Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Semigrupos Gerados por Classes Laterais e Funções Características de Semigrupos

Tese de Doutorado

Laércio José dos Santos †

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Orientador

Campinas, SP – 2007

†Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP, processo nº 01/11345-1.

Semigrupos Gerados por Classes Laterais e Funções Características de Semigrupos

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado em matemática devidamente corrigida e defendida por **Laércio José dos Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de junho de 2007.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

Prof. Dr. Alexandre José Santana

Prof. Dr. Marcelo Firer

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Santos, Laércio José dos

Sa59s Semigrupos gerados por classes laterais e funções características de semigrupos / Laércio José dos Santos -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Grupos de. 2. Lie, Álgebras de. 3. Semigrupos. 4. Espaços homogêneos. 5. Espaços simétricos. I. San Martin, Luiz Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Semigroups generated by cosets and characteristics functions of semigroups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie groups. 2. Lie algebras. 3. Semigroups. 4. Homogeneous spaces. 5. Symmetric spaces.

Área de concentração: Teoria de Lie

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio (UEM)
Prof. Dr. Alexandre José Santana (UEM)
Prof. Dr. Marcelo Firer (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 28/06/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 28 de junho de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof. (a). Dr (a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO

Prof. (a). Dr (a). ALEXANDRE JOSÉ SANTANA

Prof. (a) Dr. (a) MARCELO FIRER

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

- À minha família, pelo apoio e pela compreensão nas inúmeras vezes em que não pude estar presente.
- À Lucy, pelo apoio e pela força durante todo esse tempo.
- Ao Prof. Dr. Luiz San Martin, pela orientação e pela oportunidade de estudar esses assuntos tão interessantes em Teoria de Lie.
- Ao Mauro Patrão, pelas várias horas de estudo dos textos de grupos de Lie semi-simples reais e de semigrupos.
- À banca, pelas diversas sugestões para melhorar este trabalho.
- Aos amigos da pós-graduação, pela companhia nos momentos de descontração.
- Às Profas. da UFV Marinês Guerreiro e Simone Moraes, pelo incentivo desde a época da graduação.
- Aos professores e funcionários do IMECC.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho divide-se em duas partes.

Na primeira parte, obtemos condições necessárias e suficientes para que uma família de classes laterais de um subgrupo de Lie gere um subsemigrupo com interior não vazio. Aplicamos essas condições aos pares simétricos, onde o grupo é semi-simples. Como conseqüência, mostramos que o subgrupo dos pontos fixos de vários automorfismos involutivos é maximal como semigrupo.

Na segunda parte, definimos a função característica de um subsemigrupo de um grupo de Lie semi-simples e, encontramos um subconjunto do domínio de definição dessa função. Fizemos isto usando a teoria geral de semigrupos em grupos semi-simples. Usamos a função característica de um semigrupo, com algumas hipóteses adicionais, para introduzir uma métrica Riemanniana nas órbitas do subgrupo das unidades do semigrupo. Com essa métrica, obtemos uma condição necessária para que um subgrupo possa ser imerso em um semigrupo próprio com interior não vazio.

Abstract

This work is made of two parts.

In the first one, we gave necessary and sufficient conditions for a family of cosets of a Lie subgroup to generate a subsemigroup with nonempty interior. We apply these conditions to symmetric pairs where the group is semi-simple. As a consequence we prove that for several involutive automorphisms the fixed points subgroup is a maximal semigroup.

In the second part, we define a characteristic function of a subsemigroup of a semi-simple Lie group and we find a subset where the function is defined. This is made through general theory of semigroups in semi-simple groups. The characteristic function is used, together with some additional hypothesis, for to create a Riemannian metric in the orbits of the unity subgroup of the semigroup. With this metric we gave a necessary condition for a subgroup be embedded in a proper semigroup with nonempty interior.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar algumas propriedades de semigrupos que estão contidos em grupos de Lie. Tal estudo será feito em duas partes.

Na primeira parte, obtemos condições necessárias e suficientes para que o semigrupo gerado por uma família de classes laterais de um subgrupo de Lie paracompacto L de um grupo de Lie paracompacto G, tenha interior não vazio em G. Aplicamos essas condições aos pares simétricos (G, L), onde G é conexo, semi-simples e não compacto. Neste caso, $L \subset G$ é um subgrupo de G tal que $G_0^\tau \subset L \subset G^\tau$, onde τ é um automorfismo involutivo de G, G^τ denota o subgrupo dos pontos fixos de τ e G_0^τ a sua componente da identidade. Como uma conseqüência mostramos que para vários automorfismos τ, o subgrupo dos pontos fixos G^τ é maximal como semigrupo. Esses resultados encontram-se no artigo dos Santos e San Martin [37]. Semigrupos que contêm o subgrupo L são intensamente estudados na literatura em conexão com espaços simétricos causal (veja, por exemplo, Hilgert e Neeb [11] e [12], Hilgert e Ólafsson [13] e San Martin [29]).

Na segunda parte, definimos funções características de semigrupos em grupos de Lie semi-simples. Essa definição é na verdade uma extensão das funções características de cones em espaços vetoriais. A função característica de um cone foi introduzida por E. B. Vinberg em [40]. Essa função tem diversas propriedades boas e ela tem sido usada no estudo da geometria de cones em espaços vetoriais (uma referência para essas funções é o livro de Hilgert e Neeb [11], Seção 1.3). Um dos objetivos é caracterizar o domínio de definição $\mathfrak{D}(S)$ da função característica I_S de um semigrupo S. Essa caracterização não está completa ainda, no entanto mostramos aqui que o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante de S está contido em $\mathfrak{D}(S)$. Fizemos isto usando a teoria geral de semigrupos em grupos semi-simples.

Se $\mathcal{O} \subset \mathfrak{D}(S)$ é uma órbita do subgrupo das unidades $L(S)$ de S então definimos uma aplicação $\mathcal{O} \to L^2(S)$ usando a função característica. Mostramos que essa aplicação é uma imersão de $\mathcal{O}$ em $L^2(S)$, no caso em que ela é diferenciável. Usamos essa imersão para obter uma condição necessária para que um subgrupo possa ser imerso em um semigrupo próprio com interior não vazio.

A seguir descrevemos cada capítulo com um pouco mais de detalhe.

O Capítulo 1 tem como objetivo apresentar alguns conceitos e resultados conhecidos da teoria de semigrupos em grupos semi-simples que usamos neste trabalho.

No Capítulo 2, obtemos condições necessárias e suficientes para que uma família de classes laterais de L gere um semigrupo com interior não vazio em G, onde $L \subset G$ é um subgrupo de G. Neste capítulo supomos que L e G são paracompactos.

Dado $B \subset G$, denotemos por $S(L, B)$ o semigrupo de G gerado pelas classes laterais Lb, $b \in B$. Consideremos a aplicação produto

$$Lb_1 \times \cdots \times Lb_n \to G \qquad n \geq 1$$

onde $b_1, \ldots, b_n \in B$. O semigrupo $S(L, B)$ é a união das imagens destas aplicações. Obtemos as condições (necessárias e suficientes) para termos $\operatorname{int} S(L, B) \neq \emptyset$ em função das diferenciais destas aplicações produtos (veja o Teorema 2.1.3). Como um resultado mostramos que $S(L, B)$ tem interior não vazio no caso em que B não está contido no normalizador $N(\mathfrak{l})$, em G, da álgebra de Lie $\mathfrak{l}$ de L e a representação quociente de L em $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ é irredutível (veja o Teorema 2.1.8).

No Capítulo 3, aplicamos os resultados dos Capítulos 1 e 2 aos pares simétricos (G, L), onde G é conexo, semi-simples e não compacto. Neste caso, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G decompõe-se como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}, \tag{1}$$

onde $\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{q}$ são os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 de τ, respectivamente. Estes subespaços satisfazem as seguintes relações:

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}, \quad [\mathfrak{l}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q} \quad \text{e} \quad [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{l}. \tag{2}$$

Além disso, $\mathfrak{l}$ é a álgebra de Lie de G^τ.

Se a representação de L em $\mathfrak{q}$, induzida pela representação adjunta de G, é irredutível e $x \notin N(\mathfrak{l})$ então o semigrupo gerado pela classe lateral Lx tem interior não vazio em G, pelo nosso resultado geral. Um exemplo em que isto ocorre é o caso de uma involução de Cartan em um grupo de Lie simples G. Neste caso, o grupo dos pontos fixos K é maximal como um subsemigrupo de G, pois qualquer semigrupo S contendo K propriamente tem interior não vazio e atua transitivamente nas variedades *flags* de G. Para involuções em geral, combinamos os resultados obtidos aqui com aqueles de [29], para concluirmos que se o par $(\mathfrak{g}, \tau)$ não é regular (veja Subseção 3.2.1), então qualquer semigrupo próprio que contém L deve estar contido em $N(\mathfrak{l})$.

No caso redutível, existe um subconjunto Θ do conjunto de raízes simples tal que se $x \notin N_\Theta^+ N(\mathfrak{l}) \cup N_\Theta^- N(\mathfrak{l})$ (veja a notação na Subseção 3.2.2) então o semigrupo gerado por Lx tem interior não vazio. Conseqüentemente, os semigrupos próprios que contêm L devem estar contidos em $N_\Theta^+ N(\mathfrak{l}) \cup N_\Theta^- N(\mathfrak{l})$, se $(\mathfrak{g}, \tau)$ não é regular.

No Capítulo 4, definimos a função característica I_S de um subsemigrupo S de um grupo de Lie semi-simples G. Tomamos a variedade *flag* $\mathbb{F}(S)$ do tipo parabólico de S como espaço de parâmetros e, como integrandos tomamos cociclos invariantes por um subgrupo $K \subset G$ compacto maximal. Um resultado útil que usamos para exibir um subconjunto onde a função I_S está bem definida é a descrição dos cociclos K-invariantes sobre os *flags* de G como exponenciais (veja a Subseção 4.4.1) e como normas (Subseção 4.6.1). A descrição dos cociclos como exponencial diz que os cociclos K-invariantes são parametrizados por funcionais lineares definidos em $\mathfrak{a}$ (subespaço abeliano na decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$). Logo o domínio de definição de I_S é um subconjunto do produto cartesiano $\mathfrak{a} \times \mathbb{F}(S)$. Um dos principais resultados desse capítulo assegura que o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante de S, em $\mathbb{F}(S)$, está contido no domínio da função I_S, restrito ao *flag* (veja o Teorema 4.6.8).

Por fim, no Capítulo 5, usamos a função característica I_S de um semigrupo S para definir uma aplicação $\Phi : \mathcal{O} \to L^2(S)$, onde $\mathcal{O} \subset \mathfrak{D}(S)$ é uma órbita do subgrupo das unidades $L(S)$ de S contida no domínio de definição $\mathfrak{D}(S)$ de I_S. Dado $x \in \mathcal{O}$, $\Phi(x)$ é definido como a raiz quadrada do quociente entre o cociclo e a função característica. Mostramos, nesse capítulo, que Φ é uma imersão de $\mathcal{O}$ em $L^2(S)$ se Φ é diferenciável.

Essa imersão induz uma métrica Riemanniana em $\mathcal{O}$. Em relação a essa métrica os elementos de $L(S)$ são isometrias. Combinando estes resultados com alguns resultados conhecidos de geometria Riemanniana, obtemos uma condição necessária para que um subgrupo $L \subset G$ seja imerso em um semigrupo próprio com interior não vazio. Essa condição diz que os grupos de isotropia de alguma órbita principal de L, no *flag* do tipo parabólico de S, devem ser compactos.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é fixar a notação e apresentar alguns conceitos e resultados da Teoria de Semigrupos de San Martin, que usaremos neste trabalho.

Ao longo deste capítulo denotamos por G um grupo de Lie conexo, semi-simples, não compacto e com centro finito e por $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie.

As principais referências para este capítulo são: Duistermaat, Kolk e Varadarajan [4], Helgason [8], Humphreys [14], Knapp [16], Patrão [23], San Martin [27], [28] e [30], San Martin e Tonelli [36] e Warner [42].

1.1 Álgebras de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real, semi-simples e não compacta. Denotemos a **forma de Cartan-Killing** de $\mathfrak{g}$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, onde ad é a **representação adjunta** de $\mathfrak{g}$.

Seja $\theta \neq 1$ um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$, isto é, $\theta^2 = \theta \circ \theta = 1$, onde 1 é o automorfismo identidade de $\mathfrak{g}$. Denotemos por $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente, de θ. Estes autoespaços satisfazem as seguintes relações:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \ [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s} \quad \text{e} \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}.$$

Em particular, $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Definimos a forma bilinear associada a θ por

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle.$$

Os subespaços $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ são ortogonais em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$. Além disso, como a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é uma forma bilinear não degenerada. No caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é um produto interno dizemos que θ é uma **involução de Cartan** e neste caso chamamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ de **decomposição de Cartan** de $\mathfrak{g}$.

Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço abeliano maximal. Denotemos por Π o sistema de **raízes restritas** associado ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Assim $\alpha \in \Pi$ se, e somente se, $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ (dual de $\mathfrak{a}$) é não nulo e o autoespaço associado a α

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

é não nulo.

O subconjunto de $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a}' = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in \Pi\}$$

é aberto e denso em $\mathfrak{a}$. As componentes conexas de $\mathfrak{a}'$ são as **câmaras de Weyl** em $\mathfrak{a}$. Os elementos de $\mathfrak{a}'$ são denominados **elementos regulares** em $\mathfrak{a}$. Escolha uma câmara dessas, digamos $\mathfrak{a}^+$. Denotemos por Π^+ o conjunto de **raízes positivas** associado a $\mathfrak{a}^+$,

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha(H) > 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}^+\}$$

e Σ o correspondente **sistema simples** de raízes.

As subálgebras

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

(onde $\Pi^- = -\Pi^+$) são nilpotentes e a **decomposição de Iwasawa** de $\mathfrak{g}$ escreve-se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Seja $\mathfrak{m}$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$. A **subálgebra parabólica minimal** de $\mathfrak{g}$ associada a $\mathfrak{a}^+$ é

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

De um modo mais geral, seja $\Theta \subset \Sigma$. Denotemos por $\langle\Theta\rangle$ o conjunto de todas as combinações lineares de Θ e por $\langle\Theta\rangle^\pm = \langle\Theta\rangle \cap \Pi^\pm$.

Consideremos também as subálgebras

$$\mathfrak{n}^\pm(\Theta) \ = \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha} \ \text{ e } \ \mathfrak{n}^\pm_\Theta \ = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}.$$

A **subálgebra parabólica** associada a Θ é

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p}.$$

Seja $\mathfrak{a}(\Theta)$ o subespaço de $\mathfrak{a}$ gerado por H_α, onde $\alpha \in \Theta$ e H_α é definido por $\alpha(\cdot) = \langle \cdot, H_\alpha \rangle$. Denotando por $\mathfrak{a}_\Theta$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$, em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$, temos a seguinte decomposição

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{l}_\Theta \oplus \mathfrak{n}^+_\Theta,$$

onde $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$ e $\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta$.

Dizemos que um elemento $H \in \mathfrak{a}_\Theta$ é **Θ-regular** se $\alpha(H) \neq 0$, para todo $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. Definimos também o subconjunto $\mathfrak{a}^+_\Theta$ de $\mathfrak{a}_\Theta$ por

$$\mathfrak{a}^+_\Theta = \{H \in \mathfrak{a}_\Theta : \alpha(H) > 0 \text{ para todo } \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\}.$$

Notemos que $\mathfrak{m}_\Theta$ é invariante por θ, assim existe a seguinte decomposição:

$$\mathfrak{m}_\Theta = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_\Theta) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_\Theta).$$

A expressão acima é a decomposição de Cartan de $\mathfrak{m}_\Theta$. Ainda pelo fato de $\mathfrak{m}_\Theta$ ser redutível podemos escrever $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_\Theta) \oplus [\mathfrak{m}_\Theta, \mathfrak{m}_\Theta]$, onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}_\Theta) \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_\Theta$ denota o centro de $\mathfrak{m}_\Theta$. Isto implica que $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_\Theta \subset [\mathfrak{m}_\Theta, \mathfrak{m}_\Theta]$.

1.2 Variedades *Flags*

Seja $K \subset G$ um subgrupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Denotemos por A_Θ, $A(\Theta)$, $N^{\pm}_\Theta$, $N^{\pm}(\Theta)$ e $(M_\Theta)_0$ os subgrupos de G conexos associados a $\mathfrak{a}_\Theta$, $\mathfrak{a}(\Theta)$, $\mathfrak{n}^{\pm}_\Theta$, $\mathfrak{n}^{\pm}(\Theta)$ e $\mathfrak{m}_\Theta$, respectivamente. Sejam $M_\Theta(K)$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K e $M_\Theta = M_\Theta(K)\,(M_\Theta)_0$. A componente da identidade de M_Θ é $(M_\Theta)_0$. As decomposições de Cartan de $(M_\Theta)_0$ e de M_Θ são dadas na próxima proposição (veja Lema 1.2.4.5, página 74 de [42]).

Proposição 1.2.1 *As decomposições de Cartan de* $(M_\Theta)_0$ *e* M_Θ *são* $(M_\Theta)_0 = M_\Theta(K)_0 \exp(\mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{s})$ *e* $M_\Theta = M_\Theta(K) \exp(\mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{s})$, *respectivamente.*

Denotemos por M e M^* o **centralizador** e o **normalizador** de $\mathfrak{a}$ em K, respectivamente, isto é,

$$M = \{u \in K : \mathrm{Ad}(u)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

e

$$M^* = \{u \in K : \mathrm{Ad}(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$

sendo Ad a representação adjunta do grupo G. Notemos que M é um subgrupo normal de M^*. O **grupo de Weyl** associado ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ é o grupo quociente $\mathcal{W} = M^*/M$, que coincide com o grupo gerado pelas reflexões r_α's em torno das raízes $\alpha \in \Pi$.

O **subgrupo parabólico** P_Θ associado a $\Theta \subset \Sigma$ é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G. A **variedade *flag*** associada a Θ é o espaço homogêneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$.

Se $\Theta_1 \subset \Theta_2$ então $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$. Em particular, o subgrupo $P = P_\emptyset$ é um subgrupo parabólico minimal e $\mathbb{F} = G/P$ é uma **variedade *flag* maximal**. Se $\Theta_1 \subset \Theta_2$, então existe uma projeção canônica $\pi^{\Theta_1}_{\Theta_2} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$, dada por $gP_{\Theta_1} \mapsto gP_{\Theta_2}$. Se $\Theta_1 = \emptyset$, denotemos $\pi^{\emptyset}_{\Theta_2}$ simplesmente por π_{Θ_2}. As projeções $\pi^{\Theta_1}_{\Theta_2}$ são equivariantes, em relação à ação de G, isto é, $\pi^{\Theta_1}_{\Theta_2}(g \cdot x) = g \cdot \pi^{\Theta_1}_{\Theta_2}(x)$ para todo $g \in G$ e todo $x \in \mathbb{F}_{\Theta_1}$.

Dado $\Theta \subset \Sigma$, temos que o subgrupo P_Θ é o seu próprio normalizador e é o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ em G. Daí, segue que o *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ pode ser realizado como o conjunto de todos os subgrupos conjugados a P_Θ e como o conjunto de todas as subálgebras parábolicas conjugadas à $\mathfrak{p}_\Theta$. Estas identificações são dadas, respectivamente, por $gP_\Theta \to gP_\Theta g^{-1}$ e $gP_\Theta \to \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta$.

Seja x_0 a origem do *flag* $\mathbb{F}_\Theta$, em relação a P_Θ. Então, podemos decompor $\mathbb{F}_\Theta$ (**decomposição de Bruhat**) como união disjunta das órbitas de N_Θ^-, $\mathbb{F}_\Theta = \bigcup_{w\in\mathcal{W}} N_\Theta^- \cdot \widetilde{w}x_0$, onde $\widetilde{w}$ é um representante de $w \in \mathcal{W}$ em M^*. A órbita $N_\Theta^- \cdot x_0$ é aberta e densa em $\mathbb{F}_\Theta$ e os seus conjugados $g\left(N_\Theta^- \cdot x_0\right)$, $g \in G$, são chamados **células abertas de Bruhat**.

A subálgebra de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{p}_\Theta^- := \theta(\mathfrak{p}_\Theta) = \theta(\mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p}) = \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{l}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^-$$

é uma subálgebra parabólica e o seu nilradical é $\mathfrak{n}_\Theta^-$. De fato, sejam $w_0 \in \mathcal{W}$ a **involução principal**, isto é, w_0 é o elemento de $\mathcal{W}$ tal que $w_0(\mathfrak{a}^+) = -\mathfrak{a}^+$. Assim, $-w_0(\mathfrak{a}^+) = \mathfrak{a}^+$ e portanto $-w_0(\Sigma) = \Sigma$. Seja $\Theta^* = -w_0(\Theta) \subset \Sigma$. Temos que $\mathfrak{p}_\Theta^- = \mathrm{Ad}(\widetilde{w}_0)\mathfrak{p}_{\Theta^*}$, onde $\widetilde{w}_0 \in M^*$ é um representante de w_0 (veja [29]). Logo $\mathfrak{p}_\Theta^- \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$, onde $\mathbb{F}_{\Theta^*}$ é o ***flag* dual** a $\mathbb{F}_\Theta$.

Um subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}$ é uma câmara de Weyl em $\mathfrak{g}$ se existe uma câmara de Weyl $\widetilde{\mathfrak{a}}$ em $\mathfrak{a}$ tal que $\mathcal{C} = \mathrm{Ad}(g)\widetilde{\mathfrak{a}}$, para algum $g \in G$. Dizemos que $X \in \mathfrak{g}$ é regular se X está em alguma câmara de Weyl de $\mathfrak{g}$. Um elemento $g \in G$ é regular se existe $X \in \mathfrak{g}$ regular tal que $g = \exp X$. Denotemos por $\mathcal{R}(G)$ o conjunto dos elementos regulares de G. Este conjunto é aberto e denso em G.

Considerando $h \in \exp \mathfrak{a}^+$ como um difeomorfismo do *flag* maximal $\mathbb{F}$ temos que o conjunto dos pontos fixos de h está em bijeção com o grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Na verdade, os pontos fixos de h em $\mathbb{F}$ são da forma $\widetilde{w}x_0$, com $w \in \mathcal{W}$ e x_0 a origem de $\mathbb{F}$. O ponto fixo $\widetilde{w}x_0$ é chamado **ponto fixo tipo** w. Agora, dado $g \in \mathcal{R}(G)$, temos que existe $\widetilde{g} \in G$ tal que $h = \widetilde{g}g\widetilde{g}^{\,-1}$ está em $\exp \mathfrak{a}^+$. Conjugando tudo por $\widetilde{g}^{\,-1}$ obtemos uma descrição para g análoga à feita acima (veja [23] ou [36]).

1.3 Semigrupos

Seja $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Dizemos que um subconjunto $D \subset \mathbb{F}_\Theta$ é um **conjunto controlável** para a ação de S em $\mathbb{F}_\Theta$ se tem as seguintes propriedades (int e fe denotam, respectivamente, o interior e o fecho):

1. $\mathrm{int} D \neq \emptyset$;

2. $D \subset \mathrm{fe}(S \cdot x)$ para todo $x \in D$;

3. existem $x \in D$ e $g \in \operatorname{int} S$ tal que $g \cdot x = x$;

4. D é maximal com as propriedades acima.

Se D é um conjunto controlável então denominamos o **conjunto de transitividade** de D, denotado por D^0, o seguinte subconjunto

$$D^0 = \{x \in D : \quad \text{existe} \quad g \in \operatorname{int} S \quad \text{com} \quad g \cdot x = x\}.$$

Um subconjunto $D \subset \mathbb{F}_\Theta$ é um **conjunto controlável invariante** (**c.c.i.**) se é um conjunto controlável e S-invariante, isto é, $S \cdot x \subset D$ para todo $x \in D$.

Denotemos por $\mathcal{R}(S)$ o conjunto dos elementos regulares de G que estão em S. Os conjuntos controláveis para a ação de S em $\mathbb{F}$ são caracterizados por pontos fixos tipo w de elementos em $\mathcal{R}(S)$.

Para a demonstração das duas proposições a seguir veja [23], [30] ou [36].

Proposição 1.3.1 *Para cada $w \in \mathcal{W}$ existe um conjunto controlável $D(w) \subset \mathbb{F}$ tal que seu conjunto de transitividade $D^0(w)$ é o conjunto dos pontos fixos tipo w dos elementos de $\mathcal{R}(S)$. Além disso, todos os conjuntos controláveis em $\mathbb{F}$ são dados dessa maneira.*

Se $\Theta \subset \Sigma$, então os conjuntos controláveis em $\mathbb{F}_\Theta$ são dados pela projeção $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ dos $D(w)$, $w \in \mathcal{W}$:

Proposição 1.3.2 *Se $w \in \mathcal{W}$ então existe um único conjunto controlável $D_\Theta(w) \subset \mathbb{F}_\Theta$ tal que $\pi_\Theta(D^0(w)) \subset D^0_\Theta(w)$ e $\pi_\Theta(D(w)) \subset D_\Theta(w)$. Além disso, todos os conjuntos controláveis em $\mathbb{F}_\Theta$ são dados dessa maneira.*

Em particular $D_\Theta(1)$ é o único c.c.i. em $\mathbb{F}_\Theta$ (veja [30] e [36]). Para grupos simples com centro finito temos o seguinte resultado, demonstrado em [36] (veja também [30]).

Teorema 1.3.3 *Sejam G um grupo simples, com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\operatorname{int} S \neq \emptyset$. Se S é transitivo em $\mathbb{F}_\Theta$ então $S = G$.*

1.3.1 Semigrupos Θ-Maximais

Para semigrupos próprios S com interior não vazio existe um "*flag* especial" tal que o c.c.i. de S, neste *flag*, está contido em alguma célula aberta de Bruhat e a imagem inversa de seu c.c.i. pela projeção canônica é o seu c.c.i. no *flag* maximal. Este é o conteúdo do próximo teorema demonstrado em [36].

Teorema 1.3.4 *Seja G um grupo de Lie conexo e com centro finito. Se $S \subset G$ é um semigrupo próprio e* $\operatorname{int} S \neq \emptyset$ *então existe um único subconjunto próprio $\Theta(S) \subset \Sigma$ tal que:*

1. *$D_{\Theta(S)}(1)$ está contido em alguma célula aberta de Bruhat;*
2. *$\pi^{-1}_{\Theta(S)}\left(D_{\Theta(S)}(1)\right)$ é o c.c.i. de S no flag maximal* $\mathbb{F}$.

O subconjunto $\Theta(S)$ cuja existência e unicidade é garantida no teorema anterior é chamado **tipo parabólico** de S (veja [28]). Algumas vezes dizemos também que $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ é o tipo parabólico de S.

Dado $\Theta \subset \Sigma$, denotemos por $\mathcal{B}_\Theta$ o conjunto de todas as células abertas de Bruhat em $\mathbb{F}_\Theta$. Para cada $\mathfrak{q} \in \mathbb{F}_{\Theta^*}$, denotemos por $\mathfrak{P}_\mathfrak{q}$ o conjunto de todas as subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{F}_\Theta$ tal que $\mathfrak{nil}(\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{nil}(\mathfrak{p}) = \{0\}$, onde $\mathfrak{nil}(\cdot)$ denota o nilradical. Temos que $\mathfrak{P}_\mathfrak{q}$ é uma célula aberta em $\mathbb{F}_\Theta$, isto é, $\mathfrak{P}_\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_\Theta$.

Existe uma bijeção entre o *flag* $\mathbb{F}_{\Theta^*}$ (dual de $\mathbb{F}_\Theta$) e o conjunto de todas as células abertas de Bruhat $\mathcal{B}_\Theta$, dada por

$$\mathfrak{q} \in \mathbb{F}_{\Theta^*} \mapsto \mathfrak{P}_\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_\Theta.$$

Dado $C \subset \mathbb{F}_\Theta$, definimos C^* por

$$C^* = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{F}_{\Theta^*} : C \subset \mathfrak{P}_\mathfrak{q}\}.$$

Se $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ então o **fecho convexo** de C é por definição C^{**} e é denotado por $\mathrm{co}_\mathcal{B}(C)$. Se $\mathrm{co}_\mathcal{B}(C) = C$, dizemos que C é um conjunto **$\mathcal{B}$-convexo**.

Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\operatorname{int} S \neq \emptyset$. Dizemos que S é **Θ-maximal** se o tipo parabólico de S é Θ e não existe semigrupo $T \neq S$ com tipo parabólico Θ e $S \subset T$.

Se $D \subset \mathbb{F}_\Theta$ então o **semigrupo de compressão** de D em $\mathbb{F}_\Theta$ é por definição o semigrupo

$$S_D = \{g \in G : g \cdot D \subset D\}.$$

O próximo teorema, um dos principais resultados de [28], caracteriza os semigrupos Θ-maximais em termos de conjuntos $\mathcal{B}$-convexos.

Teorema 1.3.5 *Um semigrupo $S \subset G$ é Θ-maximal se, e somente se, existe um conjunto $\mathcal{B}$-convexo $C \subset \mathbb{F}_\Theta$, com $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ tal que S é o semigrupo de compressão de $D = \operatorname{fe}(\operatorname{int} C)$. Neste caso, D é o c.c.i. de S em $\mathbb{F}_\Theta$ e $\operatorname{co}_{\mathcal{B}}(D) \subset C$.*

Capítulo 2

Subsemigrupos de Grupos de Lie Gerados por Classes Laterais

Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $L \subset G$ um subgrupo de Lie de G com álgebra de Lie $\mathfrak{l}$. Neste capítulo, supomos que G e L são paracompactos. Um dos objetivos aqui é obtermos condições necessárias e suficientes para que uma família de classes laterais de L gere um subsemigrupo com interior não vazio em G.

