



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

VICTOR GUSTAVO RAMOS COSTA DOS SANTOS

Investigação dos Defeitos em Cristais Fonônicos Uni e Bidimensionais

CAMPINAS

2020

VICTOR GUSTAVO RAMOS COSTA DOS SANTOS

Investigação dos Defeitos em Cristais Fonônicos Uni e Bidimensionais

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VICTOR GUSTAVO RAMOS COSTA DOS SANTOS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ MARIA CAMPOS DOS SANTOS.

CAMPINAS

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Sa59i Santos, Victor Gustavo Ramos Costa dos, 1994-
Investigação dos defeitos em cristais fonônicos uni e bidimensionais /
Victor Gustavo Ramos Costa Dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: José Maria Campos Dos Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade
de Engenharia Mecânica.

1. Estruturas periódicas. 2. Cristais fonônicos. 3. Cristais - Defeitos. 4.
Materiais - Propriedades mecânicas. I. Santos, José Maria Campos dos, 1953-
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.
III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Investigation of defects in one- and two-dimensional phononic crystal

Palavras-chave em inglês:

Periodic structures

Phononic crystals

Crystals - Defects

Materials - Mechanical properties

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

José Maria Campos Dos Santos [Orientador]

José Roberto de França Arruda

Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira

Arruda, José Roberto de França

de Oliveira, Leopoldo Pisanelli Rodrigues

Data de defesa: 17-09-2020

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-5453-5121>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1161120134917412>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Investigação dos Defeitos em Cristais Fonônicos Uni e Bidimensionais

Autor: Victor Gustavo Ramos Costa Dos Santos

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos

DMC - Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

DMC - Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira

SEM - Escola de Engenharia de São Carlos - USP

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 17 de setembro de 2020.

Dedico este trabalho à minha família pelo amor, por toda ajuda e compreensão em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é a conclusão de uma etapa de muito aprendizado, na qual tive o privilégio de me inspirar, compartilhar ideias e receber o apoio de diversas pessoas. Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela saúde, bem-estar e proteção que foram essenciais, principalmente durante a etapa final desta dissertação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Maria Campos Dos Santos (Prof. Zema), por me proporcionar uma orientação extremamente cativante, amigável e inspiradora desde o início de nossos trabalhos. Obrigado pela confiança depositada, por se disponibilizar em tirar algumas dúvidas, pelos conselhos, reuniões e, sobretudo, pela paciência durante esse percurso.

Aos meus pais, José Ribamar e Valdenildes, pelo incentivo, dedicação, por me darem liberdade, apoio e por terem sido incansáveis companheiros ao longo de todos os momentos de minha vida.

Ao meu irmão, Guilherme Augusto, pelas horas de conversa, parceria na jogatina e pelo incentivo constante.

Agradeço à Júlia Carvalho, por ser a pessoa que deu sentido à palavra companheirismo. Onde, durante esta caminhada, esteve presente nos melhores momentos de minha vida.

A todos os professores, colegas e funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) e, em especial, aos do Departamento de Mecânica Computacional (DMC), que me ajudaram direta e indiretamente nas disciplinas e eventos dos quais participei, estes que se mostraram fundamentais para finalização deste trabalho.

Aos meus amigos de laboratório, em especial ao Adriano Goto pela amizade, horas de conversa e pela ajuda em muitos momentos, ao Edilson Nóbrega, Giovanna Zaroni e Luiz Marra. Aos amigos maranhenses que fiz em Campinas, Alyson, Breno, Cláudia, Brenda e Mavd.

Aos Prof. Dr. José Roberto Arruda (FEM/UNICAMP), Prof. Dr. Edson Jansen (IFMA) e ao Prof. Dr. Leopoldo Pisanelli (USP), por fazerem parte das bancas que avaliaram e por contribuírem com suas sugestões para melhoria desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Vilson Souza (UFMA), que me deu muito suporte, oportunidades e incentivo para vida acadêmica, sendo meu orientador durante a graduação, e foi a pessoa que me apresentou ao Prof. Zema.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo no 130643/2019-0.

“Tudo era tão novo, toda ideia de ir para o espaço era nova e ousada. Não havia livros didáticos, então tivemos que escrevê-los.”

Katherine Johnson

RESUMO

A propagação de ondas elásticas em uma estrutura está diretamente relacionada às propriedades mecânicas dos materiais e da geometria constituinte da mesma. Sabe-se que estruturas periódicas possuem características particulares, principalmente quando se refere à questão da propagação de ondas. Por exemplo, é possível criar bandas de frequências onde não ocorre a propagação de ondas. Este fenômeno é denominado como região de banda proibida, sendo mais conhecido pela expressão na língua inglesa *band gap*. Tal conceito foi apresentado inicialmente em estudos envolvendo a teoria eletrônica de bandas no domínio da fotônica e só depois implementado em aplicações mecânicas. Mais recentemente, pesquisas sobre alterações em estruturas periódicas ou quasi-periódicas demonstraram uma oportunidade de investigação dos modos topológicos, bem como os modos de defeito. Este trabalho restringe-se à investigação dos modos de defeito, aqui sendo caracterizado a partir da quebra da periodicidade do cristal fonônico. O sistema da estrutura mostra-se sensível às alterações da periodicidade. Portanto, pode-se encontrar tanto modos isolados onde a vibração é concentrada, como variações nos níveis de atenuação das ondas. Assim, será investigada a influência da alteração dos parâmetros da geometria e dos materiais constituintes de apenas uma célula unitária formadora dos cristais fonônicos, ou seja, trata-se da inserção de uma célula defeituosa na estrutura unidimensional. Para os cristais fonônicos bidimensionais (modelados pela inclusão de espalhadores cilíndricos de Al_2O_3 em uma matriz de resina epóxi), o defeito será criado a partir da remoção de algumas inclusões. As análises computacionais serão realizadas utilizando o Método do Elemento Espectral (SEM), para os cristais fonônicos unidimensionais e o Método de Expansão em Ondas Planas (PWE), para os casos bidimensionais.

Palavras-chave: Estruturas periódicas; cristais fonônicos; modos de defeitos; quebra da periodicidade.

ABSTRACT

The propagation of elastic waves in a structure is directly related to the mechanical properties of the materials and its constituent geometry. It is known that periodic structures have particular characteristics, especially when it comes to the issue of wave propagation. For example, it is possible to create frequency bands where wave propagation does not occur. This phenomenon is called region of prohibited band, being better known by the expression *band gap*. This concept was initially presented in studies involving electronic band theory in the field of photonics and only later implemented in mechanical applications.. This concept was initially presented in studies involving electronic band theory in the field of photonics and only later implemented in mechanical applications. More recently, research on changes in periodic or quasi-periodic structures has demonstrated an opportunity for investigation into topological modes as well as defect modes. This work is restricted to the investigation of defect modes, here it is characterized by breaking the periodicity of the phononic crystal. The structure system is sensitive to changes in periodicity. Therefore, one can find both isolated modes where the vibration is concentrated, and variations in the levels of attenuation of the waves. Thus, the influence of changing the parameters of the geometry and of the constituent materials of only one unitary cell forming phononic crystals will be investigated, that is, it is the insertion of a defective cell in the one-dimensional structure. For two-dimensional phononic crystals (modeled by the inclusion of Al_2O_3 cylindrical scatters in an epoxy resin matrix), the defect will be created by removing some inclusions. The computational analyzes will be performed using the Spectral Element Method (SEM), for one-dimensional phononic crystals and the Plane Wave Expansion Method (PWE), for two-dimensional cases.

Keywords: Periodic structures; phononic crystals; defect modes; break of periodicity;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Periodicidade na natureza: (a) arranjo hexagonal dos favos de mel; (b) teia de aranha do tipo orbe (esférico); (c) vista aérea de plantações.	19
Figura 1.2 – Periodicidade em projetos de engenharia: (a) trilhos de trens; (b) estrutura da fuselagem de uma aeronave; (c) vista aérea do Estádio Nacional de Brasília “Mané Garrincha”; (d) arranjo de painéis solares para geração de energia elétrica.	20
Figura 1.3 – Exemplos de: (a) fibra óptica de cristal fonônico (BERAVAT <i>et al.</i> , 2016); (b) cristal sônico formado a partir da composição de espalhadores cilíndricos verticais (SPIOUSAS <i>et al.</i> , 2015); (c) cristal fonônico bidimensional atuando como guia de onda (GKANTZOUNIS; FLORESCU, 2017); (d) metamaterial composto pelo acoplamento de ressonadores sobre um placa metálica (BILLON <i>et al.</i> , 2019).	21
Figura 1.4 – Modelos de cristal sônico 2D (a) sem defeitos; com defeitos: (b) pontual central; (c) defeito linear (SHELKE <i>et al.</i> , 2014).	24
Figura 1.5 – Sistema de metamaterial acústico e modo de onda do defeito concentrado. Adaptado de Qi <i>et al.</i> (2016).	25
Figura 2.1 – Representação da estrutura do cristal fonônico unidimensional constituído por células unitárias distribuídas ao longo da direção longitudinal; em detalhe, tem-se a relação dos deslocamentos e forças nos nós do lado esquerdo (L) e direito (R) da i -ésima célula unitária, i	27
Figura 2.2 – Convenção de sinais para um elemento de barra (LEE, 2009).	30
Figura 2.3 – Exemplo da relação dos nós e elementos que constituem uma célula unitária, neste caso assimétrica: dois elementos (1) e (2), três nós.	31
Figura 2.4 – Convenção de sinais para um elemento de viga (LEE, 2009).	33
Figura 2.5 – Cristal fonônico 2D com detalhe para representação da célula unitária (tracejada na cor preta) e de uma matriz de 4x4 inclusões formando a supercélula (tracejada na cor vermelha).	35
Figura 2.6 – Cristal fonônico bidimensional do tipo placa fina com rede quadrada.	36
Figura 2.7 – Representação da primeira zona irreduzível de Brillouin (FIBZ) para o cristal fonônico 2D com uma rede quadrada.	37
Figura 2.8 – Cristal fonônico 2D do tipo placa fina com defeito pontual.	39
Figura 2.9 – Cristal fonônico 2D do tipo placa fina com defeito de linha reta, considerando-se uma rede quadrada.	40
Figura 2.10 – Cristal fonônico 2D do tipo placa fina com defeito linear oblíquo, considerando-se uma rede quadrada.	41

Figura 3.1 – Elemento de barra homogêneo e de seção transversal uniforme; em detalhe tem-se a célula unitária.	43
Figura 3.2 – (a) Diagrama de dispersão e (b) resposta forçada baseada na transmissibilidade da barra homogênea de seção transversal uniforme.	43
Figura 3.3 – (a) Cristal fonônico tipo barra (excitação e medição na direção longitudinal) com cinco (5) células unitárias; (b) esquema dos parâmetros da célula unitária em detalhe.	44
Figura 3.4 – (a) Diagrama de dispersão e (b) resposta forçada baseada na transmissibilidade para o cristal fonônico (saudável) composto por 5 células unitárias. . .	45
Figura 3.5 – Diagrama de dispersão para as seguintes razões de comprimento: (a) 90%; (b) 80%; (c) 50%; (d) 40%; (e) 20%; (f) 10%.	46
Figura 3.6 – Comparação entre as respostas forçadas para a redução do comprimento da célula defeituosa.	47
Figura 3.7 – Diagrama de dispersão para as seguintes razões de comprimento: (a) 110%; (b) 140%; (c) 170%; (d) 200%.	48
Figura 3.8 – Comparação entre as respostas forçadas para o aumento do comprimento da célula defeituosa.	49
Figura 3.9 – Comparação entre as respostas forçadas para o redução de diâmetro da célula defeituosa.	50
Figura 3.10–Comparação entre as respostas forçadas para o aumento de diâmetro da célula defeituosa.	50
Figura 3.11–Comparação entre as respostas forçadas para um cristal fonônico tipo barra composto por cinco (5) células; célula defeituosa variando para cada uma das posições das células dentro da estrutura.	51
Figura 3.12–(a) Cristal fonônico; (b) esquema dos parâmetros da célula unitária em detalhe.	52
Figura 3.13–(a) Diagrama de dispersão e (b) resposta forçada do cristal fonônico saudável (100%L) - viga.	53
Figura 3.14–Comparação entre as respostas forçadas para a redução do comprimento da célula defeituosa.	53
Figura 3.15–Comparação entre as respostas forçadas para a aumento do comprimento da célula defeituosa.	54
Figura 3.16–Comparação entre as respostas forçadas para a redução do diâmetro da célula defeituosa.	55
Figura 3.17–Comparação entre as respostas forçadas para a aumento do diâmetro da célula defeituosa.	55
Figura 3.18–(a) Cristal fonônico baseado na mudança de material; (b) célula unitária e identificação de parâmetros geométricos.	56
Figura 3.19–(a) Diagrama de dispersão da cristal fonônico saudável (100% R_f) tipo viga com mudança de material; (b) resposta forçada baseada na transmissibilidade.	57

Figura 3.20–(a) Célula unitária com razão de preenchimento de 100%; (b) célula unitária com razão de preenchimento de 150%.	58
Figura 3.21–Comparação entre as respostas forçadas para a redução da razão de preenchimento da célula defeituosa.	58
Figura 3.22–Comparação entre as respostas forçadas para o aumento da razão de preenchimento da célula defeituosa.	59
Figura 3.23–Respostas forçadas dos cristais fonônicos formado a partir da mudança de material (apenas materiais metálicos na célula defeituosa), com defeito na primeira célula unitária.	60
Figura 3.24–Respostas forçadas dos cristais fonônicos formado a partir da mudança de material (polímeros e madeiras formam a célula defeituosa), com defeito na primeira célula unitária.	61
Figura 3.25–Comparação entre as respostas forçadas para um cristal fonônico tipo viga composto por quatro (4) células; célula defeituosa variando para cada uma das posições.	61
Figura 3.26–Estruturas de banda dos exemplos da super célula do cristal fonônico com as seguintes configurações da razão r_d/r_o : (a) saudável (100%); (b) 80%; (c) 60%; (d) 40%; (e) 20%; (f) 0%.	63
Figura 3.27–Modos de onda de Bloch para o cristal fonônico 2D para r_d/r_o : (a) 100%;(b) 80%;(c) 60%;(d) 40%;(e) 20%;(f) 0%.	64
Figura 3.28–Diagrama de dispersão compreendendo a faixa de frequência normalizada: (a) $\omega a/c_t$ de 0 a 0,33; (b) detalha apenas para $\omega a/c_t$ 0,1 a 0,18, e para presença de modos guiados.	65
Figura 3.29–Modo de onda guiado causado pelo defeito de linha reta no cristal fonônico:(a) vista de topo; (b) vista em perspectiva.	65
Figura 3.30–Diagrama de dispersão compreendendo a faixa de frequência normalizada: (a) $\omega a/c_t$ de 0 a 0,22; (b) faixa de frequência normalizada detalhada apenas para $\omega a/c_t$ 0,1 a 0,16, onde há a presença de um modo localizado (retângulo vermelho) e três modos guiados (retângulo azul).	66
Figura 3.31–Modo de onda guiado causado pelo defeito de linear oblíquo no cristal fonônico:(a) vista de topo; (b) vista em perspectiva.	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros do material (poliacetal) constituinte da estrutura homogênea e parâmetros geométricos do cristal fonônico.	43
Tabela 3.2 – Parametrização da razão de redução no comprimento da célula defeituosa. .	45
Tabela 3.3 – Parametrização da razão de aumento no comprimento da célula defeituosa. .	47
Tabela 3.4 – Parametrização da razão de redução e aumento no diâmetro da célula defeituosa.	49
Tabela 3.5 – Parâmetros dos materiais constituinte do cristal fonônico.	56
Tabela 3.6 – Parâmetros geométricos da célula unitária do cristais fonônico.	56
Tabela 3.7 – Valores para razão de preenchimento e os respectivos comprimentos dos elementos “A” e “B” [mm].	57
Tabela 3.8 – Parâmetros dos materiais utilizados na célula defeituosa.	60
Tabela 3.9 – Propriedades mecânicas dos materiais: matriz epóxi e inclusões de Al_2O_3 . .	62
Tabela 3.10–Parâmetros de material da placa fina para cristal fonônico 2D - matriz epóxi e inclusões de Al_2O_3	62

LISTA DE ABREVIACOES E ACRONIMOS

Matrizes e Vetores

- \mathbf{A}_{k+g} - autovetores do PWE
- \mathbf{A}_B - matriz do sistema dependente da frequência - elemento de viga
- \mathbf{A}_R - matriz do sistema dependente da frequência - elemento de barra
- \mathbf{F} - vetor de forças normais
- \mathbf{F}_L - vetor de forças relacionadas ao lado esquerdo
- \mathbf{F}_R - vetor de forças relacionadas ao lado direito
- H_{g_2} - matriz de Toeplitz
- K - vetor do número de onda
- \mathbf{P} - matriz de parâmetros periódicos do PWE
- \mathbf{Q} - matriz de parâmetros periódicos do PWE
- r - vetor de posição
- \mathbf{S}_B - matriz do elemento espectral de viga
- \mathbf{S}_c - matriz do rigidez espectral de uma célula
- \mathbf{S}_R - matriz do elemento espectral de barra
- \mathbf{T} - matriz de transferência
- \mathbf{T}_B - matriz de transferência - elemento de viga
- \mathbf{T}_R - matriz de transferência - elemento de barra
- \mathbf{U} - vetor de deslocamentos longitudinais - barra
- \mathbf{u}_L - vetor de deslocamentos relacionados ao lado esquerdo
- \mathbf{u}_R - vetor de deslocamentos relacionados ao lado direito
- \mathbf{V} - vetor de deslocamentos transversais - viga
- \mathbf{W} - vetor de deslocamentos transversais - placa
- \mathbf{Y}_L - vetor de espaço de estados (extremidade esquerda)
- \mathbf{Y}_R - vetor de espaço de estados (extremidade direita)

Letras Latinas

- A - área da seção transversal
- a - constante da rede quadrada
- D - rigidez à flexão
- E - módulo de Young do material
- E_c - módulo de Young complexo
- f - razão de preenchimento da célula unitária 2D
- f_d - razão de preenchimento da célula defeituosa 2D
- $F_{\mathbf{g}_2}$ - função da estrutura da célula unitária 2D
- $F_{\mathbf{g}_2}^d$ - função da estrutura da célula defeituosa 2D
- f - razão de preenchimento da célula unitária
- f_c - fator de preenchimento da célula unitária
- f_d - fator de preenchimento da célula defeituosa
- \mathbf{g} - vetor de rede recíproca 2D
- h - espessura da placa
- I - momento de inércia
- j - número imaginário
- k - número de onda de Bloch
- k_B - número de onda - elemento de viga
- k_R - número de onda - elemento de barra
- L - extremidade esquerda
- L - comprimento do elemento ou da estrutura
- L_c - comprimento da célula unitária
- m - representação de esquerda ou direita
- M - momento de fletor da viga
- n - número de graus de liberdade
- Q - força de cisalhamento (cortante)
- R - extremidade direita
- r_o - raio da inclusão cilíndrica
- R_f - razão do fator de preenchimento
- u - deslocamento no domínio da frequência - elemento de barra
- v - deslocamento no domínio da frequência - elemento de viga

Letras Gregas

- α - parametrização da densidade e espessura da placa
- β - parametrização da razão de Poisson e rigidez à flexão
- γ - parametrização entre rigidez à flexão e razão de Poisson
- η - fator de amortecimento estrutural do material
- μ - coeficiente de atenuação
- ν - razão de *Poisson*
- ρ - densidade do material
- Θ - rotação da viga
- ω - frequência angular
- ω_n - frequência angular discreta

Acrônimos

- BEM - método dos elementos de contorno
- EPWE - método de expansão em ondas planas expandido
- FDTD - método das diferenças finitas no domínio do tempo
- FEM - método dos elementos finitos
- MST - teoria dos espalhamentos múltiplos
- PWE - método de expansão em ondas planas
- SEM - método dos elementos espectrais
- PVC - policloreto de vinila

Outras Notações

- 1D - unidimensional
- 2D - bidimensional
- 3D - tridimensional

SUMÁRIO

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	13
1 Introdução	19
1.1 Motivação	19
1.2 Revisão Bibliográfica	22
1.3 Objetivos	25
1.4 Estrutura do Trabalho	25
2 Fundamentação Teórica	27
2.1 Teorema de Bloch-Floquet	27
2.2 Método do Elemento Espectral	28
2.2.1 Elemento de Barra	29
2.2.2 Elemento de Viga	32
2.3 Método de Expansão de Ondas Planas	35
2.3.1 Defeito Pontual	38
2.3.2 Defeito de Linha Reta	39
2.3.3 Defeito Linear Oblíquo	40
3 Resultados Simulados	42
3.1 Cristais fonônicos 1D - Barra	42
3.1.1 Defeitos Geométricos	45
3.2 Cristais Fonônicos 1D - Viga	52
3.2.1 Defeitos Geométricos	53
3.2.2 Defeitos de Material	56
3.3 Cristais Fonônicos 2D - Placa Fina	62
3.3.1 Defeito Pontual	62
3.3.2 Defeito de Linha Reta	65
3.3.3 Defeito Linear Oblíquo	66
4 Conclusões	67
4.1 Trabalhos Futuros	69
4.2 Publicações em Anais de Conferências	70
Referências	71

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

De modo geral, a periodicidade sempre despertou interesse e serviu como alicerce para o desenvolvimento de formulações e no próprio entendimento dos conceitos de física. Por exemplo, Sir Isaac Newton através das investigações que resultaram no livro *Principia*, foi um dos primeiros a estudar estruturas periódicas, uma vez que tentou determinar a velocidade do som no ar utilizando um modelo de sistemas massa-mola acoplados que simbolizavam o meio de propagação (BRILLOUIN, 1953). Ademais, na natureza podemos encontrar arranjos periódicos como os favos de mel que formam as colmeias, Fig. 1.1 (a)¹. Quando comparada com outros polígonos que têm o encaixe perfeito (como sobreposições de triângulos, quadrados e retângulos), estruturas de formato hexagonal são mais eficientes, principalmente quando se trata do aproveitamento de área, bem como a relação com a quantidade de matéria a ser armazenada. Fato que limita o gastos dos recursos (cera) (HALES, 1998).

Outro exemplo são as teias de aranha, que podem ser classificadas em alguns tipos, esses dependem das espécies de aranhas e suas peculiaridades. Normalmente são classificadas em: teias de folhas, emaranhadas, triangulares e esféricas. Frequentemente encontradas e mais comuns em jardins, as teias esféricas (Fig. 1.1 (b)²) são confeccionadas pelas aranhas tecelãs de orbe e podem ser entendidas como uma estrutura com periodicidade radial (BITTEL, 2011). Grosso modo, plantações também podem ser vistas sob o olhar da periodicidade (Fig. 1.1 (c)³). Alguns benefícios que a aplicação desse tipo de estratégia traz implicam na redução da disseminação de pragas, assim como traz mais facilidade para o processo de colheita. Outro caso interessante é relatado no estudo de Oliveira *et al.* (2011), onde observou-se o aumento da produtividade de zonas reflorestas, isso deve-se ao fato de intercalar faixas de eucalipto com plantas de espécimes nativas.

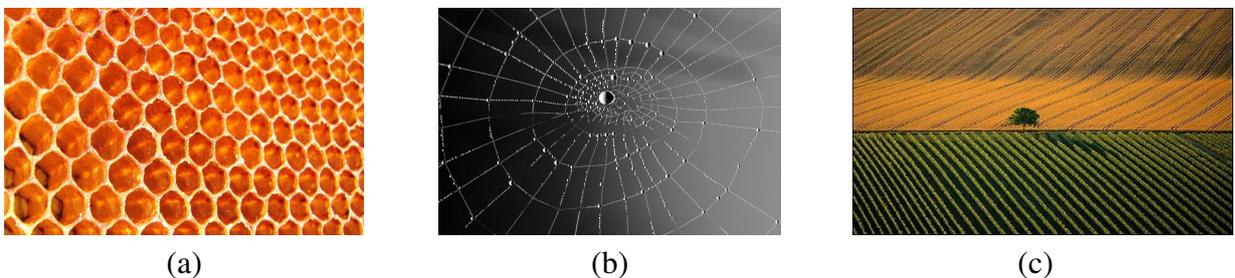


Figura 1.1 – Periodicidade na natureza: (a) arranjo hexagonal dos favos de mel; (b) teia de aranha do tipo orbe (esférico); (c) vista aérea de plantações.

