

Dinâmica das Excitações Topológicas em Sistemas Magnéticos de Baixa Dimensionalidade

Armando Villares Ferrer

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física Gleb Wataghin
para obtenção do título de Doutor em Física

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Amir O. Caldeira (Unicamp)

Prof. Dr. Eduardo Miranda (Unicamp)

Prof. Dr. Edison Zacarias da Silva (Unicamp)

Profa. Dra. Maria Carolina Nemes (Ufmg)

Prof. Dr. Antonio Sérgio Teixeira Pires (Ufmg)

DFESCM - IFGW - UNICAMP

Campinas, 8 de Outubro de 1999

À minhas famílias, cubana e brasileira.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao Prof. Dr. Amir O. Caldeira pela orientação e paciência ao longo destes quatro anos, pelas horas dedicadas a esclarecer minhas constantes dúvidas e pela muita física completamente nova para mim que me incentivou a aprender.

À comissão de pos-graduação do IFGW pela oportunidade de realizar esta tese de doutoramento na UNICAMP.

Às agências CNPq e FAPESP pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Entre tantas pessoas que ajudaram de alguma forma para que este trabalho fosse finalizado ocupa um lugar especial a Piliha, que compartilhou os bons e maus momentos com incrível bom humor.

Ao Crispino e a Ângela, sem os quais teria sido impossível a minha vinda ao Brasil.

Ao Marcelo, Eduardo M., Rodrigo, Jereson, Eduardo P., Alexis, Kristian e Paulo, pelas discussões no grupo e pelas muitas vezes que escutaram pacientemente falar sobre este trabalho.

Ao Ary e ao Jeferson pelas muitas vezes que ajudaram com o LATEX e ao DSF pela paciência.

À grande Élide pelas infinitas correções de português e, ao Zola, pelos momentos de descontração.

Aos bons novos e velhos companheiros: Banana, Super, Laura, Luciano, Cabelo, Fernanda, Humbel, Dania, Martinha, Tersio, Roma e Lázaro que animaram-me este tempo todo.

À dona Cida pelo carinho de mãe.

Aos meus pais e irmãs pelo apoio, compreensão e estímulo de sempre.

A todos, muito obrigado.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da dinâmica das excitações topológicas em sistemas magnéticos de baixa dimensionalidade e pode ser dividido essencialmente em duas partes: fundamentos e aplicações. Nos fundamentos apresentamos os conceitos básicos sobre os sólitons em uma e duas dimensões e a forma em que é possível calcular este tipo de solução. Os casos particulares da equação de *sine-Gordon* (1D) e do modelo sigma não linear (2D) são discutidos em detalhe. Demonstraremos que, ao contrário do que acontece do ponto de vista clássico, numa teoria quântica o centro do sóliton se acopla com as flutuações do campo em torno da solução solitônica levando a uma equação de movimento dissipativa. Para construir uma teoria quântica dos sólitons foi utilizado o método das coordenadas coletivas. Este método permitiu tratar corretamente os modos de frequência zero que surgem em teorias invariantes por translação e ao mesmo tempo deduzir uma hamiltoniana quântica geral para o sistema interagente sóliton-flutuações em uma e duas dimensões. Posteriormente, partindo de uma hamiltoniana geral em 2D de interação sóliton-flutuações e usando o formalismo de Feynman e Vernon, é demonstrado que o movimento das excitações topológicas nestes sistemas é do tipo Browniano e pode ser caracterizado por uma constante de decaimento que depende da temperatura. Uma expressão explícita para esta constante que define a mobilidade dos sólitons em duas dimensões foi também calculada. Os resultados obtidos tanto na quantização como na dinâmica dos sólitons foram posteriormente aplicados na descrição das excitações topológicas dos sistemas magnéticos de baixa dimensionalidade.

Na primeira das aplicações apresentamos o estudo da dinâmica das paredes de Bloch que aparecem em um *toy model* para uma cadeia de spins ferromagnética completamente anisotrópica. Demonstramos que neste sistema as paredes dos domínios magnéticos correspondem aos sólitons de uma teoria de campos escalar efetiva em 1D que possui uma equação de movimento do tipo *sine-Gordon*. Utilizando a teoria geral desenvolvida previamente obtivemos uma hamiltoniana efetiva para o sistema que descreve o acoplamento entre as paredes dos domínios e as ondas de spin

(flutuações). Esta hamiltoniana permitiu a análise do movimento Browniano da parede em termos dos coeficientes de reflexão e transmissão do potencial efetivo que age sobre as ondas de spin criado pela presença da parede. Demonstrou-se que para valores finitos do campo magnético externo aplicado no sistema a mobilidade da parede é também finita. O espectro do potencial para campos magnéticos fortes foi calculado e isto permitiu computar o valor da constante de decaimento da parede para qualquer valor da temperatura. Como resultado final apresentamos a dependência da mobilidade da parede com a temperatura e com o campo magnético aplicado.

A segunda aplicação da teoria desenvolvida para a dinâmica dos sólitons corresponde ao estudo dos skyrmions. Como é demonstrado, os skyrmions são as excitações carregadas de mais baixa energia que aparecem no sistema de Hall em torno de $\nu = 1$ e podem ser detectados usando a técnica de ressonância nuclear magnética. Do ponto de vista teórico, partindo da densidade de lagrangiana proposta para a dinâmica dos spins no sistema de Hall, descreveremos os skyrmions pelas soluções do modelo sigma não linear com um tamanho fixo. Como se demonstra, este tamanho está determinado pela competição dos termos de Zeeman e Coulomb no sistema. Usando então esta solução solitônica para descrever os skyrmions, calculamos uma hamiltoniana de interação skyrmion-mágnon via método das coordenadas coletivas. Posteriormente usando o formalismo desenvolvido estudamos a mobilidade dos skyrmions no sistema skyrmion-mágnon do gás bidimensional de elétrons. A dependência do coeficiente de transporte que caracteriza a dinâmica de um skyrmion com a temperatura e com o campo magnético foi calculada. Finalmente, a influência do caráter dissipativo do movimento dos skyrmions nas experiências de espalhamento de neutrons foi investigada.

Abstract

We have studied the problem of the dissipative motion of Bloch walls considering a totally anisotropic one dimensional spin chain in the presence of a magnetic field. Using the so-called “collective coordinate method” we construct an effective Hamiltonian for the Bloch wall coupled to the magnetic excitations of the system. It allows us to analyze the Brownian motion of the wall in terms of the reflection coefficient of the effective potential felt by the excitations due to the existence of the wall. We find that for finite values of the external field the wall mobility is also finite. The spectrum of the potential at large fields is investigated and the dependence of the damping constant on temperature is evaluated. As a result we find the temperature and magnetic field dependence of the wall mobility.

On the other hand, exploring a classical solution of the non-linear sigma model for a quantum Hall ferromagnet, a skyrmion-magnon effective hamiltonian is obtained via the collective coordinates method. Using the Feynman-Vernon functional integral formalism we investigate in a general way the dynamics of the 2-D solitons. Our treatment is applied to the skyrmion-magnon model for the 2-D electron gas. The temperature dependent transport coefficients which characterize a single skyrmion dynamics is found. Finally an investigation on the possible influence of the skyrmion dynamics in neutron scattering experiments is presented.

Conteúdo

1	Excitações Topológicas	12
1.1	Introdução	12
1.2	Excitações Topológicas em 1-D	15
1.2.1	Equação de sine-Gordon	18
1.3	Excitações Topológicas em 2-D	19
1.3.1	O Modelo Sigma não Linear	20
1.4	Quantização dos Sólitons	24
1.4.1	Introdução	24
1.4.2	Modos Translacionais	28
1.4.3	Método das Coordenadas Coletivas	28
1.4.4	Quantização das Soluções Solitônicas	32
1.5	Conclusões	34
2	Dinâmica das Paredes de Bloch	35
2.1	Introdução	35
2.2	Modelo Microscópico das Paredes de Bloch	38
2.3	Modelo Contínuo das Paredes de Bloch	40
2.4	Dinâmica das Paredes de Bloch	44
2.4.1	Introdução	44
2.4.2	Mobilidade da Parede de Bloch	46
2.5	Mobilidade da Parede de Bloch 2π para Campos Magnéticos Fortes	49
2.5.1	Desvios de Fase	49
2.5.2	O Coeficiente de Decaimento	53
2.6	Conclusões	55

3	“Quantum Hall Skyrmions”	56
3.1	Introdução	56
3.2	Detecção Experimental dos QHS	58
3.2.1	Sinal de NMR de um Poço Quântico	58
3.2.2	Detecção dos QHS usando OPNMR	61
3.3	Dinâmica da Cadeia de Spins	66
3.3.1	Estados Coerentes de Spin.	67
3.3.2	Ação na Representação dos Estados Coerentes para um Spin.	67
3.3.3	Ação para a Cadeia de Spins	70
3.4	Ação Efetiva para os QHS	71
3.5	Tamanho e Energia dos QHS	75
3.6	Conclusões	77
4	A Dinâmica dos Skyrmions	78
4.1	Introdução	78
4.2	Hamiltoniana Efetiva de Interação Skyrmion-Mágnons	80
4.2.1	Expansão Funcional do Potencial	81
4.2.2	Ondas de Spin no 2DEG	83
4.2.3	Acoplamento Skyrmion-Mágnons	84
4.3	O Operador Densidade Reduzido Dinâmico	88
4.3.1	Introdução	88
4.3.2	Superpropagador na Representação dos Estados Coerentes	90
4.4	Funcional de Influência	92
4.4.1	Aproximação de Fase Estacionária	92
4.4.2	Integração do Funcional de Influência	94
4.5	Dinâmica do Skyrmion	99
4.5.1	Equação de Movimento	99
4.5.2	A Matriz de Decaimento	101
4.6	Conclusões	104
5	Dinâmica dos Skyrmions e Espalhamento de Neutrons	105
5.1	Introdução	105

5.2	Espalhamento de Neutrons e Funções de Correlação	107
5.3	Função de Correlação Dinâmica para os Skyrmions	110
5.3.1	Movimento não Dissipativo	112
5.3.2	Movimento Dissipativo	113
6	Conclusões	115
A	Teorema de Derrick	118
B	Cálculo dos Desvios de Fase	120
C	“Knight Shift”	122
D	Estados Coerentes	125
E	Cálculo do Propagador	128
F	Operador de Densidade ρ_r em Termos dos Estados Coerentes	132
G	Solução das Equações de Movimento	134
H	Cálculo da Função de Espalhamento	136

Introdução

Do ponto de vista clássico muitos sistemas na natureza são descritos adequadamente por equações de movimento que envolvem termos dissipativos (proporcionais à velocidade). Um exemplo conhecido é o movimento de uma partícula qualquer através de um fluido. Em muitos casos em que existe dissipação, não é necessário levar em conta efeitos quânticos, pois a teoria clássica descreve corretamente o fenômeno. Infelizmente, isto não acontece em todas as situações possíveis. Podemos esperar, por exemplo, que para temperaturas relativamente baixas, os efeitos quânticos se tornem relevantes. Nesta situação somos obrigados a encontrar uma forma de conciliar equações de movimento dissipativas com o processo de quantização.

Um fato bem conhecido é que não é possível obter diretamente uma equação de movimento dissipativa usando a formulação lagrangiana ou hamiltoniana sem dependência explícita do tempo. Assim sendo, para resolver o problema da dissipação quântica, somos obrigados a escolher uma das formulações já desenvolvidas: o uso de novos métodos de quantização [1]-[4] ou o tratamento do sistema na forma partícula mais reservatório [5]-[7]. Neste último não se tenta quantizar o sistema dissipativo diretamente mas sim tratá-lo como um subsistema que interage com um reservatório complexo. Nesta interação está, precisamente, a origem da dissipação.

Sendo o sistema composto conservativo é possível usar, então, os procedimentos convencionais de quantização. Cumprida esta etapa, poderemos traçar as coordenadas do reservatório e obter assim uma equação de movimento para a evolução do subsistema que carrega a informação da perda de energia. Esta idéia foi desenvolvida por Caldeira e Leggett [8] no estudo do movimento Browniano quântico usando o método do funcional de influência de Feynman-Vernon. Nesse trabalho, escolhendo uma forma particular da interação do subsistema com o reservatório, se calcula o funcional de influência de forma fechada em termos de parâmetros macroscópicos como a viscosidade. Este resultado mostrou que as propriedades de transporte de um sistema quântico podem ser descritas pelos coeficientes de decaimento e difusão fenomenológicos, exatamente como

nos sistemas clássicos.

Um dos resultados mostrados em [8] é o fato do movimento da partícula Browniana ser dissipativo mesmo para temperatura zero. Como veremos no caso das propriedades de transporte dos sólitons isto não acontece, pois a partícula (subsistema) e o reservatório têm a mesma origem microscópica. O cálculo das propriedades de transporte de sistemas que possuem excitações topológicas envolve dois pontos fundamentais. Por um lado, a quantização de teorias clássicas que possuem sólitons como soluções das equações não lineares de movimento [9] e, por outro, a forma correta de se lidar com sistemas dissipativos quânticos [8]. Uma abordagem sistemática, que unifica estes dois pontos, foi desenvolvida com sucesso por Castro Neto e Caldeira [10]. Nela se mostra, de forma consistente, uma forma correta de se calcular as propriedades de transporte (mobilidade e coeficiente de difusão) dos sólitons de uma teoria de campo escalar em 1-D.

Em uma teoria clássica de campos os sólitons são configurações deste campo que se movimentam com velocidade constante sem mudar a forma. Portanto, é suficiente conhecermos a posição do centro do sóliton em função do tempo para descrever a sua dinâmica. Já do ponto de vista quântico, as teorias clássicas invariantes por translação podem ser quantizadas usando o método das coordenadas coletivas [9]. Nesta descrição, o centro do sóliton pode ser interpretado como uma variável quântica dinâmica que descreve o sóliton como partícula [10]. É importante ressaltar neste caso que, para temperaturas finitas, nem todos os graus de liberdade do sistema contribuem para a formação do sóliton e, portanto, não é possível que o mesmo se movimente livremente como acontece na teoria clássica. O objetivo fundamental deste trabalho é o estudo das propriedades de transporte dos sólitons em sistemas magnéticos. Nele mostraremos que a dinâmica das excitações topológicas tem caráter dissipativo como consequência da interação com os graus de liberdade “residuais” (ondas de spin) no sistema. Estudaremos dois tipos de excitações: as paredes dos domínios magnéticos ou paredes de Bloch e os “Quantum Hall Skyrmions”, ou simplesmente skyrmions.

As paredes de Bloch são as regiões que separam os domínios num material com propriedades magnéticas [11], enquanto os skyrmions são as excitações carregadas de menor energia no sistema de Hall quando o fator de preenchimento dos níveis de Landau é próximo de 1 [12].

O primeiro capítulo será dedicado a introduzir os conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do trabalho. Mostraremos as propriedades fundamentais das soluções solitônicas em uma e duas dimensões. Logo em seguida, partindo de uma ação geral para um campo escalar em uma dimensão apresentaremos a forma em que é possível quantizar suas soluções localizadas usando o

método das coordenadas coletivas. A parte final do capítulo será dedicada a obter a hamiltoniana que descreve a interação entre o sóliton e as flutuações do campo em torno deste tipo de solução.

No segundo capítulo, partindo de um modelo microscópico unidimensional estudaremos a dinâmica das paredes de Bloch [13]. Usando o limite contínuo para descrever as mesmas, demonstraremos que as paredes dos domínios magnéticos que aparecem nos ferromagnetos correspondem a sólitons das equações de movimento para as variáveis de spin. Por outro lado, a ação clássica que descreve o sistema tem essencialmente a mesma forma que aquela utilizada para ilustrar o método das coordenadas coletivas no capítulo 1. Isto nos permitirá obter uma hamiltoniana que acopla o momento da parede com o momento das ondas de spin e que será usada para estudar a dinâmica da excitação.

A forma em que é possível realizar a detecção e a descrição teórica dos “quantum Hall skyrmions” é o tema fundamental do capítulo 3. Nele discutiremos como, usando a técnica de Ressonância Nuclear Magnética, podemos ter evidências da presença do skyrmion no sistema de Hall. Logo em seguida apresentaremos a ação efetiva que descreve os skyrmions do ponto de vista teórico. Como veremos, a mesma não é mais que um modelo sigma não linear generalizado. Isto permite o cálculo do tamanho e energia das excitações usando as soluções de Belavin e Polyakov [14].

No capítulo 4 abordaremos o estudo da dinâmica dos skyrmions no sistema de Hall [15]. Como veremos, partindo da densidade de lagrangiana para as flutuações de spin apresentada no capítulo anterior e usando o método das coordenada coletivas, deduziremos uma hamiltoniana de interação skyrmion-mágnons. Posteriormente usando o formalismo de Feynman -Vernon, calcularemos uma ação reduzida, que envolve basicamente as coordenadas do centro da excitação e que pode ser utilizada de forma geral para estudar a dinâmica de sólitons em duas dimensões. Finalmente obteremos uma equação de movimento efetiva para o skyrmion que carrega a informação da interação com os mágnons.

Os últimos capítulos serão dedicados a estudar a influência da dinâmica do skyrmion nas experiências de espalhamento de neutrons e a apresentar as conclusões finais sobre o trabalho e as perspectivas futuras.

Capítulo 1

Excitações Topológicas

Este capítulo será dedicado a apresentar conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do nosso trabalho. Nele introduziremos o conceito de excitações topológicas, mostraremos como é possível calculá-las e ilustraremos o procedimento com os casos particulares da equação de sine-Gordon e do modelo sigma não-linear. Finalmente discutiremos a forma correta de realizar a quantização destas soluções utilizando o método das coordenadas coletivas.

1.1 Introdução

Em meados dos anos 70 foram desenvolvidos métodos [16] que tornaram possível a obtenção de soluções exatas de equações não lineares. Este é o ponto de partida na tentativa de obter informação acerca das propriedades quânticas de um determinado sistema partindo da solução das equações do campo clássico do mesmo. Como é de se esperar, não é possível relacionar todas as soluções, derivadas de uma teoria de campos clássica, com as propriedades do sistema na teoria quântica correspondente. De forma intuitiva veremos que para obter esta relação, devemos procurar soluções geradas pelas equações não lineares que caracterizam o campo que sejam localizadas no espaço.

As soluções localizadas são, a grosso modo, pacotes de energia que viajam sem deformar-se com uma velocidade uniforme. Este tipo de solução é freqüentemente chamada de sóliton ou onda solitária. Mais adiante veremos como é possível dar uma definição rigorosa dessa solução.

Para ilustrar melhor as propriedades das soluções localizadas, tomemos, por exemplo, o caso mais simples, a equação de onda

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0. \quad (1.1)$$

Como é sabido, qualquer função da forma $f(x \pm ct)$ é solução da equação (1.1). Se em particular, f é uma função localizada, então, podemos construir um pacote que viaje com velocidade uniforme $\pm c$ sem mudar a sua forma com o tempo.

Por outro lado, é sempre possível verificar que qualquer combinação de funções da forma $f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ é sempre solução de (1.1). A análise da evolução temporal deste tipo de solução revela que, para $t \rightarrow -\infty$, o sistema é composto por dois pacotes separados e aproximando-se entre si. Para t finito, os pacotes sobrepõem-se simulando uma colisão e, para $t \rightarrow +\infty$, o sistema volta a estar composto basicamente pelos pacotes separados, com as suas formas iniciais mantidas e afastando-se entre si. Estas características das soluções da equação (1.1) podem ser resumidas como:

- (i) A conservação da forma e velocidade do pacote simples.
- (ii) A conservação, ao menos assintótica, da forma e velocidade de vários pacotes depois de uma colisão entre eles.

Como sabemos as partículas elementares são de certa forma pacotes localizados que viajam sem deformar-se, e acredita-se, sejam descritas por alguma teoria de campos relativística. Logo as propriedades (i) e (ii) enunciadas anteriormente, assemelham-se às dos estados estendidos quânticos, ou de partícula livre.

No caso particular da equação de onda (1.1), as propriedades (i) e (ii) são consequência direta da linearidade e não dispersividade da mesma. Uma análise leviana deste fato, sugerir-nos-ia, a não existência de soluções solitônicas em áreas da física em que os sistemas são governados por equações que contêm termos não lineares e dispersivos. O fato interessante é que, apesar da complexidade que estas modificações podem introduzir, existem sistemas descritos por equações não lineares que possuem soluções com as características (i) e (ii), ou seja, admitem a existência de sólitons¹. Isto nos leva a pensar que, apesar dos sólitons serem soluções de equações clássicas não lineares do campo, estas guardam alguma relação com os estados quânticos de partícula livre da teoria quântica correspondente. Certamente a idéia anterior é puramente intuitiva, mas proporcionou a motivação necessária para desenvolver o formalismo conhecido como quantização dos sólitons [9] que estabeleceu justamente essa relação.

Voltando às propriedades das soluções localizadas, agora do ponto de vista formal, precisa-se de uma grandeza física adequada para classificar as soluções de determinado sistema em solitônicas ou

¹ver por exemplo An Introduction to Solitons and Instantons in QFT, R. Rajaraman [17]

não. Para dar uma definição de sóliton utiliza-se comumente a densidade de energia como grandeza física para medir a localização das soluções. Então, a solução de uma equação não linear associada a um determinado campo clássico $\phi(\mathbf{x}, t)$ tem caráter solitônico quando a densidade de energia correspondente a ela pode ser escrita como

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}t), \quad (1.2)$$

onde \mathbf{u} é um vetor velocidade e $\varepsilon(\mathbf{x})$ é uma função localizada, ou seja

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.3)$$

As equações anteriores, (1.2) e (1.3), não são mais que a expressão formal da propriedade (i) apresentada anteriormente. Por outro lado a condição de conservação da forma dos pacotes depois das colisões pode ser expressa como:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t) & \text{para } t \rightarrow -\infty \\ \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i t - \delta_i) & \text{para } t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.4)$$

onde \mathbf{a}_i é a posição do centro do i -ésimo sóliton e os δ_i são apenas vetores constantes que representam uma mudança na trajetória original dos mesmos. Esta última propriedade é bem mais complicada de ser verificada na prática, pelo que muitas vezes abusa-se da linguagem chamando de sólitons as soluções das equações não lineares que definem determinado campo, quando na verdade, cumprem apenas com a primeira das propriedades (i).

Como foi apontado anteriormente, existe um procedimento que estabelece a correspondência entre soluções solitônicas e propriedades quânticas, conhecido como quantização dos sólitons. A teoria que faz esta ligação foi desenvolvida por vários autores usando diferentes técnicas (ver por exemplo [18]-[23]) e mostra que é possível associar não só um estado de partícula estendida à solução clássica do tipo sóliton, mas também toda uma série de estados excitados. Estes estados excitados se obtém através da quantização das flutuações do campo em torno de uma solução solitônica e permitem obter propriedades da *quasi-partícula quântica solitônica*, como massa e fator de forma.

Tendo introduzido o conceito de sóliton passamos em seguida a ilustrar, com exemplos que usaremos ao longo deste trabalho, a relação que os mesmos possuem com a topologia dos sistemas. Estudaremos os casos particulares da equação de sine-Gordon e do modelo sigma não linear. Posteriormente apresentaremos o procedimento para realizar a quantização das soluções localizadas, analisando em detalhe a dificuldade de quantizar sistemas que possuem invariância de translação e como o método das coordenadas coletivas funciona nestes casos.

1.2 Excitações Topológicas em 1-D

As propriedades dos sólitons, que foram enunciadas na seção anterior, não possuem apenas um caráter formal, pois são usadas na prática quando procuramos soluções localizadas em determinado sistema. Usualmente a imposição das características solitônicas às soluções procuradas têm como conseqüência o surgimento de uma grandeza conservada conhecida como carga topológica ou índice de Pontryaguin [24].

Apesar da carga topológica ser um número inteiro, ela tem uma origem diferente da origem dos números quânticos. Esta carga está diretamente relacionada com o comportamento dos campos envolvidos no infinito. Isto significa, então, que a presença das soluções localizadas em determinado sistema está relacionada com a topologia do mesmo, o que dá origem à denominação *excitações topológicas* para este tipo de solução.

Para ilustrar o procedimento a se seguir no cálculo das soluções solitônicas em 1-D e esclarecer a importância e o papel da carga topológica, trataremos em seguida o caso geral de um campo escalar em duas dimensões (1 temporal + 1 espacial). Posteriormente usaremos a metodologia exposta na obtenção de soluções solitônicas que serão usadas no estudo da dinâmica das paredes de Bloch [13].

Para uma análise geral, consideremos um campo escalar $\phi(x, t)$ cuja dinâmica é governada pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi'^2) - U(\phi), \quad (1.5)$$

onde a função potencial é positiva definida e o seu valor mínimo é zero. A equação de movimento gerada pela aplicação do princípio variacional em (1.5) tem a forma

$$\ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi}, \quad (1.6)$$

e a densidade total de energia do sistema é

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \phi'^2) + U(\phi). \quad (1.7)$$

Vamos supor, por simplicidade, que a função U tenha M ($M \geq 0$) pontos onde alcança o mínimo absoluto. Sejam então estes pontos $g^{(i)}$ com $i = 1, 2, 3 \dots M$. Por outro lado é evidente que, nestes pontos, o funcional de energia é nulo, ou seja

$$E[g^{(i)}] = 0, \quad (1.8)$$

onde $E[\varphi]$ é a integral espacial de (1.7).

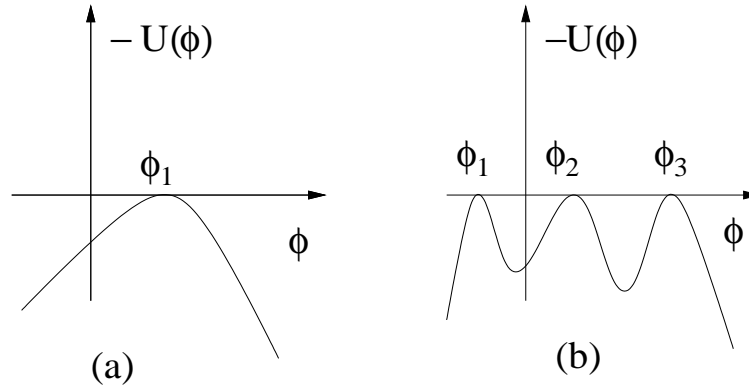


Figura 1.1: (a) O potencial $-U(\phi)$ que age sobre a partícula fictícia quando $U(\phi)$ possui um único mínimo ϕ_1 . (b) Caso em que $U(\phi)$ possui três mínimos degenerados.

Como já vimos, as soluções solitônicas movimentam-se com velocidade uniforme. Portanto, podemos procurar soluções localizadas estáticas e, posteriormente, através de uma transformação de Lorentz (ou Galileu), obter soluções dependentes do tempo. As soluções assim obtidas, são soluções do problema original (1.6) pois a lagrangiana (1.5) é invariante pelas transformações de Lorentz. Desta forma o problema estático a ser resolvido será então

$$\phi'' = \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi}. \quad (1.9)$$

Antes de passar a resolver explicitamente este tipo de equação, devemos impor as condições de contorno necessárias. Como as soluções solitônicas devem ter energia finita e uma densidade de energia localizada, teremos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = g^{(i)}. \quad (1.10)$$

Se o potencial $U(\phi)$ tiver somente um ponto de mínimo g , então, quando $x \rightarrow \pm\infty$, $\phi(x) \rightarrow g$ necessariamente. Se pelo contrário, o potencial $U(\phi)$ tiver vários pontos onde alcança o mínimo degenerado, então $\phi(x)$ deve tender a um desses pontos de mínimo para $x \rightarrow -\infty$ e ao mesmo valor, ou a um outro ponto de mínimo diferente, quando $x \rightarrow +\infty$.

Usando as condições de contorno (1.10), a equação (1.9) pode ser resolvida para qualquer forma do potencial $U(\phi)$. Porém, antes de encontrar uma forma geral do campo $\phi(x)$ em função do potencial, é conveniente, para a análise topológica, notar que a equação (1.9) possui um análogo mecânico [25]. Se na equação (1.9) tomamos a coordenada x como o tempo e a variável ϕ como a coordenada, esta equação representará a segunda lei de Newton para uma partícula fictícia de massa

unitária que se movimenta sob a ação de um potencial $-U(\phi)$. Portanto a solução $\phi(x)$ representará a posição desta partícula, com uma energia associada, que se conserva em cada *instante* x

$$W \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - U(\phi). \quad (1.11)$$

Das condições de contorno (1.10) vemos que a energia da partícula fictícia é sempre nula. Certamente esta energia não deve ser confundida com a energia real do sistema, que pode ser calculada pela simples integração de (1.7).

Usando a analogia com a partícula fictícia vamos analisar o caso em que o potencial $U(\phi)$ possui um único mínimo. Nesta situação a partícula fictícia está sujeita à ação de um potencial como o que aparece na Figura 1.1(a). Obviamente não é possível executar qualquer movimento (a não ser o trivial) em que o sistema evolua partindo de ϕ_1 em um passado remoto ($x = -\infty$) e volte novamente a ϕ_1 em um futuro também remoto ($x = +\infty$) sem violar a conservação da energia. Esta simples ilustração permite afirmar que se a função $U(\phi)$ tem um único mínimo absoluto, não existem soluções localizadas estáticas não triviais. Por outro lado no caso em que o potencial $U(\phi)$ possui vários mínimos degenerados, como aparece na Figura 1.1(b), a partícula fictícia pode partir de qualquer um destes mínimos e chegar até o próximo, sempre sem ultrapassá-lo. O fato da evolução nunca acontecer entre os pontos ϕ_1 e ϕ_3 , por exemplo, tem a ver com a anulação da velocidade e a aceleração fictícias ϕ' e ϕ'' nos pontos de mínimo. Desta forma concluímos que a partícula havendo deixado ϕ_1 movimentar-se-ia na direção de ϕ_2 , alcançando este ponto assintoticamente, pois nele todas as derivadas do movimento se anulam. Logo, quando $U(\phi)$ possui vários mínimos degenerados, as soluções estáticas localizadas devem ser tais que conectem os mínimos vizinhos aos pares.

Por outro lado, como os valores admissíveis dos campos no infinito formam um conjunto discreto (o conjunto dos mínimos de $U(\phi)$), não é possível conectar soluções que unam mínimos distintos através de deformações contínuas de um valor de mínimo a outro mantendo a energia do sistema finita em todo momento. Portanto se uma solução determinada $\phi(\infty, t_0) = \phi_1$, ela permanecerá estacionária neste ponto sem pular para outro valor de mínimo ϕ_2 . Isto sugere, então, que o espaço de todas as soluções localizadas não singulares de energia finita pode ser dividido em setores caracterizados pelos valores das soluções no infinito, $\phi(+\infty)$ e $\phi(-\infty)$. Os setores assim definidos são topologicamente desconectados, pois como foi apontado, não é possível deformar a solução que pertence a um determinado setor em outra que pertence a um setor diferente sem violar a conservação da energia.

Além da classificação baseada nos valores $\phi(+\infty)$ e $\phi(-\infty)$, usa-se amiude a carga topológica para identificar o setor do espaço a que pertence uma determinada solução. A carga topológica em 1-D é simplesmente

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x} dx, \quad (1.12)$$

que não é mais que a diferença entre os valores das soluções no infinito. Certamente o valor de Q não é suficiente para classificar os setores topológicos, porém em muitos problemas físicos as grandezas calculadas dependem apenas da carga topológica e não do valor absoluto dos campos no infinito. A análise anterior nos permite afirmar que os índices topológicos são basicamente condições de contorno que se conservam devido ao valor finito da energia do sistema em qualquer instante.

Esclarecido o papel da topologia, podemos voltar agora à solução da equação (1.9). Esta pode ser resolvida facilmente em uma dimensão, pois

$$\int \phi' \phi'' dx = \int \frac{dU}{d\phi} \phi' dx, \quad \frac{1}{2} \phi'^2 = U(\phi), \quad (1.13)$$

então

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\sqrt{2U(\phi)}}. \quad (1.14)$$

A expressão anterior (1.14) é geral para as soluções localizadas estáticas em 1-D e nos permite estudar, por exemplo, o caso concreto da equação de sine-Gordon. A equação de sine-Gordon possui uma importância particular em física, pois aparece nos estudos de propagação de deslocamentos em cristais [26], dinâmica de paredes de Bloch em sistemas magnéticos [13] e modelos de partículas elementares bidimensionais [27]. Com o objetivo de ilustrar os conceitos apresentados até aqui e para o uso posterior no estudo da dinâmica das paredes de Bloch no capítulo 2, apresentaremos em seguida as soluções solitônicas da equação de sine-Gordon.

1.2.1 Equação de sine-Gordon

A densidade de lagrangiana que gera a equação de sine-Gordon tem a forma

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi'^2) - (1 - \cos \phi), \quad (1.15)$$

onde $\phi(x, t)$ é um campo escalar em uma dimensão. Neste caso o potencial $1 - \cos \phi$ possui um número infinito de mínimos, que podem ser escritos como $g_n = 2\pi n$, onde n é um inteiro. Como

vimos na análise do papel da topologia nos sistemas unidimensionais, a carga topológica pode ser calculada partindo de (1.12). Neste caso particular será simplesmente

$$Q \equiv n_1 - n_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx. \quad (1.16)$$

Mas como nos sistemas caracterizados por um campo escalar em 1-D as soluções estáticas localizadas devem conectar os mínimos vizinhos de $1 - \cos \phi$, concluímos que $Q = \pm 1$.

Por outro lado, substituindo o potencial envolvido em (1.15) em (1.14) teremos

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{2 \sin(\phi/2)}, \quad (1.17)$$

que integrando se transforma em

$$\phi(x) = \begin{cases} 4 \arctan e^{x-x_0} & \text{para o sinal positivo} \\ -4 \arctan e^{x-x_0} & \text{para o sinal negativo.} \end{cases} \quad (1.18)$$

A solução positiva, chamada de sóliton, tem valores que vão de 0 a 2π de 2π a 4π , 4π a 6π etc, e carrega, portanto, carga topológica $Q = 1$. Por outro lado, a solução negativa conhecida como antisóliton possui carga topológica $Q = -1$. Na Figura 1.2 aparecem as formas das soluções anteriores e a densidade de energia associada a elas para $x_0 = 1$. Como era esperado a densidade de energia tem realmente uma forma localizada mantendo a energia do sistema sempre finita. Finalmente, para obter soluções dependentes do tempo basta realizar uma transformação de Lorentz nas soluções (1.18).

Apesar de não apresentarmos aqui a demonstração, as soluções localizadas da equação de sine-Gordon obtidas são verdadeiros sólitons [28], ou seja, soluções que cumprem com as exigências (i) e (ii) apresentadas na introdução deste capítulo.

1.3 Excitações Topológicas em 2-D

Até agora apresentamos algumas das características fundamentais das soluções localizadas estáticas para um campo escalar em 1-D e a sua relação com a topologia. Porém, não é possível estender, *a priori*, a forma de procurar e classificar as soluções para o caso em que existem dois ou mais campos escalares acoplados envolvidos no problema [29]. Por isso apresentamos em seguida o caso particular do modelo sigma não linear que pode ser resolvido exatamente [14] e que será usado no estudo da dinâmica dos skyrmions no ferromagneto de Hall [15].

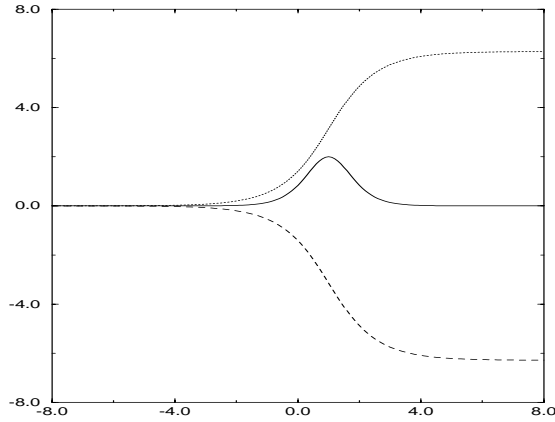


Figura 1.2: As linhas tracejadas correspondem às soluções solitônicas e a linha contínua à densidade de energia associada a elas.

1.3.1 O Modelo Sigma não Linear

O modelo sigma não linear (NL σ M) [14] consiste em três campos escalares $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ reais em duas dimensões sujeitos ao vínculo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ e caracterizados pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\partial_{\mu} \mathbf{n}) \cdot (\partial^{\mu} \mathbf{n}). \quad (1.19)$$

Este modelo tem sido utilizado por vários autores para estudar as excitações topológicas que aparecem em ferromagnetos, antiferromagnetos e supercondutores de alta temperatura crítica [30], [31]. A ação associada à densidade de lagrangiana anterior, que leva em conta o vínculo, pode ser escrita como

$$S = \int \sum_{\mu} \left[(\partial_{\mu} \mathbf{n}) \cdot (\partial^{\mu} \mathbf{n}) + \lambda(\mathbf{x}, t) \left(\sum_i n_i^2(\mathbf{x}) - 1 \right) \right] d\mathbf{x} dt, \quad (1.20)$$

que, por sua vez, gera uma equação para os campos escalares $n_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, 3$) estáticos da forma

$$\nabla^2 \mathbf{n}(\mathbf{r}) + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.21)$$

Utilizando o vínculo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ na equação anterior, é possível obter o valor do multiplicador de Lagrange em termos dos campos escalares $n_i(\mathbf{x})$ como

$$\lambda = -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{n}(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

Portanto a equação (1.21) escreve-se da forma

$$\nabla^2 \mathbf{n}(\mathbf{r}) - \left(\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{n}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.23)$$

Por outro lado, a energia associada à ação (1.20) pode ser calculada partindo de

$$E = \frac{1}{2} \int (\partial_i \mathbf{n})^2 d^2 x, \quad (1.24)$$

que fornece a condição imprescindível para a existência das soluções localizadas estáticas para a equação dos campos com energia finita, pois, para a convergência da integral anterior, devemos garantir que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \|\nabla \mathbf{n}\| = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{n} = \mathbf{n}^0, \quad (1.25)$$

onde \mathbf{n}^0 é um vetor unitário no espaço interno (o espaço dos campos n_i). Isto significa que à medida em que nos afastamos da origem de coordenadas em qualquer direção, $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ tende ao mesmo valor limite. Este fato é essencialmente equivalente a compactar o espaço real R^2 em uma superfície esférica que chamaremos S_2^{phy} (o que poder ser feito usando a projeção estereográfica). Por outro lado, o espaço interno é também uma superfície esférica de raio um que denotaremos por S_2^{int} , logo qualquer configuração estática dos campos $n_i(\mathbf{x})$ com energia finita não será mais que um mapeamento de S_2^{phy} em S_2^{int} .

Todos os mapeamentos não-singulares de uma superfície esférica S_2 , em outra superfície esférica S_2 , podem ser classificados em setores homotópicos [17]. Aqueles mapeamentos pertencentes a um certo setor topológico podem ser deformados de maneira contínua em outro dentro do mesmo setor, porém nunca naqueles que se acham fora dele. Por outro lado, os setores homotópicos são infinitos, numeráveis e formam um grupo que é isomorfo ao grupo dos inteiros, o que formalmente escrevemos como

$$\pi_2(S_2) = Z, \quad (1.26)$$

onde $\pi_n(S_m)$ representa o grupo de homotopias associadas aos mapeamentos de $S_n \rightarrow S_m$ e Z o conjunto dos inteiros. Este número é agora a carga topológica ou índice de Pontryaguin e descreve basicamente o número de vezes que uma superfície envolve a outra.

O índice de Pontryaguin pode ser calculado diretamente das configurações dos campos como

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) d^2 x. \quad (1.27)$$

Como vimos anteriormente a carga topológica tem um papel importante na classificação das soluções. Neste caso particular, a conservação de Q permite procurar soluções da equação dos campos em cada setor topológico separadamente através de uma equação simplificada.

Para isso partiremos de um vetor convenientemente construído [14]

$$\mathcal{V} = \partial_\mu \mathbf{n} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}, \quad (1.28)$$

e da condição de norma positiva para todo vetor no espaço interno. Desta forma

$$\int d^2 x [(\partial_\mu \mathbf{n} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})] \geq 0. \quad (1.29)$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^2 x [(\partial_\mu \mathbf{n}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{n}) + \varepsilon_{\mu\nu} (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma} (\mathbf{n} \times \partial_\sigma \mathbf{n})] \geq \\ \pm 2 \int d^2 x [\varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Os dois termos do lado esquerdo da equação anterior são exatamente iguais, portanto

$$2 \int d^2 x [(\partial_\mu \mathbf{n}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{n})] \geq \pm 2 \int d^2 x [\varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})] \quad (1.31)$$

que não é mais que

$$E \geq 4\pi |Q|. \quad (1.32)$$

Esta desigualdade fornece um limite inferior para as energias das configurações estáticas em cada setor topológico. Logo a equação dos campos (1.23) pode ser resolvida achando os extremos do funcional energia levando em conta o vínculo que permite só vetores de norma unitária.