2.1 Subsemigrupos Gerados por Classes Laterais

Dado $B \subset G$, denotemos por $S(L, B)$ o semigrupo gerado pelas classes laterais Lx, $x \in B$. Para cada $x \in B$, a classe lateral Lx está contida em $S(L, B)$. Em particular, $B \subset S(L, B)$. Os elementos de $S(L, B)$ são produtos finitos $s = s_1 \cdots s_k$, com $s_i \in \bigcup_{x \in B} Lx$. Se $B = \{x\}$ tem um único elemento escrevemos simplesmente $S(L, x)$.

Seja p_n, $n \geq 2$, a aplicação produto $p_n : G^n \to G$:

$$p_n : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto s_1 \cdots s_n.$$

Dado uma n-upla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$, o subconjunto $L\mathbf{x} := Lx_1 \times \cdots \times Lx_n$ é uma subvariedade de G^n. Denotemos por $q_{\mathbf{x}} : L\mathbf{x} \to G$ a restrição de p_n à $L\mathbf{x}$ e por $\mathrm{im}(q_{\mathbf{x}})$ a imagem de $q_{\mathbf{x}}$. Temos que $S(L, B) = \bigcup \mathrm{im}(q_{\mathbf{x}})$ com $\mathbf{x}$ percorrendo as n-uplas de elementos de B, $n \geq 1$. Aplicamos o Teorema da Categoria de Baire para obter condições necessárias e suficientes para termos $\text{int}S\,(L,B) \neq \emptyset$.

Primeiramente, lembremos que se M e N são variedades de dimensão finita com M paracompacta então se $f : M \to N$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ existem duas possibilidades:

1. Para algum $x \in M$ o posto da diferencial df_x é $\dim N$. Neste caso, o Teorema da Aplicação Inversa assegura que a imagem $f\,(M)$ de f tem interior não vazio em N.

2. O posto de df_x é menor que $\dim N$ para todo $x \in M$. Assim, a imagem $f\,(M)$ é um conjunto de primeira categoria (conjunto magro) em N, isto é, é uma união enumerável de conjuntos fechados com interior vazio. De fato, M é uma união enumerável de subconjuntos compactos e se $K \subset M$ é compacto então $f\,(K)$ é compacto e pelo Teorema de Sard tem interior vazio. Neste caso, $f\,(M)$ tem interior vazio.

Com isto obtemos uma redução do problema de encontrar um critério para que o semigrupo $S(L,B)$ tenha interior não vazio.

Proposição 2.1.1 *Suponha que $B \subset G$ é enumerável. Então $\text{int}S\,(L,B) \neq \emptyset$ se, e somente se, existem um inteiro $n \geq 1$ e uma n-upla $\mathbf{x} \in B^n$ tal que $\text{im}\,(q_{\mathbf{x}})$ tem interior não vazio.*

Demonstração: Como $\text{im}\,(q_{\mathbf{x}}) \subset S\,(L,B)$, para toda n-upla $\mathbf{x}$ de elementos de B, segue que $\text{int}S\,(L,B) \neq \emptyset$ se $\text{im}\,(q_{\mathbf{x}})$ tem interior não vazio para alguma n-upla $\mathbf{x}$.

A recíproca é uma conseqüência do Teorema da Categoria de Baire e dos comentários acima. De fato, cada $q_{\mathbf{x}}$ é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ e se todas as imagens $\text{im}\,(q_{\mathbf{x}})$ são conjuntos de primeira categoria então $S\,(L,B)$ também é de primeira categoria, contradizendo a hipótese. □

Agora calculamos as imagens das diferenciais das aplicações $q_{\mathbf{x}}$.

Lema 2.1.2 *Dado uma n-upla $\mathbf{x} \in B^n$, a imagem da diferencial $d(q_{\mathbf{x}})_{\widetilde{s}}$ em $\widetilde{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in L\mathbf{x}$ é o subespaço*

$$d(D_s)_1(\mathfrak{l} + \text{Ad}(s_1)\mathfrak{l} + \cdots + \text{Ad}(s_1 \cdots s_{n-1})\mathfrak{l}),$$

onde $s = s_1 \cdots s_n$*,* D_r *é a translação à direita e* Ad *é a representação adjunta de* G*.*

Demonstração: Se E_r denota a ação à esquerda em G temos

$$q_{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_n) = s_1 \cdots s_n = E_{s_1 \cdots s_{i-1}} \circ D_{s_{i+1} \cdots s_n}(s_i).$$

O espaço tangente a Lx no ponto r é $d(D_r)_1(\mathfrak{l})$. Logo, a imagem da i-ésima derivada parcial de $q_{\mathbf{x}}$ em $\widetilde{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\partial_i q_{\mathrm{x}}(d(D_{s_i})_1(\mathfrak{l})) &= d(E_{s_1 \cdots s_{i-1}} \circ D_{s_{i+1} \cdots s_n})_{s_i}(d(D_{s_i})_1(\mathfrak{l})) \\
&= d(E_{s_1 \cdots s_{i-1}} \circ D_{s_{i+1} \cdots s_n} \circ D_{s_i})_1(\mathfrak{l}) \\
&= d(E_{s_1 \cdots s_{i-1}} \circ D_{s_i \cdots s_n})_1(\mathfrak{l}) = d(D_{s_i \cdots s_n} \circ E_{s_1 \cdots s_{i-1}})_1(\mathfrak{l}) \\
&= d(D_{s_i \cdots s_n} \circ D_{s_i \cdots s_{i-1}} \circ C_{s_1 \cdots s_{i-1}})_1(\mathfrak{l}) \\
&= d(D_s \circ C_{s_1 \cdots s_{i-1}})_1(\mathfrak{l}) = d(D_s)_1 \circ d(C_{s_1 \cdots s_{i-1}})_1(\mathfrak{l}) \\
&= d(D_s)_1 \circ \mathrm{Ad}(s_1 \cdots s_{i-1})(\mathfrak{l}),
\end{aligned}$$

onde $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}$. Somando em i, concluímos o lema. □

Sejam $s_1, \ldots, s_n \in \bigcup_{x \in B} Lx$. Na seqüência escrevemos

$$V(s_1, \ldots, s_n) = \mathfrak{l} + \mathrm{Ad}(s_1)\mathfrak{l} + \cdots + \mathrm{Ad}(s_1 \cdots s_n)\mathfrak{l} \tag{2.1}$$

para os subespaços de $\mathfrak{g}$ tais que as translações à direita são as imagens das diferenciais das aplicações $q_{\mathbf{x}}$. Segue desta definição que

$$V(s_1, \ldots, s_r, t_1, \ldots, t_m) = V(s_1, \ldots, s_{r-1}) + \mathrm{Ad}(s)V(t_1, \ldots, t_m) \tag{2.2}$$

onde $s = s_1 \cdots s_r$. Denotemos por d o máximo das dimensões destes subespaços e sejam dois deles, digamos $V(s_1, \ldots, s_{r-1})$ e $V(t_1, \ldots, t_m)$, com dimensão d. Seja $s_r \in \bigcup_{x \in B} Lx$ arbitrário. Aplicando (2.2), concluímos que

$$V(s_1, \ldots, s_{r-1}) = \mathrm{Ad}(s_1 \cdots s_r)V(t_1, \ldots, t_m),$$

isto é, $V(t_1, \ldots, t_m) = \mathrm{Ad}(s_1 \cdots s_r)^{-1}V(s_1, \ldots, s_{r-1})$. Isto significa que todos os subespaços com dimensão máxima são iguais a $\mathrm{Ad}(s_1 \cdots s_r)^{-1}V(s_1, \ldots, s_{r-1})$. Denotamos este subespaço por $V(L, B)$.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa $\mathrm{im}(q_{\mathrm{x}})$ tem interior não vazio em G se, e somente se, o posto da imagem da diferencial de $q_{\mathbf{x}}$ é $\dim \mathfrak{g}$. Isto significa que $V(L, B) = \mathfrak{g}$ se, e somente se, existe uma n-upla $\mathbf{x} \in B^n$ (para algum $n \geq 1$) tal que o posto de $q_{\mathbf{x}}$ em algum ponto é $\dim G$. Portanto, da Proposição 2.1.1 obtemos o seguinte critério para que $S(L, B)$ tenha interior não vazio.

Teorema 2.1.3 *Suponha que $B \subset G$ é enumerável. Então $\mathrm{int}S(L, B) \neq \emptyset$ se, e somente se, $V(L, B) = \mathfrak{g}$.*

O subespaço $V(L, B)$ tem fundamental importância nas aplicações do Teorema 2.1.3 aos pares simétricos. O lema a seguir destaca algumas de suas propriedades.

Lema 2.1.4 *O subespaço $V := V(L, B)$ tem as seguintes propriedades:*

1. $\mathfrak{l} \subset V$;
2. $\mathrm{Ad}(x) V = V$ *para todo* $x \in B$;
3. $\mathrm{Ad}(l) V = V$ *para todo* $l \in L$;

Além disso, se $U \subset \mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ com as três propriedades acima então $V(L, B) \subset U$.

Demonstração: Por definição dos subespaços $V(s_1, \ldots, s_n)$ segue diretamente que $\mathfrak{l} \subset V(L, B)$.

Sejam $t_1, \ldots, t_m$ tal que $V(L, B) = V(t_1, \ldots, t_m)$. Para cada $x \in B$ fixado, temos por (2.2), $V(x, t_1, \ldots, t_m) = \mathfrak{l} + \mathrm{Ad}(x)V(t_1, \ldots, t_m)$. Logo,

$$V(L, B) = V(x, t_1, \ldots, t_m) = \mathrm{Ad}(x)V(t_1, \ldots, t_m),$$

mostrando a segunda afirmação.

Para a terceira, seja $l \in L$. Por (2.1) temos $V(lt_1, \ldots, t_m) = \mathrm{Ad}(l)V(t_1, \ldots, t_m)$. Logo, $V(L, B)$ é $\mathrm{Ad}(l)$-invariante, para todo $l \in L$.

Finalmente, se $V(L, B) = V(t_1, \ldots, t_m)$ então qualquer subespaço de $\mathfrak{g}$ satisfazendo os três itens do lema deve conter $V(t_1, \ldots, t_m)$, pela definição destes subespaços. □

Com isso obtemos a seguinte forma equivalente do Teorema 2.1.3.

Teorema 2.1.5 *Suponha que* $B \subset G$ *é enumerável. Então* $\mathrm{int}S\,(L, B) \neq \emptyset$ *se, e somente se, todo subespaço vetorial* V *de* $\mathfrak{g}$ *com as três propriedades do Lema 2.1.4 é igual a* $\mathfrak{g}$.

Dados $g \in L$ e $x \in B$, temos que $g = g(xx^{-1}) = (gx)x^{-1} \in S(L, B \cup B^{-1})$, já que Lx e $B \cup B^{-1}$ estão contidos em $S\,(L, B \cup B^{-1})$. Logo, $L \subset S(L, B \cup B^{-1})$. A partir daí, é possível mostrar que $S(L, B \cup B^{-1})$ é um subgrupo de G.

Denotemos por $G(L, B)$ o subgrupo de G gerado pelas classes laterais Lx, $x \in B$. Temos que $B \subset G(L, B)$ e, portanto, B^{-1} e $L = Lxx^{-1}$ $(x \in B)$ estão contidos em $G(L, B)$. Além disso, $G\,(L, B) = S\,(L, B \cup B^{-1})$.

Corolário 2.1.6 *Seja* $B \subset G$ *um subconjunto enumerável. Então* $\mathrm{int}S\,(L, B) \neq \emptyset$ *se, e somente se,* $\mathrm{int}G\,(L, B) \neq \emptyset$.

Demonstração: Como $S(L, B) \subset G(L, B)$, temos que $\mathrm{int}G\,(L, B) \neq \emptyset$ se $\mathrm{int}S\,(L, B) \neq \emptyset$.

Por outro lado, $G\,(L, B) = S\,(L, B \cup B^{-1})$. Logo, se $\mathrm{int}G\,(L, B) \neq \emptyset$ então, pelo Teorema 2.1.3, $V\,(L, B \cup B^{-1}) = \mathfrak{g}$. Como o subespaço $V(L, B)$ é de dimensão finita e $\mathrm{Ad}(x)$-invariante para todo $x \in B$ (pelo Lema 2.1.4), segue que $V(L, B)$ é $\mathrm{Ad}(x^{-1})$-invariante para todo $x \in B$, isto é, $\mathrm{Ad}(x)V(L, B) = V(L, B)$ para todo $x \in B \cup B^{-1}$. Pelo Lema 2.1.4, $\mathfrak{g} = V(L, B \cup B^{-1}) \subset V(L, B)$. Usando novamente o Teorema 2.1.3, concluímos que $\mathrm{int}S(L, B) \neq \emptyset$. □

Como $G(L, B) = G(L, B^{-1})$ segue imediatamente deste corolário o seguinte:

Corolário 2.1.7 *Seja* $B \subset G$ *um subconjunto enumerável. Então* $\mathrm{int}\,S(L, B) \neq \emptyset$ *se, e somente se,* $\mathrm{int}\,S(L, B^{-1}) \neq \emptyset$.

Os próximos resultados preparam o Teorema 2.1.5 para as aplicações aos pares simétricos.

A representação adjunta Ad de G induz uma representação de L em $\mathfrak{g}$, por restrição. Como a subálgebra $\mathfrak{l}$ é $\mathrm{Ad}(l)$-invariante, para todo $l \in L$, esta representação passa-se ao quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, chamada **representação quociente** de L em $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, e denotada por

$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}$. Em outras palavras, temos que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}} : L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{l})$ é dada por $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}(l)(X+\mathfrak{l}) = \mathrm{Ad}(l)X + \mathfrak{l}$, com $l \in L$ e $X \in \mathfrak{g}$.

Denotemos por $N(\mathfrak{l})$ o normalizador de $\mathfrak{l}$ em G, isto é,

$$N(\mathfrak{l}) = \{x \in G : \mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\}.$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.8 *Suponha que a representação quociente de L em $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ é irredutível. Se $x \in G \setminus N(\mathfrak{l})$ então $\mathrm{int}S\,(L,x) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $V \subset \mathfrak{g}$ um subespaço satisfazendo as condições do Lema 2.1.4. Como $x \notin N(\mathfrak{l})$ segue que $V \neq \mathfrak{l}$. Assim, sua projeção $\overline{V}$ em $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ é diferente de $\{0\}$. A L-invariância de V e a irredutibilidade da representação garantem que $\overline{V} = \mathfrak{g}/\mathfrak{l}$, isto é, $V = \mathfrak{g}$, concluindo a demonstração. □

Corolário 2.1.9 *Consideremos as mesmas hipóteses que no teorema. Se S é um semigrupo de G tal que $L \subset S$ e $S \not\subset N(\mathfrak{l})$ então $\mathrm{int}S \neq \emptyset$.*

Demonstração: Basta aplicar o teorema à classe lateral Lx com $x \in S \setminus N(\mathfrak{l})$. Como $L \subset S$, temos que $S(L,x) \subset S$, mostrando que $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. □

Suponha que existe um subespaço vetorial $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}$ e $\mathrm{Ad}(l)\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$, para todo $l \in L$. Denotemos por $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ a representação de L em $\mathfrak{q}$ induzida por Ad: $L \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, isto é, se $l \in L$ e $X \in \mathfrak{q}$ então $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}(l)X = \mathrm{Ad}(l)X$.

As representações $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}$ e $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ de L em $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{q}$, respectivamente são equivalentes. De fato, a aplicação $\varphi : \mathfrak{q} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ dada por $\varphi(X) = X + \mathfrak{l}$ está bem definida e é um isomorfismo linear. Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{q} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}(l)"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{l} \arrow[d, "\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}(l)"] \\ \mathfrak{q} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{l} \end{tikzcd}$$

comuta, para todo $l \in L$.

Portanto, se $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ é uma representação irredutível podemos aplicar o Teorema 2.1.8 e o Corolário 2.1.9. Isto será usado no Capítulo 3.

Observação: Seja $B \subset G$ um subconjunto de G. Denotemos por $S(B, L)$ o semigrupo de G gerado pelas classes laterais xL, $x \in B$. Se $s \in S(B, L)$ então $s = x_1 l_1 \cdots x_r l_r$, com $x_k \in B$ e $l_k \in L$, $k = 1, \ldots, r$. Daí, $s^{-1} = l_r^{-1} x_r^{-1} \cdots l_1^{-1} x_1^{-1}$ e portanto, $s^{-1} \in S(L, B^{-1})$. Logo, aplicando a inversão $\iota : x \mapsto x^{-1}$ de G segue que $\iota\left(S(B, L)\right) = S(L, B^{-1})$. Como ι é um homeomorfismo, temos do Corolário 2.1.7 que $\mathrm{int} S(B, L) \neq \emptyset$ se, e somente se, $\mathrm{int} S(L, B) \neq \emptyset$.

Portanto, os resultados obtidos acima para classes laterais à direita valem para classes laterais xL, $x \in G$. $\square$

O exemplo que segue ilustra o caso que $\mathfrak{l}$ não tem um complemento L-invariante, a representação quociente de L não é irredutível e ainda assim, existe um $x \in G$ tal que $\mathrm{int}\, S(L, x) \neq \emptyset$.

Exemplo: Sejam $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ e L o subgrupo de todas as matrizes unipotentes:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja $\{X, H, Y\}$ a base de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tal que $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ e $[X, Y] = H$. Neste caso, a subálgebra $\mathfrak{l}$ é gerada por X.

Notemos que não existe subespaço $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$, L-invariante, tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}$. De fato, suponha que existe um subespaço $\mathfrak{q}$ invariante por $\mathfrak{l}$ tal que $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{l} = \{0\}$. Se $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{q}$ então $[X, Z] = -2bX + cH$ e $[X, [X, Z]] = -2cX$ estão em $\mathfrak{q}$. Logo, $c = 0$ e portanto, $[X, Z] = -2bX$. Assim, $b = 0$ e portanto, $Z = 0$.

O subespaço de $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ gerado por $\{H + \mathfrak{l}\}$ é próprio e L-invariante, isto é, a representação quociente de L não é irredutível.

Seja $Z = aX + bH + cY \in \mathfrak{g}$, com $c \neq 0$ (isto significa que Z não está no normalizador de $\mathfrak{l}$).

Suponhamos que existe um subespaço próprio $V \subset \mathfrak{g}$ satisfazendo as condições do Lema 2.1.4, com $B = \{\exp Z\}$. Assim, existe $Z_1 = a_1X + b_1H + c_1Y \in \mathfrak{g}$, $Z_1 \notin \mathfrak{l}$ tal que $V = \text{ger}\{X, Z_1\}$. Como $[X, Z_1] = -2b_1X + c_1H \in V$, temos que $c_1 = 0$ e portanto, $b_1 \neq 0$. Além disso, $[Z, Z_1] = 2(ba_1 - ab_1)X - ca_1H + 2cb_1Y \in V$ e portanto, $cb_1 = 0$, contradizendo a hipótese. Logo, $V = \mathfrak{g}$ e portanto, $\operatorname{int} S(L, \exp Z) \neq \emptyset$. $\square$

Capítulo 3

Semigrupos em Pares Simétricos Semi-Simples

Neste capítulo, utilizamos os resultados dos Capítulos 1 e 2 para obter alguns resultados de semigrupos em pares simétricos semi-simples não compactos (G, L) (veja as definições na Seção 3.1). Como uma conseqüência mostramos que o subgrupo dos pontos fixos de vários automorfismos involutivos é maximal como semigrupo.

3.1 Pares Simétricos

Sejam G um grupo de Lie e $\tau \neq 1$ um automorfismo de G. Dizemos que τ é **involutivo** se $\tau^2 := \tau \circ \tau = 1$. Denotemos por G^τ o subgrupo dos pontos fixos de τ

$$G^\tau = \{g \in G : \tau(g) = g\},$$

e por G_0^τ a sua componente conexa que contém a identidade. Se L é um subgrupo de G tal que $G_0^\tau \subset L \subset G^\tau$ então dizemos que o par (G, L) é um **par simétrico**.

A versão infinitesimal de pares simétricos é análoga. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie denominamos o par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ de **par simétrico** se $\mathfrak{l}$ é a subálgebra dos pontos fixos de algum automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$.

Sejam (G, L) um par simétrico e τ o automorfismo involutivo correspondente. Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G então $d\tau$, a diferencial de τ na identidade, é um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$. Sejam $\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{q}$ os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 de $d\tau$, respectivamente. Neste caso, existe uma **decomposição canônica** de $\mathfrak{g}$, a saber,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}.$$

Os subespaços $\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{q}$ satisfazem as seguintes relações:

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}, \quad [\mathfrak{l}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q} \ \text{ e } \ [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{l}. \tag{3.1}$$

O subespaço $\mathfrak{l}$ é a álgebra de Lie de L. Logo, a cada par simétrico (G, L) corresponde um par simétrico $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$, onde $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie de G e $\mathfrak{l}$ é álgebra de Lie de L.

No decorrer deste capítulo, G denota um grupo de Lie conexo, semi-simples e não compacto e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ e θ a involução de Cartan correspondente. Neste caso, dizemos que o par simétrico $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ é um **par ortogonal**. Seja $K \subset G$ o subgrupo conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Existe um automorfismo involutivo $\widetilde{\theta}$ de G tal que K é o subgrupo dos pontos fixos de $\widetilde{\theta}$ e $d\widetilde{\theta} = \theta$ (veja [16], Teorema 6.31, página 362).

No caso em que G é simples a representação adjunta $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{s}}$ de K em $\mathfrak{s}$, dada por $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{s}}(k)X = \mathrm{Ad}(k)X$ se $k \in K$ e $X \in \mathfrak{s}$, é irredutível (veja Kobayashi e Nomizu [20], Proposição 7.4, página 250). Além disso, K é o normalizador de $\mathfrak{k}$ em G. De fato, seja $g \in G$ tal que $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$. Podemos escrever $g = (\exp X)k$, com $k \in K$ e $X \in \mathfrak{s}$. Daí, $\mathrm{Ad}(\exp X)Y = \widetilde{Y} \in \mathfrak{k}$, para todo $Y \in \mathfrak{k}$. Logo, $[X, Y] = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{k}$ (veja [42], Lema 1.1.3.7, página 28). Assim, o subespaço gerado por $X \in \mathfrak{s}$ é invariante por $\mathfrak{k}$. Logo, $X = 0$ e portanto, $g \in K$.

Entretanto, existem exemplos de espaços simétricos (G, L), onde a representação adjunta $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ de L em $\mathfrak{q}$ é redutível, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo: Seja a álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} \right\},$$

onde A e B são matrizes de ordem $p \times p$ e $q \times q$, respectivamente, com $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0$. Seja τ o automorfismo dado por

$$\tau \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -X \\ -Y & B \end{pmatrix}.$$

Neste caso, $\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{q}$ são

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Os subespaços

$$\mathfrak{q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathfrak{q}$ são invariantes por $\mathfrak{l}$, isto é, $[\mathfrak{l}, \mathfrak{q}_1] \subset \mathfrak{q}_1$ e $[\mathfrak{l}, \mathfrak{q}_2] \subset \mathfrak{q}_2$. Assim, o Teorema 2.1.8 e o Corolário 2.1.9 não se aplicam a este caso. □

Tratamos separadamente os casos em que a representação adjunta de L em $\mathfrak{q}$ é irredutível ou não. Antes disso, apresentamos um Teorema de San Martin para pares regulares que usaremos nas próximas subseções.

3.1.1 Pares Simétricos Regulares

Sejam $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ um par simétrico e τ o automorfismo associado. Sejam θ uma involução de Cartan que comuta com τ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ a correspondente decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$. Assim, a álgebra $\mathfrak{g}$ decompõe-se na seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}) \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{l}) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}).$$

Dizemos que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ é um **par regular** se o centro da subálgebra $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q})$ intercepta o subespaço $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$ não trivialmente.

Sejam (G, L) um par simétrico e $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ o par associado. Se $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ não é regular então a próxima proposição diz que L não está contido em semigrupo com interior não vazio. Este é um dos principais resultados de [29].

Proposição 3.1.1 *Seja G um grupo de Lie simples com centro finito. Suponha que* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ *não é regular. Se S é um semigrupo de G com $L \subset S$ e* $\mathrm{intS} \neq \emptyset$ *então $S = G$.*

3.2 Semigrupos em Pares Simétricos

3.2.1 O Caso Irredutível

Se a representação adjunta $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ de L em $\mathfrak{q}$ é irredutível então, pelo Corolário 2.1.9 (e observação que o segue), um semigrupo que contém L e não está contido em $N(\mathfrak{l})$ tem interior não vazio em G. Em alguns casos S, não pode ser próprio, como veremos a seguir.

Consideremos, inicialmente, o caso de **pares simétricos Riemannianos**, isto é, (G, K) é associado a um par ortogonal $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ (veja a definição na página 22). Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ e θ a involução de Cartan correspondente.

Teorema 3.2.1 *Se G é simples e $x \notin K$ então a classe lateral Kx gera G como semigrupo.*

Demonstração: Sejam $x \in G$, $x \notin K$ e S o semigrupo gerado por Kx. Como K é o normalizador de $\mathfrak{k}$ em G e a representação $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{s}}$ de K em $\mathfrak{s}$ é irredutível segue, do Teorema 2.1.8 (e observação após o Corolário 2.1.9), que $\mathrm{int}\, S \neq \emptyset$.

Existem $X \in \mathfrak{s}$ e $k \in K$ tais que $x = k \exp X$. Logo, $Kx = K \exp X$. Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ um subespaço abeliano maximal tal que $X \in \mathfrak{a}$. Escolha uma decomposição de Iwasawa associada a este $\mathfrak{a}$ e seja P o subgrupo parabólico minimal correspondente. Temos que $KxP = K(\exp X)P = KP = G$. Logo, o semigrupo S é transitivo na variedade *flag* maximal $\mathbb{F} = G/P$. Pelo Teorema 1.3.3, $S = G$ se G tem centro finito.

Para obter o teorema para grupos simples G, em geral, consideramos o grupo sem centro $G/Z(G)$, onde $Z(G)$ denota o centro de G.

Se $P = MAN$ é uma decomposição de Langlands de P então $Z(G) \subset M$ (veja [8]). Logo, podemos escrever $\mathbb{F} = G/P = \dfrac{G/Z(G)}{P/Z(G)}$. O subgrupo $K/Z(G)$ é compacto maximal em $G/Z(G)$ e sua álgebra de Lie é $\mathfrak{k}$. Como G é conexo, temos que $\ker \mathrm{Ad} = Z(G)$ e assim $K/Z(G)$ é o normalizador de $\mathfrak{k}$ em $G/Z(G)$ e a representação adjunta de $K/Z(G)$ em $\mathfrak{s}$ é irredutível, já que K é o normalizador de $\mathfrak{k}$ em G e $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{s}}$ é irredutível.

Seja $x' = xZ(G)$. Temos que $x' \notin K/Z(G)$ (pois $x \notin K$) e o semigrupo $S/Z(G) \subset G/Z(G)$ contém a classe lateral $(K/Z(G))\,x'$. Pela primeira parte da demonstração segue que $S/Z(G) = G/Z(G)$.

Notemos que $xZ(G) = Z(G)x \subset Kx \subset S$, já que $Z(G) \subset K$. Além disso, $x^{-1}Z(G) \cap S \neq \emptyset$, pois $S/Z(G) = G/Z(G)$. Seja $u_0 \in Z(G)$ tal que $x^{-1}u_0 \in S$ e tome $u \in Z(G)$. Daí,

$$u = (x^{-1}u_0)(u_0^{-1}ux) \in S.$$

Logo, $Z(G) \subset S$.

Finalmente, se $y \in G$ então $yZ(G) \in S/Z(G)$. Assim, existe $s \in S$ tal que $yZ(G) = sZ(G)$, isto é, $s^{-1}y = s' \in Z(G) \subset S$. Logo, $y = ss' \in S$, mostrando que $S = G$. □

Seja S um semigrupo de G tal que $K \subset S$. Se $S \neq K$ então existe um elemento $x \in S$ tal que $x \notin K$. Logo, S contém a classe lateral Kx e, portanto contém o semigrupo gerado por Kx. Assim temos a seguinte conseqüência do Teorema 3.2.1:

Corolário 3.2.2 *Se G é simples e $S \subset G$ é um semigrupo tal que $K \subset S$ então ou $S = K$ ou $S = G$.*

Exemplo: Considere o grupo $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ e o subgrupo compacto maximal $\mathrm{SO}(d)$. O Teorema 2.1.8 garante que se $x \in \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(d)$ então o semigrupo gerado pela classe lateral $\mathrm{SO}(d)x$ é todo $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$, isto é, dado $g \in \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$, existem $u_1, \ldots, u_k \in \mathrm{SO}(d)$ tais que $g = u_1 x \cdots u_k x$. Além disso, pelo Corolário 2.1.9 não existe semigrupo próprio S com $\mathrm{SO}(d) \subset S \subset \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$. □

Um exemplo mais concreto é o seguinte.

Exemplo: O grupo $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ é gerado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Isto significa que podemos escrever qualquer matriz 2×2 de determinante 1 como produto finito de matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 2\cos t & 1/2 \operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t & 1/2\cos t \end{pmatrix},$$

com $t \in \mathbb{R}$. □

Para estender o Corolário 3.2.2 para grupos semi-simples conexos G, consideremos uma decomposição de $\mathfrak{g}$ em ideais simples $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$. Os ideais de $\mathfrak{g}$ são somas dos ideais simples $\mathfrak{g}_i$. Como $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ se $i \neq j$ segue que $[\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2] = \{0\}$ se $\mathfrak{i}_1$ e $\mathfrak{i}_2$ são ideais de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 = \{0\}$. Seja θ_i uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}_i$ tal que $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_s$, onde $\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{g}_i$ é a subálgebra dos pontos fixos de θ_i.

Sejam K_i e G_i os subgrupos conexos com álgebras de Lie $\mathfrak{k}_i$ e $\mathfrak{g}_i$, respectivamente. Então $G = G_1 \cdots G_s$ e $K = K_1 \cdots K_s$ com G_j e K_j subgrupos normais de G e K, respectivamente, para cada $j = 1, \ldots, s$. Se $i \neq j$ então G_i centraliza G_j. Além disso, qualquer subgrupo normal conexo de G é um produto de subgrupos G_j. Assim, se L_1 e L_2 são subgrupos normais de G, com $L_1 \cap L_2 = \{1\}$, temos que se $l_1 \in L_1$ e $l_2 \in L_2$ então $l_1 l_2 = l_2 l_1$.

