

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GIOVANNI TARASCHI

**Análise Numérica do Método de Elementos
Finitos Híbrido Primal com Recuperação de
Fluxos Aplicado a um Problema Elíptico de
Segunda Ordem**

Campinas

2021

Giovanni Taraschi

**Análise Numérica do Método de Elementos Finitos
Híbrido Primal com Recuperação de Fluxos Aplicado a
um Problema Elíptico de Segunda Ordem**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Giovanni Taraschi e orientada pelo Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

T171a Taraschi, Giovanni, 1997-
Análise numérica do método de elementos finitos híbrido primal com recuperação de fluxos aplicado a um problema elíptico de segunda ordem / Giovanni Taraschi. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise numérica. 2. Método dos elementos finitos. 3. Equações diferenciais parciais. I. Correa, Maicon Ribeiro, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Numerical analysis of the primal hybrid finite element method with flow recovery applied to a second order elliptical problem

Palavras-chave em inglês:

Numerical analysis

Finite element method

Partial differential equations

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Maicon Ribeiro Correa [Orientador]

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Frederic Gerard Christian Valentin

Data de defesa: 22-02-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9798-1903>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1139741799593486>

**Dissertação de Mestrado defendida em 22 de fevereiro de 2021 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA

Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER

Prof(a). Dr(a). FREDERIC GERARD CHRISTIAN VALENTIN

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais, Luciana e Carlos.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, por me incentivarem a seguir nos meus estudos e estarem ao meu lado em todas as etapas deste processo. A eles sou imensamente grato e espero um dia poder retribuir tudo o que fizeram por mim.

A todos os professores e professoras que dividiram comigo um pouco do seu conhecimento, desde os que me acompanharam no ensino básico aos que conheci na graduação e pós-graduação. Em especial agradeço ao Professor Maicon, que foi o grande culpado pelo meu crescente interesse em análise numérica e cuja orientação foi fundamental para a conclusão desta dissertação.

Aos amigos que fiz na Unicamp, pelo apoio, inspiração e principalmente pela companhia. É com imenso carinho que guardo todos os momentos de estudo e lazer que pude compartilhar com vocês.

Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro que este trabalho recebeu através do processo 132625/2019-9.

*"Truth is much too complicated to allow anything but approximations."
(John von Neumann, 1903-1957).*

Resumo

Neste trabalho estudamos o Método Híbrido Primal (MHP) para a solução de um problema elíptico de segunda ordem. Focando em problemas bidimensionais, o trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte estudamos o MHP em sua forma original e apresentamos uma revisão dos principais resultados da literatura sobre a convergência do método em malhas afins. A partir disso, investigamos com profundidade a convergência do MHP no caso de malhas bilineares, apresentando novos resultados em termos de condições suficientes, e em alguns casos também necessárias, para a obtenção das taxas ótimas de convergência em malhas bilineares. Já na segunda parte, estudamos uma estratégia que parte da solução Híbrida Primal para obter aproximações em $H(\text{div}, \Omega)$ para o fluxo. Resultados de convergência na norma $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ para essa estratégia são revisados e é desenvolvida a análise de convergência na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Em particular demonstramos que, apesar da estratégia original alcançar taxas de convergência sub-ótimas em $H(\text{div}, \Omega)$ para malhas bilineares, uma simples adaptação desta estratégia é capaz de recuperar as ordens ótimas de convergência.

Palavras-chave: Método Híbrido Primal. Aproximação em Quadriláteros. Recuperação do Fluxo.

Abstract

In this work we study the Primal Hybrid Method (PHM) for the approximation of a second order elliptic problem. Focusing on two-dimensional problems, the work is divided into two parts. In the first one, we study the PHM in its original form and present a review of the main results from the literature, regarding the convergence of the method in affine meshes. Then we investigate the convergence of PHM on bilinear meshes, presenting new results in terms of sufficient, and in some cases also necessary, conditions to obtain optimal convergence rates on quadrilateral meshes obtained from bilinear mappings. In the second part, we study a flux recovery strategy that, from the Primal Hybrid solution, obtains approximations in $H(\text{div}, \Omega)$ for the flow. Convergence results in the $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ norm for this strategy are reviewed and the analysis for the convergence in $H(\text{div}, \Omega)$ is developed. In particular we show that the original flux recovery strategy achieves only sub optimal convergence rates on $H(\text{div}, \Omega)$ for bilinear meshes and propose a variation of this strategy, in order to recover the optimal convergence rates.

Keywords: Primal Hybrid Method. Approximation on Quadrilaterals. Flux Recovery.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Elementos padrão adotados para o caso de malhas triangulares e quadrilaterais respectivamente.	26
Figura 2 – Sequência de malhas triangulares adotadas para a realização dos experimentos numéricos com $n = 2, 4$ e 8	38
Figura 3 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.	42
Figura 4 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.	42
Figura 5 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.	42
Figura 6 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.	43
Figura 7 – Sequência de malhas retangulares adotadas para a realização dos experimentos numéricos com $n = 2, 4$ e 8	43
Figura 8 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.	48
Figura 9 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.	48
Figura 10 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.	48
Figura 11 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.	49
Figura 12 – Sequência de malhas trapezoidais adotadas para a realização dos experimentos numéricos com $n = 2, 4$ e 8	54
Figura 13 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ em malhas triangulares com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente. . .	83
Figura 14 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_1(\Omega)$ em malhas triangulares com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente. . .	83

Figura 15 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente. . . .	86
Figura 16 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_1(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente. . . .	87
Figura 17 – Comparação entre os divergente dos fluxos aproximados obtidos pelos espaços $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ e $\mathcal{ABF}_0(\Omega)$ em uma malha quadrada com 8×8 divisões. . . .	87
Figura 18 – Comparação entre os divergente dos fluxos aproximados obtidos pelos espaços $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ e $\mathcal{ABF}_0(\Omega)$ em uma malha trapezoidal com 8×8 divisões.	87
Figura 19 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{BDFM}_1(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente. . . .	90
Figura 20 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{BDFM}_2(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente. . . .	90

Lista de tabelas

Tabela 1	– Comparação do número de graus de liberdade do método Híbrido Primal com e sem condensar a variável \bar{u} . Foram consideradas malhas triangulares com $n \times n$ divisões.	32
Tabela 2	– Comparação do número de graus de liberdade do método Híbrido Primal com e sem condensar a variável \bar{u} . Foram consideradas malhas quadrilaterais com $n \times n$ divisões.	32
Tabela 3	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	38
Tabela 4	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_2(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	38
Tabela 5	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_3(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	39
Tabela 6	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	39
Tabela 7	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	39
Tabela 8	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação incompatível $(P_2(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	40
Tabela 9	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo método de Galerkin Contínuo com os espaços de aproximação $P_1(\hat{K})$ e $P_2(\hat{K})$ para o problema analisado.	40
Tabela 10	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo método de Galerkin Contínuo com espaço de aproximação $P_3(\hat{K})$ para o problema analisado.	40
Tabela 11	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	44
Tabela 12	– Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	44

Tabela 13 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	44
Tabela 14 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	45
Tabela 15 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	45
Tabela 16 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	45
Tabela 17 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.	46
Tabela 18 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u por GC com os espaços de aproximação $Q_1(\hat{K})$ e $Q_2(\hat{K})$ para o problema analisado.	46
Tabela 19 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u por GC com espaço de aproximação $Q_3(\hat{K})$ para o problema analisado.	46
Tabela 20 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.	54
Tabela 21 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.	55
Tabela 22 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.	55
Tabela 23 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.	55
Tabela 24 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de λ pelo MHP para o problema em questão usando malhas de quadrados e os espaços de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$	56

Tabela 25 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de λ pelo MHP para o problema em questão usando malhas de trapézios e os espaços de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$	56
Tabela 26 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando a estratégia apresentada na Seção 5.2 com os espaços $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ em malhas triangulares.	82
Tabela 27 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando a estratégia apresentada na Seção 5.2 com os espaços $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ em malhas triangulares.	82
Tabela 28 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando a estratégia apresentada na Seção 5.2 com os espaços $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ em malhas triangulares.	83
Tabela 29 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.	84
Tabela 30 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{ABF}_0(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.	84
Tabela 31 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{RT}_1(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.	85
Tabela 32 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{ABF}_1(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.	85
Tabela 33 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{RT}_2(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.	85
Tabela 34 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{ABF}_2(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.	86
Tabela 35 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e \mathcal{BDFM}_2 em malhas de quadrados e de trapézios.	88
Tabela 36 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e \mathcal{BDFM}_3 em malhas de quadrados e de trapézios.	89
Tabela 37 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(S_4^+(\hat{K}), E_3(\partial\hat{K}))$ e \mathcal{BDFM}_4 em malhas de quadrados e de trapézios.	89

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Estrutura da dissertação	20
1.2	Definições e notações	21
2	MÉTODO HÍBRIDO PRIMAL	23
2.1	Formulação variacional	23
2.2	Construção dos espaços de aproximação	25
2.2.1	Compatibilidade em elementos triangulares	28
2.2.2	Compatibilidade em elementos quadrilaterais	29
2.3	Implementação computacional	30
3	ESTIMATIVAS DE ERRO EM MALHAS AFINAS	33
3.1	Estimativas de erro na aproximação de u	34
3.2	Estimativas de erro na aproximação de λ	36
3.3	Experimentos numéricos	37
3.3.1	Malhas triangulares	37
3.3.2	Malhas retangulares	43
4	ESTIMATIVAS DE ERRO PARA MALHAS BILINEARES	50
4.1	Otimidade do MHP em malhas bilineares	50
4.2	O caso dos espaços Serendipity	53
4.3	Experimentos numéricos	53
5	RECUPERAÇÃO DO FLUXO A PARTIR DO MÉTODO HÍBRIDO PRIMAL	58
5.1	Espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$	58
5.1.1	Espaços de Raviart-Thomas, construção e propriedades	60
5.1.2	Espaços Arnold-Boffi-Falk, construção e propriedades	61
5.1.3	Espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini, construção e propriedades	62
5.2	Estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços de Raviart-Thomas	63
5.3	Convergência do fluxo aproximado em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$	64
5.4	Convergência do fluxo aproximado em $H(\text{div}, \Omega)$	66
6	ADAPTAÇÕES NA ESTRATÉGIA DE RECUPERAÇÃO DO FLUXO	69
6.1	Estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços Arnold-Boffi-Falk	69

6.1.1	Análise de convergência para a estratégia baseada em $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$	70
6.2	Estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini	76
6.2.1	Análise de convergência para a estratégia baseada em $\mathcal{BDFM}_m(\Omega)$	77
7	EXPERIMENTOS ENVOLVENDO A RECUPERAÇÃO DO FLUXO A PARTIR DO MHP	81
7.1	Experimentos em malhas triangulares	82
7.2	Experimentos em malhas quadrilaterais	84
7.3	Experimentos envolvendo os espaços Serendipity	88
8	CONCLUSÕES	91
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICE A – EXTENSÃO DO LEMA 10	97

1 Introdução

O Método Híbrido Primal (MHP) é um método de elementos finitos inicialmente proposto para a resolução de problemas elípticos de segunda ordem em (PIAN; TONG, 1969) e (PIAN, 1972) e posteriormente analisado em (RAVIART; THOMAS, 1977a). O MHP baseia-se na formulação variacional híbrida primal, na qual o espaço de busca contém funções descontínuas na fronteira entre elementos vizinhos e, em contrapartida, são adicionadas novas variáveis relacionadas aos Multiplicadores de Lagrange (RAVIART; THOMAS, 1977a).

Em dimensão infinita, a formulação Híbrida Primal é equivalente à formulação Primal clássica no sentido que ambas as formulações obtêm a mesma função contínua como solução. No entanto, no problema discreto, o MHP difere substancialmente do clássico método de Galerkin Contínuo (GC), fornecendo em geral soluções descontínuas, sendo portanto um método de elementos finitos não conforme para a classe de equações consideradas neste trabalho.

Desde sua criação, o MHP foi explorado em diversos trabalhos. Em (MILNER, 1985) e (PARK, 1995) foram desenvolvidas as análises de convergência do MHP para problemas quase-lineares e não lineares respectivamente. Em (QUARTERONI, 1979) o MHP foi adaptado para problemas elípticos de quarta ordem enquanto (ACHARYA; PATEL, 2016) e (ACHARYA; PORWAL, 2020), por exemplo, o adaptaram para problemas parabólicos de segunda e quarta ordem respectivamente.

Neste trabalho, focaremos na aplicação do MHP para problemas elípticos de segunda ordem em domínios bidimensionais e com discretizações em quadriláteros gerais. Para isso usaremos como modelo o seguinte problema de valor de contorno baseado na equação de Poisson

$$-\operatorname{div}(\mathcal{K} \nabla u) = f \quad \text{em } \Omega \quad (1.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (1.1b)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio poligonal limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz contínua, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ é uma função dada e $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbf{x})$ é um tensor simétrico e uniformemente positivo definido, isto é, existem duas constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi} \leq C_2 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (1.2)$$

Para o caso de malhas afins, a análise de convergência do MHP para o problema (1.1) é desenvolvida em (RAVIART; THOMAS, 1977a). Malhas afins são aquelas em que todo elemento da discretização é gerado por uma transformação afim do elemento

padrão. No contexto de problemas bidimensionais, malhas afins incluem malhas compostas por triângulos, retângulos e paralelogramos. No entanto, se desejarmos incluir elementos quadrilaterais convexos gerais, como trapézios por exemplo, transformações afins não são suficientes. É necessário utilizar transformações bilineares.

Assim, na primeira parte deste trabalho, partiremos de resultados mais gerais sobre a aproximação por elementos finitos em malhas bilineares, demonstrados em (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2002), para desenvolver a análise de convergência do MHP para o caso de malhas compostas por quadriláteros convexos gerais, algo que, até onde sabemos, ainda não foi trabalhado na literatura. Como consequência dessa análise obtemos condições suficientes, e em alguns casos também necessárias, para alcançar as ordens de convergência ótimas do MHP em malhas quadrilaterais gerais. Destacamos que reproduzir essa análise para problemas em dimensões superiores é consideravelmente mais complexo, e demanda trabalho futuro.

No contexto do problema modelo (1.1), outro aspecto importante é a aproximação do fluxo $\sigma = -\mathcal{K} \nabla u$. Para muitas aplicações é mais importante obter aproximações precisas para o fluxo do que para a variável escalar u (CHOU; KWAK; KIM, 2002). Dentre essas aplicações destacamos o escoamento de fluídos em meios porosos, no qual σ é chamado de velocidade de Darcy e é desejável que o fluxo aproximado σ_h , além de preciso, pertença ao espaço $H(\text{div}, \Omega)$. As funções vetoriais de $H(\text{div}, \Omega)$ são caracterizadas por possuírem componente normal contínua na fronteira entre elementos vizinhos, propriedade crucial para o cálculo do transporte em aplicações de meios porosos (DURLOFSKY, 1994; CORREA; LOULA, 2007; MIRANDA et al., 2017).

Uma das estratégias mais simples para aproximação de σ parte da solução u_h obtida pelo método de Galerkin Contínuo (GC) e define $\sigma_h = -\mathcal{K} \nabla u_h$. Apesar de sua simplicidade, essa estratégia nem sempre é interessante pois não garante a continuidade da componente normal do fluxo aproximado e a equação de balanço correspondente é satisfeita apenas em um sentido fraco (CORREA; LOULA, 2007). Para superar tais problemas foram desenvolvidas estratégias mais elaboradas, chamadas de estratégias de pós-processamento (CORDES; KINZELBACH, 1992; DURLOFSKY, 1994; LOULA; ROCHINHA; MURAD, 1995; CORREA; LOULA, 2007). Essas estratégias partem da solução u_h (geralmente obtida por GC), e encontram uma aproximação para o fluxo a partir da definição de novos problemas globais ou locais. Dessa forma, a continuidade da componente normal do fluxo aproximado e boas propriedades de conservação são garantidas (CORDES; KINZELBACH, 1992; CORREA et al., 2020).

Outras estratégias amplamente utilizadas na literatura são os métodos Mistos e Mistos Estabilizados. Métodos Mistos são caracterizados pela aproximação simultânea de u e σ , utilizando para isso espaços de aproximação diferentes para cada campo. Na formulação mista clássica (RAVIART; THOMAS, 1977b), a variável escalar u_h pertence a

$L^2(\Omega, \mathbb{R})$ enquanto o fluxo aproximado obtido σ_h pertence a $H(\text{div}, \Omega)$. No entanto, para garantir existência e unicidade de solução, os espaços de aproximação usados precisam satisfazer determinadas condições de compatibilidade (BREZZI, 1974; BREZZI; FORTIN, 2012). Exemplos clássicos de espaços que satisfazem tais condições são encontrados em (RAVIART; THOMAS, 1977b; BREZZI; DOUGLAS; MARINI, 1985; BREZZI et al., 1987).

A necessidade de satisfazer essas condições torna a construção dos espaços de aproximação uma tarefa não trivial (SIQUEIRA; DEVLOO; GOMES, 2013). Como forma de contornar tal problema, foram desenvolvidos os Métodos Mistos Estabilizados. Esses métodos buscam relaxar as condições de compatibilidade, permitindo maior flexibilidade na construção dos espaços de aproximação, sem comprometer a estabilidade dos métodos. Exemplos dessa estratégia são encontrados nos trabalhos (MASUD; HUGHES, 2002; BOCHEV; DOHRMANN, 2006; CORREA; LOULA, 2008; CORREA et al., 2020).

Métodos de Galerkin Descontínuo (GD) também podem ser utilizados para a aproximação do fluxo. Os primeiros métodos de GD para equações elípticas de segunda ordem foram propostos nos anos 70 no contexto de métodos de Penalidade Interior (WHEELER, 1978; ARNOLD, 1982). Desde então diversos métodos de GD foram propostos para o problema da aproximação do fluxo (BREZZI et al., 2005; HUGHES; MASUD; WAN, 2006; LOULA et al., 2008). Em (ANTONIETTI; HELTAI, 2007) e (CASTILLO, 2002) são apresentados experimentos numéricos analisando o desempenho de alguns métodos de Galerkin Descontínuo, enquanto em (ARNOLD et al., 2002) uma análise unificada para uma ampla classe de métodos de GD é desenvolvida.

Em (CHOU; KWAK; KIM, 2002) é mostrado que o problema da aproximação do fluxo também pode ser resolvido através do MHP. Este artigo apresenta uma estratégia de pós-processamento local que parte da solução Híbrida Primal para obter aproximações em $H(\text{div}, \Omega)$ para o fluxo. Neste mesmo artigo é demonstrado que essa estratégia alcança boas ordens de convergência na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, no entanto a convergência em $H(\text{div}, \Omega)$ não é trabalhada. Dessa forma, na segunda parte deste trabalho, desenvolvemos a análise de convergência da estratégia na norma de $H(\text{div}, \Omega)$ e, usando os resultados de (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005), mostramos também que a estratégia, como foi originalmente apresentada, alcança ordens sub-ótimas de convergência em $H(\text{div}, \Omega)$ para malhas compostas por quadriláteros gerais.

Como forma de superar tais limitações apresentadas pela estratégia original para a recuperação de fluxos $H(\text{div}, \Omega)$, propomos algumas estratégias modificadas. Em particular, mostramos que uma simples adaptação na estratégia original é capaz de recuperar as ordens de convergência ótimas na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. A análise de convergência em $H(\text{div}, \Omega)$ assim como o estudo das estratégias modificadas constituem outra contribuição de nosso trabalho.

1.1 Estrutura da dissertação

O desenvolvimento deste trabalho foi dividido em oito capítulos. Cada capítulo possui uma breve introdução onde os tópicos nele abordados são contextualizados. No Capítulo 2 é apresentada a formulação variacional Híbrida Primal assim como o Método Híbrido Primal. Neste capítulo também são introduzidos os espaços de aproximação utilizados no MHP e resultados sobre a existência e unicidade de solução. Por fim é feita uma breve discussão sobre a implementação do método e seu custo computacional.

No Capítulo 3 é feita uma revisão dos principais resultados de convergência do MHP em malhas afins. Esses resultados, demonstrados em (RAVIART; THOMAS, 1977a), foram incluídos pois servirão como base para a análise desenvolvida nos capítulos seguintes. Neste capítulo também foram realizados experimentos numéricos que ilustram os resultados teóricos apresentados.

A partir dos resultados apresentados no capítulo anterior, o Capítulo 4 investiga a convergência do MHP para malhas bilineares. Tal tópico não foi explorado em trabalhos anteriores e consiste em uma contribuição desta dissertação. Foram encontradas condições suficientes, e em alguns casos também necessárias, para a obtenção das taxas ótimas de convergência em malhas bilineares. A exemplo do capítulo anterior, foram realizados experimentos numéricos para ilustrar as condições teóricas encontradas.

No Capítulo 5 foi estudada uma estratégia, originalmente proposta em (CHOU; KWAK; KIM, 2002), para obter aproximações para o fluxo a partir do MHP. Foram apresentados os resultados de convergência dessa estratégia na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e desenvolvida a análise de convergência na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Aqui vale ressaltar que a convergência em $H(\text{div}, \Omega)$ não foi trabalhada no artigo original, e constitui outra contribuição de nosso trabalho.

A partir de nossa investigação no Capítulo 5, encontramos algumas limitações na estratégia apresentada: Perda das taxas de convergência ótimas em $H(\text{div}, \Omega)$ para malhas bilineares e impossibilidade de se usar os espaços da família Serendipity. Assim, no Capítulo 6, propomos duas adaptações na estratégia de recuperação do fluxo. As adaptações consistem em utilizar diferentes espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$ e cada uma delas busca resolver uma das limitações encontradas. Neste mesmo capítulo foram desenvolvidos os resultados de convergência de ambas as adaptações.

No Capítulo 7 são realizados diversos experimentos numéricos relativos às estratégias de recuperação do fluxo. Tais experimentos visam ilustrar os resultados teóricos de convergência apresentados nos Capítulos 5 e 6, comparar a estratégia clássica de (CHOU; KWAK; KIM, 2002) com as adaptações realizadas e validar tais estratégias como alternativas eficientes para o problema da aproximação do fluxo. Por fim, o Capítulo 8 apresenta as conclusões da dissertação.

1.2 Definições e notações

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, considere $\mathbb{M}(A)$ o espaço das funções $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis. Assim definimos o espaço

$$L^2(A, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{M}(A) : \int_A |f|^2 dx < \infty \right\},$$

munido da norma,

$$\|f\|_{0,A} = \left(\int_A |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Considere agora uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um vetor com entradas inteiras não negativas. Denotamos por $D^\alpha u$ a derivada, no sentido fraco, α_i vezes de u na coordenada x_i . Então, os espaços de Hilbert $H^m(A, \mathbb{R})$ são definidos por

$$H^m(A, \mathbb{R}) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{R} : \int_A |D^\alpha u|^2 dx < \infty, \text{ para todo } |\alpha| \leq m \right\},$$

onde $|\alpha| = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$. Sobre os espaços de Hilbert definimos a seguinte norma e semi norma respectivamente

$$\begin{aligned} \|f\|_{m,A} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{0,A}^2 \right)^{1/2}, \\ |f|_{m,A} &= \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{0,A}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Considerando adicionalmente que o conjunto A tem fronteira ∂A Lipschitz contínua, os espaços $H_0^1(A, \mathbb{R})$ e $H^{\frac{1}{2}}(A, \mathbb{R})$ são definidos respectivamente por

$$H_0^1(A, \mathbb{R}) = \left\{ f \in H^1(A, \mathbb{R}) : f|_{\partial A} = 0 \right\},$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial A, \mathbb{R}) = \left\{ f|_{\partial A} : f \in H^1(A, \mathbb{R}) \right\},$$

onde $f|_{\partial A}$ denota o traço de f sobre ∂A .

Seja $\mathbf{q} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial com $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (q_1(\mathbf{x}), \dots, q_n(\mathbf{x}))$. Dizemos que $\mathbf{q} \in L^2(A, \mathbb{R}^n)$ se $q_i(\mathbf{x}) \in L^2(A, \mathbb{R})$ para todo $1 \leq i \leq n$. O espaço $L^2(A, \mathbb{R}^n)$ é munido da norma

$$\|\mathbf{q}\|_{0,A} = \left(\sum_{i=1}^n \|q_i\|_{0,A}^2 \right)^{1/2}.$$

Definiremos também o espaço

$$H(\text{div}, A) = \{ \mathbf{q} \in L^2(A, \mathbb{R}^n) : \text{div } \mathbf{q} \in L^2(A, \mathbb{R}) \},$$

provido da norma

$$\|\mathbf{q}\|_{H(\text{div})} = \left(\|\mathbf{q}\|_{0,A}^2 + \|\text{div } \mathbf{q}\|_{0,A}^2 \right)^{1/2}.$$

Dado $\mathbf{q} \in H(\text{div}, A)$, definimos sua componente normal como $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^{\partial A}$, onde $\mathbf{n}^{\partial A}$ é a normal unitária exterior sobre ∂A . Segue que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^{\partial A} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial A)$ onde $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)$ denota o espaço dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial A)$.

Dado V um espaço vetorial de funções, considere $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear qualquer. Chamamos de núcleo de L o subespaço,

$$\text{Ker}(L) = \{f \in V : L(f) = 0\}.$$

Por fim, dado um conjunto qualquer $K \subset \mathbb{R}^2$, definimos os seguintes espaços vetoriais polinomiais :

1. Espaço dos polinômios sobre K de grau total menor ou igual à r

$$P_r(K) = \text{span}\{x_1^i x_2^j : i + j \leq r\}. \quad (1.3)$$

2. Espaço dos polinômios sobre K de grau menor ou igual à r na coordenada x_1 e de grau menor ou igual a s na coordenada x_2

$$P_{r,s}(K) = \text{span}\{x_1^i x_2^j : i \leq r \text{ e } j \leq s\}. \quad (1.4)$$

3. Espaço dos polinômios sobre K de grau sobre cada coordenada menor ou igual à r

$$Q_r(K) = P_{r,r}(K) = \text{span}\{x_1^i x_2^j : i, j \leq r\}. \quad (1.5)$$

4. Espaço Serendipity de grau r sobre K ([ARNOLD; AWANOU, 2011](#))

$$S_r(K) = \text{span}\{x_1^i x_2^j, x_1^r x_2, x_1 x_2^r : i + j \leq r\}. \quad (1.6)$$

2 Método Híbrido Primal

Este capítulo tem como objetivo familiarizar o leitor com o Método Híbrido Primal no contexto de problemas bidimensionais. Começamos apresentando a formulação variacional híbrida primal para problemas elípticos de segunda ordem. Em seguida apresentaremos o problema discreto associado à formulação híbrida primal e discutiremos a construção dos espaços de aproximação utilizados. Também são discutidos resultados teóricos sobre a existência e unicidade de solução e sobre a interpretação do multiplicador de Lagrange λ . Leitores que já estejam familiarizados com o MHP podem ir direto para a Seção 2.3, onde são discutidos alguns aspectos da implementação do método e do seu custo computacional.

2.1 Formulação variacional

Para introduzirmos a formulação variacional híbrida primal para problemas elípticos de segunda ordem, usaremos como modelo o problema de valor de contorno (1.1).

