

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

Otimização Multiobjetivo de *Portfolios* utilizando Algoritmos Evolutivos

Autor: Cecília Morais Quinzani
Orientador: Raul Vinhas Ribeiro e
Co-Orientador: Antônio Carlos Moretti

Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Raul Vinhas Ribeiro - DENSIS/FEEC/ UNICAMP (orientador)

Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti - DMA/IMECC /UNICAMP

Profa. Dra. Valéria Abrão de Podestá - DMA/IMECC /UNICAMP

Prof. Dr. Romis Attux - DCA/FEEC/UNICAMP

Campinas, SP
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Q46o Quinzani, Cecilia Morais
Otimização Multiobjetivo de portfolios utilizando
algoritmos evolutivos/ Cecilia Morais Quinzani. –
Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientadores: Raul Vinhas Ribeiro, Antonio Carlos
Moretti.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Otimização matemática. 2. Algoritmos evolutivos.
3. Inteligência artificial. 4. Pesquisa operacional. 5.
Risco (Economia). I. Ribeiro, Raul Vinhas. II. Moretti,
Antonio Carlos. III. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Portfolio multiobjective optimization using evolutionary algorithms

Palavras-chave em Inglês: Mathematical Optimization, Evolutionary Algorithms,
Artificial Intelligence, Operational research, Risk economic

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Romis Ribeiro de Faisal Attux, Valéria Abrão de Podestá.

Data da defesa: 15/01/2010

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

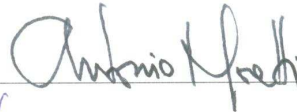
COMISSÃO JULGADORA – TESE DE MESTRADO

Candidato(a): Cecília Morais Quinzani

Data da Defesa: 15 de janeiro de 2010

Título da Tese: “Otimização Multiobjetivo de Portfolios utilizando Algoritmos Evolutivos”

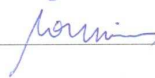
Prof. Dr. Antônio Carlos Moretti (Presidente):



Profa. Dra. Valéria Abrão de Podestá:



Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux:



À minha avó materna Catarina (in memoriam),

*Aos meus pais Anselmo e Maria Aparecida,
por estarem presentes em minha vida.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores Antônio Carlos Moretti e Raul Vinhas Ribeiro, pelos ensinamentos profissionais e pessoais, pelo conhecimento compartilhado e pela confiança demonstrada.

Agradeço à minha avó Catarina (*in memoriam*) por dizer palavras certas na hora certa.

Agradeço aos meus pais Anselmo e Maria Aparecida, e aos meus irmãos, Marília e Netto, por todo conforto emocional, incentivo e apoio, cujo valor é inestimável.

Agradeço aos meus tios e primos que sempre estiveram presentes, especialmente Pedro, pelos conselhos acadêmicos e pessoais e Gislaíne, pelo companheirismo e alegria.

Agradeço às minhas companheiras de república Clarissa, Elaine, Ilka, Paloma e Tassiana pelos momentos, conversas e apoio.

Agradeço às minhas amigas de infância, Adriana, Jójce, Mariana e Thatiane por tudo que vivemos até aqui. Aos amigos do Ensino Médio Ivan, Rodolfo, Leonardo, Lívia, Tássia e Armandinho por momentos inesquecíveis e longas conversas.

Agradeço aos amigos Wanderson Silva, Gustavo Doubek, Daniel Izildo e demais amigos de graduação.

Agradeço aos amigos Eduardo Bacalhau, Cristiano Agulhari, André Toscano e demais colegas de pós-graduação do DENSIS, COSE e IMECC pelas críticas, sugestões e apoio psicológico fundamentais para a concretização deste trabalho.

Agradeço aos professores do IMECC e da FEEC, em especial, Antônio Carlos Gilli Martins e Maria Aparecida Ehardt Diniz (Cheti) pela paciência e conhecimentos compartilhados.

Agradeço aos professores Romis e Valéria por, além de conhecimentos compartilhados, compor a banca examinadora.

Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

O desenvolvimento das áreas tradicionais da engenharia tem sido caracterizado pelo crescente emprego de modelos de otimização como paradigmas para problemas de tomada de decisão. Quando estes modelos possuem mais de um objetivo são chamados de Problemas de Otimização Multiobjetivo (POM) e uma alternativa apropriada na resolução deste tipo de problema é a utilização de Algoritmos Evolutivos. Os Algoritmos Evolutivos (AE) simulam o processo de evolução natural. Simplificadamente, o conjunto de soluções candidatas (população) sobre o qual operam as metodologias é modificado utilizando dois princípios básicos de evolução: seleção e variação. O objetivo principal desta dissertação consiste na análise da aplicação de Algoritmos Evolutivos na otimização multiobjetivo de portfólios onde o importante é obter uma correlação ótima entre retorno e risco. Diversos algoritmos evolutivos foram analisados na dissertação, sendo também analisadas versões híbridas dos mesmos. A principal contribuição da dissertação é a proposta de um procedimento de refinamento das soluções que se baseia no comportamento da série histórica para gerar uma população inicial mais adequada. Uma comparação do desempenho dos diferentes algoritmos híbridos com e sem este refinamento da solução foi realizada e o algoritmo com melhor desempenho foi identificado.

Palavras-chave: otimização, multiobjetivo, *portfolios*, algoritmos evolutivos.

Abstract

The development of traditional areas of engineering has been characterized by the increasing use of optimization models as paradigms for decision making problems. When these models have more than one objective, they are called multi-objective optimization problems (POMs), and a suitable alternative in solving this kind of problem is the usage of Evolutionary Algorithms (EAs). The EAs simulate the process of natural evolution. Briefly, the set of candidate solutions (population) in which the methodologies operate is modified using two basic principles of evolution: selection and variation. The main objective of this dissertation is to review the application of Evolutionary Algorithms in Multiobjective optimization of portfolios in which it is important to obtain an optimal correlation between return and risk. Several evolutionary algorithms have been analyzed in the dissertation, and also analyzed hybrid versions of the same. The main contribution of the dissertation is to propose a procedure for the refinement of solutions based on the behavior of the series to generate a better initial population. A comparison of the performance of different algorithms hybrids with and without this refinement of the solution was performed and the algorithm with best performance was identified.

Keywords: optimization, multiobjective, *portfolios*, evolutionary algorithms.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria de <i>Portfolios</i>	6
2.1	A relação retorno <i>versus</i> risco	7
2.2	Formulações	10
3	Otimização Multiobjetivo	13
3.1	Formulação e Conceitos básicos	13
3.2	Métodos para Resolução de Problemas de Otimização Multiobjetivo	14
3.2.1	Métodos <i>a priori</i>	14
3.2.2	Métodos Iterativos	15
3.2.3	Métodos <i>a posteriori</i>	16
3.3	Fronteira de Pareto	16
3.4	Métricas de Desempenho	18
3.4.1	Métrica Δ	18
3.4.2	Métrica C	19
4	Algoritmos Evolutivos	20
4.1	<i>Pareto Sorting Evolutionary Algorithm</i> (PSEA)	21
4.1.1	Filtro de dominância	22
4.2	<i>Target Objective Genetic Algorithm</i> (TOGA)	23
4.3	<i>Nondominated Sorting Genetic Algorithm</i> (NSGA II)	25
5	Metodologia Proposta e Resultados	28
5.1	Visão geral do método	28
5.2	Refinamento da solução	30
5.3	Exemplo	30
5.4	Experimentos	32
6	Conclusões	38

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento das áreas tradicionais da engenharia tem sido caracterizado pelo crescente emprego de modelos de otimização como paradigmas para problemas de tomada de decisão [22]. Inicialmente, os problemas de otimização eram modelados com um único objetivo. Diante de situações mais complexas, a modelagem de problemas utilizando múltiplos objetivos, simultaneamente, começou a ganhar maior destaque[4]. Quando estes modelos possuem mais de um objetivo são chamados de Problemas de Otimização Multiobjetivo (POM). Os POM's têm aplicações em diversas áreas como Bioinformática [26], Planejamento da Produção [15], Planejamento de transportes e tráfego [28], Agricultura [23], Projeto de sistemas [20] e Economia [6] [24]. Esta última área foi escolhida para ser abordada nesta dissertação.

Problemas de otimização multiobjetivo requerem uma definição alternativa de otimalidade. A notação de otimalidade mais comumente adotada é a otimalidade de Pareto, apresentada por Vilfredo Pareto e pode ser encontrado em [44]. Em geral, melhorar um dos objetivos implica em piorar outros. O grande desafio envolvido em problemas como este é encontrar uma metodologia que estabeleça um bom compromisso entre os objetivos. Outra característica interessante deste tipo de problema é o fato de, na maioria das vezes, o resultado obtido ser um conjunto de soluções e não uma única, como nos problemas de otimização com um único objetivo. Quando diversas soluções são consideradas, tem-se que algumas soluções podem ser melhores do que outras em relação a todos os objetivos considerados. Tais soluções são chamadas de soluções não-dominadas e o conjunto de todas elas define o que chamamos de fronteira Pareto-ótima (veja seção 3.3). Obtida a fronteira, o decisor tem um papel importante, pois cabe a ele a escolha da solução que mais se adequa às suas preferências.

O procedimento de escolher uma solução que melhor se adequa às pretensões de um decisor pode ser comparada à realização de uma prova de múltipla escolha, atentando para o fato de todas alternativas estarem corretas, enquanto a utilização de métodos de programação matemática tornam necessárias as atribuições de pesos ou grandezas semelhantes que apontam para uma solução única sem ter conhecimento de soluções alternativas. Este processo pode ser considerado análogo à uma prova objetiva, onde uma única resposta é obrigatória sem a certeza de ser a mais indicada.

Diferentes técnicas podem ser utilizadas na busca do conjunto de soluções ótimas: a transformação em um problema com um único objetivo; o Método dos pesos, que consiste em estabelecer valores escalares e somar cada um dos objetivos; o Método das ε -restrições, que consiste em otimizar um objetivo enquanto os demais são considerados limitantes superiores; a Teoria dos Jogos modificada, onde cada jogador é associado a uma função objetivo de modo que cada um tenta ganhar à

medida em que os demais jogadores perdem; e os algoritmos evolutivos, que simulam o processo de evolução natural, no qual os indivíduos (soluções) mais aptos sobrevivem [38]. Esta última técnica é abordada nesta dissertação por tratar simultaneamente todo o conjunto de possíveis soluções (população), em geral, contendo informações sobre várias regiões do espaço de busca. Assim, é possível descobrir o conjunto Pareto-ótimo do problema ou uma aproximação dele ao invés de, como na programação matemática tradicional, obter tal conjunto pela realização de uma série de simulações.

Os Algoritmos Evolutivos (AE) pertencem a uma série de métodos estocásticos de otimização que simulam o processo de evolução natural. Estes originaram-se no final da década de 1950, mas somente a partir de 1970 trabalhos nesta área começaram a aparecer com maior frequência. Foi nesta época que muitas metodologias evolutivas foram propostas, principalmente algoritmos genéticos, programação evolutiva e estratégias evolutivas. Todas estas metodologias operam sobre um conjunto de soluções candidatas. Simplificadamente, este conjunto é modificado através de dois princípios básicos de evolução: seleção e variação. A seleção representa a competição por recursos e reprodução entre os seres vivos, sendo que alguns são melhores que outros e mais aptos a sobreviverem e reproduzirem. A cada geração é dada uma chance para os indivíduos se reproduzirem um certo número de vezes, dependendo de sua qualidade. Em consequência, a qualidade é medida através da designação do valor *fitness* para cada indivíduo. Já a variação imita a capacidade natural de criar novos seres através de significativas recombinações e mutações [43].

Alguns métodos evolutivos utilizados são: SPEA [46], SPEA II [45], PSEA [37], TOGA [19], NSGA [36], NSGAI [13] e o *omni-aiNet*[9], desenvolvido na FEEC - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP.

O SPEAII, uma atualização do SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm), foi criado para tentar incorporar a maioria dos recentes resultados e eliminar potenciais fraquezas de seu predecessor. As principais diferenças entre os dois algoritmos são:

- Uma melhora no esquema de *fitness assignment* o qual, para cada indivíduo, obtém o número de indivíduos dominados e o número de indivíduos que ele domina;
- Uma técnica da estimação da densidade da vizinhança próxima;
- Um novo método de truncamento do arquivo que garante a preservação das soluções limitantes (pertencentes à fronteira Pareto-ótima).

O PSEA (Pareto Sorting Genetic Algorithm) é uma aproximação para otimização multiobjetivo não-convexa e não-linear. O algoritmo incorpora heurísticas básicas de seleção, *crossover* e manutenção da diversidade para a identificação da fronteira de Pareto. O PSEA opera através da busca, memorizando e melhorando as populações. O conjunto de soluções iniciais é formado pelas soluções de um problema de otimização linear com restrições definidas pela formulação do problema. Em cada rodada, os processos de evolução são aplicados à população e os mais aptos são identificados e armazenados. Para a identificação das soluções não-dominadas um filtro de dominância é aplicado. Como não existe nenhuma garantia de que a população encontrada em cada rodada é também a melhor globalmente, na etapa final é aplicado o filtro de dominância ao conjunto total de soluções armazenadas, resultando na solução final. A diversidade da população é garantida pela incorporação do *crossover*, uma combinação matemática de duas soluções para a produção de duas novas. A incorporação de novas soluções aleatórias em cada nova rodada do algoritmo e a utilização

de um filtro de não-agrupamento, que elimina soluções muito semelhantes, são também utilizados para garantir um bom resultado.

O TOGA é uma aproximação não-Pareto para otimização multiobjetivo, que busca encontrar soluções que sejam o mais próximo possível de um alvo pré-definido para um ou mais critérios. A população é dividida em um conjunto de subpopulações, sendo que cada subpopulação é tendenciada, a cada iteração, para uma certa direção no espaço de buscas, direção esta definida no início do algoritmo. O conceito de elitismo (o indivíduo mais apto é passado para a próxima geração) também é utilizado. O TOGA não requer muito esforço computacional, gera múltiplos ótimos em cada geração e, além disso, a utilização de pontos alvo distintos para a formação das sub-populações assegura a diversidade da população em geral. Entretanto, funciona bem melhor quando o pesquisador tem conhecimento do espaço de busca e é capaz de selecionar boas combinações dos objetivos, e, se isso não ocorre, a qualidade da solução fica ameaçada.