Corolário 3.2.3 *Se $S \subset G$ é um semigrupo tal que $K \subset S$ então $S = A_1 \cdots A_s$ com $A_i = K_i$ ou G_i.*

Demonstração: Para cada $i = 1, \ldots, s$, seja A_i o subconjunto

$$A_i = \{a \in G_i : \text{ existem } g \in G_1 \cdots G_{i-1} \ \text{ e } \ h \in G_{i+1} \cdots G_s, \ gah \in S\}.$$

Temos que $S = A_1 \cdots A_s$. Pelos comentários acima, cada A_i é um semigrupo de G_i. Como K_i é um subgrupo de K, segue que $K_i \subset A_i \subset G_i$. Pelo Corolário 3.2.2, $A_i = K_i$ ou $A_i = G_i$. □

No caso de pares regulares onde a representação de L em $\mathfrak{q}$ é irredutível temos o seguinte:

Corolário 3.2.4 *Seja G um grupo de Lie simples com centro finito. Suponha que a representação $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ de L em $\mathfrak{q}$ é irredutível e que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ não é regular. Se S é um semigrupo de G tal que $L \subset S$ então $S \subset N(\mathfrak{l})$ ou $S = G$.*

Demonstração: Se $S \not\subset N(\mathfrak{l})$, então pelo Corolário 2.1.9, $\mathrm{int}S \neq \emptyset$. Pela Proposição 3.1.1, $S = G$. □

3.2.2 O Caso Redutível

Os pares simétricos tais que a L-representação em $\mathfrak{q}$ é redutível foram classificados em Kaneyuki [15]. As propriedades destes pares que usamos aqui estão contidas no seguinte lema, que é um caso particular do Lema 1.3.4 de [13].

Lema 3.2.5 *Seja $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ um par simétrico, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra simples. Se a representação de $\mathfrak{l}$ em $\mathfrak{q}$ é redutível então valem as seguintes afirmações:*

1. *$\mathfrak{q}$ decompõe-se em soma de dois subespaços irredutíveis $\mathfrak{q}^+$ e $\mathfrak{q}^-$;*

2. *Os subespaços invariantes $\mathfrak{q}^+$ e $\mathfrak{q}^-$ são isotrópicos em relação à forma de Cartan-Killing e são subálgebras abelianas;*

3. *As subálgebras $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{l} + \mathfrak{q}^+$ e $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{l} + \mathfrak{q}^-$ são parabólicas maximais e $\mathfrak{q}^\pm$ é o nilradical de $\mathfrak{p}^\pm$;*

4. *As representações de $\mathfrak{l}$ em $\mathfrak{q}^+$ e $\mathfrak{q}^-$ não são isomorfas. Em particular $\mathfrak{q}^+$ e $\mathfrak{q}^-$ são os únicos subespaços não triviais invariantes de $\mathfrak{q}$;*

O principal objetivo aqui é determinarmos condições sobre $x \in G$ tal que o subespaço $V(L, x)$, definido na Seção 2.1, seja igual a $\mathfrak{g}$. Antes, porém, observemos que, pelas notações do Capítulo 1, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_\Theta$, $\mathfrak{q}^+ = \mathfrak{n}_\Theta^+$ e $\mathfrak{q}^- = \mathfrak{n}_\Theta^-$ se a subálgebra $\mathfrak{p}^+$ é considerada como a subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$.

Consideremos os subgrupos $N_\Theta^+ = \exp(\mathfrak{n}_\Theta^+)$ e $N_\Theta^- = \exp(\mathfrak{n}_\Theta^-)$ correspondentes às componentes irredutíveis de $\mathfrak{q}$.

Lema 3.2.6 *Seja $x \in G$ tal que $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} \subset \mathfrak{p}^+$ (respectivamente $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} \subset \mathfrak{p}^-$). Então $x \in N_\Theta^+ N(\mathfrak{l})$ (respectivamente $x \in N_\Theta^- N(\mathfrak{l})$).*

Demonstração: Temos que $(\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{a}_\Theta) \cap \mathfrak{n}_\Theta^+ = \{0\}$, já que os elementos de $\mathfrak{a}_\Theta$ são semi-simples ($\mathfrak{a}_\Theta \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$), e os elementos de $\mathfrak{n}_\Theta^+$ são nilpotentes. Além disso, $(\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{m}_\Theta) \cap \mathfrak{n}_\Theta^+ = \{0\}$. De fato, se $X \in (\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{m}_\Theta) \cap \mathfrak{n}_\Theta^+$, então

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

para todo $Y \in \mathfrak{p}^+$, pois $\mathfrak{p}^+ = (\mathfrak{n}_\Theta^+)^\perp$ (isto é, $\mathfrak{p}^+$ é a subálgebra ortogonal a $\mathfrak{n}_\Theta^+$, em relação a Cartan-Killing). Como a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ restrita a $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{m}_\Theta$ não é degenerada, temos $X = 0$. Logo, se $x \in G$ é tal que $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} \subset \mathfrak{p}^+$, então $\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} + \mathfrak{n}_\Theta^+$. Conseqüentemente, existe $n \in N_\Theta^+$ tal que $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} = \mathrm{Ad}(n)\mathfrak{l}$ (veja Varadarajan [39], página 282). Assim, $\mathrm{Ad}(n^{-1}x)\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$. Logo, $n^{-1}x \in N(\mathfrak{l})$ e $x \in N_\Theta^+ N(\mathfrak{l})$. De forma análoga, obtemos que se $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l} \subset \mathfrak{p}^-$ então $x \in N_\Theta^- N(\mathfrak{l})$. □

Teorema 3.2.7 *Se G é simples e $x \in G \backslash (N_\Theta^+ N(\mathfrak{l}) \cup N_\Theta^- N(\mathfrak{l}))$ então o semigrupo $S(L, x)$ gerado pela classe lateral Lx tem interior não vazio em G.*

Demonstração: Considerando as notações da demonstração do Teorema 2.1.8, é suficiente mostrarmos que se $x \notin N_\Theta^+ N(\mathfrak{l}) \cup N_\Theta^- N(\mathfrak{l})$ então $V(L, x) \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$. Segue, pelo Lema 3.2.6, que $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{l}$ não está contido em $\mathfrak{p}^+$ nem em $\mathfrak{p}^-$. Logo, $V(L, x) \cap \mathfrak{q}$ não está contido em $\mathfrak{n}_\Theta^\pm$. Além disso, $V(L, x) \cap \mathfrak{q} \neq \{0\}$, pois $x \notin N(\mathfrak{l})$. Como $V(L, x) \cap \mathfrak{q}$ é $\mathfrak{l}$-invariante temos, pelo Lema 3.2.5 (4), que $V(L, x) \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$. □

Corolário 3.2.8 *Suponha que G é simples, tem centro finito e $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ não é regular. Se S é um semigrupo de G tal que $L \subset S$ então $S \subset N_\Theta^+ N(\mathfrak{l}) \cup N_\Theta^- N(\mathfrak{l})$ ou $S = G$.*

Demonstração: Seja S um semigrupo tal que $S \not\subset N_{\Theta}^{+}N(\mathfrak{l}) \cup N_{\Theta}^{-}N(\mathfrak{l})$. Seja $x \in S \setminus \left(N_{\Theta}^{+}N(\mathfrak{l}) \cup N_{\Theta}^{-}N(\mathfrak{l})\right)$. Logo $\mathrm{int}S \neq \emptyset$, já que $S(L,x) \subset S$ e $\mathrm{int}S(L,x) \neq \emptyset$, pelo Teorema 3.2.7. Portanto, pela Proposição 3.1.1, $S = G$. $\square$

Capítulo 4

Funções Características de Semigrupos

A **função característica** I_W de um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ é o nome que foi dado à transformada de Laplace da função 1_W, onde $1_W(x) = 1$ se $x \in W$ e $1_W(x) = 0$ se $x \notin W$ (que também é chamada de função característica) (veja [11], página 11). De forma explícita,

$$I_W(\omega) = \int_W e^{-\langle \omega, x \rangle}\, dx,$$

com $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno. É possível mostrar que se W é um cone pontual então $I_W(\omega)$ está bem definida (isto é, a integral converge), para todo ω no interior do cone dual

$$W^* = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, x \rangle \geq 0 \ \text{ para } \ \text{todo } \ x \in W\}.$$

Dessa forma $I_W : \mathrm{int}W^* \to \mathbb{R}$. Essa função tem diversas propriedades boas. Por exemplo, tal função é positiva, analítica e $\log I_W$ é uma função estritamente convexa o que garante que a sua Hessiana, isto é, a forma bilinear definida por $(X, Y) = XY \log I_W$ é uma métrica Riemanniana (onde X, Y são campos) (veja [11], Teorema 1.8).

Essa função característica aparece também em estatística, associado aos chamados **modelos exponenciais**. Para cada $\omega \in W^*$, $\dfrac{1}{I_W(\omega)}\, e^{-\langle \omega, x \rangle}\, dx$ define uma probabilidade em W, obtendo-se uma família de probabilidades parametrizada por $\omega \in W^*$. Nesse caso, a métrica $(\cdot, \cdot)$ é conhecida por **matriz de Fisher** da família paramétrica.

Exemplo: Seja $W \subset \mathbb{R}^2$ o primeiro quadrante: $W = (\mathbb{R}^+)^2$. Então, $W^* = W$ e, para $(a,b) \in W$, vale

$$I_W(a,b) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(ax+by)}\, dxdy.$$

Portanto, $I_W(a,b) = \dfrac{1}{ab}$. □

Neste capítulo, G denota um grupo de Lie conexo, semi-simples, não compacto e com centro finito.

Definimos a **função característica** I_S **de um semigrupo** $S \subset G$ com $\operatorname{int} S \neq \emptyset$, pela integral (veja a definição formal na Seção 4.5):

$$I_S(x) = \int_S \chi(g,x)\, dg,$$

onde $\chi : G \times \mathbb{F}_{\Theta(S)} \to \mathbb{R}^+$ é um cociclo K-invariante ($K \subset G$ é um subgrupo compacto maximal) sobre o *flag* $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ do tipo parabólico de S e dg é uma medida de Haar em G.

O objetivo das próximas seções deste capítulo é desenvolvermos as ferramentas necessárias para obtermos uma estimativa para a integral acima. Mostramos que a integral acima converge, para todo x no conjunto de transitividade $D^0_{\Theta(S)}(1)$ do conjunto controlável invariante $D_{\Theta(S)}(1)$ de S (veja o Teorema 4.6.8). Na verdade, mostramos que a integral $I_S(x)$ converge em um conjunto maior que $D^0_{\Theta(S)}(1)$ (veja o Teorema 4.6.9).

4.1 Representações

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real semi-simples e não compacta, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$. Dado $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, um subespaço abeliano maximal, denotemos por $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$. Seja $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, sendo $\mathfrak{t}$ um subespaço abeliano maximal de $\mathfrak{m}$. As álgebras complexificadas de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são denotadas por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, respectivamente. Assim, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Denotemos por $\widehat{\Pi}$ o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, $\widehat{\Pi}^+ \subset \widehat{\Pi}$ e $\widehat{\Sigma} \subset \widehat{\Pi}^+$ os respectivos conjuntos de raízes positivas e de raízes simples.

O conjunto $\Pi = \widehat{\Pi}|_{\mathfrak{a}} \setminus \{0\}$, onde $\widehat{\Pi}|_{\mathfrak{a}} = \{\gamma_{|\mathfrak{a}} : \gamma \in \widehat{\Pi}\}$ ($\gamma_{|\mathfrak{a}}$ denota a restrição de γ a $\mathfrak{a}$), é um sistema de **raízes restritas** do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e $\Pi^+ = \widehat{\Pi}^+|_{\mathfrak{a}} \setminus \{0\}$ é um sistema de raízes positivas em Π. Além disso, $\Sigma = \widehat{\Sigma}|_{\mathfrak{a}} \setminus \{0\}$ é o conjunto de raízes simples em Π^+ (veja [27], Capítulos 13 e 14).

4.1.1 Realização de *Flags* em Espaços Projetivos

Seja ϱ uma representação de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ em um espaço vetorial complexo V. Dizemos que $\gamma \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ é um **peso** de ϱ se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $\varrho(H)v = \gamma(H)v$, para todo $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Isto é, se o **subespaço de pesos** de γ,

$$V_\gamma = \{v \in V : \varrho(H)v = \gamma(H)v, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}$$

é não nulo. Dizemos que γ é um **peso máximo** de ϱ se γ é um peso e $\varrho(X)v = 0$, para todo $X \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^+ := \sum_{\delta \in \widehat{\Pi}^+} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\delta$ e todo $v \in V_\gamma$, onde $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\delta$ denota o subespaço de pesos de δ (em relação à representação adjunta). Um vetor $v \in V$, não nulo, é chamado **elemento primitivo** se $v \in V_\gamma$ para algum peso máximo γ de ϱ. Se ϱ é irredutível com peso máximo γ então $\dim V_\gamma = 1$ (já que $\mathfrak{g}$ é semi-simples) e $V = \sum V_{\widetilde{\gamma}}$, com $\widetilde{\gamma}$ percorrendo os pesos de ϱ (veja [27], Capítulo 11).

Sejam ϱ uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial complexo V. Para cada $\mu \in \mathfrak{a}^*$, seja

$$V_\mu = \{v \in V : \varrho(H)v = \mu(H)v, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Dizemos que μ é **peso** de ϱ se $V_\mu \neq \{0\}$. Seja $\varrho_{\mathbb{C}}$ a extensão de ϱ a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Temos que $\varrho_{\mathbb{C}}$ é irredutível e, portanto, $\varrho_{\mathbb{C}}$ tem peso máximo (veja [27], Capítulo 11).

Lema 4.1.1 *μ é peso de ϱ se, e somente se, $\mu = \gamma_{|\mathfrak{a}}$ para algum peso γ de $\varrho_{\mathbb{C}}$. Além disso,*

$$V_\mu = \sum_{\gamma_{|\mathfrak{a}} = \mu} V_\gamma.$$

Demonstração: Se γ é peso de $\varrho_{\mathbb{C}}$ então $\varrho(H)v = \varrho_{\mathbb{C}}(H)v = \gamma(H)v$, para todo $v \in V_\gamma$ e todo $H \in \mathfrak{a}$, mostrando que $\gamma_{|\mathfrak{a}}$ é peso de ϱ. Isto ainda mostra que $V_\gamma \subset V_{\gamma_{|\mathfrak{a}}}$.

Reciprocamente, seja μ um peso de ϱ e tomemos $v \in V_\mu$. Existem pesos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de $\varrho_{\mathbb{C}}$ tal que $v = v_1 + \cdots + v_n$ com $v_k \in V_{\gamma_k}$, para cada $1 \leq k \leq n$. Assim,

$$\mu(H)v_1 + \cdots + \mu(H)v_n = \mu(H)v = \varrho(H)v = \varrho_{\mathbb{C}}(H)v = \gamma_1(H)v_1 + \cdots + \gamma_n(H)v_n$$

para todo $H \in \mathfrak{a}$. Logo, $\mu(H) = \gamma_1(H) = \cdots = \gamma_n(H)$, para todo $H \in \mathfrak{a}$, isto é, $\mu = \gamma_{1|\mathfrak{a}} = \cdots = \gamma_{n|\mathfrak{a}}$. Ainda temos que $V_{\gamma_{1|\mathfrak{a}}} + \cdots + V_{\gamma_{n|\mathfrak{a}}} \subset V_\mu$. □

Um peso μ de ϱ é dito **peso máximo** se é a restrição do peso máximo de $\varrho_{\mathbb{C}}$. Em geral, se μ é peso máximo de ϱ temos que $\dim V_\mu > 1$.

Denotemos por μ_ϱ e $\gamma_{\varrho_{\mathbb{C}}}$ os pesos máximo de ϱ e $\varrho_{\mathbb{C}}$, respectivamente. Se γ é um peso de $\varrho_{\mathbb{C}}$ então existem inteiros não negativos n_δ, $\delta \in \widehat{\Sigma}$ tais que

$$\gamma = \gamma_{\varrho_{\mathbb{C}}} - \sum_{\delta \in \widehat{\Sigma}} n_\delta \delta.$$

Seja μ um peso de ϱ. Pelo Lema 4.1.1, existe γ peso de $\varrho_{\mathbb{C}}$ tal que $\mu = \gamma_{|\mathfrak{a}}$. Mas $\gamma = \gamma_{\varrho_{\mathbb{C}}} - \sum\limits_{\delta \in \widehat{\Sigma}} n_\delta \delta$ e portanto,

$$\mu = \gamma_{\varrho_{\mathbb{C}}|\mathfrak{a}} - \sum_{\delta \in \widehat{\Sigma}} n_\delta \ \delta_{|\mathfrak{a}} = \mu_\varrho - \sum_{\alpha \in \Sigma} \left(\sum_{\delta_{|\mathfrak{a}} = \alpha} n_\delta \right) \alpha = \mu_\varrho - \sum_{\alpha \in \Sigma} m_\alpha \alpha, \tag{4.1}$$

com $m_\alpha = \sum\limits_{\delta_{|\mathfrak{a}} = \alpha} n_\delta$ inteiros não negativos.

Seja $\Omega = \{\omega_\alpha, \alpha \in \Sigma\}$ a base de $\mathfrak{a}^*$, dual a $\{H'_\alpha, \alpha \in \Sigma\}$ ($H'_\alpha = 2H_\alpha / \langle H_\alpha, H_\alpha \rangle$ e H_α é definido por $\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$). Dado $\Theta \subset \Sigma$, consideremos o seguinte subconjunto de $\mathfrak{a}^*_\Theta$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^*_\Theta(\mathbb{Z}_+) &= \{\mu \in \mathfrak{a}^*_\Theta : \mu(H'_\alpha) \text{ é inteiro positivo, para todo } \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\} \\ &= \{\mu \in \mathfrak{a}^*_\Theta : \mu = \sum_{\alpha \in \Sigma \setminus \Theta} n_\alpha \omega_\alpha, \ n_\alpha \text{ inteiro positivo}\}. \end{aligned}$$

Uma representação irredutível ρ de G em V induz uma representação irredutível $d\rho$ de $\mathfrak{g}$ em V, dada por $d\rho(X)v = d\rho_1(X)v$. Além disso, ρ induz uma ação de G no espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ (veja o exemplo na página 52).

Proposição 4.1.2 *Se $\mu \in \mathfrak{a}^*_\Theta(\mathbb{Z}_+)$ então existe uma representação irredutível de dimensão finita ρ de G em um espaço vetorial complexo V tal que $p\mu$ é peso máximo de $d\rho$ e $\dim V_{p\mu} = 1$, para algum inteiro positivo p. Além disso, considerando a ação de G em $\mathbb{P}(V)$, induzida por ρ, temos que o flag $\mathbb{F}_\Theta$ é uma órbita no espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ e P_Θ é o subgrupo de isotropia de $V_{p\mu}$.*

Demonstração: Veja Guivarc'h, Ji e Taylor [7], Capítulo IV. □

A demonstração da próxima proposição segue a idéia da demonstração da Proposição 11.7, p. 287, de [27]. Tal demonstração será feita aqui para enfatizar que se o peso máximo de ϱ está em $\mathfrak{a}^*_\Theta(\mathbb{Z}_+)$ então existe $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$ na expressão (4.1) tal que o coeficiente m_α é não nulo. Isto será usado posteriormente.

Seja $\Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$. Sejam $\{Y_{k1}, \ldots, Y_{kr_k}\}$ e $\{Z_1, \ldots, Z_s\}$ bases ordenadas de $\mathfrak{g}_{-\beta_k}$ e de $\mathfrak{m}$, respectivamente. Sejam $U(\mathfrak{g})$ a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$ e $\widetilde{\varrho}$ a extensão de ϱ a $U(\mathfrak{g})$ (veja [27], Capítulo 10). Dado $v \in V_{\mu_\varrho}$, o subespaço $\widetilde{\varrho}(U(\mathfrak{g}))v$ de V é invariante por ϱ. Como ϱ é irredutível, segue que $V = \widetilde{\varrho}(U(\mathfrak{g}))v$.

Proposição 4.1.3 *Se $\mu_\varrho \in \mathfrak{a}^*_\Theta(\mathbb{Z}_+)$ então valem as seguintes afirmações:*

1. *Os elementos da forma*

$$\widetilde{\varrho}\left(Y_{11}^{m_{11}} \cdots Y_{1r_1}^{m_{1r_1}} \cdots Y_{t1}^{m_{t1}} \cdots Y_{tr_t}^{m_{tr_t}} Z_1^{n_1} \cdots Z_s^{n_s}\right) v,$$

   onde m_{jk} e n_j são inteiros não negativos, geram V.

2. *Os pesos da representação de $\mathfrak{g}$ em V são da forma*

$$\mu_\varrho - \sum_{\alpha\in\Sigma} n_\alpha \alpha, \ n_\alpha \text{ inteiros não negativos.}$$

   Além disso, existe pelo menos um $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$, na soma acima, tal que $n_\alpha \neq 0$.

Demonstração:

1. Seja $\{X_1, \ldots, X_p\}$ uma base ordenada de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+$. Temos que

$$\{Y_{11}, \ldots, Y_{1r_1}\} \cup \cdots \cup \{Y_{t1}, \ldots, Y_{tr_t}\} \cup \{Z_1, \ldots, Z_s\} \cup \{X_1, \ldots, X_p\}$$

é uma base ordenada de $\mathfrak{g}$. Pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (veja [27], página 270) V é gerado por monômios do tipo

$$\widetilde{\varrho}\left(Y_{11}^{m_{11}} \cdots Y_{1r_1}^{m_{1r_1}} \cdots Y_{t1}^{m_{t1}} \cdots Y_{tr_t}^{m_{tr_t}} Z_1^{n_1} \cdots Z_s^{n_s} X_1^{q_1} \cdots X_p^{q_p}\right) v.$$

Temos que $\widetilde{\varrho}\left(X_1^{q_1} \cdots X_p^{q_p}\right) v$ é múltiplo de v, já que $\varrho(\mathfrak{n}^+)v = \varrho(\mathfrak{n}^-(\Theta))v = \{0\}$ (veja [7], Capítulo IV) e $\varrho(H)v = \mu_\varrho(H)v$, para todo $H \in \mathfrak{a}$. Logo, os elementos da forma

$$\widetilde{\varrho}\left(Y_{11}^{m_{11}} \cdots Y_{1r_1}^{m_{1r_1}} \cdots Y_{t1}^{m_{t1}} \cdots Y_{tr_t}^{m_{tr_t}} Z_1^{n_1} \cdots Z_s^{n_s}\right) v$$

geram V.

2. Como $\mathfrak{m}$ centraliza $\mathfrak{a}$, segue que $\varrho(Z)v \in V_{\mu_\varrho}$ para todo $Z \in \mathfrak{m}$ e se $Y \in \mathfrak{g}_{-\beta_k}$ então $\varrho(Y)v \in V_{\mu_\varrho - \beta_k}$ (veja [7], Capítulo IV). Daí $\widetilde{\varrho}(Y^2)v \in V_{\mu_\varrho - 2\beta_k}$ e assim sucessivamente, mostrando que

$$\widetilde{\varrho}\left(Y_{11}^{m_{11}} \cdots Y_{1r_1}^{m_{1r_1}} \cdots Y_{t1}^{m_{t1}} \cdots Y_{tr_t}^{m_{tr_t}} Z_1^{n_1} \cdots Z_s^{n_s}\right) v \in V_{\mu_\varrho - (a_1\beta_1 + \cdots + a_t\beta_t)},$$

sendo $a_1, \ldots, a_t$ inteiros não negativos. Isto juntamente com o item anterior mostra que os subespaços de pesos V_μ, com $\mu = \mu_\varrho - (a_1\beta_1 + \cdots + a_t\beta_t)$ geram V.

Para cada k, β_k é uma raiz positiva e assim escreve-se como $\beta_k = \sum_{\alpha \in \Sigma} b_\alpha^k \, \alpha$, onde os b_α^k são inteiros não negativos. Além disso, o fato de β_k estar em $\Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+$ garante que alguma raiz simples $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$ tem coeficiente não nulo. □

Corolário 4.1.4 *Se μ é um peso da representação ϱ com $\mu \neq \mu_\varrho$ então $\mu(H) < \mu_\varrho(H)$, para todo $H \in \mathfrak{a}_\Theta^+$.*

Demonstração: Pela Proposição 4.1.3, item *2.*, $\mu = \mu_\varrho - \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha$, sendo que para alguma raiz simples $\alpha_0 \in \Sigma \setminus \Theta$, $n_{\alpha_0} \neq 0$. Se $H \in \mathfrak{a}_\Theta^+$ então $\sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha(H) \geq n_{\alpha_0}\alpha_0(H) > 0$, já que os n_α's são não negativos. Logo,

$$\mu(H) = \mu_\varrho(H) - \sum_{\alpha \in \Sigma} n_\alpha \alpha(H) < \mu_\varrho(H),$$

para todo $H \in \mathfrak{a}_\Theta^+$. $\square$

4.1.2 Decomposições de Jordan

Sejam V um espaço vetorial sobre os complexos e $g \in \mathrm{Gl}(V)$. Dado um autovalor z de g, denotemos por V_z o autoespaço generalizado associado a z, isto é,

$$V_z = \{v \in V \ : \ (g - z1)^k v = 0, \quad \text{para algum } k \text{ inteiro positivo}\}.$$

Dado $v \in V_z$, seja k_0 o inteiro positivo tal que $(g - z1)^{k_0} v \neq 0$ e $(g - z1)^{k_0+1} v = 0$. Assim,

$$g^n v = (g - z1 + z1)^n v = \sum_{k=0}^{k_0} z^{n-k} C_k^n (g - z1)^k v = z^n \left(\sum_{k=0}^{k_0} z^{-k} C_k^n (g - z1)^k v \right),$$

onde $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. Suponha que existem dois autovalores z_1 e z_2 de g tais que $|z_1| > |z_2|$. Seja $v = v_1 + v_2$ com $v_k \in V_{z_k}$, $k = 1, 2$ e $v_1 \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
g^n v &= z_1^n C_{k_1}^n \left(\sum_{k=0}^{k_1} z_1^{-k} \frac{C_k^n}{C_{k_1}^n} (g - z_1 1)^k v_1 \right) + z_2^n C_{k_2}^n \left(\sum_{k=0}^{k_2} z^{-k} \frac{C_k^n}{C_{k_2}^n} (g - z_2 1)^k v_2 \right) \\
&= z_1^k C_{k_1}^n \left(z_1^{-k_1} (g - z_1 1)^{k_1} v_1 + \sum_{k=0}^{k_1 - 1} z_1^{-k} \frac{C_k^n}{C_{k_1}^n} (g - z_1 1)^k v_1 \right) \\
&\quad + z_1^k C_{k_1}^n \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^n \frac{C_{k_2}^n}{C_{k_1}^n} \left(z_2^{-k_2} (g - z_2 1)^{k_2} v_2 + \sum_{k=0}^{k_2 - 1} z^{-k} \frac{C_k^n}{C_{k_2}^n} (g - z_2 1)^k v_2 \right).
\end{aligned}$$

Agora, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^n \frac{C_{k_2}^n}{C_{k_1}^n} = 0$, pois $|z_1| > |z_2|$ e, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{C_k^n}{C_r^n} = 0$, para qualquer $k < r$.

Logo, $[g^n v] \to [(g - z_1 1)^{k_1} v_1] \subset V_{z_1}$ (quando $n \to +\infty$) ($[u]$ denota o subespaço gerado por u). Notemos que $(g - z_1 1)^{k_1} v_1$ é um autovetor de g associado ao autovalor z_1. Argumentando por indução, sobre o número de autovalores distintos de g, obtemos:

Lema 4.1.5 *Sejam V um espaço vetorial complexo, $g \in \mathrm{Gl}(V)$ e $z_1, \ldots, z_r$ os autovalores distintos de g. Se existe m, $1 \leq m \leq r$, tal que $|z_m| > |z_k|$ para todo $k \neq m$, então* *a seqüência* $([g^n v])$ *converge para um subespaço* $[u] \subset V_{z_m}$ *para qualquer* $v \in V$ *tal que a sua componente em* V_{z_m} *é não nula. Além disso,* u *é autovetor de* g *associado a* z_m.

Dizemos que um elemento $g \in \mathrm{Gl}(V)$ é:

1. **elíptico** se é semi-simples e seus autovalores tem valor absoluto 1;

2. **hiperbólico** se é semi-simples e seus autovalores são reais positivos;

3. **unipotente** se $g - 1$ é nilpotente.

Existe uma base de V tal que a matriz de g, nesta base, representa-se

$$\begin{pmatrix} J_{z_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{z_r} \end{pmatrix},$$

onde cada J_{z_k} é formado por blocos de Jordan associados ao autovalor $z_k = e^{i\gamma_k} e^{s_k}$. Podemos decompor a matriz J_{z_k} na seguinte forma: $J_{z_k} = (e^{i\gamma_k} \cdot 1_k)(e^{s_k} \cdot 1_k)u$, sendo 1_k a matriz identidade de mesma ordem que J_{z_k} e u é uma matriz triangular superior com 1's na diagonal principal também de mesma ordem que J_{z_k}. Logo,

$$g = ehu, \tag{4.2}$$

sendo $e = \mathrm{diag}(e^{i\gamma_1}, \ldots, e^{i\gamma_r})$ e $h = \mathrm{diag}(e^{s_1}, \ldots, e^{s_r})$. A multiplicidade dos autovalores $e^{i\gamma_k}$ e e^{s_k} de e e h, respectivamente, é dada pela ordem de J_{z_k}.

Os fatores na decomposição (4.2) de g comutam entre si e são elíptico, hiperbólico e unipotente, respectivamente. Como podemos decompor cada $g \in \mathrm{Gl}(V)$ unicamente desta maneira (veja [8], Lema 7.1, página 430), concluímos que:

Lema 4.1.6 *O valor absoluto dos autovalores de* $g \in \mathrm{Gl}(V)$ *são dados pelos autovalores da parte hiperbólica de* g.