¹ Disponível em: <http://www.crn1.org.br/972191_16739182/>. Acesso em: 01 de jul. 2020

² Disponível em: <<http://origens.org/teias-de-aranha-e-design-inteligente/>>. Acesso em: 16 de jul. 2020

³ Disponível em: <<https://www.pinterest.pt/pin/615656211535798486/>>. Acesso em: 16 de jul. 2020

Muitos sistemas de engenharia também são formados a partir da repetição de apenas um elemento (ou fração) que compõe a estrutura; essa fração pode ser definida como célula unitária. Sendo assim, o sistema composto por tal característica é classificado como uma estrutura periódica. Mencionando aplicações que envolvem esses componentes tem-se: trilhos de linhas férreas na indústria ferroviária, como mostrado na Fig. 1.2 (a)⁴; sistemas de dutos para transporte de fluidos na área de recursos hídricos, bem como na indústria de petróleo e gás; cascos de navios e submarinos, na área naval; fuselagem de aeronaves, apresentado na Fig. 1.2 (b)⁵; em construções civis tem-se o Estádio Nacional de Brasília “Mané Garrincha”, que de maneira simplificada pode ser entendido como uma construção com padrão de repetição radial, apresentado na Fig. 1.2 (c)⁶; no campo da geração de energia elétrica, tem-se a distribuição de painéis solares, Fig. 1.2 (d)⁷, dentre outros diversos exemplos.

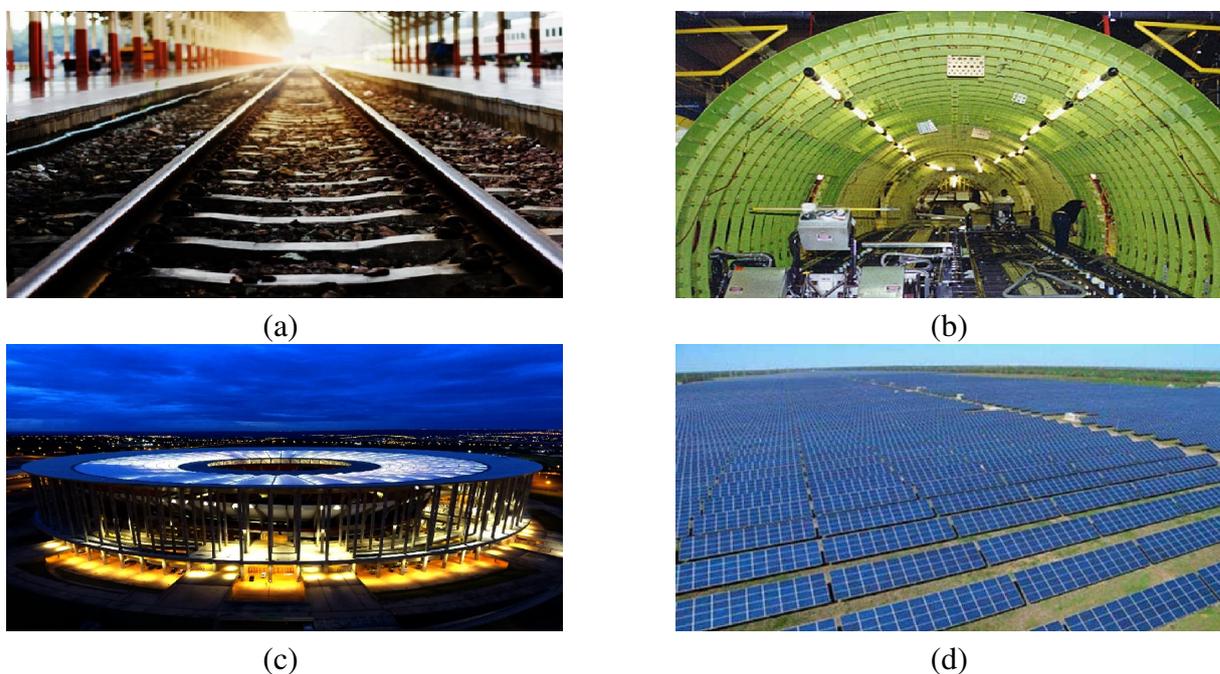


Figura 1.2 – Periodicidade em projetos de engenharia: (a) trilhos de trens; (b) estrutura da fuselagem de uma aeronave; (c) vista aérea do Estádio Nacional de Brasília “Mané Garrincha”; (d) arranjo de painéis solares para geração de energia elétrica.

A partir dos anos 1930, diversas pesquisas foram desenvolvidas envolvendo estruturas periódicas no campo da física do estado sólido e de óptica das ondas. Estas estruturas só passariam a ser chamadas de cristais fotônicos depois de passadas algumas décadas (BENISTY; WEISBUCH, 2006). Tratando-se disso, Brillouin (1953) foi um dos pesquisadores pioneiros e

⁴ Disponível em: <https://image.freepik.com/fotos-gratis/trilhos-de-trem_44895-16.jpg>. Acesso em: 30 de jul. 2020

⁵ Disponível em: <<https://hangamma.com.br/blog/wp-content/uploads/2018/12/estrutura-semi-monocoque.jpg>>. Acesso em: 30 de jul. 2020

⁶ Disponível em: <<https://www.agenciabrasilia.df.gov.br/wp-content/uploads/2020/03/54211c3f-5ce2-4dc2-9254-e2b0ca39ba32.jpg>>. Acesso em: 30 de jul. 2020

⁷ Disponível em: <<https://maranhaohoje.com/wp-content/uploads/2017/11/Energia-696x392.jpg>>. Acesso em: 30 de jul. 2020

concebeu muitos dos conceitos difundidos e utilizados atualmente. Cristais fotônicos são constituídos por arranjos periódicos, possuindo como característica fundamental a propriedade de controlar e limitar a propagação das ondas eletromagnéticas. Essa peculiaridade acontece em função do fenômeno do *band gap*. *Band gaps* são definidos como uma faixa de frequência na qual as ondas não se propagam (LAUDE, 2015), na Fig. 1.3 (a) tem-se um exemplo de uma arranjo da fibra de cristal fotônico, a torção em espiral oferece características adicionais para controle da perda de transmissão, dispersão e o estado de polarização da luz em fibras ópticas (WONG *et al.*, 2012).

O equivalente aos cristais fotônicos para ondas mecânicas são denominados de cristais fonônicos. Nesse caso, as características periódicas podem estar atreladas à variação das propriedades mecânicas como: densidade e módulo de Young, mas também podem ocorrer em função dos parâmetros geométricos. Tais alterações criam uma impedância mecânica de uma para outra seção da estrutura. Assim, sabe-se que o *band gap* também é influenciado pelas dimensões da estrutura, nos cristais ocorrendo mais facilmente em médias e altas frequências.

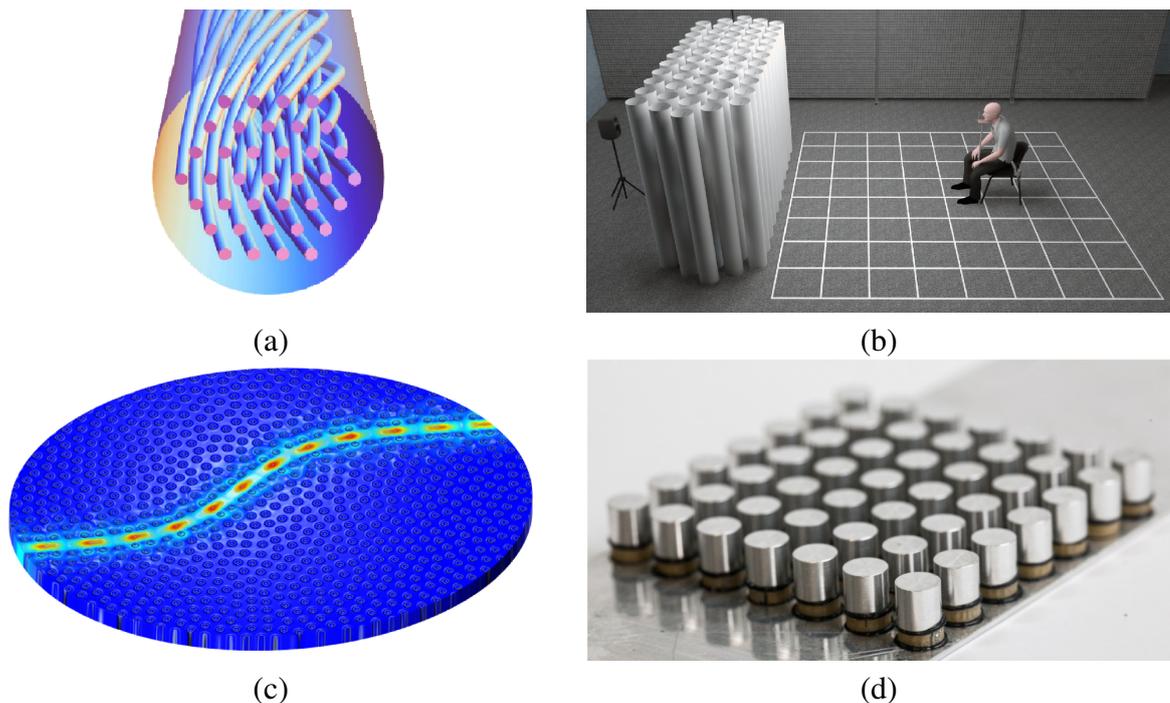


Figura 1.3 – Exemplos de: (a) fibra óptica de cristal fotônico (BERAVAT *et al.*, 2016); (b) cristal sônico formado a partir da composição de espalhadores cilíndricos verticais (SPIOUSAS *et al.*, 2015); (c) cristal fonônico bidimensional atuando como guia de onda (GKANTZOUNIS; FLORESCU, 2017); (d) metamaterial composto pelo acoplamento de ressonadores sobre um placa metálica (BILLON *et al.*, 2019).

Além do mais, outros tipos de estruturas periódicas similares aos cristais fonônicos são: cristais sônicos (baseados em estruturas elásticas que interagem com o ar) e os metamateriais (consistindo no acoplamento de ressonadores em outros elementos como barras, vigas, placas, ...). O trabalho de Spiouzas *et al.* (2015), brevemente representado na Fig. 1.3 (b), con-

sistiu em criar a ilusão de proximidade de uma fonte sonora, criada pela colocação de um cristal sônico entre a fonte e um ouvinte, uma vez que o cristal sônico é um obstáculo formado por espalhadores cilíndricos densamente compactados. Gkantzounis e Florescu (2017) identificaram modos guiados em cristais fonônicos 3D estruturalmente desordenados (Fig. 1.3 (c)). Os metamateriais trazem consigo uma propriedade interessante e muito investigada no controle de vibração e ruído, já que os ressonadores têm a capacidade de serem sintonizados para uma determinada frequência. Billon *et al.* (2019) projetaram um metamaterial adaptativo baseado na combinação de partes metálicas e poliméricas altamente dissipativas, nesse caso as propriedades mecânicas do polímero dependem tanto da temperatura quanto da frequência (Fig. 1.3 (d)).

1.2 Revisão Bibliográfica

Métodos analíticos e numéricos foram desenvolvidos para avaliar o comportamento de estruturas periódicas, usualmente visando a verificação da estrutura de banda (diagrama de dispersão) e a resposta forçada do sistema. Alguns exemplos de trabalhos que utilizam-se de tais métodos para avaliar as estruturas periódicas são: a Teoria de Espalhamentos Múltiplos (*Multiple Scattering Theory* - MST), utilizada por Page *et al.* (2005) para ajustar e determinar a dispersão de pulsos ultrassônicos em cristais fonônicos 3D. Para análise da estrutura de banda e transmissão de ondas elásticas de cristais fonônicos 2D, o Método dos Elementos de Contorno (*Boundary Element Method* - BEM) foi usado pelo Li *et al.* (2018). Outros métodos também foram utilizados como: Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (*Finite-Difference Time-Domain* - FDTD) por Hsieh *et al.* (2006) e Kafesaki *et al.* (2000); Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) por Wu *et al.* (2011); Vasseur *et al.* (1994) e Yao *et al.* (2009) aplicaram a Expansão de Ondas Planas (*Plane Wave Expansion* - PWE) para diferentes tipos de defeitos pontuais em chapas finas. Kafesaki *et al.* (2000) e Deng *et al.* (2019) estudaram defeitos lineares em cristais fonônicos 2D utilizando-se de diversos métodos matemáticos e numéricos. Miranda Jr *et al.* (2019) consideraram a teoria das placas finas de Kirchhoff-Love e estudaram a influência de matrizes periódicas acopladas a ressonadores locais (multi-DOF) pelo método PWE e pelo método de Expansão em Ondas Planas Estendido (EPWE).

Assim como os primeiros estudos sobre estruturas periódicas começaram no campo da fotônica, com os cristais fotônicos, os primeiros estudos envolvendo defeitos foram nessa área. Em 1998, Rouhani *et al.* (1998) investigaram a estrutura de bandas fotônica e eletrônica de um guia de onda semelhante a um “pente”, no qual ramos laterais foram enxertados ao longo de uma guia de onda bidimensional. O guia de ondas periódico, apresenta a abertura na largura de bandas onde não há propagação de ondas, mostrando a presença de *band gaps* que se originam tanto em função da periodicidade do sistema, quanto dos estados ressonantes dos ramos enxertados (que nessa caso desempenham o papel de ressonadores). Grandes *band gaps* em algumas faixas de frequência específicas puderam ser encontrados considerando uma estrutura periódica composta por dois ou mais guias de ondas sucessivos que diferem por suas

características físicas. Quando um ramo de defeito causado por um comprimento diferente era inserido no guia de ondas, observava-se a existência de modos localizados no interior da faixa de frequência correspondente aos *band gaps*. Esses modos localizados, também chamados de defeito aparecem como picos estreitos e de grande amplitude no espectro de transmissão. Rouhani *et al.* (1998) ainda sugeriu que a fabricação de tais guias de ondas poderia ser muito útil, alguns exemplos de dispositivos propostos seriam de filtragem ou de multiplexação⁸. No entanto, essas aplicações estavam mais particularmente ligadas em estruturas integradas de frequências ópticas.

Munday *et al.* (2002) desenvolveram um guia de onda acústico 1D que consistiu na modulação do diâmetro da seção transversal. Assim, a estrutura periódica do guia de onda é composta por células unitárias de duas seções, compreendendo no total cinco (5) repetições. O defeito foi causado pela modificação do comprimento da seção de maior diâmetro da célula unitária central. Com a inserção do defeito, pode-se observar a presença de picos estreitos (modos propagantes) no interior dos *band gaps*. Uma desvantagem dessa característica de ser estreito implica na falta de robustez nos modos de defeito. Consequentemente, pequenas inconsistências nas seções transversais do guia de ondas perturbam a condição de interferência e fazem com que frequências ligeiramente diferentes passem pelas outras partes do guia de ondas, mostrando a alta sensibilidade do sistema. Resultados numéricos e experimentais foram apresentados para comparação. Além disso, Bria e Djafari-Rouhani (2002) apresentaram uma análise teórica para controle de ruído e filtros a partir da ocorrência de reflexão omnidirecional em cristais fonônicos, onde frequências em uma largura de banda podiam ser atenuadas ou mesmo não propagadas.

Já o trabalho de Shelke *et al.* (2014) abordou a avaliação do efeito da distribuição regular e irregular de redes fonônicas nas ondas acústicas, juntamente com a investigação dos fenômenos de reflexão e refração das ondas para padrões específicos de cristais sônicos. Esses consistem de uma matriz quadrada de hastes cilíndricas de PVC alocados numa matriz de ar, utilizou-se um modelo formulado pelo MEF. Através da Fig. 1.4 (a) é possível observar que grande parte das ondas não consegue transpassar o cristal sônico, uma vez que, em função das interferências destrutivas, os *band gaps* ocorrem em certas faixas de frequência. No entanto, quando o defeito é inserido pela remoção do cilindro de PVC situação no centro da estrutura (Fig. 1.4 (b)), observa-se que a região do defeito concentra energia, fazendo com que menos ondas consigam transpassar o obstáculo. E no último caso, Fig. 1.4 (c), encontra-se a estrutura atuando como um guia de ondas, uma vez que a propagação é favorecida apenas no canal onde os cilindros de PVC foram removidos.

⁸ Técnica utilizada para permitir que mais de uma mensagem ocupe o mesmo meio de transmissão.

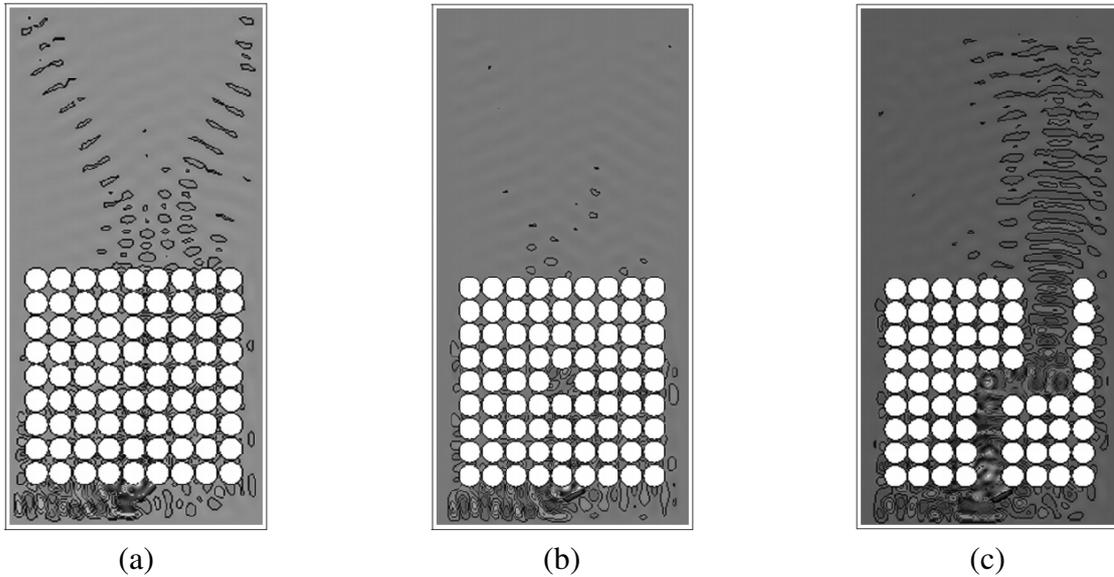


Figura 1.4 – Modelos de cristal sônico 2D (a) sem defeitos; com defeitos: (b) pontual central; (c) defeito linear (SHELKE *et al.*, 2014).

Focando no defeito linear para estruturas 2D, Fan *et al.* (2012) avaliou guias de onda acústicos com mudanças de direção abruptas (curvatura de 90°). Verificou-se nas simulações que as ondas acústicas se propagavam apenas ao longo da direção favorecida através do canal caracterizado pelo defeito, significando que as ondas apresentam modos localizados, evitando também grandes perdas de transmissão por possíveis interações com outros elementos (inclusões).

Sabe-se que quebra da periodicidade em um cristal fonônico gera modos de localizados no interior dos *band gaps*, estes são excitações localizadas em torno dos próprios elementos caracterizadores do defeito. Deste modo, estruturas com tais características geralmente levam à algumas aplicações específicas. Explorando isso, Lv *et al.* (2013) e Qi *et al.* (2016) (Fig. 1.5) utilizaram-se de um cristal fonônico 2D para implementar um sistema de colheita de energia, este sendo composto pelo acoplamento um elemento piezoelétrico ao local onde ocorreu a quebra da periodicidade, ou seja, a remoção de uma inclusão cilíndrica. A utilização de defeitos em estruturas periódicas 1D também é largamente utilizada em aplicações que envolvem colheita de energia (*energy harvesting*) (HUANG *et al.*, 2014). Pennec *et al.* (2010) apresentam um artigo de revisão onde discorrem sobre diversos exemplos de defeitos em cristais fonônicos bidimensionais.

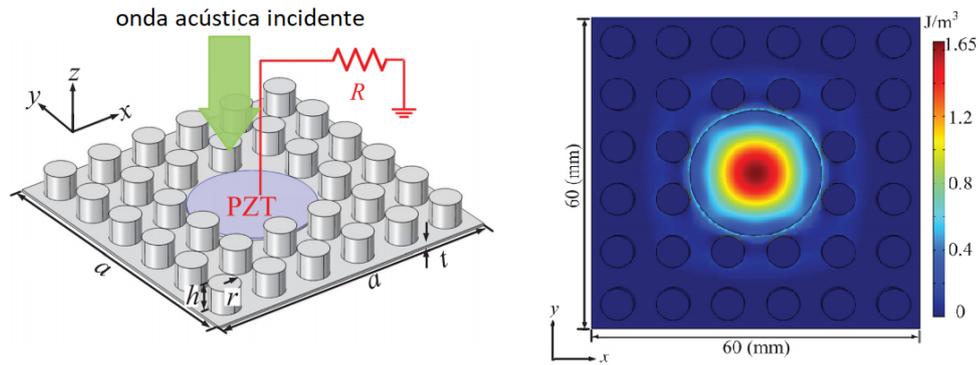


Figura 1.5 – Sistema de metamaterial acústico e modo de onda do defeito concentrado. Adaptado de Qi *et al.* (2016).

1.3 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é investigar e modelar alguns tipos de defeito em cristal fonônicos usando o método do elemento espectral, para casos unidimensionais, e o método de expansão em ondas planas, para casos bidimensionais. Para este fim, análises analíticas e numéricas serão realizadas. Os resultados consistirão na avaliação dos diagramas de dispersão, respostas forçadas baseadas na transmissibilidade e na interpretação dos modos de onda, quando houver a possibilidade.

Os objetivos específicos desenvolvem-se pela caracterização dos tipos de defeitos para os cristais uni e bidimensionais. O defeito será causado pela quebra da periodicidade: modificando parâmetros geométricos como comprimento e diâmetro; modificando um material constituinte de uma célula unitária; combinação da modificação de parâmetros geométricos e de material para casos 1D. Para casos 2D, o cristal fonônico é formado por 25 inclusões cilíndricas de Al_2O_3 (rede quadrada com 5×5) embutidas em uma matriz de resina epóxi. A quebra da periodicidade será avaliada a partir da remoção dessas inclusões, os padrões de remoção serão: pontual (diâmetro da inclusão central sobre modificações, apresentando uma redução do valor do diâmetro inicial); reto (uma linha de inclusões é retirada); oblíquo (as inclusões são removidas em uma forma de “S”), esses dois últimos tipos de defeito foram um canal no cristal fonônico.

1.4 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está dividida em 4 capítulos. Uma breve introdução sobre estruturas periódicas que motivam este trabalho e uma revisão bibliográfica descrevendo pesquisas sobre defeitos em cristais fonônicos foi apresentada neste primeiro capítulo.

No segundo capítulo, a formulação do método dos elementos espectrais (SEM) e matriz de transferência é apresentada para os cristais fonônicos unidimensionais, tanto para teoria de barra elementar como para a teoria de viga de Euler-Bernoulli. A formulação tradicional

do método de expansão em ondas planas (PWE) é apresentada para um caso particular de cristal fonônico 2D, bem como a formulação mais detalhada para os casos envolvendo defeito.

Os resultados são apresentados no terceiro capítulo. Observa-se os exemplos de defeito nas estruturas com as variações dos tipos de defeitos em função dos parâmetros geométricos, de material e de posição da célula defeituosa na estrutura. Nos casos 1D, na forma de diagramas de dispersão comparando as células unitárias saudáveis e defeituosas e pela transmissibilidade. Além dos diagramas de dispersão, a representação dos modos de onda de Bloch é apresentada para cristais fonônicos 2D, uma vez que por limitação do método empregado não é possível obter a resposta forçada.

No quarto capítulo estão as conclusões, propostas para trabalhos futuros e as publicações que foram realizadas durante o período desta dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Conforme já mencionado na introdução, a periodicidade nas questões que nos rodeiam sempre foi instigante. Do ponto de vista matemático, Floquet (1883) definiu a base para o estudo de estruturas periódicas, uma vez que foram propostas soluções analíticas para equações diferenciais ordinárias (EDO) com coeficientes periódicos. Bloch (1928) ampliou estes fundamentos para funções com periodicidade tridimensional, o que a transformou em uma solução mais robusta. Deste modo, generalizando estas formulações, o teorema de Bloch-Floquet pode ser aplicado na matriz de transferência e a partir disso encontra-se um autoproblema, cujas soluções são os números de onda. Assim, pode-se determinar os diagramas de dispersão, onde o comportamento das ondas na estrutura é observado. Ondas podem ter um caráter propagante ou evanescente, além disso é possível verificar os efeitos causados pelo limite de *Bragg*.

2.1 Teorema de Bloch-Floquet

Considerando um sistema constituído por células unitárias distribuídas ao longo de apenas uma direção, aqui sendo representada pelo eixo x (Fig. 2.1). Cada célula unitária tem comprimento L_c e pode ser subdividida em outros elementos. A estrutura se comporta como um sólido elástico linear e é simétrica em relação ao plano perpendicular ao eixo x . Sabe-se que cada célula unitária se acopla às adjacentes relacionando-se em função de um vetor de deslocamento \mathbf{u} e um vetor de força \mathbf{F} (LAUDE, 2015).

