

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA *Gleb Wataghin*

TESE DE DOUTORADO

Aceleração e Fluxos Potenciais em Relatividade
Geral: Resultados Analíticos e Numéricos

Aluno: Maximiliano Ujevic Tonino

Orientador: Patricio Aníbal Letelier Sotomayor

Dedico esta tese à minha querida família.

Agradecimentos

Primeiro, à minha família e ao apoio que sempre tive deles: meu pai Alejandro, minha mãe Flora, meu irmão Alex e em especial a meu irmão Sebastian que sempre acompanhou de perto todas as minhas batalhas.

A meu orientador Patricio pela paciência e dedicação com que orientou meu trabalho.

A meus amigos de sempre: Alexis, Jorge, Carlos e suas famílias. A Miguel Angel e Gabriel que de longe sempre me fizeram sentir perto deles.

A Andrés, José, Pepe e Betty, pelas cervejinhas e companhias nos finais de semana, e também, pelos momentos em que mostrei a alegria Jamaicana 4-0.

A meus amigos de sala Adilson, Eduardo, André e Rafael que aguentaram as minhas piadas e pelas discussões científicas :), agradecimentos especiais a Adilson, Eduardo e André pelas leituras e correções da Tese.

A meus amigos Tomás, Valeria, Raul, Maruja, Juan Carlos, Richard, Marcelo, a todos os Unanis e os Matis, por fazer do Brasil um país ainda mais agradável.

A João, Jacaré, Edson, e todos meus amigos que fizeram das sextas feiras dias tão gostosos e esperados.

A todos meus professores de escola e das universidades que ajudaram na minha formação.

À CAPES e especialmente à FAPESP pelo auxílio financeiro, sem o qual, esta tese não poderia ser feita.

Sumário

Resumo	3
Abstract	5
Introdução	7
1 Fluidos Relativísticos	9
1.1 Fluido Incoerente (ou Poeira)	11
1.2 Fluido Perfeito Relativístico	12
1.3 Fluido Imperfeito Relativístico	15
1.4 Fluxos Potenciais	18
2 Métricas com Simetria Axial	23
2.1 Solução Multipolar	25
2.2 Métrica C	30
3 Soluções Exatas	35
3.1 Esfera Rígida de Schwarzschild e $p = \rho$	35
3.2 Buraco Negro de Schwarzschild e $p = \rho$	37

4	Método Computacional	39
5	Aplicações	45
5.1	Núcleo Massivo com Simetria Axial e $p = \rho$	45
5.2	Esfera Rígida e Buraco Negro de Schwarzschild Acelerado (Métrica C) e $p = \rho$.	46
5.3	Esfera Rígida e Buraco Negro de Schwarzschild com Halo Dipolar e $p = \rho$	46
5.4	Esfera Rígida e Buraco Negro de Schwarzschild com Halo Dipolar e $p = (\gamma - 1)\rho$	47
6	Conclusões	49
A	Código Computacional para o Cálculo das EDP	53
B	Acceleration, Streamlines and Potential Flows in General Relativity: Analytical and Numerical Results	63
C	Potential Flows in a Core-Dipole-Shell System: Numerical Results	91

Resumo

São apresentadas soluções numéricas e analíticas para as curvas integrais do campo de velocidades (linhas de fluxo) de um fluido ideal estacionário com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$. Quando $\gamma = 2$, as linhas de fluxo associadas a um buraco negro e esfera rígida aceleradas são estudadas em detalhe, assim como o campo de velocidade de um buraco negro e esfera rígida em um campo dipolar externo (campo de aceleração constante). No último caso, o campo dipolar pode ser produzido por um halo ou casca de matéria. Para cada caso a densidade do fluido é estudada usando linhas de contorno. Para $1 < \gamma < 2$ estudamos o caso núcleo com halo dipolar. Encontramos que a contribuição não linear que aparece na equação diferencial parcial para o potencial do campo da velocidade afeta levemente as formas das linhas de fluxo e de densidade constante, mas pode ser notada nos valores da densidade. O estudo de vários casos indicam que isto parece ser a situação geral. A acreção foi também calculada para os casos de buracos negros e comparamos os resultados para vários valores de γ . Encontramos que a acreção aumenta ao diminuir a constante γ . Pelo que sabemos, esta é a primeira vez que as curvas integrais do campo de velocidade para objetos acelerados e espaço-tempos relacionados são estudados em relatividade geral.

Abstract

Analytical and numerical solutions for the integral curves of the velocity field (streamlines) of a steady-state flow of an ideal fluid with $p = (\gamma - 1)\rho$ equation of state are presented. When $\gamma = 2$, the streamlines associated with an accelerate black hole and a rigid sphere are studied in some detail, as well as, the velocity fields of a black hole and a rigid sphere in an external dipolar field (constant acceleration field). In the latter case the dipole field may be produced by an axially symmetric halo or shell of matter. For each case the fluid density is studied using contour lines. We found that the presence of acceleration is detected by these contour lines. For $1 < \gamma < 2$ we study the case of the core-dipole-shell model, we found that the non-linear contribution appearing in the partial differential equation for the velocity potential has little effect in the form of the streamlines and density contour lines, but can be noticed in the density values. The study of several cases indicates that this appears to be the general situation. The accretion rate was also calculated in the black holes cases and we compared the results for several values of γ , we found it to increase when the constant γ decreases. As far as we know this is the first time that the integral curves of the velocity field for accelerate objects and related spacetimes are studied in general relativity.

Introdução

O estudo dos fluxos potenciais é relevante para o entendimento de vários fenômenos de interesse na astrofísica tais como: fluidos a velocidades relativísticas na presença de uma estrela de nêutrons [1, 2], aglomerados de estrelas movimentando-se em um meio gasoso [1], fluxo nas proximidades de uma corda cósmica [1], acreção em sistemas binários ou buracos negros [3], e outros [4, 5, 6, 7]. Também, soluções numéricas das equações gerais da termodinâmica relativística podem simular, e modelam, colapsos gravitacionais e a evolução de estrelas de nêutrons. Nesta tese fazemos aplicações aos casos de esfera rígida e buraco negro acelerado, objetos massivos com multipolos internos e sistemas núcleo-halos. O objetivo da tese é estudar o comportamento de um fluxo potencial, na presença dos casos mencionados, mediante o estudo das suas linhas de fluxo e de densidade constante de bárions. Para esse fim, é preciso determinar a 4-velocidade do fluido. No caso de fluxos potenciais existe uma forma de determinar a 4-velocidade por meio de uma equação diferencial parcial (EDP) para o potencial da 4-velocidade. Esta equação é, em geral, não linear e depende da equação de estado do fluido assim como das métricas a serem utilizadas.

A tese pode ser dividida em duas partes: a primeira constituída pelos capítulos 1-6 onde apresentamos a base teórica da pesquisa; a segunda, formada pelos apêndices A, B e C onde reproduzimos o código computacional usado nos cálculos das EDP's e os artigos publicados ou submetidos.

No capítulo 1 temos uma breve introdução aos fluidos relativísticos, vemos os fluidos mais conhecidos e algumas das suas propriedades. Damos ênfase aos fluxos potenciais que são os utilizados ao longo da tese. Neste caso mostramos a forma da EDP que precisamos resolver para a obtenção da 4-velocidade. Também, introduzimos alguns conceitos termodinâmicos que ajudarão a determinar a densidade de bárions (partículas) do fluido e a sua entalpia.

No capítulo 2 vemos algumas situações físicas representadas por soluções particulares da métrica com simetria axial. Entre elas: as soluções mediante séries de multipolos internos e externos. Com isto podem-se modelar, entre outros, esfera rígida e buraco negro acelerados, e sistemas núcleo-halos.

No capítulo 3 resolvemos dois problemas que possuem soluções exatas do potencial da 4-velocidade: esfera rígida e buraco negro, com a condição que no infinito o fluido seja uniforme e constante. Tudo isto com uma equação de estado barotrópica, $p = p(\rho)$, para o fluido da forma $p = \rho$, onde p é a pressão do fluido e ρ a sua densidade total de energia.

No capítulo 4 apresentamos as noções básicas para discretizar EDP's. Como exemplo mostramos o caso quando $p = \rho$ encontrado no capítulo 1.

No capítulo 5 vemos algumas soluções da EDP do capítulo 1 com as situações descritas pelas métricas do capítulo 2. Resolvemos os casos de objeto massivo com multipolos internos e uma equação de estado $p = \rho$, também resolvemos com a mesma equação de estado a esfera rígida e buraco negro acelerados, e a esfera rígida e buraco negro com halo dipolar de matéria. Para os casos na presença do halo dipolar também foi resolvido o problema com uma equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$. Estes resultados foram objetos de artigos, um publicado e outro submetido, os quais encontram-se nos apêndices B e C, respectivamente. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões.

Fluidos Relativísticos

Começamos o capítulo com uma breve introdução aos diferentes tipos de fluido. Este capítulo encontra-se baseado fundamentalmente nas referências [8, 9, 10, 11]. Existem três tipos de fluidos relativísticos que são os mais comuns ou utilizados. São eles: o fluido incoerente (ou poeira), o fluido perfeito e o fluido imperfeito. Estes fluidos se diferenciam uns dos outros pelo seu tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$). O tensor energia-momento desempenha dois papéis muito importantes dentro de nosso contexto. O primeiro é que ele contém as propriedades mecânicas da matéria tais como o estresse e a densidade. O segundo é que ele determina os campos gravitacionais quando são introduzidos nas equações de Einstein ¹

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

¹Os índices gregos terão valores 0, 1, 2, 3; enquanto os índices latinos assumirão valores 1, 2, 3. A métrica ($g_{\mu\nu}$) tem assinatura +2, i.e. localmente redutível à matriz diagonal $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$. Também utilizamos a regra de que dois índices repetidos numa equação significa soma sobre eles, ou seja $a_\alpha b^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 a_\alpha b^\alpha$. Trabalharemos em unidades onde a velocidade da luz é $c = 1$ e $G = 1/8\pi$. Denotamos por $(;)$ a derivada covariante e por $(,)$ a derivada parcial.

Assumimos também que possui quatro autovalores reais $\theta_{(\alpha)}$ que correspondem aos quatro autovetores reais $\lambda_{(\alpha)}^\sigma$, ou seja

$$T_{\sigma\nu}\lambda_{(\alpha)}^\nu = \theta_{(\alpha)}\lambda_{\sigma(\alpha)}, \quad (1.2)$$

onde os autovetores $\lambda_{(\alpha)}^\sigma$ são ortogonais e formam uma tetrada ortonormal (TO), σ é o índice contravariante e (α) é o índice que diferencia cada um dos vetores. As componentes covariantes da mesma TO são dadas por

$$\lambda_{(\alpha)\mu} = g_{\mu\nu}\lambda_{(\alpha)}^\nu. \quad (1.3)$$

As componentes dos quatro vetores $\lambda_{(\alpha)}^\mu$ formam uma matriz 4×4 , e denotamos por $\lambda_\sigma^{(\alpha)}$ os elementos da matriz inversa tais que

$$\lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_\sigma^{(\alpha)} = \delta_\sigma^\mu, \quad (1.4)$$

$$\lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_\mu^{(\beta)} = \delta_\alpha^\beta. \quad (1.5)$$

Além disso, sabemos que as equações que descrevem o movimento de um fluido relativístico são cinco equações tipo conservação. Quatro delas são fornecidas pela “conservação” do tensor energia-momento

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.6)$$

e a outra pela equação de continuidade

$$(nU^\mu)_{;\mu} = 0, \quad (1.7)$$

onde n é a densidade de bárions (partículas) e U^μ a 4-velocidade. Definimos então o vetor 4-velocidade como o vetor tipo-tempo $\lambda_{(0)}^\mu = U^\mu$ e seu correspondente autovalor $-\rho$ tal que

$$T_{\mu\nu}U^\nu = -\rho U_\mu, \quad (1.8)$$

o invariante ρ é chamado a densidade própria de energia, o sinal menos em (1.8) é devido ao fato do 4-momento das partículas materiais e fótons apontar para o futuro. Por haver definido

a 4-velocidade U^μ na direção de $\lambda_{(0)}^\mu$ temos que

$$\begin{aligned} U_\mu U^\mu &= -1, \\ U_\mu U_{;\nu}^\mu &= 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

O tensor simétrico $S_{\mu\nu}$, definido como

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu - S_{\mu\nu}, \tag{1.10}$$

é chamado tensor de estresse. Com esta definição, $S_{\mu\nu}$ satisfaz

$$S_{\mu\nu} U^\nu = 0, \tag{1.11}$$

tal que $S_{\mu\nu}$ tem apenas seis componentes independentes. Os tipos de fluidos relativísticos se diferenciam pelo tensor $S_{\mu\nu}$, ou seja, pelos autovalores do tensor energia-momento. Na continuação fazemos uma breve descrição destes fluidos.

1.1 Fluido Incoerente (ou Poeira)

Este é o mais simples de todos os fluidos, e se define pela condição de que seu tensor de estresse seja zero ($S_{\mu\nu} = 0$). Neste caso obtemos que

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu. \tag{1.12}$$

Para estudar as linhas de fluxo deste fluido calculamos (1.6) com o tensor (1.12), com o qual obtemos

$$(\rho U^\nu)_{;\nu} U^\mu + \rho U_{;\nu}^\mu U^\nu = 0. \tag{1.13}$$

Fazendo a projeção ao longo da 4-velocidade U_μ , e usando (1.9), vemos que

$$(\rho U^\nu)_{;\nu} = 0. \tag{1.14}$$

Pela equação (1.13) temos finalmente que

$$DU^\mu = U^\mu_{;\nu} U^\nu = 0, \quad (1.15)$$

onde $D = \delta/\delta s$ é o operador de diferenciação absoluta ao longo de uma linha de fluxo. Daqui pode-se ver uma propriedade muito importante deste tipo de fluido: as suas linhas de fluxo são geodésicas.

1.2 Fluido Perfeito Relativístico

A principal diferença entre um fluido perfeito e um fluido imperfeito é que no primeiro o livre caminho médio entre as colisões das partículas é pequeno comparado com a escala de distâncias utilizadas pelo observador, ou seja as quantidades termodinâmicas (como a pressão, densidade e velocidade) não variam em distâncias da ordem do livre caminho médio; no segundo, as quantidades termodinâmicas variam muito na escala do caminho livre médio, neste último tipo de fluido, o equilíbrio térmico não é mantido e o fluido perde energia cinética por meio do calor dissipado.

Um fluido perfeito é definido como tendo em cada ponto do fluido uma velocidade \mathbf{v} tal que um observador movimentando-se com esta mesma velocidade (o chamado sistema de Lorentz co-movente “*comoving Lorentz frame*” (CLF)) vê o fluido isotrópico, portanto o tensor energia-momento tem a forma ²

$$\tilde{T}^{ij} = p\delta_{ij}, \quad (1.16)$$

$$\tilde{T}^{0i} = \tilde{T}^{i0} = 0, \quad (1.17)$$

$$\tilde{T}^{00} = \rho, \quad (1.18)$$

onde p é a pressão e ρ a densidade de energia própria. Outra forma de dizer isto é que o tensor $T_{\mu\nu}$ possui três autovalores iguais correspondentes a autovalores de tipo espaço.

²Todos os resultados obtidos para um fluido perfeito e imperfeito são feitos em um espaço de métrica plana $\eta_{\mu\nu}$, estes resultados podem ser levados a um espaço curvo pelo princípio de equivalência, trocando as derivadas comuns por derivadas covariantes ($(, \rightarrow ;)$) e trocando a métrica plana por uma métrica curva ($\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$).

A conexão entre um CLF e um sistema em repouso com relação ao sistema do laboratório (o chamado “*general Lorentz frame*” (GLF)) no qual o fluido se movimenta com velocidade \mathbf{v} é

$$x^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha \tilde{x}^\beta, \quad (1.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= \gamma, \\ \Lambda_0^i &= \Lambda_i^0 = \gamma v_i, \\ \Lambda_j^i &= \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}, \\ \gamma &\equiv (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

O tensor de energia-momentum em um GLF é dado por

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha(\mathbf{v}) \Lambda_\delta^\beta(\mathbf{v}) \tilde{T}^{\gamma\delta}, \quad (1.21)$$

calculando explicitamente as componentes obtemos

$$T^{ij} = p \delta_{ij} + (p + \rho) \frac{v_i v_j}{1 - \mathbf{v}^2}, \quad (1.22)$$

$$T^{i0} = (p + \rho) \frac{v_i}{1 - \mathbf{v}^2}, \quad (1.23)$$

$$T^{00} = \frac{(\rho + p \mathbf{v}^2)}{1 - \mathbf{v}^2}. \quad (1.24)$$

Estas equações podem ser escritas em uma só equação dada por

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) U^\alpha U^\beta, \quad (1.25)$$

onde

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2} \mathbf{v}, \quad (1.26)$$

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \quad (1.27)$$

Além da energia e do momento, o fluido pode ter outras quantidades que se conservam, como por exemplo o número de partículas. Neste caso temos que para um CLF o 4-vetor corrente de partículas num ponto do espaço é

$$\tilde{N}^i = 0, \quad \tilde{N}^0 = n, \quad (1.28)$$

onde n é a densidade do número de partículas. Num GLF então temos que

$$N^i = \Lambda_{\beta}^i(\mathbf{v})\tilde{N}^{\beta} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}v^i n, \quad (1.29)$$

$$N^0 = \Lambda_{\beta}^0(\mathbf{v})\tilde{N}^{\beta} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}n, \quad (1.30)$$

ou seja,

$$N^{\alpha} = nU^{\alpha}. \quad (1.31)$$

Das equações de conservação do tensor de energia-momentum (1.6) obtemos

$$T_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0 = p_{,\alpha} + [(\rho + p)U^{\alpha}U^{\beta}]_{,\beta}, \quad (1.32)$$

e da conservação do número de partículas (1.7)

$$N_{,\alpha}^{\alpha} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}[n(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}] + \nabla \cdot [n\mathbf{v}(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}]. \quad (1.33)$$

Fazendo a projeção ao longo da 4-velocidade U_{α} , e tendo em vista (1.9) encontramos que

$$0 = U_{\alpha}T_{,\beta}^{\alpha\beta} = U^{\beta}p_{,\beta} - [(p + \rho)U^{\beta}]_{,\beta}, \quad (1.34)$$

que combinada com a equação de continuidade fornece

$$0 = -nU^{\beta} \left[p \left(\frac{1}{n} \right)_{,\beta} + \left(\frac{\rho}{n} \right)_{,\beta} \right]. \quad (1.35)$$

Esta equação está relacionada com a entropia mediante a segunda lei da termodinâmica

$$Td \left(\frac{\sigma}{n} \right) = pd \left(\frac{1}{n} \right) + d \left(\frac{\rho}{n} \right), \quad (1.36)$$

onde σ/n é a entropia por partícula, $1/n$ é o volume por partícula e T a temperatura. Portanto a equação (1.35) pode ser escrita como

$$0 = U^\beta \left(\frac{\sigma}{n} \right)_{,\beta} \equiv \frac{d(\sigma/n)}{ds}. \quad (1.37)$$

Esta relação nos diz que o fluido é adiabático, ou seja, a entropia se mantém constante ao longo da linha de fluxo do elemento de fluido considerado. Se em um instante determinado a entropia é constante em todo o fluido então, por ser o fluido adiabático, a entropia se mantém constante no tempo. Nesse caso o fluido é chamado de isentrópico.

1.3 Fluido Imperfeito Relativístico

Vamos supor que em um fluido imperfeito a presença de um fraco gradiente no espaço-tempo se manifeste na forma de termos adicionais $\Delta T^{\alpha\beta}$ e ΔN^α no tensor de energia-momento e no número de partículas, respectivamente, de modo que agora possuem a forma

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)U^\alpha U^\beta + \Delta T^{\alpha\beta}, \\ N^\alpha &= nU^\alpha + \Delta N^\alpha. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Neste caso definimos também a densidade total de energia e a densidade de partículas em um referencial movimentando-se com o fluido como sendo

$$\begin{aligned} T^{00} &\equiv \rho, \\ N^0 &\equiv n, \end{aligned} \quad (1.39)$$

com a característica de que em qualquer ponto desse referencial o 4-vetor velocidade satisfaz

$$\begin{aligned} U^i &\equiv 0, \\ U^0 &\equiv 1. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Antes de continuar, discutamos um pouco o conceito de 4-velocidade. Na mecânica relativística um fluxo de energia necessariamente envolve um fluxo de massa. Portanto, quando existe um

fluxo de calor, a definição da velocidade em termos da densidade do fluxo de massa não tem um significado direto. É necessário em fluidos relativísticos especificar se U_α é a 4-velocidade do transporte de energia ou do transporte de partículas. Na formulação de Landau e Lifshitz [8], U_α é a velocidade do transporte de energia, pela qual $T^{i0} = 0$ em um CLF. Na formulação de Eckart [12], U_α é a 4-velocidade do transporte de partículas, pela qual $N^i = 0$ no CLF. Ambas formulações são equivalentes, mas nesta seção usamos a formulação de Eckart.