Dizemos que a expressão (4.2) é a decomposição de $g \in \mathrm{Gl}(V)$ nas partes elíptica, hiperbólica e unipotente.

Consideremos agora o caso de um grupo de Lie real semi-simples não compacto G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dizemos que $g \in G$ é **semi-simples, elíptico** ou **hiperbólico** se $\mathrm{Ad}(g)$ é semi-simples, elíptico ou hiperbólico, respectivamente, como elemento de $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. Dizemos que $g \in G$ é **unipotente** se existe $X \in \mathfrak{g}$ nilpotente tal que $g = \exp X$. Assim, como no caso de grupos lineares podemos decompor cada $g \in G$ unicamente como um produto

$$g = g_e g_h g_u, \tag{4.3}$$

sendo g_e elíptico, g_h hiperbólico e g_u unipotente. Além disso, g_e, g_h e g_u comutam entre si (veja [39], Capítulo 2 da parte II). Dizemos que a expressão (4.3) é a decomposição de $g \in G$ nas **partes elíptica, hiperbólica** e **unipotente**.

Lema 4.1.7 *Seja $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial complexo V.*

1. *Se $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente então $\varrho(X)$ é nilpotente.*
2. *Se $X \in \mathfrak{s}$ então todos os autovalores de $\varrho(X)$ são reais.*

Demonstração:

1. Pelo Teorema de Jacobson-Morozov (veja [42], Proposição 1.3.5.3, página 105) existem $H, Y \in \mathfrak{g}$ tais que a subálgebra $\mathfrak{g}(X)$ gerada por $\{X, H, Y\}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Consideremos a representação de $\mathfrak{g}(X)$ em V induzida por ϱ. Pelo Teorema de decomposição de Weyl, o espaço V se decompõe em uma soma direta

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

   com cada V_k invariante e irredutível por ϱ. Pela forma das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, a restrição de $\varrho(X)$ a cada V_k é nilpotente e portanto, $\varrho(X)$ é nilpotente como elemento de $\mathfrak{gl}(V)$.

2. Sejam $\varrho_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$ a extensão de ϱ a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e $\widetilde{G}$ um grupo conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Seja $\widetilde{\rho}$ um homomorfismo de $\widetilde{G}$ em $\mathrm{Gl}(V)$ tal que $d\widetilde{\rho} = \varrho_{\mathbb{C}}$. Como $X \in \mathfrak{s}$, temos que $iX \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, a complexificada de $\mathfrak{k}$, isto é, iX está

na álgebra de Lie de um subgrupo compacto de $\widetilde{G}$, digamos U. Mas $\varrho_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ é a álgebra de Lie do grupo compacto $\widetilde{\rho}(U)$. Logo, $\varrho_{\mathbb{C}}(iX)$ tem autovalores puramente imaginários e portanto, os autovalores de $\varrho(X)$ são reais. $\square$

Proposição 4.1.8 *Seja ρ uma representação de G em um espaço complexo V. Se $g = g_e g_h g_u$ é a decomposição de $g \in G$ nas partes elíptica, hiperbólica e unipotente então $\rho(g) = \rho(g_e)\rho(g_h)\rho(g_u)$ é a decomposição de $\rho(g)$ nas partes elíptica, hiperbólica e unipotente, no sentido usual.*

Demonstração: Temos que g_e pertence a um subgrupo compacto, por ser elíptico. Logo, pela continuidade da ρ, $\rho(g_e)$ pertence a um compacto e portanto é elíptico.

Como g_h é hiperbólico, existe $X \in \mathfrak{g}$ semi-simples com todos os autovalores de $\mathrm{ad}(X)$ reais tal que $g_h = \exp X$ (veja [39], página 217). Logo, existe $u \in G$ tal que $\mathrm{Ad}(u)X \in \mathfrak{s}$. Pelo Lema 4.1.7, todos os autovalores de $d\rho(\mathrm{Ad}(u)X)$ são reais. Mas $d\rho(\mathrm{Ad}(u)X) = \mathrm{Ad}(\rho(u))d\rho(X)$, garantindo que todos os autovalores de $d\rho(X)$ são reais. Logo, todos os autovalores de $\rho(g_h) = \rho(\exp X) = e^{d\rho(X)}$ são reais positivos. Portanto $\rho(g_h)$ é hiperbólico.

Por definição de elemento unipotente, podemos escrever g_u como exponencial de $Y \in \mathfrak{g}$ nilpotente. Daí, $\rho(g_u) = \rho(\exp Y) = e^{d\rho(Y)}$. Pelo Lema 4.1.7, $d\rho(Y)$ é nilpotente e portanto, $\rho(g_u)$ é unipotente.

Como g_e, g_h e g_u comutam entre si e ρ é um homomorfismo, segue que $\rho(g_e), \rho(g_h)$ e $\rho(g_u)$ comutam entre si. $\square$

4.2 Estimativas do Volume de Bolas em Grupos Lineares

Seja $G \subset \mathrm{Gl}\,(V)$, $\dim V = d$, um grupo de Lie linear semi-simples, conexo, cuja medida de Haar denotamos por μ. Tomemos uma decomposição de Cartan $G = PK$ e um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V invariante pelo compacto maximal $K \subset G$. Dado $r > 1$, definimos o conjunto

$$G_r = \{g \in G : \|g\| < r\},$$

onde $\|g\| = \sup\{\|gx\| : \|x\| = 1\}$ é a norma de operador em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos também $P_r = \{g \in P : \|g\| < r\}$. Como $\|hu\| = \|h\|$ se $u \in K$, vale a igualdade $G_r = P_r K$ (se $r \leq 1$ então $G_r = \emptyset$).

Se $g \in G_r$ e λ é um autovalor de g então $|\lambda| < r$, pois se $v \in V$ é um autovetor com $\|v\| = 1$ então $|\lambda| = \|\lambda v\| = \|gv\| \leq \|g\| < r$. Em particular, se $g \in P_r$ então todos seus autovalores são reais e menores que r.

Isso fornece um limitante superior para os autovalores. Obtemos um limitante inferior usando que $\det g = 1$, para $g \in G$, pois G é semi-simples conexo. De fato, tome $g \in P_r$ e seja $\lambda_{\min}$ seu menor autovalor. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}$ são os demais autovalores então

$$r^{d-1}\lambda_{\min} > \lambda_1 \cdots \lambda_{d-1}\lambda_{\min} = 1.$$

Daí, $\lambda_{\min} > 1/r^{d-1}$ e portanto, todos os autovalores são maiores que r^{-d+1}.

Se $g \in P_r$ com $g = \exp X$, $X \in \mathfrak{s}$, então os autovalores de X (em V) estão entre $-(d-1)\log r$ e $\log r$. Seja $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}(X)$ a adjunta de X em $\mathfrak{gl}(V)$. Os autovalores de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}(X)$ são da forma $a_i - a_j$ com a_i e a_j autovalores de X. Essas diferenças estão entre $-d\log r$ e $d\log r$.

Em particular, seja $\mathrm{ad}(X)$ a adjunta de $\mathfrak{g}$. Então, $\mathrm{ad}(X)$ é a restrição a $\mathfrak{g}$ de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}}(X)$. Daí, os autovalores de $\mathrm{ad}(X)$ em $\mathfrak{g}$ também estão entre $-d\log r$ e $d\log r$.

Em outras palavras,

Proposição 4.2.1 $P_r \subset \exp \Lambda_r$ *onde* Λ_r *é o conjunto dos elementos* $X \in \mathfrak{s}$ *tais que os autovalores de* $\mathrm{ad}(X)$ *ficam entre* $-d\log r$ *e* $d\log r$.

Observação: Se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$ tal que $\varphi(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ então φ deixa Λ_r invariante. De fato, temos que $\mathrm{ad}(\varphi(X)) = \varphi \circ \mathrm{ad}(X) \circ \varphi^{-1}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Assim, os autovalores de $\mathrm{ad}(\varphi(X))$ estão entre $-d\log r$ e $d\log r$ se os autovalores de $\mathrm{ad}(X)$ estão entre $-d\log r$ e $d\log r$. Como φ deixa $\mathfrak{s}$ invariante, segue que $\varphi(X) \in \Lambda_r$ se $X \in \Lambda_r$. $\square$

O conjunto Λ_r é poliedral da seguinte forma:

Seja $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ uma câmara de Weyl e denotemos por Σ as raízes simples e por Π^+ as raízes positivas, correspondentes. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ a decomposição de $\mathfrak{g}$ em componentes simples. Então, existem as decomposições $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m$ e $\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}_1^+ + \cdots + \mathfrak{a}_m^+$ em termos dos objetos correspondentes nas componentes simples. Denotemos por λ_i a raiz máxima em $\mathfrak{a}_i$ associada à câmara $\mathfrak{a}_i^+$.

Proposição 4.2.2 *Se* $\lambda = \max\{\lambda_i : i = 1, \ldots, m\}$ *(isto é, para* $H \in \mathfrak{a}$, $\lambda(H) = \max\{\lambda_i(H) : i = 1, \ldots, m\}$*) então* $\Lambda_r \cap \mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a}^+ : \lambda(H) < d \log r\}$.

Demonstração: Segue da definição de Λ_r, lembrando que se α é uma raiz positiva e $H \in \mathfrak{a}^+$ então $0 < \alpha(H) \leq \lambda(H)$ e se $\alpha \in -\Pi^+$ então $-\lambda(H) \leq \alpha(H) < 0$. □

Aplicando o grupo de Weyl $\mathcal{W}$ (para obter as outras câmaras), obtemos:

Proposição 4.2.3 $\Lambda_r \cap \mathfrak{a} = \mathcal{W}(\Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+))$.

Demonstração: Se $H \in \Lambda_r \cap \mathfrak{a}$ então existe um $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(H) \in \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$. Como w deixa Λ_r invariante, $w(H) \in \Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$. Logo, $H = w^{-1}(w(H)) \in \mathcal{W}(\Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+))$. A outra inclusão é imediata. □

Por fim,

Proposição 4.2.4 $\Lambda_r = \mathrm{Ad}(K)(\Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+))$.

Demonstração: Se $X \in \Lambda_r \subset \mathfrak{s}$ então existe $H \in \mathfrak{a}$ e $k \in K$ tal que $X = \mathrm{Ad}(k)H$. Pela invariância de Λ_r por $\mathrm{Ad}(k^{-1})$, segue que $H \in \Lambda_r \cap \mathfrak{a}$. Mas $H = \mathrm{Ad}(m)H_0$, para algum $m \in M^*$ e algum $H_0 \in \Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$, pela proposição anterior. Logo, $X = \mathrm{Ad}(km)H_0$, com $km \in K$ e $H_0 \in \Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$ e portanto, $\Lambda_r \subset \mathrm{Ad}(K)(\Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+))$. A outra inclusão segue da invariância de Λ_r por $\mathrm{Ad}(k)$, $k \in K$. □

Observação: O conjunto $\Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+)$ é um poliedro simplicial, enquanto que $\mathcal{W}(\Lambda_r \cap \mathrm{fe}(\mathfrak{a}^+))$ é um poliedro. □

Denotemos por dk a medida de Haar em K normalizada de tal forma que K tenha volume 1. Seja $g = pu \in G$, com $p \in P$ e $u \in K$. Dado $k \in K$ temos que $gk \in G_r$ se, e somente se, $p \in P_r$, isto é, $1_{G_r}(gk) = 1_{P_r}(p)$. Daí, $\int_K 1_{G_r}(gk)dk = 1_{P_r}(p)$. Denotemos por μ_P a única, a menos de uma constante, medida G-invariante em $P = G/K$ (conjunto de classes laterais). Assim, podemos escrever a medida de Haar em G em termos de μ_P e de dk (veja o Teorema 1.9 de Helgason [9], página 90). Explicitamente,

$$\begin{aligned} \mu(G_r) &= \int_G 1_{G_r}(g)d\mu = \int_{G/K} \left(\int_K 1_{G_r}(gk)dk \right) d\mu_P \\ &= \int_{G/K} 1_{P_r}(p)d\mu_P = \mu_P(P_r). \end{aligned}$$

Além disso, $\mu_P(P_r) \leq \mu_P(\exp \Lambda_r)$ pois $P_r \subset \exp \Lambda_r$.

Por fim, $\mu_P(\exp \Lambda_r)$ pode ser estimado usando a fórmula da seguinte proposição (veja Teorema 5.8, página 186 de [9]):

Proposição 4.2.5 *Existe uma constante c tal que*

$$\int_{G/K} f(x)\, d\mu_P(x) = c \int_{K/M} \left(\int_{\exp \mathfrak{a}^+} f(ka \cdot x_0)\, \delta(a)\, da \right) dk_M,$$

onde x_0 é a origem de K/M, dk_M é a medida K-invariante em K/M de forma que K/M tenha volume 1 e

$$\delta(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Pi^+} (\operatorname{senh}(\alpha(H)))^{m_\alpha},$$

sendo m_α a multiplicidade da raiz α.

Um elemento $x \in \exp \Lambda_r$ identifica-se a uma classe lateral em G/K, isto é, existe $X \in \Lambda_r$ tal que $x = (\exp X)K$. Dado $k \in K$, temos que

$$k \cdot x = \left(k(\exp X)k^{-1} \right) K = (\exp(\mathrm{Ad}(k)X))\, K.$$

Pela invariância de Λ_r por $\mathrm{Ad}(k)$, segue que $\mathrm{Ad}(k)X \in \Lambda_r$, mostrando que $k \cdot x \in \exp \Lambda_r$. Logo, $1_{\exp \Lambda_r}(k \cdot x) = 1_{\exp \Lambda_r}(x)$, para todo $k \in K$. Portanto, usando a fórmula da

Proposição 4.2.5,

$$\begin{aligned}
\mu_P(\exp\Lambda_r) &= \int_{G/K} 1_{\exp\Lambda_r}(x)d\mu_P(x) \\
&= c\int_{K/M}\left(\int_{\exp\mathfrak{a}^+} 1_{\exp\Lambda_r}(ka\cdot x_0)\delta(a)da\right)dk_M \\
&= c\int_{K/M}\left(\int_{\exp\mathfrak{a}^+} 1_{\exp\Lambda_r}(a\cdot x_0)\delta(a)da\right)dk_M \\
&= c\int_{\exp\mathfrak{a}^+} 1_{\exp\Lambda_r}(a\cdot x_0)\delta(a)da \\
&= c\int_{\exp\Lambda_r\cap\exp\mathfrak{a}^+} \delta(a)da \\
&= c\int_{\exp(\Lambda_r\cap\mathfrak{a}^+)} \delta(a)da.
\end{aligned}$$

A última igualdade na equação acima segue do fato que $\exp:\mathfrak{s}\to P$ é injetora. Para cada $\alpha\in\Pi^+$ e $H\in\Lambda_r\cap\mathfrak{a}^+$, temos que $0<\alpha(H)\leq\lambda(H)<d\log r$ (veja a Proposição 4.2.2). Logo, para todo $H\in\Lambda_r\cap\mathfrak{a}^+$, temos

$$\delta(\exp H)=\prod_{\alpha\in\Pi^+}(\operatorname{senh}(\alpha(H)))^{m_\alpha}<(\operatorname{senh}(d\log r))^N,$$

onde $N=\dim\mathfrak{n}^+$. Com isso chegamos à seguinte estimativa do volume de G_r:

Teorema 4.2.6 *Existe uma constante c tal que $\mu(G_r)\leq c(\operatorname{senh}(d\log r))^N$, onde $N=\dim\mathfrak{n}^+$. Ou ainda, $\mu(G_r)\leq\frac{c}{2^N}\left(r^d-r^{-d}\right)^N$.*

4.2.1 Estimativa do Volume de $M_S(\overline{n},a,n)$

Sejam G um grupo com centro finito e $S\subset G$ um semigrupo próprio com $\operatorname{int}S\neq\emptyset$ e tipo parabólico Θ. Seja $G=KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G tal que $A^+\cap\operatorname{int}S\neq\emptyset$. Neste caso, o c.c.i. $D_\Theta(1)\subset\mathbb{F}_\Theta$ está contido na órbita $N^-_\Theta\cdot x_0$, onde x_0 é a origem de $\mathbb{F}_\Theta$. Vamos obter aqui uma estimativa para o volume de

$$M_S(\overline{n},a,n)=\{m\in M_\Theta:\overline{n}amn\in S\},$$

onde $\overline{n}\in N^-_\Theta$, $a\in A_\Theta$ e $n\in N^+_\Theta$, utilizando o que foi feito no início desta seção e considerando a representação $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}^-_\Theta}:M_\Theta\to\mathrm{Gl}(\mathfrak{n}^-_\Theta)$ de M_Θ em $\mathfrak{n}^-_\Theta$, induzida pela representação adjunta de G.

A fórmula integral da Proposição 4.2.5 não se aplica diretamente ao grupo M_Θ, já que tal grupo não é conexo e nem semi-simples. Mas sua decomposição de Cartan escreve-se $M_\Theta = M_\Theta(K)\exp(\mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{s})$ (Proposição 1.2.1), onde $M_\Theta(K)$ é um subgrupo compacto (não conexo) de K. Se $P = MAN^+$ é um subgrupo parabólico minimal de G, então $M_\Theta \cap P$ é um subgrupo parabólico minimal de M_Θ. Além disso, se $M_\Theta \cap P = \widetilde{M}\widetilde{A}\widetilde{N}$ é uma decomposição de Langlands de $M_\Theta \cap P$ então $\widetilde{M} = M$ (veja [39], Proposição 20, Capítulo 6, parte II). Denotando por $\mathfrak{a}'(\Theta)$ o conjunto dos elementos regulares de $\mathfrak{a}(\Theta)$, $A'(\Theta) = \exp(\mathfrak{a}'(\Theta))$, $M'_\Theta = M_\Theta(K)A'(\Theta)M_\Theta(K)$ e por z_0, a origem do espaço simétrico $M_\Theta/M_\Theta(K)$, temos que a aplicação

$$\Phi : (M_\Theta(K)/M) \times A^+(\Theta) \to M'_\Theta \cdot z_0$$

dada por $\Phi(kM, a) = ka \cdot z_0$ é um difeomorfismo. A partir daí, é possível mostrar que a fórmula integral da Proposição 4.2.5 vale para o grupo M_Θ. Conseqüentemente, tal fórmula vale para o grupo linear $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(M_\Theta)$.

A partir de agora, tudo será feito em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ usando a identificação entre a órbita $N_\Theta^- \cdot x_0$, o subgrupo N_Θ^- e a subálgebra $\mathfrak{n}_\Theta^-$. Em particular, se $n \in N_\Theta^+$ é tal que $n \cdot D_\Theta(1) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$ então os conjuntos $D_\Theta(1)$ e $n \cdot D_\Theta(1)$ estão contidos em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ e a origem x_0 identifica-se a 0. Notemos que nessa identificação um elemento $n \in N_\Theta^+$ não define uma aplicação $N_\Theta^- \cdot x_0 \to N_\Theta^- \cdot x_0$, mas apenas uma aplicação definida em um conjunto aberto e denso de $N_\Theta^- \cdot x_0$, restrição da aplicação definida no *flag* (veja a proposição abaixo). Mesmo assim, tal aplicação será usada abaixo e deve ser entendida como uma aplicação definida em um subconjunto aberto e denso de $\mathfrak{n}_\Theta^-$ (homeomorfismo local).

Se g está em M_Θ ou em N_Θ^+ ou em A_Θ e $X \in \mathfrak{n}_\Theta^-$ então denotemos $\mathrm{Ad}(g)X$ simplesmente por $g \cdot X$. Da mesma forma, usemos a notação $\|g\|$ para $\left\|\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(g)\right\|$ se g é um elemento de M_Θ ou A_Θ.

Proposição 4.2.7 *Se $n \in N_\Theta^+$ então existe um subconjunto U aberto e denso em $N_\Theta^- \cdot x_0$ tal que $n \cdot U \subset N_\Theta^- \cdot x_0$.*

Demonstração: Cada $n \in N_\Theta^+$ é um homeomorfismo do *flag* $\mathbb{F}_\Theta$. Como $N_\Theta^- \cdot x_0$ é aberto e denso em $\mathbb{F}_\Theta$, segue que $U = n^{-1} \cdot (N_\Theta^- \cdot x_0) \cap N_\Theta^- \cdot x_0$ é aberto e denso em $N_\Theta^- \cdot x_0$.

Além disso, $n \cdot U \subset N_\Theta^- \cdot x_0$. □

Um produto interno invariante em $\mathfrak{n}_\Theta^-$ é a restrição do produto interno em $\mathfrak{g}$, que é K-invariante.

Lema 4.2.8 *Dado $n \in N_\Theta^+$ tal que $n \cdot D_\Theta(1) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$, existem $\delta > 0$ e uma vizinhança U de n em N_Θ^+ tal que, para todo $v \in U$, a bola fechada $B[0,\delta]$ está contida em $v \cdot D_\Theta(1)$.*

Demonstração: Como n é um homeomorfismo do *flag*, segue que $W = n \cdot D_\Theta^0(1)$ é aberto. Mas, $n \cdot x_0 = x_0 \in D_\Theta^0(1)$ e portanto, W é uma vizinhança de x_0. Portanto, existe um $\delta > 0$ tal que a bola fechada $B[0,\delta]$ está contida em $W = n \cdot D_\Theta^0(1)$. Isto significa que $n^{-1} \cdot B[0,\delta] \subset D_\Theta^0(1)$, isto é, n^{-1} está no subconjunto aberto (na topologia compacto-aberto) $\mathcal{F} = \{f : f(B[0,\delta]) \subset D_\Theta^0(1)\}$ das aplicações contínuas de $\mathbb{F}_\Theta$.

Por outro lado, a aplicação, digamos φ, definida de N_Θ^+ no conjunto dos homeomorfismos locais de $\mathfrak{n}_\Theta^-$ é contínua em relação à topologia compacto-aberta. Logo existe uma vizinhança V de n^{-1} em N_Θ^+ tal que $\varphi(V) \subset \mathcal{F}$. Portanto, $U = V^{-1}$ é a vizinhança desejada. □

Lema 4.2.9 *Seja $C \subset N_\Theta^+$ um compacto tal que para todo $n \in C$, $n \cdot D_\Theta(1) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \in C$, $B[0,\delta] \subset n \cdot D_\Theta(1)$.*

Demonstração: Para cada $n \in C$ existem, pelo lema anterior, um $\delta(n) > 0$ e uma vizinhança $U(n)$ de n tal que $B[0,\delta(n)] \subset v \cdot D_\Theta(1)$, para todo $v \in U(n)$. A união $\bigcup_{n\in C} U(n)$ cobre C e como C é compacto, existe um número finito, digamos $n_1, \ldots, n_k$, tal que $\bigcup_{j=1}^{k} U(n_j)$ cobre C. Seja $\delta = \min\{\delta(n_j), j = 1, \ldots, k\}$. Assim se $n \in C$ temos que $n \in U(n_j)$ para algum j e portanto, $B[0,\delta] \subset B[0,\delta(n_j)] \subset n \cdot D_\Theta(1)$. □

Agora, se $m \in M_S(\overline{n}, a, n)$ então $m \cdot nD_\Theta(1) \subset a^{-1}\overline{n}^{-1}D_\Theta(1)$, já que $\overline{n}amn \in S$. Pelo Lema 4.2.9, existe $\delta > 0$, independente de n, tal que $B[0,\delta] \subset n \cdot D_\Theta(1)$. Daí, $m \cdot B[0,\delta] \subset m \cdot nD_\Theta(1) \subset a^{-1}\overline{n}^{-1}D_\Theta(1)$.

Porém, todo $\overline{n}$ que aparece nessas expressões estão em $D_\Theta(1)$ (veja a demonstração do Lema 4.6.1). Portanto, $\overline{n}^{-1}D_\Theta(1) \subset D_\Theta(1)^{-1} D_\Theta(1)$ (onde $D_\Theta(1)^{-1} D_\Theta(1)$ significa o produto em N_Θ^-). Mas, $D_\Theta(1)^{-1} D_\Theta(1)$ é compacto. Daí, existe uma bola aberta $B(0,r)$ tal que $D_\Theta(1)^{-1} D_\Theta(1) \subset B(0,r)$, isto é, $\overline{n}^{-1}D_\Theta(1) \subset B(0,r)$ para todos os possíveis $\overline{n}$. Juntando isso com o que foi feito anteriormente obtemos:

Lema 4.2.10 *Existem δ, $r > 0$ (independentes de $\overline{n}$, a e n) tais que, para todo $m \in M_S(\overline{n}, a, n)$, vale*

$$m \cdot B[0,\delta] \subset a^{-1}B(0,r).$$

Agora, a^{-1} age por transformação linear em $\mathfrak{n}_\Theta^-$, através da adjunta $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$. Se $\|a^{-1}\|$ é a norma de operador então, por definição dessa norma, $a^{-1}B(0,1) \subset B(0, \|a^{-1}\|)$, acarretando que $a^{-1}B(0,r) \subset B(0, \|a^{-1}\| r)$. Portanto, $m \cdot B[0,\delta] \subset a^{-1}B(0,r) \subset B(0, \|a^{-1}\| r)$, fornecendo a seguinte limitação das normas de operadores para os elementos $m \in M_S(\overline{n}, a, n)$:

Proposição 4.2.11 *Existe uma constante $c > 0$ (independente de $\overline{n}$, a e n) tal que, para todo $m \in M_S(\overline{n}, a, n)$, vale*

$$\|m\| < c\left\|a^{-1}\right\|.$$

Demonstração: Para cada $m \in M_S(\overline{n}, a, n)$, temos

$$m \cdot B[0,1] = \frac{1}{\delta} m \cdot B[0,\delta] \subset \frac{1}{\delta} B\left(0, \left\|a^{-1}\right\| r\right) = B\left(0, \left\|a^{-1}\right\| c\right),$$

onde $c = \dfrac{r}{\delta}$. Logo, $\|m\| < c\,\|a^{-1}\|$. □

O grupo linear $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(M_\Theta)$ se identifica ao grupo $M_\Theta / \ker\left(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\right)$. O subgrupo $\ker\left(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\right) \subset M_\Theta(K)$ é compacto, pois é fechado em $M_\Theta(K)$. Assim, usando novamente o Teorema 1.9 de [9] (página 90) (aplicando ao subgrupo $\ker\left(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\right)$), concluímos que o volume de $M_S(\overline{n}, a, n)$ é menor ou igual que o volume de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(M_S(\overline{n}, a, n))$. De fato, se $T \subset M_\Theta$ temos que $1_T(g) \leq 1_{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(T)}(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(g))$. Assim, denotando a medida de Haar em $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}(M_\Theta)$ por $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{K} = \ker\left(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}\right)$ e $\mathrm{Ad} = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_\Theta^-}$ (para simplificarmos a notação) obtemos

$$\begin{aligned}\eta(M_S(\overline{n},a,n)) &= \int_{M_\Theta} 1_{M_S(\overline{n},a,n)}(g)d\eta = \int_{M_\Theta/\widetilde{K}}\left(\int_{\widetilde{K}} 1_{M_S(\overline{n},a,n)}(gk)dk\right)d\widetilde{\eta} \\ &\leq \int_{M_\Theta/\widetilde{K}} 1_{\mathrm{Ad}(M_S(\overline{n},a,n))}(\mathrm{Ad}(g))d\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}(\mathrm{Ad}(M_S(\overline{n},a,n))).\end{aligned}$$

Juntando isso com o Teorema 4.2.6 obtemos uma estimativa do volume de $M_S(\overline{n},a,n) \subset M_\Theta$:

Teorema 4.2.12 *Seja η a medida de Haar de M_Θ. Então, existem constantes $c,k>0$ (independentes de $\overline{n}$, a e n) tais que*

$$\eta\left(M_S\left(\overline{n},a,n\right)\right) \leq k\left(\operatorname{senh}\left(d\log c\left\|a^{-1}\right\|\right)\right)^N$$

onde $d = \dim \mathfrak{n}_\Theta^-$ e $N = 1/2\left(\dim M_\Theta - \mathrm{posto} M_\Theta\right)$ $(= \dim \mathfrak{n}(\Theta))$. Ou ainda,

$$\eta\left(M_S\left(\overline{n},a,n\right)\right) \leq \frac{k}{2^N}\left(\left(c\left\|a^{-1}\right\|\right)^d - \left(c\left\|a^{-1}\right\|\right)^{-d}\right)^N.$$

Uma conseqüência imediata deste teorema é o seguinte:

Corolário 4.2.13 *Se $\overline{n}$, a e n são fixados então o conjunto $M_S(\overline{n},a,n)$ é relativamente compacto.*

Pela Proposição 4.2.11, temos que $c\|a^{-1}\| > 1$ (pois se $c\|a^{-1}\| \leq 1$ então $M_S(\overline{n},a,n) = \emptyset$, pelo comentário no final do primeiro parágrafo desta seção). Logo, $d\log c\|a^{-1}\| > 0$ e portanto, $\left(\operatorname{senh}\left(d\log c\|a^{-1}\|\right)\right)^N < e^{dN\log c\left\|a^{-1}\right\|}$.

Finalmente, observemos que a^{-1} é uma transformação linear simétrica de $\mathfrak{n}_\Theta^-$, em relação ao produto interno invariante. Portanto, $\|a^{-1}\|$ é o maior autovalor de a^{-1}. Isto é, $\|a^{-1}\| = e^{\alpha(\log a)}$ para alguma raiz $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+$. Daí, temos o seguinte:

Corolário 4.2.14 *Existem uma constante $c>0$ (independente de $\overline{n}$, a e n) e uma raiz $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+$ (que só depende de a) tais que*

$$\eta\left(M_S\left(\overline{n},a,n\right)\right) \leq ce^{dN\alpha(\log a)},$$

onde $d = \dim \mathfrak{n}_\Theta^-$ e $N = 1/2\left(\dim M_\Theta - \mathrm{posto} M_\Theta\right)$ $(= \dim \mathfrak{n}(\Theta))$.

