

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**A Estrutura Hamiltoniana dos
Campos Reversíveis em 4D**

Ricardo Miranda Martins

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Co-Orientadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Campinas, 2008.

Apoio financeiro: CNPq.

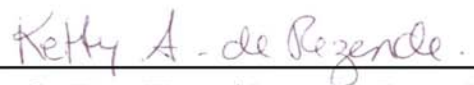
A Estrutura Hamiltoniana dos Campos Reversíveis em 4D

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Ricardo Miranda Martins** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de Fevereiro de 2008.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Orientador



Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende
Co-Orientadora

Banca examinadora:

Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Martins, Ricardo Miranda

M366e A estrutura hamiltoniana dos campos reversíveis em 4D / Ricardo
Miranda Martins -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador: Marco Antonio Teixeira; Ketty Abaroa de Rezende
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Campos vetoriais. 3. Simetria.
4. Sistemas hamiltonianos. 5. Forma normal (Matemática). I. Teixeira,
Marco Antonio. II. Rezende, Ketty. III. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
IV. Título.

Título em inglês: The hamiltonian structure of the reversible vector fields in 4D

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Vector fields. 3. Symmetry.
4. Hamiltonian systems. 5. Normal form (Mathematics).

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Titulação: Mestre em Matemática

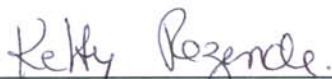
Banca examinadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar (IFGW-UNICAMP)
Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima (UFABC)
Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita (IBILCE-UNESP)

Data da defesa: 25/02/2008

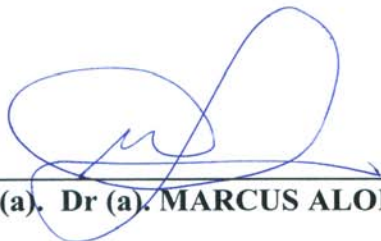
Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de fevereiro de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof. (a). Dr (a). MARCUS ALOIZIO MARTINEZ DE AGUIAR



Prof. (a). Dr (a). MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA



Prof. (a). Dr (a). VANDERLEI MINORI HORITA

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Dalva, e ao meu pai, Djalmas, por sempre me apoiarem e torcerem fanaticamente por mim.

Ao Marco, por aceitar me orientar, pela escolha do tema da dissertação, pelas respostas às minhas muitas perguntas, pela paciência com meus teoremas fantásticos baseados em erros de programação e pela confiança que tem demonstrado.

Ao amigos do Predinho e do Laboratório de Controle e Sistemas Dinâmicos, em especial Anderson D’Azeite, Angelo, Bricela, Ferraiol, Juliana, Lino, Luci, Luis, Mariana e Régis, agradeço pela companhia durante os incontáveis cafés e pelas discussões, tenham estas servido para aumentar ou diminuir (*o que ocorreu q.t.p.*) nossa produção científica; à Juliana ainda agradeço pelo carinho e paciência (*quase*) sempre.

À professora Ketty Rezende e aos professores Vanderlei Horita, Maurício Firmino e Marcus de Aguiar pelas sugestões e correções, todas muito pertinentes.

Aos professores do DMA/UFV que ajudaram na formação básica que me propiciou chegar até aqui, em especial à Lana, Marinês, Rogério, Olímpio e Margareth.

Aos professores e funcionários do IMECC, especialmente ao pessoal da Secretaria de Pós-Graduação, Cidinha, Tânia e Ednaldo, por tornarem os trâmites burocráticos do IMECC um pouco mais simples.

Por fim, mas de forma alguma menos importante, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante o mestrado.

A mathematician is a device for turning coffee into theorems.

- Paul Erdős

ÍNDICE

Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Sistemas Dinâmicos e Campos de Vetores	1
1.2 Sistemas Hamiltonianos	11
1.2.1 Transformações simpléticas	11
1.2.2 Campos Hamiltonianos	12
1.3 Sistemas Reversíveis	15
2 Formas Normais	21
2.1 Forma Normal de Poincaré-Dulac	21
2.2 Forma Normal de Belitskii	27
2.3 Renormalização	29
2.4 Formas Normais de Sistemas Reversíveis	30
2.5 Formas Normais de Sistemas Bi-Reversíveis por \mathbb{D}_4	31
2.6 Analiticidade da Forma Normal	33

3	Cálculo de Formas Normais	35
3.1	Caso genérico	36
3.1.1	Indícios computacionais: caso genérico	36
3.1.2	Demonstrações dos resultados: caso genérico	37
3.2	Caso 1:1 não semi-simples	38
3.2.1	Indícios computacionais: caso 1 : 1	39
3.2.2	Demonstrações dos resultados: caso 1 : 1	40
3.3	Caso p:q	42
3.3.1	Resultados	42
4	Hamiltoniedade dos Campos Reversíveis	53
4.1	Caso genérico: conjugação formal	53
4.2	Caso genérico: equivalência orbital	59
4.3	Caso 1:1 não semi-simples	62
4.4	Caso p:q	63
5	Conclusões e trabalhos futuros	69
5.1	Recapitulando o que foi feito	69
5.2	Aspectos geométricos	71
5.2.1	Caso genérico: Coordenadas bipolares e a Teoria KAM	71
5.2.2	Caso 1 : 1: Redução da dimensão	72
	Apêndices	75
	A.1: Algoritmo para o cálculo da forma normal	75
	A2: Algoritmo para calcular condições necessárias de Hamiltoniedade	82
	Bibliografia	85

RESUMO

A semelhança entre sistemas reversíveis e Hamiltonianos foi detectada nos primórdios do século passado por Birkhoff. Neste trabalho realizamos uma análise geométrica-qualitativa da dinâmica de um campo de vetores reversível em torno de um ponto de equilíbrio elíptico em \mathbb{R}^4 .

Especificamente, estudamos quando um campo reversível com tal tipo de equilíbrio é "equivalente" a um sistema Hamiltoniano. Como resultado, obtemos que tal sistema é Hamiltoniano, a menos de uma sequência de mudanças de coordenadas e reescalamentos do tempo.

Prosseguindo a análise, impomos outra simetria ao campo e passamos a considerar sistemas bireversíveis. Classificamos completamente as possíveis simetrias que tornam um sistema bireversível por involuções gerando um grupo isomorfo a \mathbb{D}_4 . Para tais sistemas, obtemos resultados um pouco mais fortes que os obtidos para sistemas reversíveis.

ABSTRACT

The similarity between reversible and Hamiltonian systems has been detected at the beginning of the past century by Birkhoff. In this project, we describe a geometrical-qualitative analysis of the dynamics of a reversible vector field around an elliptical singularity in \mathbb{R}^4 .

Specifically, we study when such a reversible vector field is "equivalent" to a Hamiltonian system. As a result, we obtain that such systems are always Hamiltonian, up to a sequence of changes of coordinates and time rescaling.

Imposing another symmetry to the vector field, we work with bireversible systems. We completely classify all the possible symmetries which makes such systems bireversible by involutions generating a group isomorphic to \mathbb{D}_4 . For these systems, we have obtained stronger results than in the reversible case.

INTRODUÇÃO

As ciências matemáticas exibem ordem, simetria e limitação; e estas são as maiores formas de beleza. – Aristóteles em Metaphysica, 3-1078b.

Motivação

Particularmente no que tange à parte da simetria, a opinião de Aristóteles tem sido cada vez mais confirmada. Uma das simetrias mais importantes encontradas na natureza (ainda que idealmente) é a simetria de eventos no que diz respeito ao tempo (*time-reversible symmetry*). Ao modelarmos estes eventos, é esperado que o modelo matemático também admita tal simetria.

Sistemas Hamiltonianos

A teoria de sistemas Hamiltonianos teve início após a formulação da mecânica clássica segundo Hamilton, que interpretou a mecânica Lagrangeana de um novo ponto de vista. A formulação Lagrangeana da mecânica clássica veio para libertar a mecânica clássica Newtoniana (a formulação original, de Isaac Newton) da exigência de um sistema de coordenadas inercial. A base matemática escolhida por Lagrange, ao invés do cálculo diferencial e integral de Newton, foi o Cálculo das Variações (ironicamente, também criação de Newton). Mais tarde, Hamilton adaptou a idéia de Lagrange, que usava n parâmetros num espaço n -dimensional, para uma nova abordagem da mecânica clássica, usando um espaço $2n$ -dimensional.

A mecânica Hamiltoniana tem a boa propriedade de estar pronta para a mecânica quântica: o princípio da menor ação na mecânica Hamiltoniana é dedutível a partir da equação de Schrödinger. Como toda a teoria Hamiltoniana depende desse princípio, tudo leva a crer que a abordagem de Hamilton é a mais adequada para fazer a transição da mecânica clássica para a quântica ([7]).

Logo após a formulação Hamiltoniana da mecânica clássica, iniciou-se o desenvolvimento do formalismo matemático necessário para dar suporte à teoria física. Isso deu início à área conhecida como Geometria Simplética, hoje trabalhada independente de motivações físicas ([14]). Para nossos propósitos, um sistema Hamiltoniano será um sistema de equações diferenciais vetoriais ordinárias autônomas da forma

$$\dot{x} = J\nabla H(x),$$

onde $x \in \mathbb{R}^{2n}$, J é uma matriz simplética¹ e $H : U_0 \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 definida numa vizinhança da origem.

O nascimento dos sistemas dinâmicos reversíveis

Por volta de 1915, o matemático George Birkhoff trabalhava num artigo sobre o problema restrito de três corpos ([9]). Neste problema, é estudado o comportamento do seguinte sistema: dois corpos movem-se em torno do seu centro de massa com órbitas circulares e um terceiro corpo se move somente pela força de atração dos dois corpos. Exemplos de tais sistemas podem ser Terra, Lua e um ônibus espacial ou o Sol, Júpiter e um pequeno asteroide. Mais detalhes sobre este problema podem ser encontrados em [1], [45] e [32].

Birkhoff observou que o sistema com o qual estava trabalhando (sabidamente Hamiltoniano) gozava de uma propriedade especial: existia uma aplicação R involutiva em relação à qual o sistema era invariante, isto é, se

$$\dot{x} = X(x)$$

era o sistema original e $R(x, y) = (x, -y)$, então

$$R(X(x)) = -X(R(x)). \quad (1)$$

Após o trabalho de Birkhoff, a idéia de simetrias como em (1) ficou adormecida por algumas décadas. Nos anos 60 começaram a aparecer alguns trabalhos usando a mesma idéia (veja [27]), mas sempre tendo como pano de fundo sistemas Hamiltonianos.

¹Isto será definido formalmente mais a frente.

Em 1976, Devaney ([21]) publicou o trabalho definitivo sobre sistemas dinâmicos reversíveis. Devaney percebeu que sistemas não-Hamiltonianos também admitiam certas simetrias satisfazendo (1). Foi neste artigo inclusivo que surgiram as expressões *reversible vector field* e *reversible diffeomorphism*. A partir daí a teoria de sistemas dinâmicos reversíveis se tornou independente da teoria Hamiltoniana.

Alguns anos depois, Arnold ampliou a idéia de reversibilidade, retirando a exigência de involutividade e da propriedade de que o conjunto dos pontos fixos do reversor tivesse metade da dimensão do espaço ambiente.

Neste trabalho, se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ é um campo de vetores² e $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um difeomorfismo involutivo ($\varphi^2 = Id$) de classe C^r com $\dim \text{Fix}(\varphi) = n$, diremos que X é φ -reversível se

$$D\varphi(x)X(x) = -X(\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

O mundo reversível e o mundo Hamiltoniano

Seriam estes mundos tão diferentes? Ora, se a função Hamiltoniana satisfaz

$$H(x, y) = H(x, -y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

o sistema Hamiltoniano associado é também reversível. Na outra direção, a grande maioria dos sistemas reversíveis que modelam fenômenos físicos acabam sendo também Hamiltonianos.

Devaney, em 1976, demonstrou o Teorema do Centro de Lyapunov e o Teorema da Catástrofe para órbitas periódicas em sistemas reversíveis, resultados que já eram bem conhecidos para o caso Hamiltoniano. Como relata Lamb [28], Devaney observou também que “sistemas reversíveis, perto de órbitas periódicas simétricas, se comportam exatamente como sistemas Hamiltonianos”.

A Teoria KAM³ ([12], [31], [37] e [43]), que lida com persistência de toros invariantes sob perturbações, é outro resultado que foi originalmente desenvolvido para sistemas Hamiltonianos e pôde ser aplicado também a sistemas reversíveis. O uso da Teoria KAM nos sistemas reversíveis foi

²Sempre trabalharemos em espaços de dimensão par.

³Uma homenagem aos matemáticos A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold e J. K. Moser, que estabeleceram o Teorema KAM, cuja primeira idéia apareceu em 1954, com Kolmogorov, foi generalizada por Moser em 1962 e demonstrado em sua formulação atual em 1963, por Arnold.

tão bem aceito que o próprio Moser, contrariando a ordem cronológica das demonstrações, passou a apresentar a Teoria KAM para sistemas reversíveis antes da versão Hamiltoniana, por achar que o caso reversível é “tecnicamente mais simples e natural” que o caso Hamiltoniano ([39]).

Passar a considerar os efeitos da reversibilidade fez tão bem à teoria Hamiltoniana que hoje muitos se perguntam quais dos resultados no mundo Hamiltoniano se devem puramente à estrutura simplética e quais são simplesmente resultados de sistemas reversíveis.

Objetivos

Tendo em vista tudo isso, neste trabalho realizamos uma análise geométrica-qualitativa da dinâmica de um sistema reversível em \mathbb{R}^4 com equilíbrio elíptico na origem e mostramos que tal sistema é formalmente orbitalmente equivalente a um sistema Hamiltoniano.

Seremos guiados por [29], mas estendemos os resultados ali presentes no caso de ressonância $1 : 1$ não semi-simples. Casos particulares do problema que estudamos foram tratados por Teixeira e Yang em [58] e [59] (problema perturbado). J. van der Meer, Sanders e Vanderbauwhede, em [34], resolvem um dos casos do problema e mostram que vale uma espécie de equivalência (com *certas* hipóteses): um sistema em \mathbb{R}^4 com equilíbrio elíptico $1 : 1$ -ressonante (não semi-simples) é Hamiltoniano se, e só se, é reversível.

