

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DARWIN CASTILLO HUAMANÍ

Otimização topológica de estruturas com múltiplos materiais

Campinas

2020

Darwin Castillo Huamaní

Otimização topológica de estruturas com múltiplos materiais

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Darwin Castillo Huamaní e orientada pelo Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C278o Castillo Huamaní, Darwin, 1982-
Otimização topológica de estruturas com múltiplos materiais / Darwin
Castillo Huamaní. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização topológica. 2. Método SIMP. 3. Otimização não-linear. I.
Gomes Neto, Francisco de Assis Magalhães, 1964-. II. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Topological optimization of multi-material structures

Palavras-chave em inglês:

Topology optimization

SIMP method

Nonlinear programming

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto [Orientador]

Sandra Augusta Santos

Roberto Andreani

Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno

Luiz Leduino de Salles Neto

Data de defesa: 28-02-2020

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9545-7403>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/5964214445600006>

**Tese de Doutorado defendida em 28 de fevereiro de 2020 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO DE ASSIS MAGALHÃES GOMES NETO

Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). LUÍS FELIPE CESAR DA ROCHA BUENO

Prof(a). Dr(a). LUIZ LEDUINO DE SALLES NETO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo apoio na minha educação e pela confiança em todas as decisões da minha vida, dando força para não deixar inacabado os objetivos delineados em minha vida profissional.

Aos meus irmãos, Manuel e Isabel, pelo suporte e amor fraterno durante toda minha vida.

Ao meu orientador Francisco, agradeço a enorme confiança depositada em mim, a imensa disposição e paciência em resolver minhas dúvidas durante o doutorado.

Ao meus amigos da UNICAMP, por compartilhar momentos de felicidade, amizade e sinceridade. Principalmente, David, Carlos, Jesus, Julio e Claudia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Um problema clássico na otimização topológica é a minimização da flexibilidade de uma estrutura estática sujeita a um carregamento externo, com um volume predefinido. O método das densidades ou *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) foi usado para resolver esse problema em conjunto com alguns métodos de otimização não linear. No caso de o problema em questão ter múltiplos materiais, generalizações do método SIMP podem ser adotados para encontrar a solução do problema, incrementando o número de variáveis de projeto para representar os materiais. Recentemente, o método SIMP ordenado foi introduzido para resolver o problema de otimização topológica com múltiplos materiais sem adicionar variáveis para representar os materiais. Outra estratégia adotada que utiliza a generalização do método SIMP é o algoritmo da fase ativa alternada. O objetivo desta tese de doutorado é obter a topologia ótima de estruturas com múltiplos materiais usando um novo algoritmo da fase ativa alternada. O presente algoritmo descompõe o problema de otimização com múltiplos materiais numa série de subproblemas de otimização topológica com dois materiais que são resolvidos de forma inexata, de maneira sequencial, por algum método de otimização não linear. As coordenadas da solução inexata são atualizadas através da estratégia do método de descida coordenado por blocos, conhecido como método de Gauss - Seidel. As principais características desse algoritmo são sua fácil implementação e a eficiência para resolver problemas de otimização topológica de grande porte com múltiplos materiais. Os resultados numéricos apresentados mostram o bom desempenho do algoritmo para resolver problemas de otimização topológica em duas dimensões.

Palavras-chave: Otimização Topológica com múltiplos materiais, Método SIMP, Otimização não linear.

Abstract

A classical problem in topology optimization is the minimization of the compliance of a static structure subject to an external loading, with a predefined volume. The Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) method was used to solve this problem in combination with some nonlinear optimization methods. In case the problem has multiple materials, generalizations of the SIMP method can be adopted to find the solution of the problem by increasing the number of design variables to represent the materials. Recently, the ordered SIMP method was introduced to solve multimaterial topology optimization problems without additional variables to represent the materials. Another strategy that uses a generalization of the SIMP method is the alternating active phase algorithm. The objective of this doctoral thesis is to obtain the solution of multimaterial topology problems using a new alternating active phase algorithm. This algorithm splits the multimaterial topology optimization into a series of topology optimization subproblems with two materials that are inexactly solved in a sequential manner by some nonlinear optimization method. The coordinates of the inexact solution are updated using the block coordinate descend method, also known as the Gauss - Seidel method. The main characteristics of this algorithm are its easy implementation and its efficiency to solve large multimaterial topology optimization problems. The numerical results show the success of the algorithm for the solution of topology optimization problems in two dimensions.

Keywords: Multi-material Topology Optimization, SIMP method, Nonlinear Programming.

Sumário

	Introdução	10
1	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	12
1.1	Otimização topológica de uma estrutura	12
1.1.1	Formulação do problema da minimização da flexibilidade	12
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	15
2.1	Relação entre tensão e deformação	15
2.2	Relação entre deslocamento e deformação	15
2.3	Elementos finitos bidimensionais planos	16
2.4	Interpolação dos deslocamentos	17
2.5	Matriz de rigidez e o vetor de carregamento do elemento finito	19
2.6	Montagem da matriz de rigidez global	20
3	O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA NO DOMÍNIO DISCRETIZADO	23
3.1	Método das densidades	23
3.2	Formulação do Problema	24
3.3	Problema de seleção de múltiplos materiais	25
3.4	Método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund)	25
3.5	Método SIMP com múltiplas fases (Cai <i>et al.</i> [12])	26
3.6	Formulação do problema com múltiplos materiais	27
3.7	Método SIMP ordenado	27
3.8	Tabuleiro de xadrez	29
3.8.1	Filtro de Sensibilidade	29
3.8.2	Filtro da média ponderada das densidades	29
4	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM	31
4.1	Método das Assíntotas Móveis	31
4.1.1	Sequência de subproblemas de aproximação convexa	32
4.2	Método dual para resolver os subproblemas convexos	35
4.3	Problema aumentado	37
4.3.1	Métodos de pontos interiores para resolver os subproblemas convexos	38
4.4	Condições de otimalidade relaxadas para o subproblema	40
4.4.1	Uma direção de Newton para as condições de otimalidade	41

4.4.2	Busca linear na direção de Newton	43
4.5	Programação Linear Sequencial	44
4.6	Método de Gradiente Espectral Projetado não Monótono	48
4.7	Passo Espectral e Busca Linear não Monótona	49
4.8	Projeção sobre o conjunto factível	50
5	ALGORITMOS DE FASE ATIVA ALTERNADA PARA PROBLE- MAS COM MÚLTIPLOS MATERIAIS	52
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	56
6.1	Descrição dos problemas testados	56
6.2	Comparação dos métodos de otimização	58
6.2.1	Método SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)	59
6.2.2	Método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund)	62
6.2.3	Método SIMP com múltiplas fases (Cai <i>et al.</i> [12])	65
6.2.4	Comparação entre as formulações para os problemas de OT	68
6.2.5	Efeito do ponto inicial	70
6.2.6	Efeito do número máximo de iterações internas para os métodos da fase ativa alternada	71
6.2.7	Efeito do raio do filtro	75
6.2.8	Efeito do tamanho da malha	78
6.2.9	Fase ativa alternada versão Jacobi	85
6.3	Método SIMP ordenado	87
6.3.1	Efeito do raio do filtro	89
7	CONCLUSÕES	92
	REFERÊNCIAS	94

Introdução

A otimização topológica (OT) compreende um conjunto de métodos computacionais que busca obter a distribuição ótima de um material dentro de um domínio, considerando condições de fronteira, restrições de projeto e as propriedades do material. Desde o trabalho do Bendsoe [4], a otimização topológica tem sido amplamente utilizada nos problemas de engenharia, como, por exemplo, projetos aeroespaciais [33], fluxo de fluido [8] e termoelasticidade [26].

Um problema clássico da OT é a minimização da flexibilidade de uma estrutura estática sujeita a um carregamento externo, com condições de fronteira e uma restrição de volume. De acordo com Gomes e Senne [16], uma vez discretizado o domínio pelo método de elementos finitos, é preciso decidir se um elemento da partição conterá material ou não. A função binária que representa a seleção do material tem valor igual a um se o elemento da partição contém material e zero se ele não contém material. Tomando por base essa ideia, o problema de otimização topológica torna-se um problema de otimização não linear com variáveis discretas. Entretanto, dada a dificuldade de se resolver problemas de otimização de grande porte com variáveis discretas, a função binária é substituída por uma função contínua com valores entre 0 e 1, e o problema é transformado em um problema de otimização não linear contínua, embora os valores intermediários, $0 < x_e < 1$, não representem materiais que são usualmente empregados na construção da estrutura ótima.

Para superar isso, Bendsoe [4] apresentou o método das densidades, ou *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*, no qual se substitui a variável x_e , também conhecida como “densidade do material”, por uma potência x_e^p , com valores adequados de $p > 1$ [30], para penalizar os valores intermediários entre zero e um no problema de otimização não linear.

A busca pela melhor distribuição de vários materiais dentro de um domínio, satisfazendo condições de otimalidade do projeto, é uma área de pesquisa recente chamada otimização topológica com múltiplos materiais [23, 43, 41, 25]. Neste trabalho, consideramos extensões do método SIMP para resolver o problema de otimização topológica com múltiplos materiais.

Quando se emprega a otimização topológica para a obtenção de uma estrutura com dois materiais, a função interpoladora é definida por $\mathbf{E}_e(x_e) = x_e^p \mathbf{E}_1 + (1 - x_e^p) \mathbf{E}_2$, em que $x_e \in [0, 1]$ e \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 correspondem aos módulos elásticos dos materiais. Essa formulação permite que se trabalhe com um único material, bastando para isso que se utilize um módulo elástico artificial, $\mathbf{E}_2 = 10^{-3}$, para representar o vazio. Desejando-se

trabalhar com dois materiais e o vazio, a função interpoladora dos módulos elásticos [5] pode ser representada por $\mathbf{E}_e(x_{e1}, x_{e2}) = x_{e1}^{p_1}[x_{e2}^{p_2}\mathbf{E}_1 + (1 - x_{e2})^{p_2}\mathbf{E}_2]$.

Na otimização topológica de uma estrutura com múltiplos materiais, Hvejsel e Lund [22] generalizaram a função interpoladora do método SIMP para uma quantidade arbitrária de materiais, incrementando o número de variáveis de projeto. Tavakoli e Mohseni [37], introduziram um algoritmo da fase ativa alternada para resolver o problema de otimização com múltiplos materiais. Yin e Ananthasuresh [42] utilizaram um esquema de interpolação de múltiplos materiais usando uma função pico, sem incrementar o número das variáveis do projeto. Zuo e Saitou [45] propuseram o SIMP ordenado, um método que permite que se trabalhe com múltiplos materiais sem a introdução de novas variáveis para representar esses materiais, mas usando uma função potência interpoladora definida por partes. Cai *et al.* [12] propuseram um método SIMP modificado para resolver problemas de otimização de estruturas com múltiplos materiais bi-módulos. Nesta tese, nossa contribuição foi desenvolver um novo algoritmo de fase ativa alternada com menor custo computacional que o proposto por Tavakoli e Mohseni [37]. O novo método resolve m subproblemas de OT de um material por iteração em vez de resolver $m(m - 1)/2$ subproblemas de OT de dois materiais, como proposto por Tavakoli e Mohseni [37], obtendo uma redução do custo computacional do algoritmo. Além disso, a convergência do novo algoritmo não depende da redução do raio do filtro. Essa redução do raio do filtro foi usada heurísticamente na convergência do método Tavakoli e Mohseni [37], começando com um raio do filtro maior que 3. Começar com um raio muito grande pode aumentar o custo computacional em problemas de OT de grande porte.

No capítulo 1, descrevemos a formulação do problema da minimização da flexibilidade de uma estrutura estática. No capítulo 2, apresentamos o método dos elementos finitos retangulares para resolver numericamente a equação de equilíbrio estático de uma estrutura. No capítulo 3, mostramos o problema de otimização topológica no domínio discretizado. No capítulo 4, descrevemos os Métodos da Programação Linear Sequencial, das Assíntotas Móveis e do Gradiente Espectral Projetado Não Monótono. No Capítulo 5, apresentamos os Algoritmos da Fase Ativa Alternada para problemas de otimização topológica de estruturas com múltiplos materiais. No capítulo 6, apresentamos os resultados numéricos das diferentes formulações do problema de OT de uma estrutura com múltiplos materiais, e fazemos um análise comparativa de desempenho dos Métodos da Programação Linear Sequencial, das Assíntotas Móveis e do Gradiente Espectral Projetado Não Monótono, combinando-os com os Algoritmos da Fase Ativa Alternada.

1 Otimização topológica

A otimização topológica estrutural (OT) consiste na aplicação de métodos computacionais para projetar uma estrutura que seja a mais rígida possível, satisfazendo certas condições, como, por exemplo, um limite superior para a quantidade de material. Para obter a estrutura ótima, a OT distribui o material dentro de um domínio atendendo às condições de fronteira e às restrições de projeto, além das propriedades do material. Outras estratégias de otimização que são usadas para encontrar a estrutura mais rígida possível são, por exemplo, a *otimização paramétrica* [39] e a *otimização de forma* [21]. Na *otimização paramétrica*, a partir de uma estrutura previamente definida, procura-se otimizar as variáveis do projeto, como, por exemplo, a área da seção transversal ou a espessura da estrutura. Na *otimização de forma*, procura-se a otimizar o contorno da estrutura. Para isto, a fronteira pode ser aproximada por curvas paramétricas do tipo *splines*, que constituem as variáveis do projeto. Na otimização topológica, à diferença das duas estratégias apresentadas acima, não é preciso conhecer previamente o formato da estrutura, bastando definir apenas as dimensões do domínio, os carregamentos aplicados e os pontos de apoio.

1.1 Otimização topológica de uma estrutura

Nesta seção, estudamos o problema de máxima rigidez de uma estrutura sujeita a um carregamento, à condição de equilíbrio estático e a uma restrição do volume disponível. Como a rigidez de uma estrutura está associada à flexibilidade média, podemos formular o problema em questão como um problema de minimização da flexibilidade, atendendo-se à condição de volume disponível.

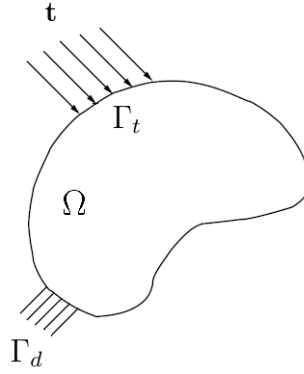
1.1.1 Formulação do problema da minimização da flexibilidade

Suponha que se deseje definir um corpo elástico em um domínio Ω . Suponha também que o corpo seja mantido fixo na região Γ_d e sofra a ação de um carregamento \mathbf{t} , aplicado na região Γ_t do corpo, conforme mostra a Figura 1. Como consequência do carregamento \mathbf{t} aplicado na região Γ_t , obtemos um campo de deslocamentos $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ tal que as componentes de \mathbf{u} pertencem ao conjunto de funções admissíveis definido por

$$V = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d, i = 1, 2\},$$

em que $H^1(\Omega)$ denota o espaço de funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\left[\int_{\Omega} f^2 d\Omega \right]^{1/2} < \infty \text{ e } \left[\int_{\Omega} \|\nabla f\|^2 d\Omega \right]^{1/2} < \infty.$$

Figura 1 – Corpo submetido ao carregamento \mathbf{t}

O trabalho externo associado ao carregamento t , ou flexibilidade média, é definido por

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u} \in V \quad (1.1)$$

O trabalho interno associado à deformação quando aplicamos o carregamento t é definido pela forma bilinear:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (1.2)$$

em que ε é um tensor de deformações e \mathbf{C} é um tensor de elasticidade simétrico relacionado às propriedades do material da estrutura. Usando as definições (1.1) e (1.2), a condição de equilíbrio estático do corpo é estabelecida pela equação

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1.3)$$

A energia potencial do corpo é definida por

$$\Pi = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in V. \quad (1.4)$$

A condição de equilíbrio estático é equivalente à solução do problema de minimização da energia potencial do corpo. A solução que minimiza energia potencial é obtida igualando-se a zero a primeira variação do funcional Π .

A construção da estrutura deve atender a uma quantidade limitada de volume. Portanto, na formulação do problema da minimização, impomos uma restrição que estabelece o volume máximo Ω_{\max} que essa estrutura deve ter, ou seja, exigimos que

$$\int_{\Omega} \rho(x) \, d\Omega \leq \Omega_{\max}, \quad (1.5)$$

em que $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é a função densidade e Ω_{\max} representa uma fração do volume total da estrutura. Assim, a formulação do problema da minimização da flexibilidade usando a condição de equilíbrio (1.3) e a restrição do volume (1.5) é dada por

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho} \quad & L(\mathbf{u}) \\
 \text{s a} \quad & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{mat} \\
 & 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

em que L é a flexibilidade da estrutura, a equação $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in V$, representa a condição de equilíbrio estático do corpo, a integral $\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega$ é o volume da estrutura e Ω_{mat} é o limitante do volume.

2 Método dos elementos finitos

Neste capítulo, apresentamos de uma forma simples o *Método dos Elementos Finitos* (MEF) (veja, por exemplo, [3, 44, 14]), que é usado para resolver numericamente a equação do equilíbrio estático de uma estrutura. Nesse trabalho, suporemos que a espessura da estrutura é constante e muito pequena, de modo que podemos considerar que o problema é bidimensional. Abordamos inicialmente duas relações que ocorrem em cada ponto do corpo, que são a relação entre tensão e deformação e a relação entre deslocamento e deformação. Na sequência, apresentamos o *método dos elementos finitos* retangulares.

2.1 Relação entre tensão e deformação

Doravante, suporemos que o tipo de material que compõe a estrutura é elástico, linear e isotrópico, ou seja, as propriedades do material não dependem da direção. Além disso, a estrutura utilizada deve cumprir a condição de estado plano de tensão, isto é, a espessura do corpo deve ser muito pequena se comparada com suas outras dimensões. Considerando todas essas propriedades, bem como a *Lei de Hooke* [18], temos a seguinte equação matricial que relaciona a tensão $\boldsymbol{\sigma}$ à deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ em um ponto da estrutura:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = E \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = E\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

em que $E > 0$ é o módulo de *Young* (ou módulo de elasticidade) do material da estrutura e $0 < \nu < 1$ é o respectivo coeficiente de *Poisson*, definido como a razão entre as deformações lateral e axial do material.

2.2 Relação entre deslocamento e deformação

A relação entre deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e deslocamento \mathbf{u} em cada ponto da estrutura é expressa por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2.2)$$

2.3 Elementos finitos bidimensionais planos

O *Método dos Elementos Finitos* (MEF) [1] divide um domínio contínuo Ω em um número finito de subdomínios Ω_e denominados elementos finitos. Neste trabalho, o tipo de elemento finito usado na construção da malha é retangular e contém 4 nós localizados em seus vértices, com dois graus de liberdade por nó, isto é, deslocamento nodal na horizontal e na vertical. Deste modo, o MEF gera uma malha retangular em que os retângulos Ω_e são interligados pelos nós, como se vê na Figura 2b. Note que, em cada ponto do elemento Ω_e , ocorrem deslocamentos decorrentes do carregamento externo aplicado à estrutura. Esses deslocamentos devem ser aproximados por uma função interpoladora. Quanto maior o número de elementos finitos, melhor será a aproximação obtida para o problema estático, embora o custo computacional também aumente.

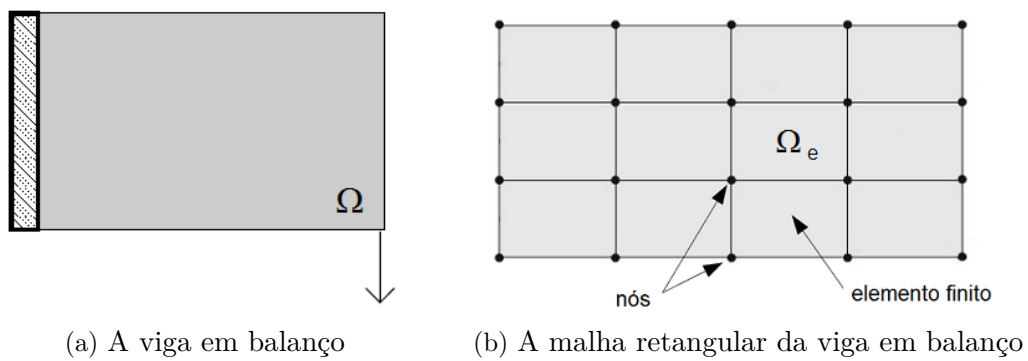


Figura 2 – Discretização da Viga em balanço usando o método dos elementos finitos com elementos retangulares.

2.4 Interpolação dos deslocamentos

De acordo com Assan [1], os deslocamentos que ocorrem no elemento Ω_e , que surgem pela aplicação de forças externas à estrutura, podem ser aproximados por interpolação polinomial. Os nós são usados para criar funções interpoladoras, que são descritas pelas variáveis x e y cujo sistema de referência está situado no nó 1 do elemento finito, conforme mostrado na Figura 3a. Tais funções interpoladoras são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy, \\ v(x, y) &= c_5 + c_6x + c_7y + c_8xy, \end{aligned}$$

ou, em relação aos deslocamentos nodais, por

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i, \end{aligned}$$

sendo as funções de forma:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{y}{h}\right), \\ N_2(x, y) &= \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{x}{l}, \\ N_3(x, y) &= \frac{xy}{lh}, \\ N_4(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{y}{h}. \end{aligned}$$

A formulação fica mais simples se consideramos o sistema de coordenadas no baricentro do elemento finito Ω_e , conforme a Figura 3b. Neste caso, as funções de forma para os deslocamentos u e v são:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta), \end{aligned}$$

sendo

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{y}{b}. \quad (2.3)$$

Escrevendo os deslocamentos na forma matricial, temos

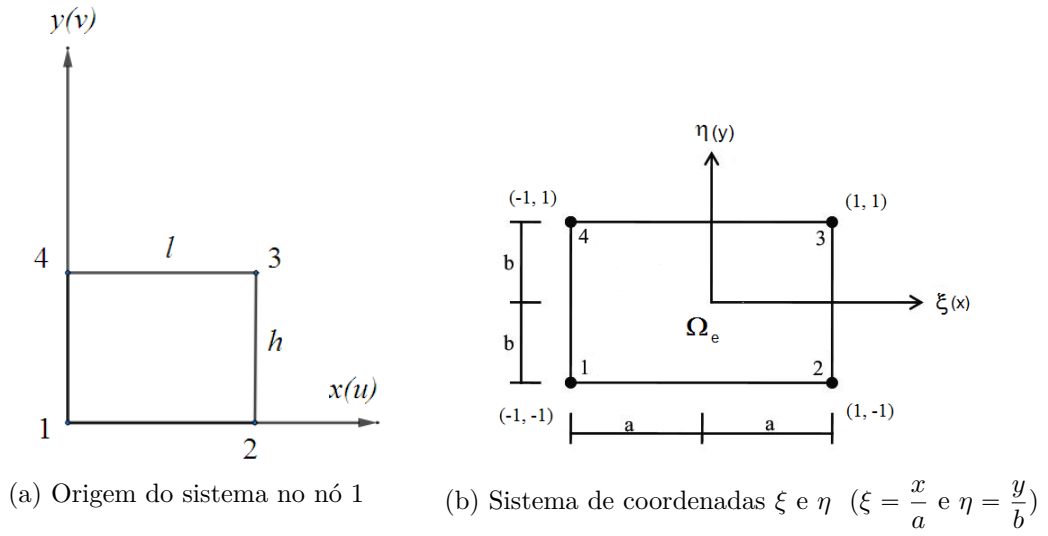


Figura 3 – Representações do elemento finito retangular

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{w}. \quad (2.4)$$

De (2.4) e (2.2), encontramos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{w}, \quad (2.5)$$

em que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & -\frac{1+\eta}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & -\frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\eta}{a} \end{bmatrix}.$$

2.5 Matriz de rigidez e o vetor de carregamento do elemento finito

A energia potencial de um elemento Ω_e é dada por

$$\Pi_e = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}^{(e)}, \mathbf{u}^{(e)}) - L(\mathbf{u}^{(e)}), \quad (2.6)$$

em que $\mathbf{u}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos do elemento, a é a forma bilinear associada ao trabalho interno devido à deformação do elemento e L é a forma linear associada ao trabalho externo realizado pela força \mathbf{b} aplicada ao elemento. Considerando que o corpo está em equilíbrio estático, a minimização da energia potencial é obtida da anulação da primeira variação do funcional Π_e , ou seja,

$$\delta\Pi_e = \int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T C \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta\mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e = 0$$

ou

$$\int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T C \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e = \int_{\Gamma_e} \delta\mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e, \quad (2.7)$$

em que Γ_e denota a fronteira do elemento. De (2.4) pode-se escrever que a variação dos deslocamentos é dada por

$$\delta\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \delta\mathbf{w}^{(e)} \quad (2.8)$$

e, de (2.5), pode-se definir a primeira variação das deformações por

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta\mathbf{w}^{(e)}. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.7), obtemos

$$\delta\mathbf{w}^{(e)T} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \mathbf{w}^{(e)} = \delta\mathbf{w}^{(e)T} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e. \quad (2.10)$$

Considerando que os deslocamentos virtuais $\delta\mathbf{w}^{(e)}$ são arbitrários e usando (2.1), a equação (2.10) se torna

$$\left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \mathbf{w}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e \quad (2.11)$$

ou

$$\mathbf{E} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \mathbf{w}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e, \quad (2.12)$$

ou ainda

$$\mathbf{E}^{(e)} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (2.13)$$

em que $\mathbf{K}^{(e)}$ é denominada matriz de rigidez do elemento, $\mathbf{w}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento e $\mathbf{F}^{(e)}$ é o vetor de forças nodais equivalentes do elemento. Considerando

constante a espessura do elemento finito, h_e , podemos reescrever a matriz de rigidez do elemento como

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h_e dA_e, \quad (2.14)$$

em que A_e é a área da maior face do elemento finito retangular. De (2.3), obtemos

$$dx dy = ab d\xi d\eta. \quad (2.15)$$

Assim,

$$\mathbf{K}^{(e)} = abh_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta. \quad (2.16)$$

Note que na integral dupla (2.16), a matriz \mathbf{B} depende de ξ e η . Uma alternativa para calcular essa integral é o uso do método de integração de Gauss, que consiste em usar uma aproximação do tipo

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j,$$

em que n_x e n_y representam, respectivamente, o número de pontos usados para aproximar a integral em ξ e em η , e w_i e w_j são os pesos para cada ponto dessa aproximação.