4.3 Semigrupo Θ-Maximal Contendo S

Sejam $S \subset G$ um semigrupo com tipo parabólico Θ e $G = KAN^{+}$ uma decomposição de Iwasawa de G tal que $A^{+} \cap (\text{int}S) \neq \emptyset$. Denotemos por $D_{\Theta}(w)$, $w \in \mathcal{W}$, os conjuntos controláveis de S em $\mathbb{F}_{\Theta}$ e $D_{\Theta}^{0}(w)$ o conjunto de transitividade de $D_{\Theta}(w)$. Seja x_0 a origem de $\mathbb{F}_{\Theta}$. Então $x_0 \in D_{\Theta}^{0}(1)$.

Para cada $w \in \mathcal{W}$, seja $\mathcal{A}_{\Theta}(w)$ o domínio de atração de $D_{\Theta}(w)$. Por definição, cada $\mathcal{A}_{\Theta}(w)$ coincide com o conjunto dos $x \in \mathbb{F}_{\Theta}$ tais que existe $g \in S$ com $g \cdot x \in D_{\Theta}(w)$. Assim

$$\mathcal{A}_{\Theta}(w) = \{x \in \mathbb{F}_{\Theta} : \text{ existe } g \in \text{int}S,\ g \cdot x \in D_{\Theta}^{0}(w)\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{A}_{\Theta}(w)$ são abertos e $\text{fe}\left(N_{\Theta}^{-} w \cdot x_0\right) \subset \mathcal{A}_{\Theta}(w)$, para todo $w \in \mathcal{W}$ (veja San Martin [31]).

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{D}_{\Theta}(S) = \text{fe}\left(\text{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_{\Theta}(w)\right)^{c}\right)$$

com a união percorrendo os $w \in \mathcal{W}$ tais que $D_{\Theta}(w) \neq D_{\Theta}(1)$.

Lema 4.3.1 *O conjunto $\mathcal{D}_{\Theta}(S)$ é S-invariante.*

Demonstração: Cada $\mathcal{A}_{\Theta}(w)$ é S^{-1}-invariante, assim, o complementar $\mathcal{A}_{\Theta}(w)^{c}$ é S-invariante e portanto, $\left(\bigcup \mathcal{A}_{\Theta}(w)\right)^{c} = \bigcap \mathcal{A}_{\Theta}(w)^{c}$ é S-invariante. Sejam $x \in \mathcal{D}_{\Theta}(S)$ e $g \in S$. Então $x = \lim x_k$, com $x_k \in \text{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_{\Theta}(w)\right)^{c}$. Como g é um homeomorfismo segue que $g \cdot x_k \in \text{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_{\Theta}(w)\right)^{c}$, para todo k. Por outro lado, $g \cdot x = g \cdot \lim x_k = \lim g \cdot x_k$ e portanto, $g \cdot x \in \mathcal{D}_{\Theta}(S)$. □

Denotemos por $\mathcal{M}_{\Theta}(S)$ o semigrupo de compressão de $\mathcal{D}_{\Theta}(S)$, isto é,

$$\mathcal{M}_{\Theta}(S) = \text{comp}\left(\mathcal{D}_{\Theta}(S)\right) = \{g \in G : g \cdot \mathcal{D}_{\Theta}(S) \subset \mathcal{D}_{\Theta}(S)\}.$$

Teorema 4.3.2 *O conjunto $\mathcal{D}_{\Theta}(S)$ é o conjunto controlável invariante do semigrupo $\mathcal{M}_{\Theta}(S)$. Além disso, $\mathcal{M}_{\Theta}(S)$ contém S, é Θ-maximal e*

$$\mathcal{D}_{\Theta}(S) = \text{fe}\left(\text{int}\left(\text{co}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{D}_{\Theta}(S)\right)\right)\right).$$

Demonstração: Como $\mathcal{D}_\Theta(S)$ é S-invariante segue que $S \subset \mathcal{M}_\Theta(S)$. Juntando a compacidade e a S-invariância de $\mathcal{D}_\Theta(S)$ com a unicidade do conjunto controlável invariante temos que $D_\Theta(1) \subset \mathcal{D}_\Theta(S)$.

A igualdade $\mathcal{D}_\Theta(S) = \mathrm{fe}(\mathrm{int}(\mathrm{co}_\mathcal{B}(\mathcal{D}_\Theta(S))))$ segue mostrando que $\mathcal{D}_\Theta(S)$ é o c.c.i. de $\mathcal{M}_\Theta(S)$, $\mathcal{M}_\Theta(S)$ é Θ-maximal e usando a Proposição 5.2 de [28].

Seja C o conjunto controlável invariante de $\mathcal{M}_\Theta(S)$ em $\mathbb{F}_\Theta$. Usando o argumento do parágrafo anterior temos que $C \subset \mathcal{D}_\Theta(S)$.

Como $N_\Theta^- \cdot wx_0 \subset \mathcal{A}_\Theta(w)$, para todo $w \in \mathcal{W}$, temos que $\bigcap \mathcal{A}_\Theta(w)^c \subset N_\Theta^- \cdot x_0$. Portanto, $\mathcal{D}_\Theta(S) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$.

Seja $x \in \mathrm{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_\Theta(w)\right)^c \subset N_\Theta^- \cdot x_0$. Então, $x = n \cdot x_0$ com $n \in N_\Theta^-$. Sejam $h \in A^+ \cap (\mathrm{int}\, S)$ e $h_1 = nhn^{-1}$. O ponto fixo atrator de h_1 é $x = n \cdot x_0$ e a variedade estável correspondente é $n\left(N_\Theta^- \cdot x_0\right) = N_\Theta^- \cdot x_0$. Seja U uma vizinhança de x tal que $U \subset \mathrm{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_\Theta(w)\right)^c \subset \mathcal{D}_\Theta(S)$. Dado $y \in \mathcal{D}_\Theta(S)$, existe $k(y) > 0$ tal que $h_1^{k(y)} \cdot y \in U$. Por continuidade, existe uma vizinhança $U(y) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$ de y tal que $h_1^{k(y)} \cdot U(y) \subset U$. A união $\bigcup U(y)$, com y variando em $\mathcal{D}_\Theta(S)$, é uma cobertura por abertos de $\mathcal{D}_\Theta(S)$. Como $\mathcal{D}_\Theta(S)$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\bigcup_{i=1}^{m} U(y_i)$. Tomemos k o seguinte inteiro positivo: $k = \max\{k(y_i) : 1 \leq i \leq m\}$. Daí, $h_1^k \cdot U(y_i) \subset U$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Portanto, $h_1^k \cdot \mathcal{D}_\Theta(S) \subset U$.

O subconjunto $\mathcal{F} = \{f : f(\mathcal{D}_\Theta(S)) \subset U\}$ das aplicações contínuas em $\mathbb{F}_\Theta$, é aberto na topologia compacto-aberto e, $h_2 = h_1^k \in \mathcal{F} \subset \mathcal{M}_\Theta(S)$, implicando que $h_2 \in \mathrm{int}\mathcal{M}_\Theta(S)$. Como x é o ponto fixo atrator de h_2, concluímos que $x \in C_0$. Logo, $\mathrm{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_\Theta(w)\right)^c \subset C_0$ (pois x é arbitrário) e portanto, $\mathcal{D}_\Theta(S) \subset C$ mostrando que, de fato, $\mathcal{D}_\Theta(S)$ é o conjunto controlável invariante de $\mathcal{M}_\Theta(S)$.

Falta mostrarmos que $\mathcal{M}_\Theta(S)$ é Θ-maximal. Primeiramente, mostraremos que $\mathcal{M}_\Theta(S)$ é do tipo parabólico Θ. Sejam $\widetilde{C}$ o c.c.i. de $\mathcal{M}_\Theta(S)$ no *flag* maximal e π_Θ a projeção canônica de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}_\Theta$. Tomemos $y \in D_\Theta(1) \subset \mathcal{D}_\Theta(S)$. Como o tipo parabólico de S é Θ, temos que $\pi_\Theta^{-1}(\{y\}) \subset \pi_\Theta^{-1}(D_\Theta(1)) = D(1) \subset \widetilde{C}$. Daí, $\widetilde{C} = \pi_\Theta^{-1}(\mathcal{D}_\Theta(S))$ (veja a Proposição 2.7 c) de [36]). Juntando isto com o fato que $\mathcal{D}_\Theta(S) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$, segue que o tipo parabólico de $\mathcal{M}_\Theta(S)$ é Θ.

Para vermos que $\mathcal{M}_\Theta(S)$ é Θ-maximal, seja T um semigrupo que contém $\mathcal{M}_\Theta(S)$

propriamente e denote por C' o seu c.c.i. em $\mathbb{F}_\Theta$. Temos que $\mathcal{D}_\Theta(S) \subset C'$. Além disso, existem $y \in \mathcal{D}_\Theta(S)$ e $g \in T$ tais que $g \cdot y \in \mathcal{D}_\Theta(S)^c$, pois $\mathcal{M}_\Theta(S)$ é o semigrupo de compressão de $\mathcal{D}_\Theta(S)$. Como $\mathcal{D}_\Theta(S)^c$ é aberto, existe uma vizinhança V de $g \cdot y$ tal que $V \subset \mathcal{D}_\Theta(S)^c$. Considerando $U = \operatorname{int}((g^{-1} \cdot V) \cap \mathcal{D}_\Theta(S)) \subset \mathcal{D}_\Theta(S)$ ($U \neq \emptyset$ pois $\mathcal{D}_\Theta(S) = \operatorname{fe}(\operatorname{int} \mathcal{D}_\Theta(S))$), temos que $g \cdot U \subset \mathcal{D}_\Theta(S)^c$.

Notemos que $g \cdot U$ é aberto (pois g é um homeomorfismo). Assim, se $g \cdot U \subset (\bigcup \mathcal{A}_\Theta(w))^c$ então

$$g \cdot U \cap \operatorname{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_\Theta(w)\right)^c \neq \emptyset,$$

contradizendo o fato que $g \cdot U \cap \mathcal{D}_\Theta(S) = \emptyset$. Logo, existem $w \in \mathcal{W}$, com $D_\Theta(w) \neq D_\Theta(1)$ e $x \in U$ tais que $g \cdot x \in \mathcal{A}_\Theta(w)$, isto é, existe $h \in S$ tal que $hg \cdot x \in D_\Theta(w)$. Mas $x \in U \subset \mathcal{D}_\Theta(S) \subset C'$ e $hg \in T$ pois $S \subset \mathcal{M}_\Theta(S) \subset T$. Logo, $hg \cdot y \in C'$. Daí, concluímos que $D_\Theta(w) \cap C' \neq \emptyset$ e portanto $D_\Theta(w) \subset C'$. Como $A^+ \cap (\operatorname{int} S) \neq \emptyset$ temos que $\widetilde{w}x_0 \in D_\Theta(w)$. Logo $N_\Theta^- \cdot x_0$ não contém C' e portanto T não pode ser do tipo Θ. □

Corolário 4.3.3 *Se S é Θ-maximal então*

$$D_\Theta(1) = \mathcal{D}_\Theta(S) = \operatorname{fe}\left(\operatorname{int}\left(\bigcup \mathcal{A}_\Theta(w)\right)^c\right)$$

com a união sobre $w \in \mathcal{W}$, tais que $D_\Theta(w) \neq D_\Theta(1)$.

Demonstração: O fato que S é Θ-maximal implica que $S = \mathcal{M}_\Theta(S)$, pois, em geral, $S \subset \mathcal{M}_\Theta(S)$. Portanto, seu c.c.i. coincide com $\mathcal{D}_\Theta(S)$. □

4.4 Cociclos K-Invariantes

No caso de semigrupos em um grupo semi-simples G não compacto tomamos como integrandos, na definição da função característica, a classe dos cociclos (ou multiplicadores) reais K-invariantes (onde K é um subgrupo compacto maximal) sobre os *flags* de G.

Definição 4.4.1 *Sejam G um grupo e $G \times X \to X$ uma ação de G em X. Um **cociclo** sobre X a valores em um grupo N é uma aplicação $\chi : G \times X \to N$ que satisfaz*

$$\chi(gh, x) = \chi(g, h \cdot x)\, \chi(h, x).$$

*Dado um subgrupo $P \subset G$, dizemos que o cociclo χ é **invariante** por P (ou P-**invariante**) se $\chi(p, x) = 1$, para todo $p \in P$ e para todo $x \in X$.*

Exemplo: Consideremos o grupo $G = \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ e sua ação canônica no espaço $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. A função $\widetilde{\chi} : G \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{\chi}(g, v) = \frac{\|gv\|}{\|v\|},$$

define um cociclo sobre $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma canônica. Para cada $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$, temos

$$\widetilde{\chi}(g, cv) = \frac{\|g(cv)\|}{\|cv\|} = \frac{\|gv\|}{\|v\|} = \widetilde{\chi}(g, v).$$

Assim, considerando a ação de G no **espaço projetivo** $\mathbb{P}^{d-1}$ dada por $g \cdot [v] = [gv]$ ($[v]$ é o subespaço de $\mathbb{R}^d$ gerado por v), temos que a função $\chi : G \times \mathbb{P}^{d-1} \to \mathbb{R}^+$ definida por $\chi(g, [v]) = \widetilde{\chi}(g, v)$ é um cociclo em $\mathbb{P}^{d-1}$. O subgrupo $\mathrm{SO}(d)$ das matrizes ortogonais de determinante 1 deixa a norma invariante e, portanto, os cociclos $\widetilde{\chi}$ e χ são invariantes por $\mathrm{SO}(d)$. $\square$

Exemplo: De um modo mais geral, sejam G um grupo de Lie e ρ uma representação de G em um espaço vetorial de dimensão finita V. A representação ρ induz uma ação de G no **espaço projetivo** $\mathbb{P}(V)$ dada por $g \cdot [v] = [\rho(g)v]$, onde $[v] \subset V$ denota o subespaço de V gerado por v. Se K é um subgrupo compacto de G e $\| \cdot \|$ é uma norma, em V, invariante por K então a função $\chi : G \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\chi(g, [v]) = \frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|},$$

é um cociclo K-invariante sobre $\mathbb{P}(V)$. $\square$

Proposição 4.4.2 *Seja $\chi : G \times X \to N$ um cociclo. Dado $x_0 \in X$, seja G_{x_0} seu grupo de isotropia. Então, $p \in G_{x_0} \mapsto \chi(p, x_0) \in N$ é um homomorfismo.*

Demonstração: Imediato, a partir da definição de cociclo. □

Denotemos por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Fixemos um subgrupo compacto maximal $K \subset G$. Sejam $G = KQ$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ decomposições de Cartan de G e de $\mathfrak{g}$, respectivamente, sendo que $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ correspondem a K e a Q, respectivamente. Denotemos por θ a involução de Cartan associada. Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ um subespaço abeliano maximal. Escolhendo uma câmara de Weyl positiva $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$, denotemos por $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ e $G = KAN^+$ as decomposições de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ e G, respectivamente, associadas a $\mathfrak{a}^+$.

Dado $g \in G$, denotemos por $H(g)$ o valor em g da composição do logaritmo $\log : A \to \mathfrak{a}$ com a projeção $KAN^+ \to A$, isto é, se $g = kan \in KAN^+$ então $H(g) = \log a \in \mathfrak{a}$.

Lema 4.4.3 *Se $g, h \in G$ e $h = kan \in KAN^+$ então $H(gh) = H(gk) + H(h)$.*

Demonstração: Se $gk = k'a'n' \in KAN^+$ então $gh = g(kan) = (gk)an = (k'a'n')an = k'(a'a)\,(a^{-1}n'an) \in KAN^+$. Logo, $H(gh) = \log(a'a) = \log a' + \log a = H(gk) + H(h)$. □

Denotemos por M o centralizador de A em K.

Lema 4.4.4 *Se u_1, $u_2 \in K$ e $u_1^{-1}u_2 \in M$ então $H(gu_1) = H(gu_2)$, para todo $g \in G$.*

Demonstração: Seja $g \in G$. Escrevendo $gu_1 = kan \in KAN^+$, temos

$$gu_2 = gu_1(u_1^{-1}u_2) = kan(u_1^{-1}u_2) = (ku_1^{-1}u_2)a\left(u_2^{-1}u_1nu_1^{-1}u_2\right) \in KAN^+.$$

Logo, $H(gu_2) = \log a = H(gu_1)$. □

Proposição 4.4.5 *Dado $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, a função $\chi_\lambda : G \times \mathbb{F} \to \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\chi_\lambda(g, x) = e^{\lambda(H(gu))}, \tag{4.4}$$

é um cociclo K-invariante sobre $\mathbb{F}$, onde x_0 denota a origem do flag maximal $\mathbb{F}$, correspondente a $P = MAN^+$ e $u \in K$ é tal que $x = u \cdot x_0$.

Demonstração: Notemos que χ_λ está definida em todo $\mathbb{F}$, já que K é transitivo em $\mathbb{F}$. Se u_1, $u_2 \in K$ são tais que $u_1 \cdot x_0 = u_2 \cdot x_0$ então $u_1^{-1}u_2 \in M$ e, do Lema 4.4.4, $\chi_\lambda(g, u_1 \cdot x_0) = \chi_\lambda(g, u_2 \cdot x_0)$, para todo $g \in G$, mostrando que χ_λ está bem definida. Além disso, se $g \in K$ então $gu \in K$. Logo, sua A-componente é 1, isto é, χ_λ é K-invariante.

Para mostrar que χ_λ é um cociclo, sejam $g, h \in G$ com $h = kan \in KAN^+$. Assim, $h \cdot x_0 = k \cdot x_0$. Pelo Lema 4.4.3,

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(gh, x_0) &= e^{\lambda(H(gh))} = e^{\lambda(H(gk)+H(h))} = e^{\lambda(H(gk))}e^{\lambda(H(h))} \\ &= \chi_\lambda(g, h \cdot x_0)\ \chi_\lambda(h, x_0). \end{aligned}$$

Agora, para $x \in \mathbb{F}$ e $u \in K$ tal que $x = u \cdot x_0$ temos por K-invariância,

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(gh, x) &= \chi_\lambda(gh, u \cdot x_0) = \chi_\lambda(ghu, x_0)\ \chi_\lambda(u, x_0)^{-1} \\ &= \chi_\lambda(g, hu \cdot x_0)\ \chi_\lambda(hu, x_0) = \chi_\lambda(g, h \cdot x)\ \chi_\lambda(h, u \cdot x_0)\ \chi_\lambda(u, x_0) \\ &= \chi_\lambda(g, h \cdot x)\ \chi_\lambda(h, x), \end{aligned}$$

mostrando que χ_λ é, de fato, um cociclo K-invariante. □

4.4.1 Descrição dos Cociclos como Exponenciais

Nesta seção, mostramos que todos os cociclos $\chi : G \times \mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{R}^+$ K-invariantes sobre o *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ são dados pela fórmula (4.4).

Lema 4.4.6 *Dados Θ_1 e Θ_2 com $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$, sejam $\chi : G \times \mathbb{F}_{\Theta_2} \to \mathbb{R}^+$ um cociclo K-invariante e x_0 a origem de $\mathbb{F}_{\Theta_2}$ correspondente a P_{Θ_2}. Se $P_{\Theta_1} = M_{\Theta_1}A_{\Theta_1}N_{\Theta_1}^+$ é uma decomposição de Langlands de P_{Θ_1} então $\chi(m, x_0) = \chi(n, x_0) = 1$, para todo $m \in M_{\Theta_1}$ e todo $n \in N_{\Theta_1}^+$.*

Demonstração: Da Proposição 4.4.2, a aplicação $g \in P_{\Theta_1} \mapsto \chi(g, x_0)$ é um homomorfismo, já que $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$ e P_{Θ_2} é o grupo de isotropia de x_0. Como $N_{\Theta_1}^+$ está contido no grupo derivado (gerado pelos comutadores $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in P_{\Theta_1}$), a restrição do homomorfismo a $N^+_{\Theta_1}$ é trivial, pois $\mathbb{R}^+$ é um grupo abeliano.

Pela Proposição 1.2.1, o subgrupo M_{Θ_1} se decompõe $M_{\Theta_1} = M_{\Theta_1}(K)\exp(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_{\Theta_1})$. A restrição do homomorfismo a $M_{\Theta_1}(K)$ é trivial, pois $M_{\Theta_1}(K) \subset K$ e χ é K-invariante. Além disso, $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_{\Theta_1} \subset [\mathfrak{m}_{\Theta_1}, \mathfrak{m}_{\Theta_1}]$. Daí, podemos escrever os elementos $h \in \exp(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_{\Theta_1})$ na forma $h = aba^{-1}b^{-1}$, com $a, b \in (M_{\Theta_1})_0$. Logo, a restrição do homomorfismo a $\exp(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_{\Theta_1})$ é trivial. □

Teorema 4.4.7 *Seja $\chi : G \times \mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{R}^+$ um cociclo K-invariante sobre o flag $\mathbb{F}_\Theta$. Então existe $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tal que*

$$\chi(g, x) = e^{\lambda(H(gu))},$$

onde $u \in K$ é tal que $x = u \cdot x_0$ e x_0 é a origem de $\mathbb{F}_\Theta$ correspondente a P_Θ.

Demonstração: A aplicação $an \in AN^+ \mapsto \chi(an, x_0)$ é um homomorfismo, pois AN^+ está contido no subgrupo de isotropia. A restrição deste homomorfismo a N^+ é trivial, pelo Lema 4.4.6. Mas qualquer homomorfismo $\varphi : A \to \mathbb{R}^+$ é da forma $e^{\lambda(\log a)}$, $a \in A$ e $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. De fato, dado $a \in A$ existe $H \in \mathfrak{a}$ tal que $a = \exp H$, assim

$$\varphi(a) = \varphi(\exp H) = e^{d\varphi_1(H)} = e^{\lambda(\log a)},$$

onde $\lambda = d\varphi_1$. Daí, $\chi(an, x_0) = \chi(a, x_0) = e^{\lambda(\log a)}$.

Seja $g \in G$ e escreva $g = kan \in KAN^+$. Por K-invariância,

$$\chi(g, x_0) = \chi(kan, x_0) = \chi(k, an \cdot x_0)\chi(an, x_0) = e^{\lambda(\log a)} = e^{\lambda(H(g))}.$$

Por outro lado, K é transitivo em $\mathbb{F}_\Theta$. Portanto, dado $x \in \mathbb{F}_\Theta$ existe $u \in K$ tal que $x = u \cdot x_0$. Como χ é um cociclo K-invariante, $\chi(gu, x_0) = \chi(g, u \cdot x_0)\chi(u, x_0) = \chi(g, x)$. Isto é,

$$\chi(g, x) = \chi(gu, x_0) = e^{\lambda(H(gu))},$$

concluindo a demonstração. □

Denotemos o cociclo $e^{\lambda(H(gu))}$ sobre o *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ por χ_λ^Θ. Se $\Theta = \emptyset$ então denotemos $\chi_\lambda^\emptyset$ simplesmente por χ_λ ou $\chi_\lambda^{\mathbb{F}}$.

Em um *flag* geral $\mathbb{F}_\Theta$ nem todos os $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ aparecem em cociclos.

Proposição 4.4.8 *Se* $\chi_\lambda^\Theta : G \times \mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{R}^+$ *é o cociclo* $e^{\lambda(H(gu))}$ *então* λ *é identicamente nulo em* $\mathfrak{a}(\Theta)$ *(portanto, pode ser visto como elemento de* $\mathfrak{a}_\Theta^*$*).*

Demonstração: Pelo Lema 4.4.6, o homomorfismo $g \in P_\Theta \mapsto \chi_\lambda^\Theta(g, x_0)$ é trivial em M_Θ. Em particular, λ é identicamente nulo em $\mathfrak{a}(\Theta)$. □

Reciprocamente:

Proposição 4.4.9 *Dados* $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$ *e o cociclo* $\chi_\lambda^{\Theta_1} : G \times \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{R}^+$ *sobre o flag* $\mathbb{F}_{\Theta_1}$*, suponha que* λ *é identicamente nulo em* $\mathfrak{a}(\Theta_2)$*. Então, para todo* $g \in G$ *e* $x \in \mathbb{F}_{\Theta_1}$*, vale*

$$\chi_\lambda^{\Theta_1}(g, x) = \chi_\lambda^{\Theta_2}\left(g, \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(x)\right),$$

onde $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$ *é a projeção canônica. Em particular, se* x *e* y *estão na mesma fibra então* $\chi_\lambda^{\Theta_1}(g, x) = \chi_\lambda^{\Theta_1}(g, y)$*, para todo* $g \in G$*.*

Demonstração: É conseqüência imediata da equivariância de $\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}$ em relação às ações de K em $\mathbb{F}_{\Theta_1}$ e $\mathbb{F}_{\Theta_2}$. De fato, $\chi_\lambda^{\Theta_1}(g, x) = e^{\lambda(H(gu))}$, onde $x = u \cdot x_0$ e x_0 é a origem de $\mathbb{F}_{\Theta_1}$. Mas, se y_0 é a origem de $\mathbb{F}_{\Theta_2}$ então $y_0 = \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(x_0)$ e

$$\pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(x) = \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(u \cdot x_0) = u \cdot \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(x_0) = u \cdot y_0.$$

Portanto, vale a igualdade, $\chi_\lambda^{\Theta_2}\left(g, \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1}(x)\right) = e^{\lambda(H(gu))}$. □

A descrição acima dos cociclos depende de uma decomposição de Iwasawa pré-fixada. Se $G = \widetilde{K}\widetilde{A}\widetilde{N}^+$ é uma outra decomposição de Iwasawa de G então existe $l \in G$ tal que $\widetilde{K} = lKl^{-1}$, $\widetilde{A} = lAl^{-1}$ e $\widetilde{N}^+ = lN^+l^{-1}$. A nova decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ é dada por $\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}(l)\mathfrak{k} \oplus \mathrm{Ad}(l)\mathfrak{a} \oplus \mathrm{Ad}(l)\mathfrak{n}^+$.

Proposição 4.4.10 *Se $G = (lKl^{-1})(lAl^{-1})(lN^+l^{-1})$, com $l \in G$, é uma outra decomposição de Iwasawa de G então $\chi^\Theta_\lambda(g,x) = \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(lgl^{-1}, lx)$ para todo $g \in G$ e todo $x \in \mathbb{F}_\Theta$, onde $\widetilde{\lambda} = \lambda \circ \mathrm{Ad}(l^{-1})$. Em particular, $\chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}$ é lKl^{-1}-invariante e se $l \in K$ então $\chi^\Theta_\lambda(g,x) = \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(g,x)$.*

Demonstração: Se $g = kan \in KAN^+$ então

$$lgl^{-1} = (lkl^{-1})(lal^{-1})(lnl^{-1}) \in (lKl^{-1})(lAl^{-1})(lN^+l^{-1})$$

é a decomposição de Iwasawa de lgl^{-1} em relação a $(lKl^{-1})(lAl^{-1})(lN^+l^{-1})$. Denotemos por $\widetilde{\log}$ o logaritmo $\widetilde{\log} : lAl^{-1} \to \mathrm{Ad}(l)\mathfrak{a}$ e por $\widetilde{H}(lgl^{-1})$ o elemento $\widetilde{\log}(lal^{-1})$ de $\mathrm{Ad}(l)\mathfrak{a}$. Assim, $\widetilde{H}(lgl^{-1}) = \widetilde{\log}(lal^{-1}) = \mathrm{Ad}(l)\log a = \mathrm{Ad}(l)H(g)$, isto é, $H(g) = \mathrm{Ad}(l^{-1})\widetilde{H}(lgl^{-1})$. Sejam x_0 e y_0 as origens de $\mathbb{F}_\Theta$ em relação a P_Θ e $lP_\Theta l^{-1}$, respectivamente. Escrevendo $l = k'a'n' \in KAN^+$, temos que $y_0 = l \cdot x_0 = k' \cdot x_0$. Daí,

$$\chi^\Theta_\lambda(g, x_0) \;=\; e^{\lambda(H(g))} \;=\; e^{\lambda\left(\mathrm{Ad}(l^{-1})\widetilde{H}(lgl^{-1})\right)} \;=\; \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(lgl^{-1}, y_0).$$

Se $x \in \mathbb{F}_\Theta$ então existe $u \in K$ tal que $x = u \cdot y_0 = uk' \cdot x_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \chi^\Theta_\lambda(g,x) &= \chi^\Theta_\lambda(g, uk' \cdot x_0) \;=\; \chi^\Theta_\lambda(guk', x_0) \;=\; \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(lguk'l^{-1}, y_0) \\ &= \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(lgl^{-1}(luk'l^{-1}), y_0) \;=\; \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(lgl^{-1}, lx)\, \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(luk'l^{-1}, y_0) \\ &= \chi^\Theta_{\widetilde{\lambda}}(lgl^{-1}, lx), \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Exemplo: Seja $\chi : G \times \mathbb{P}^{d-1} \to \mathbb{R}^+$ o cociclo sobre o espaço projetivo $\mathbb{P}^{d-1}$, dado por $\chi(g,[v]) = \|gv\|/\|v\|$, onde $G = \mathrm{Sl}(d,\mathbb{R})$ (veja o exemplo na página 52). Para escrever χ como χ_λ consideremos a decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(d) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, sendo $\mathfrak{so}(d)$, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}^+$ as subálgebras de $\mathfrak{sl}(d,\mathbb{R})$ das matrizes anti-simétricas, diagonais e triangulares superiores com zeros na diagonal, respectivamente. Denotemos por $G = KAN^+$ a correspondente decomposição de Iwasawa de G.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_d\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{B}^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}\}$ a base de $\mathfrak{a}^*$ sendo os λ_i's, $i = 1, \ldots, d-1$, definidos por $\lambda_i(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)) = a_i$. Definindo $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$

temos que o conjunto $\Sigma = \{\alpha_{ij} : 1 \leq i < j \leq d-1\}$ é um sistema simples associado ao par $(\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R}), \mathfrak{a})$. Se $\Theta \subset \Sigma$ é tal que $\Sigma \setminus \Theta = \{\alpha_{12}\}$ então $\mathbb{F}_\Theta$ se identifica a $\mathbb{P}^{d-1}$ e sua origem é $[e_1]$.