Por outro lado, em um certo setor topológico, a desigualdade (1.32) se tornará uma igualdade sempre que a inequação (1.29) o for também, e isto acontece se e somente se

$$\partial_\mu \mathbf{n} = \pm \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}. \quad (1.33)$$

A equação anterior (1.33) pode ser simplificada usando a mudança de variáveis da projeção estereográfica, ou seja,

$$\omega_1 = \frac{2n_1}{1-n_3}, \quad \omega_2 = \frac{2n_2}{1-n_3}. \quad (1.34)$$

É conveniente também introduzir

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 = \frac{2(n_1 + in_2)}{1-n_3} = \frac{2n}{1-n_3}, \quad n = n_1 + in_2, \quad (1.35)$$

e então

$$\partial_1 \omega \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{2[(1-n_3)\partial_1 n + n\partial_1 n_3]}{(1-n_3)^2}, \quad (1.36)$$

$$\partial_1 \omega = \frac{2}{(1 - n_3)^2} (\partial_1 n + n \bar{\partial}_1 n_3), \quad (1.37)$$

onde $b\bar{\partial}a = b\partial a - a\partial b$. Usando agora as novas variáveis, a equação (1.33) pode ser escrita como

$$\partial_1 n = \pm i(n \bar{\partial}_2 n_3), \quad \partial_2 n = \pm i(n \bar{\partial}_1 n_3), \quad (1.38)$$

que ao serem substituídas em (1.37) geram as relações

$$\partial_1 \omega = \pm \partial_2 \omega, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}. \quad (1.40)$$

As relações que aparecem em (1.40) são aquelas de Cauchy-Riemann para ω e logo qualquer função analítica $\omega(z)$ é solução delas. Um protótipo de solução com qualquer valor do índice de Pontryaguin (N) será:

$$\omega(z) = \left[\frac{z - z_0}{\lambda} \right]^N \quad (1.41)$$

que para $N=1$ no espaço real adota a forma:

$$n_{1(2)} = \frac{4\lambda x(y)}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad n_3 = \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2} \quad (1.42)$$

sendo λ o tamanho da excitação localizada com o centro na origem de coordenadas.

Como vimos não foi usado nenhum formalismo geral para tratar este problema, pois para o caso de dois ou mais campos escalares acoplados não existe tal possibilidade [32]. O motivo pelo qual um tratamento semelhante ao exposto para o caso de um campo escalar em uma dimensão não é possível pode ser compreendido facilmente. Consideremos um sistema descrito por dois campos escalares acoplados em uma dimensão. A dinâmica deste sistema será governada pelo conjunto de equações

$$\phi_1'' = -\frac{\partial U(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_1}, \quad \phi_2'' = -\frac{\partial U(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_2}. \quad (1.43)$$

Ao contrário da equação (1.9), que pode ser integrada facilmente por quadratura, não existe um método geral que permita resolver o sistema acoplado (1.43). Mesmo assim, podem ser obtidas algumas características das soluções localizadas nestes casos. Por exemplo, ao contrário dos sistemas compostos por um único campo escalar, em que não existiam soluções localizadas quando $U(\phi)$ tinha um mínimo não degenerado, os sistemas compostos por dois ou mais campos possuem soluções localizadas em situações semelhantes. Nestes casos, a presença de uma outra "dimensão", ou campo

ϕ_2 , permite que a partícula fictícia possa executar um movimento fechado voltando ao mínimo g de onde partiu inicialmente.

Outro ponto interessante, na existência de soluções estáticas localizadas para dimensões maiores que um, é o conhecido teorema de Derrick [33] (ver Apêndice A). Este teorema proporciona basicamente um resultado negativo, pois mostra que para sistemas descritos por densidades de lagrangianas da forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi) - U(\phi), \quad (1.44)$$

onde $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_i(\mathbf{x}, t)$ com $i = 1, 2, \dots, N$ em D dimensões espaciais, não existem soluções estáticas localizadas para $D \geq 3$. A obtenção deste resultado também fornece uma condição interessante para o caso de duas dimensões. Isto é, o valor do potencial $U(\phi)$ na solução localizada ϕ_1 , por exemplo, deve ser identicamente nulo, ou seja,

$$U(\phi_1) \equiv 0. \quad (1.45)$$

Então, se $U(\phi(\mathbf{x}))$ tem mínimos discretos degenerados, teremos somente a solução trivial, ou seja, aquela em que ϕ é igual a um dos mínimos de U . Por outro lado, se o potencial possui um conjunto contínuo de mínimos, então é possível uma solução diferente da trivial, ou seja, dependente de \mathbf{x} , onde ϕ muda continuamente dentro do conjunto contínuo de mínimos. Este é, precisamente, o caso do modelo sigma não linear, em que o potencial envolvido é identicamente nulo e portanto possui um conjunto de mínimos contínuo.

Para completar este breve estudo sobre as soluções localizadas, que nos permitirá posteriormente investigar a dinâmica das mesmas, é preciso estabelecer a correspondência entre os sólitons e os estados quânticos de partícula livre. Portanto, a próxima seção será dedicada a apresentar o formalismo de quantização das soluções solitônicas que estabelece precisamente esta correspondência.

1.4 Quantização dos Sólitons

1.4.1 Introdução

Partindo da forma canônica da hamiltoniana dos sistemas que admitem soluções localizadas, Christ e Lee [9] desenvolveram um método simples para a quantização dos sólitons. Para introduzir a idéia que está por trás deste método, é conveniente explorar o modelo de uma partícula não relativística de massa unitária que se movimenta sob a ação de um potencial $U(x)$ como aparece

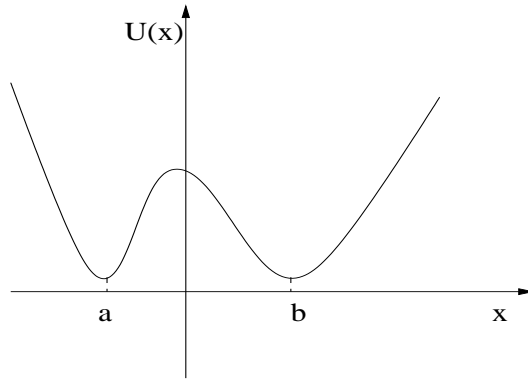


Figura 1.3: Potencial $U(x)$ que age sobre uma partícula fictícia não relativística. A equação de Newton terá como soluções estáticas os pontos a e b.

na Figura 1.3. Do ponto de vista clássico, o movimento da partícula será descrito pela segunda lei de Newton

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad (1.46)$$

e portanto as soluções estáticas deste problema serão os extremos de $U(x)$, ou seja os pontos a e b. Desta forma, a energia associada ao sistema no primeiro dos estados, será $E_{clas} = U(a)$. Já do ponto de vista quântico, os estados em que a partícula se acha em a ou b não são permitidos, pois o princípio de incerteza proíbe um estado de momentum nulo e posição definida. Como consequência a partícula flutuará em torno da posição a, por exemplo, de forma que a energia mínima tenha a forma

$$E_0 = E_{clas} + \Delta_0, \quad (1.47)$$

onde Δ_0 representa a correção quântica derivada do movimento do ponto zero.

Explorando a idéia anterior, se o potencial $U(x)$ for aproximadamente harmônico perto do ponto a, podemos fazer uma expansão tipo *weak-coupling* e associar ao sistema um conjunto de estados localizados em torno de a. Neste caso

$$E_n = E_{clas} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (1.48)$$

Com algumas diferenças, podemos então estender a idéia anterior a sistemas governados por campos que possuem soluções localizadas. Considere, por exemplo, um sistema descrito pela la-

grangiana

$$L[\phi] = \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - U(\phi) \right\} dx, \quad (1.49)$$

onde $\phi(x, t)$ é um campo escalar em duas dimensões (1 espacial + 1 temporal) e U é uma função deste campo. Para explorar a analogia com a idéia da quantização exposta acima, escreveremos a equação (1.49) como

$$L[\phi] = T[\phi] + V[\phi], \quad (1.50)$$

onde

$$T[\phi] = \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \quad \text{e} \quad V[\phi] = \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - U(\phi) \right\} dx. \quad (1.51)$$

A equação de Euler-Lagrange que se obtém de (1.50) é simplesmente

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi}, \quad (1.52)$$

sendo o lado direito uma derivada funcional. As soluções estáticas de (1.52) são os extremos do potencial $V[\phi]$, que podem ser obtidos de

$$\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi} = 0, \quad (1.53)$$

no espaço das configurações do campo ϕ .

Consideremos agora a possibilidade de conhecer alguma das soluções de (1.53) que denotaremos por $\phi_0(x)$. Então, a expansão funcional de $V[\phi]$ em torno de $\phi_0(x)$ terá a forma

$$V[\phi] = V[\phi_0] + \int \frac{1}{2} \left\{ \eta(x) \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right]_{\phi_0} \eta(x) \right\} dx + \dots, \quad (1.54)$$

onde $\eta(x) \equiv \phi(x) - \phi_0(x)$.

Como vemos o funcional $V[\phi]$ desenvolvido em torno de ϕ_0 gera um problema de autovalores e autofunções dado pela equação diferencial

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right]_{\phi_0} \eta_i(x) = \omega_i^2 \eta_i(x), \quad (1.55)$$

sendo $\eta_i(x)$ o conjunto de *modos normais* (ortonormais) ou flutuações em torno de $\phi_0(x)$. Podemos então escrever $\eta(x) \equiv \phi(x) - \phi_0(x)$ [34] como

$$\eta_i(x, t) \equiv \sum_i c_i(t) n_i(x). \quad (1.56)$$

Substituindo (1.55) e (1.56) em (1.49) teremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{dc_i(t)}{dt} \right]^2 - \left(V[\phi_0(x)] + \frac{1}{2} \sum_i [c_i(t)]^2 \omega_i^2 \right) + \dots, \quad (1.57)$$

que claramente corresponde a um conjunto de osciladores harmônicos, um para cada modo normal, além de um termo constante $V[\phi_0]$. Como uma consequência direta de (1.57) podemos construir uma teoria quântica, em torno do estado clássico ϕ_0 , como um conjunto de autoestados harmônicos aproximados. Isso pode ser feito quantizando os coeficientes c_i , e desta forma as energias dos estados serão

$$E_{n_i} = V[\phi_0(x)] + \hbar \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i + \dots, \quad (1.58)$$

sendo n_i o número de quanta do i -ésimo modo normal. A equação (1.58) (primeiro termo) relaciona aproximadamente a energia de um certo estado quântico com a solução clássica ϕ_0 , e, por outro lado, as frequências de oscilação ω_i aos possíveis estados excitados, ou flutuações em torno da solução localizada $\phi_0(x)$.

O exemplo anterior ilustra como funcionam as idéias básicas da associação de um conjunto de estados quânticos a uma solução estática qualquer, sempre que esta última seja um mínimo estável do potencial envolvido no problema. Uma situação diferente aparece quando se trata de soluções que possuem estabilidade neutra, ou seja, a segunda derivada funcional nula em determinado ponto do espaço interno em torno do qual queremos aplicar o método de quantização descrito nesta seção.

Para demonstrar a existência destes pontos de sela, é conveniente escrever a equação de movimento (1.53) na seguinte forma

$$-\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi}, \quad (1.59)$$

e tomar a derivada da expressão anterior em relação a x . Desta maneira obtemos

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(\phi)}{\partial \phi^2} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = 0. \quad (1.60)$$

Isto demonstra que a equação tipo Schrödinger (1.55), possui autovalores de frequência nula e que a autofunção associada a este modo, é simplesmente $\partial \phi_0 / \partial x$, sendo ϕ_0 um extremo de $V(\phi)$. Neste caso a estratégia a seguir para a quantização é diferente, pois o método exposto anteriormente falha como consequência da presença dos modos com $\omega_i = 0$.

Os modos de frequência nula são conhecidos como *modos translacionais* e podem ser tratados apropriadamente. A seguir analisaremos um pouco mais a fundo a origem e as implicações dos modos translacionais.

1.4.2 Modos Translacionais

Os modos de frequência zero aparecem sempre que se quantizam soluções estáticas de uma teoria que possui invariância de translação. Em outras palavras, quando uma solução qualquer da equação de movimento $\phi_0(x)$ é transladada para $\phi_0(x - a)$, esta última continua sendo solução da equação que gerou $\phi_0(x)$ para todo a . Nesta situação a energia potencial do problema em questão não dependerá de a e será possível definir curvas equipotenciais no espaço interno.

O ponto chave em tal caso é que apesar da solução $\phi_0(x)$ ser um extremo de $V[\phi]$, ela não é um mínimo nem mesmo localmente. Esta afirmação pode ser entendida da seguinte forma: partindo de $\phi_0(x)$ sempre é possível deslocar-se (no espaço interno) ao longo da curva de potencial constante ao longo da qual a segunda derivada funcional é nula (estabilidade neutra). Este fato explica a conexão entre um tipo de simetria contínua e a existência dos modos de frequência nula.

Havendo compreendido a origem dos modos translacionais, podemos passar a analisar o impacto que estes têm na construção dos estados quânticos. Para isso retomaremos a teoria de campo escalar em uma dimensão espacial. O potencial $V[\phi]$, em torno de um dos seus possíveis mínimos, tem a forma de um vale, no fundo do qual se estende a curva equipotencial, ou seja uma parametrização por a da solução $\phi_0(x - a)$. Em qualquer direção ortogonal a esta curva o valor de $V[\phi]$ aumenta, o que traz como consequência a possibilidade de construir estados na forma descrita na seção anterior. No entanto, ao longo da curva, o potencial não tem ação confinante, o que provoca a não localização no espaço real da *função de onda* associada a essa direção. Este fato sugere a existência de um termo do tipo onda plana na energia do sistema.

Como consequência imediata, para cada modo translacional, deve aparecer na energia do problema um termo do tipo partícula livre, além das correções provenientes da expansão harmônica. Um resultado deste tipo não é possível de se obter através do formalismo desenvolvido até aqui. Entretanto, como veremos a seguir, ao introduzirmos modificações no método proposto, o caso das frequências nulas será tratado apropriadamente. O formalismo que apresentaremos em seguida, conhecido como o **método das coordenadas coletivas**, nos permite quantizar as soluções solitônicas lidando de forma correta com os modos de frequência nula, ou translacionais.

1.4.3 Método das Coordenadas Coletivas

Nesta seção apresentaremos o método das coordenadas coletivas para o caso de um campo escalar em duas dimensões, uma espacial e uma temporal. A generalização para o caso de um

número arbitrário de campos escalares em duas dimensões espaciais poder ser feito seguindo o tratamento que apresentaremos (para detalhes ver, por exemplo, [9]).

Para expor as idéias fundamentais deste formalismo, partiremos novamente do sistema descrito pela densidade de lagrangiana (1.49). Suponha, ainda, que existam soluções conhecidas $\phi_{cl}(x) \equiv \sigma(x - X)$ da equação de movimento (1.53) a ela correspondente. Como já vimos,

$$\phi(x, t) = \sigma(x - X) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t) \eta_i(x - X), \quad (1.61)$$

onde $i = 0$, correspondente ao modo de frequência zero, não é uma boa escolha no caso de existirem autovalores nulos da equação

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \right]_{\sigma(x-X)} \eta_i(x - X) = \omega_i^2 \eta_i(x - X). \quad (1.62)$$

É importante notar que o valor de X nestes casos não é relevante, pois o sistema é invariante por translação.

Em lugar de (1.61), a idéia do método consiste em expandir $\phi(x, t)$ como

$$\phi(x, t) = \sigma(x - X(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \eta_i(x - X(t)). \quad (1.63)$$

Neste caso, o termo $i = 0$ não aparece na soma (1.63) e o vetor X , que não tinha importância alguma, passa a ter um papel determinante na descrição do sistema, pois agora é dependente do tempo. Este vetor recebe o nome de **coordenada coletiva** e descreve o movimento do centro da excitação, que como vemos em (1.63) está acoplada às flutuações pela coordenada relativa $x - X(t)$.

O ponto chave do método é o uso de $X(t)$ e $q_i(t)$ (com $i > 0$) como coordenadas do sistema, ao invés do conjunto $c_i(t)$ como foi feito em (1.61). A derivada temporal de ϕ será

$$\frac{d\phi(x, t)}{dt} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right) \frac{dX(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (1.64)$$

É conveniente passar agora a uma nova notação, onde $u_0(t) = X(t)$ e $u_i(t) = q_i(t)$ (para $i > 0$). Logo, utilizando (1.64) podemos escrever a energia cinética do sistema como

$$K \equiv \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{du_i}{dt} D_{i,j} \frac{du_j}{dt}, \quad (1.65)$$

onde $D_{i,j}$ é uma matriz cujos elementos são:

$$D_{0,0} = \int dx \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sum_i^\infty q_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right)^2 \quad (1.66)$$

$$D_{0,j} = - \int dx \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sum_i^\infty q_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right) \eta_j = - \sum_i^\infty \int dx \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \eta_j q_i, \quad j \neq 0 \quad (1.67)$$

$$D_{i,j} = \delta_{i,j}, \quad i, j \neq 0 \quad (1.68)$$

Na obtenção das expressões anteriores usamos a ortogonalidade entre as funções η_i ($i \neq 0$) e η_0 , em virtude de (1.60). Como os elementos de $D_{i,j}$ são invariantes de translação, a sua integração não dependerá de $X(t)$ e portanto serão só função de $\{q_i\}$. Analogamente o termo de energia potencial na densidade de lagrangiana é também invariante de translação e como consequência independente de $X(t)$.

Podemos escrever então

$$U[\phi] \equiv \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V[\phi] \right\} = U(\{q_n\}), \quad (1.69)$$

que, com a ajuda de (1.63) e (1.60), se transforma em

$$U[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty q_n^2 \omega_n^2 + \dots \quad (1.70)$$

Portanto a lagrangiana do sistema em termos das coordenadas u_i poderá ser escrita como

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^\infty \frac{\partial u_i}{\partial t} D_{i,j}(\{q_n\}) \frac{\partial u_j}{\partial t} - U(\{q_n\}). \quad (1.71)$$

Para construir a hamiltoniana associada à lagrangiana anterior, devemos calcular os momentos π_i canonicamente conjugados às coordenadas u_i . Estes são

$$\pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = D_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial t}. \quad (1.72)$$

Então,

$$\mathcal{H} \equiv \sum_{i=0}^\infty \pi_i \frac{du_i}{dt} - L = \sum_{i,j=0}^\infty \frac{1}{2} \pi_i (D^{-1})_{i,j} \pi_j + U(\{q_n\}), \quad (1.73)$$

Por outro lado, usando as expressões que definem a matriz D teremos

$$(D^{-1})_{0,0} = \frac{1}{\mathcal{D}}, \quad (D^{-1})_{0,i} = -\frac{D_{0,i}}{\mathcal{D}} \quad i \neq 0, \quad (1.74)$$

$$(D^{-1})_{i,j} = \delta_{i,j} + \frac{D_{0,i} D_{0,j}}{\mathcal{D}} \quad i, j \neq 0, \quad (1.75)$$

sendo \mathcal{D} o determinante da matriz $D_{i,j}$, dado por

$$\mathcal{D} = \mathbf{Det}D_{i,j} = D_{0,0} - \sum_{i=1}^{\infty} D_{0,i}^2. \quad (1.76)$$

Ao substituir os elementos $D_{i,j}$ pelos seus valores (1.66) o determinante adota a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & A + 2 \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right) dx + \int dx \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right)^2 \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int dx \eta_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} q_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Se na expressão anterior expandirmos $\sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x}$ em termos da base $\eta_j(x - X(t))$, incluindo $\eta_0(x - X(t)) = 1/\sqrt{A} \frac{\partial \sigma(x-X)}{\partial x}$, a expressão do determinante se reduz a:

$$\mathcal{D} = \left(\sqrt{A} + \alpha \right)^2, \quad (1.78)$$

onde

$$\alpha = \int \eta_0 \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{\partial \eta_i(x-X)}{\partial x} \right) dx. \quad (1.79)$$

Substituindo (1.78) e (1.79) em (1.73) e denotando o momento π_0 como P , a hamiltoniana do sistema pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2\mathcal{D}} + \frac{P}{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{\infty} D_{0,i} \pi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\delta_{i,j} + \frac{D_{0,i} D_{0,j}}{\mathcal{D}} \right) \pi_i \pi_j + U(\{q_n\}) \quad (1.80)$$

ou simplesmente

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{D}} \left(P + \sum_{i=1}^{\infty} D_{0,i} \pi_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 + U(\{q_n\}). \quad (1.81)$$

Como pode-se notar na expressão anterior, a energia do sistema contém agora um termo do tipo partícula livre associado ao movimento do centro do sóliton. Este resultado concorda com a análise feita anteriormente quando estudamos a origem e relevância dos modos translacionais. Portanto, podemos concluir que através da mudança de variáveis do campo $\phi(x, t)$ para o conjunto $\{X(t), q_n(t)\}$, consegue-se tratar adequadamente o modo de frequência nula. Por outro lado, depois de calcular de forma adequada a hamiltoniana que caracteriza o sistema, podemos realizar a quantização da mesma e, desta forma, obter a energia no setor do espaço de Hilbert correspondente à solução solitônica.

1.4.4 Quantização das Soluções Solitônicas

Para a quantização de uma teoria unidimensional escalar escrita em termos das coordenadas coletivas e dos seus momentos canonicamente conjugados, devemos promover à categoria de operadores as variáveis u_i e π_i , de forma que as regras de comutação

$$[u_n(t), \pi_m(t)] = i\delta_{nm} \quad [u_n, u_m] = [\pi_n, \pi_m] = 0 \quad (1.82)$$

sejam satisfeitas. Para escrever a hamiltoniana clássica (1.80) em termos dos operadores posição e momento, devemos resolver o problema da ambigüidade na ordem destes operadores. Para isso assumiremos que a nova hamiltoniana (quântica) possua a forma “canônica”, ou seja, assumiremos que a hamiltoniana quântica na representação de Schrödinger tenha a forma:

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{2} (\hat{\pi}(x))^2 dx + V[\phi(x)] \quad (1.83)$$

onde $\pi(x)$ é o operador canonicamente conjugado ao campo $\phi(x)$, de forma que este seja consistente com as relações de comutação (1.82) e definido pela derivada funcional

$$\pi(x) = -i \frac{\delta}{\delta[\phi(x)]} \quad (1.84)$$

A mudança de variáveis de $\phi(x)$ para as novas coordenadas u_i pode ser feita convertendo o operador diferencial funcional (1.84) em um operador envolvendo este novo conjunto de coordenadas. Das regras do cálculo sabemos que quando temos um número finito de variáveis α_i com $i = 1, 2, 3 \dots N$, o laplaciano pode ser escrito em termos de um conjunto diferente de coordenadas β_i como:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} = \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{\partial}{\partial \beta_i} (B^{-1})_{i,j} \sqrt{B} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \quad (1.85)$$

onde

$$B_{i,j} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_j} \quad B = \mathbf{Det} B_{i,j} \quad (1.86)$$

Nosso problema envolve um número infinito de variáveis, logo devemos usar uma generalização de (1.86), isto é

$$B_{i,j} = \int dx \frac{\partial \phi(x)}{\partial u_i} \frac{\partial \phi(x)}{\partial u_j}. \quad (1.87)$$

Usando (1.63) podemos mostrar que $B_{i,j} = D_{i,j}$, onde os elementos $D_{i,j}$ coincidem com a expressão (1.66). Neste ponto estamos em condições de escrever a hamiltoniana do sistema em termos dos operadores diferenciais. Assim,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}}} \frac{\partial}{\partial u_n} (D^{-1})_{i,j} \sqrt{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial u_m} + V(\{u_i\}) \quad (1.88)$$

Fazendo agora $-i\partial/\partial u_n = \pi_n$, que é consistente com as relações de comutação (1.82), a expressão para a hamiltoniana adota a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{D}}} \left[\frac{\hat{P}^2}{\sqrt{\mathcal{D}}} - \hat{P} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_{0,n}}{\sqrt{\mathcal{D}}} \hat{\pi}_n + \hat{\pi}_n \frac{D_{n,0}}{\sqrt{\mathcal{D}}} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{D}}} \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} \hat{\pi}_n \left(\delta_{nm} \sqrt{\mathcal{D}} + \frac{D_{0,n} D_{0,m}}{\sqrt{\mathcal{D}}} \right) \hat{\pi}_m \right] + V(\{q_n\}), \end{aligned} \quad (1.89)$$

onde agora, a matriz $D_{0,i}$ é um operador que envolve as coordenadas $\{q_n\}$. Esta expressão pode ser ainda simplificada para facilitar a sua interpretação física. Para isso substituímos o valor de $D_{0,n}$ em (1.89), que usando as regras de comutação pode ser escrito como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{D}} \left[\hat{P} - \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \hat{q}_m \hat{\pi}_n \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\pi}_n^2 + V[q_n], \quad (1.90)$$

onde

$$G_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta_m(x)}{\partial x} \eta_n(x) dx. \quad (1.91)$$

Por outro lado, lembrando da expansão em modos normais do potencial, a hamiltoniana do sistema pode ser escrita finalmente como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{D}} \left[\hat{P} - \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \hat{q}_m \hat{\pi}_n \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\pi}_n^2 + \omega_n^2 q_n^2. \quad (1.92)$$

O segundo termo da hamiltoniana (1.92) corresponde a um conjunto de osciladores desacoplados. Claramente a origem destes modos normais está relacionada com a flutuação do campo $\phi(x, t)$ em torno da solução solitônica e tem uma origem puramente quântica. Por outro lado o primeiro termo corresponde ao acoplamento deste sistema de osciladores com o momento da excitação topológica, e deve ser examinado com atenção. Por exemplo, sendo \hat{P} uma constante de movimento, pois

$$\dot{\hat{P}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}, \mathcal{H}] = 0, \quad (1.93)$$

\hat{P} não deve ser confundido com o momentum da excitação topológica. Ao mesmo tempo, pode-se verificar que

$$\dot{\hat{x}}_0 = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}_0, \mathcal{H}] = \frac{1}{\mathcal{D}} \left[\hat{P} - \sum_{n,m=1}^{\infty} G_{mn} \hat{q}_m \hat{\pi}_n \right], \quad (1.94)$$

portanto é correto interpretar $\mathcal{D}\dot{\hat{x}}_0$ como o momentum do sóliton e o termo $\sum_{n,m=1}^{\infty} G_{mn} \hat{q}_m \hat{\pi}_n$ como o momentum do campo das flutuações.

1.5 Conclusões

Esclarecidos a origem e significado dos termos que compõem a hamiltoniana do sistema, podemos então concluir que, sempre que um sistema possui invariância translacional e admite soluções localizadas, estas últimas apresentarão uma dinâmica descrita por uma hamiltoniana do tipo (1.92). Nestes casos, devido ao sóliton ter o seu momento acoplado às flutuações do campo, sua dinâmica passa a ser não trivial. No próximo capítulo apresentaremos o estudo das propriedades de transporte de excitações topológicas que aparecem em sistemas magnéticos unidimensionais. Veremos que partindo de um modelo puramente microscópico, é possível construir uma hamiltoniana do tipo (1.92) que descreva o comportamento das excitações e mostrar como pode ser enfrentado, de forma sistemática, o estudo da dinâmica destes sistemas complexos.

Capítulo 2

Dinâmica das Paredes de Bloch

Neste capítulo mostraremos como é possível estudar a dinâmica das excitações topológicas em uma dimensão. Para isso, partiremos de um modelo microscópico simplificado para os sistemas ferromagnéticos. Veremos que, no limite contínuo, as excitações topológicas das equações de movimento da teoria correspondem à parede dos domínios magnéticos. Estas excitações serão quantizadas usando o método das coordenadas coletivas apresentado no capítulo 1, o que permite obter uma hamiltoniana que acopla a parede dos domínios com as ondas de spin. Finalmente, para não sermos redundantes ao calcular a mobilidade das excitações, nos limitaremos a usar a expressão particular do coeficiente de decaimento para o caso 1-D, cuja dedução para um caso mais geral (2-D) é apresentada integralmente no capítulo 4.

2.1 Introdução

Como é conhecido, os sistemas ferromagnéticos tridimensionais, abaixo de uma certa temperatura crítica, apresentam uma transição de fase de segunda ordem [35]. A manifestação macroscópica deste fenômeno, é o surgimento de uma magnetização (\mathbf{M}) mesmo na ausência de campo magnético externo. Do ponto de vista experimental, verifica-se que neste tipo de sistemas coexistem fases com diferentes valores de \mathbf{M} , o que pode ser perfeitamente explicado à luz da teoria das transições de fase de Landau [36]. Quando isto acontece, as amostras estudadas podem ficar divididas em regiões, que permanecem em contato, onde \mathbf{M} aponta em diferentes direções. Estas regiões com magnetização espontânea não nula, são conhecidas como domínios magnéticos [36].

Sendo a magnetização uma grandeza que pode ser tomada como contínua, pois varia pouco em

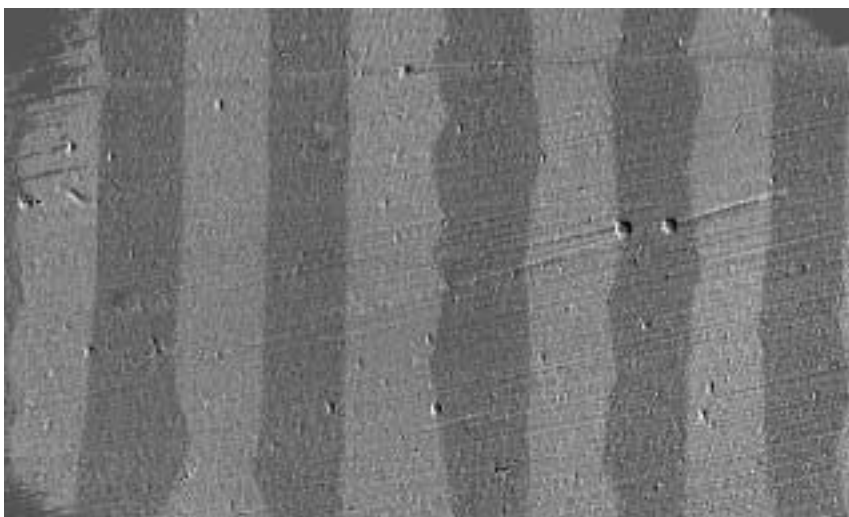


Figura 2.1: Domínios magnéticos numa fita de CoFeSiB amorfa obtida usando o efeito Kerr, cortesia de K. Pirota e M. Knobel, LMBT, IFGW, UNICAMP.

distâncias da ordem da separação interatômica, é possível demarcar claramente a região estreita que separa os domínios. Estas regiões de transição são conhecidas como paredes do domínio e em diversas situações devem ser tratadas como entes físicos reais. De fato, ao calcularmos a estrutura de domínios, devemos necessariamente incluir a energia correspondente às paredes [37]. Sabe-se também que para baixas frequências e campos magnéticos fracos, a função resposta dinâmica é determinada pela resposta das paredes dos domínios [11], que deverá incluir a mobilidade das mesmas e a sua massa.

Por outro lado o surgimento de novas técnicas de crescimento de materiais, Chemical Beam Epitaxy (CBE) e Molecular Beam Epitaxy (MBE) por exemplo, possibilitaram a fabricação de sistemas magnéticos de baixa dimensionalidade [38]. Neste novo tipo de sistema, de enorme importância tecnológica ¹, também aparecem domínios magnéticos e portanto paredes de domínios conhecidas como paredes de Bloch.

Como se sabe, as paredes de Bloch, podem se deslocar pela amostra. De fato, Landau e Lifshitz [39] sugeriram que o movimento das mesmas é dissipativo devido à presença das excitações

¹Ver [38] e as referências nele citadas.

magnéticas elementares (mágnons) no sistema. De fato, quando as paredes de Bloch e as ondas de spin coexistem, as colisões entre elas, envolvendo transferência de momentum, provocam a redução da velocidade das paredes e portanto uma mobilidade finita das mesmas.

A mobilidade das paredes de Bloch tem sido estudada amplamente do ponto de vista teórico e experimental. A maioria dos trabalhos teóricos parte de considerações fenomenológicas, o que não permite avaliar a influência dos diferentes fatores (defeitos e ondas de spin, por exemplo) na mobilidade das mesmas. Do ponto de vista experimental existem vários métodos para observar a existência das paredes ². Um dos mais utilizados baseia-se no efeito Kerr. Este efeito consiste fundamentalmente na variação do plano de polarização da luz depois que esta se reflete numa amostra que possui magnetização não nula na superfície. Então, estudando a luz que provém da amostra com um polarizador, consegue-se distinguir nitidamente as regiões de polarizações diferentes que aparecem com tonalidades claras e escuras (ver Figura 2.1). Por outro lado, se na mesma experiência, observa-se com detalhes a amostra ao microscópio, poderão ser vistas regiões de tonalidades intermediárias separando os domínios. Estas regiões de transição são precisamente as paredes dos domínios ou paredes de Bloch.

Depois de identificar as regiões que correspondem às paredes, é possível estudar seu movimento submetendo-as a um gradiente de campo magnético ou forçar as mesmas a executar um movimento oscilatório quando submetidas a campos magnéticos variáveis no tempo. Estas experiências mostram, sem dúvidas, que o movimento das paredes é dissipativo. No entanto, existem poucos trabalhos relacionados com a influência da temperatura no movimento das mesmas.

A influência da temperatura no movimento das paredes de Bloch está relacionada com a população de mágnons no sistema. Como a população dos mágnons depende fortemente da temperatura e estes estão acoplados de alguma forma às paredes, a dinâmica das mesmas torna-se dependente da temperatura. Esta dependência será o principal objetivo a ser estudado no presente capítulo.

Partindo de um modelo microscópico ferromagnético unidimensional, será demonstrado que a abordagem semiclassical do problema da existência das paredes, permite identificar a configuração de spins correspondente às mesmas com as soluções localizadas de uma teoria de campo efetiva. Logo em seguida, usando um método sistemático para o estudo da dinâmica das excitações topológicas [40] [41], apresentaremos um estudo da mobilidade das paredes de Bloch com a temperatura.

²Ver por exemplo [11] e as referências nele citadas.

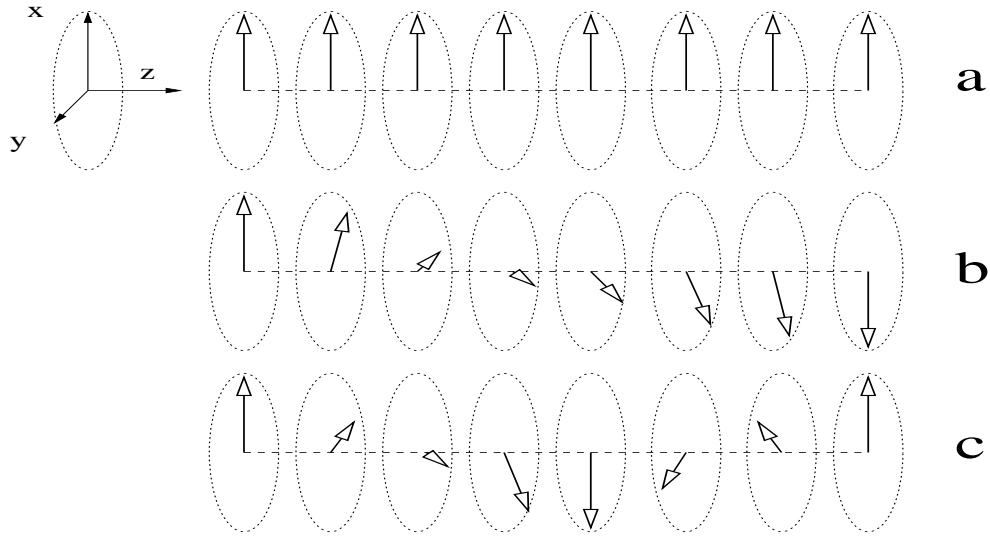


Figura 2.2: (a) Configuração correspondente ao mínimo do funcional de energia quando $B = 0$. (b) Parede de Bloch π , configuração correspondente a um mínimo local do funcional de energia para $B = 0$. (c) Parede de Bloch 2π , configuração correspondente a um mínimo local do funcional de energia quando $B \neq 0$.

2.2 Modelo Microscópico das Paredes de Bloch

Para estudar as paredes de Bloch usaremos um modelo magnético unidimensional totalmente anisotrópico. Este sistema é composto por um conjunto de spins dispostos ao longo da direção \hat{z} , com um espaçamento \underline{a} entre eles, submetidos a um campo magnético externo. Este tipo de sistema é descrito pela hamiltoniana

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \left(J_x S_i^{(x)} S_j^{(x)} + J_y S_i^{(y)} S_j^{(y)} + J_z S_i^{(z)} S_j^{(z)} \right) - \frac{\mu}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i. \quad (2.1)$$

Na expressão (2.1) $S_j^{(\alpha)}$ é a componente α ($\alpha = x, y, z$) do i -ésimo spin do sistema, μ é o módulo do momento magnético em cada sítio e B é o módulo do campo magnético externo. As constantes de acoplamento são tais que $J_x > J_y > J_z > 0$ e por conveniência assumiremos que \mathbf{B} está orientado na direção \hat{x} .

Para fazermos uma análise dos possíveis estados de um sistema descrito pela hamiltoniana (2.1), é conveniente começar pelo caso em que $B = 0$. Nesta situação, o estado fundamental do sistema é aquele em que todos os spins apontam na direção \hat{x} (ver Figura 2.2(a)). Porém existe um

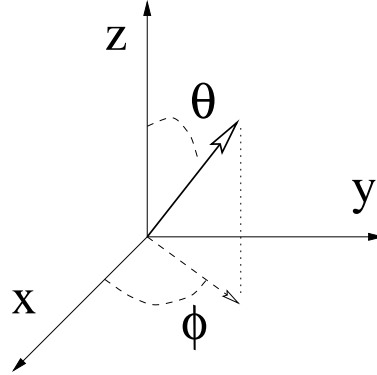


Figura 2.3: Descrição clássica dos spins, $\sum_{i=1}^3 S^{(i)2} = S^2$.

estado diferente da solução uniforme. Nos referimos a aquele estado que, sendo um mínimo local do funcional de energia, não pode ser obtido partindo da configuração completamente uniforme por qualquer operação que conserve a energia do sistema finita. Um exemplo deste tipo de configuração aparece na Figura 2.2(b). Para descrever de forma qualitativa este estado é conveniente representar os spins classicamente, ou seja, por vetores de norma S (como aparece na Figura 2.3). Desta forma

$$\mathbf{S}_i = S(\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i) \quad (2.2)$$

onde θ_i e φ_i são os ângulos polares do i -ésimo spin.

Usando as novas variáveis θ_i e φ_i , a configuração da Figura 2.2(a) corresponde ao caso em que $\theta_i = \pi/2$ com $\varphi_i = 0$ ou $\varphi_i = \pi$. Por outro lado a configuração 2.2(b) corresponde à situação em que $\theta_i = \pi/2$ e $\varphi_i = 0$ quando $i \rightarrow +\infty$ e $\varphi_i = \pi$ quando $i \rightarrow -\infty$. Esta configuração em que S_i roda em torno da direção \hat{z} começando em $(\theta, \varphi) = (\pi/2, 0)$ e terminando em $(\theta, \varphi) = (\pi/2, \pi)$ é conhecida como parede de Bloch π [42]. Como veremos posteriormente esta solução é do tipo localizada e pode ser calculada, na aproximação de magnetização contínua, usando as técnicas expostas no capítulo 1.

Voltando à análise do sistema, no caso em que o campo magnético é diferente de zero, quebra-se a degenerescência entre os estados $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. De fato, por simples inspeção vemos que o estado em que $S^{(x)}$ é paralelo ao campo externo ($\varphi = 0$) possui menor energia que o estado em que $S^{(x)}$ é antiparalelo a \mathbf{B} ($\varphi = \pi$). Nesta situação ainda é possível encontrar uma configuração que corresponda a um mínimo local do funcional de energia. Claramente, neste caso $\theta_i = \pi/2$ enquanto que φ_i é igual a zero (ou 2π) para $i \rightarrow \pm\infty$ (ver Figura 2.2(c)). Esta nova configuração é conhecida

como como parede de Bloch 2π .

Resumindo, as configurações de spin que correspondem às paredes de Bloch π e 2π possuem as seguintes características

$$\text{Parede de Bloch } \pi = \begin{cases} \theta_i = \frac{\pi}{2}, & \text{para todo } i \\ \varphi_i = 0, & \text{para } i \rightarrow +\infty \\ \varphi_i = \pi, & \text{para } i \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Parede de Bloch } 2\pi = \begin{cases} \theta_i = \frac{\pi}{2}, & \text{para todo } i \\ \varphi_i = 0, & \text{para } i \rightarrow +\infty \\ \varphi_i = 2\pi, & \text{para } i \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.4)$$

Como vimos no capítulo 1 as soluções localizadas podem ser classificadas atendendo ao valor dos campos envolvidos no infinito. Desta forma fica evidente que as soluções que chamamos de paredes de Bloch π e 2π pertencem a setores topológicos diferentes e, portanto, não podem ser deformadas, continuamente, uma na outra sem violar a conservação da energia.

Como veremos em seguida, é possível, passando ao limite contínuo, mapear a hamiltoniana (2.1) em um modelo teórico que reproduz completamente as características (2.3) e (2.4). Ou seja, descrevemos as paredes de Bloch como soluções localizadas no espaço de uma certa densidade de Lagrangiana efetiva. Mostraremos ainda a forma correta de descrever as flutuações do sistema em torno destas soluções e como é possível obter uma hamiltoniana capaz de descrever a interação das paredes de Bloch com as ondas de spin.