Comparando as equações (1.39)-(1.40) com (1.38) pode-se mostrar que em um CLF os termos $\Delta T^{\mu\nu}$ e ΔN^μ estão sujeitos às condições

$$\Delta T^{00} = \Delta N^0 = \Delta N^i = 0, \quad (1.41)$$

e, por conseguinte, para um GLF verificam-se as relações

$$U^\alpha U^\beta \Delta T_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.42)$$

$$\Delta N_\alpha = 0. \quad (1.43)$$

Todos os efeitos de dissipação são devidos a $\Delta T^{\alpha\beta}$, por isto é preciso encontrar uma expressão geral para $\Delta T^{\alpha\beta}$ permitida por (1.42) e pela segunda lei da termodinâmica. Como no caso do fluido perfeito fazemos a projeção de (1.6) ao longo da 4-velocidade, obtemos

$$0 = U_\alpha T_{,\beta}^{\alpha\beta}. \quad (1.44)$$

Seguindo os mesmos procedimentos usados no caso do fluido perfeito para deduzir (1.37), vemos que em geral

$$U_\alpha [p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)U^\alpha U^\beta]_{,\beta} = -T(\sigma U^\alpha)_{,\alpha}, \quad (1.45)$$

e (1.44) pode ser escrita como

$$(\sigma U^\alpha)_{,\alpha} = \frac{1}{T} U_\alpha (\Delta T^{\alpha\beta})_{,\beta}, \quad (1.46)$$

ou

$$S_{,\alpha}^\alpha = -\frac{1}{T} U_{\alpha,\beta} \Delta T^{\alpha\beta} + \frac{1}{T^2} T_{,\beta} U_\alpha \Delta T^{\alpha\beta}, \quad (1.47)$$

onde

$$S^\alpha \equiv \sigma U^\alpha - T^{-1} U_\beta \Delta T^{\alpha\beta}. \quad (1.48)$$

Aqui podemos interpretar S^α como o 4-vetor fluxo de entropia, e (1.47) como a produção de entropia por unidade de volume. Pela segunda lei da termodinâmica se exige que $\Delta T^{\alpha\beta}$ seja uma combinação linear dos gradientes de velocidade e temperatura tal que o lado direito de (1.47) seja sempre definido positivo para todas as possíveis combinações do fluido. Note-se que isto só é possível por haver colocado o segundo termo do lado direito de (1.48), sem este termo $S_{,\alpha}^\alpha$ não poderia ser simplesmente quadrático nas suas primeiras derivadas e então não seria sempre positivo definido. De (1.47) notamos que $\Delta T^{\alpha\beta}$ permite ter gradientes em T e U_α , e não em p , ρ e n , porque senão poderíamos ter produtos de gradientes que não seriam positivos para todas as combinações do fluido. Para resolver (1.47), é conveniente ir para um CLF onde (1.40) é satisfeito, nesse caso (1.47) fica como

$$S_{,\alpha}^\alpha = - \left(\frac{1}{T} \dot{U}^i + \frac{1}{T^2} T_{,i} \right) \Delta T^{i0} - \frac{1}{T} U_{i,j} \Delta T^{ij}. \quad (1.49)$$

Para que esta quantidade seja sempre positiva definimos ΔT^{i0} e ΔT^{ij} por

$$\begin{aligned} \Delta T^{i0} &= -\kappa \left(T_{,i} + T \dot{U}_i \right), \\ \Delta T^{ij} &= -\eta \left(U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \delta_{ij} \right) - \zeta \nabla \cdot \mathbf{U} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde

$$\kappa \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \zeta \geq 0, \quad (1.51)$$

tal que

$$\begin{aligned} S_{,\alpha}^\alpha &= \frac{\kappa}{T^2} (\nabla T + T \dot{\mathbf{U}})^2 \\ &+ \frac{\eta}{2T} \left(U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \delta_{ij} \right)^2 \\ &+ \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{U})^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

seja sempre positivo. Comparando (1.50) com as equações de um fluido imperfeito não relativístico, verificamos que neste último caso o termo $T\dot{U}$ não aparece, e é possível identificar os coeficientes κ , η e ζ como os coeficientes de transporte de calor, viscosidade de estresse e viscosidade de volume “*bulk*”. Para expressar os resultados (1.50), válidos em um CLF, em um GLF definimos as quantidades:

a) Tensor de Estresse ($\sigma_{\alpha\beta}$)

$$2\sigma_{\alpha\beta} = (U_{\mu,\nu} + U_{\nu,\mu})h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu} - \frac{2}{3}\theta h_{\alpha\beta}, \quad (1.53)$$

onde $\theta = U^{\alpha}_{,\alpha}$ e $h_{\alpha\beta}$ é o tensor de projeção no hiperplano normal a U^{α} definido como

$$h_{\alpha\beta} \equiv \lambda_{(i)\alpha}\lambda_{\beta}^{(i)} = \eta_{\alpha\beta} + U_{\alpha}U_{\beta}. \quad (1.54)$$

b) Vetor Fluxo de Calor (Q_{α})

$$Q_{\alpha} \equiv (T_{,\alpha} + TU_{\alpha,\beta}U^{\beta}). \quad (1.55)$$

Com estas definições podemos escrever $\Delta T^{\alpha\beta}$ como

$$\Delta T^{\alpha\beta} = -2\eta\sigma^{\alpha\beta} - \kappa(h^{\alpha\gamma}U^{\beta} + h^{\beta\gamma}U^{\alpha})Q_{\gamma} - \zeta h^{\alpha\beta}\theta, \quad (1.56)$$

pode-se verificar que as equações (1.50) são satisfeitas por (1.56), como esta equação é um invariante de Lorentz e além disso é válida num CLF, então é válida num GLF. Portanto encontramos uma solução geral dada por (1.56) que é compatível com o segundo princípio da termodinâmica.

1.4 Fluxos Potenciais

Para poder fazer um estudo das linhas de fluxo e de densidades constantes de um fluido é preciso determinar primeiro a 4-velocidade do fluido. Para esse fim, retomamos parte da discussão em relação a um fluido perfeito já que nesse contexto encontramos os fluxos potenciais.

Fazendo a projeção de (1.32) perpendicular à 4-velocidade, usando o tensor projeção (1.54), vemos que

$$T_{\mu,\nu}^{\nu} + U_{\mu}U^{\nu}T_{\nu,\lambda}^{\lambda} = 0, \quad (1.57)$$

a expressão da esquerda torna-se identicamente nula ao ser multiplicada por U^{μ} . Substituindo o tensor de energia momentum de um fluido perfeito (1.25) em (1.57) obtemos a relação

$$p_{,\mu} + U_{\mu}U^{\nu}p_{,\nu} = -(\rho + p)U^{\nu}U_{\mu,\nu}. \quad (1.58)$$

As três componentes espaciais desta equação formam a equação de Euler relativística. A componente temporal está implícita nas outras três. As equações do movimento (1.58) podem ser escritas de forma mais simples considerando que o fluido é isentrópico. Neste caso $\sigma/n =$ constante, e da equação da termodinâmica que relaciona a entalpia por partícula, $h = (\rho + p)/n$, com a entropia por partícula e a pressão, $dh = Td(\sigma/n) + dp/n$, obtemos que

$$p_{,\mu} = n \left(\frac{\rho + p}{n} \right)_{,\mu} \equiv nh_{,\mu}. \quad (1.59)$$

Com isto, a equação (1.58) pode ser escrita como

$$U^{\nu}w_{\mu\nu} = 0, \quad (1.60)$$

onde $w_{\mu\nu}$ é o tensor de vorticidade relativístico definido como

$$w_{\mu\nu} = (hU_{\mu})_{,\nu} - (hU_{\nu})_{,\mu}. \quad (1.61)$$

A equação (1.60) tem por solução

$$HU_{\mu} = \Phi_{,\mu}, \quad (1.62)$$

onde $H = h/h_{\infty}$ é a entalpia por partícula normalizada por seu valor assintótico. Isto é feito com o fim de simplificar os cálculos omitindo-se as constantes de proporcionalidade. A solução (1.62) é chamada solução de fluido potencial (fluido com vorticidade nula ou laminar). Vemos

de (1.62) que para obter a 4-velocidade de nosso fluido é necessário conseguir uma forma de calcular o campo escalar Φ . Da equação de continuidade (1.7) e de (1.62) obtemos uma equação diferencial parcial para Φ dada por

$$\left(\frac{n}{H}\Phi^{,\mu}\right)_{,\mu} = 0, \quad (1.63)$$

que é uma equação não linear já que depende da equação de estado do fluido. Devido às diferentes aplicações na física, consideramos uma equação de estado de tipo barotrópica, $p = p(\rho)$, da forma $p = (\gamma - 1)\rho$. Para cada equação de estado barotrópica existe a sua correspondente equação de estado de tipo politrópica, $p = p(n)$, via primeira e segunda lei da termodinâmica

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = Td\left(\frac{\sigma}{n}\right). \quad (1.64)$$

Substituindo $p = (\gamma - 1)\rho$ em (1.64) e integrando obtemos a conhecida equação politrópica

$$p = Kn^\gamma. \quad (1.65)$$

Com isto a relação entre a entalpia, H , e a densidade de partículas, n , é dada por

$$n = n_\infty H^{1/(\gamma-1)}, \quad (1.66)$$

onde n_∞ é o valor assintótico da densidade de partículas.

Voltando ao contexto de relatividade geral e substituindo (1.66) em (1.63) obtemos

$$\square\Phi + \frac{2-\gamma}{\gamma-1}\Phi^{,\mu}(\ln H)_{,\mu} = 0, \quad (1.67)$$

onde $\square\Phi \equiv (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu})_{,\nu}/\sqrt{-g}$ e $H = \sqrt{-\Phi_{,\alpha}\Phi^{,\alpha}}$. Para o caso particular em que $\gamma = 2$ ($p = \rho$), a equação diferencial se torna linear. Nesse caso a velocidade do som no fluido, definida como $c_s^2 = dp/d\rho$, é igual à velocidade da luz. Devido a este fato, a situação física descrita por $\gamma = 2$ não é muito comum, mas existem situações, como o caso de uma estrela de nêutrons a velocidade relativística, que podem ser modelada por esta equação de estado. Este tipo de fluido recebe o nome de fluidos duros ou “*stiff*”. Para $1 < \gamma < 2$ a velocidade do som no fluido é menor que a velocidade da luz com o que se descreve uma situação física mais realista,

mas nesse caso a equação diferencial é não linear. Nesta seção obtivemos (1.67) no contexto da relatividade restrita e depois passamos ao contexto da relatividade geral. Em [13] a equação (1.67) é obtida no contexto da relatividade geral em forma direta.

Tendo uma forma de calcular a 4-velocidade do fluido mediante a obtenção de Φ em (1.67), o próximo passo será modelar diferentes situações físicas mediante as métricas a serem usadas. É importante destacar que em nossos problemas o fluido será um fluido de teste (ou não autogravitante), em que a métrica $g_{\mu\nu}$ é dada a priori e não está relacionada com o tensor energia-momento diretamente por (1.1), isto é visto como uma primeira aproximação ao problema em questão. No próximo capítulo veremos algumas situações interessantes.

Métricas com Simetria Axial

Neste capítulo vamos estudar a forma geral da métrica do espaço-tempo para sistemas com simetria axial assim como algumas situações particulares.

Na física Newtoniana, um campo gravitacional com simetria axial é definido como sendo independente do ângulo azimutal φ . Levando esta mesma idéia para a Relatividade Geral consideramos que o tensor $g_{\mu\nu}$ é independente da coordenada φ . Com apenas esta hipótese é impossível obter qualquer resultado de interesse em uma situação tão geral em que temos 10 funções de três coordenadas. Se além da condição de simetria axial introduzimos uma condição estacionária fazemos com que $g_{\mu\nu}$ seja independente tanto de φ como de t . Também assumiremos que φ e t são reversíveis no sentido que a métrica se mantém invariante ao substituir φ por $-\varphi$ ou t por $-t$. Fisicamente isto significa que estamos em um meio onde a fonte é estática. Matematicamente significa que a métrica contém $d\varphi$ e dt só como formas quadráticas. Portanto, a forma geral seria ¹

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2. \quad (2.1)$$

¹Esta métrica do espaço-tempo, com as simetrias especificadas acima, pode ser obtida através da equação de Killing em forma mais elaborada.

É possível usar coordenadas (x^1, x^2) para as quais ds^2 possui a forma

$$ds^2 = -\gamma^2(dx^0)^2 + \alpha^2[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + \beta^2(dx^3)^2, \quad (2.2)$$

onde (α, β, γ) são funções de (x^1, x^2) . Definimos, por conveniência, as variáveis (x^0, x^1, x^2, x^3) como (t, R, z, φ) respectivamente, onde t é o tempo e (R, z, φ) são as coordenadas cilíndricas. Também definimos as funções (α, β, γ) como $\alpha = e^{\nu-\Psi}$, $\beta = re^{-\Psi}$ e $\gamma = e^\Psi$, onde $\nu = \nu(R, z)$ e $\Psi = \Psi(R, z)$. Resolvendo, com estas definições, as equações de Einstein no vácuo encontra-se que

$$ds^2 = -e^{2\Psi} dt^2 + e^{2(\nu-\Psi)}(dR^2 + dz^2) + e^{-2\Psi} R^2 d\varphi^2, \quad (2.3)$$

onde Ψ e ν são dadas por

$$\nabla^2 \Psi = \Psi_{,RR} + \frac{1}{R} \Psi_{,R} + \Psi_{,zz} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nu_{,R} = R[\Psi_{,R}^2 - \Psi_{,z}^2], \quad (2.5)$$

$$\nu_{,z} = 2R\Psi_{,R}\Psi_{,z}. \quad (2.6)$$

As equações (2.3)-(2.6) determinam a forma geral de uma métrica estática com simetria axial. Na aproximação Newtoniana a componente g_{00} da métrica encontra-se relacionada com a fonte de matéria. Além disso, Ψ satisfaz (2.4) que é a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, o que nos leva a pensar em Ψ como um potencial gravitacional que se assemelha ao potencial gravitacional Newtoniano. Com o finalidade de resolver (2.4) usando um desenvolvimento multipolar, é conveniente expressar (2.3)-(2.6) em coordenadas esferoidais prolatas (u, v, φ) . Estas coordenadas estão relacionadas com as coordenadas (R, z, φ) na forma

$$u = \frac{1}{2m}(R_1 + R_2), \quad v = \frac{1}{2m}(R_1 - R_2), \quad \varphi = \varphi, \quad (2.7)$$

onde

$$R_1^2 = R^2 + (z + m)^2, \quad R_2^2 = R^2 + (z - m)^2, \quad (2.8)$$

As quais possuem como superfícies coordenadas espaciais: elipsóides ($u = \text{cte}$), hiperbolóides de duas folhas ($v = \text{cte}$) e planos ($\varphi = \text{cte}$). Estas novas coordenadas estão definidas nos seguintes intervalos: $u \geq 1$; $-1 \leq v \leq 1$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. É importante notar que no limite quando $u \rightarrow 1$ o elipsóide se converte em uma barra de comprimento $2m$. Com estas coordenadas as equações (2.3)-(2.6) podem ser escritas do seguinte modo

$$ds^2 = -e^{2\Psi} dt^2 + m^2 e^{2(\nu-\Psi)} (u^2 - v^2) \left(\frac{du^2}{u^2 - 1} + \frac{dv^2}{1 - v^2} \right) + m^2 e^{-2\Psi} (u^2 - 1)(1 - v^2) d\varphi^2, \quad (2.9)$$

com

$$[(u^2 - 1)\Psi_{,u}]_{,u} + [(1 - v^2)\Psi_{,v}]_{,v} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nu_{,u} = \frac{1 - v^2}{u^2 - v^2} [u(u^2 - 1)\Psi_{,u}{}^2 - u(1 - v^2)\Psi_{,v}{}^2 - 2v(u^2 - 1)\Psi_{,u}\Psi_{,v}], \quad (2.11)$$

$$\nu_{,v} = \frac{u^2 - 1}{u^2 - v^2} [v(u^2 - 1)\Psi_{,u}{}^2 - v(1 - v^2)\Psi_{,v}{}^2 + 2u(1 - v^2)\Psi_{,u}\Psi_{,v}]. \quad (2.12)$$

Para encontrar uma métrica de uma particular distribuição de matéria deve-se primeiro resolver (2.10) como se Ψ fosse o potencial newtoniano. Depois mediante as equações (2.11) e (2.12) calcula-se a função ν mediante o método de quadraturas. Uma vez obtidas as soluções para Ψ e ν , estas são colocadas na métrica (2.9).

2.1 Solução Multipolar

Para encontrar uma solução multipolar de (2.10) usamos o método de separação de variáveis [14]. Fazendo $\Psi = A(u)B(v)$ e substituindo em (2.10) obtemos o sistema de equações

$$[(u^2 - 1)A_{,u}]_{,u} - KA = 0, \quad (2.13)$$

$$[(1 - v^2)B_{,v}]_{,v} + KB = 0,$$

onde K é uma constante. A solução geral destas equações é

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n Q_n(u) + b_n P_n(u)][c_n Q_n(v) + d_n P_n(v)]. \quad (2.14)$$

Polinômios Internos

Nesta seção fazemos um resumo do trabalho de Quevedo [15]. Queremos modelar o espaço-tempo compreendido entre um núcleo massivo, que pode não ter simetria esférica mas sem quebrar a simetria axial, e o infinito (Minkowski). Para obter o elemento de linha de Minkowski de (2.9), as funções $\nu(u, v)$ e $\Psi(u, v)$ devem ser assintoticamente nulas

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \nu(u, v) = 0 = \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u, v), \quad (2.15)$$

no limite $m \rightarrow 0$. Se restringimos a solução (2.14) a esta condição devemos ter que $b_n = 0$, já que no infinito $P_n(u) \propto u^n$, o qual diverge. Se queremos que a solução seja regular no eixo de simetria devemos evitar as singularidades logarítmicas em $v = \pm 1$, e portanto $c_n = 0$. Com estas condições a solução geral é

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n Q_n(u) P_n(v). \quad (2.16)$$

Com ν dado por (2.16) e as equações (2.11,2.12) obtemos ν com o qual completamos o elemento de linha (2.9). É interessante ver o caso quando consideramos em (2.16) $q_0 = 1$ e $q_n = 0$ ($n \geq 1$). Com isso

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right), \quad (2.17)$$

e ν é dada por

$$\nu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u^2-1}{u^2-v^2} \right). \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.9), e fazendo uma transformação de coordenadas esferoidais prolatas (u, v, φ) em coordenadas esféricas (r, θ, φ) dadas por

$$u = \frac{r}{m} - 1, \quad v = \cos \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad (2.19)$$

chega-se ao elemento de linha

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.20)$$

que correspondente à métrica de Schwarzschild. Ou seja, a métrica de Schwarzschild corresponde à ordem zero (monopolo) da expansão multipolar e podemos definir a constante m como sendo a massa da estrela (ou buraco negro). Os potenciais Newtonianos (ϕ) podem ser calculados usando a definição (invariante de coordenadas) de Ehlers [16], dada por

$$\phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \Psi(R, z, \lambda), \quad (2.21)$$

onde $\lambda = c^{-2}$ (c denota a velocidade da luz). A dependência em λ da função Ψ se obtém substituindo $m \rightarrow mG\lambda$. Como exemplo é fácil ver que este processo nos leva, no caso de Schwarzschild, ao potencial Newtoniano de uma distribuição esférica simétrica de massa $\phi = -Gm/(\rho^2 + z^2)^{1/2}$. Por outro lado sabemos também [17] que a série (2.16) representa uma soma de potenciais associados a barras de comprimento $2m$ de densidades lineares dadas por $P_n(z/m)/2$. Vemos na continuação algumas formas exatas das funções Ψ e ν para os casos Monopolo + Dipolo, Monopolo + Quadrupolo e Monopolo + Octopolo. Estas funções são usadas para modelar núcleos massivos que se afastam da forma esférica. Denotaremos por \mathcal{D} , \mathcal{Q} e \mathcal{O} os valores dos campos dipolar, quadrupolar e octopolar respectivamente.

a) Monopolo + Dipolo

Partindo da série (2.16) e considerando os termos $n = 0$ e $n = 1$ com $u \rightarrow -u$, obtemos

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) - \mathcal{D}v \left[1 + \frac{1}{2} u \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right], \quad (2.22)$$

e de (2.11)-(2.12) com (2.22)

$$\begin{aligned} \nu(u, v) = & v^2 \frac{\mathcal{D}^2}{8} \left[(u^2 - 1) \log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + 4 \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) u + 4 \right] \\ & - v \mathcal{D} \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + \mathcal{D}^2 \left[-\frac{1}{2} \log(u^2 - v^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (u^2 - 1) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (u+1) + \log(u-1) \right] \\ & + \mathcal{D} \log \left(\frac{u-v}{u+v} \right) - \frac{1}{2} \log(u^2 - v^2) + \frac{1}{2} \log(u^2 - 1) - \frac{\mathcal{D}^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nas funções Ψ e ν já está incluída a condição de que sejam assintoticamente nulas. Com estas funções completamos a métrica (2.9).

b) Monopolo + Quadrupolo

Para esta situação consideramos os termos $n = 0$ e $n = 2$ com $u \rightarrow -u$ da série (2.16). Com isto e seguindo o procedimento do caso anterior obtemos

$$\begin{aligned} \Psi(u, v) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(3v^2 - 1) \left[\frac{3u}{2} + \frac{1}{4}(3u^2 - 1) \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right], \\ \nu(u, v) &= \frac{9}{64} v^4 \mathcal{Q}^2 \left[(u^2 - 1)(9u^2 - 1) \log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (36u^3 - 28u) \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + 36u^2 - 16 \right] \\ &\quad + v^2 \left\{ \frac{9}{32} \mathcal{Q}^2 (u^2 - 1)(1 - 5u^2) \log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + \left[\frac{3}{2} \mathcal{Q}u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{32} \mathcal{Q}^2 \left(-20u^3 + \frac{52}{3}u \right) \right] \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + 3\mathcal{Q} + 3\mathcal{Q}^2 - \frac{45}{8} \mathcal{Q}^2 u^2 \right\} \\ &\quad + \frac{9}{64} \mathcal{Q}^2 (u^2 - 1)^2 \log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + 1)^2 \log \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 - v^2} \right) \\ &\quad + \left[\frac{1}{16} \mathcal{Q}^2 (9u^3 - 15u) - \frac{3}{2} \mathcal{Q}u \right] \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \\ &\quad + \frac{9}{16} \mathcal{Q}^2 u^2 - 3\mathcal{Q} - \frac{3}{4} \mathcal{Q}^2, \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde já foi imposta a condição de que sejam assintoticamente nulas.

c) Monopolo + Octopolo

Nesta situação os termos de interesse na série (2.16) são $n = 0$ e $n = 3$ fazendo $u \rightarrow -u$. As funções ν e Ψ neste caso são

$$\begin{aligned} \Psi(u, v) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \\ &\quad + \frac{\mathcal{O}}{2} (5v^3 - 3v) \left[\left(\frac{3}{4}u - \frac{5}{4}u^3 \right) \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) - \frac{5}{2}u^2 + \frac{2}{3} \right], \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\nu(u, v) = & \frac{25}{384}v^6\mathcal{O}^2 \left[\log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (225u^6 - 351u^4 + 135u^2 - 9) \right. \\
& \left. + \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (900u^5 - 1104u^3 + 252u) + 900u^4 - 804u^2 + 64 \right] \\
& + \frac{15}{384}v^4\mathcal{O}^2 \left[\log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (-585u^6 + 945u^4 - 387u^2 + 27) \right. \\
& \left. + \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (-2340u^5 + 3000u^3 - 756u) - 2340u^4 + 2220u^2 \right. \\
& \left. - 224 \right] + \frac{160}{128}v^3\mathcal{O} \left[\log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (-3u^2 + 1) - 6u \right] \\
& + \frac{3}{384}v^2\mathcal{O}^2 \left[\log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (1125u^6 - 1935u^4 + 891u^2 - 81) \right. \\
& \left. + \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (4500u^5 - 6240u^3 + 1884u) + 4500u^4 - 4740u^2 \right. \\
& \left. + 704 \right] + \frac{96}{128}v\mathcal{O} \left[\log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (5u^2 - 3) + 10u \right] \\
& + \frac{\mathcal{O}^2}{128} \left[\log^2 \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (-75u^6 + 135u^4 - 81u^2 + 21) \right. \\
& \left. + \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) (-300u^5 + 440u^3 - 204u - 64) - 64 \log(u^2 - v^2) \right. \\
& \left. + 128 \log(u-1) - 300u^4 + 340u^2 \right] + \mathcal{O} \log \left(\frac{u-v}{u+v} \right) \\
& + \frac{1}{2} \log \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 - v^2} \right) - \frac{11}{12}\mathcal{O}^2,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde a condição de que sejam assintoticamente nulas já foi considerada.