2.6 Montagem da matriz de rigidez global

Uma vez determinada a matriz de rigidez de cada elemento, definimos a matriz de rigidez de todo o domínio discretizado, que chamamos de matriz de rigidez global. Essa matriz é obtida a partir da superposição de matrizes dos elementos.

Para efetuar essa superposição de matrizes, devemos adotar alguma convenção para a numeração dos graus de liberdade associados a cada elemento. Neste trabalho, a numeração dos graus da liberdade dos elementos começa no canto superior esquerdo do domínio e prossegue por colunas, de cima para abaixo, de modo que o último elemento seja aquele localizado no canto inferior direito do domínio.

Na Figura 4, ilustramos a convenção para a numeração do domínio discretizado. O número de um elemento é apresentado no centro deste. À direita de cada nó, está representada a numeração dos seus graus de liberdade. Por exemplo, o elemento 1 está relacionado aos graus de liberdade 3, 4, 11, 12, 9, 10, 1 e 2 (exatamente nessa ordem, começando no canto inferior esquerdo do elemento e prosseguindo no sentido anti-horário).



Figura 4 – Exemplo de discretização de um domínio retangular.

A matriz de rigidez global é denotada $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2(n_n) \times 2(n_n)}$, em que n_n é número total de nós da malha de elementos finitos. Para montá-la, define-se, para cada elemento e , uma matriz $\mathbf{P}_e \in \mathbb{R}^{2(n_n) \times 8}$, que é formada pelas colunas da matriz identidade $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2(n_n) \times 2(n_n)}$ de tal forma que

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{E}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_e,$$

em que $\hat{\mathbf{K}}_e = \mathbf{P}_e \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{P}_e^T$, $e = 1, \dots, nel$. Por exemplo, como o elemento 5 da Figura 4 está conectado aos graus de liberdade 13, 14, 21, 22, 19, 20, 11, e 12, nessa ordem, a matriz \mathbf{P}_5 , associada a esse elemento, será dada por

$$\mathbf{P}_5 = [\mathbf{I}_{13} \quad \mathbf{I}_{14} \quad \mathbf{I}_{21} \quad \mathbf{I}_{22} \quad \mathbf{I}_{19} \quad \mathbf{I}_{20} \quad \mathbf{I}_{11} \quad \mathbf{I}_{12}],$$

em que \mathbf{I}_i representa a i -ésima coluna da matriz identidade \mathbf{I} .

Usando essa convenção de numeração para os elementos, expressamos a equação de equilíbrio associada a toda a estrutura como

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (2.17)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2(n_n)}$ é o vetor global de deslocamentos nodais de toda a estrutura e $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2(n_n)}$ é o vetor global de forças nodais equivalentes. O vetor de forças nodais é obtido pela superposição dos vetores de forças nodais equivalentes $\mathbf{F}^{(e)}$, de maneira semelhante àquela feita para a matriz \mathbf{K} , utilizando rigorosamente a mesma convenção para os índices definidos acima.

A introdução dos apoios no problema OT, permite que a estrutura permaneça em equilíbrio estático quando uma força é aplicada. Tais apoios removem as componentes de \mathbf{w} relativas aos deslocamentos restritos, bem como as restrições correspondentes, de modo que a matriz de rigidez global \mathbf{K} , que é simétrica, se torne uma matriz definida positiva. Com essa propriedade da matriz ser definida positiva, podemos aplicar o método de fatoração de Cholesky para resolver o sistema (2.17).

Quando aplicamos o método de Cholesky à matriz \mathbf{K} , que é esparsa, aparecem muitas entradas diferentes de zero no fator triangular, fazendo com que esse fator não seja tão esparsa. Para superar isso, usamos o método da permutação de mínimo grau [40], que consiste em reordenar as linhas e colunas da matriz de forma heurística para obter um fator de Cholesky esparsa. Nesta tese, usamos o método de mínimo grau antes de resolver o sistema (2.17).

3 O problema de otimização topológica no domínio discretizado

Nesta seção, estudamos o método das densidades ou *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)* [4], que é usado para resolver numericamente o problema da minimização da flexibilidade de uma estrutura estática sujeita a uma carga, com um volume predefinido. Além disso, apresentamos extensões do método SIMP para resolver o problema em questão com múltiplos materiais.

Dado o domínio discretizado, o problema de otimização topológica consiste em decidir se cada elemento deve ou não conter material. Para esse propósito, usamos a função binária dada por

$$\mathbf{x}_e = \begin{cases} 1, & \text{se o material é escolhido dentro do elemento } e, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Quando se emprega essa função, o problema de OT torna-se um problema de otimização com variáveis inteiras, o que dificulta significativamente o emprego de uma discretização refinada do domínio, devido ao alto custo de se resolver problemas de otimização de grande porte com esse tipo de variáveis. Para evitar essa dificuldade, Bendsoe [4] introduziu uma função contínua, $x_e \in [0, 1]$, que representa a pseudodensidade de um material em cada elemento do domínio discretizado. A seguir, mostramos a formulação introduzida por Sigmund [32] para representar a pseudodensidade.

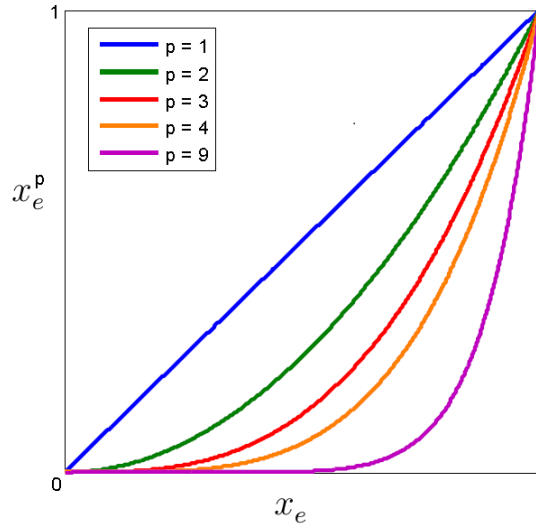
3.1 Método das densidades

O método das densidades utiliza uma função contínua $\mathbf{E}_e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{E}_e(x_e) = \mathbf{E}_{\min} + x_e^p(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\min}), \quad (3.2)$$

em que \mathbf{E} é o módulo de Young do material, \mathbf{E}_{\min} é um valor positivo muito pequeno (módulo artificial), $x_e \in [0, 1]$ representa a pseudodensidade do elemento e do domínio discretizado e p é um parâmetro de penalização, usado para reduzir a ocorrência de valores intermediários de x_e . No trabalho de Rietz [30], mostrou-se que o valor finito do parâmetro de penalização não pode ser muito grande, pois isso faria com que o problema de OT ficasse semelhante a um problema de otimização com variáveis binárias. Segundo Martínez [24], podemos encontrar a solução binária do problema de otimização topológica para um valor finito do parâmetro de penalização p .

A Figura 5 mostra o efeito do aumento do valor do parâmetro p .

Figura 5 – Valores do parâmetro de penalização p

3.2 Formulação do Problema

A rigidez de uma estrutura está associada ao conceito de flexibilidade de tal forma que a estrutura de máxima rigidez corresponda àquela que apresenta a mínima flexibilidade. Portanto, nosso interesse será minimizar a flexibilidade da estrutura, atendendo a uma restrição de volume máximo de material e garantindo que o corpo esteja em equilíbrio estático.

A formulação do problema de minimização da flexibilidade usando o método das densidades é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\
 &\text{s a} && \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\
 &&& \sum_{e=1}^{nel} x_e v_e - \eta \mathbf{V} \leq 0 \\
 &&& 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

em que \mathbf{C} é a flexibilidade da estrutura, nel é o número de elementos do domínio discretizado, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, v_e é o volume do elemento e , \mathbf{V} é o volume total da estrutura, η é a fração máxima permitida do volume total, \mathbf{F} é o vetor de forças nodais associadas ao carregamento externo e \mathbf{U} é o vetor global de deslocamento nodais de toda a estrutura. Observe que a matriz de rigidez global é definida por

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{E}_e(x_e) \hat{\mathbf{K}}_e, \tag{3.4}$$

em que $\mathbf{E}_e(x_e)$ é a função (3.2). Observe que, no problema (3.3), a condição de equilíbrio, $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F}$, pode ser embutida na função objetivo, uma vez que a matriz $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ é definida positiva. Nesse caso, temos um problema reduzido no qual só aparecem as restrições de

volume e de canalização. Deste modo, obtemos o seguinte problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F} \\ &\text{s a} \\ &\quad \sum_{e=1}^{nel} x_e v_e - \eta \mathbf{V} \leq 0 \\ &\quad 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e \end{aligned} \tag{3.5}$$

No problema (3.5), o termo x^p só aparece na função objetivo, não nas restrições. Doravante, embora os problemas sejam apresentados em forma similar a (3.3), deve-se ter em mente que, na prática, resolve-se um problema na forma (3.5).

3.3 Problema de seleção de múltiplos materiais

No trabalho de Hvejsel e Lund [22], a função binária (3.1) foi generalizada para que se pudesse representar a distribuição de vários materiais em uma estrutura. Dado um conjunto de m materiais, os autores definem, para cada elemento:

$$\mathbf{x}_{ej} = \begin{cases} 1, & \text{se o material } j \text{ é usado no elemento } e, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{3.6}$$

O critério da seleção de um material dentre aqueles disponíveis é expresso pela restrição de desigualdade

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{x}_{ej} \leq 1, \quad \forall e. \tag{3.7}$$

Observe que a desigualdade (3.7) também permite que nenhum material seja escolhido para o elemento e ($\mathbf{x}_{ej} = 0, \forall j = 1, \dots, m$).

Outra formulação da seleção de um material, na qual o vazio é considerado como um material artificial, é dada por

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{x}_{ej} = 1, \quad \forall e. \tag{3.8}$$

Na igualdade (3.8), exige-se que um material seja sempre escolhido para o elemento em questão.

3.4 Método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund)

O trabalho de Hvejsel e Lund [22] também apresenta uma generalização do método SIMP em que cada material é representado por uma variável contínua. Nesse caso, a função que envolve m materiais não artificiais é

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_e) = \mathbf{E}_{\min} + \sum_{j=1}^m x_{ej}^p (\mathbf{E}_j - \mathbf{E}_{\min}), \tag{3.9}$$

em que $\mathbf{E}_e : \mathbf{D}_e \longrightarrow \mathbb{R}$, com domínio $\mathbf{D}_e = \{\mathbf{x}_e \in \mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_m \mid \sum_{j=1}^m x_{ej} \leq 1\}$ e $\mathbf{X}_i = [0, 1]$. Na Figura 6, temos a função interpoladora $\mathbf{E}_e(x_{e1}, x_{e2}) = \mathbf{E}_{\min} + x_{e1}^3(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{\min}) + x_{e2}^3(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{\min})$ para o módulos de Young $\mathbf{E}_1 = 2$, $\mathbf{E}_2 = 4$ e $\mathbf{E}_{\min} = 10^{-3}$ (módulo artificial).

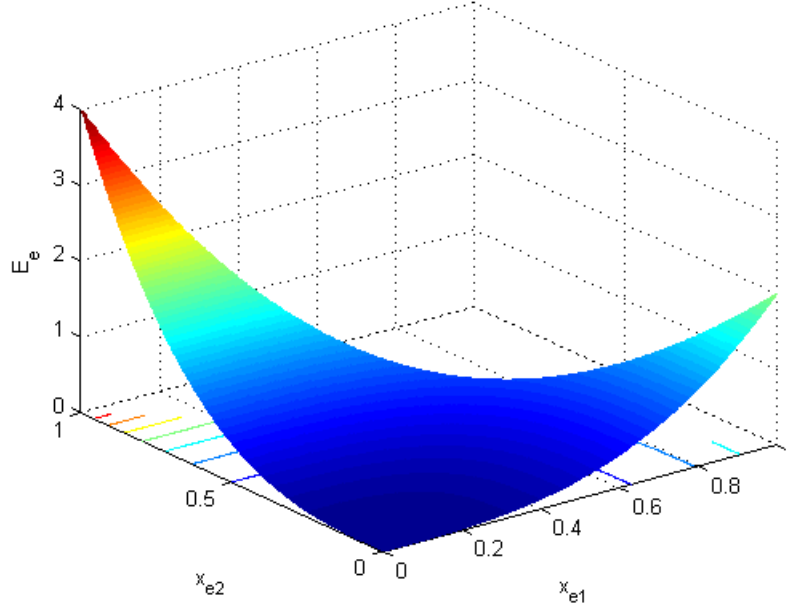


Figura 6 – Função interpoladora para dois materiais.

No caso em que o vazio é considerado como um material, a função de múltiplos materiais torna-se

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_e) = \sum_{j=1}^m x_{ej}^p \mathbf{E}_j,$$

em que $\mathbf{E}_e : \mathbf{D}_e \longrightarrow \mathbb{R}$, com domínio $\mathbf{D}_e = \{\mathbf{x}_e \in \mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_m \mid \sum_{j=1}^m x_{ej} = 1\}$, para algum $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{\min}$. Note que, se $m = 1$ na equação (3.9), temos a função equivalente para o caso do SIMP de um material (3.2).

3.5 Método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12])

No trabalho de Cai *et al.* [12], é apresentada uma função de múltiplos materiais construída de maneira iterativa. Para o caso de um material, ou módulo, tem-se

$$\mathbf{E}_e^{(1)}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{E}_1 x_{e1}^p + \mathbf{E}_{\min}(1 - x_{e1}^p),$$

em que \mathbf{E}_1 é o módulo do material 1. Para o caso de dois módulos, usa-se

$$\mathbf{E}_e^{(2)}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{E}_2 x_{e2}^p + \mathbf{E}_e^{(1)}(\mathbf{x}_e)(1 - x_{e2}^p),$$

em que \mathbf{E}_2 é o módulo do material 2. No caso de m materiais, a função é expressa como

$$\mathbf{E}_e^{(m)}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{E}_m x_{em}^p + \mathbf{E}_e^{(m-1)}(\mathbf{x}_e)(1 - x_{em}^p),$$

em que $\mathbf{E}_e^{(m)} : \mathbf{D}_e \rightarrow \mathbb{R}$, com domínio $\mathbf{D}_e = \{\mathbf{x}_e \in \mathbf{X}_1 \times \cdots \times \mathbf{X}_m \mid \sum_{j=1}^m x_{ej} \leq 1\}$

Por exemplo, expandindo a função de dois materiais, obtemos

$$\mathbf{E}_e^{(2)}(x_{e1}, x_{e2}) = \mathbf{E}_{\min} + x_{e1}^3(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{\min}) + x_{e2}^3(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{\min}) - x_{e1}^3 x_{e2}^3(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{\min})$$

Observe que essa função difere daquela proposta por Hvejsel e Lund pela presença do termo $-x_{e1}^3 x_{e2}^3(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{\min})$, o que a torna um pouco menor do que (3.9) quando \mathbf{E}_1 é grande, e x_{e1} e x_{e2} estão longe de zero. Além disso, esse termo reforça o aparecimento de variáveis 0 e 1. Para dois materiais, o gráfico dessa função é muito semelhante ao exibido na Figura 6.

3.6 Formulação do problema com múltiplos materiais

Adaptando o problema (3.3) para a minimização da flexibilidade usando o SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund), obtemos

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ &\text{s a} && \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ &&& \sum_{e=1}^{nel} x_{ej} v_e - \eta_j \mathbf{V} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ &&& \sum_{j=1}^m x_{ej} \leq 1, \quad e = 1, \dots, nel \\ &&& 0 \leq x_{ej} \leq 1, \quad \forall e, j \end{aligned} \tag{3.10}$$

em que η_j é a fração do volume correspondente ao material j . Note que definimos um limitante superior para a fração do volume total que pode ser preenchida por cada um dos materiais. Além disso, podemos obter uma formulação semelhante ao problema mostrado acima usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]).

Para formular o problema (3.10) usando o SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund), utilizando o vazio como um material, devemos substituir as restrições de desigualdade por restrições de igualdade.

3.7 Método SIMP ordenado

Os métodos SIMP que foram apresentados na seção anterior realizam a distribuição de vários materiais em uma estrutura supondo que, para todo elemento, cada material

é representado por uma variável. Nesta seção, exploramos o método SIMP ordenado [45], que tem a vantagem de não exigir a adição de variáveis para permitir a seleção de materiais, de modo que o custo computacional para resolver o problema de OT é independente do número de materiais considerados. O primeiro passo do método consiste em normalizar as densidades dos materiais, $\rho_T^1 < \rho_T^2 \cdots < \rho_T^m$, o que é feito tomando-se

$$\rho_i = \frac{\rho_T^i}{\rho_{\max}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

em que ρ_{\max} representa a maior densidade dentre todos os materiais. Usando essas densidades normalizadas, podemos representar todos os materiais por meio de uma única função de interpolação, que é dada por

$$\mathbf{E}_e(x_e) = \mathbf{A}_E x_e^p + \mathbf{B}_E, \quad x_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}], \quad (3.11)$$

com os coeficientes $\mathbf{A}_E = \frac{\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p}$ e $\mathbf{B}_E = \mathbf{E}_i - \mathbf{A}_E \rho_i^p$, em que \mathbf{E}_i e \mathbf{E}_{i+1} são os módulos de Young dos materiais i e $i + 1$ respectivamente. Com a adoção da função interpoladora (3.11), considerando $\rho_1 = 0$ e $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\min} = 10^{-3}$, módulo artificial, a formulação do problema de minimização da flexibilidade usando o SIMP ordenado é a mesma apresentada em (3.3).

Note que a derivada da função de interpolação (3.11) não existe nos pontos ρ_i e ρ_{i+1} , o que gera instabilidade numérica no processo de otimização. Para superar isso, podemos estabelecer as seguintes salvaguardas nos algoritmos de otimização: se $x_e^k < \rho_i$ ($x_e^k > \rho_i$), $x_e^{k+1} = \rho_i$ e $0 < \rho_i < 1$, então $x_e^{k+1} = 0,9999\rho_i$ ($x_e^{k+1} = 1,0001\rho_i$). Para os exemplos numéricos do capítulo 6, as salvaguardas não foram usadas pelos algoritmos para obter as topologias ótimas.

A Figura 7 mostra a representação de três materiais através da função (3.11).

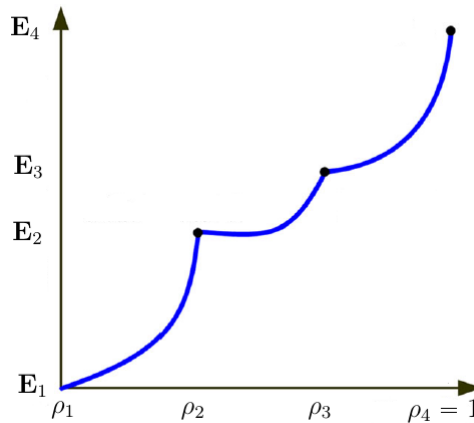


Figura 7 – Função usada para interpolar os módulos de Young de três materiais diferentes.

3.8 Tabuleiro de xadrez

Um fenômeno típico que acontece no processo numérico dos métodos de OT é a distribuição do material em regiões com elementos vazios e com elementos totalmente preenchidos, dispostas de maneira alternada, semelhante a um tabuleiro de xadrez (veja a Figura 8). Segundo Sigmund [15], a possível causa dessa formação do tabuleiro de xadrez é o uso de elementos finitos retangulares de quatro nós com funções bilineares para interpolar os deslocamentos. Para lidar com esse fenômeno, várias técnicas de filtragem foram proposta na literatura (vide, por exemplo, [32]). Nessa seção, apresentamos os dois filtros espaciais que têm maior emprego na otimização estrutural: o filtro da sensibilidade e o da média ponderada das densidades.

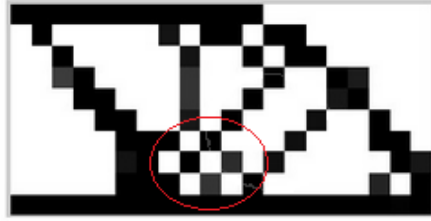


Figura 8 – Presença de um tabuleiro de xadrez (região destacada em vermelho) em uma estrutura.

3.8.1 Filtro de Sensibilidade

No problema de OT, o filtro da sensibilidade [31] faz a substituição da derivada primeira da função objetivo de cada elemento e pela média ponderada das derivadas primeiras dos elementos i situados numa vizinhança fixa N_e , ou seja,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial x_e} = \frac{\sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_i}}{x_e \sum_{i \in N_e} H_{ei}},$$

em que N_e é o conjunto de elementos i para os quais a distância $\Delta(e, i)$ entre os centros dos elementos e e i é menor que o raio do filtro, r_{\min} , e $H_{ei} = r_{\min} - \Delta(e, i)$.