2.3 Modelo Contínuo das Paredes de Bloch

Para começar a descrição do sistema descrito pela hamiltoniana (2.1) em termos de variáveis contínuas, é conveniente partir das equações de movimento associadas a $S^{(\alpha)}$, estas equações tem a forma

$$\frac{dS^{(\alpha)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[S^{(\alpha)}, H]. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.1) em (2.5) e calculando os comutadores teremos

$$\frac{dS_i^x}{dt} = J_z(S_{i+1}^z + S_{i-1}^z)S_i^y - J_y(S_{i+1}^y + S_{i-1}^y)S_i^z, \quad (2.6)$$

$$\frac{dS_i^y}{dt} = J_x(S_{i+1}^x + S_{i-1}^x)S_i^z - J_z(S_{i+1}^z + S_{i-1}^z)S_i^x + \frac{\mu B}{\hbar}S_i^z, \quad (2.7)$$

$$\frac{dS_i^z}{dt} = J_y(S_{i+1}^y + S_{i-1}^y)S_i^x - J_x(S_{i+1}^x + S_{i-1}^x)S^y - \frac{\mu B}{\hbar}S_i^y. \quad (2.8)$$

Podemos agora tomar o limite contínuo das equações anteriores, pois sabemos que a variação das componentes do spin entre vizinhos próximos é pequena [36]. Para isso, devemos lembrar que

$$f''(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(z + 2\Delta) - 2f(z + \Delta) + f(z)}{\Delta^2}, \quad (2.9)$$

que permite escrever as equações (2.6)-(2.8) como:

$$\dot{S}^x(z, t) = a^2(J_z S^{z''} S^y - J_y S^{y''} S^z) + 2(J_z S^z S^y - J_y S^y S^z), \quad (2.10)$$

$$\dot{S}^y(z, t) = a^2(J_x S^{x''} S^z - J_z S^{z''} S^x) + 2(J_x S^x S^z - J_z S^z S^x) + \frac{\mu B}{\hbar} S^z, \quad (2.11)$$

$$\dot{S}^z(z, t) = a^2(J_y S^{y''} S^x - J_x S^{x''} S^y) + 2(J_y S^y S^x - J_x S^x S^y) - \frac{\mu B}{\hbar} S^y. \quad (2.12)$$

Convém notar que no caso isotrópico ($J_x = J_y = J_z$) as relações anteriores reproduzem as equações de Landau-Lifshitz [24], que, no regime linear e para k pequeno, fornecem a relação de dispersão para as ondas de spin ferromagnéticas conhecida como lei de Bloch,

$$\omega^2 \propto (k^2 + \Delta)^2. \quad (2.13)$$

Para avançar na descrição semiclassica do sistema escreveremos o conjunto de equações, (2.10)-(2.12), em termos das variáveis θ e φ definidas em (2.2). Ao mesmo tempo podemos considerar que, devido à anisotropia, a variável θ pode ser escrever na forma

$$\theta(z, t) \approx \frac{\pi}{2} + \alpha(z, t), \quad (2.14)$$

onde $\alpha(z, t) \ll 1$. Usando novamente o fato de que as variações de α e φ entre primeiros vizinhos é pequena e linearizando com respeito a α , as equações de movimento que descrevem o sistema (2.10)-(2.12) podem ser escritas como:

$$\dot{\varphi} = \alpha 2S(J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - J_z), \quad (2.15)$$

$$\dot{\alpha} = a^2 S(J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \sin \varphi \left[\frac{\mu B}{\hbar} + 2S(J_x - J_y) \cos \varphi \right], \quad (2.16)$$

onde a é o parametro da rede. Então, eliminando α deste sistema de equações, teremos uma equação de movimento efetiva para a variável $\varphi(z, t)$ da forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -A_1 \sin \varphi - A_2 \sin 2\varphi, \quad (2.17)$$

onde foram usadas as seguintes definições

$$c^2 \cong 2a^2 S^2 J_x J_y \left(1 - \frac{J_z}{J_y} \right), \quad (2.18)$$

$$A_1 = \frac{\mu B}{a^2 S J_x \hbar}, \quad (2.19)$$

e

$$A_2 = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{J_y}{J_x} \right). \quad (2.20)$$

Convém notar que mantendo os termos de quarta ordem nas derivadas espaciais de (2.17), a equação de movimento resultante reproduziria a relação de dispersão correta para mágnons ferromagnéticos.

Porém a relação que ela nos fornece

$$\omega^2 \propto A + Bk^2, \quad (2.21)$$

lembra as ondas de spin de um sistema antiferromagnético. Portanto, no uso da equação de movimento (2.17) para o campo $\varphi(z, t)$ devemos lembrar que ela é válida apenas até termos de ordem k^2 .

Por outro lado podemos mostrar que a equação de movimento (2.17) anterior pode ser derivada de uma densidade de Lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - U(\varphi), \quad (2.22)$$

onde

$$U(\varphi) = A_1(1 - \cos \varphi) + \frac{A_2}{2}(1 - \cos 2\varphi). \quad (2.23)$$

Com isto vemos que: o passo ao limite contínuo nos permitiu obter uma densidade de Lagrangiana efetiva em função de um único campo escalar real e desta forma mapear o sistema original (2.1) em um sistema efetivo descrito pelas relações (2.22) e (2.23) que oferece a possibilidade de realizar uma análise topológica, semelhante a do capítulo 1 para sistemas unidimensionais. Como veremos em seguida, é possível mostrar que as paredes de Bloch podem ser interpretadas como soluções localizadas, ou sólitons, do sistema efetivo descrito por (2.22) e (2.23).

Paredes de Bloch como Soluções Localizadas do Campo φ

Começaremos esta análise pela situação mais simples, ou seja, aquela em que não existe campo magnético externo sobre o sistema ferromagnético. Sendo assim a densidade de Lagrangiana que

descreve o sistema tem a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{A_2}{2} (1 - \cos 2\varphi). \quad (2.24)$$

Como vimos no capítulo 1 a densidade de Lagrangiana que gera a equação de sine-Gordon (sG) possui a forma (2.24). Portanto, as soluções localizadas de carga topológica $Q = \pm 1$, já obtidas para a equação de movimento de sG, descreverão a parede de Bloch no caso em que o sistema não é submetido a campos magnéticos externos. Explicitamente a solução localizada tem a forma

$$\varphi(z) = 2 \tan^{-1} [\exp \sqrt{2A_2} (z - z_0)], \quad \text{para } A_1 = 0 \quad (2.25)$$

Por outro lado se consideramos o caso em que sobre o sistema é aplicado um campo magnético constante e ao mesmo tempo a anisotropia é nula, o sistema será descrito pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{A_2}{2} (1 - \cos 2\varphi), \quad (2.26)$$

que gera soluções localizadas da forma

$$\varphi(z) = 4 \tan^{-1} [\exp \sqrt{A_1} (z - z_0)], \quad \text{para } A_2 = 0 \quad (2.27)$$

As soluções anteriores (2.25) e (2.27) descrevem as paredes de Bloch π e 2π respectivamente. De fato, calculando os limites destas expressões vemos que os comportamentos no infinito são $\varphi(-\infty) = 0$ e $\varphi(+\infty) = \pi$ para o caso em que o campo magnético é nulo e $\varphi(-\infty) = 0$ e $\varphi(+\infty) = 2\pi$ quando a anisotropia é nula, estão em correspondência com as características (2.3) e (2.4) respectivamente.

Por outro lado no caso em que tanto a anisotropia como o campo magnético são não nulos também é possível encontrar soluções localizadas. Nestes casos, a densidade de Lagrangiana que descreve o sistema é dada pela expressão (2.22), que possui uma solução localizada da forma

$$\varphi(z) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\cosh \rho}{\sinh(z/\lambda)} \right], \quad (2.28)$$

onde

$$\lambda = 1/\sqrt{A_1 + 2A_2}, \quad (2.29)$$

$$\cosh \rho = \sqrt{1 + \frac{2A_2}{A_1}}. \quad (2.30)$$

Tomando os limites $z \rightarrow \pm\infty$ na solução (2.28) podemos verificar que no infinito os spins estão orientados na mesma direção, o que corresponde ao caso das paredes de Bloch 2π .

É conveniente mencionar que existe outro tipo de solução localizada, diferente do ponto de vista topológico, da equação de movimento (2.17), que é conhecida como *núcleo* [43] e corresponde a uma superposição de duas paredes de Bloch π [44].

Como vimos, é possível interpretar as paredes de Bloch como soluções localizadas das equações de movimento correspondentes a uma densidade de lagrangiana efetiva derivada a partir da hamiltoniana microscópica que caracteriza o sistema ferromagnético. Na próxima seção, mostraremos como estudar a dinâmica das paredes partindo da ação efetiva que as descreve.

2.4 Dinâmica das Paredes de Bloch

2.4.1 Introdução

Quando se estuda a dinâmica quântica de um sistema não isolado, uma das vias possíveis é considerar que o sistema em estudo está acoplado com um banho de osciladores harmônicos de função espectral conhecida [8]. Se procedermos desta forma, é evidente que não estamos interessados nos detalhes microscópicos da interação do sistema com o meio, e sim naquelas características essenciais que permitem recuperar as equações de movimento fenomenológicas no limite clássico [45]. Outra das possíveis vias para o estudo da dinâmica quântica de um sistema que interage com um meio, é o tratamento do ponto de vista microscópico; por exemplo, o cálculo do operador densidade reduzido do sistema, através da integração das variáveis que caracterizam o meio. Porém, este procedimento é na maioria dos casos extremamente complicado, tornando impossível a obtenção de qualquer informação útil.

Como solução alternativa à anterior [46] podemos tratar a hamiltoniana do sistema como *quasi-clássica*, e obter soluções estacionárias do tipo solitônicas para as equações de movimento. Como já vimos, as soluções localizadas (sólitons) viajam sem deformar-se, mas se de alguma forma (via flutuações quânticas) estas interagissem com o meio, sua dinâmica passaria a ser não trivial.

Lembrando a idéia fundamental exposta no capítulo 1, partimos do potencial envolvido na lagrangiana do sistema e o expandimos como uma série (funcional) até segunda ordem em torno das soluções localizadas. Assim, chegamos ao problema de autovalores e autofunções que fornece a base necessária para a quantização da hamiltoniana. A forma em que a quantização é desenvolvida requer o uso do método das coordenadas coletivas, pois a simetria de translação que o sistema possui, leva à existência do chamado modo de frequência zero ou translacional.

Por outro lado vimos que o método das coordenadas coletivas, fornece uma hamiltoniana semi-clássica, que acopla o momento do objeto estudado (a parede no nosso caso) com o momento das possíveis flutuações quânticas do sistema (mágnons). Esta hamiltoniana pode ser posteriormente quantizada, usando o método de quantização canônica, que como vimos pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{D}} \left[\hat{P} - \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \hat{q}_m \hat{\pi}_n \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\pi}_n^2 + \omega_n^2 \hat{q}_n^2, \quad (2.31)$$

onde

$$G_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \eta_m(x)}{\partial x} \eta_n(x) dx. \quad (2.32)$$

Como mostraremos no capítulo 4, quando se estuda a dinâmica de objetos descritos por uma hamiltoniana da forma (2.31) é conveniente passar ao formalismo da segunda quantização. Então, usando as regras de comutação bosônicas e levando em conta que $G_{mn} = -G_{nm}$ a expressão para \mathcal{H} se transforma em

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{D}} \left(\hat{P}_s - \hat{P}_m \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar \omega_n b_n^\dagger b_n, \quad (2.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{P}_m &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\hbar}{2i} G_{mn} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega_m}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega_n}\right)} \right) b_m^\dagger b_n + \\ &\quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\hbar}{4i} G_{mn} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega_m}\right)} - \sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega_n}\right)} \right) (b_m b_n - b_m^\dagger b_n^\dagger). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nesta expressão, o conjunto de frequências ω_n é determinado pela equação tipo Schrödinger das flutuações do sistema em torno da solução solitônica φ_s . Explicitamente pela equação

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} + U''(\varphi_s) \right\} \psi_n(z - z_0) = \omega_n \psi_n(z - z_0), \quad (2.35)$$

onde $U(\varphi)$ é dado pela relação (2.23) e massa da parede (\mathcal{D}) é determinada pela expressão [17]

$$\mathcal{D} = \frac{2JS^2a}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz U(\varphi_s(z)) \quad (2.36)$$

Por outro lado, é conveniente notar que o segundo termo da direita de (2.34) não comuta com o número total de mágnons

$$\hat{N} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^\dagger b_n, \quad (2.37)$$

e portanto quebra a conservação do número total de quasi-partículas. Como estamos interessados nos processos de baixa frequência, ou seja, no setor do espaço de Hilbert onde o número total de

quasi-partículas se conserva, o modelo para o estudo do movimento da parede de Bloch interagindo com um reservatório de mágnons reduz-se a

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{D}} : \left(\hat{P}_s - \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{mn} b_m^\dagger b_n \right)^2 : + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n^\dagger b_n \quad (2.38)$$

onde

$$w_{mn} = \frac{1}{2i} \left[\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega_m} \right)} + \sqrt{\left(\frac{\omega_m}{\omega_n} \right)} \right] G_{mn} \quad (2.39)$$

Da mesma forma que G_{mn} , $w_{mn} = -w_{nm}$, o que implica em que o termo de interação na hamiltoniana (2.38) acople só excitações com diferentes número de ocupação. Este comportamento simula o espalhamento dos mágnons pelas paredes e a interação entre eles pode ser interpretada como a simples troca de momento. Este fato confirma a idéia de que a dinâmica das paredes de Bloch é não trivial e portanto merece um estudo com maior detalhe, o que apresentaremos em seguida.

2.4.2 Mobilidade da Parede de Bloch

Neste ponto estamos em condições de estudar a mobilidade das paredes a partir da hamiltoniana (2.38). Para isso usaremos apenas as expressões (que são deduzidas integralmente para o caso bidimensional no capítulo 4) que nos permitem calcular o coeficiente de decaimento de uma excitação topológica que interage com as flutuações do meio,

$$\gamma(t) = \frac{\hbar}{2M} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' S(\omega, \omega') (\omega - \omega') [n(\omega) - n(\omega')] \cos(\omega - \omega') t, \quad (2.40)$$

onde $\gamma(t)$ é a função de decaimento (o inverso da mobilidade), M é a massa da excitação topológica e

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad (2.41)$$

é a distribuição de Bose-Einstein. Na expressão (2.40) $S(\omega, \omega')$ é a função de espalhamento, que pode ser escrita como

$$S(\omega, \omega') = \sum_{mn} |w_{mn}|^2 \delta(\omega - \Omega_n) \delta(\omega' - \Omega_m), \quad (2.42)$$

onde w_{mn} é determinada pela relação (2.39).

Na aproximação de tempo longo, $\gamma(t)$ pode ser escrito como

$$\gamma(t) \cong \bar{\gamma}(T) \delta(t) \quad (2.43)$$

onde $\bar{\gamma}(T)$ esta determinado por [46]

$$\bar{\gamma}(T) = \frac{1}{2\pi M_s} \int_0^\infty dE \mathcal{R}(E) \frac{\beta E e^{\beta E}}{(e^{\beta E} - 1)^2} \quad (2.44)$$

Nesta expressão $\mathcal{R}(E)$ é o coeficiente de reflexão do potencial $U''(\varphi_s)$ envolvido na equação tipo Schrödinger que descreve as flutuações,

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} + U''(\varphi_s) \right\} \psi_n(z - z_0) = \omega_n \psi_n(z - z_0), \quad (2.45)$$

sendo o potencial $U(\varphi)$ da forma

$$U(\varphi) = A_1(1 - \cos \varphi) + \frac{A_2}{2}(1 - \cos 2\varphi). \quad (2.46)$$

Com os elementos necessários, (2.44)-(2.46), podemos dar início ao estudo da mobilidade da parede de Bloch. Isto será feito começando pelo caso mais simples, ou seja, aquele em que o campo magnético que age sobre o sistema é nulo.

Mobilidade da Parede de Bloch para o Campo Magnético Nulo

Nesta situação o potencial $U''(\varphi_s)$ se obtém substituindo (2.25) em (2.46). Explicitamente

$$U''(z) = \eta^2(1 - 2\text{sech}^2 \eta z). \quad (2.47)$$

O espectro do potencial (2.47) é conhecido [47], e está composto por um estado ligado de energia zero,

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\eta}{2}} \text{sech}(\eta z), \quad (2.48)$$

que representa o modo translacional da parede do domínio, e um contínuo de estados de espalhamento (magnons) dados por

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{k_n + i\eta \tanh(\eta z)}{k_n + i\eta} \right] e^{ik_n z}, \quad \text{para } k > \eta, \quad (2.49)$$

onde

$$k_n = \frac{2n\pi}{L} - \frac{\delta(k_n)}{L}, \quad \text{e} \quad \delta(k) = \arctan \left[\frac{2\eta k}{k^2 - \eta^2} \right]. \quad (2.50)$$

Como é conhecido, o coeficiente de reflexão \mathcal{R} para um potencial simétrico, pode ser escrito de forma geral [48] em função dos desvios de fase correspondentes aos estados pares e ímpares,

$$\mathcal{R}(k) = \sin^2 \left(\delta^p(k) - \delta^i(k) \right), \quad (2.51)$$

onde δ^p e δ^i são os desvios de fase correspondentes aos estados pares e ímpares respectivamente.

Pode ser demonstrado, separando as soluções pares e ímpares em (2.49), que os desvios de fase para o potencial (2.47) são iguais entre si,

$$\delta^{p,i}(k) = \arctan(\eta/k). \quad (2.52)$$

Portanto, como o potencial $U''(z)$ não distingue entre estados pares e ímpares, o coeficiente de reflexão é identicamente nulo e, como conseqüência, a mobilidade da parede de Bloch π será infinita. Neste caso particular, a parede se comporta como um verdadeiro sóliton da equação de movimento efetiva obtida para o campo φ .

Mobilidade da Parede de Bloch 2π

No caso em que o campo magnético é diferente de zero, o coeficiente de reflexão torna-se não nulo e, como conseqüência, a parede possuirá uma mobilidade finita. A equação tipo Schrödinger que deveremos resolver neste caso se obtém substituindo (2.28) em (2.46). Explicitamente

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right\} \psi_n(z) = \omega_n \psi_n(z), \quad (2.53)$$

onde $V(z)$ se escreve como

$$\begin{aligned} V(z) = & \frac{\operatorname{sech}^2(\rho)}{\lambda^2} \left[\tanh\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) \tanh\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right) - \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right) \right] \\ & + \frac{\tanh^2(\rho)}{\lambda^2} \left[\left(\tanh\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) \tanh\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right) - \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right) \right)^2 \right. \\ & \left. - \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right) \left(\sinh\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) + \sinh\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Como conseqüência da invariância translacional do sistema para qualquer valor das grandezas λ e ρ , o potencial (2.54) possui um estado de energia zero, dado pela expressão

$$\psi_0 \propto \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\lambda} + \rho\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{z}{\lambda} - \rho\right). \quad (2.55)$$

O estado descrito por ψ_0 é simplesmente o modo translacional para as paredes de Bloch 2π . Para obter explicitamente o valor da constante de decaimento (2.44) precisamos dos valores dos desvios de fase para os estados pares e ímpares do potencial (2.54). Infelizmente o cálculo analítico para qualquer par de valores de λ e ρ é extraordinariamente complicado. Portanto, analisaremos em seguida a situação em que o campo magnético é maior que a anisotropia, pois neste caso é possível realizar algumas aproximações que simplificam os cálculos.

2.5 Mobilidade da Parede de Bloch 2π para Campos Magnéticos Fortes

Esta seção será dedicada ao caso particular das paredes de Bloch 2π quando o campo magnético externo é maior que a anisotropia ($\rho \ll 1$). Porém, devemos ter sempre em mente que os nossos resultados são válidos para sistemas reais, sempre que o campo magnético externo não ultrapasse um certo valor crítico que torna instáveis as paredes de Bloch.

2.5.1 Desvios de Fase

A equação de Shrödinger (2.53) para campos magnéticos fortes pode ser escrita como

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right\} \psi_n(z) = \kappa_n^2 \psi_n(z), \quad \text{onde} \quad \kappa_n^2 = k_n^2 - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\rho^2}{\lambda^2}. \quad (2.56)$$

O potencial $V(z)$ é agora a soma de duas contribuições. A primeira, que chamaremos de $V_0(z)$, corresponde à parte não refletora analisada para campos magnéticos nulos, e uma segunda, $V_1(z)$, introduzida como uma perturbação proveniente da presença do campo magnético externo. Explicitamente

$$V(z) = V_0(z) + \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^2 V_1(z), \quad (2.57)$$

onde

$$V_0(z) = -2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{z}{\lambda} \right) \quad (2.58)$$

e

$$V_1(z) = 1 - 8 \tanh^2 \left(\frac{z}{\lambda} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{z}{\lambda} \right). \quad (2.59)$$

Para calcular explicitamente os desvios de fase, que denotaremos por $\Delta^{p,i}$ dependendo da paridade dos estados, usaremos a versão unidimensional da teoria de Fredholm [49]. As relações principais que permitem este cálculo são

$$\pi A^{e,o}(E) \cot(\Delta^{e,o}) = 1 + \mathcal{P} \int_0^\infty dE' \frac{A^{e,o}(E')}{E - E'}, \quad (2.60)$$

onde $\Delta^{p,i}$ são os desvios de fase originados das duas contribuições presentes em (2.57). Por outro lado, as funções espectrais $A^{p,i}(E)$ podem ser escritas em termos de uma série (ver [49] para mais detalhes) que até segunda ordem tem a forma:

$$A(E) = -\langle E|V(z)|E \rangle + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dE_1}{E - E_1} \begin{vmatrix} \langle E|V(z)|E \rangle & \langle E|V(z)|E_1 \rangle \\ \langle E_1|V(z)|E \rangle & \langle E_1|V(z)|E_1 \rangle \end{vmatrix} + \dots \quad (2.61)$$

onde \mathcal{P} representa o valor principal de Cauchy.

Apesar de não poder calcular analiticamente a expressão (2.61) até qualquer ordem, podemos, fazendo uso da expressão (2.52), escrever uma expressão para os desvios de fase até segunda ordem em ρ da forma

$$\tan \Delta^{p,i} = \frac{\eta}{k} + \rho^2 \frac{\pi A_1^{p,i}}{1 + 2B_0^{p,i}}, \quad (2.62)$$

onde

$$A_1 = -\langle E|V_1(z)|E\rangle, \quad (2.63)$$

e

$$B_0^{p,i} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0^{p,i}(k')k'dk'}{k^2 - k'^2}, \quad A_0 = -\langle E|V_0(z)|E\rangle. \quad (2.64)$$

Usando uma base conveniente, as expressões anteriores (2.63) e (2.64) podem ser calculadas sem dificuldade (ver apêndice B). Explicitamente

$$A_0^{e,o}(k) = \frac{2M}{\hbar^2} \left[\frac{1}{\pi k \lambda} \pm \frac{1}{\sinh(\pi k \lambda)} \right], \quad (2.65)$$

$$A_1^{e,o}(k) = \frac{8\rho^2 M}{\hbar^2} \left[\frac{1}{\pi k \lambda} \mp (2k^2 - \lambda^{-2}) \frac{\lambda^2}{\sinh(\pi k \lambda)} \right], \quad (2.66)$$

$$B^{e,o} = \pm \frac{4M}{\hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(k\lambda)^2 + n^2}. \quad (2.67)$$

Substituindo (2.66) e (2.67) em (2.62), podemos escrever uma expressão final para os desvios de fase $\Delta^{p,i}$ até segunda ordem em ρ

$$\tan \Delta^{p,i}(k) = \frac{1}{k\lambda} + \frac{8\pi M \hbar^{-2} \rho^2}{1 \pm 8M \hbar^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(k\lambda)^2 + n^2}} \left[\frac{1}{3k\pi\lambda} \mp \frac{2k^2\lambda^2 - 1}{3\sinh(k\pi\lambda)} \right]. \quad (2.68)$$

Uma análise da expressão anterior (2.68) revela que a presença do campo magnético afeta pouco o valor dos desvios de fase para os estados pares $\Delta^p(k)$ (com respeito ao valor quando $B = 0$), porém o comportamento $\Delta^i(k)$ muda drasticamente. Na Figura 2.3 aparece o comportamento do desvio de fase para os estados pares em função de k para diferentes valores da perturbação ρ . Como pode-se observar não existem grandes variações entre as diferentes relações anisotropia/campo. Isto nos leva a concluir que o surgimento de uma constante de decaimento diferente de zero está intimamente relacionada com o comportamento do desvio de fase dos estados ímpares.

De fato, ao calcular os limites $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \infty$ da expressão (2.68) para os estados ímpares vemos que

$$\lim_{k \rightarrow 0} [\tan \Delta^i(k)] = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [\tan \Delta^i(k)] = 0. \quad (2.69)$$

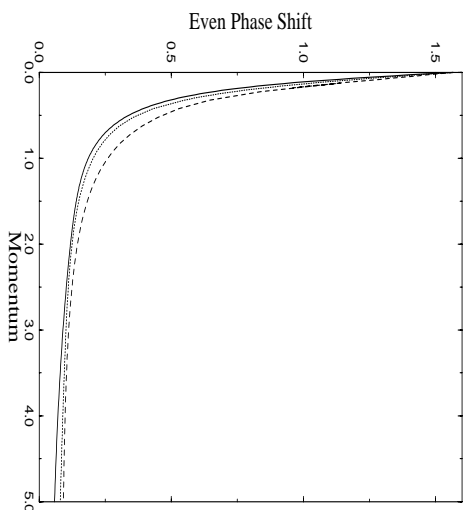


Figura 2.4: O desvio de fase para os estados pares em três situações diferentes. A linha contínua corresponde ao caso em que $\rho = 0.14$, a linha pontilhada e a descontínua aos casos em que $\rho = 0.31$ e $\rho = 0.50$ respectivamente.

Logo, o comportamento no infinito é o correto pois para energia suficientemente altas os desvios de fase devem ser sempre nulos. Porém o valor de $\tan \Delta^i(k)$ em $k = 0$ deve ser ajustado escolhendo o ramo correto da função arctan. Isto porque a expressão anterior (2.68) para os estados ímpares apresenta uma descontinuidade. Então, ao escolhermos o ramo correto da função arctan, de forma tal que o desvio de fase seja uma função contínua para todo k , o valor de $\tan \Delta^i(k)$ em $k = 0$ será $3\pi/2$. Este resultado está em contradição com o que se espera da versão unidimensional do teorema de Levinson [50] para potenciais simétricos. Este teorema estabelece que:

$$\begin{aligned}\Delta^p(k=0) &= \pi(n^p - \frac{1}{2}), \\ \Delta^i(k=0) &= \pi n^i,\end{aligned}\tag{2.70}$$

onde n^p e n^i são o número de estados ligados pares e ímpares respectivamente. Por outro lado Kivshar et al. [51] demonstraram, estudando os modos de pequena amplitude em torno das soluções localizadas da equação de sine-Gordon dupla, que este sistema sempre apresenta um segundo estado ligado ímpar. Este resultado fornece o valor correto do desvio de fase para os estados ímpares em $k = 0$, ou seja, de acordo com (2.70), $\Delta^i(k=0)$ deverá ser igual a π . Obviamente a impossibilidade de prosseguir analiticamente além da segunda ordem em ρ no cálculo de $\Delta^i(k)$ é a causa deste resultado incorreto.

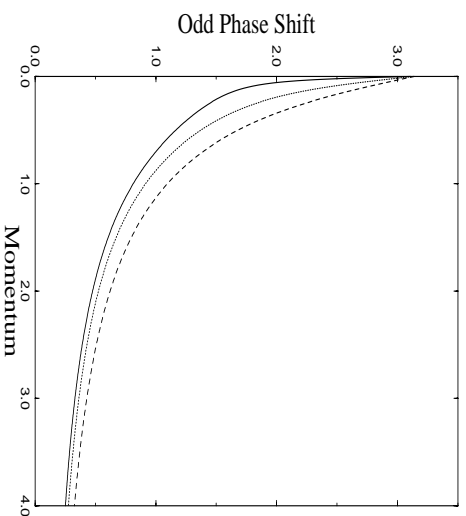


Figura 2.5: Desvio de fase para os estados ímpares em função do momento. A linha contínua corresponde ao caso em que $\rho = 0.14$, as linhas pontilhadas e descontínuas correspondem aos casos em que $\rho = 0.31$ e $\rho = 0.50$ respectivamente.

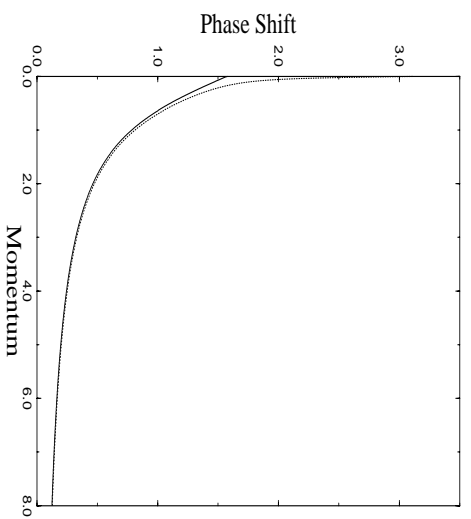


Figura 2.6: O desvio de fase para o caso em que $\rho = 0.14$.

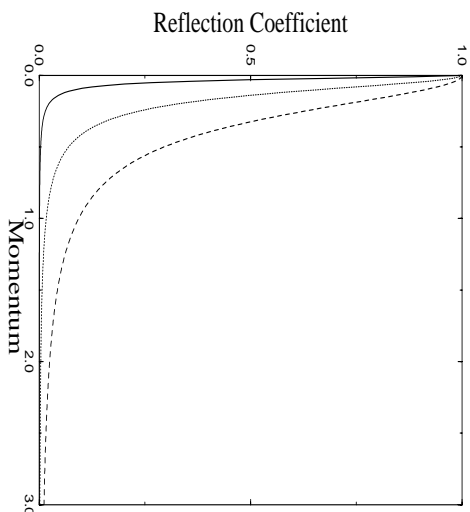


Figura 2.7: Coeficiente de reflexão em função do momentum. A linha contínua corresponde ao caso $\rho = 0.14$, a linha pontilhada ao caso $\rho = 0.31$ e a linha descontínua ao caso em que $\rho = 0.50$.

Para obter o comportamento adequado dos desvios de fase dos estados ímpares implementamos um cálculo numérico capaz de resolver a equação tipo Schrödinger (2.56). Como pode ser observado na Figura 2.5, os resultados numéricos estão de acordo com a análise feita anteriormente usando o teorema de Levinson e com as previsões de [51]. Por outro lado, como vemos na Figura 2.6, para valores de ρ suficientemente pequenos os desvios de fase ímpares se aproximam dos valores pares, em concordância com o valor nulo do coeficiente de reflexão do potencial resultante no problema.

Depois desta análise podemos concluir que o espectro do potencial (2.57) esta composto por: i) a solução ψ_0 (2.55) correspondente ao modo translacional (o modo de Goldstone), ii) um modo interno que aparece quando o sistema é perturbado com o campo magnético e iii) estados contínuos de espalhamento ψ_k correspondentes aos mágnons ferromagnéticos.

2.5.2 O Coeficiente de Decaimento

Para obter o valor do coeficiente de decaimento em função da temperatura do sistema, devemos calcular explicitamente o coeficiente de reflexão $\mathcal{R}(k)$. Isto pode ser feito substituindo os valores dos desvios de fase pares e ímpares, calculados numericamente, na expressão geral

$$\mathcal{R}(k) = \sin^2(\Delta^p(k) - \Delta^i(k)). \quad (2.71)$$

Na Figura 2.7 aparece o coeficiente de reflexão em função de k para diferentes valores da

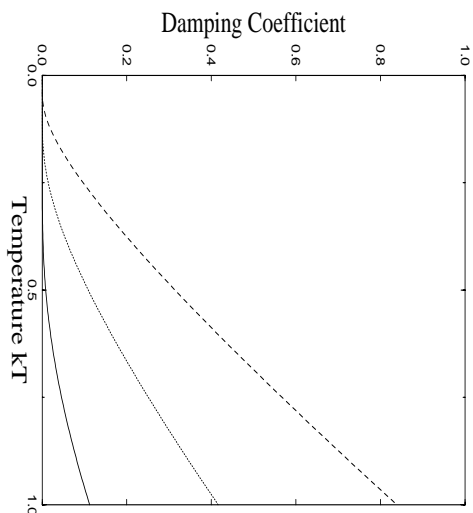


Figura 2.8: Coeficiente de decaimento em função da temperatura para diferentes valores de ρ . A linha contínua corresponde ao caso em que $\rho = 0.14$, a linha descontínua e pontilhada aos casos em que $\rho = 0.31$ e $\rho = 0.50$ respectivamente

relação anisotropia/campo magnético ρ . Como pode ser visto, a contribuição fundamental para o coeficiente de reflexão provém dos estados com mais baixa energia, o que era esperado em função do bom comportamento dos potenciais (2.58) e (2.59) envolvidos na equação de Schrödinger estudada.

Antes de passar a integrar a expressão (2.44) para obter o coeficiente de decaimento, é conveniente destacar que o segundo estado ligado do potencial (2.57) não é levado em conta. Isto porque no cálculo dos elementos de matriz (2.42) somente são considerados termos elásticos (ver por exemplo [40], [41], [46] ou [52]).

Esclarecido este ponto, podemos substituir o valor do coeficiente de relaxação em (2.44). O resultado da dependência do coeficiente de decaimento com a temperatura aparece na Figura 2.8. Como se observa, o decaimento é linear para temperaturas suficientemente altas, resultado que pode ser obtido diretamente da expressão (2.44). De fato, para temperaturas suficientemente altas a constante de decaimento pode ser escrita como

$$\bar{\gamma}(T) \simeq \frac{1}{2\pi M_s \beta} \int_0^\infty dE \frac{\mathcal{R}(E)}{E} \propto T \quad (2.72)$$

que é linear com T , independentemente da forma explícita da função $\mathcal{R}(k)$.

Por outro lado, para temperaturas baixas a expressão geral (2.44), pode ser aproximada da

forma

$$\bar{\gamma}(T) \simeq \frac{1}{2\pi M_s} \int_0^\infty dE \mathcal{R}(E) \beta E e^{-\beta E}. \quad (2.73)$$

Como o comportamento correto do coeficiente de reflexão foi obtido numericamente, não possuímos uma expressão analítica para o coeficiente de decaimento. Porém, como pode ser observado na Figura 2.8, para temperaturas suficientemente baixas o coeficiente de decaimento se anula exponencialmente devido a presença do gap introduzido pelo campo magnético. À medida que a temperatura aumenta o coeficiente de decaimento aumenta seguindo uma lei de potências até que finalmente torna-se linear. Devemos ressaltar também que, quando a relação anisotropia/campo magnético se anula, recupera-se o carácter não refletivo do potencial gerado pelas flutuações do sistema em torno da solução solitônica e a mobilidade da parede torna-se infinita.

2.6 Conclusões

Como vimos neste capítulo o limite contínuo para tratar o sistema ferromagnético unidimensional totalmente anisotrópico, nos permite descrever as paredes de Bloch como soluções localizadas de uma teoria de campos efetiva. A vantagem deste procedimento baseia-se no fato que o uso do método das coordenadas coletivas permite reformular o problema em termos de uma hamiltoniana que leva em conta as colisões entre as paredes de Bloch e os mágnons.

Ao mesmo tempo, o método sistemático utilizado para o cálculo da mobilidade pode ser usado também para estudar o caso em que o campo magnético externo é fraco. Vale destacar que para sistema reais devemos sempre levar em conta que o limite para a intensidade do campo externo não deve ultrapassar o valor que torna instáveis as paredes de Bloch.

Para complementar o nosso estudo seria necessário realizar uma experiência sensível ao coeficiente de decaimento que possuem as paredes de Bloch. Como se sabe, foram feitas experiências em que ao serem submetidas a um campo magnético externo variável com o tempo, as paredes de Bloch executam um movimento oscilatório. Se de alguma forma pudéssemos medir a frequência de oscilação destas paredes, teríamos acesso direto ao valor do coeficiente de decaimento e portanto poderíamos avaliar a relevância experimental do estudo aqui apresentado.

Por outro lado, as paredes de Bloch não são as únicas excitações topológicas que aparecem nos sistemas magnéticos. Como veremos adiante, as excitações carregadas de menor energia no gás de elétrons em duas dimensões são soluções localizadas no espaço de spin. A introduzir este tipo de excitação e suas propriedades fundamentais será dedicado o próximo capítulo.

Capítulo 3

“Quantum Hall Skyrmions”

Este capítulo será dedicado a apresentar um tipo particular de excitação topológica bidimensional que aparece no espaço de spins conhecida como “quantum Hall skyrmion”. Na primeira parte do capítulo mostraremos a forma em que é possível detectar estas excitações utilizando a técnica de ressonância nuclear magnética. Logo em seguida, apresentaremos a forma em que podem ser descritos estes sólitons bidimensionais do ponto de vista teórico. Como não existe obtenção rigorosa da ação que caracteriza este tipo de excitação, a mesma será apresentada explorando a analogia com o caso da rede bidimensional de spins. Por último, obteremos o tamanho e a energia desta excitação topológica.

3.1 Introdução

As técnicas atuais de crescimento de materiais (Molecular Beam Epitaxy (MBE) e Metalorganic Chemical Vapor Deposition (MOCVD)) permitem obter sistemas de camadas múltiplas de alta pureza. Dependendo do tipo de substâncias precursoras usadas no processo de crescimento e da disposição das camadas, é possível fabricar heteroestruturas capazes de manter confinado, em uma região do espaço, um gás de elétrons bidimensional (2DEG). Geralmente nestes sistemas as impurezas reponsáveis pela formação do gás de elétrons acham-se espacialmente separadas do mesmo, pelo que o 2DEG apresenta um movimento planar quase livre [53].

Em 1980 von Klitzing mostrou que se o sistema anterior é submetido a baixa temperatura ($T \leq 4K$) e campo magnético intenso ($1T \leq B \leq 30T$), a condutância Hall do 2DEG é igual a um múltiplo inteiro do quantum de condutância ($\frac{e^2}{h} = (25812.807\Omega)^{-1}$) [54]. Este fenômeno é hoje

conhecido como Efeito Hall Quântico Inteiro (IQHE).

Posteriormente, em 1982, Tsui, Störmer e Gossard [55], obtiveram em amostras com menor número de impurezas e a mais baixas temperaturas, uma condutância igual a uma fração racional da condutância quântica; efeito que conhecemos como Hall Quântico Fracionário (FQHE).

Os efeitos anteriores originaram uma longa série de trabalhos teóricos e experimentais (ver por exemplo *The Quantum Hall Effect* [56]), nos quais usualmente distinguia-se o IQHE como aquele que para um certo preenchimento ν dos níveis de Landau, o gap no espectro das quasi-partículas é consequência do gap que surge no espectro de partículas independentes; no entanto, quando a origem do gap é atribuída à interação elétron-elétron, se diz que o sistema exibe FQHE. Porém, existem algumas exceções em que a classificação anterior está longe de ser confirmada experimentalmente [57], para ν ímpar por exemplo. Estas discrepâncias levaram à realização de um estudo detalhado do papel da interação elétron-elétron quando ν é um inteiro. Em alguns dos trabalhos desenvolvidos nesse sentido¹ procurou-se realizar um tratamento unificado dos efeitos Hall quântico inteiro e fracionário, abandonando-se o modelo de partículas não interagentes, que é usado para explicar o IQHE.

As tentativas de unificar as teorias existentes culminaram com a proposta de uma transformação unitária que relaciona as propriedades do 2DEG com as propriedades de um gás bosônico bidimensional que interage com um campo de gauge flutuante do tipo Chern-Simon [58]. Esta versão bosonizada não só permitiu o tratamento unificado dos efeitos Hall quântico e de outros fenômenos conhecidos que surgem no 2DEG, como também a conjectura de outro novo efeito quando a energia de troca é a dominante no problema.

A conjectura anterior manifesta-se, no caso em que a energia de Fermi se acha dentro do gap que se abre entre dois níveis de Landau, ao levar-se em conta a interação de Zeeman. Esta interação tem associada uma energia $E_Z \approx 0.3meV$, menor que as energias típicas de Coulomb ($E_C \approx 13.7meV$) e ciclôtrônica ($\hbar\omega \approx 16.8meV$)², permitindo que a correlação entre os elétrons leve à existência de estados coletivos de mais baixa energia que o estado completamente polarizado. Ou seja, quando a interação do spin eletrônico com o campo externo é levada em conta, a criação (destruição) de um elétron com spin oposto (igual) ao dos demais elétrons polarizados não produz a configuração correspondente à excitação de mais baixa energia do sistema. Forma-se, assim, uma configuração não uniforme de spins centrada em torno da quasi-partícula (quasi-buraco), o “Quantum Hall

¹ver *The Quantum Hall Effect* e as referências nele citadas.

²Neste caso particular $B = 10T$, $g^* = -0.44$ e $m^* = 0.07m_e$

Skyrmion” (QHS), também conhecido como “Charged Spin Texture” (CST).

Os skyrmions foram introduzidos por T.H.R. Skyrme [59] em 1958 como uma forma de representar o núcleon (férmion) como um sólito topológico de um campo piônico (bosônico). Portanto, em uma teoria de campos não linear, os skyrmions não são mais que sólitons com spin e estatística diferentes dos campos que os suportam. Até os anos 90 o maior interesse no estudo destas excitações topológicas provinha das áreas da física nuclear e de partículas. Porém, em 1993, Sondhi, Karlhede e Kivelson [12] predisseram a existência de excitações do tipo skyrmion no sistema de Hall quando o fator de preenchimento dos níveis de Landau é ligeiramente diferente de 1.

Nos últimos quatro anos as pesquisas teóricas envolvendo QHS cresceram consideravelmente. Por exemplo, estudos referentes à estatística dos QHS foram reportados por vários autores [60] [61] [62]. Um método variacional do tipo Hartree-Fock foi usado para calcular de forma precisa a energia, tamanho e spin destas excitações [63]. Trabalhos estudando a dinâmica do QHS ligado a uma impureza [64] e a dependência da mobilidade com a temperatura [15] foram reportados. Por outro lado foram desenvolvidas: uma formulação de teoria do campos para lidar com o problema de muitos skyrmions a baixas temperaturas [65], cálculos numéricos em torno de $\nu = 1$ [66] [67] e um estudo da possibilidade de existência dos QHS para preenchimento fracionário ($\nu = 1/3$) dos níveis de Landau [68].