Seja $g = kan \in G$, com $k \in \mathrm{SO}(d)$, $a \in A$ e $n \in N^+$. Se $a = e^{\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_d)}$, temos

$$\chi_{\lambda_1}(g, [e_1]) = \chi_{\lambda_1}(kan, [e_1]) = \chi_{\lambda_1}(a, [e_1]) = e^{\lambda_1(\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_d))} = e^{a_1},$$

pois χ_{λ_1} é $\mathrm{SO}(d)$-invariante. Por outro lado,

$$\chi(g, [e_1]) = \|kane_1\| = \|kae_1\| = \|ae_1\| = e^{a_1},$$

já que $\mathrm{SO}(d)$ preserva a norma e $ne_1 = e_1$. Como g é arbitrário, segue que $\chi(g, [e_1]) = \chi_{\lambda_1}(g, [e_1])$, para todo $g \in G$.

Para cada $x \in \mathbb{P}^{d-1}$, seja $v \in \mathbb{R}^d$, com $\|v\| = 1$ tal que $x = [v]$. Existe $u \in \mathrm{SO}(d)$ tal que $v = ue_1$. Daí, $x = [v] = [ue_1] = u \cdot [e_1]$. Logo,

$$\chi(g, x) = \chi(g, u \cdot [e_1]) = \chi(gu, [e_1]) = \chi_{\lambda_1}(gu, [e_1]) = \chi_{\lambda_1}(g, u \cdot [e_1]) = \chi_{\lambda_1}(g, x).$$

Portanto, $\chi = \chi_{\lambda_1}$.

Agora, se $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ é múltiplo de λ_1, ou seja, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = s\lambda_1$, temos

$$\chi_\lambda(g, [v]) = e^{\lambda(H(gu))} = e^{s\lambda_1(H(gu))} = (e^{\lambda_1(H(gu))})^s = (\chi(g, [v]))^s = \frac{\|gv\|^s}{\|v\|^s}.$$

No caso particular $d = 2$, temos $\dim \mathfrak{a}^* = 1$ e assim, todo $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ é da forma $\lambda = s\lambda_1$, com $s \in \mathbb{R}$.

Portanto, os cociclos $\mathrm{SO}(2)$-invariantes, no *flag* maximal $\mathbb{F} = \mathbb{P}^1$, são da forma

$$\chi_s(g, [v]) = \frac{\|gv\|^s}{\|v\|^s},$$

com $g \in \mathrm{Sl}(2)$ e $[v] \in \mathbb{P}^1$. □

4.5 Funções Características

Seja $S \subset G$ um subsemigrupo de G com $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ e tipo parabólico $\Theta := \Theta(S)$. Fixemos uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$ tal que $A^+ \cap (\mathrm{int}\, S) \neq \emptyset$. Assim, denotando por x_0 a origem de $\mathbb{F}_\Theta$, em relação à decomposição de Iwasawa fixada, temos que x_0 está no conjunto de transitividade $D_\Theta^0(1)$ do c.c.i. $D_\Theta(1)$ de S.

Definição 4.5.1 *A **função característica** $I_S : \mathfrak{a}_\Theta^* \times \mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{R}$ do semigrupo S é a função definida por*

$$I_S(\lambda, x) = \int_S \chi_\lambda^\Theta(g, x)\, dg,$$

onde dg denota uma medida de Haar em G.

A integral na definição acima é positiva, mas pode não ser finita e daí o domínio de definição de I_S é o conjunto dos $(\lambda, x) \in \mathfrak{a}_\Theta^* \times \mathbb{F}_\Theta$ para os quais a integral converge. Esse domínio será denotado por $\mathfrak{D}_\Theta(S)$.

Fixando $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ tal que $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$, para algum $x \in \mathbb{F}_\Theta$, consideremos a função I_S^λ dada por $I_S^\lambda(x) = I_S(\lambda, x)$. O domínio de I_S^λ é denotado por $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$. Mostramos que o conjunto de transitividade $D_\Theta^0(1)$ do conjunto controlável invariante $D_\Theta(1)$ está contido no domínio de definição $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ (veja os Teoremas 4.6.8 e 4.6.9).

4.5.1 Alguns Lemas

Pelas propriedades de cociclo,

$$\int_S \chi_\lambda^\Theta(gh, x)\, dg = \int_S \chi_\lambda^\Theta(g, h\cdot x)\, \chi_\lambda^\Theta(h, x)\, dg = \chi_\lambda^\Theta(h, x) \int_S \chi_\lambda^\Theta(g, h\cdot x)\, dg.$$

Lema 4.5.2 *Se $h \in G$ então*

$$\int_{Sh} \chi_\lambda^\Theta(g, x)\, dg = \chi_\lambda^\Theta(h, x) \int_S \chi_\lambda^\Theta(g, h\cdot x)\, dg,$$

sendo a integral finita ou $+\infty$.

Demonstração: Usando a igualdade $1_S(g) = 1_{Sh}(gh)$, $g \in G$ (onde 1_T é a função que vale 1 em T e zero no complementar de T) e a invariância à direita de dg, obtemos

$$\begin{aligned}\int_S \chi_\lambda^\Theta(gh,x)\,dg &= \int_G \chi_\lambda^\Theta(gh,x)\,1_S(g)\,dg = \int_G \chi_\lambda^\Theta(gh,x)\,1_{Sh}(gh)\,dg \\ &= \int_G \chi_\lambda^\Theta(g,x)\,1_{Sh}(g)\,dg = \int_{Sh} \chi_\lambda^\Theta(g,x)\,dg.\end{aligned}$$

Assim, o lema segue pela igualdade acima. □

Lema 4.5.3 *Se $h \in S$ e $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$ então $(\lambda, h \cdot x) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$.*

Demonstração: Se $h \in S$ então $Sh \subset S$. Daí,

$$\int_{Sh} \chi_\lambda^\Theta(g,x)\,dg \leq \int_S \chi_\lambda^\Theta(g,x)\,dg.$$

Portanto, do Lema 4.5.2, concluímos a demonstração. □

Corolário 4.5.4 *Sejam $x, y \in D_\Theta^0(w)$. Dado $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$, $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$ se, e somente se, $(\lambda, y) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$.*

Demonstração: Imediato, a partir do lema, pois se $x, y \in D_\Theta^0(w)$ então existem $h_1, h_2 \in S$ tais que $x = h_1 \cdot y$ e $y = h_2 \cdot x$. □

Uma outra forma de enunciar o Lema 4.5.3 é o seguinte:

Corolário 4.5.5 *Se $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ e existe $x \in \mathbb{F}_\Theta$ tal que $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$ então o conjunto $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ é S-invariante.*

4.5.2 Fórmula Integral

Uma das ferramentas usadas para mostrar a convergência da integral na Definição 4.5.1 é a seguinte fórmula integral:

Proposição 4.5.6 *Se $\varphi : G \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e não negativa então vale*

$$\int_G \varphi(g)\, dg = \int_{N_\Theta^- \times A_\Theta \times M_\Theta \times N_\Theta^+} \varphi(\overline{n}amn)\, e^{2\rho_\Theta(\log a)}\, d\overline{n}\, da\, dm\, dn,$$

onde $\rho_\Theta(H) = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}(H)_{|\mathfrak{n}_\Theta^+}\right)$.

Demonstração: O resultado vale para funções com suporte compacto (veja [16], Capítulo VIII). Escrevendo $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ com C_k compacto, $C_k \subset \mathrm{int}\, C_{k+1}$, e definindo φ_k por $\varphi_k = \varphi\, 1_{C_k}$ temos que, para cada k, φ_k tem suporte compacto e $0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1}$. Além disso, $\varphi_k(g) \to \varphi(g)$, para todo $g \in G$. Pelo Teorema da Convergência Monótona (veja, por exemplo, Rudin [26]),

$$\begin{aligned}
\int_G \varphi(g) dg &= \lim_{k\to+\infty} \int_G \varphi_k(g) dg \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_{N_\Theta^- \times A_\Theta \times M_\Theta \times N_\Theta^+} \varphi_k(\overline{n}amn)\, e^{2\rho_\Theta(\log a)}\, d\overline{n}\, da\, dm\, dn \\
&= \int_{N_\Theta^- \times A_\Theta \times M_\Theta \times N_\Theta^+} \varphi(\overline{n}amn)\, e^{2\rho_\Theta(\log a)}\, d\overline{n}\, da\, dm\, dn,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

4.6 Domínio de Definição de I_S

Pelo Corolário 4.5.4, para mostrarmos que a integral $I_S(\lambda, x)$ converge, para todo $x \in D_\Theta^0(1)$, basta mostrarmos que $I_S(\lambda, x_0)$ converge, onde x_0 é a origem de $\mathbb{F}_\Theta$. Usando a fórmula integral da Proposição 4.5.6, temos que

$$\begin{aligned}
I_S(\lambda, x_0) &= \int_S \chi_\lambda^\Theta(g, x_0)\, dg = \int_G 1_S(g) e^{\lambda(H(g))}\, dg \\
&= \int_{N_\Theta^- \times A_\Theta \times M_\Theta \times N_\Theta^+} 1_S(\overline{n}amn)\, e^{\lambda(H(\overline{n}amn))+2\rho_\Theta(\log a)}\, d\overline{n}\, da\, dm\, dn.
\end{aligned}$$

Consideremos os subconjuntos

$$N_S^- := \{\overline{n} \in N_\Theta^- : \text{ existe } h \in A_\Theta M_\Theta N_\Theta^+ \text{ com } \overline{n}h \in S\}$$

e

$$N_S^+ := \{n \in N_\Theta^+ : \text{ existe } h \in N_\Theta^- A_\Theta M_\Theta \text{ com } hn \in S\}$$

de N_Θ^- e N_Θ^+, respectivamente.

Lema 4.6.1 *Os conjuntos N_S^- e N_S^+ são subconjuntos relativamente compactos de N_Θ^- e N_Θ^+, respectivamente.*

Demonstração: Dado $\overline{n} \in N_S^-$, existe $h \in M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$ tal que $\overline{n}h \in S$. Daí, $\overline{n} \cdot x_0 = \overline{n}h \cdot x_0 \in D_\Theta(1) \subset N_\Theta^- \cdot x_0$. Assim, identificando o subgrupo N_Θ^- com sua órbita $N_\Theta^- \cdot x_0$, vemos que N_S^- está contido no compacto $D_\Theta(1)$ de N_Θ^-.

A demonstração que N_S^+ é relativamente compacto é análoga, usando a ação de S no *flag* dual $\mathbb{F}_{\Theta^*}$. □

Proposição 4.6.2 *Existe uma constante c tal que*

$$I_S(\lambda, x_0) \leq c \int_{A_S} e^{(\lambda + 2\rho_\Theta + dN\alpha)(\log a)} da,$$

onde

$$A_S = \{a \in A_\Theta : \textit{ existem } \overline{n} \in N_\Theta^-, \ h \in M_\Theta N_\Theta^+ \textit{ com } \overline{n}ah \in S\},$$

$d = \dim \mathfrak{n}_\Theta^-$, $N = \dim \mathfrak{n}^-(\Theta)$ *e* $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+$ *é uma raiz que depende de a.*

Demonstração: Dado $g = \overline{n}amn \in N_\Theta^- A_\Theta M_\Theta N_\Theta^+$, temos que

$$\chi_\lambda^\Theta(g, x_0) = \chi_\lambda^\Theta(\overline{n}, x_0)\ \chi_\lambda^\Theta(a, x_0) = e^{\lambda(H(\overline{n}))}\ e^{\lambda(\log a)}.$$

Logo, da Proposição 4.5.6,

$$I_S(\lambda, x_0) = \int_{N_\Theta^- \times A_\Theta \times M_\Theta \times N_\Theta^+} 1_S(\overline{n}man)\ e^{\lambda(H(\overline{n}))}\ e^{(\lambda + 2\rho_\Theta)(\log a)}\ d\overline{n}\, da\, dm\, dn.$$

Pelo Lema 4.6.1, as componentes de S em N_Θ^- e em N_Θ^+ são relativamentes compactas. Pelo Corolário 4.2.14 o volume de $M_S(\overline{n}, a, n)$ é limitado, a menos de uma constante, por $e^{dN\alpha(\log a)}$. Isto demonstra a proposição. □

4.6.1 Convergência

Seja ρ uma representação irredutível de dimensão finita de G em um espaço vetorial complexo V, de forma que $\mathbb{F}_\Theta$ é uma órbita no espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ (veja a Subseção 4.1.1). Tomemos um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V, que seja K-invariante. Denotemos a norma correspondente por $\|\cdot\|$. A expressão

$$\chi(g, [v]) = \frac{\|\rho(g)\, v\|}{\|v\|}$$

define um cociclo K-invariante sobre $\mathbb{F}_\Theta$ (veja o exemplo na página 52).

Se μ_ρ é o peso máximo de $d\rho$ então $\chi = \chi^\Theta_{\mu_\rho}$. De fato, se $v \in V_{\mu_\rho}$ e $a = \exp H \in A$, temos

$$\rho(a)v = \rho(\exp H)v = e^{d\rho(H)}v = e^{\mu_\rho(H)}v = e^{\mu_\rho(\log a)}v.$$

Daí,

$$\chi^\Theta_{\mu_\rho}(a, [v]) = e^{\mu_\rho(\log a)} = \frac{\|e^{\mu_\rho(\log a)}v\|}{\|v\|} = \frac{\|\rho(a)v\|}{\|v\|}.$$

Como os dois lados da igualdade acima são cociclos K-invariantes, segue que

$$\chi^\Theta_{\mu_\rho}(g, [v]) = \frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|},$$

para todo $g \in G$ e todo $[v] \in \mathbb{F}_\Theta$. Logo, o cociclo definido pela norma é da forma χ^Θ_μ, com μ peso máximo de uma representação irredutível.

Reciprocamente, seja $\mu \in \mathfrak{a}^*_\Theta$ tal que $\mu(H'_\alpha)$ é um número racional positivo, para todo $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. O cociclo χ^Θ_μ é dado pela norma. De fato, existe um inteiro positivo m tal que $m\mu \in \mathfrak{a}^*_\Theta(\mathbb{Z}_+)$. Pela Proposição 4.1.2, existe uma representação irredutível de dimensão finita ρ de G em um espaço vetorial V tal que $p\mu$ é peso máximo de $d\rho$, para algum inteiro positivo p. Assim, pela parte anterior, dados $g \in G$ e $v \in V$, se $x = [v] = u \cdot [v_0]$, com $v_0 \in V_{p\mu}$ e $u \in K$, temos que

$$\frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|} = \chi^\Theta_{p\mu}(g, x) = e^{p\mu(H(gu))} = e^{\mu(H(gu))^p} = \chi^\Theta_\mu(g, x)^p,$$

ou seja,

$$\chi^\Theta_\mu(g, x) = \left(\frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|}\right)^{1/p}.$$

Logo, denotando por $\mathfrak{r}$ o subconjunto denso de $\mathfrak{a}_\Theta^*$ dado por

$$\mathfrak{r} = \{\mu \in \mathfrak{a}_\Theta^* : \mu(H'_\alpha) \text{ é racional positivo, para todo } \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\},$$

temos:

Proposição 4.6.3 *Se $\mu \in \mathfrak{r}$ então existem um espaço vetorial V, uma representação irredutível ρ de G em V e um inteiro positivo p tais que $\mathbb{F}_\Theta$ é uma órbita em $\mathbb{P}(V)$ e*

$$\chi_\mu^\Theta(g, [v]) = \left(\frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|}\right)^{1/p},$$

para todo $g \in G$ e todo $[v] \in \mathbb{F}_\Theta$.

Seja $D_\Theta^0(1) \subset \mathbb{F}_\Theta \subset \mathbb{P}(V)$ o conjunto de transitividadade do c.c.i de S.

Lema 4.6.4 *Se $x \in D_\Theta^0(1)$ e $g \in \text{int}S$ é tal que $g \cdot x = x$, então $\chi_{\mu_\rho}^\Theta(g, x) > 1$.*

Demonstração: Existe uma célula aberta de Bruhat $\sigma \subset \mathbb{F}_\Theta$ tal que $x \in \sigma$ e $g^n \cdot y \to x$, para todo $y \in \sigma$ (veja do Rocio e San Martin [24], Seção 5). Se $x = [v]$ então, por hipótese, v é um autovetor de $\rho(g)$. Seja $g = g_e g_h g_u$ a decomposição de g nas partes elíptica, hiperbólica e unipotente. A parte hiperbólica g_h é conjugado a um elemento de A_Θ^+ (veja [24], Seção 5). Assim, o Corolário 4.1.4 assegura que $\rho(g_h)$ tem um autovalor que é maior que todos os outros. Pelo Lema 4.1.6, este autovalor corresponde ao autovalor c de $\rho(g)$ com maior valor absoluto. Logo, pelo Lema 4.1.5, o autovetor v está associado ao autovalor c. Como G é semi-simples e conexo, temos que $\det \rho(g) = 1$ e portanto, $|c| > 1$. Mas,

$$\chi_{\mu_\rho}^\Theta(g, x) = \frac{\|\rho(g)v\|}{\|v\|} = |c|,$$

concluindo a demonstração. □

Seja

$$(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+ = \{\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^* : \lambda(H'_\alpha) > 0, \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\}.$$

Notemos que $\lambda(H'_\alpha) > 0$ se, e somente se, $\lambda(H_\alpha) > 0$. Como $\lambda(H_\alpha) = \langle H_\lambda, H_\alpha\rangle = \alpha(H_\lambda)$, segue que

$$(\mathfrak{a}^*_\Theta)^+ = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_\Theta : H_\lambda \in \mathfrak{a}^+_\Theta\}.$$

O subconjunto $(\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$ é um cone aberto em $\mathfrak{a}^*_\Theta$.

Lema 4.6.5 *Seja $\lambda \in (\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$. Se $x \in D^0_\Theta(1)$ e $g \in \mathrm{int}S$ são tais que $g \cdot x = x$, então $\chi^\Theta_\lambda(g, x) > 1$.*

Demonstração: Sejam $u \in K$ e $q_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Sigma$, tais que $x = u \cdot x_0$ e $H(gu) = \sum_{\alpha\in\Sigma} q_\alpha H'_\alpha$. Pelo Lema 4.6.4, temos que $1 < \chi^\Theta_{\mu_\rho}(g, x) = e^{\mu_\rho(H(gu))}$. Em particular, existe um $\alpha \in \Sigma\backslash\Theta$ tal que $q_\alpha \neq 0$, pois $\mu_\rho(H(gu)) \neq 0$ e $\mu_\rho|_{\mathfrak{a}(\Theta)} = 0$. Seja $\mu \in \mathfrak{a}^*_\Theta$ tal que $\mu(H'_\alpha)$ é racional positivo, para cada $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$, e

$$\mu(H'_\alpha)\begin{cases} < \ \lambda(H'_\alpha) & se \quad q_\alpha \geq 0 \\ > \ \lambda(H'_\alpha) & se \quad q_\alpha < 0. \end{cases}$$

Assim, se $q_\alpha \neq 0$ então $q_\alpha\mu(H'_\alpha) < q_\alpha\lambda(H'_\alpha)$, $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. Logo,

$$\mu(H(gu)) = \sum q_\alpha\mu(H'_\alpha) < \sum q_\alpha\lambda(H'_\alpha) = \lambda(H(gu)).$$

Pela Proposição 4.1.2, existe um inteiro positivo p tal que $p\mu$ é peso máximo de uma representação irredutível de dimensão finita de G em um espaço V. Pelo Lema 4.6.4, $\chi^\Theta_{p\mu}(g, x) > 1$. Logo,

$$\chi^\Theta_\lambda(g, x) = e^{\lambda(H(gu))} > e^{\mu(H(gu))} = \left(e^{p\mu(H(gu))}\right)^{1/p} = \chi^\Theta_{p\mu}(g, x)^{1/p} > 1,$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 4.6.6 *Se $\lambda \in (\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$ e $x \in D^0_\Theta(1)$ então existe $c > 0$ tal que $\chi^\Theta_\lambda(g, x) > c$ para todo $g \in S$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existe uma seqüência $g_k \in S$ tal que $\chi^\Theta_\lambda(g_k, x) \to 0$. Tomando uma subseqüência, podemos supor que em $\mathbb{F}_\Theta$, $g_k \cdot x$ converge para y (que necessariamente está em $D_\Theta(1)$). Se $h \in S$ então $\chi_\lambda^\Theta(hg_k, x) \to 0$, já que $\chi_\lambda^\Theta(hg_k, x) = \chi_\lambda^\Theta(h, g_k \cdot x)\chi_\lambda^\Theta(g_k, x)$ e $z \mapsto \chi_\lambda^\Theta(h, z)$ é limitada. Em particular, podemos tomar $h \in \mathrm{int}S$ tal que $h \cdot y = x$. Assim, substituindo g_k por hg_k, podemos supor que $g_k \cdot x \to x$.

Como $x \in D_\Theta^0(1)$, existe $g \in \mathrm{int}S$ tal que $g \cdot x = x$. Assim, $g^{-1} \in \mathrm{int}S^{-1}$ e $g^{-1} \cdot x = x$. Logo, existe uma vizinhança $W^{-1} \subset S^{-1}$ de g^{-1} tal que $U = W^{-1} \cdot x$ é uma vizinhança de x em $\mathbb{F}_\Theta$. Portanto, para todo $y \in U$, existe $h \in W \subset S$ tal que $h^{-1} \cdot x = y$, isto é, $x = h \cdot y$. Por continuidade, podemos tomar W limitado de tal forma que $\chi_\lambda^\Theta(h, x)$ é limitado, para todo $h \in W$ e $x \in \mathbb{F}_\Theta$. Assim para algum $r > 0$, temos

$$\sup\{\chi_\lambda^\Theta(h, x) : h \in W, x \in \mathbb{F}_\Theta\} < r.$$

Agora, tomemos k suficientemente grande tal que $g_k \cdot x \in U$ e $\chi_\lambda^\Theta(g_k, x) < \dfrac{1}{2r}$. Então existe $h \in W$ tal que $hg_k \cdot x = x$ e

$$\chi_\lambda^\Theta(hg_k, x) = \chi_\lambda^\Theta(h, g_k \cdot x)\chi_\lambda^\Theta(g_k, x) \leq r\chi_\lambda^\Theta(g_k, x) < \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

Mas isso contraria o lema anterior, pois $hg_k \in \mathrm{int}S$. □

Dizemos que $W \subset V$ é um **cone gerador** se W é um cone e $V = W - W$. O subconjunto $W = \{(t, 0) : t \geq 0\}$ é um cone em $\mathbb{R}^2$ e se $v = (0, 1)$ então $v + W = \{(t, 1) : t \geq 0\}$. Logo, $(v + W) \cap W = \emptyset$. No entanto, o próximo lema assegura que isso não ocorre com cones geradores.

Lema 4.6.7 *Se $W \subset V$ é um cone gerador e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é um subconjunto finito de V então $(v_1 + W) \cap \cdots \cap (v_n + W)$ é não vazio.*

Demonstração: A demonstração é por indução sobre o número de elementos n.

Para $n = 2$, escrevemos $v_1 - v_2 = w_1 - w_2$, com $w_1, w_2 \in W$. Isso é possível, pois W é gerador. Assim, $v_1 + w_2 = v_2 + w_1 \in (v_1 + W) \cap (v_2 + W)$.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para qualquer subconjunto com cardinalidade menor ou igual que n. Seja $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ um conjunto com $n + 1$ elementos. Por hipótese de indução, podemos tomar $u \in (v_1 + W) \cap \cdots \cap (v_n + W)$. Assim,

$u+W \subset (v_1+W)\cap\cdots\cap(v_n+W)$. Usando novamente a hipótese de indução segue que $(u+W)\cap(v_{n+1}+W)\neq\emptyset$, mostrando o lema. □

Como $(\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$ é um cone aberto em $\mathfrak{a}^*_\Theta$ e $\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+$ é um subconjunto finito de $\mathfrak{a}^*_\Theta$ temos, do lema acima, que o conjunto

$$\mathcal{C}^+_\Theta = \bigcap_{\alpha\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+}\left(dN\alpha + 2\rho_\Theta + (\mathfrak{a}^*_\Theta)^+\right)$$

(d e N são as constantes da Proposição 4.6.2) é não vazio. Além disso, $\lambda\in\mathcal{C}^+_\Theta$ se e, somente se, $\lambda - 2\rho_\Theta - dN\alpha \in (\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$, para toda raiz $\alpha\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+$.

Agora, podemos mostrar um dos principais resultados deste capítulo que assegura a convergência da integral na Definição 4.5.1 no conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante.

Teorema 4.6.8 *Seja S um semigrupo com $\operatorname{int} S\neq\emptyset$ e tipo parabólico Θ. Denote por $D_\Theta(1)$ seu conjunto controlável invariante em $\mathbb{F}_\Theta$ e por $D^0_\Theta(1)$ o conjunto de transitividade de $D_\Theta(1)$. Então a integral $I_S(\lambda,x)$ converge para qualquer $x\in D^0_\Theta(1)$ e $\lambda\in-\mathcal{C}^+_\Theta$.*

Demonstração: Pelo Corolário 4.5.4, é suficiente mostrar a convergência para $x_0\in D^0_\Theta(1)$. Pela Proposição 4.6.2, existe uma constante c_1 tal que $I_S(\lambda,x_0)$ é limitada superiormente por

$$c_1\int_{A_S} e^{(\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha)(\log a)}\,da. \tag{4.5}$$

Se $\lambda\in-\mathcal{C}^+_\Theta$ então $-(\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha)\in(\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$, para toda raiz $\alpha\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+$. Como N^-_S é relativamente compacto (veja Lema 4.6.1), existe uma constante positiva c_2 tal que $e^{(\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha)(H(\overline{n}))}>c_2$, para todo $\overline{n}\in N^-_S$ e toda $\alpha\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+$. Juntando isso com a Proposição 4.6.6, existe uma constante c_3 tal que para todo $\overline{n}amn\in S$ temos

$$\begin{aligned} c_3 &> \chi^\Theta_{\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha}(\overline{n}amn,x_0) = e^{(\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha)(H(\overline{n}))}\, e^{(\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha)(\log a)}\\ &> c_2\, e^{(\lambda+2\rho_\Theta+dN\alpha)(\log a)}, \end{aligned}$$

isto é, a exponencial em (4.5) é limitada superiormente. Portanto, a integral converge. □

Aplicando o teorema acima ao semigrupo $\mathcal{M}_{\Theta}(S)$ (veja Teorema 4.3.2) obtemos a convergência em um conjunto maior:

Teorema 4.6.9 *Seja S um semigrupo com $\operatorname{int} S \neq \emptyset$ e tipo parabólico Θ. Então $I_S(\lambda, x)$ converge para qualquer $x \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{\Theta}(S)$ e $\lambda \in -\mathcal{C}_{\Theta}^{+}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.6.8, a integral converge sobre o semigrupo $\mathcal{M}_{\Theta}(S)$, pois $\operatorname{int}\mathcal{D}_{\Theta}(S)$ é o conjunto de transitividade do seu conjunto controlável invariante. Mas $S \subset \mathcal{M}_{\Theta}(S)$, assim a integral converge sobre S. □

Observação: Se o tipo parabólico de S é o *flag* maximal $\mathbb{F}$, isto é, $\Theta = \emptyset$ então o subgrupo $M_{\Theta} = M$ é compacto e assim, o volume de $M_S(\overline{n}, a, n)$ é finito e não depende de a. Portanto, neste caso, a integral $I_S(\lambda, x)$ converge para todo $x \in \operatorname{int}\mathcal{D}(S)$ e para todo λ tal que $\lambda + 2\rho \in -(\mathfrak{a}^*)^{+}$. □

4.6.2 Exemplos

Sejam $G = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ com o *flag* maximal $\mathbb{F} = \mathbb{P}^1$. Se $K = \mathrm{SO}(2)$ então os cociclos K-invariantes são da forma

$$\chi_s(g, [v]) = \frac{\|gv\|^s}{\|v\|^s}$$

(veja o exemplo na página 57). O domínio de definição $\mathfrak{D}(S)$ da função característica I_S de um semigrupo $S \subset \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ é um subconjunto do cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1$ (já que neste caso $\mathfrak{a}$ se identifica a $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}^1$ é o único *flag* de G). A seguir, calcularemos $\mathfrak{D}(S)$ para dois casos:

1. S é o grupo $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$;

2. S é o semigrupo das matrizes com entradas não negativas.

Antes, porém, notemos que se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e A, N^{+} e N^{-} são os subgrupos de $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ das matrizes diagonais (com os elementos diagonais positivos), triangulares superiores e inferiores (com 1's na diagonal), respectivamente, em relação à

$\mathcal{B}$ então $G = KAN^+ = KAN^-$ são decomposições de Iwasawa de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$, associadas à base $\mathcal{B}$. Se $M = \{\pm 1\}$ então MAN^+ é o subgrupo de isotropia de $[v_1]$, enquanto que MAN^- é o subgrupo de isotropia de $[v_2]$.

A decomposição de Bruhat de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ fornece

$$\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}) = N^-MAN^+ \cup wN^-MAN^+,$$

onde $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é o elemento do grupo de Weyl $\neq 1$. O conjunto N^-MAN^+ é denso em $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$.

$S = \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$

Se $S = G$ então $\mathfrak{D}(S) = \emptyset$, isto é, para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $x = [v] \in \mathbb{P}^1$ com $\|v\| = 1$ a integral

$$I_S(s,x) = \int_G \|gv\|^s \, dg$$

diverge. Verificamos isso mostrando que para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x = [v] \in \mathbb{P}^1$ com $\|v\| = 1$, o conjunto

$$\mathcal{L}_v^s = \{g \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}) : \|gv\|^s > 1\}$$

tem medida infinita em $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$.

