

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Filtragem de sistemas discretos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos

André Ricardo Fioravanti

Engenheiro Eletricista - FEEC/Unicamp(2006)

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Compu-
tação como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: **Automação**.

em 7 de dezembro de 2007, perante a banca examinadora:

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Orientador) ... DSCE/FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto DAS/UFSC
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val DT/FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes DECOM/FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F511f Fioravanti, André Ricardo
Filtragem de sistemas discretos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos / André Ricardo Fioravanti. –Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: José Cláudio Geromel
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria do Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Sistemas estocásticos. 4. Markov, Processos de. I. Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Título em Inglês:	Filtering of discrete-time Markov jump linear systems
Palavras-chave em Inglês:	Markov jump linear systems, Discrete-time systems, Kalman filter, Robust filtering, Network filtering, Linear matrix inequalities
Área de concentração:	Automação
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Alexandre Trofino Neto, João Bosco Ribeiro do Val, Renato da Rocha Lopes
Data da defesa:	07/10/2007
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: André Ricardo Fioravanti

Data da Defesa: 7 de dezembro de 2007

Título da Tese: "Filtragem de Sistemas Discretos com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos"

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente): _____

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto: _____

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val: _____

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes: _____

Resumo

Esta dissertação tem por principal objetivo o estudo do problema de projeto de filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares discretos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Inicialmente, sob a hipótese de que o parâmetro da cadeia de Markov é mensurável, fornecemos a caracterização de todos os filtros tais que o erro de estimação é limitado por uma norma, produzindo a solução completa do problema de projeto dependente do modo da cadeia. Baseado neste resultado, consideramos o projeto do filtro robusto capaz de lidar com incertezas paramétricas. Em seguida, propomos um procedimento de projeto de filtros sem o conhecimento da cadeia. Todos os problemas de filtragem são expressos em termos de desigualdades matriciais lineares. Os resultados teóricos são ilustrados através de uma aplicação prática que consiste na comunicação de dados através de um canal markoviano.

Palavras-chave: Sistemas com saltos markovianos, sistemas a tempo discreto, filtro de Kalman, filtragem robusta, filtragem em rede, desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This thesis addresses the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering design problem of discrete-time Markov jump linear systems. First, under the assumption that the Markov parameter is measurable, we provide the characterization of all filters such that the estimation error remains bounded by a given norm level, yielding the complete solution of the mode-dependent filtering design problem. Based on this result, a robust filter design to deal with convex bounded parameter uncertainty is considered. In the sequel, a design procedure for mode-independent filtering design is proposed. All filters are designed by solving linear matrix inequalities. The theory is illustrated by means of a practical example, consisting the data communication through a markovian channel.

Keywords: Markov jump linear systems, discrete-time systems, Kalman filter, robust filtering, network filtering, linear matrix inequalities.

*“Man can believe the impossible, but can never believe
the improbable.”*

Oscar Wilde

Agradecimentos

Mesmo tendo consciência que corro o risco de ser injusto com várias pessoas, tentarei expressar nas próximas poucas linhas a minha gratidão àquelas que de alguma forma muito me ajudaram no caminho até aqui. Inicialmente, e com grande ênfase, gostaria de agradecer ao Prof. José C. Geromel, que desde a graduação não foi apenas um grande orientador, mas sim um amigo e verdadeiro mestre. Mesmo após estes 3 anos de convivência, ainda me impressiono com sua eloquência, seu entusiasmo e sua postura apaixonada com relação ao trabalho de pesquisa e docência.

Da mesma maneira, não poderia deixar de agradecer de uma forma especial à minha família, que sempre me deu suporte de forma incondicional em todos os aspectos possíveis durante meus estudos. Por este motivo, gostaria de deixar um grande abraço a todos, principalmente aos meus pais Hamilton e Beatriz, e ao meu irmão Rodrigo Fioravanti.

Não posso me esquecer de todos os amigos professores e colegas da turma de 2001 de Engenharia Elétrica da Unicamp. Em especial, gostaria de agradecer ao Prof. José Pissolato e ao Prof. Reginaldo Palazzo por todo o apoio que me deram desde o início da graduação, e aos membros da melhor (e única) banda da turma, Pedro Kvieska, Glauco Pereira e Rafael Vivaldi, além de todos aqueles que apóiam o nosso grupo, por tornarem não só os 2 anos de mestrado, mas todo o período desde a graduação em uma fase memorável.

Aos amigos do laboratório, Rubens Korogui, Grace Deaecto, Alim Gonçalves e Rafael Martins, gostaria de agradecer pelas valiosas sugestões e críticas durante este trabalho e por tornar o nosso ambiente de pesquisa um lugar amigável, aprazível e nem sempre muito silencioso.

Gostaria de agradecer também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - *FAPESP* - por financiar meus estudos, desde a graduação, culminando com este trabalho.

E, sem mais distinções, a todos aqueles que, mesmo não nomeados, sempre demonstraram seu apoio às minhas empreitadas, quero deixar meu sincero muito obrigado.

Índice

Lista de Exemplos	vi
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 Apresentação da Dissertação	3
2 Conceitos básicos	5
2.1 Notação	5
2.2 Sistemas lineares com saltos markovianos	6
2.3 Estabilidade	7
2.4 Norma \mathcal{H}_2	12
2.5 Norma \mathcal{H}_∞	15
2.6 Considerações finais	18
3 Filtragem com o conhecimento da cadeia	19
3.1 Problema de filtragem	19
3.2 Filtragem \mathcal{H}_2 com o conhecimento da cadeia	21
3.3 Filtragem \mathcal{H}_∞ com o conhecimento da cadeia	29
3.4 Considerações finais	33
4 Problemas especiais de Filtragem	34
4.1 Filtragem Robusta	34
4.2 Filtragem sem o conhecimento do estado da cadeia	35
4.2.1 Filtragem \mathcal{H}_2 sem o conhecimento do estado da cadeia	36
4.2.2 Filtragem \mathcal{H}_∞ sem o conhecimento do estado da cadeia	41
4.3 Considerações finais	43

5	Aplicação Prática	44
5.1	Comunicação através de um canal markoviano	44
5.1.1	Filtragem em norma \mathcal{H}_2	45
5.1.2	Filtragem em norma \mathcal{H}_∞	46
5.1.3	Exemplo	47
5.2	Considerações finais	52
6	Conclusões e Perspectivas	54
	Referências Bibliográficas	57
A	Desigualdades Matriciais Lineares	60
A.1	Complemento de Schur	60
A.2	Eliminação de Variáveis	61

Lista de Exemplos

2.1	Estabilidade de um sistema com modos instáveis	10
2.2	Instabilidade de um sistema com modos estáveis	11
3.1	Importância dos termos D_{f_i} na filtragem \mathcal{H}_2 com conhecimento da cadeia	28
4.1	Comparação dos métodos de filtragem \mathcal{H}_2 independente do modo da cadeia	39
4.2	Importância do termo D_f na filtragem \mathcal{H}_2 sem conhecimento da cadeia	40
4.3	Comparação dos métodos de filtragem \mathcal{H}_∞ independente do modo da cadeia	42

Lista de Figuras

1.1	Cadeia de Markov com três estados	2
3.1	Filtro markoviano com conhecimento da cadeia	20
4.1	Filtro markoviano sem o conhecimento da cadeia	35
5.1	Sistema massa-mola-amortecedor	47
5.2	Performance do filtro próprio \mathcal{H}_2 versus taxa de perda de pacotes	49
5.3	Performance do filtro próprio \mathcal{H}_∞ versus taxa de perda de pacotes	50
5.4	Razão entre a performance do filtros para $p_{ij} = p_j$	51
5.5	Erro quadrático médio dos filtros markoviano e determinístico	52

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos que apresentam mudanças repentinas na sua estrutura ou em seus parâmetros foram objetos de estudos de vários trabalhos nas últimas décadas. Entre as diversas formas de modelar tais sistemas, uma que apresenta grande interesse é conhecida como *sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos*, também denominada por MJLS¹, que constitui uma classe importante de sistemas estocásticos. Estes sistemas modelam problemas onde, por exemplo, a estrutura física sofre mudanças abruptas e aleatórias devido a falhas ou reparos, ou ainda devido a modificações do ponto de operação no caso não-linear. Outra área onde este tipo de modelamento é atualmente aplicado são em sistemas que transmitem suas saídas através de canais markovianos, ou seja, canais modelados por cadeias de Markov que podem danificar as saídas medidas apresentadas ao controlador ou filtro externo. Como a área de aplicação é bem ampla, o interesse por este tipo de sistema é crescente dos pontos de vista da estabilidade, filtragem, controle e otimização.

Para melhor entender como são os sistemas com saltos markovianos que tratamos ao longo deste trabalho, considere um sistema que possa apresentar mais de um modo de operação, cada um deles regido por um conjunto de equações a diferenças, em particular lineares e invariantes no tempo. O sistema altera seu modo de operação de acordo com uma cadeia de Markov, isto é, a probabilidade dele passar de um modo de operação a outro depende apenas do seu estado atual. Considere ainda que sejam conhecidas todas estas probabilidades de transição. A Figura 1.1 apresenta um sistema deste tipo, onde os círculos representam os diferentes modos de operação e os arcos com setas são as respectivas probabilidades de transição.

Um dos primeiros trabalhos na literatura a tratar dessa classe de modelos foi apresentada em (Blair & Sworder 1975). Depois disso, uma grande quantidade de teoria e procedimentos de projetos foi desenvolvida com o intuito de estender os conceitos dos sistemas determinísticos

¹do inglês, *Markov Jump Linear Systems*

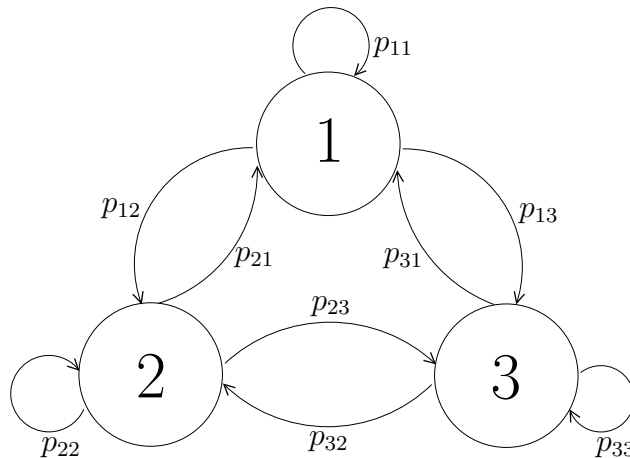


Figura 1.1: Cadeia de Markov com três estados

para esta classe particular, em especial conceitos de estabilidade e as condições para testá-las, assuntos que são abordados em (Costa & Fragoso 1993), (Ji, Chizeck, Feng & Loparo 1991) e (Ji & Chizeck 1988). O problema de controle ótimo por realimentação de estado foi resolvido em (Ji & Chizeck 1990), sendo que a questão de otimização em norma \mathcal{H}_2 empregando controladores via realimentação de estado foi desenvolvida em (Costa, do Val & Geromel 1997) sob a ótica de programação convexa e em (do Val, Geromel & Gonçalves 2002) através de desigualdades matriciais lineares, ou LMIs². Por fim, a otimização em norma \mathcal{H}_∞ através de LMIs foi vista em (Costa & Marques 1998) e (de Souza 2005), entre outros.

Uma hipótese importante para se considerar para o problema de projetos em sistemas MJLS é se o estado da cadeia de Markov, também chamado de modo, está disponível para o controlador ou filtro a cada instante de tempo $k \in \{1, 2, \dots\}$. Baseado nesta informação, o projeto é dito ser dependente ou independente do modo da cadeia, respectivamente.

Com relação aos trabalhos anteriores que lidam com filtragem de sistemas markovianos discretos, tem-se que a determinação do filtro ótimo \mathcal{H}_2 estritamente próprio foi resolvido em (Costa & Tuesta 2004) com o uso de equações algébricas de Riccati acopladas, também chamadas de CARE³, que exigem a solução iterativa de equações de Riccati. Para o problema do filtro sem o conhecimento da cadeia de Markov, o projeto de filtros ótimos utilizando matrizes expandidas baseadas no produto de Kronecker foi proposto em (Costa & Guerra 2002b) através de CARE e em (Costa & Guerra 2002a) através de LMIs. Destaca-se que os filtros obtidos por estes

²do inglês, *Linear Matrix Inequalities*

³do inglês, *Coupled Algebraic Riccati Equations*

métodos são de ordem Nn , onde N é o número de modos da cadeia de Markov e n é a ordem da planta. Em todos os casos apenas filtros estritamente próprios foram considerados, e como será visto posteriormente em exemplos, a restrição de propriedade estrita pode acarretar em grandes prejuízos na qualidade do filtro. Outra restrição imposta ao problema resolvido por (Costa & Guerra 2002a) é que a saída a ser estimada necessita ser independente do modo do sistema e livre de ruídos de entrada.

Em se tratando de problemas relacionados à norma \mathcal{H}_∞ , a determinação do filtro ótimo, estritamente próprio e com o conhecimento da cadeia foi resolvido em (de Souza & Fragoso 2003) através do uso de LMIs. É importante notar que, nesse trabalho, apenas os ganhos de um filtro baseado em observador foram obtidos, e a imposição desta estrutura particular ao filtro torna esse resultado sem qualquer possibilidade de ser estendido para o problema de filtragem robusta. Para o caso de filtragem sem o conhecimento do modo da cadeia, um projeto foi proposto em (de Souza 2003) resolvendo condições suficientes a fim de impor um custo garantido para a norma \mathcal{H}_∞ do erro de estimação, considerando novamente apenas filtros estritamente próprios.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que uma obra bastante completa sobre o assunto, que serviu como referência inicial em vários aspectos durante toda a execução do trabalho apresentado nesta dissertação, é (Costa, Fragoso & Marques 2000).

1.1 Apresentação da Dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e um anexo. Este primeiro capítulo apresenta uma introdução ao estudo do tema, resume brevemente os resultados já disponíveis na literatura e expõe a forma como foi organizado o texto deste trabalho.

O segundo capítulo apresenta conceitos básicos para o desenvolvimento dos resultados principais. Entre eles estão a definição precisa do sistema com o qual iremos trabalhar, bem como os conceitos de estabilidade e a generalização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para tais sistemas markovianos.

Em seguida, no capítulo três, obtemos o conjunto de todos os filtros próprios de ordem completa e com conhecimento do estado da cadeia de Markov com norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ do erro de estimação limitada por um certo valor. Este conjunto é expresso em termos de LMIs, o que permite que o problema de projeto do filtro ótimo seja resolvido diretamente, e não iterativamente, como é necessário para a solução de CARE.

No quarto capítulo, exploramos a vantagem de expressarmos o conjunto de filtros através de LMIs para, através de restrições adicionais ao problema básico, projetar filtros robustos capazes de lidar com incertezas paramétricas. Outras restrições adicionais ao problema nos permitem projetar filtros independentes do modo da cadeia.

Em seqüência, no quinto capítulo, apresentamos uma aplicação prática para a teoria apresentada, a respeito de filtragem através de redes, e comparamos nossos resultados com outros existentes na literatura.

Por fim, o sexto capítulo apresenta as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

O anexo apresenta conceitos básicos sobre LMIs, bem como duas propriedades muito utilizadas no decorrer deste trabalho: o complemento de Schur e a eliminação de variáveis.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Este capítulo se propõe a introduzir a notação e o modelo do sistema dinâmico a ser utilizado ao longo de todo este trabalho, além de apresentar definições e resultados fundamentais para o estudo do mesmo. Muitos dos resultados aqui presentes são comumente encontrados na literatura, mas suas demonstrações estão incluídas com o intuito de facilitar a leitura desta dissertação.

2.1 Notação

Procuramos sempre que possível padronizar a notação utilizada ao longo do texto. Letras maiúsculas denotam matrizes e letras minúsculas vetores. Utilizamos letras gregas minúsculas para a representação de escalares e, tanto para matrizes como para vetores reais, temos que o símbolo (') denota a operação de transposição. Para matrizes quadradas, representamos por $\text{tr}(X)$ o traço e por $r_\sigma(X)$ o raio espectral da matrix X.