Paralelamente às primeiras pesquisas teóricas apareceram trabalhos experimentais que confirmam a presença dos skyrmions no sistema de Hall. Em seguida apresentaremos a forma em que estas excitações podem ser detectadas.

3.2 Detecção Experimental dos QHS

3.2.1 Sinal de NMR de um Poço Quântico

A detecção experimental dos QHS, apesar de não trivial, pode ser feita através da técnica de ressonância magnética nuclear (NMR). Nestas experiências a amplitude do sinal de radiofrequência medida é proporcional ao número de núcleos N e à sua polarização média $P_N \equiv \langle J_z \rangle$. Usualmente P_N é muito pequena ($10^{-4} - 10^{-5}$, para $B = 10\text{T}$ e $T=100\text{K}$), tornando-se necessários valores de N entre 10^{17} e 10^{20} para podermos detectar o sinal induzido. Infelizmente, os valores de N para sistemas de baixa dimensionalidade (2DEG por exemplo) não chegam a ser dessa ordem, tornando o método inaplicável.

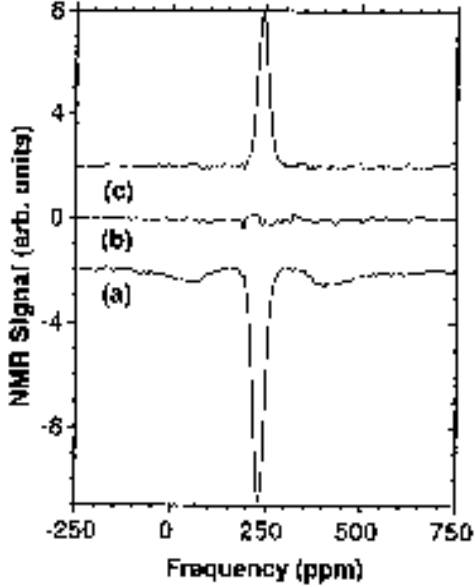


Figura 3.1: Sinal de NMR vs frequência para um poço quântico de $GaAs$.

Uma solução possível para driblar a limitação anterior consiste em aumentar o valor de P_N , pois, para valores próximos de 1 (spins fortemente polarizados) precisa-se só de valores de N entre 10^{12} e 10^{15} . A idéia anterior constitui a base da técnica conhecida como OPNMR³, e permitiu incrementar os sinais de NMR dos poços quânticos, onde se formam os 2DEG, em mais de duas ordens de grandeza, possibilitando a medição direta do sinal de radiofrequência proveniente dos mesmos.

Para o bombeamento óptico nas experiências OPNMR usa-se luz laser polarizada no infravermelho próximo. A iluminação de um poço quântico, usando esta fonte de luz, produz transições eletrônicas interbandas, criando elétrons na banda de condução e buracos na banda de valência com spins longe do equilíbrio. Estes, por sua vez, polarizam os spins dos núcleos de ^{71}Ga via acoplamento hiperfino núcleo-elétron. O anterior se traduz em um incremento do sinal de NMR, possibilitando a detecção direta da radiofrequência de ressonância e do tempo de relaxação spin-rede (T_1) dos núcleos de ^{71}Ga que se acham nos poços.

A idéia anterior foi usada num sistema composto por 40 poços quânticos crescidos por Molecular Beam Epitaxy (MBE) [74]. A heteroestrutura é composta por camadas de $GaAs$ de 300\AA separadas

³Do inglês Optically Pumped Nuclear Magnetic Resonance

por barreiras de $Al_{0.1}Ga_{0.9}As$ de 1800\AA de espessura, crescidas num substrato de $GaAs$ orientado na direção (001). O centro de cada barreira foi dopado com átomos de Si de forma tal que a densidade de portadores nos poços é $(1.41 \pm 0.14) \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ e a mobilidade dos mesmos é de $1.44 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Para a excitação óptica usou-se um laser de modo contínuo Ti:sapphire bombeado por outro de Ar^+ . A luz emitida foi polarizada em mais do que 95% para comprimentos de onda entre 735 e 850 nm.

O processo de medição do sinal de OPNMR, realizou-se usando a seguinte sequência: $SAT - \tau_L - \tau_D - DET$, onde SAT representa um conjunto de 20 pulsos $\pi/2$ separados por 1ms, com a finalidade de destruir qualquer polarização que possua o isótopo de interesse no estudo (^{71}Ga em nosso caso). Em seguida, se faz incidir luz de laser polarizada sobre a amostra durante um período τ_L , e, depois de um tempo de espera τ_D , aplica-se um pulso $\pi/2$ e começa-se a fazer a medida do sinal de NMR. Este período é chamado DET .

Na Figura 3.1 [74], mostram-se vários espectros de NMR do isótopo de ^{71}Ga gerados pelo poço quântico múltiplo, descrito previamente, a uma temperatura de $5.1K$. Usou-se uma luz de laser polarizada circularmente para a direita ($+\sigma$) de comprimento de onda igual a $815nm$ e de uma potência de $120mW/cm^2$.

As medidas foram realizadas submetendo a amostra a três condições radicalmente diferentes. (c) $\tau_L = 0$, $\tau_D = 5400s$, ou seja, sem iluminação e com um tempo longo de detecção. Neste caso é possível atribuir o sinal a todos os isótopos de ^{71}Ga presentes no sistema; $N \approx 2.7 \cdot 10^{18}$ e $P_N \approx 0.0011$, pois T_1 , para os núcleos nas barreiras, é aproximadamente $2500s$. (b) $\tau_L = 0$, $\tau_D = 31s$, o que significa não iluminação e tempos de detecção muito curtos. Desta vez nenhum sinal é detectado devido ao alto valor de T_1 nas barreiras e aos baixos valores de P_N e concentração nos poços. (a) $\tau_L = 30s$, $\tau_D = 1s$, neste caso a amostra é iluminada durante $30s$, e, sabendo que $\tau_D \ll T_1$ nas barreiras, o sinal que aparece deve ser atribuído aos núcleos que se acham nos poços. Sabendo que a concentração de isótopos de ^{71}Ga nestes poços é muito baixa, só justifica-se este resultado por um aumento no valor de P_N causado pela iluminação com luz polarizada.

A experiência anterior sugere, então, que a técnica de OPNMR possa ser usada para investigar as propriedades do 2DEG que aparecem nestas heteroestruturas, a partir das mudanças nas frequências de ressonância dos núcleos que se acham nas barreiras (na ausência de polarização eletrônica), com respeito àqueles que se acham nos poços, onde o 2DEG está polarizado de alguma forma. O fenômeno anterior é similar àquele em que os núcleos do elemento estudado, ao mudar de um

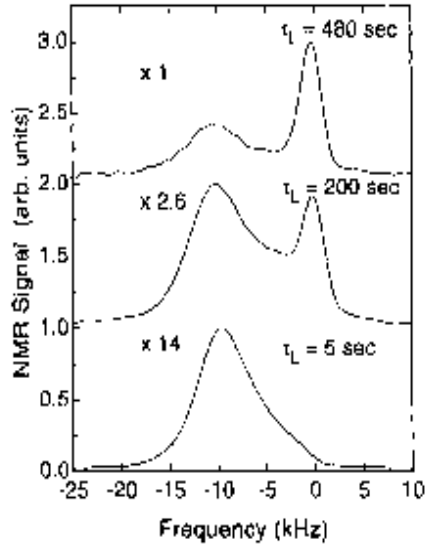


Figura 3.2: Sinal de NMR vs frequência de um poço quântico de *GaAs* para diferentes tempos de bombeamento óptico.

meio paramagnético para um meio diamagnético, experimentam uma variação da frequência de ressonância, este fenômeno é conhecido como Knight Shift (ver Apêndice C).

3.2.2 Detecção dos QHS usando OPNMR

A primeira evidência experimental sobre a formação do QHS no 2DEG [74], foi encontrada usando-se a técnica de OPNMR exposta anteriormente. O estudo do 2DEG realiza-se via a análise do sinal de NMR que provém dos núcleos de ^{71}Ga quando o sistema é iluminado com luz polarizada para valores do fator de preenchimento dos níveis de Landau $\nu = 1 \pm \varepsilon$, com $\varepsilon \rightarrow 0$.

A amostra usada no estudo que será descrito em seguida [76], possui as mesmas características daquela em que se obtiveram pela primeira vez sinais de NMR provenientes de poços quânticos [74]. As medidas foram feitas seguindo uma seqüência $SAT - \tau_L - \tau_D - DET$, com uma polarização da luz laser $^+\sigma$ e comprimento de onda e potência iguais a 806nm e $10 - 300\text{mW}/\text{cm}^2$.

Como no caso anterior [74], os elétrons ejetados da banda de condução possuem spins polarizados fora do equilíbrio, que através da interação hiperfina polarizam os núcleos. O sistema eletrônico equilibra-se rapidamente já no início de τ_D , mas a polarização nuclear persiste até o começo do período de detecção DET .

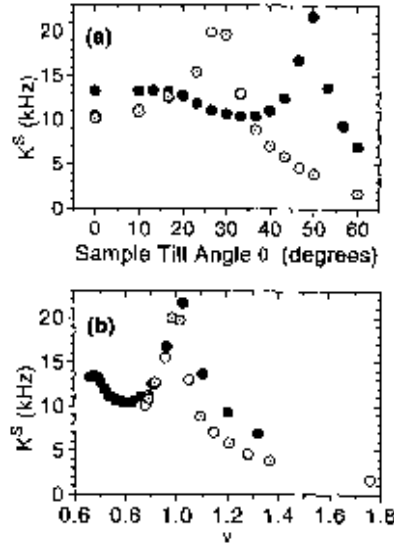


Figura 3.3: Acima, Knight shift vs ângulo formado entre o vetor normal a amostra e o campo magnético externo. Embaixo, Knight shift vs fator de preenchimento dos níveis de Landau.

Na Figura 3.2 mostra-se o espectro do isótopo ^{71}Ga em função de τ_L para valores de $\tau_D = 1s$, $\nu = 1$, $B = 7.05T$ e $T = 1.55K$. Para fixar um valor de ν , desviou-se a amostra de um ângulo θ na direção de crescimento (\mathbf{z}) com respeito à direção do campo magnético. A relação entre estas duas grandezas é dada pela expressão $\nu = \frac{nhc}{eB \cos(\theta)}$, sendo $\theta = 0$ neste caso.

Seguindo a mesma linha de raciocínio que no caso anterior, a ressonância para $\tau_L = 5s$ é atribuída aos isótopos de ^{71}Ga que se acham nos poços. À medida que o tempo de iluminação aumenta, a polarização se difunde na direção das barreiras via interação nuclear spin-spin, dando origem aos novos picos de ressonância que aparecem nas curvas para $\tau_L = 200s$ e $\tau_L = 480s$. Sendo a polarização dos núcleos P_N diretamente proporcional à magnetização dos elétrons, a mudança nas transições tipo *spin-flip* dos átomos que se acham nos poços (em relação àqueles que se acham nas barreiras) pode ser atribuída à presença dos 2DEGs que se formam nos poços.

Através de medidas deste tipo, podemos obter o Knight Shift $K_s(\nu, T)$ a partir da diferença de frequência entre as duas ressonâncias possíveis, ou seja, para os átomos dentro e fora dos poços quânticos. Do ponto de vista teórico, o valor de K_S pode ser calculado a partir de:

$$K_S = A_{ZZ} \langle S_Z(\nu, T) \rangle, \quad (3.1)$$

para o caso em que $\mathbf{B} \parallel \mathbf{Z}$ e onde A_{ZZ} é a constante de acoplamento hiperfina para núcleos que se

acham no centro dos poços. A hamiltoniana de acoplamento tem a forma

$$H = \sum_{\alpha,\beta} hA_{\alpha\beta}I_{\alpha}S_{\beta}, \quad (3.2)$$

onde $\alpha, \beta = x, y, z$.

A Figura 3.3 mostra a dependência de K_S com o ângulo θ que se forma entre o vetor que aponta na direção de crescimento da amostra e o campo magnético. As medidas foram feitas para $\mathbf{B} = 7.05$ e $9.39T$ para uma temperatura de $T = 1.55K$. O valor máximo de K_S para $\mathbf{B} = 7.05T$ se alcança aproximadamente no valor $\theta = 28.5^\circ$, o que corresponde ao caso $\nu = 1$. A partir dessa relação é possível inferir a densidade de elétrons nos poços, $n = 1.50 \times 10^{11} cm^{-2}$, e ainda escrever o fator de preenchimento em função de θ .

Por outro lado, a Figura 3.3 também mostra a dependência do K_S com ν . A similaridade entre as duas curvas sugere a existência de isotropia na constante de acoplamento hiperfino, ou seja, $A_{ZZ} = A$. Este último fato implica então que a medida do Knight shift reflete diretamente o valor da polarização eletrônica, $K_S \equiv A \langle S_Z(\nu(\theta)) \rangle$.

Quando o nível de Landau (LL) mais baixo está completamente cheio com os elétrons completamente polarizados e a intensidade do campo magnético é reduzida, $\nu \rightarrow \nu + \varepsilon$ de forma tal que se produz a remoção de um estado de partícula independente. Como consequência imediata, S elétrons são forçados a ocupar o LL seguinte, provocando a diminuição da polarização do sistema. De forma similar, com o aumento da intensidade do campo ($\nu \rightarrow \nu - \varepsilon$), adiciona-se um estado de partícula independente vazio a cada LL, forçando o surgimento de \mathcal{A} buracos no nível de Landau mais baixo. Este último processo também reduz a polarização total do sistema, contrariamente ao que acontece para o sistema composto por elétrons não interagentes.

A idéia anterior pode ser usada para escrever $K_S(\nu)$ em função dos valores de \mathcal{A} e S como:

$$K_S(\nu) = \frac{A}{2} \left(\Theta(1 - \nu) \left[\frac{2}{\nu}(1 - \mathcal{A}) - (1 - 2\mathcal{A}) \right] + \Theta(\nu - 1) \left[\frac{2S}{\nu} + (1 - 2S) \right] \right) \quad (3.3)$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heaviside. Note que para $\nu = 1$, $K_S = A$, o que está relacionado diretamente com o valor máximo que pode tomar a polarização.

A Figura 3.4 mostra dois *fittings* diferentes das curvas de $K_S(\nu)$, para $\mathbf{B} = 7.05T$ e $T = 1.55K$. Neste caso o valor máximo do Knight shift (que corresponde ao caso de máxima polarização) é tomado como $44kHz$. A linha sólida corresponde ao caso particular em que existe simetria elétron-buraco $\mathcal{A}=S=1$ (situação que reproduz o caso de elétrons não interagentes) e que não corresponde ao resultado experimental. Porém, a curva descontínua reproduz aproximadamente os

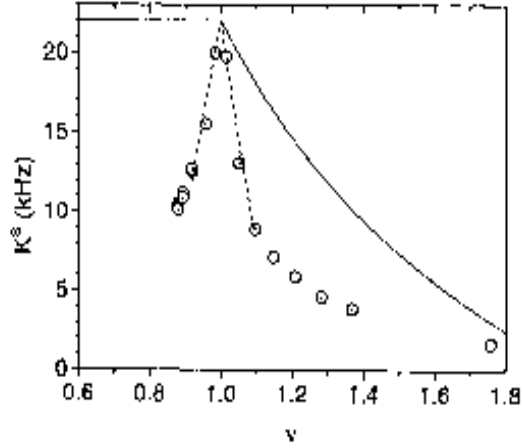


Figura 3.4: Knight shift vs ν . Os círculos correspondem aos dados experimentais. As linhas contínua e descontínua correspondem aos casos em que $\mathcal{A} = S$ e $\mathcal{A} \neq S$ respectivamente.

dados coletados nas experiências para valores $\mathcal{A}=S=3.6$. Este último, unido ao fato de que K_S (ou a magnetização eletrônica) muda abruptamente com variações insignificantes de ν , sugere que as excitações carregadas do estado fundamental $\nu = 1$ não sejam mais simples pares elétron-buraco, mas sim, quasi-partículas de spin maior que $\frac{1}{2}$.

Na Figura 3.5 aparece a dependência do inverso do tempo de relaxação em função de ν . Vemos que o valor mínimo se alcança para $\nu = 1$ e que qualquer mudança em torno deste valor leva a um incremento do mesmo. Sabendo que T_1 é inversamente proporcional ao número de estados excitados de mais baixa energia, com spin oposto ao estado fundamental (*spin flipped state*), podemos inferir que, quando o fator de preenchimento muda em torno de 1, formam-se estados deste tipo, já que uma das vias através da qual os núcleos relaxam é provocando transições eletrônicas entre estados de diferentes spins. Baseando-nos nestes resultados, podemos concluir que os novos estados coletivos que aparecem são diferentes do estado completamente polarizado.

Por outro lado, a dependência do Knight shift com a temperatura confirma a existência destes estados excitados de baixa energia, pois $\langle S_Z(T) \rangle$ pode ser calculado a partir de:

$$\langle S_Z(T) \rangle \equiv \frac{1}{Z} \langle 0 | S_Z | 0 \rangle + \sum_i \frac{1}{Z} \exp -\left(\frac{\Delta_i}{kT}\right) \langle i | S_Z | i \rangle \quad (3.4)$$

sendo $|0\rangle$ o estado fundamental de muitas partículas e a soma feita sobre todos os estados excitados $|i\rangle$ com energia Δ_i .

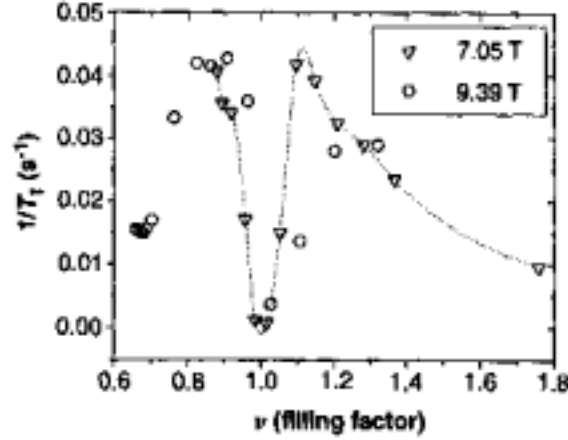


Figura 3.5: Inverso do tempo de relaxação em função do fator de preenchimento de Landau.

A Figura 3.6 mostra a dependência de K_S com a temperatura para $\nu = 0.98$ e $B = 7.05T$. A saturação acontece aproximadamente a $20kHz$ para T menor que $2K$, concordando com o modelo que se fez anteriormente para o skyrmion.

O modelo mais simples para o cálculo de $\langle S_z \rangle$ para $\nu = 1$ leva em conta elétrons não interagentes que obedecem à estatística de Fermi-Dirac com o potencial químico no meio do gap de Zeeman. A idéia anterior nos fornece o comportamento mostrado na figura 3.6 representado por uma linha descontínua, que obedece a

$$K_S(T) = K(0) \tanh\left(\frac{E_Z}{4kT}\right) \quad (3.5)$$

com $K(0) = 20kHz$ e $\frac{E_Z}{k} = 2.08K$. Este modelo discorda dos resultados obtidos experimentalmente, o que confirma uma vez mais a idéia de que a interação elétron-elétron é a responsável pelos efeitos observados, e que, para se obter resultados melhores no cálculo de $\langle S_z \rangle$, deve-se incluir a interação entre elétrons. Uma das possíveis vias é considerar que os modos de ondas de spin são os estados excitados de mais baixa energia com uma ocupação determinada pela distribuição de Bose-Einstein. A curva de traços duplos e pontos mostra o comportamento de $K_s(T)$, quando é usado o espectro de dispersão das ondas de spin em duas dimensões, o que claramente não concorda com os resultados experimentais.

As curvas do gráfico menor da figura 3.6 correspondem aos casos $\nu = 0.88$ e $\nu = 1.2$. Convém notar que nestes casos não há saturação quando a temperatura está próxima de $2K$, o que demonstra

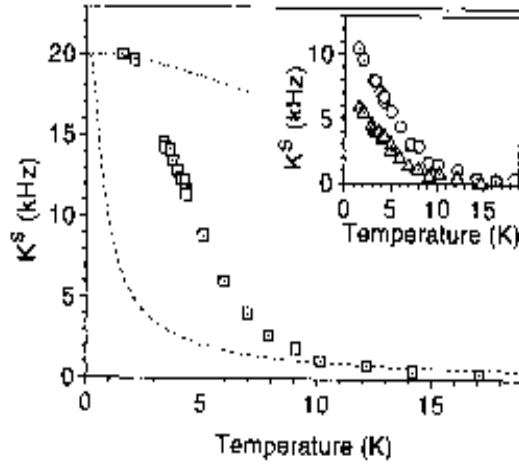


Figura 3.6: Knight shift em função da temperatura.

a dependência do estado de muitas partículas e, por conseguinte, do espectro de energia com o fator de preenchimento dos níveis de Landau ν .

Tendo apresentado as evidências experimentais que confirmam a presença do skyrmion no sistema de Hall, passaremos, na próxima seção, a descrever do ponto de vista teórico estas excitações topológicas.

3.3 Dinâmica da Cadeia de Spins

Como é de se esperar a obtenção de uma densidade de lagrangiana que descreva os skyrmions é extremamente complicada. Porém, baseando-se na dinâmica de um ferromagneto, obtida como generalização do problema da cadeia de spins, é possível propor uma densidade de lagrangiana que contenha os termos apropriados para descrever estas excitações topológicas. Portanto, seguindo esta idéia, apresentaremos primeiramente a obtenção da ação para a cadeia de spins e como esta pode ser generalizada para o caso bidimensional.

Para estudar a dinâmica da cadeia de spins usaremos o método das integrais de caminho. Neste caso é conveniente utilizarmos a representação de estados coerentes para os estados de spin, pelo que discutiremos em seguida a forma em que podem ser construídos os estados coerentes de spin.

3.3.1 Estados Coerentes de Spin.

O conjunto de estados coerentes de spin pode ser obtido partindo-se de uma representação irredutível do grupo $SU(2)$ [69], caracterizada pelo estado de maior valor de spin S . Denotemos por $|0\rangle$ o estado de maior peso desta representação, ou seja, $|0\rangle = |S, S\rangle$. O estado assim escrito é um autovetor de \mathbf{S}_3 e do invariante quadrático de Casimir \mathbf{S}^2 , ou seja:

$$\mathbf{S}_3|0\rangle = S|0\rangle, \quad \mathbf{S}^2|0\rangle = S(S+1)|0\rangle. \quad (3.6)$$

Consideremos um estado qualquer $|\mathbf{n}\rangle$ obtido pela rotação do estado $|0\rangle$. Explicitamente:

$$|\mathbf{n}\rangle = \exp(i\theta\mathbf{n}_o \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{S})|S, S\rangle = |S, M\rangle D^{(S)}(\mathbf{n})_{M,S}, \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{n}_o = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_o = \cos(\theta)$ e S são os geradores do grupo $SU(2)$. As matrizes $D^{(S)}$ não formam um grupo porém satisfazem à relação

$$D^{(S)}(\mathbf{n}_1)D^{(S)}(\mathbf{n}_2) = D^{(S)}(\mathbf{n}_3) \exp(i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)\mathbf{S}_3), \quad (3.8)$$

sendo $\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ a área do triângulo esférico com vértices $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$.

Outras propriedades importantes dos estados construídos desta forma são

$$\langle \mathbf{n}_0 | \left(D^{(S)}(\mathbf{n}_1) \right)^\dagger D^{(S)}(\mathbf{n}_2) | 0 \rangle = \exp(i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)\mathbf{S}_3) \left[\frac{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0}{2} \right]^S, \quad (3.9)$$

$$\langle \mathbf{n} | \mathbf{S} | \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n} | S_1, S_2, S_3 | \mathbf{n} \rangle = S\mathbf{n}, \quad \text{e} \quad 1 = \int d\mu(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|, \quad (3.10)$$

onde a medida de integração é dada por

$$d\mu(\mathbf{n}) = \frac{2S+1}{4\pi} d^3\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1). \quad (3.11)$$

Estamos agora em condições de escrever formalmente uma expressão para as integrais de caminho na representação dos estados coerentes de spin obtidos acima, com o objetivo de encontrar uma ação que descreva o sistema nesta representação.

3.3.2 Ação na Representação dos Estados Coerentes para um Spin.

Consideremos que a hamiltoniana que caracteriza um spin possa ser escrita como $\mathcal{H} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$, logo a amplitude de probabilidade de transição entre os estados $|\mathbf{n}(t)\rangle$ e $|\mathbf{n}(0)\rangle$ será

$$\mathcal{Z} = \langle \mathbf{n}(t) | \mathbf{n}(0) \rangle = \langle \mathbf{n}(0) | e^{i\mathcal{H}t} | \mathbf{n}(0) \rangle, \quad (3.12)$$

que para trajetórias fechadas (condições periódicas de contorno) e tempos imaginários $\beta = -it$ se transforma em

$$\mathcal{Z} = \langle \mathbf{n}(0) | \exp(-\beta \mathcal{H}) | \mathbf{n}(0) \rangle. \quad (3.13)$$

Como é usual dividiremos o intervalo de tempo imaginário β em N_t partes iguais ($\beta = \delta t N_t$, $\delta t \rightarrow 0$). Usando a fórmula de Trotter [70] e inserindo repetidas vezes a identidade (3.10) na expressão (3.13) teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int \langle \mathbf{n}(t_N) | \exp(-\mathcal{H}\delta t) | \mathbf{n}(t_{N-1}) \rangle d\mu(\mathbf{n}(t_{N-1})) \\ &\quad \langle \mathbf{n}(t_{N-1}) | \exp(-\mathcal{H}\delta t) | \mathbf{n}(t_{N-2}) \rangle d\mu(\mathbf{n}(t_{N-2})) \\ &\quad \langle \mathbf{n}(t_{N-2}) | \exp(-\mathcal{H}\delta t) | \mathbf{n}(t_{N-3}) \rangle d\mu(\mathbf{n}(t_{N-3})) \cdots \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{N_t} \left[\int d\mu(\mathbf{n}(t_j)) \right] \prod_{j=1}^{N_t} \langle \mathbf{n}(t_j) | \exp(-\mathcal{H}\delta t) | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle \quad (3.15)$$

que, aproximando $\exp(-\mathcal{H}\delta t)$ por $1 - \mathcal{H}\delta t$, para intervalos de tempo suficientemente pequenos, se transforma em

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{N_t} \left[\int d\mu(\mathbf{n}(t_j)) \right] \\ &\quad \prod_{j=1}^{N_t} [\langle \mathbf{n}(t_j) | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle - \delta t \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por outro lado, dentro da aproximação $\delta t \rightarrow 0$, podemos escrever também

$$| \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle = \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle | \mathbf{n}(t_j) \rangle + \mathcal{O}(\delta t), \quad (3.17)$$

que nos permite obter o elemento de matriz,

$$\langle \mathbf{n}(t_j) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle = \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(t_j) \rangle \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle + \mathcal{O}(\delta t). \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17) e (3.18) em (3.16) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{N_t} \left[\int d\mu(\mathbf{n}(t_j)) \right] \\ &\quad \prod_{j=1}^{N_t} (\langle \mathbf{n}(t_j) | \mathbf{n}(t_{j+1}) \rangle [1 - \delta t \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(t_j) \rangle]). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Definindo então $\mathcal{D}\mu = \prod_{j=1}^{N_t} d\mu(\mathbf{n}(t_j))$ e usando a propriedade (3.9) pode-se escrever \mathcal{Z} em uma forma compacta como

$$\mathcal{Z} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int \prod_{j=1}^{N_t} \frac{[1 + \mathbf{n}(t_j) \cdot \mathbf{n}(t_{j+1})] \exp(-\delta t \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(t_j) \rangle)}{2 \exp(-i\Phi(\mathbf{n}(t_j), \mathbf{n}(t_{j+1}), \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{S}))} \mathcal{D}\mu. \quad (3.20)$$

A expressão anterior nos permite ainda escrever \mathcal{Z} em função da ação euclidiana S_E na forma:

$$\mathcal{Z} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\mu e^{-S_E[\mathbf{n}]}, \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{aligned} S_E[\mathbf{n}] = & - \sum_{j=1}^{N_t} iS\Phi(\mathbf{n}(t_j), \mathbf{n}(t_{j+1}), \mathbf{n}(0)) + \delta t \sum_{j=1}^{N_t} (\langle \mathbf{n}(t_j) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(t_j) \rangle) \\ & - \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left[\frac{1 + \mathbf{n}(t_j) \cdot \mathbf{n}(t_{j+1})}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O primeiro termo da equação (3.22) representa a área da região definida pela trajetória de $\mathbf{n}(t)$, e no limite contínuo, pode ser escrito como

$$S_{WZ} = \int_0^1 d\tau \int_0^\beta dt [\mathbf{n}(t, \tau) \cdot (\partial_t \mathbf{n}(t, \tau) \times \partial_\tau \mathbf{n}(t, \tau))], \quad (3.23)$$

onde $\mathbf{n}(t, 0) = \mathbf{n}(t)$, $\mathbf{n}(t, 1) = \mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}(0, \tau) = \mathbf{n}(\beta, t)$, $t \in [0, \beta]$, e $\tau \in [0, 1]$.

O termo (3.23) é chamado usualmente de Wess-Zumino ou Chern-Simon. Este termo está evidentemente associado à simetria do sistema. Por outro lado os demais termos de (3.22) possuem limites contínuos da forma

$$S \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left[\frac{1 + \mathbf{n}(t_j) \cdot \mathbf{n}(t_{j+1})}{2} \right] = -\frac{S\delta t}{8} \int_0^\beta (\partial_t \mathbf{n}(t))^2 dt, \quad (3.24)$$

e

$$\sum_{j=1}^{N_t} -\delta t \langle \mathbf{n}(t_j) | \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} | \mathbf{n}(t_j) \rangle = S \int_0^\beta \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(t) dt. \quad (3.25)$$

Partindo das relações (3.23), (3.24) e (3.25) a ação euclidean pode ser escrita como

$$S_E[\mathbf{n}] = -iSS_{WZ}[\mathbf{n}] + \frac{S\delta t}{8} \int_0^\beta (\partial_t \mathbf{n}(t))^2 dt + S \int_0^\beta \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(t) dt, \quad (3.26)$$

que, ao voltarmos ao tempo real ($t = ix_0$, $\beta = it$), se transforma em:

$$S_{Mag} = SS_{WZ}[\mathbf{n}] + \frac{S\delta t}{8} \int_0^T (\partial_0 \mathbf{n}(x_0))^2 dx_0 - S \int_0^T \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(x_0) dx_0. \quad (3.27)$$

A expressão anterior corresponde à ação em 1D de um spin submetido a um campo magnético externo, e está escrita na representação de estados coerentes. Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada para obter (3.27), é possível calcular a ação de uma cadeia de spins.

3.3.3 Ação para a Cadeia de Spins

A generalização do formalismo anterior [24] para o caso de cadeias em uma dimensão descritas pela hamiltoniana $\mathcal{H} = J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}')$ é trivial. O espaço de Hilbert desta vez será o produto tensorial dos espaços de Hilbert de partículas independentes em cada sítio, i.e.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{r_1} \otimes \mathcal{E}_{r_2} \otimes \mathcal{E}_{r_3} \otimes \mathcal{E}_{r_4} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_{r_N}. \quad (3.28)$$

O estado de muitas partículas de maior peso será, neste caso, aquele construído como o produto dos estados de maior peso em cada sítio. Se usamos novamente os estados coerentes, podemos escrever

$$|\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)\rangle = |\mathbf{n}(\mathbf{r}_1, t)\rangle \otimes |\mathbf{n}(\mathbf{r}_2, t)\rangle \otimes |\mathbf{n}(\mathbf{r}_3, t)\rangle \otimes \dots, \quad (3.29)$$

e procedendo de forma análoga ao caso de um spin encontramos que a ação em termos destes estados coerentes pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_M[\mathbf{n}] = & \frac{M}{2a_0} \int_0^\beta d\mathbf{r} \int dt (\partial_t \mathbf{n}(\mathbf{r}, t))^2 dx_0 + \frac{JS^2 a_0}{4} \int_0^\beta d\mathbf{r} \int dt (\partial_x \mathbf{n}(\mathbf{r}, t))^2 dx_0 + \\ & \int_0^1 d\tau \int_0^\beta dt \int d\mathbf{r} [\mathbf{n}(t, \tau) \cdot (\partial_t \mathbf{n}(t, \tau) \times \partial_\tau \mathbf{n}(t, \tau))]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esta expressão pode ser generalizada para duas dimensões de forma imediata. Para termos uma descrição completa do sistema, basta levar em conta a condição de normalização dos estados $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$. Logo, na expressão (3.30) devemos incluir o vínculo: $\lambda(\mathbf{r})(\mathbf{n}^2 - 1)$, onde λ é o multiplicador de Lagrange. Com isto a ação adota a forma

$$\begin{aligned} S_M[\mathbf{n}] = & \frac{M}{2a_0} \int_0^\beta d\mathbf{r} \int dt (\partial_t \mathbf{n}(\mathbf{r}, t))^2 dx_0 + \frac{JS^2 a_0}{4} \int_0^\beta d\mathbf{r} \int dt (\partial_x \mathbf{n}(\mathbf{r}, t))^2 dx_0 + \\ & \int_0^1 d\tau \int_0^\beta dt \int d\mathbf{r} [\mathbf{n}(t, \tau) \cdot (\partial_t \mathbf{n}(t, \tau) \times \partial_\tau \mathbf{n}(t, \tau))] + \int_0^\beta dt \int d\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r})(\mathbf{n}^2 - 1). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A expressão (3.31) quando se toma $M \rightarrow 0$ ($\delta t \rightarrow 0$) corresponde à ação de um ferromagneto sem campo magnético aplicado e dela podem ser deduzidas várias propriedades deste sistema (ver por exemplo [24]). Um caso particular de extrema importância é aquele em que os campos que minimizam a ação são estacionários. Neste caso, a ação (3.31) corresponde exatamente com à modelo sigma não linear, que como vimos no capítulo 1, possui soluções localizadas da forma

$$n_x(y) = \frac{4\lambda x(y)}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad n_z = \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2}. \quad (3.32)$$

Este fato sugere a possibilidade de mapear o problema de elétrons interagentes do sistema de Hall (2DEG) em um sistema efetivo generalizado, similar ao modelo sigma não linear, que possua soluções localizadas. Na próxima seção mostraremos como é possível, sem realizar o cálculo explícito, propor uma densidade de lagrangiana efetiva que descreva os skyrmions.

3.4 Ação Efetiva para os QHS

No caso do sistema de Hall, o estudo das excitações carregadas de menor energia (QHS) correspondentes à criação (destruição) de um elétron no estado $\nu = 1$ pode ser feito convenientemente dentro de uma teoria do tipo Ginzburg-Landau (GL) desenvolvida em [71] para o gás de elétrons e generalizada posteriormente em [72] levando em conta o spin.

Para ilustrar o procedimento, consideremos primeiramente o caso em que o grau de liberdade de spin não é relevante. Nesta situação a densidade de lagrangiana do tipo GL que governa o sistema pode ser obtida através do método das integrais de caminho, o que é equivalente a escrever a função de partição como uma integral sobre as configurações de um certo campo clássico ϕ . Para procedermos desta forma descreveremos o 2DEG como N elétrons polarizados que interagem via um potencial $V(r_i - r_j)$ em um campo eletromagnético externo caracterizado por A_μ . A hamiltoniana que descreve este sistema tem a forma:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \sum_{j=1}^N \left[-i\nabla_j - \frac{e}{c} \mathbf{A}_\mu \right]^2 + \sum_{i<j} V(r_i - r_j) + \sum_{j=1}^N A_{0j}, \quad (3.33)$$

onde $A_{\mu j} = A_\mu(r_j)$.

O problema

$$\mathcal{H}\Psi(\{\mathbf{r}_i\}) = E\Psi(\{\mathbf{r}_i\}), \quad (3.34)$$

onde Ψ é uma função antisimétrica quando se troca as coordenadas de qualquer par de partículas pode ser bosonizado usando a transformação

$$\tilde{\Psi} = \exp \left[-i(2k+1) \sum_{j>k} \text{Im}(\ln(z_j - z_i)) \right] \Psi \quad (3.35)$$

onde $k \in Z$ e $z = x + iy$.

Pode-se demonstrar que a função de onda assim construída é simétrica quando se troca um par de coordenadas qualquer. No entanto, a hamiltoniana que fornece as energias da equação (3.34)

poderá ser obtida se em (3.33) fizermos a substituição

$$\mathbf{A}_j \rightarrow \mathbf{A}_j + \mathbf{a}_j, \quad (3.36)$$

onde

$$\nabla \times \mathbf{a}_j = b_j = (2k + 1)\phi_0 \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (3.37)$$

e ϕ_0 é o quantum de fluxo magnético. Portanto adicionar (remover) um elétron no sistema é equivalente a remover (adicionar) um quantum de fluxo.

Depois de mapear o sistema formado por um conjunto de elétrons em outro composto por bósons, a relação de comutação entre os operadores de campo associados às novas funções de onda será

$$[\Phi^\dagger(\mathbf{r}'), \Phi(\mathbf{r})] = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (3.38)$$

que transforma (3.37) em

$$\nabla \times \mathbf{a}_j = b_j = (2k + 1)\phi_0 |\Phi(\mathbf{r})|^2. \quad (3.39)$$

A versão em segunda quantização da hamiltoniana (3.33) em termos dos novos campos bosônicos definidos por (3.35) pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{r} \Phi^\dagger(\mathbf{r}) \left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[-i\nabla - \frac{e}{c}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})) \right]^2 + A_0 \right\} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} |\Phi|^2 V |\Phi|^2, \quad (3.40)$$

onde

$$|\Phi|^2 V |\Phi|^2 = \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\Phi(\mathbf{r})|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Phi(\mathbf{r}')|^2. \quad (3.41)$$

Procedendo da forma usual para a quantização via integrais de caminho, é possível escrever a função de partição do sistema bosonizado como

$$\mathcal{Z} = Tr \{ \exp -\beta\mathcal{H} \} = \int \mathcal{D}[\phi, \phi^*] e^{-S_0}, \quad (3.42)$$

onde

$$S_0[\phi, \phi^*, A_0, \mathbf{A} + \mathbf{a}] = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{r} \mathcal{L}_0[\phi, \phi^*, A_0, \mathbf{A} + \mathbf{a}], \quad (3.43)$$

$$\mathcal{L}_0 = \phi^* (\hbar c \partial_0 - ie A_0) \phi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \phi^* \left[-i\nabla - \frac{e}{c}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})) \right]^2 \phi + \frac{1}{2} |\phi|^2 V |\phi|^2. \quad (3.44)$$

A teoria do tipo GL certa para o sistema descrito por (3.42), (3.43) e (3.44) pode ser construída supondo que o campo $\mathbf{a}(r)$ flutue, ou seja, que este se comporte como uma variável dinâmica.

Levando em conta o vínculo (3.39), que introduziremos na ação via o multiplicador de lagrange a_0 , e partindo da identidade

$$1 = Cte \int \mathcal{D}\mathbf{a} \delta\left(\frac{\nabla \times \mathbf{a}}{k\phi_0} - |\phi|^2\right) = Cte \int \mathcal{D}[\mathbf{a}, a_0] \exp ie \int a_0 \left(\frac{\nabla \times \mathbf{a}}{(2k+1)\phi_0} - |\phi|^2\right), \quad (3.45)$$

é possível escrever a função de partição (a menos de uma constante multiplicativa) como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\phi, \phi^*, \mathbf{a}, a_0] e^{-S}, \quad (3.46)$$

$$S = i \int d\tau \int d^2r \left\{ e a_0 \left[\frac{\nabla \times \mathbf{a}}{(2k+1)\phi_0} - |\phi|^2 \right] \right\} + S_0, \quad (3.47)$$

ou

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\phi, \phi^*, a_\mu] e^{-S} \quad (3.48)$$

$$S = - \int d\tau \int d^2r \left[\frac{e}{(2k+1)\phi_0} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right] + S_0 \quad (3.49)$$

Substituindo a expressão para S_0 teremos,

$$\begin{aligned} S = & - \int \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \phi^* \left[-i\nabla - \frac{e}{c}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})) \right]^2 \phi \right\} d\tau d^2r + \\ & + \int \int \left\{ \phi^* (\hbar c \partial_0 - ie A_0) \phi + \frac{1}{2} |\phi|^2 V |\phi|^2 - \frac{c}{(2k+1)\phi_0} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \right\} d\tau d^2r \end{aligned} \quad (3.50)$$

Podemos então escrever as equações do movimento obtidas variacionalmente da ação anterior como

$$b(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{a} = -(2k+1)\phi_0 |\phi(\mathbf{r})|^2, \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} e_\beta(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\alpha\beta} (\partial_0 a_\beta - \partial_\beta a_0) = -\frac{(2k+1)\phi_0}{c} j_\alpha(\mathbf{r}), \quad (3.52)$$

$$(\hbar c \partial_0 - ie A_0) \phi + \frac{1}{2m} \left[-i\nabla - \frac{e}{\hbar c}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})) \right]^2 \phi + \frac{1}{2} \phi \int V |\phi|^2 = 0. \quad (3.53)$$

As equações anteriores possuem solução do tipo campo médio para campos magnéticos externos constantes. Suponha que $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ não dependa do tempo; então, para $\phi = \sqrt{\bar{\rho}}$ (onde $\bar{\rho}$ é a densidade media) o campo de gauge $b(\mathbf{r})$ terá a forma

$$b(\mathbf{r}) = -k\phi_0 \bar{\rho}. \quad (3.54)$$

Se por outro lado o campo estatístico (de gauge) cancela exatamente o campo magnético externo e $a_0 = 0$, a ação (3.50) será mínima e

$$\nabla \times (\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})) = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\rho} = \frac{B}{k\phi_0}. \quad (3.55)$$

Esta relação só é possível se $\nu = 1/k$ e implica que neste tipo de estados o quantum de fluxo associado a cada bóson é absolutamente não localizado (solução espacialmente uniforme). Tendo apresentado ao menos um tipo de solução de campo médio para o condensado podemos tentar estudar as possíveis flutuações envolvendo dinâmica de spins em torno desta solução.