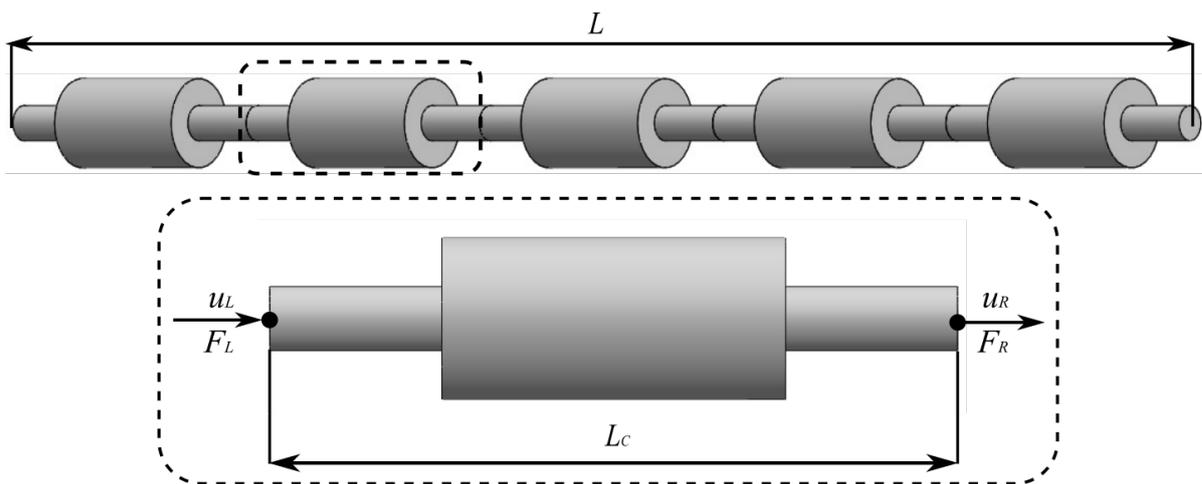


Figura 2.1 – Representação da estrutura do cristal fonônico unidimensional constituído por células unitárias distribuídas ao longo da direção longitudinal; em detalhe, tem-se a relação dos deslocamentos e forças nos nós do lado esquerdo (L) e direito (R) da i -ésima célula unitária, i .

Relacionando os termos do lado esquerdo e direito das células unitárias periódicas, como as apresentadas no destaque da Fig. 2.1, onde cada célula unitária é acoplada às adjacentes

nas extremidades. A solução por matriz de transferência pode ser formulada como:

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{T}\mathbf{y}_L, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{y}_m = \{u_m F_m\}^T$ é o vetor de espaço de estados. m representa as extremidades L ou R e \mathbf{T} é a matriz de transferência $[2n \times 2n]$, com n sendo a quantidade de graus de liberdade das extremidades referentes aos lados esquerdo ou direito da célula unitária.

Aplicando as condições de deslocamento e equilíbrio de força para células unitárias consecutivas $(i-1)$ e (i) , tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_L^{(i)} = \mathbf{u}_R^{(i-1)} \\ \mathbf{F}_L^{(i)} = -\mathbf{F}_R^{(i-1)} \end{cases}, \quad (2.2)$$

deste modo, encontra-se também a seguinte relação de $\mathbf{y}_L^{(i)} = \mathbf{y}_R^{(i-1)}$ e a substituindo na Eq. (2.1), tem-se que:

$$\mathbf{y}_L^{(i)} = \mathbf{T}\mathbf{y}_L^{(i-1)}. \quad (2.3)$$

Neste caso, estendendo a formulação dos teoremas de Floquet (1883) e Bloch (1928), considerando o domínio de uma estrutura periódica com número de células unitárias infinito, pode-se aplicar as condições periódicas de Bloch-Floquet, obtendo-se a seguinte relação:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_L^{(i)} = e^{\mu}\mathbf{u}_L^{(i-1)} \\ \mathbf{F}_L^{(i)} = -e^{\mu}\mathbf{F}_L^{(i-1)} \end{cases}, \quad (2.4)$$

onde $\mu = -jkL_c$ é a coeficiente de atenuação, com j sendo a unidade imaginária e k o número de onda de Bloch. Substituindo a Eq. (2.4) na Eq. (2.3), e retirando a notação indicial do sobrescrito (i) e do subscrito L :

$$\mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L^{(i)} \\ -\mathbf{F}_L^{(i)} \end{Bmatrix} = e^{\mu} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L^{(i)} \\ -\mathbf{F}_L^{(i)} \end{Bmatrix}, \text{ sendo assim, } \mathbf{T}\mathbf{y} = e^{\mu}\mathbf{y}, \quad (2.5)$$

este é o autoproblema de onda de Bloch.

2.2 Método do Elemento Espectral

Nesta seção será apresentada uma breve formulação do método dos elementos espectrais para estruturas 1D, utilizando a teoria de barra elementar para o elemento de barra e teoria de Euler-Bernoulli para elemento de viga. Barras são elementos estruturais fundamentais e também funcionam bem como guia de ondas, para tanto apenas forças axiais e deslocamentos longitudinais são representados. Quando se modela uma estrutura por elementos de viga, pode-se determinar os deslocamentos transversais e as rotações da seção transversal da mesma.

2.2.1 Elemento de Barra

Doyle (1997) e Lee (2009) desenvolveram diversos trabalhos no campo da dinâmica estrutural, principalmente com análises espectrais. Como exemplificada por Lee (2009), a equação governante que rege a vibração longitudinal de uma barra é dada por:

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0, \quad (2.6)$$

onde E é o módulo de Young, A é a área da seção transversal, ω_n é a frequência angular, ρ a massa específica do material constituinte da barra e u sendo o deslocamento longitudinal, bem como suas derivadas espacial (u'') e temporal (\ddot{u}). A equação que relaciona as forças axiais da estrutura é dada por:

$$F(x, t) = EAu'(x, t), \quad (2.7)$$

onde F é a força axial interna e ($'$) significa derivada em relação ao espaço. Lee (2009) assume que a solução para Eq. (2.6) em sua forma espectral é dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{j\omega_n t}, \quad (2.8)$$

onde $j = \sqrt{-1}$ e N é o número de pontos amostrados discretizados. Fazendo a substituição do termo da Eq. (2.8) na Eq. (2.6), tem-se:

$$EAU'' + \omega_n \rho AU = 0. \quad (2.9)$$

Assim, a solução geral da Eq. (2.9) é:

$$U(x) = C_o e^{-jk(\omega_n)x}, \quad (2.10)$$

onde $U(x)$ é o deslocamento no domínio da frequência, k o número de onda da barra e uma constante C_o . Lee (2009) declara que uma relação de dispersão pode ser obtida a partir da substituição da Eq. (2.10) na Eq. (2.9), obtendo-se:

$$\begin{cases} k^2 - k_R^2 = 0 \\ k_R = \omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EA}}, \\ k_1 = -k_2 = k_R \end{cases} \quad (2.11)$$

sendo k_1 e k_2 as duas raízes reais e k_R o número de onda puramente longitudinal correspondente ao modo de onda da barra.

Considerando um elemento de barra de comprimento L , a solução geral da Eq. (2.9) pode ser determinada por:

$$U(x) = C_1 e^{-jk_R x} + C_2 e^{jk_R x} = \mathbf{e}(x; \omega_n) \mathbf{C}, \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{e}(x, \omega_n) = [e^{-jk_R x} \ e^{jk_R x}]$ e $\mathbf{C} = \{C_1 \ C_2\}^T$.

Conforme apresentado na Fig. 2.2, o deslocamento espectral nodal de um elemento de barra de comprimento finito, L , pode ser relacionado com a seguinte convenção de campo de deslocamento:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

deste modo, pode-se observar a seguinte relação:

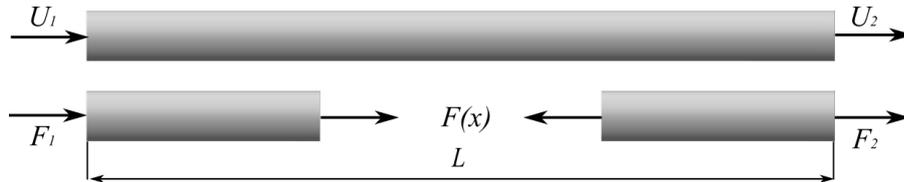


Figura 2.2 – Convenção de sinais para um elemento de barra (LEE, 2009).

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e(0; \omega_n) \\ e(L; \omega_n) \end{bmatrix} \mathbf{C} = \mathbf{H}_R(\omega_n) \mathbf{C}, \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{H}_R(\omega_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jk_L x} & e^{-jk_L x} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Fazendo a substituição da Eq. (2.12) na Eq. (2.13), tem-se a representação do campo de deslocamentos em função dos graus de liberdade nodais em uma barra de comprimento L :

$$U(x) = \mathbf{F}_R(x; \omega_n) \mathbf{U} \quad (2.16)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R(x; \omega_n) &= e(x; \omega_n) \mathbf{H}_R^{-1}(\omega_n) = \begin{bmatrix} F_{R1} & F_{R2} \end{bmatrix} \\ F_{R1} &= \csc(k_L L) \text{sen}[k_L(L-x)]. \\ F_{R2} &= \csc(k_L L) \text{sen}(k_L x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, de acordo com a Eq. (2.7), os componentes espectrais da força axial associados ao deslocamento $U(x)$ são dados pela seguinte relação:

$$F = EAU', \quad (2.18)$$

as forças nodais espectrais podem estar relacionadas às forças definidas como:

$$\mathbf{F}_c = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

substituindo as Eq. (2.16) e (2.18) na Eq. (2.19), obtém-se:

$$\mathbf{S}_R(\omega_n) \mathbf{U} = \mathbf{F}_c(\omega_n), \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{S}_R(\omega_n)$ é a matriz de rigidez espectral para um elemento de barra de comprimento finito, e é dada por:

$$\mathbf{S}_R(\omega_n) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} (k_R L) \cot(k_R L) & -(k_R L) \csc(k_R L) \\ -(k_R L) \csc(k_R L) & (k_R L) \cot(k_R L) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Utilizando-se das Eq. (2.9) e Eq. (2.18), a representação em espaços de estados consiste em relacionar variáveis de entrada e saída por meio de equações diferenciais de primeira ordem, assim:

$$\begin{cases} F' = EAU'' = -\omega_n^2 \rho AU = -EAk_R^2 U \\ U' = \frac{F}{EA}, \end{cases} \quad (2.22)$$

organizando na forma matricial, sabendo-se que o sistema encontra-se compreendido no intervalo de $0 \leq x \leq L$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} U' \\ F' \end{Bmatrix}}_{\mathbf{y}'_R} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{EA} \\ -EAk_R^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_R(\omega)} \underbrace{\begin{Bmatrix} U \\ F \end{Bmatrix}}_{\mathbf{y}_R} \quad (2.23)$$

A matriz de transferência para um elemento de barra é encontrada aplicando $\mathbf{T}_R = e^{\mathbf{A}_R L}$, sendo dada por:

$$\mathbf{T}_R(\omega) = \begin{bmatrix} \cos(k_R L) & (EAk_R)^{-1} \sin(k_R L) \\ -EAk_R \sin(k_R L) & \cos(k_R L) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Agora, particionando a matriz da Eq. (2.21) em: S_{ll} , S_{lr} , S_{rl} e S_{rr} . Onde os nós de cada elemento se relacionam com os adjacentes de maneira análoga à assemblagem apresentada na montagem de matrizes no FEM. A Fig. 2.3 apresenta uma célula unitária composta por duas seções de diferentes diâmetros. A mesma pode ser modelada apenas por dois elementos espectrais, identificados por (1) e (2), respectivamente. Cada um destes elementos possui dois nós e têm o nó (2) como nó de interconexão.

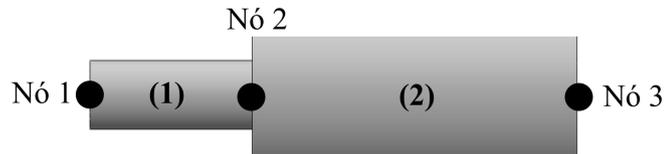


Figura 2.3 – Exemplo da relação dos nós e elementos que constituem uma célula unitária, neste caso assimétrica: dois elementos (1) e (2), três nós.

Portanto, a assemblagem da matriz de rigidez dinâmica da célula unitária apresen-

tada na Fig. 2.3 é dada por:

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} S_{ll1} & S_{lr1} & 0 \\ S_{rl1} & S_{rr1} + S_{ll2} & S_{lr2} \\ 0 & S_{rl1} & S_{rr2} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

2.2.2 Elemento de Viga

A teoria de viga de Euler-Bernoulli será utilizada na formulação do elemento de viga implementada nesta dissertação. Como apresentada por Lee (2009), a equação governante para uma viga de seção transversal uniforme é dada por:

$$EIV'''' + \rho A \ddot{v} = 0, \quad (2.26)$$

onde I corresponde ao momento de inércia em relação à linha neutra e v é o deslocamento transversal. Os esforços internos correspondentes ao momento fletor (M) e força cisalhante (Q) são dados por:

$$\begin{aligned} M(x,t) &= EIV''(x,t) \\ Q(x,t) &= -EIV'''(x,t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

A solução para Eq. (2.26) na forma espectral é dada por Lee (2009):

$$v(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V_n(x; \omega_n) e^{j\omega_n t}. \quad (2.28)$$

Portanto, realizando a substituição da Eq. (2.28) na Eq. (2.26), tem-se:

$$EIV'''' - \omega_n^2 \rho A V = 0. \quad (2.29)$$

Assim, a solução geral da Eq. (2.9) é:

$$V(x) = C_o e^{-jk(\omega_n)x}, \quad (2.30)$$

onde $V(x)$ é o deslocamento transversal no domínio da frequência. Substituindo a Eq. (2.30) na Eq. (2.29), a seguinte relação de dispersão é encontrada:

$$\left\{ \begin{array}{l} k^4 - k_B^4 = 0 \\ k_B = \sqrt{\omega_n} \left(\frac{\rho A}{EA} \right)^{1/4}, \\ k_1 = -k_2 = k_B \text{ e } k_3 = -k_4 = jk_B \end{array} \right. , \quad (2.31)$$

resultando em duas raízes puramente reais e duas puramente imaginárias, k_B é o número de onda puramente transversal correspondente ao modo de onda da viga. E, portanto, a Eq. (2.28) deve ser escrita como:

$$V(x) = C_1 e^{-jk_B x} + C_2 e^{-k_B x} + C_3 e^{-jk_B x} + C_4 e^{-k_B x} = \mathbf{e}(x; \omega_n) \mathbf{C}, \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{e}(x, \omega_n) = [e^{-jk_B x} \ e^{-jk_B x} \ e^{-jk_B x} \ e^{-jk_B x}]$ e $\mathbf{C} = \{C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4\}^T$.

De forma análoga ao procedimento realizado para o elemento de barra. Considerando-se um elemento de viga de comprimento finito, L , pode-se encontrar as seguintes relações de deslocamentos lineares e angulares:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V(0) \\ V'(0) \\ V(L) \\ V'(L) \end{Bmatrix}. \quad (2.33)$$

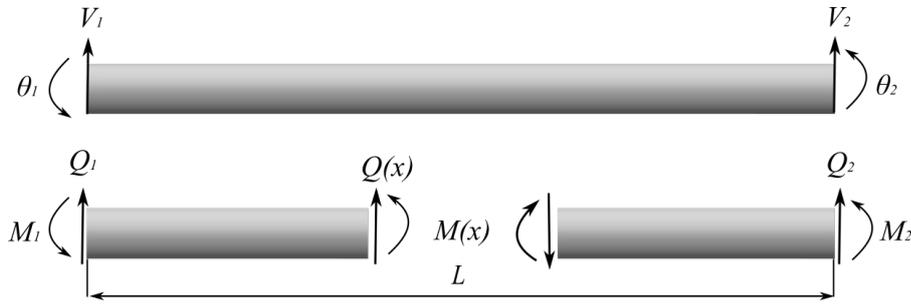


Figura 2.4 – Convenção de sinais para um elemento de viga (LEE, 2009).

Substituindo a Eq. (2.32) na Eq. (2.33), tem-se a seguinte relação:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} e(0; \omega_n) \\ e'(0; \omega_n) \\ e(L; \omega_n) \\ e'(L; \omega_n) \end{Bmatrix} \mathbf{C} = \mathbf{H}_B(\omega_n) \mathbf{C}, \quad (2.34)$$

onde

$$\mathbf{H}_B(\omega_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -jk_B & -k_B & jk_B & k_B \\ e^{-jk_B L} & e^{-k_B L} & e^{jk_B L} & e^{k_B L} \\ -jk_B e^{-jk_B L} & -k_B e^{-k_B L} & jk_B e^{jk_B L} & k_B e^{k_B L} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Então, o campo de deslocamentos do elemento de viga pode ser representado em função dos termos dos graus liberdade do vetor \mathbf{V} , a partir da eliminação do vetor de constantes \mathbf{C} na Eq. (2.32) através da Eq. (2.34). Sendo assim:

$$V(x) = \mathbf{F}_B(x; \omega_n) \mathbf{V}, \quad (2.36)$$

onde $\mathbf{F}_B = e(x, \omega_n) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega_n) = [F_{B1} \ F_{B2} \ F_{B3} \ F_{B4}]$.

Com base na Eq. (2.27), os componentes espectrais para momento fletor e força cisalhante podem se relacionar com o deslocamento espectral da seguinte forma:

$$M(x) = EIV''(x) \quad Q(x) = -EIV'''(x). \quad (2.37)$$

Agora, relacionando os momentos fletores e as forças cisalhantes definidos para o elemento de viga, encontra-se:

$$\mathbf{F}_c = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ +Q(L) \\ +M(L) \end{Bmatrix}, \quad (2.38)$$

Portanto, substituindo a Eq. (2.36) na Eq. (2.37), organizando o resultado para os lados esquerdo e direito da Eq. (2.38), encontra-se o seguinte sistema:

$$\mathbf{S}_B(\omega_n)\mathbf{V} = \mathbf{F}_c(\omega_n). \quad (2.39)$$

A matriz do elemento espectral para uma viga de Euler-Bernoulli é dada por:

$$\mathbf{S}_B = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} s_{B11} & s_{B12} & s_{B13} & s_{B14} \\ s_{B12} & s_{B22} & s_{B23} & s_{B24} \\ s_{B13} & s_{B32} & s_{B33} & s_{B34} \\ s_{B14} & s_{B24} & s_{B34} & s_{B44} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

onde os termos internos da matriz da Eq. (2.40) são:

$$\begin{aligned} s_{B11} &= s_{B33} = \Delta_B \bar{L}^3 (\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \\ s_{B22} &= s_{B44} = \Delta_B \bar{L}^3 k_B^{-2} (-\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \\ s_{B12} &= -s_{B34} = \Delta_B \bar{L}^3 k_B^{-1} \sin \bar{L} \sinh \bar{L} \\ s_{B13} &= \Delta_B \bar{L}^3 (\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \\ s_{B14} &= -s_{B23} = \Delta_B \bar{L}^3 k_B^{-1} (-\cos \bar{L} + \cosh \bar{L}) \\ s_{B24} &= \Delta_B \bar{L}^3 k_B^{-2} (\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \\ \Delta_B &= \frac{1}{1 - \cos \bar{L} \cosh \bar{L}} \\ \bar{L} &= k_B L \end{aligned} \quad (2.41)$$

Assim como feito para a formulação da matriz de transferência do elemento de barra, pode-se reescrever a Eq. (2.27) na forma espectral e a Eq. (2.29) como quatro (4) equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} W' = \theta \\ \theta' = W'' = \frac{M}{EI} \\ Q' = -EIW''' = -\omega_n \rho A W = -EI k_B^4 W \\ M' = EIW'''' = -Q, \end{cases} \quad (2.42)$$

organizando na forma matricial, encontra-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} W' \\ \theta' \\ Q' \\ M' \end{Bmatrix}}_{\mathbf{y}'_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI} \\ -EI k_B^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B} \underbrace{\begin{Bmatrix} W \\ \theta \\ Q \\ M \end{Bmatrix}}_{\mathbf{y}_B} \quad (2.43)$$

A matriz de transferência para um elemento de viga é determinada aplicando $\mathbf{T}_B = e^{\mathbf{A}B}$, sendo dada por:

$$\mathbf{T}_B(\omega) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 & \frac{s_1}{k_B} & \frac{s_2}{EI k_B^3} & -\frac{c_2}{EI k_B^2} \\ -k_B s_2 & c_1 & \frac{c_2}{EI k_B^2} & -\frac{s_1}{EI k_B} \\ -EI k_B^3 s_1 & EI k_B^2 c_2 & c_1 & -k_B s_2 \\ -EI k_B^2 c_2 & -EI k_B s_2 & -\frac{s_1}{k_B} & c_1 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(k_B L) + \cosh(k_B L) \\ c_2 &= \cos(k_B L) - \cosh(k_B L) \\ s_1 &= \sin(k_B L) + \sinh(k_B L) \\ s_2 &= \sin(k_B L) - \sinh(k_B L) \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.3 Método de Expansão de Ondas Planas

O Método da Expansão em Ondas Planas (amplamente conhecido por *Plane Wave Expansion* - PWE) foi desenvolvido aplicando fundamentalmente a transformada de Fourier, por isso é considerado um método que atua no domínio da frequência. Utilizado para obtenção dos diagramas de dispersão, também conhecidos pela nomenclatura estruturas de banda. O método tem a formulação baseada em estruturas periódicas infinitas (SIGALAS; ECONOMOU, 1992; VASSEUR *et al.*, 1994). Esta seção apresenta a formulação do PWE para um caso específico de cristal fonônico 2D, que é formado por uma placa fina de resina epóxi com inclusões cilíndricas de Al_2O_3 embutidas. A Fig. 2.5 apresenta uma possibilidade de domínio representado pelo PWE, onde se observa a repetição tanto da célula unitária em duas direções, como uma super célula (esta composta pelo agrupamento de uma matriz de 4x4 células unitárias).

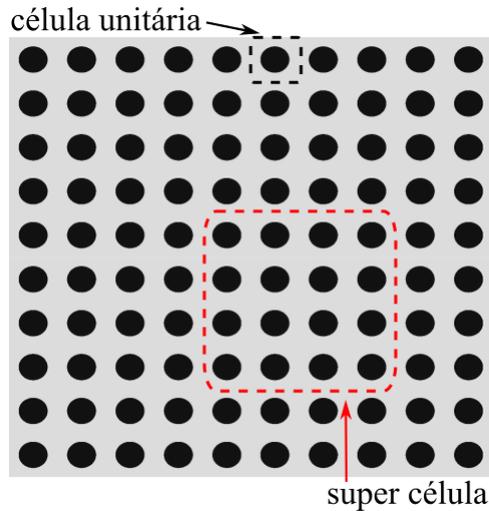


Figura 2.5 – Cristal fonônico 2D com detalhe para representação da célula unitária (tracejada na cor preta) e de uma matriz de 4x4 inclusões formando a supercélula (tracejada na cor vermelha).

A Fig. 2.6 apresenta o cristal fonônico para o qual será formulado o PWE e alguns parâmetros geométricos do mesmo, tais como espessura da placa (h), constante da rede quadrada (a), raio da inclusão cilíndrica (r_o). Embora o cristal fonônico 2D considerado saudável possa ser modelado utilizando-se da técnica da supercélula, uma vez que o mesmo trata-se de uma estrutura perfeitamente periódica, não há a necessidade de se implementar a técnica, podendo-se modelar apenas uma célula unitária e aplicar as condições de periodicidade de Bloch-Floquet.

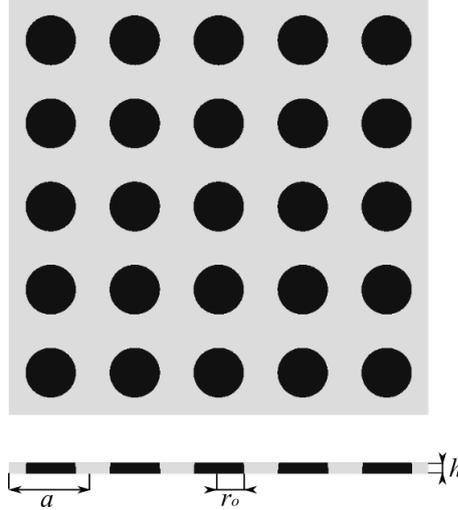


Figura 2.6 – Cristal fonônico bidimensional do tipo placa fina com rede quadrada.