Dado Ω o domínio do problema em questão, dizemos que \mathcal{T}_h é uma discretização de Ω se \mathcal{T}_h é uma divisão de Ω em subdomínios simples K , chamados de elementos, satisfazendo

T.1 $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K},$

T.2 K é aberto e com fronteira ∂K Lipschitz contínua para todo $K \in \mathcal{T}_h$,

T.3 $K_i \cap K_j = \emptyset$ para quaisquer $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$ distintos.

Aqui, $h > 0$ é chamado de parâmetro de malha e é definido por

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{\text{diam}(K)\},$$

onde $\text{diam}(K)$ é o diâmetro do elemento K , que denotaremos daqui por diante por h_K .

Neste trabalho também assumiremos que toda malha \mathcal{T}_h satisfaz, além das condições T.1 à T.3, alguma condição de regularidade. Utilizaremos as condições de regularidade apresentadas em (CIARLET, 2002) e (GIRAULT; RAVIART, 2012). Para discretizações em triângulos, denotamos por ρ_K o diâmetro da circunferência inscrita no elemento K . Já para discretizações em quadriláteros, dado um elemento K é possível construir quatro triângulos diferentes (para cada escolha de três dos quatro vértices). Denotamos por ρ_K duas vezes o valor do menor diâmetro dos círculos inscritos nesses triângulos.

Para ambos os casos, dizemos que uma discretização (em triângulos ou quadriláteros), é regular se existe constante $\gamma > 0$, tal que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \gamma, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.1)$$

A constante γ é chamada de parâmetro de regularidade de malha e uma família de discretizações $\{\mathcal{T}_h\}$ é dita regular se γ pode ser uniformemente limitado.

Agora, dada uma discretização regular \mathcal{T}_h de Ω , construímos os seguintes espaços

$$X = \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) : v|_K \in H^1(K, \mathbb{R}), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.2)$$

$$M = \left\{ \mu \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^{-\frac{1}{2}}(\partial K, \mathbb{R}) : \exists \mathbf{q} \in H(\text{div}, \Omega) \text{ tal que } \right. \\ \left. \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \mu \text{ sobre } \partial K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (2.3)$$

Sobre os espaços X e M são definidas as respectivas normas

$$\|v\|_X = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v|_K\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|\mu\|_M = \inf_{\{\mathbf{q} \in H(\text{div}) : \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \mu \text{ em } \partial K\}} \|\mathbf{q}\|_{H(\text{div})}.$$

Note que em (2.2) não é imposta a continuidade das funções de X na fronteira entre elementos vizinhos. Dessa forma segue que $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset X$ porém $X \not\subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Os próximos dois resultados nos permitirão caracterizar $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ em função dos espaços X e M .

Lema 1 (Lema 1 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Seja $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo qualquer, então $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset \text{Ker}(L)$ se e somente se existe um único $\mu \in M$ tal que:*

$$\forall v \in X, \quad L(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mu v \, ds.$$

Corolário 1. *Do Lema 1 segue diretamente a seguinte caracterização para $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$,*

$$H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) = \{v \in X : \forall \mu \in M, \quad b(v, \mu) = 0\}, \quad (2.4)$$

onde $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilinear definida por,

$$b(v, \mu) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mu v \, ds. \quad (2.5)$$

Demonstração. Seja $S = \{v \in X : \forall \mu \in M, \quad b(v, \mu) = 0\}$ e defina para cada $\mu \in M$ o funcional linear $L_\mu(v) = b(v, \mu)$. Se $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ o Lema 1 implica que $L_\mu(v) = 0$ para todo $\mu \in M$ e portanto $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset S$. Por outro lado, suponha que $v \in S$, então

$$L_\mu(v) = 0 \quad \forall \mu \in M \Rightarrow \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) v \, ds = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in H(\text{div}, \Omega) \Rightarrow v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Logo $S \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ e das duas continências obtém-se a igualdade. \square

A partir da caracterização de $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ dada pelo Corolário 1, segue que a formulação Híbrida Primal para o problema (1.1) é: Achar o par $(u, \lambda) \in X \times M$ tal que,

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in X, \quad (2.6a)$$

$$b(u, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in M, \quad (2.6b)$$

onde $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear dada por

$$a(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathcal{K} \nabla u) \cdot \nabla v \, dx. \quad (2.7)$$

Em (RAVIART; THOMAS, 1977a) é demonstrado que o problema variacional (2.6) tem solução única $(u, \lambda) \in X \times M$ com $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ e λ satisfazendo

$$\lambda = (- (\mathcal{K} \nabla u) \cdot \mathbf{n}^{\partial K})|_{\partial K} \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.8)$$

Ou seja, λ pode ser caracterizado como o fluxo normal ao bordo ∂K . Essa caracterização para λ será de extrema importância para as estratégias de recuperação do fluxo $\sigma = -\mathcal{K} \nabla u$ discutidas nos Capítulos 5 e 6.

A solução (u, λ) pode ainda ser caracterizada como o único ponto de sela do funcional quadrático sobre $X \times M$ definido por

$$J(v, \mu) = \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, \mu) - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

A partir dessa caracterização, λ pode também ser interpretado como o multiplicador de Lagrange associado à restrição $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Assim, nos próximos capítulos frequentemente iremos nos referir a λ como o multiplicador de Lagrange e a M como o espaço dos multiplicadores de Lagrange.

2.2 Construção dos espaços de aproximação

Para a resolução numérica de (2.6) é necessário construir espaços de dimensão finita $X_h \subset X$ e $M_h \subset M$. Os espaços X_h e M_h permitem a construção do espaço

$$V_h = \{v_h \in X_h : \forall \mu_h \in M_h, b(v_h, \mu_h) = 0\},$$

que guarda semelhança com a caracterização de $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ feita em (2.4), contudo em geral $V_h \not\subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Com isso dizemos que funções em V_h conduzem a aproximações não conformes em $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. A partir disso definimos dois problemas

Problema \mathcal{A} : Encontrar o par $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ tal que:

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in X_h, \quad (2.9a)$$

$$b(u_h, \mu_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in M_h. \quad (2.9b)$$

Problema \mathcal{B} : Encontrar $u_h \in V_h$ tal que:

$$a(v_h, u_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.10)$$

Note que o problema \mathcal{B} conduz a um método não conforme. Note ainda que se (u_h, λ_h) é solução para o problema \mathcal{A} , então u_h é solução para \mathcal{B} . O próximo teorema, demonstrado em (RAVIART; THOMAS, 1977a), fornece condições suficientes e necessárias para a existência e unicidade de solução para os problemas \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Teorema 1 (Teorema 2 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Assuma que*

$$\|v_h\|_h = (a(v_h, v_h))^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

define uma norma sobre V_h . Então segue que:

1. *O problema \mathcal{B} tem solução única $u_h \in V_h$.*
2. *O problema \mathcal{A} tem solução única $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ se e somente se*

$$\{\mu_h \in M_h : \forall v_h \in X_h, b(v_h, \mu_h) = 0\} = \{0\}. \quad (2.12)$$

Deseja-se construir espaços de aproximação X_h e M_h que satisfaçam as condições do Teorema 1 de forma que ambos os problemas admitam soluções únicas. Considere \mathcal{T}_h uma discretização de Ω satisfazendo as condições T.1 à T.3. Iniciamos pela definição de um elemento padrão \hat{K} , que pode ser o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ no caso de discretizações em triângulos, ou o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ no caso de discretizações em quadriláteros.

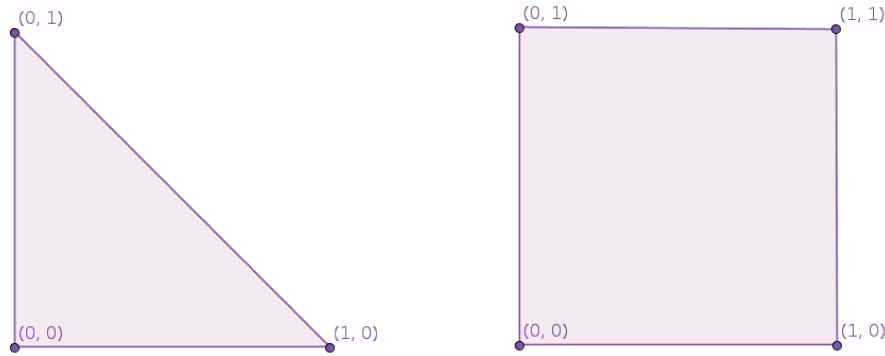


Figura 1 – Elementos padrão adotados para o caso de malhas triangulares e quadrilaterais respectivamente.

Assuma que qualquer elemento $K \in \mathcal{T}_h$ possa ser obtido a partir da imagem de um mapeamento bijetivo F_K atuando sobre \hat{K} , isto é

$$K = F_K(\hat{K}), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

então denotamos por DF_K a matriz Jacobiana da transformação F_K e por JF_K o determinante da matriz Jacobiana. Considerando ainda as condições de regularidade apresentadas na seção anterior, em (GIRAULT; RAVIART, 2012) são demonstradas as seguintes desigualdades

$$\|DF_K\|_{\infty, \hat{K}} \leq C_1 h_K, \quad \|JF_K\|_{\infty, \hat{K}} \leq C_2 h_K^2, \quad (2.13)$$

$$\|DF_K^{-1}\|_{\infty, K} \leq C_3 \frac{h_K}{\rho_K^2}, \quad \|JF_K^{-1}\|_{\infty, K} \leq \frac{1}{\rho_K^2}, \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \|DF_K\|_{\infty, \hat{K}} &= \sup_{\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}} \|DF_K(\hat{\mathbf{x}})\|, \\ \|DF_K^{-1}\|_{\infty, K} &= \sup_{\mathbf{x} \in K} \|DF_K^{-1}(\mathbf{x})\|. \end{aligned}$$

Definiremos agora alguns espaços polinomiais sobre a fronteira do elemento padrão. Seja $E_m(\partial\hat{K})$ o espaço de todas as funções em $\partial\hat{K}$ tais que a restrição em cada uma de suas arestas é um polinômio de grau menor ou igual a m . Denotaremos por $T_m(\partial\hat{K})$ o subconjunto de $E_m(\partial\hat{K})$ composto pelas funções contínuas em $\partial\hat{K}$.

Para a construção de X_h considere \hat{U} subespaço de $H^1(\hat{K}, \mathbb{R})$ tal que, para algum $r \geq 1$, as seguintes condições sejam satisfeitas

$$P_r(\hat{K}) \subset \hat{U} \text{ e } T_r(\partial\hat{K}) \subset \hat{U}|_{\partial\hat{K}}. \quad (2.15)$$

Assim definimos

$$U_K = \{v \in H^1(K, \mathbb{R}) : v = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \hat{U}\}, \quad (2.16)$$

$$X_h = \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) : v|_K \in U_K, \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.17)$$

Já para a construção de M_h , considere um espaço $\hat{\Lambda} \subset L^2(\partial\hat{K}, \mathbb{R})$ satisfazendo

1. $E_m(\partial\hat{K}) \subset \hat{\Lambda}$ para algum $m \geq 0$.
2. $\forall \hat{\alpha} \in E_0(\partial\hat{K}), \hat{\alpha}\hat{\Lambda} = \{\hat{\alpha}\hat{\mu} : \hat{\mu} \in \hat{\Lambda}\} \subset \hat{\Lambda}$.

Assim definimos

$$\Lambda_K = \{\mu \in L^2(\partial K, \mathbb{R}) : \mu = \hat{\mu} \circ F_K^{-1}, \hat{\mu} \in \hat{\Lambda}\}, \quad (2.18)$$

$$M_h = \left\{ \mu \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} \Lambda_K : \mu|_{\partial K_1} + \mu|_{\partial K_2} = 0 \text{ em } K_1 \cap K_2, \forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (2.19)$$

Das definições acima, segue que $X_h \subset X$ e $M_h \subset M$. Note ainda que uma vez determinados os mapeamentos F_K , os espaços de aproximação X_h e M_h são completamente

descritos pela escolha dos espaços \hat{U} e $\hat{\Lambda}$ sobre o elemento padrão \hat{K} . Assim para referir-nos a um determinado espaço de aproximação, diremos simplesmente quem é o par $(\hat{U}, \hat{\Lambda})$ adotado. Além disso, neste e nos seguintes capítulos, a menos que indicado o contrário, usaremos r para denotar o grau dos polinômios usados na construção de X_h e m para o grau dos polinômios usados na construção de M_h .

Em (RAVIART; THOMAS, 1977a) é mostrado que a condição

$$E_m(\partial\hat{K}) \subset \hat{\Lambda}, \text{ para algum } m \geq 0 \quad (2.20)$$

é suficiente para que (2.11) defina norma sobre V_h . Assim, sob esta condição, temos como consequência do Teorema 1 que o problema \mathcal{B} tem uma única solução $u_h \in V_h$.

Já para a existência e unicidade do problema \mathcal{A} é necessário também que a condição (2.12) seja satisfeita. Em (RAVIART; THOMAS, 1977a) é mostrado que

$$\left\{ \hat{\mu} \in \hat{\Lambda} : \forall \hat{v} \in \hat{U}, \int_{\partial\hat{K}} \hat{\mu} \hat{v} \, ds = 0 \right\} = \{0\} \quad (2.21)$$

é condição suficiente para satisfazer (2.12). A equação (2.21) é chamada de equação de compatibilidade, e em conjunto com o Teorema 1 garante a unicidade de solução para o problema \mathcal{A} . O par $(\hat{U}, \hat{\Lambda})$ é dito compatível se ele satisfaz a condição de compatibilidade (2.21) para Λ satisfazendo (2.20), caso contrário é chamado de incompatível. As próximas subseções descrevem como obter espaços compatíveis para o caso de discretizações em elementos triangulares e quadrilaterais.

2.2.1 Compatibilidade em elementos triangulares

O lema a seguir, demonstrado em (RAVIART; THOMAS, 1977a), estabelece condições necessárias e suficientes sobre os graus r e m de forma que a condição de compatibilidade (2.21) seja satisfeita para o caso de problemas bidimensionais com discretização em triângulos.

Lema 2 (Lema 4 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Considere o caso bidimensional com discretização em triângulos. Sejam $r \geq 1$ e $m \geq 0$ dois inteiros. Então as condições*

$$\begin{cases} \mu \in E_m(\partial\hat{K}), \\ \int_{\partial\hat{K}} \mu v \, ds = 0, \forall v \in T_r(\partial\hat{K}) \end{cases} \quad (2.22)$$

implicam que $\mu = 0$ se e somente se

$$r \geq \begin{cases} m + 1, & \text{quando } m \text{ é par.} \\ m + 2 & \text{quando } m \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.23)$$

A partir do Lema 2 e do Teorema 1 obtém-se condições suficientes sobre os graus r e m de modo que tanto o problema \mathcal{A} quanto o problema \mathcal{B} tenham solução única. São exemplos de pares compatíveis $(\hat{U}, \hat{\Lambda})$:

- $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$
- $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$
- $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$

Note que em cada um desses pares podemos aumentar grau r mantendo m constante de forma que os espaços continuam compatíveis. No entanto, como veremos no Capítulo 3, aumentar somente r mantendo m constante não aumenta as ordens de convergência do método. Por outro lado, aumentar m mantendo r constante pode gerar espaços incompatíveis e portanto não teremos garantia de unicidade de solução para o problema \mathcal{A} . Na Seção 3.3 do Capítulo 3 são realizados experimentos numéricos ilustrando ambos os casos.

2.2.2 Compatibilidade em elementos quadrilaterais

No caso de elementos quadrilaterais, possíveis escolhas que satisfazem a condição (2.15) são os espaços $Q_r(\hat{K})$ e $S_r(\hat{K})$, definidos em (1.5) e (1.6) respectivamente. O próximo lema fornece pares $(\hat{U}, \hat{\Lambda})$ compatíveis usando como base tais espaços.

Lema 3 (Lema 8 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Seja $m \geq 0$ um inteiro positivo qualquer. Para algum $r \geq m + 1$, defina \hat{U} como o espaço gerado por $Q_r(\hat{K})$ ou $S_r(\hat{K})$, mais uma função v_0 dada por*

$$v_0(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{cases} [\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_2(1 - \hat{x}_2)][(\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1))^{\frac{r-1}{2}} + (\hat{x}_2(1 - \hat{x}_2))^{\frac{r-1}{2}}], & \text{se } r \text{ é ímpar,} \\ [\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_2(1 - \hat{x}_2)](2\hat{x}_1 - 1)(2\hat{x}_2 - 1) \\ \quad [(\hat{x}_1(1 - \hat{x}_1))^{\frac{r-2}{2}} + (\hat{x}_2(1 - \hat{x}_2))^{\frac{r-2}{2}}], & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

Então o par $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ satisfaz a condição de compatibilidade (2.21).

Analogamente ao caso de malhas triangulares, o Lema 3 e o Teorema 1 fornecem condições suficientes sobre r e m para que os problemas \mathcal{A} e \mathcal{B} tenham solução única. Denotando por $Q_r^+(\hat{K})$ o espaço gerado por $Q_r(\hat{K})$ mais a função v_0 e por $S_r^+(\hat{K})$ o espaço gerado por $S_r(\hat{K})$ mais a função v_0 , temos como exemplos de espaços compatíveis os seguintes pares

- $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$
- $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$

- $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$
- $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$
- $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$

Novamente podemos aumentar o grau r mantendo m constante de forma que os espaços continuem compatíveis, no entanto, assim como no caso de triângulos, essa estratégia não gera um aumento nas ordens de convergência. Aumentar m mantendo r constante, por sua vez, pode gerar espaços incompatíveis e a garantia de unicidade de solução para o problema \mathcal{A} é perdida. Tais comportamentos são observados nos experimentos numéricos realizados no Capítulo 3.

Embora tanto espaços do tipo $Q_r^+(\hat{K})$ quanto do tipo $S_r^+(\hat{K})$ possam ser usados para obter aproximações compatíveis, *o uso de $S_r^+(\hat{K})$ provoca perda das taxas ótimas de convergência em malhas compostas por quadriláteros gerais*. Esse aspecto do MHP não foi explorado em trabalhos anteriores e será discutido com profundidade no Capítulo 4.

2.3 Implementação computacional

Nesta seção discutiremos alguns aspectos da implementação computacional do MHP. A estratégia de implementação usada neste trabalho permite condensar a maior parte dos graus de liberdade associados a u_h , reduzindo consideravelmente o número de graus de liberdade do sistema global. Também é feita uma breve comparação entre o número de graus de liberdade globais do Método Híbrido Primal com e sem essa estratégia de condensação.

Considere os espaços \hat{U} e $\hat{\Lambda}$ apresentados na Seção 2.2. Denotaremos por $d_{\hat{U}}$ a dimensão de \hat{U} e por $d_{\hat{\Lambda}}$ a dimensão de $\hat{\Lambda}$. Sejam

$$\mathcal{B}_{\hat{U}} = \{\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_{d_{\hat{U}}}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{\hat{\Lambda}} = \{\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \dots, \hat{\psi}_{d_{\hat{\Lambda}}}\},$$

bases para os espaços \hat{U} e $\hat{\Lambda}$ respectivamente. Suporemos também que $P_0(\hat{K}) \subset \hat{U}$ e, sem perda de generalidade, que

$$\hat{\varphi}_1 = 1.$$

Dessa forma, partindo de (2.9) e fazendo uso das estruturas de construção dos espaços X_h e M_h , assim como das bases $\mathcal{B}_{\hat{U}}$ e $\mathcal{B}_{\hat{\Lambda}}$, chegamos ao seguinte sistema de equações no nível de cada elemento

$$\begin{cases} Au + B^t \lambda = F, \\ Bu = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Aqui $A \in \mathbb{R}^{d_{\hat{U}} \times d_{\hat{U}}}$, $B \in \mathbb{R}^{d_{\hat{\Lambda}} \times d_{\hat{U}}}$ e $F \in \mathbb{R}^{d_{\hat{U}} \times 1}$ com entradas dadas por

$$A(i, j) = \int_{\hat{K}} ((\mathcal{K} \circ F_K^{-1}) \cdot (DF_K^{-1})^T \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_i) \cdot ((DF_K^{-1})^T \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_j) JF_K \, d\hat{x},$$

$$B(i, j) = \int_{\partial \hat{K}} \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j JF_K d\hat{s},$$

$$F(i) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i (f \circ F_K^{-1}) JF_K d\hat{x},$$

onde DF_K denota a matriz Jacobina da transformação F_K , JF_K o seu determinante e DF_K^{-1} a matriz Jacobiana da transformação inversa.

Como fixou-se $\hat{\phi}_1 = 1$, segue que $\nabla \hat{\phi}_1 = 0$ e portanto a primeira linha e a primeira coluna de A serão nulas. Dessa forma segue que A não é inversível. Considere agora a seguinte divisão em blocos das matrizes A e B e dos vetores u e F

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & \bar{B} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \bar{F} \end{bmatrix}$$

com $F_1, u_1 \in \mathbb{R}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{d_{\hat{v}}-1 \times d_{\hat{v}}-1}$, $\bar{u}, \bar{F} \in \mathbb{R}^{d_{\hat{v}}-1 \times 1}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{d_{\hat{\lambda}} \times d_{\hat{v}}-1}$ e $b \in \mathbb{R}^{d_{\hat{\lambda}} \times 1}$. Reescrevendo o sistema (2.24) usando essa divisão em blocos obtemos

$$\begin{cases} b^T \lambda = F_1 \\ \bar{A} \bar{u} + \bar{B}^T \lambda = \bar{F} \\ bu_1 + \bar{B} \bar{u} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Ao fixar $\hat{\phi}_1 = 1$, garantimos que $\{\nabla \hat{\phi}_i\}$, com $i = 2, \dots, d_{\hat{v}}$, será um conjunto linearmente independente. Consequentemente \bar{A} tem posto completo e portanto é inversível. Usando a inversibilidade de \bar{A} na segunda equação de (2.25) é possível expressar \bar{u} em termos de λ ,

$$\bar{u} = \bar{A}^{-1}(\bar{F} - \bar{B}^T \lambda). \quad (2.26)$$

A igualdade (2.26) permite reescrever o sistema (2.25) em termos das variáveis λ e u_1 apenas

$$\begin{cases} b^T \lambda = F_1 \\ bu_1 + \bar{B} \bar{A}^{-1}(\bar{F} - \bar{B}^T \lambda) = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

que na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & b^T \\ b & \bar{B} \bar{A}^{-1} \bar{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \bar{B} \bar{A}^{-1} \bar{F} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Dessa forma a estratégia de implementação adotada foi: Para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ construímos o sistema local (2.28). Os sistemas locais são então usados na montagem do sistema global, de forma que este será em termos apenas das variáveis λ e u_1 . Uma vez resolvido o sistema global e encontradas as soluções λ e u_1 de cada elemento, recuperamos \bar{u} através de (2.26).

O uso dessa estratégia de condensação reduz consideravelmente a quantidade de variáveis no sistema global, como pode ser observado nas Tabelas 1 e 2. Embora essa

estratégia exija a inversão de uma matriz de dimensões $d_{\hat{U}} - 1 \times d_{\hat{U}} - 1$ para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, a redução no número de graus de liberdade globais torna-a computacionalmente eficiente e justifica sua utilização.

Neste ponto é possível fazer um paralelo entre o Método Híbrido Primal e o Método MHM (Multiscale Hybrid-Mixed) (PAREDES, 2013; HARDER; PAREDES; VALENTIN, 2013). No MHM, que também é baseado na formulação híbrida primal, a solução u é decomposta em uma função constante por elemento e uma função com média nula em cada elemento. Essa decomposição dá origem a problemas locais que são então resolvidos utilizando-se sub-malhas. Para o caso particular em que cada sub-malha é composta por um elemento apenas, o MHM recai ao MHP com a estratégia de implementação aqui descrita.

Vale destacar também que, no caso de malhas quadrilaterais e sem utilizar a estratégia de condensação, os espaços do tipo $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ possuem um número de graus de liberdade significativamente menor do que os espaços do tipo $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$. No entanto, uma vez performada a estratégia de condensação, ambas as famílias de espaços apresentam o mesmo número de graus de liberdade globais, como visto na Tabela 2.

Tabela 1 – Comparação do número de graus de liberdade do método Híbrido Primal com e sem condensar a variável \bar{u} . Foram consideradas malhas triangulares com $n \times n$ divisões.

Espaços de Aproximação	Sem condensar \bar{u}	Condensando \bar{u}	Redução
$(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$	$9n^2 + 2n$	$5n^2 + 2n$	$4n^2$
$(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$	$26n^2 + 4n$	$8n^2 + 4n$	$18n^2$
$(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$	$29n^2 + 6n$	$11n^2 + 6n$	$18n^2$
$(P_5(\hat{K}), E_3(\partial\hat{K}))$	$54n^2 + 8n$	$14n^2 + 8n$	$40n^2$

Tabela 2 – Comparação do número de graus de liberdade do método Híbrido Primal com e sem condensar a variável \bar{u} . Foram consideradas malhas quadrilaterais com $n \times n$ divisões.

Espaços de aproximação	Sem condensar \bar{u}	Condensando \bar{u}	Redução
$(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$	$7n^2 + 2n$	$3n^2 + 2n$	$4n^2$
$(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$	$14n^2 + 4n$	$5n^2 + 4n$	$9n^2$
$(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$	$23n^2 + 6n$	$7n^2 + 6n$	$16n^2$
$(Q_4^+(\hat{K}), E_3(\partial\hat{K}))$	$34n^2 + 8n$	$9n^2 + 8n$	$25n^2$
$(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$	$13n^2 + 4n$	$5n^2 + 4n$	$8n^2$
$(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$	$16n^2 + 6n$	$7n^2 + 6n$	$9n^2$
$(S_4^+(\hat{K}), E_3(\partial\hat{K}))$	$26n^2 + 8n$	$9n^2 + 8n$	$17n^2$

3 Estimativas de erro em malhas afins

Neste e no próximo capítulo serão apresentadas estimativas para os erros cometidos nas aproximações de u , ∇u e λ pelo MHP. Neste capítulo será discutido apenas o caso de malhas afins, isto é, malhas em que todo elemento $K \in \mathcal{T}_h$ é gerado a partir de uma transformação afim F_K agindo sobre o elemento padrão \hat{K} . Apesar desses resultados já serem bem conhecidos na literatura (RAVIART; THOMAS, 1977a), muitos deles serão fundamentais para a análise de convergência em malhas bilineares, desenvolvida no Capítulo 4.

No contexto de malhas bidimensionais, transformações afins são suficientes para levar o elemento padrão triangular em um elemento geométrico triangular qualquer. No entanto transformações afins não são suficientes para levar o elemento quadrado padrão em um quadrilátero convexo qualquer, apenas em paralelogramos. Para levar o quadrado padrão em qualquer quadrilátero convexo é preciso utilizar transformações bilineares. Assim a análise feita neste capítulo abrange discretizações em triângulos e em paralelogramos, sendo insuficiente para discretizações em quadriláteros convexos mais gerais.