3.8.2 Filtro da média ponderada das densidades

Este filtro, proposto por Bruns e Tortorelli [10], consiste na substituição da densidade de cada elemento e do domínio discretizado pela média ponderada das densidades dos elementos contidos em uma vizinhança de e . Ou seja, substitui-se x_e por

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i,$$

em que N_e é o conjunto de elementos i para os quais a distância $\Delta(e, i)$ entre os centros dos elementos e e i é menor que o raio do filtro r_{\min} . Os pesos usados nesta média ponderada são definidos por $H_{ei} = r_{\min} - \Delta(e, i)$, outra possibilidade para os pesos H_{ei} encontra-se em [11].

O filtro da sensibilidade apresentou bons resultados para eliminar o tabuleiro de xadrez das topologias ótimas. Além disso, uma vantagem desse filtro é sua fácil implementação. Entretanto, como o gradiente da função objetivo é modificado e a função objetivo permanece inalterada, as condições de otimalidade do problema de OT tornam-se incompatíveis.

Nesta tese, utilizamos o filtro da média ponderada pelos bons resultados obtidos na literatura e por manter as condições de otimalidade.

4 Métodos de Otimização não Linear de Primeira Ordem

O cálculo da segunda derivada das funções envolvidas na modelagem do problema de otimização topológica é computacionalmente caro, o que é agravado pelo fato de os problemas serem geralmente de grande porte. Para superar isto, métodos de primeira ordem foram adotados para resolvê-lo. Neste capítulo, apresentaremos o método das assíntotas móveis, o método da programação linear sequencial e o método de gradiente espectral projetado para resolver o problema de OT.

4.1 Método das Assíntotas Móveis

Em [34], Svanberg desenvolveu o Método das Assíntotas Móveis ou *The Method of Moving Asymptotes* (MMA), que resolve uma sequência de subproblemas explícitos que são gerados a partir de um problema de otimização não linear. Esses subproblemas contêm funções de aproximação convexas para a função objetivo e as funções que definem o conjunto factível. Uma versão globalmente convergente do método MMA foi apresentada no trabalho de Gomes-Ruggiero *et al.* [17] com bons resultados numéricos.

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades das aproximações convexas associadas, bem como a ideia do algoritmo.

Consideremos o seguinte problema geral de otimização com limitantes superiores e inferiores finitos para o vetor de variáveis de projeto \mathbf{x} .

$$\begin{aligned} \min \quad & C_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad & C_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \bar{L}_j \leq x_j \leq \bar{U}_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $C_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são funções duas vezes diferenciáveis e \bar{L}_j e \bar{U}_j , $j = 1, \dots, n$ são números reais tais que $\bar{L}_j < \bar{U}_j$.

4.1.1 Sequência de subproblemas de aproximação convexa

O método das Assíntotas Móveis é um método iterativo em que a cada iteração resolve-se um subproblema convexo aproximado. As soluções obtidas pelos subproblemas podem ser factíveis, ou quase factíveis, para o problema de otimização (4.1). A construção da função de aproximação convexa $\hat{C}_i^{(k)}$ é feita usando os sinais das derivadas da função original C_i num ponto $\mathbf{x}^{(k)}$ de modo que $\hat{C}_i^{(k)}$ apresenta termos do tipo $1/(x_j - L_j^{(k)})$ ou $1/(U_j^{(k)} - x_j)$, em que $L_j^{(k)}$ é o limitante inferior e $U_j^{(k)}$ é um limitante superior para a variável x_j . A formulação do subproblema com as funções aproximadoras convexas do método MMA é dada a seguir.

$$\begin{aligned} \min \quad & r_0^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \\ \text{s.a} \quad & r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que k é o índice da iteração corrente,

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(k)} &= \max\{\bar{L}_j, 0, 9L_j^{(k)} + 0, 1x_j^{(k)}\}, \\ \beta_j^{(k)} &= \min\{\bar{U}_j, 0, 9U_j^{(k)} + 0, 1x_j^{(k)}\}; \end{aligned}$$

$$p_{ij}^{(k)} = \max\{0, (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})\},$$

$$q_{ij}^{(k)} = \max\{0, -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)})\},$$

e

$$r_i^{(k)} = C_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right).$$

As propriedades das funções

$$\hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

são apresentadas abaixo.

a) As funções $\hat{C}_i^{(k)}$ são aproximações de primeira ordem, isto é

$$\begin{aligned} \hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) &= C_i(\mathbf{x}^{(k)}), \quad i = 0, 1, \dots, m; \\ \frac{\partial \hat{C}_i^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) &= \frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

b) As segundas derivadas das funções $\hat{C}_i^{(k)}$ são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{C}_i^{(k)}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) &= \frac{2p_{ij}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j)^3} + \frac{2q_{ij}^{(k)}}{(x_j - L_j^{(k)})^3}, \quad \forall i, j; \\ \frac{\partial^2 \hat{C}_i^{(k)}}{\partial x_j \partial x_l}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \text{se } j \neq l.\end{aligned}$$

c) Note que, $p_{ij}^{(k)}$ e $q_{ij}^{(k)}$ são não negativos. Logo, $\hat{C}_i^{(k)}$ é uma função convexa. Em particular, no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$, temos

$$\frac{\partial^2 \hat{C}_i^{(k)}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{cases} \frac{2}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right), & \text{se } \partial C_i / \partial x_j(\mathbf{x}^{(k)}) > 0; \\ -\frac{2}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right), & \text{se } \partial C_i / \partial x_j(\mathbf{x}^{(k)}) < 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Analizamos o comportamento das aproximações convexas com relação aos pontos $L_j^{(k)}$, $U_j^{(k)}$ e $x_j^{(k)}$.

d) Observa-se na equação (4.3) que o valor da segunda derivada não mista será maior se $L_j^{(k)}$ e $U_j^{(k)}$ estiverem mais próximos de $x_j^{(k)}$. Nesse caso, teremos maior curvatura da função aproximadora $\hat{C}_i^{(k)}$. Deste modo, as funções aproximadoras serão mais conservativas. Para ver essa propriedade, suponha que $\hat{C}_i^{(k)}$ e $\tilde{C}_i^{(k)}$ sejam duas funções de aproximação diferentes que correspondem aos limitantes $\{L_j^{(k)}, U_j^{(k)}\}$ e $\{\tilde{L}_j^{(k)}, \tilde{U}_j^{(k)}\}$, respectivamente. Se consideramos $L_j^{(k)} \leq \tilde{L}_j^{(k)} < x_j^{(k)} < \tilde{U}_j^{(k)} \leq U_j^{(k)}$ para todo j , então, todo os pontos \mathbf{x} tais que $\tilde{L}_j^{(k)} < x_j < \tilde{U}_j^{(k)}$ para todo j verificarão $\hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \tilde{C}_i^{(k)}(\mathbf{x})$.

e) Se as assíntotas móveis $L_j^{(k)}$ e $U_j^{(k)}$ estiverem suficientemente distantes de $\mathbf{x}^{(k)}$, então as funções aproximadoras convexas $\hat{C}_i^{(k)}$ tendem a ter um comportamento linear em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. Em particular, se $L_j^k \rightarrow -\infty$ e $U_j^k \rightarrow +\infty$, as funções $\hat{C}_i^{(k)}$ tornam-se de fato lineares, isto é

$$\hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = C_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla C_i(\mathbf{x}^{(k)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}).$$

No MMA, o caso de interesses é quando $L_j^{(k)}$ e $U_j^{(k)}$ são finitos. Dessa forma, cada função aproximadora $\hat{C}_i^{(k)}$ é estritamente convexa em todas as variáveis x_j , exceto nos casos em que $\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$. Quando isso acontece, $\hat{C}_i^{(k)}$ é independente da variável x_j .

A atualização dos limitantes inferiores $L_j^{(k)}$ e superiores $U_j^{(k)}$, associados às “assíntotas móveis” que dão nome ao método, é feita seguindo as premissas abaixo:

- Se os iterandos tendem a oscilar, então eles devem ser estabilizados. Neste caso, as assíntotas deverão ficar mais próximas do ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)}$.
- Se o processo de resolução está monótono e lento, então as assíntotas devem ser “relaxadas”, ou seja, elas devem ficar mais distantes do iterando atual $\mathbf{x}^{(k)}$.

Segundo Svanberg, em cada iteração os limitantes inferiores $L_j^{(k)}$ e superiores $U_j^{(k)}$ são atualizados como se segue

- Para o caso das duas primeiras iterações, $k = 1$ e $k = 2$, definimos

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - 0,5(\bar{U}_j - \bar{L}_j), \\ U_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + 0,5(\bar{U}_j - \bar{L}_j). \end{aligned}$$

- para $k \geq 3$, tomamos

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)}(x_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)}), \\ U_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)}(U_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}). \end{aligned}$$

em que

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0,7, & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0, \\ 1,2, & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0, \\ 1, & \text{se } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0. \end{cases}$$

Algoritmo 1 – Assíntotas Móveis

Enquanto não é satisfeito algum critério de parada, faça

Determine $x^{(k+1)}$, solução de

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & r_0^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \\ \text{s. a} \quad & r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(k)} &= \max\{\bar{L}_j, 0, 9L_j^{(k)} + 0,1x_j^{(k)}\}, \\ \beta_j^{(k)} &= \min\{\bar{U}_j, 0, 9U_j^{(k)} + 0,1x_j^{(k)}\}. \end{aligned}$$

4.2 Método dual para resolver os subproblemas convexos

Nesta seção, resolvemos o subproblema convexo (4.2) por meio do problema dual que foi relatado por Svanberg [34]. Primeiramente, determinamos a expressão explícita da função objetivo do problema dual. Logo, formulamos o problema dual associado ao subproblema convexo.

Para determinar a função objetivo do problema dual apresentamos a função Lagrangiana do subproblema (4.2) que é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = \hat{C}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x})$$

em que o vetor $\mu \in \mathbb{R}^m$ representa os multiplicadores de Lagrange, ou o vetor das variáveis duais relacionadas às funções aproximadoras $\hat{C}_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, m$.

Note-se que o subproblema (4.2) é convexo, pois cada $\hat{C}_i^{(k)}$ é uma função convexa, e separável, pois cada termo do somatório de $\hat{C}_i^{(k)}$ depende apenas de uma variável. Logo, de algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = r_0^{(k)} + \mu^T r^{(k)} + \sum_{j=1}^n \mathcal{L}_j(x_j, \mu),$$

em que

$$\mathcal{L}_j(x_j, \mu) = \frac{p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}},$$

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= (r_1^{(k)} \dots r_m^{(k)})^T, & p_j^{(k)} &= (p_{1j}^{(k)} \dots p_{mj}^{(k)})^T, \\ q_j^{(k)} &= (q_{1j}^{(k)} \dots q_{mj}^{(k)})^T, & \mu &= (\mu_1 \dots \mu_m)^T. \end{aligned}$$

Logo, a função objetivo dual $W(\mu)$ é dada por

$$\begin{aligned} W(\mu) &= \min_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) ; \alpha_j^{(k)} \leq \mathbf{x}_j \leq \beta_j^{(k)} \text{ para todo } \mathbf{j} \} \\ &= r_0^{(k)} + \mu^T r^{(k)} + \sum_{j=1}^n W_j(\mu), \end{aligned}$$

em que

$$W_j(\mu) = \min_{x_j} \{ \mathcal{L}_j(x_j, \mu) ; \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)} \}. \quad (4.4)$$

Para encontrar a solução explícita da expressão de $W_j(\mu)$, determinamos a solução ótima do problema de otimização em (4.4). Para isto, note que $\mu \geq 0$ implica que $p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)} \geq 0$ e $q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)} \geq 0$. Logo, $\mathcal{L}_j(x_j, \mu)$ é uma função convexa de x_j . Quando $p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)} = 0$ e $q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)} = 0$, $\mathcal{L}_j(x_j, \mu)$ não depende de x_j . Neste caso, qualquer x_j entre $\alpha_j^{(k)}$ e $\beta_j^{(k)}$ minimiza $\mathcal{L}_j(x_j, \mu)$. A partir de agora, vamos supor que pelo menos um dos termos

$p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)} \geq 0$ ou $q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)} \geq 0$ seja estritamente positivo. A derivada de $\mathcal{L}_j(x_j, \mu)$ com respeito a x_j é dada por

$$\mathcal{L}'_j(x_j, \mu) = \frac{p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)}}{(U_j^{(k)} - x_j)^2} - \frac{q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)}}{(x_j - L_j^{(k)})^2},$$

e a segunda derivada de $\mathcal{L}_j(x_j, \mu)$ em relação a x_j é dada por

$$\mathcal{L}''_j(x_j, \mu) = \frac{2(p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)})}{(U_j^{(k)} - x_j)^3} + \frac{2(q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)})}{(x_j - L_j^{(k)})^3}.$$

Como $\mathcal{L}''_j(x_j, \mu)$ é estritamente positiva, $\mathcal{L}'_j(x_j, \mu)$ é estritamente crescente em x_j . Assim, podemos tirar as seguintes conclusões sobre a solução $x_j^*(\mu)$ em (4.4):

1. Se $\mathcal{L}'_j(\alpha_j^{(k)}, \mu) \geq 0$, então $x_j^*(\mu) = \alpha_j^{(k)}$.
2. Se $\mathcal{L}'_j(\beta_j^{(k)}, \mu) \leq 0$, então $x_j^*(\mu) = \beta_j^{(k)}$.
3. Se $\mathcal{L}'_j(\alpha_j^{(k)}, \mu) < 0$ e $\mathcal{L}'_j(\beta_j^{(k)}, \mu) > 0$, então

$$x_j^*(\mu) = \frac{(p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)})^{1/2} L_j^{(k)} + (q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)})^{1/2} U_j^{(k)}}{(p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)})^{1/2} + (q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)})^{1/2}} \quad (4.5)$$

é a única solução da equação $\mathcal{L}'_j(x_j, \mu) = 0$. Como a expressão para a solução $x_j^*(\mu)$ do problema da minimização em (4.4) é dada de forma explícita, também existe uma expressão explícita para a função objetivo dual $W(\mu)$, que é dada por

$$W(\mu) = r_0^{(k)} + \mu^T r^{(k)} + \sum_{j=1}^n \frac{p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j(\mu)} + \frac{q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)}}{x_j(\mu) - L_j^{(k)}}$$

A derivada de $W(\mu)$ em relação à variável dual μ_i é dada por

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_i}(\mu) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j(\mu)} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j(\mu) - L_j^{(k)}} \right). \quad (4.6)$$

Portanto, o problema dual correspondente ao subproblema (4.2) é dado por

$$\begin{aligned} \max \quad & W(\mu) \\ \text{s.a} \quad & \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como $x_j(\mu)$ depende continuamente de μ , a menos que $p_{0j}^{(k)} + \mu^T p_j^{(k)} = 0$ e $q_{0j}^{(k)} + \mu^T q_j^{(k)} = 0$, se segue de (4.6) que $W(\mu)$ é uma função suave. Além disso, é fácil provar que $W(\mu)$ é uma função côncava, já que $W(\mu)$ é um mínimo de um conjunto de funções que são lineares em μ . Segundo Svanberg, o problema dual poderia ser resolvido por qualquer método baseado apenas no vetor gradiente, tomando-se cuidado com variáveis não negativas μ . Uma vez resolvido o problema dual (4.7), a solução ótima do subproblema primal (4.2) é obtida diretamente substituindo-se a solução ótima dual μ na expressão (4.5).

4.3 Problema aumentado

Nesta seção, apresentamos o problema aumentado seguindo a proposta de Svanberg [36]. O problema em questão é obtido pela adição de variáveis artificiais ao problema original (4.1). Conforme o Svanberg [36], a vantagem de trabalhar com o problema aumentado em relação ao problema (4.1) é que o primeiro possui soluções factíveis. Além disso, o problema possui um conjunto não vazio de pontos que satisfazem as condições KKT. Segue abaixo a construção do problema aumentado para o problema (4.1).

Adicionando as variáveis artificiais z, y ao problema (4.1), obtemos o seguinte problema aumentado

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && C_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\
 &\text{s a} && C_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, && i = 1, \dots, m \\
 &&& \bar{L}_j \leq x_j \leq \bar{U}_j, && j = 1, \dots, n, \\
 &&& y_i \geq 0, && i = 1, \dots, m \\
 &&& z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

em que a_0, a_i, c_i e d_i são números reais tais que $a_0 > 0, a_i \geq 0, c_i \geq 0, d_i \geq 0, c_i + d_i > 0$, para cada $i = 1, \dots, m$, e $a_i c_i > a_0$ para todo i tal que $a_i > 0$.

De acordo com Svanberg [36], para colocar o problema (4.8) equivalente ao problema original (4.1), devemos fazer $a_0 = 1$ e $a_i = 0$ para todo $i > 0$. Nesse caso, $z = 0$ para qualquer solução ótima do problema (4.8). Além disso, para cada i , tomamos $d_i = 0$ e $c_i = \text{“um número grande”}$, de tal maneira que as variáveis y_i se tornem “caras”. Assim, teremos $y_i = 0$ em qualquer solução ótima do problema (4.8), e o vetor x correspondente será uma solução ótima do problema original (4.1).

Seguindo o esquema da seção 4.1.1, escrevemos o subproblema convexo, com algumas modificações nas funções de aproximação convexa mostradas por Svanberg [35]. O subproblema convexo é dado por

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \hat{C}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\
 &\text{s a} && \hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, && i = 1, \dots, m \\
 &&& \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)}, && j = 1, \dots, n, \\
 &&& y_i \geq 0 && i = 1, \dots, m \\
 &&& z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \alpha_j^{(k)} &= \max\{\bar{L}_j, 0, 9L_j^{(k)} + 0, 1x_j^{(k)}\}, \\
 \beta_j^{(k)} &= \min\{\bar{U}_j, 0, 9U_j^{(k)} + 0, 1x_j^{(k)}\}.
 \end{aligned}$$

As funções de aproximação são dadas por

$$\hat{C}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)}, \quad i = 1 \dots, m,$$

em que

$$p_{ij}^{(k)} = (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \left(\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ + k_{ij}^{(k)} \right),$$

$$q_{ij}^{(k)} = (x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \left(\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- + k_{ij}^{(k)} \right),$$

$$r_i^{(k)} = C_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right),$$

$$\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ = \max \left\{ 0, \frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\},$$

$$\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- = \max \left\{ 0, -\frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\}.$$

Os valores das variáveis $k_{ij}^{(k)}$ são dados por

$$k_{ij}^{(k)} = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$k_{0j}^{(k)} = 10^{-3} \left| \frac{\partial C_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right| + \frac{10^{-8}}{U_j^{(k)} - L_j^{(k)}}, \quad \text{para } j = 1 \dots, n.$$

4.3.1 Métodos de pontos interiores para resolver os subproblemas convexos

Nesta sessão, descrevemos o método do pontos interiores primal - dual, apresentado por Svanberg [36] para resolver o subproblema (4.9). No método de pontos interiores implementado por Svanberg [36], resolve-se um sistema de equações não lineares que é obtido das condições KKT do subproblema (4.9). Note que os subproblemas (4.9) são estritamente convexos e a condição de qualificação de restrições Slater é verificada [6]. Essa condição implica que as condições KKT sejam necessárias e suficientes para uma solução ótima do subproblema (4.9).

Para simplificar a notação, o índice k será removido no subproblema (4.9). Além disso, denotaremos $b_i = -r_i^{(k)}$ e descartaremos a constante $r_0^{(k)}$ da função objetivo. Sendo assim, o subproblema (4.9) se torna

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & g_0(x) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\ \text{s a} \quad & g_i(x) - a_i z - y_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & y_i \geq 0 \\ & z \geq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

em que

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}}{U_j - x_j} + \frac{q_{ij}}{x_j - L_j} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

com

$$L_j < \alpha_j < \beta_j < U_j \quad \text{para todo } j.$$

A função Lagrangiana correspondente ao problema (4.10) é dada por

$$L = g_0(x) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) - a_i z - y_i - b_i) + \sum_{j=1}^n (\xi_j (\alpha_j - x_j) + \eta_j (x_j - \beta_j)) - \sum_{i=1}^m \mu_i y_i - \zeta z,$$

em que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$, e ζ são os multiplicadores de Lagrange não negativos para as restrições de (4.10). Definindo a função

$$\psi(x, \lambda) = g_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j(\lambda)}{U_j - x_j} + \frac{q_j(\lambda)}{x_j - L_j} \right),$$

em que

$$p_j(\lambda) = p_{0j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i p_{ij} \quad \text{e} \quad q_j(\lambda) = q_{0j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i q_{ij},$$

a função de Lagrange pode ser escrita como

$$L = \psi(x, \lambda) + (a_0 - \zeta)z + \sum_{j=1}^n (\xi_j (\alpha_j - x_j) + \eta_j (x_j - \beta_j)) + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 - \lambda_i a_i z - \lambda_i y_i - \lambda_i b_i - \mu_i y_i).$$

Nesse caso, as condições KKT para o subproblema (4.10) são dadas por

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \xi_j + \eta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\partial L / \partial x_j = 0) \quad (4.11a)$$

$$c_i + d_i y_i - \lambda_i - \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\partial L / \partial y_i = 0) \quad (4.11b)$$

$$a_0 - \zeta - \lambda^T a = 0, \quad (\partial L / \partial z = 0) \quad (4.11c)$$

$$g_i(x) - a_i z - y_i - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{factibilidade primal}) \quad (4.11d)$$

$$\lambda_i (g_i(x) - a_i z - y_i - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{complementaridade}) \quad (4.11e)$$

$$\xi_j (\alpha_j - x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{complementaridade}) \quad (4.11f)$$

$$\eta_j (x_j - \beta_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{complementaridade}) \quad (4.11g)$$

$$-\mu_i y_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{complementaridade}) \quad (4.11h)$$

$$-\zeta z = 0, \quad (\text{complementaridade}) \quad (4.11i)$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{factibilidade primal}) \quad (4.11j)$$

$$-z \leq 0 \quad \text{e} \quad -y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{factibilidade primal}) \quad (4.11k)$$

$$\xi_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \eta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{factibilidade dual}) \quad (4.11l)$$

$$\zeta \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{factibilidade dual}) \quad (4.11m)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{factibilidade dual}) \quad (4.11n)$$

em que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{p_j(\lambda)}{(U_j - x_j)^2} - \frac{q_j(\lambda)}{(x_j - L_j)^2} \quad \text{e} \quad \lambda^T a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i.$$

4.4 Condições de otimalidade relaxadas para o subproblema

Quando um método de pontos interiores é usado para resolver o subproblema (4.10), os zeros no lado direito das condições de complementaridade (4.11e) - (4.11i) são substituídos por um parâmetro pequeno $\varepsilon > 0$. Além disso, são introduzidas variáveis de folga s_i para as restrições (4.11d). Deste modo, as condições de otimalidade são dadas por

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \xi_j + \eta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12a)$$

$$c_i + d_i y_i - \lambda_i - \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.12b)$$

$$a_0 - \zeta - \lambda^T a = 0, \quad (4.12c)$$

$$g_i(x) - a_i z - y_i + s_i - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.12d)$$

$$\xi_j(x_j - \alpha_j) - \varepsilon = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12e)$$

$$\eta_j(\beta_j - x_j) - \varepsilon = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12f)$$

$$\mu_i y_i - \varepsilon = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.12g)$$

$$\zeta z - \varepsilon = 0, \quad (4.12h)$$

$$\lambda_i s_i - \varepsilon = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.12i)$$

$$x_j - \alpha_j > 0 \text{ e } \xi_j > 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12j)$$

$$\beta_j - x_j > 0 \text{ e } \eta_j > 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.12k)$$

$$y_i > 0 \text{ e } \mu_i > 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.12l)$$

$$z > 0 \text{ e } \zeta > 0 \quad (4.12m)$$

$$s_i > 0 \text{ e } \lambda_i > 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.12n)$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma única solução $(x, y, z, \xi, \mu, \zeta, s)$ destas condições. Isto ocorre porque as condições (4.12) são equivalentes às condições KKT do seguinte problema estritamente convexo nas variáveis x, y, z e s .