O conjunto dos números naturais e reais são denominado por \mathbb{N} e \mathbb{R} , respectivamente. \mathbb{R}^n representa o espaço euclidiano n-dimensional e \mathbb{N}_N o conjunto finito dos N primeiros números naturais $\{1, \dots, N\}$. O espaço de matrizes reais $n \times m$ é representado por $\mathbb{M}^{n,m}$, ou por \mathbb{M}^n no caso de $n = m$. O espaço de matrizes reais $n \times n$ simétricas é representado por \mathbb{M}_s^n , e uma matriz $P \in \mathbb{M}_s^n$ é dita ser definida positiva ($P > 0$) se para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

$$x'Px > 0 \tag{2.1}$$

Em um espaço de Hilbert, representa-se o produto interno por $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ e a norma induzida por este produto por $\| \cdot \|$. Se V_1 e $V_2 \in \mathbb{M}^{n,m}$, tem-se que

$$\langle V_1; V_2 \rangle = \text{tr}(V_1'V_2) \tag{2.2}$$

define um produto vetorial, e a norma induzida por este produto é dada por

$$\|V_1\|_F = \sqrt{\langle V_1; V_1 \rangle} = \sqrt{\text{tr}(V_1'V_1)} \quad (2.3)$$

Quando matrizes são representadas por blocos, o símbolo (\bullet) denota genericamente cada um dos seus blocos simétricos, ou seja

$$\begin{bmatrix} A & \bullet \\ B & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix}$$

O simplex unitário no \mathbb{R}^N , composto por todos os vetores não negativos $\mu \in \mathbb{R}^N$ tais que $\mu_1 + \dots + \mu_N = 1$ é denominado por Λ . Dados N^2 números reais não negativos p_{ij} , que satisfaçam as restrições $p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$ e N matrizes reais X_j para todo $j \in \mathbb{N}_N$, a combinação convexa destas matrizes com pesos p_{ij} é denominada por $X_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij}X_j$.

O símbolo $\mathcal{E}\{\cdot\}$ denota a esperança matemática. Para qualquer sinal estocástico $z(k) \in \mathbb{R}^r$ definido no domínio de tempo discreto $k \in \mathbb{N}$, a quantidade $\|z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z(k)'z(k)\}$ é sua norma quadrática. O conjunto de todos os sinais $z(k) \in \mathbb{R}^r$, $k \in \mathbb{N}$ tais que $\|z\|_2^2 < \infty$ é denominado por \mathcal{L}_2^r .

2.2 Sistemas lineares com saltos markovianos

Um sistema linear discreto sujeito a saltos markovianos é descrito pelas seguintes equações estocásticas:

$$\mathbb{G} : \begin{cases} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta_k)x(k) + E_z(\theta_k)w(k) \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ representa perturbações externas, $z(k) \in \mathbb{R}^r$ é a saída a ser estimada, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida e $\theta_k = \theta(k)$ é uma variável aleatória tal que $\{\theta(k); k \in \mathbb{N}\}$ caracteriza uma cadeia de Markov.

As matrizes de estado em (2.4) dependem de uma cadeia de Markov que assume valores em um conjunto finito $\mathbb{N}_N = \{1, \dots, N\}$, onde N é o número de modos de operação do sistema, e a matriz de probabilidades de transição $\mathbb{P} \in \mathbb{M}^N$ é dada por $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ com $p_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i)$, que devem satisfazer as restrições $p_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ para todo $(i, j) \in \mathbb{N}_N \times \mathbb{N}_N$. A fim de facilitar a apresentação, define-se que $A(\theta_k) := A_i$, $J(\theta_k) := J_i$, $C_z(\theta_k) := C_{zi}$, $E_z(\theta_k) := E_{zi}$, $C_y(\theta_k) := C_{yi}$ e $E_y(\theta_k) := E_{yi}$ sempre que $\theta_k = i \in \mathbb{N}_N$.

É válido notar que dada a caracterização markoviana do processo, a distribuição condicional de primeira ordem apresentada anteriormente é capaz de descrever totalmente o comportamento da cadeia, não sendo necessária a definição das distribuições de ordens superiores.

A seguir, serão definidas condições de estabilidade e normas para a classe de sistemas em questão.

2.3 Estabilidade

O primeiro conceito importante relacionado ao modelo (2.4) é com relação à sua estabilidade. No contexto de sistemas com saltos markovianos, existem várias formas equivalentes de se definir a estabilidade, que são apresentadas de maneira resumida na próxima definição:

Definição 2.1 *Considere o modelo (2.4) com entrada $w(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e condições iniciais $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_0 \in \mathbb{N}_N$. O sistema \mathbb{G} é:*

a) *Estável por média quadrática, se para todo estado inicial (x_0, θ_0)*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{x(k)'x(k)|x_0, \theta_0\} = 0 \quad (2.5)$$

b) *Estocasticamente estável, se para todo estado inicial (x_0, θ_0)*

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)'x(k)|x_0, \theta_0\right\} < \infty \quad (2.6)$$

c) *Exponencialmente estável por média quadrática, se para cada estado inicial (x_0, θ_0) existirem constantes $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}\{x(k)'x(k)|x_0, \theta_0\} < \beta\alpha^k x_0'x_0 \quad (2.7)$$

Foi mostrado em (Ji et al. 1991) que todas as definições de estabilidade dadas acima são, de fato, equivalentes para um sistema MJLS, sendo este conjunto de definições portanto referido como estabilidade de segundo momento, ou simplesmente SMS¹.

A próxima proposição (Costa & Fragoso 1993, Ji & Chizeck 1990) apresenta uma condição necessária e suficiente para se checar a estabilidade de um sistema a partir da existência de uma solução definida positiva para um conjunto de desigualdades matriciais lineares acopladas.

¹do inglês, *Second Moment Stability*

Teorema 2.2 *O Sistema \mathbb{G} , com entrada de ruído w nula, é estocasticamente estável se e somente se existirem matrizes $P_i \in \mathbb{M}_s^n$, $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, tais que as N desigualdades de Lyapunov acopladas:*

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i < 0 \quad (2.8)$$

possam ser simultaneamente satisfeitas.

Prova: Para a suficiência, tomando por verdadeiras as equações (2.8), podemos definir N matrizes $W_i \in \mathbb{M}_s^n$, $W_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, que satisfaçam as seguintes equações:

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i = -W_i \quad (2.9)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Considerando a função de Lyapunov estocástica:

$$V(\theta_k, x(k)) := x(k)' P(\theta_k) x(k) \quad (2.10)$$

podemos calcular:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\} - V(\theta_k, x(k)) &= x(k)' A_{\theta_k}' P_{p\theta_k} A_{\theta_k} x(k) - x(k)' P_{\theta_k} x(k) \\ &= -x(k)' W_{\theta_k} x(k) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $x(k) \neq 0$. Desta forma, dividindo os dois lados da igualdade por $V(\theta_k, x(k))$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\} - V(\theta_k, x(k))}{V(\theta_k, x(k))} &= -\frac{x(k)' W_{\theta_k} x(k)}{x(k)' P_{\theta_k} x(k)} \\ &\leq -\min_{i \in \mathbb{N}_N} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(W_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\lambda_{\min}(\cdot)$ e $\lambda_{\max}(\cdot)$ são os autovalores mínimos e máximos respectivamente das matrizes em questão.

Definindo o escalar

$$\alpha := 1 - \min_{i \in \mathbb{N}_N} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(W_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \right\}$$

verifica-se que, por um lado $\alpha < 1$ pois W_i e P_i são matrizes definidas positivas, e, por outro lado, a partir da equação (2.12), que

$$\alpha \geq \frac{\mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\}}{V(\theta_k, x(k))} > 0 \quad (2.13)$$

o que implica na existência de algum $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\} \leq \alpha V(\theta_k, x(k)) \quad (2.14)$$

e portanto

$$\mathcal{E} \{V(\theta_k, x(k)) \mid \theta_0, x(0)\} \leq \alpha^k V(\theta_0, x(0)) \quad (2.15)$$

Podemos então calcular o somatório dos termos da desigualdade anterior para todo k . Utilizando do fato de que $0 < \alpha < 1$, isto resulta em:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^T V(\theta_k, x(k)) \mid \theta_0, x(0) \right\} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T \alpha^k V(\theta_0, x(0)) \quad (2.16)$$

$$\leq \frac{1}{1 - \alpha} x(0)' P(\theta_0) x(0) \quad (2.17)$$

Porém, tem-se no caso geral que

$$\min_{i \in \mathbb{N}_N} \{\lambda_{\min}(P_i)\} \mathcal{E} \{x(k)' x(k)\} \leq \mathcal{E} \{V(\theta_k, x(k))\} \quad (2.18)$$

e desta forma, retomando que $P_i > 0$, chega-se a

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' x(k) \mid \theta_0, x(0) \right\} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{\min_{i \in \mathbb{N}_N} \{\lambda_{\min}(P_i)\}} x(0)' P_{\theta_0} x(0) := M(x(0), \theta_0)$$

mostrando a estabilidade de acordo com a desigualdade (2.6).

Para a necessidade, definindo a equação:

$$x(k)' P(T - k, \theta_k) x(k) := \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=k}^T x(n)' W(\theta_n) x(n) \mid \theta_k, x(k) \right\} \quad (2.19)$$

para o caso em que $x(k) \neq 0$ e devido ao fato de $W(\theta_n) > 0$, tem-se que $x(k)' P(T - k, \theta_k) x(k)$ ou cresce monotonicamente com o aumento de T pois um maior número de termos estritamente positivos são adicionados, ou ele aumenta monotonicamente até que $\mathcal{E} \{x(\eta)' W(\theta_\eta) x(\eta)\} = 0$ para algum $\eta \geq k$.

Devido à estabilidade do sistema, temos que os seguintes limites existem:

$$x(k)'P_i x(k) := \lim_{T \rightarrow \infty} x(k)'P(T-k, \theta_k = i)x(k) \quad (2.20)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=k}^T x(n)'W(\theta_n)x(n) \mid \theta_k = i, x(k) \right\} \quad (2.21)$$

Como estes limites são válidos para qualquer $x(k)$, temos

$$P_i := \lim_{T \rightarrow \infty} P(T-k, \theta_k = i) \quad (2.22)$$

Calculando os valores da equação (2.19) para $k = 0$ e $k = 1$ respectivamente, e subtraindo os resultados, obtém-se:

$$x(0)'P(T, \theta_0 = i)x(0) - \sum_{j=1}^N p_{ij}x(0)'A_i'P(T-1, \theta_1 = j)A_i x(0) = x(0)'W_i x(0) \quad (2.23)$$

Finalmente, como esta equação é válida para qualquer $x(0)$, temos:

$$P(T, \theta_0 = i) - \sum_{j=1}^N p_{ij}A_i'P(T-1, \theta_1 = j)A_i = W_i \quad (2.24)$$

e com isso conclui-se que, ao se fazer $T \rightarrow \infty$, existe um conjunto de matrizes $P_i \in \mathbb{M}_s^n$, $P_i = P_i' > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, que satisfaz a igualdade

$$P_i - A_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij}P_j \right) A_i = W_i \quad (2.25)$$

concluindo a prova ao lembrarmos que $W_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$. □

Nos exemplos a seguir, obtidos de (Ji & Chizeck 1990), mostraremos que os saltos entre os modos de operação podem trazer conseqüências importantes para a estabilidade do sistema.

Exemplo 2.1 Considere um sistema com dois modos de operação, definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

com a matriz de transição de estados dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Note que ambos os modos são instáveis, pois $r_\sigma(A_1) = r_\sigma(A_2) = 2$, porém as restrições de estabilidade são satisfeitas com as matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 30.2 & -13.6 \\ -13.6 & 10.5 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3.6 & -0.3 \\ -0.3 & 37.2 \end{bmatrix}$$

definidas positivas. ♦

Exemplo 2.2 Agora tendo em vista outro sistema com dois modos de operação

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz de probabilidades de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Note agora que ambos os modos são estáveis, pois $r_\sigma(A_1) = r_\sigma(A_2) = 0.5$, porém as restrições de estabilidade não podem ser satisfeitas para nenhum $P_1, P_2 > 0$. ♦

Estes exemplos ilustram algumas características interessantes, e de certa forma não intuitivas, dos sistemas MJLS, pois observa-se que a estabilidade (ou instabilidade) dos modos individuais não é condição necessária nem suficiente para a estabilidade (ou instabilidade) do sistema como um todo.

Embora as desigualdades (2.8) já estejam na forma de LMIs, elas apresentam algumas dificuldades que necessitam ser contornadas. A principal dificuldade técnica é a forma como as somas das probabilidades de saltos aparecem nas desigualdades, envolvendo as matrizes de realização do espaço de estado e impedindo a utilização de transformações padrões presentes na literatura para linearizá-las. Para efeito de comparação, lembramos que os sistemas MJLS a tempo contínuo apresentam tais somas como termos aditivos às desigualdades, e nunca envolvem produtos com as matrizes A_1, A_2, \dots, A_N (de Farias 1998).

O próximo teorema apresenta uma caracterização alternativa para a estabilidade de sistemas MJLS a tempo discreto. Como será mostrado *a posteriori*, estas desigualdades são mais apropri-

adas para o projeto de filtros que serão tratados em seqüência.

Teorema 2.3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *O Sistema \mathbb{G} é estável.*

ii) *Existem matrizes $P_i \in \mathbb{M}_s^n$, $P_i > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet \\ A_i & P_{pi}^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.26)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

Prova: Apenas aplique o Complemento de Schur² à desigualdade (2.8). □

As desigualdades (2.26), no Teorema 2.3, apresentam diversas vantagens sobre aquelas apresentadas no Teorema 2.2. A notação utilizada no Teorema 2.3 põe em evidência que as desigualdades requeridas para testar a estabilidade envolvem apenas as matrizes de mesmo índice $i \in \mathbb{N}_N$, e o acoplamento entre os índices é expresso através de restrições de igualdades $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, que não envolvem as matrizes de dinâmica do sistema A_i . Esta característica apresenta uma importância fundamental para se derivar fórmulas simples e efetivas para uma parametrização adequada das matrizes do espaço de estado dos filtros de sistemas MJLS.

A seguir, será feita a generalização da chamada norma \mathcal{H}_2 para sistemas discretos determinísticos para o caso de sistemas com saltos markovianos, aqui em consideração.

2.4 Norma \mathcal{H}_2

Após o conceito de estabilidade, outro ponto de grande importância para o estudo de sistemas dinâmicos em geral é um critério de desempenho. Neste contexto, a definição da norma \mathcal{H}_2 dada a seguir tem como intenção permitir calculá-la através de um problema de otimização. Esta norma está diretamente ligada ao problema linear quadrático, e assim sendo, fornece uma medida de quão longe o sistema permanece afastado de seu ponto de equilíbrio dado um estado inicial.

²veja Apêndice A

Definição 2.4 *Seja o sistema \mathbb{G} . Então, caso ele seja estocasticamente estável, define-se a sua norma \mathcal{H}_2 como*

$$\|\mathbb{G}\|_2^2 := \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \|z^{s,i}\|_2^2 \quad (2.27)$$

onde $\mu_i = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{N}_N)$ e $z^{s,i}$ representam as saídas $z(0), z(1), \dots$ obtidas a partir da entrada $w(k) = e_s \delta(k)$, onde $e_s \in \mathbb{R}^m$ é a s -ésima coluna da matriz identidade $m \times m$, $\delta(k)$ é a função de impulso unitário discreto, $x(0) = 0$ e $\theta_0 = i \in \mathbb{N}_N$.

É interessante observar que no caso determinístico, ou seja, se for feito $N = 1$, a definição anterior se reduz à norma \mathcal{H}_2 usual dos sistemas LTI³ a tempo discreto. Além disso, no caso geral, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{G}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \|z^{s,i}\|_2^2 \\ &\leq \max_{\mu \in \Lambda} \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \|z^{s,i}\|_2^2 \\ &\leq \sup_{\theta_0 \in \{1, \dots, N\}} \sum_{s=1}^m \|z^{s, \theta_0}\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde a primeira desigualdade decorre diretamente do operador max e a segunda vem do fato de que o máximo de uma função linear em um conjunto convexo ocorre em um dos seus pontos extremos. As relações dadas acima mostram que, para uma escolha adequada de probabilidades iniciais μ_i , $i \in \mathbb{N}_N$, a norma \mathcal{H}_2 de \mathbb{G} equivale à norma (2.28) no pior caso e corresponde ao modelo de quando não se tem disponível nenhuma informação do estado inicial $\theta_0 \in \mathbb{N}_N$ do sistema. Claramente, para se determinar a norma de pior caso, a probabilidade de estado inicial deve ser incluída como uma variável a ser determinada no processo de otimização. Este ponto será retomado em seqüência com mais detalhes.

Será deduzido a seguir como a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.4) pode ser calculada (Costa et al. 1997).