Antes de apresentarmos as estimativas para os erros, introduziremos algumas novas normas que facilitarão a análise. Adotando os espaços de aproximação descritos na Seção 2.2 do Capítulo 2, temos que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ induz uma norma em V_h , denotada por

$$|||v_h|||_h = (a(v_h, v_h))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Definiremos também uma nova norma sobre X ,

$$|||v|||_X = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |||v|||_{1,K}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

onde, para qualquer $K \in \mathcal{T}_h$

$$|||v|||_{1,K} = (|v|_{1,K}^2 + h_K^{-2} |v|_{0,K}^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Por fim definiremos uma nova norma sobre M e uma nova norma sobre M_h dadas respectivamente por

$$|||\mu|||_M = \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{|||v|||_X}, \quad (3.4)$$

$$|||\mu|||_{M_h} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K |||\mu|||_{0,\partial K} \right)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Segue que $||| \cdot |||_M$ é equivalente à norma original $|| \cdot ||_M$. Além disso é possível mostrar (RAVIART; THOMAS, 1977a) que existe constante $C = C(\Omega)$ tal que

$$\forall \mu_h \in M_h, \quad |||\mu_h|||_{M_h} \leq C |||\mu_h|||_M. \quad (3.6)$$

Fazendo uso dessas novas normas e considerando sempre discretizações regulares segundo o critério (2.1), as próximas seções apresentarão os principais resultados para a aproximação de u , ∇u e λ em malhas afins.

3.1 Estimativas de erro na aproximação de u

Começaremos enunciando o seguinte resultado de (RAVIART; THOMAS, 1977a), que pode ser visto como uma variante do Teorema de Brezzi (BREZZI, 1974).

Teorema 2 (Teorema 3 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Sejam X_h e M_h os espaços de aproximação descritos na Seção 2.2 do Capítulo 2, então o problema \mathcal{B} tem solução única u_h e satisfaz*

$$\|u - u_h\|_h^2 = \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \right)^2 + \left(\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \lambda - \mu_h)}{\|v_h\|_h} \right)^2. \quad (3.7)$$

O próximo lema nos dá uma estimativa para o segundo termo da direita em (3.7).

Lema 4 (Baseado no Lema 9 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Suponha que o espaço M_h seja construído de acordo com a Seção 2.2 do Capítulo 2, satisfazendo (2.20), e considere $\phi \in H^{m+2}(\Omega)$. Defina*

$$\psi = (-\mathcal{K} \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \text{ em } \partial K, \quad K \in \mathcal{T}_h, \text{ com } \mathcal{K} \text{ satisfazendo (1.2).}$$

Então existe constante C independente de h tal que

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \psi - \mu_h)}{\|v\|_h} \leq Ch^{m+1} |\phi|_{m+2, \Omega}. \quad (3.8)$$

Demonstração. A demonstração desse resultado é análoga à demonstração do Lema 9 de (RAVIART; THOMAS, 1977a) com algumas mudanças elementares para incluir o tensor anisotrópico \mathcal{K} . \square

Limitar o primeiro termo em (3.7), por outro lado, pode ser mais delicado e depende da geometria da discretização adotada. Como aqui estamos nos restringindo ao caso de malhas afins, o próximo lema será suficiente para a análise.

Lema 5. *Seja F uma transformação afim entre \hat{K} e qualquer elemento convexo $K \in \mathcal{T}_h$. Sejam \hat{U} e U_K os espaços introduzidos na Seção 2.2 do Capítulo 2, então*

$$P_r(K) \subset U_K \iff P_r(\hat{K}) \subset \hat{U}.$$

O lema anterior é um resultado clássico sobre mapeamentos afins amplamente utilizado na teoria de Elementos Finitos. Mais detalhes sobre Elementos Finitos em malhas afins assim como a demonstração desse resultado podem ser encontrados na Seção 2.3 de (CIARLET, 2002). A partir do Teorema 2 e usando os Lemas 4 e 5 obtemos a seguinte estimativa para $\|u - u_h\|_h$.

Teorema 3. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização afim e regular de Ω . Considere os espaços X_h e M_h construídos como na Seção 2.2 do Capítulo 2, com $P_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$ e $E_m(\partial\hat{K}) \subset \hat{\Lambda}$. Suponha que $u \in H^{l+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ com $l = \min\{r, m + 1\}$, então existe constante C independente de h tal que*

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.9)$$

Demonstração. Seja W_h subespaço de $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ definido por,

$$W_h = \{w_h \in C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) : \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in P_r(K), w_h|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Como W_h é composto por funções contínuas e o Lema 5 garante que $P_r(K) \subset U_K$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$, segue que $W_h \subset V_h$. Usando (1.2), (2.11) e resultados clássicos da teoria de aproximação segue que

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq C_2 \inf_{w_h \in W_h} |u - w_h|_{1, \Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.10)$$

Tomando $\phi = u$ no Lema 4 e substituindo as desigualdades (3.8) e (3.10) em (3.7) obtemos,

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}.$$

□

De (3.9), (1.2) e (2.11) segue diretamente a seguinte estimativa em $L^2(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|_{0, \Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.11)$$

Usando uma extensão do truque de Nitsche é possível ainda mostrar que, se Ω é convexo, a seguinte estimativa em $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ é válida (RAVIART; THOMAS, 1977a),

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq Ch^{l+1} |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.12)$$

Esses resultados deixam clara a importância da escolha dos graus r e m . Os graus r e m , além de terem um papel crucial na compatibilidade dos espaços de aproximação (Lemas 2 e 3), influenciam diretamente na ordem de convergência do método. Fica claro por (3.9) que elevar o grau de r mantendo m constante, apesar de gerar aproximações compatíveis, não gera uma melhoria nas ordens de convergência do método, uma vez que elas ficarão limitadas por $m + 1$. Por outro lado, aumentar m mantendo r constante pode gerar espaços de aproximação incompatíveis. *Mesmo com espaços incompatíveis, se*

a condição (2.20) for satisfeita, o problema \mathcal{B} continua admitindo solução única. Dessa forma ainda espera-se a convergência de u_h e $\nabla_h u_h$, porém nesse caso as ordens de convergência serão limitadas por r . Na Seção 3.3 foram realizados experimentos numéricos onde observa-se ambos os comportamentos.

3.2 Estimativas de erro na aproximação de λ

Para a análise do erro cometido na aproximação de λ começaremos enunciando o seguinte resultado

Teorema 4 (Teorema 3 e Lema 10 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Sejam X_h e M_h espaços construídos como na Seção 2.2 do Capítulo 2. Suponha ainda que a condição de compatibilidade (2.21) seja satisfeita; então existe constante $\alpha > 0$ tal que,*

$$\forall \mu_h \in M_h, \quad \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_X} \geq \alpha \|\mu_h\|_M. \quad (3.13)$$

Além disso, o problema \mathcal{A} tem solução única (u_h, λ_h) e satisfaz

$$\|\lambda - \lambda_h\|_M \leq \frac{1}{\alpha} \|u - u_h\|_h + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \quad (3.14)$$

O Teorema 4 nos mostra que o erro cometido na aproximação de λ está diretamente relacionado com o erro cometido na aproximação de u . Dessa forma a partir dos Teoremas 3 e 4 e do Lema 4 obtemos a seguinte estimativa para $\|\lambda - \lambda_h\|_M$.

Teorema 5 (Teorema 5 de (RAVIART; THOMAS, 1977a)). *Seja \mathcal{T}_h uma discretização afim e regular de Ω . Considere os espaços X_h e M_h construídos como na Seção 2.2 do Capítulo 2, com $P_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$ e $E_m(\partial\hat{K}) \subset \hat{\Lambda}$. Suponha ainda que a condição de compatibilidade (2.21) seja satisfeita e que $u \in H^{l+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, com $l = \min\{r, m+1\}$. Então existe constante C independente de h tal que*

$$\|\lambda - \lambda_h\|_M \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.15)$$

Demonstração. Do Lema 4 tomando $\phi = u$ segue que,

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \lambda - \mu_h)}{\|v\|_h} \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.16)$$

Como $\|v\|_h \leq C_2 \|v\|_X$, segue direto da definição de $\|\cdot\|_M$ que,

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.17)$$

Assim, substituindo (3.9) e (3.17) em (3.14) obtemos,

$$\|\lambda - \lambda_h\|_M \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}.$$

□

Segue diretamente do Teorema 5 e de (3.6) a seguinte estimativa na norma $\|\cdot\|_{M_h}$

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{M_h} \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (3.18)$$

Na aproximação de λ não é possível aumentar indeterminadamente o grau m mantendo r constante, uma vez que isso gera espaços de aproximação incompatíveis, e assim não haverá garantia para a unicidade de solução do problema \mathcal{A} nem para a convergência de λ_h . Aumentar o grau r mantendo m constante, por outro lado, é uma estratégia viável. Porém neste caso a ordem de convergência será limitada por $m + 1$, como indicado pela equação (3.18). Na Seção 3.3 realizamos experimentos numéricos com espaços compatíveis e incompatíveis que ilustram ambas as situações.

3.3 Experimentos numéricos

Nessa seção apresentamos uma série de experimentos numéricos realizados com o fim de verificar experimentalmente as ordens de convergência apresentadas em (3.11), (3.12) e (3.18). Para isso o MHP foi implementado em um código próprio, escrito em linguagem FORTRAN, para malhas triangulares e retangulares. Em ambos os casos foram utilizados diversos espaços de aproximação, variando os graus r e m . O problema resolvido foi o problema modelo (1.1) definindo $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, \mathcal{K} como a matriz identidade e f foi tomada de forma que a solução exata para o problema fosse

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Os experimentos foram divididos em dois blocos. No primeiro utilizamos malhas triangulares para discretizar o domínio enquanto no segundo usamos malhas retangulares. Em ambos os blocos utilizamos tanto espaços de aproximação compatíveis, isto é, que verificam a condição (2.21), como espaços incompatíveis. Além disso os resultados obtidos pelo método Híbrido Primal foram comparados com os obtidos pelo método de Galerkin Contínuo. As próximas subseções dão mais detalhes sobre cada um dos blocos de experimentos e discutem profundamente os resultados obtidos.

3.3.1 Malhas triangulares

Neste bloco de experimentos o problema em questão foi resolvido utilizando o MHP com malhas triangulares. Para a construção das malhas, o domínio Ω foi primeiro dividido em n^2 quadrados e em seguida cada quadrado foi dividido em dois triângulos, totalizando $2n^2$ elementos, como mostrado na Figura 2. Os espaços de aproximação utilizados foram $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_2(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_3(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $(P_2(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Pelo Lema 2 segue que os cinco primeiros espaços satisfazem a condição de compatibilidade (2.21) enquanto o último não.

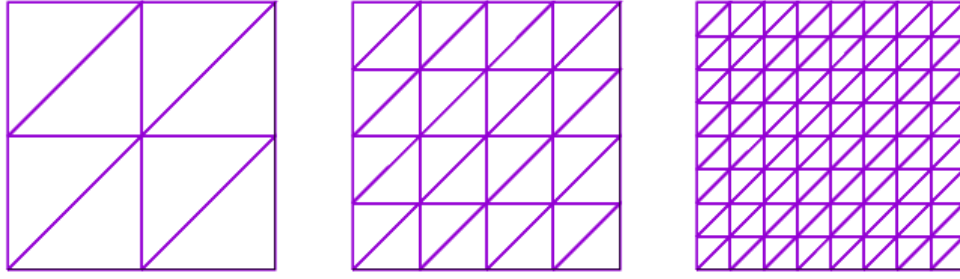


Figura 2 – Sequência de malhas triangulares adotadas para a realização dos experimentos numéricos com $n = 2, 4$ e 8 .

Para cada um dos espaços de aproximação adotados foram computadas as soluções aproximadas (u_h, λ_h) e medidos os erros cometidos nas aproximações de u , ∇u e λ assim como as respectivas taxas de convergência. Os resultados encontram-se nas Tabelas 3 à 8. Além disso, a fim de comparar o método Híbrido Primal com um método clássico, o problema abordado também foi resolvido utilizando o método de Galerkin Contínuo (GC) com base nas funções interpolantes de Lagrange. Os resultados para GC encontram-se nas Tabelas 9 e 10.

Tabela 3 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.5758e-01	-	1.7105e+00	-	1.6260e+00	-
4	4.2710e-02	1.88	9.0277e-01	0.92	8.3839e-01	0.96
8	1.0920e-02	1.97	4.5765e-01	0.98	4.2244e-01	0.99
16	2.7459e-03	1.99	2.2962e-01	1.00	2.1163e-01	1.00
32	6.8748e-04	2.00	1.1491e-01	1.00	1.0586e-01	1.00
64	1.7193e-04	2.00	5.7467e-02	1.00	5.2938e-02	1.00

Tabela 4 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_2(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.8158e-01	-	1.3608e+00	-	1.6260e+00	-
4	4.9769e-02	1.87	7.0336e-01	0.95	8.3839e-01	0.96
8	1.2747e-02	1.97	3.5499e-01	0.99	4.2244e-01	0.99
16	3.2062e-03	1.99	1.7792e-01	1.00	2.1163e-01	1.00
32	8.0278e-04	2.00	8.9017e-02	1.00	1.0586e-01	1.00
64	2.0077e-04	2.00	4.4515e-02	1.00	5.2938e-02	1.00

Tabela 5 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_3(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.8482e-01	-	1.3133e+00	-	1.6260e+00	-
4	4.9997e-02	1.89	6.9693e-01	0.91	8.3839e-01	0.96
8	1.2761e-02	1.97	3.5417e-01	0.98	4.2244e-01	0.99
16	3.2071e-03	1.99	1.7782e-01	0.99	2.1163e-01	1.00
32	8.0284e-04	2.00	8.9004e-02	1.00	1.0586e-01	1.00
64	2.0078e-04	2.00	4.4513e-02	1.00	5.2938e-02	1.00

Tabela 6 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.0688e-02	-	1.8833e-01	-	3.4010e-01	-
4	1.2036e-03	3.15	3.9828e-02	2.24	8.7246e-02	1.96
8	1.5202e-04	2.99	9.4279e-03	2.08	2.1756e-02	2.00
16	1.9382e-05	2.97	2.3299e-03	2.02	5.4084e-03	2.01
32	2.4521e-06	2.98	5.8174e-04	2.00	1.3473e-03	2.01
64	3.0845e-07	2.99	1.4550e-04	2.00	3.3616e-04	2.00

Tabela 7 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	7.2316e-03	-	1.2573e-01	-	1.1872e-01	-
4	4.5100e-04	4.00	1.6339e-02	2.94	1.1884e-02	3.32
8	2.7398e-05	4.04	2.0400e-03	3.00	1.2032e-03	3.30
16	1.6805e-06	4.03	2.5373e-04	3.01	1.2412e-04	3.28
32	1.0403e-07	4.01	3.1609e-05	3.00	1.3492e-05	3.20
64	6.4713e-09	4.01	3.9437e-06	3.00	1.5453e-06	3.13

Tabela 8 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação incompatível $(P_2(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	3.8099e-02	-	5.4679e-01	-	3.4349e+02	-
4	4.5738e-03	3.06	1.4286e-01	1.94	5.2876e+00	6.02
8	5.5885e-04	3.03	3.6102e-02	1.98	2.4523e+00	1.11
16	6.9364e-05	3.01	9.0497e-03	2.00	2.7641e+01	-3.49
32	8.6540e-06	3.00	2.2639e-03	2.00	3.5951e+01	-0.38
64	1.0812e-06	3.00	5.6608e-04	2.00	1.3970e+01	1.36

Tabela 9 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo método de Galerkin Contínuo com os espaços de aproximação $P_1(\hat{K})$ e $P_2(\hat{K})$ para o problema analisado.

Galerkin Contínuo $P_1(\hat{K})$					Galerkin Contínuo $P_2(\hat{K})$				
n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	3.5302e-01	-	2.1243e+00	-	4.6099e-02	-	6.5856e-01	-	
4	1.1183e-01	1.66	1.1859e+00	0.84	6.1202e-03	2.91	1.8298e-01	1.85	
8	2.9886e-02	1.90	6.1065e-01	0.96	7.7508e-04	2.98	4.7216e-02	1.95	
16	7.6048e-03	1.97	3.0764e-01	0.99	9.7212e-05	3.00	1.1906e-02	1.99	
32	1.9098e-03	1.99	1.5411e-01	1.00	1.2163e-05	3.00	2.9833e-03	2.00	
64	4.7799e-04	2.00	7.7094e-02	1.00	1.5208e-06	3.00	7.4626e-04	2.00	

Tabela 10 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo método de Galerkin Contínuo com espaço de aproximação $P_3(\hat{K})$ para o problema o problema analisado.

Galerkin Contínuo $P_3(\hat{K})$				
	$ u - u_h _{0,\Omega}$		$ \nabla(u - u_h) _{0,\Omega}$	
n	err.	taxa	err.	taxa
2	7.8329e-03	-	1.4287e-01	-
4	4.7564e-04	4.04	1.8696e-02	2.93
8	2.8283e-05	4.07	2.3397e-03	3.00
16	1.7196e-06	4.04	2.9135e-04	3.01
32	1.0609e-07	4.02	3.6319e-05	3.00
64	6.5916e-09	4.01	4.5333e-06	3.00

Para os espaços $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_2(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_3(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$, por se tratarem de espaços compatíveis, os Teoremas 2 e 4 nos garantem a convergência de u_h , $\nabla_h u_h$ e λ_h com taxas dadas por (3.12), (3.11) e (3.18) respectivamente. As Tabelas 3 à 7 mostram que os resultados numéricos obtidos estão em total acordo com a previsão teórica. Além disso as Tabelas 3 à 5 referentes aos

espaços $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_2(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e $(P_3(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ deixam claro que aumentar o grau r mantendo m constante não provoca uma melhoria nas taxas de convergência.

Por outro lado, o espaço $(P_2(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2 porém, por se tratar de um espaço de aproximação incompatível, não satisfaz as hipóteses do Teorema 4. Dessa forma esperamos as convergências das variáveis u_h e $\nabla_h u_h$ porém não esperamos a convergência de λ_h . Esse comportamento é observado na Tabela 8. De fato, por se tratar de um espaço incompatível, não podemos sequer garantir a unicidade de solução na aproximação de λ , o que torna a implementação numérica deste espaço mais delicada.

Ao comparar o Método Híbrido Primal (com a estratégia de condensação proposta na Seção 2.3), com o método de Galerkin Contínuo observamos que, para espaços de aproximação de baixa ordem ($m = 0, 1$ e 2), o MHM possui mais graus de liberdade globais do que o método de GC correspondente. Essa situação no entanto se inverte para espaços de aproximação de mais alta ordem ($m \geq 3$).

Já em relação aos erros absolutos notamos que o MHP, para os espaços aqui considerados e para o problema em questão, é mais preciso que o método de Galerkin Contínuo. O MHP usando $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ alcançou as mesmas taxas de convergência que GC usando $P_1(\hat{K})$ para a aproximação de u e de ∇u , porém os erros absolutos foram significativamente menores. Esse mesmo padrão é observado ao comparar GC usando $P_2(\hat{K})$ com o MHP usando $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e ao comparar GC usando $P_3(\hat{K})$ com o MHP usando $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$, embora neste último caso o Método Híbrido Primal mostrou erros apenas levemente menores que os obtidos por Galerkin Contínuo.

Por fim, as Figuras 3 à 6 fazem uma comparação entre as soluções aproximadas u_h obtidas por GC e pelo MHP com diferentes espaços de aproximação e malhas. Pela Figura 3 pode-se ver que a solução aproximada u_h obtida pelo MHP é descontínua na fronteira entre dois elementos vizinhos, o que reflete o fato do MHP ser um método não conforme para a aproximação de u . Conforme refinamos a malha (Figura 4), ou aumentados os graus m e r (Figuras 5 e 6), as discontinuidades de u_h entre elementos vizinhos diminuem a ponto de não serem visualmente perceptíveis, porém elas continuam presentes de forma que ainda temos soluções não conformes, isto é $u_h \notin H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$.

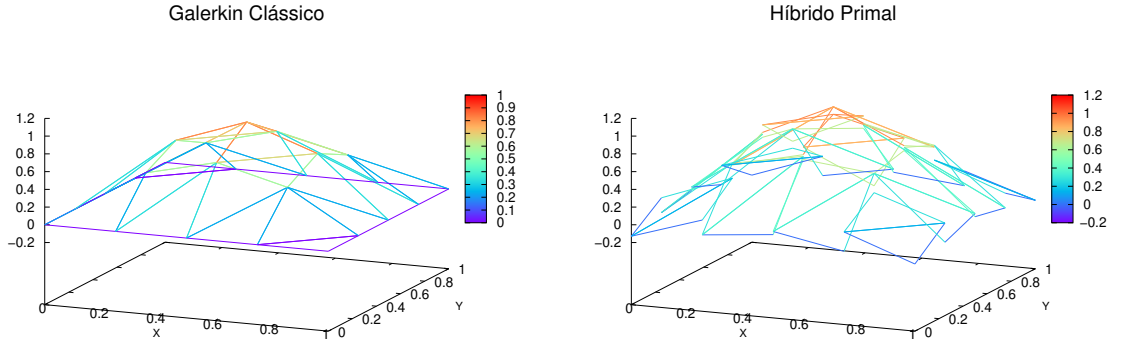


Figura 3 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.

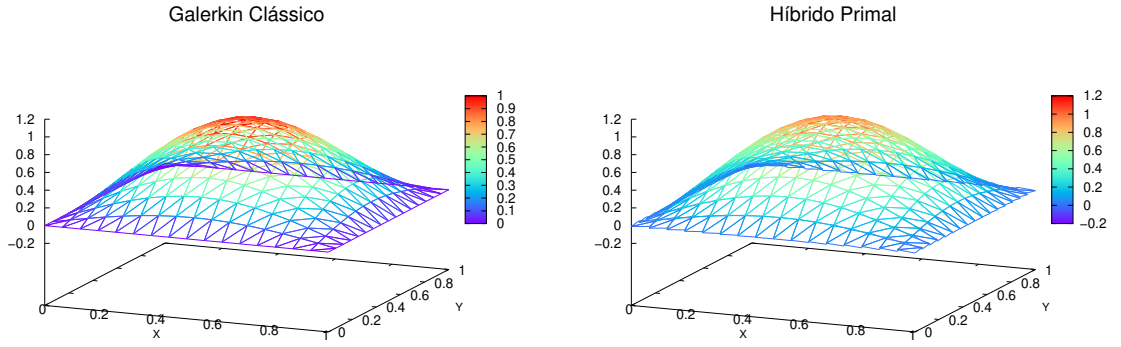


Figura 4 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.

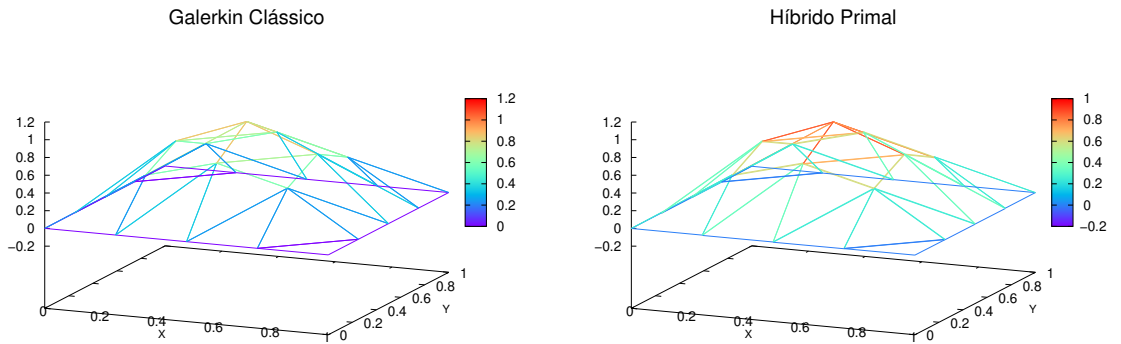


Figura 5 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.

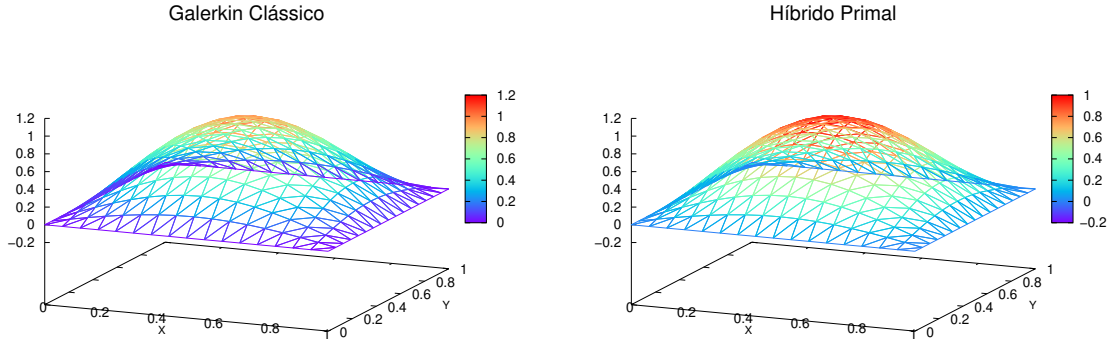


Figura 6 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $P_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.

3.3.2 Malhas retangulares

Nesse bloco de experimentos o problema em questão foi resolvido utilizando o MHP com malhas de quadrados como as mostradas na Figura 7. Os espaços de aproximação utilizados foram $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_2^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $(Q_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Pelo Lema 3 segue que os seis primeiros espaços satisfazem a condição de compatibilidade (2.21), enquanto o último não.

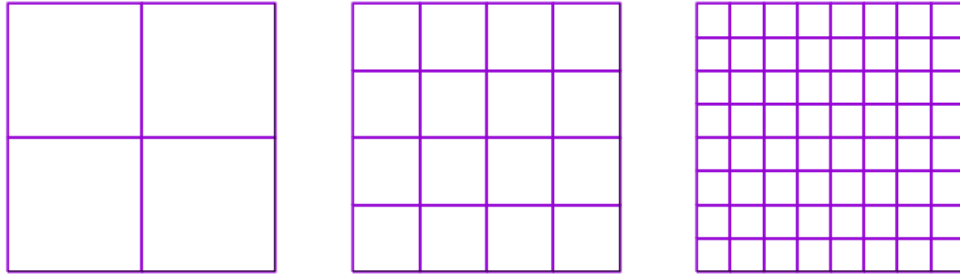


Figura 7 – Sequência de malhas retangulares adotadas para a realização dos experimentos numéricos com $n = 2, 4$ e 8 .

Para cada um dos espaços de aproximação adotados foram computadas as soluções aproximadas (u_h, λ_h) e medidos os erros pertinentes assim como as respectivas taxas de convergência. Os resultados encontram-se nas Tabelas 11 à 16. Novamente o método Híbrido Primal foi comparado ao método de Galerkin Contínuo, dessa vez usando como base os espaços $Q_1(\hat{K})$, $Q_2(\hat{K})$ e $Q_3(\hat{K})$. Os resultados para o método de Galerkin Contínuo encontram-se nas Tabelas 17 e 18.