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & g_0(x) + a_0 z + \sum_i (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) + \\ & -\varepsilon \sum_j \log(x_j - \alpha_j) - \varepsilon \sum_j \log(\beta_j - x_j) + \\ & -\varepsilon \sum_i \log y_i - \varepsilon \sum_i \log s_i - \varepsilon \log z \\ \text{s a} \quad & g_i(x) - a_i z - y_i + s_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & (\alpha_j < x_j < \beta_j, y_j > 0, z > 0, s_i > 0), \end{aligned}$$

em que as desigualdades estritas são automaticamente satisfeitas por causa dos termos logarítmicos na função objetivo.

4.4.1 Uma direção de Newton para as condições de otimalidade

Dado um ponto inicial $w = (x, y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s)$ que satisfaça (4.12j) - (4.12n) ao aplicarmos o método de Newton ao sistema de equações não lineares (4.12a) - (4.12i), o seguinte sistema de equações lineares deve ser resolvido

$$\begin{bmatrix} \Psi & & G^T & \langle -e \rangle & \langle e \rangle & & & & \\ & \langle d \rangle & \langle -e \rangle & & & \langle -e \rangle & & & \\ & & -a^T & & & & -1 & & \\ G & \langle -e \rangle & -a & & & & & \langle e \rangle & \\ \langle \xi \rangle & & & \langle x - \alpha \rangle & & & & & \\ \langle -\eta \rangle & & & & \langle \beta - x \rangle & & & & \\ & \langle \mu \rangle & & & & \langle y \rangle & & & \\ & & \zeta & & & z & & & \\ & & & \langle s \rangle & & & & \langle \lambda \rangle & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \lambda \\ \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \mu \\ \Delta \zeta \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_x \\ -\delta_y \\ -\delta_z \\ -\delta_\lambda \\ -\delta_\xi \\ -\delta_\eta \\ -\delta_\mu \\ -\delta_\zeta \\ -\delta_s \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

em que $\delta_x, \dots, \delta_s$ são os termos do lado esquerdo em (4.12a) - (4.12i), $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz diagonal com

$$(\Psi)_{jj} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = \frac{2p_j(\lambda)}{(U_j - x_j)^3} + \frac{2q_j(\lambda)}{(x_j - L_j)^3},$$

$G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz com componentes

$$(G)_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{p_{ij}}{(U_j - x_j)^2} - \frac{q_{ij}}{(x_j - L_j)^2},$$

$\langle d \rangle$ é uma matriz diagonal com o vetor $d = (d_1, \dots, m)^T$ na diagonal, $\langle x - \alpha \rangle$ é uma matriz diagonal com o vetor $x - \alpha$ na diagonal e e é o vetor $(1, \dots, 1)^T$, com dimensão adequada, de modo que $\langle e \rangle$ é a matriz identidade com dimensões adequadas.

No sistema de Newton (4.13), as variáveis $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \mu, \Delta \zeta$ e Δs podem ser eliminadas por

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= -\langle x - \alpha \rangle^{-1} \langle \xi \rangle \Delta x - \xi + \varepsilon \langle x - \alpha \rangle^{-1} e, \\ \Delta \eta &= -\langle \beta - x \rangle^{-1} \langle \eta \rangle \Delta x - \eta + \varepsilon \langle \beta - x \rangle^{-1} e, \\ \Delta \mu &= -\langle y \rangle^{-1} \langle \mu \rangle \Delta y - \mu + \varepsilon \langle y \rangle^{-1} e, \\ \Delta \zeta &= -(\zeta/z) \Delta z - \zeta + \varepsilon/z, \\ \Delta s &= -\langle \lambda \rangle^{-1} \langle s \rangle \Delta \lambda - s + \varepsilon \langle \lambda \rangle^{-1} e. \end{aligned}$$

Com isso, o seguinte sistema em $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \lambda)$ é obtido:

$$\begin{bmatrix} D_x & & & G^T \\ & D_y & & \langle -e \rangle \\ & & \zeta/z & -a^T \\ G & \langle -e \rangle & -a & -D_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\delta}_x \\ -\tilde{\delta}_y \\ -\tilde{\delta}_z \\ -\tilde{\delta}_\lambda \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

em que

$$D_x = \Psi + \langle x - \alpha \rangle^{-1} \langle \xi \rangle + \langle \beta - x \rangle^{-1} \langle \eta \rangle \quad (\text{matriz diagonal})$$

$$D_y = \langle d \rangle + \langle y \rangle^{-1} \langle \mu \rangle, \quad (\text{matriz diagonal})$$

$$D_\lambda = \langle \lambda \rangle^{-1} \langle s \rangle, \quad (\text{matriz diagonal})$$

$$\tilde{\delta}_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \varepsilon \langle x - \alpha \rangle^{-1} e + \varepsilon \langle \beta - x \rangle^{-1} e,$$

$$\tilde{\delta}_y = c + \langle d \rangle y - \lambda - \varepsilon \langle y \rangle^{-1} e,$$

$$\tilde{\delta}_z = a_0 - \lambda^T a - \varepsilon/z, \quad (\text{escalar})$$

$$\tilde{\delta}_\lambda = g(x) - az - y - b + \varepsilon \langle \lambda \rangle^{-1} e,$$

sendo $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ o vetor com as n componentes

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{p_j(\lambda)}{(U_j - x_j)^2} - \frac{q_j(\lambda)}{(x_j - L_j)^2}, \quad j = 1, \dots, n$$

Em seguida, Δy pode ser eliminado do sistema (4.14) usando-se

$$\Delta y = D_y^{-1} \Delta \lambda - D_y^{-1} \tilde{\delta}_y.$$

Sendo assim, o seguinte sistema em $\Delta x, \Delta y$ e $\Delta \lambda$ é obtido:

$$\begin{bmatrix} D_x & G^T \\ & \zeta/z & -a^T \\ G & -a & -D_{\lambda y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\delta}_x \\ -\tilde{\delta}_z \\ -\tilde{\delta}_{\lambda y} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

em que

$$D_{\lambda y} = D_\lambda + D_y^{-1}, \quad (\text{matriz diagonal})$$

$$\tilde{\delta}_{\lambda y} = \tilde{\delta}_\lambda + D_y^{-1} \tilde{\delta}_y.$$

No sistema (4.15), podemos eliminar Δx ou $\Delta \lambda$. Se Δx é eliminado por

$$\Delta x = -D_x^{-1} G^T \Delta \lambda - D_x^{-1} \tilde{\delta}_x,$$

o seguinte sistema em $\Delta \lambda$ e Δz é obtido:

$$\begin{bmatrix} D_{\lambda y} + G D_x^{-1} G^T & a \\ a^T & -\zeta/z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{\lambda y} - G D_x^{-1} \tilde{\delta}_x \\ \tilde{\delta}_z \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Se, em vez disso, $\Delta \lambda$ é eliminado do sistema (4.15) por

$$\Delta \lambda = D_{\lambda y}^{-1} G \Delta x - D_{\lambda y}^{-1} a \Delta z + D_{\lambda y}^{-1} \tilde{\delta}_{\lambda y},$$

o seguinte sistema em Δx e Δz é obtido

$$\begin{bmatrix} D_x + G^T D_{\lambda y}^{-1} G & -G^T D_{\lambda y}^{-1} a \\ -a^T D_{\lambda y}^{-1} G & \zeta/z + a^T D_{\lambda y}^{-1} a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\delta}_x - G^T D_{\lambda y}^{-1} \tilde{\delta}_{\lambda y} \\ -\tilde{\delta}_z + a^T D_{\lambda y}^{-1} \tilde{\delta}_{\lambda y} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A melhor maneira de resolver o sistema de equações (4.15) depende da resolução do sistema de equação (4.16) ou do sistema de equação (4.17). O sistema (4.16) deve ser escolhido se $n > m$, enquanto o sistema (4.17) deve ser escolhido se $m > n$.

4.4.2 Busca linear na direção de Newton

Depois de ter obtido a direção de Newton $\Delta w = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \lambda, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \mu, \Delta \zeta, \Delta s)$ a partir de um ponto $w = (x, y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s)$, devemos calcular o tamanho de passo t nessa direção. Para que o passo t não viole as restrições (4.12j) - (4.12n), começamos a busca com $t \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} x_j + t\Delta x_j - \alpha_j &\geq 0,01(x_j - \alpha_j), \\ \beta_j - (x_j + t\Delta x_j) &\geq 0,01(\beta_j - x_j), \end{aligned}$$

para todo j , e que

$$(y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s) + t\Delta w \geq 0,01(y, z, \lambda, \xi, \eta, \mu, \zeta, s).$$

De acordo com Svanberg [36], o novo ponto também deve melhorar o vetor resíduo $\delta(w)$ definido pelo lado esquerdo das condições KKT (4.12a) - (4.12i) em relação ao ponto anterior. Portanto, toma-se τ como o maior número da sequência $t, t/2, t/4, t/8, \dots$ tal que

$$\|\delta(w + \tau\Delta w)\|_2 < \|\delta(w)\|_2,$$

Observe-se que sempre é possível obter este tamanho de passo τ pois a direção de Newton é uma direção de descida para $\|\delta(w)\|_2$.

Sejam dados o ponto $w^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, \lambda^{(1)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \mu^{(1)}, \zeta^{(1)}, s^{(1)})$, o parâmetro $\varepsilon^{(1)}$ e o parâmetro $0 < \epsilon < 1$ muito pequeno. Como exemplo, pode-se tomar

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &= 1, \quad x_j^{(1)} = \frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j), \quad y_i^{(1)} = 1, \quad z^{(1)} = 1, \quad \zeta^{(1)} = 1, \quad \lambda_i^{(1)} = 1, \quad s_i^{(1)} = 1, \\ \xi_j^{(1)} &= \max\{1, 1/(x_j^{(1)} - \alpha_j)\}, \quad \eta_j^{(1)} = \max\{1, 1/(\beta_j - x_j^{(1)})\}, \quad \mu_i^{(1)} = \max\{1, c_i/2\}. \end{aligned}$$

O algoritmo abaixo detalha o método de pontos interiores para resolver o subproblema (4.10).

Algoritmo 2 – Pontos interiores primal - dual

Enquanto $\varepsilon^\ell > \epsilon$, faça

Passo 1 : Dado ε^ℓ e w^ℓ que verificam (4.12j) - (4.12n),

Calcule Δw^ℓ conforme descrito na Seção 4.4.1.

Passo 2: Calcule o tamanho de passo τ^ℓ conforme descrito na Seção 4.4.2.

Passo 3: $w^{\ell+1} \leftarrow w^\ell + \tau^\ell \Delta w^\ell$.

Passo 4: Se $\|\delta(w^{\ell+1})\|_\infty < 0,9\varepsilon^\ell$, faça

$$\varepsilon^{(\ell+1)} \leftarrow 0,1\varepsilon^\ell$$

Caso contrário

$$\varepsilon^{(\ell+1)} \leftarrow \varepsilon^\ell.$$

$$\ell \leftarrow \ell + 1.$$

Na implementação deste trabalho, o valor de ϵ foi 10^{-5} .

4.5 Programação Linear Sequencial

A Programação linear sequencial (PLS) é um método iterativo em que, a cada iteração, resolve-se um subproblema linear que aproxima o problema de otimização original. Após a definição do ponto inicial, a função objetivo e suas funções do conjunto factível são linearizadas e o problema é resolvido com um método de programação linear. Essa metodologia continua até atingir algum critério de convergência.

Nesta seção, apresentamos o método de programação linear sequencial proposto por Gomes e Senne [16], que é globalmente convergente. O método de PLS é aplicado ao seguinte problema geral de otimização,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && C(\mathbf{x}) \\ &\text{s. a} && g(\mathbf{x}) = 0, \\ &&& L \leq \mathbf{x} \leq U \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções com derivadas parciais primeiras Lipschitz contínuas, L e U são vetores que contêm, respetivamente, os limitantes inferiores e superiores das variáveis.

A função objetivo e suas restrições de (4.18) são linearizadas numa vizinhança no ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ segundo

$$C(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \approx C(\mathbf{x}) + \nabla C(\mathbf{x})^T \mathbf{s}, \quad (4.19)$$

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \approx g(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}) \mathbf{s}, \quad (4.20)$$

onde $A(\mathbf{x}) = [\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})]^T$ é a matriz Jacobiana das restrições. Logo, dado um ponto $\mathbf{x}^{(k)}$, podemos aproximar (4.18) pelo problema de otimização linear

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && C(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla C(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} \\ &\text{s. a} && A(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + g(\mathbf{x}^{(k)}) = 0, \\ &&& L \leq \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s} \leq U, \end{aligned} \quad (4.21)$$

De acordo com Gomes e Senne [16], essa aproximação tem alguns inconvenientes. Primeiro, o problema (4.21) pode ser ilimitado, inclusive quando (4.18) tem solução ótima. Além disso, as funções lineares usadas para definir (4.21) podem ser aproximações pobres das funções C e g em um ponto $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ que esteja muito longe de $\mathbf{x}^{(k)}$. Para superar isso, é comum exigir que o passo pertença a uma região de confiança, $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq \delta$, onde $\delta > 0$, raio de confiança, é atualizado a cada iteração do algoritmo. Incluindo a região de confiança no problema (4.21), obtemos o problema

$$\begin{aligned} &\min \nabla C(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} \\ &\text{s. a} && A(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + g(\mathbf{x}^{(k)}) = 0, \\ &&& \max\{-\delta_k, L - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \mathbf{s} \leq \min\{\delta_k, U - \mathbf{x}^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Na versão da programação sequencial linear proposta por Gomes e Senne [16], o passo \mathbf{s}_c é obtido dependendo dos valores da redução da infactibilidade associada ao problema (4.22). Para formular o problema da redução da infactibilidade, usamos a norma ℓ^1 e obtemos

$$\begin{aligned} \min \quad & M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}) = \|A(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + g(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 \\ \text{s.a.} \quad & \max\{-0, 8\delta_k, L - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \mathbf{s} \leq \min\{0, 8\delta_k, U - \mathbf{x}^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Essa escolha da norma ℓ^1 , conforme Gomes e Senne [16], nos permite escrever o problema (4.23) como o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{z} \\ \text{s.a.} \quad & A(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{z} = -g(\mathbf{x}^{(k)}), \\ & \max\{-0, 8\delta_k, L - \mathbf{x}^{(k)}\} \leq \mathbf{s} \leq \min\{0, 8\delta_k, U - \mathbf{x}^{(k)}\} \\ & 0 \leq \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

em que

$$\mathbf{D}_j(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{cases} \mathbf{I}_{i_j}, & \text{se } g_{i_j}(\mathbf{x}^{(k)}) < 0, \\ -\mathbf{I}_{i_j}, & \text{se } g_{i_j}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0, \end{cases}$$

é a coluna j da matriz \mathbf{D} , construída a partir do conjunto de índices $\{i_1, i_2, \dots, i_{m_I}\}$ correspondentes aos valores não nulos de $g(\mathbf{x}^{(k)})$; o vetor coluna \mathbf{I}_{i_j} representa a coluna i_j da matriz identidade \mathbf{I} ; e $\mathbf{e}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$. Observa-se que uma solução básica factível para (4.24) pode ser obtida tomando-se $\mathbf{s} = 0$ e $\mathbf{z}_j = |g_{i_j}(\mathbf{x}^{(k)})|$, $j = 1, \dots, m_I$.

Segundo Gomes e Senne [16], o problema (4.18) envolve dois objetivos que precisam ser tratados a cada iteração do algoritmo: a redução da função objetivo $C(\mathbf{x})$ e a redução da infactibilidade, que é medida por $\varphi(\mathbf{x}) := \|g(\mathbf{x})\|$. Se $C(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) < C(\mathbf{x}^{(k)})$ e $\varphi(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) < \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$, é claro que $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é uma melhor aproximação que $\mathbf{x}^{(k)}$ para a solução ótima do problema (4.18). No entanto, nenhuma conclusão direta pode ser obtida se uma dessas funções for reduzida, enquanto a outra for aumentada. Para lidar com essa situação, adota-se uma função de mérito para decidir se $\mathbf{x}^{(k)}$ pode ser substituído por $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$. Neste trabalho, seguimos a sugestão de [16] e definimos a função de mérito como

$$\Psi(\mathbf{x}, \theta) := \theta C(\mathbf{x}) + (1 - \theta)\varphi(\mathbf{x}), \quad (4.25)$$

em que o parâmetro θ , que é atualizado a cada iteração, determina se a otimalidade terá maior relevância sobre a infactibilidade ou vice-versa.

Para estabelecer o critério de aceitação do passo \mathbf{s}_c , utilizamos a redução da função de mérito para os problemas (4.18) e (4.22) como apresentado a seguir.

a) A redução real da função de mérito Ψ associada ao problema (4.18), entre $\mathbf{x}^{(k)}$ e $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$, é definida por

$$\mathbf{A}_{red} := \theta A_{red}^{opt} + (1 - \theta)A_{red}^{fct},$$

em que $A_{red}^{opt} = C(\mathbf{x}^{(k)}) - C(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c)$ e $A_{red}^{fct} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) - \varphi(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c)$ são a redução real da função objetivo e da infactibilidade, respectivamente.

- b) A redução prevista da função de mérito Ψ associada ao problema (4.22), entre $\mathbf{x}^{(k)}$ e $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$, é expressa por

$$P_{red} := \theta P_{red}^{opt} + (1 - \theta) P_{red}^{fct},$$

em que $P_{red}^{opt} = -\nabla C(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s}_c$ e $P_{red}^{fct} = M(\mathbf{x}^{(k)}, 0) - M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c)$ são a redução prevista da função objetivo e da infactibilidade, respectivamente.

Segundo Gomes e Senne [16], o parâmetro θ é atualizado em cada iteração tomando-se

$$\theta_k = \min\{\theta_k^{large}, \theta_k^{sup}\},$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_k^{large} &= \left[1 + \frac{N}{(k+1)^{1,1}}\right] \theta_k^{\min}, \\ \theta_k^{\min} &= \min\{1, \theta_0 \cdots \theta_{k-1}\}, \\ \theta_k^{sup} &= \sup\{\theta \in [0, 1] \mid P_{red} \geq 0, 5 P_{red}^{fct}\} \\ &= \begin{cases} 0, 5 \left(\frac{P_{red}^{fct}}{P_{red}^{fct} - P_{red}^{opt}} \right), & \text{se } P_{red}^{opt} \leq \frac{1}{2} P_{red}^{fct} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

A constante $N \geq 0$, usada para calcular θ_k^{large} , pode ser ajustada para permitir uma redução não monótona de θ . Na implementação deste trabalho, o valor de N foi 10^6 .

Em cada iteração do algoritmo do PLS, dados os valores de A_{red} e P_{red} , aceitamos ou recusamos o passo \mathbf{s}_c de acordo com o seguinte critério:

- O passo \mathbf{s}_c é aceito se $A_{red} \geq 0, 1 P_{red}$. Neste caso, atualizamos a solução aproximada do problema $\mathbf{x}^{(k)}$ por $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$. Além disso, se $A_{red} \geq 0, 5 P_{red}$, aumentamos o raio da região de confiança, tomando

$$\delta_{k+1} = \min\{2, 5\delta_k; \|U - L\|_\infty\}.$$

- Caso $A_{red} < 0, 1 P_{red}$, o passo \mathbf{s}_c é recusado. Neste caso, reduzimos o raio da região de confiança fazendo

$$\delta_{k+1} = \max\{0, 25\|\mathbf{s}_c\|_\infty; 0, 1\delta_k\}.$$

Dados o ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in [L, U]$, um raio inicial para a região de confiança $\delta_0 \geq \delta_{\min} > 0$, $\theta_0 = \theta_{\max} = 1$ e $k = 0$, o algoritmo abaixo descreve o método da programação linear sequencial.

Algoritmo 3 – Programação Linear Sequencial

Enquanto o critério de parada não é satisfeito, faça

Se o problema (4.22) é factível, faça

Determine s_c , a solução de (4.22).

Caso contrário, faça

Determine s_c , a solução de (4.24).

Determine $\theta_k = \min\{\theta_k^{large}, \theta_k^{\sup}, \theta^{\max}\}$

Se $A_{red} \geq 0, 1P_{red}$, faça

$$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + s_c.$$

Se $A_{red} \geq 0, 5P_{red}$, faça

$$\delta_{k+1} \leftarrow \min\{2, 5\delta_k; \|U - L\|_{\infty}\}.$$

Caso contrário, faça

$$\delta_{k+1} \leftarrow \max\{\delta_{\min}, \delta_k\}.$$

Recalcule $\nabla g, D$ e ∇C .

$$\theta_{\max} \leftarrow 1$$

$$k \leftarrow k + 1$$

Caso contrário, faça

$$\delta_k \leftarrow \max\{0, 25\|s_c\|_{\infty}; 0, 1\delta_k\}.$$

$$\theta_{\max} \leftarrow \theta_k.$$

No trabalho de Gomes e Senne [16], a determinação do passo s_c depende da solução do problema (4.24). Felizmente, o problema linear obtido a partir dos problemas de otimização topológica são quase sempre factíveis, o que nos permite tentar resolvê-lo primeiro para obter o passo s_c . Caso contrário, se o problema linear for infactível, obtemos o passo s_c resolvendo o problema (4.24). Na implementação feita neste trabalho, adotamos esse critério para determinar o passo s_c . Além disso, os problemas (4.24) e (4.22) são resolvidos usando o método de pontos interiores Primal - Dual.

4.6 Método de Gradiente Espectral Projetado não Monótono

No método de gradiente projetado clássico, minimiza-se a função objetivo sobre um conjunto factível Ω que possui uma estrutura simples, exigindo-se, pelo menos, que Ω seja convexo e fechado. Em notação matemática, o problema é definido por

$$\min C(\mathbf{x}) \quad \text{sujeita a} \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

em que $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Se o conjunto Ω é convexo e fechado, pode-se mostrar que, para todo ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, existe uma projeção $P_\Omega[\mathbf{x}]$ de \mathbf{x} sobre Ω que é única, isto é,

$$\mathbf{y} = P_\Omega[\mathbf{x}] = \arg \min_{\mathbf{z} \in \Omega} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2. \quad (4.26)$$

Este método utiliza o método do gradiente, em que as iterações são obtidas segundo

$$x^{(k+1)} = P_\Omega(x^{(k)} - \alpha_k \nabla C(x^{(k)})), \quad k = 0, 1, \dots$$

O comprimento do passo, $\alpha_k > 0$, é calculado utilizando uma busca linear para o caso com restrições. O método procura um valor de comprimento de passo para obter um decréscimo da função

$$\varphi_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_k(\alpha) = C(x^{(k)}(\alpha)),$$

em que

$$x^{(k)}(\alpha) = P_\Omega(x^{(k)} - \alpha \nabla C(x^{(k)}))$$

é o arco de projeção. Para encontrar α , podemos realizar uma minimização unidimensional na forma

$$\text{minimizar} \quad \varphi_k(\alpha) \quad \text{sujeito a} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Outra estratégia para achar α é usar a condição de Armijo, segundo a qual deve-se calcular um comprimento de passo que resulte em um decréscimo suficiente da função $C(x)$ em relação ao valor de $C(x^{(k)})$, ou seja,

$$C(x^{(k)}(\alpha)) \leq C(x^{(k)}) + \gamma \nabla C(x^{(k)})^T (x^{(k)}(\alpha) - x^{(k)}).$$

em que $\gamma \in (0, 1)$. A ideia é que isto pode ser bem mais econômico do ponto de vista computacional do que a minimização unidimensional.