Teorema 2.5 *A norma \mathcal{H}_2 definida por (2.27) do sistema \mathbb{G} pode ser calculada por:*

$$\|\mathbb{G}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (J_i' P_{pi} J_i + E_i' E_i) \quad (2.29)$$

³do inglês, *Linear Time Invariant*

onde $P_i \in \mathbb{M}_s^n$, $P_i > 0$ são as soluções das equações:

$$P_i = A_i' P_{pi} A_i + C_i' C_i \quad (2.30)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

Prova: Pela definição 2.4, considerando $x(0) = 0$ e $\theta_0 = i$, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{G}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z(k)' z(k) | \theta_0, x(0) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' C_{\theta_k}' C_{\theta_k} x(k) | \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (E_i' E_i) \end{aligned}$$

Dado, por hipótese, que a equação (2.30) é satisfeita, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbb{G}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' (P_{\theta_k} - A_{\theta_k}' P_{p\theta_k} A_{\theta_k}) x(k) | \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (E_i' E_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' P_{\theta_k} x(k) - x(k+1) P_{p\theta_k} x(k+1) | \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (E_i' E_i) \end{aligned}$$

Mas, para todo $j \geq 1$, temos que $\mathcal{E} \{P_{\theta_j}\} = \mathcal{E} \{P_{p\theta_{j-1}}\}$, e desta forma

$$\begin{aligned} \|\mathbb{G}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i \mathcal{E} \{x(1)' P_{\theta_1} x(1) | \theta_0, x(0)\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (E_i' E_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^m \mu_i e_s' J_i' \mathcal{E} \{P_{\theta_1} | \theta_0\} J_i e_s + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (E_i' E_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr} (J_i' \mathcal{E} \{P_{\theta_1} | \theta_0\} J_i + E_i' E_i) \end{aligned}$$

E, lembrando que $\mathcal{E} \{P_{\theta_1} | \theta_0\} = P_{p\theta_0} = P_{pi}$, a prova se completa. \square

A partir deste resultado, não existem dificuldades em calcular $\|\mathbb{G}\|_2^2$ através de desigualdades matriciais lineares. O ponto chave para isto está na observação de que se a igualdade matricial da equação (2.30) for substituída por uma desigualdade, então o termo à direita da equação (2.29) ainda é um limitante superior da norma, cuja minimização determina $\|\mathbb{G}\|_2^2$. Desta forma,

utilizando-se o Complemento de Schur, obtemos

$$\|\mathbb{G}\|_2^2 = \inf_{(W_i, P_i) \in \Phi} \sum_{i=1}^N \mu_i \operatorname{tr}(W_i) \quad (2.31)$$

onde Φ é o conjunto de todas as matrizes $(W_i, P_i) \in M_s^m \times M_s^n$ tal que as LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} J_i & P_{pi} & \bullet \\ E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.32)$$

e

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} A_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.33)$$

são satisfeitas para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Do ponto de vista numérico, a determinação de $\|\mathbb{G}\|_2^2$ através de LMIs aparenta ser muito eficiente e adequada. De fato, temos que lidar com $2N$ desigualdades matriciais lineares, $2N$ variáveis matriciais e N termos de acoplamento lineares da forma $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Além disso, a solução ótima global deste problema de programação convexa é calculada de forma direta, e não iterativamente.

O problema (2.31) pode ser levemente modificado para a determinação da norma de pior caso definida em (2.28). De fato, lembrando que o máximo entre N números equivale ao menor limitante superior deles, tem-se que

$$\begin{aligned} \sup_{\theta_0 \in \{1, \dots, N\}} \sum_{s=1}^m \|z^{s, \theta_0}\|_2^2 &= \max_{\mu \in \Lambda} \inf_{(W_i, P_i) \in \Phi} \sum_{i=1}^N \mu_i \operatorname{tr}(W_i) \\ &= \inf_{\sigma, (W_i, P_i) \in \Phi} \{\sigma : \operatorname{tr}(W_i) < \sigma\} \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue das relações de dualidade. Isto mostra que a norma de pior caso pode ser determinada com um pequeno incremento do esforço numérico, correspondente em aumentar o número de variáveis em apenas um escalar e o número de LMIs por N .

2.5 Norma \mathcal{H}_∞

Em complemento à norma \mathcal{H}_2 , o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ pretende estabelecer um limitante para a influência da perturbação w na saída z do sistema, em vez de uma medida da velocidade de convergência do mesmo. Assim sendo, define-se esta norma para os sistemas MJLS da seguinte

forma:

Definição 2.6 *Assuma que \mathbb{G} é estável. A norma \mathcal{H}_∞ do sistema \mathbb{G} da entrada w para a saída z é dada por*

$$\|\mathbb{G}\|_\infty^2 = \sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2^m, \theta_0 \in \mathbb{N}_N} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (2.34)$$

Novamente se observa que para o caso determinístico esta definição se reduz à usual norma \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI discretos.

Antes de apresentarmos as condições necessárias e suficientes que permitem o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ , precisamos da seguinte definição (Seiler & Sengupta 2003, Ji & Chizeck 1988).

Definição 2.7 *O sistema \mathbb{G} é dito fracamente controlável se para cada estado inicial $(x(0), \theta_0)$ e qualquer estado final $(\bar{x}, \bar{\theta})$ existir um tempo finito T_c e uma entrada $w(k)$ tal que*

$$Prob(x(T_c) = \bar{x}) > 0 \quad (2.35)$$

$$Prob(\theta(T_c) = \bar{\theta}) > 0 \quad (2.36)$$

O próximo teorema mostra como a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema MJLS pode ser calculada de acordo com o trabalho de (Seiler & Sengupta 2003) e também (de Souza 2003).

Teorema 2.8 *Se o sistema \mathbb{G} é fracamente controlável, ele será estável e irá satisfazer a restrição de norma $\|\mathbb{G}\|_\infty^2 < \gamma$ se e somente se existirem matrizes $P_i \in \mathbb{M}_s^n$, $P_i > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{pi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

Prova: Para a suficiência, suponha que existam $P_i = P_i' > 0$ que façam com que as desigualdades (2.37) sejam satisfeitas. Estas desigualdades implicam que o primeiro bloco da diagonal principal também seja negativa, ou seja

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i < -C_{zi}' C_{zi} \leq 0 \quad (2.38)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Assim sendo, pelo equação (2.8) do Teorema 2.2, concluímos que o sistema é estável.

Além disso, multiplicando a desigualdade (2.37) a esquerda pelo vetor $[x(k)', w(k)']$ e a direita pelo seu transposto, temos:

$$x(k+1)'P_{p_i}x(k+1) - x(k)'P_i x(k) + z(k)'z(k) - \gamma^2 w(k)'w(k) \leq 0 \quad (2.39)$$

A desigualdade (2.39) é válida para todo x , w e i . Fazendo $i = \theta_k$, aplicando a esperança matemática na desigualdade (2.39), e somando para todo $k \geq 0$, temos que devido ao fato do sistema ser estável e $x(0) = 0$ que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{x(k+1)'P_{p_{\theta_k}}x(k+1) - x(k)'P_{\theta_k}x(k)\} = 0 \quad (2.40)$$

e dessa forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z(k)'z(k) - \gamma^2 w(k)'w(k)\} \leq 0 \quad (2.41)$$

$$\|z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2 \quad (2.42)$$

provando assim a suficiência do Teorema proposto.

A prova de necessidade é extensa e pode ser vista em (Seiler & Sengupta 2003). \square

Como discutido em (Seiler & Sengupta 2005), caso a premissa de fraca controlabilidade não seja satisfeita, esta condição para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ torna-se apenas suficiente.

A partir deste resultado, podemos facilmente calcular a norma \mathcal{H}_∞ através do valor ótimo da solução de um problema de programação convexa expressa por LMIs. Para isso, aplicando o Complemento de Schur à equação (2.37), obtemos uma forma de calcular a norma \mathcal{H}_∞ a partir da solução de

$$\|\mathbb{G}\|_\infty^2 = \inf_{(\gamma, P_i) \in \Phi} \gamma \quad (2.43)$$

onde Φ é o conjunto de todas as matrizes definidas positivas $P_i \in \mathbb{M}_s^n$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que as LMIs

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{p_i}A_i & P_{p_i}J_i & P_{p_i} & \bullet \\ C_{z_i} & E_{z_i} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.44)$$

são satisfeitas para todo $i \in \mathbb{N}_N$. É válido notar novamente que, do ponto de vista numérico, a determinação da norma \mathcal{H}_∞ para MJLS utilizando LMIs também se apresenta como uma forma muito adequada e eficiente, pois é necessário lidar com N desigualdades matriciais lineares com N variáveis matriciais, 1 variável escalar, além dos N termos de acoplamento linear da forma $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

2.6 Considerações finais

Este Capítulo introduziu resultados já conhecidos sobre estabilidade e normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ dos sistemas MJLS. Foram obtidas condições de cálculo destas normas através de LMIs, que são resultados essenciais para a realização do projeto dos filtros propostos para os próximos capítulos.

É importante ressaltar que o desenvolvimento da norma \mathcal{H}_2 foi apresentada aqui sem a imposição de que o sistema não altere o seu estado da cadeia em $k = 0$, o que representa uma alternativa em relação ao que foi apresentado em (Costa et al. 1997) entre outros. Ademais, o uso de desigualdades lineares estritas permite que as propriedades de detectabilidade e observabilidade sejam automaticamente impostas. Para maiores detalhes a respeito destes importantes conceitos associados aos sistemas markovianos discretos, veja (Costa & do Val 2002) e (Ji & Chizeck 1988).

Capítulo 3

Filtragem com o conhecimento da cadeia

No capítulo anterior introduzimos os conceitos de estabilidade e normas para sistemas do tipo MJLS. Neste capítulo, trataremos do problema de filtragem de tais sistemas com o conhecimento da cadeia, ou seja, sistemas em que a cada instante de tempo $k \in \mathbb{N}$, o estado da cadeia de Markov θ_k está disponível e esta informação é utilizada para o cálculo do filtro.

3.1 Problema de filtragem

Associado ao sistema (2.4), considere o filtro linear de ordem completa e dependente do modo da cadeia

$$\mathbb{F} : \begin{cases} x_f(k+1) &= A_f(\theta_k)x_f(k) + B_f(\theta_k)y(k) \\ z_f(k) &= C_f(\theta_k)x_f(k) + D_f(\theta_k)y(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$, $x_f(0) = 0$ e as matrizes A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} e D_{fi} para todo $i \in \mathbb{N}_N$ possuem dimensões compatíveis. O objetivo é determinar estas matrizes de tal forma que se minimize alguma norma desejada do erro de estimação.

Conectando o filtro (3.1) ao sistema (2.4), conforme a Figura 3.1¹, temos que o erro de estimação satisfaz

$$\mathbb{E} : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{J}(\theta_k)w(k) \\ e(k) &= \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (3.2)$$

¹O símbolo Δ indica o operador atraso unitário.

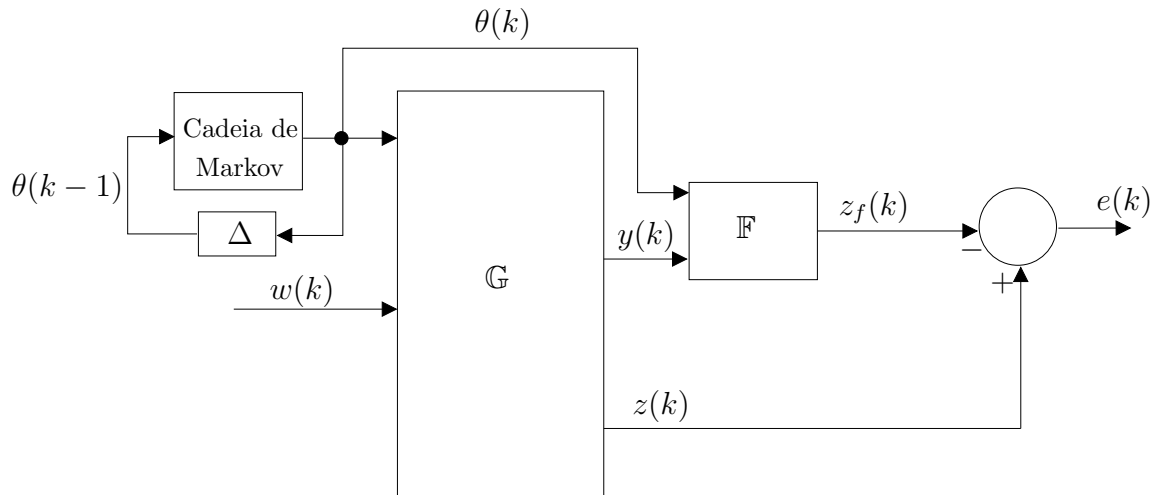


Figura 3.1: Filtro markoviano com conhecimento da cadeia

onde as matrizes indicadas são dadas por

$$\tilde{A}_i := \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_{yi} & A_{fi} \end{bmatrix} \quad \tilde{J}_i := \begin{bmatrix} J_i \\ B_{fi}E_{yi} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\tilde{C}_i := \begin{bmatrix} C_{zi} - D_{fi}C_{yi} & -C_{fi} \end{bmatrix} \quad \tilde{E}_i := E_{zi} - D_{fi}E_{yi} \quad (3.4)$$

e desta forma, o problema a ser resolvido pode ser escrito como

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \|\mathbb{E}\|_2^2 \quad (3.5)$$

para a filtragem \mathcal{H}_2 ou

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \|\mathbb{E}\|_\infty^2 \quad (3.6)$$

para a filtragem \mathcal{H}_∞ .

É importante deixar claro que ambas as formulações acima, tanto do problema de filtragem \mathcal{H}_2 como \mathcal{H}_∞ , são fortemente não convexas e assim sendo, neste formato, é muito difícil de se obter a solução ótima global. A razão para isso deve-se ao fato de que o cálculo das normas dependem de variáveis auxiliares que multiplicam as variáveis do filtro, gerando assim um problema não convexo. O modo de contornar esta dificuldade é introduzir uma mudança bijetora de variáveis que seja capaz de linearizar as restrições não lineares existentes. Estes pontos, tanto para o problema \mathcal{H}_2 como para \mathcal{H}_∞ , serão plenamente explorados nas próximas seções.

3.2 Filtragem \mathcal{H}_2 com o conhecimento da cadeia

Baseado nos resultados anteriores, o objetivo principal desta seção é calcular a solução ótima global do problema de filtragem \mathcal{H}_2 (3.5) com o conhecimento completo da cadeia, que pode ser definido por

$$\inf \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(W_i) \quad (3.7)$$

onde o ínfimo é obtido com respeito às variáveis matriciais \tilde{P}_i , W_i , A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} e D_{fi} de dimensões compatíveis, para todo $i \in \mathbb{N}_N$, que satisfaçam as desigualdades

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.8)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{A}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{C}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.9)$$

onde \tilde{P}_i e $\tilde{P}_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j$ são matrizes reais simétricas de dimensão $2n \times 2n$. Desta forma, introduzindo as seguintes partições

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ U_i' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i' & \hat{Y}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} I & I \\ V_i' Y_i^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde todos os blocos são matrizes reais de dimensão $n \times n$, verificamos que

$$\tilde{T}_i' \tilde{P}_i \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} Z_i & Z_i \\ Z_i & X_i \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde $Z_i = Y_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$. É um fato bem conhecido que, se a matriz apresentada em (3.11) está restrita a ser definida positiva, então sempre é possível determinar os blocos matriciais em (3.10) a fim de se obter $\tilde{P}_i > 0$. Mais importante, isto pode ser obtido mesmo que as matrizes U_i ou as matrizes V_i sejam arbitrariamente fixadas (desde que não singulares) e todas as outras determinadas de forma que as restrições $\tilde{P}_i \tilde{P}_i^{-1} = I$ sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

Procedemos em seguida considerando $\tilde{P}_i > 0$ e adotando uma argumentação similar para a

combinação convexa destas matrizes. De (3.10), a mesma partição leva a

$$\tilde{P}_{pi} = \sum_{i=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j = \begin{bmatrix} X_{pi} & U_{pi} \\ U'_{pi} & \hat{X}_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e ao se denotar

$$\tilde{P}_{pi}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R'_{2i} & R_{3i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} R_{1i}^{-1} & X_{pi} \\ 0 & U'_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

manipulações algébricas simples põem em evidência que

$$\tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} R_{1i}^{-1} & R_{1i}^{-1} \\ R_{1i}^{-1} & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

É importante ressaltar que os quatro blocos matriciais que definem a matriz inversa \tilde{P}_{pi}^{-1} dependem de forma não linear dos quatro blocos matriciais de \tilde{P}_{pi} . Porém, visto que $R_{1i}^{-1} = X_{pi} - U_{pi} \hat{X}_{pi}^{-1} U'_{pi}$, a matriz particionada em (3.14) é linearizada ao definirmos U_i tal que $U_i = -\hat{X}_i$, o que implica em $U_{pi} = -\hat{X}_{pi}$ e

$$\tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} X_{pi} + U_{pi} & X_{pi} + U_{pi} \\ X_{pi} + U_{pi} & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Da discussão acima, podemos novamente mencionar que a escolha particular de $U_i = -\hat{X}_i$ pode ser feita sem perda de generalidade, resultando em uma matriz simétrica e definida negativa U_i . Na realidade, por (3.10), podemos escrever que $U_i = -\hat{X}_i = Y_i^{-1} - X_i = Z_i - X_i$ e, desta forma, reescrevemos a equação (3.15) em sua forma final

$$\tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} Z_{pi} & Z_{pi} \\ Z_{pi} & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

dado que $U_{pi} = Z_{pi} - X_{pi}$.