Polinômios Externos

Partindo novamente da solução geral procuramos uma solução particular da métrica que modele o espaço-tempo compreendido entre um núcleo massivo monopolar e uma distribuição externa de matéria [18]. Neste caso é necessária a introdução de multipolos externos, ou seja, usamos em (2.14) os polinômios de Legendre que aumentam com a distância. Guiados pelo caso newtoniano, a forma da função Ψ até termos octopolares é

$$2\Psi = 2\Psi_0 - 2\kappa Q_o(u) + 2\mathcal{D}P_1(u)P_1(v) + \frac{4}{3}\mathcal{Q}P_2(u)P_2(v) + \frac{4}{5}\mathcal{O}P_3(u)P_3(v), \tag{2.27}$$

onde Ψ_0 é uma constante de integração e Q_0 descreve o núcleo monopolar que, como já foi visto anteriormente, pode descrever uma estrela ou buraco negro de Schwarzschild. A constante κ pode ter os valores 1 ou 0, se desejamos ter ou não um núcleo monopolar, respectivamente. As funções Ψ e ν nesse caso são dadas explicitamente por

$$2\Psi = \kappa \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + P(u, v)$$

$$P = 2\Psi_0 + 2\mathcal{D}uv + \frac{1}{3}\mathcal{Q}(3u^2 - 1)(3v^2 - 1) + \frac{1}{5}\mathcal{O}uv(5u^2 - 3)(5v^2 - 3), \quad (2.28)$$

e

$$2\nu = \kappa^2 \log \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 - v^2} \right) + F(u, v), \quad (2.29)$$

$$F = 2\nu_0 + \nu_{\mathcal{D}} + \nu_{\mathcal{Q}} + \nu_{\mathcal{O}} + \nu_{\mathcal{D}\mathcal{Q}} + \nu_{\mathcal{D}\mathcal{O}} + \nu_{\mathcal{Q}\mathcal{O}},$$

$$\nu_{\mathcal{D}} = 4\kappa\mathcal{D}v - \mathcal{D}^2[u^2(1 - v^2) + v^2],$$

$$\nu_{\mathcal{Q}} = -4\kappa\mathcal{Q}u(1 - v^2) + \frac{1}{2}\mathcal{Q}^2[u^4(1 - v^2)(1 - 9v^2) - 2u^2(1 - v^2)(1 - 5v^2) - v^2(2 - v^2)],$$

$$\nu_{\mathcal{O}} = -\frac{2}{5}\kappa\mathcal{O}v[5(3u^2 - 1)(1 - v^2) - 4] + \frac{3}{100}\mathcal{O}^2[-25u^6(1 - v^2)(5v^2 + 2v - 1)(5v^2 - 2v - 1) + 15u^4(1 - v^2)(65v^4 - 40v^2 + 3) - 3u^2(1 - v^2)(25v^2 - 3)(5v^2 - 3) - v^2(25v^4 - 45v^2 + 27)],$$

$$\nu_{\mathcal{D}\mathcal{Q}} = -4\mathcal{D}\mathcal{Q}uv(u^2 - 1)(1 - v^2),$$

$$\nu_{\mathcal{D}\mathcal{O}} = \frac{3}{10}\mathcal{D}\mathcal{O}[u^2(5u^2 - 6)(1 - v^2)(1 - 5v^2) + v^2(5v^2 - 6)],$$

$$\nu_{\mathcal{Q}\mathcal{O}} = -\frac{6}{5}\mathcal{Q}\mathcal{O}uv(u^2 - 1)(1 - v^2)[(5u^2 - 1)(3v^2 - 1) + 2(1 - v^2)].$$

Estas funções são usadas para modelar sistemas de interesse na astrofísica tais como supernovas, nebulosas e galáxias, já que nas suas estruturas apresentam um núcleo massivo e uma distribuição externa de matéria que podem ser vistas como uma expansão multipolar.

2.2 Métrica C

A métrica C é um membro da família de métricas com simetria axial, com a forma [19, 20]

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(q+p)^2} \left[-K^2 F(q) dt^2 + \frac{dp^2}{G(p)} + \frac{dq^2}{F(q)} + \frac{G(p)}{K^2} d\varphi^2 \right]. \quad (2.30)$$

As funções $G(p)$ e $F(q)$ são polinômios cúbicos dados por

$$F(q) = -1 + q^2 - 2mAq^3, \quad G(p) = 1 - p^2 - 2mAp^3, \quad (2.31)$$

onde as coordenadas t , p , q , φ e K são adimensionais e A tem dimensão de L^{-1} . A coordenada t tem os seus valores entre $-\infty$ e ∞ , enquanto φ tem valores entre 0 e 2π . O intervalo de valores das coordenadas p e q depende das raízes de F e G . Usualmente a condição $m^2A^2 < 1/27$ é aplicada para assegurar que as funções F e G tenham três raízes reais mas esta condição é devida somente às coordenadas utilizadas [21] e não é uma restrição física. Para o caso em que $m^2A^2 < 1/27$, as três raízes de $G(p)$ são [22]

$$\begin{aligned} p_\pi &= -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + 1 \right], \\ p_0 &= -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + 1 \right], \\ p_u &= -\frac{1}{6Am} \left(2 \cos \frac{\lambda}{3} + 1 \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde

$$\cos \lambda = 1 - 54A^2m^2. \quad (2.33)$$

Da mesma forma, as três raízes de $F(q)$ são dadas por

$$\begin{aligned} q_S &= -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\delta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - 1 \right], \\ q_R &= -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\delta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) - 1 \right], \\ q_u &= -\frac{1}{6Am} \left(2 \cos \frac{\delta}{3} - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde

$$\cos \delta = -(1 - 54A^2m^2). \quad (2.35)$$

Em nosso trabalho as funções $[F(q), G(p)]$ são limitadas pelas raízes (q_R, q_S) e (p_0, p_π) . Nesse intervalo a métrica representa um buraco negro acelerado, e (m, A) são interpretadas como a

massa e aceleração de um buraco negro respectivamente. As fontes de matéria são dadas por uma barra e uma linha semi-infinita, ambas de densidade $1/2$ e colocadas ao longo de um dos eixos do referencial [23]. Estas fontes de matéria são interpretadas como uma partícula ou buraco negro (a barra) em um referencial acelerado (a linha semi-infinita), e portanto associados a espaço-tempos de Schwarzschild e Rindler. Estas fontes se mantêm separadas devido à singularidade cônica que existe entre elas. Dependendo dos intervalos escolhidos para (p, q) , a métrica C pode, além da interpretação de um buraco negro acelerado, ser associada a outros espaço-tempos. Um resumo destes espaço-tempos e algumas das suas propriedades encontram-se em [21].

Notamos que ao fazer $A \rightarrow 0$ em (2.30) a métrica diverge e não obtemos o limite correto que corresponderia à métrica de Schwarzschild. Para um melhor entendimento do problema é portanto, necessário fazer uma transformação de coordenadas tal que nos permita, nestas novas coordenadas, obter o limite correto de (2.30). Uma transformação adequada é dada por [22]

$$r = \frac{1}{A(q+p)}, \quad t \rightarrow At, \quad (2.36)$$

com isto, a métrica (2.30) se transforma em

$$ds^2 = -H dt^2 + \frac{1}{H} dr^2 + \frac{2Ar^2}{H} dr dp + r^2 \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G} \right) dp^2 + r^2 G d\varphi^2, \quad (2.37)$$

onde

$$\begin{aligned} H = A^2 r^2 F &= -A^2 r^2 G(p - A^{-1} r^{-1}) \\ &= 1 - \frac{2m}{r} + 6Amp + ArG_{,p} - A^2 r^2 G. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Vemos que a métrica (2.37) toma a forma de Schwarzschild se, ao fazer o limite $A \rightarrow 0$, a coordenada angular p estiver relacionada à coordenada angular esférica θ por meio de $G(p) = 1 - p^2 = \sin^2 \theta$. Além disso, se fazemos $m \rightarrow 0$, o espaço se torna Euclideano e a métrica representa um espaço plano em um referencial acelerado [22]. Com a transformação (2.36) obtemos o caso limite de Schwarzschild, mas agora a métrica não é diagonal.

Quando $A \neq 0$, a coordenada angular p e θ estão relacionadas pela função $G(p) = 1 - p^2 - 2Amp^3 = \sin^2 \theta$. Neste caso o mapeamento correto entre elas é [22]

$$p = \begin{cases} -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + 1 \right] & \text{for } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + 1 \right] & \text{for } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.39)$$

onde

$$\cos \Theta(\theta) = 1 - 54A^2 m^2 \cos^2 \theta. \quad (2.40)$$

Com este mapeamento, o horizonte do buraco negro é deformado quando se aumenta a sua aceleração (mantendo a condição $m^2 A^2 < 1/27$). A forma exata do horizonte é obtida em [22] e é dada por

$$r_{Sch} = \begin{cases} -\frac{3m}{\cos \left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\delta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)} & \text{for } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{3m}{\cos \left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\delta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)} & \text{for } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (2.41)$$

Com as métricas estudadas nesta seção, será possível estudar os diferentes casos substituindo-as na EDP do potencial da velocidade (1.67), e assim obter a 4-velocidade do fluido. Isto depende também da equação de estado considerada. No próximo capítulo vemos dois casos com soluções exatas.

Soluções Exatas

Neste capítulo vemos dois casos nos quais é conhecida uma solução exata do problema de calcular (1.67) com a métrica de Schwarzschild vista no capítulo 2. O estudo destes casos ajudam a entender a mecânica do nosso estudo em fluidos. Outro motivo importante é que são testes obrigatórios para qualquer código computacional.

3.1 Esfera Rígida de Schwarzschild e $p = \rho$

Seguimos neste caso o trabalho feito por Shapiro [1]. No seu estudo Shapiro utiliza para resolver (1.67) a métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas (2.20) e uma equação de estado $p = \rho$ ($\gamma = 2$). Como já vimos na Seção 2.1, esta métrica corresponde à expansão multipolar externa com $n = 0$. Escrevendo (1.67) em forma explícita

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0, \quad (3.1)$$

onde M é a massa da estrela ou do buraco negro. Se agora impomos a condição de que o fluido seja também estacionário, a 4-velocidade não pode depender explicitamente do tempo. Por esse motivo a parte temporal de Φ é dada pelo termo $-at$, onde a é uma constante relacionada à

componente zero da 4-velocidade. Assim, a equação (3.1) pode ser escrita como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \quad (3.2)$$

Utilizando o método de separação de variáveis para resolver esta equação obtemos a solução

$$\Phi = -at + \sum_{l,m} [A_{lm} P_l(\xi) + B_{lm} Q_l(\xi)] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.3)$$

onde A_{lm} e B_{lm} são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno, $\xi = r/M - 1$.

e as funções $Y_{lm}(v, \varphi)$ são os harmônicos esféricos. As componentes da 4-velocidade (1.62), tendo em vista que neste caso $H = n$, são

$$nU_t = -a, \quad (3.4)$$

$$nU_r = \frac{1}{M} \sum_{l,m} [A_{lm} P'_l(\xi) + B_{lm} Q'_l(\xi)] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.5)$$

$$nU_\theta = \sum_{l,m} [A_{lm} P_l(\xi) + B_{lm} Q_l(\xi)] Y_{lm}(\theta, \varphi)_{,\theta}, \quad (3.6)$$

$$nU_\varphi = \sum_{l,m} [A_{lm} P_l(\xi) + B_{lm} Q_l(\xi)] Y_{lm}(\theta, \varphi)_{,\varphi}, \quad (3.7)$$

onde as linhas representam derivadas com respeito ao argumento.

Resta agora impor as condições de contorno ao nosso problema. A condição de contorno na superfície da esfera rígida é que a componente normal da velocidade seja nula, matematicamente isto quer dizer

$$U_r = 0 = \Psi_{,r}, \quad \text{em } r = R, \quad (3.8)$$

o que implica

$$B_{lm} = -\frac{A_{lm} P'_l(\xi_R)}{Q'_l(\xi_R)}. \quad (3.9)$$

onde $\xi_R = R/M - 1$. Esta condição de contorno pode ser usada, por exemplo, para uma estrela de nêutrons movimentando-se a velocidades relativísticas dentro de um fluido. No caso de uma estrela comum, esta condição é usada como uma aproximação já que ela possui uma superfície

gasosa e não dura. A outra condição é dada no infinito com a exigência de que a velocidade do fluido seja constante, ou seja

$$r \rightarrow \infty : \quad \Phi = -at + br \cos \theta. \quad (3.10)$$

Comparando (3.3) com (3.10) vemos que todas as constantes A 's e B 's são nulas com exceção de $A_{10} = \sqrt{4\pi/3}Mb$ e B_{10} dado por (3.9). Substituindo estes valores em (3.3) encontramos a solução final

$$\Phi = -at + Mb \cos \theta \left(\xi - \frac{Q_1(\xi)}{Q_1'(\xi_R)} \right), \quad (3.11)$$

com a 4-velocidade dada por

$$\begin{aligned} nU_t &= -a, \\ nU_r &= b \cos \theta \left(1 - \frac{Q_1'(\xi)}{Q_1'(\xi_R)} \right), \\ nU_\theta &= -b \sin \theta M \left(\xi - \frac{Q_1(\xi)}{Q_1'(\xi_R)} \right), \\ nU_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

com

$$Q_1 = \frac{1}{2} \xi \ln \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right) - 1, \quad (3.13)$$

onde as linhas denotam derivadas com relação a ξ . A densidade de partículas em unidades de n_∞ é obtida substituindo (3.12) em (1.66).

3.2 Buraco Negro de Schwarzschild e $p = \rho$

Neste caso, usamos os resultados obtidos em [3]. A principal diferença entre o caso da esfera rígida e o buraco negro encontra-se na condição de contorno na superfície do buraco negro (horizonte). As condições de fronteira que devemos impor são: (i) A densidade de partículas n deve ser finita no horizonte do buraco negro ($r = 2M$); (ii) No infinito o fluido deve ser uniforme e estar avançando na direção de z .

Vejamos primeiro como implementar a condição (i). Calculando a densidade n de partículas, $n^2 = -\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu}$, temos que

$$n^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (nU_t)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (nU_r)^2 - \frac{1}{r^2} (nU_\theta)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2} (nU_\varphi)^2. \quad (3.14)$$

Para este caso a função geral para Φ (3.3) é a mesma que no caso da esfera rígida. Inicialmente a equação (3.14) parece divergente no horizonte, mas essa divergência pode ser eliminada se uma das velocidades espaciais diverge apropriadamente. Levando em consideração os comportamentos das funções de Legendre perto do horizonte, $\xi = 1$, encontramos que

$$n^2 \rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[b^2 - \left(\frac{1}{4M} \sum_{l,m} B_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Esta relação nos proporciona uma condição para as constantes B 's, já que se queremos que n seja finito em $\xi = 1$, devemos ter $B_{00}Y_{00} = 4Ma$ e zero para os demais B 's. Escolhemos então B_{00} positivo o que indica que o nosso fluido entra no buraco negro. Dessa forma, podemos escrever (3.3) como

$$\Phi = -at - 2Ma \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \sum_{l,m} A_{lm} P_l(u) Y_{lm}(v, \varphi). \quad (3.16)$$

Impondo agora a condição (ii) no infinito vemos que todos os A 's devem ser iguais a zero, exceto o termo A_{10} . Assim obtemos finalmente como solução

$$\Phi = -at - 2Ma \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + bM(r - M) \cos \theta. \quad (3.17)$$

As linhas de fluxo do fluido correspondentes a este potencial são apresentadas na referência [3]. Outro importante resultado que pode ser obtido com a solução (3.17) é a acreção de partículas ao buraco negro

$$\dot{N} = - \int_S n U^i \sqrt{-g} dS_i, \quad (3.18)$$

onde a superfície de integração, S , é uma 2-superfície esférica com centro no buraco negro. Em nosso caso o valor é

$$\dot{N} = 16\pi M^2 n_\infty b. \quad (3.19)$$

Este valor é obtido com a condição que a densidade de partículas no infinito seja constante.

Método Computacional

Neste capítulo apresentamos as noções básicas para poder discretizar nossa EDP (1.67) e assim poder obter uma solução numérica. Vemos o caso em que $\gamma = 2$ por ser o mais simples. O caso em que $1 < \gamma < 2$ pode ser estudado de forma similar.

É importante notar que a equação diferencial (1.67) para o potencial Φ com uma métrica do tipo (2.9) é independente das funções ν e Ψ . Estas funções só aparecem no cálculo da densidade de partículas (1.66). Com a condição que Φ é estacionário e independente de φ a equação (1.67) pode ser escrita

$$[(u^2 - 1)\Phi_{,u}]_{,u} + [(1 - v^2)\Phi_{,v}]_{,v} = 0. \quad (4.1)$$

Para discretizar esta equação usamos o método de diferenças finitas. Este método consiste em dividir o domínio da solução em uma rede de pontos nodais. Em cada ponto da rede a equação diferencial é aproximada substituindo as derivadas parciais por aproximações em termos dos valores de Φ nos nodos. O resultado é uma equação algébrica por nodo, onde os valores dos Φ 's no nodo e nos nodos vizinhos aparecem como incógnitas. Para aproximar as derivadas das funções usamos uma expansão em serie de Taylor para cada nodo. Na Figura 4.1 temos um exemplo de uma rede ortogonal em duas dimensões. Cada nodo é identificado por um conjunto

de índices, em nosso caso (i, j) . Os nodos vizinhos são definidos somando ou subtraindo uma unidade em um dos índices.

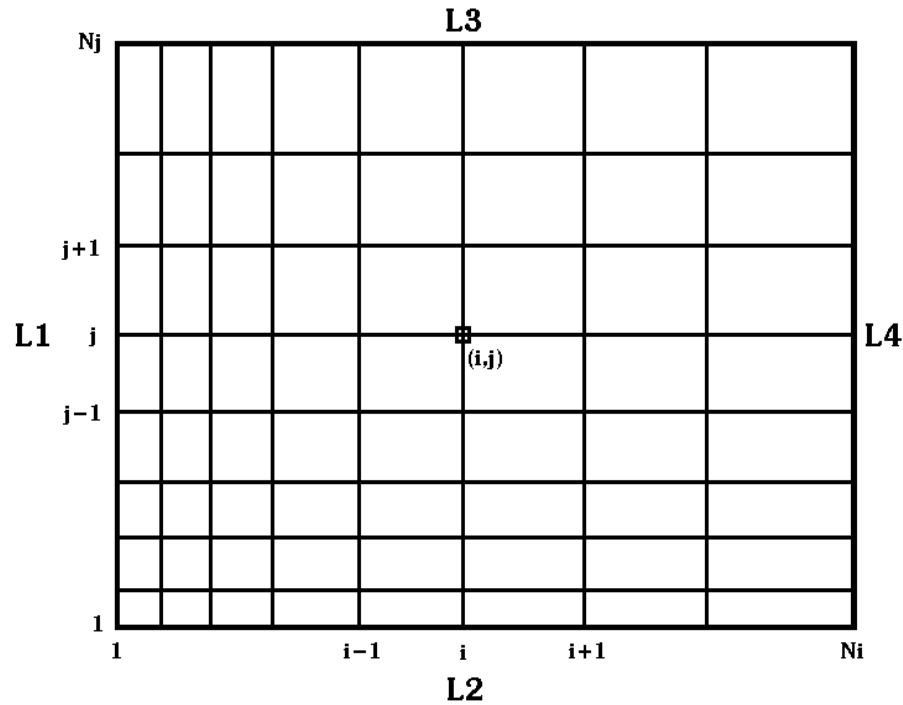


Figura 4.1: Exemplo de rede ortogonal de nodos que pode ser usada para discretizar o domínio de uma EDP.

Aproximação das Derivadas

Para aproximar as derivadas e discretizar nosso problema consideramos na Figura 4.1 que os eixos i e j representam os eixos das variáveis u e v respectivamente, e que as diferenças $(i) - (i - 1) = (i + 1) - (i) = \Delta u$, $(j) - (j - 1) = (j + 1) - (j) = \Delta v$ são constantes em toda a rede.

Qualquer função diferenciável $\Phi(u, v)$ pode ser expressada¹ na vizinhança de (i, j) mediante

¹No resto da seção denotamos a função $\Phi(u, v)$ calculada em (i, j) por $\Phi(u_i, v_j) \equiv \Phi(i, j)$.

uma série de Taylor. Para $\Phi(i-1, j)$ na vizinhança de $\Phi(i, j)$ temos

$$\Phi(i-1, j) = \Phi(i, j) - \Delta u \Phi_{,u} + \frac{(\Delta u)^2}{2!} \Phi_{,uu} - \frac{(\Delta u)^3}{3!} \Phi_{,uuu} + \dots, \quad (4.2)$$

com o qual podemos expressar a primeira derivada como

$$\Phi_{,u} = \frac{\Phi(i, j) - \Phi(i-1, j)}{\Delta u} + O[\Delta u]. \quad (4.3)$$

Por outro lado, considerando a série de Taylor para $\Phi(i+1, j)$ na vizinhança de $\Phi(i, j)$ obtemos

$$\Phi_{,u} = \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{\Delta u} - O[\Delta u]. \quad (4.4)$$

As expressões (4.3) e (4.4) que descrevem a primeira derivada de uma função não são muito precisas já que estamos desprezando termos da ordem Δu . Uma melhor aproximação pode ser obtida somando as equações (4.3) e (4.4),

$$\Phi_{,u} = \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta u} + O[(\Delta u)^2]. \quad (4.5)$$

Por outro lado é fácil obter uma expressão para a segunda derivada de Φ eliminando $\Phi_{,u}$ da série de Taylor

$$\Phi_{,uu} = \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta u)^2} + O[(\Delta u)^2]. \quad (4.6)$$

Relações similares às vistas podem ser obtidas para a coordenada v , assim como derivadas mistas. Para aproximar os termos da equação (4.1) fazemos

$$\begin{aligned} \{[\Gamma(u, v)\Phi_{,u}]_{,u}\}_{i,j} &\approx \frac{[\Gamma(u, v)\Phi_{,u}]_{i+1/2,j} - [\Gamma(u, v)\Phi_{,u}]_{i-1/2,j}}{\Delta u} \\ &\approx \frac{\Gamma(u, v)_{i+1/2,j}[\Phi(i+1, j) - \Phi(i)] - \Gamma(u, v)_{i-1/2,j}[\Phi(i, j) - \Phi(i-1, j)]}{(\Delta u)^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde empregamos duas vezes (4.5) calculada nos pontos médios entre os nodos. Esta forma de discretizar o problema possui maior precisão já que são usados cinco pontos de referência para o cálculo. Desta forma, a equação (4.1) pode ser discretizada como

$$\begin{aligned} C1(i, j)\Phi(i, j) + C2(i, j)\Phi(i+1, j) + C3(i, j)\Phi(i-1, j) \\ + C4(i, j)\Phi(i, j+1) + C5(i, j)\Phi(i, j-1) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

com

$$\begin{aligned}
C1(i, j) &= \frac{v_{j+1/2}^2 + v_{j-1/2}^2 - 2}{(\Delta v)^2} - \frac{u_{i+1/2}^2 + u_{i-1/2}^2 - 2}{(\Delta u)^2}, \\
C2(i, j) &= \frac{u_{i+1/2}^2 - 1}{(\Delta u)^2}, \\
C3(i, j) &= \frac{u_{i-1/2}^2 - 1}{(\Delta u)^2}, \\
C4(i, j) &= \frac{1 - v_{j+1/2}^2}{(\Delta v)^2}, \\
C5(i, j) &= \frac{1 - v_{j-1/2}^2}{(\Delta v)^2},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde (u_i, v_j) são os valores de u e v na coordenada (i, j) . De (4.8) sempre é possível escrever uma das variáveis Φ em função das outras.

Condições de Contorno

(i) Dirichlet: a condição $\Phi(u, v) = f(u, v)$ pode ser escrita na forma $\Phi(u_i, v_j) = f(u_i, v_j)$.

(ii) Neumann: a condição de Neumann $\Phi_{,u} = f(u, v)$ pode ser discretizada mediante (4.5) como

$$\frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta u} = f(u_i, v_j). \tag{4.10}$$

(iii) Condição do Buraco Negro: a condição de contorno que tínhamos para o caso do buraco negro era que o número de partículas n fosse finito no horizonte. Numericamente isto se consegue fazendo [2]

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left[\frac{\Phi_{,r^*} - \Phi_{,t}}{u-1} \right] = 0, \tag{4.11}$$

onde $r^* = (u+1) + 2 \ln \left(\frac{u-1}{2} \right)$ é a coordenada tartaruga [24]. A equação (4.11) pode ser discretizada usando os métodos já apresentados.