Também consideramos sistemas bireversíveis, isto é, que são reversíveis em relação a duas involuções distintas. No caso em que estas involuções gerem um grupo isomorfo ao grupo de simetrias do quadrado \mathbb{D}_4 , apresentamos condições suficientes para equivalência orbital formal e para conjugação formal, conforme os autovalores $\pm\alpha i, \pm\beta i$ da aproximação linear sejam ou não linearmente dependentes sobre \mathbb{Q} . Ressaltamos que estes resultados são inéditos.

A técnica utilizada é basicamente a Teoria de Formas Normais, tanto de Poincaré-Dulac como de Belitskii, além de métodos de computação algébrica. Sempre que possível, utilizamos uma plataforma computacional para efetuar os tediosos cálculos que são necessários para manipular formas normais.

Dentre as vantagens de se trabalhar desta maneira, destacam-se o teste de várias involuções diferentes para gerar a forma normal reversível e a análise de várias formas simpléticas em relação a qual

o campo pode ser Hamiltoniano. Os algoritmos utilizados foram produzidos no Maple 11 especificamente para abordar o problema em questão e estão no Apêndice. Sua generalização é imediata para qualquer dimensão. O leitor em busca de mais algoritmos para sistemas dinâmicos, em especial para teoria da bifurcação e métodos de perturbação, pode consultar [44], que tem uma série de programas desenvolvidos no software MACSYMA para esta finalidade.

Estrutura do texto e resultados principais

No Capítulo 1 definiremos os conceitos que serão necessários no decorrer do trabalho. Apresentaremos também as propriedades básicas dos sistemas Hamiltonianos e Reversíveis.

No Capítulo 2 trataremos das formas normais de Poincaré-Dulac e de Belitskii, além dos lemas de Takens, utilizados para renormalizar campos de vetores.

O Capítulo 3 é dedicado ao cálculo das formas normais para cada um dos campos aqui estudados, considerando a reversibilidade ou bireversibilidade. Especificamente provamos o teorema abaixo, cuja parte (i) foi utilizada sem demonstração em [29]. A parte (ii) é inédita.

Trabalharemos sempre com campos cuja aproximação linear na origem é dada por matrizes da forma

$$A(\alpha, \beta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \epsilon & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta \neq 0, \quad \epsilon \in \{0, 1\}. \quad (2)$$

Teorema 1. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo com aproximação linear na origem $DX(0) = A(\alpha, \beta, \epsilon)$.*

(i) *Se X é \mathbb{Z}_2 -reversível, então:*

(a) *se $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$, uma forma normal de X é*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\alpha x_2 - x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_1 &= -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_2 &= \beta y_1 + y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases}$$

(b) *se $\alpha = \beta$ e $\epsilon = 1$, uma forma normal de X é*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + y_1 + x_2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j \Delta_3^j \\ \dot{x}_2 &= x_1 + y_2 + x_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j \Delta_3^j \\ \dot{y}_1 &= -y_2 + y_2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j \Delta_3^j \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j \Delta_3^j \end{cases}$$

(c) *se $q\alpha - p\beta = 0$ para $p, q \in \mathbb{Z}$, uma forma normal de X em coordenadas complexas $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = y_1 + iy_2$ é*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= piz_1 + z_1 f_1(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) + \bar{z}_1^{q-1} z_2^p f_2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \\ \dot{z}_2 &= qiz_2 + z_2 g_1(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) + z_1^q \bar{z}_2^{p-1} g_2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \end{cases},$$

com $\Delta_1 = z_1 \bar{z}_1$, $\Delta_2 = z_2 \bar{z}_2$, $\Delta_3 = z_1^q \bar{z}_2^p$, $\Delta_4 = \bar{\Delta}_3$.

(ii) *Se X é \mathbb{D}_4 -reversível, então:*

(a) *se $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$ ou $\alpha = \beta$, a forma normal de X coincide com a do caso \mathbb{Z}_2 -reversível (i)-(a), (b)*

(b) *se $q\alpha - p\beta = 0$, fornecemos condições suficientes para que a forma normal coincida com a do caso (i)-(a) e classificamos (em termos de p e q) as possíveis formas normais conforme a realização de \mathbb{D}_4 .*

O Capítulo 4 é o ponto principal da dissertação: veremos que, sob certas condições sobre os coeficientes da forma normal, os campos com os quais trabalhamos são formalmente orbitalmente equivalentes a um campo Hamiltoniano. Mostraremos a possibilidade de realização destas condições, ora multiplicando o campo por uma função adequada, ora efetuando uma mudança de coordenadas da forma $x = y + \dots$. Ainda no Capítulo 4, reorganizamos os resultados do Capítulo 3 para enunciar os resultados sobre bireversibilidade.

Especificamente, sejam

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\alpha}{2}\Delta_1 + \frac{\beta}{2}\Delta_2 + \sum_{i+j=2}^{\infty} \bar{a}_{ij}\Delta_1^i\Delta_2^j,$$

$$H_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}\Delta_2 + \Delta_3 + \sum_{j=2}^{\infty} ja_j\Delta_3^j,$$

$$H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{\lambda}{2}\Delta_2 + \frac{1}{4}\epsilon_2\Delta_2^2 + \frac{1}{4}\epsilon_1\Delta_1^2 + \frac{1}{6}\epsilon_2\Delta_1^3, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}.$$

Provaremos os seguintes resultados:

Teorema 2. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo com aproximação linear $DX(0) = A(\alpha, \beta, \epsilon)$. Se X é \mathbb{Z}_2 -reversível, então:*

- (a) *se $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$, então X é formalmente conjugado ao campo Hamiltoniano $J_0\nabla H_0$;*
- (b) *se $\alpha = \beta$, então X é formalmente conjugado ao campo Hamiltoniano $J_1\nabla H_1$;*
- (c) *no caso $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$, X é formalmente orbitalmente equivalente ao campo Hamiltoniano polinomial $J_0\nabla H_2$.*
- (d) *no caso $q\alpha - p\beta = 0$, para $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq q$, X é formalmente orbitalmente equivalente a um campo Hamiltoniano da forma $J_0\nabla H$, para uma certa função $H : U \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Teorema 3. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo com aproximação linear $DX(0) = A(\alpha, \beta, \epsilon)$. Se X é \mathbb{D}_4 -reversível, então:*

- (a) *nos casos $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$ e $\alpha = \beta, \epsilon = 1$, X é formalmente conjugado aos campos Hamiltonianos $J_0\nabla H_0$ e $J_1\nabla H_1$, respectivamente;*
- (b) *no caso $q\alpha - p\beta = 0$ e p, q ímpares, $pq > 1$, X é formalmente conjugado ao campo Hamiltoniano $J_0\nabla H_0$; a conjugação formal também vale para alguns outros casos;*
- (c) *nos outros casos, vale a equivalência orbital formal ao campo $J_0\nabla H$ para uma certa função $H : U \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, assim como no Teorema 2-(d).*

O Teorema 2 está provado parcialmente em [29] (no caso 1 : 1, não é demonstrada a conjugação formal), já o Teorema 3 é inédito.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo fixar a notação e a terminologia, exemplificando alguns dos conceitos estudados. As definições poderão estar adaptadas para os assuntos que vamos abordar, por isso daremos logo várias referências gerais.

Para tratados sobre sistemas dinâmicos e campos de vetores veja os clássicos [3], [4], [25], [35] e [52]; para sistemas reversíveis, boas referências são [21], [28] e [49].

Já para sistemas Hamiltonianos, [1], [5] e [26] são leituras indispensáveis (em especial este último, que contém um apêndice com a transcrição da palestra do matemático A. N. Kolmogorov, no *International Congress of Mathematicians* de 1954). Em [25, págs. 293, 294] é feita de forma rápida e precisa a ligação fundamental entre os campos Hamiltonianos, vistos de uma maneira abstrata, e a formulação Hamiltoniana da mecânica clássica.

1.1 Sistemas Dinâmicos e Campos de Vetores

Seja M um conjunto e G um grupo. Um **fluxo** é um grupo a 1-parâmetro (definido em G) de transformações agindo em um conjunto M , isto é, um conjunto de aplicações $\phi_t : M \rightarrow M$, $t \in G$ satisfazendo $\phi_0 = Id_M$ e $\phi_{r+s} = \phi_r \phi_s$ (logo, $\phi_r \phi_{-r} = \phi_0 = Id_M$). Um fluxo induz uma aplicação $\phi : G \times M \rightarrow M$, $\phi(t, x) = \phi_t(x)$; diremos que o trio (M, G, ϕ) é um **sistema dinâmico**.

O conjunto $\{\phi_t(x_0), t \in G\}$ é chamado de **órbita** (ou **trajetória**) de X passando por x_0 . Entende-

se por **retrato de fase** a representação geométrica das órbitas orientadas de um sistema dinâmico. No retrato de fase, cada condição inicial é representada por sua órbita. Outra maneira de pensar o retrato de fase é como um quociente M/\sim , onde $x \sim y \Leftrightarrow x$ e y pertencem a uma mesma órbita ($\exists t_0 \mid \phi_{t_0}(x) = y$).

Exemplo 1.1. Seja $M = \mathbb{R}^{n \times n}$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$ e $G = SL(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis. Considere a ação $(g, x) \in G \times M \xrightarrow{\phi} gxg^{-1} \in M$. O trio (M, G, ϕ) é um sistema dinâmico. A órbita por x_0 é o conjunto $\{gx_0g^{-1} \mid g \in G\}$, isto é, a órbita de x_0 é constituída das matrizes semelhantes a x_0 .

Exemplo 1.2. Seja G um grupo de Lie e $H \triangleleft G$ um subgrupo normal. Para $g \in G$, as transformações $L_g : H \rightarrow H$ dadas por $L_g(h) = gh$ determinam um fluxo em H . Se $h_0 \in H$, a órbita de h_0 é o conjunto $\{gh_0 \mid g \in G\}$. O trio (H, G, L) é um sistema dinâmico ($L(g) = L_g$). O retrato de fase é o quociente G/H , isto é, as classes laterais de H em G .

É usual escolher M uma variedade diferenciável, $G \in \{\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ e ϕ um homeomorfismo ou difeomorfismo (para $t \in G$ e $x \in M$). Quando $G \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, o trio (M, G, ϕ) é dito um sistema dinâmico **discreto** e quando $G = \mathbb{R}$, o sistema dinâmico é dito **contínuo**.

Exemplo 1.3. Seja $\theta \in [0, 2\pi]$ e considere $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$R_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

Pondo $M = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}$ e $\phi_n(x, y) = R_\theta^n(x, y)$, temos que (M, G, ϕ) é um sistema dinâmico discreto. A órbita de um ponto (x_0, y_0) é o conjunto

$$\{R_\theta^k(x_0, y_0)\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{(x_0\cos(k\theta) - y_0\sin(k\theta), x_0\sin(k\theta) + y_0\cos(k\theta))\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

de pontos de \mathbb{R}^2 que podem ser obtidos girando (x_0, y_0) de $k\theta$ graus, $k \in \mathbb{Z}$.

Se $\theta = \frac{p}{q}\pi$ ($p, q \in \mathbb{Z}$), então $\{R_\theta^k(x_0, y_0)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto discreto com no máximo $2q$ elementos. Se $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$, então a órbita de (x_0, y_0) é densa na circunferência $x^2 + y^2 = R_0$, onde $R_0 = x_0^2 + y_0^2$. O retrato de fase, neste caso, é como na Figura 1.1.

Exemplo 1.4. Seja $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\phi_t(x, y) = \left(xe^t, \frac{y}{1-yt}\right)$. Então $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \phi)$ é um sistema dinâmico. A trajetória por um ponto da forma $(x, 0)$, $x > 0$, é o conjunto

$$\phi_t(x, 0) = \{(xe^t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+.$$

Voltaremos a este exemplo mais tarde.

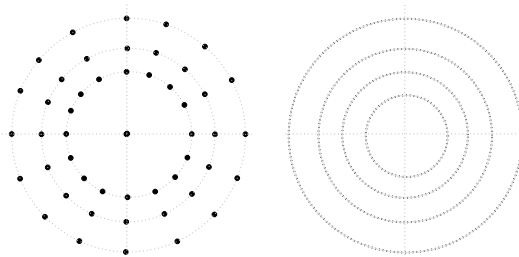


Figura 1.1: Órbitas discretas no caso de $\theta \in \mathbb{Q}$ e densas em S^1 no caso de $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Seja M uma variedade diferenciável e $T(M)$ seu fibrado tangente. Um **campo de vetores** em M é uma aplicação $X : M \rightarrow T(M)$ de classe C^r . O conjunto dos campos C^r sobre M será denotado por $\mathfrak{X}^r(M)$. Quando não causar confusão, não mencionaremos o grau de diferenciabilidade do campo e este deve ser entendido como o menor que faça sentido no contexto ou, para evitar dores de cabeça, C^∞ (já que vamos considerar a expansão de X em série de Taylor). Campos de vetores são frequentemente usados em física para modelar forças ou velocidades agindo sobre um sistema.

Quando $M \subseteq \mathbb{R}^n$, um campo de vetores em M é uma aplicação $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada ponto $x \in M$ o vetor $X(x) \in \mathbb{R}^n$. Como desenvolveremos resultados locais, assumiremos sempre que M é um aberto de \mathbb{R}^n . O **campo de direções** de X é uma representação geométrica de X : a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$, associamos a representação gráfica do vetor $X(p)$.

Seja H_n^k o espaço dos campos vetoriais em \mathbb{R}^n cujas coordenadas são polinômios homogêneos de grau k , isto é,

$$Y \in H^k \Leftrightarrow Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + Y^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad Y^j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sum m_j = k} a_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$$

Note que a dimensão de H_n^k é $n \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$. Escreveremos H^k ao invés de H_n^k quando não houver confusão sobre a dimensão.

Um **campo de vetores formal** é uma aplicação $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma

$$X(x) = \sum_{j \geq 0} X_j(x),$$

com $X_k \in H^k$ e cuja convergência não é assumida. Da mesma forma, usaremos os termos **aplicação formal**, **função formal** e **mudança de coordenadas formal** para funções expressas por séries de potências (vetoriais ou não) não necessariamente convergentes.