Tabela 11 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.0698e-01	-	1.2504e+00	-	1.3673e	-
4	2.9324e-02	1.87	6.8766e-01	0.86	7.0500e-01	0.96
8	7.5320e-03	1.96	3.5297e-01	0.96	3.5522e-01	0.99
16	1.8962e-03	1.99	1.7767e-01	0.99	1.7796e-01	1.00
32	4.7489e-04	2.00	8.8985e-02	1.00	8.9020e-02	1.00
64	1.1878e-04	2.00	4.4511e-02	1.00	4.4516e-02	1.00

Tabela 12 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.1596e-01	-	9.0107e-01	-	1.3673e	-
4	3.4337e-02	1.76	4.8871e-01	0.88	7.0500e-01	0.96
8	8.9586e-03	1.94	2.4990e-01	0.97	3.5522e-01	0.99
16	2.2637e-03	1.98	1.2567e-01	0.99	1.7796e-01	1.00
32	5.6744e-04	2.00	6.2927e-02	1.00	8.9020e-02	1.00
64	1.4195e-04	2.00	3.1475e-02	1.00	4.4516e-02	1.00

Tabela 13 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.2270e-01	-	8.9684e-01	-	1.3673e+00	-
4	3.4783e-02	1.81	4.8857e-01	0.88	7.0500e-01	0.96
8	8.9869e-03	1.95	2.4990e-01	0.97	3.5522e-01	0.99
16	2.2655e-03	1.99	1.2567e-01	0.99	1.7796e-01	1.00
32	5.6755e-04	2.00	6.2927e-02	1.00	8.9020e-02	1.00
64	1.4196e-04	2.00	3.1475e-02	1.00	4.4516e-02	1.00

Tabela 14 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.5269e-02	-	2.1855e-01	-	3.3790e-01	-
4	1.9955e-03	2.94	5.4590e-02	2.00	1.0528e-01	1.68
8	2.5507e-04	2.97	1.3729e-02	1.99	2.9136e-02	1.85
16	3.2141e-05	2.99	3.4428e-03	2.00	7.5448e-03	1.95
32	4.0270e-06	3.00	8.6156e-04	2.00	1.9061e-03	1.98
64	5.0369e-07	3.00	2.1545e-04	2.00	4.7788e-04	2.00

Tabela 15 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	5.8515e-03	-	1.1133e-01	-	2.8074e-01	-
4	6.3898e-04	3.20	2.6313e-02	2.08	7.1771e-02	1.97
8	7.6718e-05	3.06	6.4687e-03	2.02	1.8028e-02	1.99
16	9.4885e-06	3.02	1.6101e-03	2.01	4.5121e-03	2.00
32	1.1829e-06	3.00	4.0208e-04	2.00	1.1283e-03	2.00
64	1.4776e-07	3.00	1.0049e-04	2.00	2.8211e-04	2.00

Tabela 16 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.4085e-03	-	2.8686e-02	-	3.8696e-02	-
4	9.2335e-05	3.93	3.7006e-03	2.95	4.8389e-03	3.00
8	5.8551e-06	3.98	4.6691e-04	2.99	6.0106e-04	3.01
16	3.6734e-07	3.99	5.8507e-05	3.00	7.4966e-05	3.00
32	2.2981e-08	4.00	7.3179e-06	3.00	9.3650e-06	3.00
64	1.4367e-09	4.00	9.1489e-07	3.00	1.1704e-05	3.00

Tabela 17 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u , ∇u e λ pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ para o problema analisado.

n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	1.0698e-01	-	1.2504e+00	-	5.0139e+01	-
4	2.9324e-02	1.87	6.8766e-01	0.86	6.8826e+01	-0.46
8	7.5320e-03	1.96	3.5297e-01	0.96	5.8311e+01	0.24
16	1.8962e-03	1.99	1.7767e-01	0.99	6.1427e+01	-0.08
32	4.7489e-04	2.00	8.8985e-02	1.00	3.1619e+02	-2.36
64	1.1878e-04	2.00	4.4511e-02	1.00	2.4688e+02	0.36

Tabela 18 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u por GC com os espaços de aproximação $Q_1(\hat{K})$ e $Q_2(\hat{K})$ para o problema analisado.

Galerkin Contínuo $Q_1(\hat{K})$					Galerkin Contínuo $Q_2(\hat{K})$				
	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		
n	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	1.2179e-01	-	9.9633e-01	-	1.4404e-02	-	2.0204e-01	-	
4	3.0392e-02	2.00	5.0137e-01	0.99	1.9321e-03	2.90	5.0976e-02	1.99	
8	7.6010e-03	2.00	2.5151e-01	1.00	2.4511e-04	2.98	1.2762e-02	2.00	
16	1.9006e-03	2.00	1.2587e-01	1.00	3.0746e-05	3.00	3.1915e-03	2.00	
32	4.7517e-04	2.00	6.2952e-02	1.00	3.8465e-06	3.00	7.9792e-04	2.00	
64	1.1879e-04	2.00	3.1478e-02	1.00	4.8092e-07	3.00	1.9948e-04	2.00	

Tabela 19 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u por GC com espaço de aproximação $Q_3(\hat{K})$ para o problema analisado.

Galerkin Contínuo $Q_3(\hat{K})$			
n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$
	err.	taxa	
2	1.3605e-03	-	2.6682e-02
4	8.8141e-05	3.95	3.3764e-03
8	5.5641e-06	3.99	4.2331e-04
16	3.4864e-07	4.00	5.2953e-05
32	2.1804e-08	4.00	6.6203e-06
64	1.3630e-09	4.00	8.2758e-07

Para os espaços $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_2^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$, por se tratarem de espaços compatíveis, os Teoremas 2 e 4 nos garantem a convergência de u_h , ∇u_h e λ_h com taxas dadas por (3.12), (3.11) e (3.18) respectivamente. As Tabelas 11 à 16 mostram que os resultados numéricos obtidos concordam com a análise apresentada. Analogamente ao caso de malhas triangulares, as Tabelas 11 à 13 referentes aos espaços $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(Q_2^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e

$(Q_3^+(\hat{K}, E_0(\partial\hat{K})))$ mostram que aumentar o grau r mantendo m constante não provoca uma melhoria nas taxas de convergência.

Por outro lado, o espaço $(Q_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2 porém, por se tratar de um espaço de aproximação incompatível, não satisfaz as hipóteses do Teorema 4. Dessa forma esperamos a convergência das variáveis u_h e $\nabla_h u_h$ porém não podemos garantir unicidade ou convergência na aproximação de λ . Esse comportamento é observado na Tabela 17. Note que a diferença entre $Q_1(\hat{K})$ e $Q_1^+(\hat{K})$ é apenas o espaço gerado pela função v_0 apresentada na Seção 2.2. Essa diferença, apesar de pequena, é crucial para a convergência de λ_h . Destacamos novamente que, por se tratar de um espaço incompatível, a implementação computacional deste espaço deve ser tratada com mais cuidado.

Comparando as soluções obtidas por GC e pelo MHP vemos um comportamento análogo ao observado para malhas triangulares. As taxas obtidas pelo MHP usando $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ foram as mesmas que as obtidas por GC usando $Q_{m+1}(\hat{K})$ para $m = 0, 1$ e 2 . Em termos dos erros absolutos em todos os três casos o MHP se mostrou mais preciso.

Vale comparar também os resultados do MHP em malhas de quadrados, apresentados nesta subseção, com os do MHP em malhas de triângulos, apresentados na subseção anterior. Para uma malha com o mesmo número de nós, o MHP em quadrados possui menos graus de liberdade globais do que o MHP em triângulos, ao passo que obtém aproximações mais precisas para o problema analisado. Esse comportamento favorece o uso de malhas de quadrados e motiva estudos mais profundos acerca de malhas quadrilaterais gerais, como o que será realizado no Capítulo 4.

Por fim, as Figuras 8 à 11 nos dão uma comparação entre as soluções aproximadas u_h obtidas pelo método de Galerkin Contínuo e pelo Método Híbrido Primal com diferentes espaços de aproximação e malhas. Assim como ocorre para malhas triangulares, podemos ver na Figura 8 que a solução aproximada u_h gerada pelo MHP não é contínua entre elementos vizinhos e portanto $u_h \notin H_0^1(\Omega)$. Refinar a malha ou aumentar os graus dos espaços de aproximação reduzem a descontinuidade de u_h entre elementos vizinhos, o que pode ser percebido pelas Figuras 9, 10 e 11.

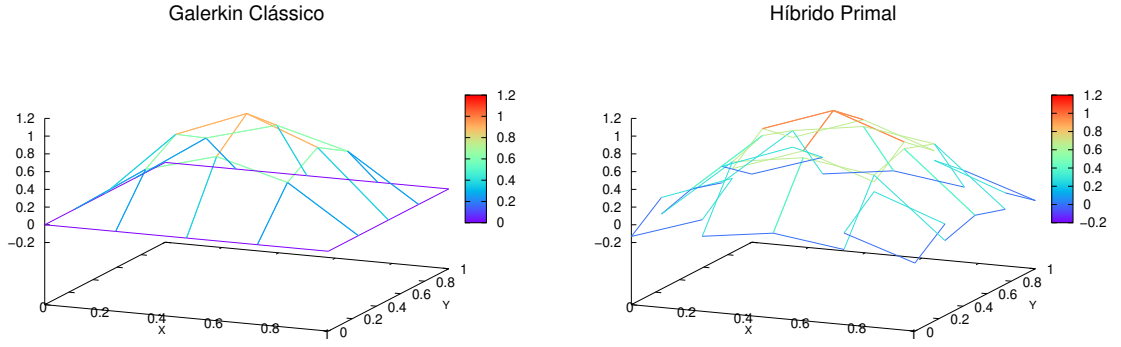


Figura 8 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.

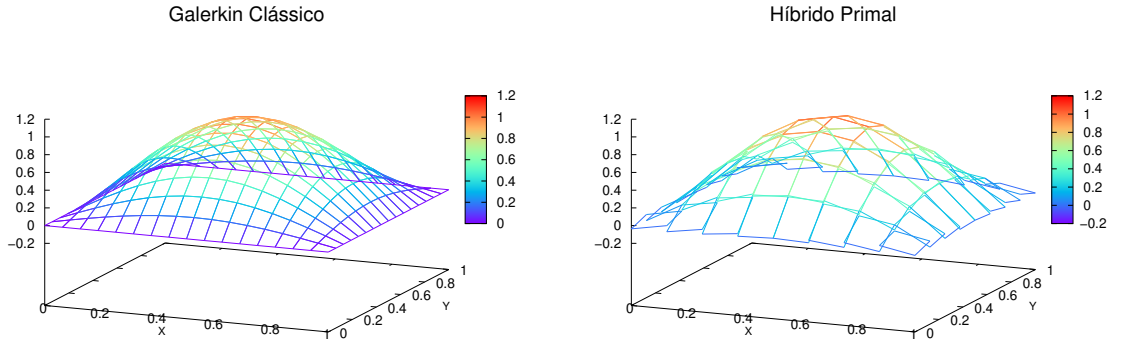


Figura 9 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_1(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.

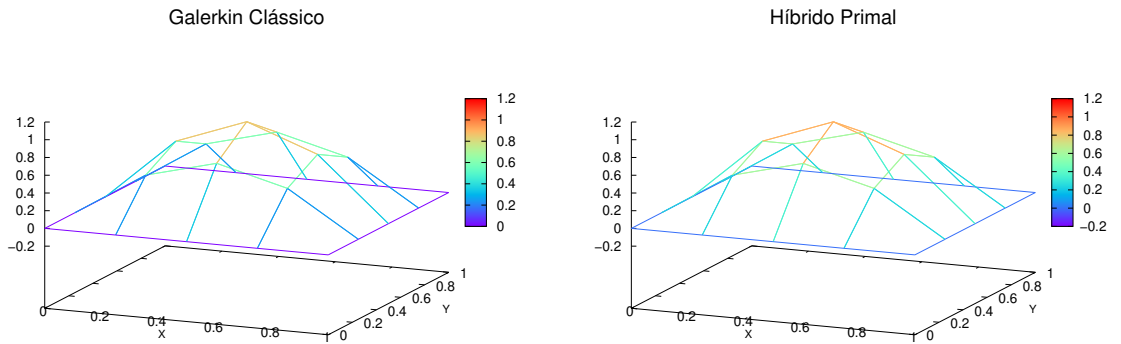


Figura 10 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 4×4 divisões.

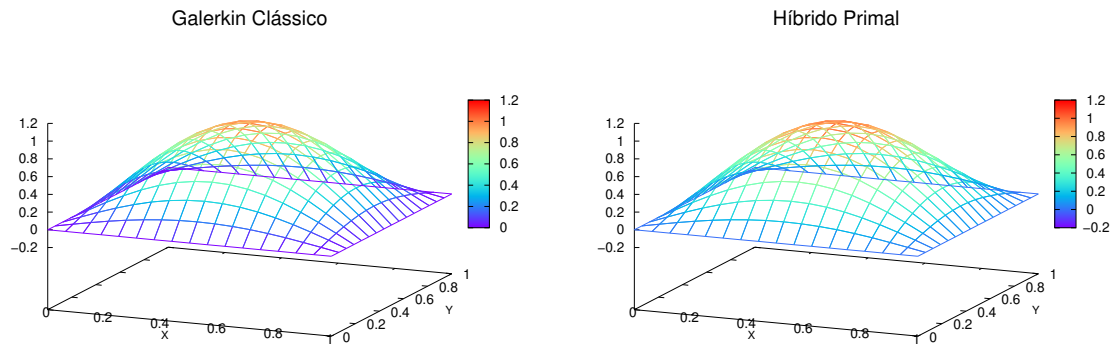


Figura 11 – À esquerda temos a solução u_h obtida por GC usando $Q_2(\hat{K})$, enquanto à direita temos a solução u_h obtida pelo MHP usando $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$. Ambas as soluções foram obtidas sobre uma malha com 16×16 divisões.

4 Estimativas de erro para malhas bilineares

A análise de convergência feita em (RAVIART; THOMAS, 1977a) e apresentada no Capítulo 3 abrange apenas o caso de malhas geradas por transformações afins. Apesar desse caso ser suficiente para analisar qualquer discretização em triângulos ou em paralelogramos de um domínio bidimensional, ela não é suficiente para analisar uma discretização em quadriláteros convexos quaisquer. Para abranger o último caso é necessário fazer a análise de convergência para transformações bilineares.

Usando as mesmas normas e condições de regularidade de malha definidas no começo do Capítulo 3, neste capítulo desenvolveremos a análise de convergência do MHP para o caso de discretizações geradas por transformações bilineares. Nesse contexto, apresentaremos condições necessárias e suficientes para a obtenção das taxas ótimas de convergência de u_h e $\nabla_h u_h$, além de condições suficientes para obtenção das taxas ótimas na aproximação de λ_h .

4.1 Otimalidade do MHP em malhas bilineares

Apesar de estarmos agora no contexto de malhas geradas por transformações bilineares, alguns resultados apresentados no Capítulo 3 para a análise do caso afim continuam válidos. É o caso do Lema 4 e dos Teoremas 2 e 4.

Observação 1. *No caso do Teorema 4, (RAVIART; THOMAS, 1977a) demonstra a existência da constante $\alpha > 0$ satisfazendo (3.13) apenas para o caso de transformações afins. No Apêndice A deste trabalho mostramos que a existência da constante α também é garantida para o caso bilinear. Isso garante que o Teorema 4 continua verdadeiro mesmo para o caso bilinear.*

Dessa forma, o ponto chave que diferencia a análise para malhas afins e bilineares está na estimativa de

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h. \quad (4.1)$$

Uma vez encontrada uma estimativa para (4.1) podemos encontrar as taxas de convergência para u_h , $\nabla_h u_h$ e λ_h de maneira análoga a feita nos Teoremas 3 e 5. Como veremos a seguir, a estimativa de (4.1) é mais delicada para o caso de malhas bilineares e será necessário usar resultados de (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2002) para obtê-la.

Lema 6 (Teoremas 3 e 4 de (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2002)). *Seja F_K uma transformação bilinear entre \hat{K} e qualquer elemento convexo $K \in \mathcal{T}_h$ e considere U_K como definido*

em (2.16); então

$$P_r(K) \subset U_K \iff Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}.$$

Teorema 6 (Seção 3 de (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2002)). *Seja \mathcal{T}_h discretização regular de Ω em quadriláteros convexos gerais de forma que as transformações F_K que mapeiam \hat{K} em K sejam bilineares. Considere X_h o espaço construído na Seção 2.2 do Capítulo 2, então as estimativas*

$$\inf_{v \in X_h} \|u - v\|_{0,\Omega} \leq Ch^{r+1} |u|_{r+1,\Omega}, \quad \forall u \in H^{r+1}(\Omega)$$

$$\inf_{v \in X_h} \|\nabla_h(u - v)\|_{0,\Omega} \leq Ch^r |u|_{r+1,\Omega}, \quad \forall u \in H^{r+1}(\Omega)$$

são válidas se e somente se $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$.

Usando o Lema 6 e o Teorema 6 provaremos a seguinte estimativa para (4.1).

Teorema 7. *Tomando as mesmas hipóteses do Teorema 6 e considerando adicionalmente o espaço V_h definido na Seção 2.2 do Capítulo 2, existe uma constante C independente de h tal que*

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h \leq Ch^r |u|_{r+1,\Omega}, \quad \forall u \in H^{r+1}(\Omega) \quad (4.2)$$

se e somente se $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que a condição $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$ é suficiente para obter a estimativa (4.2). Seja W_h subespaço de $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ definido por,

$$W_h = \{w_h \in C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) : \forall K \in \mathcal{T}_h, w_h|_K \in P_r(K), w_h|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Como W_h é composto por funções contínuas e o Lema 6 garante que $P_r(K) \subset U_K$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$, segue que $W_h \subset V_h$. Usando (1.2), (2.11) e resultados clássicos da teoria de aproximação segue que

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h \leq C_2 \inf_{w \in W_h} |u - w|_{1,\Omega} \leq Ch^r |u|_{r+1,\Omega}.$$

Por outro lado, suponha que a estimativa (4.2) é satisfeita. Como $V_h \subset X_h$, usando (2.11) e (1.2) temos

$$C_1 \inf_{v \in X_h} |u - v|_{1,\Omega} \leq \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h \leq Ch^r |u|_{r+1,\Omega},$$

e segue diretamente do Teorema 6 que $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$. □

A estimativa (4.2) nos permitirá encontrar resultados análogos aos dos Teoremas 2 e 5 para o caso de malhas bilineares.

Teorema 8. *Seja \mathcal{T}_h discretização regular de Ω em quadriláteros convexos gerais de forma que as transformações F_K que mapeiam \hat{K} em K sejam bilineares. Considere os espaços X_h e M_h construídos como na Seção 2.2 do Capítulo 2, com $E_m(\partial\hat{K}) \subset \hat{\Lambda}$. Suponha que $u \in H^{l+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ com $l = \min\{r, m+1\}$, então existe constante C independente de h tal que*

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}, \quad (4.3)$$

se e somente se $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$.

Demonstração. Substituindo os resultados apresentados pelo Teorema 7 e pelo Lema 4 em (3.7) obtemos o resultado desejado. \square

De (4.3), (2.11) e (1.2) segue diretamente a seguinte estimativa em $L^2(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|_{0, \Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (4.4)$$

Analogamente ao caso de malhas afins, se Ω for convexo, uma extensão do truque de Nitsche permite ainda mostrar a seguinte estimativa em $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ (RAVIART; THOMAS, 1977a),

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq Ch^{l+1} |u|_{l+1, \Omega}. \quad (4.5)$$

Já para a aproximação de λ temos o seguinte resultado.

Teorema 9. *Seja \mathcal{T}_h discretização regular de Ω em quadriláteros convexos gerais de forma que as transformações F_K que mapeiam \hat{K} em K sejam bilineares. Considere os espaços X_h e M_h construídos como na Seção 2.2 do Capítulo 2, com $E_m(\partial\hat{K}) \subset \hat{\Lambda}$ e $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$. Suponha ainda que a condição de compatibilidade (2.21) seja satisfeita e que $u \in H^{l+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ com $l = \min\{r, m+1\}$, então existe constante C independente de h tal que a seguinte estimativa é válida*

$$|||\lambda - \lambda_h|||_M \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (4.6)$$

Demonstração. Do Lema 4 tomando $\phi = u$ segue que

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \lambda - \mu_h)}{\|v\|_h} \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (4.7)$$

Como $\|v\|_h \leq C_2 |||v|||_X$, segue direto da definição de $|||\cdot|||_M$ que,

$$\inf_{\mu_h \in M_h} |||\lambda - \mu_h|||_M \leq Ch^l |u|_{l+1, \Omega}. \quad (4.8)$$

Assim, substituindo os resultados do Teorema 8 e do Lema 4 em (3.14) obtemos a estimativa desejada. \square

Como consequência direta do Teorema 9 e de (3.6) a seguinte estimativa na norma $|| \cdot ||_{M_h}$ é verdadeira,

$$||\lambda - \lambda_h||_h \leq Ch^t |u|_{l+1, \Omega}. \quad (4.9)$$

Analogamente ao caso de malhas afins, as estimativas (4.4), (4.5) e (4.9) mostram que ambos os graus r e m influenciam nas taxas de convergência de forma que aumentar um deles mantendo o outro constante não resulta em taxas de convergência mais altas. No entanto, enquanto em malhas afins $P_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$ era suficiente para a obtenção das taxas apresentadas, em malhas bilineares é necessário que $Q_r(\hat{K}) \subset \hat{U}$.

4.2 O caso dos espaços Serendipity

Nesse contexto um caso interessante de se analisar é o dos espaços Serendipity (ARNOLD; AWANOU, 2011). Como $P_r(\hat{K}) \subset S_r(\hat{K})$, a análise desenvolvida no Capítulo 3 nos garante que os espaços $(S_r^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, com $r - 1 \geq m \geq 0$, alcançam as taxas ótimas de aproximação (3.11), (3.12) e (3.18) para malhas afins. Por outro lado, como $Q_{\lfloor r/2 \rfloor}(\hat{K}) \subset S_r(\hat{K})$ porém $Q_{\lfloor r/2 \rfloor + 1}(\hat{K}) \not\subset S_r(\hat{K})$ a análise desenvolvida neste capítulo garante que obteremos apenas taxas $\mathcal{O}(h^{t+1})$ para a aproximação de u e pelo menos taxas $\mathcal{O}(h^t)$ para as aproximações de λ , onde

$$t = \min\{\lfloor r/2 \rfloor, m + 1\}.$$

A próxima seção apresenta uma série de experimentos numéricos que ilustra este comportamento dos espaços Serendipity e fornece uma validação numérica para a análise aqui desenvolvida.

4.3 Experimentos numéricos

Nesta seção realizamos alguns experimentos numéricos com o fim de verificar a análise apresentada na seção anterior deste mesmo capítulo. Nosso objetivo foi verificar as condições suficientes e necessárias para a obtenção das taxas de convergência ótimas assim como a influência das malhas nessas condições. O problema a ser resolvido é o problema modelo (1.1) definindo $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, \mathcal{K} como a matriz identidade e tomando f de forma que a solução exata para o problema fosse

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Foram encontradas soluções aproximadas para o problema em questão utilizando os espaços de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$, $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$

e $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$. Além disso foram testadas dois tipos de sequências de malhas. A primeira sequência consiste em uma subdivisão uniforme de Ω em $n \times n$ quadrados para $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Essa sequência é uma sequência de malhas afins e está representada na Figura 7. Já a segunda sequência é composta por malhas bilineares e consiste em subdivisões de Ω em $n \times n$ trapézios congruentes, como mostrado na Figura 12.

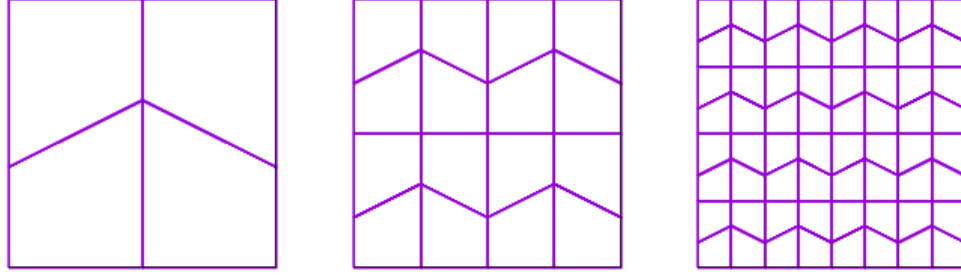


Figura 12 – Sequência de malhas trapezoidais adotadas para a realização dos experimentos numéricos com $n = 2, 4$ e 8 .

Após encontradas as soluções aproximadas (u_h, λ_h) para cada um dos espaços e malhas descritos, foram calculados os erros na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ para a aproximação de u e ∇u e o erro $\|\lambda - \lambda_h\|_{M_h}$. Também foram calculadas as respectivas taxas de convergência. Os resultados encontrados estão nas Tabelas 20 à 25.

Tabela 20 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados				Malhas de trapézios			
n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$	
	err.	taxa		err.	taxa	err.	taxa
2	1.5269e-02	-	2.1855e-01	-	1.9170e-02	-	2.7210e-01
4	1.9955e-03	2.94	5.4590e-02	2.00	2.7257e-03	2,81	7.2099e-02
8	2.5507e-04	2.97	1.3729e-02	1.99	3.5012e-04	2.96	1.8258e-02
16	3.2141e-05	2.99	3.4428e-03	2.00	4.4162e-05	2.99	4.5832e-03
32	4.0270e-06	3.00	8.6156e-04	2.00	5.5353e-06	3.00	1.1470e-03
64	5.0369e-07	3.00	2.1545e-04	2.00	6.9247e-07	3.00	2.8680e-04

Tabela 21 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	1.9170e-02	-	2.7210e-01	-	1.9772e-02	-	2.8025e-01	-	
4	2.7257e-03	2.81	7.2099e-02	1.92	2.7657e-03	2.84	7.3517e-02	1.93	
8	3.5012e-04	2.96	1.8258e-02	1.98	3.5832e-04	2.95	1.9058e-02	1.95	
16	4.4162e-05	2.99	4.5832e-03	1.99	4.6780e-05	2.94	5.2176e-03	1.87	
32	5.5353e-06	3.00	1.1470e-03	2.00	6.5986e-06	2.83	1.6714e-03	1.64	
64	6.9247e-07	3.00	2.8680e-04	2.00	1.1202e-06	2.56	6.6862e-04	1.32	

Tabela 22 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	1.4085e-03	-	2.8686e-02	-	2.4019e-03	-	4.4717e-02	-	
4	9.2335e-05	3.93	3.7006e-03	2.95	1.5389e-04	3.96	5.7410e-03	2.96	
8	5.8551e-06	3.98	4.6691e-04	2.99	9.7812e-06	3.98	7.2661e-04	2.98	
16	3.6734e-07	3.99	5.8507e-05	3.00	6.1484e-07	3.99	9.1231e-05	2.99	
32	2.2981e-08	4.00	7.3179e-06	3.00	3.8507e-08	4.00	1.1423e-05	3.00	
64	1.4367e-09	4.00	9.1489e-07	3.00	2.4086e-09	4.00	1.4288e-06	3.00	

Tabela 23 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de u e ∇u pelo MHP com espaço de aproximação $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ para o problema em questão usando malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$		$\ \nabla_h(u - u_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	8.1920e-03	-	1.2649e-01	-	2.8267e-02	-	3.0826e-01	-	
4	3.2649e-04	4.65	1.3042e-02	3.28	3.5480e-03	2.99	6.8658e-02	2.17	
8	1.8198e-05	4.16	1.5418e-03	3.08	4.8452e-04	2.87	1.8300e-02	1.91	
16	1.1056e-06	4.04	1.9000e-04	3.02	6.4011e-05	2.92	5.0657e-03	1.85	
32	6.8612e-08	4.01	2.3665e-05	3.01	8.7026e-06	2.88	1.6231e-03	1.64	
64	4.2807e-09	4.00	2.9555e-06	3.00	1.3567e-06	2.68	6.4770e-04	1.33	

Tabela 24 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de λ pelo MHP para o problema em questão usando malhas de quadrados e os espaços de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$.