Neste trabalho, além da PLS e do MMA, empregamos o método de Gradiente Espectral Projetado não monótono ou *Nonmonotone Spectral Project Gradient* (SPG) [7], que é a combinação do passo de Barzilai-Borwein [2] com a busca linear não monótona de Grippo, Lampariello, e Lucidi [19]. No trabalho de Raydan [29], a convergência do método de Barzilai e Borwein foi estabelecida para uma função quadrática estritamente convexa com qualquer número de variáveis (em sua tese [28], Raydan apresentou a convergência do método Barzilai e Borwein para o caso bidimensional). A eficiência do método SPG está associada à aproximação da Hessiana da função objetivo do problema e à forma de projetar um ponto arbitrário no conjunto factível do problema.

4.7 Passo Espectral e Busca Linear não Monótona

No método SPG, o passo espectral é calculado resolvendo-se o seguinte problema de quadrados mínimos:

$$\lambda_k = \arg \min_{\lambda} \frac{1}{2} \|B_k(\lambda)s_{k-1} - y_{k-1}\|_2^2,$$

em que $s_{k-1} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$, $y_{k-1} = \nabla C(x^{(k)}) - \nabla C(x^{(k-1)})$ e $B_k(\lambda) = \lambda^{-1}\mathbf{I}$ é a matriz diagonal que fornece uma aproximação da Hessiana da função objetivo. A solução desse problema corresponde ao quociente inverso de Rayleigh,

$$\lambda_k = \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}}.$$

A busca linear monótona de Armijo, que exige decréscimo suficiente em toda iteração, pode não possuir um bom desempenho. Para amenizar isto, Grippo, Lampariello, e Lucidi [19] introduziram a busca linear não monótona, que exige um decréscimo a cada M iterações, o que permite que a função objetivo aumente em algumas iterações. As iterações do método SPG são da forma $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d_k$, onde $d_k = P_{\Omega}(x^{(k)} - \lambda_k \nabla C(x^{(k)})) - x^{(k)}$ e α_k é um número positivo tal que $x^{(k+1)}$ satisfaz a condição de Armijo não monótona dada por

$$C(x^{(k+1)}) \leq C_{\max} + \alpha_k \gamma_{arm} \nabla C(x^{(k)})^T d_k,$$

em que $C_{\max} = \max\{C(x^{(k-j)}) \mid 0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}\}$. O parâmetro $\gamma_{arm} > 0$ é a constante de Armijo. Na implementação deste trabalho, o valor usado de γ_{arm} foi 10^{-4} . Na prática, a determinação do comprimento de passo α_k é feita através do Algoritmo 5, proposto por Birgin, Martínez e Raydan [7].

No Algoritmo 4, descrevemos como calcular o passo espectral em cada iteração, considerando as salvaguardas λ_{\min} e λ_{\max} , que evitam valores perto de zero e valores muito grandes, respectivamente. Supomos que sejam dados $x_0 \in \Omega$, $\epsilon > 0$, $0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max}$, $\lambda_0 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $\gamma_{arm} \in (0, 1)$, $M \geq 1$ e $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$.

Algoritmo 4 – Gradiente Espectral Projetado não Monótono

Enquanto $\|P_{\Omega}(x^{(k)} - \nabla C(x^{(k)})) - x^{(k)}\|_{\infty} > \epsilon$,

Faça $d_k \leftarrow P_{\Omega}(x^{(k)} - \lambda_k \nabla C(x^{(k)})) - x^{(k)}$.

Usando o Algoritmo 5, determine α_k .

Faça $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + \alpha_k d_k$.

Faça $s_k \leftarrow x^{(k+1)} - x^{(k)}$ e $y_k \leftarrow \nabla C(x^{(k+1)}) - \nabla C(x^{(k)})$.

Se $s_k^T y_k \leq 0$, faça $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_{\max}$.

Senão, faça $\lambda_{k+1} \leftarrow \min\{\lambda_{\max}, \max\{\lambda_{\min}, \frac{s_k^T s_k}{s_k^T y_k}\}\}$.

Faça $k \leftarrow k + 1$.

O Algoritmo 5 descreve a busca linear em detalhe.

Algoritmo 5 – Busca linear não Monótona

Faça $C_{\max} \leftarrow \max\{C(x^{(k-j)}) \mid 0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}\}$, $\delta \leftarrow \nabla C(x^{(k)})^T d_k$ e $\alpha \leftarrow 1$.

Faça $x_+ \leftarrow x^{(k)} + \alpha d_k$.

Passo 1: Se $C(x_+) \leq C_{\max} + \gamma_{\text{arm}} \alpha \delta$, faça $\alpha_k \leftarrow \alpha$ e termine.

Faça $\alpha_{\text{tmp}} \leftarrow -0,5\alpha^2\delta/(C(x_+) - C(x^{(k)}) - \alpha\delta)$.

Se $\alpha_{\text{tmp}} \in [\sigma_1, \sigma_2\alpha]$, faça $\alpha \leftarrow \alpha_{\text{tmp}}$.

Caso contrário, faça $\alpha \leftarrow \alpha/2$ e vá para o Passo 1.

Para obter α_{tmp} , calculamos o mínimo da função interpoladora quadrática unidimensional $q(w)$ tal que $q(0) = C(x^{(k)})$, $q(\alpha) = C(x^{(k)} + \alpha d_k)$ e $q'(0) = \nabla C(x^{(k)})^T d_k$. Note que o processo de salvaguarda emprega o intervalo $[\sigma_1, \sigma_2\alpha]$. Isto significa que, quando α_{tmp} não pertence a esse intervalo, julga-se que a interpolação não é confiável e o processo mais conservador de bissecção é utilizado.

4.8 Projecção sobre o conjunto factível

A projecção de um ponto sobre um conjunto D convexo e fechado é equivalente a resolver um problema de programação quadrática sobre restrições convexas, que pode ser tão difícil quanto o problema original. Por esta razão, é recomendável usar o método SPG quando o cálculo da projecção sobre o conjunto factível seja fácil.

Descrevemos a seguir a metodologia do cálculo da projecção de um ponto sobre a restrição de volume do problema de OT que foi proposta por Tavakoli [38].

Suponha que \mathbf{y} seja a projecção de x sobre D , isto é

$$\mathbf{y} = P_D[\mathbf{x}] = \arg \min_{\mathbf{z} \in D} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2, \quad (4.27)$$

em que $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $0 < l_i \leq u_i < \infty$. No problema acima, \mathbf{y} também é o minimizador único da função Lagrangiana com restrições de caixa:

$$L(\mathbf{z}; \beta) = \frac{1}{2} \|\mathbf{z}\|_2^2 - \mathbf{x}^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \beta(\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b), \quad \mathbf{l} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{u}, \quad (4.28)$$

em que $\beta \in \mathbb{R}$ é o multiplicador de Lagrange associado à restrição do volume. Para qualquer β fixo, (4.28) é um problema de minimização convexa separável com respeito a \mathbf{z} , que tem a solução explícita

$$\mathbf{z}(\beta) = \max\{\mathbf{l}, \min\{\mathbf{x} - \beta \mathbf{a}, \mathbf{u}\}\}, \quad (4.29)$$

em que os operadores \max e \min são entendidos como vetores. Para determinar β , que é único, precisamos de um algoritmo unidimensional [27] que verifique a restrição do volume

$$g(\beta) = \mathbf{a}^T \mathbf{z}(\beta) - b = 0. \quad (4.30)$$

Considerando as equações (4.29) e (4.30), pode-se notar que o gráfico de $g(\beta)$ tem $2n$ pontos de descontinuidade em

$$\beta_i^l = (x_i - l_i)/a_i, \quad \beta_i^u = (x_i - u_i)/a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $l_i \leq u_i$ e $a_i > 0$ para todo i , temos que $\beta_i^u \leq 0 \leq \beta_i^l$. Deste modo, cada $z_i(\beta)$ em (4.29) pode ser expresso da seguinte forma:

$$z_i(\beta) = \begin{cases} u_i, & \text{se } \beta < \beta_i^u \\ x_i - \beta a_i, & \text{se } \beta_i^u \leq \beta \leq \beta_i^l \\ l_i, & \text{se } \beta > \beta_i^l. \end{cases} \quad (4.31)$$

Note que $z_i(\beta)$ é uma função linear, contínua por partes e não crescente de β . Assim, $g(\beta)$ é uma função linear, contínua por partes e não crescente de β .

Observa-se que, a raiz β^* de $g(\beta)$ pode ser encontrada no intervalo $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, com $\beta_{\min} \leq 0 \leq \beta_{\max}$, em que $\beta_{\min} = \min\{\beta_i^u\}$ e $\beta_{\max} = \max\{\beta_i^l\}$. Além disso, β^* é única no intervalo $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, pois a função $z_i(\beta)$ é estritamente não crescente. Para o cálculo da raiz da equação (4.30), adotamos o método Brent [9], que é uma combinação simples do método da Bisseção, da Secante e Interpolação Quadrática Inversa, em que a função não precisa ser diferenciável. Este método provou ser muito eficiente e robusto na prática e atualmente é aceito como um método padrão para problema de busca de raiz unidimensional. Os detalhes da implementação encontram-se em [27].

5 Algoritmos de fase ativa alternada para problemas com múltiplos materiais

A formulação do problema de OT com múltiplos materiais do Capítulo 3 apresenta algumas dificuldades práticas. Como cada material é representado por uma variável, o número de variáveis do problema é multiplicado por m . Além disso, a restrição de volume é imposta para cada material e a seleção do material é representada por restrições lineares, o que também gera um aumento significativo no custo computacional para obter a solução numérica correspondente. Para superar essas dificuldades, Tavakoli e Mohseni [37] propuseram o algoritmo de fase ativa alternada ou *Alternating active-phase algorithm*.

Neste trabalho, desenvolvemos novos algoritmos de fase ativa alternada para resolver a formulação matemática feita pelos métodos SIMP com múltiplas fases do Capítulo 3.

O método da fase ativa alternada consiste em decompor o problema de otimização topológica com múltiplos materiais em uma série de subproblemas de OT com dois materiais, que são resolvidos parcialmente, de maneira sequencial, por algum método de otimização. O acoplamento entre estas soluções incompletas é assegurado usando uma estratégia de iteração externa baseada no *método da descida por bloco de coordenadas* (DCB) ou *Block coordinate descent* [6].

O método da fase ativa é aplicado ao problema de minimização da flexibilidade de uma estrutura com múltiplos materiais usando o SIMP com múltiplas fases de Hvejsel e Lund, utilizando o vazio como um material. Este problema é dado por

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\
 &\text{s a} && \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\
 &&& \sum_{e=1}^{nel} x_{ej} v_e - \eta_j \mathbf{V} = 0, \quad j = 1, \dots, m \\
 &&& \sum_{j=1}^m x_{ej} = 1, \quad e = 1, \dots, nel \\
 &&& 0 \leq x_{ej} \leq 1, \quad \forall e, j
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

O problema (5.1) é decomposto em subproblemas nos quais os vetores de variáveis correspondentes a dois materiais, digamos \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b , denominados fases ativas, são as variáveis de projeto, e as outras $m - 2$ fases são fixadas.

Uma vez que, para cada elemento e , impomos a restrição $\sum_{j=1}^m x_{ej} = 1$ (vide a

equação (3.8)), o limitante superior para as variáveis x_{ea} e x_{eb} é dado por

$$r_{ab}^e = 1 - \sum_{j=1, j \neq a, b}^m x_{ej}. \quad (5.2)$$

Considerando ainda que

$$x_{eb} = r_{ab}^e - x_{ea}, \quad (5.3)$$

o problema de OT com múltiplos materiais (5.1) fica reduzido a

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_a} \quad & \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ \text{s a} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \sum_{e=1}^{nel} x_{ea} v_e - \eta_a \mathbf{V} = 0 \\ & 0 \leq x_{ea} \leq r_{ab}^e, \quad \forall e. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para resolver o problema (5.4), escolhemos um dos algoritmos de otimização de primeira ordem apresentados no Capítulo 4. O algoritmo é truncado quando o número máximo de iterações é atingido e o vetor obtido \mathbf{x}_a é chamado de solução inexata. Neste trabalho, usamos uma única iteração para truncar o algoritmo de otimização que resolve o problema (5.4).

Em seguida, apresentamos o algoritmo de fase ativa para resolver o problema de OT (5.1).

Seja dado o ponto inicial \mathbf{x}^0 tal que $x_{ej}^0 \in [0, 1]$, $\forall e, j$, e $\sum_{j=1}^m x_{ej}^0 = 1$, $\forall e$. Sejam dadas, também, as frações de volume $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ que cumprem $\sum_{j=1}^m \eta_j = 1$, os módulos de Young $\{\mathbf{E}_j\}_{j=1}^m$, ordenados de forma não crescente, o parâmetro $\epsilon > 0$ e $norm = 2\epsilon$.

Algoritmo 6 – Fase ativa alternada (incluindo o vazio como um material)

Enquanto $norm > \epsilon$, faça

 Faça $\mathbf{C}(\mathbf{x}^{\text{old}}) \leftarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})$.

 Para $a = 1$ até $m - 1$, faça

 Para $b = a + 1$ até m , faça

$$r_{ab} \leftarrow 1 - \sum_{j=1, j \neq a, b}^m \mathbf{x}_j.$$

$\mathbf{x}_a \leftarrow$ a solução inexata do subproblema (5.4)

$$\mathbf{x}_b \leftarrow r_{ab} - \mathbf{x}_a.$$

$$\text{Faça } norm \leftarrow \frac{|\mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}(\mathbf{x}^{\text{old}})|}{|\mathbf{C}(\mathbf{x})|}.$$

Note que o algoritmo acima resolve parcialmente $m(m - 1)/2$ subproblemas de OT com dois materiais, usando algum método de otimização de primeira ordem do

Capítulo 4. Esse esquema é executado sequencialmente, de forma similar às iterações do método de Gauss Seidel.

Observe que, no problema (5.1), o vazio é tratado como um material artificial. Como alternativa pode-se adotar a formulação do problema da minimização da flexibilidade de uma estrutura com múltiplos materiais não artificiais, que é representada em (3.10).

Aplicando o método da fase ativa alternada ao problema (3.10), no qual o vazio não é considerado um material, decomposmos esse problema em subproblemas em que o vetor correspondente a um material, digamos \mathbf{x}_a , denominado fase ativa, é a variável de projeto e as outras $m - 1$ fases são fixadas.

Em seguida, para cada elemento e , impomos a restrição $\sum_{j=1}^m x_{ej} \leq 1$ (vide a desigualdade (3.7)), bem como o limitante superior para a variável x_{ea} , que é dado por

$$r_a^e = 1 - \sum_{j=1, j \neq a}^m x_{ej}.$$

Deste modo, o problema de otimização topológica com múltiplos materiais fica reduzido a

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_a} \quad & \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ \text{s a} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \sum_{e=1}^{nel} x_{ea} v_e - \eta_a \mathbf{V} \leq 0 \\ & 0 \leq x_{ea} \leq r_a^e, \quad \forall e. \end{aligned} \tag{5.5}$$

A solução inexata do problema (5.5) é obtida seguindo-se a mesma estratégia adotada para o problema (5.4). Apresentamos a seguir o algoritmo de fase ativa para resolver o problema (3.10).

Seja dado o ponto inicial \mathbf{x}^0 tal que $x_{ej}^0 \in [0, 1]$, $\forall e, j$, e $\sum_{j=1}^m \mathbf{x}_j^0 \leq 1$, $\forall e$. Sejam dadas, também, as frações de volume $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ que cumprem $\sum_{j=1}^m \eta_j < 1$, os módulos de Young $\{\mathbf{E}_j\}_{j=1}^m$ ordenados de forma não crescente, o parâmetro $\epsilon > 0$ e $norm = 2\epsilon$.

Algoritmo 7 – Fase ativa alternada (múltiplos materiais não artificiais)

Enquanto $norm > \epsilon$, faça

 Faça $\mathbf{C}(\mathbf{x}^{\text{old}}) \leftarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})$.

 Para $a = 1$ até m , faça

$$r_a \leftarrow 1 - \sum_{j=1, j \neq a}^m \mathbf{x}_j.$$

$\mathbf{x}_a \leftarrow$ a solução inexata do subproblema (5.5)

$$\text{Faça } norm \leftarrow \frac{|\mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}(\mathbf{x}^{\text{old}})|}{|\mathbf{C}(\mathbf{x})|}.$$

Note que o Algoritmo 7 resolve parcialmente m subproblemas de OT com dois materiais, usando algum método de otimização apresentado no Capítulo 4. Sendo assim, o custo computacional por iteração global é menor do que o obtido com o emprego do Algoritmo 6. Além disso, o Algoritmo 7 pode ser executado de forma independente (em paralelo), semelhante às iterações do método Jacobi. Em seguida, apresentamos a versão Jacobi desse algoritmo

Algoritmo 8 – Fase ativa alternada versão Jacobi

Enquanto $norm > \epsilon$, faça

Faça $\mathbf{C}(\mathbf{x}^{\text{old}}) \leftarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{s} = 0$.

Para $a = 1$ até m , faça

$$r_a \leftarrow 1 - \sum_{j=1, j \neq a}^m \mathbf{x}_j.$$

$\mathbf{s} \leftarrow \mathbf{s} +$ a solução inexata do subproblema (5.5)

Faça $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{s}/m$.

$$\text{Faça } norm \leftarrow \frac{|\mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}(\mathbf{x}^{\text{old}})|}{|\mathbf{C}(\mathbf{x})|}.$$

O algoritmo de fase ativa alternada para resolver o problema de OT com múltiplos materiais usando o SIMP com múltiplas fases de Cai *et al.* [12] é semelhante ao Algoritmo 7 acima.

O algoritmo de fase ativa alternada está relacionado ao método da descida por bloco de coordenadas, que é um método antigo de otimização [6]. Nos trabalhos de Cassioli *et al.* [13] e [20] é apresentada uma demonstração da convergência do método de descida por bloco de coordenadas, sob certas hipóteses, que poderia ser usada para estabelecer a teoria da convergência do algoritmo de fase ativa alternada.

6 Resultados Numéricos

Neste capítulo, mostramos os resultados da implementação dos métodos da Programação Linear Sequencial, das Assíntotas Móveis, do Gradiente Espectral Projetado não Monótono e da Fase Ativa Alternada, que foram aplicados a problemas clássicos de otimização topológica, como a viga em balanço, a viga *Messerschmitt-Bölkaw-Blohm* (MBB) e a estrutura da ponte. Cada um desses problemas de OT foi modelado com o SIMP com múltiplas fases incluindo o vazio como um material (Hvejsel e Lund), SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund), SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) e o SIMP ordenado. Em todos os problemas de OT, os domínios foram discretizados em elementos finitos retangulares de 4 nós, com dois graus de liberdade. Nas simulações numéricas, foram utilizados os dados das propriedades dos materiais extraídos dos trabalhos de Tavakoli e Mohseni [37]. O código fonte dos algoritmos de Svanberg (MMA) e de Gomes e Senne (PLS) foram fornecidos pelos autores, e também foram empregados.

A metodologia aqui proposta e todas as rotinas necessárias para a aplicação do método dos elementos finitos foram implementados em Matlab. Os resultados foram obtidos em um computador com processador Intel Core i7 - 3930K (3.2 GHz), com 32 GB de memória RAM. As exceções serão devidamente indicadas nas seções (6.2.7) e (6.2.9).

6.1 Descrição dos problemas testados

Nesta seção, descrevemos brevemente os problemas de OT usados nos testes desse capítulo, os quais são apresentados na Figura 9. Em todos os casos, supomos que a estrutura tem 1 cm de espessura, que o coeficiente de Poisson é igual a 0,3 e que os módulos de Young dos materiais que as compõem são $\mathbf{E}_1 = 4 \text{ N/cm}^2$, $\mathbf{E}_2 = 2 \text{ N/cm}^2$ e $\mathbf{E}_3 = 1 \text{ N/cm}^2$, representados na topologia ótima com as cores vermelho, azul e verde, respectivamente. Por sua vez, o módulo de Young artificial $\mathbf{E}_{\min} = 10^{-3}$ é representado na topologia ótima com cor branca. Todas as estruturas ótimas devem conter, no máximo, 40% do volume total do domínio. Os volumes fracionários dos materiais que a compõem são $\eta_1 = 0,2$, $\eta_2 = 0,1$, $\eta_3 = 0,1$.

A *viga em balanço* tem um apoio (engaste) na lateral esquerda, impedindo os deslocamentos nodais tanto na horizontal quanto na vertical, bem como uma força $F = 1\text{N}$ aplicada no ponto inferior da aresta lateral direita. O comprimento e a largura do domínio são, respectivamente, 96 cm e 48 cm. O domínio é discretizado em $96 \times 48 = 4608$ elementos finitos.

A *estrutura da ponte* é apoiada nos cantos inferiores, de tal forma que apenas os

deslocamentos horizontais são permitidos no canto direito, e os deslocamentos horizontais e verticais do canto esquerdo são impedidos. A estrutura tem uma força de magnitude $2F$ aplicada para baixo no centro da borda inferior e duas forças de magnitude F aplicadas na borda inferior, com distribuição simétrica. Em nossos testes, usamos $F = 1N$. O comprimento e a largura do domínio são, respectivamente, 192 cm e 96 cm. Devido à simetria, consideramos apenas a metade direita da estrutura, que é discretizada em $96 \times 96 = 9216$ elementos finitos quadrados.

A viga MBB é apoiada nos cantos inferiores, de tal forma que apenas os deslocamentos horizontais são permitidos no canto direito, e os deslocamentos horizontais e verticais do canto esquerdo são impedidos. Uma carga externa $F = 1N$ é aplicada para baixo no centro da borda superior. O comprimento e a largura do domínio são, respectivamente, 288 cm e 48 cm. Devido à simetria, consideramos apenas a metade direita da estrutura, que é discretizada em $144 \times 48 = 6912$ elementos finitos.

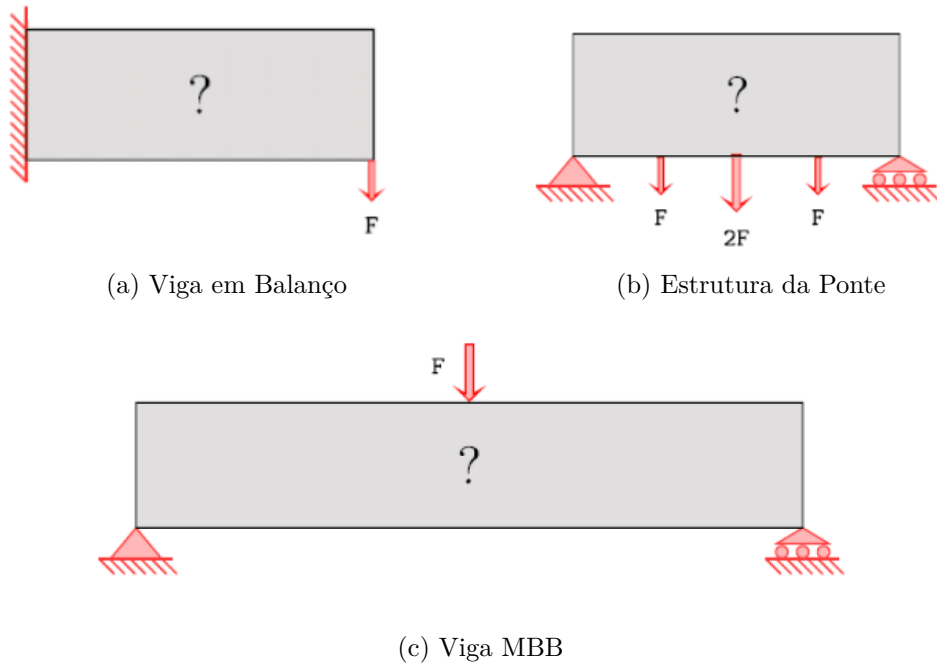


Figura 9 – Problemas de Otimização Topológica

Os problemas de otimização topológica não são convexos, de modo que possuem muitos minimizadores locais. Sendo assim, para pontos iniciais diferentes, é possível encontrar mínimos locais diferentes.