Exemplo 1.5. A aplicação $X(x, y) = (\sum_{n \geq 1} nx^n, \sum_{n \geq 0} y^n)$ é um campo vetorial formal em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.6. Todo campo vetorial C^μ (analítico) é um campo vetorial formal.

Um campo de vetores induz um sistema dinâmico. Com efeito, seja X um campo em \mathbb{R}^n e considere a equação diferencial ordinária (vetorial)

$$\dot{x} = X(x).$$

Seja $\phi_t(x_0)$ a (única) solução do sistema acima com a condição inicial $x(0) = x_0$, ou seja, $\phi_t(x_0)$ é a curva $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz $x(0) = x_0$ e $x'(t) = X(x(t))$. Considerando $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, o trio $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \phi)$ é um sistema dinâmico. Neste caso, o fluxo é denominado **fluxo associado ao campo X** . As órbitas são as curvas $x(t) = \phi_t(x_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, um fluxo induz um campo de vetores e este, por sua vez, induz uma equação diferencial. Seja $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um fluxo (diferenciável) e defina

$$X(x) = \left. \frac{d\phi_t(x)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\phi_\epsilon(x) - \phi_0(x)}{\epsilon} \right)$$

Geometricamente, $\phi_t(x_0)$ é uma curva em \mathbb{R}^n passando por x_0 e $X(x_0)$ o vetor tangente a esta curva em x_0 . Construções semelhantes valem para uma variedade M qualquer, com o cuidado de que $X(x)$ não pertence a M mas sim a $T(M)$.

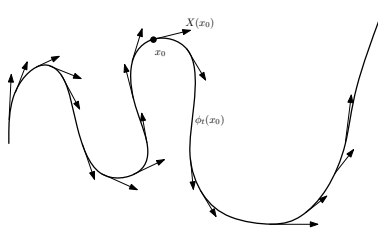


Figura 1.2: Trajetória com o campo X tangente.

Exemplo 1.7. Voltando ao Exemplo 1.4, onde $\phi_t(x, y) = (xe^t, \frac{y}{1-yt})$, temos

$$X(x, y) = \left. \frac{d\phi_t(x, y)}{dt} \right|_{t=0} = (x, y^2)$$

Na Figura 1.3 vemos algumas trajetórias com os vetores tangentes.

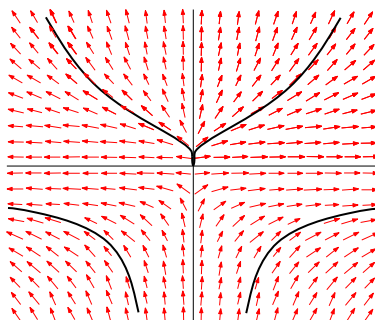


Figura 1.3: Algumas trajetórias e o campo de direções para o Exemplo 1.7.

Vale ressaltar que nem sempre é possível tomar $G = \mathbb{R}$ (quando é possível, dizemos que o campo é **completo**), geralmente o domínio do fluxo é algum intervalo da forma $(-\epsilon, \epsilon)$. Para simplificar a notação, não nos preocuparemos com isso.

Para nossos propósitos, a construção anterior será a maneira usual de construir um sistema dinâmico. Note que desta forma tornamos quase que indistintos os conceitos de equações diferenciais ordinárias (autônomas), sistemas dinâmicos e campos de vetores. Distinções entre os três entes, além de definições mais precisas podem ser encontradas em [3] e [35].

O conjunto $\mathfrak{X}(M)$ munido das operações usuais de soma e produto por escalar é um espaço vetorial. Na verdade, $\mathfrak{X}(M)$ é bem mais que isso, é uma álgebra de Lie, com o colchete de Lie de $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sendo o campo $[X, Y]$, definido por

$$[X, Y](x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

Mais detalhes sobre as Álgebras de Lie e sobre a estrutura específica desta álgebra de Lie podem ser encontrados em [22] e [47].

Seja X um campo vetorial e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ com $X(x_0) = 0$. Assim, a curva $x(t) = x_0$ é uma órbita de X , formada por um só ponto. Neste caso dizemos que x_0 é uma singularidade (ou um ponto crítico, ou um ponto de equilíbrio) de X ; caso contrário, x_0 será dito um ponto regular. Como $x \mapsto x_0 - x$ é um difeomorfismo isométrico C^∞ , podemos sempre supor que ao menos uma das singularidade (se houver alguma) está na origem. Assim, ao analisarmos uma singularidade, trabalharemos em uma vizinhança da origem. Vamos denotar por $\mathfrak{X}_p(\mathbb{R}^n)$ (ou \mathfrak{X}_p quando não for preciso enfatizar a dimensão) o conjunto

$$\mathfrak{X}_p(\mathbb{R}^n) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \mid X(p) = 0\}$$

Diz-se que uma singularidade x_0 de X é um

- (i) atrator, se todos os autovalores de $DX(x_0)$ tem parte real negativa;
- (ii) repulsor, se todos os autovalores de $DX(x_0)$ tem parte real positiva;
- (iii) sela, se todos os autovalores de $DX(x_0)$ são reais, não-nulos, e existem λ, μ entre eles com $\lambda\mu < 0$
- (iv) centro, se todos os autovalores de $DX(x_0)$ são não-nulos e tem parte real nula.

Estas definições são baseadas na geometria do campo de vetores (do fluxo) próximo de cada um destes pontos de equilíbrio. Em [52] existem belos desenhos ilustrando cada um dos casos em \mathbb{R}^3 . Para \mathbb{R}^2 , é possível classificar os pontos de equilíbrio conforme forem o traço e o determinante de $DX(x_0)$, e representar todas as possibilidades graficamente; veja [18] ou [36] para detalhes.

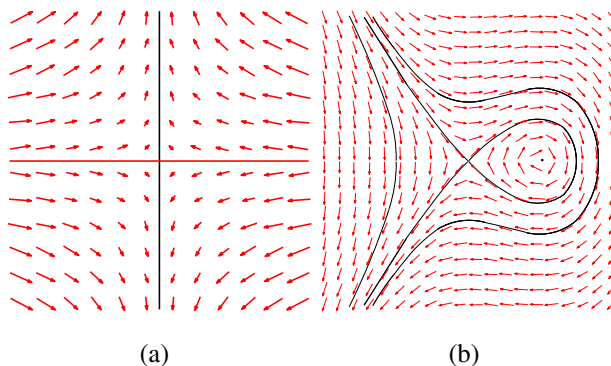


Figura 1.4: (a) Comportamento próximo a uma sela; (b) Retrato de fase do campo $(y, x - x^2)$.

Exemplo 1.8. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = y + y^3 + y^5 \end{cases}$$

A origem é uma singularidade do tipo sela. O retrato de fase deste campo pode ser visto na Figura 1.4(a). O comportamento do campo próximo a uma sela será sempre parecido com o exibido nesta figura.

Exemplo 1.9. Seja X o campo vetorial

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases}$$

De forma condensada, $X(x, y) = (y, x - x^2)$. As singularidades de X são os pontos $(0, 0)$ (sela) e $(1, 0)$ (centro). Na Figura 1.4(b) vemos o campo de direções e parte do retrato de fase deste sistema.

Exemplo 1.10 (Coordenadas polares). *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

Efetuada a mudança de coordenadas $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, temos $r^2 = x^2 + y^2$ e $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \theta$.
Derivando em t , resta

$$\dot{r} = \frac{\dot{x}x + \dot{y}y}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2}.$$

Portanto, em coordenadas polares, o sistema 1.1 fica

$$\begin{cases} \dot{r} = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) - f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta)}{r} \end{cases} \quad (1.2)$$

O uso de coordenadas polares simplifica muito a análise do comportamento de campos vetoriais, em especial próximo a pontos de equilíbrio degenerados.

Na Introdução, mencionamos a Teoria KAM como um importante resultado que foi adaptado do mundo Hamiltoniano para o mundo Reversível. O Teorema KAM (devido a Kolmogorov-Arnold-Moser, veja [43]) trata da persistência de toros invariantes em sistemas Hamiltonianos. Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $T \subseteq M$ uma subvariedade homeomorfa ao toro n -dimensional. Seja ϕ_t o fluxo de X . Diremos que T é X -invariante se $\phi_t(T) \subseteq T$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se um toro invariante não possui um ponto de equilíbrio, então as órbitas em T são ou fechadas ou densas em T (veja [24, pág. 182]).

Exemplo 1.11. *Considere o campo $X_\alpha(x, y) = (1, \alpha)$ em \mathbb{R}^2 , que tem como fluxo*

$$\phi_t^\alpha(x_0, y_0) = (x_0, y_0) + t(1, \alpha).$$

Vamos considerar o toro \mathbb{T}^2 como o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ quocientado pela relação $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$. Vejamos sob quais condições existem órbitas periódicas para este campo.

Considerando a projeção $\pi(x, y) = (x \bmod 1, y \bmod 1)$, o fluxo induzido no toro é dado por $\phi_t^{\alpha, \mathbb{T}^2}(x_0, y_0) = (x_0 + t \bmod 1, y_0 + t\alpha \bmod 1)$. Para que $x_0 + t = x_0 \bmod 1$, basta que $t \in \mathbb{Z}$. Já para que $y_0 + t\alpha = y_0 \bmod 1$, é preciso que $t = k/\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, para que exista $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t = k/\alpha$, é necessário e suficiente que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Logo, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, todas as órbitas de $\phi^{\alpha, \mathbb{T}^2}$ são periódicas. Por outro lado, se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, nenhuma órbita de $\phi^{\alpha, \mathbb{T}^2}$ é

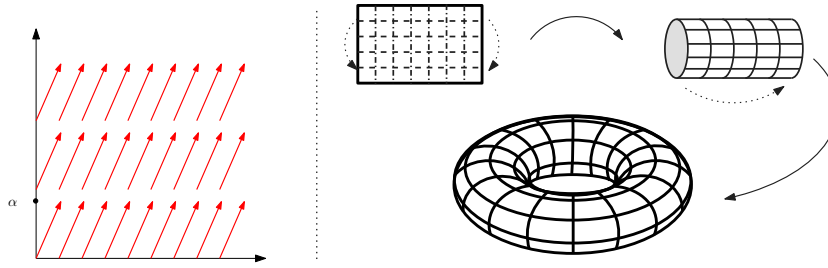


Figura 1.5: Campo $X_\alpha(x, y) = (1, \alpha)$ em \mathbb{R}^2 e construção de \mathbb{T}^2 .

periódica, mas todas são densas no toro¹. Conforme $\alpha \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha \notin \mathbb{Q}$, o fluxo $\phi^{\alpha, \mathbb{T}^2}$ é conhecido como fluxo **racional** ou **irracional** no toro, respectivamente.

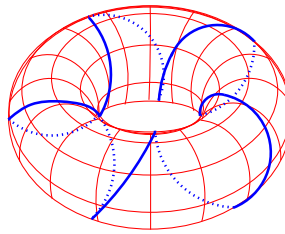


Figura 1.6: Fluxo racional no toro.

Note que fluxos racionais/irracionais no toro são instáveis, no sentido de que se $X_{\mathbb{Q}}$ é um campo que induz um fluxo racional, então arbitrariamente próximo de $X_{\mathbb{Q}}$, existe um campo $X_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ que induz um fluxo irracional. Isto é intuitivo, já que “próximo” é um conceito que não definiremos nem definiremos neste trabalho.

Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e positiva (negativa) ou não-negativa (não-positiva) que só se anule nas singularidades de X . Definimos o campo fX por

$$fX(x) = f(x)X(x).$$

Note que X e fX têm as mesmas órbitas e, no caso de f preservar orientação, estas órbitas são percorridas no mesmo sentido. O novo campo fX é dito ser obtido de X por um **reescalonamento do tempo**.

¹Não provaremos a densidade, uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [2] ou [60].

Vamos definir agora algumas relações de equivalência em $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ com fluxos ϕ e ψ . Diremos que X e Y são

- (a) **topologicamente** (ou C^0) **conjugados** se existe um homeomorfismo $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ satisfazendo $h\phi_t = \psi_t h$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) **C^k -conjugados**, $k \geq 1$, se existe um difeomorfismo $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ de classe C^k satisfazendo $h\phi_t = \psi_t h$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (c) **formalmente conjugados** quando existe uma mudança de coordenadas formal h de modo que $X(h(x)) = Y(x)$.
- (d) **C^k -orbitalmente equivalentes** se existe $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ diferenciável de classe C^k que leva órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação do fluxo, isto é, $h(\phi_t(x)) = \psi_{\tau(t)}h(x)$ para alguma função positiva τ com $\tau'(t) > 0$.
- (e) **formalmente orbitalmente equivalentes** se existe uma sequência de funções positivas e diferenciáveis de classe C^k ($k > 1$), $f_j : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, e uma sequência (h_j) de mudanças de coordenadas formais tais que $Dh_n(f_n(\dots(Dh_2(f_2(Dh_1(f_1X(x)))))\dots))$ é igual a Y no sistema de coordenadas $h_1h_2\dots h_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se X e Y são C^k -conjugados, então existe $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ satisfazendo $h\phi_t = \psi_t h$. Derivando essa expressão em t , obtemos $Dh(x)X(x) = Y(h(x))$, ou seja, h aplica órbitas de X em órbitas de Y e $Dh(x)$ faz o mesmo com os campos vetoriais subjacentes.

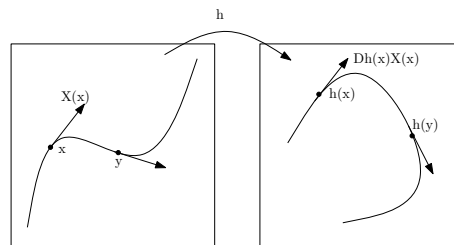


Figura 1.7: A aplicação h induz o novo campo vetorial.

A definição (e) merece alguns comentários, com o risco de parecer por demais artificial. Note que multiplicar um campo por uma função escalar não altera as órbitas: X e fX são orbitalmente equivalentes. Esta é a propriedade que queremos preservar formalmente. Ocorre que a relação

$X \sim Y \Leftrightarrow Dh(x)(f(x)X(x)) = Y(h(x))$ (para certas funções f e h) não é transitiva. Logo, não podemos simplesmente definir que X e Y serão formalmente orbitalmente equivalentes quando for possível levar X em Y por meio de um reescalonamento no tempo e de uma mudança de coordenadas. É justamente para driblar a falta de transitividade que a definição precisa recorrer à existência de sequências de reescalonamentos e mudanças de coordenadas.