Seja μ uma medida de Haar em $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$. Dado $k \in K$, vale a igualdade $\mathcal{L}_{kv}^s = k\mathcal{L}_v^s k^{-1}$, pois $\mathcal{L}_{kv}^s$ é o conjunto dos $g \in G$ tais que $\|gkv\|^s > 1$. Mas, $\|gkv\|^s = \|(k^{-1}gk)\,v\|^s$, portanto, $g \in \mathcal{L}_{kv}^s$ se, e somente se, $k^{-1}gk \in \mathcal{L}_v^s$. Como $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ é unimodular, a medida de Haar μ é bi-invariante, garantindo que $\mu(\mathcal{L}_{kv}^s) = \mu(\mathcal{L}_v^s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $[v] \in \mathbb{P}^1$ e $k \in K$. Portanto, dado s, basta verificarmos que para um único $x = [v] \in \mathbb{P}^1$ com $\|v\| = 1$, $\mathcal{L}_v^s$ tem medida infinita.

Consideremos a decomposição de Iwasawa $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}) = KAN^+$ associada à base canônica $\mathcal{C} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$.

Para o caso $s > 0$, tomemos $x_0 = [e_1]$. Então,

$$\mathcal{L}_{e_1}^s = \{g = khn : \|he_1\|^s > 1\},$$

pois $ne_1 = e_1$ e $\|\cdot\|$ é K-invariante. Via o difeomorfismo $K \times A \times N^+ \to G = KAN^+$, o conjunto $\mathcal{L}^s_{e_1}$ fica sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^s_{e_1} &= \{(k,h,n) \in K \times A \times N^+ \ : \ h = \operatorname{diag}\{a, a^{-1}\}, \ a > 1\} \\ &= \{(k,h,n) \in K \times A \times N^+ \ : \ \lambda_1 (\log h) > 0\}, \end{aligned}$$

onde $\lambda_1 (\operatorname{diag}(a, -a)) = a$.

Agora, o transporte da medida de Haar em $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ a $K \times A \times N^+$ é dado pela seguinte fórmula integral:

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{K \times A \times N^+} f(kan)\, e^{2\rho(\log a)}\ dk\ da\ dn$$

(veja [9], página 181). Portanto,

$$\mu(\mathcal{L}^s_{e_1}) = \int_{\mathcal{L}^s_{e_1}} dg = \int_{K \times N^+} \left(\int_{A^+} e^{2\rho(\log a)} da \right) dk\ dn. \tag{4.6}$$

Identifiquemos o grupo abeliano A com $(\mathbb{R}, +)$ através do isomorfismo

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Assim, $\lambda_1 (t) = t$ e $\rho = \lambda_1$. Logo, $2\rho(\log a) = 2t$. Além disso, da coincide com dt, pois dt é a medida de Haar de $(\mathbb{R}, +)$, e o limite de integração A^+ coincide, via a identificação, com $\mathbb{R}^+$. Portanto, a integral em (4.6) fica

$$\mu(\mathcal{L}^s_{e_1}) = \int_{K \times N^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{2t}\ dt \right) dk\ dn = +\infty.$$

Para $s < 0$, basta tomarmos e_2 no lugar de e_1 e a decomposição de Iwasawa $G = KAN^-$.

Finalmente, se $s = 0$ a integral diverge, já que a mesma se reduz a $\displaystyle\int_G dg$ e G não é compacto.

Matrizes com entradas não negativas

Neste caso, $\mathfrak{D}(S)$ é um subconjunto próprio e não vazio de $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^1$, como mostra o seguinte resultado:

Teorema 4.6.10 *Seja $S = \mathrm{Sl}^+(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ o semigrupo das matrizes com entradas não negativas. Então, $\mathfrak{D}(S) = \mathbb{R}_{<-2} \times \mathcal{O}^+$ onde $\mathcal{O}^+$ é o subconjunto de $\mathbb{P}^1$ correspondente a $\mathrm{int}(\mathbb{R}^+)^2$ e $\mathbb{R}_{<-2} = \{s \in \mathbb{R} : s < -2\}$.*

O tipo parabólico do semigrupo S é o *flag* maximal $\mathbb{P}^1$. S é um semigrupo maximal e o conjunto de transitividade do seu conjunto controlável invariante é $\mathcal{O}^+$. Além disso, usando as identificações acima, temos que $(\mathfrak{a}^*)^+ = \mathbb{R}^+$, $\lambda = s\lambda_1$ e $(\lambda + 2\rho)(\log a) = (2+s)t$. Isso significa que $\lambda + 2\rho \in -(\mathfrak{a}^*)^+$ se, e somente se, $s < -2$. Combinando o Corolário 4.3.3 e o Teorema 4.6.9 (juntamente com a observação que o segue), obtemos uma das inclusões requeridas no Teorema 4.6.10:

Lema 4.6.11 $\mathbb{R}_{<-2} \times \mathcal{O}^+ \subset \mathfrak{D}(S)$.

A inclusão inversa considera alguns casos.

Lema 4.6.12 *Se $x \in \mathcal{O}^+$ e $s > -2$ então $I_S(s,x)$ diverge.*

Demonstração: Tomemos a decomposição de Iwasawa $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}) = KA_0N_0^+$ associada à base $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$. Então, $A_0^+ \cap (\mathrm{int}S) \neq \emptyset$. De fato, a matriz, em relação à base canônica, $g = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ está em $\mathrm{int}\left(\mathrm{Sl}^+(2,\mathbb{R})\right)$, pois suas entradas são estritamente positivas. Em relação à base $\mathcal{B}$, que diagonaliza os elementos de A_0, g é dada por $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Logo, $g \in A_0^+$.

Existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$, $h_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in \mathrm{int}S$ (veja [30], página 49). Logo, existem abertos $U \subset N^-$ e $V \subset N^+$ tais que $Uh_{t_0} \subset \mathrm{int}S$ e $h_{t_0}V \subset \mathrm{int}S$. Portanto, para todo $t \geq t_0$, $Uh_{t_0}h_th_{t_0}V \subset \mathrm{int}S$, isto é, $Uh_{2t_0+t}V \subset \mathrm{int}S$. Segue que, para todo $t \geq 3t_0$, $Uh_tV \subset \mathrm{int}S$. Portanto,

$$\int_S e^{\lambda(H(\overline{n}))}\, e^{(2\rho+\lambda)(\log a)}\, d\overline{n}\, da\, dn \geq \int_{U\times A_{\geq 3t_0}\times V} e^{\lambda(H(\overline{n}))}\, e^{(2\rho+\lambda)(\log a)}\, d\overline{n}\, da\, dn,$$

implicando que

$$I_S(s,[(1,1)]) \geq \left(\int_U e^{\lambda(H(\overline{n}))}\, d\overline{n}\right)\left(\int_V dn\right)\left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 3t_0}} e^{(2+s)t} dt\right),$$

onde $\mathbb{R}_{\geq 3t_0} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 3t_0\}$. A última integral diverge se $s \geq -2$ e as demais são positivas. Portanto, $I_S(s, [(1,1)])$ diverge se $s \geq -2$. Isso implica que $I_S(s, x)$ diverge, para todo $x \in \mathcal{O}^+$, pelo Corolário 4.5.4. □

Lema 4.6.13 *Se $x \notin \mathcal{O}^+$ então $I_S(s, x)$ diverge para todo s.*

Demonstração: Os Lemas 4.5.3 e 4.6.12 garantem que se $s > -2$ então $I_S(s, x)$ diverge, para todo $x \in \mathbb{P}^1$. De fato, para todo $x \in \mathbb{P}^1$, existe $h \in S$ tal que $h \cdot x \in \mathcal{O}^+$. Pelo Lema 4.6.12, $I_S(s, h \cdot x)$ diverge. O Lema 4.5.3 mostra então que $I_S(s, x)$ também diverge.

Consideremos as decomposições de Iwasawa $G = KAN^+ = KAN^-$ associadas à base canônica $\mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$. Assim, $x_0 = [(1,0)]$ é a origem de $\mathbb{P}^1$. Seja Z o conjunto das matrizes (em relação à base $\mathcal{C}$) da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s > 0, \quad t > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Temos que $Z \subset \mathrm{int} S$. Portanto, pela fórmula integral associada à decomposição de Bruhat N^-AN^+,

$$I_S(\lambda, [(1,0)]) \geq \int_Z e^{\lambda(H(\overline{n}))} e^{(2\rho+\lambda)(\log a)} \, d\overline{n} \, da \, dn.$$

Sejam X o conjunto das matrizes em N^- tais que $s > 0$, Y das matrizes em N^+ com $t > 0$. Então, a integral acima fica

$$\left(\int_X e^{\lambda(H(\overline{n}))} \, d\overline{n} \right) \left(\int_Y dn \right) \left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{(2+s)t} \, dt \right).$$

Esta integral diverge se $2+s < 0$, mostrando que $I_S(s, [(1,0)])$ não converge para $s < -2$.

Da mesma forma, podemos mostrar que $I_S(s, [(0,1)])$ não converge para nenhum valor de s.

Finalmente, o Lema 4.5.3 garante que $I_S(s, x)$ não converge para nenhum valor de s se $x \notin \mathcal{O}^+$, já que para x desse tipo, $S \cdot x$ contém $[(1,0)]$ ou $[(0,1)]$. □

4.6.3 Expressão para $I_S^{\lambda}(x)$

Se $h \in S \cap S^{-1}$ então $S = Sh = hS$. De fato, cada $s \in S$ se escreve $s = (sh^{-1})\, h \in Sh$ e $s = h\,(h^{-1}s) \in hS$. Assim, pelo Lema 4.5.2, temos:

Proposição 4.6.14 *Se $h \in S \cap S^{-1}$ e $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_{\Theta}(S)$ então $\chi_{\lambda}^{\Theta}(h, x)\, I_S(\lambda, h \cdot x) = I_S(\lambda, x)$.*

Fixemos λ tal que $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_{\Theta}(S)$ para algum $x \in \mathbb{F}_{\Theta}$. Pela Proposição 4.6.14, ao longo das órbitas do grupo das unidades $L(S) := S \cap S^{-1}$ de S, a função I_S^{λ} é dada, a menos de normalização por χ_{λ}^{Θ}, isto é,

$$I_S^{\lambda}(h \cdot x) = I_S^{\lambda}(x)\, \chi_{\lambda}^{\Theta}(h, x)^{-1}.$$

Nesses casos, podemos determinar I_S^{λ}, ao longo dessas órbitas, sem ter que efetuar a integral.

Exemplo: Seja $S = \mathrm{Sl}^{+}(2, \mathbb{R})$ e o cociclo

$$\chi_s(g, [v]) = \frac{\|gv\|^s}{\|v\|^s}, \qquad s < -2,$$

$v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. O grupo

$$A = \left\{ g_t = \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

é transitivo no interior do c.c.i. de S e dado (x, y), $x, y > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}(x, y) = \left(\sqrt{\frac{x}{y}}, \sqrt{\frac{y}{x}} \right) = \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} (1, 1),$$

com $t = \log \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{x}{y}$. Portanto,

$$I_S([(x, y)]) = I_S([(1, 1)])\, \|g_t(1, 1)\|^{-s},$$

com $t = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{x}{y}$. Como $g_t(1, 1) = \left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}, \sqrt{\dfrac{y}{x}} \right)$, cuja norma é $\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy} \right)^{1/2}$, obtemos

$$I_S([(x, y)]) = I_S([(1, 1)]) \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)^{-s/2}, \qquad x,\ y > 0,\ s < -2.$$

$\square$

Capítulo 5

Isometrias de Conjuntos Controláveis Invariantes

Seja G um grupo de Lie conexo, semi-simples, não compacto e com centro finito. Sejam $S \subset G$ um semigrupo com $\operatorname{int} S \neq \emptyset$ e $\mathcal{O} \subset \mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ uma órbita do subgrupo das unidades $L(S)$ de S, contida no domínio de definição $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ da função característica I_S^λ. Neste capítulo, definimos uma aplicação $\Phi : \mathcal{O} \to L^2(S)$ usando a função I_S^λ. Mostramos que se Φ é diferenciável então Φ é, de fato, uma imersão. Esta imersão induz uma estrutura Riemanniana em $\mathcal{O}$, isto é, $\mathcal{O}$ pode ser vista como uma variedade Riemanniana. Um dos resultados deste capítulo assegura que os elementos de $L(S)$ preservam a distância induzida pela métrica Riemanniana. Combinando os resultados obtidos neste capítulo com alguns resultados conhecidos de Geometria Riemanniana, obtemos uma condição necessária para que um subgrupo esteja contido em um semigrupo próprio com interior não vazio.

5.1 Mais Propriedades de Cociclos

O objetivo nesta seção é obter alguns resultados sobre os cociclos K-invariantes, que serão usados na Seção 5.2.

Dados $x \in \mathbb{F}_\Theta$ e $A \in \mathfrak{g}$, denotemos por $\widetilde{A}$ o fluxo induzido por A no *flag*, isto é,

$\widetilde{A}(x) = \dfrac{d}{dt}\left(\exp(tA)\cdot x\right)_{|t=0}$ e por $\chi_\lambda^\Theta\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right)$ a derivada $\dfrac{d}{dt}\chi_\lambda^\Theta\left(g, \exp(tA)\cdot x\right)_{|t=0}$.

Lema 5.1.1 *Se* $A^l\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)$ *denota* $\dfrac{d}{dt}\chi_\lambda^\Theta\left(g\exp(tA),x\right)_{|t=0}$ *então*

$$\chi_\lambda^\Theta\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right) = A^l\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right) - \chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)A^l\chi_\lambda^\Theta\left(1,x\right).$$

Demonstração: Pela fórmula do cociclo

$$\chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA),x) = \chi_\lambda^\Theta(g,\exp(tA)\cdot x)\ \chi_\lambda^\Theta(\exp(tA),x),$$

portanto derivando essa expressão em relação a t, em $t=0$, e usando as definições das notações, segue o resultado. □

A função σ definida por $\sigma\left(g,x\right) = \log\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)$ é um cociclo aditivo. Além disso,

$$\sigma\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right) = \frac{d}{dt}\sigma\left(g,\exp(tA)\cdot x\right)_{|t=0} = \frac{\chi_\lambda^\Theta\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right)}{\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)}.$$

Lema 5.1.2 *Fixando* $x = u\cdot x_0 \in \mathbb{F}_\Theta$, *temos que* $H(gu)$, $\chi_\lambda^\Theta(g,x)$, $\sigma(g,x)$ *e* $\sigma\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right)$ *são analíticas como função de* g.

Demonstração: Notemos que se x é fixo então u é fixo e $H\left(gu\right)$ é a composta da translação à direita por u, com a projeção $G = KAN^+ \to A$ e com o logaritmo $\log : A \to \mathfrak{a}$, que são funções analíticas, mostrando que $H(gu)$ é analítica como função de g. Juntando isso com a função linear λ e depois com a exponencial, segue que $\sigma\left(g,x\right) = \lambda(H(gu))$ e $\chi_\lambda^\Theta(g,x)$ são analíticas como função de g.

O segundo membro na fórmula do lema anterior é analítico, pois envolve apenas a função analítica $\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)$ e suas derivadas em relação a g. Portanto, $\chi_\lambda^\Theta\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right)$ é analítica como função de g, implicando que $\sigma\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right)$ é analítica como função de g. □

Lema 5.1.3 *Suponha que, para todo* $g \in G$, *vale a igualdade*

$$\chi_\lambda^\Theta\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right) = c\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right),$$

com c *constante e* $x \in \mathbb{F}_\Theta$ *fixado. Então,* $\chi_\lambda^\Theta\left(g, \widetilde{A}\left(x\right)\right) = 0$, *para todo* $g \in G$.

Demonstração: Por hipótese, a função analítica $\sigma\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)$ é constante em G. Por outro lado, vale a fórmula

$$\begin{aligned}\sigma\left(gh,\widetilde{A}\,(x)\right) &= \frac{d}{dt}\,\sigma\left(gh,\exp(tA)\cdot x\right)_{|t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\sigma\left(g,h\exp(tA)\cdot x\right)+\sigma\left(h,\exp(tA)\cdot x\right)\right)_{|t=0}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(h\exp(tA)\cdot x\right)_{|t=0} &= \frac{d}{dt}h\exp(tA)h^{-1}(h\cdot x)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\ \exp(t\mathrm{Ad}(h)A)(h\cdot x)_{|t=0}\\ &= \left(\widetilde{\mathrm{Ad}\,(h)\,A}\right)(h\cdot x)\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma\left(gh,\widetilde{A}\,(x)\right)=\sigma\left(g,\widetilde{\mathrm{Ad}\,(h)\,A}\,(h\cdot x)\right)+\sigma\left(h,\widetilde{A}\,(x)\right).$$

Em particular, se $h\cdot x=x$ e h está no centralizador de A, então $\sigma\left(gh,\widetilde{A}\,(x)\right)=\sigma\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)+\sigma\left(h,\widetilde{A}\,(x)\right)$. Logo a função $\sigma\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)$ restrita ao centralizador de A dentro da isotropia de x, é um homomorfismo aditivo como função de g. Mas a única possibilidade para um homomorfismo ser constante é quando ele é nulo. Então, $\sigma\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)$ é zero no centralizador de A. Logo, $\sigma\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)$ é sempre zero, já que é constante. Portanto, $c=0$ e daí que $\chi_\lambda^\Theta\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)=0$, para todo $g\in G$. □

Proposição 5.1.4 *Se, para todo $g\in G$, vale $\chi_\lambda^\Theta\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)=c\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)$, com c constante e $x\in\mathbb{F}_\Theta$ fixado, então*

$$\chi_\lambda^\Theta\left(g,\exp(tA)\cdot x\right) \;=\; \chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right),$$

para todo $g\in G$.

Demonstração: Pelo Lema 5.1.3, $\chi_\lambda^\Theta\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)=0$, para todo $g\in G$. Juntando esta igualdade com a fórmula do Lema 5.1.1,

$$\chi_\lambda^\Theta\left(g,\widetilde{A}\,(x)\right)=A^l\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)-\chi_\lambda^\Theta\left(g,x\right)A^l\chi_\lambda^\Theta\left(1,x\right),$$

segue que $A^l\chi_\lambda^\Theta(g,x) = \chi_\lambda^\Theta(g,x)\,A^l\chi_\lambda^\Theta(1,x)$, para todo $g \in G$. Seja ψ a função $\psi(t) = \chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA),x)$. Então,

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \frac{d}{ds}\psi(t+s)_{|s=0} = \frac{d}{ds}\chi_\lambda^\Theta(g\exp\left((t+s)A\right),x)_{|s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA)\exp(sA),x)_{|s=0} = A^l\chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA),x) \\
&= \chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA),x)A^l\chi_\lambda^\Theta(1,x) \\
&= a\psi(t),
\end{aligned}$$

onde $a = A\chi_\lambda^\Theta(1,x)$ é uma constante. Daí, $\psi(t) = \psi(0)\,e^{at}$, isto é,

$$\chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA),x) = \chi_\lambda^\Theta(g,x)\,e^{at}.$$

Tomando, em particular, $g = 1$, segue que $\chi_\lambda^\Theta(\exp(tA),x) = e^{at}$. Pela fórmula do cociclo,

$$\chi_\lambda^\Theta(g\exp(tA),x) = \chi_\lambda^\Theta(g,\exp(tA)\cdot x)\ \chi_\lambda^\Theta(\exp(tA),x).$$

Combinando as três últimas igualdades, temos

$$\chi_\lambda^\Theta(g,\exp(tA)\cdot x) = \chi_\lambda^\Theta(g,x),$$

para todo $g \in G$. □

Lema 5.1.5 *Seja $\gamma_t = k_t a_t n_t$ uma curva em G, onde k_t, a_t e n_t são curvas em K, A e N^+, respectivamente. Então*

$$\gamma_0' = d(D_{a_0n_0})_{k_0}(k_0') + d(E_{k_0})_{a_0n_0}\left(d(D_{n_0})_{a_0}(a_0')\right) + d(E_{k_0a_0})_{n_0}(n_0'),$$

onde D e E são as translações à direita e à esquerda, respectivamente, e r_0' denota $\frac{dr_t}{dt}|_{t=0}$.

Demonstração: Considerando a aplicação $\Psi : K \times A \times N^+ \to G$ dada por $\Psi(k,a,n) = kan$, temos $\gamma_t = k_t a_t n_t = \Psi(k_t,a_t,n_t)$. Logo,

$$\gamma_0' = \partial_1\Psi(k_0,a_0,n_0) + \partial_2\Phi(k_0,a_0,n_0) + \partial_3\Psi(k_0,a_0,n_0),$$

onde ∂_i denota a derivada parcial em relação à coordenada i. Mas, se $z_0 = (k_0,a_0,n_0)$ então

1. $\partial_1\Psi(z_0) = \dfrac{d}{dt}(k_t a_0 n_0)_{|t=0} = \dfrac{d}{dt}\left(D_{a_0 n_0}(k_t)\right)_{|t=0} = d(D_{a_0 n_0})_{k_0}(k_0');$
2. $\partial_2\Psi(z_0) = \dfrac{d}{dt}(k_0 a_t n_0)_{|t=0} = \dfrac{d}{dt}\left(E_{k_0}(D_{n_0}(a_t))\right)_{|t=0} = d(E_{k_0})_{a_0 n_0}\left(d(D_{n_0})_{a_0}(a_0')\right);$
3. $\partial_3\Psi(z_0) = \dfrac{d}{dt}(k_0 a_0 n_t)_{|t=0} = \dfrac{d}{dt}\left(E_{k_0 a_0}(n_t)\right)_{|t=0} = d(E_{k_0 a_0})_{n_0}(n_0');$

concluindo o lema. □

Denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta$ o produto interno e por $\|\cdot\|_\theta$ a norma correspondente, em $\mathfrak{g}$, induzidos pela forma de Cartan-Killing e pela involução de Cartan θ. Temos que $\|\cdot\|_\theta$ é K-invariante.

Lema 5.1.6 *Se $u \in K$ e $H(\exp(tA)u) = tA$, para todos $A \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$, então $u \in M$.*

Demonstração: Sejam $A \in \mathfrak{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Escrevendo $\exp(tA)u = k_t a_t n_t \in KAN^+$, notemos que $k_0 = u$ e $a_0 = n_0 = 1$. Derivando em relação a t, em $t = 0$, e usando o Lema 5.1.5, obtemos

$$d(D_u)_1(A) = k_0' + d(E_u)_1(a_0') + d(E_u)_1(n_0').$$

Daí, $d(E_{u^{-1}})_u \circ d(D_u)_1(A) = d(E_{u^{-1}})_u(k_0') + a_0' + n_0'$, isto é,

$$\mathrm{Ad}(u^{-1})A = d(E_{u^{-1}})_u(k_0') + a_0' + n_0'. \tag{5.1}$$

A equação (5.1) é a decomposição de Iwasawa de $\mathrm{Ad}(u^{-1})A$, assim

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})A) = a_0', \tag{5.2}$$

onde $\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}$ denota a projeção ortogonal de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{a}$ (lembremos que $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}^+$ é o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$, em relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta$). Como $H(\exp(tA)u) = \log a_t$ temos, por hipótese, $a_t = \exp(tA)$. Logo, $a_0' = A$. Portanto,

$$\|\mathrm{Ad}(u^{-1})A\|_\theta = \|A\|_\theta = \|\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})A)\|_\theta,$$

já que $u \in K$ e $\|\cdot\|_\theta$ é uma norma K-invariante. Mas esta igualdade significa que $\mathrm{Ad}(u^{-1})A \in \mathfrak{a}$ e portanto

$$A = \mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})A) = \mathrm{Ad}(u^{-1})A.$$

Como $A \in \mathfrak{a}$ é arbitrário, segue que $u \in M$. $\square$

Com isso obtemos a recíproca do Lema 4.4.4:

Lema 5.1.7 *Se $u_1, u_2 \in K$ e $H(gu_1) = H(gu_2)$, para todo $g \in G$, então $u_1^{-1}u_2 \in M$.*

Demonstração: Basta tomar $g_t = \exp(tA)u_1^{-1} \in G$, com $A \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$, e usar o lema anterior. $\square$

Lema 5.1.8 *Se $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ e $u \in K$ são tais que $\lambda(H(\exp(tA)u)) = \lambda(tA)$, para todos $A \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$, então $\mathrm{Ad}(u)H_\lambda = H_\lambda$, onde $H_\lambda \in \mathfrak{a}$ é tal que $\lambda(H) = \langle H, H_\lambda\rangle_\theta$, para todo $H \in \mathfrak{a}$.*

Demonstração: Seja $A \in \mathfrak{a}$. Escrevendo $\exp(tA)u = k_t a_t n_t \in KAN^+$, temos da hipótese que, $\langle \log a_t, H_\lambda\rangle_\theta = \langle tA, H_\lambda\rangle_\theta$. Daí e por (5.2),

$$\begin{aligned}\langle A, H_\lambda\rangle_\theta &= \frac{d}{dt}\langle tA, H_\lambda\rangle_{\theta|t=0} = \frac{d}{dt}\langle \log a_t, H_\lambda\rangle_{\theta|t=0} = \langle a_0', H_\lambda\rangle_\theta \\ &= \langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})X), H_\lambda\rangle_\theta.\end{aligned}$$

Logo, $\langle \mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})A) - A, H_\lambda\rangle_\theta = 0, \;$ para todo $A \in \mathfrak{a}$, isto é,

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})A) - A \in H_\lambda^\perp, \quad \text{para todo} \;\; A \in \mathfrak{a}.$$

Assim, podemos escrever $\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda) \; = \; H_\lambda + Y$, com $Y \in H_\lambda^\perp$. Daí,

$$\|H_\lambda\|_\theta^2 + \|Y\|_\theta^2 \;=\; \|H_\lambda + Y\|_\theta^2 \;=\; \|\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda)\|_\theta^2 \;\leq\; \|\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda\|_\theta^2 \;=\; \|H_\lambda\|_\theta^2.$$

Logo, $Y = 0$ e portanto,

$$\|\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda\|_\theta = \|H_\lambda\|_\theta = \|\mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda\|_\theta,$$

isto é, $\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda \in \mathfrak{a}\;$ e portanto, $\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda = \mathrm{pr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ad}(u^{-1})H_\lambda) = H_\lambda$. $\square$

Dizemos que um elemento $H \in \mathfrak{a}_\Theta$ é **Θ-regular** se $\alpha(H) \neq 0$, para toda raiz simples $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. De modo análogo, dizemos que $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ é **Θ-regular** se $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$, para toda $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. Notemos que se $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ então $H_\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta$. Além disso, λ é Θ-regular se, e somente se, H_λ é Θ-regular. Segue da definição que o conjunto dos elementos Θ-regulares é aberto e denso.

Proposição 5.1.9 *Sejam $\Theta \subset \Sigma$ e $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ um funcional Θ-regular. Se $h \in G$ e $\chi_\lambda^\Theta(\exp(tA), h \cdot x_0) = \chi_\lambda^\Theta(\exp(tA), x_0)$, para todos $A \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$, então $h \cdot x_0 = x_0$, sendo x_0 a origem de $\mathbb{F}_\Theta$.*

Demonstração: Seja $u \in K$ tal que $u \cdot x_0 = h \cdot x_0$. Por hipótese, $\lambda(H(\exp(tA)u)) = \lambda(tA)$, para todos $A \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$. Pelo Lema 5.1.8, $\mathrm{Ad}(u)H_\lambda = H_\lambda$. Como H_λ é um elemento Θ-regular, segue que u centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$ e portanto está em P_Θ. Logo, $h \cdot x_0 = u \cdot x_0 = x_0$. $\square$

Teorema 5.1.10 *Sejam $\Theta \subset \Sigma$ e $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$ um funcional Θ-regular. Se $x, y \in \mathbb{F}_\Theta$ são tais que $\chi_\lambda^\Theta(g, x) = \chi_\lambda^\Theta(g, y)$, para todo $g \in G$, então $y = x$.*

Demonstração: Sejam $u_1, u_2 \in K$ tais que $x = u_1 \cdot x_0$ e $y = u_2 \cdot x_0$. Como χ_λ^Θ é um cociclo K-invariante segue da hipótese que

$$\chi_\lambda^\Theta(gu_1, x_0) = \chi_\lambda^\Theta(g, u_1 \cdot x_0) = \chi_\lambda^\Theta\left(gu_1u_1^{-1}, u_2 \cdot x_0\right) = \chi_\lambda^\Theta\left(gu_1, u_1^{-1}u_2 \cdot x_0\right), \tag{5.3}$$

para todo $g \in G$. Dados $A \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$, seja $g_t = \exp(tA)u_1^{-1}$. Substituindo g por g_t em (5.3), $\chi_\lambda^\Theta(\exp(tA), x_0) = \chi_\lambda^\Theta\left(\exp(tA), u_1^{-1}u_2x_0\right)$, para todos $X \in \mathfrak{a}$ e $t \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 5.1.9, $u_1^{-1}u_2 \cdot x_0 = x_0$ e portanto, $y = u_2 \cdot x_0 = u_1 \cdot x_0 = x$. $\square$

5.2 Imersões

Sejam $S \subset G$ um semigrupo próprio com $\mathrm{int}\, S \neq \emptyset$ e tipo parabólico Θ, e $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G tal que $A^+ \cap (\mathrm{int}\, S) \neq \emptyset$. Fixemos $\lambda \in \mathfrak{a}_\Theta^*$, Θ-regular, tal que $(\lambda, x) \in \mathfrak{D}_\Theta(S)$ para algum $x \in \mathbb{F}_\Theta$. Denotemos por I_S^λ a função dada por $I_S^\lambda(x) = I_S(\lambda, x)$ e por $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ o domínio de I_S^λ. Para cada $x \in \mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$, a função

$$g \in S \ \mapsto \ \nu(g,x) \ := \ \frac{\chi_\lambda^\Theta(g,x)}{I_S^\lambda(x)}$$

está bem definida e, na verdade, está em $L^1(S, ds)$, onde ds denota a **restrição a S da medida de Haar** dg de G. De um modo mais geral, dado $p \geq 1$, as funções

$$g \in S \ \mapsto \ \nu(g,x)^{1/p}$$

estão em $L^p(S, ds)$. Assim, as aplicações $\Phi_p \ : \ \mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S) \ \to \ L^p(S, ds)$ dadas por

$$\Phi_p(x)g \ = \ \nu(g,x)^{1/p}$$

estão bem definidas. Como para todo x,

$$\int_S \nu\left(g,x\right) \ ds = 1,$$

as aplicações Φ_p assumem valores na esfera de norma 1 de $L^p\left(S, ds\right)$.

