaphysical and epistemic concepts*. Phd dissertation, Université de Neuchâtel, Switzerland, 2007.

[CZ97] Alexander Chagrov and Michael Zakharyaschev. *Modal Logic*, volume 35. Oxford, 1997.

[Dop65] Robert Feys & Josephed Dopp. *Modal Logics*. Nauwelaerts, 1965.

[eCP00] Walter Carnielli e Claudio Pizzi. *Modalità e Multimodalità*. Franco Angeli, 2000.

[eCP07] Walter Carnielli e Cláudio Pizzi. *Modalities and Multimodalities*. Springer (no prelo), New York, 2007.

[Fey37] Robert Feys. Les logiques nouvelles des modalités. *Revue néoscolastique de philosophie*, 40-41:517–553 e 217–252, 1937.

[Fit93] Melvin C. Fitting. Basic modal logic. In D. M. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 1: Logical Foundations*, pages 365–448. Oxford, 1993.

[Fre92] Gottlob Frege. Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, pages 25–50, 1892.

[Göd32] Kurt Gödel. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenshaften in Wien*, (69):65–66, 1932.

[Göd33] Kurt Gödel. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, (4):34–38, 1933.

[Gol76] Robert Goldblatt. Metamathematics of modal logic. *Reports on Mathematical Logic*, 6:41–77, 1976.

[Gol87] Robert Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. Number 7. Stanford, CA, 1987.

[Gol00] R. Goldblatt. Mathematical modal logic: a view of its evolution, 2000.

[Hal55] Paul Halmos. *Algebraic Logic*, volume 12 of *Compositio Mathematica*. Chelsea, New York, 1955.

[HC68] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. *An Introduction to Modal Logic*. Methuen and Co., 1968.

[HC96] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London and New York, 1996.

[Hei78] Martin Heidegger. *Early Greek Thinking*. Harper & Row, New York, 1978.

[Hin] *Time and Necessity Studies in Aristotles Theory of Modality*. Oxford UP, Oxford.

[Hum80] David Hume. *Investigação sobre o entendimento humano*, volume 22 of *Os pensadores*. Victor Civita, São Paulo, 1980.

[Hun73] Geoffrey Hunter. *Metalogic, An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. University of California Press, Berkley and Los Angeles, 1973.

[Ima05] Guido Imaguire. O platonismo de Russell na metafísica e na matemática. *Kriterion*, 46(111):9–18, 2005.

[Jan06] Ramon Jansana. Propositional consequence relations and algebraic logic. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, page http://plato.stanford.edu/ acessado em 11/11/2006, 2006.

[JB06] Desidério Mucho & Nelson Gonçálves Gomes João Branquinho. *Enciclopédia de Termos Lógico-filosóficos*. Martins Fontes, São paulo, 2006.

[Kei92] Chen Chung Chang & H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Estudies in Logic and the fundations of matheamatics*. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[Kne63] W. Kneale & M. Kneale. *The Development of Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1963.

[Kri59] Saul Kripke. A completeness theorem in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 24:1–14, 1959.

[Kri63] Saul Kripke. Semantic analysis of modal logic i. normal modal propositional calculi. *Zeitschrift f¨ur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–93, 1963.

[Lan32] C. I. Lewis & C. H. Langford. *Symbolic Logic*. New York, 1932.

[Lem57] E. J. Lemmon. New foundations for Lewis modal systems. 22(2):176–186, 1957.

[Lem59] M. A. Dummett & E. J. Lemmon. Modal logics between s4 and s5. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 5:250–264, 1959.

[Lem60] Edward John Lemmon. An extension algebras and the modal system t. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1(1):3–12, 1960.

[Lem66] Algebraic semantics for modal logic i and ii. *TheJournal of Symbolic Logic*, 31(2):46–65 and 191–218, 1966.

[Lem77] Edward John Lemmon. *An Introduction to Modal Logic (The "Lemmon Notes")*, volume 11 of *Americal Philosophical Quarterly Monograph Series*. Basil Blackwell, Oxford, 1977.

[Lew18] C. I. Lewis. *A Survey of Symbolic Logic*. University of California Press, Berkeley, 1918.

[Lew73] David Lewis. *Counterfactuals*. Basil Blackwell, Oxford, 1973.

[Lew86] David Lewis. *On the Plurality of Worlds*. Basil Blackwell, Oxford, 1986.

[Luk57] Jan Lukasiewicz. *Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic*. Clarendon Press, Oxford, 1957.