Para obter a melhor solução do problema de OT, usamos a estratégia de aumento gradativo do parâmetro de penalização p , isto é, criamos uma sequência finita dos valores dos parâmetros de penalização, $r^0, r^1, r^2, r^3, \dots$, até atingir o valor 3, que é o valor tradicional do parâmetro da penalização nos problemas de OT. Além disso, o ponto inicial para cada valor do parâmetro de penalização é definido como o vetor de densidades

filtradas obtido para o valor do parâmetro de penalização anterior.

Nos algoritmos de otimização, o número de iterações para cada valor do parâmetro de penalização é definido por

$$\text{Número de iterações} = \begin{cases} 20, & \text{se } p = 1 \\ 3, & \text{se } 1 < p < 3 \\ 2000 & \text{se } p = 3 \end{cases} \quad (6.1)$$

em que $p = \min_{n \in \mathbb{N}} \{r^{n-1}, 3\}$. A razão da sequência dos valores do parâmetro da penalização é $r = 1,02$ e o número máximo de iterações para os algoritmos de otimização, considerando a regra acima, é 2185. A escolha de (6.1) foi obtida heurísticamente, com base em experimentos.

Os raios do filtro para a viga em balanço, viga MBB e estrutura da ponte correspondem a 6, 7 e 9 vezes o comprimento da aresta dos elementos, respectivamente. Além disso, definimos um ponto inicial factível tomando três vetores com coordenadas $x_{e1} = 0,2, \forall e; x_{e2} = 0,1, \forall e; x_{e3} = 0,1; \forall e$, respectivamente. Cada um desses três vetores corresponde a um material usado nas estruturas.

No método da programação linear sequencial, o raio de confiança é 0,1 e usamos o parâmetro $\delta_{\min} = 0,1$. Nos métodos da fase ativa alternada, o número máximo de iterações para os algoritmos de otimização de primeira ordem aplicados a cada subproblema é igual 1.

Em todas as formulações matemáticas do problema de otimização topológica, utiliza-se o filtro da média ponderada das densidades $\tilde{\mathbf{x}}$ na função objetivo $\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{x}})$ e nas restrições de volume $\sum_{e=1}^{nel} \tilde{x}_{ej} v_e - \eta_j \mathbf{V}, \forall j$.

O critério de parada dos algoritmos é baseado no decréscimo relativo da função objetivo, parando-se quando $\frac{|\mathbf{C}(x^{(k+1)}) - \mathbf{C}(x^k)|}{|\mathbf{C}(x^{(k+1)})|} \leq 5 \times 10^{-5}$ por três vezes seguidas.

6.2 Comparação dos métodos de otimização

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos de cada problema de OT com três materiais, através da formulação do SIMP do Capítulo 3, utilizando programação linear sequencial (PLS), o método das assíntotas móveis (MMA), o método de gradiente espectral projetado (SPG) e o método da fase ativa alternada (FAA), as siglas FAA (PLS), FAA (MMA) e FAA (SPG) significam que o subproblema, obtido pelo método FAA, é resolvido pelo método de otimização que está entre parênteses.

Os testes foram realizados com o objetivo de comparar os métodos de otimização, bem como analisar o desempenho e a eficiência dos métodos no que diz respeito à estrutura

final obtida, o número de iterações e o tempo de resolução. Como os problemas de OT são geralmente grande porte, a análise do tempo de execução dos algoritmos é crucial para determinar sua relevância na resolução de problemas com discretização mais fina, bem como problemas tridimensionais.

6.2.1 Método SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)

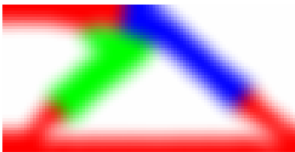
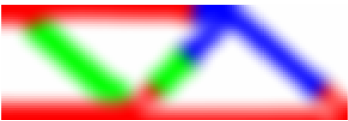
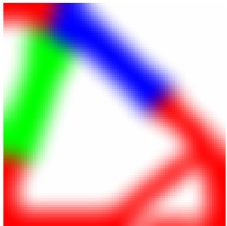
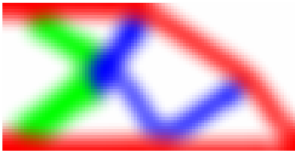
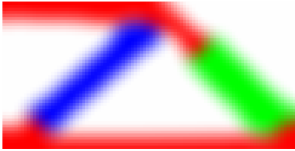
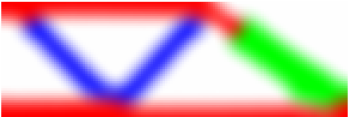
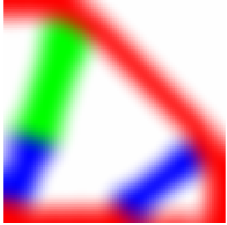
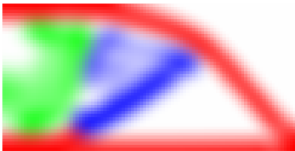

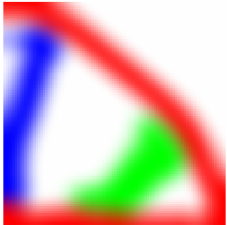
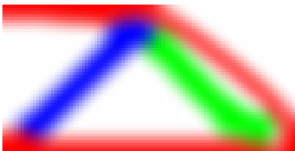

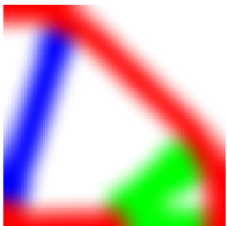
De acordo com o Capítulo 3, no método SIMP com múltiplas fases incluindo o vazio como um material (Hvejsel e Lund), define-se uma variável artificial, digamos x_{e4} , que representa o vazio. Consequentemente, definimos o módulo de Young artificial $\mathbf{E}_4 = \mathbf{E}_{\min} = 10^{-3}$, bem como a fração correspondente de volume $\eta_4 = 0,6$. Além disso, para aplicar o MMA à formulação do problema de OT, escrevemos as restrições de igualdade dos problemas de OT como um sistema de duas desigualdades. A Tabela 1 contém os resultados dos testes realizados. Por sua vez, a Tabela 2 mostra as topologias ótimas encontradas.

Tabela 1 – Resultados das estruturas ótimas usando o SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e lund)

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga em balanço			
PLS	206	52,81	210,17
MMA	326	62,41	4363,40
FAA (PLS)	267	53,53	666,39
FAA (MMA)	781	69,30	2218,10
FAA (SPG)	259	61,20	436,26
Viga MBB			
PLS	218	144,45	347,98
MMA			> 36000
FAA (PLS)	306	143,70	1163,70
FAA (MMA)	689	146,93	2883,40
FAA (SPG)	222	145,59	548,89
Estrutura da ponte			
PLS	213	144,30	596,60
MMA			> 36000
FAA (PLS)	222	147,58	1139,80
FAA (MMA)	638	152,87	3678,30
FAA (SPG)	209	140,40	725,23

No algoritmo do MMA, estipulamos um tempo máximo de execução de 36000 segundos. Como se observa, o algoritmo atingiu a esse tempo máximo para o problema da viga MBB e da estrutura da ponte. Uma possível justificativa para esse excesso de tempo de execução é o fato de cada restrição de igualdade ter sido dividida em duas.

Tabela 2 – Estruturas ótimas usando o SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)

Método	Viga em balanço	Viga MBB	Estrutura da Ponte
PLS			
MMA			
FAA (PLS)			
FAA (MMA)			
FAA (SPG)			

Observando a Figura 10, constatamos que os valores da função objetivo da viga em balanço obtidos pelo método FAA (SPG) tiveram um decréscimo monótono quando o valor do parâmetro de penalização foi 3. Rápido no início, o decréscimo tornou-se lento nas últimas iterações. Escolhemos o método da FAA (SPG) para fazer esse análise devido ao fato de ele ter gasto menos tempo que os métodos da FAA (MMA) e FAA (PLS).

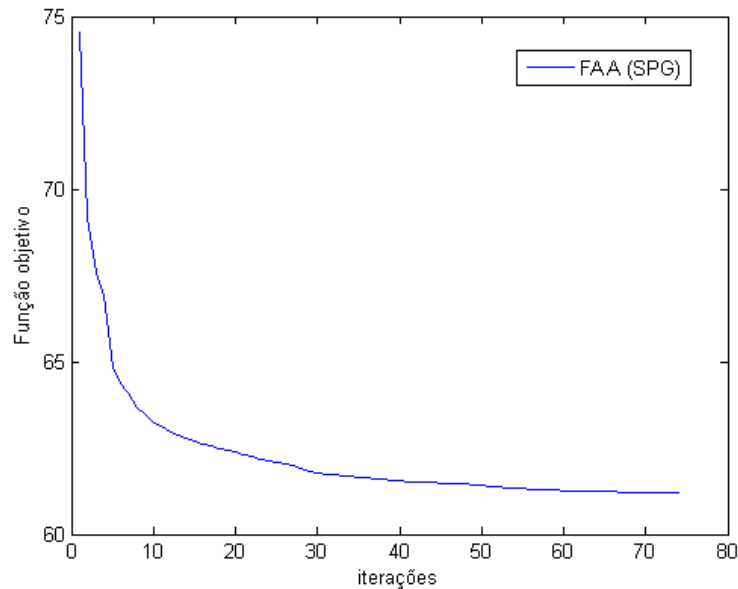


Figura 10 – Valores da função objetivo para o problema da viga em balanço, através do **SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)**, usando FAA (SPG), quando o valor do parâmetro da penalização é igual a 3.

Viga em balanço: Observamos na Tabela 1 que a PLS conseguiu o menor valor da função objetivo. Além disso, a PLS consumiu menos tempo em todos os casos. Notamos que os formatos das topologias ótimas encontradas pelos métodos da PLS e FAA (PLS) foram bastante semelhantes, embora com diferenças significativas na distribuição de material. Já as topologias obtidas pelos MMA, método da FAA (MMA) e método FAA (SPG) foram bastante diferentes das demais. No método da FAA (MMA), a topologia obtida não foi satisfatória. Neste caso, percebemos uma grande quantidade de densidades intermediárias.

Viga MBB: Observando a Tabela 1, percebemos que o valor da função objetivo da viga encontrada pelo método da FAA (PLS) foi menor que aqueles obtidos pelos métodos da PLS, FAA (MMA) e FAA (SPG). Em contrapartida, o método da FAA (PLS) gastou um tempo maior em relação aos métodos da PLS e FAA (SPG). Notamos que as topologias ótimas encontradas pelos métodos de otimização foram bastante semelhantes, ainda que tenhamos observado uma grande variação da distribuição de material, como no caso da viga em balanço.

Estrutura da ponte: Observando a Tabela 1, constatamos que o valor da função objetivo da estrutura da ponte obtida pelo método da FAA (SPG) foi menor que os valores obtidos pelos métodos da PLS, FAA (PLS) e FAA (MMA). Ademais, o tempo gasto pela FAA (SPG) foi menor que o obtido pelos demais métodos de fase ativa, sendo superado apenas pelo método da PLS. Notamos que os formatos ótimos da estrutura da ponte encontrados pelos métodos de otimização foram bastante semelhantes. No entanto, no método da FAA (MMA), percebemos uma pequena quantidade de densidades intermediárias.

6.2.2 Método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund)

No problema (3.10), as restrições de volume dos materiais e o critério da seleção de material são representados por restrições de desigualdade. Essas restrições de desigualdade facilitam a aplicação do método das assíntotas móveis para resolver o problema. Por sua vez, no caso da programação linear sequencial e do gradiente espectral projetado, devemos adicionar variáveis de folgas às desigualdade para resolver o problema. A Tabela 3 contém os resultados referentes aos testes realizados. Já a Tabela 4 mostra as topologias ótimas encontradas.

Tabela 3 – Resultados das estruturas ótimas usando o SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund)

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga em balanço			
PLS	211	52,28	219,93
MMA	239	54,13	353,36
FAA (PLS)	229	54,75	278,09
FAA (MMA)	343	55,46	327,60
FAA (SPG)	210	54,66	157,46
Viga MBB			
PLS	211	144,73	349,46
MMA	222	143,82	562,93
FAA (PLS)	204	148,72	365,83
FAA (MMA)	329	150,95	527,46
FAA (SPG)	202	145,53	240,99
Estrutura da ponte			
PLS	229	155,65	599,22
MMA	238	153,36	1048,10
FAA (PLS)	199	145,33	495,50
FAA (MMA)	1266	145,99	3040,10
FAA (SPG)	266	165,57	427,04

Tabela 4 – Estruturas ótimas usando o SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund)

Método	Viga em balanço	Viga MBB	Estrutura da Ponte
PLS			
MMA			
FAA (PLS)			
FAA (MMA)			
FAA (SPG)			

Viga em balanço: Observando a Tabela 3, podemos perceber que a PLS encontrou o menor valor para a função objetivo. Por outro lado, o tempo gasto pela FAA (SPG) foi significativamente menor do que aqueles obtidos pelos demais métodos. As topologias ótimas encontradas por todos os métodos foram bastante semelhantes. No que diz respeito à distribuição de material, percebe-se uma grande semelhança entre os resultados obtidos pelas duas versões do MMA, bem como pelos métodos FAA (PLS) e FAA (SPG). Por sua vez, a PLS obteve uma estrutura próxima à da Tabela 2, correspondendo à menor flexibilidade.

Viga MBB: Observamos na Tabela 3 que o MMA conseguiu obter o menor valor da função objetivo. Entretanto, o MMA foi o método que consumiu o maior tempo. As topologias ótimas encontradas pelos métodos de otimização foram bastantes semelhantes. Já a distribuição de material foi bastante distinta para todos os métodos.

Estrutura da ponte: Na Tabela 3, percebemos que a FAA (PLS) conseguiu obter o menor valor da função objetivo da ponte. Além disso, o tempo gasto pela FAA (PLS) foi o segundo menor, superando apenas o da FAA (SPG). Notamos que as topologias obtidas pelos métodos PLS, FAA (PLS), FAA (MMA) foram semelhantes, apesar de a PLS apresentar uma distribuição de material diferente das demais. Já as topologias ótimas encontradas pelos métodos MMA e FAA (SPG) apresentaram uma barra vertical na face esquerda do domínio, o que as torna diferentes das topologias obtidas pelos métodos da PLS, FAA (PLS) e FAA (MMA).

Observa-se que a distribuição de material obtida pelos métodos FAA (PLS) e FAA (MMA) são semelhantes àquela obtida pelo FAA (SPG) na seção anterior e que esta distribuição corresponde ao menor valor da função objetivo. Nas tabelas 3 e 4, observamos pouca sensibilidade das estruturas à variação dos valores da função objetivo, ou seja, a distribuição do material é alterada, porém o formato da estrutura é quase sempre o mesmo, o que também ocorre nas outras topologias obtidas pelos métodos SIMP com vários materiais.

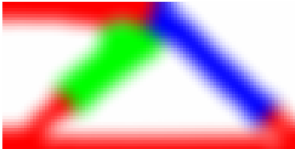

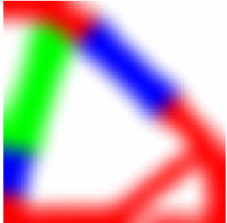
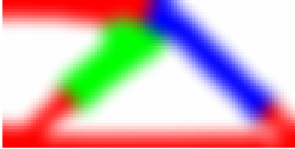

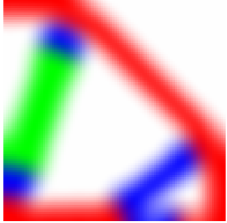
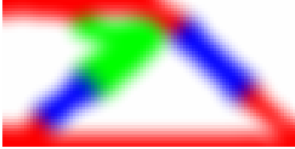

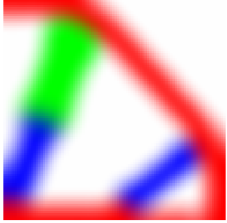
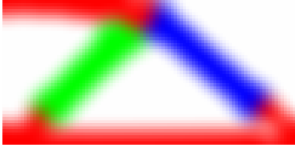

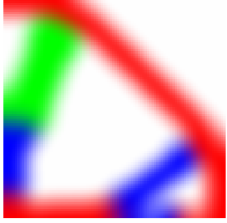
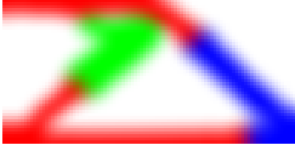

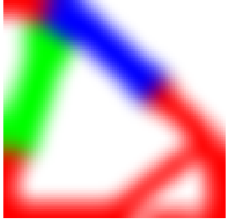
6.2.3 Método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12])

De acordo com o capítulo 3, podemos obter uma formulação semelhante ao problema (3.10) usando o método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]). Essa formulação facilita a implementação de alguns métodos de otimização, como visto na seção anterior. A Tabela 5 exibe os resultados numéricos obtidos. Por sua vez, as topologias ótimas encontradas são mostradas na Tabela 6.

Tabela 5 – Resultados das estruturas ótimas usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12])

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga em balanço			
PLS	219	53,12	225,86
MMA	239	53,40	369,34
FAA (PLS)	200	57,11	236,00
FAA (MMA)	318	53,59	551,01
FAA (SPG)	199	54,82	153,76
Viga MBB			
PLS	206	145,36	343,84
MMA	230	148,96	619,66
FAA (PLS)	205	149,75	368,00
FAA (MMA)	307	154,41	831,80
FAA (SPG)	203	145,44	248,29
Estrutura da ponte			
PLS	209	150,13	518,98
MMA	229	150,63	1001,80
FAA (PLS)	205	151,09	507,81
FAA (MMA)	321	151,09	1163,10
FAA (SPG)	209	148,36	346,16

Tabela 6 – Estruturas ótimas usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12])

Método	Viga em balanço	Viga MBB	Estrutura da Ponte
PLS			
MMA			
FAA (PLS)			
FAA (MMA)			
FAA (SPG)			

Viga em balanço: Observamos na Tabela 5 que o método da PLS conseguiu obter o menor valor da função objetivo, sendo seguido de perto pelo MMA e pela FAA (MMA). Por outro lado, o tempo gasto pelo método da FAA (SPG) foi o menor de todos.

Notamos que os formatos ótimos das vigas encontradas pelos métodos de otimização foram bastantes semelhantes, o mesmo ocorrendo com a distribuição de material, salvo para a FAA (PLS), método que obteve a estrutura menos rígida (maior valor da função objetivo).

Viga MBB: Observando a Tabela 5, constatamos que os valores da função objetivo encontrados pelos métodos PLS e FAA (SPG) foram menores que aqueles obtidos pelos outros métodos de otimização. Ademais, o tempo gasto, pelo método FAA (SPG) foi o menor de todos, superando por larga margem o segundo colocado. As topologias ótimas encontradas pelos métodos de otimização foram bastantes semelhantes, ainda que a distribuição de material mostre diferenças, podendo ser reunida em três grupos: (i) MMA e FAA (MMA); (ii) FAA (PLS) e FAA (SPG); (iii) PLS.

Estrutura da ponte: Na Tabela 5, percebemos que o valor da função objetivo da estrutura da ponte obtida pelo método da FAA (SPG) foi o menor. Além disso, a FAA (SPG) consumiu menos tempo que os demais métodos. Notamos também que os formatos das topologias ótimas encontradas pelos métodos de otimização foram bastantes semelhantes.

6.2.4 Comparação entre as formulações para os problemas de OT



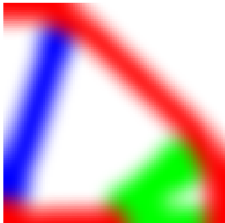
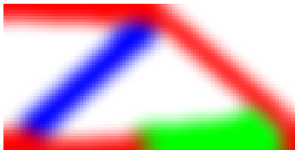
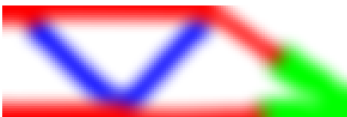
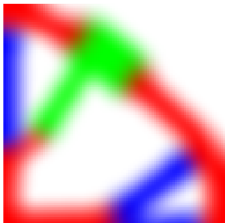
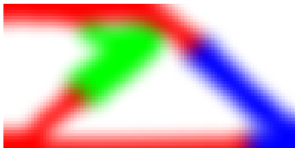

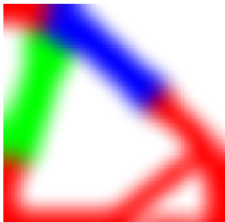
Nesta seção, apresentamos as topologias ótimas dos problemas de OT obtidas usando as formulações do Capítulo 3 através do método de fase ativa alternada em conjunto com o SPG. Fazemos um análise comparativa entre essas formulações, no que diz respeito ao número de iterações, aos valores da função objetivo, ao tempo gasto e às topologias ótimas obtidas. As siglas S. c. m. f. i. m. a. (Hvejsel e Lund), S. c. m. f. (Hvejsel e Lund) e S. c. m. f. (Cai *et al.* [12]) representam o método SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund), o método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund) e o método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), respectivamente.

Escolhemos o método SPG nesta análise devido ao fato de ele ter consumido o menor tempo para resolver quase todos os problemas de OT.

Tabela 7 – Resultados das estruturas ótimas usando fase ativa alternada em conjunto com SPG

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga em balanço			
S. c. m. f. i. m. a. (Hvejsel e Lund)	259	61,20	436,26
S. c. m. f. (Hvejsel e Lund)	210	54,66	157,46
S. c. m. f. (Cai <i>et al.</i> [12])	199	54,82	153,76
Viga MBB			
S. c. m. f. i. m. a. (Hvejsel e Lund)	222	145,59	548,89
S. c. m. f. (Hvejsel e Lund)	202	145,53	240,99
S. c. m. f. (Cai <i>et al.</i> [12])	203	145,44	248,29
Estrutura da ponte			
S. c. m. f. i. m. a. (Hvejsel e Lund)	209	140,40	725,23
S. c. m. f. (Hvejsel e Lund)	266	165,57	427,04
S. c. m. f. (Cai <i>et al.</i> [12])	209	148,36	346,16

Tabela 8 – Estruturas ótimas usando a fase ativa alternada em conjunto com SPG

Múltiplas fases	Viga em balanço	Viga MBB	Estrutura da Ponte
incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)			
Hvejsel e Lund			
Cai <i>et al.</i> [12]			

Viga em balanço: Observando a Tabela 7, percebe-se que o valor da função objetivo encontrado pelo método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund) foi o menor de todos. No entanto, o menor tempo foi atingido pelo método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), com o menor número de iterações e um valor de função objetivo muito próximo do mínimo. Percebemos que as topologias ótimas obtidas por todos os métodos foram diferentes.

Viga MBB: Na Tabela 7, percebemos que os valores da função objetivo desta viga pelos SIMP com vários materiais foram muito próximos, ainda que o menor valor tenha sido obtido pelo SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]). Por outro lado, o tempo gasto pelo método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund) foi menor que os demais, o mesmo ocorrendo com o número de iterações. As topologias obtidas pelos métodos SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund) e múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) tiveram uma grande similaridade.

Estrutura da ponte: Observando a Tabela 7, percebemos que o SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund) conseguiu obter o menor valor da função objetivo da estrutura da ponte, com o menor número de iterações. Por outro lado, o tempo gasto pelo método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) foi o menor de todos, também correspondendo ao menor número de iterações. As topologias ótimas obtidas pelos métodos SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund) e múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) foram semelhantes, com diferença na distribuição dos materiais. Já a topologia ótima encontrada pelo método SIMP com múltiplas fases (Hvejsel e Lund) foi diferente dos demais, contendo uma barra vertical na face esquerda da estrutura. Essa topologia apresentou o maior valor da função objetivo.