Existem vários resultados que explicam o comportamento de um campo localmente em torno de um ponto, estabelecendo equivalências locais entre campos de vetores.

Teorema 1.12 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$ com $X(x_0) \neq 0$. Então, numa vizinhança de x_0 , X é C^r -conjugado ao campo $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.*

Mesmo quando $X(0) = 0$, se a matriz $DX(0)$ possuir uma propriedade especial, ainda conseguimos entender suficientemente bem o que acontece numa vizinhança da origem. Uma singularidade x_0 de X é dita hiperbólica quando todos os autovalores de $DX(x_0)$ tem parte real não-nula.

Teorema 1.13 (Hartman-Grobman). *Seja X um campo de classe C^k ($k \geq 1$) com $X(x_0) = 0$ e ϕ_t seu fluxo associado. Suponha que todos os autovalores de $DX(x_0)$ têm parte real não nula. Então existe um homeomorfismo diferenciável que conjuga ϕ_t e $\exp(DX(x_0)t)$, isto é, existem abertos $V \ni x_0$, $W \ni 0$ tais que $X|_V$ é topologicamente (C^0) conjugado a $DX(x_0)|_W$.*

Uma singularidade cujos autovalores da aproximação linear têm parte real não-nula é dita singularidade **hiperbólica**. O Teorema de Hartman-Grobman diz que numa vizinhança de uma singularidade hiperbólica, o comportamento de X é completamente descrito pelo comportamento do campo linear $X_L(x) = DX(0)x$.

O Teorema de Hartman-Grobman também é válido para difeomorfismos, com a hipótese de que nenhum autovalor da aproximação linear tenha módulo igual a 1. Para esta situação existe uma versão mais geral, para aplicações entre espaços de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em [52, pág. 287]. Outros resultados nesta direção foram provados por S. Sternberg em [53] e [54].

No problema que atacaremos no Capítulo 4, todos os autovalores de $DX(0)$ têm parte real nula.

1.2 Sistemas Hamiltonianos

1.2.1 Transformações simpléticas

Seja V um espaço vetorial $2n$ -dimensional e ω uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada em V . Nestas condições, V (ou o par (V, ω)) será chamado de **espaço simplético**. Uma transformação $T : V \rightarrow V$ é dita **simplética** se T preserva ω , isto é, se para quaisquer $x, y \in V$ vale

$$\omega(T(x), T(y)) = \omega(x, y).$$

Lema 1.14. *Seja (V, ω) um espaço simplético, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $T : V \rightarrow V$ uma transformação simplética. Sejam $\tilde{\Omega} = (\omega(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ e $M = [T]_{\mathcal{B}}$ as matrizes da forma ω e da transformação T , respectivamente, em relação à base \mathcal{B} . Então M é anti-simétrica, invertível e vale $M^t \tilde{\Omega} M = \tilde{\Omega}$.*

O lema abaixo é um resultado clássico em álgebra linear:

Lema 1.15. *Duas matrizes invertíveis e anti-simétricas são sempre semelhantes.*

Nos é conveniente reformular o lema acima para:

Corolário 1.16. *Com a notação do lema anterior, existe uma matriz mudança de base J tal que $\tilde{\Omega} = J^t \Omega J$, onde*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix},$$

onde Id_n é a matriz identidade $n \times n$. Assim, em relação a alguma base \mathcal{B}' a matriz de ω é Ω .

Por todo o texto, Ω denotará a matriz acima, denominada **matriz simplética usual**. A forma bilinear induzida será dita **forma simplética usual**. Motivados pelos lemas acima, diremos que uma matriz real M $2n \times 2n$ é uma **matriz simplética** se

$$M^T \Omega M = \Omega.$$

Lema 1.17. *Seja M uma matriz $2n \times 2n$ dada em blocos por*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

onde A, B, C e D são matrizes $n \times n$. Então M é simplética se, e só se

$$\begin{cases} A^t D - C^t B = Id_n, \\ A^t C - C^t A = 0_n, \\ D^t B - B^t D = 0_n. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.2 Campos Hamiltonianos

Seja $H : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 e ∇H o gradiente de H , isto é,

$$\nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}(x), \frac{\partial H}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}(x) \right),$$

onde $x \equiv (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Um campo de vetores **Hamiltoniano** é um campo da forma

$$X_H(x) = J\nabla H(x), \quad x \in U, \quad (1.4)$$

onde J é a matriz de alguma forma simplética (uma matriz simplética). Neste caso, H denomina-se **Hamiltoniano** do sistema (1.4).

Exemplo 1.18. Usualmente define-se campo Hamiltoniano como um campo da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^2 . Neste caso, é fácil ver que $J = \Omega$. A menos de uma mudança de coordenadas (simplética), todo campo Hamiltoniano é desta forma.

Quando não for especificada a forma simplética, deve ser entendido que o campo é Hamiltoniano em relação à forma simplética usual.

Exemplo 1.19. O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \text{sen}(x) - y \end{cases}$$

é Hamiltoniano. Com efeito, basta usar a proposição anterior. Com um pouco de cálculo, encontramos o Hamiltoniano

$$H(x, y) = xy + \cos(x)$$

Proposição 1.20. *Uma condição necessária e suficiente para que um sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

seja Hamiltoniano é que as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaçam

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Note que quando a dimensão do espaço é maior que 2 ou quando não estamos trabalhando com a forma simplética usual, o critério da proposição anterior **não** pode ser usado.

Seja

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

uma solução para (1.4) com $J = \Omega$ e ponha $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $x, y : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(\alpha(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}y'(t) \\ &= -y'(t)x'(t) + x'(t)y'(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, H é constante sobre as trajetórias do campo. Quando isto acontece, dizemos que a função H é uma **integral primeira**² do sistema (1.4). Note que as trajetórias de um sistema Hamiltoniano estão sempre contidas nas superfícies de nível de H .

Observação 1.21. *Em \mathbb{R}^{2n} , se encontrarmos $2n - 1$ integrais primeiras para um campo X , conseguimos caracterizar completamente suas trajetórias, considerando interseções entre as superfícies de nível ([1]). Tais sistemas são ditos **completamente integráveis**. Assim, em \mathbb{R}^2 , basta uma integral primeira para isso, como veremos no próximo exemplo.*

Exemplo 1.22. *Na Figura 1.8 estão algumas das curvas de nível de $H(x, y) = xy + \cos(x)$. Do Hamiltoniano ser uma integral primeira, a “mesma” figura serve como um esboço do retrato de fase do sistema apresentado no Exemplo 1.19.*

Vamos voltar às condições (1.3), agora noutra contexto.

²A definição de integral primeira existe para sistemas gerais, não só para Hamiltonianos.

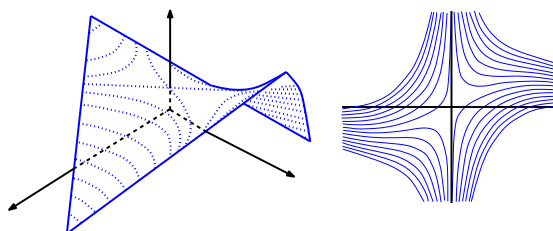


Figura 1.8: Gráfico de $H(x, y) = xy + \cos(x)$ e retrato de fase do campo X_H .

Proposição 1.23. *Considere o sistema $\dot{x} = X(x)$ com $X(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Seja*

$$DX(0) = \begin{pmatrix} DX(0)_1 & DX(0)_2 \\ DX(0)_3 & DX(0)_4 \end{pmatrix}$$

uma decomposição em blocos para $DX(0)$, com cada $DX(0)_j$ uma matriz quadrada $n \times n$. Um conjunto de condições necessárias para o campo X ser Hamiltoniano é:

$$\begin{cases} DX(0)_1^t + DX(0)_4 = 0, \\ DX(0)_2 = DX(0)_2^t, \\ DX(0)_3 = DX(0)_3^t. \end{cases}$$

Note que se o sistema $\dot{x} = X(x)$ for Hamiltoniano, da condição $DX(0)_1^t + DX(0)_4 = 0$ segue que $tr(DX(0)) = 0$. Isso nos dá o seguinte critério:

Proposição 1.24. *As singularidades hiperbólicas de um sistema Hamiltoniano só podem ser pontos de sela.*

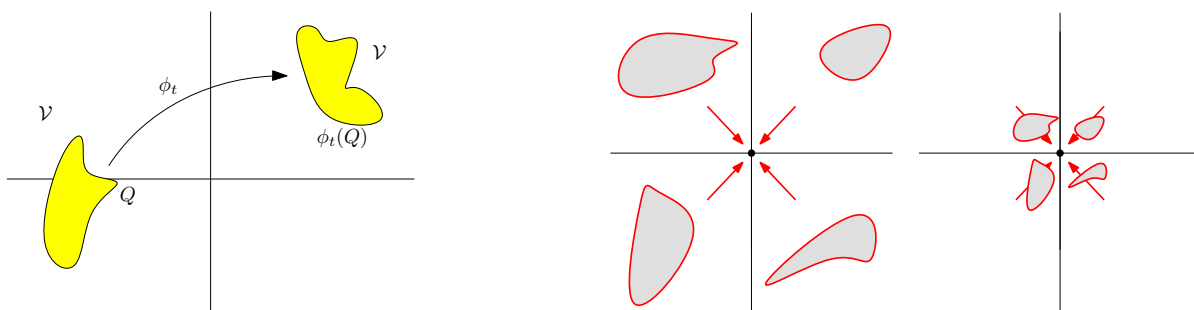


Figura 1.9: O fluxo de um campo Hamiltoniano preserva volumes. Já a presença de uma singularidade atratora acarreta diminuição de volume.

Outra propriedade interessante e importante de um sistema Hamiltoniano é a preservação de volumes. Seja $X = X_H$ um campo Hamiltoniano em \mathbb{R}^n com fluxo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $V(Q)$ é o volume da região Q , então $V(Q) = V(\phi_t(Q))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (Figura 1.9). Noutras palavras, Hamiltonianos preservam volumes. Este resultado é conhecido com **Teorema de Liouville**. Para uma demonstração dessa propriedade e outros comentários, veja [2] e [14]. Estudar a preservação de medidas por aplicações é o objetivo da teoria ergódica, que é apresentada de maneira introdutória em [41].

1.3 Sistemas Reversíveis

Vamos precisar de alguns resultados antes de definir adequadamente sistemas reversíveis. Seja $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo C^∞ . Diremos que φ é uma **involução** se $\varphi^2 = Id_U$.

O teorema seguinte nos diz que (localmente) podemos considerar somente as involuções lineares:

Teorema 1.25 (Cartan-Montgomery-Bochner). *Seja G um grupo compacto de difeomorfismos de uma variedade M de classe C^k . Suponha que cada difeomorfismo em G seja de classe C^k . Então na vizinhança de um ponto fixo comum a todos os difeomorfismos em G , existe um sistema de coordenadas de classe C^k tais que cada um dos difeomorfismos é linear.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [10] ou [38], dependendo das hipóteses que o leitor preferir. Uma versão mais fraca do teorema, que supõe analiticidade dos difeomorfismos, foi provada por Cartan em [17], num artigo de 1930. Outras versões foram publicadas por Bochner ([10]) em 1945 e por Montgomery-Bochner ([11]) em 1946. Geralmente, o crédito é dado somente a Bochner ou a Montgomery-Bochner.

Neste trabalho vamos considerar $G = \mathbb{Z}_2$ ou $G = \mathbb{D}_4$, o grupo de simetrias do quadrado.

Lema 1.26. *Seja V um espaço vetorial $2n$ -dimensional. Sejam $S, T : V \rightarrow V$ transformações lineares com $\dim \text{Fix}(T) = \dim \text{Fix}(S) = n$. Então existe uma mudança de coordenadas linear $U : V \rightarrow V$ com $T = U^{-1}S U$.*

Demonstração. Note que os autovalores de S e T pertencem ao conjunto $\{-1, 1\}$. Como

$$\dim \text{Fix}(T) = \dim \text{Fix}(S) = n,$$

segue que $\dim \text{Ker}(T + Id) = n$ e $\dim \text{Ker}(S + Id) = n$. Assim, basta escolher U levando autoespaço em autoespaço. \square

O lema acima será utilizado da seguinte forma: considere G um grupo de difeomorfismos gerado pelas involuções φ e ψ . Por Montgomery-Cartan-Bochner, existe uma mudança de coordenadas h tal que $h\varphi h^{-1}$ e $h\psi h^{-1}$ são involuções lineares e geram um grupo G' isomorfo a G . Seja A_0 uma involução linear fixada. Pelo Lema 1.26, existe uma mudança linear de coordenadas M tal que $Mh\varphi h^{-1}M^{-1} = A_0$ e $G'' = \langle A_0, Mh\psi h^{-1}M^{-1} \rangle$ é isomorfo a G' .

Desta forma, fixado A_0 , quando $G = \mathbb{Z}_2$, podemos considerar $G = \{Id, A_0\}$. Já no caso $G = \mathbb{D}_4$, podemos considerar $G = \langle A_0, B \rangle$, onde B é uma involução linear (a priori, desconhecida).

Seja X um campo vetorial em \mathbb{R}^{2n} , com $X(0) = 0$, e $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma involução com $\dim \text{Fix}(\varphi) = n$. Diz-se que X é φ -**reversível** se

$$\varphi'(x)X(x) = -X(\varphi(x)), \quad (1.5)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. No caso em que exista outra involução ψ satisfazendo

$$\psi'(x)X(x) = -X(\psi(x)), \quad (1.6)$$

diremos que X é φ, ψ -**reversível** (bireversível, no caso em que φ e ψ estejam claros pelos contexto).

Ora, após toda a discussão nos parágrafos precedentes, é possível refinar a definição de reversibilidade (passando a uma definição local): diz-se que X é reversível se existir uma involução **linear** $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ com $\dim \text{Fix}(R) = n$ satisfazendo

$$R(X(x)) = -X(R(x)), \quad (1.7)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e bireversível se existirem duas involuções lineares distintas R_1, R_2 satisfazendo (1.7) e $\dim \text{Fix}(R_j) = n$, $j = 1, 2$.