O NSGAI, uma atualização do NSGA (Nondominated Sorting Genetic Algorithm), foi criado no sentido de superar as seguintes desvantagens de seu predecessor:

- Alta complexidade computacional do método na busca dos conjuntos não-dominados, uma vez que necessitava de um esforço da ordem de $O(MP^2)$, onde M é o número de objetivos e P o tamanho da população;
- Ausência de elitismo, que pode implicar na perda da diversidade e acelerar a performance do algoritmo genético significativamente; e
- Necessidade de especificar o parâmetro de compartilhamento, o qual pode variar de acordo com o problema a ser otimizado.

O algoritmo *omni-aiNet*, desenvolvido por um grupo de pesquisa da FEEC, une a flexibilidade dada pelos princípios do DT *omni-otimizador* [9] com as vantagens intrínsecas dos Sistemas Imunes Artificiais (SIAs)¹, além das outras estratégias baseadas em população. A proposta do algoritmo *omni-otimizador* é baseada em um procedimento de *ranking* que utiliza um princípio modificado de dominância de restrições e as adapta para resolver diferentes tipos de problemas.

Nesta dissertação foram utilizados o PSEA, o TOGA e o NSGA II. Os dois primeiros foram utilizados por terem sido apresentados no artigo que serviu de base para este estudo e o terceiro pelo seu desempenho bastante satisfatório em problemas como os aqui tratados.

O uso dos AEs, nos seus mais variados domínios de aplicação, tem se tornado cada vez mais popular nos últimos anos, produzindo uma ampla variedade de interessantes aplicações, alcançando desde a engenharia [2][31] e a ciência da computação [34] até a sociologia [7] e a medicina [33]. Estes algoritmos têm provado ser um mecanismo de busca poderoso e robusto, possuindo características desejáveis para problemas contendo múltiplos objetivos conflitantes e grande intratabilidade e espaço de busca de alta complexidade. Adicionalmente, AEs não necessitam de derivadas das funções objetivo e, desta maneira, estão menos suscetíveis às características do problema. Por conta disto, várias abordagens neste sentido vêm sendo apresentadas.

Nesta dissertação são apresentadas técnicas baseadas em algoritmos evolutivos para a otimização de um problema multiobjetivo. Neste tipo de problema, o conjunto das possíveis soluções é como uma

¹Sistemas Imunes Artificiais são sistemas computacionais inspirados através de princípios e processos de sistemas imunes. Os algoritmos exploram as características de aprendizado e memória para resolver problemas.

população e o tamanho desta influencia fortemente na capacidade de convergência do Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo (AEMO) para a fronteira de Pareto, pois populações pequenas não proporcionam diversidade suficiente entre os indivíduos. O conceito de elitismo também é normalmente incorporado para garantir melhor desempenho dos algoritmos. A primeira implementação de um algoritmo evolutivo multiobjetivo ocorreu em meados de 1980 e esta técnica vem sendo amplamente utilizada desde então. A crescente importância deste campo é refletida através do significativo incremento de artigos e livros na área [1].

Dentre estas diversas áreas de atuação dos AEMOs, a economia e as finanças constituem um campo muito promissor dada a alta complexidade existentes em muitos problemas desta área. Os estudos sobre o problema de seleção de *portfolios* ótimos utilizando os AEMOs é recente e é o tema abordado nesta dissertação.

O problema de seleção de *portfolios* ótimos consiste na determinação de como deve ser aplicado um capital, dado um conjunto de possíveis opções de investimento, denominados ativos. Um decisor deseja obter o lucro esperado, porém quer assegurar que o risco de perda seja baixo, sendo que tais objetivos são conflitantes. O grande desafio neste processo de busca está ligado ao encontro de uma relação que estabeleça um bom compromisso entre os objetivos. Alguns fatores potencializam a dificuldade neste processo de busca. Como exemplo, podemos citar alterações no cenário econômico devido a fatores externos que não podem ser previstos e modelados.

O trabalho pioneiro na otimização de *portfolios* foi o modelo de média-variância proposto por Markowitz em [30]. Outros métodos, além da utilização de algoritmos evolutivos, podem ser utilizados no processo de seleção de *portfolios* ótimos como: a programação quadrática [14], que é um método exato e retorna soluções dependentes da importância que foi dada a cada objetivo; *Simulated Annealing* [12], que consiste em uma técnica de busca local probabilística e se fundamenta em uma analogia com a termodinâmica e *Ant Colony* [17], cujo processo de busca simula a escolha de um caminho por uma formiga baseado no feromônio deixado por outras formigas que passaram pelo mesmo caminho anteriormente.

Outro aspecto fundamental na busca de um *portfolio* ótimo é a relação entre o retorno e o risco. O retorno normalmente é calculado através da soma das diferenças dos valores dos ativos no momento da aquisição e depois de um dado período de tempo multiplicado pela quantidade do ativo adquirida. A inserção de uma variável que meça a incerteza existente no processo é indispensável, esta variável é denominada risco. Diferentes medidas de risco foram desenvolvidas até hoje, entre elas: a variância, que busca avaliar quão longe os dados de uma amostra estão em relação à sua média [35], o VaR (Value at Risk) que é uma estimativa da máxima perda, com um dado nível de confiança, que um investidor estaria exposto em um dado período de tempo [29] e o CVaR (Conditional Value at Risk) que é obtido através da esperança das perdas do portfólio maiores ou iguais ao VaR quantificando as perdas que superam o VaR [32]. A seção 2.1 apresenta uma explicação mais detalhada da relação risco-retorno.

Para muitos problemas, incluindo o apresentado nesta dissertação, otimização multiobjetivo de *portfolios* utilizando algoritmos evolutivos, após a obtenção da fronteira de Pareto através da utilização de algoritmos evolutivos ainda é necessário estabelecer uma medida para que seja possível comparar diferentes métodos. Estas medidas são denominadas métricas de desempenho. Alguns exemplos são a métrica C e a métrica Δ . A métrica C mede qual o percentual das soluções não-dominadas de um método são dominadas quando comparadas às soluções obtidas por outro método [47] e a Δ mede a qualidade da distribuição das soluções não-dominadas no espaço de busca [13].

Nesta dissertação foram comparados o desempenho dos algoritmos "puros", híbridos sem refinamento e híbridos com refinamento através das métricas de performance.

Vale aqui ressaltar também a principal contribuição desta dissertação que é uma técnica de refinamento da solução, que consiste em simulações da série histórica dos ativos identificando, para cada período de tempo (horizonte) analisado, o melhor conjunto solução e armazenando este conjunto em cada rodada do algoritmo. Por fim, todas as soluções existentes no arquivo são passadas pelo filtro de dominância e o filtro de não-agrupamento, apresentados na seção 4 e que todos os métodos e métricas apresentados foram programadas pela mestranda.

A dissertação está organizada da seguinte forma: os Capítulos 2, 3 e 4 tratam, respectivamente, da Teoria de *Portfolios*, Otimização Multiobjetivo e Algoritmos Evolutivos e podem ser lidos em qualquer ordem. No Capítulo 5 é apresentada a metodologia proposta e os resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas acerca dos testes realizados.

Capítulo 2

Teoria de *Portfolios*

Como na terceira lei de Newton, que diz que para cada ação existe uma reação, no contexto de economia, para cada ação humana realizada ocorre uma reação no cenário econômico, muitas vezes fugindo do controle humano. Estas reações podem ser influenciadas por fatores econômicos, políticos e sociais [6]. Alguns exemplos são as modificações do ambiente, os agentes de marketing e as ações dos homens. Estes fatores dificultam potencialmente a previsão de futuros cenários.

O problema de seleção de *portfolios* consiste em determinar de que maneira deve ser aplicado um capital em um determinado conjunto de possíveis opções de investimento, sendo tais opções chamadas de ativos. O maior objetivo de um investidor é obter o máximo retorno (lucro), porém a este lucro está associado um risco. No processo de seleção de *portfolios*, o grande desafio é então encontrar relações que estabeleçam um bom compromisso entre retorno e risco. Este problema pode ser resolvido por diferentes técnicas, entre elas: a programação quadrática[14], que é um método exato e retorna soluções dependentes da importância que foi dada a cada objetivo; *Simulated Annealing*[3], que consiste em uma técnica de busca local probabilística e se fundamenta em uma analogia com a termodinâmica; *Ant Colony Optimization*[17], cujo processo de busca simula a escolha de um caminho por uma formiga baseado no feromônio deixado por outras formigas que passaram pelo mesmo caminho anteriormente e a utilização de algoritmos evolutivos[10],[16] e [18], que procura encontrar soluções ótimas através de um processo que imita o processo de seleção natural em busca de indivíduos mais aptos. Esta última foi a técnica abordada nesta dissertação.

O trabalho pioneiro na área de otimização de *portfolios* foi a proposição do modelo média-variância por Markowitz em 1952 [30]. Tal proposição parte do princípio que, para o investidor, o retorno esperado e a volatilidade dos prováveis retornos são aspectos cruciais na definição do *portfolio* ótimo. O problema é formulado de modo a se minimizar o risco dos *portfolios* para um dado nível de retorno requerido pelo investidor.

As seções a seguir são organizadas da seguinte forma: na Seção 2.1 são apresentadas algumas abordagens de risco e retorno para o problema de seleção de *portfolios*. Na Seção 2.2 são apresentados alguns dos conceitos que serão utilizados ao longo do texto, as hipóteses e notações associadas ao mesmo.

2.1 A relação retorno *versus* risco

A decisão de como investir um capital é fundamentalmente voltada para o futuro, buscando o maior retorno com o mínimo risco em um dado período de tempo.

A decisão ótima é dada por um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_v)$, onde $x_i, i = 1, 2, \dots, v$, é o percentual do capital C a ser investido no ativo i , sendo v o número de ativos. O máximo lucro pode ser obtido pela resolução do seguinte problema:

$$\max \quad f(x) = \sum_{i=1}^v \ell_i x_i \quad (2.1)$$

sendo ℓ_i o retorno do ativo i depois de um período de tempo, dado pela diferença entre o preço do ativo i no final do período analisado e o preço do ativo quando o capital foi investido. É trivial que a melhor solução para este problema seja investir todo o capital em um único ativo - aquele que possui maior retorno - ou não investir nada caso todos os retornos obtidos sejam negativos. No entanto, como os preços finais são desconhecidos é essencial lidar com o problema de forma estocástica.

Na vida real, o que acontece é a existência de z possíveis cenários, os cenários são as possíveis combinações retorno *vs* risco. Em geral, a decisão de se encontrar o máximo retorno possível consiste em maximizar a média do lucro. Neste caso, ℓ_i é dado pela diferença entre a média dos preços considerados no final do período analisado, para os z cenários, e o preço do ativo quando o capital foi investido.

Tomar uma decisão que envolva somente o máximo retorno não leva em consideração que na busca por um *portfolio* ótimo, a introdução de uma variável que meça a incerteza é imprescindível. Quando a incerteza associada à verificação de um determinado evento pode ser quantificada por meio de uma distribuição de probabilidades associada aos resultados previstos, então diz-se que a decisão está sendo tomada sob uma situação de risco [29].

Em geral, quanto maior o risco associado a um processo, maior o retorno esperado, de forma a compensar o risco assumido. Abaixo são apresentadas algumas alternativas para se mensurar o risco de investir um capital em determinado conjunto de ativos.

Variância σ^2

Estatisticamente, a variância é uma medida de dispersão que busca avaliar quão longe os dados de uma amostra estão em relação à sua média [35]. A variância é representada por $\sigma^2(x)$ e é dada por:

$$\sigma^2(x) = (E(x - \mu)^2) = E(x^2) - (\mu)^2, \quad (2.2)$$

onde μ é a média dos valores considerados e $E(\cdot)$ é o operador esperança matemática.

Vale ressaltar que quanto maior a variância, maior a dispersão dos dados. Diante deste contexto, no cenário econômico, desejamos que o valor da variância seja a menor possível, pois indica que estamos menos sujeitos a alterações inesperadas.

Covariância *cov*

Em teoria de probabilidade, a covariância entre duas variáveis x e y com suas respectivas esperanças $E(x)$ e $E(y)$ é definida como uma medida de como duas variáveis variam conjuntamente. A covariância entre duas variáveis é representada por $cov(x, y)$ e é dado por:

$$cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y) \quad (2.3)$$

A covariância mede a tendência e a força da relação linear entre duas variáveis.

VaR *Value at Risk*

A medida VaR é uma estimativa da máxima perda, com um dado um nível de confiança, a que um investidor estaria exposto em um dado período de tempo. Em outras palavras, com uma certa probabilidade, as perdas não excederão o VaR [29].

Seja φ uma função de perda tal que:

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times \mathbb{R}^v &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^v$, Ω é o espaço de busca e $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ a máxima perda aceita, $\Psi(x, \alpha)$ é a probabilidade de que a perda $\varphi(x, y)$ não ultrapassar α :

$$\Psi(x, \alpha) = P\{y | \varphi(x, y) \leq \alpha\} = \int_{\varphi(x, y) \leq \alpha} p(y) dy,$$

onde $p(y)$ é a função de distribuição de probabilidade de y .

Dado um nível de confiança β e $x \in \Omega$, o VaR é definido como:

$$\alpha_\beta(x) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} | \Psi(x, \alpha) \geq \beta\} \quad (2.4)$$

A função $\Psi(x, \alpha)$ é a função de distribuição acumulada para a perda associada a x . Como esta função é não-decrescente¹ e contínua à direita², é sempre possível atingir o mínimo em (2.4). Quando $\Psi(x, \alpha)$ é contínua e estritamente crescente, $\alpha_\beta(x)$ é o único α tal que $\Psi(x, \alpha) = \beta$. Porém, isto nunca ocorre no contexto aqui apresentado, pois $\Psi(x, \alpha)$ é uma função tipo

¹Uma função é não-decrescente se para $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ quando $x_2 > x_1$ implica $f(x_2) \geq f(x_1)$ e $x_2 < x_1$ implica $f(x_2) \leq f(x_1)$.

²Uma função é contínua se ela é contínua em todo seu domínio. É contínua à direita em a se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

escada com saltos nos valores amostrados para a perda $\varphi(x, y)$. Duas situações podem ocorrer: ou haverá um intervalo de perdas para o qual a referida igualdade é válida, ou não existirá perda alguma que possa satisfazê-la. Quanto maior o valor de β maior a confiabilidade e, conseqüentemente, menor é a possibilidade de situações inesperadas ocorrerem.

A utilização do VaR permite controlar a influência que a possibilidade da ocorrência de eventos inesperados exercem na tomada de decisão. Por outro lado, o esforço computacional na busca pelo VaR é consideravelmente alto e, além disto, a medida possui características indesejáveis em um processo de otimização como a não convexidade e não diferenciabilidade quando se trabalha com funções discretas.