$(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$			$(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$			$(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$			$(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$		
n	$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$			$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$			$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$		
	err.	taxa	err.	taxa		err.	taxa		err.	taxa	
2	3.3790e-01	-	3.3790e-01	-		3.8696e-02	-		3.3395e-01	-	
4	1.0528e-01	1.68	1.0538e-01	1.68		4.8389e-03	3.00		2.0478e-02	4.03	
8	2.9136e-02	1.85	2.9136e-02	1.85		6.0106e-04	3.01		1.3107e-03	3.97	
16	7.5448e-03	1.95	7.5448e-03	1.95		7.4966e-05	3.00		1.0364e-04	3.66	
32	1.9061e-03	1.98	1.9061e-03	1.98		9.3650e-06	3.00		1.0370e-05	3.32	
64	4.7788e-04	2.00	4.7788e-04	2.00		1.1704e-06	3.00		1.2030e-06	3.11	
128	1.1956e-04	2.00	1.1956e-04	2.00		1.4630e-07	3.00		1.4733e-07	3.03	

Tabela 25 – Erros e suas respectivas taxas de convergência cometidos na aproximação de λ pelo MHP para o problema em questão usando malhas de trapézios e os espaços de aproximação $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$, $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$.

$(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$			$(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$			$(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$			$(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$		
n	$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$		$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$			$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$			$\ \lambda - \lambda_h\ _{M_h}$		
	err.	taxa	err.	taxa		err.	taxa		err.	taxa	
2	4.8107e-01	-	4.8126e-01	-		5.3885e-02	-		1.5242e+00	-	
4	1.3925e-01	1.79	1.3816e-01	1.80		7.6835e-03	2.81		3.6413e-01	2.07	
8	3.8196e-02	1.87	3.7889e-02	1.87		9.6587e-04	2.99		1.0400e-01	1.81	
16	9.8923e-03	1.95	9.8153e-03	1.95		1.2020e-04	3.01		2.6936e-02	1.95	
32	2.4988e-03	1.99	2.4838e-03	1.98		1.4972e-05	3.01		6.8010e-03	1.99	
64	6.2640e-04	2.00	6.2726e-04	1.99		1.8684e-06	3.00		1.7061e-03	2.00	
128	1.5671e-04	2.00	1.6147e-04	1.96		2.3338e-07	3.00		4.2744e-04	2.00	

Para a convergência de u e ∇u esse experimento mostrou resultados claros: Para a sequência de malhas afins, tanto os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ como os $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ conduziram à taxas ótimas de convergência, isto é $\mathcal{O}(h^{m+2})$ para a solução u_h e $\mathcal{O}(h^{m+1})$ para $\nabla_h u_h$, onde $m = 1, 2$. No entanto, para a sequência de malhas bilineares, apenas os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ alcançaram as taxas ótimas. Tais resultados ilustram perfeitamente as estimativas fornecidas pelo Teorema 8.

Para a convergência de λ os resultados são mais sutis. Como previsto pelo Teorema 9 os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ alcançaram taxas ótimas para a aproximação de λ tanto em malhas afins como bilinear. No entanto o espaço $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ também alcançou taxas ótimas na convergência do multiplicador de Lagrange λ mesmo para o caso bilinear. Esse resultado não contradiz a análise desenvolvida, uma vez que o Teorema 9 fornece apenas condições suficientes.

Vale destacar que, usando a estratégia de implementação apresentada na Seção 2.3 do Capítulo 2, os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, com $m \geq 0$, possuem custo computacional muito próximo ao dos espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, uma vez que ambas as famílias de espaços geram os mesmos números de graus de liberdade globais. Assim, motivados pelos resultados apresentados nesta seção, podemos afirmar que os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ são vantajosos em relação aos $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, uma vez que garantem taxas ótimas de convergência em qualquer malha quadrilateral convexa e têm custo computacional equiparável.

5 Recuperação do fluxo a partir do Método Híbrido Primal

Ainda no contexto do problema modelo (1.1), para muitas aplicações é de grande importância obter aproximações precisas para o fluxo $\sigma = -\mathcal{K} \nabla u$. Em muitas dessas aplicações é desejável que o fluxo aproximado σ_h pertença ao espaço $H(\text{div}, \Omega)$, de forma que determinadas propriedades físicas sejam preservadas, como a continuidade da componente normal do fluxo na fronteira entre elementos vizinhos. Esse é o caso das aplicações em meios porosos, onde a continuidade da componente normal é fundamental para se resolver o problema de transporte associado (DURLOFSKY, 1994; CORREA; LOULA, 2007).

Existem na literatura inúmeros métodos capazes de obter aproximações precisas para o fluxo em $H(\text{div}, \Omega)$, tais como as estratégias de pós-processamento (CORDES; KINZELBACH, 1992; DURLOFSKY, 1994; LOULA; ROCHINHA; MURAD, 1995; CORREA; LOULA, 2007), os Métodos Mistos e Mistos Estabilizados (RAVIART; THOMAS, 1977b; BREZZI; DOUGLAS; MARINI, 1985; BREZZI et al., 1987; MASUD; HUGHES, 2002; BOCHEV; DOHRMANN, 2006; CORREA; LOULA, 2008; CORREA et al., 2020) ou ainda métodos de Galerkin Descontínuo (BREZZI et al., 2005; HUGHES; MASUD; WAN, 2006; LOULA et al., 2008; ANTONIETTI; HELTAI, 2007; CASTILLO, 2002). Como veremos ao longo deste capítulo, o Método Híbrido Primal constitui uma alternativa viável para se resolver este mesmo problema.

Em (CHOU; KWAK; KIM, 2002) é desenvolvida uma estratégia de pós-processamento que parte da solução Híbrida Primal para gerar aproximações em $H(\text{div}, \Omega)$ para o fluxo. A estratégia é motivada pela equação (2.8) e utiliza λ_h como uma aproximação para a componente normal do fluxo. Neste capítulo iremos apresentar essa estratégia assim como resultados de convergência nas normas de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $H(\text{div}, \Omega)$.

5.1 Espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$

Para o desenvolvimento da estratégia de recuperação do fluxo a partir do MHP é necessário construir subespaços de dimensão finita de $H(\text{div}, \Omega)$. Uma forma padrão de se construir tais subespaços é através da transformação de Piola, que leva funções vetoriais definidas no elemento padrão \hat{K} para funções sobre um elemento geométrico qualquer K . Dada uma função vetorial $\hat{v} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definimos a transformação de Piola $v = \mathcal{P}_{F_K} \hat{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$v(\mathbf{x}) = JF_K(\hat{\mathbf{x}})^{-1} DF_K(\hat{\mathbf{x}}) \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.1)$$

onde F_K é a transformação bijetiva que mapeia \hat{K} em K , DF_K sua matriz Jacobiana e JF_K o determinante da matriz Jacobiana. Considerando $\mathbf{n}^{\partial K}$ e $\mathbf{n}^{\partial \hat{K}}$ as normais unitárias exteriores sobre ∂K e $\partial \hat{K}$ respectivamente e definindo $\mathbf{v} = \mathcal{P}_{F_K} \hat{\mathbf{v}}$ e $u = \hat{u} \circ F_K^{-1}$ para algum $\hat{u} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$, em (BOFFI et al., 2013) são demonstradas as seguintes propriedades para a transformação de Piola.

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{JF_K} \hat{\operatorname{div}}(\hat{\mathbf{v}}), \quad (5.2a)$$

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}) u \, dx = \int_{\hat{K}} \hat{\operatorname{div}}(\hat{\mathbf{v}}) \hat{u} \, d\hat{x}, \quad (5.2b)$$

$$\int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) u \, ds = \int_{\partial \hat{K}} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}^{\partial \hat{K}}) \hat{u} \, d\hat{s}, \quad (5.2c)$$

$$\int_K \mathbf{v} \cdot \nabla u \, dx = \int_{\hat{K}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{u} \, d\hat{x}. \quad (5.2d)$$

Dada uma discretização \mathcal{T}_h do domínio Ω e definindo um subespaço de dimensão finita $\hat{Z} \subset H(\operatorname{div}, \hat{K})$ sobre o elemento padrão, espaços de aproximação globais Z_h são construídos a partir da transformação de Piola tomando

$$Z_h = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_K \in \mathcal{P}_{F_K} \hat{Z}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (5.3)$$

Vale destacar ainda que Z_h pode ser caracterizado como subespaço de

$$Y_h = \{\mathbf{v} \in L(\Omega, \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_K \in \mathcal{P}_{F_K} \hat{Z}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (5.4)$$

composto pelas funções com componente normal contínua ao longo das fronteiras entre elementos vizinhos. Note ainda que, obtidas as transformações F_K , o espaço Z_h é completamente determinado pela escolha de \hat{Z} .

Outro aspecto importante sobre os espaços de aproximação em $H(\operatorname{div}, \Omega)$ é a construção de operadores de projeção $\pi_h : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow Z_h$. Para todos os espaços utilizados neste trabalho a construção de tais operadores se dá da seguinte forma: Definindo-se os graus de liberdade em \hat{Z} , constrói-se um operador de projeção limitado $\hat{\pi} : H^{m+1}(\hat{K}, \mathbb{R}^2) \rightarrow \hat{Z}$. A partir de $\hat{\pi}$ é construído o operador $\pi_K : H^{m+1}(K, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}_{F_K} \hat{Z}$ fazendo

$$\pi_K = \mathcal{P}_{F_K} \circ \hat{\pi} \circ \mathcal{P}_{F_K}^{-1}. \quad (5.5)$$

Por fim o operador de projeção global π_h é definido de forma que

$$(\pi_h \mathbf{v})|_K = \pi_K(\mathbf{v}|_K) \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h. \quad (5.6)$$

Perceba que, obtidas as transformações F_K , o operador projeção π_h é completamente determinado pela escolha de \hat{Z} e pelo operador $\hat{\pi}$ definido sobre o elemento padrão.

Algumas escolhas particulares para \hat{Z} geram espaços amplamente utilizados na literatura e que serão importantes para as próximas seções deste capítulo assim como para os capítulos seguintes. As próximas subseções detalham a construção dos espaços de Raviart-Thomas (RAVIART; THOMAS, 1977b), Arnold-Boffi-Falk (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005) e Brezzi-Douglas-Fortin-Mirini (BREZZI et al., 1987) assim como algumas propriedades referentes aos seus respectivos operadores projeção.

5.1.1 Espaços de Raviart-Thomas, construção e propriedades

Os espaços de Raviart-Thomas são uns dos espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$ mais conhecidos e importantes da literatura. Tais espaços estão definidos tanto para malhas triangulares quanto para malhas quadrilaterais, e constituem parte fundamental da estratégia de recuperação do fluxo apresentada na Seção 5.2.

Os espaços de Raviart-Thomas de ordem $m \geq 0$, aqui denotados por $\mathcal{RT}_m(\Omega)$, são construídos a partir de (5.3) adotando-se

$$\hat{Z} = \mathcal{RT}_m(\hat{K}) = \begin{cases} (P_m(\hat{K}))^2 + \hat{\mathbf{x}} P_m(\hat{K}), & \text{se } \mathcal{T}_h \text{ é uma discretização em triângulos,} \\ P_{m+1,m}(\hat{K}) \times P_{m,m+1}(\hat{K}), & \text{se } \mathcal{T}_h \text{ é uma discretização em quadriláteros.} \end{cases}$$

Considere agora o operador projeção global $\pi_h^{\mathcal{RT}_m} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow \mathcal{RT}_m(\Omega)$ construído de acordo com as equações (5.5) e (5.6). Em (RAVIART; THOMAS, 1977b) e (BOFFI et al., 2013) é demonstrado que, para os espaços de Raviart-Thomas, o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{RT}_m}$ pode ser completamente descrito pelas seguintes equações em nível local

$$\int_{\partial K} (\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds = \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \quad (5.7a)$$

$$\int_K \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_K \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (5.7b)$$

onde $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ e

$$\boldsymbol{\Psi}_m(K) = \begin{cases} P_m(K) \times P_m(K), & \text{se } K \text{ é um triângulo,} \\ \{DF_K^{-t} \hat{\boldsymbol{\tau}} \circ F_K^{-1} : \hat{\boldsymbol{\tau}} \in P_{m-1,m}(\hat{K}) \times P_{m,m-1}(\hat{K})\}, & \text{se } K \text{ é quadrilátero.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Em (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005) são demonstradas as seguintes propriedades de aproximação para o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{RT}_m}$.

Lema 7. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização de Ω regular segundo o critério (2.1). Considere o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{RT}_m}$ como definido em (5.7). Então existem constantes C_1 e C_2 tais que*

$$\|\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^{m+1} |\mathbf{v}|_{m+1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

$$\|\text{div}(\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^t |\text{div} \mathbf{v}|_{t,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^t(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ com } \text{div}(\mathbf{v}) \in H^t(\Omega, \mathbb{R}),$$

onde $t = m + 1$ para o caso em que \mathcal{T}_h é uma discretização afim e $t = m$ para o caso de discretizações bilineares.

Note então que a projeção sobre o espaço $\mathcal{RT}_m(\Omega)$ alcança ordem $\mathcal{O}(h^{m+1})$ para a aproximação do fluxo na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares. Porém, na aproximação do divergente, a projeção alcança ordem $\mathcal{O}(h^{m+1})$ no caso afim e apenas ordem $\mathcal{O}(h^m)$ no caso bilinear. Em particular, para o caso de mais

baixa ordem $m = 0$, não temos a convergência para o divergente em malhas bilineares, o que implica na não convergência de $\pi_h^{\mathcal{RT}_0} \mathbf{v}$ segundo a norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Tais resultados serão fundamentais para o estudo de convergência da estratégia de recuperação do fluxo apresentada na Seção 5.2.

5.1.2 Espaços Arnold-Boffi-Falk, construção e propriedades

Assim como os espaços de Raviart-Thomas, os espaços Arnold-Boffi-Falk são subespaços de dimensão finita de $H(\text{div}, \Omega)$ e também são construídos através da transformação de Piola (5.1). No entanto, diferentemente dos espaços de Raviart-Thomas, os espaços Arnold-Boffi-Falk estão definidos apenas para malhas quadrilaterais. Dada \mathcal{T}_h uma discretização quadrilateral de Ω e tomando

$$\hat{Z} = \mathcal{ABF}_m(\hat{K}) = P_{m+2,m}(\hat{K}) \times P_{m,m+2}(\hat{K}),$$

os espaços Arnold-Boffi-Falk de ordem $m \geq 0$, aqui denotados por $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$, também são construídos de acordo com a equação (5.3).

Considere agora o operador projeção global $\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow \mathcal{ABF}_m(\Omega)$ construído conforme as equações (5.5) e (5.6). A partir dos graus de liberdade definidos em (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005) segue que o operador projeção sobre os espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ é totalmente caracterizado pelas seguintes equações em nível local

$$\int_{\partial K} (\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds = \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \quad (5.9a)$$

$$\int_K \pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_K \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (5.9b)$$

$$\int_K (\text{div} \pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \mathbf{v}) \phi \, dx = \int_K (\text{div} \mathbf{v}) \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \Phi_m(K), \quad (5.9c)$$

onde $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$, $\boldsymbol{\Psi}_m(K)$ é definido como em (5.8) e

$$\Phi_m(K) = \{\hat{\phi} \circ F_K^{-1} : \hat{\phi} \in \hat{\Phi}\}, \quad (5.10)$$

com

$$\hat{\Phi} = \{\hat{x}_1^{m+1} \hat{x}_2^i, \hat{x}_2^{m+1} \hat{x}_1^i, i = 0, \dots, m\}.$$

Em (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005) são demonstradas as seguintes propriedades de aproximação para o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{ABF}_m}$.

Lema 8. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização de Ω em quadriláteros convexos quaisquer e regular segundo o critério (2.1). Considere o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{ABF}_m}$ como definido em (5.9). Então existem constantes C_1 e C_2 tais que*

$$\|\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^{m+1} |\mathbf{v}|_{m+1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

$$\|\text{div}(\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^t |\text{div} \mathbf{v}|_{t,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^t(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ com } \text{div}(\mathbf{v}) \in H^t(\Omega, \mathbb{R}),$$

onde $t = m + 2$ para o caso em que \mathcal{T}_h é uma discretização afim e $t = m + 1$ para o caso de discretizações bilineares.

Note que, apesar dos espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ obterem as mesmas ordens de aproximação para o fluxo que os espaços de Raviart-Thomas, para o divergente os espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ alcançam ordens de convergência pelo menos $\mathcal{O}(h^{m+1})$ tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares. Esse resultado será importante na Seção 6.1 do Capítulo 6, onde uma estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ é desenvolvida.

5.1.3 Espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini, construção e propriedades

Por fim apresentaremos os espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini (BREZZI et al., 1987) de ordem $m + 1 \geq 1$, aqui denotados por $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$. Assim como os espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$, os espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ são construídos a partir da transformação de Piola e estão definidos tanto para elementos triangulares quanto quadrilaterais (BOFFI et al., 2013). No entanto, neste trabalho só estamos interessados na aplicação dos espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ em malhas quadrilaterais, e portanto só apresentaremos sua construção neste caso. Dada \mathcal{T}_h uma discretização quadrilateral de Ω e tomando

$$\hat{Z} = \mathcal{BDFM}_{m+1}(\hat{K}) = \text{span}\{(x_1^i x_2^j, 0), (0, x_1^j x_2^i) : i, j \geq 0; j \leq m; i + j \leq m + 1\},$$

os espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$, $m \geq 0$, são construídos de acordo com a equação (5.3). Note que para o caso de mais baixa ordem $m = 0$ temos que $\mathcal{BDFM}_1(\Omega) = \mathcal{RT}_0(\Omega)$.

Considere agora o operador $\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow \mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ construído a partir das equações (5.5) e (5.6). A partir dos graus de liberdade definidos em (BREZZI et al., 1987) é possível mostrar que o operador $\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}}$ é completamente definido pelas seguintes equações no nível local

$$\int_{\partial K} (\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds = \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \quad (5.11a)$$

$$\int_K \pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_K \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\chi}_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (5.11b)$$

onde $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ e $\boldsymbol{\chi}_m(K)$ é definido por

$$\boldsymbol{\chi}_m(K) = \{DF_K^{-t} \hat{\boldsymbol{\tau}} \circ F_K^{-1} : \hat{\boldsymbol{\tau}} \in P_{m-1}(\hat{K}) \times P_{m-1}(\hat{K})\}. \quad (5.12)$$

A partir da análise desenvolvida em (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005) são obtidas as seguintes propriedades de aproximação para o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}}$.

Lema 9. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização quadrilateral afim de Ω e regular segundo o critério (2.1). Considere o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}}$ como definido em (5.11) e suponha que $\mathbf{v} \in H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ com $\text{div}(\mathbf{v}) \in H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Então existem constantes C_1 e C_2 tais que*

$$\|\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^{m+1} |\mathbf{v}|_{m+1,\Omega},$$

$$\|\text{div}(\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{m+1} |\text{div} \mathbf{v}|_{m+1,\Omega}.$$

Lema 10. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização quadrilateral bilinear de Ω e regular segundo o critério (2.1). Considere o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}}$ como definido anteriormente e suponha que $\mathbf{v} \in H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ com $\text{div}(\mathbf{v}) \in H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Então existem constantes C_1 e C_2 tais que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \mathbf{v}\|_{0,\Omega} &\leq C_1 h^{s_1} |\mathbf{v}|_{m+1,\Omega}, \\ \|\text{div}(\mathbf{v} - \pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \mathbf{v})\|_{0,\Omega} &\leq C_2 h^{s_2} |\text{div} \mathbf{v}|_{m+1,\Omega}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} s_1 &= \left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor, \\ s_2 &= \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Note que para malhas afins, os espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ alcançam as mesmas ordens de convergência que os espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$, apesar de terem um menor número de graus de liberdade e, conseqüentemente, um menor custo computacional. Porém para malhas bilineares os espaços \mathcal{BDFM}_{m+1} apresentam perdas na capacidade de aproximação tanto na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ quando na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Dessa forma esses espaços são uma escolha interessante para malhas afins porém não recomendados para malhas bilineares.

5.2 Estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços de Raviart-Thomas

Uma vez construídos os espaços de Raviart-Thomas podemos apresentar a estratégia de recuperação do fluxo desenvolvida em (CHOU; KWAK; KIM, 2002). A estratégia é motivada pela equação (2.8) e utiliza λ_h como uma aproximação para a componente normal do fluxo. Veremos também que, apesar da estratégia ser constituída por um pós-processamento local apenas, o fluxo aproximado obtido pertence ao espaço $H(\text{div}, \Omega)$, o que garante a continuidade de sua componente normal.

Para que a estratégia esteja bem definida, exigiremos que o espaço de aproximação $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ usado no MHP satisfaça determinadas condições:

R.1 $P_m(\hat{K}) \subset \hat{U}$, se \mathcal{T}_h for uma discretização em triângulos.

R.2 $Q_m(\hat{K}) \subset \hat{U}$, se \mathcal{T}_h for uma discretização em quadriláteros.

R.3 O par $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ é compatível segundo o critério (2.21).

Perceba então que, para malhas quadrilaterais, os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ não devem ser utilizados, já que não satisfazem a condição R.2. Na Seção 6.2 do Capítulo 6 uma

modificação na estratégia original é feita com o objetivo de possibilitar o uso dos espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$.

Agora, considerando (u_h, λ_h) a solução aproximada para o problema modelo (1.1), obtida pelo MHP com o espaço de aproximação descrito, a estratégia é dada por: Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ é construído um único $\sigma_{h,K} \in \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{RT}_m(\hat{K}))$ tal que

$$\sigma_{h,K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \lambda_h, \quad \text{sobre } \partial K, \quad (5.13a)$$

$$\int_K (\sigma_{h,K} + \mathcal{K} \nabla u_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Psi_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (5.13b)$$

onde $\Psi_m(K)$ é definido como em (5.8). Então o fluxo aproximado σ_h é construído de forma que

$$\sigma_h|_K = \sigma_{h,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Note que o índice m usado para o espaço de Raviart-Thomas coincide com o grau m usado na aproximação de λ_h . Isso garante que a igualdade (5.13a) possa ser imposta no sentido forte. Além disso, uma vez que a estratégia usa λ_h como termo de fonte, a condição R.3 é fundamental para seu sucesso.

A construção do espaço de aproximação M_h em conjunto com a equação (5.13a) nos garante que o fluxo aproximado σ_h tem componente normal contínua ao longo das fronteiras entre elementos vizinhos e consequentemente que $\sigma_h \in \mathcal{RT}_m(\Omega) \subset H(\text{div}, \Omega)$.

Nas próximas seções apresentaremos a análise de convergência para a estratégia descrita. Primeiro apresentaremos os resultados de convergência na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, demonstrados originalmente em (CHOU; KWAK; KIM, 2002). Em seguida desenvolveremos os resultados de convergência para norma de $H(\text{div}, \Omega)$, que não foram explorados no artigo original.

5.3 Convergência do fluxo aproximado em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$

Para a análise de convergência da estratégia apresentada na seção anterior, começaremos enunciando o seguinte lema.

Lema 11 (Lema 3.3 de (CHOU; KWAK; KIM, 2002)). *Dados $\beta \in L^2(\partial K, \mathbb{R})$ e $\mathbf{q} \in L^2(K, \mathbb{R}^2)$, suponha que $\boldsymbol{\xi}_h \in \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{RT}_m(\hat{K}))$ satisfaça*

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds &= \int_{\partial K} \beta \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \\ \int_K \boldsymbol{\xi}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx &= \int_K \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Psi_m(K), \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

Então existe constante C , independente de h_K , tal que

$$\|\boldsymbol{\xi}_h\|_{0,K} \leq C(\|\mathbf{q}\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\beta\|_{0,\partial K}).$$

A partir do Lema acima e dos resultados de aproximação apresentados para o operador projeção $\pi_h^{\mathcal{RT}_m} : H^{m+1}(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{RT}_m(\Omega)$, obtemos a seguinte estimativa para o fluxo aproximado σ_h obtido pela estratégia apresentada na Seção 5.2.

Teorema 10. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω em triângulos ou quadriláteros satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Assuma que as soluções exatas u e σ sejam suficientemente regulares e suponha que a solução aproximada (u_h, λ_h) obtida pelo MHP para o problema (1.1) satisfaça*

$$\|\mathcal{K}(\nabla u - \nabla_h u_h)\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\lambda - \lambda_h\|_{0,\partial K} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,K} + |u|_{m+2,K}), \quad (5.15)$$

para alguma constante C independente de h . Então o fluxo aproximado σ_h gerado pela estratégia descrita na Seção 5.2 satisfaz

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,\Omega} + |u|_{m+2,\Omega}).$$

Demonstração. Da desigualdade triangular temos

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq \|\sigma - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma\|_{0,\Omega} + \|\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega}. \quad (5.16)$$

Note que o Lema 7 já nos dá estimativas para o primeiro termo da direita, logo resta apenas estimarmos o segundo. Para isso é suficiente encontrarmos uma estimativa ao nível local para

$$\|\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma_h\|_{0,K}.$$

Tomando $v = \sigma$ em (5.7) e subtraindo (5.7a) de (5.13a) e (5.7b) de (5.13b) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma_h) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \mu \, ds &= \int_{\partial K} (\lambda - \lambda_h) \mu \, ds, & \forall \mu \in E_m(\partial K), \\ \int_K (\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx &= \int_K \mathcal{K}(\nabla u - \nabla_h u_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Psi_m(K), \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 11 às equações acima e usando a hipótese (5.15) segue que

$$\|\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma_h\|_{0,K} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,K} + |u|_{m+2,K}). \quad (5.18)$$

Por fim, combinando (5.16) e (5.18) com as estimativas para o operador projeção dadas pelo Lema 7, obtemos o resultado desejado. \square

Esse teorema nos mostra que para obter a ordem ótima convergência $\mathcal{O}(h^{m+1})$ na aproximação do fluxo na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, é suficiente que a solução aproximada (u_h, λ_h) obtida pelo MHP satisfaça a hipótese dada pela equação (5.15). Como corolário, temos os seguintes resultados:

Corolário 2. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω satisfazendo a condição de regularidade (2.1) e suponha que as soluções exatas u e σ sejam suficientemente regulares. Segue que*

1. Para malhas triangulares, os espaços $(P_r(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, com os graus $r \geq m$ satisfazendo as condições do Lema 2, em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 5.2, obtêm ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h^{m+1})$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ na aproximação do fluxo.
2. Para malhas quadrilaterais, afins ou bilineares, os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 5.2, obtêm ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h^{m+1})$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ na aproximação do fluxo.