Observação 1.27. *A exigência da função φ que satisfaz $D\varphi(x)X(x) = -X(\varphi(x))$ ser uma involução e ter fixo com metade da dimensão do espaço é bem específica. A hipótese sobre a dimensão de $\text{Fix}(\varphi)$ aparece para tornar o campo compatível com campos Hamiltonianos. A exigência do difeomorfismo ser involutivo é adequada para generalizar a noção geométrica dos sistemas planares, além de tornar mais fácil a aplicação do Teorema de Cartan-Montgomery-Bochner. Num contexto mais geral, não é necessário nem mesmo que φ seja um difeomorfismo, desde que se pague o preço de não usar o Teorema de Cartan-Montgomery-Bochner (Teorema 1.25).*

Exemplo 1.28. Sejam $P, Q, R : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis satisfazendo

$$\begin{cases} P(x, y, z) = -P(x, y, -z) \\ Q(x, y, z) = -Q(x, y, -z) \\ R(x, y, z) = R(x, y, -z) \end{cases}$$

Então o campo vetorial

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

é φ -reversível, com

$$\varphi(x, y, z) = (x, y, -z).$$

Um exemplo mais concreto é dado pelo campo

$$\begin{cases} \dot{x} = z - z(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = xz + yz - z \\ \dot{z} = 3x + 3y + z^2 \end{cases}$$

Note que $\dim \text{Fix}(\varphi) = 2$. O retrato de fase do campo X é simétrico em relação ao plano $z = 0$.

Diz-se que X é \mathbb{Z}_2 -**reversível** quando X for φ -reversível para alguma involução φ , e que X é \mathbb{D}_4 -**reversível** quando X for φ, ψ -reversível para φ, ψ involuções tais que $G = \langle \varphi, \psi \rangle \cong \mathbb{D}_4$.

Observação 1.29. Devemos esclarecer que se X é \mathbb{D}_4 -reversível, isso **não** significa de forma alguma que X seja φ -reversível para todo $\varphi \in \mathbb{D}_4$. Isso segue do fato de que se X é φ, ψ -reversível, então X **não** é $\varphi\psi$ -reversível e sim **equivariante**, ou seja, vale $D(\varphi\psi)(x)X(x) = X(\varphi(\psi(x)))$.

As órbitas de um sistema reversível são simétricas em relação a $\text{Fix}(R)$, mas percorridas no sentido contrário, como na Figura 1.10, que é matematicamente justificável pelo próximo resultado:

Proposição 1.30. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma solução de (1.7) que passa pelo ponto P_0 . Então $\tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, dada por $\tilde{\alpha}(t) = R(\alpha(-t))$, também é solução de (1.7) e passa por $R(P_0)$.

Vejamos alguns exemplos de campos reversíveis.

Exemplo 1.31. Um exemplo imediato de campo reversível é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

reversível pela ação de $\varphi(x, y) = (-x, -y)$.

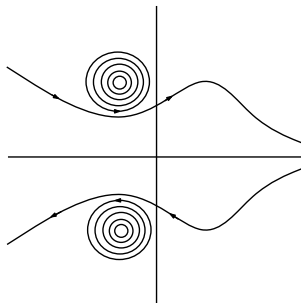


Figura 1.10: Retrato de fase de um sistema reversível.

Exemplo 1.32. Seja $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 que satisfaz

$$H(x, y) = H(x, -y), \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

e X_H o sistema Hamiltoniano induzido, isto é,

$$X_H : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Então X_H é reversível pela involução $\varphi(x, y) = (x, -y)$.

Exemplo 1.33. Vamos caracterizar os campos bireversíveis em \mathbb{R}^2 . Seja

$$X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

e considere

$$R_1(x, y) = (x, -y), \quad R_2(x, y) = (-x, y).$$

Para que X seja R_1 -reversível, é preciso que

$$\begin{cases} P(x, y) = -P(x, -y) \\ Q(x, y) = Q(x, -y) \end{cases}$$

Já para a R_2 -reversibilidade, é preciso que

$$\begin{cases} P(x, y) = P(-x, y) \\ Q(x, y) = -Q(-x, y) \end{cases}$$

Logo, P precisa ser uma função par em x e ímpar em y , e Q uma função par em y e ímpar em x . Note ainda que vale $P(x, 0) \equiv 0$ e $Q(0, y) \equiv 0$. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + yx^2 \\ \dot{y} = -x + x^2y^3 \end{cases} \quad (1.8)$$

é R_1, R_2 -reversível e seu campo de direções, com algumas órbitas, pode ser visto na Figura 1.11.

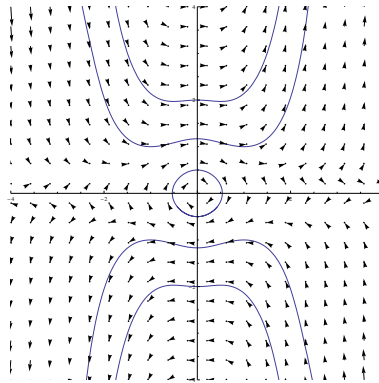


Figura 1.11: Campo de direções do sistema bireversível (1.8).

Seja $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma involução e $F = \text{Fix}(R) = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid R(x) = x\}$ com $\dim F = n$. Diremos que uma órbita γ é simétrica se $R(\gamma) = \gamma$. Seguem algumas propriedades básicas de um sistema reversível, brevemente justificadas e/ou ilustradas.

(a) O retrato de fase de X é simétrico com respeito a F .

Demonstração. Isto foi visto na Proposição 1.30 e ilustrado pela Figura 1.10. \square

(b) Se $X(p) = 0$ e $p \in F$, então p não é atrator ou repulsor; o mesmo vale para órbitas periódicas que interceptem F .

Demonstração. Basta observar que, havendo atração (ou repulsão), mesmo havendo órbitas simétricas, elas não são percorridas em sentidos opostos. \square

(c) Se $X(p) = 0$ e $p \in F$, então $X(\varphi(p)) = 0$.

Demonstração. Segue de $D\varphi(p)X(p) = -X(\varphi(p))$. \square

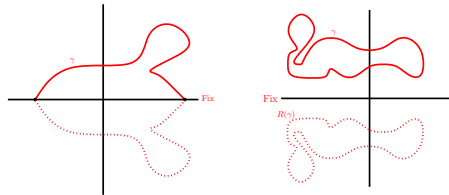


Figura 1.12: Propriedades (d) e (f).

(d) Se uma órbita regular γ intercepta F em dois pontos distintos, então γ é uma órbita periódica simétrica.

(e) Se $X(p) \neq 0$ e $p \in F$, então $X(p) \notin T_p F$.

(f) Se γ é uma órbita periódica de X que não cruza F , então $R(\gamma)$ também é uma órbita periódica que não encontra F .

CAPÍTULO 2

FORMAS NORMAIS

Neste capítulo apresentaremos a teoria de formas normais para campos de vetores, que desenvolve técnicas para levar um campo a uma forma canônica. A literatura sobre formas normais é vasta (veja por exemplo [2], [3], [4], [20] ou [62]) e seremos breves.

2.1 Forma Normal de Poincaré-Dulac

Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^n)$ e considere a expansão de Taylor de X em torno da origem

$$X(x) = Ax + X_2(x) + \dots + X_r(x) + o(|x|^{r+1}), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, X_k \in H^k. \quad (2.1)$$

O campo polinomial $j^r(X)$, definido por

$$j^r(X) = Ax + X_2(x) + \dots + X_r(x)$$

é denominado **r -jato de X em 0**.

Vamos tentar eliminar alguns termos da expansão (2.1) por meio de uma mudança de variáveis da forma

$$x = y + h(y), \quad h(0) = 0, \quad Dh(0) = 0.$$

Vamos ilustrar o processo propondo uma mudança de coordenadas da forma $x = y + h(y)$, com $h \in H^2$ um monômio a ser determinado. Assim

$$\dot{x} = (Id + Dh(y))\dot{y}$$

e, localmente,

$$\dot{y} = (Id - Dh(x))\dot{x}.$$

Portanto, considerando somente os termos até grau 2, temos

$$\begin{aligned} \dot{y} = (Id - Dh(x))\dot{x} &= (Id - Dh(x))(Ax + X_2(x)) \\ &= A(y + h(y)) - Dh(x)A(y + h(y)) + X_2(y + h(y)) \\ &= Ay + (Ah(y) - Dh(x)Ay) + X_2(y) \\ &= Ay - \underbrace{(Dh(x)Ay - Ah(y))}_{L_A(h)} + X_2(y), \end{aligned}$$

onde utilizamos que $X_2(y + h(y)) = X_2(y) + o(|y|^3)$.

Definindo

$$L_A(h)(y) = Dh(y)Ay - Ah(y),$$

a fim de que a mudança de coordenadas

$$x = y + h_2(y)$$

transforme o campo

$$X(x) = Ax + X_2(x)$$

no campo

$$\tilde{X}(y) = Ay,$$

basta escolhermos, se possível, $h_2 \in H^2$ tal que

$$L_A(h_2) = X_2.$$

O operador L_A é chamado de **operador homológico** e será fundamental em nosso trabalho.

Observação 2.1. *É importante notar que o operador homológico pode ser definido tanto nos espaços H^j como em*

$$H^2 \oplus H^3 \oplus \dots,$$

e quando não houver possibilidade de confusão, usaremos simplesmente a notação L_A sem explicitar o domínio.

Agora com o campo na forma $\tilde{X}(x) = Ax + \tilde{X}_3(x)$ fazemos o mesmo procedimento, escolhendo (se possível) $h_3 \in H^3$ tal que $L_A(h_3) = X_3$ e o novo campo não terá termos de grau 3.

Indutivamente, para X da forma

$$X(x) = Ax + X_2(x) + \dots + X_r(x) + o(|x|^{r+1}).$$

se for possível escolher, para cada $j \in \{2, \dots, r\}$, $h_j \in H^j$ tal que $L_A(h_j) = X_j$, a mudança de coordenadas

$$x = y + h_2(y) + \dots + h_r(y)$$

simplifica o campo para

$$\tilde{X}(x) = Ax + o(|x|^{r+1}).$$

Ocorre que (in)felizmente nem sempre é possível escolher tais h_j 's. Na verdade, isto só é possível quando o operador homológico L_A é invertível, o que por sua vez só acontece em situações bem especiais.

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de A , que suporemos reais. Sob estas condições, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 2.2. *Se a matriz A é diagonal, então L_A também é diagonal no espaço $\bigoplus_k H^k$. Os autovetores de L_A são os monômios $x^m \frac{\partial}{\partial x_s}$ e vale*

$$L_A \left(x^m \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = [(m, \lambda) - \lambda_s] x^m \frac{\partial}{\partial x_s},$$

onde $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ e $(m, \lambda) = \sum_j m_j \lambda_j$.

Demonstração. Seja

$$h = x^m \frac{\partial}{\partial x_s} = (0, \dots, 0, x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, 0, \dots, 0).$$

Assim,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{m_1}{x_1} x^m & \frac{m_2}{x_2} x^m & \dots & \frac{m_n}{x_n} x^m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} e Ax = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} x_{n-1} \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\frac{\partial h}{\partial x} Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_1 \lambda_1 x^m + \cdots + m_n \lambda_n x^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\sum_j m_j \lambda_j \right) x^m \frac{\partial}{\partial x_s}$$

Como $Ah(x) = \lambda_s h(x)$, segue que

$$L_A(h) = \left(\sum_j m_j \lambda_j \right) x^m \frac{\partial}{\partial x_s} - \lambda_s x^m \frac{\partial}{\partial x_s} = \left(\sum_j m_j \lambda_j - \lambda_s \right) h,$$

isto é, o monômio $x^m \frac{\partial}{\partial x_s}$ é autovetor de L_A associado ao autovalor $(\sum_j m_j \lambda_j - \lambda_s)$. \square

Assim, se os autovalores de L_A forem não-nulos, este operador será invertível; pelo lema acima, no caso em que A é diagonal¹, os autovalores de L_A são não-nulos se, e só se, não existem relações da forma $(m, \lambda) - \lambda_s = 0$. Isto motiva a definição do próximo parágrafo.

Diremos que o vetor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é **ressonante**² se existir $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$ e $s \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\lambda_s = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j,$$

ou seja, se algum autovalor de A for combinação linear inteira positiva dos outros. Tal relação é dita uma **ressonância** e o número $|m| = \sum m_j$ é dito **ordem de ressonância**.

Observação 2.3. *Seja A uma matriz real 2×2 . Se λ é um autovalor imaginário puro de A , então $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ também é autovalor, e vale a relação $\lambda + \lambda_2 = 0$. Portanto, $\lambda = 2\lambda + \lambda_2$. Reescrevendo esta relação na forma $\lambda = 2\lambda + \bar{\lambda}$, vamos considerar ressonante o monômio $z_1^2 \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$, ao invés de $z_1^2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$. Noutras palavras, autovalores complexos conjugados devem ser tratados como tais e não como autovalores totalmente distintos.*

¹O mesmo resultado vale se A for uma matriz de Jordan (não necessariamente diagonal). Para maiores detalhes, veja [4, pág. 183].

²Quando $A = DX(0)$ para algum campo de vetores X , diremos por vezes que o campo X é ressonante.

Exemplo 2.4. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^4 + x^7 \\ \dot{y} = 2y + x^5 e^x \end{cases}$$

Os autovalores da parte linear do campo de vetores associado são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Como

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 + 0\lambda_2,$$

o campo é ressonante de ordem 2.

Exemplo 2.5. Considere o campo de vetores

$$X(x, y) = (y, -x).$$

Os autovalores da parte linear desse campo são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$. Assim, $m\lambda_1 + m\bar{\lambda}_1 = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e, portanto, vale

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (m+1)\lambda_1 + m\bar{\lambda}_2 \\ \lambda_2 &= m\lambda_1 + (m+1)\lambda_2 \end{aligned}$$

Em coordenadas complexas $z = x + iy$ este campo é da forma

$$\dot{z} = -\bar{z}$$

e as relações de ressonância complexas dão origem a monômios da forma $(z\bar{z})^m$, $m > 1$. Note que nesse caso existe um número infinito de relações de ressonância.