CVaR *Conditional Value at Risk*

O CVaR quantifica as perdas que superam o VaR [8]. A figura a seguir ilustra a representação geométrica do CVaR.

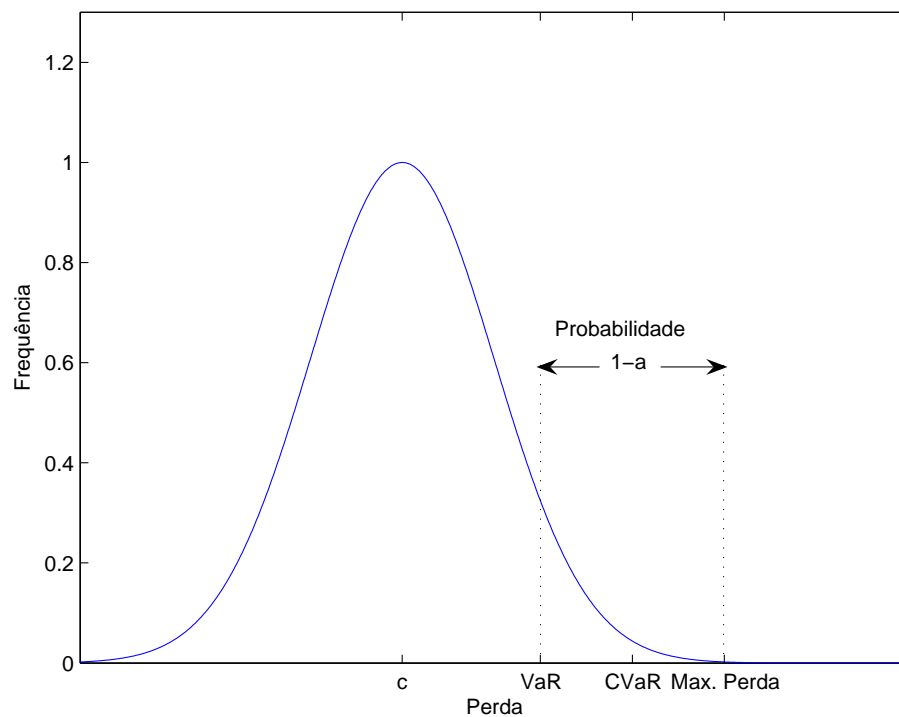


Figura 2.1: Representação CVaR

Cada uma das possíveis perdas é uma variável aleatória para funções de distribuição de probabilidades contínuas. O CVaR, para um dado nível de confiança (dado passado como parâmetro para o algoritmo), é a esperança das perdas do *portfolio* maiores ou igual ao VaR [32] ou, de outra forma, a média dos $(1 - \alpha)$ piores casos e é definida como:

$$\text{CVaR} = E(R|R > \text{VaR}_\alpha) = \frac{1}{1 - F_R(\text{VaR}_\alpha)} \int_{\text{VaR}_\alpha}^U r f_r(R) dR \quad (2.5)$$

O CVaR possui algumas características desejáveis no processo de otimização tais como convexidade³, monotonicidade⁴ e a sub-aditividade ($\text{CVaR}(x + y) \leq \text{CVaR}(x) + \text{CVaR}(y)$) [24]. Esta medida possui boas propriedades tanto do ponto de vista da teoria de *portfolios* quanto da otimização [8]. Vale ressaltar que o valor do CVaR de um *portfolio* nunca será menor que o respectivo VaR, pois o CVaR quantifica as perdas que superam o VaR.

A implementação desta medida é complexa, pois exige a simulação de variáveis normais multivariadas e apresenta um elevado número de restrições no processo para se encontrar o valor do CVaR [41].

Como, nesta dissertação, o objetivo é a análise do desempenho dos algoritmos evolutivos, não sendo a medida de risco o principal foco deste trabalho, a medida de risco escolhida foi a variância, por possuir menor complexidade computacional.

2.2 Formulações

A teoria moderna de *portfolios* assume que, para um dado nível de risco, um investidor consciente deseja o máximo de retorno, e para um dado nível de retorno esperado, o investidor deseja minimizar o risco. Existem também investidores extremos que querem somente maximizar o retorno (desconsiderando o risco) ou minimizar o risco (desconsiderando o retorno). Em geral, podemos descrever as formulações dos problemas de otimização de *portfolios* através de cinco diferentes formulações [18], apresentadas simplificadamente a seguir.

Modelo 1: Maximizar o retorno esperado (desconsiderando risco)

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = \sum_{i=1}^v \ell_i x_i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^v x_i = 1 \end{aligned}$$

onde ℓ_i é o retorno do ativo i e x_i é o percentual do capital a ser investido no ativo i , sendo que a restrição assegura o investimento total do capital.

Modelo 2: Minimizar o risco (desconsiderando retorno)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^v x_i = 1 \end{aligned}$$

onde σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j .

³Uma função é convexa se $\gamma f(x) + (1 - \gamma)f(x) \geq f(\gamma x + (1 - \gamma)x)$.

⁴É uma função que, num dado intervalo, varia sempre no mesmo sentido.

Modelo 3: Minimizar o risco para um dado nível de retorno esperado.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^v x_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^v \ell_i x_i = \ell^* \end{aligned}$$

onde ℓ^* é o retorno esperado.

Modelo 4: Maximizar o retorno para um dado nível de risco.

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = \sum_{i=1}^v \ell_i x_i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^v x_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v x_i x_j \sigma_{ij} = \sigma^{2*} \end{aligned}$$

onde σ^{2*} é a variância esperada.

Modelo 5: Maximizar o retorno e minimizar o risco

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = \sum_{i=1}^v \ell_i x_i \\ \min \quad & f(x) = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^v x_i = 1 \end{aligned}$$

Vale ressaltar que outras restrições que agreguem preferências do investidor podem ser inseridas em cada uma das formulações, além de outras abordagens para risco e retorno, conforme apresentado na seção (2.1).

Markowitz ganhou o prêmio Nobel em 1990 pela proposta do modelo média-variância de otimização de *portfolios*. A proposta tinha como objetivo minimizar a variância de um *portfolio* para um dado

nível de retorno esperado (como o Modelo 3). Este modelo pressupõe que o único objetivo do investidor é minimizar o risco, porém na realidade os objetivos de diferentes investidores podem não ser sempre iguais. No sentido de atender o maior público, o modelo proposto nesta dissertação é tal como o Modelo 5, que, embora mais complexo, apresenta características desejáveis no processo de seleção de um *portfolio* ótimo, incluindo o fato de um problema multiobjetivo possuir múltiplas soluções, o que possibilita que resultado o satisfaça diferentes tipos de investidores.

Capítulo 3

Otimização Multiobjetivo

O desenvolvimento das áreas tradicionais da engenharia tem sido caracterizado nas últimas décadas pelo crescente emprego de modelos de otimização multiobjetivo como paradigmas para problemas de tomada de decisões [22].

Inicialmente, os problemas eram modelados de forma a apresentar um único objetivo. Tais modelos não conseguiam descrever problemas mais elaborados. No sentido de buscar soluções que descrevessem melhor a realidade, problemas com dois ou mais objetivos, em geral conflitantes, passaram a ser estudados e utilizados. O conceito de otimização multiobjetivo foi apresentado por Vilfredo Pareto, sendo utilizado em diversas áreas [3],[10], [43], [44], [11], [28] e [25].

Em problemas de otimização multiobjetivo, em geral, os objetivos são conflitantes e muitas vezes melhorar um dos objetivos implica piorar outro(s), afetando a qualidade global da problema. O desafio desta busca é, portanto, encontrar soluções que estabeleçam um bom compromisso entre os objetivos. Dependendo da abordagem adotada, este tipo de problema não possui uma única solução ótima, sendo, neste caso, o resultado deste processo um conjunto de soluções, cabendo ao decisor a escolha da solução que mais se adeque às suas necessidades. Dentre as abordagens de definição do conjunto de soluções ótimas, uma das mais populares é a obtenção da chamada fronteira ótima de Pareto, que é formada pelo conjunto de todas as soluções não-dominadas do espaço formado pelas funções objetivos. Soluções não-dominadas são aquelas que alterações em pelo menos um dos objetivos piora a qualidade da solução[43].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a seção 3.1 apresenta os conceitos básicos envolvidos no processo de otimização multiobjetivo. Na Seção 3.2 são apresentados alguns métodos utilizados na resolução de problemas multiobjetivo. Na Seção 3.3 são apresentados os conceitos necessários para a obtenção de uma fronteira Pareto-ótima e na Seção 3.4 são apresentadas algumas das métricas utilizadas na comparação entre as soluções obtidas em diferentes métodos.

3.1 Formulação e Conceitos básicos

Um Problema de Otimização Multiobjetivo (POM) é caracterizado por um conjunto de funções objetivo a serem maximizadas ou minimizadas e um conjunto de restrições a serem satisfeitas [3]. Este último conjunto também define o espaço de busca.

De maneira geral, um POM é descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \max f_m(x) \quad m = 1, 2, \dots, M \\
\text{s.a. } & g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\
& h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \\
& x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, v
\end{aligned}$$

A solução $x = (x_1, x_2, \dots, x_v)^T$ é um vetor com v variáveis de decisão. O primeiro grupo de restrições representa J desigualdades do problema. O sinal da desigualdade pode ser alterado, se necessário, através de operações algébricas. O segundo grupo representa as K igualdades e o terceiro grupo representa a canalização das variáveis, sendo x_i^I o limitante inferior e x_i^S o limitante superior.

As soluções que satisfazem todas as restrições são denominadas soluções factíveis e as que não satisfizerem ao menos uma das restrições, são chamadas de não-factíveis.

De acordo com o princípio da dualidade [5], é possível converter um problema de maximização em um de minimização multiplicando a respectiva função objetivo por (-1). Esta alteração permite, sem perda de generalidade, que todas as funções objetivo sejam consideradas como funções a serem maximizadas (ou minimizadas).

3.2 Métodos para Resolução de Problemas de Otimização Multiobjetivo

Existem diferentes métodos para a resolução de Problemas Multiobjetivo, podendo ser classificados pelo momento em que o decisor aplica seus critérios [42]. Abaixo apresentamos uma breve descrição de alguns destes métodos, separando-as de acordo com sua classificação.

3.2.1 Métodos *a priori*

As preferências são definidas antes da solução do POM. O problema original é convertido em problemas mais simples, podendo ser resolvido por métodos conhecidos.

Métodos Lexicográficos

O decisor deve listar os objetivos em ordem decrescente de importância. A primeira função da lista é maximizada no espaço de busca e este resultado é considerado como uma restrição na maximização da segunda função, e assim por diante. O modelo iterativo a ser otimizado é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \max f_r(x) \\
\text{s.a. } & g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\
& h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \\
& x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, v \\
& \{x | f_w(x) = W\} \quad w = 1, 2, \dots, r - 1
\end{aligned}$$

onde W é o valor ótimo para a w -ésima iteração e a cada iteração de r , $r = 1, 2, \dots, M$ um diferente problema de otimização deve ser resolvido.

Este método é inapropriado quando existe um grande número de objetivos. Um dos motivos desta inapropriação é que o decisor deverá possuir informações sobre as funções objetivo antes da resolução

do problema, e, conseqüentemente, a dificuldade de ordenar os objetivos de acordo com a importância é proporcional ao número de funções objetivo.

Métodos Baseados em Limitantes

O decisor deve selecionar um objetivo de preferência e indicar limitantes para os demais objetivos. O modelo a ser resolvido é da forma:

$$\begin{aligned} & \max f_r(x) \\ \text{s.a. } & g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \\ & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, v \\ & \{x | W^L \leq f_w(x) \leq W^S\} \quad w = 1, 2, \dots, m; w \neq r \end{aligned}$$

onde $f_r(x)$ é a função escolhida como principal pelo decisor e W^L e W^S são respectivamente, os limitantes inferiores e superiores das demais funções objetivo.

3.2.2 Métodos Iterativos

As preferências são definidas durante a resolução do POM. Alguns dos métodos são:

STEM (STEP Method)

É utilizado em problemas lineares. Primeiramente são obtidos valores ideais para as funções objetivo. A região factível, considerando as restrições do problema e os valores ideais obtidos no primeiro passo é criada, e então o problema de otimização é resolvido. Se o decisor estiver satisfeito com a solução, o processo termina. Caso contrário, o decisor indica quais relaxações devem ser aplicadas às funções objetivo, uma nova região factível é criada e o problema revisado é resolvido. O processo continua até que o decisor esteja satisfeito com a solução encontrada ou não existam mais relaxamentos a serem realizados [27].

Método de Geoffrion, Dyer e Feinberg

É baseado no algoritmo de Frank-Wolfe [28]. O problema considerado é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max U[f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)] \\ \text{s.a. } & g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \\ & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, v \end{aligned}$$

onde $f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)$ são as M funções objetivo do problema e U é a função de preferência do decisor definida nos M objetivos. A função U não é explicitamente conhecida, sendo necessário o fornecimento de algumas informações pelo decisor durante o processo [25].

3.2.3 Métodos *a posteriori*

As preferências são definidas após a solução do POM. O método fornece como resultado um conjunto de soluções e posteriormente o decisor escolhe a(s) solução(ões) que mais se adequem à sua necessidade.

Método das ponderações

Obtém uma fronteira Pareto-ótima¹ resolvendo o problema formulado a partir da soma ponderada de todas as funções objetivo do POM original. O problema ponderado é descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_m \delta_m f_m(x) \quad m = 1, 2, \dots, M \\ \text{s.a.} \quad & g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \\ & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, v \end{aligned}$$

com $\sum_m \delta_m = 1, \delta_m \geq 0$. Os pesos δ_m representam a relativa importância de cada função objetivo no problema.

Método Simplex Multiobjetivo

É aplicado em problemas lineares e considera uma versão aumentada do *tableau* simplex utilizado na resolução de problemas lineares com um único objetivo [11]. O problema a ser resolvido é da forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & Cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}^{m \times v}, x \in \mathbb{R}^v, b \in \mathbb{R}^J$ e $A \in \mathbb{R}^{J \times v}$.

3.3 Fronteira de Pareto

Uma outra abordagem para a resolução de POM's, considerada nesta dissertação para a resolução do problema proposto, é a utilização dos chamados algoritmos evolutivos, que é uma abordagem *a posteriori* e se baseia na composição de uma fronteira Pareto-ótima para definir o conjunto de soluções ótimas [43], [44]. A seguir, algumas definições apresentadas em [39] necessárias para introduzir o conceito de otimalidade de Pareto são apresentadas.