Sejam $L(S)$ o grupo das unidades de S, isto é, $L(S) = S \cap S^{-1}$ e $\mathfrak{l}$ a álgebra de Lie de $L(S)$. O subgrupo $L(S)$ atua no *flag* $\mathbb{F}_\Theta$, por restrição da ação de G. Em vista do Corolário 4.5.5, se $x \in \mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ então a órbita $L(S) \cdot x$ fica contida no domínio $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$. Além disso, se uma órbita de $L(S)$ intercepta $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ então esta órbita necessariamente deve estar contida em $\mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$, pelo mesmo corolário citado acima.

Dados $x \in \mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ e $h \in L(S)$ temos, da Proposição 4.6.14, que

$$I_S^\lambda(h \cdot x) = I_S^\lambda(x) \ \chi_\lambda^\Theta(h,x)^{-1}.$$

Logo, se $A \in \mathfrak{l}$ então

$$\frac{I_S^\lambda\left(\exp(tA) \cdot x\right) - I_S^\lambda\left(x\right)}{t} = I_S^\lambda\left(x\right) \frac{\chi_\lambda(\exp(tA),x)^{-1} - \chi_\lambda(1,x)^{-1}}{t}.$$

Assim obtemos o seguinte:

Proposição 5.2.1 *Se $x \in \mathfrak{D}_\Theta^\lambda(S)$ e $A \in \mathfrak{l}$ então a derivada de I_S^λ no ponto x, na direção do campo invariante determinado por A existe e, além disso,*

$$\frac{d}{dt} I_S^\lambda\left(\exp(tA) \cdot x\right)_{|t=0} = -I_S^\lambda\left(x\right) A^l \chi_\lambda^\Theta(1,x).$$

O próximo resultado mostra que a imagem de uma órbita $L(S) \cdot x$ por Φ_p é a translação à direita de $\Phi_p(x)$, pelo subgrupo $L(S)$.

Proposição 5.2.2 *Se $x \in \mathcal{O}$ e $h \in L(S)$ então $\Phi_p(h \cdot x) = \Phi_p(x) \circ D_h$, onde D_h denota a translação à direita por h.*

Demonstração: Pela Proposição 4.6.14, se $x \in \mathfrak{D}^\lambda_\Theta(S)$ e $h \in L(S)$ então

$$I^\lambda_S(h \cdot x) = I^\lambda_S(x)\ \chi^\Theta_\lambda(h,x)^{-1}.$$

Assim, usando as propriedades de cociclos

$$\frac{\chi^\Theta_\lambda(g, h \cdot x)}{I_S(h \cdot x)} = \frac{\chi^\Theta_\lambda(gh, x)\chi^\Theta_\lambda(h,x)^{-1}}{I_S(x)\chi^\Theta_\lambda(h,x)^{-1}} = \frac{\chi^\Theta_\lambda(gh,x)}{I_S(x)},$$

para todo $g \in S$. Logo

$$\Phi_p(h \cdot x)(g) = \Phi_p(x)(gh) = \Phi_p(x) \circ D_h(g),$$

para todo $g \in S$. $\square$

Daqui por diante, denotemos por $\mathcal{O}$ uma órbita de $L(S)$ tal que $\mathcal{O} \subset \mathfrak{D}^\lambda_\Theta(S)$. Denotemos, também, por Φ a restrição $\Phi|_\mathcal{O}$ de $\Phi := \Phi_2$ à subvariedade $\mathcal{O}$. Como a aplicação Φ é definida como potência do quociente do cociclo por I^λ_S segue que fixando $g \in S$ a função $x \mapsto \Phi(x)g$ é diferenciável.

Se $\Phi : \mathcal{O} \to L^2(S, ds)$ é diferenciável (no sentido de **Fréchet**) então podemos calcular as suas derivadas direcionais (derivadas de **Gâteaux**) (veja Ambrosetti e Prodi [1]). Neste caso, podemos calcular as derivadas direcionais ponto a ponto, a menos de um conjunto de medida nula, como vemos na próxima proposição.

Proposição 5.2.3 *Se Φ é diferenciável e γ é uma curva em $\mathcal{O}$, com $\gamma_0 = x$ e $\gamma'_0 = v$, então existe um subconjunto $E \subset S$ de medida nula tal que*

$$(d\Phi_x(v))\, g = \frac{d}{dt}\left(\Phi(\gamma_t)g\right)_{|t=0},$$

para todo $g \in S \setminus E$.

Demonstração: Temos que

$$d\Phi_x(v) \;=\; \frac{d}{dt}\Phi\left(\gamma_t\right)_{|t=0} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{\Phi\left(\gamma_t\right)-\Phi\left(x\right)}{t}.$$

Seja ψ a aplicação contínua com valores em $L^2(S,ds)$ definida por

$$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{\Phi\left(\gamma_t\right)-\Phi\left(x\right)}{t} & \text{se} \quad t\neq 0,\\ d\Phi_x(v) & \text{se} \quad t=0.\end{cases}$$

Seja (t_n) uma seqüência (arbitrária) de números reais tal que $t_n \neq 0$, para todo n, e $t_n \to 0$, quando $n \to +\infty$. Então $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\psi(t_n)-\psi(0)\|_{L^2}=0$, onde $\|\cdot\|_{L^2}$ denota a norma canônica de $L^2(S,ds)$. Logo, existem uma subseqüência (t_{n_k}) e um subconjunto $E\subset S$ de medida nula tal que $\psi(t_{n_k})g \to \psi(0)g$, para todo $g\in S\setminus E$ (veja [26], Teorema 3.12, página 67). Isso significa que, fixando $g\in S\setminus E$, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=\psi(t)g$ é contínua em 0 (veja Lima [22], Corolário 2, página 126). Logo,

$$\begin{aligned}\left(d\Phi_x(v)\right)g \;&=\; f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\Phi\left(\gamma_t\right)g-\Phi\left(x\right)g}{t}\\ &=\; \frac{d}{dt}\left(\Phi(\gamma_t)g\right)_{|t=0},\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Teorema 5.2.4 *Se Φ é diferenciável e $\lambda\in\mathfrak{a}^*_\Theta$ é Θ-regular então a aplicação Φ é uma imersão de $\mathcal{O}$ em $L^2(S,ds)$.*

Demonstração: Sejam $x\in\mathcal{O}$ e $v\in\mathcal{O}_x$, onde $\mathcal{O}_x$ denota o espaço tangente a $\mathcal{O}$ em x. O vetor v se escreve como $v=\widetilde{A}(x)$, com $A\in\mathfrak{l}$. Pela Proposição 5.2.3, existe um subconjunto $E\subset S$ de medida nula tal que

$$\left(d\Phi_x(\widetilde{A}(x))\right)g=\frac{d}{dt}\left(\Phi(\exp(tA)\cdot x)g\right)_{|t=0},$$

para todo $g\in S\setminus E$. Pela Proposição 5.2.2,

$$\Phi(\exp(tA)\cdot x)g=\Phi(x)(g\exp(tA)).$$

Assim, se $d\Phi_x(\widetilde{A}(x)) = 0$ então

$$\begin{aligned} 0 &= d\Phi_x(\widetilde{A}(x))g = \frac{d}{dt}\,\nu(g\exp(tA),x)^{1/2}{}_{|t=0} \\ &= \frac{1}{2}\,\nu(g,x)^{-1/2}\,\frac{d}{dt}\,\nu(g\exp(tA),x)_{|t=0} \\ &= \frac{1}{2}\,\nu(g,x)^{-1/2}\,\frac{1}{I_S^\lambda(x)}\,A^l\chi_\lambda^\Theta(g,x), \end{aligned}$$

para todo $g \in S \setminus E$. Logo, $A^l\chi_\lambda^\Theta(g,x) = 0$, para todo $g \in S \setminus E$. Pelo Lema 5.1.1,

$$\sigma\left(g,\widetilde{A}(x)\right) = \frac{\chi_\lambda^\Theta\left(g,\widetilde{A}(x)\right)}{\chi_\lambda^\Theta\,(g,x)} = -A^l\chi_\lambda^\Theta(1,x), \tag{5.4}$$

para todo $g \in S \setminus E$. Seja

$$\widetilde{E} = \{g \in \operatorname{int} S : g \notin E\}.$$

Como a medida de Haar é não nula em conjuntos abertos (não vazio) (veja [16], Capítulo VIII, página 532), segue que $\widetilde{E}$ é não vazio e, na verdade, é denso em $\operatorname{int} S$. Agora, $A^l\chi_\lambda^\Theta(1,x)$ é constante (como função de g) e a igualdade (5.4) vale no subconjunto denso $\widetilde{E}$ de $\operatorname{int} S$. Logo, por continuidade, $\sigma\left(g,\widetilde{A}(x)\right)$ é constante no aberto $\operatorname{int} S$ e portanto, é constante em todo G, já que $\sigma\left(g,\widetilde{A}(x)\right)$ é analítica como função de g, pelo Lema 5.1.2, e G é conexo, por hipótese. Pela Proposição 5.1.4, temos que $\chi_\lambda^\Theta(g,\exp(tA)\cdot x) = \chi_\lambda^\Theta(g,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $g \in G$. Logo, $\exp(tA)\cdot x = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (veja Proposição 5.1.10). Portanto, $\widetilde{A}(x) = 0$, concluindo o teorema. □

5.3 Isometrias

Se Φ é diferenciável então a imersão Φ, definida na seção anterior, induz um produto interno em cada espaço tangente de $\mathcal{O}$. Para ser mais preciso, se $x \in \mathcal{O}$ então a função $\langle\cdot,\cdot\rangle_x : \mathcal{O}_x \times \mathcal{O}_x \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle u,v\rangle_x = \langle d\Phi_x(u), d\Phi_x(v)\rangle_{L^2}.$$

é um produto interno em $\mathcal{O}_x$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ é o produto interno canônico de $L^2(S,ds)$. Denotemos a norma correspondente por $\|\cdot\|_x$.

Assim a aplicação φ definida por $\varphi_x(u,v) = \langle u,v\rangle_x$, onde $x \in \mathcal{O}$ e $u,v \in \mathcal{O}_x$, define uma **estrutura Riemanniana** em $\mathcal{O}$, isto é, $(\mathcal{O},\varphi)$ é uma **variedade Riemanniana**.

Dados $x,y \in \mathcal{O}$, denotemos por $\Gamma(x,y)$ o conjunto de todas as curvas $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$ com $\gamma_a = x$ e $\gamma_b = y$ e, por $c(\gamma)$ o comprimento da curva γ, em relação à φ, isto é,

$$c(\gamma) = \int_a^b \varphi_{\gamma_t}(\gamma_t',\gamma_t')^{1/2}\, dt = \int_a^b \|\gamma_t'\|_{\gamma_t}\, dt.$$

A **distância** de x a y em $(\mathcal{O},\varphi)$ é definida por

$$d(x,y) = \inf\{c(\gamma) : \gamma \in \Gamma(x,y)\}.$$

Sejam $x,y \in \mathcal{O}$ e $h \in L(S)$. Se $\gamma \in \Gamma(x,y)$ então $h\cdot\gamma \in \Gamma(h\cdot x, h\cdot y)$. Por outro lado, se $\widetilde{\gamma} \in \Gamma(h\cdot x, h\cdot y)$ então $\gamma = h^{-1}\cdot\widetilde{\gamma} \in \Gamma(x,y)$. Logo, $\widetilde{\gamma} = h\cdot\gamma$ com $\gamma \in \Gamma(x,y)$. Isto significa que toda curva em $\Gamma(h\cdot x, h\cdot y)$ é da forma $h\cdot\gamma$ com $\gamma \in \Gamma(x,y)$.

Se $h \in L(S)$ temos, da Proposição 5.2.2,

$$\Phi(h\cdot\gamma_t) = \Phi(\gamma_t)\circ D_h$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 5.2.3, existe um subconjunto $E_1 \subset S$ de medida nula tal que

$$\begin{aligned}(d\Phi_x(\gamma_0'))\, g &= \frac{d}{dt}\left(\Phi(\gamma_t)g\right)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\chi_\lambda^\Theta(g,\gamma_t)}{I_S^\lambda(\gamma_t)}\right)^{1/2}_{|t=0}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_\lambda^\Theta(g,x)}{I_S^\lambda(x)}\right)^{-1/2} \frac{\chi_\lambda^\Theta(g,\gamma_0')I_S^\lambda(x) - \chi_\lambda^\Theta(g,x)\left(I_S^\lambda\right)'(x)}{I_S^\lambda(x)^2},\end{aligned}$$

para todo $g \in S\setminus E_1$, onde $\chi_\lambda^\Theta(g,\gamma_0')$ e $\left(I_S^\lambda\right)'(x)$ denotam $\dfrac{d}{dt}\chi_\lambda^\Theta(g,\gamma_t)_{|t=0}$ e $\dfrac{d}{dt}I_S^\lambda(\gamma_t)_{|t=0}$, respectivamente. Por outro lado, existe $E_2 \subset S$ de medida nula tal que

$$\begin{aligned}(d\Phi_{h\cdot x}(dh_x(\gamma_0')))\, g &= \frac{d}{dt}\left(\Phi(h\cdot\gamma_t)g\right)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\chi_\lambda^\Theta(gh,\gamma_t)}{I_S^\lambda(\gamma_t)}\right)^{1/2}_{|t=0}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_\lambda^\Theta(gh,x)}{I_S^\lambda(x)}\right)^{-1/2} \frac{\chi_\lambda^\Theta(gh,\gamma_0')I_S^\lambda(x) - \chi_\lambda^\Theta(gh,x)\left(I_S^\lambda\right)'(x)}{I_S^\lambda(x)^2},\end{aligned}$$

para todo $g \in S \setminus E_2$. Combinando as duas igualdades acima, obtemos

$$(d\Phi_{h\cdot x}\left(dh_x\left(\gamma_0'\right)\right))\, g = \left(d\Phi_x\left(\gamma_0'\right)\right) gh, \tag{5.5}$$

para todo $g \in S \setminus E$, onde $E = E_1 \cup E_2$.

Teorema 5.3.1 *Sejam $x \in \mathcal{O}$ e $h \in L(S)$. Se Φ é diferenciável então*

$$\|dh_x(v)\|_{h\cdot x} = \|v\|_x,$$

para todo $v \in \mathcal{O}_x$.

Demonstração: Sejam $h \in L(S)$, $x \in \mathcal{O}$ e $v \in \mathcal{O}_x$. Usando a invariância à direita de dg, a igualdade (5.5) e o fato que $Sh = S$ (pois $h \in L(S) = S \cap S^{-1}$) temos

$$\begin{aligned}
\|dh_x(v)\|_{h\cdot x}^2 &= \|d\Phi_{h\cdot x}\left(dh_x(v)\right)\|_{L^2}^2 = \int_S \left|\left(d\Phi_{h\cdot x}\left(dh_x\left(v\right)\right)\right) g\right|^2 ds \\
&= \int_{S\setminus E} \left|\left(d\Phi_{h\cdot x}\left(dh_x\left(v\right)\right)\right) g\right|^2 ds = \int_{S\setminus E} \left|\left(d\Phi_x\left(v\right)\right) gh\right|^2 ds \\
&= \int_S \left|\left(d\Phi_x\left(v\right)\right) gh\right|^2 ds = \int_G 1_{Sh}(gh) \left|\left(d\Phi_x\left(v\right)\right) gh\right|^2 dg \\
&= \int_G 1_S(g) \left|\left(d\Phi_x\left(v\right)\right) g\right|^2 dg = \int_S \left|\left(d\Phi_x\left(v\right)\right) g\right|^2 ds = \|d\Phi_x(v)\|_{L^2}^2 \\
&= \|v\|_x^2,
\end{aligned}$$

onde $E \subset S$ é o subconjunto de medida nula definido acima. $\square$

Teorema 5.3.2 *Se Φ é diferenciável então os elementos de $L(S)$ são isometrias, em relação à métrica φ.*

Demonstração: Sejam $h \in L(S)$ e $x, y \in \mathcal{O}$. Se $\gamma \in \Gamma(x, y)$ então, pelo Teorema 5.3.1,

$$\|\left(h \cdot \gamma_t\right)'\|_{h\cdot\gamma_t} = \|dh_{\gamma_t}(\gamma_t')\|_{h\cdot\gamma_t} = \|\gamma_t'\|_{\gamma_t}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(h\cdot x, h\cdot y) &= \inf\{\int_a^b \left\|(h\cdot\gamma_t)'\right\|_{h\cdot\gamma_t} dt \;:\; \gamma\in\Gamma(x,y)\} \\ &= \inf\{\int_a^b \|\gamma_t'\|_{\gamma_t} dt \;:\; \gamma\in\Gamma(x,y)\} \\ &= d(x,y), \end{aligned}$$

mostrando o teorema. □

Combinando o Teorema 5.3.2 e o fato que o subgrupo (do grupo das isometrias) de isotropia é compacto (veja Kobayashi [17] Capítulo II ou Kobayashi e Nomizu [19] Capítulo I) concluímos que:

Corolário 5.3.3 *Se Φ é diferenciável e $\mathcal{O}\subset\mathfrak{D}^{\lambda}_{\Theta}(S)$ é uma órbita de $L(S)$ então os grupos de isotropias de $\mathcal{O}$ são compactos.*

Seja $L\subset G$ um subgrupo de G. Dado $\Theta\subset\Sigma$ um subconjunto do sistema simples de raízes, o subgrupo L age em $\mathbb{F}_\Theta$. A união das **órbitas principais** de L em $\mathbb{F}_\Theta$, isto é, as órbitas de dimensão máxima, é um subconjunto aberto e denso em $\mathbb{F}_\Theta$ (veja Duistermaat e Kolk [3], Capítulo 2). Logo, dado um aberto U de $\mathbb{F}_\Theta$, existe uma órbita principal de L que cruza U. A partir daí, mostramos, do Teorema 5.3.3, a seguinte condição necessária para que um subgrupo $L\subset G$ seja imerso em um semigrupo com interior não vazio.

Corolário 5.3.4 *Seja $L\subset G$ um subgrupo de Lie. Uma condição necessária para que exista um semigrupo próprio $S\subset G$ tal que $L\subset S$ e $\operatorname{int} S\neq\emptyset$ é que os grupos de isotropia de alguma órbita principal de L (no flag do tipo parabólico de S) sejam compactos.*

A condição no corolário acima não é suficiente. Para ver isso basta tomar um grupo simples G, um subgrupo compacto maximal $L=K\subset G$ de G e aplicar o Corolário 3.2.2.

5.4 Exemplos

Se $G \times M \to M$ é uma ação de G em M e $C \subset M$ é um subconjunto próprio de M, então denotemos por S_C o subgrupo de compressão de C, isto é,

$$S_C = \{g \in G : g \cdot C \subset C\}.$$

Nos exemplos que seguem temos que $\operatorname{int} S_C \neq \emptyset$, C é o conjunto controlável invariante de S_C e portanto, C é exatamente uma órbita de S_C. Na verdade, nestes exemplos, o grupo das unidades de S_C é transitivo em C.

Reta projetiva complexa

O disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ em $\mathbb{C}$ pode ser visto como um subconjunto do espaço projetivo $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ através da aplicação $z \mapsto [(z, 1)]$.

O subgrupo

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\},$$

onde a barra denota conjugação complexa, atua transitivamente em D e o subgrupo de isotropia em $[(0, 1)]$ é dado por

$$\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}, |a| = 1 \right\}.$$

Logo, D é o espaço simétrico $\mathrm{SU}(1,1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1))$. Denotando por g_0 o elemento

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C}),$$

temos que $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}) = g_0 \, \mathrm{SU}(1,1) g_0^{-1}$ e

$$C := g_0 \cdot D = \Big\{ [(z, 1)] : z \in \mathbb{C}^2, \mathrm{Im}(z) > 0 \Big\} \cup [(1, 0)]$$

(veja [11], Seção 2.4), onde $\mathrm{Im}(z)$ denota a parte imaginária do número complexo z.

Portanto, o semigrupo S_C contém $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ e C é um espaço simétrico de $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$.

Espaço projetivo real

Seja $G = \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ e $M = \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$. Denotando por C o subconjunto de $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$ dos elementos $[(x_1, \ldots, x_d)]$ tais que $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$, então S_C (semigrupo das matrizes com entradas não negativas) contém o subgrupo

$$A = \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d) : a_j > 0, j = 1, \ldots, d\}$$

que age transitivamente em C.

Grassmanniana no espaço complexo

Sejam $G = \mathrm{Sl}(d, \mathbb{C})$, $M = \mathrm{Gr}_p(d, \mathbb{C})$ a grassmanniana dos espaços de dimensão p em $\mathbb{C}^d$ e $1_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$, onde 1_p denota a matriz identidade de ordem p e $d = p + q$. Seja ν a forma bilinear definida por $\nu(u, v) = u^t 1_{p,q} \overline{v}$. Seja C o conjunto dos subespaços V em $\mathrm{Gr}_p(d, \mathbb{C})$ tal que a restrição de ν a V é um produto interno. O subgrupo

$$\mathrm{SU}(p, q) = \left\{g \in \mathrm{Sl}(d, \mathbb{C}) : \nu(gu, gv) = \nu(u, v) \text{ para todos } u, v \in \mathbb{C}^d\right\}$$

age transitivamente em C e $\mathrm{SU}(p, q) \subset S_C$.

Seja V_0 o subespaço gerado por $\{e_1, \ldots, e_p\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_d\}$ denota a base canônica de $\mathbb{C}^d$. O subgrupo de isotropia de V_0 é $\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ cujos elementos são da forma $g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ com $g_1 \in \mathrm{U}(p)$, $g_2 \in \mathrm{U}(q)$ e $\det(g_1)\det(g_2) = 1$. Portanto, C é o espaço simétrico $\mathrm{SU}(p, q)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$.

Grassmanniana no espaço real

De modo analógo, se $G = \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ e $C \subset \mathrm{Gr}_p(d, \mathbb{R})$ é o subconjunto dos subespaços onde a forma bilinear ν, definida por $\nu(u, v) = u^t 1_{p,q} v$, é definida positiva temos que S_C contém o subgrupo

$$\mathrm{SO}(p, q) = \left\{g \in \mathrm{Sl}(d, \mathbb{R}) : \nu(gu, gv) = \nu(u, v) \text{ para todos } u, v \in \mathbb{R}^d\right\}$$

e C é um espaço simétrico de $\mathrm{SO}(p, q)$.

Subespaços Lagrangeanos

Uma forma bilinear em $\mathbb{C}^{2d}$ é uma **forma simplética** se é não-degenerada e anti-simétrica. Denotemos por ω a forma simplética canônica de $\mathbb{C}^{2d}$, isto é, a forma dada por $\omega(u,v) = u^t J v$, $u, v \in \mathbb{C}^{2d}$, onde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_d \\ -1_d & 0 \end{pmatrix}$. Assim, se $\{e_1, \ldots, e_d, f_1, \ldots, f_d\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^{2d}$, então

$$\omega(e_j, e_k) = 0, \ \omega(f_j, f_k) = 0 \ \text{ e } \ \omega(e_j, f_k) = \delta_{jk}.$$

Se $V \subset \mathbb{C}^{2d}$ é um subespaço, definimos o **ortogonal simplético** de V, em relação à ω, por

$$V^\omega = \{u \in \mathbb{C}^{2d} \ : \ \omega(u,v) = 0 \ \text{ para todo } \ v \in V\}.$$

Dizemos que V é um **subespaço Lagrangeano** se $V^\omega = V$. Neste caso, $\dim V = d$. Denotemos por $M = \mathrm{LGr}_d$ o conjunto de todos os subespaços Lagrangeanos em $\mathbb{C}^{2d}$.

Seja $G = \mathrm{Sp}(d, \mathbb{C})$ o **grupo simplético** em relação à forma ω, isto é,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(d,\mathbb{C}) &= \{g \in \mathrm{Gl}(2d,\mathbb{C}) \ : \ \omega(gu, gv) = \omega(u,v) \ \text{ para todo } \ u, v \in \mathbb{C}^{2d}\} \\ &= \{g \in \mathrm{Gl}(2d,\mathbb{C}) \ : \ g^t J g = J\}. \end{aligned}$$

Consideremos o subespaço Lagrangeano V_0 gerado, sobre $\mathbb{R}$, por $\{e_1 + if_1, \ldots, e_d + if_d\}$ onde $i^2 = -1$. Notemos que o complexificado de V_0 é o autoespaço de J associado ao autovalor i.

Seja C a $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{R})$-órbita de V_0. Seja $g \in \mathrm{Sp}(d,\mathbb{R})$ tal que $g \cdot V_0 = V_0$. Dado $v \in V_0$, temos que $g \cdot v \in V_0$. Complexificando g obtemos

$$iv = Jv = g^t J g v = i g^t g v,$$

isto é, $g^t g = 1_{V_0}$. Daí, $g \in \mathrm{U}(d) = \mathrm{Sp}(d,\mathbb{R}) \cap \mathrm{U}(2d)$. Logo, a isotropia de V_0 é o subgrupo $\mathrm{U}(d)$. Portanto, S_C contém $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{R})$ e C é o espaço simétrico $\mathrm{Sp}(d,\mathbb{R})/\mathrm{U}(d)$.

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A.; PRODI, G. *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge Stud. Adv. Math. **34**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[2] DIEUDONÉE, J. *Treatise on Analysis*, Vol. II. New York: Academic Press, 1976.

[3] DUISTERMAAT, J.J.; KOLK, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 2000.

[4] DUISTERMAAT, J.J.; KOLK, J.A.C.; VARADARAJAN, V.S. *Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups*. Compositio Math., **49**, 1983, pp. 309-398.

[5] FOLLAND, G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, 1984.

[6] GANGOLLI, R.; VARADARAJAN, V.S. *Harmonic Analysis of Spherical Functions on Real Reductive Groups*. Springer-Verlag, 1988.

[7] GUIVARC'H, Y.; JI, L.; TAYLOR, J.C. *Compactifications of Symmetric Spaces*. Birkhauser: Progr. Math. **156**, 1998.

[8] HELGASON, S. *Diferential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press 1978.

[9] HELGASON, S. *Groups and Geometric Analysis: Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*. Academic Press Inc., 1984.

[10] HILGERT, J.; HOFMANN, K.H.; LAWSON, J.D. *Lie Groups Convex Cones and Semigroups*. Oxford: Oxford University Press, 1989.

[11] Hilgert, J.; Neeb, K.-H. *Lie Semigroups and their Applications*. Lecture Notes in Math., **1552**. Springer-Verlag, 1993.

[12] Hilgert, J.; Neeb K.-H. *Compression semigroups of open orbits on real flag manifolds*. Monatsh. Math. **119**, 1995, pp. 187-214.

[13] Hilgert, J.; Ólafsson, G. *Causal Symmetric Spaces: Geometry and Harmonic Analysis*. Perspect. Math., **18**, Academic Press, 1997.

[14] Humphreys, J.E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1972.

[15] Kaneyuki, S. *On classification of parahermitian symmetric spaces*. Tokyo J. Math. **8**, 1985, pp. 473-482.

[16] Knapp, A.W. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progr. Math. **140**. Birkhäuser, 2004.

[17] Kobayashi, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer-Verlag, 1972.

[18] Kobayashi, S.; Nagano, T. *On filtered Lie algebras and geometric structures I*. J. Math. Mech. **13**, 1964, pp. 875-907.

[19] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry I*. Interscience Publishers, 1969.

[20] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry II*. Interscience Publishers, 1969.

[21] Koh, S.S. *On affine symmetric spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **119**, 1965, pp. 291-309.

[22] Lima, E.L. *Espaços Métricos*. 3. ed. Projeto Euclides, 2003.

[23] Patrão, M.A.P. *Semifluxos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento*. 2006. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2006.

[24] do Rocio, O.G.; San Martin, L.A.B. *Connected components of open semigroups in semi-simple Lie groups*. Semigroup Forum **69**, 2004, pp. 1-29.

[25] Royden, H.L. *Real Analysis*. 3. ed. Maxwell Macmillan, 1989.

[26] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.

[27] San Martin, L.A.B. *Álgebras de Lie*. Campinas: Ed. Unicamp, 1999.

[28] San Martin, L.A.B. *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **353**, 2001, pp. 5165-5184.

[29] San Martin L.A.B. *Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces*. Math. Ann., **321**, 2001, pp. 587-600.

[30] San Martin, L.A.B. *Invariant control sets on flag manifolds*. Math. Control Signals Systems **6**, 1993, pp. 41-61.

[31] San Martin, L.A.B. *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds*. J. Lie Theory **8**, 1998, pp. 335-350.

[32] San Martin, L.A.B. *Nonreversibility of subsemigroups of semi-simple Lie groups*. Semigroup Forum, **44**, 1992, pp. 376-387.

[33] San Martin, L.A.B. *Homogeneous spaces admitting transitive semigroups*. J. Lie Theory **8**, 1998, pp. 111-128.

[34] San Martin, L.A.B. *Controllability of discrete-time control systems*. Math. Control, Signals, and Systems **8**, 1995, pp. 279-297.

[35] San Martin, L.A.B.; Santana, A.J. *The homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups*. Monatsh. Math. **136**, 2, 2002, pp. 151-173.

[36] San Martin, L.A.B.; Tonelli, P.A. *Semigroup actions on homogeneous spaces.* Semigroup Forum **50**, 1995, pp. 59-88.

[37] dos Santos, L.J.; San Martin, L.A.B. *Semigroups in symmetric Lie groups.* Indag. Math. (N. S.) **18**, 2007.

[38] Varadarajan, V.S. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations.* Prentice-Hall Inc., 1974.

[39] Varadarajan, V.S. *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups.* Lecture Notes in Math. **576**. Springer-Verlag, 1977.

[40] Vinberg, E.B. *The theory of convex homogeneous cones.* Trans. Moscow Math. Soc. **12**, 1963, pp. 303-358.

[41] Vinberg, E.B. *Invariant convex cones and orderings in Lie groups.* Funct. Anal. Appl. **14**, 1980, pp. 1-13.

[42] Warner, G. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I.* Springer-Verlag, 1972.