É surpreendente ver que a parametrização proposta das matrizes \tilde{P}_i e \tilde{P}_{pi}^{-1} converte (3.16) na combinação convexa de (3.11). Além disso, no caso geral, ou seja, sem se levar em conta a

escolha particular de $U_i = -\hat{X}_i$, as matrizes R_{1i} e Z_{pi} satisfazem

$$\begin{aligned}
R_{1i}^{-1} &= X_{pi} - U_{pi}\hat{X}_{pi}^{-1}U'_{pi} \\
&\geq \sum_{j=1}^N p_{ij}(X_j - U_j\hat{X}_j^{-1}U'_j) \\
&\geq \sum_{j=1}^N p_{ij}Y_j^{-1} \\
&\geq Z_{pi}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. As relações (3.16) e (3.17) são os resultados principais a serem utilizados a seguir para o problema do projeto de filtro \mathcal{H}_2 . O próximo lema mostra que estas propriedades podem ser utilizadas para linearizar as primeiras desigualdades (3.8) do problema de filtragem (3.5).

Lema 3.1 *Existe um filtro com conhecimento da cadeia na forma dada por (3.1) e matrizes simétricas W_i , $\tilde{P}_i > 0$ satisfazendo as desigualdades (3.8) para todo $i \in \mathbb{N}_N$ se e somente se existirem matrizes simétricas W_i , X_i , Z_i e matrizes F_i , K_i de dimensões compatíveis tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix}
W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\
Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\
X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\
E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I
\end{bmatrix} > 0 \tag{3.18}$$

sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Além disso, sempre que a equação (3.18) for satisfeita para todo $i \in \mathbb{N}_N$, uma solução possível para (3.8) é dada por W_i , $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$, $D_{fi} = K_i$ e

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ Z_i - X_i & X_i - Z_i \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Prova: Para a necessidade, assuma que (3.8) seja verdadeira. Particionando \tilde{P}_{pi}^{-1} como em (3.13) e multiplicando (3.8) a direita por $\text{diag}[I, \tilde{Q}_i, I]$ e a esquerda pela sua transposta, obtém-se

$$\begin{bmatrix}
W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\
R_{1i}^{-1}J_i & R_{1i}^{-1} & \bullet & \bullet \\
X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & R_{1i}^{-1} & X_{pi} & \bullet \\
E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I
\end{bmatrix} > 0 \tag{3.20}$$

onde $F_i = U_{pi}B_{fi}$ e $K_i = D_{fi}$.

Multiplicando esta desigualdade pela direita por $\text{diag}[I, R_{1i}Z_{pi}, I, I]$ e pela esquerda pela sua transposta, e retomando que (3.17) implica em $Z_{pi} \geq Z_{pi}R_{1i}Z_{pi}$, obtemos (3.18) provando, desta forma, a necessidade.

Para o caso da suficiência, assuma como satisfeita a desigualdade (3.18), o que implica em $X_{pi} > Z_{pi} > 0$. Desta forma, definindo $U_i = Z_i - X_i$, a matriz $U_{pi} = Z_{pi} - X_{pi}$ é não-singular e assim podemos definir $B_{fi} = U_{pi}^{-1}F_i$ e $D_{fi} = K_i$. Por outro lado, levando em conta que esta escolha gera

$$\tilde{P}_{pi} = \begin{bmatrix} X_{pi} & \bullet \\ Z_{pi} - X_{pi} & X_{pi} - Z_{pi} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.21)$$

é fácil verificar que a igualdade (3.16) é verdadeira e que $R_{1i}^{-1} = Z_{pi}$. Concluimos assim que a desigualdade (3.18) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}'_i \tilde{J}_i & \tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

que multiplicada a direita por $\text{diag}[I, \tilde{Q}_i^{-1}, I]$ e a esquerda pela sua transposta resulta na desigualdade (3.8), concluindo assim a prova do lema em questão. \square

Como pode ser visto, a prova do Lema 3.1 depende fortemente da desigualdade $R_{1i}^{-1} \geq Z_{pi}$ e do fato da existência de uma escolha particular de matrizes U_i para todo $i \in \mathbb{N}_N$ tal que a igualdade seja satisfeita. Além disso, deve ser notado que foi a inversa da matrix P_{pi} que foi linearizada. Este fato também é essencial para a prova do próximo lema.

Lema 3.2 *Existe um filtro com conhecimento da cadeia na forma dada por (3.1) e matrizes simétricas $\tilde{P}_i > 0$ satisfazendo as desigualdades (3.9) para todo $i \in \mathbb{N}_N$ se e somente se existirem matrizes simétricas X_i , Z_i e matrizes M_i , L_i , F_i , K_i de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} + M_i & X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Além disso, sempre que a desigualdade (3.23) for satisfeita para todo $i \in \mathbb{N}_N$, uma solução factível para (3.9) é $A_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}M_i$, $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$, $C_{fi} = -L_i$,

$D_{f_i} = K_i$ e

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ Z_i - X_i & X_i - Z_i \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Prova: A demonstração segue o mesmo padrão da prova do Lema 3.1. Para a necessidade, assumamos que a desigualdade (3.9) é verdadeira. Particionando \tilde{P}_i e $\tilde{P}_{p_i}^{-1}$ como indicado em (3.10) e (3.13) respectivamente, multiplicando (3.9) pela direita por $\text{diag}[\tilde{T}_i, \tilde{Q}_i, I]$ e pela esquerda pela sua transposta e adotando a mudança de variáveis $M_i = U_{p_i} A_{f_i} V_i' Z_i$, $F_i = U_{p_i} B_{f_i}$, $L_i = -C_{f_i} V_i' Z_i$ e $K_i = D_{f_i}$, obtemos a LMI (3.23) com todos os Z_{p_i} que aparecem na terceira linha e coluna substituídos por $R_{1_i}^{-1}$. Como feito anteriormente, a necessidade segue do fato que $Z_{p_i} \geq Z_{p_i} R_{1_i} Z_{p_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$.

A suficiência parte da escolha particular da matriz $U_i = Z_i - X_i$ implicando de (3.10) que a matriz V_i é simétrica, dada por $V_i = Z_i^{-1}$. Além disso, levando em conta que esta escolha define $\tilde{P}_i > 0$ como em (3.24), $\tilde{P}_{p_i} > 0$ como em (3.21) e que $R_{1_i}^{-1} = Z_{p_i}$, a mudança de variáveis proposta nos permite obter

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_i' \tilde{P}_i \tilde{T}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}_i' \tilde{A}_i \tilde{T}_i & \tilde{Q}_i' \tilde{P}_{p_i}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{T}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.25)$$

que fornece (3.9) após a multiplicação da desigualdade acima a direita por $\text{diag}[\tilde{T}_i^{-1}, \tilde{Q}_i^{-1}, I]$ e a esquerda pela sua transposta. Isto conclui a prova do lema proposto. \square

Este lema possui um aspecto muito interessante com respeito à natureza da não linearidade da desigualdade (3.9). A partir de uma definição adequada das matrizes \tilde{T}_i e \tilde{Q}_i , a desigualdade em questão, mesmo dependente de duas variáveis \tilde{P}_i e $\tilde{P}_{p_i}^{-1}$, pode ser linearizada com sucesso. Além disso, como ambos os lemas utilizam a mesma mudança de variáveis, o próximo resultado é imediato.

Teorema 3.3 *Existe um filtro dependente do estado da cadeia na forma (3.1) tal que $\|\mathbb{E}\|_2^2 < \sigma$ se e somente se as LMIs (3.18) e (3.23) são factíveis e*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(W_i) < \sigma \quad (3.26)$$

Neste caso, o projeto de um filtro que garante tal nível da norma \mathcal{H}_2 é dado pelas matrizes de estado $A_{f_i} = (Z_{p_i} - X_{p_i})^{-1} M_i$, $B_{f_i} = (Z_{p_i} - X_{p_i})^{-1} F_i$, $C_{f_i} = -L_i$ e $D_{f_i} = K_i$.

A consequência mais importante do Teorema 3.3 é o fato de que a solução ótima global do

problema de projeto de filtragem \mathcal{H}_2 pode ser determinado a partir de

$$\inf_{(W_i, X_i, Z_i, M_i, F_i, L_i, K_i) \in \Omega} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(W_i) \quad (3.27)$$

onde Ω é o conjunto de todas as soluções factíveis das LMIs (3.18) e (3.23). Em outras palavras, o problema de projeto do filtro ótimo em consideração foi convertido em um problema de programação convexa descrita em termos de LMIs, que permite a utilização de métodos numéricos eficientes para a solução.

Neste momento, um ponto relevante a ser discutido é sobre a existência de uma solução factível para o conjunto Ω . Uma condição necessária para tal fato pode ser obtida ao aplicar-se o Complemento de Schur nas três primeiras linhas e colunas da desigualdade (3.23), resultando em

$$X_i > Z_i > 0, \quad A_i' Z_{pi} A_i - Z_i < 0 \quad (3.28)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$, o que requer, portanto, que o sistema \mathbb{G} seja estável. Esta é uma condição necessária quando se trata de filtragem robusta ou independente do estado da cadeia, dois importantes casos que serão abordados a seguir. Porém, no caso atual, esta condição pode ser eliminada e o problema (3.27) pode ser ainda mais simplificado, como indicamos no próximo corolário do Teorema 3.3.

Corolário 3.4 *O problema (3.27) é equivalente a*

$$\inf_{(W_i, X_i, F_i, K_i) \in \Psi} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(W_i) \quad (3.29)$$

onde Ψ é o conjunto de todas as matrizes simétricas W_i e X_i , além das matrizes F_i e K_i satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.30)$$

e

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet \\ X_{pi} A_i + F_i C_{yi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.31)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Além disso, as matrizes de estado do filtro ótimo dependente do estado da cadeia são dadas por $A_{fi} = A_i + X_{pi}^{-1} F_i C_{yi}$, $B_{fi} = -X_{pi}^{-1} F_i$, $C_{fi} = C_{zi} - K_i C_{yi}$ e $D_{fi} = K_i$.

Prova: Considerando o projeto do filtro ótimo (3.27), percebe-se que as variáveis matriciais M_i e L_i aparecem apenas nas LMIs (3.23) e conseqüentemente podem ser eliminadas. Para isto, aplicando o Lema de Finsler (Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994), é visto que as desigualdades (3.23) são satisfeitas para alguns M_i e L_i , com $i \in \mathbb{N}_N$ se e somente se as LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.32)$$

e

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC'_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.33)$$

forem satisfeitas simultaneamente para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Note agora que as desigualdades (3.18), (3.32), (3.33) possuem uma característica comum, ou seja, na solução ótima do problema (3.27) deve-se ter que as matrizes $Z_i > 0$ e, por conseqüência, também as matrizes $Z_{pi} > 0$ sejam arbitrariamente pequenas. Desta forma, impondo $Z_i \rightarrow 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, a solução ótima localizada arbitrariamente perto da fronteira das restrições das LMIs necessitam satisfazer as desigualdades (3.30) e (3.31). Por último, levando em conta $Z_{pi} \rightarrow 0$, a factibilidade de (3.23) impõe que $M_i = -X_{pi}A_i - F_iC_{yi}$ e $L_i = -C_{zi} + K_iC'_{yi}$. Esta afirmação é devida à realização das matrizes de estado do filtro dadas pelo Teorema 3.3. \square

O Corolário 3.4 merece alguns comentários. Primeiro, para o caso determinístico $N = 1$, ele se reduz ao conhecido filtro de Kalman para sistemas LTI, cuja versão clássica obtida através da equação de Riccati pode ser vista em (Anderson & Moore 1979). Para $N > 1$ e $D_{fi} = 0$ ele reproduz o resultado de (Costa & Tuesta 2004), onde o filtro estritamente próprio \mathcal{H}_2 ótimo é obtido a partir da solução de N equações de Riccati acopladas. Neste sentido, o resultado do Corolário 3.4 é útil dado que a solução ótima é obtida diretamente, evitando-se desta maneira o processo iterativo que é adotado para determinar a solução de um sistema de N equações de Riccati acopladas.

Definindo o ganho $G_i = -X_{pi}^{-1}F_i$, o filtro ótimo com conhecimento da cadeia é dado por

$$\begin{cases} x_f(k+1) = A(\theta_k)x_f(k) + G(\theta_k)(y(k) - C_y(\theta_k)x_f(k)) \\ z_f(k) = C_z(\theta_k)x_f(k) + K(\theta_k)(y(k) - C_y(\theta_k)x_f(k)) \end{cases} \quad (3.34)$$

que põe em evidência a forma clássica de um observador baseado no modelo interno da planta.

Outro ponto que merece destaque é a forma como a norma de pior caso (2.28) pode ser tratada. De fato ela traz poucas dificuldades extras, visto que é necessário apenas alterar o problema (3.29) no Corolário 3.4 por

$$\inf_{\sigma, (W_i, X_i, F_i, K_i) \in \Psi} \{ \sigma : \text{Tr}(W_i) < \sigma \} \quad (3.35)$$

Vale destacar novamente que caso os parâmetros do sistema ou o estado da cadeia de Markov não sejam conhecidos com precisão a cada instante de tempo, então a solução não pode ser fornecida pelo Corolário 3.4. No entanto, nestes dois importantes casos, a solução dada pelo Teorema 3.3 ainda é válida. Estas características peculiares do problema de projeto de filtros serão totalmente exploradas posteriormente.

No próximo exemplo podemos observar a importância dos termos D_{f_i} para a qualidade do filtro \mathcal{H}_2 . Vale ressaltar novamente que o filtro obtido em (Costa & Tuesta 2004) tem a restrição de ser estritamente próprio imposta nas suas equações.

Exemplo 3.1 Este exemplo foi obtido de (Costa et al. 1997) e consiste em uma leve adaptação do sistema econômico em malha fechada baseado no modelo de Samuelson visto em (Blair & Sworder 1975). Este é um sistema com 3 modos de operação, cujos parâmetros são dados na Tabela 3.1, e a matriz de probabilidades de transição conectando estes modos é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.30 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Para o problema de minimização da norma \mathcal{H}_2 de pior caso, nós obtivemos:

- **Filtro estritamente próprio** - Impondo ao filtro da forma (3.34) as restrições $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, obtemos que a norma \mathcal{H}_2 de pior caso mínima do erro de estimação que pode ser obtida é $\|\mathbb{E}\|_2 = 1.7729$.
- **Filtro próprio** - Eliminando as restrições aos ganhos K_1 , K_2 e K_3 , o custo mínimo alcançado é $\|\mathbb{E}\|_2 = 1.1208$, aproximadamente 37% menor do que o custo do filtro estritamente próprio.

◆

i	A_i	J_i	C_{zi}	E_{zi}	C_{yi}	E_{yi}
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0158 & 0.9652 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[0.5 \ 1.0]$	$[0 \ 0]$	$[1 \ 0]$	$[0 \ 1]$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0597 & 0.8064 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[0.5 \ 0.5]$	$[0 \ 0]$	$[1 \ 0]$	$[0 \ 1]$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0056 & 0.9051 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[1.0 \ 0.5]$	$[0 \ 0]$	$[1 \ 0]$	$[0 \ 1]$

Tabela 3.1: Dados para o Exemplo 3.1

3.3 Filtragem \mathcal{H}_∞ com o conhecimento da cadeia

De forma semelhante ao que foi feito na seção anterior, o objetivo desta seção é calcular a solução ótima global do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ com conhecimento completo da cadeia (3.6), que pode ser definido por

$$\inf \gamma \quad (3.37)$$

onde o ínfimo é obtido com respeito às variáveis matriciais $\tilde{P}_i > 0$, A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} and D_{fi} , para todo $i \in \mathbb{N}_N$ além da variável escalar $\gamma \in \mathbb{R}$, satisfazendo as desigualdades

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ \tilde{A}_i & \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{C}_i & \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.38)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$, onde, como no caso \mathcal{H}_2 , novamente \tilde{P}_i e $\tilde{P}_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j$ são matrizes reais simétricas de dimensão $2n \times 2n$ e as outras matrizes são dadas pelas equações (3.3) e (3.4).