Definição 3.1. Dados dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^k$, dizemos que $x \leq y$ se $x_i \leq y_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$, e que x **domina** y (denotado por $x \prec y$) se $x \leq y$ e $x \neq y$.

¹conceito explicado na Seção 3.3

Definição 3.2. Dizemos que um vetor de variáveis de decisão $x \in \chi \subset \mathbb{R}^n$ é **não dominado** com respeito a χ , se $\nexists x' \in \chi$ tal que $f(x') \prec f(x)$.

Definição 3.3. Dizemos que um vetor de variáveis de decisão $x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ (\mathcal{F} é a região factível) é **Pareto ótima** se é não dominada com respeito a \mathcal{F} .

Definição 3.4. O conjunto **Pareto ótimo** \mathcal{P}^* é definido por:

$$\mathcal{P}^* = \{x \in \mathcal{F} | x \text{ é Pareto ótima}\}$$

Definição 3.5. A **Fronteira de Pareto** \mathcal{PF}^* é definida por:

$$\mathcal{PF}^* = \{f(x) \in \mathbb{R}^k | x \in \mathcal{P}^*\}$$

A fronteira é a imagem do conjunto ótimo de Pareto. A figura a seguir ilustra a fronteira de um problema com dois objetivos de maximização onde os pontos pretos representam as soluções dominadas e os vermelhos as não-dominadas.

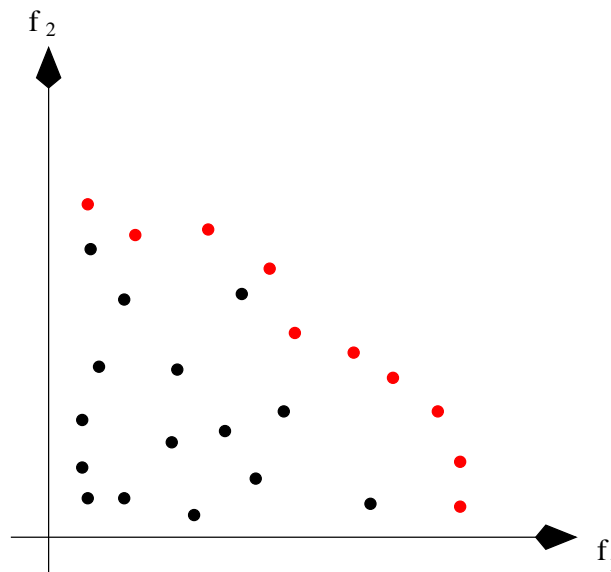


Figura 3.1: Fronteira de Pareto

De maneira simplificada, o objetivo é determinar o conjunto ótimo de Pareto do conjunto \mathcal{F} de todos os vetores de variáveis de decisão que satisfaçam as restrições do problema. Entretanto, na prática deseja-se encontrar apenas uma solução ou um subconjunto de soluções. Neste ponto cabe ao decisor determinar qual a solução mais adequada ao seu problema.

3.4 Métricas de Desempenho

Em problemas de otimização com um único objetivo somente uma solução ótima é obtida para cada método, desta maneira para realizar a comparação entre os resultados obtidos em diferentes métodos é suficiente analisar o valor objetivo resultante de cada método. Porém, quando se trata de problemas multiobjetivo, onde o ótimo é dado por um conjunto de valores que estabelecem as melhores relações entre os objetivos, a análise se torna mais complexa. Em problemas com 2 ou 3 objetivos uma análise gráfica pode ser realizada, porém esta não é uma tarefa tão simples e para problemas com 4 ou mais objetivos, esta análise fica impossível.

É desejável que a fronteira obtida possua [43]:

- (i) Menor distância possível da fronteira Pareto-ótima;
- (ii) Diversidade entre os indivíduos;
- (iii) Boa abrangência do espaço de busca.

Neste sentido a criação de métricas para a comparação de diferentes métodos de otimização multiobjetivo é necessária. O primeiro artigo a propor uma métrica de desempenho, o método dos ponderadores, foi publicado em 1996 [21]. Nos anos seguintes o desenvolvimento e utilização de outras métricas foi intensificado [40], [13], [43], [47]. A seguir serão apresentadas as medidas de performance utilizadas nesta dissertação.

3.4.1 Métrica Δ

A métrica Δ foi proposta em [13] e mede a qualidade da distribuição das soluções não-dominadas obtidas no espaço de busca.

A métrica é dada por:

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{N-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (N - 1)\bar{d}} \quad (3.1)$$

onde:

- d_i é a distância euclidiana entre duas soluções consecutivas do conjunto de soluções não-dominadas;
- \bar{d} é a média de todas as distâncias, ou seja $\sum_{i=1}^I d_i / I$;
- d_f e d_l são as distâncias entre os pontos extremos do conjunto não dominado obtido e os pontos extremos do espaço de busca.
- N é o número de soluções não-dominadas.

A métrica Δ possibilita a identificação do conjunto de soluções mais homogeneamente distribuído. Esta informação é importante pois facilita a solução da escolha mais adequada para o perfil de um determinado investidor. A homogeneidade garante que não tenhamos que escolher entre duas soluções com características extremas, o que implicaria em um maior risco de uma tomada de decisão incorreta.

Vale ressaltar que quanto menor o valor de Δ , melhor a diversidade e a distribuição das soluções ao longo da fronteira e que o valor obtido varia entre zero e um.

3.4.2 Métrica C

A métrica C foi proposta em [47] e é dada por:

$$C(A, B) = \frac{|\{b \in B | \exists a \in A : a \succeq b\}|}{|B|} \quad (3.2)$$

onde A e B são as fronteiras obtidas em dois diferentes métodos

O valor obtido descreve qual o percentual das soluções não-dominadas de um método são dominadas quando comparadas às soluções de um outro método.

Vale ressaltar aqui que a motivação de abordar estes dois tipos de métricas é avaliar não só a qualidade da solução (diversidade e distribuição) de um único conjunto de valores utilizando a métrica Δ como comparar dois conjuntos de soluções distintos utilizando a métrica C .

Capítulo 4

Algoritmos Evolutivos

Algoritmos evolutivos são técnicas que simulam o processo de evolução natural. Foram originados por volta da década de 50, porém a criação de novas metodologias e reconhecimento do seu potencial aconteceram na década de 70 e tiveram sua utilização intensificada na busca pela solução de problemas reais em meados da década de 80.

A estrutura básica de um algoritmo evolutivo é descrita a seguir. A partir de um conjunto inicial de soluções (população inicial), são aplicados processos evolutivos, como a variação e a seleção, a fim de gerar indivíduos mais adaptados em cada nova geração - melhores soluções. A seleção representa a competição por recursos, na qual os indivíduos mais capazes são selecionados para transmitir sua informação genética. A variação representa a capacidade de gerar novos indivíduos, como por exemplo através de recombinação e mutação. Um exemplo de recombinação é o *crossover*, que pode ser interpretado matematicamente como a combinação convexa de dois vetores (indivíduos), gerando duas novas soluções.

No processo de evolução, mecanismos como o elitismo - o melhor indivíduo de cada geração passa para a próxima geração - e a abrangência do maior espaço de busca possível, com intuito de garantir a diversidade da população, auxiliam na busca de um conjunto de solução de melhor qualidade.

Em geral, algoritmos evolutivos têm as vantagens de possuir um conceito simples, provas matemáticas que garantem a convergência ao conjunto Pareto ótimo, flexibilidade e grande capacidade de adaptação diante de alterações de cenários [10]. Porém, quando o espaço objetivo é não convexo¹, multimodal² ou descontínuo³, o poder do método se torna limitado.

Em termos evolutivos, um indivíduo é mais apto que outro se ele representa uma solução melhor em relação ao objetivo considerado. O conjunto formado pelos indivíduos mais aptos a transmitir suas informações genéticas para as próximas gerações, é denominado conjunto dos elementos não-dominados. Consequentemente, os demais indivíduos da população pertencem ao conjunto de indivíduos dominados.

Nas seções a seguir serão apresentados os algoritmos utilizados nesta pesquisa procurando evidenciar, para cada um deles, suas fraquezas e potencialidades.

¹Um espaço é não convexo se existe um segmento de reta cujas extremidades pertencem ao espaço, mas, pelo menos, um ponto deste segmento não pertence ao espaço.

²Um espaço é multimodal se apresenta mínimos locais.

³Um espaço é descontínuo se para algum ponto a pertencente a este espaço $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

4.1 Pareto Sorting Evolutionary Algorithm (PSEA)

O método PSEA, apresentado em [37] e ilustrado na figura a seguir, consiste nos seguintes passos:

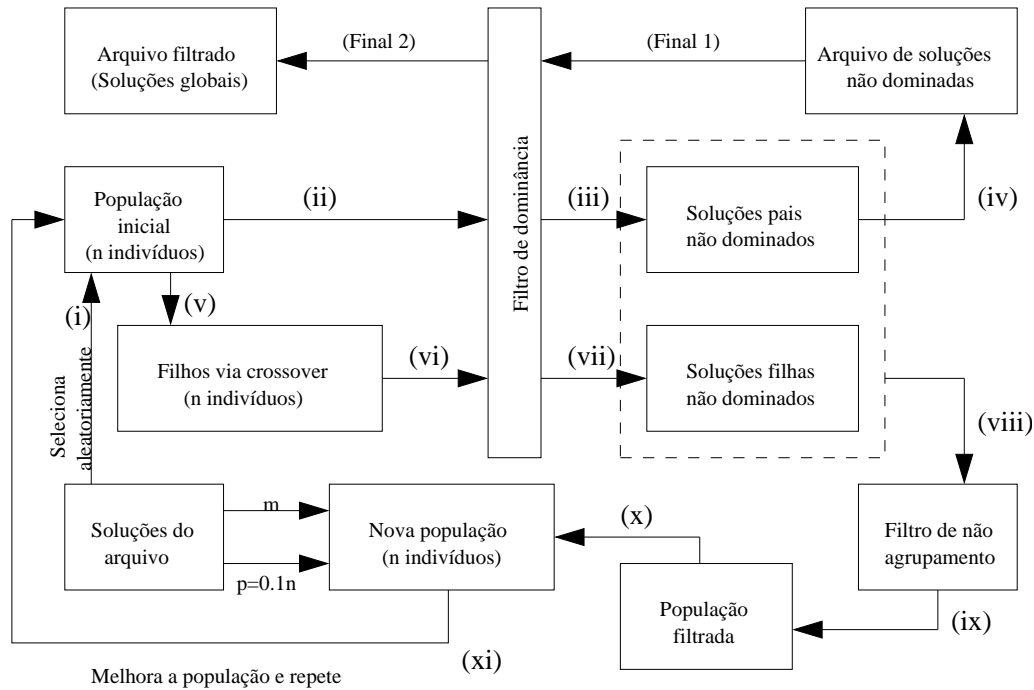


Figura 4.1: Diagrama PSEA

- (i) Do conjunto de soluções iniciais, composto pelas soluções de um problema de otimização linear com restrições definidas pela formulação do problema, é extraída aleatoriamente uma população de n indivíduos.
- (ii) Aplica-se o filtro de dominância, descrito na Seção 4.1.1, a este conjunto de soluções.
- (iii) Como saída do filtro de dominância, é obtido um conjunto contendo as μ ($\mu < n$) melhores soluções (denominadas não-dominadas).
- (iv) Em cada iteração, o subconjunto das soluções não-dominadas é armazenado em um arquivo.
- (v) Os n indivíduos da população obtida no passo (i) são agrupados em $\frac{n}{2}$ duplas. É realizado um *crossover* em cada um dos $\frac{n}{2}$ pares produzindo n descendentes.
- (vi) Aplica-se o filtro de dominância às soluções obtidas no passo (v).
- (vii) O conjunto das λ ($\lambda < n$) melhores soluções (denominadas não-dominadas) são identificadas.
- (viii) A população formada pela união das subpopulações (obtidas nos passos (iii) e (vii)), contendo $\mu + \lambda$ elementos, é aplicada a um filtro de desagrupamento, responsável por descartar soluções semelhantes. Neste processo são eliminadas α soluções, sendo o grau de semelhança entre duas soluções obtido através da norma euclidiana da diferença entre soluções.

- (ix) É identificada a população proveniente do filtro de desagrupamento, com $\mu + \lambda - \alpha$ indivíduos, onde α são os indivíduos eliminados no filtro.
- (x) É criada uma nova população com n indivíduos. Se $n = \mu + \lambda - \alpha$, então a população filtrada no passo (ix) torna-se a nova população melhorada. Se $n > \mu + \lambda - \alpha$, m indivíduos do arquivo de soluções são aleatoriamente inseridos na população de tal forma que $n = \mu + \lambda - \alpha + m$. Essa injeção de m pontos melhora a diversidade da população. Se $n < \mu + \lambda - \alpha$, alguns indivíduos devem ser descartados. Tal descarte é realizado em duas etapas:
- Escolha aleatória de $(n - p)$ indivíduos para permanecerem na população, onde a cardinalidade de p corresponde a 10% da cardinalidade de n .
 - Inserção de θ indivíduos na população, onde θ é a quantidade de indivíduos que faltam para que a população tenha novamente n indivíduos.
- (xi) Uma nova população é obtida e o processo continua até a convergência do algoritmo ou até que o número máximo de iterações seja atingido.

Por fim, o arquivo de soluções não-dominadas é passado por um filtro de dominância (Final-1). O conjunto obtido é o mais próximo à fronteira Pareto-ótima (Final-2).

4.1.1 Filtro de dominância

Uma ferramenta importante no processo de otimização multiobjetivo é o filtro de dominância. O filtro consiste em identificar as soluções não-dominadas dentre um conjunto de Z pontos em um problema com M objetivos. A complexidade computacional de problemas como este é $O(MZ^2)$ [37].

O processo é ilustrado na figura a seguir e consiste nas seguintes etapas:

- Conversão, de cada objetivo, em um problema de maximização, caso não seja.
- Considere o espaço $(f_1, f_2, \dots, f_M)(x)$ em que cada dimensão é um objetivo. Divida cada dimensão em um certo número de faixas de mesmo tamanho. O número de faixas é passado como parâmetro de entrada para o filtro. O cálculo do tamanho de cada faixa é realizado através da divisão da diferença entre os pontos de maior e menor valor na dimensão pelo número pré-determinado de faixas.