Utilizando-se da característica dos cristais fonônicos serem periódicos e que, conseqüentemente, as condições de contorno do problema também apresentam periodicidade. A solução para o autoproblema pode se restringir à primeira zona irreduzível de Brillouin (*First Irreducible Brillouin Zone* - FIBZ), região ao longo da qual serão obtidos os diagramas de dispersão e os modos de onda de Bloch. A Fig. 2.7 apresenta a zona de Brillouin para rede quadrada, onde o triângulo em destaque corresponde à região da FIBZ:

A equação diferencial que governa os efeitos de flexão em uma placa fina de espessura uniforme pode ser escrita como (SIGALAS; ECONOMOU, 1992):

$$-\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.46)$$

onde w é o deslocamento transversal na direção do eixo z , $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ é a rigidez à flexão com ν sendo o coeficiente de Poisson e h a espessura do cristal fonônico. Os parâmetros $\alpha = \rho h$, $\beta = D\nu$, e $\gamma = D(1-\nu)$ são funções periódicas, sendo variáveis dependentes do vetor posição $\mathbf{r}(x, y)$. Usando o teorema de Bloch-Floquet, o deslocamento provocado pelas ondas de flexão na estrutura é definido por:

$$w(\mathbf{r}, t) = e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} w_{\mathbf{k}}(r), \quad (2.47)$$

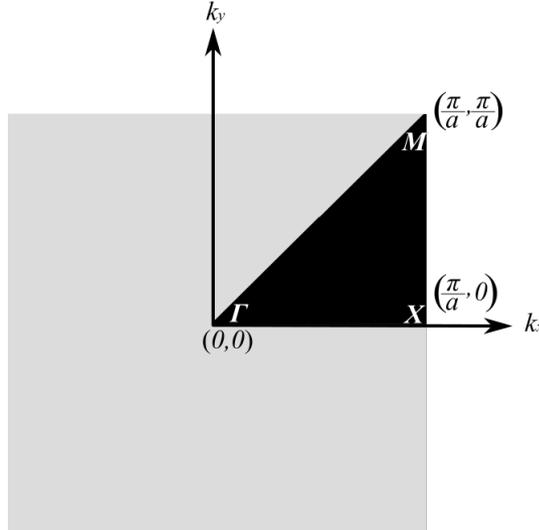


Figura 2.7 – Representação da primeira zona irredutível de Brillouin (FIBZ) para o cristal fonônico 2D com uma rede quadrada.

onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ é dado como o vetor de onda de Bloch, ω é a frequência angular e t é o tempo. O parâmetro $w_{\mathbf{k}}$ é uma função periódica com a mesma periodicidade espacial da super célula formadora do cristal fonônico, podendo ser expandido em série de Fourier como:

$$w_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{g}_1} e^{j\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{r}} A_{\mathbf{g}_1}, \quad (2.48)$$

onde $\mathbf{g}_1 = \frac{2\pi}{a}(n_1, n_2)$ é o vetor equivalente à rede recíproca de distribuição quadrada 2D, n_1 e n_2 estão compreendidos em $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ e $A_{\mathbf{g}_1}$ é o coeficiente de Fourier correspondente.

Os parâmetros dados pelas funções periódicas $\alpha(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r})$ e $\gamma(\mathbf{r})$ são expandidos em série de Fourier, como:

$$H(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}_2} e^{j\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{r}} H_{\mathbf{g}_2}, \quad (2.49)$$

onde $H(\mathbf{r})$ pode ser substituído por qualquer uma das três funções periódicas supracitadas. O coeficiente de Fourier correspondente, $H_{\mathbf{g}_2}$, é definido como:

$$H_{\mathbf{g}_2} = \begin{cases} fH_A + (1-f)H_B & \text{para } \mathbf{g}_2 = \mathbf{0} \\ (H_A - H_B)F_{\mathbf{g}_2} & \text{para } \mathbf{g}_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}, \quad (2.50)$$

onde $\mathbf{g}_2 = \frac{2\pi}{a}(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$, com \bar{n}_1 e \bar{n}_2 variando de $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, $H_{\mathbf{g}_2}$ refere-se à matriz de Toeplitz, que é uma matriz cuja diagonal é constante. A função f é a razão de preenchimento, sendo assim definida pela razão entre a área da inclusão cilíndrica e a área total da seção da célula unitária. $F_{\mathbf{g}_2}$ é entendida como a função da estrutura, dada por:

$$F_{\mathbf{g}_2} = \frac{1}{A} \int_A e^{-j\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{r}} dr^2, \quad (2.51)$$

onde o operador integral é calculado apenas sobre a área do material da inclusão, neste caso sendo apenas uma circunferência. Portanto, para inclusões cilíndricas de raio r_o , como o caso

apresentado aqui, tem-se que a razão de preenchimento e a função da estrutura são dadas por:

$$f = \frac{\pi r_o^2}{a^2} \quad \text{e} \quad F_{\mathbf{g}_2} = \frac{2f}{|\mathbf{g}_2| r_o} J_1(|\mathbf{g}_2| r_o) , \quad (2.52)$$

onde $J_1(|\mathbf{g}_2| r_o)$ é a função de Bessel de primeira ordem.

Realizando a substituição das Eqs. (2.47) e (2.49) na Eq. (2.46), tem-se após algumas manipulações matemáticas a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \omega^2 \sum_{\mathbf{g}_1} [\alpha]_{\mathbf{g}_2} A_{\mathbf{k}+\mathbf{g}_1} &= \sum_{\mathbf{g}_1} (\mathbf{k} + \mathbf{g}_1)_x^2 (\mathbf{k} + \mathbf{g}_3)_x^2 [D]_{\mathbf{g}_2} A_{\mathbf{k}+\mathbf{g}_1} + \\ &+ \sum_{\mathbf{g}_1} (\mathbf{k} + \mathbf{g}_1)_y^2 (\mathbf{k} + \mathbf{g}_3)_x^2 [\beta]_{\mathbf{g}_2} A_{\mathbf{k}+\mathbf{g}_1} + \\ &+ 2 \sum_{\mathbf{g}_1} (\mathbf{k} + \mathbf{g}_1)_x (\mathbf{k} + \mathbf{g}_1)_y (\mathbf{k} + \mathbf{g}_3)_x (\mathbf{k} + \mathbf{g}_3)_y [\gamma]_{\mathbf{g}_2} A_{\mathbf{k}+\mathbf{g}_1} + \\ &+ \sum_{\mathbf{g}_1} (\mathbf{k} + \mathbf{g}_1)_y^2 (\mathbf{k} + \mathbf{g}_3)_y^2 [D]_{G_2} A_{\mathbf{k}+\mathbf{g}_1} + \\ &+ \sum_{\mathbf{g}_1} (\mathbf{k} + \mathbf{g}_1)_x^2 (\mathbf{k} + \mathbf{g}_3)_y^2 [\beta]_{\mathbf{g}_2} A_{\mathbf{k}+\mathbf{g}_1} , \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$.

Além disso, a Eq. (2.53) pode ser representada na forma matricial, fato que facilita na visualização do problema de autovalor, de forma a encontrá-lo como:

$$\omega^2 \mathbf{P} A_{k+g_1} = \mathbf{Q} A_{k+g_1} , \quad (2.54)$$

onde ω é o vetor de autofrequência e pode ser obtido pela solução da Eq. (2.54) para cada um dos valores do vetor de onda de Bloch, \mathbf{k} , compreendido na FIBZ.

2.3.1 Defeito Pontual

Defeitos do tipo pontual são criados a partir de modificações em apenas uma das inclusões cilíndricas. Tais alterações, por si sós, caracterizam a quebra na periodicidade da estrutura do cristal fonônico. A Fig. 2.8 apresenta o cristal fonônico com este tipo de defeito. Para modelá-lo torna-se necessário implementar a técnica da super célula (KUSHWAHA *et al.*, 1993; SIGALAS, 1997; WU *et al.*, 2004). Como mencionando anteriormente, essa técnica consiste em selecionar um conjunto de células unitárias formando uma matriz, aqui gerando uma matriz de 24 ou 25 inclusões, uma vez que a inclusão defeituosa pode ser completamente removida no caso em que $r_d = 0$ (YAO *et al.*, 2009; YAO *et al.*, 2013).

Segundo Yao *et al.* (2009), os coeficientes de Fourier correspondentes para o caso

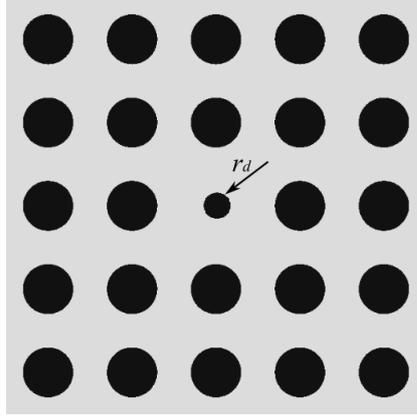


Figura 2.8 – Cristal fonônico 2D do tipo placa fina com defeito pontual.

de defeito pontual em cristal fonônico são determinados por:

$$H_{\mathbf{g}_2} = \begin{cases} \frac{1}{25} \{24[fH_A + (1-f)H_B] + f_d H_A + (1-f_d)H_B\} & , \text{ para } \mathbf{g}_2 = 0 \\ (H_A - H_B) \left\{ \left[\sum_{m_1=-2}^2 \sum_{m_2=-2}^2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}(m_1 n_1 + m_2 n_2)\right) - 1 \right] F_{\mathbf{g}_2} + F_{\mathbf{g}_2}^d \right\} & , \text{ para } \mathbf{g}_2 \neq 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

onde $\mathbf{g}_2 = 2\pi(n_2/5a, n_2/5a)$ é o vetor da rede recíproca com $n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$. As funções da razão de preenchimento e de estrutura do defeito são dadas por:

$$f_d = \frac{\pi r_d^2}{a^2} \quad \text{e} \quad F_{\mathbf{g}_2}^d = \frac{2f_d}{|\mathbf{g}_2| r_o} J_1(|\mathbf{g}_2| r_d) \quad , \quad (2.56)$$

2.3.2 Defeito de Linha Reta

Defeitos de linha reta geralmente possuem aplicações mais restritas. Sun e Wu (2007) desenvolveram um estudo sobre a propagação de ondas acústicas em um cristal fonônico 2D formado por um canal na parte central da estrutura. Notou-se a ocorrência do confinamento das ondas na área do canal. A amplitude das ondas que se propagavam também apresentou um aumento, ou sofreu pouca influência mantendo-se constante, principalmente quando comparada às ondas localizadas nas proximidades das inclusões. No entanto, Feng *et al.* (2015) relataram que os defeitos lineares retos também podem ser usados para criar ressonadores e filtros, uma vez que com determinados ajustes de largura e intercalando com inclusões intersticiais notou-se um aumento no número de modos atenuados.

A inserção do defeito linear requer apenas alterações na forma como são calculados os coeficientes de Fourier, $H_{\mathbf{g}_2}$, uma vez que o problema pode ser entendido como uma generalização do caso onde a inclusão cilíndrica é removida ($r_d/r_o = 0\%$). Assim, neste trabalho, o defeito linear é causado pela remoção de uma linha completa das inclusões que se localizam na parte central da super célula (Fig. 2.9), tal qual o procedimento realizado em outras pesquisas

(YAO *et al.*, 2010; DOS SANTOS *et al.*, 2019; SUN; WU, 2007). A técnica da supercélula foi implementada para uma matriz de 20 células unitárias (4x5).

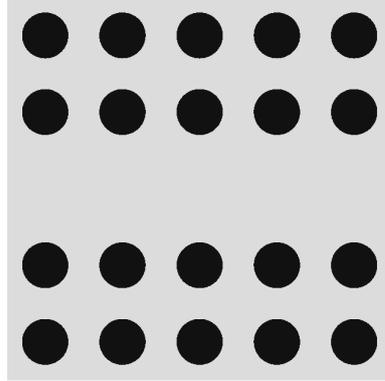


Figura 2.9 – Cristal fonônico 2D do tipo placa fina com defeito de linha reta, considerando-se uma rede quadrada.

Assim como pode ser encontrado no trabalho de Yao *et al.* (2010), o coeficiente de Fourier correspondente a este caso de defeito em cristal fonônico é determinado por:

$$H_{\mathbf{g}_2} = \begin{cases} \frac{1}{25} \{20[fH_A + (1-f)H_B] + 5f_dH_A + 5(1-f_d)H_B\} & , \text{ para } \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}, \\ \frac{1}{25}(H_A - H_B) \left[\sum_{m_1=-2}^2 \sum_{m_2=-2}^2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}(m_1n_1 + m_2n_2)\right) - \cos\left(-\frac{4\pi}{5}n_1\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(-\frac{2\pi}{5}n_1\right) - 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}n_1\right) - \cos\left(-\frac{4\pi}{5}n_1\right) \right] F_{\mathbf{g}_2} - , & \text{ para } \mathbf{g}_2 \neq \mathbf{0} \\ - \left[\cos\left(-\frac{4\pi}{5}n_1\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}n_1\right) + 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n_1\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n_1\right) \right] F_{\mathbf{g}_2}^d & \end{cases} \quad (2.57)$$

2.3.3 Defeito Linear Oblíquo

O defeito linear oblíquo também é formado a partir da remoção completa das inclusões. Os trabalhos de Fan *et al.* (2012) e Vasseur *et al.* (2011) também apresentam estruturas periódicas 2D com defeitos lineares oblíquos. Entretanto, as mesmas têm curvaturas mais abruptas, formando um ângulo de 90° (uma curvatura em formato de “L”) e dois ângulos de 90° (uma curvatura em formato de “Z”), respectivamente. A fim de garantir uma maior interação entre as ondas propagantes e as inclusões que delimitam o canal, a abordagem de um defeito em forma de “S” foi escolhida e a estrutura periódica está apresentada na Fig. 2.10. Neste caso a técnica da super célula também foi implementada para uma matriz de 20 sub-células (5x4).

Assim como o caso do defeito linear reto, o raio das inclusões que foram removidas é zero. E tal qual apresentado no trabalho de Yao *et al.* (2010), os coeficientes de Fourier

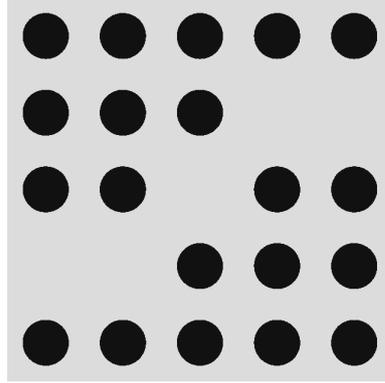


Figura 2.10 – Cristal fonônico 2D do tipo placa fina com defeito linear oblíquo, considerando-se uma rede quadrada.

correspondente para esse problema são dados por:

$$H_{\mathbf{g}_2} = \begin{cases} \frac{1}{25} \{20 [fH_A + (1-f)H_B] + 5f_dH_A + 5(1-f_d)H_B\} & , \text{ para } \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}, \\ \frac{1}{25} (H_A - H_B) \left[\sum_{m_1=-2}^2 \sum_{m_2=-2}^2 \cos\left(\frac{2\pi}{5} (m_1n_1 + m_2n_2)\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(-\frac{4\pi}{5}n_1 - \frac{2\pi}{5}n_2\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{5}n_1 - \frac{2\pi}{5}n_2\right) - 1 - \right. \\ \left. - \cos\left(\frac{2\pi}{5}n_1 + \frac{2\pi}{5}n_2\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{5}n_1 + \frac{2\pi}{5}n_2\right) \right] F_{\mathbf{g}_2} + & , \text{ para } \mathbf{g}_2 \neq \mathbf{0}, \\ \left[\cos\left(-\frac{4\pi}{5}n_1 - \frac{2\pi}{5}n_2\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}n_1 - \frac{2\pi}{5}n_2\right) + 1 + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n_1 + \frac{2\pi}{5}n_2\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n_1 + \frac{2\pi}{5}n_2\right) \right] F_{\mathbf{g}_2}^d \end{cases} \quad (2.58)$$

3 RESULTADOS SIMULADOS

Neste capítulo serão apresentados os exemplos de defeitos nos cristais fonônicos 1D e 2D. Para os casos unidimensionais, comparações entre os diagramas de dispersão e as respostas forçadas para as células saudáveis e defeituosas fundamentarão a discussão. A resposta forçada se baseará na relação de transmissibilidade, uma vez que a estrutura é excitada na extremidade esquerda e o mensurada na extremidade direita. Nos casos 2D, diagramas de dispersão serão apresentados, bem como os modos de onda de Bloch (*Bloch modes*), esses são calculados para facilitar a visualização da propagação das ondas na estrutura. O defeito (quebra da periodicidade) de apenas uma célula unitária, ocasiona a geração da célula defeituosa e seguirá a seguinte ordem de implementação:

1. Cristais fonônicos 1D - tipo barra e tipo viga

- Redução do comprimento da célula;
- Aumento do comprimento da célula;
- Redução do diâmetro da célula;
- Aumento do diâmetro da célula;
- Modificação do material constituinte da célula;

2. Cristais fonônicos 2D - placa fina

- Defeito pontual;
- Defeito de linha reta;
- Defeito linear oblíquo;

3.1 Cristais fonônicos 1D - Barra

Fig. 3.1 apresenta uma barra homogênea com seção transversal uniforme, onde $d = 6$ mm e $L = 500$ mm. Mesmo se tratando de uma estrutura homogênea, é possível subdividi-la em frações menores (as já mencionadas células unitárias), que quando repetidas formam a estrutura por completo.

O diagrama de dispersão obtido a partir de uma célula unitária apresenta as partes reais e imaginárias dos autovalores, podendo ser visto na Fig. 3.2 (a). Nesta representação, a ordenada positiva representa a parte real do produto kL , enquanto a negativa representa a parte imaginária. Constata-se que há apenas ondas propagantes nesta faixa de frequência, uma vez que a parte imaginária diferente de zero representaria em um intervalo de banda que ocorre a atenuação da propagação de ondas e a presença das ondas evanescentes, ou seja, um *band gap*.

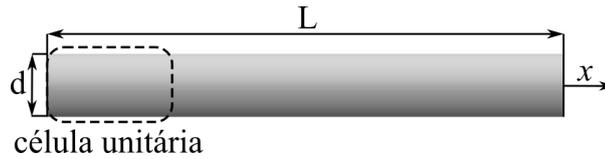


Figura 3.1 – Elemento de barra homogêneo e de seção transversal uniforme; em detalhe tem-se a célula unitária.

Para este caso, o decaimento da parte imaginária é pouco e acontece em função das perdas de transmissão das ondas, visto que utilizou-se o um fator de perda no material através do módulo de Young complexo, $E_c = E(1 + j\eta)$. Já a parte real do produto kL apresenta um comportamento crescente e isso ocorre até o rebatimento no limite de Bragg. A condição de contorno livre-livre é aplicada para se obter a resposta forçada, assim é possível observar os modos propagantes da estrutura e suas respectivas frequências (Fig. 3.2 (b)).

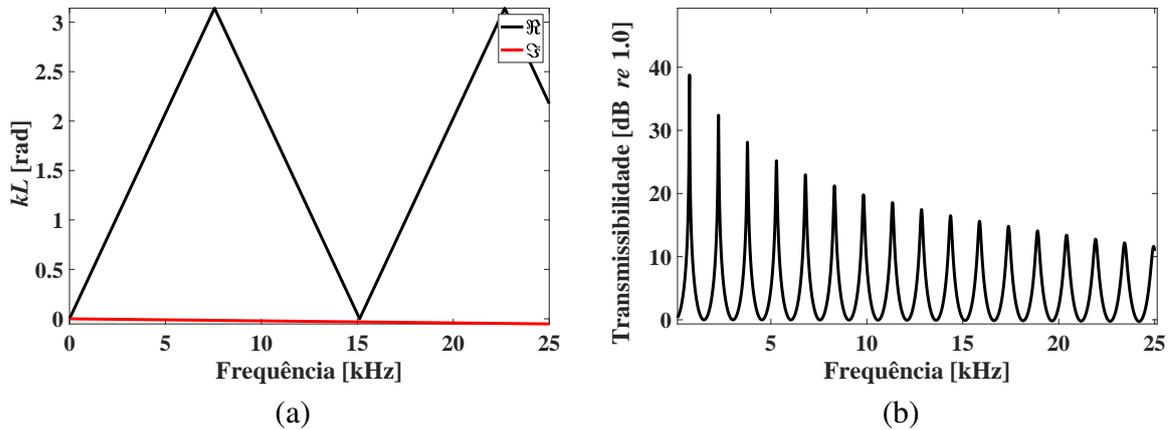


Figura 3.2 – (a) Diagrama de dispersão e (b) resposta forçada baseada na transmissibilidade da barra homogênea de seção transversal uniforme.

A Tab. 3.1 apresenta os dados do material constituinte da estrutura homogênea e os parâmetros geométricos que serão utilizados no cristal fonônico obtido a partir da variação de seção transversal.

Tabela 3.1 – Parâmetros do material (poliacetal) constituinte da estrutura homogênea e parâmetros geométricos do cristal fonônico.

Descrição	Valor
Comprimento do elemento “A” (L_A) [mm]	20
Comprimento do elemento “B” (L_B) [mm]	60
Diâmetro do elemento “A” (L_A) [mm]	60
Diâmetro do elemento “B” (L_B) [mm]	15
Fator de perda (η)	0,01
Densidade [kg/m^3]	1400
Módulo de Young [GPa]	3,2

A Fig. 3.3 apresenta o modelo do cristal fonônico constituído por cinco (5) células unitárias, subdividas em três (3) elementos "A-B-A":

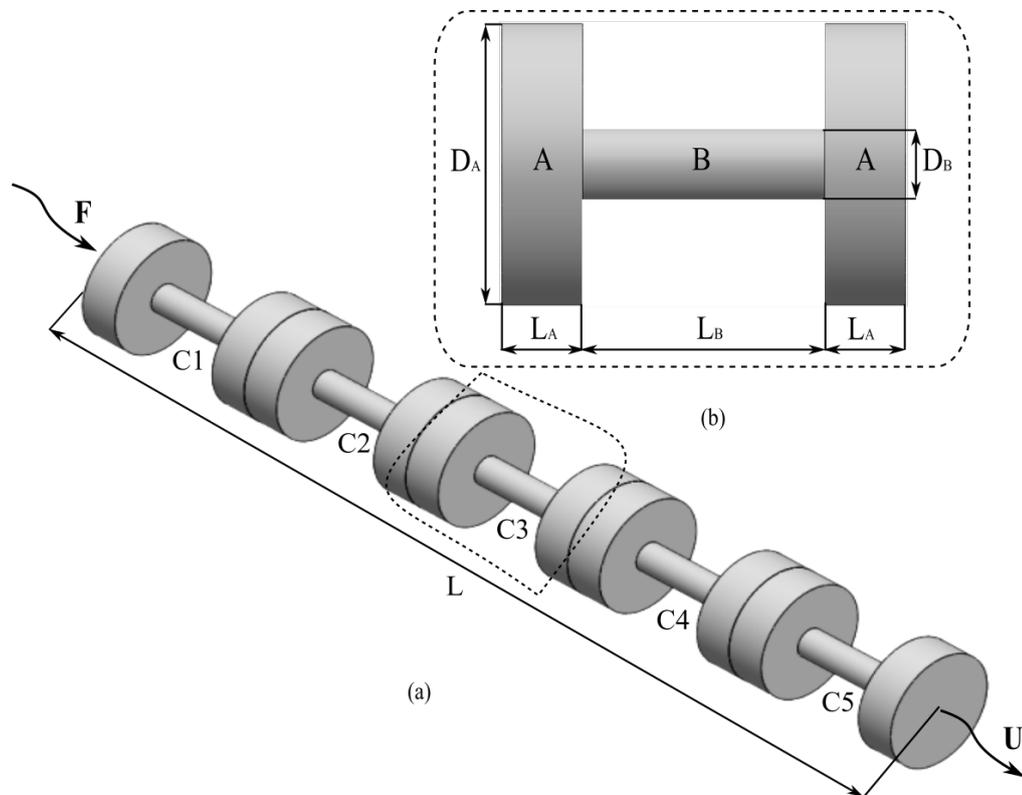


Figura 3.3 – (a) Cristal fonônico tipo barra (excitação e medição na direção longitudinal) com cinco (5) células unitárias; (b) esquema dos parâmetros da célula unitária em detalhe.

Assim como feito para a estrutura homogênea, avaliou-se o cristal fonônico no intervalo de 1 a 25 kHz. A partir do diagrama de dispersão da célula unitária (Fig. 3.4 (a)) é possível observar a existência de três (3) *band gaps*, o primeiro de 2,29 a 11,99 kHz, o segundo de 12,80 a 18,31 kHz e o terceiro que começa em 19,45 e passa de 25 kHz (sombreados na cor violeta). Nestes referidos intervalos de frequência a parte imaginária difere de zero, do mesmo modo que a parte real atinge o valor π ou zero. Quando se observa a resposta forçada, constata-se que na região dos *band gaps* não se encontram modos de ondas propagantes, conforme visto na Fig. 3.4 (b).