Exemplo 2.6. Considere o campo de vetores

$$X(x, y) = (x, -y)$$

Os autovalores da parte linear desse campo são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Assim, $m\lambda_1 + m\lambda_2 = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e, portanto, vale

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (m+1)\lambda_1 + m\lambda_2 \\ \lambda_2 &= m\lambda_1 + (m+1)\lambda_2 \end{aligned}$$

Note que nesse caso também existe um número infinito de relações de ressonância.

Teorema 2.7 (Poincaré). Se os autovalores da matriz A são não-ressonantes, então a equação

$$\dot{x} = Ax + o(|x|^2)$$

pode ser reduzida a

$$\dot{y} = Ay$$

por uma mudança de variáveis formal $x = y + o(|y|^2)$ (perturbação da identidade).

No caso em que L_A não é invertível, ainda é possível eliminar alguns termos da forma normal:

Teorema 2.8 (Poincaré-Dulac). *A equação*

$$\dot{x} = Ax + o(|x|^2)$$

pode ser reduzida à forma

$$\dot{y} = Ay + w(y)$$

por meio de uma mudança de coordenadas formal $x = y + \dots$, onde todos os monômios na expressão de w são ressonantes.

Exemplo 2.9. *Voltando ao sistema do Exemplo 2.4,*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^4 + x^7 \\ \dot{y} = 2y + x^5 e^x \end{cases},$$

pelo teorema de Poincaré existe uma mudança formal de coordenadas $x = y + \dots$ que o conjuga ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y + ax^2, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

É possível enunciar o Teorema 2.8 de outra forma, mais conveniente para alguns de nossos propósitos.

Teorema 2.10. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^n)$ e $DX(0) = S + N$ a decomposição da matriz $DX(0)$ em suas partes semi-simples e nilpotente. Então X é formalmente conjugado a um campo vetorial da forma*

$$\dot{x} = DX(0)x + f(x),$$

com f satisfazendo

$$Sf(x) - Df(x)Sx \equiv 0.$$

Um campo $X(x) = (S + N)x + f(x)$ (S semi-simples, N nilpotente) que satisfaz

$$Sf(x) - Df(x)Sx \equiv 0$$

será dito estar na **forma normal de Poincaré-Dulac**.

Exemplo 2.11. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_1^2 + 7x_1x_2 + 3x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que a aproximação linear de (2.2) na origem é

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e os autovalores desta matriz são não-ressonantes. Vamos verificar o Teorema 2.7 para este sistema.

A mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 \\ x_2 = y_2 + y_1^2 + y_1y_2 \end{cases}$$

transforma o sistema (2.2) no sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 + o(3) \\ \dot{y}_2 = 2y_2 + o(3) \end{cases}$$

2.2 Forma Normal de Belitskii

Note que a forma normal de Poincaré-Dulac nos diz que um campo X é formalmente conjugado a um campo cujos monômios não-lineares estão todos fora de $\text{Im}(L_S)$, ou seja, os monômios na imagem do operador homológico podem ser eliminados.

Assim, o campo X é levado, por perturbações da identidade, no campo formal

$$\tilde{X}(x) = Ax + w_2(x) + w_3(x) + \dots,$$

onde $w_j \in W^j$, W^j satisfazendo

$$H^j = (\text{Im}(L_A|_{H^j})) \oplus W^j.$$

Isso nos diz que determinar a forma normal de um campo é equivalente a determinar, para cada j , um complemento para $\text{Im}(L_A|_{H^j})$ em H^j . No caso em que A não é semi-simples, existem duas

maneiras de proceder para encontrar W^j : a forma normal de Belitskii e a forma normal por $sl(2)$. Na primeira, toma-se

$$W^j = Ker(L_{A^*})$$

e o resultado segue da identidade $Ker(L_{A^*}) = (Im(L_A))^\perp$.

Já na forma normal por $sl(2)$, W^j é escolhido a partir de A como sendo um certo operador na álgebra de Lie $sl(2)$. Para detalhes sobre a forma normal por $sl(2)$ veja [40] e [48]. Abodaremos aqui a forma normal de Belitskii.

A forma normal de Belitskii considera a parte nilpotente de A para simplificar ainda mais a forma normal. Considere $A = S + N$ onde S é semi-simples e N nilpotente, com $SN = NS$.

Teorema 2.12 (Belitskii). *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^n)$ com $DX(0) = S + N$ a decomposição da matriz $DX(0)$ em suas partes semi-simples e nilpotente. Então X é formalmente conjugado a um campo vetorial da forma*

$$\dot{x} = DX(0)x + f(x),$$

onde a parte não-linear f satisfaz

$$\begin{cases} Sf(x) - Df(x)Sx & = 0 \\ N^t f(x) - Df(x)N^t x & = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Um campo $X(x) = (S + N)x + f(x)$ com f satisfazendo (2.3) será dito estar na **forma normal de Belitskii**. Note que as formas normais de Belitskii e Poincaré-Dulac coincidem no caso em que A é semi-simples ($N = 0$), mas podem ser diferentes³ quando A possui parte nilpotente não-nula.

Exemplo 2.13. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^3)$ com aproximação linear*

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A forma normal de Poincaré-Dulac de X é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 + f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = g(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 & = x_3 + x_3 h(x_1, x_2) \end{cases},$$

³É de esperar que a segunda condição de (2.3) simplifique a forma normal de Poincaré-Dulac, e isto efetivamente acontece na maioria dos casos.

onde f e g não possuem termos lineares e h não possui termos constantes. A parte nilpotente de $DX(0)$ nos permite passar à forma normal de Belitskii, simplificando a forma normal para

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 \tilde{f}(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \tilde{f}(x_1) + \tilde{g}(x_1) \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_3 \tilde{h}(x_1) \end{cases},$$

com $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = D\tilde{g}(0) = \tilde{h}(0) = 0$.

A demonstração do teorema de Belitskii pode ser encontrada em [6] e [50].

2.3 Renormalização

Seja X um campo de vetores com forma normal \tilde{X}_0 , e \tilde{X}_1 um campo de vetores formal com $D\tilde{X}_1(0) = DX(0)$. Sob que condições é possível, aplicando uma mudança de coordenadas (possivelmente formal), passar do campo \tilde{X}_0 ao campo \tilde{X}_1 ? É isto que entendemos por **renormalização** de X , ou seja, trocar a forma normal. Para nossos fins, a renormalização só envolverá *escolhas* de coeficientes, e não eliminação ou geração de novos de monômios.

A forma natural de determinar se \tilde{X}_0 pode ser normalizado para \tilde{X}_1 é procurar um difeomorfismo (formal) Ψ tal que $D\Psi(x)\tilde{X}_0(x) = \tilde{X}_1(\Psi(x))$. Isso pode ser feito jato a jato.

Lema 2.14. *Afirm de que \tilde{X}_0 possa ser renormalizado para \tilde{X}_1 , é suficiente que para cada $k > 1$, exista uma mudança de coordenadas formal $\Phi_k = Id + \Psi_k$ com $\Psi_k(0) = 0$ e $\Psi_k(x) \in \bigoplus_{j>k} H^j$ satisfazendo*

$$j^k D\Phi_k(x)\tilde{X}_0(\phi_k(x)) = j^k \tilde{X}_1(x).$$

É fácil ver que, tomando $\Phi(x) = x + \sum_{j>1} \Psi_j(x)$, temos uma conjugação formal entre \tilde{X}_0 e \tilde{X}_1 . Encontrar diretamente uma mudança de coordenadas formais entre dois campos pode ser uma tarefa árdua. Isso justifica a necessidade dos próximos resultados, os Lemas de Takens, cujas demonstrações podem ser encontradas em [57] e [62].

Lema 2.15 (Lema 1 de Takens). *Sejam X e Y campos de vetores tais que $j^k[X, Y] = 0$ e $j^1 Y = 0$. Seja Φ'_Y o fluxo de Y . Então vale a relação*

$$j^{k+1}(D\Phi'_Y X) = j^{k+1}(X) + t j^{k+1}([X, Y]).$$

Lema 2.16 (Lema 2 de Takens). *Sejam X e \tilde{X} campos vetoriais satisfazendo $j^k X = j^k \tilde{X}$.*

(a) *Se a equação*

$$j^{k+1}[X, Y] = j^{k+1}(\tilde{X} - X) \quad (2.4)$$

tem solução para um campo Y com $j^1 Y = 0$, então existe um difeomorfismo Φ tal que

$$j^{k+1} D\Phi(x)X(x) = j^{k+1} \tilde{X}(x). \quad (2.5)$$

(b) *Se existe um difeomorfismo Φ satisfazendo (2.5), então existe uma solução Y para (2.4) com $j^1(Y) = 0$.*

Para fins práticos, aplicar os Lemas 2.14 ou 2.16 é igualmente complicado. Se por um lado a estrutura do colchete de Lie simplifica os termos iguais em X e \tilde{X} , por outro lado se não existirem muitos destes termos, teremos trabalho em dobro. Em cada caso, deve-se analisar a melhor opção.

2.4 Formas Normais de Sistemas Reversíveis

Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ um campo de vetores reversível pela involução R . Seja \tilde{X} a forma normal de X . Geralmente a relação $R(\tilde{X}(x)) = -\tilde{X}(R(x))$ é falsa. Sob que condições ela é verdadeira?

Este problema é exaustivamente estudado em [23] e [51] e, para nosso uso, o próximo teorema basta. A demonstração, bem como discussões mais avançadas, podem ser encontrados nos trabalhos supracitados.

Teorema 2.17. *Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^n)$ R -reversível é formalmente equivalente a um campo de vetores da forma*

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

que satisfaz

$$\begin{cases} Sf(x) &= Df(x)Sx, \\ N'f(x) &= Df(x)N'x, \\ R(f(x)) &= -f(R(x)), \\ R(A(x)) &= -A(R(x)) \end{cases}$$

Noutras palavras, para calcularmos o k -jato da forma normal reversível de X , devemos:

- (i) Escrever $\tilde{X}(x) = (S + N)x + h(x)$, onde $h(x) = h_2(x) + \cdots + h_k(x)$ são campos polinomiais homogêneos com coeficientes a serem determinados e $DX(0) = S + N$ a decomposição $S - N$;
- (ii) Das relações $Sf(x) = Df(x)Sx$ e $N^t f(x) = Df(x)N^t x$, determinar relações nos coeficientes de forma que X seja levado à forma normal de Belitskii;
- (iii) Da relação $R(A(x)) = -A(R(x))$, segue que R deve reverter a parte linear. Por fim, resta determinar as relações de reversibilidade a partir da equação $R(f(x)) = -f(R(x))$ para obter a forma normal reversível.

2.5 Formas Normais de Sistemas Bi-Reversíveis por \mathbb{D}_4

Estabeleceremos aqui alguns resultados referentes a sistema \mathbb{D}_4 -reversíveis. Seja X um campo com equilíbrio elíptico na origem e aproximação linear dada por $DX(0) = A(\alpha, \beta, \epsilon)$ (veja pág. xvii).

Seja $G = \langle \phi, \psi \rangle$ um grupo não-comutativo de difeomorfismos cujos geradores satisfazem $\phi^2 = Id$, $\psi^2 = Id$, e $(\phi\psi)^2 = (\psi\phi)^2$ e tal que $\phi(0) = 0$ para todo $\phi \in G$. Suponha que X seja ϕ, ψ -reversível.

Lema 2.18. *G é isomorfo ao grupo \mathbb{D}_4 , o grupo de simetrias do quadrado.*

Demonstração. Para ver o isomorfismo, considere $\tilde{r} = \phi\psi$ e $\tilde{s} = \psi$. Desta forma, basta fazer

$$\tilde{r} \mapsto r, \quad \tilde{s} \mapsto s$$

para que $G \cong \mathbb{D}_4 = \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. □

Pelo Teorema de Cartan-Montgomery-Bochner, existe um sistema de coordenadas onde todos os difeomorfismos em G são lineares, ou seja, existe h tal que $\phi = hAh^{-1}$ e $\psi = hBh^{-1}$, com $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Vamos desenvolver alguns resultados que nos permitiram linearizar o grupo G .

Lema 2.19. *Sejam ϕ, ψ difeomorfismos involutivos satisfazendo $(\phi\psi)^2 = (\psi\phi)^2$. Se existe h tal que $\phi = hAh^{-1}$ e $\psi = hBh^{-1}$, então $(AB)^2 = (BA)^2$.*

Corolário 2.20. *Seja $G = \langle \phi, \psi \rangle = \{g_1, \dots, g_8\}$ um grupo de difeomorfismos isomorfo a \mathbb{D}_4 e considere $G' = \{L_1, \dots, L_8\}$ seu correspondente linearizado, dado pelo Teorema de Cartan-Montgomery-Bochner (pág. 15). Então G' é um grupo isomorfo a \mathbb{D}_4 e existe uma mudança de coordenadas h tal que $g_i = hL_i h^{-1}$, para $1 \leq i \leq 8$.*

Agora que o grupo G pode ser tomado linear, vamos mostrar que é possível, sem perda de generalidade, fixar um dos geradores.

Lema 2.21. *Se S, T são involuções em $4D$ com $\dim \text{Fix}(S) = \dim \text{Fix}(T) = 2$, então existe uma transformação invertível M com $MS = TM$. Noutras palavras, quaisquer duas involuções em $4D$ com fixo bidimensional são C^∞ conjugadas.*

Corolário 2.22. *Seja*

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então existe um sistema de coordenadas que transforma G' em $G'' = \langle A_0, B \rangle$, onde B é uma involução que satisfaz $BDX(0) = -DX(0)B$.

Pelo corolário anterior, os geradores A_0, B do grupo G'' satisfazem $(A_0B)^2 = (BA_0)^2$ e não comutam (propriedade herdada de ϕ e ψ). Podemos classificar completamente as involuções B . A demonstração do próximo corolário é simples e direta, e será omitida.

Corolário 2.23. *Afim de que $G'' \cong G'$ é necessário e suficiente que $B \in \Xi$, onde $\Xi = \bigcup_{i=1}^6 \Xi_i$, com*

$$\Xi_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right), \Xi_2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$\Xi_3 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right), \Xi_4 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$\Xi_5 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \Xi_6 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Corolário 2.24. $\langle A_0, B \rangle = \langle A_0, C \rangle \Leftrightarrow B, C \in \Xi_j$ para algum j .