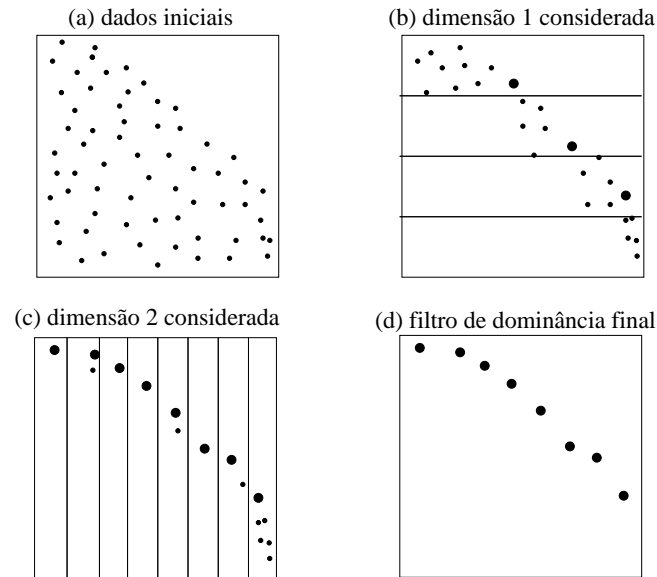


Figura 4.2: Filtro de dominância

- O ponto com maior valor dentro de cada faixa de cada dimensão é identificado. Para cada faixa seguinte, todos os pontos dominados por este máximo da faixa anterior são removidos. O processo é realizado para todas as dimensões. Note que a cada novo passo, menos pontos são comparados, melhorando a desempenho computacional.
- Os pontos são considerados individualmente e cada ponto dominado por algum outro é removido. O resultado é o conjunto dos pontos não dominados.

Na figura anterior, cada eixo representa uma função objetivo de um problema multiobjetivo composto por duas funções de maximização. A dimensão 1 representa f_1 e a dimensão 2 f_2 .

A velocidade do filtro de dominância impacta diretamente no desempenho computacional do PSEA. A velocidade é maior se cada faixa possuir um número de pontos consideravelmente menor que M . Se os pontos estiverem distribuídos uniformemente no espaço objetivo, obteremos o melhor desempenho do método.

4.2 Target Objective Genetic Algorithm (TOGA)

O método TOGA, apresentado em [37], consiste basicamente em direcionar cada subpopulação para um alvo pré-definido.

O método é descrito pelo seguintes passos:

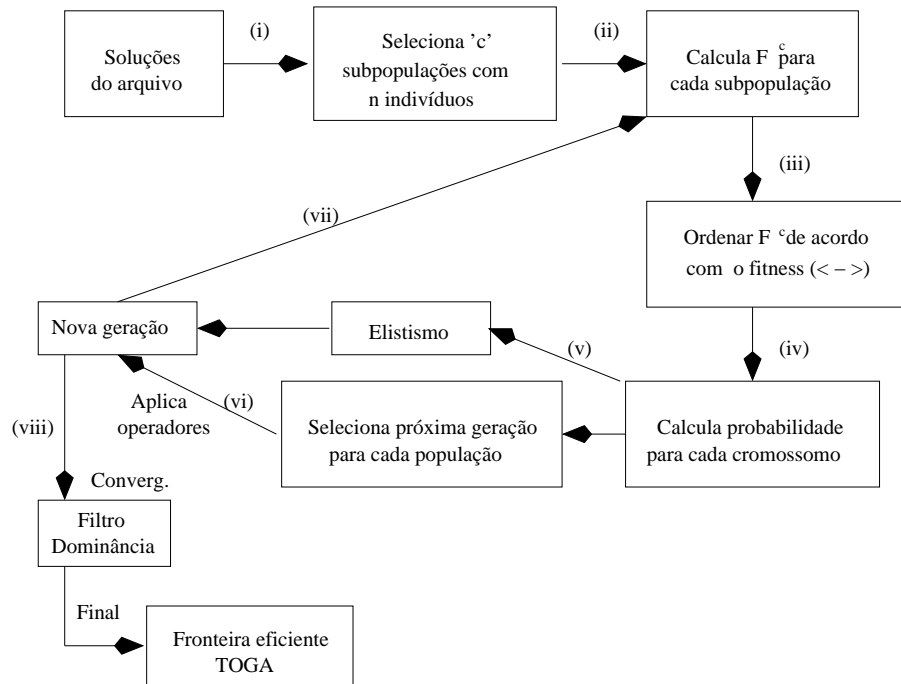


Figura 4.3: Método Toga

- (i) Da população inicial, são selecionadas c sub-populações de n indivíduos;
- (ii) O vetor $fitness F^c$ de cada subpopulação é calculado:

$$F^c = f_1(\bar{x}) - \delta_1(f_2(\bar{x}) - T_1^c)^2 - \delta_2(f_3(\bar{x}) - T_2^c)^2 - \dots - \delta_{k-1}(f_k(\bar{x}) - T_{k-1}^c)^2 \quad (4.1)$$

A dimensão de F^c é o tamanho da subpopulação.

onde:

$f_k(\bar{x})$ é o valor da k -ésima função objetivo;

δ_{k-1} é um fator de ponderação para o objetivo k e varia entre 0 e 1;

T_{k-1}^c é o vetor direção para cada subpopulação c ;

- (iii) Os vetores são ordenados de acordo com o $fitness$ do menor para o maior dentro do vetor. Quanto menor(maior) o $fitness$ para problemas de minimização (maximização) melhor. Nesta etapa também é aplicado o elitismo, onde para cada T^c é selecionado o indivíduo com maior $fitness$ para a próxima geração;
- (iv) A probabilidade P_i do i -ésimo indivíduo ser selecionado para a próxima geração é calculada:

$$P_i = \frac{q(1-q)^{r-1}}{1 - (1-q)^n} \quad (4.2)$$

onde

q é a probabilidade de selecionar o indivíduo mais apto;

r é o *ranking* do cromossomo (1 é melhor); e

n é o tamanho da população.

- (v) Os melhores indivíduos de cada subpopulação são selecionados;
- (vi) Processos de evolução (mutação, seleção, *crossover*) são aplicados nos indivíduos selecionados;
- (vii) Os indivíduos da nova geração são submetidos novamente ao processo até que os critérios de convergência sejam atingidos.
- (viii) A população obtida é submetida ao filtro de dominância

Algumas das vantagens que o método possui são a velocidade computacional (principalmente quando comparados a aproximações que se baseiam no conceito de Pareto), busca por pontos em espaços côncavos ou convexos e geração de múltiplos pontos ótimos em cada rodada. Por outro lado, o método apresenta um melhor desempenho se uma boa combinação dos objetivos é realizada. Algumas simulações são necessárias para determinar bons valores para os fatores escalares w_k e os pontos encontrados podem não pertencer à fronteira Pareto ótima.

4.3 Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA II)

O NSGA II, apresentado em [13], utiliza o conceito de camadas (níveis e *ranks* na definição das fronteiras de Pareto. Operadores de seleção, recombinação e mutação são aplicados ao conjunto formado pelos elementos das fronteiras selecionadas para criar as populações descendentes.

A população inicial P_0 é criada aleatoriamente. Aplicando operadores de mutação, recombinação e seleção em pares de solução aleatoriamente formados, criamos uma população descendente Q_0 de tamanho N .

A iteração t do algoritmo consiste nos seguintes passos:

- (i) Uma população $R_t = P_t \cup Q_t$ é formada;
- (ii) A população R_t é ordenada de acordo com a não-dominância:

Para cada par (p, q) de elementos da população, o contador de dominação n_k do elemento dominado k , onde $k = p$ se p é dominado por k , $k > q$ se q é dominado por p e nada é feito se não há dominação, é incrementado e o elemento dominado é adicionado ao conjunto S_k de soluções dominadas por k .

Todos os elementos com $n_k = 0$ compõem a fronteira mais externa. Para definir as demais fronteiras, tomamos cada ponto k da última fronteira classificada e subtraímos em uma unidade o contador de dominação dos elementos do conjunto S_k . Os elementos cujo contador agora é igual a zero formam a nova fronteira. O processo continua até que todos elementos pertençam a alguma fronteira.

(iii) O melhor conjunto \mathcal{F}_1 (a fronteira mais externa) é formado pelas soluções não-dominadas de R_t . Se o número de elementos de \mathcal{F}_1 é maior que N , selecionamos os melhores elementos através do operador de comparação \prec_n (descrito a seguir) para formar P_{t+1} . Se o número de elementos de \mathcal{F}_1 é igual a N então $\mathcal{F}_1 = P_{t+1}$, se é menor então todos os elementos de \mathcal{F}_1 são selecionados para P_{t+1} . Este procedimento de escolha prossegue até que N elementos sejam determinados.

O operador \prec_n utiliza dois atributos para a comparação:

- *rank* de não dominação (i_{rank}), sendo que $i_{rank} = k$ se $i \in \mathcal{F}_k$
- distância (i_{dist}) dada pelo perímetro do cubóide⁴ que tem como vértices os vizinhos imediatos de i . O primeiro passo para o cálculo desta distância é ordenar os indivíduos da mesma fronteira, de forma que seja possível a identificação dos vizinhos de cada indivíduo. O cálculo é dado então pela diferença, para cada função objetivo, entre os valores dos vizinhos deste indivíduo dividido pela diferença dos valores objetivo dos indivíduos localizados nas extremidades.

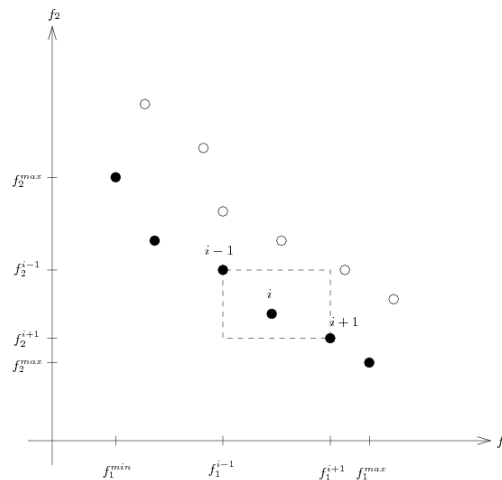


Figura 4.4: Cubóide NSGA

Por exemplo, para um problema com duas funções objetivos, como na figura acima, o cálculo de i_{dist} é dado por

$$i_{dist} = \frac{f_1^{i+1} - f_1^{i-1}}{f_1^{max} - f_1^{min}} + \frac{f_2^{i+1} - f_2^{i-1}}{f_2^{max} - f_2^{min}} \quad (4.3)$$

Vale ressaltar que o valor de i_{dist} dos pontos extremos é sempre igual a ∞ . Desta forma é assegurado que os pontos extremos sempre serão selecionados quando os indivíduos de uma determinada fronteira forem candidatos no processo de criação da nova geração.

O operador de dominância \prec_n é definido como $i \prec_n j$ se $i_{rank} < j_{rank}$ ou $i_{rank} = j_{rank}$ e $i_{dist} > j_{dist}$. Soluções com menores *rank*s são consideradas melhores. Se ambas soluções estiverem na mesma fronteira, a melhor solução é aquela que está em uma região com menos indivíduos.

⁴Um cubóide é um cubo de uma dimensão superior a 3.

- (iv) A nova população P_{t+1} é identificada e a população descendente Q_{t+1} é criada. O processo é repetido até que o critério de parada seja atingido. Nesta dissertação, o critério de parada utilizado foi a semelhança entre as populações de duas gerações consecutivas, onde se uma população é igual, com um determinado grau de tolerância, à população da geração anterior, dizemos que o critério de parada foi atingido.

Capítulo 5

Metodologia Proposta e Resultados

Neste capítulo é descrita a metodologia proposta para a resolução do problema multiobjetivo de seleção de *portfolios*. Esta arquitetura, utiliza um algoritmo evolutivo híbrido na busca do conjunto de soluções ótimas.

A principal contribuição desta dissertação é a proposta de um procedimento de refinamento das soluções que se baseia no comportamento da série histórica para gerar uma população inicial mais adequada. Uma comparação do desempenho dos diferentes algoritmos híbridos com e sem este refinamento é também realizada.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 5.1 é apresentada uma visão geral do método utilizado na busca das soluções ótimas para o problema multiobjetivo de seleção de *portfolios* ótimos e a arquitetura computacional utilizada é ilustrada. Na Seção 5.2 é apresentada a principal contribuição deste trabalho: o refinamento de soluções. Por fim, na Seção 5.4 são apresentados os resultados obtidos nas simulações dos métodos e as análises realizadas a partir destes resultados.

5.1 Visão geral do método

Como em outras situações reais, o problema de seleção de *portfolios* ótimos é caracterizado por múltiplos objetivos conflitantes. Neste tipo de problema é necessário maximizar o lucro e minimizar o risco, simultaneamente, advindos da aplicação de um dado capital. Um conjunto de soluções ótimas é obtido em certas abordagens de resolução de problemas multiobjetivo, sendo este conjunto chamado de conjunto de soluções não-dominadas. Nesta etapa cabe ao decisor a escolha da solução que melhor se adequa às suas preferências.

É necessário estabelecer um método de busca orientado a funções multiobjetivo para encontrar um conjunto de soluções não-dominadas, uma política de compromisso multicritério e uma estrutura para o processo. No presente estudo, foi utilizada uma arquitetura que permite a aplicação de algoritmos híbridos. A arquitetura é baseada em [37].

O algoritmo híbrido, conforme ilustrado na figura a seguir, exige que dois algoritmos evolutivos sejam executados. Com o intuito de comparar o desempenho de diferentes pares de algoritmos foram utilizados os algoritmos PSEA, NSGAI e TOGA. Os dois algoritmos necessários neste processo são denominados Alg1 e Alg2 nas próximas referências.