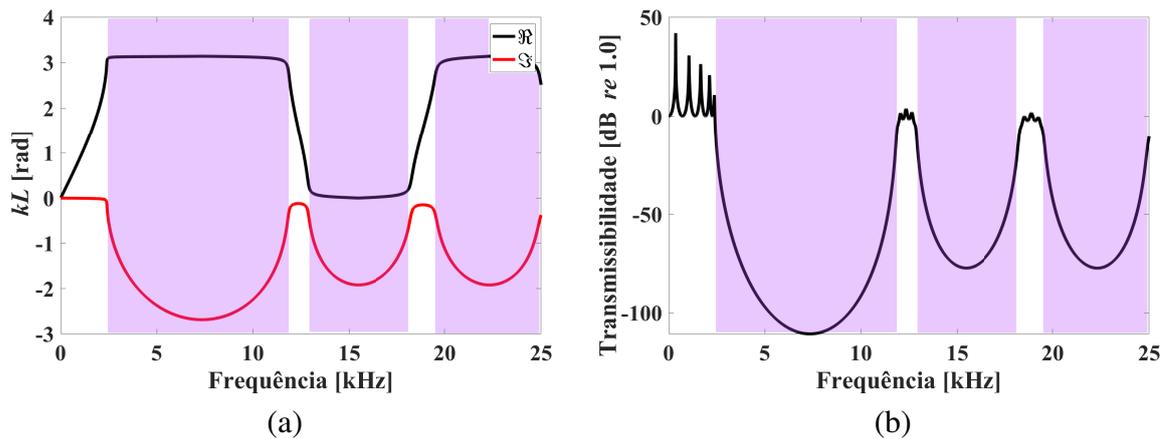


Figura 3.4 – (a) Diagrama de dispersão e (b) resposta forçada baseada na transmissibilidade para o cristal fonônico (saudável) composto por 5 células unitárias.

3.1.1 Defeitos Geométricos

Inicialmente, o defeito é causado a partir de mudanças no comprimento do elemento “B” da célula unitária. O comprimento da célula defeituosa está parametrizado e pode ser visto na Tab. 3.2. Onde será avaliado o comportamento do sistema para os diferentes valores de comprimento defeituoso, L_d . O parâmetro “100% L ” equivale ao cristal fonônico saudável e será considerado como a razão de referência.

Tabela 3.2 – Parametrização da razão de redução no comprimento da célula defeituosa.

Razão [%]	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
Comprimento [mm]	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6

A Fig. 3.5 apresenta os diagramas de dispersão para as seguintes razões de defeito: 90, 80, 50, 40, 20 e 10%. Pode-se observar que conforme a razão de defeito vai reduzido, os *band gaps* tendem a subir para regiões de alta frequência, visto que para 90 e 80% ainda é possível encontrar três (3) *band gaps* até os 25 kHz. O primeiro mais largo e o segundo mais estreito, quando comparados com os do diagrama de dispersão do cristal fonônico saudável, já o terceiro *band gap* é afastado para região de alta frequência. Nos casos 50, 40 e 20%, o primeiro *band gap* começa a se iniciar em uma frequência mais elevada e a largura varia pouco, mantendo-se aproximadamente constante. No último caso, onde a razão de defeito é 10%, o primeiro *band gap* já vai para uma frequência mais elevada e ocorre um pequeno aumento da região de passa banda entre o primeiro e o segundo *band gap*, onde as ondas se propagam. Assim, esse caso termina com a existência de apenas dois (2) *band gaps* na faixa de frequência que vai até 25 kHz.

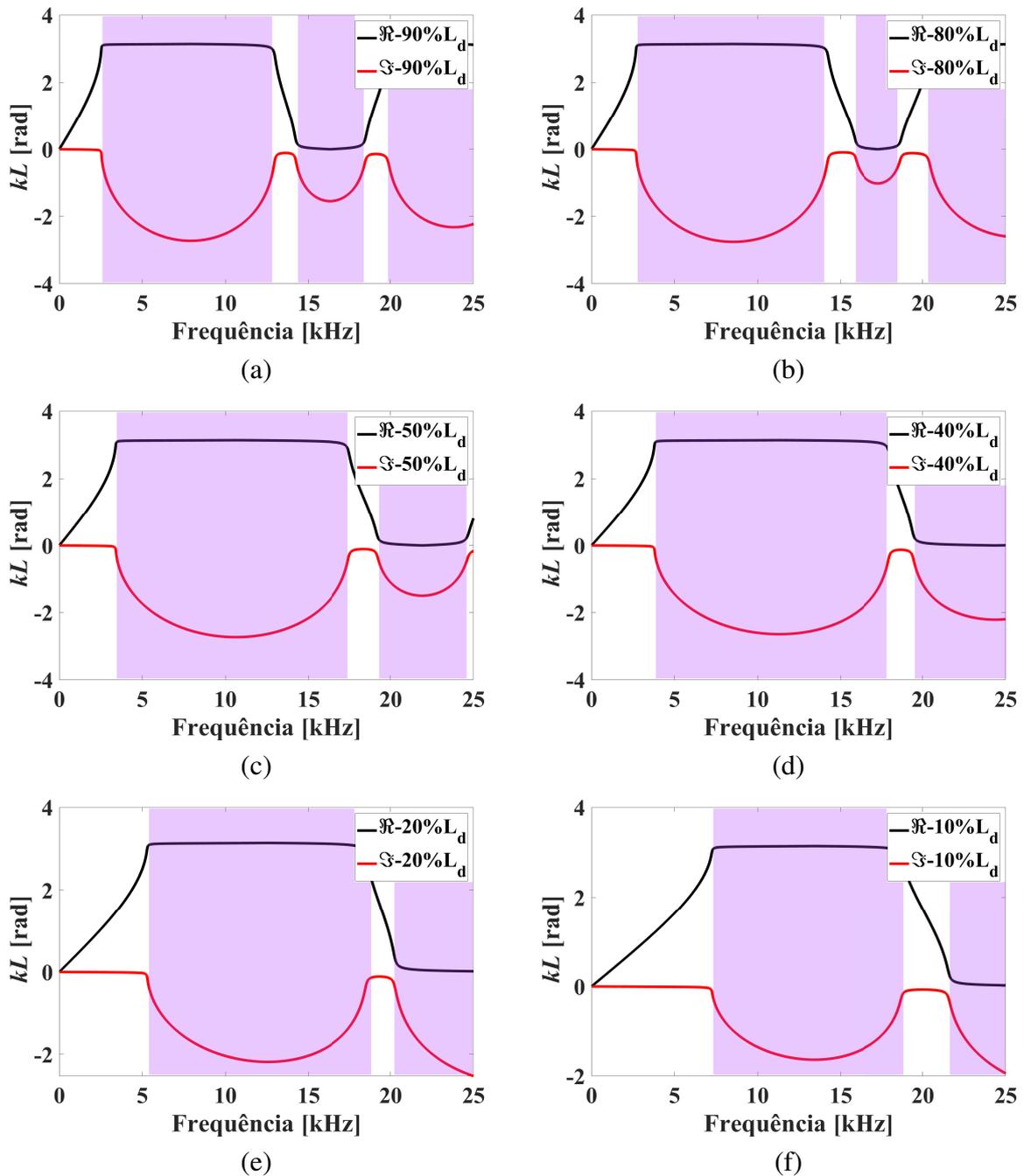


Figura 3.5 – Diagrama de dispersão para as seguintes razões de comprimento: (a) 90%; (b) 80%; (c) 50%; (d) 40%; (e) 20%; (f) 10%.

A Fig. 3.6 mostra as respostas forçadas para redução de comprimento. Observa-se que com 90% as alterações na resposta são pouco visíveis, principalmente quando se trata da região que compreende o primeiro e terceiro *band gap*. No entanto, há um pequeno deslocamento nos modos propagantes e o aparecimento de um modo mais à direita na região do segundo *band gap*, mostrando a reação à essa alteração e a sensibilidade do sistema para médias frequências.

Com 80%, encontra-se um modo propagante mais centralizado ao interior do segundo *band gap* juntamente com uma redução na amplitude de vibração transmitida em médias

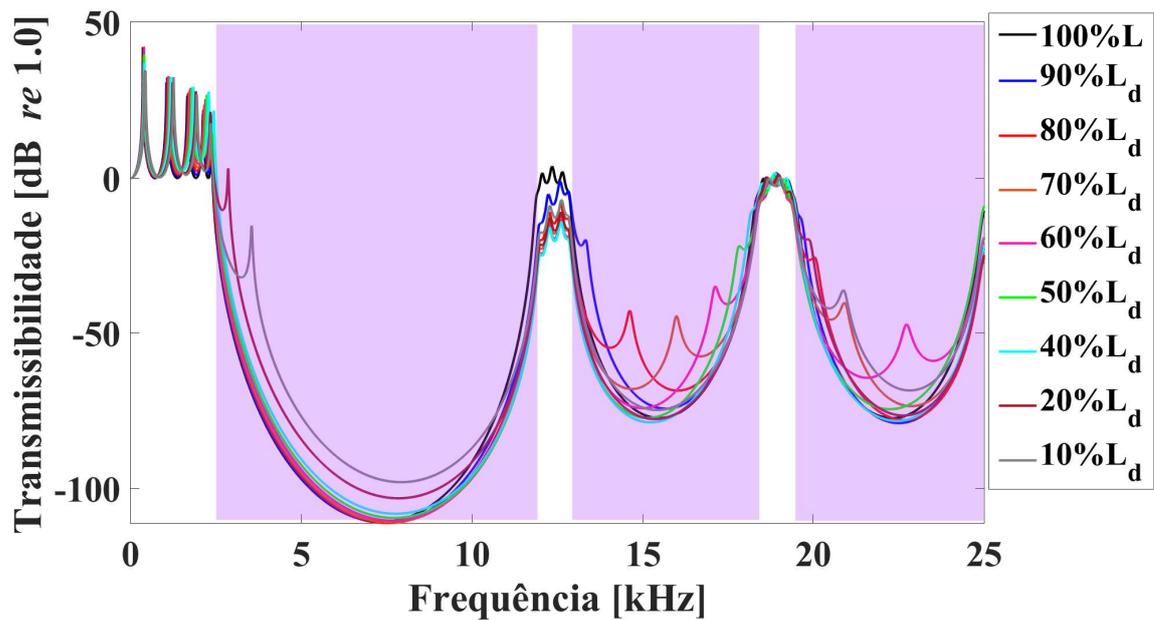


Figura 3.6 – Comparação entre as respostas forçadas para a redução do comprimento da célula defeituosa.

freqüências. Há um pequeno deslocamento do modo mais à esquerda para o centro da região de banda proibida no primeiro e no terceiro *band gap*. Para 70 e 60%, o primeiro *band gap* continua praticamente inalterado, enquanto o segundo e o terceiro apresentam um modo propagante bem mais centralizado e concentrando aproximadamente o mesmo nível de energia de vibração. 50% é um valor que apresenta pouca influência na resposta, uma vez que há basicamente a redução na amplitude dos modos propagantes em médias freqüências. Nos casos onde a razão de comprimento é de 40, 30, 20 e 10% observa-se o deslocamento progressivo do modo propagante de baixa freqüência para a região do primeiro *band gap*. O mesmo fenômeno ocorreu com os modos propagantes na região de freqüência mais elevada, sendo que esses foram deslocados para o interior do terceiro *band gap*. Mostram-se também poucas alterações na região do segundo *band gap*, visto que somente pequenas variações de atenuação são encontradas.

A Tab. 3.3, apresenta as métricas proporcionais utilizadas para avaliar o efeito do aumento no comprimento da célula defeituosa na resposta da estrutura, tal qual o procedimento apresentado para redução desse parâmetro.

Tabela 3.3 – Parametrização da razão de aumento no comprimento da célula defeituosa.

Razão [%]	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
Comprimento [mm]	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120

Os diagramas de dispersão para as razões de comprimento 110, 140, 170 e 200 % podem ser vistos na Fig. 3.7. Comparando com os diagramas de dispersão apresentado na Fig. 3.5, pode-se observar que conforme a razão de comprimento aumenta os *band gaps* tendem a

aparecer em faixas de frequências mais baixas.

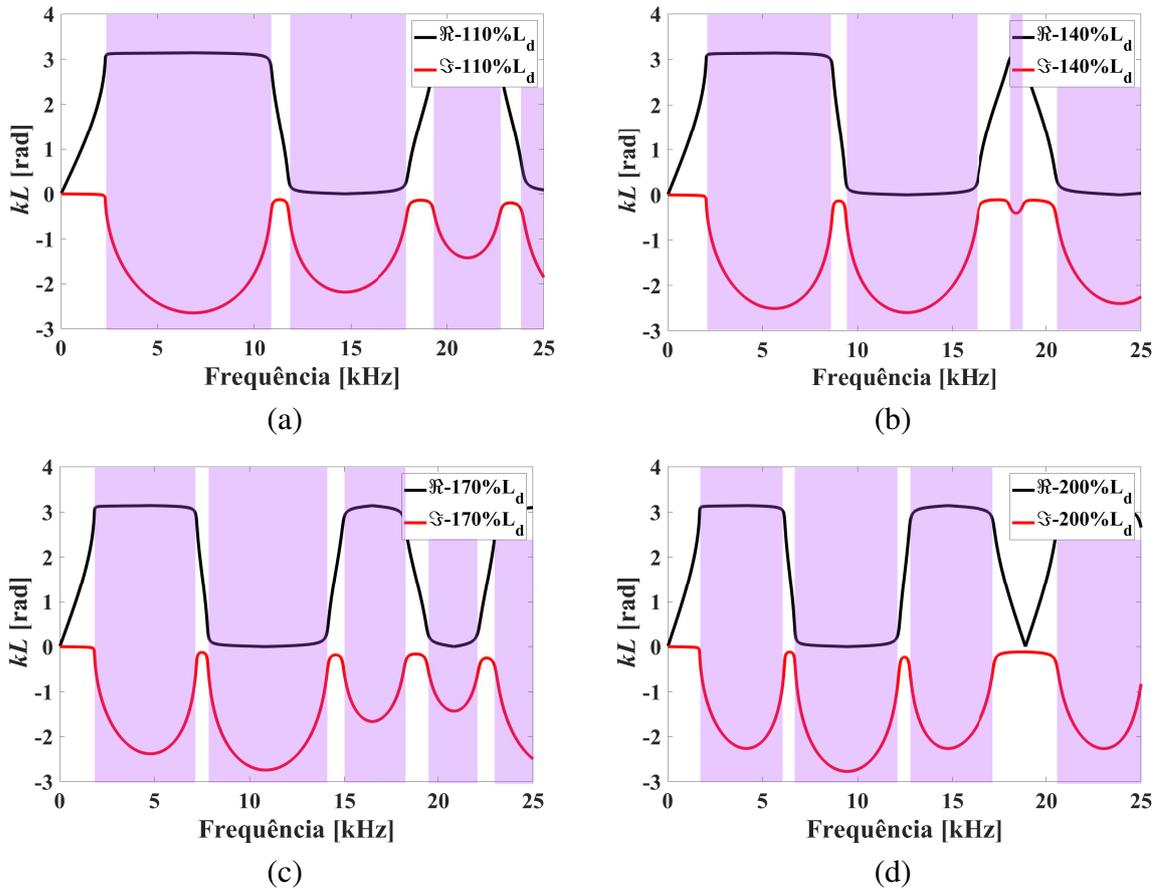


Figura 3.7 – Diagrama de dispersão para as seguintes razões de comprimento: (a) 110%; (b) 140%; (c) 170%; (d) 200%.

Fig. 3.8 apresenta as respostas forçadas para os casos com aumento da razão de comprimento da célula defeituosa. Para pequenas variações (110%) não se encontra uma grande influência em médias frequências. No entanto, os modos limítrofes mais à direita do primeiro e terceiro *band gap* sofreram pequenos deslocamentos, tendendo mais ao centro da região de banda proibida. De modo geral, a tendência mostrada é que os modos limítrofes à direita se desloquem para as baixas frequências. As razões 140, 150, 160 e 170% tendem a apresentar modos mais centralizados no interior do segundo *band gap*. Enquanto, 180, 190 e 200% apresentam modos propagantes de maior amplitude no primeiro *band gap*.

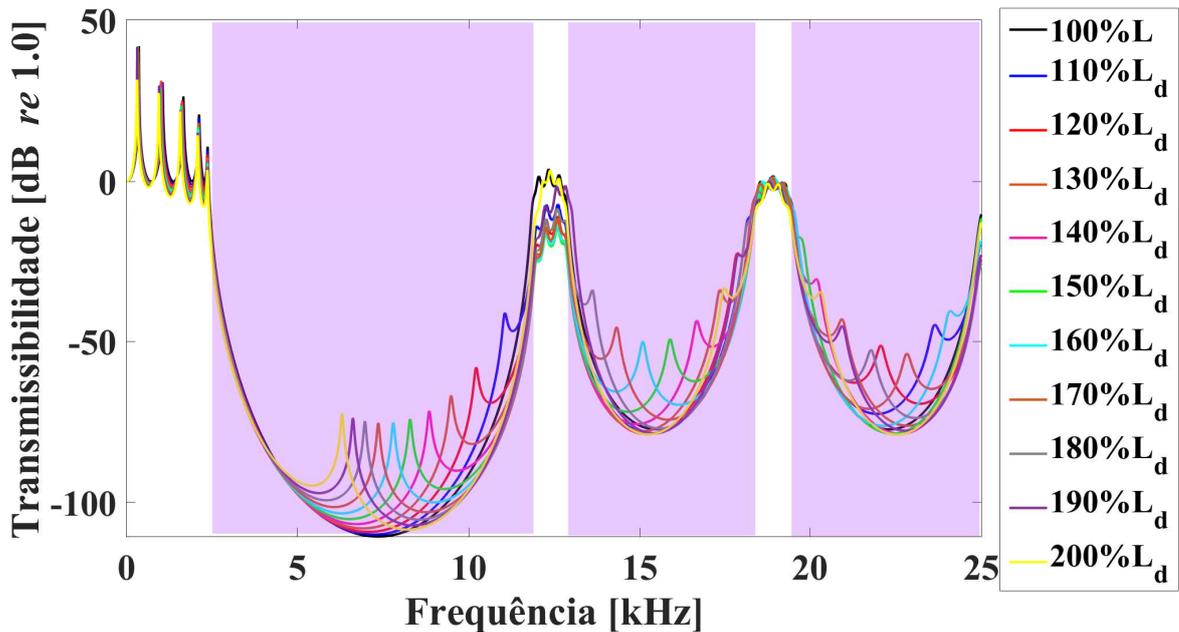


Figura 3.8 – Comparação entre as respostas forçadas para o aumento do comprimento da célula defeituosa.

As métricas da variação do diâmetro da célula defeituosa se darão de forma análoga ao procedimento realizado para o comprimento e podem ser vistas na Tab. 3.4. Todavia a discretização das razões de diâmetros são menores, uma vez que este tipo de defeito implicou em alterações menos significativas na questão da sensibilidade da resposta da estrutura frente aos modos de defeito.

Tabela 3.4 – Parametrização da razão de redução e aumento no diâmetro da célula defeituosa.

Razão [%]	200	190	180	170	120	110	90	80	50	40	20
Diâmetro [mm]	30	28,5	27	22,5	18	16,5	13,5	12	7,5	6	3

Quando implementado o defeito envolvendo a redução do diâmetro da célula defeituosa, observado na Fig. 3.9, encontra-se apenas uma espécie de “afundamento” dos *band gaps*, caracterizando níveis maiores de atenuação. O aumento da atenuação vista no interior dos *band gaps* ocorre de maneira inversamente proporcional à redução do diâmetro da célula defeituosa.

Para o modelo de cristal fonônico 1D apresentado neste trabalho, comparando a variação de diâmetro, redução e aumento, este último mostrou-se mais promissor. Conforme pode ser observado na Fig. 3.10, embora não tenha havido a presença de modos localizados na parte central dos *band gaps*. Em todos os intervalos de banda proibida gerados foi possível encontrar pequenos deslocamentos na frequência dos modos propagantes para região interna do *band gap* e verificou-se que esse deslocamento tem como consequência menores níveis de atenuação.

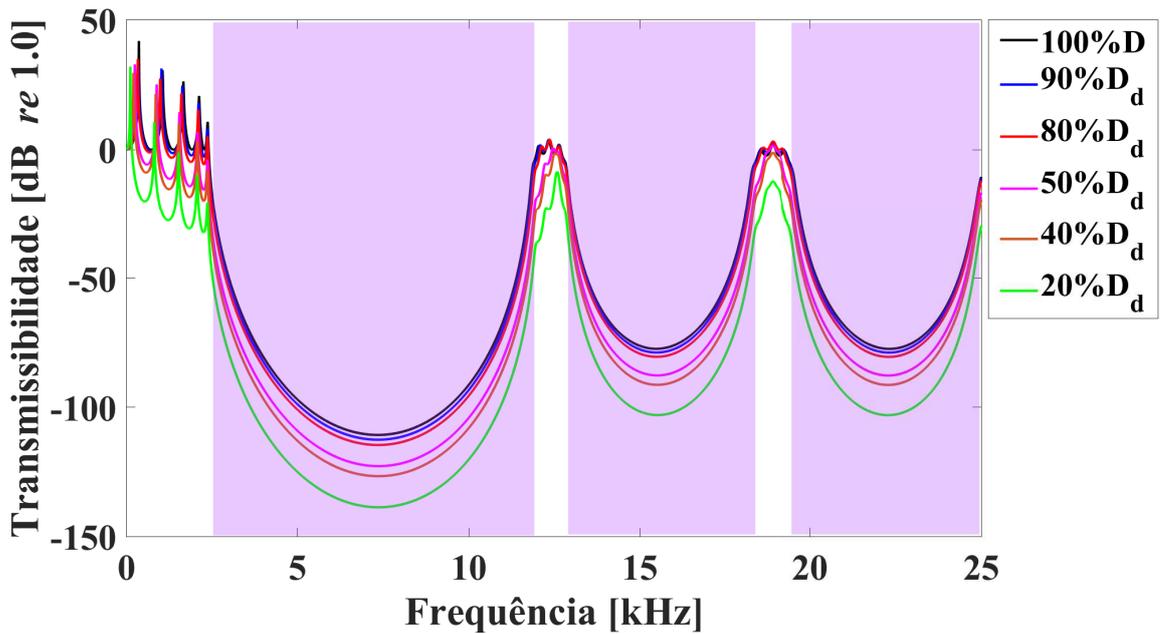


Figura 3.9 – Comparação entre as respostas forçadas para o redução de diâmetro da célula defeituosa.

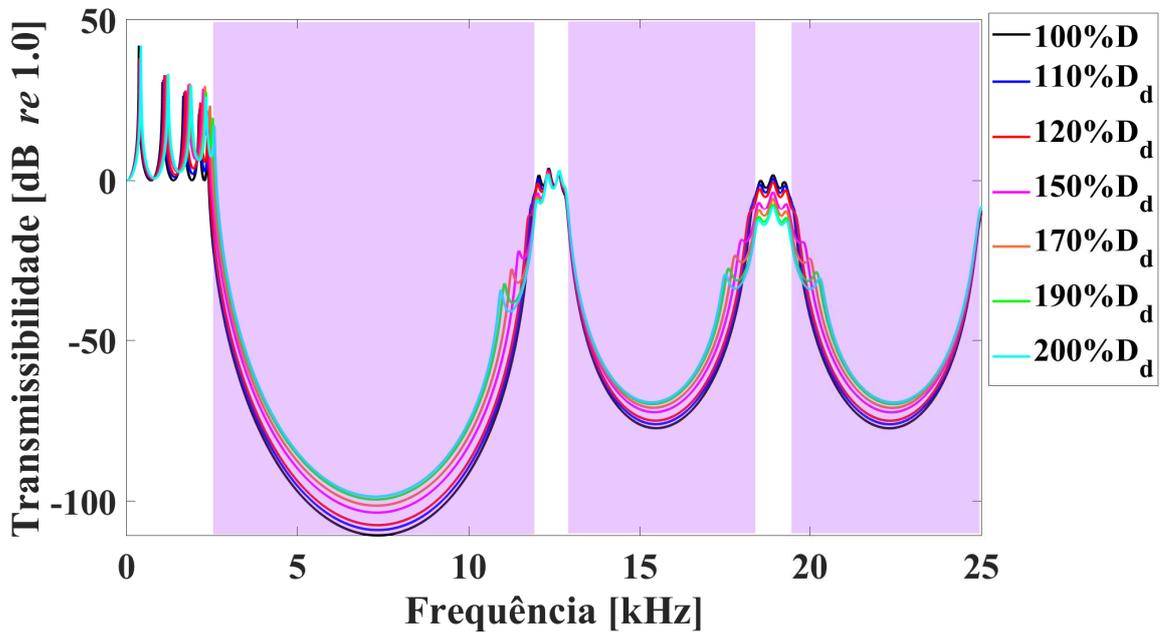


Figura 3.10 – Comparação entre as respostas forçadas para o aumento de diâmetro da célula defeituosa.