Portanto, o grupo G , quando linearizado, se torna um dos grupos G_1, \dots, G_6 abaixo:

$$G_1 = \langle A_0, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle, \quad G_2 = \langle A_0, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \quad (2.6)$$

$$G_3 = \langle A_0, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad G_4 = \langle A_0, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \quad (2.7)$$

$$G_5 = \langle A_0, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad G_6 = \langle A_0, B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \quad (2.8)$$

Como estamos considerando o campo X como sendo φ, ψ -reversível, temos

$$\begin{cases} D\phi(x)X(x) = -X(\phi(x)) \\ D\psi(x)X(x) = -X(\psi(x)) \end{cases}$$

Pelos resultados anteriores, podemos supor que X é A_0, B_j -reversível para algum $j \in \{1, \dots, 6\}$. Aplicando o Teorema 2.17 para A_0 e B_j , podemos facilmente obter a forma normal bireversível para X .

Corolário 2.25. *Seja X um campo \mathbb{D}_4 reversível. Então existe um sistema de coordenadas onde X é G_j -reversível para algum dos grupos G_j dados por (2.6)-(2.8).*

2.6 Analiticidade da Forma Normal

Foi visto que um campo X é formalmente conjugado à sua forma normal \tilde{X} por uma mudança de coordenadas formal $x = y + h(y)$. Em que condições a série formal h possui raio de convergência maior que zero? Este é um problema muito difícil e de resposta conhecida somente para alguns

poucos casos. A dificuldade é tão grande que poucos pesquisadores se dedicam ao tema e aceitam pagar o preço de trabalhar com funções formais.

Bruno, em [13], discute a convergência de algumas formas normais. Recentemente, em [56], Henryk Zoladek provou a analiticidade da forma normal para sistemas com aproximação linear

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este é praticamente o único resultado existente nesta direção. Um bom survey sobre o assunto é [46], por Christiane Rousseau, recomendado a todos que já sentiram um certo desconforto trabalhando com mudanças de coordenadas possivelmente divergentes.

O que torna a teoria de formas normais eficiente é que, trabalhando no espaço dos k -jatos, $k < \infty$, é sempre possível levar o campo à sua forma normal por meio de uma mudança de coordenadas **polinomial** (portanto, **analítica**) e é isso que passamos a discutir.

Seja

$$X(x) = Ax + X_2(x) + o(|x|^3), \quad X_2 \in H^2$$

um campo vetorial. Uma mudança de coordenadas da forma

$$x = y + h_2(x), \quad h_2 \in H^2$$

leva o campo à sua forma normal,

$$\tilde{X}(x) = Ax + \tilde{X}_2(x) + o(|x|^3).$$

Ora, a função $H(y) = y + h_2(y)$ é obviamente um difeomorfismo analítico em uma vizinhança da origem, com inversa

$$H^{-1}(x) = x - h_2(x) + o(|x|^3).$$

Assim, no espaço dos 2-jatos, estamos sempre trabalhando com transformações e campos analíticos.

O processo acima se generaliza naturalmente para qualquer campo na forma

$$X(x) = Ax + X_2(x) + \dots + X_r(x) + o(|x|^{r+1}), \quad X_j \in H^j.$$

Como estamos interessados no comportamento qualitativo do campo, na maior parte dos casos, a conjugação C^k entre os k -jatos é suficiente.

CAPÍTULO 3

CÁLCULO DE FORMAS NORMAIS

Neste capítulo vamos provar o Teorema 1. Para calcular as formas normais, usaremos o método do colchete de Lie, descrito em [51] e referências.

O algoritmo que desenvolvemos para o cálculo da forma normal funciona assim:

Entrada: matriz $A = S + N$, k -jato da forma normal que se deseja calcular;

Entrada opcional: involução linear R

Saída: a forma normal até ordem k de $Ax + \dots$.

Passos do algoritmo:

1. Verifica se a involução dada é admissível, isto é, se ela reverte a parte linear;
2. Define os monômios geradores do espaço $H^2 \oplus \dots \oplus H^k$;
3. Constrói o campo h , combinação linear de todos os monômios da base de $H^2 \oplus \dots \oplus H^k$ com coeficientes a determinar;
4. Determina condições sobre os coeficientes de h para que as equações em (2.3) se verifiquem e redefine h com base nestas condições;
5. Determina condições sobre os coeficientes de h para que o campo seja \mathbb{Z}_2 reversível (ou \mathbb{D}_4 reversível, quando for o caso) e redefine h .
6. Retorna o campo $Ax + h(x)$

O passo 4 coloca o campo na forma normal de Belitskii e o passo 5 torna essa forma normal reversível. A saída é o que chamamos de forma normal reversível de ordem k . Quando o campo h é construído, os coeficientes são adicionados respeitando os monômios. Assim, os monômios $x_1^r x_2^j y_1^l y_2^s \frac{\partial}{\partial \zeta}$ levam os coeficientes a_{rjls} , b_{rjls} , c_{rjls} ou d_{rjls} , conforme ζ seja x_1 , x_2 , y_1 ou y_2 , respectivamente. Este esclarecimento é necessário, pois são estes coeficientes que aparecerão como resultado da execução dos algoritmos. Definiremos coeficientes numa notação mais adequada quando da prova formal das expressões.

3.1 Caso genérico

Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo φ -reversível com aproximação linear $DX(0) = A(\alpha, \beta, \epsilon)$ (veja pág. xvii), onde $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$. Em virtude do Teorema 1.25 e do Lema 1.26, vamos escolher a involução φ como

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_1, x_2, y_1, -y_2). \quad (3.1)$$

3.1.1 Índícios computacionais: caso genérico

Como este caso pode ser usado para quaisquer α, β não-ressonantes, vamos escolher sem perda de generalidade $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{2}$ para efetuar os cálculos.

Utilizando o algoritmo dado no Apêndice A.1, obtemos a forma normal até ordem 5 para este caso como sendo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - b_{1020}x_2y_2^2 - b_{1020}x_2y_1^2 - a_{2100}x_2^3 - a_{2100}x_1^2x_2 + x_2f_5(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + b_{1020}x_1y_2^2 + b_{1020}x_1y_1^2 + a_{2100}x_1x_2^2 + a_{2100}x_1^3 + x_1f_5(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{y}_1 &= -\sqrt{2}y_2 - d_{0030}y_2^3 - d_{0030}y_1^2y_2 - d_{0210}x_2^2y_2 - d_{0210}x_1^2y_2 + y_2g_5(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= \sqrt{2}y_1 + d_{0030}y_1y_2^2 + d_{0030}y_1^3 + d_{0210}x_2^2y_1 + d_{0210}x_1^2y_1 + y_1g_5(x_1, x_2, y_1, y_2), \end{cases}$$

onde $f_5(x) = o(|x|^5)$ e $g_5(x) = o(|x|^5)$ são funções de $\Delta_1 = x_1^2 + x_2^2$ e $\Delta_2 = y_1^2 + y_2^2$. Note que não há monômios de grau par e em cada uma das equações podemos colocar em evidência uma certa variável. Além disso, certos coeficientes também podem ser postos em evidência, resultando em

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_2 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2 + a_{20}\Delta_1^2 + a_{02}\Delta_2^2 + a_{11}\Delta_1\Delta_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2 + a_{20}\Delta_1^2 + a_{02}\Delta_2^2 + a_{11}\Delta_1\Delta_2) \\ \dot{y}_1 &= -\sqrt{2}y_2 - y_2 (b_{10}\Delta_1 + b_{01}\Delta_2 + b_{20}\Delta_1^2 + b_{02}\Delta_2^2 + 2b_{11}\Delta_1\Delta_2) \\ \dot{y}_2 &= \sqrt{2}y_1 + y_1 (b_{10}\Delta_1 + b_{01}\Delta_2 + b_{20}\Delta_1^2 + b_{02}\Delta_2^2 + 2b_{11}\Delta_1\Delta_2) \end{cases}$$

A expressão acima e os jatos de ordem até 10 nos levam a conjecturar¹ que a forma normal, neste caso, é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\alpha x_2 - x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_1 &= -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_2 &= \beta y_1 + y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases}, \quad (3.2)$$

com $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$. A conjectura é verdadeira e passamos agora a prová-la.

3.1.2 Demonstrações dos resultados: caso genérico

Vamos calcular os monômios ressonantes neste caso, trabalhando em coordenadas complexas $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = y_1 + iy_2$. Neste sistema de coordenadas, o sistema (3.2) se torna

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= \alpha iz_1 + iz_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{z}_2 &= \beta iz_2 + iz_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases} \quad (3.3)$$

Como não existe uma relação inteira da forma $p\alpha + q\beta = 0$ entre α e β , pondo $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = \beta$, as únicas relações de ressonância são derivadas de

$$m\lambda_1 + m\bar{\lambda}_1 + n\lambda_2 + n\bar{\lambda}_2 = 0$$

e podem ser escritas como

$$\begin{cases} z_1 &= (m+1)z_1 + m\bar{z}_1 + n\lambda_2 + n\bar{\lambda}_2 \\ z_2 &= mz_1 + m\bar{z}_1 + (n+1)\lambda_2 + n\bar{\lambda}_2 \end{cases}$$

Sejam $\Delta_1 = z_1\bar{z}_1$ e $\Delta_2 = z_2\bar{z}_2$. Os monômios ressonantes são da forma

$$z_j \Delta_1^m \Delta_2^n \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = 1, 2.$$

Portanto, pelo Teorema 2.8, a forma normal de Poincaré-Dulac de X é dada por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= \alpha iz_1 + z_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{z}_2 &= \beta iz_2 + z_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} \tilde{b}_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases}, \quad (3.4)$$

¹Não iremos apresentar aqui o 10-jato pelo tamanho da expressão, mas ele pode ser calculado facilmente com o algoritmo que apresentamos, basta um computador rápido e um pouco de paciência.

com $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij} \in \mathbb{C}$.

Estamos considerando o sistema reversível pela involução

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_1, x_2, y_1, -y_2),$$

que em coordenadas complexas é escrita como

$$\varphi_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = (-\bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

Seja

$$v_j = az_j \Delta_1^m \Delta_2^n \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Como

$$\begin{cases} \varphi_{\mathbb{C}}(v_1) &= -\bar{a} \bar{z}_j \Delta_1^m \Delta_2^n \frac{\partial}{\partial z_j} \\ v_1|_{\varphi_{\mathbb{C}}} &= -a \bar{z}_j \Delta_1^m \Delta_2^n \frac{\partial}{\partial z_j} \end{cases},$$

afim de que v_1 seja $\varphi_{\mathbb{C}}$ -reversível é preciso que $\bar{a} = -a$, isto é, $a = \tilde{a}i$, com $\tilde{a} \in \mathbb{R}$.

Fazendo a mesma análise para v_2 , obtemos o mesmo resultado. Com isso, a forma normal complexa é exatamente como dada pelo sistema (3.3), demonstrando nossa conjectura.

3.2 Caso 1:1 não semi-simples

Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo φ -reversível com aproximação linear $DX(0) = A(\alpha, \alpha, 1)$. Passando ao campo $\frac{1}{\alpha}X$ se necessário, podemos tomar $\alpha = 1$. Vamos escolher a involução φ como

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + y_1 + y_2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + y_1 - y_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

3.2.1 Índícios computacionais: caso 1 : 1

Como a aproximação linear do campo possui uma parte não semi-simples, vamos usá-la para simplificar a forma normal de Poincaré-Dulac. No entanto, apresentaremos as duas formas normais, para mostrar mais uma vez o quanto o Teorema de Belitskii simplifica a expressão do campo. Aproveitando a oportunidade, mostraremos também o efeito da condição de reversibilidade.

Ressaltamos que os coeficientes que aparecem nas expressões abaixo não necessariamente correspondem entre si (as formas normais foram calculadas de forma independente), mas as simplificações que ocorrem a cada passagem poderão ser percebidas facilmente.