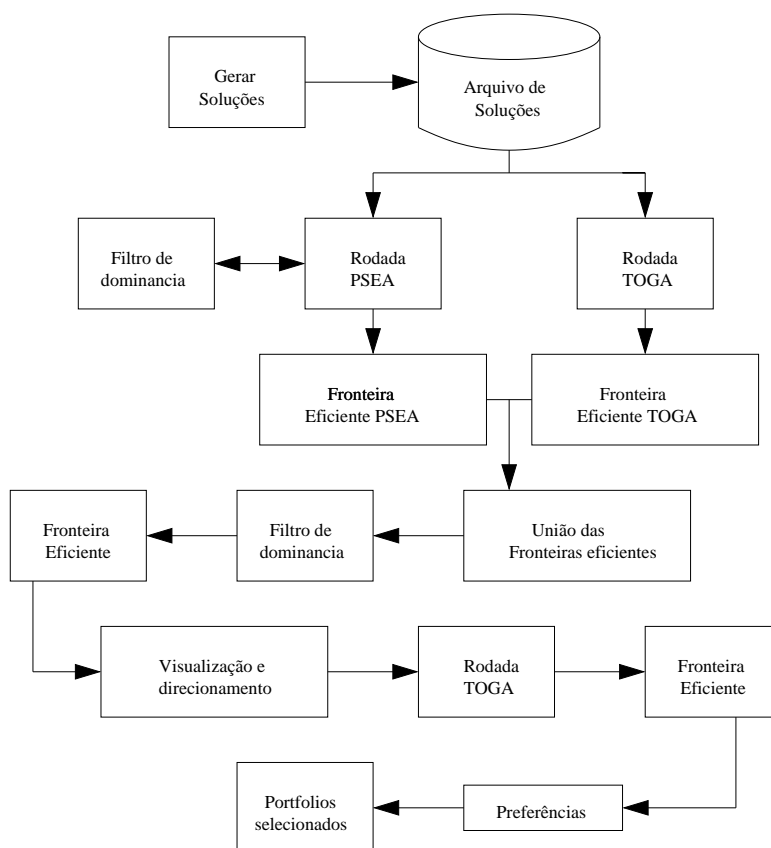


Figura 5.1: Algoritmo base

O primeiro passo da busca é a criação de um conjunto de soluções iniciais, conjunto também denominado de população inicial. Neste trabalho este conjunto é gerado aleatoriamente. Estas soluções são alocadas em um arquivo. Em seguida, a captura de n indivíduos do arquivo é realizada.

No próximo passo, os algoritmos evolutivos são executados. Utilizando as soluções do arquivo, os métodos Alg1 e Alg2 são executados e suas fronteiras eficientes são identificadas.

As fronteiras obtidas são unidas formando uma nova população, sendo que o filtro de dominância é aplicado à população, conforme descrito na Seção 4.1.1, e a nova fronteira eficiente é identificada.

Mais uma rodada do Alg2 é realizada e a fronteira eficiente é identificada. O conjunto encontrado pode possuir muitos indivíduos, dificultando desta forma a escolha do decisor. Visando diminuir o número de soluções ótimas e facilitando a decisão na escolha de uma solução, a aplicação de preferências deve ser realizada. A aplicação das preferências é realizada pelo investidor de acordo com seu perfil e objetivo. Se o investidor quiser o maior lucro independentemente do risco que está associado a esta escolha, ele selecionará opções que lhe propiciem isto, deixando de lado aquelas que, embora tenham menor risco, têm menor possibilidade de retorno.

5.2 Refinamento da solução

Esta técnica consiste em realizar rodadas do algoritmo híbrido armazenando, em cada rodada, o conjunto de soluções não-dominadas. Em cada rodada é considerado um período diferente da série histórica, a fim de se obter informações sobre o comportamento geral da série. Por fim, uma nova rodada do algoritmo é realizada para encontrar as soluções não-dominadas deste novo conjunto. Nesta última etapa o período considerado é o mais recente, pois este tem uma maior contribuição com o período que se deseja analisar.

Considerando-se uma data da série como sendo o ponto inicial x_i e um horizonte de tempo h obtemos, através da série histórica dos valores dos ativos, o conjunto dos dados que apontarão uma tendência do comportamento de cada ativo ao longo do tempo. Desta forma, o período considerado em cada rodada será sempre de x_i a $x_i + h$. Vale ressaltar que o comportamento dos ativos implica diretamente na decisão que tomaremos posteriormente de como aplicar o capital.

Em cada nova rodada é necessário alterar o período considerado. Chamamos a diferença entre este novo ponto inicial x_{i+1} e x_i de salto s . Então, o novo período considerado será de x_{i+1} a $x_{i+1} + h$. Continuamos esta atualização de períodos enquanto $x_{i+t} + h$, $t \in \mathbb{N}_+^*$, estiver contido no conjunto de dados da série.

Ao final será obtido o conjunto das soluções não-dominadas em cada uma das rodadas. Neste conjunto, as soluções semelhantes (muito próximas) são eliminadas, o filtro de dominância é aplicado e as soluções restantes são utilizadas como soluções iniciais em uma última rodada do algoritmo híbrido, cujo período considerado é de $x_f - h$ a x_f , sendo x_f é o dado mais recente da série histórica. O resultado é o conjunto de pontos que representam a melhor relação lucro-risco para a aplicação do capital.

5.3 Exemplo

Para ilustrar a análise efetuada nos experimentos, é apresentado a seguir o resultado obtido na execução dos métodos considerando 5 ativos, capital igual a 1.000.000u.m., população de 200 indivíduos e horizonte de planejamento 180 dias.

Os tempos de execução, em segundos, dos métodos: PSEA, TOGA, NSGAII, PSEA + NSGA II, PSEA + TOGA, NSGA II + TOGA, PSEA + NSGA II refinado, PSEA + TOGA refinado e NSGA II + TOGA refinado, foram respectivamente:

[4.8438 1.0938 57.4063 46.6563 9.6250 36.5938 815.5313 123.3281 307.2031]

Os valores obtidos na métrica Δ , na mesma ordem dos métodos foram:

[0.0142 0.2044 0.0314 0.0159 0.0200 0.0189 0.0031 0.0307 0.0058]

Na métrica Δ , quanto menor o valor obtido, melhor a qualidade da solução, ou seja, as soluções são mais homogêneas. Note que o melhor resultado obtido foi no método PSEA + NSGA II refinado.

Na métrica C é identificado o percentual que a fronteira obtida em um método domina a fronteira obtida em um outro método. A matriz a seguir ilustra os resultados obtidos para o exemplo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.1017 & 0.7750 & 1.0000 & 0.6583 & 0.6718 & 0.1483 & 0.5933 & 0.2752 \\ 0.0338 & 0 & 0.2000 & 0.2524 & 0 & 0 & 0 & 0.0149 & 0 \\ 0.1836 & 0.0907 & 0 & 1.0000 & 0.6083 & 0.6205 & 0.1253 & 0.4888 & 0 \\ 0 & 0.0720 & 0 & 0 & 0.3417 & 0.5026 & 0 & 0.2463 & 0 \\ 0.2415 & 0.1356 & 0.4750 & 0.5667 & 0 & 0.8205 & 0 & 0.3507 & 0.3275 \\ 0.2126 & 0.1271 & 0.4550 & 0.4476 & 0.1250 & 0 & 0 & 0.1978 & 0.3236 \\ 0.6329 & 0.1500 & 0.8150 & 0.8286 & 0.9833 & 0.9077 & 0 & 0.9552 & 0.3895 \\ 0.3816 & 0.0907 & 0.6350 & 0.6714 & 0.7583 & 0.7282 & 0 & 0 & 0.0310 \\ 0.7440 & 0.1042 & 0.9400 & 0.9000 & 0.8083 & 0.8103 & 0.4936 & 0.9216 & 0 \end{bmatrix}$$

A leitura da matriz é realizada da seguinte forma: cada linha/coluna corresponde a um método, colocados na seguinte ordem: PSEA, TOGA, NSGA II, PSEA + NSGA II, PSEA + TOGA, NSGA II + TOGA, PSEA + NSGA II refinado, PSEA + TOGA refinado e NSGA II + TOGA refinado. Olhando-se as linhas da matriz, cada elemento a_{ij} representa o quanto o método da linha i domina o método da coluna j e olhando-se as colunas, a_{ij} representa quanto o método da coluna j é dominado pelo método da coluna i . Note que na matriz ilustrada temos pouca esparsidade, isso significa que ocorrem poucas situações onde um método domina completamente outro ou é dominado. É possível observar que o método apresentado na sétima linha, em geral, domina mais os demais métodos e, para quase todos os casos, não é dominado por nenhum outro.

A seguir é apresentada a comparação entre a fronteira obtida na execução de dois métodos para o exemplo.

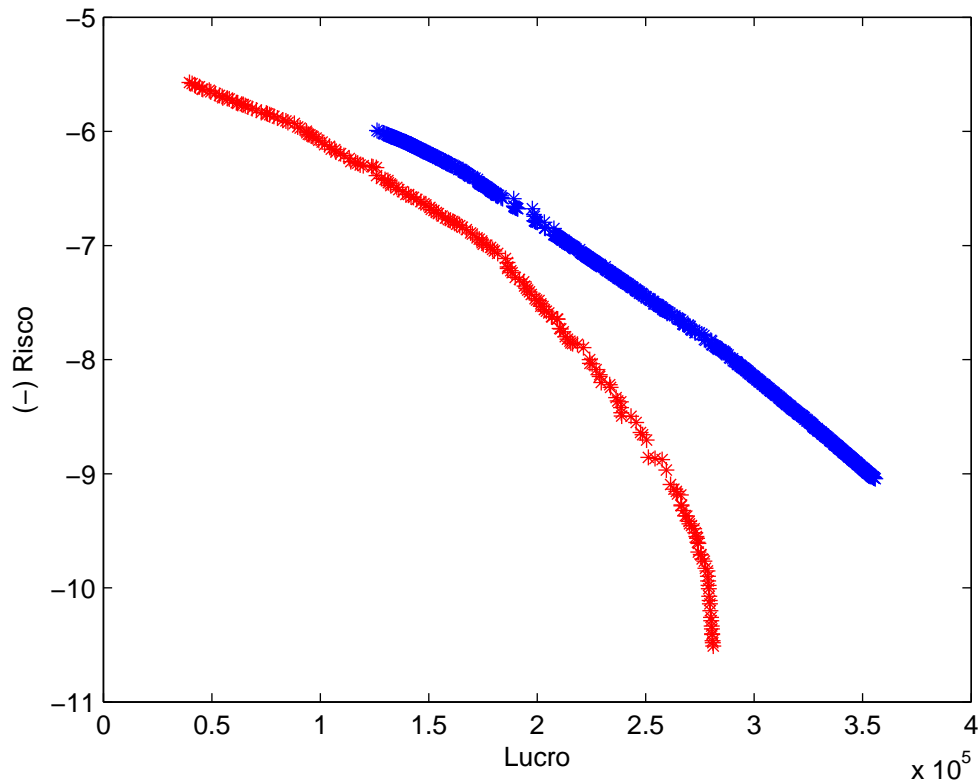


Figura 5.2: Métodos PSEA + NSGA refinado e sem refinamento

A fronteira formada pelos pontos azuis é referente ao método PSEA + NSGA refinado e a fronteira formada pelos pontos vermelhos é formada pelos mesmos métodos sem o refinamento. O método com refinamento apresentou resultados superiores ao método sem refinamento, mostrando que a principal contribuição desta dissertação de fato colaborou na melhora da qualidade das soluções. Este fato pode ser visualizado também nos resultados obtidos nas métricas Δ e C .

5.4 Experimentos

Uma série de experimentos foi realizada a fim de analisar a influência de cada um dos principais parâmetros (número de ativos, capital investido, horizonte de planejamento e população inicial) no desempenho de cada método. Os experimentos tem também a finalidade de se considerar uma abordagem híbrida que envolve dois diferentes métodos, conforme arquitetura apresentada acima. A inserção da técnica de refinamento das soluções também é analisada.

Os métodos foram executados utilizando um computador Intel Core 2 Duo, com 1.66GHz de CPU e 1Gb de RAM. A plataforma utilizada foi o Matlab versão 7 R14. Foi considerado número máximo de 100 iterações em cada execução de cada método, número de subpopulações $c = 20$ no método TOGA, salto $s = 30$ no refinamento da solução, $n = 60$ indivíduos em cada geração e tolerância de 10^{-4} nos critérios de convergência para todos os métodos. Nesta dissertação, o critério de parada utilizado foi a semelhança entre as populações de duas gerações consecutivas. Estes parâmetros foram

fixados, pois a variação não apresentou mudança qualitativa na solução e em alguns casos exigiu um esforço computacional maior para produzir soluções equivalentes.

A análise da influência dos parâmetros é realizada a partir de 72 cenários diferentes, gerados pela combinação de 4 diferentes número de ativos (3, 5, 10 e 15) dias, dois valores de capital (10.000 e 1.000.000), 3 valores para horizonte de planejamento (90, 180 e 360) e 3 valores para o tamanho da população (100, 200 e 500). São analisados 9 diferentes métodos: PSEA, NSGA II, TOGA, as versões híbridas dos métodos PSEA e TOGA, NSGA II e TOGA, PSEA e NSGA II, e a aplicação do procedimento de refinamento em cada uma das versões híbridas. Para medir e comparar a performance dos 9 diferentes métodos aqui abordados, foram utilizadas duas métricas apresentadas na Seção 3.4: a métrica Δ e a métrica C. Todos os métodos e métricas foram programados pela mestranda para a obtenção dos resultados apresentados.

Para a comparação realizada através da métrica Δ , foi verificado, para cada um dos 72 cenários, qual era o método com melhor desempenho. O histograma a seguir representa a quantidade média de cenários, após 4 rodadas de cada método, que tiveram melhor desempenho para cada um dos métodos.

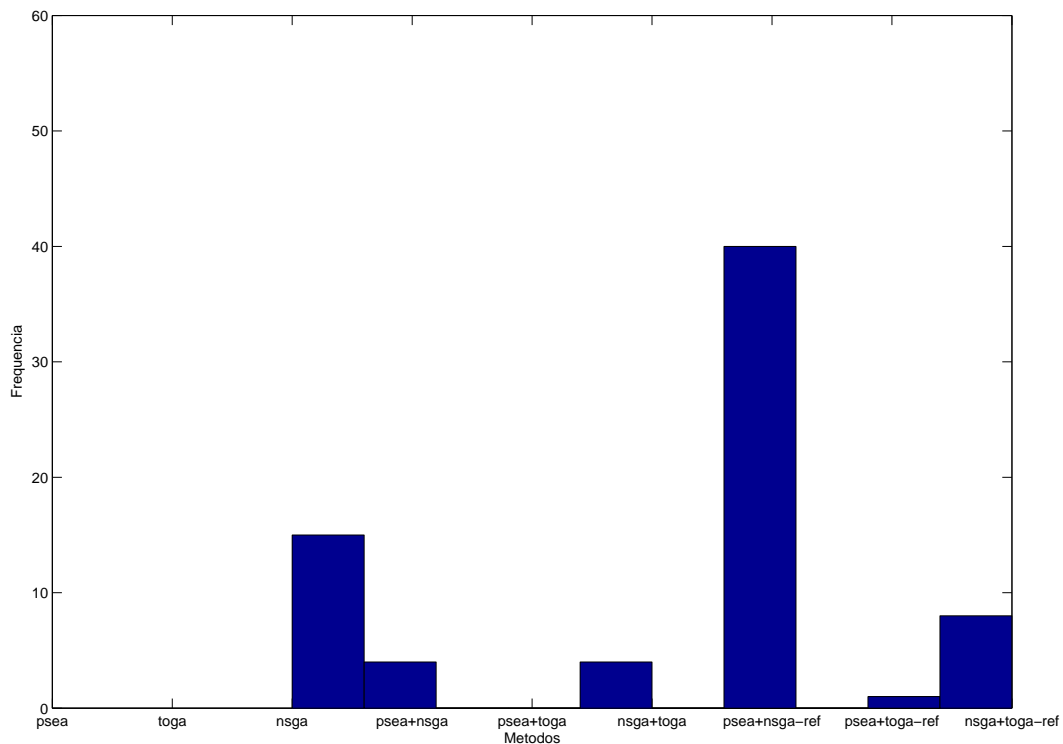


Figura 5.3: Histograma do número de vezes que cada método apresentou a melhor solução segundo a métrica Δ

Pode-se notar que o método híbrido do PSEA com NSGA refinado apresenta soluções mais homogêneas (menor valor de Δ) na maioria dos casos. Note que o método NSGA também apresenta um bom desempenho, mostrando que já é um bom método quando o objetivo é a busca de soluções homogeneamente distribuídas na fronteira de Pareto. Note também que a aplicação do refinamento

na composição híbrida dos métodos apresenta um número maior de melhores soluções segundo a métrica Δ quando comparadas às mesmas sem refinamento.