Para achar as excitações do tipo skyrmion em torno de $\nu = 1$ a ação efetiva obtida para o 2DEG não é apropriada, pois não contém termos de spin. A generalização do tratamento anterior foi desenvolvida por Lee e Kane [72] para o caso em que o spin é levado em conta na sua interação com o campo magnético, esta nova densidade de lagrangiana possui a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}) = & \phi^\dagger(\mathbf{r}) [i\hbar\partial_t - ea_0] \phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2m^*} \left| \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})] \right] \phi(\mathbf{r}) \right|^2 \\ & - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}'^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[|\phi(\mathbf{r})|^2 - \bar{\rho} \right] \left[|\phi(\mathbf{r}')|^2 - \bar{\rho} \right] - \\ & \frac{e^2}{4\hbar c \theta} \epsilon^{\mu\nu\sigma} a_\mu(\mathbf{r}) \partial_\nu a_\sigma(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} g_{\mu B} B \phi^\dagger(\mathbf{r}) \sigma^Z \phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde:

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (2k + 1)\phi_0 \quad (3.57)$$

de tal forma que ϕ é um campo escalar complexo de duas componentes, que pode ser escrito como (ϕ_1, ϕ_2) , $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -B\mathbf{z}$ e $V(r) = \frac{e^2}{\epsilon r}$ é o potencial de interação coulombiana entre elétrons. $k \in \mathbb{Z}$ e ϕ_0 corresponde a um quantum de fluxo. Se ϕ é um campo bosônico, $\theta = (2k + 1)\pi$.

Para estudar as possíveis excitações topológicas nesta situação, os campos envolvidos em (3.56) podem ser decompostos na forma $\phi_i = \sqrt{\bar{\rho}} Z_i$, de forma tal que a condição $\sum_i Z_i^\dagger Z_i = 1$ seja satisfeita. Esta transformação nos leva a um problema onde os campos Z_α têm a forma do modelo CP_1 (1+1 campos escalares complexos em duas dimensões) acoplados a um campo de gauge de Chern-Simon e ao campo ρ . Mas, existe uma transformação

$$n^\alpha(\mathbf{x}) = Z^\dagger \sigma^\alpha Z, \quad (3.58)$$

onde σ^α são as matrizes de Pauli, que reduz o problema CP_1 ao problema sigma não linear. Isto nos permite obter uma densidade de lagrangiana generalizada do tipo sigma não linear, que quando integrada nos campos que não são de interesse, nos leva a um problema efetivo (\mathcal{L}_{eff}) que descreve a dinâmica das flutuações que queremos estudar.

Apesar de não podermos proceder do modo descrito anteriormente por ser complicado demais, podemos propor [12], baseados na dinâmica de um ferromagneto⁴ com uma interação de longo

⁴ver generalização para duas dimensões da cadeia de spins

alcance proveniente da interação coulombiana entre elétrons, uma \mathcal{L}_{eff} que contenha os termos que precisamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}(\mathbf{r}) &= \alpha \mathcal{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) \cdot \partial_t \mathbf{n}(\mathbf{r}) - \alpha' (\nabla \mathbf{n}(\mathbf{r}))^2 - g \mu_B \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int dr'^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') q(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde $q(r)$ é a densidade de skyrmions dada pela relação

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \quad (3.60)$$

e $\mathcal{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r}))$ tem a forma

$$\mathcal{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) = \partial_t \mathbf{n}(t, \tau) \times \partial_\tau \mathbf{n}(t, \tau) \quad (3.61)$$

Um tratamento mais rigoroso deste problema foi elaborado por Stone [73], conseguindo demonstrar a partir de (3.56) como é possível obter os dois primeiros termos da ação anterior.

Uma vez encontrada uma densidade de lagrangiana efetiva para descrever os QHS podemos obter as equações de movimento que definem os campos $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Porém, estas equações só podem ser resolvidas usando métodos numéricos. Para obter uma expressão analítica podemos realizar um cálculo variacional. De fato, a invariância conforme do modelo sigma não linear permite que usemos o tamanho do skyrmion (λ) como o parâmetro variacional. Isto acontece porque a competição entre os termos de Zeeman e Coulomb quebram a invariância de escala no sistema, estabilizando o tamanho das excitações. Com isto é possível, como veremos em seguida, determinar o tamanho e a energia dos skyrmions.

3.5 Tamanho e Energia dos QHS

A densidade de lagrangiana proposta para a descrição do QHS (3.59) assemelha-se àquela do modelo sigma não linear para soluções estáticas. Podemos então procurar, usando o método variacional, o tamanho das excitações que minimizam o valor da energia. Substituindo (3.32) na expressão para a densidade de skyrmions obtemos

$$q(r) = \frac{4\lambda^2}{\pi(r^2 + 4\lambda^2)^2}. \quad (3.62)$$

Agora podemos substituir (3.32) e (3.62) na expressão para a densidade de energia do sistema:

$$\mathcal{E}(r) = \alpha' (\nabla \mathbf{n}(\mathbf{r}))^2 - g \mu_B \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2} \int dr'^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') q(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}') \quad (3.63)$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned}
 E = & 32\lambda^2\alpha' \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(r^2 + 4\lambda^2)^2} dr^2 - \frac{1}{2}g\tilde{\rho}\mu_B B \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2} dr^2 - \\
 & - \frac{2e^2\lambda^2}{\epsilon\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(r^2 + 4\lambda^2)^2} dr^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (r'^2 + 4\lambda^2)^2} dr'^2
 \end{aligned} \quad (3.64)$$

O primeiro termo coincide com a energia do sistema sigma não linear, $8\pi\alpha'$, e não depende do tamanho das excitações (invariância de escala) nem da posição do centro da excitação (invariância de translação). Para o cálculo da contribuição da parte magnética à energia (segundo termo da equação (3.64)) normalizaremos a expressão com respeito à energia de um ferromagneto no estado completamente polarizado, ou seja,

$$E_{mag} = 8\pi g\tilde{\rho}\mu_B B \int_0^\infty \frac{r}{r^2 + 4\lambda^2} dr, \quad (3.65)$$

que evidentemente é uma expressão não convergente. Porém, o limite superior de integração pode ser fixado em λ , por ser o tamanho da excitação. Desta forma

$$E_{mag} \simeq 4\pi g\tilde{\rho}\mu_B B g \ln(5/4)\lambda^2. \quad (3.66)$$

Por outro lado, o último termo de (3.64) (E_{coul}) tem a forma:

$$E_{coul} = \frac{8e^2\lambda^4}{\epsilon\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r' dr' d\theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| (r'^2 + 4\lambda^2)^2} \right\} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + 4\lambda^2)^2}, \quad (3.67)$$

que integrado nos ângulos se transforma em:

$$\begin{aligned}
 E_{coul} = & \frac{e^2}{4\pi\lambda} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t^2}{4} + 1\right)^2} \int_0^{r/\lambda} \frac{K(t'/t)t' dt'}{\left(\frac{t'^2}{4} + 1\right)^2} \right\} + \\
 & + \frac{e^2}{4\pi\lambda} \left\{ \int_0^\infty \frac{t dt}{\left(\frac{t^2}{4} + 1\right)^2} \int_{r/\lambda}^\infty \frac{K(t/t') dt}{\left(\frac{t'^2}{4} + 1\right)^2} \right\},
 \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde

$$K(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{(x^2 - 2x \cos(\alpha) + 1)^{1/2}}. \quad (3.69)$$

Os valores das integrais que aparecem em (3.68) podem ser calculados numericamente. Sendo $I \cong 2.78$ e levando em conta que $\tilde{\rho} = 1/2\pi l^2$ temos

$$E = 8\pi\alpha' + 2\mu_B B g \ln(5/2) \tilde{\lambda}^2 + \frac{e^2 I}{4\pi\epsilon l} \frac{1}{\tilde{\lambda}} \quad (3.70)$$

onde $\tilde{\lambda} = \lambda/l$. Derivando (3.70) com respeito a $\tilde{\lambda}$ obtemos o valor do tamanho da excitação em função do fator de Landé reduzido (\tilde{g}) como

$$\tilde{\lambda} = 0.62(\tilde{g})^{-\frac{1}{3}} \quad \text{onde} \quad \tilde{g} = \frac{g\mu_B B \epsilon l}{e^2}. \quad (3.71)$$

Substituindo agora este valor em (3.70) obtemos uma expressão para a energia do skyrmion,

$$E \simeq \frac{e^2}{4\epsilon l} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 0.52(\tilde{g})^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (3.72)$$

Desta forma é possível conhecer o valor aproximado do tamanho e da energia dos QHS.

3.6 Conclusões

Como vimos, a presença do 2DEG é confirmada pela diferença de frequência entre os sinais de NMR que provém dos núcleos que se encontram nos poços e nas barreiras. A mudança considerável de K_s (ou da magnetização eletrônica) com pequenas variações de ν em torno de 1 e a impossibilidade de reproduzir os dados experimentais a partir do modelo de elétrons não interagentes, sugere a existência de estados coletivos de baixa energia com spin maior que $\frac{1}{2}$, confirmando a importância da interação elétron-elétron no sistema. Por outro lado a diminuição de T_1 em torno de $\nu = 1$, confirma a presença de estados do tipo *spin flipped* próximos do estado fundamental, o que também se manifesta nas medidas de K_s vs T. Portanto, podemos concluir que definitivamente os skyrmions são os estados de mais baixa energia do 2DEG quando $\nu = 1 \pm \epsilon$ e a interação de troca prevalece sobre a interação de Zeeman devido ao pequeno valor do fator de Landé.

Do ponto de vista teórico, vimos que é possível descrever os skyrmions através de uma densidade de lagrangina, semelhante à do sistema ferromagnético bidimensional, com um termo de longo alcance que leva em conta a interação coulombiana. No próximo capítulo estudaremos as propriedades de transporte dos QHS tendo como ponto de partida esta formulação.

Capítulo 4

A Dinâmica dos Skyrmions

Neste capítulo abordaremos o estudo da dinâmica dos QHS. Partindo da densidade de lagrangiana para as flutuações de spin apresentada no capítulo anterior, e usando o método das coordenadas coletivas, deduziremos uma hamiltoniana de interação skyrmion-mágnons. Posteriormente usando o formalismo de Feynman -Vernon, calcularemos uma ação reduzida que envolve basicamente as coordenadas do centro da excitação. Finalmente obteremos uma equação de movimento efetiva para o skyrmion que carrega a informação da interação com os mágnons.

4.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior a teoria dos QHS proposta por Shondi et al. foi confirmada experimentalmente por Barrett e colaboradores através das experiências de NMR [74]. Destes trabalhos podemos concluir que os skyrmions são as excitações carregadas de mais baixa energia no 2DEG detectáveis apenas quando a interação de troca domina sobre o acoplamento de Zeeman. Esta situação é possível, para campos magnéticos fortes, porque em certos materiais (*GaAs* por exemplo) o fator de Landé efetivo é muito pequeno.

Por outro lado mostramos que do ponto de vista matemático é conveniente considerar o skyrmion como um objeto topológico. Deste ponto de vista, os QHS podem ser caracterizados pelos mapeamentos do espaço físico bidimensional no espaço interno, também bidimensional, composto pelos estados coerentes de spin de norma unitária.

Na prática, para o cálculo das propriedades dos QHS podem ser adotados dois caminhos diferentes: ou os métodos numéricos, em uma descrição puramente quântica, ou uma teoria de campos

não linear semi-clássica. No primeiro caso, a aproximação Hartree-Fock tem-se mostrado em excelente acordo com as diagonalizações exatas para excitações de pequeno tamanho. Porém, existem situações em que o tamanho do skyrmion é consideravelmente grande, tornando impraticáveis as técnicas computacionais. Este é o caso tratado em [77], por exemplo, onde aplicando uma pressão hidrostática sobre o 2DEG, Leadly et al. conseguiram um fator de Landé muito pequeno e, como consequência, skyrmions que envolvem aproximadamente 33 spins.

Situações como a anterior, estimulam o desenvolvimento de técnicas baseadas em teorias de campos semi-clássicas não lineares onde os QHS são descritos como excitações topológicas. Esta é precisamente a idéia que será usada neste capítulo no estudo das propriedades dinâmicas dos QHS. O primeiro ponto importante no nosso tratamento é o fato da invariância translacional da teoria efetiva que descreve os skyrmions [12]. Isto significa que para temperaturas suficientemente baixas, em que os modos de ondas de spin não são excitados, a posição do centro de massa do skyrmion pode se achar com igual probabilidade em qualquer ponto do sistema. Nesta situação os QHS exibem mobilidade infinita. À medida que a temperatura aumenta e os modos de ondas de spin começam a ser excitados, originam-se processos de colisão skyrmion-mágnons levando a um valor finito da mobilidade dos QHS. Evidentemente, a população dos estados de ondas de spin depende fortemente da temperatura, o que provoca, em última instância, que a mobilidade das excitações seja uma grandeza física que também dependa da temperatura.

Neste capítulo, partindo da densidade de lagrangiana proposta por Shondi [12], estudaremos a influência dos modos de ondas de spin ferromagnéticas nas propriedades dinâmicas do skyrmion. Como veremos, o método para desenvolver este estudo consistirá basicamente em uma teoria de campos efetiva em que o momentum do skyrmion está acoplado ao momentum total do sistema de mágnons. A primeira parte do capítulo será dedicada a se obter os modos de ondas de spin calculando as flutuações do sistema em torno de uma solução particular do modelo sigma não linear. Posteriormente, usando o método das coordenadas coletivas descrito no capítulo 1 para a quantização dos sólitons, uma hamiltoniana que simula o espalhamento das ondas de spin pelos skyrmions em 2-D será obtida. Logo em seguida, usando o formalismo de Feynman-Vernon calcularemos o operador densidade reduzido para os skyrmions traçando as coordenadas correspondentes aos mágnons. Este método nos fornecerá uma equação de movimento efetiva para o centro de massa do skyrmion escrita em termos de uma matriz de decaimento dependente da temperatura. Podemos então começar apresentando o cálculo da hamiltoniana que descreve a interação skyrmion-mágnons

no 2DEG.

4.2 Hamiltoniana Efetiva de Interação Skyrmion-Mágnons

Como vimos na descrição dos skyrmions no capítulo 3, a densidade de Lagrangiana efetiva, que caracteriza a dinâmica dos spins no 2DEG em função dos estados coerentes $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}) = & \alpha \mathcal{A}(\mathbf{n}(\mathbf{r})) \cdot \partial_t \mathbf{n}(\mathbf{r}) - \alpha' (\nabla \mathbf{n}(\mathbf{r}))^2 - g \bar{\rho} \mu_B \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} \\ & - \frac{1}{2} \int dr'^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') q(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde α e α' são constantes que garantem a obtenção do espectro ferromagnético das ondas de spin para o caso em que não é levada em conta a interação coulombiana. g é o fator de Landé e $\bar{\rho}$ é uma função do fator de preenchimento que se escreve como $\nu/2\pi l$. Por outro lado, μ_B é o magneton de Bohr e o potencial de interação $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é o coulombiano. Finalmente a densidade de skyrmions $q(\mathbf{r})$, pode ser calculada partindo de:

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}). \quad (4.2)$$

Por outro lado para obter a ação correta associada a (4.1), devemos incorporar a condição de normalização dos estados \mathbf{n} . Isto pode ser evitado realizando uma mudança de variáveis em que os campos \mathbf{n} já estão normalizados. Por exemplo, uma mudança do tipo

$$n^x = \sin(\Theta(r, \theta)) \cos(\Phi(r, \theta)), \quad n^y = \sin(\Theta(r, \theta)) \sin(\Phi(r, \theta)), \quad n^z = \cos(\Theta(r, \theta)). \quad (4.3)$$

A ação correspondente à expressão (4.1), para campos que não dependem do tempo, se escreve em termos das novas variáveis como

$$\begin{aligned} V[\Phi, \Theta] = & \int \left\{ \alpha' [(\nabla \Theta)^2 - \sin^2 \Theta (\nabla \Phi)^2] + g \mu_B B \bar{\rho} (1 - \cos \Theta) \right\} dr^2 + \\ & \int \left\{ \frac{e^2}{2} q(r) \int \frac{q(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left| \frac{\partial(\Theta, \Phi)}{\partial(r', \theta')} \right| dr'^2 \right\} dr^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde as barras correspondem ao Jacobiano da transformação e $q(r) = \sin \Theta / 4\pi r$. Como consequência imediata, as equações

$$\frac{\delta V[\Phi, \Theta]}{\delta \Phi} = \frac{\delta V[\Phi, \Theta]}{\delta \Theta} = 0, \quad (4.5)$$

que geram as soluções localizadas estáticas, escritas em termos das novas variáveis adotam a forma

$$\alpha' \left[\nabla^2 \Theta - \frac{\sin 2\Theta}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] - g \mu_B B \bar{\rho} \sin \Theta + e^2 q(r) \int q(r') \left| \frac{\partial \Phi, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}}{\partial r, \theta} \right| dr'^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$\alpha' \left[\sin^2 \Theta \nabla^2 \Phi + \sin 2\Theta (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Theta) \right] + e^2 q(r) \int q(r') \left| \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}, \Theta}{\partial r, \theta} \right| dr'^2 = 0. \quad (4.7)$$

As equações (4.6) e (4.7) não possuem soluções analíticas. Porém aquelas encontradas para o modelo sigma não linear,

$$n^{x(y)} = \frac{4\lambda x(y)}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad n^z = \frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2}, \quad (4.8)$$

são boas aproximações para um λ determinado variacionalmente pela competição entre os termos de Zeeman e Coulomb¹. Com isto estamos descrevendo o 2DEG por um conjunto de skyrmions não interagentes, de carga topológica 1 e tamanho definido λ . Evidentemente esta representação está longe de ser completa pois como sabemos o sistema também suporta ondas de spin.

Para introduzir os modos de ondas de spin no problema, calcularemos as flutuações do sistema em torno das soluções (4.8), que na representação (4.3) se escrevem como

$$\bar{\Theta}(r, \theta) = \arccos \left(\frac{r^2 - 4\lambda^2}{r^2 + 4\lambda^2} \right), \quad \bar{\Phi}(r, \theta) = \theta. \quad (4.9)$$

A próxima seção será dedicada, precisamente, ao cálculo das flutuações.

4.2.1 Expansão Funcional do Potencial

De forma geral um funcional $V[\alpha_1, \alpha_2]$

$$V[\alpha_1, \alpha_2] = \int U(\alpha_1, \alpha_2) d^2 r \quad (4.10)$$

pode ser expandido até segunda ordem em torno das funções $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ na forma

$$\begin{aligned} V[\alpha_1, \alpha_2] &= V[\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2] + \int d^2 r \sum_{i=1}^2 \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \Big|_{\bar{\alpha}_i} (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \\ &+ \frac{1}{2} \int \int d^2 r'^2 d^2 r \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j} (\alpha_i - \bar{\alpha}_i)(\alpha_j - \bar{\alpha}_j). \end{aligned} \quad (4.11)$$

No nosso caso, $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ correspondem às soluções $\bar{\Phi}, \bar{\Theta}$ das relações (4.9) e o funcional V possui a forma (4.4). Então, substituindo (4.4) e (4.9) na relação (4.11), teremos que na expressão resultante o primeiro termo do lado direito da expansão é constante, o segundo é aproximadamente nulo e o último dá origem ao problema

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \delta \Theta_i \\ \delta \Phi_i \end{pmatrix} = w_i^2 \begin{pmatrix} \delta \Theta_i \\ \delta \Phi_i \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

¹Ver seção 3.4

onde $\delta\Theta_i = \Theta_i(r, \theta) - \bar{\Theta}_i(r, \theta)$ e $\delta\Phi_i = \Phi_i(r, \theta) - \bar{\Phi}_i(r, \theta)$. Por outro lado a matriz \mathbf{M} tem a forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 V}{\delta\Theta^2} & \frac{\delta^2 V}{\delta\Theta\delta\Phi} \\ \frac{\delta^2 V}{\delta\Phi\delta\Theta} & \frac{\delta^2 V}{\delta\Phi^2} \end{pmatrix}_{\bar{\Theta}, \bar{\Phi}}. \quad (4.13)$$

Depois de calcular as segundas variações, as relações anteriores geram a equação diferencial para as flutuações em torno do campo $\bar{\Theta}$

$$\{-\alpha'\nabla^2 + U[\Theta, \Phi]\}u_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_m(\mathbf{k})u_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

onde

$$U[\Theta, \Phi] = \alpha' \cos(2\Theta)(\nabla\Phi)^2 + g\mu_B B \bar{\rho} \cos \Theta + e^2 q(r) \int q(r') K[\Theta, \Phi] dr'^2 \quad (4.15)$$

e

$$K = \left| \frac{\partial \left(\Phi(r), \left| \frac{\partial(|r-r'|^{-1}, \Theta(r'))}{\partial(r', \theta')} \right| \right)}{\partial(r, \theta)} \right|. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.9) em (4.15) a equação tipo Schrödinger para as flutuações se escreve como

$$\{-\nabla^2 + U(r)\} u_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e_m u_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (4.17)$$

onde

$$e_m = E_m - \frac{g\mu_B B}{2\pi}, \quad (4.18)$$

e

$$U(r) = \frac{\alpha' l_0^2}{r^2} - \frac{2^5 \alpha' \lambda^2 l_0^2}{(r^2 + 4\lambda^2)^2} - \frac{2g\mu_B B \lambda^2}{\pi(r^2 + 4\lambda^2)}. \quad (4.19)$$

A solução da equação independente do tempo (4.17) nos permitirá escrever a solução dinâmica do campo Θ na forma:

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \sum_i c_i(t) \delta\Theta_i. \quad (4.20)$$

Portanto o problema consiste em resolver a equação (4.17), que evidentemente não possui uma solução trivial. Felizmente podemos usar a teoria desenvolvida por Pais e Jost usando o método de Fredholm para as equações integrais. Esta teoria é baseada na relação entre a perturbação estacionária dos estados do contínuo e os desvios de fase provocados pelo potencial perturbador no problema de espalhamento e permite lidar com problemas que envolvem potenciais complicados. Neste trabalho usaremos apenas as expressões que nos permitem calcular os desvios de fase. Uma descrição detalhada sobre o método de Fredholm pode ser encontrada em [49].

4.2.2 Ondas de Spin no 2DEG

Apesar da forma complexa do potencial (4.19), as soluções da equação (4.17) para cada componente de momento angular m das ondas de spin confinadas em uma região circular de raio R (com R muito maior que o alcance do potencial) pode ser escrita como a soma de duas contribuições [47] na forma

$$u_{mn} \propto \frac{1}{2} \{ H_{|m|}^{(1)}(k_{mn}r) e^{im\phi} + \sum_l e^{-2i\delta_{m,l}} H_{|l|}^{(2)}(k_{ln}r) e^{il\phi} \}, \quad (4.21)$$

onde $H_m^{(1,2)}(kr)$ são as funções de Hankel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e δ_{ml} é a matriz dos desvios de fase que conecta os canais de momento angular m e l . O primeiro termo do lado direito de (4.21) corresponde a uma onda incidente de simetria cilíndrica. No entanto cada componente do segundo termo representa uma onda cilíndrica emergente de momento angular l com um certo desvio de fase que aparece como resultado da interação da onda incidente com o potencial $U(r)$.

Como se pode ver na expressão (4.19), o potencial envolvido nos processos de espalhamento possui simetria cilíndrica e, portanto, $\delta_{m,l}$ é uma matriz diagonal. Desta forma (4.21) pode ser escrita como:

$$u_{mn} \propto \frac{1}{2} \{ H_{|m|}^{(1)}(k_{mn}r) + e^{-2i\delta_m} H_{|m|}^{(2)}(k_{mn}r) \} e^{im\phi}. \quad (4.22)$$

Como já mencionamos, o método de Fredholm [49] será usado para o cálculo dos desvios de fase para cada componente do momento angular m . Para isso devemos basicamente computar as relações,

$$\pi \mathcal{A}(E) \cot \delta(E) = 1 + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\mathcal{A}(E')}{E - E'} dE', \quad (4.23)$$

onde $\delta(E)$ é o desvio de fase para a onda de energia E , \mathcal{P} significa valor principal de Cauchy, e a função espectral $\mathcal{A}(E)$ até segunda ordem possui a forma

$$\mathcal{A}(E) = -\langle E | \mathcal{H} | E \rangle + \int_0^\infty \frac{dE_1}{E - E_1} \begin{vmatrix} \langle E | \mathcal{H} | E \rangle & \langle E | \mathcal{H} | E_1 \rangle \\ \langle E_1 | \mathcal{H} | E \rangle & \langle E_1 | \mathcal{H} | E_1 \rangle \end{vmatrix} + \dots \quad (4.24)$$

No cálculo de $\mathcal{A}(E)$ usaremos a base cilíndrica gerada pelo problema não perturbado. Esta base para $R \rightarrow \infty$ pode ser escrita como

$$\langle r | E \rangle = \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} J_m(kr) e^{im\theta}. \quad (4.25)$$

Devemos ressaltar porém que, devido ao caracter singular de (4.19) para $r \rightarrow 0$, todas as componentes da base escolhida devem anular-se em $r = 0$. Esta condição é automaticamente satisfeita pelas funções $J_m(kr)$ para $m \neq 0$. Então, substituindo (4.25) em (4.24) teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(x) = & \frac{\pi x e_c}{8\sqrt{2\pi}} \{I_m(x)[K_{m+1}(x) + K_{m-1}(x)] - K_m(x)[I_{m+1}(x) + I_{m-1}(x)] \\ & - (4mx)^{-1}\} + 2e_z I_m(x)K_m(x), \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde

$$e_c = \frac{e^2/l_0}{\hbar^2/Ml_0^2} \quad \text{e} \quad e_z = \frac{g\mu_B B}{\hbar^2/M\lambda^2}. \quad (4.27)$$

Aqui, usamos o valor de *spin stiffness*, $e^2/32\sqrt{2\pi}l_0$, do ferromagneto de Hall. Por outro lado, I_m e K_m são as funções de Bessel modificadas e $x = 2k\lambda$. Logo, o desvio de fase para cada componente de momento angular m é determinado pela relação

$$\delta_m = \arctan\left(\frac{\pi\mathcal{A}_m(2\lambda k)}{1 + \Delta_m(2\lambda k)}\right), \quad (4.28)$$

onde $\Delta(2\lambda k)$ é usada para denotar a expressão

$$\Delta_m(k) = \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\mathcal{A}_m(x)}{(2\lambda k)^2 - x^2} x dx, \quad (4.29)$$

que devido à forma complicada de (4.26) será calculada numericamente.

Logo, nosso modelo para o grau de liberdade de spin do ferromagneto de Hall está composto por um conjunto de skyrmions cilindricamente simétricos descritos pelas expressões (4.8) e pelos modos não interagentes de ondas de spin caracterizados por (4.22) e (4.26)-(4.29). A frequências destes modos têm a forma

$$\omega_{mn} = \frac{\hbar k_{mn}^2}{2M} + \frac{g\mu_B B}{\hbar}, \quad (4.30)$$

onde o momento k_{mn} pode ser determinado pela condição de contorno $u_{mn}(kR) = 0$. Portanto, usando a expansão assintótica de (4.22) teremos

$$k_{mn} = \frac{2n+1}{2R} + \frac{m\pi}{2R} - \frac{\delta_m}{R}. \quad (4.31)$$

4.2.3 Acoplamento Skyrmion-Mágnons

O próximo passo no estudo da dinâmica dos QHS é a expansão do termo cinético da lagrangiana em termos das coordenadas coletivas que envolvem as soluções de (4.17). Para escrever em forma

apropriada a parte cinética da lagrangiana que descreve o campo de skyrmions partiremos de (4.1) escrita na forma

$$L = -\alpha \int \mathbf{n} \cdot (\partial_t \mathbf{n} \times \partial_r \mathbf{n}) d^2 r + V[\mathbf{n}]. \quad (4.32)$$

A equação de movimento gerada pela equação

$$\delta S = \delta \int_0^t L(t') dt' = 0, \quad (4.33)$$

tem a forma

$$\alpha \partial_t \mathbf{n} = 2\alpha' \mathbf{n} \times \nabla^2 \mathbf{n} + g\rho\mu_B \mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (4.34)$$

Pois, quando o potencial é expandido até segunda ordem em torno das soluções do modelo sigma não linear, a interação coulombiana não modifica a energia dos mágnons.

As equações componentes geradas pela equação anterior, em termos dos campos Θ e Φ , podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} -\mu B \sin \Theta \sin \Phi &= -K \left[\sin \Phi \nabla^2 \Theta - \frac{\sin 2\Theta \sin \Phi}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] - \\ &-K \left[\frac{\sin 2\Theta \cos \Phi}{2} \nabla^2 \Phi + 2 \cos^2 \Theta \cos \Phi (\nabla \Theta) \cdot (\nabla \Phi) \right] - \\ &-J\rho \left[\cos \Theta \cos \Phi \dot{\Theta} - \sin \Theta \sin \Phi \dot{\Phi} \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} -\mu B \sin \Theta \cos \Phi &= -K \left[\cos \Phi \nabla^2 \Theta - \frac{\sin 2\Theta \sin \Phi}{2} (\nabla^2 \Phi) \right] \\ &K \left[\frac{\sin 2\Theta \cos \Phi}{2} (\nabla \Phi)^2 + 2 \cos^2 \Theta \sin \Phi (\nabla \Theta) \cdot (\nabla \Phi) \right] \\ &-J\rho \left[\cos \Theta \sin \Phi \dot{\Theta} + \sin \Theta \cos \Phi \dot{\Phi} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$J\rho \sin \Theta \dot{\Theta} + K \left[\sin^2 \Theta \nabla^2 \Phi + 2 \sin \Theta \cos \Theta (\nabla \Theta) \cdot (\nabla \Phi) \right] = 0 \quad (4.37)$$

Eliminando agora a variável Φ no sistema anterior, obtém-se a uma equação de movimento que descreve a dinâmica do campo Θ . Explicitamente,

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\Theta} + \alpha' \left[\nabla^2 \Theta + \sin 2\Theta (\nabla \Phi)^2 \right] - g\bar{\rho}\mu_B B \sin \Theta = 0, \quad (4.38)$$

onde

$$c = \frac{2\alpha'}{\alpha} \quad (4.39)$$

Esta equação de movimento é gerada pela lagrangiana efetiva,

$$L^{eff} = \frac{1}{2c^2} \int \left(\dot{\Theta} \right)^2 d^2 r - V[\Theta, \Phi], \quad (4.40)$$

onde

$$V[\Theta, \Phi] = \int \left\{ \alpha' \left[\nabla^2 \Theta - \sin^2 \Theta (\nabla \Phi)^2 \right] + g \bar{\rho} \mu_B B (1 - \cos \Theta) \right\} d^2 r. \quad (4.41)$$

A densidade de lagrangiana efetiva obtida para o campo de skyrmions (4.40) possui uma forma similar àquela densidade de lagrangiana usada para ilustrar o método das coordenadas coletivas, o que nos permite usar diretamente os resultados da seção 1.4.3. Então, denotando por $\sigma_0(r)$ o modo translacional (ou de frequência nula), a densidade de Lagrangiana efetiva obtida para o campo de skyrmions pode ser expandida como

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \sigma_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) + \sum_{mn=2}^{\infty} c_{mn}(t) \eta_{mn}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \quad (4.42)$$

onde η_{mn} são as soluções de (4.17) numa região circular de raio R . Substituindo (4.42) em (4.40) e procedendo de forma análoga que a seção 1.4.3 obtemos a hamiltoniana clássica que descreve o sistema. Esta hamiltoniana pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{P_k^2}{2M} + \frac{P_k}{M} \sum_{mn,lq=2}^{\infty} \mathcal{D}_{k,mn} p_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{mn,lq=2}^{\infty} \left(\delta_{mn,lq} + \frac{\mathcal{D}_{k,mn} \mathcal{D}_{k,lq}}{M} \right) p_{mn} p_{lq} \right\} + U(\{q_{mn}\}), \quad (4.43)$$

onde

$$M = \int (\nabla \sigma_0)^2 dr^2, \quad \mathcal{D}_{k,mn} = - \int \sum_{lq=2}^{\infty} q_{lq} (\nabla_k \eta_{lq}) \eta_{mn} dr^2, \quad (4.44)$$

e k denota as duas dimensões espaciais.

Seguindo o procedimento de quantização canônica apresentado na seção 1.4.4 podemos escrever a versão quântica da expressão (4.43) como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M} \left[\hat{\mathbf{P}}^2 - 2\hat{\mathbf{P}} \cdot \sum_{mn,lq=2}^{\infty} (\mathbf{G}_{mn,lq} \hat{q}_{mn} \hat{\pi}_{lq} + \mathbf{G}_{mn,lq} \hat{\pi}_{lq} \hat{q}_{mn}) \right] + \frac{1}{2M} \left(\sum_{mn,lq=2}^{\infty} \mathbf{G}_{mn,lq} \hat{q}_{mn} \hat{\pi}_{lq} + \mathbf{G}_{mn,lq} \hat{\pi}_{lq} \hat{q}_{mn} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{mn=2}^{\infty} \hat{\pi}_{mn}^2 + V(\{q_{mn}\}), \quad (4.45)$$

onde

$$\mathbf{G}_{mn,lq} = \int \eta_{mn} (\nabla \eta_{lq}) dr^2. \quad (4.46)$$

A hamiltoniana (4.45) pode ser escrita como a soma de dois termos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_I + \mathcal{H}_R, \quad (4.47)$$

que possuem a forma:

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2M} \left[\hat{\mathbf{P}} - \sum_{mn,lq=2}^{\infty} (\mathbf{G}_{mn,lq} \hat{q}_{mn} \hat{\pi}_{lq} + \mathbf{G}_{mn,lq} \hat{\pi}_{lq} \hat{q}_{mn}) \right]^2, \quad (4.48)$$

$$\mathcal{H}_R = \frac{1}{2} \sum_{mn=2}^{\infty} \hat{\pi}_{mn}^2 + V(\{q_{mn}\}). \quad (4.49)$$

Como se pode observar, \mathcal{H}_I descreve o skyrmion acoplado com o reservatório de mágnons, enquanto que \mathcal{H}_R descreve o comportamento dos mágnons livres. Lembrando que até segunda ordem o potencial é quadrático nas coordenadas generalizadas q_{mn} , \mathcal{H}_R possui a forma de um conjunto de osciladores harmônicos desacoplados, ou seja,

$$\mathcal{H}_R = \sum_{mn=2}^{\infty} \frac{1}{2} (\hat{\pi}_{mn}^2 + \omega_{mn}^2 \hat{q}_{mn}^2). \quad (4.50)$$

Este tipo de hamiltoniana é muito simples de se tratar quando reescrita na forma de segunda quantização, ou seja,

$$\mathcal{H}_R = \sum_{mn=2}^{\infty} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^{\dagger} b_{mn}. \quad (4.51)$$

onde b_{mn}^{\dagger} e b_{mn} são os operadores de criação e destruição. Podemos, agora, escrever os operadores $\hat{\pi}_n$ e \hat{q}_m em termos desses mesmos operadores de criação e destruição. Usando as regras de comutação bosônicas e levando em conta que $\mathbf{G}_{mn,ql} = -\mathbf{G}_{ql,mn}$, (4.47) se reduz a

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}_{mg})^2 + \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^{\dagger} b_{mn}. \quad (4.52)$$

Na expressão (4.52), $\hat{\mathbf{P}}$ e $\hat{\mathbf{P}}_{mg}$ denotam os operadores de momento dos skyrmions e dos mágnons respectivamente. O operador momento para os mágnons pode ser escrito na forma

$$\hat{\mathbf{P}}_{mg} = \sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} b_{mn}^{\dagger} b_{kl} + \sum_{mn,kl} \mathbf{C}_{mn,kl} (b_{mn} b_{kl} - b_{mn}^{\dagger} b_{kl}^{\dagger}), \quad (4.53)$$

onde

$$\mathbf{D}_{mn,kl} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\omega_{kl}}{\omega_{mn}}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega_{kl}}\right)} \right] \mathbf{G}_{mn,kl}, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{C}_{mn,kl} = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\left(\frac{\omega_{kl}}{\omega_{mn}}\right)} - \sqrt{\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega_{kl}}\right)} \right] \mathbf{G}_{mn,kl}, \quad (4.55)$$

As relações (4.52)-(4.55) são uma generalização para sistemas 2-D das expressões obtidas em [40], [41] e [46]. Como se observa em (4.53), o operador momento dos mágnons é composto por duas contribuições. O primeiro termo só acopla excitações com \mathbf{k} -s diferentes, como pode ser

demonstrado partindo da antisimetria de $\mathbf{G}_{mn,kl}$ por inversão de índices. Este termo é responsável pelo espalhamento de baixa energia dos mágnons pelos skyrmions, e como ao mesmo tempo comuta com o número total de mágnons,

$$\hat{N} = \sum_{mn=2}^{\infty} b_{mn}^{\dagger} b_{mn}, \quad (4.56)$$

nos faz lembrar do problema de espalhamento por um cilindro rígido no espaço. Por outro lado, o segundo termo de (4.53) não comuta com o número total de mágnons no sistema e, portanto, está associado à emissão ou absorção dos mesmos. Em algumas situações específicas, por exemplo quando os skyrmions são submetidos a campos elétricos, esta contribuição *radiativa* pode ser relevante.

Conhecida, então, a forma em que skyrmions e mágnons interagem, estamos em condições de começar o estudo da dinâmica destas excitações. Como foi exposto no início do capítulo, nosso principal objetivo é o cálculo do operador densidade reduzido para o skyrmion, de tal forma que possamos encontrar uma equação de movimento associada ao seu centro de massa, o que faremos na próxima seção.

4.3 O Operador Densidade Reduzido Dinâmico

4.3.1 Introdução

Esta seção será dedicada ao cálculo do operador densidade reduzido para o skyrmion. Isto significa que estamos interessados nas propriedades estatísticas quânticas destas excitações quando interagem com um reservatório composto por um campo de mágnons. A idéia chave no cálculo do operador densidade reduzido do skyrmion é traçar as coordenadas correspondentes ao campo de mágnons. Assumiremos que este campo de mágnons aja apenas como fonte nos processos de difusão e relaxação que sofrem os skyrmions e que esteja a uma temperatura constante. A evolução temporal do operador densidade do sistema composto (skyrmions e mágnons) pode ser escrita como

$$\hat{\rho}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\hat{\rho}(0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \quad (4.57)$$

onde $\hat{\rho}(0)$ é o operador densidade para $t = 0$ e \hat{H} é a hamiltoniana que descreve o sistema skyrmion+mágnons.

A expressão explícita para $\hat{\rho}(t)$ na representação de coordenadas pode ser escrita da seguinte

forma

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{xR} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{yQ} \rangle &= \int \int \int \int d^2x' d^2y' d\mathbf{R}' d\mathbf{Q}' \left\langle \mathbf{xR} \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \right| \mathbf{x}'\mathbf{R}' \right\rangle \times \\ &\quad \langle \mathbf{x}'\mathbf{R}' | \hat{\rho}(0) | \mathbf{y}'\mathbf{Q}' \rangle \left\langle \mathbf{y}'\mathbf{Q}' \left| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \right| \mathbf{yQ} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde o vetor $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)$ é o valor da coordenada generalizada q_i e as coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} estão associadas ao centro de massa do skyrmion. Também se fez uso da relação de completudeza

$$\int \int d^2x' d\mathbf{R}' |\mathbf{x}'\mathbf{R}'\rangle \langle \mathbf{x}'\mathbf{R}'| = 1. \quad (4.59)$$

Na expressão (4.58) estão presentes dois elementos de matriz que correspondem exatamente aos propagadores de Feynman [78], que são

$$\left\langle \mathbf{xR} \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \right| \mathbf{x}'\mathbf{R}' \right\rangle = K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t; \mathbf{x}'\mathbf{R}'), \quad (4.60)$$

$$\left\langle \mathbf{y}'\mathbf{Q}' \left| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \right| \mathbf{yQ} \right\rangle = K^*(\mathbf{y}, \mathbf{Q}, t; \mathbf{y}'\mathbf{Q}'). \quad (4.61)$$

Fazendo uso desta nova notação, (4.58) se transforma em

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{xR} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{yQ} \rangle &= \int \int \int \int d^2x' d^2y' d\mathbf{R}' d\mathbf{Q}' \langle \mathbf{x}'\mathbf{R}' | \hat{\rho}(0) | \mathbf{y}'\mathbf{Q}' \rangle \times \\ &\quad K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t; \mathbf{x}'\mathbf{R}') K^*(\mathbf{y}, \mathbf{Q}, t; \mathbf{y}'\mathbf{Q}'). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Podemos, então, calcular o operador densidade reduzido do skyrmion, $\hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, tomando o traço de (4.62) respeito às variáveis do reservatório, ou seja,

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int d\mathbf{R} \langle \mathbf{xR} | \hat{\rho}(t) | \mathbf{yR} \rangle \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \int \dots \int d^2x' d^2y' d\mathbf{R}' d\mathbf{Q}' d\mathbf{R} \langle \mathbf{x}'\mathbf{R}' | \hat{\rho}(0) | \mathbf{y}'\mathbf{Q}' \rangle \times \\ &\quad K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t; \mathbf{x}'\mathbf{R}') K^*(\mathbf{y}, \mathbf{R}, t; \mathbf{y}'\mathbf{Q}'). \end{aligned} \quad (4.64)$$

É possível fazer agora uma hipótese simplificadora em (4.64) [79]. Vamos supor que o operador densidade inicial do sistema composto (skyrmions e mágnons)

$$\langle \mathbf{x}'\mathbf{R}' | \hat{\rho}(0) | \mathbf{y}'\mathbf{Q}' \rangle \equiv \hat{\rho}(\mathbf{x}', \mathbf{R}', \mathbf{y}', \mathbf{Q}', 0), \quad (4.65)$$

possa ser fatorado da forma

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}', \mathbf{R}', \mathbf{y}', \mathbf{Q}', 0) = \hat{\rho}_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) \hat{\rho}_r(\mathbf{R}', \mathbf{Q}', 0), \quad (4.66)$$

onde $\hat{\rho}_s$ e $\hat{\rho}_r$ são, respetivamente, os operadores do sistema e do reservatório quando isolados. Isto significa assumir que no instante inicial ($t = 0$) não existe interação entre o skyrmion e o reservatório. Claramente esta não é a única escolha possível. Por exemplo, uma outra condição inicial foi proposta em [80] no estudo do movimento browniano quântico de uma partícula livre.