Fazendo-se necessário avaliar a influência que o posicionamento da célula defeituosa tem sobre a estrutura. Dentre todos os exemplos realizados, os com variações de comprimento foram os que apresentaram as respostas mais significativas, uma vez que houve a ocorrência de modos localizados no interior dos *band gaps* (observados nas Fig. 3.6 e Fig. 3.8). Para fazer esta verificação, será utilizado como base o exemplo de célula defeituosa com razão

de comprimento de 200%. Observando a Fig. 3.11 pode-se concluir que quando o defeito é inserido nas células intermediárias, ou seja, C2, C3 ou C4, todos esses casos apresentam o mesmo modo de defeito, sendo a média entre as frequências para as células defeituosas C1 e C5, e igual a 6,44 kHz.

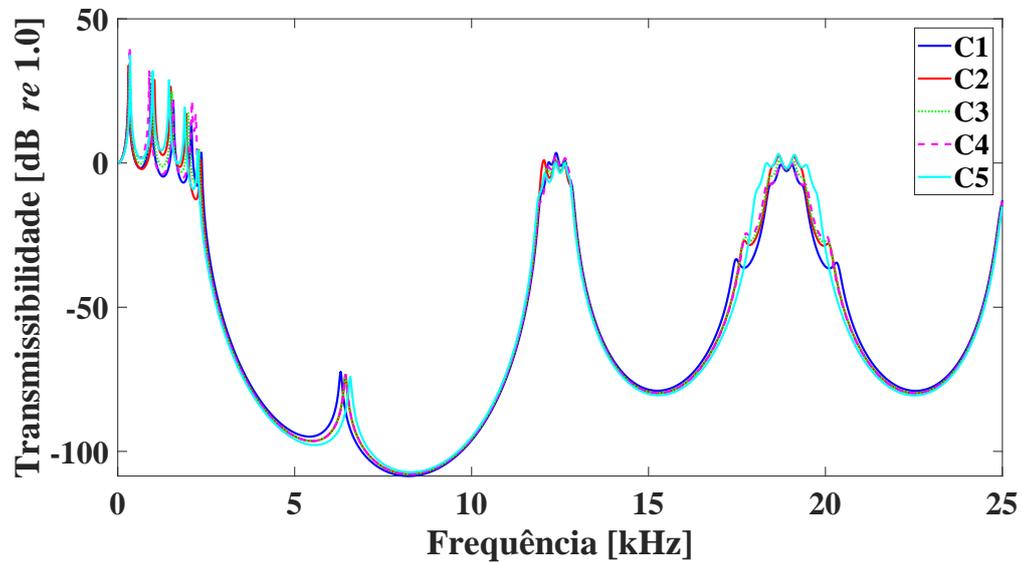


Figura 3.11 – Comparação entre as respostas forçadas para um cristal fonônico tipo barra composto por cinco (5) células; célula defeituosa variando para cada uma das posições das células dentro da estrutura.

3.2 Cristais Fonônicos 1D - Viga

O mesmo cristal fonônico utilizado na implementação da formulação da teoria de barra elementar será utilizado na teoria de viga de Euler-Bernoulli, agora a diferença está na direção da força de excitação e na direção do deslocamento mensurado. A Fig. 3.12 mostra o cristal fonônico, força na extremidade esquerda ($x=0$) e o deslocamento medido na extremidade direita ($x=L$).

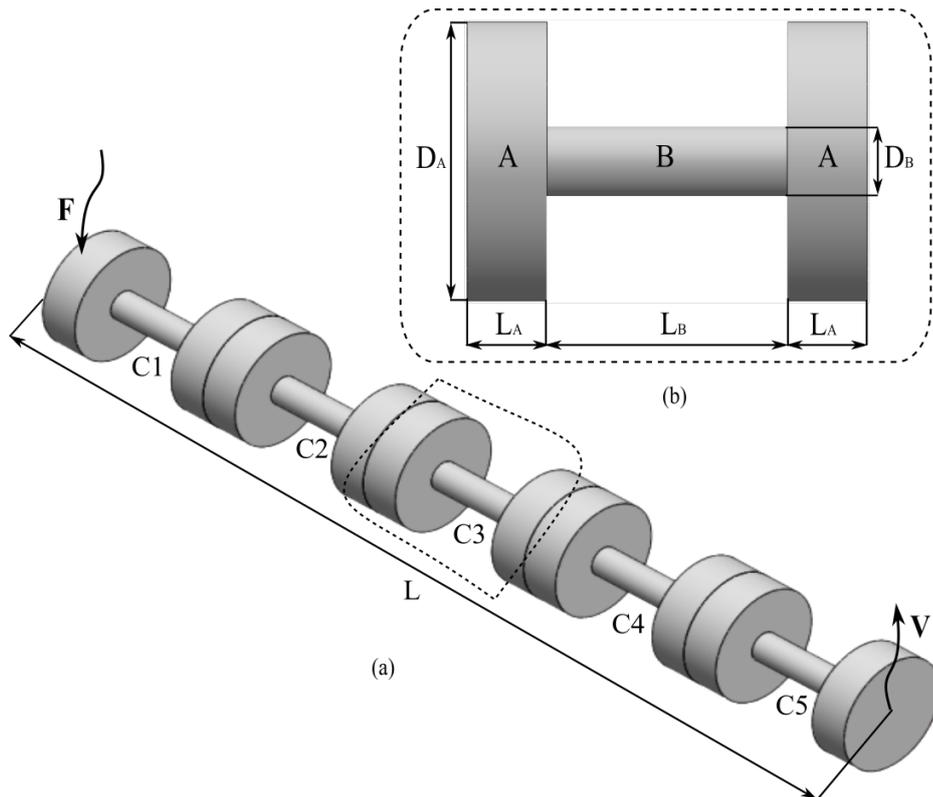


Figura 3.12 – (a) Cristal fonônico; (b) esquema dos parâmetros da célula unitária em detalhe.

Através do diagrama de dispersão (Fig. 3.13), observa-se cinco (5) *band gaps*, quatro (4) largos e um (1) estreito, esse último localizado na região de baixa frequência.

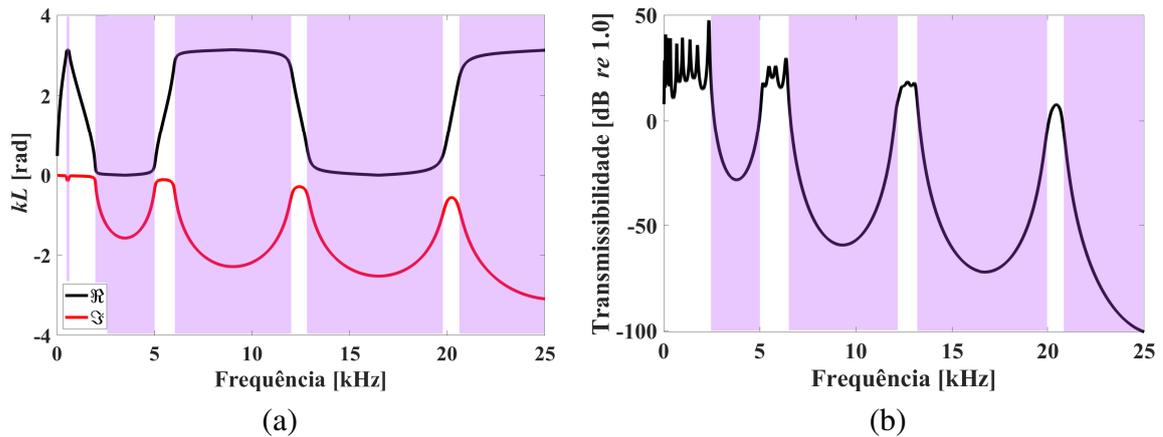


Figura 3.13 – (a) Diagrama de dispersão e (b) resposta forçada do cristal fonônico saudável (100%L) - viga.

3.2.1 Defeitos Geométricos

Da Fig. 3.14, destaca-se que mesmo para pequenas variações o sistema já se mostra mais sensível. Para a razão de comprimento de 90%, há ocorrência de modos de defeito na região interna dos *band gaps* 2, 3 e 4. Para 80%, essa ocorrência é mais proeminente, questão pela qual os modos são bem mais centrais e com maior amplitude. Com 50% é possível observar a presença de modos nos *band gaps* 1 e 3. Os casos com 20 e 10% apresentam apenas um modo no interior do segundo *band gap*.

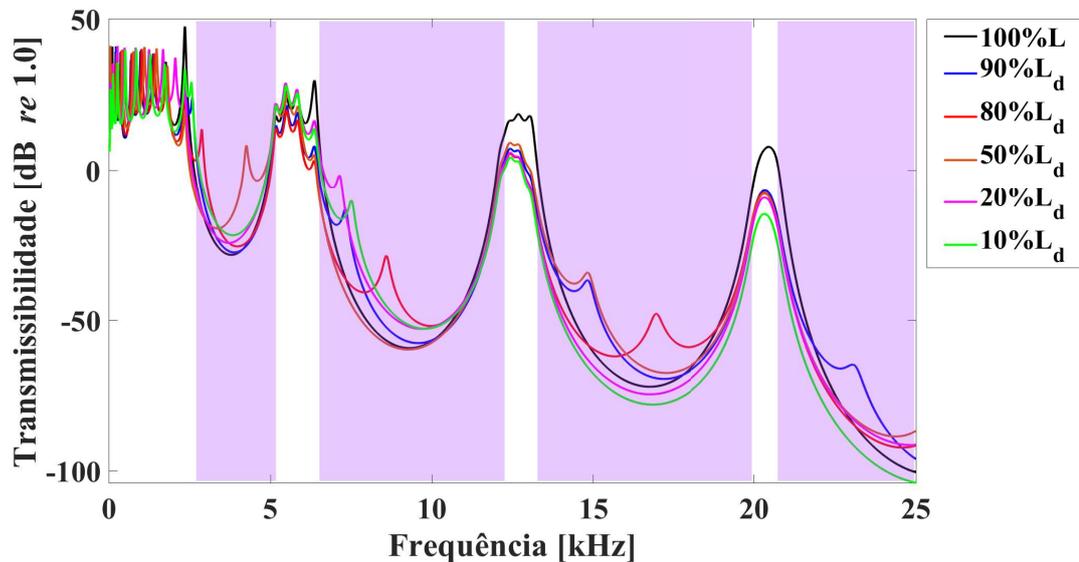


Figura 3.14 – Comparação entre as respostas forçadas para a redução do comprimento da célula defeituosa.

Agora, utilizando-se apenas das razões de comprimento apresentadas na Tab. 3.3: 110, 140, 170, 190 e 200%. Observa-se na Fig. 3.15 que para 110%, os modos limítrofes aos *band gaps* tendem a deslocar para frequências mais baixas. Para 140%, encontra-se modos

internos na região central dos *band gaps* 1 e 2, e modos de média frequência sofrem uma redução em sua amplitude de vibração. Com 170%, tem-se modos internos nos três (3) primeiros *band gaps* e um ganho na amplitude de vibração dos modos propagantes de média frequência, o mesmo acontece para o caso com razão de 200% no comprimento.

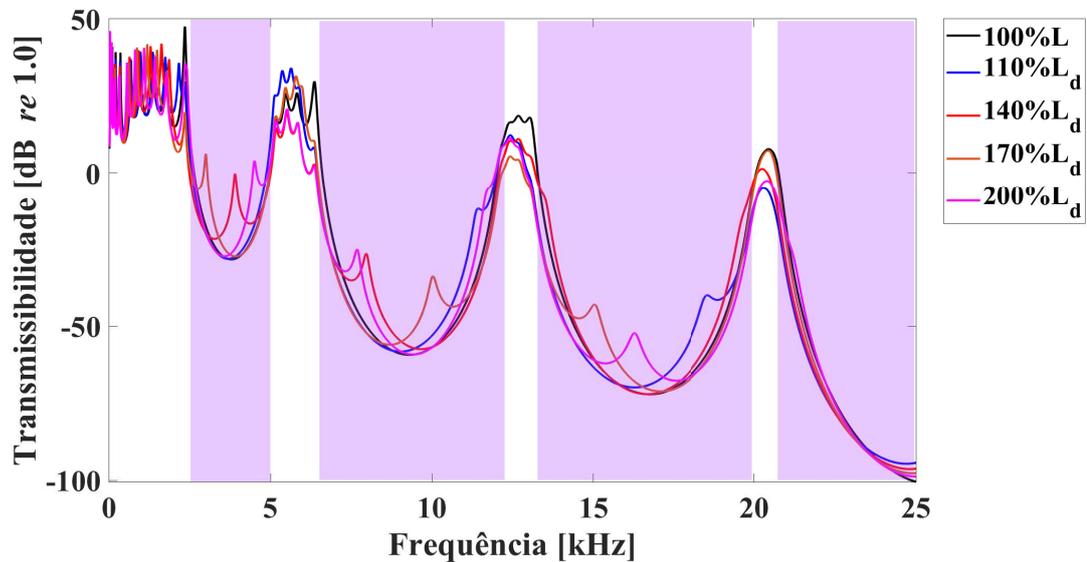


Figura 3.15 – Comparação entre as respostas forçadas para a aumento do comprimento da célula defeituosa.

A Fig. 3.16 apresenta as respostas forçadas para os casos onde houve a redução da razão de diâmetro. Aqui, diferentemente do que aconteceu quando o diâmetro da célula defeituosa foi reduzido para a estrutura formulada pelo elemento de barra, as respostas mais preponderantes consistem em apresentar um maior nível de atenuação, ou seja, outro “afundamento” aparente dos *band gaps*. Para os casos onde a razão de diâmetro é inferior a 30% houve a condição de matrizes singulares, o que influenciou na precisão dos resultados obtidos.

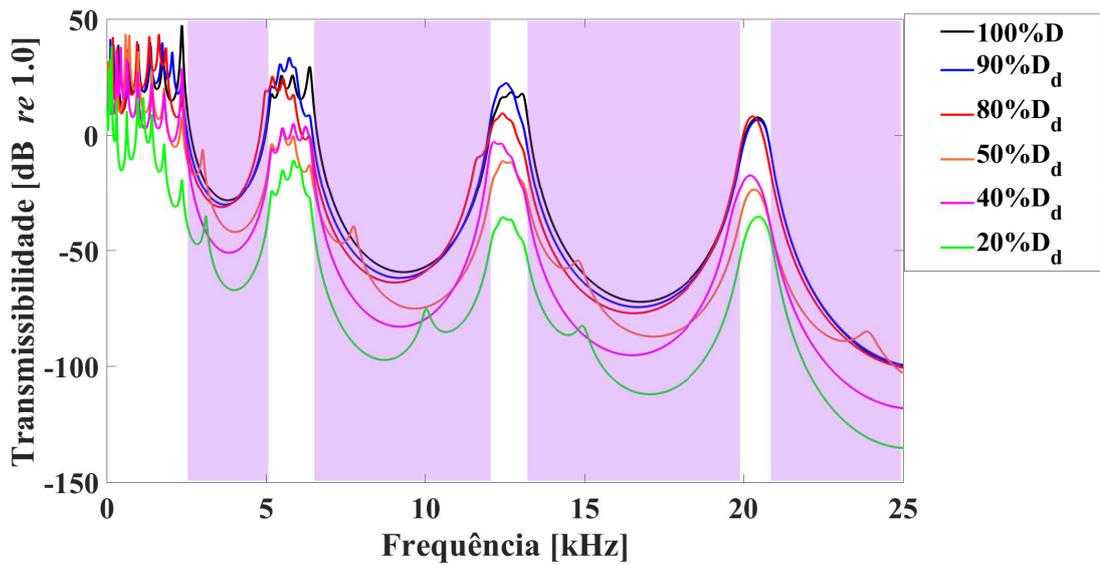


Figura 3.16 – Comparação entre as respostas forçadas para a redução do diâmetro da célula defeituosa.

Com o aumento da razão de diâmetro da célula defeituosa (Fig. 3.17), tem-se para o caso de 110%, dois modos limítrofes aos *band gaps* 1 e 2 deslocam-se na frequência para região interna dos mesmos, as amplitudes de vibração apresentam pequenas flutuações. De 120 a 160%, esses mesmos modos anteriormente mencionados deslocam-se para parte central do *band gap*, direcionando-se para frequências mais elevadas dentro dos dois primeiros *band gaps*. De 170 a 200%, além desse deslocamento para regiões centrais dos *band gaps*, há um aumento no nível de atenuação de vibração em altas frequências.

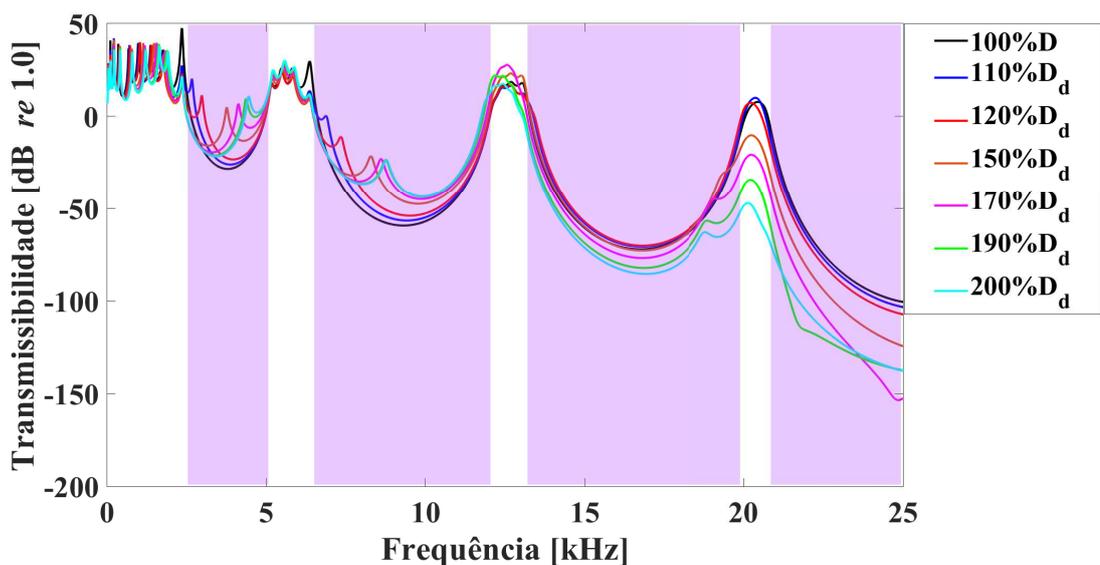


Figura 3.17 – Comparação entre as respostas forçadas para a aumento do diâmetro da célula defeituosa.

3.2.2 Defeitos de Material

O modelo de cristal fonônico formado a partir da mudança de material é constituído por quatro (4) células unitárias, também sendo subdivididas em três (3) elementos e apresentado na Fig. 3.18. A Tab. 3.5 contem as propriedades dos materiais que constituem essa estrutura.

Tabela 3.5 – Parâmetros dos materiais constituinte do cristal fonônico.

Seção	Material	Densidade [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]	Fator de perda
A	Aço	7800	210	0,01
B	Poliacetral	1400	3,20	0,02

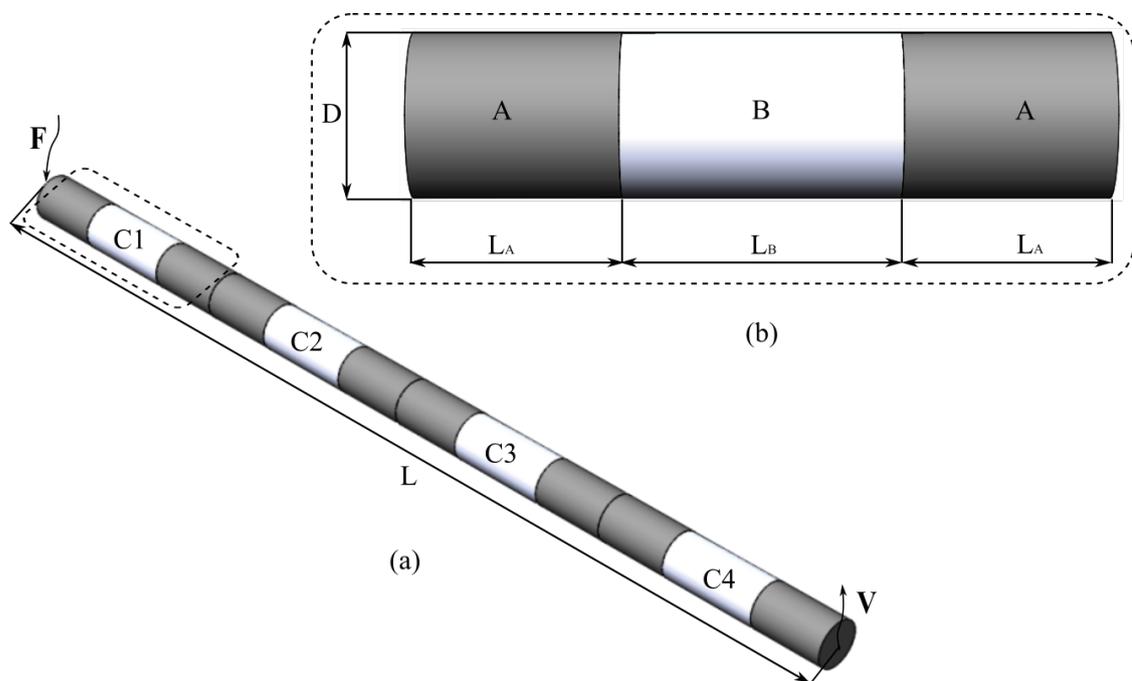


Figura 3.18 – (a) Cristal fonônico baseado na mudança de material; (b) célula unitária e identificação de parâmetros geométricos.

A Tab. 3.6 apresenta os parâmetros geométricos da célula unitária, assim como os elementos que a compõem.

Tabela 3.6 – Parâmetros geométricos da célula unitária do cristais fonônico.

Descrição	Valor [mm]
Comprimento da célula unitária (L_C)	100
Comprimento do elemento “A” (L_A)	40
Comprimento do elemento “B” (L_B)	30
Diâmetro da seção transversal (D)	19

De acordo com o diagrama mostrado na Fig. 3.19 (a), constata-se que este cristal fonônico possui quatro (4) *band gaps*, o primeiro compreende uma largura de banda muito

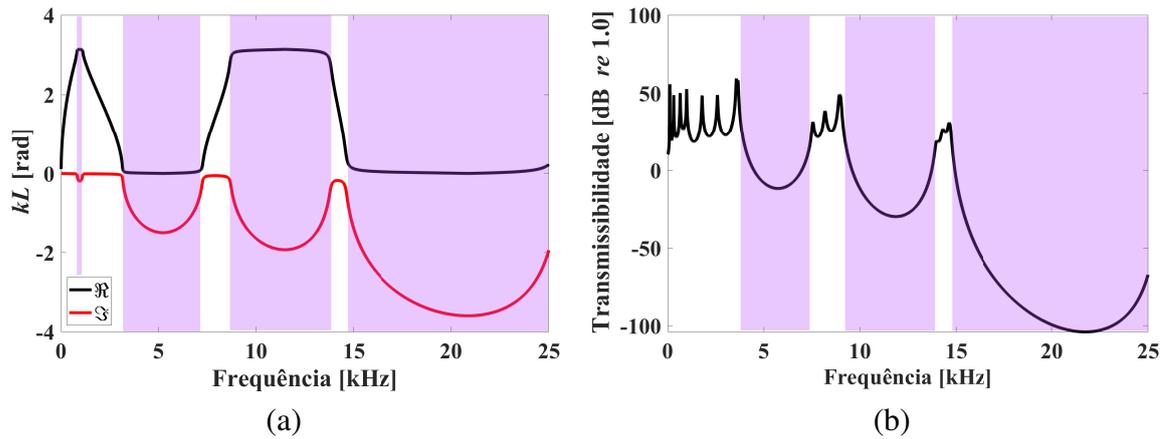


Figura 3.19 – (a) Diagrama de dispersão da cristal fonônico saudável (100% R_f) tipo viga com mudança de material; (b) resposta forçada baseada na transmissibilidade.

estreita, mas os outros três possuem uma largura de banda considerável. No entanto, a resposta forçada, Fig. 3.19 (b), apresenta apenas os três *bad gaps* mais largos.

O defeito será causado a partir das mudança na razão de preenchimento da célula defeituosa, diferindo-a das demais células unitárias formadoras do cristal fonônico. A fração de preenchimento da célula saudável é dada por:

$$f = \frac{L_B}{L_C}. \tag{3.1}$$

A razão de preenchimento da célula defeituosa é dada por:

$$R_f = \frac{f_c}{f_d}, \tag{3.2}$$

onde f_c e f_d são as frações de preenchimento para a célula unitária saudável e defeituosa, respectivamente.

Tabela 3.7 – Valores para razão de preenchimento e os respectivos comprimentos dos elementos “A” e “B” [mm].