Demonstração. Os espaços $(P_r(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, com $r \geq m$, e $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ claramente satisfazem as condições R.1 e R.2 respectivamente. Além disso os Lemas 2 e 3 garantem que a condição R.3 também é satisfeita.

A análise apresentada nos Capítulos 3 e 4 garantem que a hipótese (5.15) é satisfeita para os dois tipos de espaços. Assim os resultados apresentados seguem diretamente do Teorema 10. \square

5.4 Convergência do fluxo aproximado em $H(\text{div}, \Omega)$

Ao contrário da análise de convergência em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, a análise em $H(\text{div}, \Omega)$ não foi desenvolvida no artigo original (CHOU; KWAK; KIM, 2002), sendo uma contribuição desta dissertação. Começaremos a análise enunciando o seguinte lema.

Lema 12 (Proposição 3.2 de (CHOU; KWAK; KIM, 2002)). *Seja σ_h o fluxo aproximado gerado pela estratégia descrita na Seção 5.2 e considere o seguinte espaço definido sobre o elemento padrão*

$$G_m(\hat{K}) = \begin{cases} P_m(\hat{K}), & \text{se } K \text{ for um triângulo,} \\ Q_m(\hat{K}), & \text{se } K \text{ for um quadrilátero.} \end{cases}$$

Assuma que foi utilizado o espaço $\mathcal{RT}_m(\Omega)$ para a recuperação do fluxo e que as condições R.1 à R.3 sejam satisfeitas. Então para qualquer $K \in \mathcal{T}_h$

$$\int_K (\text{div } \sigma_h - f) q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{G}_m(K), \quad (5.19)$$

onde

$$\mathcal{G}_m(K) = \{\hat{v} \circ F_K^{-1} : \hat{v} \in G_m(\hat{K})\}.$$

O resultado acima implica que a lei de conservação discreta é satisfeita localmente e será base para o próximo teorema.

Teorema 11. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização de Ω em triângulos ou quadriláteros satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Assuma que as soluções exatas u e σ sejam suficientemente*

regulares e suponha que as condições **R.1** à **R.3** sejam satisfeitas. Então o fluxo aproximado σ_h obtido pela estratégia descrita em 5.2 satisfaz

$$\|\operatorname{div}(\sigma_h - \sigma)\|_{0,\Omega} \leq C \|\operatorname{div}(\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma)\|_{0,\Omega},$$

Para alguma constante C dependente apenas do parâmetro de regularidade de malha γ .

Demonstração. Primeiro note que é suficiente mostrar a seguinte desigualdade no nível local

$$\|\operatorname{div}(\sigma_h - \sigma)\|_{0,K} \leq C \|\operatorname{div}(\pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma - \sigma)\|_{0,K}.$$

Assim, fixado um elemento $K \in \mathcal{T}_h$, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{RT}_m(\Omega)$ definimos

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} |JF_K(\hat{\mathbf{x}})| \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\operatorname{div} \mathcal{RT}_m(\hat{K}) = \mathcal{G}_m(\hat{K})$, a propriedade (5.2a) nos garante que $q(\mathbf{x})|_K \in \mathcal{G}_m(K)$. Então, pelo Lema 12 segue que para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{RT}_m(\Omega)$,

$$\int_K (\operatorname{div} \sigma_h - f) q \, dx = 0. \quad (5.20)$$

Tomando $\mathbf{v} = \sigma_h - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma$, (5.20) implica que

$$\int_K \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h) (|JF_K| \operatorname{div}(\sigma_h - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma)) \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\| |JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h) \|_{0,K}^2 = \int_K (|JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)) (|JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\sigma - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma)) \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no termo da direita da equação acima segue que

$$\| |JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h) \|_{0,K} \leq \| |JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\sigma - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma) \|_{0,K}.$$

Por fim usando as desigualdade (2.13) e (2.14) obtemos

$$\|\operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\|_{0,K} \leq C \|\operatorname{div}(\sigma - \pi_h^{\mathcal{RT}_m} \sigma)\|_{0,K},$$

onde C é uma constante dependente da razão $\frac{h_k}{\rho_K}$. Como estamos supondo que a malha é regular, $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \gamma$ e obtemos o resultado desejado. \square

Como consequências do Teorema acima, temos os seguintes resultados para a convergência do fluxo aproximado na norma de $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Corolário 3. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω satisfazendo a condição de regularidade (2.1) e suponha que as soluções exatas u e σ sejam suficientemente regulares. Segue que*

1. Para malhas triangulares, os espaços $(P_r(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, com os graus $r \geq m$ satisfazendo as condições do Lema 2, em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 5.2, obtêm ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h^{m+1})$ em $H(\text{div}, \Omega)$ na aproximação do fluxo.
2. Para malhas quadrilaterais afins os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 5.2, obtêm ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h^{m+1})$ em $H(\text{div}, \Omega)$ na aproximação do fluxo.
3. Para malhas quadrilaterais bilineares os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 5.2, obtêm ordem de convergência sub-ótima $\mathcal{O}(h^m)$ em $H(\text{div}, \Omega)$ na aproximação do fluxo.

Demonstração. Tais resultados são consequência direta dos Teoremas 10 e 11 em conjunto com os resultados de aproximação para o operador $\pi_h^{\mathcal{RT}_m}$ apresentados no Lema 7. \square

Note então que as ordens de convergência obtidas na norma de $H(\text{div}, \Omega)$ dependem da geometria da discretização adotada. Em malhas geradas por transformações afins (triângulos ou paralelogramos) a estratégia descrita alcança ordens ótimas de convergência, já em malhas geradas por transformações bilineares somente ordens sub-ótimas são alcançadas. Em particular, no caso de mais baixa ordem, usando o espaço de aproximação $\mathcal{RT}_0(\Omega)$, a estratégia não converge na norma de $H(\text{div}, \Omega)$.

Motivados por esse problema, na Seção 6.1 do Capítulo 6 apresentaremos uma modificação na estratégia descrita em 5.2 de forma que o fluxo aproximado alcance ordens ótimas de convergência na norma de $H(\text{div}, \Omega)$ tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares. Além disso, no Capítulo 7 serão realizados experimentos numéricos que ilustram os resultados teóricos apresentados nos Corolários 2 e 3.

6 Adaptações na estratégia de recuperação do fluxo

Neste Capítulo são exploradas algumas adaptações para a estratégia de recuperação do fluxo descrita no Capítulo 5 e desenvolvidas suas respectivas análises de convergência. As duas adaptações estudadas consistem em usar espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$ diferentes dos espaços de Raviart-Thomas, e buscam solucionar certas limitações encontradas na estratégia original.

Na primeira das adaptações os espaços de Raviart-Thomas são substituídos pelos espaços Arnold-Boffi-Falk. Essa substituição tem como objetivo alcançar ordens de convergência ótimas na norma de $H(\text{div}, \Omega)$ para malhas bilineares, algo que não é obtido pela estratégia original, como discutido na Seção 5.4 do Capítulo 5.

A condição R.2 impede o uso dos espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ como ponto de partida para o pós-processamento na estratégia original, uma vez que em geral $Q_m(\hat{K}) \not\subset S_{m+1}^+(\hat{K})$. Assim, na segunda adaptação buscamos enfraquecer essa condição de forma que espaços do tipo Serendipity possam ser usados. Para isso os espaços de Raviart-Thomas foram substituídos pelos espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini. As próximas seções detalham ambas as adaptações feitas além de apresentarem resultados de convergência em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $H(\text{div}, \Omega)$.

6.1 Estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços Arnold-Boffi-Falk

Como discutido na Seção 5.4, a estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços de Raviart-Thomas, apresentada na Seção 5.2, alcança ordens de convergência sub-ótimas na norma de $H(\text{div}, \Omega)$ em malhas quadrilaterais bilineares. Esse fenômeno é consequência da limitação na capacidade de aproximação dos espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$ em malhas bilineares, mostrada no Lema 7.

Restringindo-nos ao caso de discretizações em quadriláteros, nesta seção é realizada uma modificação na estratégia original, com o objetivo de obter taxas de convergência ótimas na norma de $H(\text{div}, \Omega)$ tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares. A modificação consiste em utilizar como base espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$ com maior capacidade de aproximação em malhas bilineares. Mais especificamente, os espaços Arnold-Boffi-Falk, descritos na Seção 5.1.2.

Considere $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ o espaço de aproximação usado no MHP. Para a

estratégia estar bem definida, exigiremos que

Q.1 $Q_m(\hat{K}) \subset \hat{U}$.

Q.2 O par $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ é compatível segundo o critério (2.21).

Assim, dada (u_h, λ_h) a solução aproximada para o problema modelo (1.1) obtida pelo MHP com o espaço de aproximação descrito, a estratégia é dada por: Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ é construído um único $\sigma_{h,K} \in \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{ABF}_m(\hat{K}))$ satisfazendo

$$\sigma_{h,K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \lambda_h, \quad \text{sobre } \partial K, \quad (6.1a)$$

$$\int_K (\sigma_{h,K} + \mathcal{K} \nabla u_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (6.1b)$$

$$\int_K (\operatorname{div} \sigma_{h,K}) \phi \, dx = \int_K f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \Phi_m(K), \quad (6.1c)$$

onde $\boldsymbol{\Psi}_m(K)$ e $\Phi_m(K)$ são definidos respectivamente por (5.8) e (5.10). Por fim o fluxo aproximado σ_h é construído tal que

$$\sigma_h|_K = \sigma_{h,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Note que o sistema gerado pela estratégia baseada nos espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ se assemelha muito ao gerado pela estratégia baseada nos espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$, tendo como diferença apenas a adição da equação (6.1c). Em função disso muitos resultados encontrados para a estratégia baseada nos espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$ podem ser facilmente adaptados para a nova estratégia. Isso ficará claro na Seção 6.1.1.

Analogamente ao que ocorre na estratégia baseada nos espaços de Raviart-Thomas, a construção do espaço de aproximação M_h em conjunto com a equação (6.1a) garante que σ_h tem componente normal contínua ao longo das fronteiras entre elementos vizinhos. Consequentemente $\sigma_h \in \mathcal{ABF}_m(\Omega) \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Com relação ao custo computacional, os sistemas gerados pela estratégia $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ são maiores que os gerados pela estratégia $\mathcal{RT}_m(\Omega)$. No entanto, como em ambos os casos os sistemas são resolvidos apenas localmente, esse fator não apresenta um aumento significativo no custo. Em ambas estratégias o custo computacional está concentrado no cálculo inicial das soluções (u_h, λ_h) e não no pós-processamento em si.

6.1.1 Análise de convergência para a estratégia baseada em $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$

Em razão da semelhança entre a estratégia original, apresentada em 5.2, com a estratégia baseada nos espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$, as análises de convergência de ambas seguem a mesma ideia. Começaremos apresentando dois lemas que são adaptações para os espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ dos Lemas 11 e 12.

Lema 13. Dados $\beta \in L^2(\partial K, \mathbb{R})$, $\mathbf{q} \in L^2(K, \mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(K, \mathbb{R})$, suponha que $\boldsymbol{\xi}_h \in \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{ABF}_m(\hat{K}))$ satisfaça

$$\int_{\partial K} (\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds = \int_{\partial K} \beta \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \quad (6.2a)$$

$$\int_K \boldsymbol{\xi}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_K \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (6.2b)$$

$$\int_K (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_h) \phi \, dx = \int_K g \phi \, dx \quad \forall \phi \in \Phi_m(K). \quad (6.2c)$$

Então existe constante C , independente de h_K , tal que

$$\|\boldsymbol{\xi}_h\|_{0,K} \leq C(\|\mathbf{q}\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\beta\|_{0,\partial K} + h_K \|g\|_{0,K}).$$

Demonstração. A demonstração desse resultado será feita em duas partes. Na primeira, provaremos-o utilizando a hipótese adicional de que $\operatorname{diam}(K) = h_K = 1$. Em seguida, na segunda parte, usaremos um argumento de escala (BOFFI et al., 2013; ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005), para obter o resultado para um elemento K de diâmetro qualquer.

Parte 1: Assumindo que $\operatorname{diam}(K) = 1$, construímos o seguinte operador

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^2(\partial K, \mathbb{R}) \times L^2(K, \mathbb{R}^2) \times L^2(K, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{ABF}_m(\hat{K})) \\ (\beta, \mathbf{q}, g) &\mapsto \boldsymbol{\xi}_h, \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\xi}_h$ é obtido através do sistema de equações (6.2). Destacamos que, da definição dos graus de liberdade dos espaços Arnold-Boffi-Falk, apresentada em (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005), segue que o operador \mathcal{T} está bem definido. Além disso, pela linearidade da integral, \mathcal{T} é operador linear.

Considere β_h , \mathbf{q}_h e g_h as projeções L^2 de β , \mathbf{q} e g sobre os espaços $E_m(\partial K)$, $\boldsymbol{\Psi}_m(\partial K)$ e $\Phi_m(K)$ respectivamente. Assim, diretamente das definições das projeções, segue que

$$\int_{\partial K} \beta_h \mu \, ds = \int_{\partial K} \beta \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \quad (6.4)$$

$$\int_K \mathbf{q}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_K \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (6.5)$$

$$\int_K g_h \phi \, dx = \int_K g \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \Phi_m(K). \quad (6.6)$$

Agora, aplicando as equações (6.4), (6.5) e (6.6) sobre o sistema (6.2), obtemos a seguinte relação

$$\boldsymbol{\xi}_h = \mathcal{T}(\beta, \mathbf{q}, g) = \mathcal{T}(\beta_h, \mathbf{q}_h, g_h).$$

Denotaremos por \mathcal{H} a restrição de \mathcal{T} no espaço $E_m(K) \times \boldsymbol{\Psi}_m(K) \times \Phi_m(K)$. Definido desta maneira, \mathcal{H} é um operador linear de dimensão finita e, portanto, limitado. Assim existe constante C tal que

$$\|\boldsymbol{\xi}_h\|_{0,K} = \|\mathcal{H}(\beta_h, \mathbf{q}_h, g_h)\|_{0,K} \leq C(\|\beta_h\|_{0,\partial K} + \|\mathbf{q}_h\|_{0,K} + \|g_h\|_{0,K}). \quad (6.7)$$

Em (6.7), a constante C é independente de h_K , uma vez que estamos sob a hipótese de que $\text{diam}(K) = 1$. Por outro lado, tomando $\mu = \beta_h$ na equação (6.4) e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\|\beta_h\|_{0,\partial K}^2 = \int_{\partial K} \beta_h \beta \, ds \leq \|\beta\|_{0,\partial K} \|\beta_h\|_{0,\partial K} \Rightarrow \|\beta_h\|_{0,\partial K} \leq \|\beta\|_{0,\partial K}. \quad (6.8)$$

De forma análoga, tomando $\tau = \mathbf{q}_h$ em (6.5) e $\phi = g_h$ em (6.6), obtemos

$$\|\mathbf{q}_h\|_{0,K} \leq \|\mathbf{q}\|_{0,K}, \quad (6.9)$$

$$\|g_h\|_{0,K} \leq \|g\|_{0,K}. \quad (6.10)$$

Então, de (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10) o resultado desejado é obtido para o caso em que $\text{diam}(K) = 1$.

Parte 2: Para a demonstração do caso geral em que $\text{diam}(K) = h_K > 0$ usaremos o seguinte argumento de escala. Considere um elemento auxiliar \bar{K} tal que

$$K = h_K \bar{K}. \quad (6.11)$$

Mapeando as equações de (6.2) para o elemento auxiliar \bar{K} e utilizando as propriedades (5.2b) e (5.2c) da transformação de Piola obtemos

$$\int_{\partial \bar{K}} (\bar{\boldsymbol{\xi}}_h \cdot \mathbf{n}^{\partial \bar{K}}) \bar{\mu} \, d\bar{s} = \int_{\partial \bar{K}} h_K \bar{\beta} \bar{\mu} \, d\bar{s}, \quad \forall \bar{\mu} \in E_m(\partial \bar{K}), \quad (6.12a)$$

$$\int_{\bar{K}} \bar{\boldsymbol{\xi}}_h \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \, d\bar{x} = \int_{\bar{K}} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \, d\bar{x}, \quad \forall \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \boldsymbol{\Psi}_m(\bar{K}), \quad (m \geq 1), \quad (6.12b)$$

$$\int_{\bar{K}} \text{div} \bar{\boldsymbol{\xi}}_h \bar{\phi} \, d\bar{x} = \int_{\bar{K}} h_K^2 \bar{g} \bar{\phi} \, d\bar{x}, \quad \forall \bar{\phi} \in \Phi_m(\bar{K}). \quad (6.12c)$$

Agora, da equação (6.11), segue que $\text{diam}(\bar{K}) = 1$ e portanto podemos utilizar os resultados da primeira parte da demonstração sobre as equações de (6.12), de onde segue que

$$\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_h\|_{0,\bar{K}} \leq C(\|\bar{\mathbf{q}}\|_{0,\bar{K}} + \|h_K \bar{\beta}\|_{0,\partial \bar{K}} + \|h_K^2 \bar{g}\|_{0,\bar{K}}). \quad (6.13)$$

Finalmente note que

$$\|h_K \bar{\beta}\|_{0,\partial \bar{K}} = h_K \left(\int_{\partial \bar{K}} h_K^{-1} \beta^2 \, d\bar{s} \right)^{1/2} = h_K^{1/2} \|\beta\|_{0,\partial K},$$

$$\|h_K^2 \bar{g}\|_{0,\bar{K}} = h_K^2 \left(\int_{\bar{K}} h_K^{-2} g^2 \, d\bar{x} \right)^{1/2} = h_K \|g\|_{0,K}.$$

Assim, mapeando a equação (6.13) de volta para o elemento original K , obtemos

$$\|\boldsymbol{\xi}_h\|_{0,K} \leq C(\|\mathbf{q}\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\beta\|_{0,\partial K} + h_K \|g\|_{0,K}).$$

e a demonstração está completa. \square

Lema 14. *Seja σ_h o fluxo aproximado gerado pela estratégia descrita na Seção 6.1. Considere $R_m(\hat{K})$ o subespaço de co-dimensão um de $Q_{m+1}(\hat{K})$ expandido pelos monômios de $Q_{m+1}(\hat{K})$ com exceção de $\hat{x}_1^{m+1}\hat{x}_2^{m+1}$. Assuma que foi utilizado o espaço $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ para a recuperação do fluxo e que as condições Q.1 e Q.2 sejam satisfeitas. Então para qualquer $K \in \mathcal{T}_h$*

$$\int_K (\operatorname{div} \sigma_h - f)q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{R}_m(K), \quad (6.14)$$

onde

$$\mathcal{R}_m(K) = \{\hat{v} \circ F_K^{-1} : \hat{v} \in R_m(\hat{K})\}.$$

Demonstração. Partindo da formulação do MHP, a equação (2.6) em conjunto com a condição Q.1 diz que, para qualquer $K \in \mathcal{T}_h$

$$\int_K (\mathcal{K} \nabla_h u_h) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial K} \lambda_h v \, ds = \int_K f v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{Q}_m(K), \quad (6.15)$$

onde

$$\mathcal{Q}_m(K) = \{\hat{v} \circ F_K^{-1} : \hat{v} \in Q_m(\hat{K})\}.$$

Aplicando a fórmula de Green sobre o segundo termo da esquerda em (6.15) e usando (6.1a) obtemos

$$\int_K (\sigma_h + \mathcal{K} \nabla_h u_h) \cdot \nabla v \, dx + \int_K \operatorname{div}(\sigma_h) v \, dx = \int_K f v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{Q}_m(K). \quad (6.16)$$

Agora, para toda função $v \in \mathcal{Q}_m(K)$ temos que $\nabla v \in \Psi_m(K)$. Logo segue de (6.1b) e (6.16) que

$$\int_K \operatorname{div}(\sigma_h) v \, dx = \int_K f v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{Q}_m(K). \quad (6.17)$$

Por fim, combinando (6.1c) com (6.17) obtemos o resultado desejado. \square

Com os Lemas 13 e 14 podemos facilmente obter estimativas para a aproximação de σ_h e $\operatorname{div} \sigma_h$ de forma análoga à feita nos Teoremas 10 e 11.

Teorema 12. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω em quadriláteros satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Assuma que as soluções exatas u e σ sejam regulares o suficiente e suponha que a solução aproximada (u_h, λ_h) obtida pelo MHP satisfaça*

$$\|\mathcal{K}(\nabla u - \nabla_h u_h)\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\lambda - \lambda_h\|_{0,\partial K} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,K} + |u|_{m+2,K}), \quad (6.18)$$

para alguma constante C independente de h . Então o fluxo aproximado σ_h gerado pela estratégia descrita na Seção 6.1 satisfaz

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,\Omega} + |u|_{m+2,\Omega}).$$

Demonstração. Da desigualdade triangular temos

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma}\|_{0,\Omega} + \|\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\Omega}. \quad (6.19)$$

Note que o Lema 8 nos dá uma estimativa para o primeiro termo da direita. Para estimar o segundo termo é suficiente encontrarmos uma estimativa à nível local para

$$\|\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K}.$$

Tomando $\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}$ em (5.9) e subtraindo (5.9a) de (6.1a), (5.9b) de (6.1b) e (5.9c) de (6.1c) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \mu \, ds &= \int_{\partial K} (\lambda - \lambda_h) \mu \, ds, & \forall \mu \in E_m(\partial K), \\ \int_K (\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx &= \int_K \mathcal{K}(\nabla u - \nabla_h u_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Psi}_m(K), \quad (m \geq 1). \\ \int_K \operatorname{div}(\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \phi \, dx &= 0, & \forall \phi \in \Phi_m(K). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 13 às equações acima e usando a hipótese (6.18) segue que

$$\|\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K} \leq Ch^{m+1}(|\boldsymbol{\sigma}|_{m+1,K} + |u|_{m+2,K}). \quad (6.21)$$

Por fim, combinando (6.19) e (6.21) com as estimativas para o operador projeção dadas pelo Lema 8, obtemos o resultado desejado. \square

Teorema 13. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização de Ω em quadriláteros satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Assuma que as soluções exatas u e $\boldsymbol{\sigma}$ sejam suficientemente regulares e suponha que as condições Q.1 e Q.2 sejam satisfeitas. Então o fluxo aproximado $\boldsymbol{\sigma}_h$ obtido pela estratégia descrita em 6.1 satisfaz*

$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma})\|_{0,\Omega} \leq C \|\operatorname{div}(\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma})\|_{0,\Omega},$$

para alguma constante C dependente apenas do parâmetro de regularidade de malha γ .

Demonstração. Para demonstrar o resultado desejado, é suficiente demonstrar o seguinte resultado local

$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma})\|_{0,K} \leq C \|\operatorname{div}(\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma})\|_{0,K}.$$

Assim, fixado um elemento $K \in \mathcal{T}_h$, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{ABF}_m(\Omega)$ definimos

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} |JF_K(\hat{\mathbf{x}})| \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\operatorname{div} \mathcal{ABF}_m(\hat{K}) = R_m(\hat{K})$, a propriedade (5.2a) nos garante que $q(\mathbf{x})|_K \in \mathcal{R}_m(K)$. Então, pelo Lema 14 segue que para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{ABF}_m(\Omega)$,

$$\int_K (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h - f) q \, dx = 0. \quad (6.22)$$

Tomando $\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}_h - \pi_h^{AB\mathcal{F}_m} \boldsymbol{\sigma}$, (6.22) implica que

$$\int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) (|JF_K| \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \pi_h^{AB\mathcal{F}_m} \boldsymbol{\sigma})) \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$||| |JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) |||_{0,K}^2 = \int_K (|JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)) (|JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \pi_h^{AB\mathcal{F}_m} \boldsymbol{\sigma})) \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no termo da direita da equação acima segue que

$$||| |JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) |||_{0,K} \leq ||| |JF_K|^{1/2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \pi_h^{AB\mathcal{F}_m} \boldsymbol{\sigma}) |||_{0,K}.$$

Por fim usando as desigualdade 2.13 e 2.14 obtemos

$$||| \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) |||_{0,K} \leq C ||| \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \pi_h^{AB\mathcal{F}_m} \boldsymbol{\sigma}) |||_{0,K},$$

onde C é uma constante dependente da razão $\frac{h_k}{\rho_K}$. Como estamos supondo que a malha é regular, $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \gamma$ e o resultado desejado é obtido. \square

Dos Teoremas acima temos os seguintes resultados para a convergência da estratégia descrita na Seção 6.1 nas normas de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Corolário 4. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω em quadriláteros satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Suponha que as soluções exatas u e $\boldsymbol{\sigma}$ sejam regulares o suficiente. Segue que*

1. *Os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 6.1 obtêm ordem de convergência ótima em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ na aproximação do fluxo tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares.*
2. *Os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 6.1 obtêm ordem de convergência ótima em $H(\operatorname{div}, \Omega)$ na aproximação do fluxo tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares.*

Demonstração. É claro que os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ satisfazem a condição Q.1. O Lema 3 garante que a condição Q.2 também é satisfeita. Por fim a análise desenvolvida nos Capítulos 3 e 4 asseguram a validade da hipótese (6.18). Dessa forma o primeiro item do corolário é consequência direta do Teorema 12.

O segundo item por sua vez é facilmente demonstrado a partir dos Teoremas 12 e 13 em conjunto com as estimativas de aproximação do operador de projeção $\pi_h^{AB\mathcal{F}_m}$ dadas pelo Lema 8. \square

O corolário acima mostra que, como desejado, a nova estratégia alcança ordens ótimas de convergência nas normas de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e de $H(\operatorname{div}, \Omega)$ em qualquer malha composta por quadriláteros convexos, afins ou bilineares. No Capítulo 7 serão realizados experimentos numéricos para verificar tais resultados e compará-los com os obtidos pela estratégia original.

6.2 Estratégia de recuperação do fluxo baseada nos espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini

Em malhas quadrilaterais, para o bom funcionamento das estratégias de recuperação do fluxo descritas nas Seções 5.2 e 6.1, a condição **R.2** é exigida. Dessa forma o uso do par $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ não é adequado nessa estratégia, já que em geral

$$Q_m(\hat{K}) \not\subset S_{m+1}(\hat{K}).$$

Motivados por isso, nesta Seção apresentamos uma modificação na estratégia original de recuperação do fluxo de forma que o uso dos espaços $(S_{m+1}(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ seja permitido. A modificação consiste em utilizar como base os espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ no lugar dos espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$. Essa escolha é motivada pelo fato de

$$\text{div}\mathcal{BDFM}_{m+1}(\hat{K}) = P_m(\hat{K}) \subset S_{m+1}(\hat{K}).$$

Fato esse que será fundamental para o desenvolvimento da análise de convergência na norma de $H(\text{div}, \Omega)$.