Substituindo (4.66) em (4.64) podemos escrever o operador densidade reduzido

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int \int d^2x' d^2y' \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; \mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) \hat{\rho}_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) \quad (4.67)$$

onde

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; \mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) = \int \int \int d\mathbf{R}' d\mathbf{Q}' d\mathbf{R} \hat{\rho}_r(\mathbf{R}', \mathbf{Q}', 0) \times K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t; \mathbf{x}' \mathbf{R}') K^*(\mathbf{y}, \mathbf{R}, t; \mathbf{y}' \mathbf{Q}') \quad (4.68)$$

é conhecido como o superpropagador do sistema e rege a evolução temporal de $\hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$.

Nos resta então o cálculo dos propagadores que aparecem na expressão anterior. A obtenção de uma expressão explícita para eles se dá quando passamos à representação dos estados coerentes (ver Apêndice D). Em seguida mostraremos como é possível calcular os propagadores nesta representação.

4.3.2 Superpropagador na Representação dos Estados Coerentes

Partindo da hamiltoniana que descreve o sistema de skyrmions e mágnons em termos de operadores criação e destruição, podemos escrever o superpropagador (4.68) em termos dos estados coerentes². Para isso partiremos da forma explícita do mesmo na representação de coordenadas

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; \mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) = \int \int \int d\mathbf{R}' d\mathbf{Q}' d\mathbf{R} \hat{\rho}_r(\mathbf{R}', \mathbf{Q}', 0) \times K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t; \mathbf{x}' \mathbf{R}') K^*(\mathbf{y}, \mathbf{R}, t; \mathbf{y}' \mathbf{Q}'), \quad (4.69)$$

que na representação de estados coerentes se transforma em

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; \mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) = \int \frac{d\alpha}{\pi} \int \frac{d\beta}{\pi} \int \frac{\gamma}{\pi} \langle \mathbf{x}\alpha | \exp(-i\frac{H}{\hbar}t) | \mathbf{x}'\alpha' \rangle \times \rho_r(\beta^*, \gamma) \langle \mathbf{y}'\gamma | \exp(i\frac{H}{\hbar}t) | \mathbf{y}\alpha' \rangle, \quad (4.70)$$

onde

$$\rho_r(\beta^*, \gamma) = \langle \mathbf{x}'\beta | \hat{\rho}_r | \mathbf{y}'\gamma \rangle \quad (4.71)$$

²Ver Apêndice D

e os propagadores em termos dos estados coerentes adotam a forma

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') = \langle \mathbf{x} \alpha | \exp(-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t) | \mathbf{x}' \alpha' \rangle. \quad (4.72)$$

O cálculo explícito do propagador (4.72) (que aparece no Apêndice E) nos permite escrever $K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha')$ como

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') &= \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} \right\} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}'} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[\mathbf{x}] \right) \mathcal{D}\mathbf{x} \times \\ &\int_{\alpha}^{\alpha^*} \exp(\alpha^*(0)\alpha + \alpha^* \alpha(t)) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_I[\mathbf{x}, \alpha] \right) \mathcal{D}^2 \alpha, \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde

$$S_0[\mathbf{x}] = \int_0^t M \frac{(\dot{\mathbf{x}})^2}{2} dt', \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} S_I &= \int_0^t \left\{ \frac{i\hbar}{2} \sum_{mn} \alpha_{mn}^* \dot{\alpha}_{mn} - \alpha_{mn} \dot{\alpha}_{mn}^* - \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} \alpha_{mn}^* \alpha_{mn} \right. \\ &+ \hbar M \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} \alpha_{mn}^* \alpha_{kl} \\ &\left. + \hbar M \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{mn,kl} \mathbf{C}_{mn,kl} (\alpha_{mn} \alpha_{kl} + \alpha_{mn}^* \alpha_{kl}^*) \right\} dt', \end{aligned} \quad (4.75)$$

e

$$\prod_{j=1} \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \equiv \mathcal{D}^2 \alpha, \quad \prod_{j=1} \sqrt{\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \int d^2 x_j \equiv \mathcal{D}\mathbf{x}, \quad (4.76)$$

Usando as expressões anteriores obtemos finalmente a forma do superpropagador em termos dos estados coerentes como:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; \mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) &= \int \mathcal{D}\mathbf{x} \int \mathcal{D}\mathbf{y} \exp \frac{i}{\hbar} [S_0[\mathbf{x}] - S_0[\mathbf{y}]] \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} \times \\ &\rho_m(\beta^*, \gamma) \exp \left\{ -|\alpha|^2 - \frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} \right\} \int_{\beta}^{\alpha^*} \mathcal{D}^2 \alpha \int_{\gamma}^{\alpha} \mathcal{D}^2 \gamma \times \\ &\exp \frac{i}{\hbar} \left[S_I[\mathbf{x}, \alpha] + \frac{\hbar}{i} \alpha^*(0)\alpha + \alpha^* \alpha(t) - S_I[\mathbf{y}, \gamma] + \gamma(0)\alpha^* + \alpha\gamma^*(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

A expressão anterior nos permite introduzir o já conhecido funcional de influência [78]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} \rho_m(\beta^*, \gamma) \exp \left\{ -|\alpha|^2 - \frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\gamma|^2}{2} \right\} \int_{\beta}^{\alpha^*} \mathcal{D}^2 \alpha \int_{\gamma^*}^{\alpha} \mathcal{D}^2 \gamma \times \\ &\exp \frac{i}{\hbar} \left[S_I[\mathbf{x}, \alpha] - S_I[\mathbf{y}, \gamma] + \frac{\hbar}{i} (\alpha^*(0)\alpha + \alpha^* \alpha(t) + \gamma(0)\alpha^* + \alpha\gamma^*(t)) \right], \end{aligned} \quad (4.78)$$

e, finalmente, escrever o superpropagador em forma compacta como:

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t; \mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}'} \mathcal{D}\mathbf{x} \int_{\mathbf{y}'}^{\mathbf{y}} \mathcal{D}\mathbf{y} \exp \frac{i}{\hbar} [S_0[\mathbf{x}] - S_0[\mathbf{y}]] \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]. \quad (4.79)$$

Em seguida veremos como \mathcal{F} pode ser tratado adequadamente dentro do formalismo de integrais de Feynman.

4.4 Funcional de Influência

4.4.1 Aproximação de Fase Estacionária

Nesta seção mostraremos como é possível calcular as integrais que aparecem no funcional de influência explorando a forma quadrática da hamiltoniana de interação *skyrmions*-mágnons (E.27). Para isto investiguemos primeiramente o termo da expressão (4.78)

$$\Gamma_{\mathbf{x}\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha^*} \exp [\alpha^*(0)\alpha + \alpha^* \alpha(t)] \exp \frac{i}{\hbar} [S_I[\mathbf{x}, \alpha]] \mathcal{D}^2\alpha, \quad (4.80)$$

que explicitamente escreveremos como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{x}\alpha} = & \int_{\beta}^{\alpha^*} \exp [\alpha^*(0)\alpha + \alpha^* \alpha(t)] \times \\ & \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \sum_{mn} \alpha_{mn}^* \dot{\alpha}_{mn} - \alpha_n \dot{\alpha}_{mn}^* - \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} \alpha_{mn}^* \alpha_{mn} \right. \right. \\ & + \hbar M \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} \alpha_{mn}^* \alpha_{kl} \\ & \left. \left. + \hbar M \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{mn,kl} \mathbf{C}_{mn,kl} (\alpha_{mn} \alpha_{kl} + \alpha_{mn}^* \alpha_{kl}^*) \right\} dt' \right] \mathcal{D}^2\alpha. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para calcular a integral no tempo usaremos o método da fase estacionária [70]. Para isto expandiremos $\alpha(t)$ em torno das soluções clássicas ($\alpha_c(t)$) das equações de movimento geradas a partir de

$$\frac{\delta S_I}{\delta \alpha_{mn}} = 0, \quad \frac{\delta S_I}{\delta \alpha_{mn}^*} = 0, \quad (4.82)$$

que são

$$\dot{\alpha}_{mn} + i\omega_{mn} \alpha_{mn} - iM \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{kl} \mathbf{D}_{mn,kl} \alpha_{kl} + 2\mathbf{C}_{mn,kl} \alpha_{kl}^* = 0, \quad (4.83)$$

e

$$\dot{\alpha}_{mn}^* - i\omega_{mn}\alpha_{mn}^* + iM \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{kl} \mathbf{D}_{mn,kl}\alpha_{kl}^* + 2\mathbf{C}_{mn,kl}\alpha_{kl} = 0. \quad (4.84)$$

Então, substituindo

$$\alpha(t) = \alpha_c(t) + \Delta(t), \quad (4.85)$$

em S_I e usando as equações de movimento (4.83) e (4.84) a expressão para (E.27) se reduz a

$$\begin{aligned} S_I[\mathbf{x}, \alpha_c + \Delta] &= S_I[\mathbf{x}, \alpha_c] + \int_0^t \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\Delta^* \cdot \dot{\Delta} - \dot{\Delta}^* \cdot \Delta) + \hbar M \dot{\mathbf{x}} \sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} \Delta_{mn}^* \Delta_{kl} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{C}_{mn,kl} (\Delta_{mn} \Delta_{kl} + \Delta_{mn}^* \Delta_{kl}^*) - \hbar \sum_{mn} \omega_{mn} \Delta_{mn}^* \Delta_{mn} \right\} dt', \end{aligned} \quad (4.86)$$

ou em forma compacta

$$S_I[x, \alpha_c + \Delta] = S_I[x, \alpha_c] + f(t). \quad (4.87)$$

Então, usando este resultado, (4.80) pode ser escrita como

$$\Gamma_{\mathbf{x}\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha^*} \exp[\alpha^*(0)\alpha + \alpha^*(\alpha_c(t) + \Delta)] \exp \frac{i}{\hbar} (S_I[\mathbf{x}, \alpha_c] + f(t)) \mathcal{D}^2 \alpha, \quad (4.88)$$

onde $\alpha^*(0)$ e α são constantes. A expressão anterior pode ser reescrita introduzindo uma constante de normalização dependente do tempo, ou seja

$$\Gamma_{\mathbf{x}\alpha} = \frac{1}{C(t)} [\exp \alpha^* \alpha_c(t)] \left[\exp \frac{i}{\hbar} S_I[\mathbf{x}, \alpha_c] \right] \int_{\beta}^{\alpha^*} \mathcal{D}^2 \alpha, \quad (4.89)$$

$$\Gamma_{\mathbf{x}\alpha} = \frac{1}{C(t)} \exp \frac{i}{\hbar} (S_I[\mathbf{x}, \alpha_c]) \exp \alpha^* \alpha_c(t) \quad (4.90)$$

Procedendo de forma similar para a outra integral temporal que aparece em (4.78), podemos escrever o funcional influência como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} \rho_m(\beta^*, \gamma) \exp \frac{i}{\hbar} [S_I[\mathbf{x}, \alpha_c] - S_I[\mathbf{y}, \gamma_c]] \times \\ &\quad \exp \left\{ \alpha^* \alpha_c(t) + \gamma \gamma_c^*(t) - |\alpha|^2 - \frac{|\beta|}{2} - \frac{|\gamma|}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Podemos ainda fazer uso das equações de movimento (4.83) e (4.84) em S_I de forma tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} \rho_m(\beta^*, \gamma) \times \\ &\quad \exp \left\{ -|\alpha|^2 - \frac{|\beta|}{2} - \frac{|\gamma|}{2} + \alpha^* \alpha_c(t) + \gamma \gamma_c^*(t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Neste ponto, resta-nos somente o cálculo da forma explícita de ρ_m em termos dos estados coerentes antes de tentarmos calcular as integrais envolvidas no funcional de influência. A forma explícita de $\rho_m(\beta^*, \gamma)$ é calculada no Apêndice F, e pode ser escrita como

$$\rho_m(\beta^*, \gamma) = \prod_{mn} \frac{\exp \left\{ \beta_{mn}^* \gamma_{mn} \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) - \frac{|\beta_{mn}|^2}{2} - \frac{|\gamma_{mn}|^2}{2} \right\}}{\frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_{mn})}}. \quad (4.93)$$

Com este resultado o funcional de influência se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = & \frac{1}{Z} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \beta}{\pi} \int \frac{d^2 \gamma}{\pi} \exp \left\{ -|\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2 \right\} \times \\ & \exp \left\{ \alpha^* \alpha_c(t) + \gamma \gamma_c^*(t) \right\} \prod_{mn} \exp \left\{ \beta_{mn}^* \gamma_{mn} \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

onde Z é dada por (F.11). Sendo os estados coerentes apenas números complexos, as integrais que aparecem, mesmo não sendo triviais, podem ser tratadas adequadamente lembrando sempre que a expressão (4.94) foi obtida usando a aproximação de fase estacionária.

4.4.2 Integração do Funcional de Influência

Esta seção trata da obtenção de uma expressão final para o funcional de influência obtida em termos dos estados coerentes. Inicialmente, vamos estudar separadamente a forma do termo

$$\exp \left\{ \alpha^* \alpha_c(t) + \gamma \gamma_c^*(t) \right\} \quad (4.95)$$

quando se usam as soluções das equações de movimento obtidas no Apêndice G. Como foi demonstrado as soluções podem ser escritas em forma genérica como

$$\alpha_{mn}(\tau) = \alpha'_{mn} + \sum_{mn \neq kl} \widehat{W}_{mn,kl}(\tau) \alpha'_{kl} \quad (4.96)$$

$$\alpha_{mn}^*(\tau) = \alpha_{mn}^* + \sum_{mn \neq kl} \left(\widehat{W}_{mn,kl}^{t_0}(\tau) \alpha'_{kl} \right)^* \quad (4.97)$$

Então, teremos que

$$\exp \left\{ \alpha^* \alpha_c(t) \right\} = \exp \left\{ \sum_{mn,kl} \left[\delta_{mn,kl} + \widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{x}] \right] \alpha_{mn}^* \beta_{kl} \right\} \quad (4.98)$$

$$\exp \left\{ \gamma \gamma_c^*(t) \right\} = \exp \left\{ \sum_{nm} \left[\delta_{mn,kl} + \widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{y}] \right] \alpha_{mn} \gamma_{kl}^* \right\}. \quad (4.99)$$

Usando estas expressões o funcional de influência se escreve como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \frac{1}{Z} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \exp \left\{ -|\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2 \right\} \times \\ &\exp \left\{ \sum_{mn,kl} \left[\delta_{mn,kl} + \widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{x}] \right] \alpha_{mn}^* \beta_{kl} \right\} \times \\ &\exp \left\{ \sum_{mn,kl} \left[\delta_{mn,kl} + \widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{y}] \right] \alpha_{mn} \gamma_{kl}^* \right\} \times \\ &\prod_{mn} \exp \left\{ \beta_{mn}^* \gamma_{mn} \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

É conveniente fazermos as substituições

$$J_{mn}^*[\mathbf{x}] = \sum_{kl} \left[\delta_{mn,kl} + \widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{x}] \right] \alpha_{kl}^*, \quad (4.101)$$

$$J_{mn}[\mathbf{y}] = \sum_{kl} \left[\delta_{mn,kl} + \widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{y}] \right] \alpha_{kl}, \quad (4.102)$$

que nos permite escrever $\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \frac{1}{Z} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \exp \left\{ -|\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2 \right\} \times \\ &\prod_{mn} \exp \left(\exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \beta_{mn}^* \gamma_{mn} + J_{mn}^*[\mathbf{x}] \beta_{mn} + J_{mn}[\mathbf{y}] \gamma_{mn}^* \right) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Na expressão (4.103) é possível estudar separadamente o termo

$$\Xi_\beta = \int \prod_{mn} \exp \left(\exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \beta_{mn}^* \gamma_{mn} + J_{mn}^*[\mathbf{x}] \beta_{mn} - |\beta_{mn}|^2 \right) \frac{d^2\beta}{\pi}, \quad (4.104)$$

que, ao escrevermos β_{mn} em função das partes real e imaginária ($\beta_{mn} = x + iy$), se transforma em

$$\begin{aligned} \Xi_\beta &= \frac{1}{\pi} \prod_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -|x|^2 + (J_{mn}^*[\mathbf{x}] + \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \gamma_{mn}) x \right\} dx \times \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -|y|^2 - i (J_{mn}^*[\mathbf{x}] - \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \gamma_{mn}) y \right\} dy. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-ax^2 + bx \right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \frac{b^2}{4a}, \quad (4.106)$$

obtemos

$$\Xi_\beta = \prod_{mn} \exp \left(\gamma_{mn} J_{mn}^*[\mathbf{x}] \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) \right), \quad (4.107)$$

o que nos permite escrever $\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ como

$$\mathcal{F}[x, y] = \frac{1}{Z} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \exp\{-|\alpha|^2 - |\gamma|^2\} \times \prod_n \exp(J_n[\mathbf{y}]\gamma_n^* + \exp(-\beta\hbar\omega_n)J_n^*[\mathbf{x}]\gamma_n) \quad (4.108)$$

Escrevendo agora γ em função de suas partes real e imaginária ($\gamma = x + iy$) e usando novamente (4.106) o funcional de influência se transforma em

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{Z} \int \exp\left(-|\alpha_{mn}|^2 + J_{mn}^*[\mathbf{x}]J_{mn}[\mathbf{y}] \exp(-\beta\hbar\omega_{mn})\right) \frac{d^2\alpha}{\pi} \quad (4.109)$$

Para completar o nosso cálculo devemos substituir (4.101) e (4.102) na expressão anterior, de onde se obtém

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{Z} \int \exp\left(-\sum_{mn,kl} \alpha_{mn}^* M_{mn,kl} \alpha_{kl}\right) \frac{d^2\alpha}{\pi}, \quad (4.110)$$

onde,

$$M_{mn,kl} = \left[\mathbf{1} - (\mathbf{1} + W[\mathbf{y}]) \mathcal{D} (\mathbf{1} + W^\dagger[\mathbf{x}])\right]_{mn,kl}, \quad (4.111)$$

$$W_{mn,kl}[\mathbf{y}] = \widehat{W}_{kl,mn}[\mathbf{y}], \quad W_{mn,kl}^\dagger[\mathbf{x}] = \widehat{W}_{kl,mn}^*[\mathbf{x}], \quad \mathcal{D}_{mn} = \exp(-\beta\hbar\omega_{mn}). \quad (4.112)$$

Por outro lado, sabe-se [85] que

$$\int \exp\left(-\sum_{mn,kl} \alpha_{mn}^* M_{mn,kl} \alpha_{kl}\right) \frac{d^2\alpha}{\pi} = [\det M_{mn,kl}]^{-1}, \quad (4.113)$$

o que nos permite reduzir o funcional de influência (4.110) a

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{Z} [\det M]^{-1}. \quad (4.114)$$

Podemos avançar ainda mais na simplificação desta expressão notando que

$$\det M = \exp(\text{Tr} \ln M_{mn,kl}). \quad (4.115)$$

Explicitamente,

$$\det M = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{mn} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha} \left[(\mathbf{1} + W[\mathbf{y}]) \mathcal{D} (\mathbf{1} + W^\dagger[\mathbf{x}])\right]_{mn,mn}^\alpha\right\}, \quad (4.116)$$

ou ainda escrevendo

$$\left[(\mathbf{1} + W[\mathbf{y}]) \mathcal{D} (\mathbf{1} + W^\dagger[\mathbf{x}])\right]^\alpha = [\mathcal{D} (\mathbf{1} + \Gamma)]^\alpha, \quad (4.117)$$

onde

$$\Gamma = W[\mathbf{y}] + W^\dagger[\mathbf{x}] + W[\mathbf{y}]W^\dagger[\mathbf{x}], \quad (4.118)$$

teremos

$$\det M = \exp \left\{ Tr \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha} (\mathcal{D}(\mathbf{1} + \Gamma))^\alpha \right\}. \quad (4.119)$$

Portanto, usando a expressão para a expansão da função logaritmo, teremos que

$$\det M = \exp Tr \ln (\mathbf{1} - \mathcal{D}(\mathbf{1} + \Gamma)) = \det (\mathbf{1} - \mathcal{D}(\mathbf{1} + \Gamma)) \quad (4.120)$$

Ao substituirmos esta expressão em (4.114) e escrevermos a função de partição (F.11) em termos de D , o funcional de influência pode ser escrito em forma compacta como

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{\det(\mathbf{1} - \mathcal{D})}{\det(\mathbf{1} - \mathcal{D}(\mathbf{1} + \Gamma))}. \quad (4.121)$$

Escrevendo ainda a expressão anterior na forma

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{\det \left(\mathbf{1} - \frac{\mathcal{D}}{1-\mathcal{D}} \Gamma \right)}, \quad (4.122)$$

e possível introduzir o número médio de partículas no estado mn , pois

$$\frac{\mathcal{D}}{1-\mathcal{D}} = \bar{N}_{mn} = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_{mn}) - 1}. \quad (4.123)$$

Desta forma conseguimos escrever o funcional de influência em forma compacta como

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{\det \left(\mathbf{1} - \bar{N}_{mn} \Gamma_{mn,kl} \right)}, \quad (4.124)$$

onde

$$\Gamma_{mn,kl} = W_{mn,kl}[\mathbf{y}] + W_{mn,kl}^\dagger[\mathbf{x}] + W_{mn,ij}[\mathbf{y}] W_{ij,kl}^\dagger[\mathbf{x}]. \quad (4.125)$$

As expressões explícitas das matrizes $W_{mn,kl}$ se obtém partindo das equações integrais (ver Apêndice G)

$$\widehat{W}_{mn,kl}^*[\mathbf{x}(\tau)] = \int_t^\tau W_{mn,kl}^{t_0}[\mathbf{x}(\tau')] d\tau' + \int_t^\tau \sum_{ij \neq mn} W_{mn,ij}^{t_0}[\mathbf{x}(\tau')] \widehat{W}_{ij,kl}^*[\mathbf{x}(\tau')] d\tau' \quad (4.126)$$

$$\widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{y}(\tau)] = \int_0^\tau W_{mn,kl}^0[\mathbf{y}(\tau')] d\tau' + \int_0^\tau \sum_{ij \neq mn} W_{mn,ij}^0[\mathbf{y}(\tau')] \widehat{W}_{ij,kl}[\mathbf{y}(\tau')] d\tau' \quad (4.127)$$

Podemos simplificar o cálculo do funcional de influência tomando apenas os primeiros termos da série que se obtém ao desenvolver a expressão (4.124). Esta aproximação concorda com o fato de estarmos lidando com baixas energias, esperando que os primeiros termos da série sejam suficientes para captar a essência do fenômeno do decaimento no movimento do skyrmion. Portanto,

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \exp \left\{ Tr \left(\bar{N}_{mn} \Gamma_{mn,kl} + \frac{1}{2} \left(\bar{N}_{mn} \Gamma_{mn,kl} \right)^2 + \dots \right) \right\}, \quad (4.128)$$

que usando a definição (4.125) se escreve como

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \approx \exp \left(\sum_{mn} \bar{N}_{mn} \Gamma_{mn,mn} + \frac{1}{2} \sum_{mn,ij} \bar{N}_{mn} \bar{N}_{ij} \Gamma_{mn,ij} \Gamma_{ij,mn} \right). \quad (4.129)$$

Neste ponto, levado em conta que estamos envolvidos com processos de baixas energias, podemos escrever soluções aproximadas para (4.126) e (4.127) usando o método iterativo até primeira ordem.

Desta forma

$$\widehat{W}_{mn,kl}^*[\mathbf{x}(\tau)] \approx \int_t^\tau W_{mn}^{t_0}[\mathbf{x}(\tau')] d\tau' + \sum_{ij} \int_t^\tau \int_t^{\tau'} W_{mn,ij}^{t_0}[\mathbf{x}(\tau')] W_{ij,kl}^{t_0}[\mathbf{x}(\tau'')] d\tau'' d\tau' + \dots \quad (4.130)$$

$$\widehat{W}_{mn,kl}[\mathbf{y}(\tau)] = \int_0^\tau W_{mn,kl}^0[\mathbf{y}(\tau')] d\tau' + \sum_{ij} \int_0^\tau \int_0^{\tau'} W_{mn,ij}^0[\mathbf{y}(\tau')] W_{ij,kl}^0[\mathbf{y}(\tau'')] d\tau'' d\tau' + \dots \quad (4.131)$$

Usando então as definições (ver Apêndice G)

$$W_{mn,kl}^0(\tau) = i\dot{\mathbf{x}} \left(\mathbf{D}_{mn,kl} e^{-i(\omega_{kl}-\omega_{mn})\tau} + 2\mathbf{C}_{mn,kl} e^{i(\omega_{kl}+\omega_{mn})\tau} \right) \quad (4.132)$$

$$W_{mn,kl}^{t_0}(\tau) = i\dot{\mathbf{x}} \left(\mathbf{D}_{mn,kl} e^{-i(\omega_{kl}-\omega_{mn})(\tau-t_0)} + 2\mathbf{C}_{mn,kl} e^{i(\omega_{kl}+\omega_{mn})(\tau-t_0)} \right), \quad (4.133)$$

em (4.130) e (4.131), o funcional de influência (4.129) depois de alguma álgebra se transforma finalmente em

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = e^{\frac{i}{\hbar}(\Phi^I + \Psi^I)} e^{-\frac{1}{\hbar}(\Phi^R + \Psi^R)}. \quad (4.134)$$

Na expressão anterior usamos as seguintes definições,

$$\Phi^R = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left[\dot{x}_i(t') + \dot{y}_i(t') \right] \Gamma_{i,j}^R(t' - t'') \left[\dot{x}_j(t'') - \dot{y}_j(t'') \right] \right\}, \quad (4.135)$$

$$\Phi^I = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left[\dot{x}_i(t') + \dot{y}_i(t') \right] \Gamma_{i,j}^I(t' - t'') \left[\dot{x}_j(t'') - \dot{y}_j(t'') \right] \right\}, \quad (4.136)$$

$$\Psi^R = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_{i,j=1}^2 \left[\dot{x}_i(t'') \Delta_{i,j}^R(t' - t'') \dot{y}_j(t') - \dot{x}_i(t') \Delta_{i,j}^R(t' - t'') \dot{y}_j(t'') \right], \quad (4.137)$$

$$\Psi^I = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_{i,j=1}^2 \left[\dot{x}_i(t'') \Delta_{i,j}^I(t' - t'') \dot{y}_j(t') + \dot{x}_i(t') \Delta_{i,j}^I(t' - t'') \dot{y}_j(t'') \right]. \quad (4.138)$$

Em (4.135)-(4.138) (x_1, x_2) e (y_1, y_2) descrevem a posição do centro de massa do skyrmion em instantes diferentes. Por outro lado, $\Gamma_{i,j}$ e $\Delta_{i,j}$ são matrizes 2×2 que envolvem as componentes do vetor $\mathbf{G}_{mn,kl}$ introduzido em (4.46). Explicitamente

$$\Gamma_{i,j}^R(t) = \sum_{mn,kl} \frac{(\bar{N}_{mn} + \bar{N}_{kl} + 2\bar{N}_{mn}\bar{N}_{kl})(\omega_{mn} + \omega_{kl})^2}{2\omega_{mn}\omega_{kl}} \mathcal{M}_{i,j}(mn, kl) \cos(\omega_{kl} - \omega_{mn})t, \quad (4.139)$$

$$\Gamma_{i,j}^I(t) = \sum_{mn,kl} \frac{(\bar{N}_{mn} - \bar{N}_{kl})(\omega_{mn} + \omega_{kl})^2}{2\omega_{mn}\omega_{kl}} \mathcal{M}_{i,j}(mn, kl) \sin(\omega_{kl} - \omega_{mn})t, \quad (4.140)$$

$$\Delta_{i,j}^R(t) = \sum_{mn,kl} \frac{(\bar{N}_{mn} + \bar{N}_{kl} + 2\bar{N}_{mn}\bar{N}_{kl})(\omega_{mn} - \omega_{kl})^2}{2\omega_{mn}\omega_{kl}} \mathcal{M}_{i,j}(mn, kl) \cos(\omega_{kl} + \omega_{mn})t, \quad (4.141)$$

$$\Delta_{i,j}^I(t) = \sum_{mn,kl} \frac{(\bar{N}_{mn} + \bar{N}_{kl} + 2\bar{N}_{mn}\bar{N}_{kl})(\omega_{mn} - \omega_{kl})^2}{2\omega_{mn}\omega_{kl}} \mathcal{M}_{i,j}(mn, kl) \sin(\omega_{kl} + \omega_{mn})t, \quad (4.142)$$

onde

$$\mathcal{M}_{i,j} = \begin{pmatrix} |G_{mn,kl}^{(1)}|^2 & 0 \\ 0 & |G_{mn,kl}^{(2)}|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.143)$$

Aqui $G_{mn,kl}^{(1),(2)}$ são as componentes do vetor $\mathbf{G}_{mn,kl}$. Desta forma concluímos o cálculo do funcional de influência, o que nos permite então escrever uma ação efetiva para o skyrmion e estudar a equação de movimento efetiva que o caracteriza, o que passaremos a fazer a seguir.

4.5 Dinâmica do Skyrmion

4.5.1 Equação de Movimento

Nesta seção estudaremos a dinâmica do skyrmion e como ela é influenciada pela temperatura. Para começar substituímos (4.134) em (4.79), e desta forma o superpropagador para o skyrmion pode ser escrito como

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x} \int_{\mathbf{y}'}^{\mathbf{y}} \mathcal{D}\mathbf{y} e^{i\bar{\mathcal{S}}[\mathbf{x},\mathbf{y}] + \hbar(\Phi^R - \Psi^R)}, \quad (4.144)$$

onde

$$\bar{\mathcal{S}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = S_0[\mathbf{x}] - S_0[\mathbf{y}] + \hbar(\Phi^I + \Psi^I). \quad (4.145)$$

A expressão anterior não é mais que a ação reduzida para os skyrmions depois de traçar as coordenadas dos mágnons. Esta ação contém a informação da interação skyrmion-mágnon e, portanto, a equação de movimento gerada pela mesma deverá descrever o movimento efetivo do centro

de massa do skyrmion em função de parâmetros que caracterizam o meio. Antes de analisar o movimento efetivo que descreve o skyrmion, é conveniente escrever (4.145) em termos de um novo conjunto de variáveis, $\mathbf{R} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ e $\mathbf{r} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})$. As equações de movimento associadas à ação $\overline{S}[\mathbf{R}, \mathbf{r}]$ podem ser escritas como

$$\ddot{R}_i(t) + \int_0^t \gamma_{i,j}(t-t') \dot{R}_j(t') dt' = 0, \quad (4.146)$$

$$\ddot{r}_i(t) - \int_0^t \gamma_{i,j}(t-t') \dot{r}_j(t') dt' = 0, \quad (4.147)$$

onde introduzimos a matriz de decaimento, $\gamma_{i,j}(t-t')$, que em geral descreve a forma que possui a mobilidade dos sólitons em 2-D. Em termos das expressões (4.140), (C.10) e (4.143) a matriz $\gamma_{i,j}$ é dada pela relação

$$\gamma_{i,j}(t-t') = -\frac{2\hbar}{M} \frac{d}{dt} \left\{ \Gamma_{i,j}^I(t-t') + \Delta_{i,j}^I(t-t') \right\}. \quad (4.148)$$

As equações de movimento (4.146) e (4.147) são uma generalização daquelas que caracterizam a dinâmica de um sóliton em 1-D e que correspondem ao movimento Browniano quântico [10]. As diferenças fundamentais são que o tratamento até aqui apresentado permite o estudo de excitações topológicas em 2-D e ao mesmo tempo inclui a possibilidade da emissão ou absorção de mesons (mágnons no nosso caso) pelo sóliton (skyrmion). Por outro lado, como em [10], a parte real do expoente em (4.145) está associada à matriz de difusão

$$D_{i,j}(t) = \hbar \frac{d^2}{dt^2} (\Gamma_{i,j}^R + \Delta_{i,j}^R), \quad (4.149)$$

que pode ser calculada seguindo a idéia que apresentaremos em seguida para o cálculo da matriz de decaimento.

Voltando ao análise de (4.148), é conveniente escrever $\gamma_{i,j}(t-t')$ como a soma de dois termos,

$$\gamma_{i,j}(t-t') = \gamma_{i,j}^E(t-t') + \gamma_{i,j}^I(t-t'), \quad (4.150)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}^E &= \frac{\hbar}{M} \sum_{mn,kl} \frac{(\overline{N}_{mn} - \overline{N}_{kl})(\omega_{mn} + \omega_{kl})^2(\omega_{kl} - \omega_{mn})}{2\omega_{mn}\omega_{kl}} \times \\ &\mathcal{M}_{i,j}(mn,kl) \cos [(\omega_{kl} - \omega_{mn})(t-t')], \end{aligned} \quad (4.151)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}^I &= \frac{2\hbar}{M} \sum_{mn,kl} \frac{(\overline{N}_{mn} + \overline{N}_{kl} + 2\overline{N}_{mn}\overline{N}_{kl})}{\omega_{mn}\omega_{kl}} \mathcal{M}_{i,j}(mn,kl) \times \\ &(\omega_{mn} - \omega_{kl})^2 (\omega_{kl} + \omega_{mn}) \cos [(\omega_{kl} + \omega_{mn})(t - t')]. \end{aligned} \quad (4.152)$$

Como podemos ver em (4.46) e (4.143) a matriz $\mathcal{M}_{i,j}$ envolve essencialmente os elementos de matriz do operador momento entre dois estados de onda de spin ferromagnéticas dadas pela expressão (4.22). Portanto, em analogia com a função espectral introduzida em [46] definiremos a matriz 2×2 função de espalhamento, $S_{i,j}$, como

$$S_{i,j}(\omega, \omega') = \sum_{mn,kl} \mathcal{M}_{i,j}(mn,kl) \delta(\omega - \omega_{mn}) \delta(\omega' - \omega_{kl}). \quad (4.153)$$

A definição anterior nos permite reescrever as contribuições $\gamma_{i,j}^I$ e $\gamma_{i,j}^E$ presentes na função de decaimento como

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}^E(t) &= \frac{\hbar}{M} \Theta(t) \int d\omega \int d\omega' S_{i,j}(\omega, \omega') (\overline{N}(\omega) - \overline{N}(\omega')) \times \\ &\frac{(\omega + \omega')^2 (\omega' - \omega)}{\omega\omega'} \cos(\omega' - \omega)t, \end{aligned} \quad (4.154)$$

que como veremos adiante envolve somente processos de espalhamento elástico,

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}^I(t) &= \frac{2\hbar}{M} \Theta(t) \int d\omega \int d\omega' \frac{S_{i,j}(\omega, \omega') (\omega - \omega')^2 (\omega' + \omega)}{\omega\omega'} \times \\ &[\overline{N}(\omega) + \overline{N}(\omega') + 2\overline{N}(\omega)\overline{N}(\omega')] \cos(\omega + \omega')t, \end{aligned} \quad (4.155)$$

que está relacionada com os processos de absorção e emissão de mágnons quando levamos em consideração transições entre estados com diferentes energias. Portanto, nos referiremos a esta contribuição como inelástica. Convém destacar também que em (4.154) e (4.155), $\Theta(t)$ assegura o principio de causalidade.

Neste ponto, só nos resta o cálculo explicito das contribuições que compõem a matriz de decaimento para o caso específico dos skyrmions, pois os resultados obtidos até aqui são válidos sempre que se estuda a dinâmica de um sóliton em 2 dimensões espaciais.

4.5.2 A Matriz de Decaimento

Em primeiro lugar analisaremos a contribuição $\gamma_{i,j}^I(t)$ ao movimento dissipativo do skyrmion. Da expressão (4.155) vemos que para tempos longos o termo $\cos(\omega' + \omega)t$ oscila rapidamente,

dando uma contribuição nula para a matriz de decaimento. Isto acontece a menos que $\omega' + \omega$ seja praticamente nula, o que ocorre ao mesmo tempo que o fator $(\omega - \omega')^2$ faz com que esta contribuição possa ser desprezada. Portanto, até primeira ordem na solução de (4.127), a contribuição inelástica $\gamma_{i,j}^I(t)$ pode ser desprezada.

Por outro lado, a análise de (4.154) simplifica-se se mudamos as variáveis de frequência ω e ω' para $\varphi = (\omega' + \omega)/2$ e $\eta = (\omega' - \omega)$. Desta forma

$$\gamma_{i,j}^E(t) = \frac{2\hbar}{M} \Theta(t) \int_0^\infty d\varphi \int_{-\infty}^\infty d\eta S_{i,j}(\varphi, \eta) \eta^2 f(\varphi, \eta) \frac{\overline{N}(\varphi + \eta/2) - \overline{N}(\varphi - \eta/2)}{\eta} \cos(\eta t). \quad (4.156)$$

onde

$$f(\varphi, \eta) = 2 + \frac{\varphi + \eta/2}{\varphi - \eta/2} + \frac{\varphi - \eta/2}{\varphi + \eta/2}. \quad (4.157)$$

Como em (4.155), a expressão (4.156) se anula para tempos longos devido às rápidas oscilações do termo $\cos(\eta t)$ a menos que η seja próximo de zero. Neste caso, $f(\varphi, \eta)$ pode ser tomado como constante e

$$\frac{\overline{N}(\varphi + \eta/2) - \overline{N}(\varphi - \eta/2)}{\eta} \approx \frac{\partial \overline{N}(\varphi)}{\partial \varphi}. \quad (4.158)$$

Portanto, na aproximação de tempo longo, (4.156) adota a forma

$$\gamma_{i,j}^E(t) = \frac{8\hbar}{M} \Theta(t) \int_0^\infty d\varphi \int_{-\infty}^\infty d\eta A_{i,j}(\varphi) \frac{\partial \overline{N}(\varphi)}{\partial \varphi} \cos(\eta t), \quad (4.159)$$

onde introduzimos a função $A_{i,j}(\varphi)$ definida como

$$A_{i,j}(\varphi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} S_{i,j}(\varphi, \eta) \eta^2. \quad (4.160)$$

Agora, usando (4.123) e integrando (4.159) em $d\eta$ teremos que

$$\gamma_{i,j}^E(t) = \overline{\gamma}_{i,j}(T) \delta(t), \quad (4.161)$$

onde $\overline{\gamma}_{i,j}(T)$ é a matriz de decaimento dependente da temperatura que caracteriza a mobilidade dos sólitons em 2-D e se escreve como

$$\overline{\gamma}_{i,j}(T) = \frac{8\hbar}{M} \int_0^\infty \frac{e^{\beta(g\mu_B B + \hbar\varphi)}}{(1 - e^{\beta(g\mu_B B + \hbar\varphi)})^2} A_{i,j}(\varphi) d\varphi, \quad (4.162)$$

e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. Como é usual, nos referiremos à contribuição (4.161) como Markoviana, pois possui memória instantânea, ou seja, não depende do movimento prévio da partícula. Com o objetivo de computar a expressão (4.161) devemos calcular a função de espalhamento

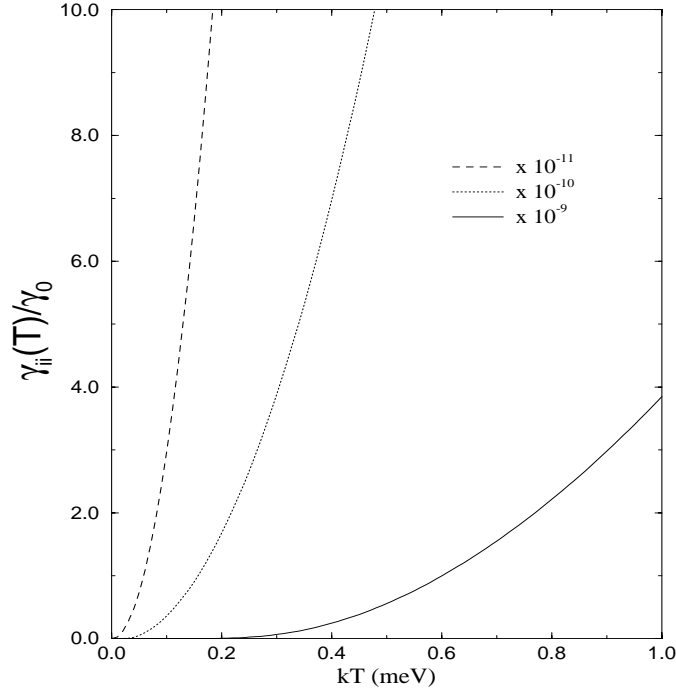


Figura 4.1: Coeficiente de decaimento em função da temperatura para valores diferentes do fator de Landé. A linha sólida corresponde ao caso em que $g = 0.25$, as linha descontinua e pontilhada aos casos em que $g = 0.025$ e $g = 0.0025$ respectivamente.