(iv) Dirichlet em uma superfície curva: este caso não será usado nesta tese. Para uma descrição do método ver [25, 26]

(v) Neumann em uma superfície curva: neste tipo de situação existem várias formas de abordar o problema. Nós vemos apenas uma delas. Primeiro se substitui a superfície curva (\mathcal{C}) por outra superfície feita de pequenos traços (Figura 4.2). Para calcular a condição de velocidade normal

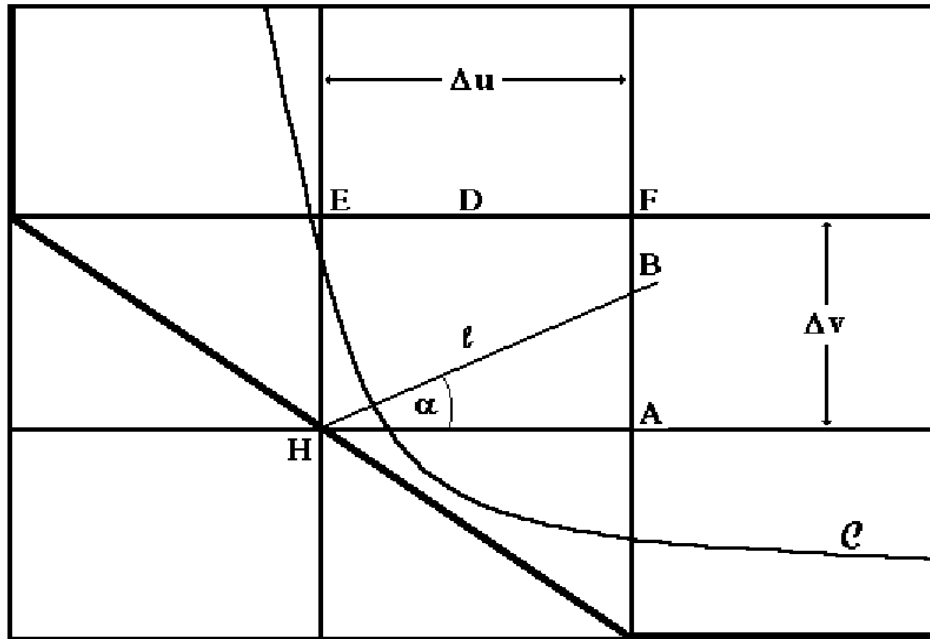


Figura 4.2: Esquema para o cálculo da condição de Neumann $U_n = 0$. A normal à curva pode atravessar o segmento AF ou FE.

$U_n = 0$ no ponto H, traçamos a perpendicular à curva \mathcal{C} que passa por H. Dependendo do tamanho da rede, a perpendicular poderia atravessar o segmento AF por B ou o segmento FE por D. Vejamos com detalhe o caso quando atravessa o segmento AF. A condição $U_n = 0$ pode ser escrita em termos de diferenças finitas na forma

$$U_n = 0 \Rightarrow \frac{\Phi(B) - \Phi(H)}{l} = 0 \Rightarrow \Phi(H) = \Phi(B). \quad (4.12)$$

É possível eliminar $\Phi(B)$ fazendo uma interpolação linear com dados dos pontos A e F,

$$\Phi(B) = \frac{AB}{AF} \Phi(F) + \left(1 - \frac{AB}{AF}\right) \Phi(A). \quad (4.13)$$

Da figura vemos também que os segmentos AB e AF podem ser escritos como

$$AB = \Delta u \tan \alpha, \quad AF = \Delta v. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) e (4.13) em (4.12) obtemos finalmente o valor de Φ no ponto H

$$\Phi(H) = \left(\frac{\Delta u}{\Delta v} \right) \tan \alpha \Phi(F) + \left[1 - \left(\frac{\Delta u}{\Delta v} \right) \tan \alpha \right] \Phi(A). \quad (4.15)$$

Operando da mesma forma se encontra, para o caso em que a normal corta o segmento EF, a relação

$$\Phi(H) = \left(\frac{\Delta v}{\Delta u} \right) \frac{1}{\tan \alpha} \Phi(F) + \left[1 - \left(\frac{\Delta v}{\Delta u} \right) \frac{1}{\tan \alpha} \right] \Phi(E). \quad (4.16)$$

Este método vai ser usado na Seção 5.1.

Existem vários métodos computacionais para resolver a equação (4.8). Um resumo dos métodos podem ser encontrados em [25, 26]. Os resultados dos Apêndices B e C foram obtidos com o método “*Stabilized Error Vector Propagation*” [27, 28]. O código computacional encontra-se no Apêndice A.

Aplicações

Na continuação, vemos algumas soluções numéricas e analíticas de (1.67) com as métricas vistas no Capítulo 2.

5.1 Núcleo Massivo com Simetria Axial e $p = \rho$

A seguir, vemos os casos em que nosso corpo rígido é composto por monopolo + dipolo, monopolo + quadrupolo e monopolo + octopolo. Nestes casos temos as seguintes condições de contorno para o fluido:

- (i) velocidade normal do fluido na superfície do objeto igual a zero ($U_n = 0$).
- (ii) longe do objeto a velocidade do fluido é constante.

O primeiro problema neste tipo de situação é determinar a superfície do objeto na qual será aplicada a condição (i). Uma forma de fazer isto é encontrar as superfícies equipotenciais Newtonianas para depois poder utilizar uma delas como superfície do objeto rígido. Sabemos que no limite de campos fracos o potencial Newtoniano está relacionado com a métrica do espaço-tempo através da componente g_{00} . Portanto é natural supor que as superfícies equipotenciais são dadas pela relação

$$g_{00} = -e^{-2\nu} = \delta = \text{cte.} \quad (5.1)$$

No caso de Schwarzschild, por exemplo, temos que as superfícies equipotenciais são esferas de raio $r > 2m$. Nos casos do dipolo, quadrupolo e octopolo, devemos ter mais cuidado com a relação (5.1), já que para alguns valores de \mathcal{D} , δ e v é impossível achar valores reais de u que satisfaçam (5.1), e portanto não teríamos uma superfície fechada para tê-la como superfície de nosso objeto rígido.

Pode-se ver que, em geral, este tipo de deformação na estrutura de uma estrela não modifica em forma significativa as linhas de fluxo nem as linhas de densidade constante. Isto é, devido ao fato que os polinômios de Legendre usados no cálculo decaírem com a distância (o termo monopolar nas funções ν e Ψ é o dominante). Perto da superfície as linhas de densidade constante possuem a forma da superfície considerada, longe do objeto estas linhas vão-se deformando até tornar-se quase esferas. Para o caso com octopolo, a equação (5.1) possui soluções que se afastam pouco do caso esférico. Podemos ver na Figura 5.1 o caso oblato ($\mathcal{Q} < 0$), onde o compartimento do fluido não difere muito do caso de simetria esférica. No caso prolato ($\mathcal{Q} > 0$) o comportamento é semelhante.

5.2 Esfera Rígida e Buraco Negro de Schwarzschild Acelerado (Métrica C) e $p = \rho$

As linhas de fluxo e de densidade constantes para os casos de uma esfera rígida e um buraco negro acelerado com $p = \rho$ estão resolvidas no Apêndice B. No primeiro caso encontramos uma solução numérica do problema e no segundo uma solução analítica usando um método perturbativo.

5.3 Esfera Rígida e Buraco Negro de Schwarzschild com Halo Dipolar e $p = \rho$

As linhas de fluxo e de densidade constante para os casos de uma esfera rígida e um buraco negro ambos com halo dipolar e $p = \rho$ estão resolvidos no Apêndice B em forma numérica.

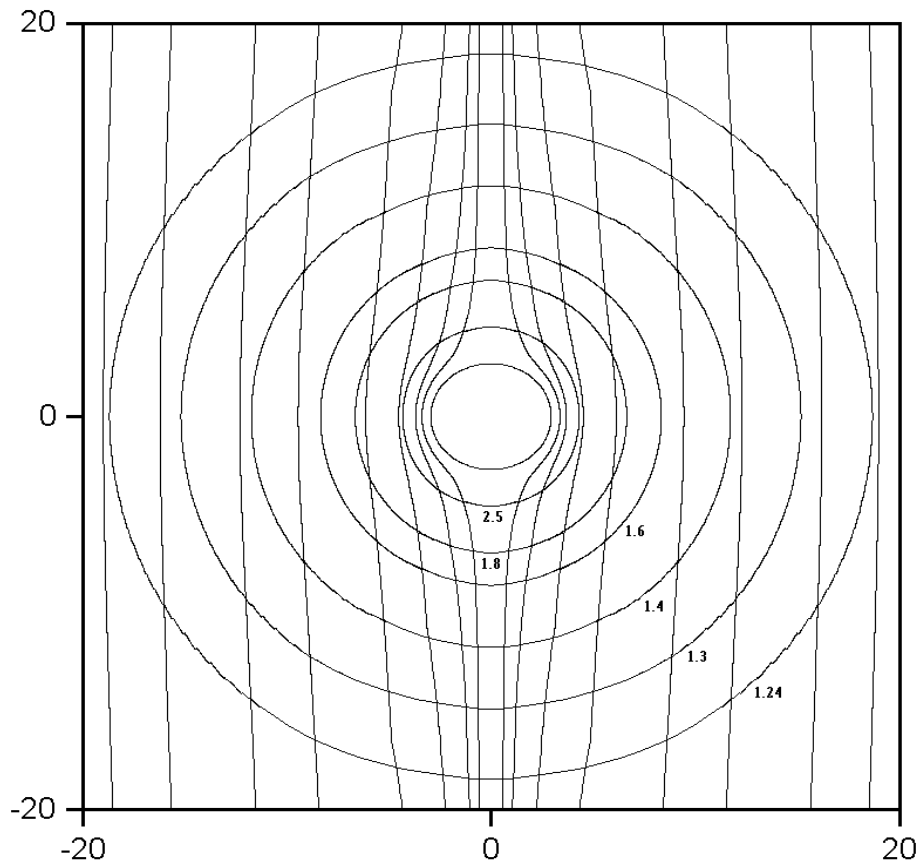


Figura 5.1: Resultados numéricos para as linhas de fluxo e de densidade constante no caso de uma estrela com deformação oblata e $p = \rho$. Na figura $\mathcal{Q} = -2$, $\delta = 0.3$, e os valores de a e b , da condição no infinito (3.10), são 1.25 e 0.75 respectivamente. Os valores das constantes (a, b) correspondem a um fluido movimentando-se uniformemente, longe do núcleo, com velocidade $0.6c$ (c a velocidade da luz), ver [3].

5.4 Esfera Rígida e Buraco Negro de Schwarzschild com Halo Dipolar e $p = (\gamma - 1)\rho$

As linhas de fluxo e de densidade constante para os casos de uma esfera rígida e um buraco negro, ambos com halo dipolar e $p = (\gamma - 1)\rho$, estão resolvidos no Apêndice C em forma

numérica. Também calculamos a acreção dos diferentes casos possíveis e comparamos os resultados.

Conclusões

Neste trabalho resolvemos os problemas de buraco negro e esfera rígida aceleradas, como também os problemas de esfera rígida e buraco negro com halo dipolar. Um dos principais problemas foi encontrar as condições de contorno apropriadas para os casos com halo dipolar, em particular achamos (B.47) como condição de contorno válida.

Descobrimos que uma forma de detetar a aceleração em um fluido potencial é mediante as linhas de densidade constante, já que as linhas de fluxo não diferem muito dos casos não acelerados [1, 3].

Por outro lado, obtivemos que o termo não linear que aparece na equação diferencial parcial para o caso quando $1 < \gamma < 2$ afeta levemente as linhas de fluxo e de densidade constante. Devido ao fator da entalpia em (C.4), os valores das linhas de densidade são afetados.

Também, nos casos dos buracos negros, calculamos a acreção para diferentes valores da constante γ . Vemos que, em geral, para o caso de densidade constante no infinito (n_∞), o valor da acreção aumenta ao diminuir o valor da constante γ , sendo maior no caso com dipolo do que no caso sem dipolo.

A variação do potencial da velocidade Φ entre o caso linear e não linear é, em media, de 5%. Por esse motivo a diferença entre as linhas de fluxo de ambos casos é pequena.

No contexto computacional, foram desenvolvidos códigos eficientes para resolver equações diferenciais parciais com condições de contorno de Neumann e Dirichlet. O código baseado no método *Stabilized Error Vector Propagation* [27, 28] encontra-se comentado no Apêndice A.

Como algumas das perspectivas do trabalho podemos dizer que, o método de halos multipolares pode ser usado para modelar outras estruturas do universo, de pequena e grande escala, tais como galáxias e nebulosas. Estas estruturas podem ser vistas, aproximadamente, como constituídas por um núcleo e um halo de matéria ao redor dele. A incorporação de rotação nos casos com $1 < \gamma < 2$ tratados nesta tese é um tema importante, já que incorpora novos elementos a serem discutidos e, também, poderia-se confirmar os comportamentos encontrados até agora em relação ao termo não linear.

Referências Bibliográficas

- [1] Shapiro, S L 1989 *Phys. Rev. D* **39** 2839;
- [2] Abrahams A M e Shapiro S L 1990 *Phys. Rev. D* **41**, 327;
- [3] Petrich L I, Shapiro S L e Teukolsky S A 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1781;
- [4] Shapiro S L e Teukolsky S A 1983 *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: the Physics of Compact Objects* (New York: Wiley);
- [5] Feinstein A e Ibáñez J 1992 *Phys. Lett. A* **171** 3;
- [6] Bonnor W B 1969 *Commun. Math. Phys.* **13** 163;
- [7] Font J A, Martí J M, Ibáñez J M e Miralles J A 1993 *Comput. Phys. Commun.* **75** 31;
- [8] Landau L D e Lifshitz E M 1987 *Fluid Mechanics* 2nd ed (Oxford: Butterworth-Heinemann);
- [9] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons);
- [10] Synge J L 1960 *Relativity: The General Theory*. (Amsterdam: North-Holland);
- [11] Taub A H 1978 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 333;

- [12] Eckart C 1940 *Phys. Rev.* **58** 919;
- [13] Tabensky R e Taub A H 1973 *Commun. Math. Phys.* **29**, 61;
- [14] Erez G e Rosen N 1959 *Bull. Res. Counc. Isr.* **8F**, 47;
- [15] Quevedo H 1989 *Phys. Rev. D* **39** 2904;
- [16] Ehlers J 1981 *Grundlagenprobleme der modernen Physik* editado por Nitsch J, Pfarr J e Stachov E-W (BI-Verlag, Mannheim) 65;
- [17] Letelier P S 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** 1207;
- [18] Vieira W M e Letelier P S 1999 *Astrophys. J.* **513** 383;
- [19] Kinnersley W e Walker M 1970 *Phys. Rev. D* **2** 1359;
- [20] Ehlers J e Kundt W 1962 *Gravitation, an Introduction to Current Research* (New York: Wiley);
- [21] Letelier P S e Oliveira S R 2001 *Phys. Rev. D* **64**, 064005;
- [22] Farhoosh H e Zimmerman R L 1980 *Phys. Rev. D* **21**, 317;
- [23] Bonnor W B 1983 *Gen. Rel. Grav.* **15**, 535;
- [24] Regge T e Wheeler J A 1957 *Phys. Rev.* **108** 1063;
- [25] Ferziger J H e Perić M 1996 *Computational Methods for Fluid Dynamics* (Berlin- Springer);
- [26] Carnahan B, Luther H A e Wilkes J O 1969 *Applied Numerical Methods* (New York: Wiley);
- [27] Roache P J 1978 *Num. Heat Trans.* **1** 1;
- [28] Madala R V 1978 *Mon. Wea. Rev.* **106** 1735.

Código Computacional para o Cálculo das EDP

Parâmetros do programa

`nmaxi`= número total de nodos no eixo i . Seu valor vem dado por

$$\text{nmaxi} = \text{nblocos} * \text{numi} - (\text{nblocos} - 1),$$

com `nblocos` o número de blocos que foi dividido o domínio e `numi` o número de nodos no eixo i por bloco, ver [27, 28].

`nmaxj`= número total de nodos no eixo j .

`raio`= raio da superfície da esfera, pode ser também o horizonte do buraco negro.

`du`= intervalo entre os nodos no eixo i .

`dv`= intervalo entre os nodos no eixo j .

Comentários do Programa

Nosso programa lê as informações das matrizes (4.9) obtidas da discretização da EDP (4.1), e logo resolve o problema para condições de contorno dadas. A solução final é apresentada no arquivo “solucao.dat”.

O domínio do problema é dividido usando uma rede ortogonal de nodos como na Figura 4.1. Os dados das matrizes C 's devem ser colocados em um arquivo “cs.dat” em 5 colunas ($C1, C2, C3, C4, C5$) deixando primeiro fixo o índice i e fazendo variar o índice j , uma vez completado repete-se o procedimento com o índice $i + 1$, e assim até finalizar com os dados. Para o caso de condições de contorno de Neumann, é preferível discretizar as derivadas usando os pontos médios entre os nodos, ver (4.7). Com isto, os nodos localizados em $(i = 1, N_i)$ ou $(j = 1, N_j)$, dependendo de onde esteja localizada a condição de Neumann, encontram-se fora do domínio a uma distância $\Delta i/2$ ou $\Delta j/2$, respectivamente. Tratando-se de condições

de contorno de Dirichlet, é preferível usar a discretização (4.5), já que nesse caso os pontos ($i = 1, N_i$) ou ($j = 1, N_j$), dependendo de onde esteja a condição de Dirichlet, estão sobre as bordas ($L1, L2, L3, L4$) (ver Figura 4.1).

Para esclarecer o procedimento vejamos, como exemplo, o caso da esfera rígida + $p = \rho$ e fluido uniforme e constante no infinito. Fazemos o eixo i o eixo da variável u e o eixo j o eixo da variável v , de tal forma que: $L1$ representa o raio da esfera, $L2$ representa a linha $v = -1$, $L3$ representa a linha $v = 1$ e $L4$ representa a borda no infinito. As condições de contorno para o programa são: (i) que o fluido não atravesse as linhas $L1, L2, L3$ (condições de Neumann), e (ii) que em $L4$ o fluido seja uniforme e com velocidade constante (condição de Dirichlet). Portanto, usando a discretização (4.7), temos que o ponto $j = 1$ encontra-se em $v = -1 - \Delta v/2$, o ponto $j = N_j$ encontra-se em $v = 1 + \Delta v/2$ e o ponto $i = 1$ equivale ao valor $u = \text{raio} - \Delta u/2$. Para todos aqueles pontos que se encontram fora do domínio devemos fazer as constantes C 's de (4.9) iguais a zero. Para uma condição de Dirichlet os C 's não são zero. Os pontos fora e dentro do domínio devem ser considerados no número de nodos nos parâmetros $n_{\text{max}i}$ e $n_{\text{max}j}$.

Nosso programa está feito para que em N_j sempre tenhamos condições de contorno de Dirichlet, obviamente isto não é problema na maioria das aplicações já que sempre é possível colocar os eixos de tal forma que uma das bordas satisfaça essa condição em N_j . Os dados na borda $L4$ devem ser colocada no arquivo "bordeL4.dat" em forma de columna começando por $i = 1$. No caso de ter condições de Dirichlet nas bordas ($L1, L2, L3$), devem ser descomentadas as linhas correspondentes na seção **Bordas** no programa. Na borda $L1$ sempre é necessário ingressar dados, seja qual for a condição de contorno, devido a que o método SEVP precisa desses dados para começar os cálculos no primeiro bloco [27]. Também, no programa, estão especificados os lugares onde é preciso colocar outras condições de contorno para as bordas ($L1, L2, L3$).

```
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Programa para o cálculo da EDP com  $p=\rho$  mediante o método SEVP (Esfera Rígida) c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

integer numi,nmaxi,nmaxj,nmaxR,nblocos
doubleprecision raio,du,dv,vinf
parameter (numi=5,nmaxR=nmaxj-2,nmaxj=102,nblocos=15
+,nmaxi=nblocos*numi-(nblocos-1),raio=1.5d0
+,du=0.7d0,dv=2.d0/(nmaxR.))
integer comeco,fim,n,iter,i,j
doubleprecision pos(nblocos+1),error(nmaxR,nblocos)
+,dado(nmaxR,nblocos+1),phih(3,nmaxj)
+,dado2(nmaxR,nblocos+1)
+,phip(nmaxi,nmaxj)
+,QI(nmaxR,nmaxR,nblocos-1),RI(nmaxR,nmaxR,nblocos)
+,val1,val2,val3,val4,val5
+,c1(nmaxi,nmaxj),c2(nmaxi,nmaxj),c3(nmaxi,nmaxj)
+,c4(nmaxi,nmaxj),c5(nmaxi,nmaxj),hold(nmaxi,nmaxj)

cccccccc
c Dados c
cccccccc

    open(unit=8,file='cs.dat')
    do 605 i=1,nmaxi
    do 605 j=1,nmaxj
    read(8,*) val1,val2,val3,val4,val5
    c1(i,j)=val1
    c2(i,j)=val2
    c3(i,j)=val3
    c4(i,j)=val4
    605 c5(i,j)=val5
    close(8)

cccccccc
c Bordas c
cccccccc

    open(unit=8,file='bordeL1.dat')
    do 610 j=1,nmaxj
c read(8,*) val1
c 610 phip(1,j)=val1
610 phip(1,j)=10.d0
    close(8)
c open(unit=8,file='bordeL2.dat')
c do 615 i=1,nmaxi
c read(8,*) val1
c 615 phip(i,1)=val1
c close(8)
c open(unit=8,file='bordeL3.dat')
c do 620 i=1,nmaxi
c read(8,*) val1
c 620 phip(i,nmaxj)=val1
c close(8)
    open(unit=8,file='bordeL4.dat')
    do 625 j=1,nmaxj
    read(8,*) val1
```

```
625 phip(nmaxi,j)=val1
    close(8)

    do 635 j=1,nmaxR
635 dado(j,nblocos+1)=phip(nmaxi,j+1)
    do 637 j=1,nmaxR
637 dado(j,1)=phip(1,j+1)
    do 640 n=2,nblocos
    do 640 j=1,nmaxR
640 dado(j,n)=0

cccccccccccc
c Avançar c
cccccccccccc

    pos(1)=1
    do 170 n=1,nblocos
170 pos(n+1)=n*numi-(n-1)
    call matriz(RI,QI,c1,c2,c3,c4,c5,pos)
    do 300 n=1,nblocos
    iter=0
    if (n .eq. 1) then
    começo=pos(n)+1
    fim=pos(n+1)-1
    do 180 j=1,nmaxR
180 phip(começo,j+1)=dado(j,n)
    else if (n .le. nblocos) then
    começo=pos(n)
    fim=pos(n+1)-1
    do 185 j=1,nmaxR
185 phip(começo,j+1)=dado(j,n)
    end if
190 continue
    call calculo(começo,fim,phip,c1,c2,c3,c4,c5)
    do 210 j=1,nmaxR
210 error(j,n)=dado(j,n+1)-phip(pos(n+1),j+1)
    do 220 i=1,2
    do 220 j=1,nmaxj
220 phih(i,j)=0
    if (n .eq. 1) then
    do 230 j=1,nmaxR
    do 230 k=1,nmaxR
230 phih(2,j+1)=phih(2,j+1)+error(k,n)*RI(k,j,n)
    else if (n .le. nblocos) then
    do 245 j=1,nmaxR
    do 245 k=1,nmaxR
245 phih(2,j+1)=phih(2,j+1)+error(k,n)*RI(k,j,n)
    do 250 j=1,nmaxR
    do 250 k=1,nmaxR
250 phih(1,j+1)=phih(1,j+1)+phih(2,k+1)*QI(k,j,n-1)
    end if
    if (iter .eq. 5) goto 270
    if (n .eq. 1) then
    do 255 j=1,nmaxj
    phip(2,j)=phip(2,j)+phih(2,j)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccc
```



```

c CONDICAO L1 NEUMANN
  phip(1,j)=phip(2,j)
c CONDICAO L1 DIRICHLET
c phip(1,j)=phip(1,j)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccc
255 continue
  else if (n .le. nblocos) then
  do 260 j=2,nmaxj-1
  phip(pos(n),j)=phip(pos(n),j)+phih(2,j)
260 phip(pos(n)-1,j)=phip(pos(n)-1,j)+phih(1,j)
  end if
  iter=iter+1
  goto 190
270 continue
300 continue

cccccccccccccccc
c Retroceder c
cccccccccccccccc

  do 500 n=nblocos-1,1,-1
  if (n .eq. 1) then
  começo=pos(n)+1
  fim=pos(n+1)-1
  else
  começo=pos(n)
  fim=pos(n+1)-1
  end if
  iter=0
  do 305 j=1,nmaxR
  dado2(j,n+1)=phip(fim+1,j+1)
305 error(j,n)=dado2(j,n+1)-dado(j,n+1)
310 do 320 i=1,2
  do 320 j=1,nmaxj
320 phih(i,j)=0
  if (n .eq. 1) then
  do 330 j=1,nmaxR
  do 330 k=1,nmaxR
330 phih(2,j+1)=phih(2,j+1)+error(k,n)*RI(k,j,n)
  else if (n .le. nblocos-1) then
  do 340 j=1,nmaxR
  do 340 k=1,nmaxR
340 phih(2,j+1)=phih(2,j+1)+error(k,n)*RI(k,j,n)
  do 345 j=1,nmaxR
  do 345 k=1,nmaxj
345 phih(1,j+1)=phih(1,j+1)+phih(2,k+1)*QI(k,j,n-1)
  end if
  if (n .eq. 1) then
  do 350 j=1,nmaxj
  phip(2,j)=phip(2,j)+phih(2,j)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c CONDICAO L1 NEUMANN
  phip(1,j)=phip(2,j)
c CONDICAO L1 DIRICHLET
c phip(1,j)=phip(1,j)