Conforme apresentado na Seção 3.4, uma solução com menor valor de Δ facilita a tomada de decisão. A figura abaixo ilustra a comparação de dois possíveis conjuntos de soluções de dois diferentes métodos (PSEA+NSGA com refinamento - conjunto azul e TOGA - conjunto vermelho). O problema de otimização multiobjetivo foi maximizar o lucro (eixo x) e minimizar o risco (eixo y), na figura são apresentados os valores negativos do risco.

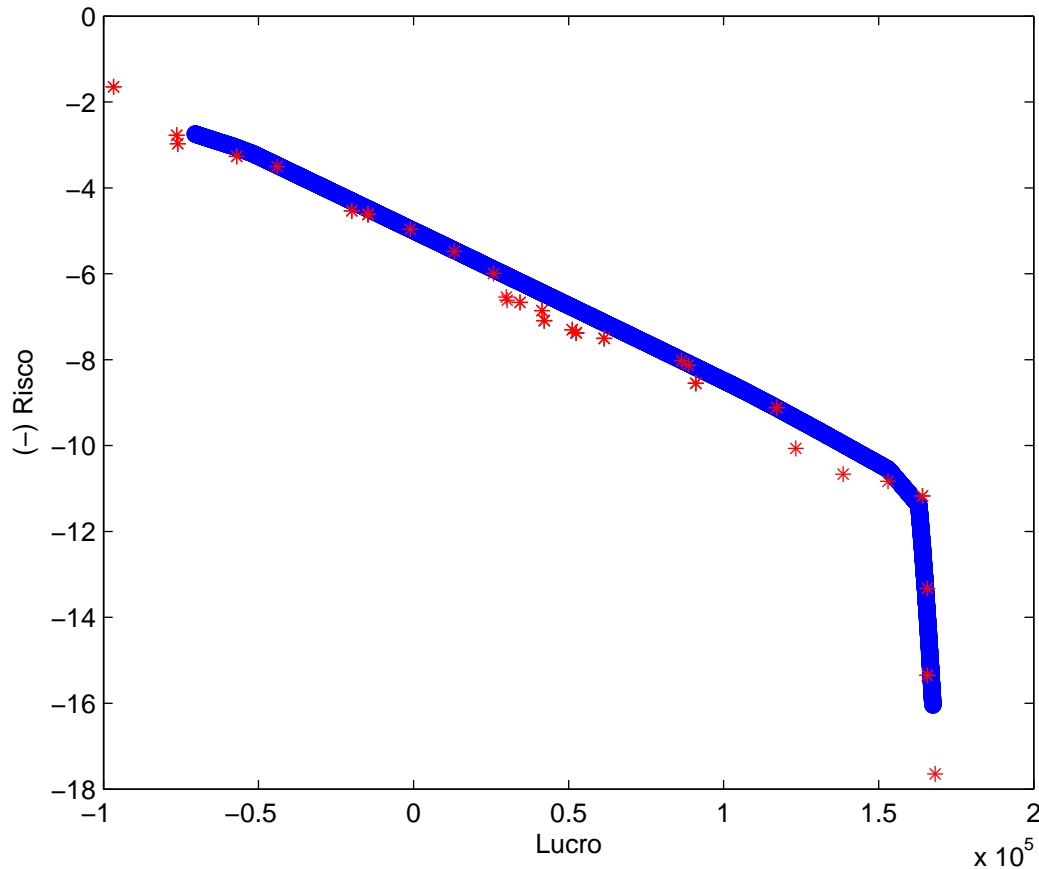


Figura 5.4: Conjuntos de soluções

Note que o conjunto azul é melhor distribuído que o conjunto vermelho (asteriscos). Este último apresenta soluções muito esparsas, o que implica em uma possível tomada de decisão que gere resultados insatisfatórios. Se, por exemplo, existisse uma solução intermediária entre cada par de soluções já existentes, seria possível assegurar um resultado que refletisse melhor o compromisso desejado, pois quando temos soluções muito distantes uma das outras podemos ter que escolher entre soluções que não satisfaçam nossa preferência, enquanto que quando temos soluções com uma distância razoável, é possível uma escolha que reflita o compromisso desejado.

Foram realizadas algumas simulações para analisar o efeito de cada parâmetro na métrica Δ . Para isso, foram fixados os demais parâmetros em seus limitantes inferiores e obtidos os valores de Δ para cada combinação entre os valores fixados e os valores que o parâmetro analisado pode assumir. O

processo foi repetido fixando-se também os limitantes superiores. Os resultados destas simulações são apresentados na tabela seguinte e o melhor resultado para cada conjunto está destacado.

Algumas abreviações são utilizadas: a letra N corresponde ao método NSGA II, a letra P ao método PSEA, a letra T ao método TOGA e a letra R ao refinamento da solução. Por exemplo, PNR corresponde ao método híbrido PSEA + NSGA com refinamento. Outra abreviação foi a utilização de números para identificar os valores dos parâmetros considerados na simulação. A identificação do problema é composta de quatro algarismos, sendo o primeiro correspondente ao número de ativos (1 \Rightarrow 3 ativos, 2 \Rightarrow 5 ativos, 3 \Rightarrow 10 ativos e 4 \Rightarrow 15 ativos), o segundo algarismo corresponde ao capital investido (1 \Rightarrow 10.000 u.m. e 2 \Rightarrow 1.000.000 u.m), o terceiro ao horizonte de planejamento (1 \Rightarrow 90 dias, 2 \Rightarrow 180 dias e 3 \Rightarrow 360 dias) e o quarto corresponde à população inicial (1 \Rightarrow 100 indivíduos, 2 \Rightarrow 200 indivíduos e 3 \Rightarrow 500 indivíduos). Na tabela A é o número de ativos, C é o capital, h o horizonte de planejamento e P a população.

	Parâmetros			Resultados		
	Δ	Método	Solução	Δ	Método	Solução
A	0.0283	NT	1111	0.0320	PNR	1233
	0.0131	PNR	2111	0.0320	PNR	2233
	0.0282	PNR	3111	0.0080	N	3233
	0.0168	PNR	4111	0.0113	NTR	4233
C	0.0283	NT	1111	0.0143	PN	4133
	0.0273	N	1211	0.0113	NTR	4233
h	0.0283	NT	1111	0.0084	NTR	4213
	0.0023	PNR	1121	0.0086	NTR	4223
	0.0154	PNR	1131	0.0113	NTR	4233
P	0.0283	NT	1111	0.0191	PNR	4231
	0.0143	N	1112	0.0106	PNR	4232
	0.0326	N	1113	0.0113	NTR	4233

Através da tabela, é possível observar que a métrica Δ é mais sensível ao método do que a alterações nos parâmetros. Nenhum parâmetro sozinho altera significativamente o valor de Δ , porém um conjunto de alterações pode apresentar um resultado melhor. Por exemplo, note que uma melhora nos valores obtidos para a métrica Δ ocorre quando o número de ativos é variado e são considerados os limitantes superiores para os demais parâmetros.

Os métodos com refinamento apresentam bons resultados nos casos onde são considerados limitantes inferiores, e se sobressaem quando são considerados problemas com limitantes superiores, problemas estes que possuem uma maior complexidade. Para estes casos, embora o esforço computacional seja maior, a qualidade da solução obtida também é maior. Isto ocorre pois, ao aumentarmos a complexidade do problema, aumentamos também nosso espaço de busca possibilitando que boas soluções que não eram consideradas em problemas de menor complexidade agora possam ser encontradas. O motivo pelo qual métodos com refinamento apresentam resultados mais satisfatórios do que os métodos sem refinamento se deve ao fato do refinamento considerar o histórico dos ativos considerados em cada caso, garantindo assim que o conjunto de soluções iniciais não seja totalmente aleatório.

Pode-se notar também que os métodos híbridos apresentam melhores resultados que os puros, com destaque para os métodos que possuem o NSGA. A presença do NSGA afeta positivamente a qualidade dos resultados obtidos na métrica Δ .

A análise da métrica C consiste na identificação do percentual que a fronteira obtida por um método domina a fronteira obtida por um segundo método. A figura seguinte ilustra o caso onde uma fronteira domina completamente outra.

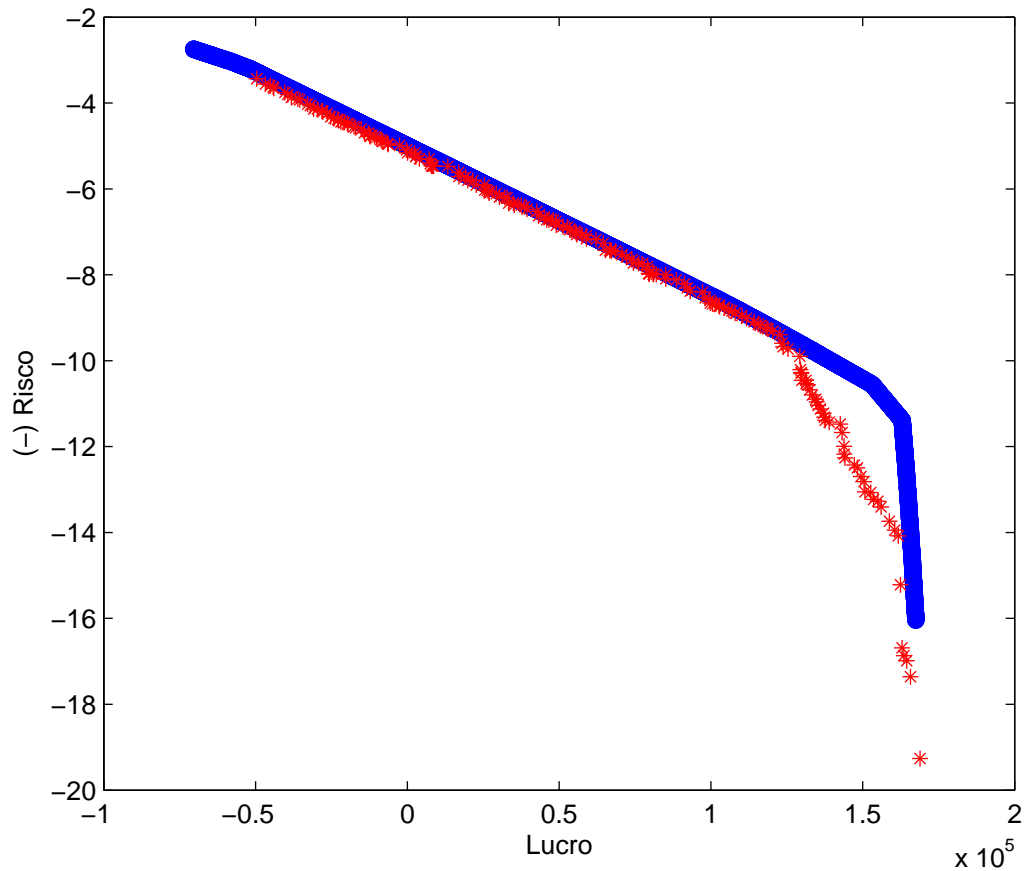


Figura 5.5: Fronteiras ótimas

Simulações para os mesmos problemas apresentados na tabela anterior foram realizados e matrizes como a seguinte foram analisadas para cada um dos casos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.3390 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1642 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0.3559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3636 & 0.7612 \\ 1.0000 & 0.4085 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0.8182 & 1.0000 \\ 0 & 0.3297 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6119 \\ 0 & 0.3373 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4545 & 0.9552 \\ 1.0000 & 0.4110 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0.3475 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0.3441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A leitura da matriz é realizada da mesma maneira apresentada na seção anterior. Para a matriz ilustrada é possível observar que ela é bastante esparsa, significando que para a maioria dos métodos ou ele domina ou é dominado por completo. Além disto, o método apresentado na sétima linha (NSGA II + PSEA refinado) na maioria dos casos domina completamente os outros métodos.

Uma análise dos demais casos nos permitiu identificar que a variação do número de ativos com os demais parâmetros mantidos em seus limitantes inferiores provoca maiores alterações na característica da matriz, sendo ela menos esparsa conforme o número de ativos aumenta. Quando os demais parâmetros são mantidos fixos em seus limitantes superiores, a matriz é menos sensível à variação do número de ativos. A chance de um método dominar completamente outro é inversamente proporcional ao número de ativos, ou seja, quanto maior o número de ativos, menores as chances de um método dominar completamente outro.

Uma análise semelhante ocorre quando variamos o tamanho da população. Para menores populações, as matrizes obtidas na métrica C são mais esparsas e quando são consideradas uma população maior os resultados são mais abrangentes. Isto já era esperado, dado que um espaço de busca maior possibilita uma melhora na qualidade das soluções. A alteração dos valores do capital e do horizonte não provocaram alterações significativas nos resultados obtidos.

Novamente, a presença do NSGA nos métodos, com destaque para aqueles que possuem também refinamento, melhora a qualidade dos resultados obtidos também na métrica C . Nestes casos as fronteiras encontradas estão mais próximas da fronteira Pareto-ótima, pois a quantidade de vezes que os métodos com NSGA dominam totalmente os outros métodos é maior.

Quando comparamos as duas métricas, é possível afirmar que a métrica C é mais sensível às alterações nos parâmetros do que a métrica Δ .