$S_{i,j}(\varphi, \eta)$. Para isso o primeiro passo será obter uma expressão analítica para $S_{i,j}(\omega, \omega')$ para posteriormente passar às novas variáveis φ, η e assim tomar o limite (4.160). Seguindo esta idéia, no Apêndice H se mostra que

$$A_{i,i}(\varphi) = \left(\frac{\pi M}{\hbar} \right)^2 \mathcal{G}(\varphi) \varphi^2 \quad (4.163)$$

onde

$$\mathcal{G}(\varphi) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2(\delta_{m+1} - \delta_m), \quad (4.164)$$

e os desvios de fase δ_m para cada componente do momento angular m são também funções de φ . Portanto, a matriz de decaimento (4.162) pode ser escrita como

$$\bar{\gamma}_{ii} = \left(\frac{8\pi^2 M}{\hbar} \right) e^{\beta g \mu_B B} \int_0^{\infty} \frac{\varphi^2 e^{\beta \hbar \varphi} \mathcal{G}(\varphi)}{(e^{\beta(g \mu_B B + \hbar \varphi)} - 1)^2} d\varphi. \quad (4.165)$$

Para obter a dependência explícita da expressão anterior com a temperatura devemos calcular numericamente as integrais que definem os desvios de fase (4.26)-(4.29). Isto foi feito para um campo magnético externo $B = 9T$ e para três valores diferentes do fator de Landé (g) (ou tamanho

do skyrmion). O resultado obtido aparece na Figura 4.1 para qualquer valor de temperatura em unidades de $\gamma_0 = \pi^2 \hbar^2 / 32 M^2 \lambda^4$. Nas três situações apresentadas, devido ao pequeno valor da energia de Zeeman (0.13 meV, 0.013 meV e 0.0013 meV) os estados de mágnons são excitados, mesmo a baixas temperaturas, provocando que a constante de decaimento seja sempre finita. Por outro lado se observa que para temperaturas muito altas, o valor da constante de decaimento cresce linearmente. Este resultado como já vimos no estudo da parede de Bloch pode ser obtido diretamente da expressão (4.165)

$$\bar{\gamma}_{ii} = \frac{M}{\hbar^3} \left(\int_0^\infty \mathcal{G}(\varphi) d\varphi \right) \frac{1}{\beta}, \quad (4.166)$$

que é linear em T independente da forma específica de $\mathcal{G}(\varphi)$.

4.6 Conclusões

Como foi demonstrado, o uso do método das coordenadas coletivas da teoria quântica de campos nos permite obter uma descrição da mobilidade do skyrmion em função da temperatura. A formulação geral para sistemas bidimensionais apresentada mostrou que na aproximação de tempo longo somente os termos elásticos, na interação da excitação com as flutuações do meio são de interesse.

Por outro lado demonstrou-se que a mobilidade do skyrmion para altas temperaturas é linear e que para as temperaturas baixas (mas ainda acima da energia de Zeeman) se comporta como T^α , onde α é um coeficiente que depende do fator de Landé.

Apesar de ter estudado explicitamente o problema da dinâmica dos QHS, a descrição utilizada para este caso particular pode ser usada para sistemas bidimensionais em geral e, portanto, para qualquer generalização ou extensão do modelo sigma não linear.

Para avaliar a relevância que os nossos resultados possam ter do ponto de vista experimental propomos uma experiência que seja influenciada pela dinâmica dos QHS. A este tema dedicaremos o próximo capítulo.

Capítulo 5

Dinâmica dos Skyrmions e Espalhamento de Neutrons

Neste capítulo se estudará a influência da dinâmica dos QHS na experiência de espalhamento de neutrons. Mostraremos ainda como caráter dissipativo do seu movimento afeta os resultados gerais.

5.1 Introdução

Como foi demonstrado nos capítulos anteriores, a dinâmica do skyrmion é similar à de uma partícula Browniana com um fator de decaimento dependente da temperatura e memória puramente local, ou instantânea. Porém, para verificar se estas previsões teóricas têm alguma influência do ponto de vista prático, se faz imprescindível propor uma experiência capaz de determinar o tipo de lei de movimento que rege a dinâmica destas excitações e assim verificar a validade da nossa teoria.

Para o estudo da dinâmica do skyrmion no sistema de Hall foi usado um modelo em que o 2DEG, para $T \neq 0$, era composto fundamentalmente por dois tipos de excitações de naturezas diferentes. Por um lado as excitações localizadas, de origem puramente topológica, não interagentes entre si e conhecidas como skyrmions ou texturas carregadas de spin (CST). Por outro, as ondas de spin ou mágnons, que são excitações completamente deslocalizadas, sem interação entre si e acopladas com as CST via transferência de momentum. Este modelo lembra em certa medida, o de uma partícula de massa considerável submersa em um líquido (partícula Browniana). Esta analogia sugere o uso de uma técnica experimental capaz de detectar a difusão de uma partícula, ou quasi-partícula, em

um meio. Nestas situações, uma das técnicas usadas com sucesso é o espalhamento de neutrons. A técnica de espalhamento de neutrons tornou possível o estudo de diversos fenômenos, que vão desde a difusão de hidrogênio em metais, até as excitações elementares no estado líquido do ^3He , ^4He e misturas de ambos.

Como é conhecido, os neutrons são partículas de massa $1.675 \times 10^{-27} \text{Kg}$ que não possuem carga elétrica, têm spin $1/2$ e momento magnético igual -1.913 vezes o momentum magnético do núcleo. Os neutrons são geralmente obtidos por um processo de fissão nuclear do ^{235}U enriquecido. Este processo realiza-se em um reator nuclear de onde inicialmente se obtém neutrons de altas energias. Estes neutrons primários são posteriormente ‘freitados’ ao passarem por meios diferentes, ou materiais moderadores, até atingir a energia necessária para a realização dos experimentos. Usualmente nas experiências de física da matéria condensada, usam-se neutrons térmicos, ou seja, neutrons em equilíbrio térmico com o material moderador que acha-se a uma temperatura próxima da ambiente. Os neutrons térmicos possuem um espectro de Maxwell-Boltzman com um máximo em torno de 25meV e um comprimento de onda de aproximadamente 1.8\AA .

A técnica de espalhamento consiste basicamente em fazer incidir sobre o sistema em estudo um feixe de neutrons previamente caracterizado. Após a interação feixe-sistema, é possível obter, usando um detector, a distribuição dos neutrons emergentes em função da energia e do momento. Como veremos mais adiante, esta função de distribuição carrega informações da estrutura interna e das propriedades dinâmicas do sistema.

A proposta da técnica de espalhamento, para determinar experimentalmente o tipo de dinâmica que possuem os skyrmions, está intimamente ligada a certas propriedades intrínsecas dos neutrons e da sua interação com a matéria. Como vantagens desta escolha podemos citar a ausência de carga elétrica e o momento magnético não nulo. Estas características determinam basicamente que a interação entre os materiais magnéticos e os neutrons seja de caráter magnético. Ao mesmo tempo, o comprimento de onda dos neutrons pode ser facilmente variável, dependendo das características do material moderador, o que permite escolher as excitações que serão reveladas durante a experiência. Este conjunto de propriedades tornaram possível o estudo de estruturas e de excitações de natureza magnética como, por exemplo, o espectro de mágnons em certos materiais magnéticos [81] e a caracterização de domínios magnéticos [82]. Por outro lado, os neutrons são pouco absorvidos pela matéria, o que possibilita a realização de experiências, mesmo com amostras de volume considerável. Outro ponto importante é o fato da energia do feixe de neutrons poder ser sintonizada entre 1 e

50 meV, pois é justamente neste intervalo de energias que aparecem as excitações elementares nos sólidos e líquidos. Esta característica possibilita adequar o comprimento de onda dos neutrons ao comprimento ou tamanho das excitações sob estudo. No nosso caso, os skyrmions são excitações com um tamanho maior que 60\AA (para um campo magnético de $9T$) e, portanto, com neutrons de aproximadamente 1meV , com comprimento de onda de 9\AA , a estrutura da rede atômica não será revelada, porém as excitações topológicas sim. Por último, a natureza fraca da interação entre os neutrons térmicos e a matéria, permite o estudo teórico do problema do espalhamento usando a série de Born até primeira ordem. Este fato simplifica de forma notável a obtenção da seção de choque diferencial teórica e, portanto, a interpretação dos resultados experimentais.

Esclarecidos os pontos fundamentais que nos levam a propor o espalhamento de neutrons com o intuito de verificar a dinâmica dos QHS no 2DEG passamos em seguida a apresentar a formulação do problema em termos da função de correlação.

5.2 Espalhamento de Neutrons e Funções de Correlação

Suponha um sistema \mathcal{A} submetido à interação com um feixe de partículas (neutrons no nosso caso) como aparece na figura 1. Inicialmente as partículas acham-se suficientemente afastadas de \mathcal{A} de forma tal que o sistema composto é não interagente e portanto pode ser descrito pelo produto direto $|\psi_i\rangle \otimes |k_i m_i\rangle$ onde, k_i denota o momentum do estado dos neutrons, m_i a projeção do spin na direção \mathbf{z} e ψ_i corresponde ao estado de \mathcal{A} antes da colisão. Depois da colisão feixe-amostra os neutrons emergentes podem ter energia igual ou diferente que os incidentes. Estas duas situações correspondem ao espalhamento elástico ou inelástico, respectivamente, e podem ser estudadas separadamente com o simples ajuste do detector.

Para o estudo teórico da experiência de espalhamento, vamos supor que a interação entre o feixe de neutrons e o sistema \mathcal{A} possa ser escrita como

$$\mathcal{H}_i = \int \hat{\Lambda}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \hat{S}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3, \quad (5.1)$$

onde \mathbf{r} e \mathbf{R} denotam as posições dentro do sistema \mathcal{A} e das partículas do feixe de neutrons respectivamente, $\hat{\Lambda}$ é o operador de spin dos neutrons e \hat{S} é o operador densidade de spin dos skyrmions.

Como foi apontado inicialmente, a interação neutron-sistema é fraca e portanto a probabilidade de transição entre dois estados, que chamaremos inicial (i) e final (f), pode ser calculada usando a

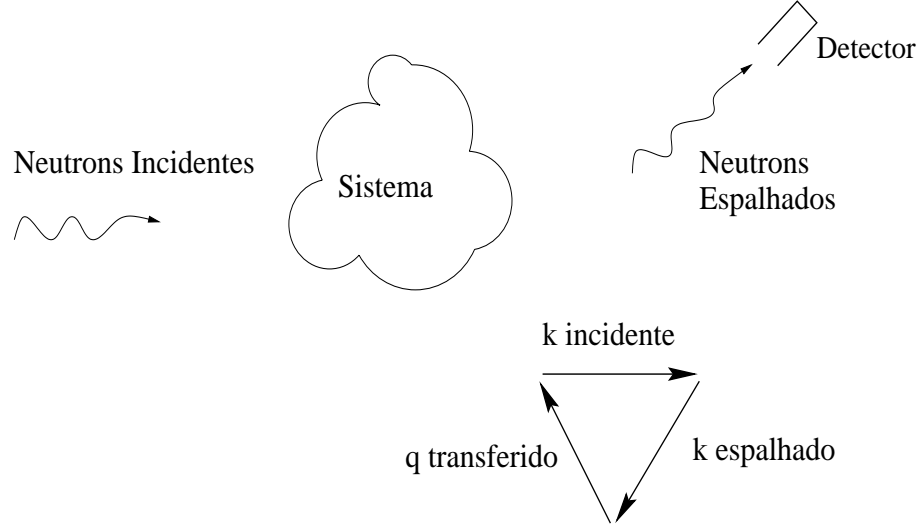


Figura 5.1: Representação gráfica geral de uma experiência de espalhamento. O momento transferido para o sistema é simplesmente $\mathbf{q}=\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f$.

regra de ouro de Fermi, ou seja

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle|^2 \delta(E_f^{tot} - E_i^{tot}), \quad (5.2)$$

onde $E_{i(f)}^{tot}$ são as energias inicial e final do sistema composto. Como foi dito anteriormente a experiência é montada de forma que nos estados inicial e final, o feixe de neutrons acha-se suficientemente afastado do sistema \mathcal{A} . Então, o elemento de matriz $\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle$ que aparece na expressão anterior pode ser calculado como

$$\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle = \int \langle k_i m_i | \hat{\Lambda}(R - r) | k_f m_f \rangle \cdot \langle \psi_i | \hat{S}(r) | \psi_f \rangle dr^3. \quad (5.3)$$

Usando o fato da ausência de interação feixe-sistema nos estados inicial e final podemos assumir, com boa aproximação, que os estados $|k_{i,f}\rangle$ são ondas planas. Logo, a expressão (5.3) pode ser escrita como

$$\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle = \int dr^3 \int dk^3 e^{-iqR} \langle m_i | \hat{\Lambda}(R - r) | m_f \rangle \cdot \langle \psi_i | \hat{S}(r) | \psi_f \rangle, \quad (5.4)$$

onde $\mathbf{q}=\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f$ é o momentum transferido para a amostra. Para simplificar os cálculos vamos considerar que o feixe incidente de neutrons esteja polarizado, de forma que o momento magnético dos mesmos encontre-se na direção \mathbf{z} . Então a expressão anterior pode ser escrita em função da

transformada de Fourier do elemento de matriz $\Lambda(R-r) = \langle m_i | \hat{\Lambda}(R-r) | m_f \rangle$ na forma

$$\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle = \int dr^3 \int dk^3 e^{-iqR} \Lambda(q) \langle \psi_i | \hat{S}^z(r) | \psi_f \rangle, \quad (5.5)$$

onde

$$\Lambda(q) = \int dR^3 e^{-iq(R-r)} \Lambda(R-r). \quad (5.6)$$

Por outro lado, as energias inicial e final do sistema composto podem ser escritas como a soma da contribuição do feixe ($\hbar\omega_{i(f)}$) e do sistema \mathcal{A} ($E_{i(f)}$). Usando esta nova notação, a delta de Dirac que aparece na expressão (5.2) pode ser escrita como

$$\delta(E_f^{tot} - E_i^{tot}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-i(E_f - E_i - \hbar\omega)t/\hbar} dt \quad (5.7)$$

onde $\omega = \omega_i - \omega_f$. A relação anterior permite escrever o produto $\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle \delta(E_f^{tot} - E_i^{tot})$ como

$$\langle i | \mathcal{H}_i | f \rangle \delta(E_f^{tot} - E_i^{tot}) = \frac{|\Lambda(q)|}{2\pi\hbar} \int dr^3 \int dt e^{-i(qr-\omega t)} \langle \psi_i | \hat{S}^z(r, t) | \psi_f \rangle, \quad (5.8)$$

onde $\hat{S}^z(r, t)$ é a representação de Heisenberg do operador densidade de spin,

$$\hat{S}^z(r, t) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} \hat{S}^z(r) e^{i\mathcal{H}t/\hbar}. \quad (5.9)$$

Podemos então, partindo de (5.3) e (5.8) escrever a probabilidade de transição $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}$ como

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f} = \frac{|\Lambda(q)|^2}{\hbar^2} \int e^{-i\omega t} dt \int dr^3 \int dr'^3 e^{-iq(r-r')} \langle \psi_i | \hat{S}^z(r, t) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{S}^z(r', 0) | \psi_i \rangle. \quad (5.10)$$

Neste ponto podemos voltar nossa atenção para o objetivo principal de qualquer tipo de experiência de espalhamento, ou seja, conhecer, dado um certo fluxo de partículas incidentes, o fluxo emergente com momentum entre \mathbf{k}_f e $\mathbf{k}_f + d\mathbf{k}_f$. Do ponto de vista teórico isto pode ser escrito como

$$d\sigma = \frac{M}{\hbar k_i} \left(\sum_{\psi_f} \mathcal{P}_{i \rightarrow f} \right) \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3}, \quad (5.11)$$

onde M é a massa das partículas incidentes. Escrevendo agora a diferencial de momentum final em coordenadas esféricas, $d^3 k_f = k_f^2 dk_f d\Omega_f$ onde $d\Omega_f$ é a diferencial de ângulo sólido e levando em conta que a energia do feixe emergente sempre pode ser escrita como $E_f = \hbar^2 k_f^2 / 2M$, a expressão (5.11) se transforma em

$$d\sigma = \frac{M^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{k_f}{k_i} \left(\sum_{\psi_i} \mathcal{P}_{i \rightarrow f} \right) dE_f d\Omega_f. \quad (5.12)$$

Substituindo agora (5.10) na expressão anterior podemos escrever uma relação geral para a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{dE_f d\Omega_f} = \frac{M^2}{(2\pi)^3 \hbar^5} \frac{k_i}{k_f} |\Lambda(q)|^2 \int dt \int dr^3 \int dr'^3 e^{-iq(r-r')} \langle \psi_i | \hat{S}^z(r, t) \hat{S}^z(r', 0) | \psi_i \rangle. \quad (5.13)$$

Na realização de uma experiência de espalhamento, a grandeza física medida é precisamente a transformada de Fourier temporal da expressão (5.13), que como se pode ver, depende diretamente da estrutura interna do sistema \mathcal{A} através da função de correlação dinâmica

$$\mathcal{S}(rt; r'0) = \langle \psi_i | \hat{S}^z(r, t) \hat{S}^z(r', 0) | \psi_i \rangle. \quad (5.14)$$

Levando em conta que os skyrmions são caracterizados pela sua distribuição de spin, que só depende da posição do centro de massa (pois o tamanho é fixo), a função $\mathcal{S}(rt, r'0)$ não é nada mais que a probabilidade de acharmos a excitação na posição \mathbf{r} no instante t , se no tempo $t = 0$ existia uma outra na origem. A expressão (5.13) corresponde ao caso em que o sistema acha-se a $T = 0$, a generalização da função de correlação dinâmica para $T \neq 0$ é simplesmente a média termodinâmica de (5.13), ou seja

$$\mathcal{S}(rt; r'0) = \frac{1}{Z} \sum_{\psi_i} e^{-\beta E_i} \langle \psi_i | \hat{S}(r, t) \hat{S}(r', 0) | \psi_i \rangle, \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i}. \quad (5.15)$$

5.3 Função de Correlação Dinâmica para os Skyrmions

Na seção anterior obtivemos uma expressão geral para o fator de estrutura dinâmico, ou função de correlação para sistemas magnéticos. Porém no caso particular dos skyrmions, o tamanho relativamente grande dos mesmos em relação aos elétrons e sua energia cinética consideravelmente maior que a energia das flutuações quânticas permitem uma abordagem semiclássica do problema. Esta abordagem simplificada introduz algumas modificações na relação (5.15). Por exemplo o peso estatístico pode ser tomado como a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann e a ação dos operadores densidade de spin sobre os estados do sistema \mathcal{A} , podem ser tomados como a sobreposição de N_s skyrmions não interagentes, cada um representado pela solução localizada obtida para o skyrmion estático. Para obtermos uma representação dinâmica do skyrmion, basta supor que o seu centro de massa movimenta-se seguindo a lei dissipativa obtida no capítulo anterior, ou seja,

$$\hat{S}^z(r, t) | \psi \rangle = \sum_{n=1}^{N_s} \cos(\theta(r, R_n)) | \psi \rangle, \quad (5.16)$$

onde

$$\cos(\theta(r, R)) = \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2 - 4\lambda^2}{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + 4\lambda^2}, \quad (5.17)$$

e os centros das excitações movimentem-se de acordo com as leis

$$X = X_0 + \frac{V_{0x}}{\gamma(T)} (1 - e^{-\gamma(T)t}), \quad Y = Y_0 + \frac{V_{0y}}{\gamma(T)} (1 - e^{-\gamma(T)t}). \quad (5.18)$$

Nas expressões anteriores $\gamma(T)$ é o fator de decaimento que depende da temperatura, V_{0j} denota as componentes da velocidade inicial do skyrmion enquanto que X_0, Y_0 é a sua posição inicial.

Com estas simplificações o fator de estrutura dinâmico pode ser escrito na forma

$$S(rt; r'0) = N \langle \cos[\theta(r - R_n - g(t)V_n)] \cos[\theta(-R_n)] \rangle \quad (5.19)$$

onde N é o número de skyrmions e $g(t) = (1 - e^{-\gamma t})/\gamma$. Assumindo que a área da amostra seja A , a média termodinâmica de um operador que depende da posição e da velocidade tem a forma

$$\langle K(V, R) \rangle = \frac{1}{A} \int dR^2 \int dV^2 M \beta K(V, R) e^{-\beta MV^2/2}. \quad (5.20)$$

Substituindo (5.16) e (5.20) na expressão para a função de correlação e tomando a transformada de Fourier temos

$$S(q, t) = n_s M \beta |f(q)|^2 \int e^{-\beta MV^2/2 - ig(t)Vq} dV^2 \quad (5.21)$$

onde

$$f(q) = \int e^{-iq(r - R - g(t)V)} \cos(\theta(r - R - g(t)V)) dr^2 \quad (5.22)$$

e n_s é a densidade de skyrmions. Do ponto de vista experimental, o fator de estrutura dinâmico é medido em função da frequência e, portanto, tomaremos a transformada de Fourier temporal na expressão anterior. Então, passando para o domínio das frequências teremos que

$$S(q, \omega) = -n_s M \beta |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} dt \int e^{-\beta MV^2/2 - ig(t)Vq} dV^2. \quad (5.23)$$

Considerando agora que os ângulos que os vetores \mathbf{q} e \mathbf{V} fazem com uma direção fixa são θ e α , respectivamente, podemos escrever

$$S(q, \omega) = -n_s M \beta |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} dt \int_0^\infty \int_0^{2\pi} V e^{-\beta MV^2/2 - ig(t)Vq \cos(\theta - \alpha)} d\theta dV. \quad (5.24)$$

Por outro lado é conhecido que

$$\int_0^{2\pi} e^{-ia \cos(\theta - \alpha)} d\theta = 2\pi J_0(a), \quad (5.25)$$

logo a expressão (5.24) se transforma em

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 2\pi n_s M \beta |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} dt \int_0^\infty J_0(qVg(t)) e^{-\beta MV^2/2} V dV. \quad (5.26)$$

Nesta expressão a integração nas velocidades pode ser feita sem dificuldades [83], pois

$$\int_0^\infty x J_0(bx) e^{-ax^2} = \frac{e^{b^2/4a}}{2a}, \quad (5.27)$$

portanto

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 2\pi n_s |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} e^{-\bar{u}^2 q^2 g^2(t)/4} dt \quad (5.28)$$

onde $\bar{u}^2 = 2/\beta M$.

5.3.1 Movimento não Dissipativo

Antes de calcular explicitamente a forma final da função de correlação (5.28) convém estudar um regime diferente do dissipativo no tipo de movimento que o skyrmion pode experimentar. Uma das possíveis situações é aquela em que o skyrmion movimenta-se sem dissipação. Isto é o que acontece quando a temperatura é tão baixa que os modos de mágnons não são excitados provocando a queda exponencial do parâmetro de decaimento. Do ponto de vista formal, basta tomar os dois primeiros termos da expansão de $g(t) = (1 - e^{\gamma t})/\gamma$ para baixas temperaturas, explicitamente

$$g(t) \approx \frac{1}{\gamma(T)} (1 - 1 + \gamma(T)t) = t, \quad (5.29)$$

o que corresponde ao regime balístico. Então

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 2\pi n_s |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} e^{-\bar{u}^2 q^2 t^2/4} dt, \quad (5.30)$$

que poder ser calculada sem dificuldade de forma que

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 4\pi^{3/2} n_s \frac{|f(q)|^2}{q\bar{u}} e^{-\omega^2/\bar{u}^2 q^2}. \quad (5.31)$$

Este resultado é conhecido dos estudos em sistemas em que existe difusão. A origem do pico central chamado de quasi-elástico está associada ao caráter dinâmico da partícula estudada, possui uma largura $q\bar{u}/2$ e a sua altura depende fortemente do inverso da temperatura.

5.3.2 Movimento Dissipativo

Por outro lado quando a temperatura não é tão baixa, os modos de magnons são excitados e o skyrmion apresenta movimento dissipativo. Em seguida estudaremos a forma em que a mudança no caráter do movimento do skyrmion influencia a função de correlação dinâmica.

Substituindo a forma de $g(t)$ na expressão (5.28) devemos calcular

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 2\pi n_s |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} e^{-\bar{u}^2 q^2 (1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) / 4\gamma^2} dt. \quad (5.32)$$

A expressão acima, mesmo numericamente, é difícil de ser computada para temperaturas arbitrárias. Porém no regime em que $\bar{u}^2 \ll 4\gamma^2 / q^2$ (5.32) pode ser escrita como

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 2\pi n_s |f(q)|^2 \int e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{q^2 \bar{u}^2}{4\gamma^2} (1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) \right) dt. \quad (5.33)$$

Integrando a expressão anterior temos uma relação analítica para a função de correlação dinâmica quando o movimento do skyrmion é dissipativo, explicitamente

$$\mathcal{S}(q, \omega) = 2\pi n_s |f(q)|^2 \left(\left(1 - \frac{q^2 \bar{u}^2}{4\gamma^2} \right) \delta(\omega) + \frac{q^2 \bar{u}^2}{4\gamma^2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \left(2e^{-\omega^2 / 8\gamma} - \frac{1}{2} \right) e^{-\omega^2 / 8\gamma} \right). \quad (5.34)$$

A presença de um termo de frequência nula (proporcional a $\delta(\omega)$) na expressão (5.34) está relacionado com o fator de estrutura estático. Como pode ser observado ao compararmos as expressões (5.28) e (5.34), o caráter dissipativo do movimento do skyrmion introduz uma mudança considerável na função de correlação. Na figura 2 aparecem as funções de correlação do espalhamento inelástico para $T = 1K$ nas situações em que o movimento do skyrmion é dissipativo e quando a mobilidade é infinita (dissipação nula). Em ambos os casos aparece o chamado pico central quasi-elástico, que tem a sua origem no caráter dinâmico do skyrmion, porém a largura e altura dos mesmos é diferente.

Os comportamentos diferentes da função de correlação para os casos em que a dissipação no sistema é ou não levada em conta pode ser utilizado como uma medida da validade da nossa pesquisa teórica.

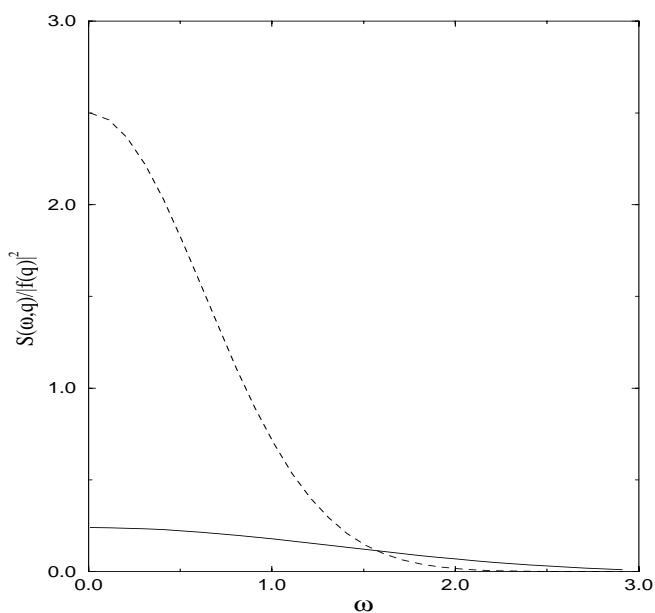


Figura 5.2: Função de correlação para $T=1\text{K}$. A linha descontinua corresponde ao regime balístico e a linha contínua ao regime dissipativo com $\gamma = 1$.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho estudamos de forma geral a dinâmica das excitações topológicas em sistemas de baixa dimensionalidade. Os resultados obtidos foram aplicados aos casos concretos das paredes de Bloch que aparecem em um modelo ferromagnético simples e aos skyrmions que aparecem no ferromagneto de Hall.

Do ponto de vista clássico a posição do centro do sóliton em função do tempo é suficiente para descrever seu movimento. Como foi demonstrado, numa teoria quântica, a situação é diferente. Neste caso, a coordenada que caracteriza o centro do sóliton se acopla com os graus de liberdade correspondentes às flutuações do campo em torno da solução solitônica. Este acoplamento é o responsável pela dinâmica não trivial dos sólitons do ponto de vista quântico.

Para estudar a dinâmica dos sólitons primeiramente os quantizamos utilizando o método das coordenadas coletivas para sistemas bidimensionais. Como vimos a hamiltoniana quântica que descreve o sistema acopla os momentos do sóliton e das flutuações do campo. Partindo desta hamiltoniana geral e usando o formalismo de Feynman e Vernon generalizou-se o método desenvolvido por Castro Neto e Caldeira em 1-D para o estudo das excitações topológicas em duas dimensões. Isto permite o estudo das propriedades de transporte dos sólitons nos sistemas bidimensionais em geral. No tratamento apresentado também levamos em conta termos relacionados com a emissão ou absorção de quanta de energia do reservatório. Demonstrou-se que dentro da aproximação de tempo longo estes termos não contribuem para o cálculo da constante de decaimento.

No caso das aplicações, partindo de um modelo puramente microscópico, desenvolveu-se um tratamento que permite o estudo das paredes de Bloch como excitações topológicas em uma dimensão. A densidade de lagrangiana encontrada para o sistema tem associada uma equação de movimento

do tipo sine-Gordon dupla. Este tipo de equação de movimento descreve corretamente os casos das paredes de Bloch π e 2π que correspondem aos casos em que $B = 0$ e $B \neq 0$ respectivamente.

Realizou-se o estudo da dinâmica da parede π , mostrou-se que dentro das aproximações utilizadas o coeficiente de decaimento para o caso em que não existe campo externo é nulo. Para o caso das paredes 2π , quando o campo magnético é forte, calculou-se a dependência do coeficiente de decaimento com a temperatura. Para $T \rightarrow 0$ o coeficiente de decaimento se anula exponencialmente e torna-se linear para temperaturas altas. Isto indica que nas experiências de dinâmica de domínios, dependendo do valor da temperatura, quando coexistem campos magnéticos e anisotropia o coeficiente de decaimento das paredes deve ser levado em conta.

Um ponto importante sobre o que devemos chamar a atenção é a estabilidade das soluções obtidas para as paredes. Como estamos assumindo que o sistema estudado é infinito, as paredes de Bloch são soluções topologicamente estáveis das equações de movimento quando $B \neq 0$, por exemplo. Logo, independente do valor do campo magnético externo estas soluções existirão sempre. Isto claramente está em contradição com a experiência, pois para campos magnéticos fortes a estrutura de domínios desaparece completamente. Portanto, os resultados apresentados aqui são válidos sempre que se leve em conta que o campo magnético externo não exceda o valor crítico que polariza completamente a amostra.

Seguindo esta idéia, uma extensão imediata do nosso trabalho é o estudo da dinâmica das paredes para campos baixos. Neste sentido já existem evidências experimentais de que a dinâmica para campos alternados depende fortemente do coeficiente de decaimento das paredes os domínios [86]. Uma outra possibilidade é a inclusão da estrutura de domínios, descritos pelas equações de movimento do nosso modelo, no cálculo de grandezas como a magnetoimpedância e magnetoresistência para sistema magnéticos.

No outro sistema concreto estudado, partindo da densidade de lagrangiana que caracteriza aos skyrmions calculamos uma hamiltoniana (via método das coordenadas coletivas) que acopla o momento do skyrmion com o momento dos mágnons do sistema. Usando esta hamiltoniana estudamos a influência da interação skyrmion-mágnon na dinâmica dos graus de liberdade de spin no sistema de Hall pra qualquer temperatura. Os resultados mostraram que para baixas temperaturas, porém acima do gap de Zeeman, o fator de decaimento para os skyrmions se anula seguindo uma lei de potências, o que está de acordo com o pequeno valor do gap de Zeeman para skyrmions que envolvem muitos elétrons.

Para investigar a influência do carácter dissipativo do movimento dos skyrmions no sistema de Hall calculamos a função de correlação dinâmica na experiência de espalhamento de neutrons. Os resultados obtidos mostraram uma considerável redução do pico quasi-elástico que se obteria no caso em que os skyrmions se deslocassem pela amostra sem dissipação.

Uma extensão imediata deste trabalho é o estudo da dinâmica dos skyrmions em sistemas antiferromagnéticos como os planos CuO_2 dos supercondutores de alta temperatura. O método semiclássico apresentado permitirá obter uma teoria efetiva para um sistema multiskyrmion interagente onde a interação entre skyrmions seja mediada pela presença das ondas de spin no sistema.

Apêndice A

Teorema de Derrick

Suponha que um sistema seja descrito pela densidade de lagrangiana da forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) \cdot (\partial^\mu \varphi) - U(\varphi(\mathbf{x}, t)). \quad (\text{A.1})$$

Na expressão anterior $\varphi(\mathbf{x}, t) = [\phi_i(\mathbf{x}, t); i = 1, \dots, N]$ é um conjunto de campos escalares em D dimensões espaciais e uma temporal. Tomemos o potencial $U(\varphi)$ como positivo definido.

As soluções estáticas do sistema descrito por (A.1) obedecem à equação de movimento

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \phi_i} \quad (\text{A.2})$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace em D dimensões. A equação (A.2) pode ser obtida partindo da condição de extremo do funcional de energia estática $\delta W[\varphi] = 0$. Explicitamente,

$$W[\varphi] = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\nabla_i \varphi) \cdot (\nabla_i \varphi) + U(\varphi) \right) \quad (\text{A.3})$$

que pode ser escrita como

$$W[\varphi] = V_1[\varphi] + V_2[\varphi]. \quad (\text{A.4})$$

onde os termos V_1 e V_2 são os funcionais do lado direito de (A.4).

Como se observa não só W , mas V_1 e V_2 são funções positivas semi-definidas. Vamos supor conhecida uma das soluções estáticas de (A.3) que chamaremos $\varphi_1(\mathbf{x})$. Então, podemos construir uma família de funções φ_λ partindo de $\varphi_1(\mathbf{x})$ como

$$\varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \varphi_1(\lambda \mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

Então, substituindo (A.5) em (A.3) temos

$$W[\varphi_\lambda] = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\nabla_i \varphi_\lambda) \cdot (\nabla_i \varphi_\lambda) + U(\varphi_\lambda) \right), \quad (\text{A.6})$$

que pode ser escrita como

$$W[\varphi_\lambda] = \lambda^{2-D} V_1[\varphi_1] + \lambda^{-D} V_2[\varphi_1] \quad (\text{A.7})$$

Como $\varphi_1(\mathbf{x})$ é extremo de $W[\varphi]$ temos que

$$\frac{d}{d\lambda} W[\varphi_\lambda] = 0 \quad \text{para} \quad \lambda = 1. \quad (\text{A.8})$$

Então, derivando (A.8) temos

$$(2 - D)V_1[\varphi_1] = DV_2[\varphi_1]. \quad (\text{A.9})$$

Como V_1 e V_2 positivos semi-definidos (A.9) não é satisfeita para $D > 3$, a menos que $V_1(\varphi_1) = V_2(\varphi_1) = 0$, o que significa que φ_1 não depende da posição e é igual a um dos zeros de $U[\varphi]$ que é uma solução trivial.

Apêndice B

Cálculo dos Desvios de Fase

Neste apêndice mostraremos como obter analiticamente as funções espectrais pares e ímpares (2.64) e (2.63). Para começar consideremos que existe uma partícula submetida à ação de um potencial unidimensional simétrico da forma $V = V_0 + gV_1$ confinada em uma região do espaço $(-L, +L)$ onde L é muito maior que o alcance do potencial. As formas assintóticas das funções de onda que caracterizam a partícula podem ser escritas como

$$\begin{aligned} |z\rangle^p &= \sqrt{\frac{1}{L}} \cos(k|z| + \Delta^e(k)), \\ |z\rangle^i &= \sqrt{\frac{1}{L}} \operatorname{sgn}(z) \sin(k|z| + \Delta^i(k)), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde $|z| \rightarrow \infty$. No caso em que $V = 0$ as funções de onda possuirão a estrutura (B.1), porém os valores dos desvios de fase serão nulos $\Delta^{e,o} = 0$. Como as funções de onda (B.1) devem-se anular no infinito, pode ser demonstrado que em $z = \pm L$

$$\frac{\delta E_n}{\Delta E_n} = -\frac{1}{\pi} \Delta^{p,i}$$

onde

$$\Delta E_n = E_{n+1}^0 - E_n^0 \quad \text{e} \quad \delta E_n = E_n - E_n^0. \quad (\text{B.2})$$

Seguindo o método exposto por Gottfried [49], mais para o caso de uma dimensão, as funções espectrais (2.64) e (2.63) são dadas por

$$A_j^{p,i}(E) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dz V_i(z) \langle z|E\rangle_{e,o} \langle E|z\rangle_{e,o}, \quad j = 0, 1 \quad (\text{B.3})$$

onde os estados $\langle E|z\rangle_{p,i}$ podem ser obtidos tomando o limite

$$\langle z|E\rangle_{e,o} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|z\rangle}{\sqrt{\Delta E_n}}. \quad (\text{B.4})$$

Explicitamente,

$$\langle z|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \begin{cases} \cos(kx), & \text{para estados pares} \\ \sin(kx), & \text{para estados ímpares} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo (B.5) e (2.59) em (B.3) teremos

$$A_1^p + A_1^i = \frac{8M\rho^2}{\pi\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2\left(\frac{z}{\lambda}\right) \tanh^2\left(\frac{z}{\lambda}\right) dz, \quad (\text{B.6})$$

que pode ser facilmente calculada com a substituição $y = \tanh z/\lambda$. O resultado pode ser escrito como

$$A_1^p + A_1^i = \frac{16\rho^2 M}{\pi\hbar^2 \lambda k}. \quad (\text{B.7})$$

Por outro lado temos que

$$A_1^p - A_1^i = \frac{8M\rho^2}{\pi\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2\left(\frac{z}{\lambda}\right) \tanh^2\left(\frac{z}{\lambda}\right) \cos(2k\lambda) dz, \quad (\text{B.8})$$

que pode ser escrita como

$$A_1^p - A_1^i = \frac{8M\rho^2}{\pi\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\text{sech}^2\left(\frac{z}{\lambda}\right) - \text{sech}^4\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right) \cos(2k\lambda) dz. \quad (\text{B.9})$$

Esta expressão pode ser calculada analiticamete [83], de forma que

$$A_1^p - A_1^i = \frac{16\rho^2 M}{\hbar^2 \sinh(\pi k\lambda)} \left[\frac{1}{3} - \frac{2k^2 \lambda^2}{3} \right]. \quad (\text{B.10})$$

Portanto, combinando as expressões (B.7) e (B.10) teremos finalmente (2.66). Procedendo da mesma forma é possível mostrar que

$$A_0^p + A_0^i = \frac{4M}{\pi\hbar^2 k\lambda} \quad \text{e} \quad A_0^p - A_0^i = \frac{4M}{\hbar^2 \sinh(\pi k\lambda)}, \quad (\text{B.11})$$

de onde obtemos a expressão (2.65).

Agora podemos calcular o valor principal de Cauchy na expressão (2.64),

$$B_0^{p,i} = \frac{2M}{\hbar^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\pi k' \lambda} \pm \frac{1}{\sinh(\pi k' \lambda)} \right] \frac{k' dk'}{k^2 - k'^2}. \quad (\text{B.12})$$

O primeiro termo do lado direito da expressão anterior (B.12) é zero. Portanto, usando a expansão em forma de produto da função $\sinh(\pi z)$ [83] o segundo termo se transforma em

$$B_0^{p,i} = \pm \frac{2M}{\pi\hbar^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{k^2 - q^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + q^2}, \quad (\text{B.13})$$

onde $q = k/\lambda$. Passando agora ao plano complexo, a expressão anterior pode ser calculada analiticamente, podendo ser escrita na forma final como

$$B_0^{p,i} = \pm \frac{4M}{\hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(k/\lambda)^2 + n^2}. \quad (\text{B.14})$$

Apêndice C

“Knight Shift”

O deslocamento na frequência de ressonância, para certos tipos de átomos, foi observado pela primeira vez por Walter Knight, ao notar que a ressonância dos núcleos de ^{63}Cu , no cobre metálico, ocorre a uma frequência 0.23% maior do que quando o isótopo se acha em um meio diamagnético, como o CuCl .

O fenômeno anterior pode ser explicado da seguinte forma [75]: na ausência de campo magnético externo, não existe orientação preferencial dos spins eletrônicos e, portanto, o acoplamento magnético médio entre núcleos e elétrons é nulo. Já na presença de um certo campo interno, os elétrons adquirem uma certa polarização, fazendo com que o acoplamento médio seja diferente de zero. Desta forma, os núcleos experimentam um campo magnético *extra* ($\Delta\mathbf{H}$) paralelo ao campo \mathbf{H}_0 , que traz como consequência o aumento na frequência de ressonância ω em um valor $\Delta\omega$, geralmente positivo e diretamente proporcional a \mathbf{H}_0 .