Para a linearização deste problema, serão utilizadas as mesmas partições definidas no problema de filtragem \mathcal{H}_2 (3.10) e (3.13), de tal forma que as relações (3.16) e (3.17) ainda se verificam e, novamente, estas são cruciais para o projeto de filtros \mathcal{H}_∞ . O próximo teorema mostra que estas propriedades podem ser utilizadas para linearizar a desigualdade do problema de filtragem (3.6).

Teorema 3.5 *Existe um filtro com conhecimento da cadeia na forma dada por (3.1) satisfazendo*

a restrição $\|\mathbb{E}\|_\infty^2 < \gamma$ se e somente se existirem matrizes simétricas X_i , Z_i e matrizes M_i , L_i , F_i , K_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} + M_i & X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.39)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Em caso afirmativo, uma realização factível para o filtro dependente do modo da cadeia de Markov é dado pelas matrizes de estado $A_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}M_i$, $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$, $C_{fi} = -L_i$ e $D_{fi} = K_i$.

Prova: Esta prova segue os mesmos passos das provas do Lema 3.1 e do Lema 3.2. Para a necessidade, assuma que a desigualdade (3.38) seja verdadeira. Particionando \tilde{P}_i e \tilde{P}_{pi}^{-1} como indicado em (3.10) e (3.13) respectivamente, multiplicando (3.38) pela direita por $\text{diag}[\tilde{T}_i, I, \tilde{Q}_i, I]$ e pela esquerda pela sua transposta, e adotando $M_i = U_{pi}A_{fi}V_i'Z_i$, $F_i = U_{pi}B_{fi}$, $L_i = -C_{fi}V_i'Z_i$ e $K_i = D_{fi}$ como mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{1i}^{-1}A_i & R_{1i}^{-1}A_i & R_{1i}^{-1}J_i & R_{1i}^{-1} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} + M_i & X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & R_{1i}^{-1} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.40)$$

Multiplicando esta desigualdade pela direita por $\text{diag}[I, I, I, R_{1i}Z_{pi}, I, I]$ e pela esquerda por sua transposta, e levando em consideração que (3.17) implica em $Z_{pi} \geq Z_{pi}R_{1i}Z_{pi}$, chega-se em (3.39), provando desta forma a necessidade.

A prova da suficiência segue da escolha particular da matriz $U_i = Z_i - X_i$, resultando a partir de (3.10) que a matriz V_i é simétrica e dada por $V_i = Z_i^{-1}$. Além disso, considerando que esta escolha fornece $\tilde{P}_i > 0$ como em (3.10), $\tilde{P}_{pi} > 0$ como em (3.13) e que $R_{1i}^{-1} = Z_{pi}$, esta troca de

variáveis nos permite escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}'_i \tilde{P}_i \tilde{T}_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}'_i \tilde{A}_i \tilde{T}_i & \tilde{Q}'_i \tilde{J}_i & \tilde{Q}'_i P_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{T}_i & \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.41)$$

que recai em (3.38) após a multiplicação pela direita por $\text{diag}[\tilde{T}_i^{-1}, I, \tilde{Q}_i^{-1}, I]$ e pela esquerda pela sua transposta. Isto conclui a prova do teorema proposto. \square

Novamente, como feito anteriormente para o filtro \mathcal{H}_2 , temos como a mais importante consequência do Teorema 3.5 o fato de que a solução ótima global do projeto de filtragem \mathcal{H}_∞ (3.37) pode ser determinada a partir de

$$\inf_{(\gamma, X_i, Z_i, M_i, F_i, L_i, K_i) \in \Omega} \gamma \quad (3.42)$$

onde Ω é o conjunto de todas as soluções factíveis das LMIs (3.39). Em outras palavras, o problema de projetar o filtro markoviano \mathcal{H}_∞ ótimo foi convertido em um problema de programação convexa, sendo definido em termo de LMIs.

Em se tratando da existência de uma solução factível para o conjunto Ω , é interessante notar que ao se aplicar o Complemento de Schur na LMI obtida ao se remover a terceira, quinta e sexta colunas e linhas de (3.39), as condições de estabilidade do sistema G dadas por (3.28) também são necessárias. Como explicitado anteriormente, esta é uma condição que pode ser eliminada para o caso de filtragem com conhecimento da cadeia, e desta forma o problema (3.42) pode ser simplificado, como mostra o próximo Corolário do Teorema 3.5.

Corolário 3.6 *O problema (3.42) é equivalente a*

$$\inf_{(\gamma, X_i, F_i, K_i) \in \Psi} \gamma \quad (3.43)$$

onde Ψ é o conjunto de todas as matrizes X_i, F_i, K_i e o escalar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que as LMIs

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ X_{pi} A_i + F_i C_{yi} & X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} & E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.44)$$

são satisfeitas para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Além disso, as matrizes de estado do filtro ótimo dependente do estado da cadeia são dadas por $A_{fi} = A_i + X_{pi}^{-1}F_iC_{yi}$, $B_{fi} = -X_{pi}^{-1}F_i$, $C_{fi} = C_{zi} - K_iC_{yi}$ e $D_{fi} = K_i$.

Prova: Considerando o problema do projeto de filtro ótimo (3.42), percebe-se que as variáveis matriciais M_i e L_i podem ser eliminadas. Para isso, novamente aplicando o Lema de Finsler (Boyd et al. 1994), é visto que a desigualdade (3.39) é satisfeita para algum M_i e L_i se e somente se as LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.45)$$

e

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.46)$$

são satisfeitas simultaneamente para todo $i \in \mathbb{N}_N$. As duas desigualdades (3.45) e (3.46) possuem uma característica comum, ou seja, na solução ótima do problema (3.42) devemos ter $Z_i > 0$ e $Z_{pi} > 0$ arbitrariamente pequenas. Desta forma, impondo $Z_i \rightarrow 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, a solução ótima localizada arbitrariamente perto da fronteira das restrições das LMIs necessitam satisfazer as desigualdades (3.44). Finalmente, considerando que $Z_i \rightarrow 0$, a factibilidade de (3.39) impõe $M_i = -X_{pi}A_i - F_iC_{yi}$ e $L_i = -C_{zi} + K_iC_{yi}$. Esta afirmação é devida à realização das matrizes de estado do filtro dadas pelo Teorema 3.5. \square

O Corolário 3.6 também merece alguns comentários. Primeiramente, para o caso determinístico $N = 1$ ele se reduz ao conhecido filtro central \mathcal{H}_∞ para sistemas LTI. Para $N > 1$, ele expande os resultados obtidos por (de Souza & Fragoso 2003), pois lida com o projeto de filtros ótimos \mathcal{H}_∞ próprios, em vez de estritamente próprios ($D_f = 0$). Além do mais, definindo os ganhos $G_i = -X_{pi}^{-1}F_i$ para todo $i \in \mathbb{N}_N$, o filtro ótimo com conhecimento da cadeia pode ser reescrito como em (3.34), evidenciando a forma clássica de um observador baseado no modelo interno da planta.

3.4 Considerações finais

Este Capítulo apresentou uma formulação através de LMIs para a solução ótima tanto para o problema de filtragem em norma \mathcal{H}_2 quanto para \mathcal{H}_∞ com conhecimento da cadeia. Apesar da solução destes problemas já estarem presentes na literatura, em (Costa & Tuesta 2004) para o caso \mathcal{H}_2 e em (de Souza & Fragoso 2003) para o caso \mathcal{H}_∞ , os filtros desenvolvidos aqui são próprios, e não estritamente próprios, como são os filtros dos trabalhos citados, e conforme mostram os exemplos presentes neste capítulo, esta diferença pode ser essencial para a qualidade da sua resposta.

Capítulo 4

Problemas especiais de Filtragem

Neste capítulo iremos considerar dois problemas, a saber, filtragem robusta e filtragem sem o conhecimento do estado da cadeia de Markov, para os quais os resultados dos Corolários (3.4) e (3.6) não se aplicam. Em outras palavras, para estes problemas, a solução ótima global do projeto de filtros não pode ser satisfeita com $Z_i \rightarrow 0$ devido às restrições adicionais que devem ser consideradas. Vale ressaltar que os resultados disponíveis na literatura que se baseiam na solução de um conjunto de equações de Riccati acopladas não podem ser generalizados para lidar com estes problemas que possuem grande importância prática.

Outro ponto importante que deve ser colocado em evidência é o fato de que apenas a parte da suficiência dos resultados anteriores se mantém verdadeira, dado que a necessidade geralmente não é verificada no presente contexto. Como conseqüência, apenas soluções sub-ótimas são obtidas.

4.1 Filtragem Robusta

Caso as matrizes de estado do sistema (3.1) não sejam conhecidas com exatidão, mas pertençam ao politopo convexo

$$\mathcal{P} = \text{co} \left\{ \left[\begin{array}{cc} A_i^l & J_i^l \\ C_{zi}^l & E_{zi}^l \\ C_{yi}^l & E_{yi}^l \end{array} \right], l = 1, \dots, N_p \right\} \quad (4.1)$$

definido pela combinação convexa de N_p vértices, então uma solução com custo garantido mínimo é obtida a partir da solução ótima do problema (3.27) ou (3.42) com $\Omega = \bigcap_{l=1}^{N_p} \Omega_l$, onde Ω_l é o conjunto de LMIs que definem cada um dos problemas em questão calculado em cada vértice do politopo de incertezas (4.1). Como pode ser facilmente verificado, esta afirmativa segue diretamente da dependência linear das LMIs que definem cada um dos conjuntos Ω tanto para o

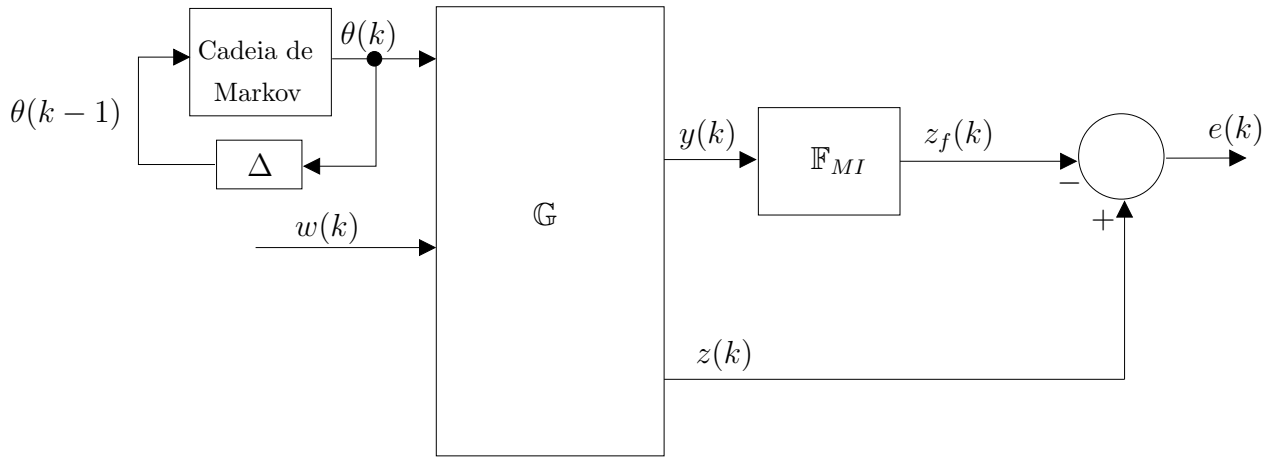


Figura 4.1: Filtro markoviano sem o conhecimento da cadeia

problema de filtragem \mathcal{H}_2 quanto \mathcal{H}_∞ com respeito às matrizes de estado do sistema.

4.2 Filtragem sem o conhecimento do estado da cadeia

O objetivo principal desta seção é obter um filtro cujas matrizes de estado não dependam do modo da cadeia de Markov $i \in \mathbb{N}_N$. Desta forma, podemos, associado ao sistema (2.4), considerar o seguinte filtro linear de ordem completa

$$\mathbb{F}_{MI} : \begin{cases} x_f(k+1) = A_f x_f(k) + B_f y(k) \\ z_f(k) = C_f x_f(k) + D_f y(k) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde, como no caso do problema de filtragem com conhecimento do estado da cadeia, $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$, $x_f(0) = 0$ e as matrizes A_f , B_f , C_f e D_f possuem dimensões compatíveis. O objetivo é determinar estas matrizes de tal forma que a norma desejada do erro de estimação seja minimizada. Destacamos que o sub-índice MI remete ao termo em inglês *mode-independent*.

Conectando o filtro (4.2) ao sistema (2.4), conforme a Figura 4.1, faz com que o erro de estimação satisfaça

$$\mathbb{E}_{MI} : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}_{MI}(\theta_k) \tilde{x}(k) + \tilde{J}_{MI}(\theta_k) w(k) \\ e(k) = \tilde{C}_{MI}(\theta_k) \tilde{x}(k) + \tilde{E}_{MI}(\theta_k) w(k) \end{cases} \quad (4.3)$$

onde as matrizes indicadas são dadas por

$$\tilde{A}_{MI_i} := \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_f C_{yi} & A_f \end{bmatrix} \quad \tilde{J}_{MI_i} := \begin{bmatrix} J_i \\ B_f E_{yi} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\tilde{C}_{MI_i} := \begin{bmatrix} C_{zi} - D_f C_{yi} & -C_f \end{bmatrix} \quad \tilde{E}_{MI_i} := E_{zi} - D_f E_{yi} \quad (4.5)$$

e desta forma, o problema a ser resolvido pode ser escrito como

$$\min_{A_f, B_f, C_f, D_f} \|\mathbb{E}_{MI}\|_2^2 \quad (4.6)$$

para a filtragem \mathcal{H}_2 sem conhecimento da cadeia e

$$\min_{A_f, B_f, C_f, D_f} \|\mathbb{E}_{MI}\|_\infty^2 \quad (4.7)$$

para o caso da filtragem \mathcal{H}_∞ .

4.2.1 Filtragem \mathcal{H}_2 sem o conhecimento do estado da cadeia

Começamos por notar que o Teorema 3.3 pode ser generalizado para lidar com o problema de filtragem sem o conhecimento da cadeia. Primeiramente, observamos que impondo a Ω restrições adicionais da forma

$$M_i = M, \quad F_i = F, \quad L_i = L, \quad K_i = K \quad (4.8)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$, temos pelo Teorema 3.3 que o filtro obtido será independente do estado da cadeia se a matriz de transição de estados satisfizer (veja (Seiler & Sengupta 2003) para mais detalhes)

$$p_{ij} = p_j \quad (4.9)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{N}_N \times \mathbb{N}_N$, pois, para este caso particular, verifica-se que $Z_{pi} = \sum_{j=1}^N p_j Z_j$ e $X_{pi} = \sum_{j=1}^N p_j X_j$ são de fato matrizes independentes do índice i e podem ser expressas por Z_p e X_p respectivamente.

No caso geral, ou seja, caso a condição (4.9) não seja satisfeita, uma maneira direta de se obter um filtro independente da cadeia é impor as restrições adicionais dadas em (4.8) juntamente com

$$X_{pi} - Z_{pi} = S \quad (4.10)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$, onde $S \in \mathbb{M}_s^n$ é uma variável matricial definida positiva, condição necessária para a factibilidade de Ω . A solução ótima do problema (3.27) com as restrições lineares adicionais

(4.8) e (4.10) define um filtro independente do modo da cadeia com a realização das matrizes de estado dadas por $A_f = -S^{-1}M$, $B_f = -S^{-1}F$, $C_f = -L$ e $D_f = K$, além de assegurar um limitante para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação dado por $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(W_i)$.

A restrição dada pela equação (4.10) fornece uma interpretação interessante. Observe que a equação (4.10) é sempre satisfeita quando $X_j - Z_j = S$ para todo $j \in \mathbb{N}_N$. Neste caso, a partir do Lema 3.1 e Lema 3.2, concluímos que a solução correspondente das desigualdades de Lyapunov possui uma forma particular

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ -S & S \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Esta característica é de certa forma esperada, pois apenas a planta mas não o filtro pode depender do modo atual da cadeia de Markov.