```

```

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
350 continue
    else if (n .le. nblocos-1) then
    do 360 j=2,nmaxj-1
        phip(pos(n),j)=phip(pos(n),j)+phih(2,j)
360 phip(pos(n)-1,j)=phip(pos(n)-1,j)+phih(1,j)
    end if
    call calculo(comeco,fim,phip,c1,c2,c3,c4,c5)
    do 370 j=1,nmaxR
370 error(j,n)=dado2(j,n+1)-phip(fim+1,j+1)
        iter=iter+1
        if (iter .eq. 5) goto 390
        goto 310
390 continue
500 continue
    open(unit=9, file='solucao.dat')
    write(9,*) 'numi=',numi
    write(9,*) 'nmaxi=',nmaxi
    write(9,*) 'nmaxj=',nmaxj
    write(9,*) 'nblocos=',nblocos
    write(9,*) 'du=',du
    write(9,*) 'dv=',dv
    write(9,*) 'raio=',raio
    do 565 i=1,nmaxi
    do 565 j=1,nmaxj
565 write(9,*) i,j,phip(i,j)
    close(9)
    end

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Subrotina para o cálculo dos pontos da rede particular c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

    subroutine calculo(comeco,fim,phip,c1,c2,c3,c4,c5)
    integer numi,nmaxj,nblocos,nmaxR
    parameter (numi=5,nmaxR=nmaxj-2,nmaxj=102,nblocos=15
+ ,nmaxi=nblocos*numi-(nblocos-1))
    integer comeco,fim,i,j
    doubleprecision phip(nblocos*numi-(nblocos-1),nmaxj)
+ ,c1(nmaxi,nmaxj),c2(nmaxi,nmaxj),c3(nmaxi,nmaxj)
+ ,c4(nmaxi,nmaxj),c5(nmaxi,nmaxj)
    do 202 i=comeco,fim
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c CONDICA0 L2 NEUMANN
    phip(i,1)=phip(i,2)
c CONDICA0 L2 DIRICHLET
c phip(i,1)=phip(i,1)
c CONDICA0 L3 NEUMANN
    phip(i,nmaxj)=phip(i,nmaxj-1)
c CONDICA0 L3 DIRICHLET
c phip(i,nmaxj)=phip(i,nmaxj)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    do 200 j=2,nmaxj-1
200 phip(i+1,j)=c2(i,j)**(-1)*(-c1(i,j)*phip(i,j)-c3(i,j)*phip(i-1,j)
+ -c4(i,j)*phip(i,j+1)-c5(i,j)*phip(i,j-1))

```

```

202 continue
      return
      end

ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Subrotina para o cálculo das matrizes que relacionam os erros c
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

      subroutine matriz(RI,QI,c1,c2,c3,c4,c5,pos)
      integer numi,nmaxj,nblocos,nmaxR
      parameter (numi=5,nmaxR=nmaxj-2,nmaxj=102,nblocos=15
+ ,nmaxi=nblocos*numi-(nblocos-1))
      integer começo,fim,n,i,j,k
      doubleprecision sum,phih(3,nmaxj),Rmomen1(nmaxR,nmaxR)
+ ,Rmomen2(nmaxR,nmaxR),QI(nmaxR,nmaxR,nblocos)
+ ,RI(nmaxR,nmaxR,nblocos),pos(nblocos+1)
+ ,c1(nmaxi,nmaxj),c2(nmaxi,nmaxj),c3(nmaxi,nmaxj)
+ ,c4(nmaxi,nmaxj),c5(nmaxi,nmaxj)
      do 100 n=1,nblocos
      if (n .eq. 1) then
      começo=pos(n)+1
      fim=pos(n+1)-1
      else
      começo=pos(n)
      fim=pos(n+1)-1
      end if
      do 40 k=2,nmaxj-1
      do 15 i=1,3
      do 15 j=1,nmaxj
15  phih(i,j)=0
      phih(2,k)=1
      if (n .eq. 1) then
      phih(1,k)=1
      end if
      if (n .gt. 1) then
      do 18 j=1,nmaxR
18  phih(1,j+1)=QI(k-1,j,n-1)
      end if
      do 30 i=começo,fim
      phih(1,1)=phih(1,2)
      phih(2,1)=phih(2,2)
      phih(1,nmaxj)=phih(1,nmaxj-1)
      phih(2,nmaxj)=phih(2,nmaxj-1)
      do 20 j=2,nmaxj-1
20  phih(3,j)=c2(i,j)**(-1)*(-c1(i,j)*phih(2,j)-c3(i,j)*phih(1,j)
+ -c4(i,j)*phih(2,j+1)-c5(i,j)*phih(2,j-1))
      do 25 j=2,nmaxj-1
      phih(1,j)=phih(2,j)
25  phih(2,j)=phih(3,j)
30  continue
      if (n .eq. nblocos) then
      do 33 m=2,nmaxj-1
33  Rmomen2(k-1,m-1)=phih(2,m)
      else
      do 35 m=2,nmaxj-1

```

```

    Rmomen1(k-1,m-1)=phih(1,m)
35 Rmomen2(k-1,m-1)=phih(2,m)
    end if
40 continue
    if (n .eq. nblocos) then
        call inver(Rmomen2)
        do 45 i=1,nmaxR
        do 45 j=1,nmaxR
45 RI(i,j,n)=Rmomen2(i,j)
        goto 100
        end if
        call inver(Rmomen2)
        do 50 i=1,nmaxR
        do 50 j=1,nmaxR
        RI(i,j,n)=Rmomen2(i,j)
        sum=0
        do 55 k=1,nmaxR
55 sum=sum+Rmomen2(i,k)*Rmomen1(k,j)
50 QI(i,j,n)=sum
100 continue
        return
    end

```

```

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Subrotina para o cálculo da inversa de uma matriz c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

```

```

    subroutine inver(mat)
    integer nmaxj,nmaxR
    parameter (nmaxR=nmaxj-2,nmaxj=102)
    doubleprecision mat(nmaxR,nmaxR),mat1(nmaxR),mat2(nmaxR)
    integer i1,i11,i2,i,j
    i1=nmaxR-1
    do 110 i=1,i1
    mat1(1)=1./mat(i,i)
    mat(i,i)=1.
    do 112 j=1,nmaxR
112 mat(i,j)=mat(i,j)*mat1(1)
    ip1=i+1
    do 120 i1=ip1,nmaxR
120 mat1(i1)=mat(i1,i)
    do 125 i1=ip1,nmaxR
125 mat(i1,i)=0.
    do 127 j=1,nmaxR
127 mat2(j)=mat(i,j)
    do 135 i1=ip1,nmaxR
    do 135 j=1,nmaxR
135 mat(i1,j)=mat(i1,j)-mat1(i1)*mat2(j)
110 continue
    mat1(1)=1./mat(nmaxR,nmaxR)
    mat(nmaxR,nmaxR)=1.
    do 140 j=1,nmaxR
140 mat(nmaxR,j)=mat(nmaxR,j)*mat1(1)
    do 150 i=2,nmaxR
    do 155 i2=1,i

```

```
155 mat1(i2)=mat(i2,i)
    ii1=i-1
    do 156 i2=1,ii1
156 mat(i2,i)=0.
    do 157 j=1,nmaxR
157 mat2(j)=mat(i,j)
    ii1=i-1
    do 160 i2=1,ii1
    do 160 j=1,nmaxR
160 mat(i2,j)=mat(i2,j)-mat1(i2)*mat2(j)
150 continue
    return
    end
```


Acceleration, Streamlines and Potential Flows in General B Relativity: Analytical and Numerical Results

ref.: *Class. Quantum Grav.* **18** (2001) 2917

Acceleration streamlines and potential flows in general
relativity: analytical and numerical results

Maximiliano Ujevic ¹

Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970,
Campinas, SP, Brasil

and

Patricio S. Letelier ²

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13081-970, Campinas, SP, Brasil

Analytical and numerical solutions for the integral curves of the velocity field (streamlines) of a steady-state flow of an ideal fluid with $p = \rho$ equation of state are presented. The streamlines associated with an accelerate black hole and a rigid sphere are studied in some detail, as well as, the velocity fields of a black hole and a rigid sphere in an external dipolar field (constant acceleration field). In the latter

¹e-mail: mujevic@if.unicamp.br

²e-mail: letelier@ime.unicamp.br

case the dipole field is produced by an axially symmetric halo or shell of matter. For each case the fluid density is studied using contour lines. We found that the presence of acceleration is detected by these contour lines. As far as we know this is the first time that the integral curves of the velocity field for accelerate objects and related spacetimes are studied in general relativity.

PACS numbers: 47.15.Hg, 04.25.Dm, 47.75.+f, 97.60.Lf

I. Introduction

The study of potential flows in general relativity is relevant in the understanding of several phenomena of interest in relativistic astrophysics like: fluid flows at relativistic speeds in the presence of a neutron star [1, 2], star clusters moving in gaseous media [1], flows near a cosmic string [1], accretion in binary star systems and supermassive black holes [3], and others [4, 5, 6]. Also, numerical solutions of the equations of general relativistic hydrodynamics can simulate, and model, gravitational collapse and the evolution of neutron stars [7].

Most of the articles in this area deal with the important case of fluid motion evolving in the spacetime associated with compact stars and black holes. The implementation of new background metrics brings some new challenges. First, metrics other than Schwarzschild and Kerr are not so well studied, sometimes a complete understanding of the physical meaning of the metric is missing. Also, the solutions of the fluid equations in a non trivial metric may be quite involved. In particular, the search for significant boundary values (or initial conditions) presents a non trivial problem. A simple and paradigmatic case of a flow is the stationary-zero-vorticity flow of a fluid with adiabatic stiff equation of state. In this case, for relativistic flows, the fluid equations admit analytical solutions for some particular metrics [1, 3]. These solutions are used as test-beds for testing almost all the numerical hydrodynamic codes in the subject. Other potential flows in a nonstationary background and different equation of state have been studied, see for instance [2]. Also, the solutions for potential flows permit to test new optimized codes in resolving nonlinear hyperbolic systems of conservation laws [6], see for a representative sample of numerical schemes [7].

In this work we extend the investigations about potential flows by studying the streamlines of a steady-state ideal fluid in the presence of an accelerated black hole and rigid sphere, and of a black hole and rigid sphere with a dipole field produced by an axially symmetric halo of matter. These shell-like structures are useful in modeling many situations of interest in astrophysics, as for example, the Supernova 1987A [8, 9, 10], this supernova consists of a central core and a massive shell-like structure. It could be described, in a first approximation, by a monopolar core and an exterior shell of dipoles, for other applications of shell-like structures see [11]. We assume that the fluid is a test fluid, i.e., the metric does not evolve and it is given *a priori*. The state equation and the idea of a rigid star (rigid sphere) we use are idealized. However, they bring important results about the instability and behaviour of the fluid, and the difficulties involved in this kind of scenarios.

This work is divided as follows. In Sec. II we present the basic equations that describe potential flows. In Sec. III we summarize some aspects of the Weyl C-metric that represents the spacetime associated with a uniformly accelerated black hole. In particular, we present the metric in different systems of coordinates to facilitate the physical interpretation of the results. In the subsections III.A and III.B we study potential flows for an accelerated black hole and an accelerated rigid sphere, respectively. In the first case we use a perturbative approach and in the second we solve numerically the potential equation. For both cases, we also study the behaviour of the fluid density. In Sec. IV we introduce a metric that represents a black hole in a dipolar field, this field is produced by an external halo of matter. In the subsections IV.A and IV.B, respectively, we study the streamlines of a fluid in the presence of a rigid sphere and black hole, both with halo. Also, in both cases we study the fluid density. Finally in Sec. V we summarize our results.

II. Basic equations

The starting point of this work is an ideal fluid whose energy-moment tensor is given by $T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$, where p is the pressure, ρ the total energy density and U_μ the

four-velocity. The conservation equations, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, for this kind of fluid reduce to

$$(\rho + p)U_{;\mu}^{\mu} + \rho_{,\mu}U^{\mu} = 0, \quad (\text{B.1})$$

and

$$(\rho + p)U^{\nu}U_{\mu;\nu} + p_{,\mu} + p_{,\nu}U^{\nu}U_{\mu} = 0, \quad (\text{B.2})$$

which are respectively the conservation and Euler equation. (Our conventions are: $G = c = 1$. Metric with signature $+2$. Partial and covariant derivatives with respect to the coordinate x^{μ} denoted by $,\mu$ and $;\mu$, respectively.) For isentropic flows we have, $(\sigma/n)_{;\mu} = 0$, where σ is the entropy per unit volume and n the baryon number density. In this case the equations of motion (B.2) take the form [12],

$$U^{\nu}\omega_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.3})$$

where $\omega_{\mu\nu}$ is the relativistic vorticity tensor defined as

$$\omega_{\mu\nu} = \left[\left(\frac{\rho + p}{n} \right) U_{\mu} \right]_{;\nu} - \left[\left(\frac{\rho + p}{n} \right) U_{\nu} \right]_{;\mu}. \quad (\text{B.4})$$

The potential flow solution of this equation ($\omega_{\mu\nu} = 0$) is

$$\left(\frac{\rho + p}{n} \right) U_{\mu} = \Phi_{,\mu}, \quad (\text{B.5})$$

where Φ is a scalar field. From (B.5) and the equation of continuity for the baryon number density n , $(nU^{\mu})_{;\mu} = 0$, we obtain the differential equation for the scalar field Φ ,

$$\left[\left(\frac{n^2}{\rho + p} \right) \Phi_{,\nu} g^{\nu\mu} \right]_{;\mu} = 0. \quad (\text{B.6})$$

The normalization condition, $U_{\mu}U^{\mu} = -1$, provides a relation between the pressure, the total energy density, and scalar field: $(\rho + p)/n = \sqrt{-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu}}$. Also, p and ρ are assumed to be related by a barotropic equation of state, $p = p(\rho)$. In general, Eq. (B.6) is a nonlinear equation for

the scalar field Φ . However it becomes linear if we assume that $p = \rho \propto n^2$, i.e., a stiff equation of state. Thus,

$$nU_\mu = \Phi_{,\mu}, \quad n^2 = -\Phi_{,\sigma}\Phi^{,\sigma}, \quad (\text{B.7})$$

and Φ is a solution of

$$\square\Phi \equiv (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu})_{,\nu} = 0, \quad (\text{B.8})$$

which is the usual wave equation for a scalar field. Note that for the stiff equation of state the sound velocity in the fluid is equal to the velocity of light, therefore the flow is always subsonic and the presence of shockwaves is excluded.

III. Accelerated black holes and rigid spheres

The Weyl C-metric is the member of the static axially symmetric Weyl family of solution of the vacuum Einstein equations [13],

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(q+p)^2} \left[-F(q)dt^2 + \frac{dp^2}{G(p)} + \frac{dq^2}{F(q)} + G(p)d\varphi^2 \right], \quad (\text{B.9})$$

where the functions $G(p)$ and $F(q)$ are the cubic polynomials,

$$\begin{aligned} F(q) &= -1 + q^2 - 2mAq^3, \\ G(p) &= 1 - p^2 - 2mAp^3. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

The coordinates t , p , q and φ are dimensionless, A is a constant with dimension of L^{-1} . The range of t is $(-\infty, +\infty)$, while the range of φ is $[0, 2\pi]$. The ranges of the coordinates p and q depend on the roots of F and G . The constraint $m^2A^2 < 1/27$ is imposed to ensure the existence of three real roots in (B.10). This condition is not a physical one, it is only due to the choice of coordinates [14]. From the fact that the functions have three real roots, the C-metric allows a description of different spacetimes [14] depending on the interval considered for (q, p) . In this work the functions $F(q)$ and $G(p)$ are bounded within the zeros (q_R, q_S) and (p_0, p_π) given in [15]. In this case, m and A are interpreted as the mass and acceleration of

a black hole [16]. A Newtonian image of the matter content of this metric is given by a rod and a semi-infinite line mass, both of density $1/2$ and placed along the z -axes. The metric is interpreted as the representation of particle (the rod) in an accelerating frame (the semi-infinite line), in other words, associated to the spacetimes of Schwarzschild and Rindler. The rod and the semi-infinite line has a strut holding them apart that represents a conical singularity. We note that the metric (B.9) diverges when the acceleration is zero ($A \rightarrow 0$). Hence, in these coordinates, we do not have the correct limit that corresponds to the Schwarzschild metric. To obtain this last metric when $A \rightarrow 0$ we make the coordinate transformation [15],

$$r = \frac{1}{A(q+p)}, \quad t \rightarrow At. \quad (\text{B.11})$$

Now the metric (B.9) reads,

$$ds^2 = -Hdt^2 + \frac{1}{H}dr^2 + \frac{2Ar^2}{H}drdp + r^2 \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G} \right) dp^2 + r^2 G d\varphi^2, \quad (\text{B.12})$$

where

$$\begin{aligned} H &= A^2 r^2 F \\ &= -A^2 r^2 G(p - A^{-1} r^{-1}) \\ &= 1 - \frac{2m}{r} + 6Amp + ArG_{,p} - A^2 r^2 G(p). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

When $A \rightarrow 0$ the metric (B.12) reduces to Schwarzschild form provided that the spherical angular coordinate θ be related to p by $G(p) = 1 - p^2 = \sin^2 \theta$. Furthermore, if the mass is zero in (B.12) ($m \rightarrow 0$) the space becomes Euclidean with a special form of a flat space in an uniformly accelerated frame [15]. For these reasons the line element (B.12) represents a uniformly accelerating Schwarzschild-type particle. The coordinates (t, r, p, φ) is a coordinate system rigidly fixed on the accelerating particle. With the transformation (B.11) we gain the correct Schwarzschild limit, but now the metric is not diagonal.

In the case of $A \neq 0$, the angular coordinates p and θ are related by $G(p) = \sin^2 \theta$. The

mapping between them is [15],

$$p = \begin{cases} -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + 1 \right] & \text{for } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{6Am} \left[2 \cos \left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + 1 \right] & \text{for } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

where

$$\cos \Theta(\theta) = 1 - 54A^2m^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{B.15})$$

Due to the acceleration the black hole horizon deforms. The exact form of this horizon is [15],

$$r_{Sch} = \begin{cases} -\frac{3m}{\cos\left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\delta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} & \text{for } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{3m}{\cos\left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\delta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} & \text{for } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

The form of the Schwarzschild horizon will be used in a perturbation scheme to place an upper limit on the acceleration.

III-A. Potential flows and accelerated black holes

In order to study streamlines of the flow we need to know the field Φ that determines the fluid velocity. The explicit form of the equation for Φ can be obtained from (B.8) and (B.12). We find,

$$\square\Phi = -\frac{r^2}{H}\Phi_{,tt} + ([H + A^2r^2G]r^2\Phi_{,r})_{,r} + (G\Phi_{,p})_{,p} + \frac{1}{G}\Phi_{,\varphi\varphi} - (r^2GA\Phi_{,r})_{,p} - (r^2GA\Phi_{,p})_{,r} = 0. \quad (\text{B.17})$$

We shall assume that the fluid is stationary and also independent of the variable φ . In this case the time dependence of Φ will be set by adding the term $-at$ to the final solution, where a is a constant, this term clearly satisfies (B.17). The arbitrary constant a is related to the 0^{th} component of the four-velocity. With these assumptions, and setting $m = 1$, (B.17) takes the form

$$\square\Phi = \square_{Sch}\Phi + A\square_1\Phi + A^2\square_2\Phi = 0, \quad (\text{B.18})$$

with

$$\square_{Sch} \Phi = ([r^2 - 2r]\Phi_{,r})_{,r} + ([1 - p^2]\Phi_{,p})_{,p},$$

$$\square_1 \Phi = ([6pr^2 - 2pr^3]\Phi_{,r})_{,r} - (2p^3\Phi_{,p})_{,p} - (r^2[1 - p^2]\Phi_{,r})_{,p} - (r^2[1 - p^2]\Phi_{,p})_{,r}, \quad (\text{B.19})$$

$$\square_2 \Phi = -(6r^3p^2\Phi_{,r})_{,r} + (2r^2p^3\Phi_{,r})_{,p} + (2r^2p^3\Phi_{,p})_{,r}.$$

Finding an analytical solution to Eq. (B.18) does not appear possible. We shall look for a meaningful approximate solution. For small enough A , say $A \leq 0.01$, the Schwarzschild surface remains almost unaltered [cf. (B.16)]. Then we can approximate (B.18) as

$$\square\Phi = \square_{Sch}\Phi + A\square_1\Phi = 0. \quad (\text{B.20})$$

By using the fact that $A \approx 0$ we may solve this equation by a perturbative method, but first we recall some earlier results. The solution for a black hole when $A = 0$ with the condition that at infinity the fluid velocity is constant and parallel to the z -axes of the inertial frame is known [3],

$$\Phi_{PST} = -at - 2a \ln \left(1 - \frac{2}{r} \right) + b(r - 1) \cos \theta, \quad (\text{B.21})$$

where a and b are constants. We shall consider for the unperturbed potential ($A = 0$) that the fluid is at rest at infinity. Following the procedure of [3] we find that the unperturbed potential is,

$$\Phi_0 = -at - 2a \ln \left(1 - \frac{2}{r} \right). \quad (\text{B.22})$$

This solution can also be found in a different way. Note that $\Phi_{,r}$ diverges near the black hole horizon. This is a necessary condition to avoid the divergence of the particle density on the horizon [3]. Therefore, near the black hole horizon, we can neglect $\Phi_{,p}$ when compared with $\Phi_{,r}$. It is illustrative to consider (B.18) with $A = 0$

$$\square_{Sch}\Phi = ([r^2 - 2r]\Phi_{,r})_{,r} + ([1 - p^2]\Phi_{,p})_{,p} = 0. \quad (\text{B.23})$$

When near the black hole we neglect the terms containing derivatives with respect to p the equation reduces to an equation for r only. By considering that the temporal dependence is given by $-at$ this equation has for solution (B.22). Hence, the above imposed condition is valid and moreover, in the case of fluid at rest at infinity, gives the exact solution.