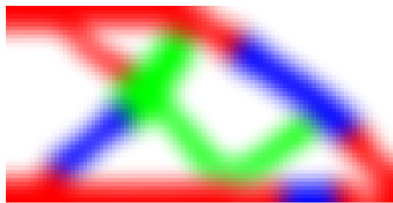
6.2.5 Efeito do ponto inicial

Neste trabalho, o ponto inicial para cada valor do parâmetro de penalização é atualizado com a seguinte estratégia: o vetor de densidades filtradas obtido para um valor do parâmetro de penalização é usado como ponto inicial para o valor seguinte do parâmetro.

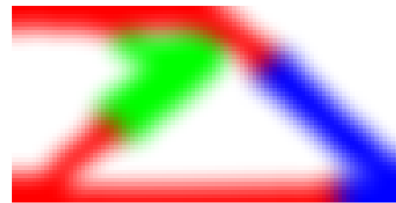
Os experimentos numéricos realizados mostram que essa estratégia foi fundamental para evitar mínimos locais indesejáveis, obtendo topologias ótimas de qualidade. Como exemplo, a Tabela 9 mostra o que ocorre quando resolvemos sem usar a estratégia mencionada acima o problema da viga em balanço, usando o método SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) em conjunto com FAA (SPG), comparando o resultado com aquele mostrado na Tabela 5, que foi obtido considerando essa estratégia.

Tabela 9 – Resultado da viga em balanço usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12])

FAA (SPG)	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Sem usar a estratégia	235	62,71	199,25
Usando a estratégia	199	54,82	153,76



(a) Sem a estratégia



(b) Com a estratégia

Figura 11 – Topologias ótimas da viga em balanço usando SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12])

Observando a Tabela 9, constatamos que o valor da função objetivo encontrado usando-se a estratégia foi menor do que aquele obtido sem o seu uso. Além disso, a estratégia provoca uma economia de 23% do tempo gasto para encontrar a solução ótima aproximada. É interessante notar que a topologia ótima da viga obtida quando aplicamos a estratégia é diferente da outra, possuindo menos barras, como se observa na Figura 11. A eliminação de algumas barras, combinada com a redistribuição dos materiais fez com que a viga em balanço ficasse mais rígida, além de facilitar sua produção. Deve-se notar que, em ambos os testes, usou-se um raio do filtro das densidades igual a 6 elementos.

6.2.6 Efeito do número máximo de iterações internas para os métodos da fase ativa alternada

Nos algoritmos da fase ativa alternada apresentados no Capítulo 5, podemos observar que os custos computacionais dos algoritmos 6 e 7 são aproximadamente iguais a $m(m-1)/2$ e m vezes o custo computacional do algoritmo de otimização topológica de dois materiais, respectivamente. Além disso, o tempo gasto para resolver esses subproblemas de OT com dois materiais depende do número de iterações internas do método da fase ativa alternada.

Para estudar o efeito do número máximo de iterações internas, a solução do problema da viga em balanço é considerada aqui com os diferentes números máximos

de iterações para os subproblemas resolvidos pelo método SPG, denotado por Max. iter. interna.

Escolhemos o método FAA (SPG) neste estudo devido ao fato de ele ter consumido o menor tempo para resolver o problema da viga em balanço. A Tabela 10 mostra os resultados numéricos obtidos onde T/it representa o tempo gasto por iteração. Por sua vez, A Tabela 11 exibe as topologias ótimas encontradas.

Tabela 10 – Resultados da viga em balanço usando diferentes número máximo de iterações internas

	Max. iter. interna	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)	T/it
Múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)	1	259	61,20	436,26	1,68
	2	231	56,89	596,13	2,58
	3	219	53,50	762,78	3,48
	4	200	53,56	788,91	3,94
	5	298	54,45	1462,70	4,90
Múltiplas fases (Hvejsel e Lund)	1	210	54,66	157,46	0,74
	2	193	54,63	206,93	1,07
	3	202	54,74	284,86	1,41
	4	196	57,25	361,23	1,84
	5	202	59,85	392,52	1,94
Múltiplas fases (Cai <i>et al.</i> [12])	1	199	54,82	153,76	0,77
	2	211	57,69	238,51	1,13
	3	204	53,38	287,54	1,40
	4	192	60,43	333,06	1,73
	5	192	56,86	381,16	1,98

Tabela 11 – Viga em balanço usando diferentes limites para o número de iterações internas

Max. iter. interna	Múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund)	Múltiplas fases (Hvejsel e Lund)	Múltiplas fases (Cai <i>et al.</i> [12])
1			
2			
3			
4			
5			

Múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund): Na Tabela 10, percebemos que o valor da função objetivo decresce quando se varia o número de iterações internas de 1 a 3, permanecendo estável ao se passar de 3 para 4 iterações. De forma semelhante, nota-se uma redução do número de iterações globais à medida que se aumenta o número de iterações internas de 1 a 4. Por outro lado, esse número aumenta significativamente quando se adota 5 iterações internas. A Tabela 11 mostra que as topologias ótimas encontradas para 3 e 4 iterações internas são bastante semelhantes. Já as topologias ótimas encontradas para 1 e 2 iterações internas apresentaram uma barra adicional, o que as torna diferentes das topologias obtidas pelas demais iterações internas. Curiosamente, a presença dessa barra fez com que as estruturas ficassem menos rígidas.

Múltiplas fases (Hvejsel e Lund): Observamos na Tabela 10 que o menor valor da função objetivo e o menor número de iterações foi obtido quando se usa 2 iterações internas. Notamos que os formatos das topologias ótimas encontradas foram bastante semelhantes, embora tenhamos observado uma grande variação na distribuição do material.

Múltiplas fases (Cai et al. [12]): Observando a Tabela 10, constatamos que o valor da função objetivo atinge seu menor valor quando se adota 3 iterações internas. As topologias ótimas encontradas para 1, 2, 3 e 5 iterações internas foram bastante semelhantes, ainda que a distribuição de material tenha sido bastante distinta. Com 4 iterações internas, a topologia ótima apresenta algumas barras a mais, o que a torna diferente das outras topologias, além de apresentar menor rigidez.

A Figura 12 mostra as curvas de tendência que melhor relacionam o tempo gasto por iteração ao número de iterações internas para o problema da viga em balanço. Nota-se que, em geral, o tempo por iteração para resolver o problema da viga usando a FAA (SPG) mostrou um crescimento linear à medida que se aumenta o número de iterações internas. Observa-se, ainda, que o SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund) consumiu o maior tempo por iteração para resolver o problema. Isso aconteceu porque, nesse caso, o algoritmo FAA (SPG) exigiu um maior número de iterações para convergir. Percebe-se que os ajustes das curvas para todos os casos foram muito bons, já que os coeficientes de determinação R^2 estiveram perto de um.

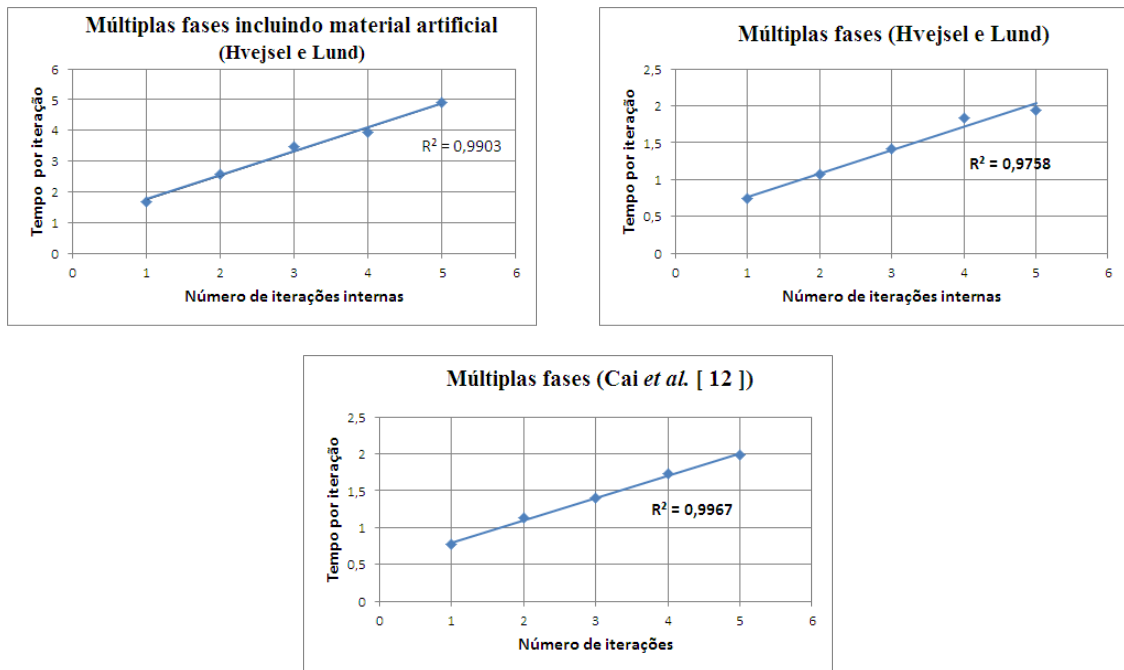


Figura 12 – Curvas de tendência do tempo gasto por iteração em função do número de iterações internas, para as diferentes formulações do problema da viga em balanço.






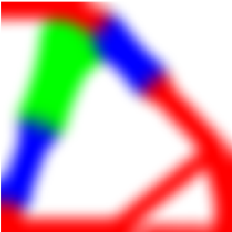

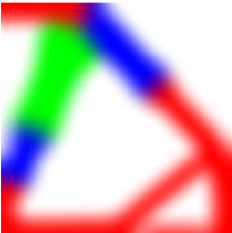
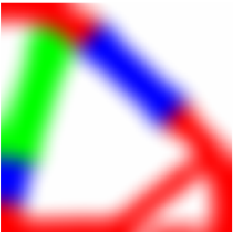
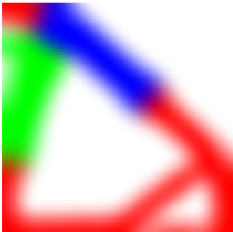
6.2.7 Efeito do raio do filtro

Nesta seção, estudamos o efeito do raio do filtro sobre a estrutura ótima. Para isto, usamos a topologia ótima da estrutura da ponte devido aos diferentes formatos dessa estrutura obtidos pelos métodos SIMP com vários materiais. Obtemos a estrutura da ponte através dos métodos da PLS e FAA (SPG) com raios do filtros 7, 9, 11, 13, 15. Evitamos usar raios menores que 7 para impedir o aparecimento de barras adicionais na estrutura, o que dificultaria a sua construção. Em todos os casos, usamos uma malha de 160×160 elementos. Os resultados dos testes estão na Tabela 12. As topologias ótimas obtida por cada valor do raio do filtro são mostradas na Tabela 13. Os resultados foram obtidos em um Computador Intel Core i9 - 9900K (3.60 GHZ), com 32 GB de memória RAM.

Tabela 12 – Resultados da **Estrutura da ponte**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes raios do filtro

Método	Raio	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)	Tempo por iteração
PLS					
	7	194	109,22	866,78	4,467
	9	198	120,93	913,61	4,614
	11	199	132,24	905,65	4,551
	13	240	145,84	1092,91	4,553
	15	212	153,35	990,27	4,671
FAA (SPG)					
	7	205	111,67	514,92	2,511
	9	207	125,51	526,07	2,541
	11	212	133,49	546,05	2,575
	13	211	146,70	558,56	2,647
	15	212	151,30	579,46	2,733

Tabela 13 – **Estrutura da ponte**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes raios do filtro

Raio	PLS	FAA (SPG)
7		
9		
11		
13		
15		

Observando a Tabela 12, constatamos que, exceto quando o raio foi 15, o valor da função objetivo da estrutura da ponte obtida pela PLS foi o menor. Além disso, percebemos que o tempo gasto pela FAA (SPG) foi menor em todos os casos.

As topologias ótimas obtidas pelo método da PLS, permaneceram semelhantes para os raios 9, 11 e 13. No raio 15, a estrutura apresentou uma barra a menos que as estruturas obtidas nos raios anteriores, com uma redistribuição dos materiais. Já as topologias ótimas obtidas pelo método da FAA (SPG), permaneceram semelhantes para a maioria dos raios. A estrutura da ponte obtida com os raios 7 e 9 apresentaram uma pequena barra horizontal no topo da estrutura, tornando-a menos rígida do que a estrutura obtida pelo método da PLS.

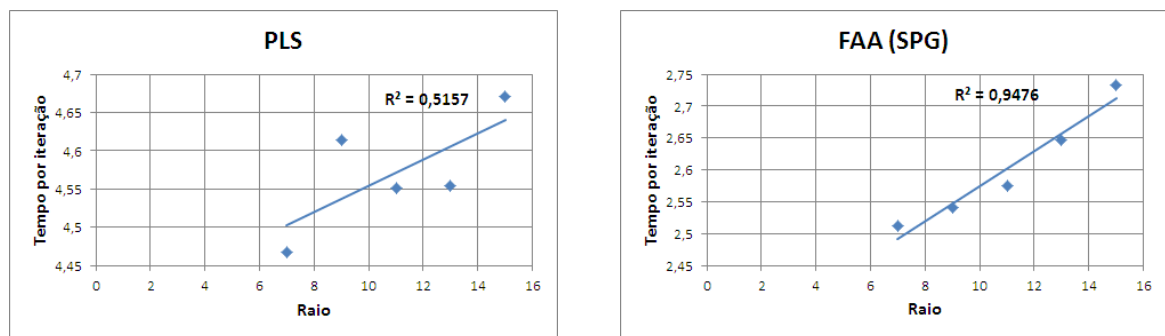


Figura 13 – Curvas de tendência do tempo gasto por iteração em função do raio do filtro, para o problema da estrutura da ponte.

A Figura 13 mostra as curvas de tendência que melhor se ajustam aos dados obtidos pela PLS e FAA (SPG). Observamos que o tempo por iteração apresentou um crescimento quase linear na FAA (SPG), uma vez que o coeficiente de determinação (R^2) está perto de um. Por sua vez, o tempo por iteração obtido pela PLS não apresentou crescimento linear, já que o coeficiente de determinação (R^2) está longe de um. Em geral, podemos dizer que o aumento do raio do filtro teve pouco impacto no tempo por iteração na resolução do problema com esse número de elementos.

6.2.8 Efeito do tamanho da malha

Na otimização topológica, a qualidade da estrutura está intrinsecamente ligada à discretização da malha. Quanto maior a discretização, melhor é a figura obtida. Por outro lado, o tempo de resolução também depende muito da discretização adotada. Por esse motivo, estudamos a influência da malha sobre os resultados dos problemas de OT. Na Tabela 14, fornecemos os parâmetros de projeto para esses problemas, isto é, as dimensões dos problemas, o raio do filtro da média ponderada das densidades, o número de elementos da estrutura, o número de elementos não nulos da matriz de rigidez $nn(K)$ e do fator de Cholesky $nn(R)$, respectivamente. Usamos os métodos PLS e FAA (SPG) neste estudo devido ao fato de eles terem consumido o menor tempo para resolver os problemas de OT.

Tabela 14 – Parâmetros de desenho dos problemas de OT

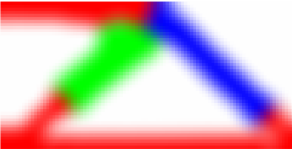
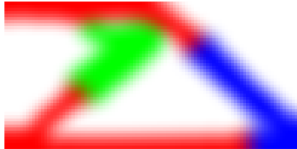
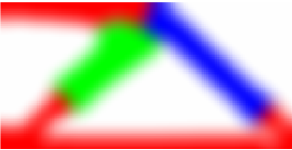
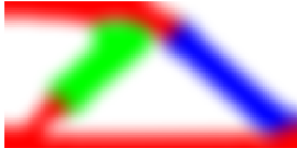




Problema	Dimensão	Raio	N. de elementos	nn(K)	nn(R)
Viga em balanço					
	96×48	6	4608	124735	614925
	160×80	10	12800	348723	2341374
	200×100	13	20000	547683	3635794
	280×140	19	39200	1078002	7199728
Viga MBB					
	144×48	7	6912	189404	894521
	180×60	9	10800	294024	2084682
	252×84	13	21168	581345	3646432
	420×140	20	58800	1612532	15273888
Estrutura da ponte					
	64×64	6	4096	111184	480349
	96×96	9	9216	250801	1378236
	160×160	15	25600	704250	5150455
	280×280	26	78400	2153881	18355032

Os resultados para a viga em balanço são apresentados nas Tabelas 15 e 16. Por sua vez, os resultados da viga MBB são mostrados nas Tabelas 17 e 18, e os da estrutura da ponte nas Tabelas 19 e 20.

Tabela 15 – Resultados da **viga em balanço**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes tamanho da malha

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga 96×48			
PLS	219	53,12	225,86
FAA (SPG)	199	54,82	153,76
Viga 160×80			
PLS	203	53,37	756,23
FAA (SPG)	206	54,00	477,85
Viga 200×100			
PLS	227	54,88	1531,50
FAA (SPG)	207	55,88	797,96
Viga 280×140			
PLS	252	56,62	4988,80
FAA (SPG)	206	57,16	1763,10

Tabela 16 – **Viga em balanço**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes tamanho da malha

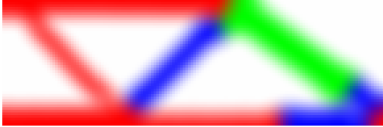

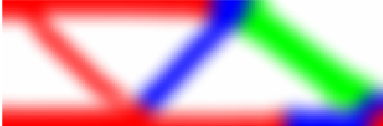

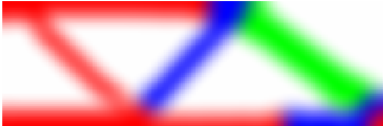
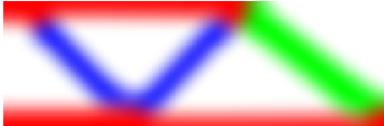


Malha	PLS	FAA (SPG)
96×48		
160×80		
200×100		
280×140		

Observamos na Tabela 15 que o método da PLS conseguiu obter valores menores para a função objetivo em relação à FAA (SPG) em todos os casos, ainda que a diferença encontrada seja modesta. Em compensação, a PLS gastou um tempo muito maior para encontrar os resultados. Além disso, em quase todos os casos, o menor número de iterações foi atingido pelo método da FAA (SPG). As topologias ótimas obtidas pelos método da PLS e FAA (SPG), mostradas na Tabela 16, são bastante semelhantes, tal como ocorre com o valor da função objetivo.

Tabela 17 – Resultados da **viga MBB**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes tamanho da malha

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga 144×48			
PLS	206	145,36	343,84
FAA (SPG)	203	145,44	248,29
Viga 180×60			
PLS	211	149,63	566,74
FAA (SPG)	206	148,85	403,16
Viga 252×84			
PLS	210	153,75	1432,20
FAA (SPG)	203	149,39	851,65
Viga 420×140			
PLS	209	144,78	7073,10
FAA (SPG)	203	154,54	2813,10

Tabela 18 – **Viga MBB**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes tamanho da malha

Malha	PLS	FAA (SPG)
144 × 48		
180 × 60		
252 × 84		
420 × 140		

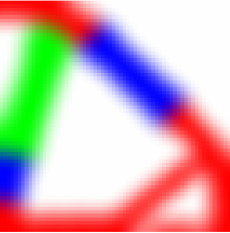
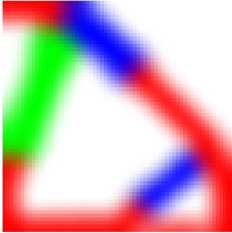
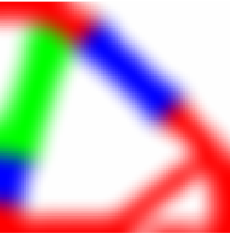
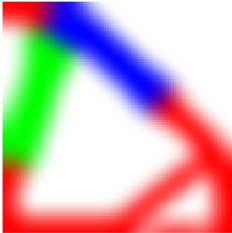

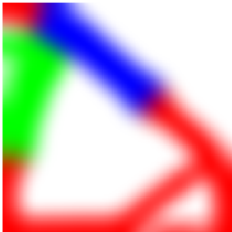

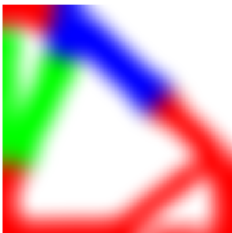
Observando a Tabela 17, constatamos que o valor da função objetivo encontrado pelos dois métodos foi semelhante para as malhas com menos elementos. Para a malha 252×84 , nota-se que a FAA (SPG) obteve um valor menor. Por outro lado, a PLS alcançou

um valor muito melhor para a malha 420×140 . No que diz respeito ao tempo gasto, o método da PLS obteve um desempenho inferior em todos os casos, como esperado. Além disso, o método FAA (SPG) efetuou sempre o menor número de iterações. As topologias ótimas obtidas pelo método da PLS são todas bastantes semelhantes. Já as estruturas encontradas pelo método FAA (SPG) são semelhantes na forma, embora tenhamos observado uma variação na distribuição dos materiais.

Tabela 19 – Resultados da **estrutura da ponte**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes tamanho da malha

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Ponte 64×64			
PLS	207	147,48	176,48
FAA (SPG)	281	151,19	199,52
Ponte 96×96			
PLS	209	150,13	518,98
FAA (SPG)	209	148,36	346,16
Ponte 160×160			
PLS	212	153,35	1865,50
FAA (SPG)	208	151,35	1101,70
Ponte 280×280			
PLS	203	155,86	9139,70
FAA (SPG)	230	155,53	4838,10

Tabela 20 – **Estrutura da ponte**, usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]), para os diferentes tamanho da malha

Malha	PLS	FAA (SPG)
64 × 64		
96 × 96		
160 × 160		
280 × 280		

Na Tabela 19, notamos que o valor da função objetivo da estrutura da ponte obtida pelo método FAA (SPG) foi menor que o método da PLS para as malhas mais refinadas, o mesmo ocorrendo com o tempo. A Tabela 20 mostra que as topologias ótimas encontradas pelo método PLS permaneceram muito semelhantes. Por outro lado, as topologias ótimas encontradas pela FAA (SPG) foram sensíveis ao refinamento da malha. Como exemplo, notamos que a malha mais refinada apresenta uma pequena barra vertical na face esquerda do domínio.

Na Figura 14, os dados obtidos pelos métodos da PLS e FAA (SPG) para cada problema de OT foram ajustados por polinômios de grau 2. Observe que as curvas de

ajuste relacionadas aos dados obtidos pelo método FAA (SPG) têm um menor termo quadrático, ou seja, o crescimento do tempo gasto em função do número de elementos na horizontal é mais próximo de linear, de modo que parece uma boa opção usar esse método para resolver problemas com malhas mais refinadas. Além disso, as curvas de tendência que se ajustam aos dados para o problema da viga em balanço, viga MBB e estrutura da ponte foram muito boas, uma vez que os coeficientes de determinação (R^2) dessas curvas estão perto de um.