Uma outra formulação menos restritiva para o problema de filtragem é dada pelo próximo teorema. Lembramos novamente que as condições estudadas nesta seção são apenas suficientes e, desta forma, fornecem um limitante superior para a norma do filtro em questão.

Teorema 4.1 *Existe um filtro sem o conhecimento da cadeia na forma dada por (4.2) satisfazendo a restrição $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2^2 < \sigma$ se existirem matrizes simétricas X_i , Z_i , W_i e matrizes G , M , L , F e K de dimensões compatíveis que satisfaçam*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(W_i) < \sigma \quad (4.12)$$

além das LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ GJ_i - FE_{yi} & 0 & G + G' + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - KE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

e

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ GA_i - FC_{yi} - M & GA_i - FC_{yi} & 0 & G + G' + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - KC_{yi} + L & C_{zi} - KC_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.14)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Neste caso, uma realização para o filtro é dada pelas matrizes de estado $A_f = G^{-1}M$, $B_f = G^{-1}F$, $C_f = -L$ e $D_f = K$.

Prova: A prova da suficiência se inicia considerando as LMIs (4.13) e (4.14) satisfeitas. De

(4.14) temos que $X_i \geq Z_i$, e desta forma $X_{pi} - Z_{pi} \geq 0$, o que implica que

$$(X_{pi} - Z_{pi} - G)(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}(X_{pi} - Z_{pi} - G') \geq 0 \quad (4.15)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$, e desta forma

$$G(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}G' \geq G + G' - X_{pi} + Z_{pi} \quad (4.16)$$

Com relação à desigualdade (4.13), devido a (4.16), podemos substituir o termo $G + G' - X_{pi} + Z_{pi}$ por $G(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}G'$, que a desigualdade permanece verdadeira. Multiplicando esta nova desigualdade a direita por $\text{diag}[I, I, G'^{-1}(X_{pi} - Z_{pi}), I]$ e a esquerda por sua transposta, e considerando que $F = GB_f$ e $K = D_f$, obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ (X_{pi} - Z_{pi})(J_i + B_fE_{yi}) & 0 & X_{pi} - Z_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - D_fE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Definindo \mathcal{I} por

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e multiplicando a direita por \mathcal{I} e a esquerda por sua transposta, obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}J_i + (Z_{pi} - X_{pi})B_fE_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - D_fE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.19)$$

A partir deste ponto, a prova segue basicamente os mesmos passos do Lema 3.1. Primeiramente fazemos a escolha particular $U_i = Z_i - X_i$. Em seguida, observamos que a desigualdade (4.19) pode ser reescrita como (3.22), com \tilde{J}_i e \tilde{E}_i substituídos por \tilde{J}_{MI_i} e \tilde{E}_{MI_i} respectivamente, através das mesmas partições (3.10) e (3.13). Por fim, multiplicado a direita por $\text{diag}[I, \tilde{Q}_i^{-1}, I]$ e a esquerda pela sua transposta, alcançamos a desigualdade (3.8), novamente com as novas definições de \tilde{J}_{MI_i} e \tilde{E}_{MI_i} .

A demonstração da desigualdade (4.14) segue os mesmos passos. Inicialmente utiliza-se a desigualdade (4.15) para substituir o quarto termo da diagonal principal por um valor maior. Em seguida, retomando as variáveis originais do problema $M = GA_f$, $F = GB_f$, $L = -C_f$ e $K = D_f$, multiplicamos a desigualdade a direita por $\text{diag}[I, I, I, G'^{-1}(X_{pi} - Z_{pi}), I]$ e a esquerda pela sua transposta. Redefinimos \mathcal{I} , de forma que desta vez a quarta linha e coluna receba a soma da terceira e quarta linhas e colunas, e multiplicamos novamente a desigualdade por \mathcal{I} e sua transposta, a direita e a esquerda respectivamente. Por fim, seguimos os mesmos passos da prova do Lema 3.2, sempre considerando \tilde{A}_{MI_i} , \tilde{E}_{MI_i} , \tilde{C}_{MI_i} e \tilde{E}_{MI_i} respectivamente no lugar de \tilde{A}_i , \tilde{E}_i , \tilde{C}_i e \tilde{E}_i . Isto conclui a prova do teorema proposto. \square

Deve-se ressaltar novamente que a formulação dada pelo Teorema 4.1, apesar de apenas suficiente, é menos conservadora do que o fornecido pela solução ótima do problema (3.27) com as restrições lineares adicionais (4.8) e (4.10). De fato, se à formulação do Teorema 4.1 impusermos as restrições adicionais

$$G = G' = (X_{pi} - Z_{pi}) \quad (4.20)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$, as duas formulações coincidem. Iremos mostrar através de um exemplo a seguir que, de fato, a restrição (4.20) não é normalmente satisfeita.

Exemplo 4.1 Este problema é uma leve adaptação do exemplo apresentado em (de Souza 2003). Dado um sistema com dois modos de operação ($N = 2$), com os parâmetros de cada modo dados na Tabela 4.1, e considerando a matriz de transição de estados

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0.975 \\ 0.250 & 0.750 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

o filtro estritamente próprio independente do modo da cadeia calculado através de (3.27) com as restrições adicionais (4.8) e (4.10) garante uma solução para a norma \mathcal{H}_2 de pior caso tal que $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2 \leq 2.5613$, enquanto o mesmo filtro calculado através das LMIs do Teorema 4.1 garante $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2 \leq 2.5511$. A solução ótima do Teorema 4.1 gera como resultados as matrizes

$$G = \begin{bmatrix} 1.2613 & 0.9451 \\ 0.9511 & 1.7134 \end{bmatrix}, \quad X_{p1} - Z_{p1} = \begin{bmatrix} 1.3470 & 1.0089 \\ 1.0089 & 1.7563 \end{bmatrix}, \quad X_{p2} - Z_{p2} = \begin{bmatrix} 1.2692 & 0.9510 \\ 0.9510 & 1.7132 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

enquanto que as restrições adicionais ao problema (3.27) forçariam essas três matrizes a terem

i	A_i	J_i	C'_{zi}	E'_{zi}	C'_{yi}	E'_{yi}
1	$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & -0.33 \\ 1 & 1.4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tabela 4.1: Dados para os Exemplos 4.1 e 4.3

um mesmo valor, que equivale a

$$S = \begin{bmatrix} 1.1222 & 0.8151 \\ 0.8151 & 1.5959 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

na solução ótima ♦

O próximo exemplo novamente retoma a importância do termo D_f para a qualidade dos filtros obtidos, desta vez para o caso de minimização da norma \mathcal{H}_2 do erro para sistemas sem o conhecimento da cadeia.

Exemplo 4.2 Este exemplo, emprestado de (Sworder & Rogers 1983), consiste de um modelo estocástico unidimensional simples para uma planta de captação de energia solar. As matrizes de estado do sistema são descritas pelas equações (2.4), com os dados específicos dados pela Tabela 4.2. A matriz de probabilidades de transição de estados é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

e consideramos o vetor de probabilidades iniciais como sendo $\mu = [2/3, 1/3]$, o qual, como normalmente utilizado na literatura, coincide com a distribuição de estado estacionário da cadeia de Markov.

Calculamos ambos os filtros próprios e estritamente próprios sem o conhecimento do estado da cadeia. Como já mencionado anteriormente, os filtros em questão não estão na forma apresentada pela equação (3.34).

- **Filtro estritamente próprio** - Os resultados do Teorema 4.1 foram aplicados para resolver o problema de filtro sem conhecimento da cadeia, com restrições adicionais do tipo $K = 0$, produzindo um filtro estritamente próprio com custo associado $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2 \leq 0.4708$.

i	A_i	J_i	C_{zi}	E_{zi}	C_{yi}	E_{yi}
1	0.8353	[0.5 0]	1.0	[0 0]	1.0	[0 0.2]
2	0.9646	[0.3 0]	1.0	[0 0]	1.0	[0 0.1]

Tabela 4.2: Dados para o Exemplo 4.2

Vale notar que o filtro ótimo sem o conhecimento da cadeia, estritamente próprio, de ordem estendida de (Costa & Guerra 2002a) resulta em $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2 = 0.4693$.

- **Filtro próprio** - Ao se eliminar as restrições lineares $K = 0$, o Teorema 4.1 fornece um filtro com custo associado de $\|\mathbb{E}_{MI}\|_2^2 \leq 0.1626$. Note que comparado com o filtro estritamente próprio (mesmo em relação ao filtro ótimo de ordem estendida), este filtro próprio apresenta uma performance significativamente melhor.

É importante ressaltar que nossos resultados apenas puderam ser comparados aos apresentados em (Costa & Guerra 2002a) pois neste problema em particular, as matrizes de saída C_{z1} e C_{z2} são iguais. \blacklozenge

4.2.2 Filtragem \mathcal{H}_∞ sem o conhecimento do estado da cadeia

Esta parte se destina a resolver o problema do projeto de um filtro discreto, sem o conhecimento da cadeia, com a garantia de que a norma \mathcal{H}_∞ esteja limitada por um dado valor. Assim como para o caso anterior, podemos encontrar condições suficientes de forma bastante direta a partir do Teorema (3.5), impondo ao problema original as restrições dadas por (4.8) e, para o caso geral, onde a relação (4.9) não se verifica, adicionando também as restrições da forma (4.10). Desta maneira, a solução ótima do problema (3.42) com as restrições lineares adicionais (4.8) e (4.10) define um filtro independente do modo da cadeia com a realização das matrizes de estado dadas por $A_f = -S^{-1}M$, $B_f = -S^{-1}F$, $C_f = -L$ e $D_f = K$, além de assegurar um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ do erro de estimação, dada por $\|\mathbb{E}_{MI}\|_\infty^2 \leq \gamma$.

De maneira semelhante ao Teorema 4.1, é possível obter condições menos restritivas para este problema, enunciado a seguir:

Teorema 4.2 *Existe um filtro sem conhecimento da cadeia na forma dada por (4.2) satisfazendo a restrição $\|\mathbb{E}_{MI}\|_\infty^2 < \gamma$ se existirem matrizes simétricas X_i , Z_i e matrizes G , M , L , F e K de*

dimensões compatíveis que satisfaçam o conjunto de LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ GA_i - FC_{yi} - M & GA_i - FC_{yi} & GJ_i - FE_{yi} & 0 & G + G' + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - KC_{yi} + L & C_{zi} - KC_{yi} & E_{zi} - KE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.25)$$

para todo $i \in \mathbb{N}_N$. Em caso afirmativo, uma realização factível para o filtro é dada pelas matrizes de estado $A_f = G^{-1}M$, $B_f = G^{-1}F$, $C_f = -L$ e $D_f = K$.

Prova: A prova deste Teorema segue os mesmos passos da prova apresentada para o Teorema 4.1, sendo portanto omitida. \square

O Exemplo a seguir compara o filtro \mathcal{H}_∞ independente do modo da cadeia obtidos pelo Teorema 4.2 com aquele apresentado em (de Souza 2003), além de demonstrar a importância do termo D_f também para o caso \mathcal{H}_∞ .

Exemplo 4.3 Este exemplo foi obtido de (de Souza 2003). Os parâmetros de cada modo de operação são dados na Tabela 4.1, e consideramos a seguinte matriz de probabilidades de transição de estados

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Para o filtro independente do modo da cadeia, dado pelo Teorema 4.2, calculamos:

- **Filtro estritamente próprio** - O filtro sub-ótimo sem conhecimento da cadeia possui custo garantido de $\|\mathbb{E}_{MI}\|_\infty \leq 4.3244$, e sua realização no espaço de estados é dada pelas seguintes matrizes:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.1412 & -0.5298 & 0.9902 \\ 1.7242 & 0.8031 & -1.2469 \\ \hline -0.0335 & 0.9741 & 0 \end{array} \right] \quad (4.27)$$

Note que este resultado é melhor do que o filtro da mesma natureza de (de Souza 2003), que como indicado no artigo em questão, projeta um filtro com custo garantido de $\|\mathbb{E}_{MI}\|_\infty \leq 4.5955$.

- **Filtro próprio** - Usando novamente os resultados do Teorema 4.2, mas desta vez sem a imposição $K = 0$, determinamos a seguinte realização de estado do filtro sem conhecimento da cadeia

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.2695 & -0.0068 & 0.8747 \\ 0.5870 & 0.0859 & -1.0462 \\ \hline 1.7080 & 1.0000 & -1.7080 \end{array} \right] \quad (4.28)$$

que garante um custo para a norma \mathcal{H}_∞ que satisfaz $\|\mathbb{E}_{MI}\|_\infty \leq 3.6366$. A importância do elemento D_f pode ser comprovada neste exemplo, pois calculando o filtro ótimo estritamente próprio com conhecimento da cadeia, obtemos o custo para a norma \mathcal{H}_∞ de $\|E\|_\infty = 3.8450$, que é maior do que o custo garantido para o filtro próprio sem o conhecimento da cadeia.

♦

4.3 Considerações finais

Neste Capítulo, aproveitamos do fato da formulação dos projetos de filtros apresentados anteriormente serem feitos através de LMIs para tratamos de classes mais amplas de problemas de filtragem de importância teórica e prática, em específico, filtragem robusta e filtragem sem o conhecimento do estado da cadeia. Esta última foi apresentada em duas formulações, uma que decorre naturalmente das LMIs obtidas anteriormente, e outra que com ajuda de variáveis de folga garante uma formulação menos restritiva. Através de exemplos, comparamos nossos resultados com os obtidos em (Costa & Guerra 2002a) e (de Souza 2003), e novamente o fato de que os filtros aqui desenvolvidos apresentarem $D_f \neq 0$ mostrou-se de grande importância para a redução do conservadorismo.

Capítulo 5

Aplicação Prática

Neste capítulo iremos estudar uma possível aplicação para a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, bem como comparar os métodos aqui desenvolvido com os disponíveis na literatura através de simulações.

5.1 Comunicação através de um canal markoviano

Esta aplicação tem sua motivação baseada em (Seiler & Sengupta 2005)¹. Para um dado sistema físico, considere que se deseje realizar a filtragem de sua saída externamente à planta, através do envio de pacotes de informação da saída em intervalos regulares de tempo. Além disso, esta informação é entregue ao filtro através de um canal markoviano, que poderá inserir erros em cada um destes pacotes de informação. Assumimos que o protocolo de comunicação utilizado pode detectar mas não corrigir tais pacotes defeituosos, e neste caso irá descartá-los. A probabilidade de um pacote correto chegar logo após um outro pacote bom é dada por $p_{R,R}$, enquanto que a probabilidade de um pacote defeituoso ser recebido após um pacote já descartado é dada por $p_{L,L}$.

Podemos observar que este problema pode ser modelado pelas equações dadas em (2.4) com algumas restrições adicionais. Inicialmente, temos definido o número de modos em $N = 2$, onde o primeiro modo indica que o sistema descartou o pacote de informação devido a erros na transmissão enquanto o segundo modo representa o estado quando a comunicação da saída ocorreu corretamente. Em seqüência, observamos que a planta em si não se altera com os modos da cadeia, o que implica em $A_1 = A_2 := A$ e $J_1 = J_2 := J$. Além disso, consideramos que a saída a ser estimada também é independente do modo, o que resulta em $C_{z1} = C_{z2} := C_z$ e

¹As condições necessárias e suficientes para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ utilizadas nesta dissertação não são iguais àquelas propostas nesse artigo pois aquelas, ao nosso ver, não têm respaldo teórico.

$$E_{z1} = E_{z2} := E_z.$$

Com relação à saída medida, para o primeiro modo temos que o protocolo de comunicação elimina o pacote defeituoso, fato que define as matrizes $C_{y1} = 0$ e $E_{y1} = 0$. Para o segundo modo, a comunicação da saída medida se dá de forma correta, e assim definimos $C_{y2} := C_y$ e $E_{y2} := E_y$. Portanto, para a definição de um problema de filtragem com comunicação através de um canal markoviano, são necessárias apenas as matrizes A e J que definem o sistema determinístico a ser filtrado, além das matrizes da saída a ser estimada C_z e E_z e da saída transmitida C_y e E_y . Para o modelamento do canal, como descrito anteriormente, são necessárias as informações das características markovianas do mesmo, fornecidas pelos parâmetros $p_{R,R}$ e $p_{L,L}$, o que resulta em uma matriz de probabilidades de transição de estados dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_{L,L} & 1 - p_{L,L} \\ 1 - p_{R,R} & p_{R,R} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Observe que, por hipótese, o protocolo de comunicação reconhece um pacote defeituoso, em outras palavras, reconhece o modo de operação do sistema. Desta forma trataremos, para este problema de comunicação através de canais markovianos em específico, apenas dos filtros com o conhecimento da cadeia. Assim sendo, a formulação do filtro linear é dado pela equação (3.1), mas as condições especiais deste problema descritas anteriormente impõem que, para o primeiro modo, a saída $y(k)$ seja sempre nula e portanto as matrizes B_{f1} e D_{f1} podem ser consideradas nulas sem perda de generalidade.