Now we shall consider the perturbation,

$$\Phi = \Phi_0 + A\Upsilon, \quad (\text{B.24})$$

where Υ is a function of r and p . From (B.20) we find,

$$\square_{Sch}\Upsilon = -\square_1\Phi_0. \quad (\text{B.25})$$

Thus,

$$([r^2 - 2r]\Upsilon_{,r})_{,r} + ([1 - p^2]\Upsilon_{,p})_{,p} = \frac{16ap(r - 3)}{(r - 2)^2}. \quad (\text{B.26})$$

Again, to solve this equation we use the fact that near the black hole we can neglect the term containing derivatives of p . We find,

$$\begin{aligned} \Upsilon = & C_1 + \frac{1}{2}C_2 \ln\left(1 - \frac{2}{r}\right) - 4ap \left[\frac{2}{r - 2} + \ln\left(1 - \frac{2}{r}\right) \right. \\ & \left. + 2 \ln\left(\frac{r}{2}\right) \ln(r - 2) - [\ln(r - 2)]^2 + 2\text{PolyLog}\left(2, 1 - \frac{r}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

with

$$\text{PolyLog}(n, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}. \quad (\text{B.28})$$

To obtain the range of validity of the perturbation $A\Upsilon$, we compare it with the unperturbed function Φ_0 . We consider that the perturbation is valid only when the absolute value of $A\Upsilon$ is at least a 15% of the value of Φ_0 . We can take values of the constants C_1 and C_2 to enlarge the range of the radial coordinate and still be in the required precision. For example, for $A \approx 0.01$ and the C_1 and C_2 in the interval $(0, 2)$ the range of the radial coordinate is $r \approx (2, 10)$. In

Fig. 1. we show the flux lines for the case $A = 0$ (dotted lines) and $A \approx 0.01$ (full lines). When $A \approx 0.01$, the streamlines that were straight lines are now curved due to the black hole acceleration. These lines are similar to the corresponding lines for a fluid flow in the presence of a black hole, with the condition that the fluid velocity be constant at infinity [1, 3].

Another significant quantity is the particle density of the fluid, $n^2 = -\Phi'^{\mu}\Phi_{,\mu}$. At first order in A we obtain

$$n^2 = \frac{a^2}{1 + 6Ap - \frac{2}{r} - 2Apr} - \frac{16a^2}{(r-2)r^3} + \frac{8aAC_2}{(r-2)r^3} + 32a^2pA \frac{r(r-3) + 4\{1 + (r-2)\ln(r-2)\}}{(r-2)^2r^3}. \quad (\text{B.29})$$

The particle density (B.29) is positive in the interval wherein the perturbation is valid. When $A \rightarrow 0$ we obtain the correct limit for a fluid at rest at infinity [3]. The fluid density contours are shown in Fig. 2. We see that near the black hole these lines are closed and more dense in the forward direction. These contour lines are also similar to the corresponding density lines of a fluid in the presence of a black hole, with the condition that the fluid velocity be constant at infinity [3]. Far from the black hole these lines are open, while in [3] they are closed, this clearly shows the difference between a standing black hole in a moving fluid and an accelerated black hole moving in a fluid which is at rest at infinity. The qualitative aspects of the density contours do not vary when lowering the acceleration or varying the constant C_2 . When $A \rightarrow 0$ we density contours are circles centered in the black hole.

III-B. Potential flows and accelerated rigid spheres

In the case of rigid spheres moving in a fluid, the particle density is no longer divergent on the sphere surface nor $\Phi_{,r}$ is divergent. Then, even near the surface of the sphere, we cannot neglect terms containing derivatives of p in the equation for Φ . To find a numerical solution we need to solve the partial differential Eq. (B.8) with mixed boundary conditions, Neumann and Dirichlet. In this case it is more convenient to work with the metric (B.9) which is diagonal

and later perform the coordinate transformation (B.11). In this metric Eq. (B.8) reads,

$$-\frac{\Phi_{,tt}}{F(q+p)^2} + \left[\frac{G}{(q+p)^2} \Phi_{,p} \right]_{,p} + \left[\frac{F}{(q+p)^2} \Phi_{,q} \right]_{,q} + \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{G(q+p)^2} = 0. \quad (\text{B.30})$$

From the condition that the fluid is stationary and that Φ is independent of φ we get,

$$\left[\frac{G}{(q+p)^2} \Phi_{,p} \right]_{,p} + \left[\frac{F}{(q+p)^2} \Phi_{,q} \right]_{,q} = 0. \quad (\text{B.31})$$

The boundary conditions are: i) Zero normal component of the fluid velocity on the sphere surface, and ii) Faraway from the sphere we set the fluid velocity to be constant and parallel to the acceleration. The condition i) do not describe the typical flow of gas around a star because the surface of the star is not hard but gaseous, except in special astrophysical situations; but describes an idealized strong-field star.

The code used to solve (B.31) is a finite difference multigrid method [17] with second order precision. The numerical multigrid is evenly spaced in r , but not in θ . We find that the convergence is better when we increase the number of points in θ rather than in r . To solve (B.31) we employ four domains (grids) limited by spherical shells of radius greater than 2.5 (Schwarzschild radius equal 2). For the first grid we have $r \in [2.5, 3.9]$ and we use 79300 points; the respective numbers for the other three grids are $[3.9, 5.3]$, 39700, $[5.3, 11.1]$, 19900, and $[11.1, 25.5]$, 5000. An iterative method in which at every step each point of the grid is calculated from the values of the four nearest neighbors is employed. The error is estimated with the expression $|\Phi_{new}^{(x_i)} - \Phi_{old}^{(x_i)}|$, in which $\Phi_{old}^{(x_i)}$ is the old value of Φ at the point (x_i) and $\Phi_{new}^{(x_i)}$ is the new calculated value at the same point. The program will stop when the sum of all errors of the grid points reach some pre-establish value, say $\sum_{x_i} |\Phi_{new}^{(x_i)} - \Phi_{old}^{(x_i)}| \leq Error$. The code was tested with the exact solution for a rigid sphere in a fluid flow [1]. The numerical results on the surface of the sphere have less than 1% of error. Since we are interested in qualitative aspects of the fluid behavior rather than in precise figures this accuracy is sufficient for our purposes. The precision in the rest of the grid is better.

In Fig. 3. the streamlines of a fluid disturbed by a moving rigid sphere with constant acceleration $A = 0.01$ are depicted. We see that the streamlines concentrate in the frontal part

and separate when passing the rigid sphere. This may be due to the deformation that suffer the killing horizons in an accelerated frame [15]. The qualitative aspects of the density contours for this case are similar to the black hole case.

IV. Potential flows in black holes and rigid spheres with dipolar halo

To incorporate the dipolar field into the Schwarzschild metric we consider the static axially symmetric Weyl metric,

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2(\gamma-\nu)} (dz^2 + d\rho^2) + e^{-2\nu} \rho^2 d\varphi^2, \quad (\text{B.32})$$

where ν and γ are functions of ρ and z only and satisfy the conditions [18],

$$\nu_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \nu_{,\rho} + \nu_{,zz} = 0, \quad (\text{B.33})$$

$$d\gamma = \rho [(\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2] d\rho + 2\rho \nu_{,\rho} \nu_{,z} dz. \quad (\text{B.34})$$

The first equation is the usual Laplace's equation in cylindrical coordinates, and the second (once ν is known) gives γ as a quadrature.

For a multipolar expansion of ν , the spherical coordinates (r, θ, φ) or the prolate spherical coordinates (u, v, φ) are more adequate than the cylindrical ones. The relation between these coordinates are

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2m} \left[\sqrt{\rho^2 + (z+m)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z-m)^2} \right], \\ &= \frac{r}{m} - 1, \quad u \geq 1, \\ v &= \frac{1}{2m} \left[\sqrt{\rho^2 + (z+m)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z-m)^2} \right], \\ &= \cos \theta, \quad -1 \leq v \leq 1, \\ \varphi &= \varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

In terms of ρ and z ,

$$\begin{aligned}
 \rho &= m\sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \\
 &= \sqrt{r(r - 2m)} \sin \theta, \quad r \geq 2m, \\
 z &= muv \\
 &= (r - m) \cos \theta, \\
 \varphi &= \varphi.
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

As before, we will set $m = 1$.

Using the transformations (B.36), Eqs. (B.33) and (B.34) can be written in terms of u and v as

$$\begin{aligned}
 [(u^2 - 1)\nu_{,u}]_{,u} + [(1 - v^2)\nu_{,v}]_{,v} &= 0, \\
 \gamma_{,u} &= \frac{1 - v^2}{u^2 - v^2} [u(u^2 - 1)(\nu_{,u})^2 - u(1 - v^2)(\nu_{,v})^2 - 2v(u^2 - 1)\nu_{,u}\nu_{,v}], \\
 \gamma_{,v} &= \frac{u^2 - 1}{u^2 - v^2} [v(u^2 - 1)(\nu_{,u})^2 - v(1 - v^2)(\nu_{,v})^2 + 2u(1 - v^2)\nu_{,u}\nu_{,v}].
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

The authors in [11] solved this equations using a external multipolar expansion up to octopoles using a Legendre expansion with their corresponding terms increasing with the distance in the intermediate vacuum between the core and the shell. In this work we are only interested in the dipolar case. Hence, the functions ν and γ reduce to

$$2\nu = 2\nu_0 + \kappa \ln \left(\frac{u - 1}{u + 1} \right) + 2\mathcal{D}uv, \tag{B.38}$$

$$2\gamma = 2\gamma_0 + \kappa^2 \ln \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 - v^2} \right) + 4\kappa\mathcal{D}v - \mathcal{D}^2 [u^2(1 - v^2) + v^2], \tag{B.39}$$

where \mathcal{D} is the value of the dipolar field produced by an axially symmetric halo (or shell) of matter, and κ is a constant. The Schwarzschild solution is recovered with $\kappa = 1$ and $\mathcal{D} = 0$. The constants γ_0 and ν_0 can be used to rule out conical singularities and to ensure analyticity of the metric at the horizon [11]; here we have made them zero. From the metric (B.32) in

coordinates u and v , and (B.38) and (B.39), we find

$$ds^2 = - \left(\frac{u-1}{u+1} \right) e^{2\mathcal{D}uv} dt^2 + (u+1)^2 e^{2\mathcal{D}v(2-u) - \mathcal{D}^2[u^2(1-v^2)+v^2]} \left[\frac{du^2}{u^2-1} + \frac{dv^2}{1-v^2} \right] + (u+1)^2(1-v^2)e^{-2\mathcal{D}uv} d\varphi^2. \quad (\text{B.40})$$

This metric represents a monopolar core ($\kappa = 1$) in the presence of a external dipolar field (\mathcal{D}) that is associated to a distant shell or halo of matter.

IV-A. Potential flow of a rigid sphere in a external dipolar field

For a stationary fluid that does not depend on φ the scalar equation (B.8) reduces to

$$[(u^2 - 1)\Phi_{,u}]_{,u} + [(1 - v^2)\Phi_{,v}]_{,v} = 0. \quad (\text{B.41})$$

This is exactly the same equation that we solved in Sec. III.A, but in a different system of coordinates. Note that all the Weyl solutions have the same differential equation (B.41) for Φ . The presence of the dipolar field will be taken into account in the boundary conditions. On the surface of the rigid sphere the boundary condition is the usual one for the Euler's equation, i.e., that the normal component of the fluid velocity vanish on the surface. For large values of u the boundary condition deserves more attention. Since, the time dependence of Φ is $-at$, we have for the density,

$$n^2 = a^2 \left(\frac{u+1}{u-1} \right) e^{-2\mathcal{D}uv} - \frac{e^{2\mathcal{D}v(u-2) + \mathcal{D}^2[u^2(1-v^2)+v^2]}}{(u+1)^2} [(\Phi_{,u})^2(u^2-1) + (\Phi_{,v})^2(1-v^2)]. \quad (\text{B.42})$$

Due to the presence of the dipolar field \mathcal{D} , at some value of u greater than a certain $u = u_c$, the first term in (B.42) will always be smaller than the others two. Then we will have $n^2 < 0$. This is not allowed; we say that the fluid is no longer stationary, i.e., the assumed time dependence is not right for $u > u_c$. If \mathcal{D} is large enough, say $\mathcal{D} \approx 1$, the fluid will never be stationary. The first term also depends on a^2 . By varying the value of a we can enlarge or decrease the domain where the fluid is stationary, also for $\mathcal{D} \rightarrow \infty$ we can set a large enough to keep the fluid stationary. For example, for $a = 1.25$, we must have $\mathcal{D} \approx 0.001$ to obtain a relative large

domain wherein the fluid remains stationary. Test particles moving in the metric (B.40) can have chaotic behaviour [11]. We believe that the loss of the stationary character of the fluid for $u > u_c$ may be another manifestation of the same type of instability. This point is under active consideration by the authors.

The outer boundary condition is still missing. With all these fluid instabilities it is not clear which is the right boundary condition. The previous condition, that the fluid velocity to be constant far from the sphere, is not a valid condition in this case because the fluid is accelerating and is in this region where the instabilities appear. To find some characteristic values of Φ to be used as an outer boundary condition we will integrate $\Phi_{,u}$ along a line of constant v from the surface of the sphere (black hole) to the stationary limit of the fluid. From Eq. (B.7) we get

$$\Phi_{,u} \propto \frac{g_{uu}U^u}{g_{tt}U^t}. \quad (\text{B.43})$$

The proportionality constant is of no importance, because U_μ in (B.7) is invariant under a rescaling of Φ . To find the t component of the four-velocity, U^t , we will assume – without further justification – that the a fluid particle follows the usual geodesic equation of motion for a test particle, i.e., the Euler-Lagrange equation,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (\text{B.44})$$

where \dot{x}^μ represents total derivative of x^μ with respect to the parameter s and $L(\dot{x}^\lambda, x^\lambda) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. Since the coordinate t is cyclic, we find,

$$\dot{t} = U^t = -k \left(\frac{u+1}{u-1} \right) e^{-2\mathcal{D}uv}, \quad (\text{B.45})$$

where the constant k is the energy function of the fluid particle. The component U^u along the lines of constant v can be computed from the metric (B.40),

$$U^u = \dot{u} = \sqrt{\left(\frac{u-1}{u+1} \right) e^{2\mathcal{D}uv} + k^2 e^{-2\mathcal{D}v + \frac{\mathcal{D}^2}{2}[u^2(1-v^2)+v^2]}} \quad (\text{B.46})$$

Therefore, Φ along the lines of constant v can be written as

$$\Phi = \int \left(\frac{u+1}{u-1} \right) e^{2\mathcal{D}v(1-u) - \frac{\mathcal{D}^2}{2}[u^2(1-v^2)+v^2]} \sqrt{\left(\frac{u-1}{u+1} \right) e^{2\mathcal{D}uv} + k^2} du, \quad (\text{B.47})$$

where a multiplicative constant was set equal to one. We numerically integrate (B.47) to obtain the outer boundary condition at a certain value u near the limit of stability. We use the code described in Sec. III.B to solve (B.41). For different values of the constant k the qualitative features of the streamlines and density contours do not change. In Fig. 4 the streamlines of a fluid in the presence of a rigid sphere of radius 2.5, Schwarzschild radius equal 2, and an external dipolar moment field with $\mathcal{D} = 0.001$ are shown. We also set $k = 1$ in this case. The values of Φ used for boundary condition and all the ones computed satisfy the condition $n^2 > 0$. We see little difference in the flows with $\mathcal{D} = 0.001$ and $\mathcal{D} = 0$. In Fig. 5 the density contours are plotted for the same values of the parameters used in Fig 4, sphere of radius 2.5 and $\mathcal{D} = 0.001$. We see the same qualitative features discussed in Sec. II.A in the context of the C-metric. In this case the fluid is accelerating something that we should expect since an external field (in this case the external dipolar field) exerts a force on the fluid.

IV-B. Potential flows for black holes with dipolar halo

Like in the precedent case we solve Eq. (B.41), but to avoid the singularity at the black hole horizon, we use the tortoise radial coordinate [19],

$$r^* = r + 2 \ln \left(\frac{r}{2} - 1 \right) \quad (\text{B.48})$$

$$= (u+1) + 2 \ln \left(\frac{u-1}{2} \right), \quad (\text{B.49})$$

Now, Eq. (B.41) reads,

$$\left(\frac{u+1}{u-1} \right) [(u+1)^2 \Phi_{,r^*}]_{,r^*} + [(1-v^2) \Phi_{,v}]_{,v} = 0, \quad (\text{B.50})$$

and the particle density takes the form,

$$n^2 = a^2 \left(\frac{u+1}{u-1} \right) e^{-2\mathcal{D}uv} - e^{2\mathcal{D}v(u-2) + \mathcal{D}^2[u^2(1-v^2)+v^2]} \left[\frac{u+1}{u-1} (\Phi_{,r^*})^2 + \frac{1-v^2}{(u+1)^2} (\Phi_{,v})^2 \right]. \quad (\text{B.51})$$

From a computational view point the difference between a rigid sphere and a black hole laid in the inner boundary condition. For a rigid sphere the condition is zero normal velocity on its surface, and for a black hole is finite particle density on the horizon. This last condition requires that $\Phi_{,r^*}$ be limited in such a way that cancels the singular term in $\Phi_{,v}$. In the general time dependent case this condition reads [2, 6],

$$\Phi_{,r^*} = \left(1 - \frac{2}{r}\right) \Phi_{,r} = \Phi_{,t} + a_1(t)(r - 2) + a_2(t)(r - 2)^2 + \dots, \quad (\text{B.52})$$

where a_1, a_2, \dots are functions of time coordinate. Hence, the following equation is valid near $r = 2$

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left[\frac{\Phi_{,r^*} - \Phi_{,t}}{r - 2} \right] = 0. \quad (\text{B.53})$$

With the assumption that $\Phi_{,t} = -a$ this condition is also valid in our case and it will be taken as the inner boundary condition. In (B.52) we cannot set $\Phi_{,r^*} = \Phi_{,t}$ because we can have $n^2 \leq 0$. The outer condition for this problem is found integrating Eq. (B.47) as before. The numerical code employed is the same of Sec. IV.A with the implementation of the inner boundary condition (B.53) and the change of r or u to the tortoise coordinate r^* . The program was tested with the exact solution for a black hole in a moving fluid [3]. The computed values of Φ on the black hole horizon have less than 1% of error when compared with the exact solution. Again, outside the horizon the precision is better.

In Fig. 6 the streamlines of a perfect fluid in the presence of a black hole in an external dipolar moment field with $\mathcal{D} = 0.001$ are plotted. Like the rigid sphere case the streamlines show little difference with respect to the case $\mathcal{D} = 0$. In Fig. 7. we present the density contours for the same values of the parameters used in the previous figure. Once more we see the same pattern encountered in the C-metric case. This shows that the effect of acceleration appears always in the density contours rather than in the fluid streamlines. In the last four figures we see that the streamlines are practically the same compared to the respective case with $\mathcal{D} = 0$, but the density contours are quite different. The density contours for the different obstacles

present remarkable similar features. We think that this pattern may be taken as test for the presence of acceleration in this kind of fluids.

V. Conclusions

We summarize the results of this work as follows: we found, with a perturbative method, an exact solution of the scalar field Φ for an accelerated black hole, also we obtain for this case the density contour lines. By applying a numerical scheme, we were able to calculate the streamlines and density contour levels for an accelerated rigid sphere, and for a black hole and rigid sphere with a dipolar halo of matter, the late was done by inposing an outer boundary condition that the fluid follows a particle geodesic. The shell-like structure used in the dipolar field case can, in a first approximation, model important astrophysical phenomena such as the Supernova 1987A. Also we found that, for a stationary fluid, either in the C-metric and dipolar field cases the difference between the accelerate and non accelerate cases lies on the form of the density contours and not, as one may think, in the shape of the streamlines. We assumed in one case that the acceleration is near zero ($A \approx 0$) and in the other case that the dipole field is weak ($D \approx 0$). In the dipolar field case the stationary character of the flow is very sensitive to the value of the dipole field D , the presence of highly unstable flows may appear. Test particles moving in the metric (B.40) can have chaotic behaviour [11].

It is important to note that the method presented here is valid for a stiff equation of state and the incorporation of a new barotropic equation of state for the fluid is not easily applied. In that case we need a different approach for solving the difference equation (B.6) because it is nonlinear and it is necessary to impose initial conditions to the enthalpy, this may help or not in the convergence of the method. A negative value of the enthalpy could indicate a nonstationary regime for the fluid, see for instance [2]. In the different scenarios of this work the search for suitable boundary conditions to be treated, with $A \approx 0$, have been a constant problem, we think that this difficulties would increase with a new barotropic equation due to the condition for the enthalpy. Future applications of this work could be the study of fluids with another equation of state to model a more realistic situation, the study of irregular behaviours in the

fluid, and the study of fluids in nonstationary states. All these applications are currently under investigation by the authors.

Acknowledgments

We want to thank FAPESP and CNPq for financial support, M.U. also thanks Sebastian Ujevic for discussions through all the preparation of this work.