[Mac06] Hugh MacCall. *Symbolic Logic and its Applications*. Longmans, Green, and Co., London, 1906.

[Mac63] Storrs MacCall. *Aristotle's Modal Syllogisms*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1963.

[Mar46] Ruth Barcan Marcus. A functional calculus of first order based on strict implication. *Journal of Symbolic Logic*, 11:1–16, 1946.

[Mat57] M. Ohnishi & K. Matsumoto. Gentzen method in modal calculi i and ii. *Osaka Mathematical Journal*, 9 e 11:113–130 e 115–120, 1957.

[McK41] J. C. C. McKinsey. A solution of the decision problem for the lewis systems s2 and s4, with an application to topology. *Journal of Symbolic Logic*, 6(4):117–134, 1941.

[McK45] On the syntactical construction of systems of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 10(3):83–94, 1945.

[Men97] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, Tokio, Melburn, Madras, 1997.

[Min92] Grigori Mints. *A Short Introduction to Modal Logic*. Number 30. Stanford, CA, 1992.

[MP58] L. Minio-Paluello. *Twelfth Century Logic: Texts and Studies. II Abaelardiana inedita*. Edizioni di storia letteratura, Roma, 1958.

[Nie54] Frederich Nietzsche. *Werke*. C. Hanser Verlag, Munich, 1954.

[Par34] William Tuthill Parry. The postulates for “strict implication”. *Mind*, 43(169):78–80, 1934.

[Par40] William Tuthill Parry. Modalities in the survey system of strict implication. *Journal of Symbolic Logic*, 5(1):37, 1940.

[Piz74] Claudio Pizzi. *La logica del tempo*. Boringhieri, Torino, 1974.

[Pop94] Sally Popkorn. *First Steps in Modal Logic*. Cambridge, 1994.

[Pri55] Arthur Norman Prior. Diodorean modalities. *The Philosophical Quartely*, 5:205–213, 1955.

[Pri62] Arthur Norman Prior. *Formal Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1962.

[Pri67] Arthur Norman Prior. K1, k2 and related modal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 5:299–304, 1967.

[Qui53] Willard Van Orman Quine. *From a Logical Point of View*. Harvard University Press, Cambridge, 1953.

[Ras74] H. Rasiowa. *An algebraic approach to non-classical logics*, volume 78 of *Studies of Logic and Foundation of Mathmatics*. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[Rea98] Stephen Read. Hugh maccoll and the algebra of strict implication. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 3(1):59–83, 1998.

[Ros49] Sir. David Ross. *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. Oxford, 1949.

[Ros50] Paul Rosenbloom. *The Elements of Mathematical Logic*. Dover Publications, Inc., New York, 1950.

[San81] Stanley N. Burris & H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra (millennium edition)*. Disponível para Download em http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book, 1981.

[Sch81] R. E. Jennings & P. K. Schotch. Some remarks on (weakly) weak modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22(4):309–314, 1981.

[Sho73] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1973.

[Sta68] Robert Stalnaker. *A Theory of Conditionals*. in Nicholas Rescher (ed.), Studies in Logical Theory. Basil Blackwell, Oxford, 1968.

[Sta76] Robert Stalnaker. Possible worlds. *Nôus*, 10:65–75, 1976.

[Tar41] Alfred Tarski. On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic Logic*, 7(1):38, 1941.

[Tar48a] J. C. C. MacKinsey & A. Tarski. Some theorems about the sentential calculi of lewis and heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 13(3):171–172, 1948.

[Tar48b] J. C. C. McKinsey & Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *jsl*, 13(1):1–15, 1948.

[Tar51] E. Jónsson & Alfred Tarski. Boolean algebras with operators. *American Journal of Mathematics*, (74):891–939, 1951.

[Tho63] Ivo Thomas. A final note on s$1^o$ and the brouwerian axioms. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 4(3):231–232, 1963.

[Ven01] Mai Gehrke & Yde Venema. Algebraic tools for modal logic. *ESSLLI 01*, 2001.

[vW51] Georg Henrik von Wright. *An Essay in Modal Logic*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951.

[Wój88] Ryszard Wójcicki. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*, volume 199 of *Synthese Library*. Reidel, Dordrecht, 1988.

[ZWC01] M. Zakharyaschev, F. Wolter, and A. Chagrov. Advanced modal logic. In D. M. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic (Second Edition), Vol. 3*. Dordrecht, 2001.