5.1.1 Filtragem em norma \mathcal{H}_2

Dado que estamos interessados na filtragem \mathcal{H}_2 com o conhecimento da cadeia, podemos aplicar diretamente os resultados do Corolário 3.4. Para iniciar, retomamos que as matrizes de saída para o modo 1 são nulas, ou seja, tanto C_{y1} quanto E_{y1} são iguais a zero. Assim sendo, olhando para a formulação das matrizes de estado do filtro ótimo, facilmente obtemos que $A_{f1} = A$ e $C_{f1} = C_z$, de forma que o filtro linear ótimo \mathcal{H}_2 referente ao modo 1 pode ser completamente definido antes de qualquer otimização, sendo sempre dado por

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{f1} & B_{f1} \\ \hline C_{f1} & D_{f1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right] \quad (5.2)$$

Este resultado condiz com as nossas expectativas. De fato, é intuitivo imaginar que para o caso de não possuir informações novas sobre a dinâmica do sistema, a melhor opção para um filtro é se basear totalmente no modelo interno da planta, e é isto que ocorre para este modo.

O problema de filtro ótimo \mathcal{H}_2 pode então ser definido por

$$\inf_{(W_1, W_2, X_1, X_2, F, K) \in \Psi} \text{Tr}(\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2) \quad (5.3)$$

onde μ_1 e μ_2 são, respectivamente, as probabilidades dos estados 1 e 2 serem o estado inicial, e Ψ é o conjunto de todas as matrizes simétricas W_1 , W_2 , X_1 e X_2 , além das matrizes F e K , satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} W_1 - E'_z E_z & \bullet \\ (p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2)J & p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{bmatrix} X_1 - C'_z C_z & \bullet \\ (p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2)A & p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} W_2 & \bullet & \bullet \\ (p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1)J + FE_y & p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1 & \bullet \\ E_z - KE_y & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} X_2 & \bullet & \bullet \\ (p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1)A + FC_y & p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1 & \bullet \\ C_z - KC_y & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.7)$$

Além disso, as matrizes de estado do modo 2 do filtro ótimo são dadas por $A_{f_2} = A + (X_1 + p_{R,R}(X_2 - X_1))^{-1}FC_y$, $B_{f_2} = -(X_1 + p_{R,R}(X_2 - X_1))^{-1}F$, $C_{f_2} = C_z - KC_y$ e $D_{f_2} = K$.

5.1.2 Filtragem em norma \mathcal{H}_∞

Novamente iremos tratar do problema filtragem com o conhecimento da cadeia, e assim podemos aplicar diretamente os resultados do Corolário 3.6. As mesmas considerações realizadas para as matrizes A_{f_1} e C_{f_1} para o caso \mathcal{H}_2 continuam válidas também para o problema em norma \mathcal{H}_∞ , de forma que o filtro linear ótimo \mathcal{H}_∞ para o primeiro modo continua podendo ser obtido *a priori* a partir da equação (5.2).

O problema de filtro ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser definido por

$$\inf_{(\gamma, X_1, X_2, F, K) \in \Psi} \gamma \quad (5.8)$$

onde Ψ é o conjunto de todas as matrizes simétricas X_1 e X_2 , e das matrizes F e K , além do

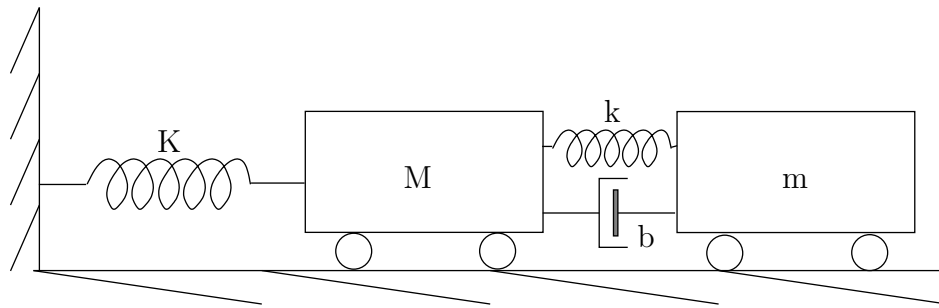


Figura 5.1: Sistema massa-mola-amortecedor

escalar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que as LMIs

$$\begin{bmatrix} X_1 - C'_z C_z & -C'_z E_z & A'(p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2) \\ \bullet & \gamma I - E'_z E_z & J'(p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2) \\ \bullet & \bullet & p_{L,L}(X_1 - X_2) + X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} X_2 & 0 & A'(p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1) + C'_y F' & C'_z - C'_y K' \\ \bullet & \gamma I & J'(p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1) + E'_y F' & E'_z - E'_y K' \\ \bullet & \bullet & p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.10)$$

são satisfeitas. Além disso, as matrizes de estado do filtro \mathcal{H}_∞ ótimo para este caso são dadas por $A_{f2} = A + (p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1)^{-1} F C_y$, $B_{f2} = -(p_{R,R}(X_2 - X_1) + X_1)^{-1} F$, $C_{f2} = C_z - K C_y$ e $D_{f2} = K$.

A seguir, para efeito de ilustração, desenvolveremos um exemplo que segue o modelamento descrito até agora neste capítulo.

5.1.3 Exemplo

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor, possuindo duas massas acopladas entre si e em uma parede por molas e um amortecedor, como pode ser visto na Figura 5.1.

Este sistema mecânico pode ser modelado através de equações de Newton de dinâmica contínua da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K+k}{M} & \frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{b}{M} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} (t) \quad (5.11)$$

Para efeito de computação numérica, foi analisado o caso deste problema com os seguintes parâmetros físicos

$$\begin{cases} M = 5 & [kg] \\ K = 100 & [N/m] \\ m = 10 & [kg] \\ k = 50 & [N/m] \\ b = 1.8 & [N.s/m] \end{cases} \quad (5.12)$$

O problema que se deseja resolver é a estimação da posição da massa à direita medindo apenas a velocidade da massa à esquerda, sendo que esta medição está suscetível a algum erro. Além disso, estas informações do sensor de velocidade são transmitidas através de um canal markoviano para o estimador de estados.

O sistema descrito anteriormente foi discretizado por um segurador de ordem zero com $T_s = 0.5s$, definindo desta forma as seguintes matrizes de estados discretos para o problema a ser resolvido:

$$\begin{bmatrix} A & J \\ \hline C_y & D_y \\ \hline C_z & D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7562 & 0.5086 & 0.0791 & 0.1435 & 0.0974 & 0 \\ 0.2092 & 0.5604 & 0.0718 & 0.4012 & 0.0559 & 0 \\ -1.6559 & 0.0736 & -0.7588 & 0.5113 & -1.7562 & 0 \\ -0.1463 & -1.2887 & 0.2556 & 0.5140 & 0.2092 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.1000 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Conforme já discutido anteriormente, dado que o filtro consegue detectar se um pacote foi recebido com erro, temos como decorrência direta que o filtro tem conhecimento do estado da cadeia de Markov. Além disso, iremos tratar do problema de otimização da norma \mathcal{H}_2 de pior caso, ou seja, substituímos o problema definido em (5.3) por

$$\inf_{(W_1, W_2, X_1, X_2, F, K) \in \Psi} \max \{ \text{Tr}(W_1), \text{Tr}(W_2) \} \quad (5.14)$$

cuja formulação ainda é convexa devido aos motivos mostrados pelas desigualdades em (2.28).

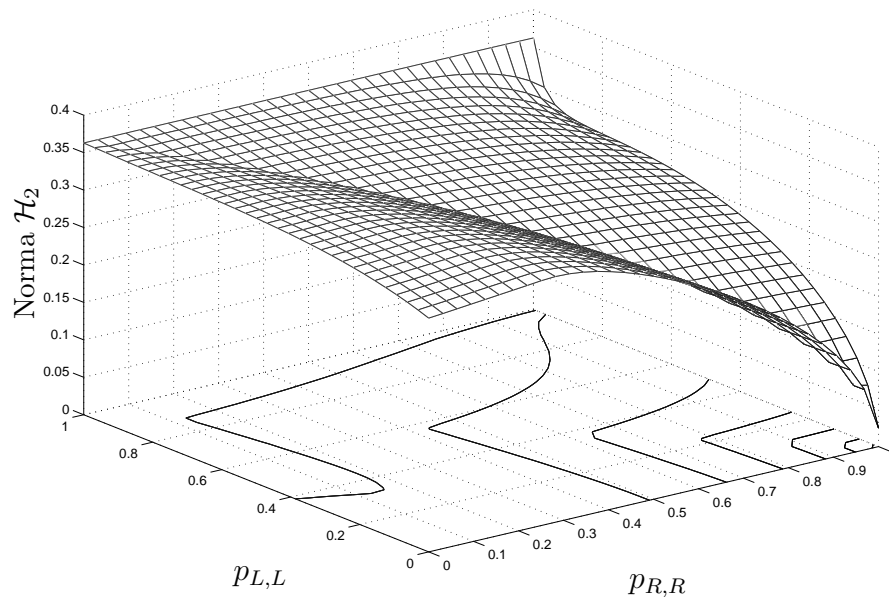


Figura 5.2: Performance do filtro próprio \mathcal{H}_2 versus taxa de perda de pacotes

Calculamos todos os filtros próprios com conhecimento do modo da cadeia para uma grade de matrizes de probabilidade de transição, como pode ser visto na Figura 5.2.

Este gráfico apresenta algumas características importantes que devem ser comentadas. Primeiramente notamos que, como esperado, quanto mais pacotes com informações sobre o sistema chegam de forma correta ao filtro, representado por um maior valor de $p_{R,R}$ e menor valor de $p_{L,L}$, melhor é a qualidade da estimação, que pode ser vista pelo valor menor da norma \mathcal{H}_2 do erro.

O ponto $(p_{R,R}, p_{L,L}) = (0, 1)$ também apresenta uma característica interessante. Este caso modela um ambiente onde todos os pacotes são danificados, de forma que o filtro não recebe nenhuma informação útil, e assim sendo, descarta qualquer medida efetuada pelo sistema. Desta maneira, como o filtro se inicia na origem, ele permanecerá ali parado por todos os instantes de tempo $k \in \mathbb{N}$, e a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação para este ponto em específico se iguala à norma \mathcal{H}_2 do próprio sistema discreto determinístico, pois se trata de um sistema assintoticamente estável.

Repetimos o mesmo experimento para o caso de otimização da norma \mathcal{H}_∞ , cujo resultado pode ser visto na Figura 5.3. Via de regra, para casos práticos, uma abordagem utilizando a

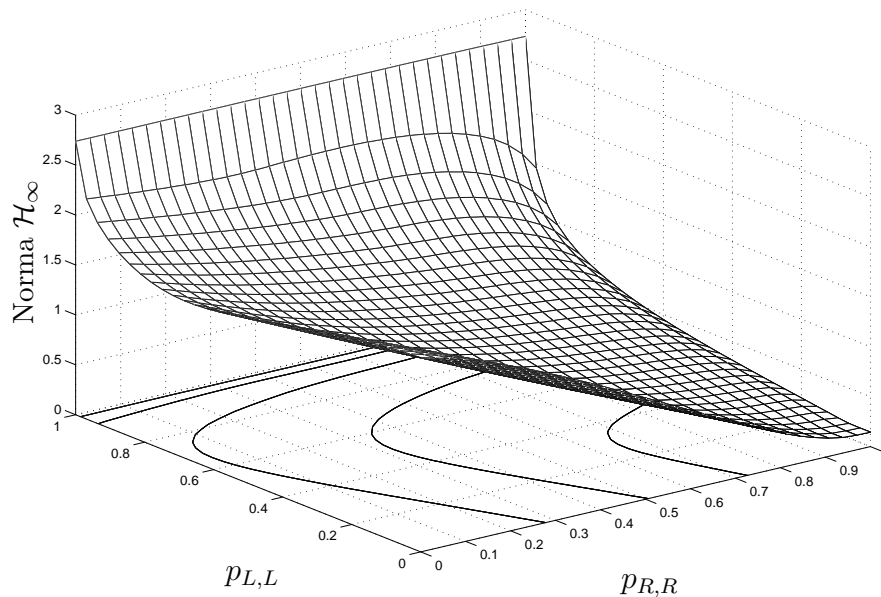


Figura 5.3: Performance do filtro próprio \mathcal{H}_∞ versus taxa de perda de pacotes

norma \mathcal{H}_∞ como garantia de robustez pode ser mais adequada para o projeto, visto que não se fazem restrições aos sinais de distúrbio externo, apenas que eles tenham sua norma quadrática limitada.

Algumas considerações válidas para o problema \mathcal{H}_2 também se aplicam aqui. Conforme é mostrado na Figura 5.3, observa-se que quanto melhor a qualidade do canal markoviano, menor é a norma \mathcal{H}_∞ associada ao erro de estimação. Temos também que para situações onde $p_{L,L} \rightarrow 1$, a estabilidade assintótica do sistema faz com que o erro de estimação tenda à sua norma \mathcal{H}_∞ , visto que o filtro tende a permanecer durante todo o tempo na origem.

Em seqüência, para efeito de comparações, iremos simular o mesmo sistema porém com a restrição adicional de que o filtro seja estritamente próprio. Para melhor facilitar a visualização das diferenças, iremos calcular a razão entre os valores das normas para o filtro estritamente próprio sobre a norma do filtro próprio apenas para a linha $p_{ij} = p_j$, para $i, j \in (1, 2)$.

Observamos na Figura 5.4 que para este exemplo, a importância do termo D_{f2} no filtro \mathcal{H}_2 se dá especialmente para valores baixos de $p_{L,L}$, sendo que para $p_{L,L} \rightarrow 0$, a razão entre as normas se aproxima a 2.43. Para o caso \mathcal{H}_∞ , esta razão é menos perceptível, sendo no máximo aproximadamente 1.075 nas proximidades de $p_{L,L} = 0.0755$.

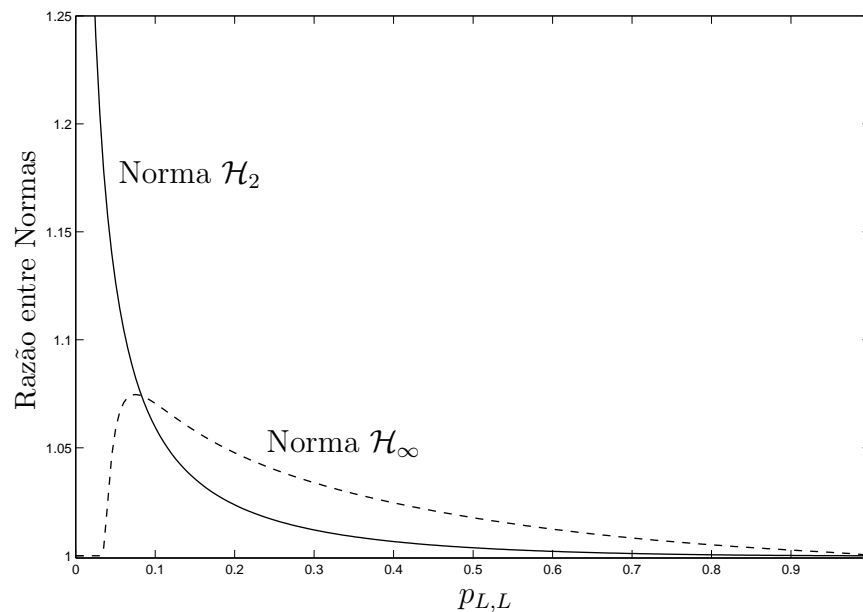


Figura 5.4: Razão entre a performance do filtros para $p_{ij} = p_j$

Por fim, iremos comparar a eficiência do filtro markoviano desenvolvido aqui com o filtro de Kalman para o sistema determinístico. Consideramos o caso onde $p_{L,L} = 0.85$ e $p_{R,R} = 0.95$, na expectativa de simular um ambiente onde a comunicação é confiável e os erros de transmissão costumam vir em seqüência (interferências ambientais, por exemplo, tendem a danificar pacotes de informação próximos entre si). Para este caso projetamos 2 filtros, onde o primeiro é o filtro markoviano desenvolvido neste capítulo e o segundo é o filtro de Kalman para o modo 2 do sistema, ou seja, para o sistema determinístico não sujeito a erros de transmissão.