R_f	“B”	“A”	R_f	“B”	“A”
10	4	48	110	44	28
20	8	46	120	48	26
30	12	44	130	52	24
40	16	42	140	56	22
50	20	40	150	60	20
60	24	38	160	64	18
70	28	36	170	68	16
80	32	34	180	72	14
90	36	32	190	76	12
100	40	30	200	80	10

Por mais que os comprimentos dos “A” e “B” sejam alterados, o comprimento total da célula unitária sempre permanece constante. A Fig. 3.20 (a) apresenta célula unitária de re-

ferência (100%). Como pode ser observado na Fig. 3.20 (b), onde a razão de preenchimento é de 150%, pela Tab. 3.7 os comprimentos dos elementos “A” e “B” são 20 e 60 mm, respectivamente.

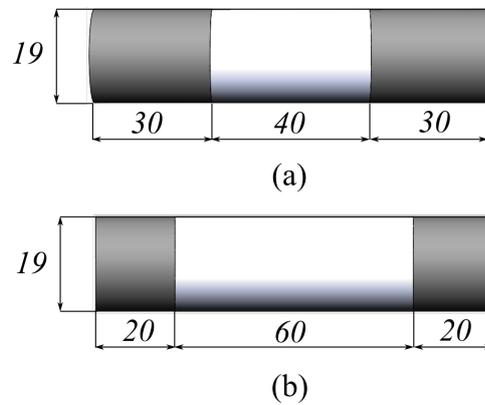


Figura 3.20 – (a) Célula unitária com razão de preenchimento de 100%; (b) célula unitária com razão de preenchimento de 150%.

Pela observação da Fig. 3.21, pode-se compreender que conforme se varia a razão de preenchimento e o elemento de poliacetil vai reduzindo sua participação na composição da célula defeituosa, os modos limítrofes à região de passa banda tendem a ir para frequências da região interna (central) dos *band gaps*. Tomando como exemplo o caso de 60%, tem-se um modo que sofre um pequeno deslocamento para o primeiro *band gap*, um modo centralizado no interior do segundo *band gap* e dois (2) modos presentes no terceiro *band gap*.

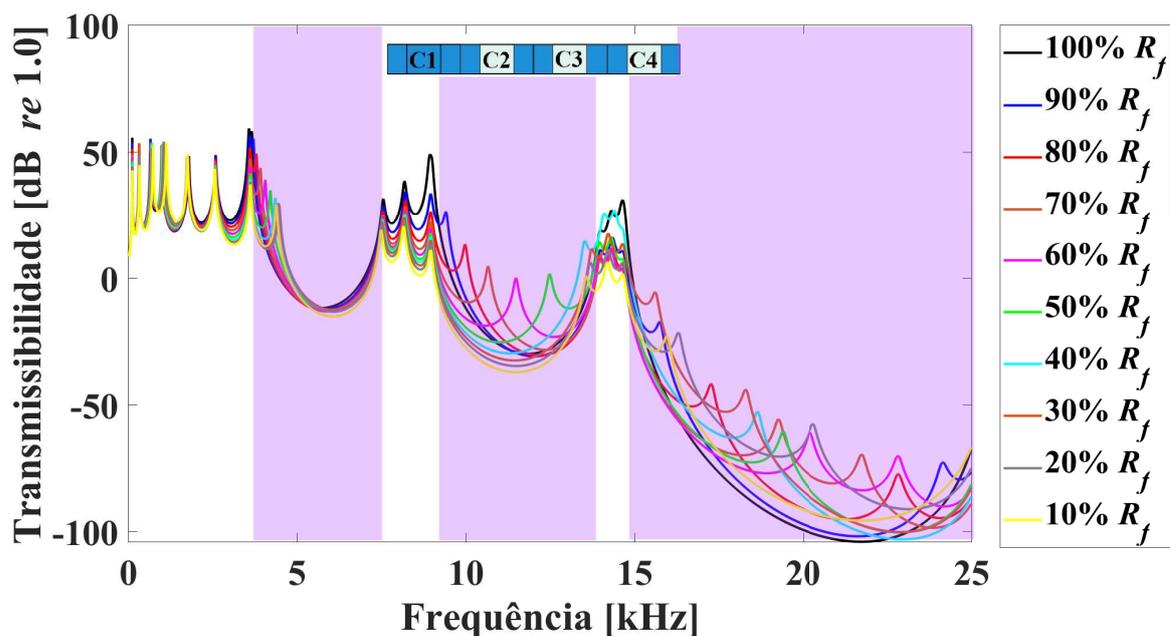


Figura 3.21 – Comparação entre as respostas forçadas para a redução da razão de preenchimento da célula defeituosa.

A Fig. 3.22 apresenta as respostas forçadas para os casos de célula defeituosa com aumento da razão de preenchimento. Observa-se que ocorre uma concentração de modos na região de frequências mais altas dentro do primeiro *band gap*. Já para médias frequências, essa concentração de modos de defeito propagantes tendem a convergir para o faixa de frequência próxima ao centro do segundo *band gap*. Em altas frequências, modos de defeito aparecem para os valores de R_f até 160% e para os superiores a 170% encontram-se vales de antirressonância similares às aplicações que envolvem ressonadores.

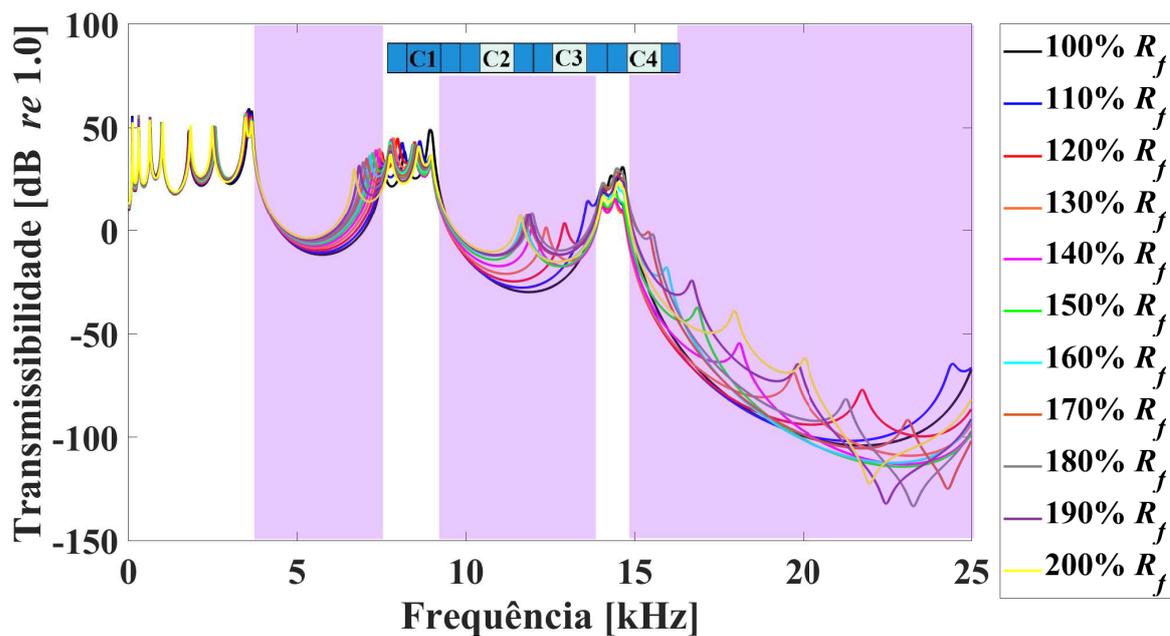


Figura 3.22 – Comparação entre as respostas forçadas para o aumento da razão de preenchimento da célula defeituosa.

Extrapolando a questão do defeito em função da troca do material constituinte da célula unitária do cristal fonônico. As próximas células defeituosas serão formadas pela troca total do material do elemento “B”, considerando $R_f = 100\%$. As propriedades desses materiais estão apresentadas na Tab. 3.8. À vista disso, apenas materiais com propriedades mecânicas distintas das propriedades do aço serão empregados, uma vez que a célula unitária deverá possuir como característica fundamental uma grande diferença de impedância de um para outro elemento. E embora as madeiras sejam consideradas materiais ortotrópicos, para fins de simplificação da modelagem elas serão consideradas como materiais isotrópicos.

A Fig. 3.23 compara as respostas forçadas obtidas para as células defeituosas compostas por tungstênio comercial, cobre C11000 e alumínio. Quando a célula defeituosa é composta por tungstênio comercial, observa-se a presença de dois modos propagantes no interior do primeiro *band gap*. Para o caso do cobre C11000, encontra-se um modo de defeito mais centralizado ao interior do primeiro *band gap* e, assim como o tungstênio comercial, há um grande aumento no nível de atenuação no segundo *band gap*. Com alumínio, apresentam-se modos

Tabela 3.8 – Parâmetros dos materiais utilizados na célula defeituosa.

Material	Densidade [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]
Tungstênio comercial	19300	400
Cobre C11000	8890	115
Alumínio	2710	69
Nylon 6.6	1140	3,3
Madeira P. Taeda J.	504	0,017
Madeira Pinheiro de Douglas	504	0,012

no primeiro e segundo *band gap*, um “afundamento” mais proeminente no terceiro e, de modo geral, encontra-se um aumento no nível de atenuação.

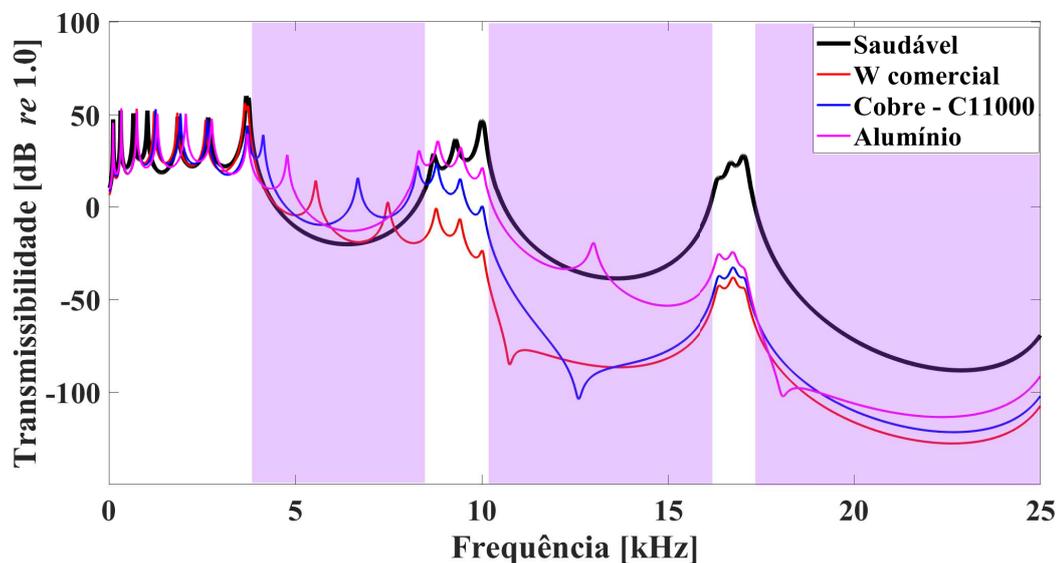


Figura 3.23 – Respostas forçadas dos cristais fonônicos formado a partir da mudança de material (apenas materiais metálicos na célula defeituosa), com defeito na primeira célula unitária.

Verifica-se que quando o material da célula defeituosa apresenta propriedades mecânicas próximas à da célula unitária saudável, o comportamento da resposta forçada do cristal fonônico com defeito não difere muito da resposta obtida para o caso sem defeito. Como visto na Fig. 3.24, caso do Nylon 6.6, onde houve apenas pequenos deslocamentos nas frequências dos modos próximos aos *band gaps* e pouquíssimas alterações na amplitude da vibração. Quando as propriedades mecânicas se afastam dos polímeros, indo para a área das madeiras, pode-se observar que a diferença de impedância entre esses materiais é maior, e portanto, ocorrem mais alterações nas respostas forçadas. Assim, tanto para a madeira *P. Taeda J.* como para o Pinheiro de Douglas, houve um maior nível de atenuação na região do primeiro *band gap* e encontra-se modos no interior do segundo e terceiro *band gap*.

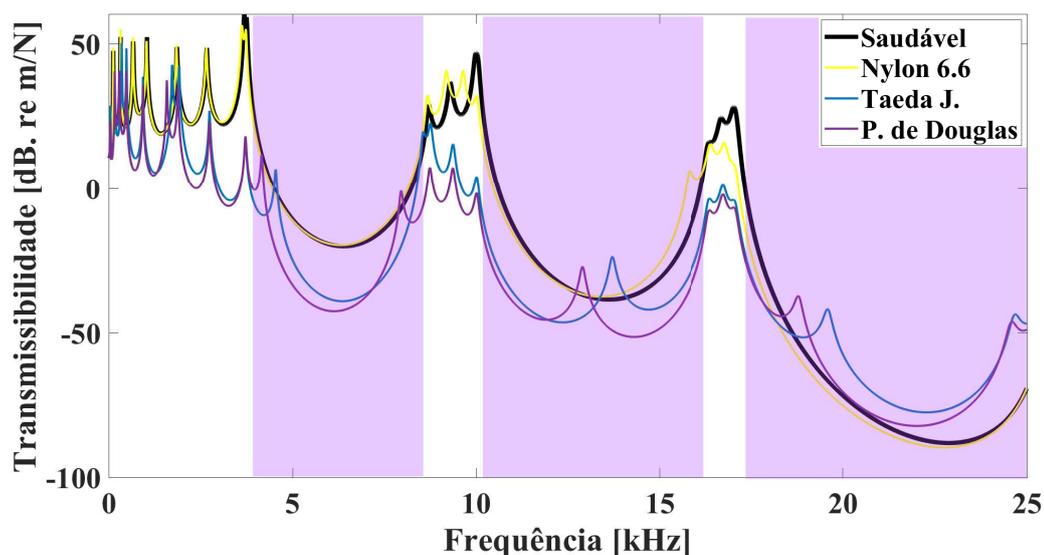


Figura 3.24 – Respostas forçadas dos cristais fonônicos formado a partir da mudança de material (polímeros e madeiras formam a célula defeituosa), com defeito na primeira célula unitária.

Utilizando-se do exemplo da célula defeituosa de Alumínio, a Fig. 3.25 apresenta a comparação das respostas forçadas quando a célula defeituosa muda de posição. Encontra-se sobreposições das respostas, uma vez que a resposta para posição C1 equivale a resposta apresentado para condição C4, e C2 é igual a C3. Tal qual foi verificado na Fig. 3.11, utilizando-se da teoria de barra elementar e com um cristal fonônico composto por um número ímpar de células unitárias.

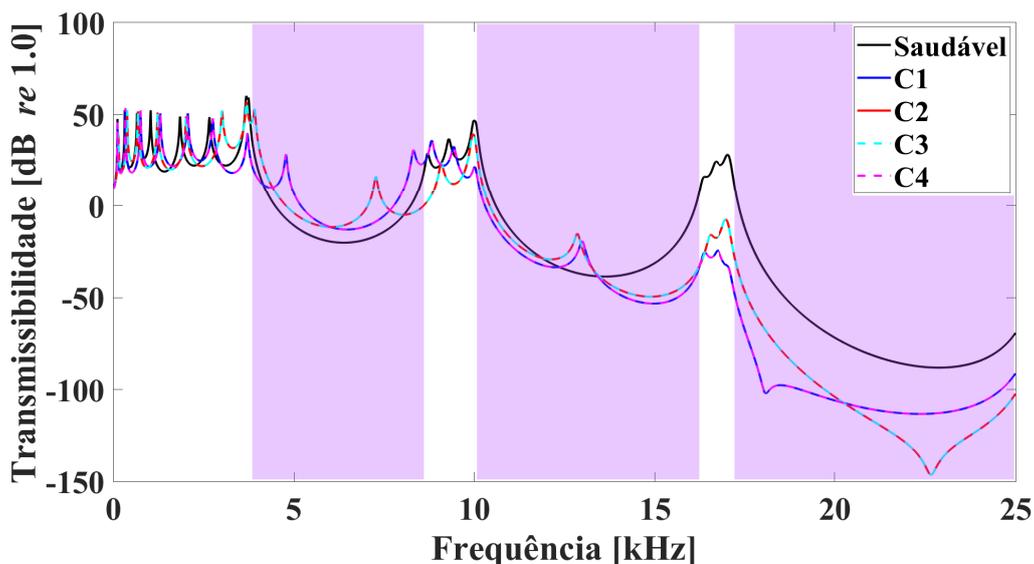


Figura 3.25 – Comparação entre as respostas forçadas para um cristal fonônico tipo viga composto por quatro (4) células; célula defeituosa variando para cada uma das posições.

3.3 Cristais Fonônicos 2D - Placa Fina

3.3.1 Defeito Pontual

O Cristal fonônico 2D do tipo placa fina formado a partir das inclusões cilíndricas circulares de Al_2O_3 embutidas em uma matriz de base de resina epóxi, apresentado na Fig. 2.6 será utilizado como referência, uma vez que equivale ao caso do cristal fonônico 2D saudável e a partir do qual serão realizadas as alterações na inclusão central (caracterizando o defeito). As propriedades dos materiais que constituem o cristal fonônico são mostradas na Tab. 3.9. A rede periódica é dada por $a = 6$ mm, o raio dos cilindros circulares é $r_o = 1,8$ mm e a espessura da placa é $h = 0,6$ mm. Utilizou-se $f = 0,283$, o que representa a fração de preenchimento otimizada para gerar um *band gap* mais largo, conforme constatado nos trabalhos de Yao *et al.* (2009) e Yao *et al.* (2013).

Tabela 3.9 – Propriedades mecânicas dos materiais: matriz epóxi e inclusões de Al_2O_3 .

Propriedade	Resina Epóxi	Al_2O_3
Massa específica [kg/m^3]	1142	3970
Módulo de Young [GPa]	4,350	402
Razão de Poisson	0,378	0,230
Velocidade de Onda Transversal [m/s]	1160	7898

Para avaliar os diagramas de dispersão do cristal fonônico com um defeito pontual, variou-se o raio da inclusão cilíndrica central. Quando o raio do cilindro que representa o defeito (r_d) é igual ao raio dos outros cilindros “saudáveis” (r_o), considera-se que é um cristal fonônico saudável. A partir do parâmetro raio do defeito, a fração de preenchimento do defeito (f_d) é determinada. A Tab. 3.10 correlaciona a razão de defeito (r_d/r_o) e f_d .

Tabela 3.10 – Parâmetros de material da placa fina para cristal fonônico 2D - matriz epóxi e inclusões de Al_2O_3 .

r_d/r_o	80%	60%	40%	20%	0%
f_d	0,181	0,102	0,045	0,011	0

Fig. 3.26 (a) mostra diagrama de dispersão ao longo da FIBZ, ou seja, orientado por $M - \Gamma - X - M$ para um cristal fonônico cujo diâmetro da célula defeituosa é igual aos demais, portanto não há defeito. Observa-se que para a frequência de faixa mostrada, há um intervalo de banda completo, localizado de $\omega a/c_{t_a} = 3,333$ a $4,632$.

Para $r_d/r_o = 80\%$, Fig. 3.26 (b), observa-se que há uma redução na largura do *band gap* da banda 3.311 e 4.367 (máximo), uma vez que o modo propagante de mais alta frequência encontra-se na região onde antes era o *band gap*. O mesmo fenômeno ocorre no caso em que $r_d/r_o = 60\%$, Fig. 3.26 (c), onde passa a ter a presença de três modos de defeitos

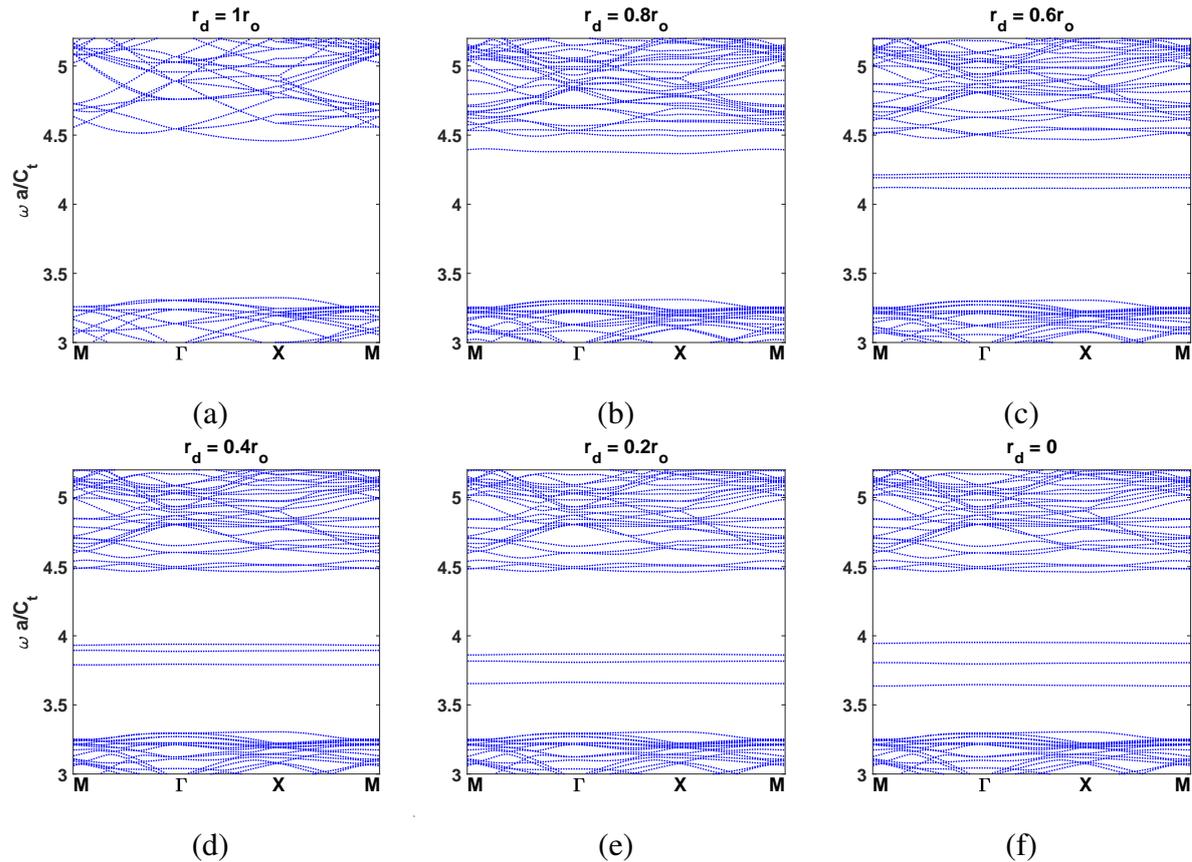


Figura 3.26 – Estruturas de banda dos exemplos da super célula do cristal fonônico com as seguintes configurações da razão r_d/r_o : (a) saudável (100%); (b) 80%; (c) 60%; (d) 40%; (e) 20%; (f) 0%.

localizados na região central do *band gap*. Com $r_d/r_o = 40\%$, Fig. 3.26 (d), os modos continuam com uma proximidade entre si similar ao caso anterior, mas se deslocam para frequências mais baixas. Para os casos com $r_d/r_o = 20\%$ e 0% (inclusão cilíndrica completamente removida), Fig. 3.26 (e) e Fig. 3.26 (f), respectivamente, pode-se observar que os modos de defeito começam a se separar e ter frequências mais específicas, apresentando um afastamento na frequência normalizada de 0,150 e os modos estão centralizados na região do *band gap*.

Na Fig. 3.27 estão representados os modos de onda de Bloch ao longo de $\Gamma - X$. Para o caso do cristal fonônico saudável, $r_d/r_o = 100\%$, observa-se que as amplitudes de onda são praticamente constantes em toda região da compreendida pela estrutura e não se identifica grandes perturbações, conforme visto na Fig. 3.27 (a). Os demais modos de onda de Bloch a serem apresentados equivalem aos modos compreendidos na região interior ao *band gap* das Fig. 3.26 (demarcados por um “x” em seus respectivos valores de r_d/r_o). Na Fig. 3.27 (b), observa-se a existência de maiores perturbações nos contornos dos lados direito e esquerdo da estrutura do cristal fonônico, bem como uma pequena perturbação na amplitude da onda na região da inclusão central com $r_d/r_o = 80\%$. A partir de r_d/r_o igual ou inferior a 60%, três modos começam a ser encontrados no interior do *band gap*, Fig. 3.27 (c)-(f). Assim, conforme

a r_d/r_o diminui, observa-se que a amplitude da onda no local da inclusão defeituosa tende para valores maiores, assim como há uma redução no nível das perturbações nas demais regiões da estrutura, principalmente nas extremidades.