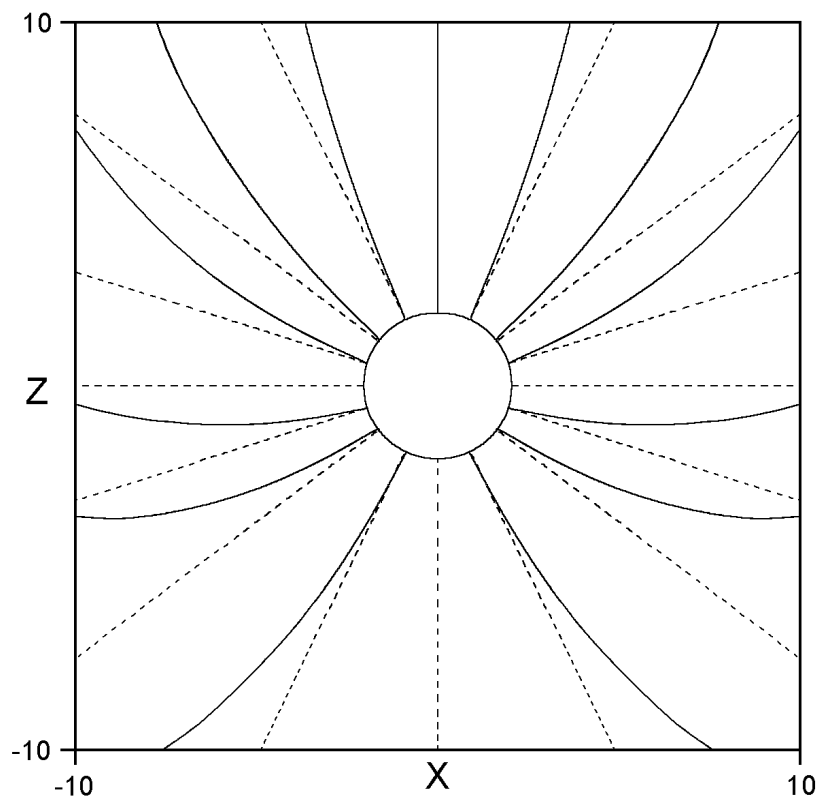


Figure B.1: Analytical results for the streamlines of a fluid in the presence of an accelerating black hole in the direction of the positive z -axis. The solid lines represent the case with $A \neq 0$ and the dotted lines $A = 0$. The black hole has radius $r \approx 2$ (Schwarzschild radius equal 2), this approximation is due to the deformation of the Schwarzschild horizon. The axes are defined as $X = r \sin \theta$ and $Z = r \cos \theta$, with $r = 1/[A(p + q)]$ and $\sin^2 \theta = G(p)$.

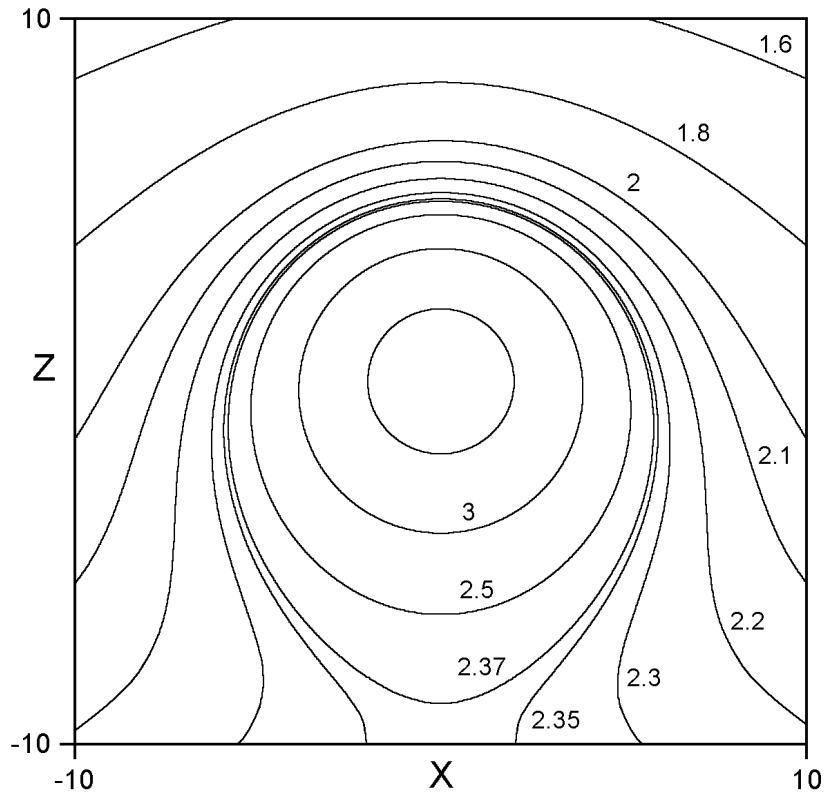


Figure B.2: Analytical results of the fluid density contours ($\rho = n^2$) of an accelerating black hole. The black hole radius and the meaning of the axes are defined as in Fig. 1.

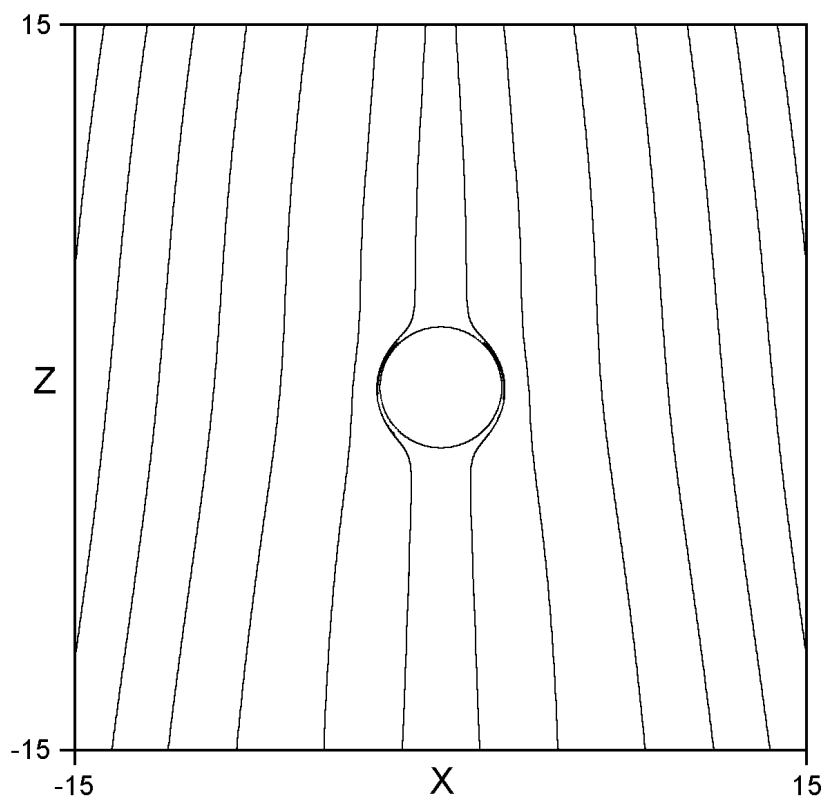


Figure B.3: Numerical results for the fluid streamlines in the presence of a rigid sphere accelerating in the direction of the positive z -axis. The sphere radius is $r \approx 2.5$ (Schwarzschild radius equal 2), this approximation is due to the deformation of the Schwarzschild horizon. The axes are defined as in Fig. 1

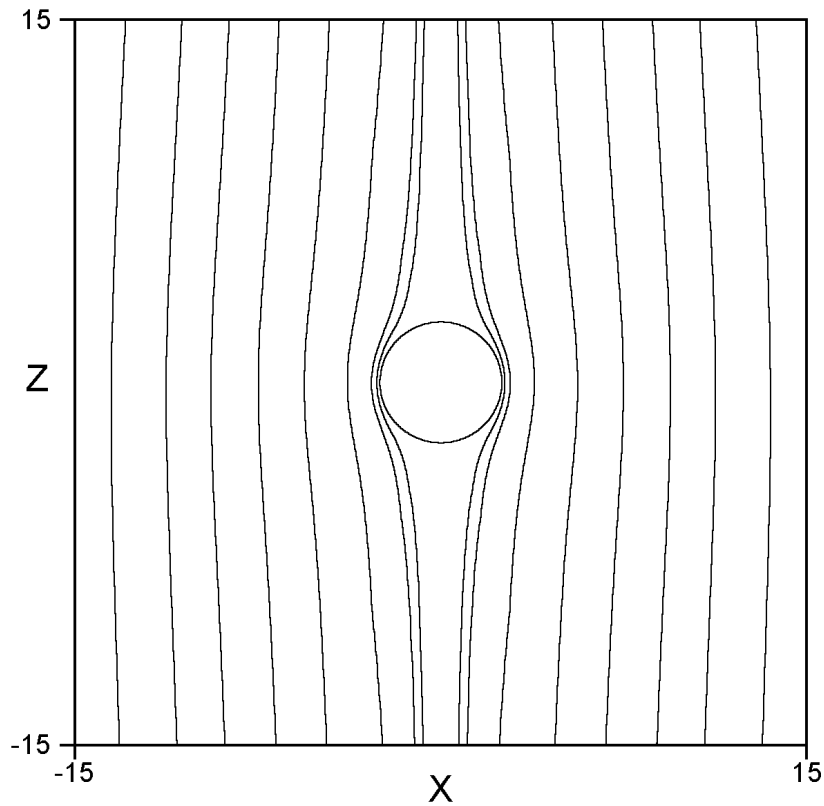


Figure B.4: Numerical results for the fluid streamlines when an external dipolar field with $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a rigid sphere of radius $r = 2.5$ (Schwarzschild radius equal 2) is placed as an obstacle. The axes are defined as $X = r \sin \theta$ and $Z = r \cos \theta$, with $r = u + 1$ and $\cos \theta = v$.

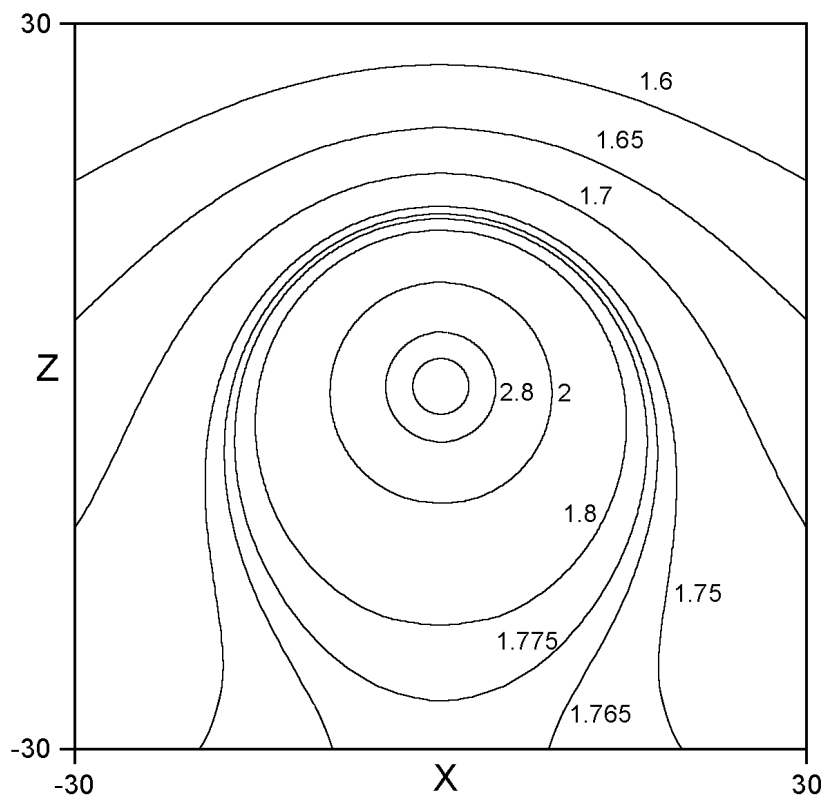


Figure B.5: Numerical results for the fluid density contours ($\rho = n^2$) when an external dipolar field with $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a rigid sphere of radius $r = 2.5$ (Schwarzschild radius equal 2) is placed as an obstacle. The axes are defined as in Fig. 4.

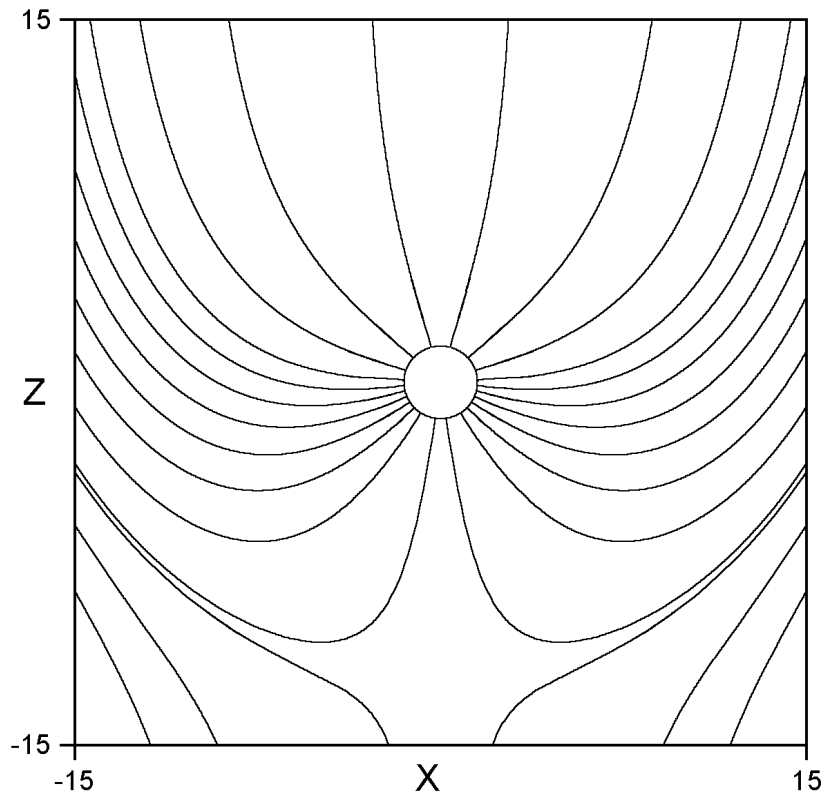


Figure B.6: Numerical results for the streamlines when an external dipolar field of value $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a black hole is placed as an obstacle. The black hole has radius $r = 2$ (Schwarzschild radius equal 2). The meaning of axes are the same of Fig. 4.

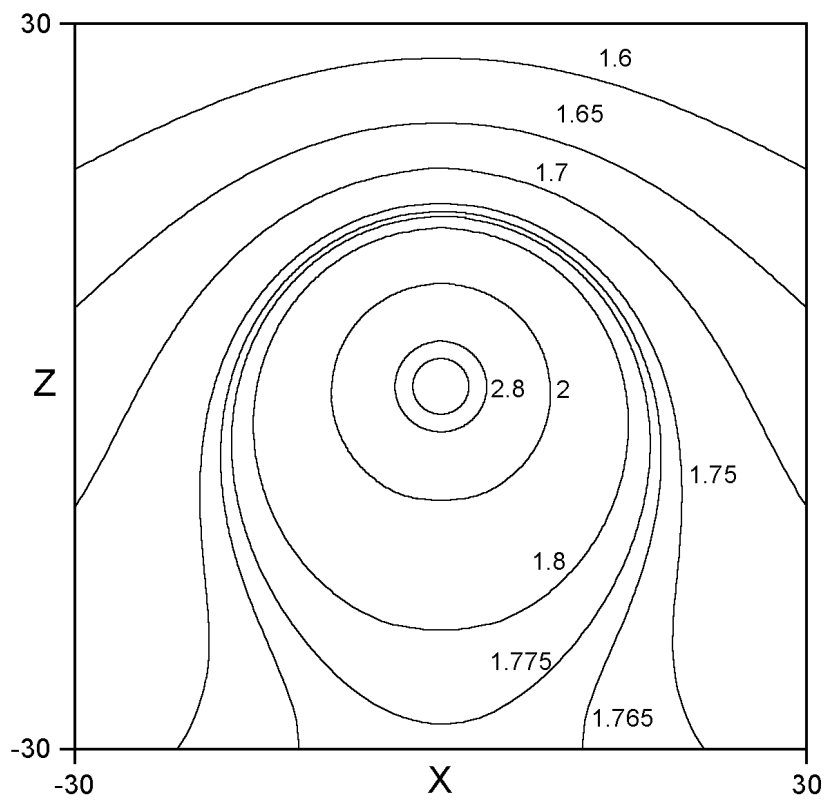


Figure B.7: Numerical results for the fluid density contours ($\rho = n^2$) when an external dipolar field of value $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a black hole is placed as an obstacle. The black hole has radius $r = 2$ (Schwarzschild radius equal 2). The meaning of the axes are the same of Fig. 4.

Bibliography

- [1] S. L. Shapiro , *Phys. Rev. D*, **39**, 2839 (1989).
- [2] A. M. Abrahams and S. L. Shapiro, *Phys. Rev. D*, **41**, 327 (1990).
- [3] L. I. Petrich, S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1781 (1988).
- [4] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: the Physics of Compact Objects*, (John Wiley & Sons, New York, 1983).
- [5] A. Feinstein and J. Ibáñez, *Phys. Lett. A*, **171**, 3 (1992); W. B. Bonnor, *Commun. Math. Phys.*, **13**, 163 (1969).
- [6] J. A. Font, J. M. Martí, J. M. Ibáñez and J. A. Miralles, *Comp. Phys. Commun.*, **75**, 31 (1993).
- [7] J. A. Font, *Living Reviews in Relativity*, **3**, 2000-2font, electronic article published by the Max Planck Institute for Gravitational Physics (2000).
- [8] N. Panagia, S. Scuderi, R. Gilmozzi, P. M. Challis, P. M. Garnavich and R. P. Kirshner, *ApJ*, **459**, L17 (1996)
- [9] F. Meyer, *MNRAS*, **285**, L11 (1997)
- [10] R. A. Chevalier, *Science*, **276**, 1374 (1997)

-
- [11] W. M. Vieira and P. S. Letelier, *Ap. J.*, **513**, 383 (1999).
- [12] See L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2nd edition, 1959), chapter 15; R. Tabensky and A. H. Taub, *Commun. Math. Phys.*, **29**, 61(1973); V. Moncrief, *Ap. J.*, **235**, 1038 (1980).
- [13] W. Kinnersley and M. Walker, *Phys Rev. D*, **2**, 1359 (1970); J. Ehlers and W. Kundt, “*Gravitation, an Introduction to Current Research*, (John Wiley & Sons, New York, 1962).
- [14] P. S. Letelier and S. R. Oliveira, *On uniformly accelerated black holes*, *Phys. Rev. D* at press, *Preprint* gr-qc/9809089
- [15] H. Farhoosh and R. L. Zimmerman, *Phys. Rev. D*, **21**, 317 (1980).
- [16] W. B. Bonnor, *GRG*, **15**, 535 (1983).
- [17] J. H. Ferziger and M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics* (Springer, Berlin, 1996). For several simple applications, programs and comments of this method see B. Carnahan, H. A. Luther and J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods* (John Wiley & Sons, New York, 1969).
- [18] See for example, J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960), chapter 8.
- [19] T. Regge and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **108**, 1063 (1957).

Potential Flows in a Core-Dipole-Shell System: Numerical Results

ref.: Submetido a *Class. Quantum Grav.*

Potential flows in a core-dipole-shell system: numerical results

Maximiliano Ujevic¹

Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970,
Campinas, SP, Brasil

and

Patricio S. Letelier²

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13081-970, Campinas, SP, Brasil

Numerical solutions for: the integral curves of the velocity field (streamlines), the density contours, and the accretion rate of a steady-state flow of an ideal fluid with $p = Kn^\gamma$ equation of state orbiting in a core-dipole-shell system are presented. For $\gamma \neq 2$, we found that the non-linear contribution appearing in the partial differential equation for the velocity potential has little effect in the form of the streamlines and

¹e-mail: mujevic@if.unicamp.br

²e-mail: letelier@ime.unicamp.br

density contour lines, but can be noticed in the density values. The study of several cases indicates that this appears to be the general situation. The accretion rate was found to increase when the constant γ decreases.

PACS numbers: 47.15.Hg, 04.25.Dm, 47.75.+f, 97.60.Lf

I. Introduction

In a recent work [1] we study the streamlines and density contours of a stationary fluid in the presence of either a rigid sphere or a black hole both with a distant shell of matter modeled by a dipolar field. The dipolar field can be seen as the first approximation in modeling important astrophysical phenomena like nebulas (the hourglass), supernovas (e.g., the supernova 1987A [2, 3, 4]), and other physical situations where a core and a distant shell of matter are present. In [1] we used for the fluid the stiff equation of state, i.e., a polytropic, $p = Kn^\gamma$ with $\gamma = 2$. This stiff equation of state over simplifies the partial differential equation for the velocity potential field Φ (it becomes linear). In this case the sound velocity in the fluid is equal to the speed of light. Therefore the stiff equation of state represents a limit situation not easily encountered in usual physical situations. Abrahams and Shapiro[5] studied the more realistic situation, a fluid with a polytropic equation of state with $1 < \gamma < 2$ in the presence of either a rigid sphere or a black hole. The sound velocity in this case is less than the speed of light and the partial differential equation for Φ turns to be nonlinear.

In the present work, following Abrahams and Shapiro [5], we study a more realistic situation than the one examined in [1]. Now we compute the streamlines and baryon density contours for a fluid with baryotropic equation of state with $1 < \gamma < 2$ in the presence of either a rigid sphere or a black hole both with dipolar halos. In other words, now we consider the same situation as before, but for a general polytropic fluid. We consider also the accretion rate of particles into the black hole at its dependence with γ . Furthermore, we complete the work of Abrahams and Shapiro [5] by examining the black hole case with $\gamma \neq 2$ and asymptotic constant velocity (case not studied in the quoted work). In particular, we study streamlines, density contours and accretion rate.

In section II we present the basic equations that describe potential flows and the nonlinear equation for the velocity potential for a polytropic equation of state of the form $p = Kn^\gamma$. Section III is divided in three sub-sections. In sub-section III-A we introduce the metric that represents a central core with a distant dipolar shell of matter. This field is the first approximation to represent distant matter, like halos and rings. In sub-section III-B we present the numerical method used to solve the nonlinear partial differential equation presented in section II. In sub-section III-C we show some results and study the behavior of the streamlines and density contours of the fluid in the presence of either a rigid sphere or a black hole both with a dipolar halo. Also we compute the accretion rate of particles falling into a black hole with and without dipolar halo. Finally, in section IV we summarize our results.

II. Basic equations

The solution for potential flow of the motion equation derived from the energy-momentum tensor for an ideal fluid, $T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$, is

$$HU_\alpha = \Phi_{,\alpha}, \tag{C.1}$$

where $H = h/h_\infty$ denotes the enthalpy scaled to its asymptotic value. When the dipolar field is present the word asymptotic refers to the end of the stationary regime (see [1] for details). U^μ represents the fluid four-velocity, $h = (\rho + p)/n$ the enthalpy per baryon, $\rho = \rho_0 + \epsilon$ the total energy density, ρ_0 the rest mass energy density, and ϵ the internal energy density. Our conventions are $G = c = 1$, metric with signature $+2$. Partial and covariant derivatives are denoted by commas and semicolons, respectively.

We recall that, by definition, an ideal fluid is adiabatic, i.e. the entropy is constant along the world line of each fluid element. If in an instant t the entropy is constant throughout the volume of the fluid (isentropic case) then, for all time and any subsequent motion of the fluid, it retains everywhere the same constant value. In that case we find the solution for potential flows (C.1). Hence, only isentropic flows can have potential flows [6].

From Eq. (C.1) and the baryon number density conservation equation,

$$(nU^\mu)_{;\mu} = 0, \quad (\text{C.2})$$

we obtain the differential equation for the velocity potential,

$$\left[\left(\frac{n}{H} \right) \Phi_{,\nu} g^{\mu\nu} \right]_{;\mu} = 0, \quad (\text{C.3})$$

which is in general nonlinear and depends on the fluid equation of state. For isentropic flows every barotropic equation of state, $p = p(\rho)$, has, in principle (via the first law of thermodynamics), a corresponding polytropic equation of state, $p = p(n)$. When $p = (\gamma - 1)\rho$ with $1 < \gamma \leq 2$, the corresponding polytropic equation is the well known relation $p = Kn^\gamma$. In this case the baryon number density can be written in terms of the enthalpy as

$$\frac{n}{n_\infty} = H^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (\text{C.4})$$

where n_∞ is the asymptotic baryon density number.