Para ambos os filtros, efetuamos uma simulação de Monte Carlo com 5000 iterações, considerando como entrada um impulso discreto no primeiro canal do ruído, o que representa uma condição inicial na posição da segunda massa, e um ruído gaussiano de média zero e variância unitária nas medidas do sensor. O resultado médio do erro quadrático pode ser visto na Figura 5.5, de onde é evidente a melhoria na qualidade do filtro que o modelamento markoviano pode alcançar.

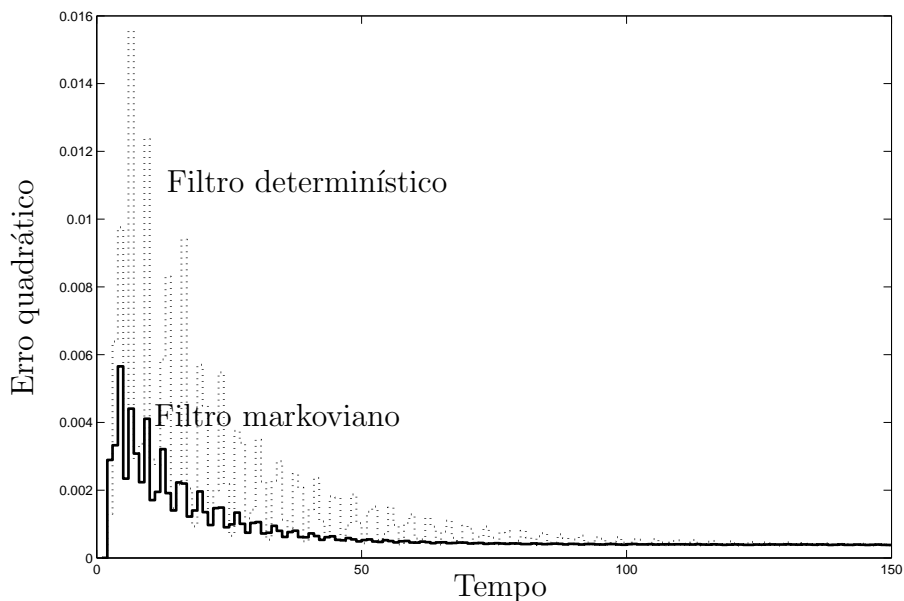


Figura 5.5: Erro quadrático médio dos filtros markoviano e determinístico

5.2 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos uma aplicação possível para os resultados teóricos apresentados nesta dissertação. Ela se origina no fato de que, atualmente, desenvolve-se uma grande quantidade de estudos para sistemas em rede, onde parte da informação de um sistema será processada e utilizada por outro, e a comunicação entre as partes nem sempre é realizada com sucesso. Sobretudo, mostramos que o filtro ótimo linear para o modo em que as informações são perdidas independe do processo de otimização, sendo portanto calculável diretamente a partir dos parâmetros do sistema.

Em seqüência, através de dois gráficos obtidos a partir de um exemplo ilustrativo, mostramos como a qualidade de um canal de comunicação pode ser essencial para um bom resultado de uma estimação a distância, sendo que esta característica possivelmente será até mais acentuada quando o problema de controle por rede for tratado em trabalhos futuros.

Além disso, através de outros gráficos, pudemos mostrar novamente que a generalização para filtros próprios, e não estritamente próprios, pode ser de fato muito relevante para melhorar a qualidade dos filtros projetados, e que a utilização dos filtros definidos nesta tese apresentam grandes vantagens em ambientes com canais markovianos.

Um ponto que merece destaque é a eficiência numérica do método apresentado neste capítulo. Para isto, retomamos que para o problema em norma \mathcal{H}_2 apresentado na equação (5.3), se fizermos $\mu_1 = 0$ e conseqüentemente $\mu_2 = 1$, e escolhermos as probabilidades de transição $p_{L,L} = 0$ e $p_{R,R} = 1$, recairemos sobre o modelo clássico de filtragem de um sistema discreto determinístico. De fato, observando as LMIs que definem o conjunto Ψ para este problema, podemos observar que, para este caso em específico, as variáveis W_1 e X_1 aparecem apenas na primeira e na segunda LMI respectivamente, podendo então ser eliminadas. Destas LMIs sobram apenas a restrição de que X_2 seja definida positiva, o que já é uma condição necessária nas duas LMIs que permanecem. Resumindo, neste caso, como esperado, o conjunto Ψ é definido apenas por duas LMIs que descrevem o problema de filtragem do sistema determinístico.

Sob um outro ponto de vista, isto quer dizer que para incorporarmos a um modelo determinístico qualquer as condições estocásticas de perda de pacotes de informação, o custo computacional adicional necessário é de apenas duas novas variáveis matriciais (W_1 e X_1) e duas outras LMIs de dimensão $(m+n) \times (m+n)$ cada, o que acreditamos ser muito razoável quando comparado às vantagens que tal modelamento pode trazer, como observado na Figura 5.5. Por fim, vale notar que argumentações semelhantes podem ser feitas também para o caso \mathcal{H}_∞ .

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Concluimos esta dissertação inicialmente retomando os pontos-chaves de cada capítulo aqui apresentados.

O Capítulo 2 introduz resultados já conhecidos sobre estabilidade e normas dos sistemas MJLS. Através de LMIs, definimos testes de estabilidade e cálculos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para os sistemas em questão. Como destacado anteriormente, o desenvolvimento da norma \mathcal{H}_2 foi apresentada sem impor a necessidade de que o sistema não altere o estado da cadeia em $k = 0$, como presente em alguns trabalhos na literatura. Note também que acreditamos que a formulação via LMIs da norma \mathcal{H}_2 de pior caso, ou seja, para o caso de não se ter conhecimento *a priori* do estado inicial da cadeia, é original deste trabalho.

No Capítulo 3 apresentamos o resultado principal desta dissertação. Após a definição do problema de filtragem a ser resolvido, através de trocas de variáveis e transformações de similaridade, foi possível exprimir o problema de filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ através de LMIs e, dessa forma, a partir de um problema de otimização, obter a solução ótima do problema de filtragem linear de sistemas MJLS. Todos os filtros apresentados nesse capítulo são próprios, o que os torna uma generalização dos resultados obtidos em (Costa & Tuesta 2004) para o caso \mathcal{H}_2 e em (de Souza & Fragoso 2003) para o caso \mathcal{H}_∞ e, como mostrado em exemplos, esta característica pode levar a filtros bem menos conservadores.

Em seguida, no Capítulo 4, nos preocupamos com problemas especiais de filtragem. Inicialmente mostramos que o problema de filtragem robusta para o caso dos parâmetros do sistema apresentarem incertezas politópicas pode ser tratado com uma pequena extensão dos resultados obtidos no capítulo anterior, porém, nesse caso, o filtro obtido perde a característica de ser ótimo global. Em seqüência, tratamos do problema de filtragem sem que o filtro tenha o conhecimento do estado da cadeia. Neste caso, obtivemos duas formulações, e mostramos que uma delas é sempre menos restritiva. Novamente, os resultados obtidos para o problema de filtragem sem o

conhecimento do modo não são ótimos globais, mas comparamos nossos resultados com os obtidos em (Costa & Guerra 2002a) e (de Souza 2003), e o fato de que os filtros aqui desenvolvidos possuem o termo $D_f \neq 0$ novamente mostrou sua importância para a obtenção de resultados melhores.

Por fim, no Capítulo 5 mostramos uma aplicação prática em um problema de crescente importância, que se denomina *Filtragem em Rede*¹, sendo que tratamos este problema tanto em uma abordagem \mathcal{H}_2 quanto \mathcal{H}_∞ . Através das características particulares que este problema apresenta, e a partir dos resultados do problema de filtragem com conhecimento da cadeia obtidos do Capítulo 3, foi possível simplificar ainda mais o conjunto das restrições por LMIs, inclusive obtendo *a priori* os filtros ótimos para um dos modos. Para efeito de ilustração, terminamos esse capítulo com um exemplo numérico, onde mostramos a dependência da qualidade da rede de comunicações em relação à qualidade da filtragem. Em seguida realizamos as mesmas simulações numéricas para o caso de filtros estritamente próprios, considerando apenas a linha $p_{ij} = p_j$ e, dessa forma, foi possível comparar nossos resultados com aqueles que poderiam ser obtidos anteriormente na literatura. Por fim, mostramos através de uma simulação de Monte Carlo que os filtros desenvolvidos aqui possuem uma qualidade muito maior quando comparados aos filtros determinísticos para o caso de transmissão em canais markovianos.

Decorrentes da execução deste trabalho, três artigos científicos foram produzidos: (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2007b), (Gonçalves, Fioravanti & Geromel 2007) e (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2007a), apresentados a seguir:

- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2007), “ \mathcal{H}_2 filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities”, *International Journal of Control*. Aceito para Publicação.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. & Geromel, J. C. (2007), “ \mathcal{H}_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities”. Submetido para Publicação.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2007), “ \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities”. Submetido para Publicação.

Todos os arquivos de programas escritos em linguagem do *software Matlab* pelo autor desta dissertação para a filtragem de sistemas MJLS, os quais se utilizam do pacote Yalmip (Löfberg

¹termo traduzido do inglês, *Network Filtering*

2004) para a prototipagem das LMIs, e todos os exemplos apresentados neste trabalho, podem ser obtidos diretamente no website:

www.dsce.fee.unicamp.br/~fioravan/mestrado/

Finalmente, quanto aos tópicos para pesquisas futuras relacionados aos sistemas markovianos discretos, acreditamos que um problema de grande importância ainda não resolvido é o uso de LMIs para o projeto de controladores por realimentação dinâmica de saída, tanto sob a ótica da norma \mathcal{H}_2 quanto da norma \mathcal{H}_∞ , bem como o tratamento de problemas de controle e filtragem com comunicação através de canais markovianos descritos de maneira mais precisa a partir dos modelos de Gilbert, Gilbert-Elliot, Fritchman entre outros.

Referências Bibliográficas

- Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. (1979), “*Optimal Filtering*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Blair, W. P. & Sworder, D. D. (1975), “Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria”, *International Journal of Control* **21**, 833–841.
- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994), “*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*”, SIAM, Philadelphia.
- Costa, E. F., & do Val, J. B. R. (2002), “Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems”, *International Journal of Control* **75**, 1282–1292.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. & Geromel, J. C. (1997), “A convex programming approach to \mathcal{H}_2 control of discrete-time markovian linear systems”, *International Journal of Control* **66(4)**, 557–579.
- Costa, O. L. V. & Fragoso, M. D. (1993), “Stability results for discrete-time linear systems with markovian jump parameters”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**, 154–178.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. & Marques, R. (2000), “*Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*”, Springer-Verlag.
- Costa, O. L. V. & Guerra, S. (2002a), “Robust linear filtering for discrete-time hybrid Markov linear systems”, *International Journal of Control* **75(10)**, 712–727.
- Costa, O. L. V. & Guerra, S. (2002b), “Stationary filter for linear minimum mean square error estimator of discrete-time markovian jump systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47(8)**, 1351–1356.

- Costa, O. L. V. & Marques, R. P. (1998), “Mixed $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ -control of discrete-time markovian jump linear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**, 95–100.
- Costa, O. L. V. & Tuesta, E. F. (2004), “ \mathcal{H}_2 -control and the separation principle for discrete-time markovian jump linear systems”, *Mathematics of Control, Signals and Systems* **16**, 320–350.
- de Farias, D. P. (1998), “Otimização e controle de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
- de Oliveira, M. C. (1996), “Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
- de Oliveira, M. C. (1999), “Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
- de Souza, C. (2003), “A mode-independent \mathcal{H}_∞ filter design for discrete-time markovian jump linear systems”, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*.
- de Souza, C. E. (2005), “Mode-independent \mathcal{H}_∞ control of discrete-time markovian jump linear systems”, *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*.
- de Souza, C. E. & Fragoso, M. D. (2003), “ \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **13(14)**, 1299–1316.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. & Gonçalves, A. P. C. (2002), “The \mathcal{H}_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state”, *Automatica* **38**, 343–349.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2007a), “ \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities”. Submetido para Publicação.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2007b), “ \mathcal{H}_2 filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities”, *International Journal of Control*. Aceito para Publicação.

- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. & Geromel, J. C. (2007), “ \mathcal{H}_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities”. Submetido para Publicação.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1988), “Controllability, observability and discrete-time markovian jump linear quadratic control”, *International Journal of Control* **48**, 481–498.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990), “Jump linear quadratic gaussian control: steady state solution and testable conditions”, *Control Theory and Advanced Technology* **5**, 289–319.
- Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X. & Loparo, K. A. (1991), “Stability and control of discrete-time jump linear systems”, *Control Theory and Advanced Technology* **7**, 247–270.
- Löfberg, J. (2004), “Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab”, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- Seiler, P. & Sengupta, R. (2003), “A bounded real lemma for jump linear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48(9)**, 1651–1654.
- Seiler, P. & Sengupta, R. (2005), “An \mathcal{H}_∞ approach to networked control”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50(3)**, 356–364.
- Sworder, D. D. & Rogers, R. O. (1983), “An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28(10)**, 971–978.

Apêndice A

Desigualdades Matriciais Lineares

Nesta dissertação, grande parte do trabalho desenvolvido visou a obtenção de relações expressas a partir de LMIs para o problema de filtragem de sistemas lineares markovianos discretos. Neste apêndice, alguns resultados importantes sobre LMIs utilizados ao longo de todo o texto serão apresentados. Para maiores informações sobre o tema, recomenda-se consultar (Boyd et al. 1994), (de Oliveira 1996) e (de Oliveira 1999), entre outros.

A.1 Complemento de Schur

Este resultado, de grande impacto no contexto de programação semidefinida, pode permitir o mapeamento de uma desigualdade matricial não-linear em uma LMI.

Lema A.1 *Os conjuntos definidos por*

1. $\{Z > 0, X > YZ^{-1}Y'\}$
2. $\{X > 0, Z > Y'X^{-1}Y\}$

onde X e Z são matrizes simétricas, são equivalentes ao conjunto descrito pela LMI

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

Prova: Para demonstrar a primeira relação com a LMI dada na desigualdade (A.1), considerando a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} X - YZ^{-1}Y' & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

e a matriz não singular

$$T = \begin{bmatrix} I & YZ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

temos que, ao multiplicarmos Q a esquerda por T e a direita por sua transposta, esta relação fornece

$$TQT' = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.4})$$

provando assim a primeira relação do lema em questão. A prova da segunda parte é similar, sendo portanto omitida. \square

A.2 Eliminação de Variáveis

Outro ponto importante no estudo de LMIs é a capacidade de se eliminar linhas e colunas associadas a uma variável livre, ou seja, uma variável que pertence a apenas uma desigualdade matricial linear. Neste caso, a desigualdade original pode ser quebrada em duas outras desigualdades menores, como mostraremos no lema a seguir.

Lema A.2 *Considerando que as matrizes A_{11} , A_{22} e A_{33} são simétricas, existe Q de dimensão apropriada satisfazendo a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & Q - A_{13} \\ A'_{12} & A_{22} & A_{23} \\ Q' - A'_{13} & A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.5})$$

se e somente se as desigualdades

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.6})$$

forem satisfeitas. No caso afirmativo, uma possível solução é dada por

$$Q := A_{13} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} \quad (\text{A.7})$$

Prova: Para a necessidade, suponha que existe Q satisfazendo (A.5). Como $A_{22} > 0$, podemos aplicar o Complemento de Schur à mesma desigualdade, para obtermos

$$\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12} & Q - A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} \\ Q' - A'_{13} - A'_{23}A_{22}^{-1}A'_{12} & A_{33} - A'_{23}A_{22}^{-1}A_{23} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.8})$$

Conseqüentemente, os blocos diagonais da desigualdade acima implicam em (A.6).

Para a suficiência, considerando que as desigualdades em (A.6) se verificam, obtemos

$$\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12} & 0 \\ 0 & A_{33} - A'_{23}A_{22}^{-1}A_{23} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.9})$$

a qual, com $Q = A_{13} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}$, permite escrevê-la como a desigualdade (A.8), o que é equivalente à desigualdade (A.5). \square