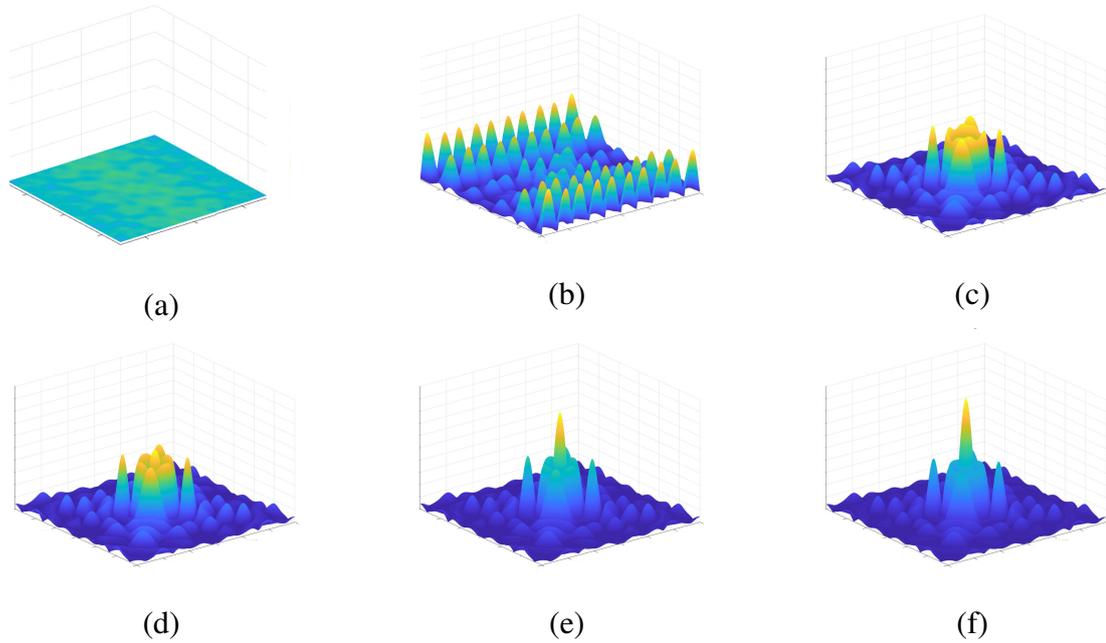


Figura 3.27 – Modos de onda de Bloch para o cristal fonônico 2D para r_d/r_o : (a) 100%;(b) 80%;(c) 60%;(d) 40%;(e) 20%;(f) 0%.

3.3.2 Defeito de Linha Reta

A Fig. 3.28 (a) mostra o diagrama de dispersão para este caso de defeito, observa-se que na faixa de frequências que vai de 0,12 a 0,138, bem como de 0,14 e 0,16, ocorre a presença de modos guiados juntamente com *band gaps* parciais estreitos. Verificando-se que este fato é um indício que esta configuração de defeito em cristal fonônico não favorece criação de *band gaps* e, conseqüentemente, a atenuação das ondas propagadas. Tornando-os com melhores alternativas para aplicações como guia de ondas.

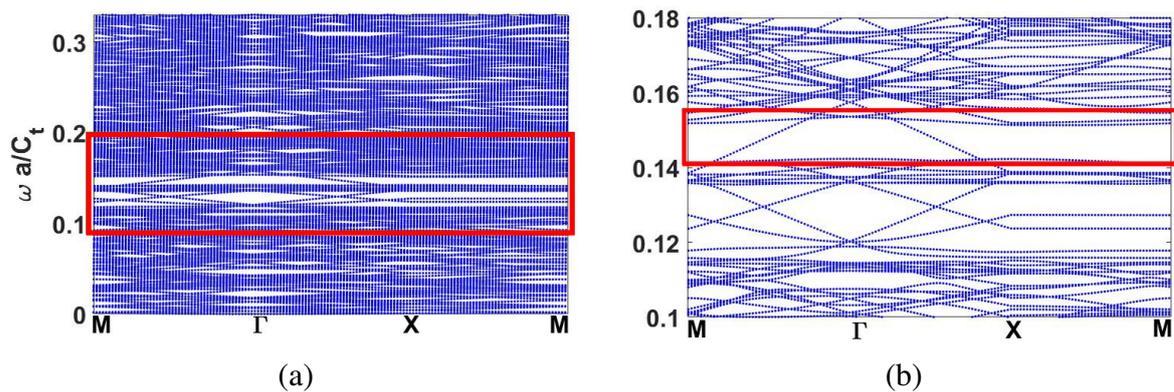


Figura 3.28 – Diagrama de dispersão compreendendo a faixa de frequência normalizada: (a) $\omega a/c_t$ de 0 a 0,33; (b) detalha apenas para $\omega a/c_t$ 0,1 a 0,18, e para presença de modos guiados.

Pelas Fig. 3.29 (a)-(b), observa-se o comportamento do modo localizado destacado pelo retângulo vermelho na Fig. 3.28 (b). Assim, vê-se como o defeito de linha reta no cristal fonônico atua de maneira análoga a um guia de ondas, guiando-as no interior do canal e apresentando pequenas variações na amplitude da onda, mesmo com as inclusões que delimitam o canal, não há grandes interferências.

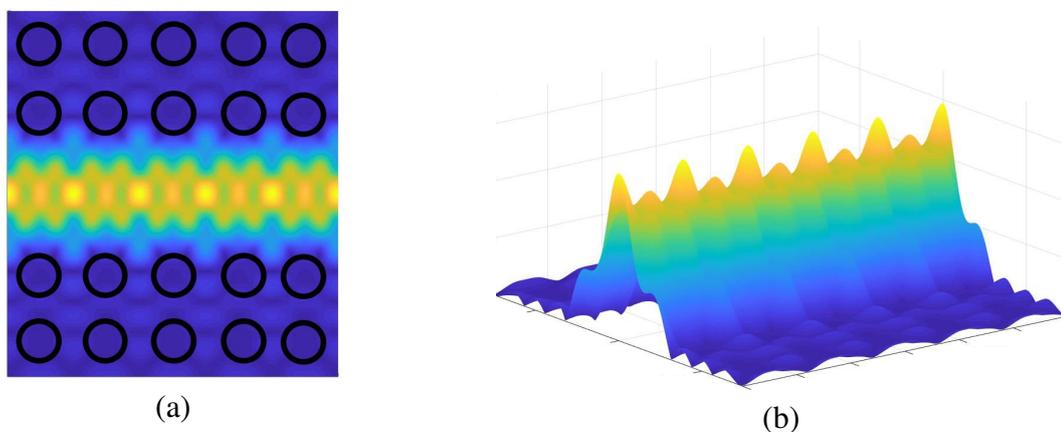


Figura 3.29 – Modo de onda guiado causado pelo defeito de linha reta no cristal fonônico: (a) vista de topo; (b) vista em perspectiva.

3.3.3 Defeito Linear Oblíquo

O defeito oblíquo é definido pela remoção de inclusões na trajetória, formando um “S”, conforme mostrado na Fig. 2.10. Observando a Fig. 3.30 (a), encontra-se alguns modos localizados e guiados um pouco mais distanciados dos demais modos, destacados pelo retângulo azul, que compreende o intervalo de frequência normalizada de $\omega a/c_t = 0,114$ a $0,153$. Assim, tomando como referência a Fig. 3.30 (b), encontra-se mais claramente um modo localizado (retângulo vermelho) que, geralmente, corresponde aos modos planos, e três modos guiados (retângulo azul), onde os modos apresentam mais variações em sua inclinação na região $M - \Gamma - X - M$.

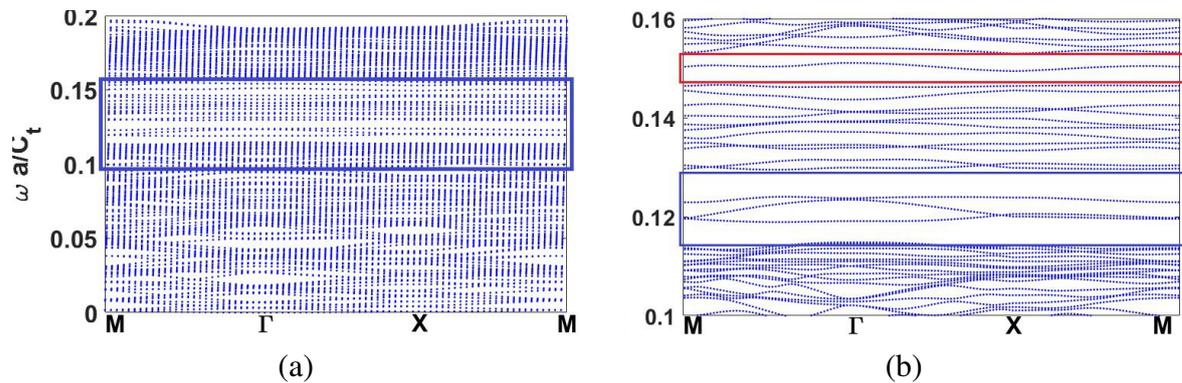


Figura 3.30 – Diagrama de dispersão compreendendo a faixa de frequência normalizada: (a) $\omega a/c_t$ de 0 a 0,22; (b) faixa de frequência normalizada detalhada apenas para $\omega a/c_t$ 0,1 a 0,16, onde há a presença de um modo localizado (retângulo vermelho) e três modos guiados (retângulo azul).

Como nos demais casos investigados, também obteve-se o modo de onda de Bloch ao longo da região $\Gamma - X$. As Fig. 3.31 (a)-(b) representam o modo guiado central, visto entre outros dois modos e destacado no retângulo azul da Fig. 3.30, pode-se observar que este tipo de defeito facilita a propagação da onda ao longo do caminho canal, assim como o defeito de linha reta. No entanto, a interação entre ondas e as inclusões que delimitam o canal apresenta uma baixa influencia na redução da amplitude das ondas ou no aumento de perturbações.

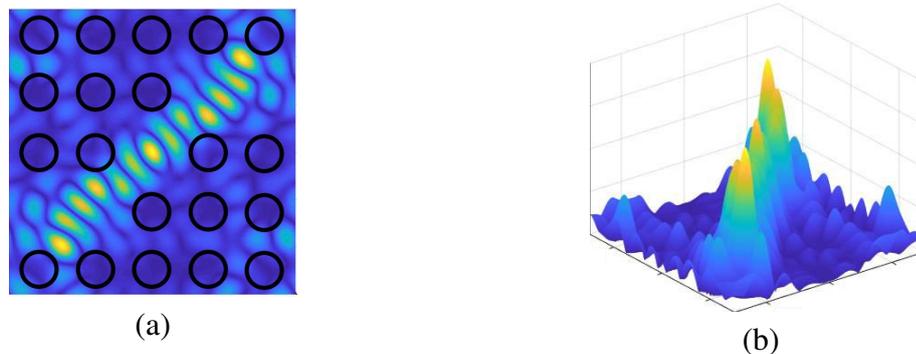


Figura 3.31 – Modo de onda guiado causado pelo defeito de linear oblíquo no cristal fonônico: (a) vista de topo; (b) vista em perspectiva.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma investigação numérica foi realizada a fim de observar o comportamento da propagação de ondas elásticas em estruturas periódicas, com foco nos cristais fonônicos, frente à inserção de defeitos (quebra da periodicidade). Apresentou-se um contexto sobre as estruturas periódicas, classificação e aplicações que as envolvem. Assim como os métodos matemáticos analíticos e numéricos desenvolvidos para modelar tais aplicações. Em seguida, uma revisão geral sobre os defeitos causados pela quebra da periodicidade e algumas pesquisas que o avaliam foram apresentadas.

Propôs-se uma modelagem utilizando-se do SEM para os cristais fonônicos 1D, tanto para as ondas propagantes longitudinais como para as transversais, elementos de barra e viga, respectivamente, e o método do PWE para prever o comportamento dos cristais fonônicos 2D. Os defeitos foram inseridos em apenas uma célula constituinte das estruturas, denominada de célula defeituosa, uma vez que apresenta parâmetros diferentes das demais.

Os resultados foram apresentados através dos diagramas de dispersão e das respostas forçadas para exemplos de defeitos nos cristais fonônicos do tipo barra e viga. Observou-se que quando há diminuição da razão de comprimento os modos de defeito aparecem no interior dos *band gaps*, principalmente para valores intermediários dessa razão (80, 70, 60 e 50%). Já o aumento da razão de comprimento apresenta modos internos em todos os *band gaps* da faixa de frequência avaliada, mostrando que o modelo é mais sensível à essas alterações, e sendo mais eficiente na criação dos modos de defeito. Comparando com as variações de comprimento, os defeitos causados pela variação do diâmetro da seção transversal não se mostraram tão influentes na criação de modos de defeito, principalmente quando se trata das vibrações longitudinais. No entanto, para os modelos formulados por elementos de viga (onde as vibrações transversais são levadas em consideração), valores elevados da razão de diâmetros mostram-se promissores na criação de modos de defeito. Para os casos inversos, quando essa razão é reduzida, a resposta do sistema não é satisfatória, uma vez que para pequenos valores de diâmetro os resultados apresentam flutuação e imprecisão (presença de matrizes singulares).

Os defeitos de material avaliaram as influências que as variações na razão de preenchimento de uma célula defeituosa têm sobre a estrutura do cristal fonônicos. Novamente, para valores médios durante a redução da razão de preenchimento (80, 70, 60 e 50%), modos de defeito aparecem no interior dos *band gaps* de médias e altas frequências. Quando ocorre o aumento dessa razão, os valores mais elevados (a partir de 170 até 200%) mostram-se mais eficientes na criação dos modos de defeitos, visto que os menos estão situados na região central dos *band gaps*. Na extrapolação, quando o defeito é causado pela troca completa do material que constitui a célula defeituosa, ao utilizar os metais mais pesados que o aço (constituente

da original da célula unitária), encontra-se uma espécie de “afundamento” no nível de atenuação das ondas propagadas similar ao de aplicações que envolvem ressonadores. Para os casos onde houve a substituição do material da célula defeituosa por polímeros e madeiras, modos de defeito são identificados na região dos *band gaps*. Quanto à alternância da posição da célula defeituosa em relação ao seu posicionamento na estrutura, observou-se que há uma sobreposição de respostas, uma vez que a resposta mensurada para o defeito localizado na célula C1 coincide com a resposta em C4, do mesmo modo que C2 coincide com C3.

Por último, tratando-se dos defeitos em cristais fonônicos 2D, utilizou-se a combinação da técnica da super célula juntamente com o método do PWE para determinar os diagramas de dispersão e calcular os modos de onda de Bloch. Para os casos onde houve apenas a alteração no diâmetro da inclusão central, defeito pontual, encontrou-se claramente nos diagramas de dispersão a presença de modos de defeito no interior dos *band gaps*, principalmente para r_d/r_o a partir de 60% até a inclusão ser completamente removida, $r_d/r_o = 0\%$.

Através da visualização dos modos de onda de Bloch também foi possível constatar a influência que a razão de diâmetros da inclusão central tem no aumento da amplitude da onda propagada no cristal fonônico, mostrando o máximo do pico de amplitude para $r_d/r_o = 0\%$, corroborando mais uma vez para a aplicação desse tipo de defeito para colheita de energia.

Nos casos de defeitos lineares, tanto de linha reta como o linear oblíquo, não há exatamente a presença de apenas modos de defeito localizado. Por meio dos diagramas de dispersão e da visualização dos modos de onda de Bloch, verificou-se a existência dos modos localizados e guiados, bem como a falta de *band gaps* largos, o que leva a conclusão que esse tipo de quebra de periodicidade implica também na concepção de uma outra proposta de aplicação para os cristais fonônicos com defeitos. Assim, observa-se que os mesmos atuam melhor como guias de ondas, em virtude da remoção das inclusões que delimitam a região do canal e facilita a propagação das ondas. Com a remoção das inclusões, a amplitude da onda confinada no interior do canal não apresentou grandes perdas ou perturbações.

4.1 Trabalhos Futuros

Os seguintes tópicos são sugestões para trabalhos futuros:

- Análises experimentais para verificação e constatação da presença dos modos de defeito;
- Investigações sobre a presença dos modos de defeitos em outras formulações, como elementos de barra e viga de alta ordem;
- Investigação da relação entre os modos de defeito (quebra da periodicidade) e os modos topológicos em estruturas periódicas;
- Avaliar a influência dos defeitos em outros tipos de rede;
- Utilização dos modos de defeitos em aplicações que envolvam colheita de energia;
- Aplicação de métodos para otimizar o tipo de defeito e as características da célula defeituosa;

4.2 Publicações em Anais de Conferências

- V.G.R.C. Dos Santos, E.J.P. Miranda Jr e J.M.C Dos Santos, “Band Structures and Linear Defects in Phononic Crystal Thin Plates ”, Proceedings of the XL Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE), November 11-15, Natal, RN, Brazil, 2019

REFERÊNCIAS

- BENISTY, H.; WEISBUCH, C. Chapter 3 - photonic crystals. In: WOLF, E. (Ed.). Elsevier, 2006, (Progress in Optics, v. 49). p. 177 – 313. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S007966380649003X>>.
- BERAVAT, R.; XI, X. M.; RUSSELL, P. S. Twist-induced guidance in coreless photonic crystal fiber: A helical channel for light. **PLOS: One**, p. 11, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0133271>>.
- BILLON, K.; COLLET, M.; KHELIF, A. Design and experimental validation of a temperature-driven adaptive phononic crystal slab. **Smart Materials and Structures**, v. 28, n. 3, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaf670>>.
- BITTEL, J. **How spider silk is one of the most versatile materials on Earth**. National Geographic, 2011. Disponível em: <<https://www.nationalgeographic.com/animals/2019/09/spiderwebs-explained/>>.
- BLOCH, F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. **Zeitschrift für Physik**, p. 52, 8 1928. ISSN 7-0044-3328.
- BRIA, D.; DJAFARI-ROUHANI, B. Omnidirectional elastic band gap in finite lamellar structures. **Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics**, v. 66, p. 056609, 12 2002.
- BRILLOUIN, L. Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices. Dover, 1953.
- DENG, T.; ZHANG, S.; GAO, Y. A magnetic-dependent vibration energy harvester based on the tunable point defect in 2d magneto-elastic phononic crystals. **Sonic and Photonic Crystals**, 2019.
- DOS SANTOS, V. G. R. C.; MIRANDA JR, E.; DOS SANTOS, J. M. C. Band structures and linear defects in phononic crystal thin plates. In: . [s.n.], 2019. XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2019). Disponível em: <shorturl.at/sHKL5>.
- DOYLE, J. F. **Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms**. Springer-Verlag New York, 1997. 43-72 p. ISBN 978-1-4612-7304-2. Disponível em: <<https://www.springer.com/gp/book/9780387949406>>.
- FAN, H. G.; ZHAO, D. X.; HE, Y. K. L. J. Propagation characteristic in 2d phononic crystals with bending linear defect. In: **Advanced Materials and Process Technology**. [S.l.]: Trans Tech Publications Ltd, 2012. (Applied Mechanics and Materials, v. 217), p. 2566–2570.
- FENG, D.; XU, D.; WANG, Y. IOP Publishing, v. 48, n. 22, may 2015. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/48/22/225102/meta>>.
- FLOQUET, G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. **Annales de l'École Normale Supérieure**, p. 47–88, 1883.

GKANTZOUNIS, G.; FLORESCU, M. Freeform phononic waveguides. **MDPI: Crystals**, p. 353, 2017.

HALES, T. Cannonballs and honeycombs. American Mathematical Society, 1998.

HSIEH, P.-F.; WU, T.-T.; SUN, J.-H. Three-dimensional phononic band gap calculations using the fdtd method and a pc cluster system. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 53, p. 148 – 158, 02 2006.

HUANG, Y.; ZHANG, C.; CHEN, W. Elastic wave band structures and defect states in a periodically corrugated piezoelectric plate. **Journal of Applied Mechanics**, v. 81, p. 081005, 08 2014.

KAFESAKI, M.; SIGALAS, M. M.; GARCÍA, N. Frequency modulation in the transmittivity of wave guides in elastic-wave band-gap materials. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 85, p. 4044–4047, Nov 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.4044>>.

KUSHWAHA, M.; DOBRZYNSKI, L.; DJAFARI-ROUHANI, B. Acoustic band structure of periodic elastic composites. **Physical review letters**, v. 71, p. 2022–2025, 10 1993. Disponível em: <[10.1103/PhysRevLett.71.2022](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.2022)>.

LAUDE, V. **Phononic Crystals: Artificial Crystals for Sonic, Acoustic, and Elastic Waves**. Berlin, Boston: De Gruyter, 2015. ISBN 978-3-11-030266-0.

LEE, U. **Methods of Spectral Element Formulation**. John Wiley & Sons, Ltd, 2009. 39-76 p. ISBN 9780470823767. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9780470823767.ch3>>.

LI, F.; WANG, Y.; ZHANG, C. A bem for band structure and elastic wave transmission analysis of 2d phononic crystals with different interface conditions. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 144, p. 110 – 117, 2018. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740318304971>>.

LV, H.; TIAN, X.; LI, D. Vibration energy harvesting using a phononic crystal with point defect states. **Applied Physics Letters**, v. 102, 01 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4788810>>.

Miranda Jr, E. J. P.; NOBREGA, E. D.; DOS SANTOS, J. M. C. Flexural wave band gaps in a multi-resonator elastic metamaterial plate using kirchhoff-love theory. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 116, p. 480 – 504, 2019. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018303959>>.

MUNDAY, J. N.; BENNETT, C. B.; ROBERTSON, W. M. Band gaps and defect modes in periodically structured waveguides. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 112, n. 4, p. 1353–1358, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1121/1.1497625>>.

OLIVEIRA, E. B. de; SANTOS, L. M. F.; TINA, V. Produtividade de plantações de eucalipto intercaladas com espécies nativas em áreas de pastagens degradadas no noroeste do estado do paraná. In: . [s.n.], 2011. Disponível em: <<https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/117922/1/encontro-silvicultura-2014-pag-3371.pdf>>.

PAGE, J.; CHAN, C.; SHENG, P. Tunneling and dispersion in 3d phononic crystals. **Zeitschrift Fur Kristallographie - Z KRISTALLOGR**, v. 220, p. 859–870, 01 2005.

PENNEC, Y.; VASSEUR, J. O.; DEYMIER, P. A. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications. **Surface Science Reports**, 2010.

QI, S.; OUDICH, M.; ASSOUAR, B. Acoustic energy harvesting based on a planar acoustic metamaterial. **Applied Physics Letters**, v. 108, p. 263501, 06 2016.

ROUHANI, B.; VASSEUR, J.; ZEMMOURI, J. Giant stop bands and defect modes in one-dimensional waveguide with dangling side branches. In: . [s.n.], 1998. v. 59, n. 1, p. 255 – 264. ISSN 0079-6816. Proceedings of the 19th International Seminar on Surface Physics and the Meclowski Symposium. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079681698000513>>.

SHELKE, A.; BANERJEE, S.; HABIB, A. Wave guiding and wave modulation using phononic crystal defects. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 25, n. 13, p. 1541–1552, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1045389X13507344>>.

SIGALAS, M. M. Elastic wave band gaps and defect states in two-dimensional composites. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1121/1.418156>>.

SIGALAS, M. M.; ECONOMOU, E. N. Elastic and acoustic wave band structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 158, n. 2, p. 377 – 382, 1992. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X92900597>>.

SPIOUSAS, I.; CALCAGNO, E. R.; EGUIA, M. C. An auditory illusion of proximity of the source induced by sonic crystals. **PLOS: One**, p. 23, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0133271>>.

SUN, J.-H.; WU, T.-T. Propagation of acoustic waves in phononic-crystal plates and waveguides using a finite-difference time-domain method. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 76, p. 104304, Sep 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.76.104304>>.

VASSEUR, J. O.; DJAFARI-ROUHANI, B.; KUSHWAHAI, M. S. Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: the carbon/epoxy composite and some metallic systems. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 6, n. 42, p. 8759–8770, oct 1994. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/6/42/008>>.

VASSEUR, J. O. *et al.* Band structures tunability of bulk 2d phononic crystals made of magneto-elastic materials. **AIP Advances**, v. 1, 12 2011.

WONG, G.; WEISS, T.; RUSSELL, P. Excitation of orbital angular momentum resonances in helically twisted photonic crystal fiber. **Science (New York, N.Y.)**, v. 337, p. 446–9, 07 2012.

WU, T. T.; HSU, J.; SUN, J. Phononic plate waves. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 58, p. 2146 – 2161, 11 2011.

WU, T.-T.; HUANG, Z.-G.; LIN, S.-C. Surface and bulk acoustic waves in two-dimensional phononic crystal consisting of materials with general anisotropy. **Physical Review B**, v. 69, p. 94301–, 03 2004. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.69.094301>>.

YAO, Z. J.; WANG, Y. S.; HU, W. J. Point defect states of phononic crystal thin plates – an application of finite element method. **Advanced Materials Research**, v. 652-654, p. 48–51, 01 2013.

YAO, Z.-J.; WANG, Y.-S.; SHI, Z.-F. Propagation of bending waves in phononic crystal thin plates with a point defect. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 13, p. 2571 – 2576, 2009. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768309000699>>.

YAO, Z. jian; YUE-SHENG; LI, J. bao. Propagation of flexural waves in phononic crystal thin plates with linear defects. **Journal of Zhejiang University-SCIENCE A**, v. 11, p. 827–834, 2010.