Novamente é necessário assumir certas hipóteses sobre o espaço $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ usado no MHP para que a estratégia esteja bem definida. Para esta adaptação exigiremos que

S.1 $P_m(\hat{K}) \subset \hat{U},$

S.2 O par $(\hat{U}, E_m(\partial\hat{K}))$ é compatível segundo o critério (2.21).

Então, dada a solução aproximada (u_h, λ_h) para o problema modelo (1.1), obtida pelo MHP com o espaço de aproximação descrito, a estratégia é dada por: Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ é construído um único $\sigma_{h,K} \in \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{BDFM}_{m+1}(\hat{K}))$ satisfazendo

$$\sigma_{h,K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \lambda_h, \quad \text{sobre } \partial K, \quad (6.23a)$$

$$\int_K (\sigma_{h,K} + \mathcal{K} \nabla u_h) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\chi}_m(K), \quad (m \geq 1), \quad (6.23b)$$

com $\boldsymbol{\chi}_m(K)$ definido conforme a equação (5.12). O fluxo aproximado σ_h é então construído de forma que

$$\sigma_h|_K = \sigma_{h,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Analogamente às estratégias baseadas nos espaços de Raviart-Thomas e Arnold-Boffi-Falk, a construção do espaço de aproximação M_h em conjunto com a equação (6.23a) implica que σ_h tem componente normal contínua ao longo das fronteiras entre elementos vizinhos. Portanto $\sigma_h \in \mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega) \subset H(\text{div}, \Omega)$.

Com relação ao custo computacional, esta estratégia é mais barata que as baseadas nos espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$ ou $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$. A condição [S.1](#) permite o uso de espaços de aproximação mais baratos para o MHP, como os espaços Serendipity, e os sistemas [\(6.23\)](#) gerados por esta estratégia são menores que os sistemas [\(5.13\)](#) e [\(6.1\)](#) gerados pelas estratégias anteriores.

No entanto vale destacar que a economia no custo computacional é pequena. Como discutido na Seção [2.3](#), o custo computacional do MHP usando $Q_r(\hat{K})$ ou $S_r(\hat{K})$ é equiparável. Além disso, como todas as estratégias de recuperação apresentadas envolvem apenas a resolução de sistemas locais, o uso de espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$ mais baratos não provoca uma grande economia.

Veremos agora que apesar da estratégia baseada nos espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ gerar sistemas menores, ela ainda é capaz de obter ordens ótimas de convergência em malhas afins tanto para a norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ quanto para a norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Em malhas bilineares no entanto esta estratégia alcança ordens sub-ótimas em ambas as normas.

6.2.1 Análise de convergência para a estratégia baseada em $\mathcal{BDFM}_m(\Omega)$

A análise de convergência para a estratégia descrita acima é análoga às realizadas anteriormente para os espaços $\mathcal{RT}_m(\Omega)$ e $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$. Começaremos apresentando os seguintes lemas.

Lema 15. *Dados $\beta \in L^2(\partial K, \mathbb{R})$ e $\mathbf{q} \in L^2(K, \mathbb{R}^2)$, suponha que $\boldsymbol{\xi}_h \in \mathcal{P}_{F_K}(\mathcal{BDFM}_{m+1}(\hat{K}))$ satisfaça*

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) \mu \, ds &= \int_{\partial K} \beta \mu \, ds, \quad \forall \mu \in E_m(\partial K), \\ \int_K \boldsymbol{\xi}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx &= \int_K \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \chi_m(K), \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

Então existe constante C , independente de h_K , tal que

$$\|\boldsymbol{\xi}_h\|_{0,K} \leq C(\|\mathbf{q}\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\beta\|_{0,\partial K}).$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é análoga à demonstração do Lema [13](#) e portanto será omitida. \square

Lema 16. *Seja $\boldsymbol{\sigma}_h$ o fluxo aproximado gerado pela estratégia descrita na Seção [6.2](#). Assuma que foi utilizado o espaço $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ para a recuperação do fluxo e que as condições [S.1](#) e [S.2](#) sejam satisfeitas. Então para qualquer $K \in \mathcal{T}_h$*

$$\int_K (\text{div } \boldsymbol{\sigma}_h - f) q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_m(K), \quad (6.25)$$

onde

$$\mathcal{P}_m(K) = \{\hat{v} \circ F_K^{-1} : \hat{v} \in P_m(\hat{K})\}.$$

Demonstração. Partindo da formulação do MHP, a equação (2.6) em conjunto com a condição S.1 diz que, para qualquer $K \in \mathcal{T}_h$

$$\int_K (\mathcal{K} \nabla_h u_h) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial K} \lambda_h v \, ds = \int_K f v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{P}_m(K). \quad (6.26)$$

Aplicando a fórmula de Green sobre o segundo termo da esquerda em (6.26), usando (6.23b) e o fato de que, para toda função $v \in \mathcal{P}_m(K)$, $\nabla v \in \chi_m(K)$, obtemos o resultado desejado. \square

A partir dos Lemas 15 e 16 obteremos estimativas para a aproximação de σ_h e $\text{div } \sigma_h$ de forma análoga à feita para as estratégias anteriores.

Teorema 14. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω em quadriláteros afins satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Assuma que as soluções exatas u e σ sejam regulares o suficiente e suponha que a solução aproximada (u_h, λ_h) obtida pelo MHP satisfaça*

$$\|\mathcal{K}(\nabla u - \nabla_h u_h)\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\lambda - \lambda_h\|_{0,\partial K} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,K} + |u|_{m+2,K}), \quad (6.27)$$

para alguma constante C independente de h . Então o fluxo aproximado σ_h gerado pela estratégia descrita na Seção 6.2 satisfaz

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,\Omega} + |u|_{m+2,\Omega}).$$

Demonstração. Da desigualdade triangular temos

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq \|\sigma - \pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \sigma\|_{0,\Omega} + \|\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega}. \quad (6.28)$$

O Lema 9 nos dá uma estimativa para o primeiro termo da direita. Para estimar o segundo termo é suficiente encontrarmos uma estimativa à nível local para

$$\|\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \sigma - \sigma_h\|_{0,K}.$$

Tomando $v = \sigma$ em (5.11) e subtraindo (5.11a) de (6.23a) e (5.11b) de (6.23b) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \sigma - \sigma_h) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \mu \, ds &= \int_{\partial K} (\lambda - \lambda_h) \mu \, ds, & \forall \mu \in E_m(\partial K), \\ \int_K (\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \sigma - \sigma_h) \cdot \tau \, dx &= \int_K \mathcal{K}(\nabla u - \nabla_h u_h) \cdot \tau \, dx, & \forall \tau \in \chi_m(K), \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 15 às equações acima e usando a hipótese (6.27) segue que

$$\|\pi_h^{\mathcal{ABF}_m} \sigma - \sigma_h\|_{0,K} \leq Ch^{m+1}(|\sigma|_{m+1,K} + |u|_{m+2,K}) \quad (6.30)$$

Por fim, combinando (6.28) e (6.30) com as estimativas para o operador projeção dadas pelo Lema 9, obtemos o resultado desejado. \square

Teorema 15. *Seja \mathcal{T}_h uma discretização de Ω em quadriláteros satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Assuma que as soluções exatas u e σ sejam regulares o suficiente e suponha que as condições S.1 e S.2 sejam satisfeitas. Então o fluxo aproximado σ_h obtido pela estratégia descrita em 6.2 satisfaz*

$$\|\operatorname{div}(\sigma_h - \sigma)\|_{0,\Omega} \leq C \|\operatorname{div}(\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}} \sigma - \sigma)\|_{0,\Omega},$$

Para alguma constante C dependente apenas do parâmetro de regularidade de malha γ .

Demonstração. A partir do Lema 16 e usando o fato de que $\hat{\operatorname{div}} \mathcal{BDFM}_{m+1}(\hat{K}) = P_m(\hat{K})$, a demonstração deste Teorema segue de forma análoga à demonstração do Teorema 13. \square

Note que na demonstração do Teorema 14 utilizamos as estimativas do Lema 9, e portanto seus resultados são válidos somente para malhas afins. O Teorema 15, por outro lado, é válido tanto em malhas afins quanto bilineares. Desses dois Teoremas seguem os seguintes resultados.

Corolário 5. *Seja \mathcal{T}_h discretização de Ω em quadriláteros afins satisfazendo a condição de regularidade (2.1). Suponha que as soluções exatas u e σ sejam regulares o suficiente. Segue que*

1. *Os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 6.2 obtêm ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h^{m+1})$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ na aproximação do fluxo.*
2. *Os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ em conjunto com a estratégia de recuperação apresentada em 6.2 obtêm ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h^{m+1})$ em $H(\operatorname{div}, \Omega)$ na aproximação do fluxo.*

Demonstração. É claro que os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ satisfazem a condição S.1. O Lema 3 garante que a condição S.2 também é satisfeita. Além disso, no Capítulo 3 é assegurada a validade da hipótese (6.27). Dessa forma o primeiro item do corolário é consequência direta do Teorema 14.

O segundo item por sua vez é facilmente demonstrado a partir dos Teoremas 14 e 15 em conjunto com a estimativa de aproximação do operador de projeção $\pi_h^{\mathcal{BDFM}_{m+1}}$ dada pelo Lema 9. \square

Concluimos então que a combinação dos espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ com a estratégia apresentada na Seção 6.2 alcança as mesmas ordens ótimas de convergência que as estratégias anteriores em malhas afins, apesar de usar espaços de aproximação com

menos graus de liberdade. Isso faz dessa combinação particularmente interessante para o caso de malhas afins.

No entanto para malhas bilineares essa combinação alcança ordens sub-ótimas de convergência tanto na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ quanto na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Esse fenômeno é causado por dois fatores. O primeiro é a limitação da capacidade de aproximação dos espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$ em malhas bilineares, como mostrado no Lema 10. O segundo é a não validade da hipótese (6.27) em malhas bilineares para os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, como discutido no Capítulo 4.

Esses resultados teóricos encontrados serão verificados numericamente no Capítulo 7, onde a estratégia será aplicada para a aproximação do fluxo em malhas afins e bilineares.

7 Experimentos envolvendo a recuperação do fluxo a partir do MHP

Neste Capítulo foram realizados diversos experimentos numéricos relacionados ao problema da recuperação do fluxo a partir do MHP. Nestes experimentos buscamos verificar numericamente as ordens de convergência alcançadas pelas estratégias apresentadas nos Capítulos 5 e 6 e confirmar que o fluxo numérico obtido de fato possui componente normal contínua.

Tais experimentos foram divididos em três blocos. No primeiro tratamos o caso de malhas triangulares e para isso usamos a estratégia de recuperação baseada nos espaços de Raviart-Thomas, descrita no Capítulo 5. No segundo utilizamos malhas quadrilaterais, afins e bilineares, para comparar o desempenho da estratégia original do Capítulo 5 com a estratégia modificada apresentada na Seção 6.1. Por fim, no terceiro bloco, ainda em malhas quadrilaterais, exploramos a estratégia descrita na Seção 6.2 combinada com os espaços Serendipity.

Em todos os blocos resolvemos o problema modelo (1.1) com $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$,

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ se } x < 0, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ se } x > 0, \text{ e}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (2 \sin(y) + \cos(y))x + \sin(y), & \text{se } x < 0, \\ -2e^x \cos(y), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como mostrado em (CRUMPTON; SHAW; WARE, 1995), o problema em questão possui solução exata dada por

$$u(x, y) = \begin{cases} (2 \sin(y) + \cos(y))x + \sin(y), & \text{se } x < 0, \\ e^x \sin(y), & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

o que nos permite calcular os erros e as ordens de convergência dos métodos numéricos. Além disso vale destacar que a solução exata para o fluxo, apesar de ter componente normal contínua, possui uma descontinuidade tangencial em $x = 0$, o que torna esse problema particularmente difícil de ser resolvido numericamente.

Assim outro ponto analisado foi a capacidade das estratégias usadas em representar essa descontinuidade. As próximas seções apresentam com detalhes cada um dos blocos de experimentos, assim como os respectivos resultados numéricos e conclusões.

7.1 Experimentos em malhas triangulares

Nesse bloco de experimentos o problema em questão foi resolvido usando uma sequência de malhas triangulares como as da Figura 2. Foram utilizados os espaços de aproximação $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$, $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ em conjunto com a estratégia de recuperação descrita na Seção 5.2. Note que, segundo o Lema 2, todos os espaços utilizados são compatíveis e portanto tanto a condição R.1 quanto a condição R.3 são satisfeitas. Em seguida foram calculados os erros na norma L^2 para o fluxo aproximado e também para seu divergente, além das respectivas ordens de convergência.

Para o caso de malhas triangulares, os Corolários 2 e 3 preveem que tanto o fluxo aproximado σ_h quanto o seu divergente alcançam ordens ótimas de convergência $\mathcal{O}(h^{m+1})$, onde m é o grau dos polinômios usados na aproximação de λ_h e também o índice dos espaços de Raviart-Thomas usados para a estratégia de recuperação do fluxo. Esse comportamento é de fato observado na prática, como mostram as Tabelas 26 à 28.

Tabela 26 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando a estratégia apresentada na Seção 5.2 com os espaços $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ em malhas triangulares.

n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$	
	err.	taxa	err.	taxa
2	3.0851e+00	-	1.7343e+00	-
4	1.6183e+00	0.93	9.0590e-01	0.94
8	8.2937e-01	0.96	4.5786e-01	0.98
16	4.1874e-01	0.99	2.2954e-01	1.00
32	2.1007e-01	1.00	1.1485e-01	1.00
64	1.0515e-01	1.00	5.7434e-02	1.00

Tabela 27 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando a estratégia apresentada na Seção 5.2 com os espaços $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ em malhas triangulares.

n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$	
	err.	taxa	err.	taxa
2	5.1161e-01	-	3.0297e-01	-
4	1.3136e-01	1.96	7.7922e-02	1.96
8	3.2865e-02	2.00	1.9627e-02	1.99
16	8.2002e-03	2.00	4.9160e-03	2.00
32	2.0472e-03	2.00	1.2296e-03	2.00
64	5.1143e-04	2.00	3.0743e-04	2.00

Tabela 28 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando a estratégia apresentada na Seção 5.2 com os espaços $(P_3(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ em malhas triangulares.

n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$	
	err.	taxa	err.	taxa
2	9.4649e-02	-	3.2484e-02	-
4	9.1204e-03	3.38	4.2207e-03	2.94
8	9.6919e-04	3.23	5.3283e-04	2.99
16	1.1324e-04	3.10	6.6769e-05	3.00
32	1.3730e-05	3.04	8.3513e-06	3.00
64	1.6915e-06	3.02	1.0443e-06	3.00

Pelas imagens 13 e 14, que plotam a segunda componente do fluxo aproximado para os espaços $(P_1(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e $(P_3(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ respectivamente, podemos ver que a descontinuidade tangencial em $x = 0$ é bem representada nas soluções numéricas. Isso faz dessa estratégia interessante para problemas com tensores de anisotropia descontínuos, como o apresentado no problema em questão.

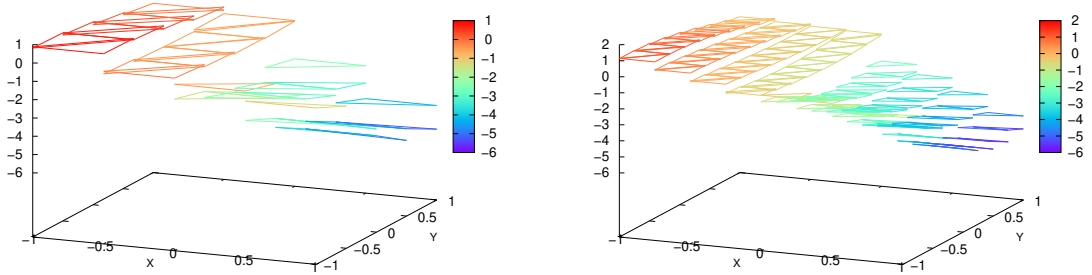


Figura 13 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ em malhas triangulares com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente.

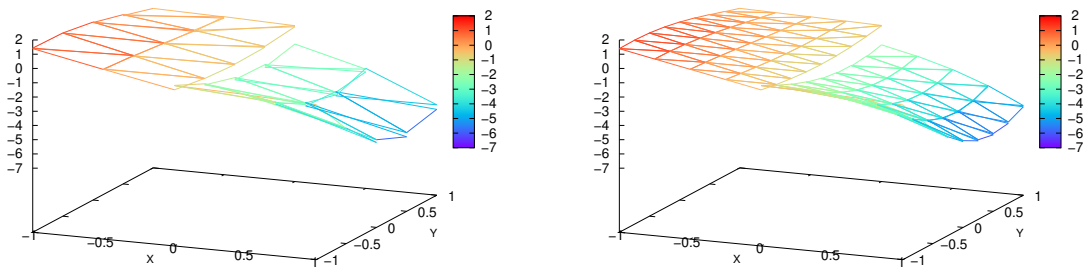


Figura 14 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_1(\Omega)$ em malhas triangulares com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente.

7.2 Experimentos em malhas quadrilaterais

Para o segundo bloco de experimentos o problema em questão foi resolvido utilizando os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ com $m = 0, 1$ e 2 para a obtenção das soluções híbridas primais. Note que tais espaços satisfazem as condições [R.2](#) e [R.3](#) assim como as condições [Q.1](#) e [Q.2](#). Para a recuperação do fluxo foram testadas as estratégias apresentadas na Seção [5.2](#) e na Seção [6.1](#), que utilizam como base os espaços de Raviart-Thomas e Arnold-Boffi-Falk respectivamente.

Foram utilizadas duas famílias de malhas quadrilaterais, sendo uma família composta por malhas afins (Figura [7](#)) e a outra por malhas bilineares (Figura [12](#)). Por fim, para cada um dos espaços, estratégias de recuperação e malhas descritas, foram calculados os erros L^2 para o fluxo aproximado σ_h e seu divergente, assim como as respectivas ordens assintóticas de convergência. Os resultados encontrados para a estratégia baseada nos espaços de Raviart-Thomas estão nas Tabelas [29](#), [31](#) e [33](#). Já os resultados para a estratégia baseada nos espaços Arnold-Boffi-Falk estão nas Tabelas [30](#), [32](#) e [34](#).

Tabela 29 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	2.1146e+00	-	1.4750e+00	-	2.2433e+00	-	1.6666e+00	-	
4	1.0560e+00	1.00	7.7562e-01	0.93	1.1538e+00	0.96	1.0260e+00	0.70	
8	5.2751e-01	1.00	3.9271e-01	0.98	5.8050e-01	0.99	7.6097e-01	0.43	
16	2.6368e-01	1.00	1.9697e-01	1.00	2.9067e-01	1.00	6.7646e-01	0.17	
32	1.3183e-01	1.00	9.8563e-02	1.00	1.4537e-01	1.00	6.5350e-01	0.05	
64	6.5915e-02	1.00	4.9291e-02	1.00	7.2681e-02	1.00	6.4763e-01	0.01	

Tabela 30 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_1^+(\hat{K}), E_0(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{ABF}_0(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	2.0879e+00	-	3.5868e-01	-	2.1930e+00	-	4.2405e-01	-	
4	1.0515e+00	0.99	9.3781e-02	1.94	1.1471e+00	0.93	1.7020e-01	1.32	
8	5.2692e-01	1.00	2.3719e-02	1.98	5.7914e-01	0.99	7.6921e-02	1.15	
16	2.6361e-01	1.00	5.9470e-03	2.00	2.8999e-01	1.00	3.7276e-02	1.05	
32	1.3182e-01	1.00	1.4878e-03	2.00	1.4495e-01	1.00	1.8485e-02	1.01	
64	6.5913e-02	1.00	3.7203e-04	2.00	7.2444e-02	1.00	9.2239e-03	1.00	

Tabela 31 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{RT}_1(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		err.	taxa	err.	taxa	
2	3.2406e-01	-	2.2411e-01	-	3.2556e-01	-	3.1292e-01	-	
4	7.8668e-02	2.04	5.6955e-02	1.98	8.3888e-02	1.96	1.0994e-01	1.51	
8	1.8602e-02	2.08	1.4305e-02	1.99	2.0312e-02	2.05	4.7861e-02	1.20	
16	4.4147e-03	2.07	3.5807e-03	2.00	4.8928e-03	2.05	2.2966e-02	1.06	
32	1.0632e-03	2.05	8.9544e-04	2.00	1.1895e-03	2.04	1.1363e-02	1.02	
64	2.5982e-04	2.03	2.2388e-04	2.00	2.9226e-04	2.03	5.6671e-03	1.00	

Tabela 32 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{ABF}_1(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		err.	taxa	err.	taxa	
2	3.2407e-01	-	1.6067e-02	-	3.2370e-01	-	3.8103e-02	-	
4	7.8651e-02	2.04	2.0156e-03	2.99	8.3365e-02	1.96	6.9189e-03	2.46	
8	1.8601e-02	2.08	2.5201e-04	3.00	2.0184e-02	2.05	1.5369e-03	2.17	
16	4.4146e-03	2.08	3.1502e-05	3.00	4.8582e-03	2.05	3.7122e-04	2.05	
32	1.0632e-03	2.05	3.9378e-06	3.00	1.1803e-03	2.04	9.1968e-05	2.01	
64	2.5982e-04	2.03	4.9222e-07	3.00	2.8988e-04	2.03	2.2939e-05	2.00	

Tabela 33 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{RT}_2(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.

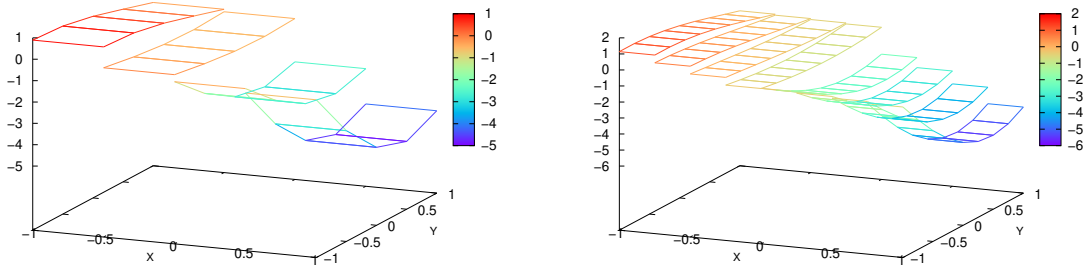
Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		err.	taxa	err.	taxa	
2	2.3211e-02	-	1.5028e-02	-	2.8280e-02	-	2.7515e-02	-	
4	2.8336e-03	3.03	1.9816e-03	2.92	3.6455e-03	2.96	5.8363e-03	2.24	
8	3.5165e-04	3.01	2.5093e-04	2.98	4.4278e-04	3.04	1.3777e-03	2.08	
16	4.3829e-05	3.00	3.1468e-05	3.00	5.4085e-05	3.03	3.3898e-04	2.02	
32	5.4711e-06	3.00	3.9367e-06	3.00	6.6506e-06	3.02	8.4391e-05	2.01	
64	6.8342e-07	3.00	4.9219e-07	3.00	8.2295e-07	3.01	2.1075e-05	2.00	

Tabela 34 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(Q_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e $\mathcal{ABF}_2(\Omega)$ em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	2.3217e-02	-	1.1921e-03	-	2.8354e-02	-	2.1718e-03	-	
4	2.8338e-03	3.03	7.5769e-05	3.98	3.6452e-03	2.96	2.2201e-04	3.29	
8	3.5165e-04	3.01	4.7594e-06	3.99	4.4247e-04	3.04	2.6030e-05	3.09	
16	4.3829e-05	3.00	2.9786e-07	4.00	5.4040e-05	3.03	3.1981e-06	3.02	
32	5.4711e-06	3.00	1.8622e-08	4.00	6.6450e-06	3.02	3.9801e-07	3.01	
64	6.8342e-07	3.00	1.1640e-09	4.00	8.2226e-07	3.01	4.9698e-08	3.00	

Como previsto pela análise apresentada nas Seções 5.3 e 5.4, a estratégia baseada nos espaços de Raviart-Thomas alcançam ordens ótimas $\mathcal{O}(h^{m+1})$ na convergência L^2 do fluxo tanto em malhas afins quanto em malhas bilineares. Porém, para a convergência L^2 do divergente do fluxo, essa estratégia alcança ordens ótimas apenas no caso afim. Consequentemente a convergência do fluxo na norma de $H(\operatorname{div}, \Omega)$ é sub-ótima em malhas bilineares. Em particular no caso de mais baixa ordem $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ não temos convergência na norma de $H(\operatorname{div}, \Omega)$, como visto na Tabela 29.

Por outro lado a estratégia baseada nos espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ alcançou ordens ótimas de convergência L^2 para o fluxo e seu divergente em ambos os tipos de malhas, afins e bilineares. Esse resultado está em total acordo com a análise desenvolvida na Seção 6.1.1. Além disso, para o caso de malhas afins essa estratégia alcançou ordens $\mathcal{O}(h^{m+2})$ na convergência do divergente, o que também é esperado de acordo com o Teorema 13 e com o Lema 8. Porém note que isso não implica em ordens de convergência em $H(\operatorname{div}, \Omega)$ maiores, uma vez que neste caso elas serão limitadas pela ordem L^2 do fluxo.

Figura 15 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente.

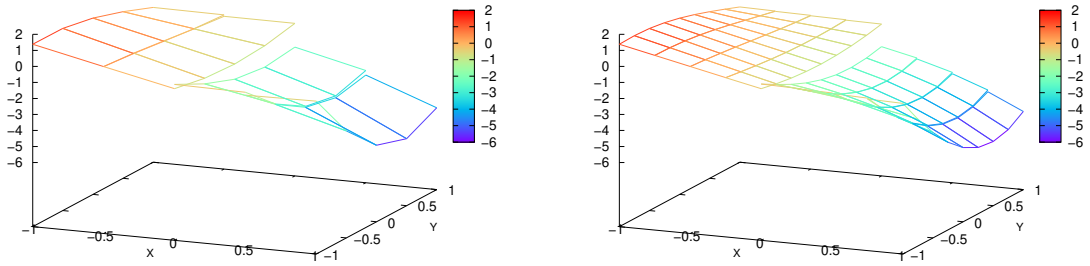


Figura 16 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{RT}_1(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente.

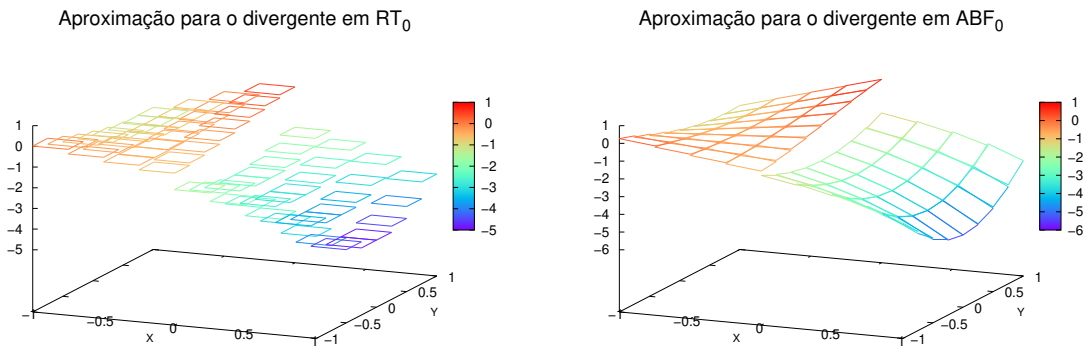


Figura 17 – Comparação entre os divergente dos fluxos aproximados obtidos pelos espaços $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ e $\mathcal{ABF}_0(\Omega)$ em uma malha quadrada com 8×8 divisões.