A idéia anterior pode ser ilustrada estudando o caso de um metal que é submetido a um campo magnético externo quando os modos plasmônicos não são excitados. Nesta situação é possível tratar os elétrons de condução como fracamente interagentes, e o sistema poderá ser descrito através da hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_n + \mathcal{H}_{en}, \quad (\text{C.1})$$

onde \mathcal{H}_e descreve o grupo de elétrons fracamente interagentes, \mathcal{H}_n descreve os núcleos, ou seja, a interação dipolar entre eles e com o campo externo; e \mathcal{H}_{en} é a interação hiperfina núcleo-elétron, que pode ser escrita da forma

$$\mathcal{H}_{en} = \frac{8\pi}{3}\gamma_e\gamma_n\hbar^2 \sum_{j,l} \mathbf{I}_j \cdot \mathbf{S}_l \delta(r_l - R_j). \quad (\text{C.2})$$

Como a interação núcleo-elétron é fraca, podemos tomar a função de onda do sistema na forma $\psi = \psi_e \psi_n$, que seria exata no caso $\mathcal{H}_{en} = 0$, sendo

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P \mathbf{P} \psi_{\mathbf{k}_1 s_1}(1) \psi_{\mathbf{k}_2 s_2}(2) \dots \psi_{\mathbf{k}_N s_N}(N) \quad (\text{C.3})$$

e

$$\psi_{\mathbf{k}s} = u_{\mathbf{k}}(r) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \psi_s. \quad (\text{C.4})$$

A partir das expressões (C.2), (C.3) e (C.4), podemos calcular o operador de Hamilton reduzido (\mathcal{H}_n^{red}) correspondente aos núcleos. Pode-se fazer isto por integração direta da parte eletrônica, ou seja

$$\mathcal{H}_n^{red} = \frac{8\pi}{3} \gamma_e \gamma_n \hbar^2 \mathbf{I}_j \cdot \int \psi_e^* \sum_l \mathbf{S}_l \delta(r_l) \psi_e d\tau_e, \quad (\text{C.5})$$

e, para o caso em que o j -ésimo núcleo acha-se na origem de coordenadas ($R_j = 0$), se obtém

$$\mathcal{H}_n^{red} = \frac{8\pi}{3} \gamma_e \gamma_n \hbar^2 I_{jz} \sum_{k,s} |u_{\mathbf{k},s}(0)|^2 m_s p(\mathbf{k}, s), \quad (\text{C.6})$$

onde $p(\mathbf{k}, s)$ toma os valores 1 ou 0, dependendo da ocupação do estado e pode ser convenientemente substituída pela distribuição de Fermi-Dirac ($f(s, k)$) para $T \neq 0K$.

Consideremos que os valores permitidos de m_s são só $\pm \frac{1}{2}$. Logo, um termo típico da soma que aparece em (C.6) teria a forma

$$\frac{8\pi}{3} \gamma_n \hbar I_{jz} \left[\gamma_e \hbar \left(\frac{1}{2} \right) f(\mathbf{k}, \frac{1}{2}) - \gamma_e \hbar \left(-\frac{1}{2} \right) f(\mathbf{k}, -\frac{1}{2}) \right] |u_{\mathbf{k},s}(0)|^2. \quad (\text{C.7})$$

Lembrando que o momento magnético eletrônico se escreve como $\mu_e = -\gamma_e \hbar \mathbf{S}$, a parte entre colchetes da expressão anterior representa a contribuição média do estado de momentum \mathbf{k} à componente da magnetização eletrônica na direção \mathbf{z} ($\bar{\mu}_{z,k}$), que se poderia calcular como

$$\bar{\mu}_z = \sum_{\mathbf{k}} \bar{\mu}_{z\mathbf{k}}. \quad (\text{C.8})$$

Por outro lado, a susceptibilidade magnética de spin χ_s é definida como $\bar{\mu}_z = \chi_s^s \mathbf{H}_0$, o que nos permite, analogamente, introduzir a seguinte relação

$$\bar{\mu}_{z,k} = \chi_k^s \mathbf{H}_0, \quad (\text{C.9})$$

que substituída em (C.7) transforma (C.6) em

$$\mathcal{H}_n^{red} = -\frac{8\pi}{3} \gamma_n \hbar I_{jz} \sum_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \chi_{\mathbf{k}}^s H_0. \quad (\text{C.10})$$

O problema se reduz agora a realizar a soma em \mathbf{k} , o que pode ser feito usando a definição da densidade de estados $\rho(E_{\mathbf{k}})$ e a hipótese de que a susceptibilidade só depende da parte translacional da energia (que denotaremos por $E_{\mathbf{k}}$). Desta forma, pode se escrever a soma anterior como

$$\sum_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \chi_{\mathbf{k}}^s = \int \langle |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \rangle_{E_F} \chi_{\mathbf{k}}^s \rho(E_{\mathbf{k}}) dE_{\mathbf{k}}, \quad (\text{C.11})$$

onde

$$\langle |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \rangle_{E_F} = \frac{1}{\rho(E_{\mathbf{k}})} \int |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 g(E_{\mathbf{k}}, A) dA, \quad (\text{C.12})$$

e

$$\rho(E_{\mathbf{k}}) = \int_{E_k=cte} g(E_{\mathbf{k}}, A) dA. \quad (\text{C.13})$$

Sabendo que $\chi_{\mathbf{k}}^s$ só é diferente de zero suficientemente perto da energia de Fermi e considerando que $u_{\mathbf{k}}(0)$ varia lentamente no intervalo de energia de interesse, a expressão (C.11) transforma-se em

$$\sum_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \chi_{\mathbf{k}}^s = \langle |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \rangle_{E_F} \int \chi_{\mathbf{k}}^s \rho(E_{\mathbf{k}}) dE_{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.14})$$

A integral que aparece acima não é mais que uma outra forma de se escrever o valor da soma $\chi_e^s = \sum_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}^s$. Logo, substituindo (C.14) em (C.10) teremos que

$$\mathcal{H}_n^{red} = -\frac{8\pi}{3} \gamma_n \hbar I_{jz} \langle |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \rangle_{E_F} \chi_e^s H_0 \quad (\text{C.15})$$

que nada mais é que uma interação *extra* dos spins nucleares de momentos $-\gamma_n \hbar I_{jz}$ com um campo magnético de intensidade

$$\Delta H = \frac{8\pi}{3} \langle |u_{\mathbf{k}}(0)|^2 \rangle_{E_F} \chi_e^s H_0, \quad (\text{C.16})$$

o que explica o deslocamento da frequência de ressonância em certos materiais (paramagnéticos) e, portanto, a origem do Knight Shift.

Apêndice D

Estados Coerentes

Na teoria de campos usualmente representamos os campos livres por um conjunto de osciladores não interagentes. Porém, nesta representação, as variáveis associadas ao momento e às coordenadas não possuem um significado físico evidente. Nesta situação é conveniente a introdução dos operadores de criação e destruição, pois as integrais funcionais associadas a estes operadores são comprovadamente úteis [85] nos cálculos que em alguma forma envolvem campos.

Comumente as integrais de caminho podem ser obtidas inserindo a identidade

$$\mathbf{1} = \int dq |q\rangle \langle q| \tag{D.1}$$

entre os termos de $\exp(-iHt)$, quando escritos na forma

$$\exp(-iHt) = \left(\exp\left(-\frac{iHt}{N}\right) \right)^N . \tag{D.2}$$

Se trocarmos a base das autofunções do operador posição por aquela do operador destruição obteremos uma integral de caminho com uma forma um pouco diferente. Estas autofunções (do operador destruição) são chamadas de estados coerentes e são particularmente cômodas na hora de tratar problemas que envolvem muitos corpos e calcular integrais de caminho em teoria de campos. Em seguida apresentamos a obtenção dos estados coerentes e algumas propriedades importantes dos mesmos.

Como é conhecido os estados $|n\rangle$ não são autoestados do operador b , porém pode ser verificado que o estado

$$|z\rangle = N(z) \exp(zb^\dagger) |0\rangle \tag{D.3}$$

onde z é um número complexo e $N(z)$ é uma constante de normalização é efetivamente um autoestado do operador destruição. Aqui $|0\rangle$ é o vácuo ou estado fundamental de acordo com a notação usada.

Calculemos explicitamente a ação da do operador destruição sobre o estado construído da forma (D.3); isto é

$$b|z\rangle = bN(z)\exp(zb^\dagger)|0\rangle = |z\rangle = N(z)b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(zb^\dagger)^n|0\rangle \quad (\text{D.4})$$

$$= N(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}(z)^nb|n\rangle = N(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n!}}(z)^n|n-1\rangle \quad (\text{D.5})$$

$$= zN(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}(z)^{n-1}|n-1\rangle = zN(z)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m!}}(z)^m|m\rangle \quad (\text{D.6})$$

$$= zN(z)\exp(zb^\dagger)|0\rangle = z|z\rangle. \quad (\text{D.7})$$

Calculemos agora a constante de normalização $N(z)$, o adjunto do estado (D.3) pode ser escrito como

$$\langle z| = N(z)\langle 0|\exp(z^*b), \quad (\text{D.8})$$

portanto

$$\langle z'|z\rangle = \langle 0|\exp(z^*b)\exp(zb^\dagger)|0\rangle. \quad (\text{D.9})$$

Usando a identidade

$$\begin{aligned} \exp(\hat{A} + \hat{B}) &= \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp\left(-\frac{1}{2}\exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right)\right) \\ &= \exp(\hat{B})\exp(\hat{A})\exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{B}, \hat{A}]\right), \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

válida sempre que $[\hat{A}, \hat{B}]$ comuta com \hat{A} e \hat{B} , obtemos

$$\langle z'|z\rangle = N(z')N(z)\exp(z'z^*), \quad (\text{D.11})$$

de onde se segue que

$$N(z) = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right). \quad (\text{D.12})$$

Logo, podemos escrever os estados coerentes de forma geral como

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} + zb^\dagger\right)|0\rangle. \quad (\text{D.13})$$

Para concluir a introdução aos estados coerentes apresentamos em seguida algumas propriedades importantes ¹ dos mesmos,

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} (z)^n |n\rangle \quad (\text{D.14})$$

$$\langle z|x|z\rangle = \sqrt{2}\text{Re}z \quad \langle z|p|z\rangle = \sqrt{2}\text{Im}z \quad (\text{D.15})$$

$$\exp(-iH_0t)|z\rangle = \exp\left(-\frac{it}{2}\right)|z\rangle \exp(-it) \quad (\text{D.16})$$

$$\langle w|\exp(-iH_0t)|z\rangle = \exp\left(-\frac{it}{2} + w^*z \exp -it - \frac{|w|^2 + |z|^2}{2}\right) \quad (\text{D.17})$$

$$\langle x|z\rangle = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} + -\frac{1}{2}(x^2 + z^2) + \sqrt{2}xz\right) \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z| = \frac{1}{\pi} \int d(\text{Re}z)d(\text{Im}z) |z\rangle \langle z| \quad (\text{D.19})$$

Usando as definições e propriedades apresentadas, podemos passar agora ao cálculo do super-propagador definido pela expressão (4.68) na representação de estados coerentes.

¹Para mais detalhes ver *Coherent States*[84]

Apêndice E

Cálculo do Propagador

Por simplicidade escreveremos a hamiltoniana que descreve o sistema (skyrmions+mágnons) como a soma de termos correspondentes aos skyrmions e mágnons, separadamente, somados a um termo de interação entre os mesmos. Explicitamente

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_r + \hat{H}_I \quad (\text{E.1})$$

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2M} (\hat{\mathbf{P}}_s)^2, \quad (\text{E.2})$$

$$\hat{H}_r = \frac{1}{2M} \left(\sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} b_{mn}^\dagger b_{kl} + \mathbf{C}_{mn,kl} (b_{mn} b_{kl} - b_{mn}^\dagger b_{kl}^\dagger) \right)^2 + \sum_{mn=2}^{\infty} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^\dagger b_{mn}, \quad (\text{E.3})$$

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{P}}_s \sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} b_{mn}^\dagger b_{kl} + \mathbf{C}_{mn,kl} (b_{mn} b_{kl} - b_{mn}^\dagger b_{kl}^\dagger) = -\hat{\mathbf{P}}_s h(b_{mn}, b_{mn}^\dagger) \quad (\text{E.4})$$

Como é feito usualmente, a expressão para $K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha')$ pode ser escrita como

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha') = \langle \mathbf{x}\alpha | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{(N-1)\hbar}t\right) \right)^{N-1} | \mathbf{x}'\alpha' \rangle, \quad (\text{E.5})$$

que por sua vez permite introduzir uma nova variável associada aos intervalos de tempo na forma $\varepsilon = t/(N-1)$. Usando esta nova definição a expressão anterior para o propagador se transforma em

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha') = \langle x\alpha | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\varepsilon\right) \right) \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\varepsilon\right) \right) \dots \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\varepsilon\right) \right) | \mathbf{x}'\alpha' \rangle, \quad (\text{E.6})$$

que usando as relações de completudeza

$$\int |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| d^2x = 1, \quad \int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d\alpha}{\pi} = 1, \quad (\text{E.7})$$

se reduz a

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') &= \int d^2 x_1 \dots \int d^2 x_{N-1} \int \frac{d\alpha_1}{\pi} \dots \int \frac{d\alpha_{N-1}}{\pi} \times \\
&\langle \mathbf{x} \alpha | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{x}_{N-1} \alpha_{N-1} \rangle \times \\
&\langle \mathbf{x}_{N-1} \alpha_{N-1} | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{x}_{N-2} \alpha_{N-2} \rangle \dots \times \\
&\langle \mathbf{x}_1 \alpha_1 | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{x}' \alpha' \rangle.
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Para simplificar a expressão anterior podemos escrever $\langle \mathbf{x} \alpha | = \langle \mathbf{x}_N \alpha_N |$ e $|\mathbf{x}' \alpha'\rangle = |\mathbf{x}_0 \alpha_0\rangle$, desta forma

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') = \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d^2 x_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \right\} \prod_{j=1}^N \langle \mathbf{x}_j \alpha_j | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{x}_{j-1} \alpha_{j-1} \rangle, \tag{E.9}$$

que usando a relação de completudeza

$$\int |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| d^2 p = 1, \tag{E.10}$$

N vezes se transforma em

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') &= \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d\mathbf{x}_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \right\} \prod_{j=1}^N \int d^2 p_j \times \\
&\langle \mathbf{x}_N \alpha_N | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{p}_N \alpha_{N-1} \rangle \langle \mathbf{p}_N | \mathbf{x}_{N-1} \rangle \times \\
&\langle \mathbf{x}_{N-1} \alpha_{N-1} | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{p}_{N-1} \alpha_{N-2} \rangle \langle \mathbf{p}_{N-1} | \mathbf{x}_{N-2} \rangle \dots \times \\
&\langle \mathbf{x}_1 \alpha_1 | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{p}_1 \alpha_0 \rangle \langle \mathbf{p}_1 | \mathbf{x}_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Por outro lado, para $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\langle \mathbf{x}_j \alpha_j | \left(\exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) \varepsilon \right) | \mathbf{p}_j \alpha_{j-1} \rangle \approx \langle \mathbf{x}_j \alpha_j | \mathbf{p}_j \alpha_{j-1} \rangle \exp\left(\frac{-i\varepsilon}{\hbar} \hat{H}(\mathbf{x}_j \mathbf{p}_j, \alpha_j^* \alpha_{j-1})\right), \tag{E.12}$$

onde

$$\hat{H}(\mathbf{x}_j \mathbf{p}_j, \alpha_j^* \alpha_{j-1}) = \frac{\langle \mathbf{x}_j \alpha_j | \hat{H} | \mathbf{p}_j \alpha_{j-1} \rangle}{\langle \mathbf{x}_j \alpha_j | \mathbf{p}_j \alpha_{j-1} \rangle}. \tag{E.13}$$

Substituindo as expressões (E.12) e (E.13) em (E.11) e usando a relação

$$\langle \mathbf{p}_j | \mathbf{x}_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-i \frac{\mathbf{p}_j \mathbf{x}_j}{\hbar}\right) \tag{E.14}$$

o propagador $K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha')$ pode ser escrito como

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha') = \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d^2 x_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \int d^2 p_j \right\} \prod_{j=1}^N \left\{ \frac{\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [\mathbf{p}_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})] - \varepsilon \widehat{H}(\mathbf{x}_j \mathbf{p}_j, \alpha_j^* \alpha_{j-1}) \right) \right\}. \quad (\text{E.15})$$

Podemos usar agora as propriedades dos estados coerentes expostas no Apêndice D, o que nos permite escrever o produto escalar $\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle$ na forma

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1}) - (\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*) \alpha_{j-1}] \right\}. \quad (\text{E.16})$$

Substituindo este resultado em (E.15) e agrupando adequadamente os termos teremos

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha') = \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d^2 x_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \int \frac{d^2 p_j}{2\pi\hbar} \right\} \times \exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} -\frac{1}{2} [\alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1}) - (\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*) \alpha_{j-1}] \right\} \times \exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{i}{\hbar} \left([\mathbf{p}_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})] - \varepsilon \widehat{H}(\mathbf{x}_j \mathbf{p}_j, \alpha_j^* \alpha_{j-1}) \right) \right\}. \quad (\text{E.17})$$

Devemos agora realizar a integração nas variáveis auxiliares \mathbf{p}_j introduzidas no cálculo do propagador. Para que isto possa ser feito, substituímos as expressões correspondentes a \widehat{H} (E.3) e (E.4) na representação dos estados coerentes. Desta forma

$$K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}'\alpha') = \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d^2 x_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2} [(\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*) \alpha_{j-1} - \alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1})] \right\} \right\} \times \prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2 p_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[-\frac{\mathbf{p}_j^2}{2M} + \mathbf{p}_j \left(h(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) + \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right) \right] \right\} \times \exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} -\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_r(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) \right\}. \quad (\text{E.18})$$

Sabendo que

$$\int \exp(-ax^2 + b) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(b^2/4a), \quad (\text{E.19})$$

a integral no momento \mathbf{p}_j

$$\int d^2 p_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[-\frac{\mathbf{p}_j^2}{2M} + \mathbf{p}_j \left(h(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) + \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right) \right] \right\}, \quad (\text{E.20})$$

se reduz a

$$\sqrt{\frac{2M\hbar\pi}{i\varepsilon}} \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \varepsilon M \left(h(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) + \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 \right\}, \quad (\text{E.21})$$

e portanto a expressão para o propagador pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') &= \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d^2 x_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \sqrt{\frac{M}{2\pi\hbar i \varepsilon}} \right\} \times \\
&\exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} [(\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)\alpha_{j-1} - \alpha_j^*(\alpha_j - \alpha_{j-1})] \right\} \times \\
&\exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\varepsilon M}{2} \left(h(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) + \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 - \varepsilon \hat{H}_r(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{E.22}$$

que com a forma explícita de $\hat{H}_r(\alpha_j^* \alpha_{j-1})$ se transforma em

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') &= \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \int d^2 x_j \int \frac{d\alpha_j}{\pi} \sqrt{\frac{M}{2\pi\hbar i \varepsilon}} \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle \right\} \times \\
&\exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} [(\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)\alpha_{j-1} - \alpha_j^*(\alpha_j - \alpha_{j-1})] \right\} \times \\
&\exp \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[M \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 + M h(\alpha_j^* \alpha_{j-1}) - \sum_{mn=2}^{\infty} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^\dagger b_{mn} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{E.23}$$

Estamos agora em condições de tomar o limite $N \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$. Neste processo devemos prestar particular atenção ao produto escalar $\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle$ e lembrar que seus pontos extremos são fixos. Se ao mesmo tempo definimos

$$\prod_{j=1} \int \frac{d\alpha_j}{\pi} = \mathcal{D}^2 \alpha, \quad \prod_{j=1} \sqrt{\frac{M}{2\pi\hbar i \varepsilon}} \int d^2 x_j = d\mathbf{x}, \tag{E.24}$$

a expressão para o propagador pode ser escrita na como

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \alpha, t; \mathbf{x}' \alpha') &= \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} \right\} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}'} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[\mathbf{x}] \right) d\mathbf{x} \times \\
&\int_{\alpha}^{\alpha^*} \exp(\alpha^*(0)\alpha + \alpha^* \alpha(t)) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_I[\mathbf{x}, \alpha] \right) \mathcal{D}^2 \alpha,
\end{aligned} \tag{E.25}$$

onde

$$S_0[\mathbf{x}] = \int_0^t M \frac{(\dot{\mathbf{x}})^2}{2} dt', \tag{E.26}$$

e

$$\begin{aligned}
S_I &= \int_0^t \left\{ \frac{i\hbar}{2} \sum_{mn} \alpha_{mn}^* \dot{\alpha}_{mn} - \alpha_{mn} \dot{\alpha}_{mn}^* - \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} \alpha_{mn}^* \alpha_{mn} \right. \\
&\quad + \hbar M \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{mn,kl} \mathbf{D}_{mn,kl} \alpha_{mn}^* \alpha_{kl} \\
&\quad \left. + \hbar M \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{mn,kl} \mathbf{C}_{mn,kl} (\alpha_{mn} \alpha_{kl} + \alpha_{mn}^* \alpha_{kl}^*) \right\} dt',
\end{aligned} \tag{E.27}$$

Apêndice F

Operador de Densidade ρ_r em Termos dos Estados Coerentes

A forma explícita de $\rho_m(\beta^*, \gamma)$ pode ser encontrada partindo da definição

$$\rho_m(\beta^*, \gamma) = \langle \beta | \hat{\rho}_m | \gamma \rangle, \quad (\text{F.1})$$

onde,

$$\hat{\rho}_m = \frac{\exp \left\{ -\beta \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^\dagger b_{mn} \right\}}{Z}, \quad (\text{F.2})$$

$$Z = \text{Tr} \exp -\beta \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^\dagger b_{mn}. \quad (\text{F.3})$$

Desta forma

$$\rho_m(\beta^*, \gamma) = \frac{1}{Z} \langle \beta | \exp \left\{ -\beta \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^\dagger b_{mn} \right\} | \gamma \rangle, \quad (\text{F.4})$$

que, com o auxílio da propriedade de completudeza

$$\sum_{n_i} |n_i\rangle \langle n_i| = \mathbf{1}, \quad (\text{F.5})$$

se transforma em

$$\rho_m(\beta^*, \gamma) = \frac{1}{Z} \prod_{mn} \sum_{n_i} \langle \beta_{mn} | n_i \rangle \langle n_i | \gamma_{mn} \rangle \exp(-\beta \hbar \omega_{mn} n_i). \quad (\text{F.6})$$

Podemos, agora, substituir na expressão anterior a forma explícita dos estados coerentes na representação de número de ocupação. Neste caso

$$\langle \beta_{mn} | n_i \rangle = \frac{(\beta_{mn}^*)^{n_i}}{n_i!} \exp -\frac{|\beta_{mn}|^2}{2}$$

e, portanto, $\rho_m(\beta^*, \gamma)$ terá a forma

$$\rho_m(\beta^*, \gamma) = \frac{1}{Z} \prod_{mn} \exp \left\{ \beta_{mn}^* \gamma_{mn} \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) - \frac{|\beta_{mn}|^2}{2} - \frac{|\gamma_{mn}|^2}{2} \right\} \quad (\text{F.7})$$

Usando que

$$\int \frac{d^2 \beta_{mn}}{\pi} \exp \left\{ -w |\beta_{mn}|^2 \right\} = \frac{1}{|w|}, \quad (\text{F.8})$$

podemos escrever a função de partição

$$Z = \text{Tr} \exp -\beta \sum_{mn} \hbar \omega_{mn} b_{mn}^\dagger b_{mn} \quad (\text{F.9})$$

como

$$Z = \prod_{mn} \int \frac{d^2 \beta_{mn}}{\pi} \exp \left\{ -[1 - \beta \hbar \omega_{mn}] |\beta_{mn}|^2 \right\} \quad (\text{F.10})$$

ou ainda,

$$Z = \prod_{mn} \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_{mn})}, \quad (\text{F.11})$$

e, portanto,

$$\rho_m(\beta^*, \gamma) = \prod_{mn} \frac{\exp \left\{ \beta_{mn}^* \gamma_{mn} \exp(-\beta \hbar \omega_{mn}) - \frac{|\beta_{mn}|^2}{2} - \frac{|\gamma_{mn}|^2}{2} \right\}}{\frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_{mn})}}. \quad (\text{F.12})$$

Apêndice G

Solução das Equações de Movimento

Em seguida mostraremos como resolver as equações de movimento

$$\dot{\alpha}_{mn} + i\omega_{mn}\alpha_{mn} - iM \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{kl} \mathbf{D}_{mn,kl}\alpha_{kl} + 2\mathbf{C}_{mn,kl}\alpha_{kl}^* = 0, \quad (\text{G.1})$$

$$\dot{\alpha}_{mn}^* - i\omega_{mn}\alpha_{mn}^* + iM \dot{\mathbf{x}} \cdot \sum_{kl} \mathbf{D}_{mn,kl}\alpha_{kl}^* + 2\mathbf{C}_{mn,kl}\alpha_{kl} = 0, \quad (\text{G.2})$$

Primeiramente convém escrever os estados coerentes na forma

$$\alpha_{mn}(\tau) = \tilde{\alpha}_{mn}(\tau) \exp -i\omega_{mn}\tau, \quad (\text{G.3})$$

que substituindo em (G.1) nos fornece

$$\dot{\tilde{\alpha}}_{mn} - iM \dot{\mathbf{x}} \mathbf{D}_{mn,mn}\tilde{\alpha}_{mn} = iM \dot{\mathbf{x}} \sum_{kl \neq mn} \left(\mathbf{D}_{mn,kl} e^{-i(\omega_{kl} - \omega_{mn})\tau} + 2\mathbf{C}_{mn,kl} e^{i(\omega_{kl} + \omega_{mn})\tau} \right) \tilde{\alpha}_{kl}. \quad (\text{G.4})$$

Para simplificar a equação anterior introduziremos as seguintes definições

$$F_{mn}(\tau) = M \dot{\mathbf{x}} \mathbf{D}_{mn,mn}, \quad (\text{G.5})$$

$$W_{mn,kl}^0(\tau) = iM \dot{\mathbf{x}} \left(\mathbf{D}_{mn,kl} e^{-i(\omega_{kl} - \omega_{mn})\tau} + 2\mathbf{C}_{mn,kl} e^{i(\omega_{kl} + \omega_{mn})\tau} \right). \quad (\text{G.6})$$

Desta forma a equação de movimento se torna

$$\dot{\tilde{\alpha}}_{mn} - iF_{mn}\tilde{\alpha}_{mn} = \sum_{kl \neq mn} W_{mn,kl}^0 \tilde{\alpha}_{kl}, \quad (\text{G.7})$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\tau} \hat{\alpha}_{mn} = \sum_{kl \neq mn} W_{mn,kl}^0 \hat{\alpha}_{kl} \quad (\text{G.8})$$

quando se faz a substituição

$$\hat{\alpha}_{mn}(\tau) = \tilde{\alpha}_{mn} \exp -i \int_0^{\tau} F_{mn}(t') dt'. \quad (\text{G.9})$$

Por outro lado podemos escrever de (G.8)

$$\hat{\alpha}_{mn}(\tau) = \tilde{\alpha}_{mn}(0) + \sum_{kl \neq mn} \widehat{W}_{mn,kl}(\tau) \hat{\alpha}_{kl}(0), \quad (\text{G.10})$$

onde

$$\widehat{W}_{mn,kl}(\tau) = \int_0^{\tau} \widehat{W}_{mn,kl}^0(\tau') d\tau'. \quad (\text{G.11})$$

Combinando (G.10) e (G.8) achamos uma equação para $\widehat{W}_{mn,kl}(\tau)$ em forma intergral,

$$\widehat{W}_{mn,kl}(\tau) = \int_0^{\tau} W_{mn,kl}^0(\tau') d\tau' + \int_0^{\tau} \sum_{ij \neq mn} W_{mn,ij}^0(\tau') \widehat{W}_{ij,kl}(\tau') d\tau', \quad (\text{G.12})$$

que junto à expressão que define $\alpha_{mn}(\tau)$,

$$\alpha_{mn}(\tau) = \alpha'_{mn} + \sum_{kl \neq mn} \widehat{W}_{mn,kl}(\tau) \alpha'_{kl} e^{-i\omega_{mn}\tau}, \quad (\text{G.13})$$

onde

$$\alpha'_n = \alpha_n(0), \quad \alpha'_m = \alpha_m(0), \quad (\text{G.14})$$

compõem a solução (formal) da equação de movimento. Portanto bastará usar algum método que permita encontrar uma solução explícita do conjunto de equações integrais (G.12) para termos resolvido completamente o problema.

Procedendo em forma similar ao tratamento anterior e propondo inicialmente a decomposição

$$\alpha_{mn}^*(\tau) = \tilde{\alpha}_{mn}^*(\tau) \exp \{i\omega_{mn}(\tau - t_0)\}, \quad (\text{G.15})$$

podemos calcular as soluções para α_m^* .

Apêndice H

Cálculo da Função de Espalhamento

Para o cálculo da função de espalhamento

$$S_{i,j}(\omega, \omega') = \sum_{mn,kl} \mathcal{M}_{i,j}(mn,kl) \delta(\omega - \omega_{mn}) \delta(\omega' - \omega_{kl}), \quad (\text{H.1})$$

devemos obter primeiramente os elementos que compõem $\mathcal{M}_{i,j}(mn,kl)$ e que são dados pelas relações

$$\mathcal{M}_{i,j}(mn,kl) = |G_{mn,kl}^{(i,j)}|^2 \quad (\text{H.2})$$

onde

$$G_{mn,kl}^{(i,j)} = \int \eta_{mn} \partial_{i,j} \eta_{kl} d^2 r. \quad (\text{H.3})$$

Na expressão anterior as funções η possuem a forma (4.22). Por outro lado, ao estarmos lidando com um modelo isotrópico, as componentes \mathbf{x} e \mathbf{y} de $\mathbf{G}_{mn,kl}$ são iguais e, portanto, bastará calcular uma delas. Por exemplo,

$$G_{mn,kl} = \int_0^L r dr \int_0^{2\pi} d\theta u_{kl}^* \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_{mn}. \quad (\text{H.4})$$

Substituindo as soluções (4.22) na expressão anterior, integrando e considerando valores de $R \rightarrow \infty$ obtemos que

$$\begin{aligned} G_{mk,lk'} &= \frac{\pi^2 \delta_{l,m\pm 1}}{L^2 \sqrt{kk'}} \left[\Lambda_{lm}^{(1)} \mathcal{P} \frac{k}{k+k'} + i\pi k [\Lambda_{lm}^{(2)} \delta(k-k') - i\pi k \Lambda_{lm}^{(3)} \delta(k+k')] - \Lambda_{lm}^{(4)} \mathcal{P} \frac{k}{k-k'} \right] \\ &+ \frac{\pi^2 \delta_{l,m}}{L^2 \sqrt{kk'}} \left[i \frac{\pi}{2} \Lambda_{lm}^{(2)} + (C_i(k-k') \Lambda_{lm}^{(4)} - C_i(k+k') \Lambda_{lm}^{(6)}) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

onde $C_i(k)$ é definida por

$$C_i(k) = \int_{\lambda}^L \frac{\cos kt}{t} dt \quad (\text{H.6})$$

e o conjunto de expressões $\Lambda^{(n)}$ são definidas como

$$\Lambda^{(1)} = e^{i\frac{\pi}{2}(l+m)} e^{2i\delta_m} + e^{2i\delta_l} e^{-i\frac{\pi}{2}(l+m)} \quad (\text{H.7})$$

$$\Lambda^{(2)} = e^{i\frac{\pi}{2}(l-m)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(l-m)} e^{2i(\delta_l - \delta_m)} \quad (\text{H.8})$$

$$\Lambda^{(3)} = e^{i\frac{\pi}{2}(l+m)} e^{2i\delta_m} + e^{2i\delta_l} e^{-i\frac{\pi}{2}(l+m)}. \quad (\text{H.9})$$

$$\Lambda^{(4)} = e^{i\frac{\pi}{2}(l-m)} + e^{-i\frac{\pi}{2}(l-m)} e^{2i(\delta_l - \delta_m)} \quad (\text{H.10})$$

$$\Lambda^{(5)} = \Lambda^{(2)} + e^{2i\delta_l} e^{-i\frac{\pi}{2}(l+m)} - e^{-2i\delta_m} e^{i\frac{\pi}{2}(l+m)} \quad (\text{H.11})$$

$$\Lambda^{(6)} = e^{i\frac{\pi}{2}(l+m)} e^{-2i\delta_m} + e^{2i\delta_l} e^{-i\frac{\pi}{2}(l+m)} \quad (\text{H.12})$$

A expressão (H.5) permite obter uma versão continua de (4.153) para a matriz de decaimento na forma

$$S_{i,i}(\omega, \omega') = \frac{L^4}{4\pi^2} \sum_{ml} \int k dk \int k' dk' |G_{mk, lk'}|^2 \delta(\omega - \Omega_k) \delta(\omega' - \Omega_{k'}), \quad (\text{H.13})$$

onde

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2M} + \frac{g\mu B}{\hbar}. \quad (\text{H.14})$$

Usando (H.5)-(H.9) podemos achar uma expressão analítica para (H.13) e assim obter $S_{i,i}(\omega, \omega')$ que ao mesmo tempo nos permite calcular $A_{i,i}$ em termos das variáveis φ e η . Então, tomando o limite que define $A_{i,i}$ na expressão (4.160) teremos

$$A_{i,i}(\varphi) = \left(\frac{\pi M}{\hbar}\right)^2 \mathcal{G}(\varphi) \varphi^2, \quad (\text{H.15})$$

onde

$$\mathcal{G}(\varphi) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2(\delta_{m+1} - \delta_m), \quad (\text{H.16})$$

aqui os desvios de fase δ_m são também funções de φ .

Bibliografia

- [1] M.D. Kostin, J. Chem. Phys. **57** 3589 (1972).
- [2] E. Nelson, Phys. Rev. **150** 1066 (1966).
- [3] K. Yasue, Annals of Physics **114** 479 (1978).
- [4] H. Dekker, Phys. Rev. A **16** 2116 (1977).
- [5] I.R. Senitzky, Phys. Rev. **119** 670 (1960).
- [6] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** 423 (1965).
- [7] H. Haken, Rev. Mod. Phys. **47** 67 (1975).
- [8] A.O. Caldeira, and J.L. Leggett, *Physica* **121A**, 587 (1983).
- [9] N.H. Christ, and T.D. Lee, *Phys.Rev.D* **12**, 1606 (1975) e as referências nele citadas.
- [10] A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira *Phys. Rev. E*, **48** 4037 (1993).
- [11] J. F. Dillon Jr. in “Magnetism,” ed. by G. T. Rado and H. Suhl, *Academic Press Inc. Vol. III* (1963).
- [12] S.L. Sondhi, A. Karlhede, and S.A. Kivelson, *Phys.Rev B* **47** 16419 (1993).
- [13] M. Desposito, A. Villares Ferrer, A.O. Caldeira and A.H. Castro Neto, condmat/9903143.
- [14] A.A. Belavin, and A.M. Polyakov, *JETP Lett* **22** 245 (1975).
- [15] A. Villares Ferrer and A.O. Caldeira, condmat/9903192.
- [16] H.G. Whitham, *Linear and non linear Waves*, John Wiley and Sons, NY 1974.

-
- [17] R. Rajaraman in “Solitons and Instantons,” (North Holland, Amsterdam, 1992).
- [18] R.F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys.Rev* **D10**, 4114(1974)
- [19] R.F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys.Rev* **D10**, 4130(1974)
- [20] K. Cahill, *Phys.Lett.* **53B**, 174 (1974).
- [21] J. Goldstone, and R. Jackiw, *Phys.Rev.* **D11**, 1486 (1975)
- [22] A.M. Polyakov, *Pisma v. Zh. E.T.F.*, **20**, 430 (1975)
- [23] A.M. Polyakov, *Phys.Lett.* **59B**, 82 (1975).
- [24] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Addison-Wesley (1991).
- [25] S. Coleman, *Comm. Math. Phys.* **55**, 113, 1977.
- [26] A. Barone, F. Esposito, C.J. Magee and A.C. Scott, *Riv. Nuovo Cim.* **1**, 227, 1971.
- [27] A.C. Scott, F.Y.F. Chiu and D.W. Mclaughlin, *Proc I.E.E.E.* **61**, 1443, 1973.
- [28] J.K. Perring and T.H.R Skyrme, *Nucl. Phys.* **31**, 550, 1962
- [29] R. Rajaraman, *Phy. Rev. Lett.* **42**, 200, 1979.
- [30] E. Fradkin, and M.Stone, *Phys.Rev.B* (**1988**).
- [31] J.P. Rodriguez, *Phys.,Rev.B* **41** 7326 (1990).
- [32] R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 200, 1979.
- [33] G.H. Derrick *J. Math. Phys.* **5**, 1252, 1964.
- [34] M. Creutz, *Phys Rev* **D12**, 3126 (1975).
- [35] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley (1963).
- [36] L. D. Landau and E. M. Lifshitz in “Electrodynamics of the Continuous Media,” *Pergamon Press Ltd.*, (1960).
- [37] J.P. Sinnecker, Tese de Doutorado, IFGW, 1995.
- [38] A.H. Eschenfelder, *Magnetic Buble Technology*, Berlim Springer (1980).

-
- [39] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Physik A," *Soviet Union* 8, 153, (1935).
- [40] A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira *Phys. Rev. Lett.*, **67** 1960 (1991).
- [41] A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira *Phys. Rev. B*, **46** 8858 (1992).
- [42] J.M.Winter, *Phys. Rev* **124**, 452 (1962).
- [43] K.A.Long and A.R.Bishop, *J.Phys.A* **12**, 1325 (179).
- [44] H. Braun, *Phys. Rev. B* **50**, 16485 (1994).
- [45] A.O. Caldeira, and J.L. Leggett, *Ann.Phys.* (NY) **149**,347 (1983).
- [46] A.O. Caldeira, and A.H. Castro Neto, *Phys.Rev.B* **52**, 4198 (1995).
- [47] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [48] H.J. Lipkin, *Quantum Mechanics: New Approaches to Selected Topics*, North-Holland, Amsterdam (1973).
- [49] K. Gottfried "Quantum Mechanics: Vol I" (W.A.Benjamin Inc, New York, 1966)
- [50] G. Barton, *J.Phys.A* **18** 479 (1985)
- [51] Y. S. Kivshar, D. E. Pelionovsky, T. Creteghy and M. Peyrard, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5032 (1998).
- [52] A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira *Phys. Rev. B*, **50** 4863 (1994).
- [53] T. Chakraborty and P.Pietiläinen, *The Quantum Hall Effects*, Springer-Verlag (1995).
- [54] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys.Rev.Lett.* **45** 494 (1980).
- [55] D.C. Tsui, H.L. Störmer, and A.C. Gossard, *Phys.Rev.Lett.* **48** 1559 (1982).
- [56] R.E. Prange and S.M. Girvin eds, *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, 1987.
- [57] A. Usher, R.J. Nicholas, J.J. Harris, and C.T. Foxon, *Phys.Rev B* **41**, 1129 (1990)
- [58] A. Karlhede, S.A. Kivelson, and S.L. Sondhi, *The Quantum Hall Effect: The Article*, Lectures presented at the 9th Jerusalem Winter School on Theoretical Physics 1992.

-
- [59] T.H.R. Skyrme, *Proc. R. Soc. London Ser. A*:**247**, 260 (1958).
- [60] J. Dziarmaga *Phys.Rev B* **53** 12973 (1996).
- [61] K. Yang, and S.L. Sondhi *Phys.Rev B* **54** R2332 (1996).
- [62] W. Apel, and Yu. A. Bychkov **Cond-Mat**/9610040.
- [63] H.A. Ferting, L. Brey, R. Côté, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **50**, 11018 (1994).
- [64] H.A. Ferting, L. Brey, R. Côté, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1572 (1996).
- [65] A.G. Green, I.I. Kogan, and A.M. Tsvelik, *Phys. Rev. B* **54**, 16838 (1996).
- [66] X.C. Xie and S. He, *Phys. Rev. B* **53**, 1046 (1996).
- [67] D. Lillehök, K. Lejnell, A. Karlhede, and S.L. Sondhi **Cond-Mat**/9704121.
- [68] R.K. Kamilla, X.G. Wu, J.K. Jain, *Solid State Commun.* **99**, 283 (1996).
- [69] W. Greiner, and B. Müller, *Quantum Mechanics (Symmetries)*, Springer-Verlag, 1989.
- [70] L.S.Schulman, *Thecnics and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons 1981.
- [71] S.C. Zhang, T.H. Hansson, and S. Kivelson, *Phys.,Rev.,Lett.* **62** 82 (1989).
- [72] D-H. Lee, and C.L. Kane, *Phys.,Rev.,Lett.* **64** 1313 (1990).
- [73] M. Stone, *Phys.Rev B* **53** 16573 (1996).
- [74] S.E. Barrett, R. Tycko, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys.Rev.Lett* **72** 1368 (1994)
- [75] C.P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance*, Springer-Verlag, 1992.
- [76] R. Tycko, S.E. Barrett, G. Dabbagh, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Science* **268** 1460 (1995)
- [77] D.R. Leadly, R.J. Nicholas, D.K. Maude, A.N. Utjuzh, J.C. Portal, J.J. Harris, and C.T. Foxon. **Cond-Mat**/9805357.
- [78] R.P. Feynman, and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill 1965
- [79] A.O. Caldeira, *Alguns Aspetos da Dinâmica Quântica de uma Partícula Browniana*, Notas de Física do IFGW 7, 1994.

-
- [80] V. Hakim, and V. Ambegaokar, *Phys.Rev.A* **32**, 423 (1985).
- [81] B.M. Hennion and F. Kajzar, *Neutron Scattering*, Proc. Symp. II 171 (1977).
- [82] M. Stainer, B. Doner and J. Villain, *J. of Phys.C* **8**, 165 (1975).
- [83] I.S.Gradsteyn and I.M.Ryshik, "Table of Integrals, Series and Products" (Academic Press, New York, 1965).
- [84] J.R. Klauder, and B.-S. Skagerstam, *Coherent States*, World Scientific 1985.
- [85] J.W. Negele, and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Adison-Wesley 1988.
- [86] L.G.C. Melo, and A.D. Santos, *Materials Science Forum* **302-303** 219 (1999).