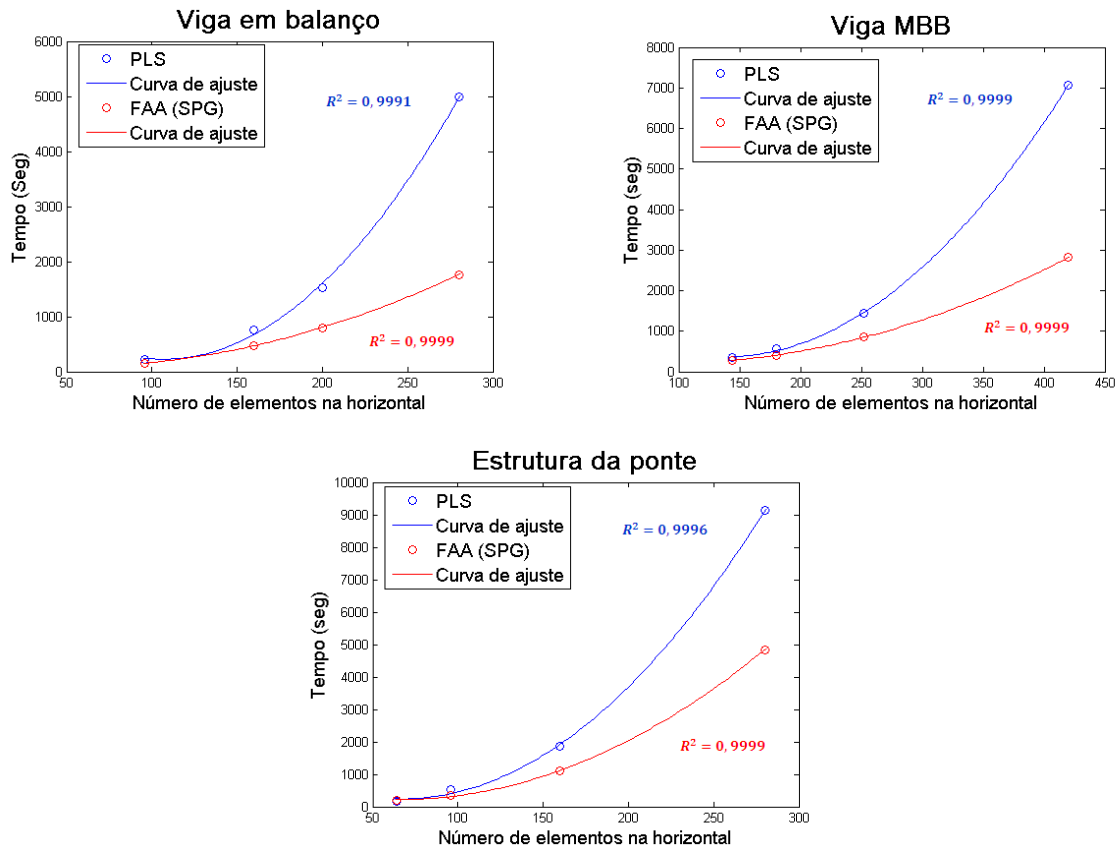


Figura 14 – Curvas de tendência do tempo gasto em função do número de elementos na horizontal, para os problemas de OT.

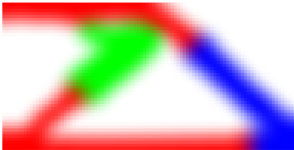

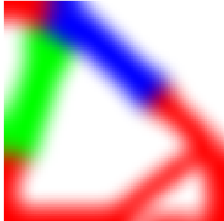
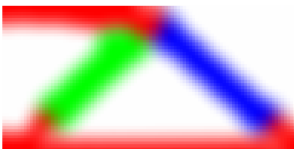

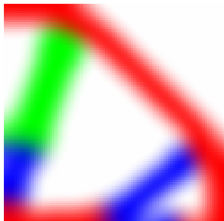
6.2.9 Fase ativa alternada versão Jacobi

Nesta seção, exibimos as topologias ótimas dos problemas de OT obtidas usando o SIMP com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) através do método da fase ativa alternada nas versões Jacobi e Gauss - Seidel, em conjunto com o SPG. Escolhemos o método SPG neste estudo devido ao fato de ele ter gasto o menor tempo em quase todos os experimentos realizados. Os resultados dos testes são mostrados na Tabela 21. Por sua vez, a Tabela 22 apresenta as topologias ótimas encontradas. Os resultados foram obtidos em um Computador Intel Core i9 - 9900K (3.60 GHZ), com 32 GB de memória RAM.

Tabela 21 – Resultados das estruturas ótimas usando fase ativa alternada em conjunto com SPG

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga em balanço			
Gauss - Seidel	206	54,80	76,80
Jacobi	222	53,71	78,71
Viga MBB			
Gauss - Seidel	200	145,37	119,99
Jacobi	229	149,80	130,24
Estrutura da ponte			
Gauss - Seidel	213	148,25	172,01
Jacobi	225	150,44	178,05

Tabela 22 – Estruturas ótimas usando o fase ativa alternada em conjunto com o SPG

Fase ativa alternada	Viga em balanço	Viga MBB	Estrutura da Ponte
Gauss - Seidel			
Jacobi			

Viga em balanço: Observamos na Tabela 21 que o método da FAA (SPG) versão Jacobi conseguiu o menor valor da função objetivo. Por outro lado, o menor tempo gasto foi obtido pelo método FAA (SPG) versão Gauss - Seidel, com o menor número de iterações. As topologias ótimas obtidas pelas duas versões do método da FAA (SPG) foram semelhantes.

Viga MBB: Observando a Tabela 21, percebe-se que o valor da função objetivo,

o número de iterações e o tempo gasto encontrado pela FAA (SPG) versão Gauss - Seidel foram os menores. As topologias ótimas obtidas pelas duas versões da FAA foram bastante semelhantes.

Estrutura da ponte: Na Tabela 21, percebemos que os resultados obtidos pela FAA (SPG) na versão Gauss - Seidel foram os melhores. As topologias ótimas obtidas pelas duas versões da FAA (SPG) foram semelhantes, com diferença na distribuição dos materiais.

Note que os tempos gastos obtidos pelas duas versões da FAA (SPG) foram próximos, de modo que parece uma boa ideia usar a versão Jacobi da FAA (SPG) em problemas de OT de grande porte.

6.3 Método SIMP ordenado

Nesta seção, resolvemos os três problemas de otimização topológica apresentados na Figura 9 usando o método SIMP ordenado, introduzido na Seção 3.7. Esse método representa todos os materiais por meio de uma única função interpoladora, $E_e(x_e)$ (vide (3.11)), de modo que o número de variáveis do problema de otimização topológica é o mesmo que se usa no problema com um único material. Para construir essa função interpoladora, usamos, em nossos testes, os módulos de Young $\mathbf{E}_4 = 4 \text{ N/cm}^2$, $\mathbf{E}_3 = 2 \text{ N/cm}^2$, $\mathbf{E}_2 = 1 \text{ N/cm}^2$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\min} = 10^{-3} \text{ N/cm}^2$ (módulo artificial para evitar que a matriz de rigidez da equação do equilíbrio seja singular), representados na topologia ótima com as cores vermelho, azul, verde e branca, respectivamente, e as densidades normalizadas são $\rho_4 = 1$, $\rho_3 = 0,7$, $\rho_2 = 0,5$, $\rho_1 = 0$. A formulação do problema da minimização da flexibilidade utilizando o SIMP ordenado é apresentada em (3.3). Para todos os testes, o ponto inicial é $x_e = 0,3$, $\forall e$, e o volume fracionário é $\eta = 0,4$. Diferentemente da seção anterior, construímos uma sequência finita do parâmetro de penalização, $r^0, r^1, r^2, r^3 \dots$ até atingir o valor 4, que é o valor de parâmetro p usado no trabalho de Zuo e Saitou [45]. Para cada valor do parâmetro de penalização, resolvemos um problema de otimização topológica considerando o número iterações definido por

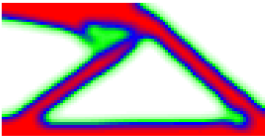
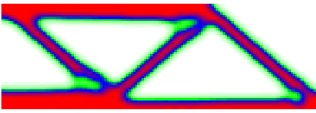
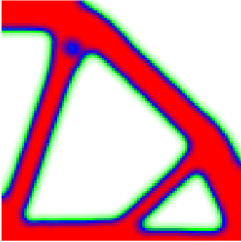
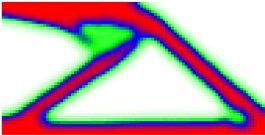
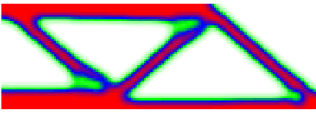
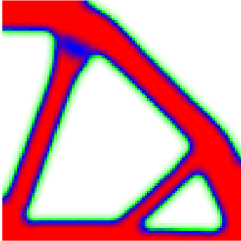
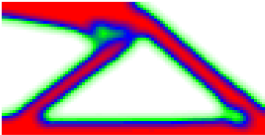
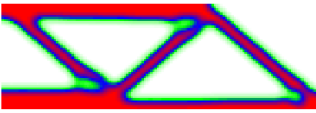
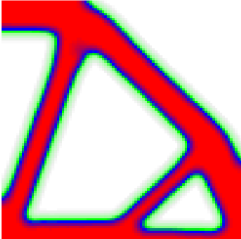
$$\text{Número iterações} = \begin{cases} 20, & \text{se } p = 1 \\ 3, & \text{se } 1 < p < 4 \\ 2000 & \text{se } p = 4 \end{cases} \quad (6.2)$$

em que $p = \min_{n \in \mathbb{N}} \{r^{n-1}, 4\}$. O valor da razão da sequência dos valores da penalização é $r = 1,02$. Seguindo essa regra, o número máximo de iterações do método é 2230. O raio do filtro é igual a 5 para todas as estruturas testadas. No método da programação linear sequencial, o raio da região de confiança é 0,1. Os resultados dos testes são exibido na Tabela 23. As topologias ótimas para cada problema de OT estão na Tabela 24.

Tabela 23 – Resultados das estruturas ótimas usando o SIMP ordenado

	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
Viga em balanço			
PLS	258	26,38	53,72
MMA	276	26,45	31,60
SPG	332	26,36	31,82
Viga MBB			
PLS	254	68,57	87,07
MMA	275	68,65	47,99
SPG	325	68,51	45,85
Estrutura da ponte			
PLS	241	69,38	113,28
MMA	265	69,51	63,54
SPG	316	69,37	65,74

Tabela 24 – Estruturas ótimas usando o SIMP ordenado

Método	Viga em balanço	Viga MBB	Estrutura da Ponte
PLS			
MMA			
SPG			

Observamos na Tabela 23 que o método SPG obteve o menor valor da função objetivo para todas as três estruturas. Notamos, na Tabela 24, que os formatos ótimos das estruturas, encontrados pelos métodos de otimização foram bastante semelhantes. As topologias ótimas obtidas pelo métodos SIMP ordenado em conjunto com os métodos de otimização de primeira ordem desenvolvidos neste trabalho foram bastante semelhantes às topologias ótimas obtidas pelos método SIMP com vários materiais.

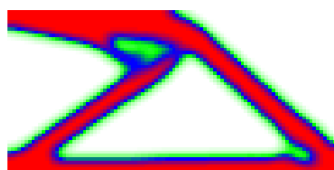
6.3.1 Efeito do raio do filtro

Na Seção 6.2.7, observamos que o aumento no raio do filtro provocou a eliminação de algumas barras da estrutura, de forma que obtivemos maior rigidez na topologia ótima. Para estudar o efeito do raio do filtro sobre o método SIMP ordenado, mostramos a topologia ótima da viga em balanço através do método SPG com os diferentes raios do filtro: 4, 5, 6, 7, 8, e 9. Os resultados dos testes são apresentados na Tabela 25. As topologias ótimas obtidas para cada valor do raio do filtro são mostradas na Figura 15.

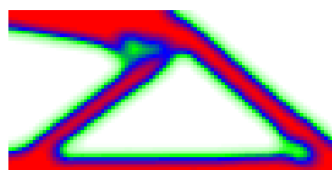
Tabela 25 – Resultados da **Viga em balanço**, usando o SIMP ordenado, para os diferentes raios do filtro

Método	Raio	Iterações	Função objetivo	Tempo (seg)
SPG				
	4	328	25,15	30,49
	5	332	26,36	31,47
	6	330	27,76	30,91
	7	329	29,16	31,24
	8	333	30,58	31,54
	9	348	32,07	33,11

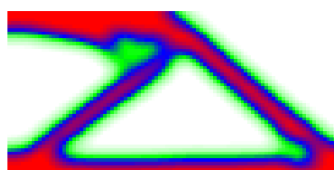
Observando a Tabela 25, constatamos que o tempo gasto obtido pelo método SPG foi maior para o raio igual a nove. Além disso, o tempo gasto com os raios 4 e 5, bem como com os raios 6 e 7, foram muito próximos. Na Figura 15, vemos que as topologias ótimas obtidas pelo método SPG, permaneceram semelhantes com os raios 5, 6 e 7. Para todos raios, a topologia apresenta camadas de materiais, o que dificulta a construção da peça.



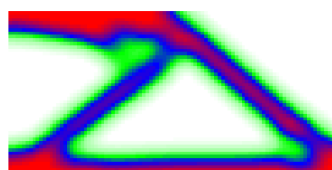
(a) Raio 4



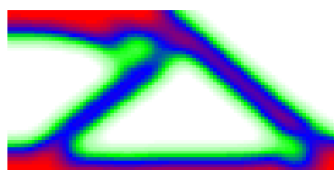
(b) Raio 5



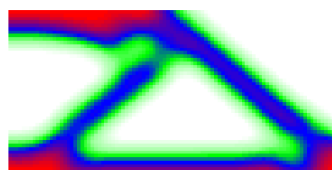
(c) Raio 6



(d) Raio 7



(e) Raio 8



(f) Raio 9

Figura 15 – Topologias ótimas obtidas para a viga em balanço usando o SIMP ordenado para os diferentes raios do filtro da média ponderada das densidades

7 Conclusões

Neste trabalho, estudamos quatro formulações para os problemas de otimização topológica com múltiplos materiais, empregando o método SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund), com múltiplas fases (Hvejsel e Lund), com múltiplas fases (Cai *et al.* [12]) e o método SIMP ordenado. Além disso, implementamos três métodos de otimização não linear que apresentaram bons resultados para resolver problemas de otimização topológica na literatura: o método da programação linear sequencial (PLS), o método das Assíntotas Móveis (MMA) e o método do gradiente espectral projetado (SPG).

Apresentamos novos algoritmos de fase ativa alternada para resolver o problema de otimização topológica com múltiplos materiais, que foram formulados usando o SIMP com múltiplas fases incluindo material artificial (Hvejsel e Lund), múltiplas fases (Hvejsel e Lund) e múltiplas fases (Cai *et al.* [12]). Os algoritmos decompõem o problema de otimização com múltiplos materiais em uma série de subproblemas de otimização topológica com dois materiais, que são resolvidos de forma inexata, de maneira sequencial, por algum método de otimização não linear. As coordenadas da solução inexata são atualizadas através da estratégia do método de descida coordenado por blocos.

Nas formulações que foram feitas para os métodos de fase ativa alternada, comparamos o desempenho dos algoritmos, em que a solução inexata do subproblema é obtida pelos métodos da PLS, MMA e SPG. Também comparamos os algoritmos da fase ativa alternada com o método da programação linear sequencial e com o método das Assíntotas móveis.

Os resultados computacionais mostram que, em quase todos os testes realizados, os métodos da fase ativa alternada foram bastante eficientes para encontrar a solução aproximada. O método da fase ativa alternada versão Gauss - Seidel em que o subproblema foi resolvido pelo método SPG foi o que gastou menos tempo, bem como o que produziu os melhores resultados com relação à qualidade das topologias.

Os valores da função objetivo encontrados pelos métodos de otimização estiveram próximos na maioria dos testes. E mesmo quando havia uma diferença substancial, as topologias obtidas pelos métodos foram aceitáveis.

As topologias ótimas obtidas pelo método da PLS foram quase insensíveis ao refinamento da malha. Por sua vez, a FAA (SPG) encontrou topologias ótimas semelhantes na maioria dos refinamentos da malha. Além disso, o tempo gasto pela FAA (SPG) foi muito menor que o tempo gasto pelo método da PLS em quase todos os refinamentos da malha.

Quanto à formulação feita através do SIMP ordenado, podemos dizer que o método SPG obteve o menor valor para a função objetivo. As topologias ótimas obtidas pelo método, possuem camadas de materiais que podem dificultar a construção da peça.

Como trabalho a futuro, sugerimos a aplicação dos métodos de otimização topológica com múltiplos materiais à obtenção da topologia ótima de outros problemas, como, por exemplo, mecanismos flexíveis e estruturas tridimensionais, para que se possa expandir as conclusões sobre o desempenho dos novos algoritmos apresentados neste trabalho. Também propomos a comparação dos modelos de otimização com vários materiais com o modelo apresentado recentemente por Li e Kim [23], a fim de investigar o custo computacional associado à resolução de problemas de otimização topológica de grande porte.

Referências

- [1] ASSAN, A. E. *Métodos dos elementos finitos: primeiros passos*, 2 ed. Editora Unicamp, São Paulo, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [2] BARZILAI, J., AND BORWEIN, J. M. A nonmonotone line search technique for Newton's method. *IMA J. Numer. Anal.* 8 (1988), 141–148. Citado na página 48.
- [3] BATHE, K. J. *Finite Elements Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996. Citado na página 15.
- [4] BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct. Optim.* 1 (1989), 193–202. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 23.
- [5] BENDSØE, M. P., AND SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004. Citado na página 11.
- [6] BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear Programming*, 2 ed. Athena Scientific, Belmont MA, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 38, 52 e 55.
- [7] BIRGIN, E. G., MARTÍNEZ, J. M., AND RAYDAN., M. Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets. *SIAM J. Optim.* 10 (2000), 1196–1211. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- [8] BORRVALL, T., AND PETERSSON, J. Topology optimization of fluids in Stokes flow. *Int J Numer Meth Fluids* 41 (2003), 77 – 107. Citado na página 10.
- [9] BRENT, R. P. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. *Comput. J.* 14 (1971), 422–425. Citado na página 51.
- [10] BRUNS, T. E., AND TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001), 3443 – 3459. Citado na página 29.
- [11] BRUNS, T. E., AND TORTORELLI, D. A. An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 57 (2003), 1413–1430. Citado na página 30.
- [12] CAI, K., CAO, J., SHI, J., LIU, L., AND QIN, Q. H. Optimal layout of multiple bi-modulus materials. *Struct. Multidisc. Optim.* 53 (2016), 801–811. Citado 27 vezes nas páginas 8, 9, 11, 26, 27, 55, 56, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85 e 92.

- [13] CASSIOLI, A., D., D., AND SCIANDRONE, M. On the convergence of inexact block coordinate descent methods for constrained optimization. *Eur. J. Oper. Res.* 231 (2013), 274–281. Citado na página 55.
- [14] COOK, R. D., MALKUS, D. S., AND PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of finite element analysis*, 3 ed. John Wiley and Sons, New York, 1989. Citado na página 15.
- [15] DÍAZ, A. R., AND SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Struct. Optim.* 10 (1995), 40–45. Citado na página 29.
- [16] GOMES, F., AND SENNE, T. An SLP algorithm and its application to topology optimization. *Comput. Appl. Math.* 30 (2011), 53–89. Citado 5 vezes nas páginas 10, 44, 45, 46 e 47.
- [17] GOMES-RUGGIERO, M. A., SACHINE, M., AND SANTOS, S. A. Solving the dual subproblem of the method of moving asymptotes using a trust-region scheme. *Comput. Appl. Math.* 30, 1 (2011), 151 – 170. Citado na página 31.
- [18] GOODIER, T. *Teoria da Elasticidade*, 3 ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980. Citado na página 15.
- [19] GRIPPO, L., LAMPARIELLO, F., AND LUCIDI, S. A nonmonotone line search technique for Newton’s method. *SIAM J. on Numer. Anal.* 23 (1986), 707–716. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- [20] GRIPPO, L., AND SCIANDRONE, M. On the convergence of the block nonlinear gauss-seidel method under convex constraints. *Oper. Res. Lett.* 26 (2000), 127–136. Citado na página 55.
- [21] HAFTKA, R. T., AND GRANDHI, R. V. Structural shape optimization - a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 57 (1986), 91– 106. Citado na página 12.
- [22] HVEJSEL, C. F., AND LUND, E. Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. *Struct. Multidisc. Optim.* 43 (2011), 811–825. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.
- [23] LI, D., AND KIM, I. Y. Multi-material topology optimization for practical lightweight design. *Struct. Multidisc. Optim.* 58 (2018), 1081 – 1094. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 93.
- [24] MARTÍNEZ, J. M. A note on the theoretical convergence properties of the SIMP method. *Struct. Multidisc. Optim.* 29 (2005), 319–323. Citado na página 23.

- [25] NGUYEN, K. C., TRAN, P., AND NGUYEN, H. X. Multi-material topology optimization for additive manufacturing using polytree-based adaptive polygonal finite elements. *Automation in Construction* 99 (2019), 79 – 90. Citado na página 10.
- [26] PEDERSEN, P., AND PEDERSEN, N. L. Interpolation/penalization applied for strength design of 3d thermoelastic structures. *Struct Multidiscip Optim* 45 (2012), 773 – 786. Citado na página 10.
- [27] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3 ed. Cambridge University Press, New York, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- [28] RAYDAN, M. Convergence properties of the Barzilai and Borwein gradient method, Ph.D. thesis, Department of Mathematical Sciences, Rice University, Houston, TX, U.S.A., 1991. Citado na página 48.
- [29] RAYDAN, M. The Barzilai and Borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem. *SIAM J. Optim.* 7, 1 (1997), 26–33. Citado na página 48.
- [30] RIETZ, A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. *Struct. Multidisc. Optim.* 21 (2001), 159–163. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 23.
- [31] SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Struct. Multidiscip. Optim.* 21 (2001), 120–127. Citado na página 29.
- [32] SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 33 (2007), 401–424. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.
- [33] STANFORD, B., AND BERAN, P. Conceptual design of compliant mechanisms for flapping wings with topology optimization. *AIAA J* 49 (2011), 855 – 867. Citado na página 10.
- [34] SVANBERG, K. The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 24 (1987), 359–373. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.
- [35] SVANBERG, K. Some modelling aspects for the matlab implementation of MMA. *Technical report* (2004). Citado na página 37.
- [36] SVANBERG, K. MMA and GCMMA - two methods nonlinear optimization. *Technical report* (2007). Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 43.
- [37] TAVAKOLI, R., AND MOHSENI, S. M. Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems a 115-line matlab implementation. *Struct. Multidisc. Optim.* 49 (2014), 621–642. Citado 3 vezes nas páginas 11, 52 e 56.

- [38] TAVAKOLI, R., AND ZHANG, H. A nonmonotone spectral projected gradient method for large-scale topology optimization problems. *Numer Algebra Control Optim* 2 (2012), 395–412. Citado na página 50.
- [39] VANDERPLAATS, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*. McGraw-Hill, New York, 1984. Citado na página 12.
- [40] WATKINS, D. S. *Fundamentals of matrix computations*, 2 ed. Wiley, New York, 2002. Citado na página 22.
- [41] WOISCHWILL, C., AND KIM, I. Y. Multimaterial multijoint topology optimization. *Int J Number Methods Eng* 115(13) (2018), 1552 – 1579. Citado na página 10.
- [42] YIN, L., AND ANANTHASURESH, G. K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. *Struct Multidisc Optim* 23 (2001), 49 – 62. Citado na página 11.
- [43] ZHANG, X. S., PAULINO, G. H., AND JR, A. S. R. Multi-material topology optimization with multiple volume constraints: a general approach applied to ground structures with material nonlinearity. *Struct Multidisc Optim* 57 (2018), 161 – 182. Citado na página 10.
- [44] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, R. L. *The finite element method for solid and structural mechanics*, 6 ed. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. Citado na página 15.
- [45] ZUO, W., AND SAITOU, K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation. *Struct. Multidisc. Optim.* 55 (2016), 1–15. Citado 3 vezes nas páginas 11, 28 e 87.