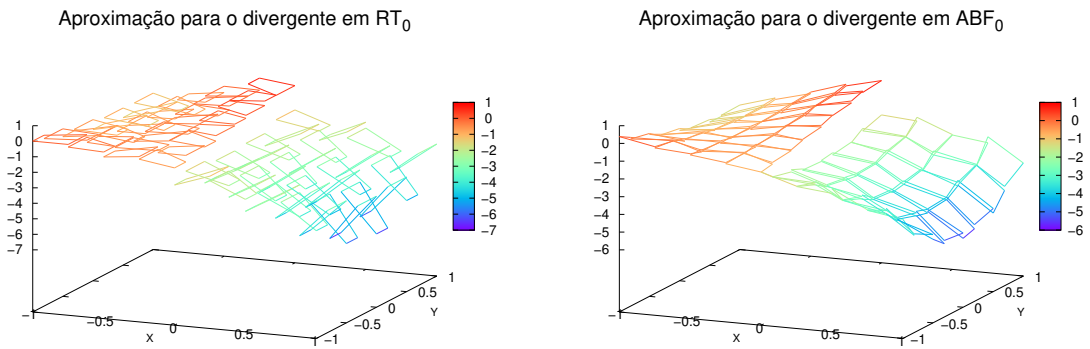


Figura 18 – Comparação entre os divergente dos fluxos aproximados obtidos pelos espaços $\mathcal{RT}_0(\Omega)$ e $\mathcal{ABF}_0(\Omega)$ em uma malha trapezoidal com 8×8 divisões.

Nas imagens 15 e 16 podemos ver claramente que o fluxo aproximado de fato possui componente normal contínua ao passo que permite descontinuidades na componente

tangencial. Além disso as imagens 17 e 18 comparam o divergente dos fluxos aproximados obtidos por ambas estratégias, deixando clara a vantagem obtida pela estratégia baseada nos espaços Arnold-Boffi-Falk na representação do divergente, principalmente em malhas bilineares.

Tais resultados numéricos corroboram para a validade da análise desenvolvida nos capítulos anteriores e nos permitem concluir que a estratégia baseada nos espaços $\mathcal{ABF}_m(\Omega)$ é mais adequada em malhas bilineares, uma vez que garante ordens de convergência maiores mantendo um custo computacional comparável.

7.3 Experimentos envolvendo os espaços Serendipity

Por fim, neste bloco o problema em questão foi resolvido utilizando os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$, com $m = 1, 2$ e 3 , para a solução híbrida primal. Note que esses espaços satisfazem as condições S.1 e S.2 porém não satisfazem as condições Q.1 e R.2. Dessa forma a única estratégia, das apresentadas, que pode ser utilizada é a proposta na Seção 6.2, baseada nos espaços $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$.

Para a discretização do domínio, foram novamente utilizadas malhas afins e bilineares como as apresentadas nas Figuras 7 e 12 respectivamente. Como de costume, para cada um dos espaços de aproximação e malhas descritas, foram calculados os erros na norma L^2 para o fluxo aproximado σ_h e seu divergente e suas respectivas ordens de convergência. Os resultados encontrados estão nas Tabelas 35 à 37.

Tabela 35 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(S_2^+(\hat{K}), E_1(\partial\hat{K}))$ e \mathcal{BDFM}_2 em malhas de quadrados e de trapézios.

n	Malhas de quadrados				Malhas de trapézios			
	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$	
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
2	6.0488e-01	-	3.5868e-01	-	7.5103e-01	-	4.2405e-01	-
4	1.3807e-01	2.13	9.3781e-02	1.94	1.9873e-01	1.92	1.7020e-01	1.32
8	3.0977e-02	2.16	2.3719e-02	1.98	5.4774e-02	1.86	7.6921e-02	1.14
16	6.9977e-03	2.15	5.9470e-03	2.00	1.8075e-02	1.60	3.7276e-02	1.05
32	1.6204e-03	2.11	1.4878e-03	2.00	7.2906e-03	1.31	1.8485e-02	1.01
64	3.8552e-04	2.07	3.7203e-04	2.00	3.3238e-03	1.13	9.2239e-03	1.00

Tabela 36 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(S_3^+(\hat{K}), E_2(\partial\hat{K}))$ e \mathcal{BDFM}_3 em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	2.2654e-01	-	5.6316e-02	-	5.0906e-01	-	1.2136e-01	-	
4	2.0657e-02	3.46	7.4092e-03	2.93	1.4374e-01	1.82	2.9884e-02	2.02	
8	1.8086e-03	3.51	9.3840e-04	2.98	3.7186e-02	1.95	8.0666e-03	1.89	
16	1.5807e-04	3.52	1.1769e-04	3.00	9.8046e-03	1.92	2.5925e-03	1.64	
32	1.4248e-05	3.47	1.4723e-05	3.00	2.7419e-03	1.84	1.0437e-03	1.31	
64	1.3373e-06	3.41	1.8408e-06	3.00	8.1979e-04	1.74	4.8525e-04	1.10	
128	1.3225e-07	3.34	2.3011e-07	3.00	2.6060e-04	1.65	2.3783e-04	1.03	

Tabela 37 – Erros L^2 para o fluxo e seu divergente usando os espaços $(S_4^+(\hat{K}), E_3(\partial\hat{K}))$ e \mathcal{BDFM}_4 em malhas de quadrados e de trapézios.

Malhas de quadrados					Malhas de trapézios				
n	$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		$\ \sigma - \sigma_h\ _{0,\Omega}$		$\ \operatorname{div}(\sigma - \sigma_h)\ _{0,\Omega}$		
	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	
2	5.5938e-02	-	6.9000e-03	-	3.0001e-01	-	2.7661e-02	-	
4	2.7522e-03	4.35	4.5222e-04	3.93	3.3308e-02	3.17	4.1338e-03	2.74	
8	1.3363e-04	4.36	2.8618e-05	3.98	4.7687e-03	2.80	7.7457e-04	2.42	
16	6.3195e-06	4.40	1.7943e-06	4.00	7.6708e-04	2.64	1.7374e-04	2.16	
32	3.0296e-07	4.38	1.1223e-07	4.00	1.3425e-04	2.51	4.2097e-05	2.05	
64	1.5093e-08	4.33	7.0159e-09	4.00	2.5192e-05	2.41	1.0438e-05	2.01	

Como previsto, esta combinação de espaços alcança ordens sub-ótimas de convergência em malhas bilineares, tanto para a aproximação do fluxo quanto para de seu divergente. Isso é decorrência das limitações na capacidade de aproximação tanto dos espaços escalares $S_{m+1}^+(\hat{K})$ quanto dos espaços vetoriais $\mathcal{BDFM}_{m+1}(\Omega)$, como discutido na Seção 6.2.

Porém, quando nos restringimos apenas ao caso de malhas afins, a combinação dos espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ com a estratégia descrita na Seção 6.2 alcança ordens ótimas de convergência tanto em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ quando em $H(\operatorname{div}, \Omega)$. Tal resultado é previsto pelo Corolário 5 e suporta o uso dessa combinação para malhas afins.

Finalmente, nas Figuras 19 e 20 observa-se novamente que o fluxo aproximado além de ter componente normal contínua, respeita a descontinuidade tangencial presente na solução analítica.

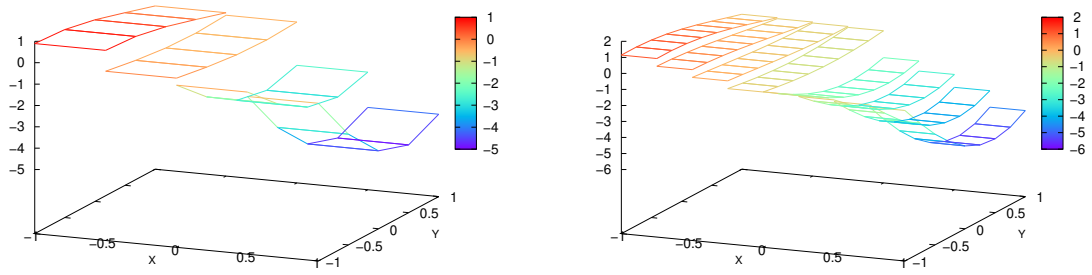


Figura 19 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{BDFM}_1(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente.

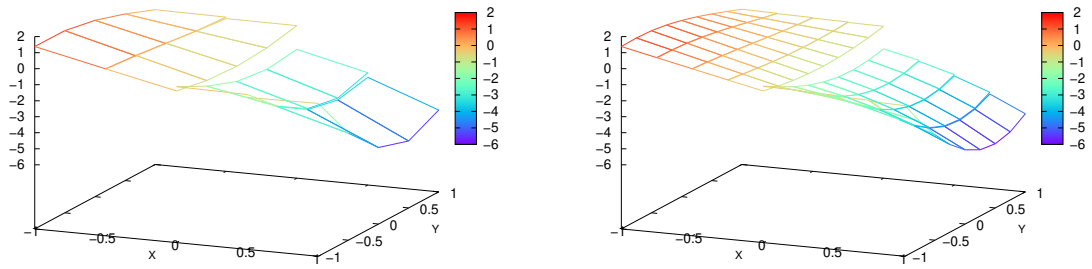


Figura 20 – Solução para a segunda componente do fluxo usando o espaço $\mathcal{BDFM}_2(\Omega)$ em malhas quadradas com 4×4 e 8×8 divisões respectivamente.

8 Conclusões

Neste trabalho estudamos a aplicação do Método Híbrido Primal para problemas elípticos de segunda ordem em domínios bidimensionais. Foram explorados os casos de problemas com discretizações em triângulos, paralelogramos e quadriláteros convexos gerais. Neste último caso, encontramos resultados que, até onde sabemos, não foram explorados previamente na literatura. A dissertação pode então ser dividida em duas partes, sendo a primeira composta pelos Capítulos 2 a 4 e a segunda pelos Capítulos 5 a 7.

Na primeira parte deste trabalho, apresentamos o Método Híbrido Primal assim como os principais resultados da literatura sobre a existência e unicidade de solução e sobre a convergência do método em malhas afins que, em problemas bidimensionais, incluem malhas compostas por triângulos e paralelogramos. Em seguida, a análise para malhas bilineares foi desenvolvida, estendendo os resultados de convergência para malhas compostas por quadriláteros convexos gerais. Foram encontradas condições suficientes, e em alguns casos também necessárias, para a obtenção das taxas de convergência ótimas na aproximação de u , ∇u e λ em malhas bilineares. Como resultado dessas condições, mostramos que os espaços do tipo $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ alcançam taxas ótimas de convergência em malhas afins porém taxas sub-ótimas em malhas bilineares. Por outro lado, os espaços do tipo $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ alcançam taxas ótimas em ambos os tipos de malhas.

Do ponto de vista computacional, utilizando a estratégia de implementação apresentada na Seção 2.3, vimos que todos os graus de liberdade associados à u_h , com exceção dos graus associados a função constante por elemento, podem ser condensados. Dessa forma os espaços $(S_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ e $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ possuem o mesmo número de graus de liberdade global, tendo custo computacional semelhante. Concluímos a partir disso que, em malhas quadrilaterais gerais, os espaços $(Q_{m+1}^+(\hat{K}), E_m(\partial\hat{K}))$ são vantajosos quando comparados aos baseados nos espaços Serendipity, uma vez que possuem custo computacional apenas levemente maior ao passo que apresentam propriedades de aproximação significativamente melhores.

Na segunda parte focamos no problema da aproximação do fluxo. Começamos apresentando uma estratégia de pós-processamento local que permite a aproximação do fluxo a partir da solução Híbrida Primal. Além de apresentar os resultados já conhecidos para a convergência dessa estratégia na norma de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, desenvolvemos também a análise de convergência na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Como fruto da análise desenvolvida, demonstramos que essa estratégia, como proposta originalmente, alcança taxas sub-ótimas de convergência em malhas bilineares na norma de $H(\text{div}, \Omega)$. Particularmente, para o caso de mais baixa ordem a estratégia não converge em $H(\text{div}, \Omega)$.

Verificamos que essa perda nas ordens de convergência é fruto das más propriedades de aproximação dos espaços de Raviart-Thomas em malhas bilineares. Assim, uma possível solução é adaptar a estratégia para utilizar espaços de aproximação em $H(\text{div}, \Omega)$ com melhores propriedades de aproximação. No Capítulo 6 apresentamos uma estratégia modificada, onde os espaços de Raviart-Thomas são substituídos pelos espaços Arnold-Boffi-Falk. Demonstramos que essa estratégia modificada importa as boas qualidades de aproximação dos espaços Arnold-Boffi-Falk, alcançando ordens ótimas de convergência nas normas de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $H(\text{div}, \Omega)$ em qualquer malha quadrilateral, afim ou bilinear.

Outro ponto que investigamos foi o uso dos espaços Serendipity em conjunto com a estratégia de recuperação do fluxo. Tanto a estratégia original, baseada nos espaços de Raviart-Thomas, quanto a estratégia modificada baseada nos espaços Arnold-Boffi-Falk, não podem ser usadas em conjunto com os espaços Serendipity. Para possibilitar o uso dos espaços Serendipity propomos uma nova modificação na estratégia, desta vez substituindo os espaços de Raviart-Thomas pelos espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini. Mostramos que essa nova modificação alcança ordens ótimas de convergência nas normas de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $H(\text{div}, \Omega)$ para malhas afins, porém em malhas bilineares a qualidade da aproximação é severamente prejudicada em ambas as normas.

Do estudo das três estratégias (a original e as duas modificações), concluímos que a estratégia baseada nos espaços Brezzi-Douglas-Fortin-Marini em conjunto com os espaços Serendipity é interessante para problemas em malhas afins, já que alcança as mesmas ordens ótimas de convergência das demais estratégias porém com um custo computacional menor. Para malhas bilineares a estratégia baseada nos espaços Arnold-Boffi-Falk é preferível, apesar do maior custo computacional, já que é a única a alcançar ordens ótimas de convergência em $H(\text{div}, \Omega)$. Aqui vale destacar que, por se tratarem de estratégias de pós-processamento local, para as três estratégias o custo computacional está fortemente concentrado na obtenção da solução Híbrida Primal (u_h, λ_h) , e não no pós-processamento em si. Dessa forma, a diferença no custo computacional total das três estratégias pode ter, efetivamente, baixo impacto no cálculo dos fluxos.

Por fim, ao longo da dissertação, realizamos diversos experimentos numéricos que auxiliaram a ilustrar os comportamentos do Método Híbrido Primal e das estratégias de recuperação do fluxo. Pelas soluções numéricas encontradas, pudemos observar que a aproximação Híbrida Primal para u é em geral descontínua na fronteira entre elementos vizinhos, ao passo que o fluxo aproximado possui componente normal contínua. Além disso, os resultados numéricos encontrados concordam em totalidade com as previsões teóricas apresentadas, corroborando para a validade da análise.

Referências

- ACHARYA, S. K.; PATEL, A. Primal hybrid method for parabolic problems. *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier, v. 108, p. 102–115, 2016. Citado na página 17.
- ACHARYA, S. K.; PORWAL, K. Primal hybrid finite element method for fourth order parabolic problems. *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier, v. 152, p. 12–28, 2020. Citado na página 17.
- ANTONIETTI, P. F.; HELTAI, L. Numerical validation of a class of mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 196, n. 45-48, p. 4505–4520, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- ARNOLD, D.; BOFFI, D.; FALK, R. Approximation by quadrilateral finite elements. *Mathematics of computation*, v. 71, n. 239, p. 909–922, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 18, 50 e 51.
- ARNOLD, D. N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 19, n. 4, p. 742–760, 1982. Citado na página 19.
- ARNOLD, D. N.; AWANOU, G. The serendipity family of finite elements. *Foundations of Computational Mathematics*, Springer, v. 11, n. 3, p. 337–344, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 53.
- ARNOLD, D. N.; BOFFI, D.; FALK, R. S. Quadrilateral H(div) finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 42, n. 6, p. 2429–2451, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 19, 59, 60, 61, 62 e 71.
- ARNOLD, D. N.; BREZZI, F.; COCKBURN, B.; MARINI, L. D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 39, n. 5, p. 1749–1779, 2002. Citado na página 19.
- BOCHEV, P. B.; DOHRMANN, C. R. A computational study of stabilized, low-order C0 finite element approximations of Darcy equations. *Computational Mechanics*, Springer, v. 38, n. 4-5, p. 323–333, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- BOFFI, D.; BREZZI, F.; FORTIN, M. et al. *Mixed finite element methods and applications*. [S.l.]: Springer, 2013. v. 44. Citado 4 vezes nas páginas 59, 60, 62 e 71.
- BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, n. S4, p. 1–26, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 34.
- BREZZI, F.; DOUGLAS, J.; MARINI, L. D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 47, n. 2, p. 217–235, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- BREZZI, F.; FORTIN, M. *Mixed and hybrid finite element methods*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 15. Citado na página 19.

- BREZZI, F.; FORTIN, M.; MARINI, L. D. et al. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 21, n. 4, p. 581–604, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 19, 58, 59 e 62.
- BREZZI, F.; HUGHES, T. J.; MARINI, L. D.; MASUD, A. Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 22, n. 1-3, p. 119–145, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- CASTILLO, P. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic pdes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 24, n. 2, p. 524–547, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- CHOU, S.-H.; KWAK, D. Y.; KIM, K. Y. Flux recovery from primal hybrid finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 40, n. 2, p. 403–415, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 20, 58, 63, 64 e 66.
- CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. [S.l.]: SIAM, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.
- CORDES, C.; KINZELBACH, W. Continuous groundwater velocity fields and path lines in linear, bilinear, and trilinear finite elements. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 28, n. 11, p. 2903–2911, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 58.
- CORREA, M.; LOULA, A. Stabilized velocity post-processings for Darcy flow in heterogeneous porous media. *Communications in numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 23, n. 6, p. 461–489, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 58.
- _____. Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 17-18, p. 1525–1540, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- CORREA, M. R.; RODRIGUEZ, J. C.; FARIAS, A. M.; SIQUEIRA, D. de; DEVLOO, P. R. Hierarchical high order finite element spaces in $H(\text{div}, \Omega) \times H_1(\Omega)$ for a stabilized mixed formulation of Darcy problem. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 80, n. 5, p. 1117–1141, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 58.
- CRUMPTON, P.; SHAW, G.; WARE, A. Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 116, n. 2, p. 343–358, 1995. Citado na página 81.
- DURLOFSKY, L. J. Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 30, n. 4, p. 965–973, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 58.
- GIRAULT, V.; RAVIART, P.-A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 5. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 97.
- HARDER, C.; PAREDES, D.; VALENTIN, F. A family of multiscale hybrid-mixed finite element methods for the Darcy equation with rough coefficients. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 245, p. 107–130, 2013. Citado na página 32.

- HUGHES, T. J.; MASUD, A.; WAN, J. A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 195, n. 25-28, p. 3347–3381, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- LOULA, A. F.; CORREA, M.; GUERREIRO, J.; TOLEDO, E. On finite element methods for heterogeneous elliptic problems. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 45, n. 25-26, p. 6436–6450, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- LOULA, A. F.; ROCHINHA, F. A.; MURAD, M. A. Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 128, n. 3-4, p. 361–381, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 58.
- MASUD, A.; HUGHES, T. J. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 191, n. 39-40, p. 4341–4370, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- MILNER, F. A. A primal hybrid finite element method for quasilinear second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 47, n. 1, p. 107–122, 1985. Citado na página 17.
- MIRANDA, J. C. R. et al. Espaços hierárquicos para uma formulação de elementos finitos mista estabilizada do problema de Darcy. [sn], 2017. Citado na página 18.
- PAREDES, D. *Novos Métodos de Elementos Finitos Multi-Escalas: Teoria e Aplicações*. Tese (Doutorado) — PhD thesis. Laboratório Nacional de Computação Científica., 2013. Citado na página 32.
- PARK, E.-J. A primal hybrid finite element method for a strongly nonlinear second-order elliptic problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Wiley Online Library, v. 11, n. 1, p. 61–75, 1995. Citado na página 17.
- PIAN, T. H. Finite element formulation by variational principles with relaxed continuity requirements. In: *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. [S.l.]: Elsevier, 1972. p. 671–687. Citado na página 17.
- PIAN, T. H.; TONG, P. Basis of finite element methods for solid continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 3–28, 1969. Citado na página 17.
- QUARTERONI, A. Primal hybrid finite element methods for 4th order elliptic equations. *Calcolo*, Springer, v. 16, n. 1, p. 21–59, 1979. Citado na página 17.
- RAVIART, P.-A.; THOMAS, J. Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. *Mathematics of computation*, v. 31, n. 138, p. 391–413, 1977. Citado 14 vezes nas páginas 17, 20, 24, 25, 26, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 50, 52 e 97.
- RAVIART, P.-A.; THOMAS, J.-M. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In: *Mathematical aspects of finite element methods*. [S.l.]: Springer, 1977. p. 292–315. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 58, 59 e 60.

SIQUEIRA, D. D.; DEVLOO, P. R.; GOMES, S. M. A new procedure for the construction of hierarchical high order $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$ finite element spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 240, p. 204–214, 2013. Citado na página 19.

WHEELER, M. F. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 15, n. 1, p. 152–161, 1978. Citado na página 19.

APÊNDICE A – Extensão do Lema 10

Neste apêndice apresentamos e demonstramos uma versão mais geral do Lema 10 de (RAVIART; THOMAS, 1977a) que inclui mapeamentos bilineares.

Teorema 16. *Sejam os espaços X_h e M_h construídos como descrito na Seção 2.2 associados a uma discretização \mathcal{T}_h regular segundo o critério (2.1), então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\forall \mu_h \in M_h, \quad \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{|||v_h|||_X} \geq \alpha |||\mu_h|||_M.$$

Para a demonstração do teorema será necessário o uso das desigualdades (2.13) e (2.14) demonstradas em (GIRAULT; RAVIART, 2012). Fazendo uso desses limitantes a demonstração do resultado se dá de forma análoga à demonstração do Lema 10 de (RAVIART; THOMAS, 1977a).

Demonstração. Para todo $K \in \mathcal{T}_h$ e todo $\mu \in H^{-1/2}(\partial K)$, definimos

$$|||\mu|||_{\partial K} = \sup_{w \in H^1(K)} \frac{\int_{\partial K} \mu w \, ds}{|||w|||_{1,K}}. \quad (\text{A.1})$$

A condição (3.16) nos diz que existe uma constante $\hat{\alpha} > 0$ tal que

$$\forall \hat{\mu} \in \hat{S}, \quad \sup_{\hat{w} \in \hat{U}} \frac{\int_{\partial \hat{K}} \hat{\mu} \hat{w} \, d\hat{s}}{|||\hat{w}|||_{1,\hat{K}}} \geq \hat{\alpha} |||\hat{\mu}|||_{\partial \hat{K}}. \quad (\text{A.2})$$

Seja $\mu_h \in M_h$, a primeira parte da demonstração consiste em mostrar que para cada $K \in \mathcal{T}_h$, existe uma função $v \in U_K$ tal que

$$\int_{\partial K} \mu_h v \, ds \geq \hat{\alpha} \frac{C}{\sigma_K^3} |||\mu_h|||_{\partial K} |||v|||_{1,K}. \quad (\text{A.3})$$

Considere F_K um isomorfismo bilinear tal que $F_K(\hat{K}) = K$. Segue que

$$\int_{\partial K} \mu_h v \, ds = \int_{\partial \hat{K}} \hat{\lambda} \hat{v} \, d\hat{s}, \quad (\text{A.4})$$

onde $\hat{v} = v \circ F_K \in \hat{U}$ e $\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}$. Então escolhemos $\hat{v} \in \hat{U}$ tal que

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{\lambda} \hat{v} \, d\hat{s} \geq \hat{\alpha} |||\hat{\lambda}|||_{\partial \hat{K}} |||\hat{v}|||_{1,\hat{K}}.$$

Agora usando as limitações (2.13) e (2.14) temos que

$$\begin{aligned} |||v|||_{1,K}^2 &= |v|_{1,K}^2 + h_K^{-2} |||v|||_{0,K}^2 \leq \|JF_K\|_{\infty,\hat{K}} (\|DF_K^{-1}\|_{\infty,K}^2 |\hat{v}|_{1,\hat{K}} + h_K^{-2} |||\hat{v}|||_{0,\hat{K}}) \\ &\leq C_2 h_K^2 \left(C_3^2 \frac{h_K^2}{\rho_K^4} |\hat{v}|_{1,\hat{K}} + h_K^{-2} |||\hat{v}|||_{0,\hat{K}} \right), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$|||v|||_{1,K} \leq C\sigma_K^2 |||\hat{v}|||_{1,\hat{K}} \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} |||\hat{w}|||_{1,\hat{K}} &\leq \|JF_K^{-1}\|_{\infty,K} (\|DF_K\|_{\infty,\hat{K}}^2 |w|_{1,K} + \hat{h}_K^{-2} \|w\|_{0,K}) \\ &\leq C_4 \frac{1}{\rho_K^2} (C_1^2 h_K^2 |w|_{1,K} + \hat{h}_K^{-2} \|w\|_{0,K}), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$|||\hat{w}|||_{1,\hat{K}} \leq C\sigma_K |||w|||_{1,K} \quad (\text{A.6})$$

Agora usando (A.4), (A.5) e (A.6) e a definição da norma $|||\cdot|||_{\partial K}$ segue que

$$|||\mu_h|||_{\partial K} = \sup_{w \in H^l(K)} \frac{\int_{\partial \hat{K}} \hat{\lambda} \hat{w} \, ds}{|||w|||_{1,K}} \leq C\sigma_K |||\hat{\lambda}|||_{\partial \hat{K}}. \quad (\text{A.7})$$

Por fim a desigualdade (A.3) segue das equações (A.4) a (A.7).

Para completar a demonstração vamos mostrar que a desigualdade que desejamos demonstrar é consequência de (A.3) tomando

$$\alpha = \frac{C\hat{\alpha}}{\sigma}$$

Seja $w \in H^l(K)$. Normalizando v em (A.3), existe função $v \in U_K$ tal que

$$-\int_{\partial K} \mu_h v \, ds \geq -\alpha \int_{\partial K} \mu_h w \, ds, \quad |||v|||_{1,K} = |||w|||_{1,K}.$$

Logo, fazendo esse processo para todo $K \in \mathcal{T}_h$ segue que, dada uma função $w \in X$, existe uma função $v_h \in X_h$ tal que

$$\frac{b(v_h, \mu_h)}{|||v_h|||_X} \geq \alpha \frac{b(w, \mu_h)}{|||w|||_X}$$

Tomando o supremo de ambos os lados segue que

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{|||v_h|||_X} \geq \alpha \sup_{w \in X} \frac{b(w, \mu_h)}{|||w|||_X} = \alpha |||\mu_h|||_M.$$

□