The simpler case is found when $\gamma = 2$, then $H = n$ and equation (C.3) reduces to a linear equation. In this case the barotropic sound speed, defined as $dP/d\rho \equiv c_s^2$, is equal to the speed of light, i.e. we have a stiff equation of state. In the general case, $\gamma \neq 2$, the differential equation is nonlinear,

$$\square\Phi + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} [\ln H(\Phi)]_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} = 0, \quad (\text{C.5})$$

where $\square\Phi = [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}]_{,\nu}/\sqrt{-g}$. The barotropic sound speed in this case is $c_s^2 = (\gamma - 1)$, less than the speed of light. The normalization condition, $U_\alpha U^\alpha = -1$, gives us a relation between the enthalpy and the scalar field,

$$H = \sqrt{-\Phi_{,\alpha}\Phi^{,\alpha}}. \quad (\text{C.6})$$

This relation will be also useful to determine the baryon number density.

In this section we have followed the work of Moncrief [7] which is in accord with Tabensky and Taub [8] that consider a constant barotropic sound speed, $c_s^2 = (\gamma - 1)$. We note that Abrahams and Shapiro[5] consider a variable polytropic sound speed.

III. Potential flows in black holes and rigid spheres with dipolar halos

III-A. The metric

To incorporate a dipolar field in the Schwarzschild metric we consider the solution found in [9] where authors model the intermediate vacuum between a core and a distant shell of matter. This core-shell system was found solving the vacuum Einstein equations for a general static axially symmetric metric (Weyl solution [10]). One of these equations can be solved in terms of Legendre polynomials increasing with the distance. These shell-like structures are useful in modeling many situation of interest in astrophysics, such as, the supernova 1987A [2, 3, 4] which has a core and an exterior shell of matter. As a first approximation we will consider only the first term in the expansion, the dipolar term that in Newtonian gravity corresponds to a constant force. By letting in the solution presented in [9] the quadrupole and octopole moments equal zero, we obtain

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(\frac{u-1}{u+1} \right) e^{2\mathcal{D}uv} dt^2 + m^2 (u+1)^2 e^{2\mathcal{D}v(2-u) - \mathcal{D}^2 [u^2(1-v^2) + v^2]} \left[\frac{du^2}{u^2-1} \right. \\
 & \left. + \frac{dv^2}{1-v^2} \right] + (u+1)^2 (1-v^2) e^{-2\mathcal{D}uv} d\varphi^2,
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

with

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2m} \left[\sqrt{\rho^2 + (z+m)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z-m)^2} \right], \\
 &= \frac{r}{m} - 1, \quad u \geq 1, \\
 v &= \frac{1}{2m} \left[\sqrt{\rho^2 + (z+m)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z-m)^2} \right], \\
 &= \cos \theta, \quad -1 \leq v \leq 1, \\
 \varphi &= \varphi,
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

where (r, θ, φ) , (u, v, φ) and (ρ, z, φ) are spherical, prolate spherical, and cylindrical coordinates, respectively. The metric (C.7) represents a monopolar core in the presence of an external dipolar field (\mathcal{D}) that is associated to a distant shell or halo of matter. As we said before, this field can

be seen as the first approximation to model an external concentration of matter like halos and rings.

III-B. Numerical method

To solve equation (C.5) in the spacetime with metric (C.7) we assume: a) That fluid is stationary, i.e., the function Φ depends on time only through the addition of $-at$, where a is a constant related to the zeroth component of the velocity. b) That due to the axial symmetry of the metric the potential Φ does not depend on the variable φ , and c) That the fluid is a test fluid, i.e. the metric does not evolve and it is given *a priori*. Also we put $m = 1$.

First we notice that due to the acceleration of the fluid the imposition of the stationary condition leads to a region of instability away from the core (black hole or hard sphere). This region is very sensible to the values of the dipolar field (\mathcal{D}) [1] that accelerates the fluid. With the above mentioned assumptions Eq. (C.5) reduces to an elliptical differential equation with an inner boundary conditions near the black hole or rigid sphere and an external boundary condition (asymptotic condition).

To solve Eq. (C.5) we use a computational code based on a marching method with a second order precision, five point, finite difference. The numerical grid is evenly spaced in r and in θ . The marching method is the *Stabilized Error Vector Propagation* (SEVP) which is very efficient in solving separable and non-separable elliptic equations. The main ingredient of the method is a clever superposition of a particular solution of the elliptic equation with and a homogeneous solution. For a detailed discussion of the method, see for instance [11, 12].

In the case of a rigid sphere, for the inner boundary condition, the usual condition of zero normal velocity in the surface of the sphere is employed. In general, the fluid velocity must be equal to the corresponding component of the velocity of the surface. Since usual stars have gaseous surfaces (not hard), this condition does not describe a typical flow around a star. In special astrophysical situations like flows in a neutron star moving at relativistic speed this condition can be valid. For a black hole we use the condition that the fluid number density particle must remain finite on the black hole horizon [13]. This leads to the numerical condition

[5] that near $u = 1$ (the black hole horizon),

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left[\frac{\Phi_{,r^*} - \Phi_{,t}}{u - 1} \right] = 0, \quad (\text{C.9})$$

where $r^* = (u + 1) + 2 \ln \left(\frac{u-1}{2} \right)$ is the tortoise radial coordinate [14]. With the assumption that $\Phi_{,t} = -a < 0$ the condition (C.9) can also be satisfied in our case and it will be taken as the inner boundary condition. For the use of this condition in other situations see [1, 15].

For the outer boundary condition, with help of the geodesic equation for the metric (C.7), we can find a characteristic value for the scalar field potential [1],

$$\Phi = \int \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right) e^{2\mathcal{D}v(1-u) - \frac{\mathcal{D}^2}{2}[u^2(1-v^2)+v^2]} \sqrt{\left(\frac{u - 1}{u + 1} \right) e^{2\mathcal{D}uv} + k^2} du, \quad (\text{C.10})$$

where the integration is performed along the lines of constant v between the surface of the sphere (or black hole horizon) and near the stability limit [1]. The constant k is the fluid particle energy function.

To solve the non-linear equation (C.5) we first put the non-linear term equal to zero and calculate the linear part of the equation to find Φ . This solution is used as an initial guess for the non-linear problem. Then, from (C.6) we compute the fluid enthalpy. Finally, with this information we compute the non-linear term that is introduced in the non-linear equation to find new values of Φ . The process is repeated until the sum of the fractional change in the enthalpy for all interior points of the grid in one iteration is less than a certain error ϵ . Usually less than 10 iterations were required to reach an error of $\epsilon \leq 10^{-6}$. Obviously, for the linear case we need only one iteration. The number of iterations depends on the value of γ . For $\gamma \approx 1$ the nonlinear factor tends to infinity and the program diverge. When $\gamma = 1$ the fluid is pressureless (dust) and the fluid flow is geodesic, i.e., no longer obeys (C.5).

The code was tested for the case $\gamma = 2$ using the analytical results for the steady flow of a fluid in the presence of either a hard sphere [16] or a black hole [13]. In this case the numerical solution agreed with the exact solution within an error better than 1.5% for the radial velocity and 1% for the angular velocity. Since we are interested in qualitative aspects of the fluid behavior this accuracy is sufficient for our purposes.

Another aspect of the fluid dynamics is the accretion rate of matter into a black hole. This accretion rate can be computed from (C.1) and (C.4), we find

$$\dot{N} = - \int_S n U^i \sqrt{-g} dS_i = - \int_S n_\infty H^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \Phi_{,u} g^{uu} \sqrt{-g} dudv, \quad (\text{C.11})$$

where the integration is performed in a two-surface sphere centered on the black hole. The exact form of (C.11), for $\gamma = 2$, is known [13]. It is $\dot{N} = 16\pi M^2 n_\infty U_\infty^0$, where n_∞ and U_∞^0 are the asymptotic density and zeroth component of the 4-velocity, respectively. M is the black hole mass. The quantity n_∞ is considered to be constant in this case. We test our code to compute the accretion rate with this exact solution. We found an error less than 1%.

III-C. Numerical results

In Figs. 1 and 2, for the case of a rigid sphere with a dipolar halo, we show the numerical results for the streamlines and density contour lines of the baryon number density. The constants are: radius of the sphere 2.5 (Schwarzschild radius 2), dipolar strength $\mathcal{D} = 0.001$, $\gamma = 1.75$ and $k = a = 1.25$. We see that the streamlines do not differ much from the linear case [1] and that the contour lines have the same qualitative behavior as in the linear case, ($\gamma = 2$). The numerical values for the baryon density are not the same due to the exponent $1/(\gamma - 1)$ presented in the relation between the enthalpy and the baryon density. To ensure a physical result, in solving (C.5), we require that enthalpy be positive in every iteration of our code. The baryon number density is a positive quantity. We can have a negative enthalpy solution of $n/n_\infty = H^{\frac{1}{\gamma-1}}$, but in this case we have a negative baryon density.

For the same values of the constants, in Figs. 3 and 4 we show the numerical results for the streamlines and density contours for the case of a black hole with a dipolar halo. Again we see little difference compared to the linear case. These results tell us that the contribution of the non-linear term does not affect in a significant way the qualitative behavior of the fluid.

For $1 < \gamma < 2$ the code was tested with the numerical solution for the steady flow of a fluid with $p = Kn^\gamma$ equation of state with a gravitating hard sphere presented in [5]. The qualitative aspects of the fluid look the same as in ref. [17]. We do not have sufficient information to have

a quantitative analysis.

For the case of a black hole without dipole ($\mathcal{D} = 0$) we also found that, for a constant asymptotic velocity, that the streamlines and density contours do not distinguish between the linear and non linear case. The accretion rate for the black hole increases when γ decreases, e.g., for $\gamma = 1.9, 1.8, 1.7$ the accretion rate increases in 6%, 13%, 24%, respectively.

For $\gamma = 2$, the linear case, we find that the value of the accretion rate with or without dipolar halo (n_∞ constant) differs by 1%. In the dipolar field model the assumption that n_∞ is a constant, in general is not valid. In this case the choice of a constant n_∞ will particularize the solution. We also find in this case that the accretion rate increases when γ decreases. e.g., for $\gamma = 1.9, 1.8, 1.7$ the accretion rate increases in 8%, 18%, 33%, respectively. In the dipole case the growth of the accretion rate when γ decreases is greater than in the case without dipole. In both cases the growth of the accretion rate is due to the factor involving the enthalpy [cf. Eq. (C.11)].

As mentioned before, for an accelerated fluid it is difficult to have stationary flow. For the cases studied along the paper we found that for $\mathcal{D} \leq 0.01$ we can have a region of reasonable size (a ball greater than 45 Schwarzschild radius) where we have laminar flow. For $\mathcal{D} = 0.03$ the radius of this ball shrinks to 5, and for $\mathcal{D} = 0.05$ stationary flow does not exist. In summary, we believe that our results are representative of a generic situation when $\mathcal{D} \leq 0.01$.

Finally, we want to point out that the variation of Φ in the systems black hole and rigid sphere with or without dipole for the linear and nonlinear cases is, in mean, less than 5%.

IV. Conclusions

We have solved numerically the streamlines and the density contours for the baryon number density of an ideal fluid in the presence of either a rigid sphere or a black hole both with dipolar halo. The fluid has polytropic equation of state, $p = Kn^\gamma$, that represents a more realistic physical situation than the linear case studied in [1]. We see that the nonlinear term does not affect qualitative the form of the streamlines and density contours when compared to the linear case, this is due to the low variation of the scalar field Φ between the linear and nonlinear cases.

When compared with other situations studied in the literature this fact appears to be generic. Another interesting result is that the accretion rate of the cases studied increases when the constant γ decreases. In the presence of the dipolar field this growth is bigger compared with the case without dipole.

The cases of a rotating black hole and rigid sphere with halos modeled by multipole moments beyond the dipole is under active consideration by the authors.

Acknowledgments

We want to thank FAPESP and CNPq for financial support.

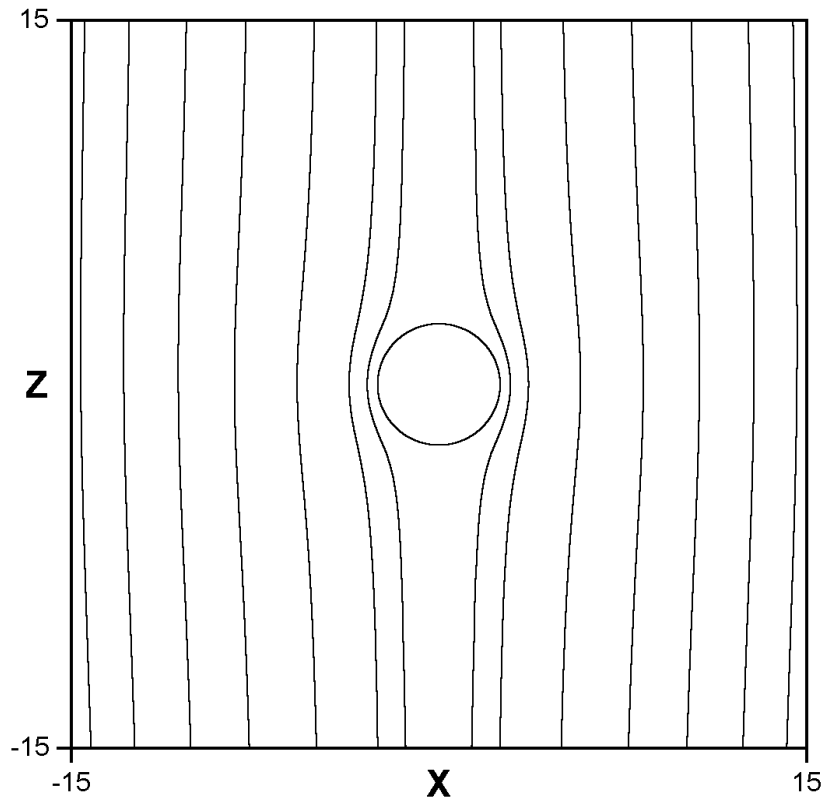


Figure C.1: Numerical results for the fluid streamlines with $\gamma = 1.75$ when an external dipolar field with $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a rigid sphere of radius $r = 2.5$ (Schwarzschild radius equal 2) is placed as an obstacle. We set the values of the constant $k = a = 1.25$. The axes are defined as $X = r \sin \theta$ and $Z = r \cos \theta$, with $r = u + 1$ and $\cos \theta = v$.

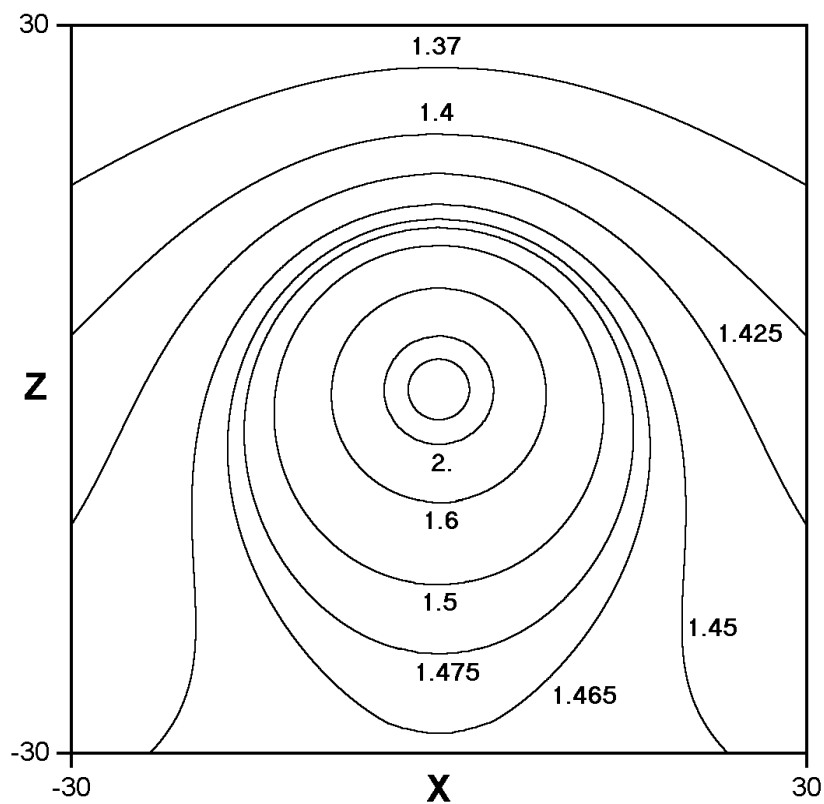


Figure C.2: Numerical results for the density contours (n/n_∞) of the baryon number density when an external dipolar field with $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a rigid sphere of radius $r = 2.5$ (Schwarzschild radius equal 2) is placed as an obstacle. The axes and the constants are defined as in Fig. 1.

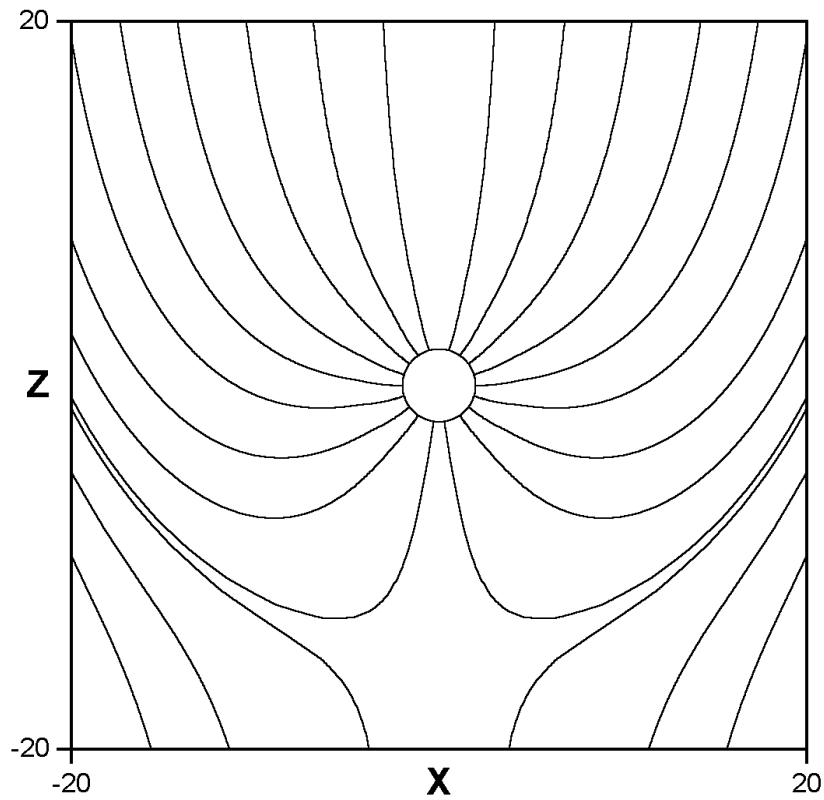


Figure C.3: Numerical results for the streamlines when an external dipolar field of value $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a black hole is placed as an obstacle. The black hole has radius $r = 2$ (Schwarzschild radius equal 2). The constants and the meaning of axes are the same of Fig. 1.

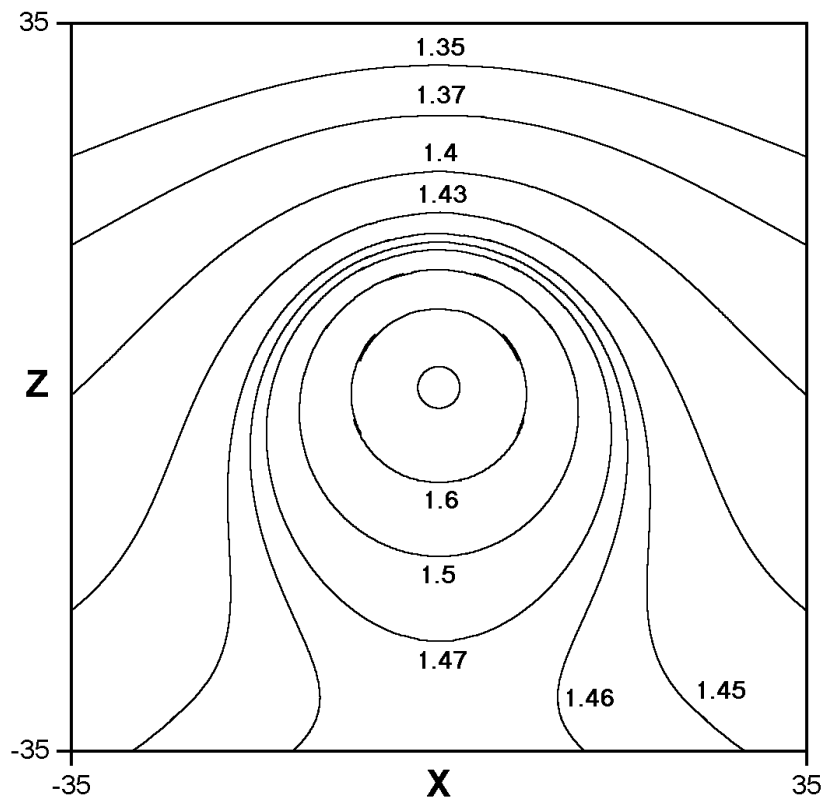


Figure C.4: Numerical results for the density contours (n/n_∞) of the baryon number density when an external dipolar field of value $\mathcal{D} = 0.001$ is present and a black hole is placed as an obstacle. The black hole has radius $r = 2$ (Schwarzschild radius equal 2). The constants and the meaning of the axes are the same of Fig. 1.

Bibliography

- [1] Ujevic M and Letelier P S *Class. Quant. Grav.* **18** 2917 (2001)
- [2] Panagia N, Scuderi S, Gilmozzi R, Challis P M, Garnavich P M and Kirshner R P 1996 *Astrophys. J.* **459** L17
- [3] Meyer F 1997 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **285** L11
- [4] Chevalier R A 1997 *Science* **276** 1374
- [5] Abrahams A M and S L Shapiro *Phys. Rev. D* **41** 327 (1990)
- [6] Landau L D and Lifshitz E M 1959 *Fluid Mechanics* 2nd edn (Oxford: Butterworth-Heinemann)
- [7] Moncrief V 1980 *Astrophys. J.* **235** 1038
- [8] Tabensky R and Taub A H 1973 *Commun. Math. Phys.* **29** 61
- [9] Vieira W M and Letelier P S 1999 *Astrophys. J.* **513** 383
- [10] Synge J L 1960 *Relativity: The General Theory* (Amsterdam: North Holland) ch 8
- [11] Roache P J *Num. Heat Transf.* **1** 1 (1978)
- [12] Madala R V *Mon. Weat. Rev.* **106** 1735 (1978)

- [13] Petrich L I, Shapiro S L and Teukolsky S A 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1781
- [14] Regge T and Wheeler J A 1957 *Phys. Rev.* **108** 1063
- [15] Font J A, Martí J M, Ibánñez J M and Miralles J A *Comput. Phys. Commun.* **75** 31 (1993)
- [16] S L Shapiro *Phys. Rev. D* **39** 2839 (1989)
- [17] We found an oversight in equation (3.2) of [5], in the second term (the angular term) the expression inside the square bracket must be $(1-x^2)$ instead of $(1-x^2)^{1/2}$. This oversight is repeated in equation (A3), (A8) and (A10) of the appendix concerning the finite difference schemes used in the calculation of the particle density and the partial differential equation. As we mentioned before the differences between the cases with $\gamma = 2$ (linear case) and $\gamma \neq 2$ (nonlinear case) are small.