O método que apresentou o melhor desempenho, possuindo, na maioria dos casos, melhores valores de Δ , um maior percentual de elementos não dominados e também um menor percentual de elementos que o dominam foi o método PSEA + NSGA II refinado.

Capítulo 6

Conclusões

Algoritmos evolutivos são técnicas que simulam o processo de evolução natural, onde um conjunto de soluções iniciais (população) é modificado através de processos evolutivos, como a variação e a seleção, afim de gerar indivíduos mais adaptados em cada nova geração - melhores soluções. Estes algoritmos são uma excelente escolha quando tratamos problemas multiobjetivo, pois conseguem estabelecer um bom compromisso entre os objetivos, em geral conflitantes e assim obtendo uma boa fronteira de Pareto. Um dos mais conhecidos e desafiadores problemas de otimização multiobjetivo é o problema de seleção de *portfolios* ótimos. O maior desafio deste tipo de problema está na dificuldade da previsão dos possíveis cenários, que são muito influenciadas por fatores econômicos, políticos e sociais.

O estudo de algoritmos evolutivos quando aplicados em um problema de otimização multiobjetivo de *portfolios* é o principal foco desta dissertação. Nossas principais contribuições são (i) a proposta de um procedimento de refinamento das soluções para identificar o conjunto de soluções iniciais e (ii) a utilização do método NSGA II, que apresenta excelentes resultados na literatura estudada. O processo de refinamento consiste em realizar múltiplas simulações da série histórica dos ativos identificando, para cada período de tempo (horizonte) analisado, o melhor conjunto solução (o percentual do capital que deve ser aplicado em cada ativo) e armazenando o conjunto obtido em cada rodada. Após a análise de toda a série histórica, as soluções existentes no arquivo são passadas pelo filtro de dominância e o filtro de não-agrupamento.

Para resolver o problema de minimização do risco e maximização do lucro, é desejada a obtenção do conjunto de soluções não-dominadas. Para este processo de busca foi utilizada, nesta dissertação, uma arquitetura baseada em [37] para a obtenção da fronteira de Pareto. Esta arquitetura consiste na união das fronteiras obtidas em dois diferentes algoritmos, por isso denominado híbrido, que é trabalhada de forma a obter uma nova fronteira ótima. A última etapa do processo é a aplicação das preferências do decisor.

No artigo citado no parágrafo anterior, foram utilizados os algoritmos PSEA e TOGA. Nesta dissertação além do PSEA e do TOGA, foi também utilizado o NSGA II, bem como o refinamento da solução que consiste em realizar rodadas do algoritmo híbrido armazenando, em cada rodada, o conjunto de soluções não-dominadas. Com esses três algoritmos e o refinamento analisamos 9 diferentes métodos: PSEA, NSGA II, TOGA, as versões híbridas dos métodos PSEA e TOGA, NSGA II e TOGA, PSEA e NSGA II, e a aplicação do procedimento de refinamento em cada uma das versões híbridas. Estes problemas foram analisados em 72 diferentes cenários gerados a partir da combinação

entre 4 diferentes número de ativos (3, 5, 10 e 15), dois valores de capital (10.000 e 1.000.000), 3 valores para horizonte de planejamento (90, 180 e 360) e 3 valores para população (100, 200 e 500).

Por fim, os métodos evolutivos, híbridos e puros, com e sem refinamento, foram comparados por meio de experimentos numéricos para identificar qual apresenta a melhor fronteira Pareto-ótima. Para esta comparação, foram utilizadas as métricas Δ , que mede a qualidade da distribuição das soluções não-dominadas obtidas no espaço de busca e a métrica C que mede qual o percentual das soluções não-dominadas de um método são dominadas quando comparadas às soluções de um outro método. Os resultados obtidos foram satisfatórios, podendo ser destacados os métodos com refinamento que apresentaram melhor desempenho que os métodos sem o refinamento e também a presença do NSGA II nos algoritmos, que aumentou a qualidade da solução obtida. Em relação às métricas de desempenho, pode-se dizer que a métrica Δ é mais sensível ao método considerado do que a alterações nos parâmetros, enquanto a métrica C é mais sensível às alterações dos parâmetros, sendo que quanto menor a população, maior a chance de um método dominar completamente outro e quanto maior o número de ativos, menor a chance de um método dominar completamente outro. Nesta métrica, alterações nos parâmetros capital e horizonte não afetam significativamente a qualidade das soluções.

Considerando os resultados obtidos nas métricas C e Δ , concluiu-se que o método composto pelos algoritmos NSGA II e PSEA com refinamento apresenta desempenho superior aos oito demais métodos testados, pois possui soluções mais homogêneas e as fronteiras obtidas nas simulações são mais próximas da fronteira Pareto-ótima.

As perspectivas de trabalhos futuros são a aplicação de outras medidas de risco no problema e inserção de novas funções objetivo e restrições que descrevam melhor os possíveis cenários.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAHAM, Ajith; JANI, Lakhmi; GOLDENBERG, Robert. *Evolutionary Multiobjective Optimization*. Springer-Verlag London Limited. USA. 2005.
- [2] AMORIM, Elizete A.; ROMERO, Rúben A.; MANTOVANI, José R. S. *Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo para a Solução do Modelo de Controle de Potências Ativa e Reativa*. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Goiânia, GO. 2006.
- [3] ARMAÑANZAS, Rubén; LOZANO, Jose A. *A Multiobjective Approach to the Portfolio Optimization Problem*. IEEE Congress on Evolutionary Computation 2005: 1388–1395.
- [4] BÄCK, Thomas; HAMMEL, Ulrich; SCHWEFEL, Hans-Paul. *Evolutionary Computation: Comments on the History and Current State*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol.1, no.1. Abril, 1997.
- [5] BAZARAA, Mokhtar S.; JARVIS, John J.; SHERALI, Hanif D. *Linear programming and network flows*. Hoboken, NJ : Wiley-Interscience, 3^aed. 2005.
- [6] BRABAZON, Anthony; O’NEIL, Michael. *An Introduction to Evolutionary Computation in Finance*. Computational Intelligence Magazine, IEEE, Vol 3,USA, p: 42 - 55 2008.
- [7] BRUDERER, Erhard; SINGHI, Jitrenda V. *Organizational Evolution, Learning, and selection: A genetic algorithm based model*. Academy of Management Journal. Vol 39, No.5, pp: 1322–1349. USA. 1996.
- [8] BRUNO, Sergio V.B. *Otimização de Portfolio de ativos reais utilizando uma medida de risco coerente*. Dissertação de Mestrado. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, Brasil. 2008.
- [9] COELHO, G. P.; VON ZUBEN, F. J. *omni-aiNet: An Immune-Inspired Approach for Omni Optimization*. Springer Berlin / Heidelberg. Vol. 4163/2006, pp: 294–308. 2006.
- [10] COELLO, Carlos A. C. *Evolutionary Multi-Objective Optimization and its Use in Finance*. Jean-Philippe Rennard (editor). Handbook of Research on Nature Inspired Computing for Economy and Management, pp. 74–88, Vol. I. Idea Group Reference, Hershey, UK. 2006.
- [11] COHON, Jared L. *Multiobjective Programming and Planning*. Dover Publications, Inc. First edition. New York, USA. 2003.

- [12] CRAMA, Y; SCHYNS, BIRGIN, Ernesto J. G. *Simulated annealing for complex portfolio selection problems*. European Journal of Operational Research. Vol. 150, Pages 546-571. Bélgica. 2003.
- [13] DEB, Kalyanmoy et. al. *A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA II*. Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference, Paris France, p:849-858. 2000. Springer. Lecture Notes in Computer Science N° 1917.
- [14] DIAS, Fabio S.; BIRGIN, Ernesto J. G. *Programação Quadrática Aplicada à Teoria Moderna de Finanças*. in <http://www.linux.ime.usp.br/cef/mac499-01/monografias/fdias/499.pdf>.
- [15] DIMOPOULOS, Christos. *A review of Evolutionary Multiobjective Optimization Applications in the Area of Production Research* in www.lania.mx/ccoello/dimopoulos04.pdf.
- [16] DIOSAN, Laura. *A Multi-objective evolutionary approach to the portfolio optimization problem*. CIMCA/IAWTIC 2005: 183–187.
- [17] DOERNER, Karl et. al. *Pareto Ant Colony Optimization: A Metaheuristic Approach to Multi-objective Portfolio Selection*. Annals of Operations Research. Vol. 131, Pages 79–99. Netherlands. 2004.
- [18] DUAN, Yaoyao C. *A Multi-objective Approach to Portfolio Optimization*. Projeto de Pesquisa independente. Mathematics Department, Boston College, Chestnut Hill, MA. 2007.
- [19] EKLUND, N. *Multiobjective Visible Spectrum Optimization: A Genetic Algorithm Approach*. Ph.D. Thesis. Rensselaer (RPI), Troy, NY, USA. 2002.
- [20] ERBAS, C; CERAV-ERBAS, S.; PIMENTEL, A.D. *Multiobjective optimization and evolutionary algorithms for the application mapping problem in multiprocessor system-on-chip design*. Evolutionary Computation, IEEE Transactions on, vol.10, pp 358-374. Netherland. 2006.
- [21] ESBENSEN, Henrik; KUH, Ernest S. *EXPLORER: An Interactive Floorplanner for Design Space Exploration*. EURO-DAC'96/EURO-VHDL '96: Proceedings of the conference on European design automation. Geneva, Switzerland. IEEE Computer Society Press. p:356-361. 1996.
- [22] FERREIRA, Paulo A. V. *Otimização Multiobjetivo: Teoria e Aplicações*. Tese de Livre Docência. FEEC - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP. 1999.
- [23] FLORENTINO, Helenice de O.; MORENO, Edmundo V.; SARTORI, Maria M. P. *Multiobjective Optimization of economics balances of sugarcane harvest biomass*. Sci.agr. vol.65. n.5. Piracicaba, Brazil. 2008.
- [24] FREITAS, Egídio T.; RIBEIRO, Celma O. *Abordagem Robusta ao Problema de Seleção de Portfolios*. XLI SBPO 2009 - Pesquisa Operacional na Gestão do conhecimento, Brasil, p: 403 - 414 2009.
- [25] GEOFFRION, A.M.; DYER, J.S; FEINBERG, A. *An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation an academic departament*. Management Science, Vol 19, N°4, Application Series, Part 1, 357-362. 1972.

- [26] HANDL, Julia; KELL, Douglas B.; KNOWLES, Joshua. *Multiobjective Optimization in bioinformatics and computational biology*. IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics, vol.4, n.2, pp: 279-292. Los Alamitos, CA. USA. 2007.
- [27] JEONG, In-Jun; KIM, Kwang-Jae. *D-STEM: a modified step method with desirability function concept*. Division of Mechanical and Industrial Engineering, Pohang University of Science and Technology, Pohang, Kyungbuk 790-784, Republic of Korea. 2004.
- [28] LEE, Chungwon; MACHEMEHL, Randy B. *Combined Traffic Signal Control and Traffic Assignment: Algorithms, Implementation and Numerical Results*. Center for Transportation Research University of Texas at Austin. 2005.
- [29] MAGRO, Rogério C. *Medidas de Risco e Seleção de Portfólios*. Dissertação de Mestrado. IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP. 2008.
- [30] MARKOVITZ, Harry. *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol 7, No.1, p 77 - 91. 1952
- [31] MARZANO, Luis G. B. *Otimização de Portfólio de Contratos de Energia em Sistemas Hidrotérmicos com Despacho Centralizado*. Tese de Doutorado. DEE - Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-RIO. 2004.
- [32] MOREIRA, Leonardo L. *Risco de Mercado: Análise Comparativa de Métodos de Mensuração de Risco Aplicado ao Mercado Brasileiro*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Humanas, Depto de Economia. Brasília, Brasil. 2006.
- [33] PEÑA-REYES, C.; SIPPER, M. *Evolutionary computation in medicine: an overview*. Artificial Intelligence in Medicine, Vol 19, Pages 1-23. Elsevier. Suíça. 1999.
- [34] Edited by QUAGLIARELLA, D. et.al. *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science*. John Wiley and Sons. New York. 1997.
- [35] ROSS, Sheldon M. *A first course in probability*. Prentice Hall. New Jersey. USA. 6th edition. 2002.
- [36] SRINIVAS, N.; DEB, K. *Multiobjective function optimization using nondominated sorting genetic algorithms*. Evol. Comput., vol. 2, no.3, pp. 221–248, Fall 1995.
- [37] SUBBU, Raj. et. al. *Multiobjective Financial Portfolio Design: A Hybrid Evolutionary Approach*. IEEE, USA. 2005.
- [38] SUNAR, Mehmet; KAHRAMAM, Ramazan. *A Comparative Study of Multiobjective Optimization Methods in Structural Design*. Turk J Engin Environ Sci, 25, pp. 69-78. Saudi Arabia. 2001.
- [39] TAPIA, Ma G. C. ; COELLO, Carlos A. C. *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms in Economics and Finance: A Survey*. IEEE Congress on Evolutionary Computation 2007: p.532–539.

- [40] VAN VALDHUIZEN, David A.; LAMONT, Gary B. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: Analyzing the State-of-the-Art*. Evolutionary Computation 8(2): 125-147. Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [41] VIANNA, Luis V. M. C.; RIBEIRO, Celma O. *Avaliação da Sensibilidade de modelos de composição de carteiras à incerteza dos parâmetros*. SIMPEP. Bauru, São Paulo, Brasil. 2004.
- [42] VON ZUBEN, F. J. et. al. *Algoritmos Evolutivos para Otimização Multiobjetivo: Teoria e Revisão Bibliográfica*. Projeto da Disciplina de Computação Evolutiva - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP. Campinas, SP. 2007.
- [43] ZITZLER, Eckart. *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications*. PhD thesis, ETH Zurich, Suíça, 1999.
- [44] ZITZLER, Eckart; LAUMANNNS, Marco; BLEULER, Stefan. *A Tutorial on Evolucionary Multiobjective Optimization*. In X. Gandibleux and others, editors, *Metaheuristics for Multiobjective Optimisation*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 2004. Springer.
- [45] ZITZLER, Eckart; LAUMANNNS, Marco; THIELE, Lothar. *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization*. In K.C. Giannakoglou and others, editors, *Evolutionary Methods for Design, Optimisation and Control with Application to Industrial Problems (EUROGEN 2001)*, p. 95–100, 2002. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE).
- [46] ZITZLER, Eckart; THIELE, Lothar. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 3(4):257–271, 1999.
- [47] ZITZLER, Eckart; THIELE, Lothar. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study*. Fifth International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Springer. Berlim, Germany. p:292–301, 1998.