O 3-jato da forma normal de Poincaré-Dulac (sem considerar a reversibilidade) é

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = y_1 - x_2 + a_{0003}y_2^3 + a_{0030}y_1y_2^2 + a_{0003}y_1^2y_2 + a_{0030}y_1^3 - b_{1020}x_2y_2^2 + (b_{0102} - b_{0120})x_2y_1y_2 + \\ + (-b_{1020} + b_{0111})x_2y_1^2 + (-b_{0210} - b_{1101})x_2^2y_2 + (-b_{1110} + b_{0201})x_2^2y_1 + a_{0300}x_2^3 + b_{0120}x_1y_2^2 - \\ - b_{0111}x_1y_1y_2 + b_{0102}x_1y_1^2 + b_{1110}x_1x_2y_2 - b_{1101}x_1x_2y_1 + a_{1200}x_1x_2^2 - b_{0210}x_1^2y_2 + b_{0201}x_1^2y_1 + \\ + a_{0300}x_1^2x_2 + a_{1200}x_1^3 \\ \dot{x}_2 = y_2 + x_1 + a_{0030}y_2^3 - a_{0003}y_1y_2^2 + a_{0030}y_1^2y_2 - a_{0003}y_1^3 + b_{0102}x_2y_2^2 + b_{0111}x_2y_1y_2 + b_{0120}x_2y_1^2 + \\ + b_{0201}x_2^2y_2 + b_{0210}x_2^2y_1 + a_{1200}x_2^3 + (b_{1020} - b_{0111})x_1y_2^2 + (b_{0102} - b_{0120})x_1y_1y_2 + b_{1020}x_1y_1^2 + \\ + b_{1101}x_1x_2y_2 + b_{1110}x_1x_2y_1 - a_{0300}x_1x_2^2 + (-b_{1110} + b_{0201})x_1^2y_2 + (b_{0210} + b_{1101})x_1^2y_1 + a_{1200}x_1^2x_2 - \\ - a_{0300}x_1^3 \\ \dot{y}_1 = -y_2 + c_{0003}y_2^3 + c_{0030}y_1y_2^2 + c_{0003}y_1^2y_2 + c_{0030}y_1^3 + c_{0102}x_2y_2^2 + d_{1011}x_2y_1y_2 + (c_{0102} + d_{0111})x_2y_1^2 - \\ - d_{2010}x_2^2y_2 + (d_{0201} - d_{1110})x_2^2y_1 + c_{0300}x_2^3 + (-d_{1011} + d_{0102})x_1y_2^2 - d_{0111}x_1y_1y_2 + d_{0102}x_1y_1^2 + \\ + d_{1110}x_1x_2y_2 + (-d_{2010} + d_{0210})x_1x_2y_1 + c_{3000}x_1x_2^2 - d_{0210}x_1^2y_2 + d_{0201}x_1^2y_1 + c_{0300}x_1^2x_2 + c_{3000}x_1^3 \\ \dot{y}_2 = y_1 + c_{0030}y_2^3 - c_{0003}y_1y_2^2 + c_{0030}y_1^2y_2 - c_{0003}y_1^3 + d_{0102}x_2y_2^2 + d_{0111}x_2y_1y_2 + (-d_{1011} + d_{0102})x_2y_1^2 + \\ + d_{0201}x_2^2y_2 + d_{0210}x_2^2y_1 + c_{3000}x_2^3 + (-c_{0102} - d_{0111})x_1y_2^2 + d_{1011}x_1y_1y_2 - c_{0102}x_1y_1^2 + (d_{2010} - \\ - d_{0210})x_1x_2y_2 + d_{1110}x_1x_2y_1 - c_{0300}x_1x_2^2 + (d_{0201} - d_{1110})x_1^2y_2 + d_{2010}x_1^2y_1 + c_{3000}x_1^2x_2 - c_{0300}x_1^3 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Considerando a condição de reversibilidade, passamos à forma normal de Poincaré-Dulac reversível (basta impor ao campo (3.6) a condição $\varphi(X(x)) = -X(\varphi(x))$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = y_1 - x_2 + b_{0003}y_1y_2^2 + b_{0003}y_1^3 + c_{0003}x_2y_2^2 + a_{0120}x_2y_1^2 \\ + c_{0111}x_2^2y_1 + (-a_{0120} + c_{0003})x_1y_1y_2 - c_{0111}x_1x_2y_2 \\ \dot{x}_2 = y_2 + x_1 + b_{0003}y_2^3 + b_{0003}y_1^2y_2 + (-c_{0003} + a_{0120})x_2y_1y_2 - a_{0120}x_1y_2^2 \\ - c_{0003}x_1y_1^2 - c_{0111}x_1x_2y_1 + c_{0111}x_1^2y_2 \\ \dot{y}_1 = -y_2 + c_{0003}y_2^3 + c_{0003}y_1^2y_2 + c_{0111}x_2y_1y_2 - c_{0111}x_1y_2^2 \\ \dot{y}_2 = y_1 - c_{0003}y_1y_2^2 - c_{0003}y_1^3 - c_{0111}x_2y_1^2 + c_{0111}x_1y_1y_2 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Passando à forma normal de Belitskii reversível (isto é, impondo a segunda condição de (2.3) ao campo (3.7)), obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + y_1 - c_{0111}x_2^2y_1 + c_{0111}x_1x_2y_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + y_2 + c_{0111}x_1x_2y_1 - c_{0111}x_1^2y_2 \\ \dot{y}_1 &= -y_2 - c_{0111}x_2y_1y_2 + c_{0111}x_1y_2^2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + c_{0111}x_2y_1^2 - c_{0111}x_1y_1y_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Perceba o poder da forma normal de Belitskii e da exigência da reversibilidade. A simplificação da forma normal é perceptível até mesmo pelo tamanho das expressões. Comparando a forma normal de Poincaré-Dulac reversível com a forma normal de Belitskii reversível, note que todos os monômios da primeira coordenada em que a variável x_2 não aparece e os monômios da forma $x_2y_i \frac{\partial}{\partial x_1}$ são eliminados. Nas outras coordenadas, ocorrem fenômenos parecidos.

Analogamente ao caso genérico, observamos que certos coeficientes e certas expressões podem ser evidenciadas. Fazendo tais simplificações na forma normal, agora até ordem 6, temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + y_1 + c_{0111}x_2(x_1y_2 - x_2y_1) - b_{3002}x_2(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + y_2 - c_{0111}x_1(x_1y_2 - x_2y_1) + b_{3002}x_2(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ \dot{y}_1 &= -y_2 + c_{0111}y_2(x_1y_2 - x_2y_1) - b_{3002}x_2(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - c_{0111}y_1(x_1y_2 - x_2y_1) + b_{3002}x_2(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Denotando $\Delta_3 = x_1y_2 - x_2y_1$, conjecturamos que a forma normal nestas condições é (os coeficientes a_i 's nada têm a ver com os a_{ijrs} 's de antes)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + y_1 + x_2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \Delta_3^i \\ \dot{x}_2 &= x_1 + y_2 + x_1 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i \Delta_3^i \\ \dot{y}_1 &= -y_2 + y_2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \Delta_3^i \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_1 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i \Delta_3^i \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.2 Demonstrações dos resultados: caso 1 : 1

Vamos verificar as equações homológicas e a condição de reversibilidade num monômio não-linear geral desse campo.

Considere o sistema (3.10) escrito na forma

$$\dot{x} = Ax + h(x) \quad (3.11)$$

com $h(x) = a_2 h_2(x) + a_3 h_3(x) + \dots$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j \in H^j$ contendo somente monômios unitários. Note que $h_{2k} \equiv 0$. Devemos verificar as condições

$$\begin{cases} Sh(x) - h'(x)Sx = 0 \\ N'h(x) - h'(x)N'x = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos provar que $L_S(h_j) = L_N(h_j) = 0$, $j \geq 2$, j ímpar. Pondo

$$h_j(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} (-1)^{j+1} x_2 \Delta_3^j \\ (-1)^j x_1 \Delta_3^j \\ (-1)^{j+1} y_2 \Delta_3^j \\ (-1)^j y_1 \Delta_3^j \end{pmatrix}$$

as condições (3.12) são de fácil verificação no Maple. Resta verificarmos a reversibilidade.

A forma normal é R -reversível se, e só se, tivermos

$$\begin{cases} R(Ax) = -A(R(x)) \\ R(h_j(x)) = -h_j(R(x)), \quad j \geq 2. \end{cases}$$

Esta verificação é mais complicada devido a expressão de R que estamos considerando. No entanto, um simples cálculo no Maple comprova a identidade que queremos.

O problema com esta demonstração é que ela mostra simplesmente que o sistema (3.10) é *parte* da forma normal de Belitskii do campo X . O que demonstramos foi que a forma normal de X é

$$\dot{x} = Ax + h(x) + \bar{h}(x),$$

com h o mesmo de (3.11) e \bar{h} uma função formal contendo somente monômios de grau maior que 2. Para concluir a demonstração, devemos ser capazes de provar que $\bar{h} \equiv 0$.

Para demonstrar formalmente que a expressão (3.10) é uma forma normal para o caso 1 : 1, devemos proceder exatamente como fizemos no caso genérico, calculando as ressonâncias. Feito isto, passamos à forma normal de Belitskii verificando a condição $[N^t, h] = 0$.

Podemos perfeitamente seguir até este ponto. O problema está ao considerarmos a reversibilidade. A involução que estamos considerando, dada por (3.5), é por demais complicada para o problema da reversibilidade da forma normal ser atacado por cálculos manuais, e a computação não ajuda muito neste ponto.

Ainda assim vamos assumir que o sistema (3.10) é uma forma normal para X , baseado em evidências computacionais.

3.3 Caso p:q

Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo com aproximação linear $DX(0) = A(\alpha, \frac{q}{p}\alpha, 0)$ com $p \neq q$ (pág. xvii). Passando ao campo $(p/\alpha)X$ se necessário, podemos supor que $DX(0) = A(p, q, 0)$.

3.3.1 Resultados

Vamos considerar as mesmas coordenadas complexas que no caso genérico, $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = y_1 + iy_2$. Com isto o sistema $\dot{x} = X(x)$ fica bidimensional,

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + f(z_1, z_2),$$

com $\lambda_1 = pi$ e $\lambda_2 = qi$. Note que

$$m\lambda_1 + m\bar{\lambda}_1 + n\lambda_2 + n\bar{\lambda}_2 = 0,$$

para todos m, n naturais. Portanto, os monômios

$$z_1(z_1\bar{z}_1)^m(z_2\bar{z}_2)^n \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad z_2(z_1\bar{z}_1)^m(z_2\bar{z}_2)^n \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad m + n \geq 1$$

são ressonantes. Note que $z_1\bar{z}_1 = x_1^2 + x_2^2$ e $z_2\bar{z}_2 = y_1^2 + y_2^2$ e que a menor ordem dos monômios produzidos por este tipo de ressonância é 3.

Como $q\lambda_1 - p\lambda_2 = 0$, segue que

$$q\lambda_1 + p\bar{\lambda}_2 = 0, \quad q\bar{\lambda}_1 + p\lambda_2 = 0.$$

Logo

$$\lambda_1 = (q-1)\bar{\lambda}_1 + p\lambda_2, \quad \lambda_2 = q\lambda_1 + (p-1)\bar{\lambda}_2.$$

Além disso,

$$\lambda_1 = \lambda_1 + mq\lambda_1 + mp\bar{\lambda}_2, \quad \lambda_2 = \lambda_2 + mq\lambda_1 + mp\bar{\lambda}_2.$$

Portanto, os monômios

$$\begin{aligned} & \bar{z}_1^{nq-1} \bar{z}_2^{np} \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \bar{z}_1^{mq} \bar{z}_2^{mp-1} \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad m, n \geq 1 \\ & z_1 (z_1^q \bar{z}_2^p)^m \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad z_2 (z_1^q \bar{z}_2^p)^m \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad m \geq 1 \\ & z_1 (\bar{z}_1^q \bar{z}_2^p)^m \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad z_2 (\bar{z}_1^q \bar{z}_2^p)^m \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

também são ressonantes. Note que aqui a menor ordem de ressonância é $p + q - 1$.

Como antes, sejam $\Delta_1 = z_1 \bar{z}_1 (= x_1^2 + x_2^2)$, $\Delta_2 = z_2 \bar{z}_2 (= y_1^2 + y_2^2)$, $\Delta_3 = z_1^q \bar{z}_2^p$, $\Delta_4 = \bar{\Delta}_3$. Observe que cada Δ_i corresponde a uma relação do tipo

$$\Gamma_1^1 \lambda_1 + \Gamma_2^1 \lambda_2 + \Gamma_1^2 \bar{\lambda}_1 + \Gamma_2^2 \bar{\lambda}_2 = 0, \quad \Gamma_i^j \in \mathbb{N}.$$

Juntando todos os termos ressonantes, não é difícil ver que podemos escrever a forma normal como

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = piz_1 + z_1 f_1(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) + \bar{z}_1^{q-1} z_2^p f_2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \\ \dot{z}_2 = qiz_2 + z_2 g_1(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) + z_1^q \bar{z}_2^{p-1} g_2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \end{cases} \quad (3.13)$$

Vamos agora considerar o efeito da reversibilidade sobre a forma normal. Suponha que X seja \mathbb{D}_4 reversível. Como discutido na página 33, encontraremos 6 campos formais aos quais X é formalmente conjugado, variando as bireversibilidades A_0, B_j , $j = 1, \dots, 6$. Como estamos trabalhando com a forma complexificada do problema, vamos converter as matrizes que geram os grupos G_1, \dots, G_6 para a forma complexa (2×2). A demonstração do lema seguinte é imediata e sua verificação pode ser feita escrevendo $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = y_1 + iy_2$ e identificando $(z_1, z_2) \equiv (x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Lema 3.1. *Sejam*

$$\begin{aligned}\varphi_0(z_1, z_2) &= -(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \\ \varphi_1(z_1, z_2) &= (i\bar{z}_1, \bar{z}_2) \\ \varphi_2(z_1, z_2) &= -(\bar{z}_1, i\bar{z}_2) \\ \varphi_3(z_1, z_2) &= (\bar{z}_1, -i\bar{z}_2) \\ \varphi_4(z_1, z_2) &= -(i\bar{z}_1, i\bar{z}_2) \\ \varphi_5(z_1, z_2) &= -(i\bar{z}_1, \bar{z}_2) \\ \varphi_6(z_1, z_2) &= (-i\bar{z}_1, i\bar{z}_2)\end{aligned}$$

Então os grupos $\langle A_0, B_j \rangle$ e $\langle \varphi_0, \varphi_j \rangle$ são isomorfos.

Pelo Lema anterior, um campo na forma complexa será \mathbb{D}_4 -reversível se, e só se, for φ_0, φ_k -reversível para algum $k \in \{1, \dots, 6\}$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $G_j = \langle \varphi_0, \varphi_j \rangle$, $1 \leq j \leq 6$.

As condições de reversibilidade afetam somente os coeficientes dos monômios em (3.13). Considere, por exemplo, um monômio da forma $az_1\Delta_1^m\Delta_2^n\frac{\partial}{\partial z_1}$, com $a \in \mathbb{C}$. Assim, como

$$\varphi_0\left(az_1\Delta_1^m\Delta_2^n\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = -\bar{a}\bar{z}_1\Delta_1^m\Delta_2^n\frac{\partial}{\partial z_1}$$

e

$$az_1\Delta_1^m\Delta_2^n\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_{(-\bar{z}_1, -\bar{z}_2)} = -\bar{a}\bar{z}_1\Delta_1^m\Delta_2^n\frac{\partial}{\partial z_1}$$

segue que $-\bar{a} = a$, isto é, a é um número imaginário puro. Vamos estudar os efeitos da φ_j -reversibilidade em cada um dos monômios ressonantes.

Lema 3.2. *Seja $v = az_j\Delta_1^m\Delta_2^n\frac{\partial}{\partial z_j}$, $a \in \mathbb{C}$. Então, para qualquer $j \in \{0, \dots, 6\}$, a φ_j -reversibilidade implica em $\bar{a} = -a$, isto é, a é um número imaginário puro. Em particular, estes termos estão sempre (genericamente) presentes na forma normal.*

Lema 3.3. *Seja $v = a\bar{z}_1^{q-1}z_2^p\frac{\partial}{\partial z_1}$, $a \in \mathbb{C}$. Então:*

- φ_0 -reversibilidade

$p + q$ par: a é imaginário puro

$p + q$ ímpar: a real

- φ_1 -reversibilidade

$q \equiv 0 \pmod{4}$: *a imaginário puro*

$q \equiv 1 \pmod{4}$: $Re(a) = -Im(a)$

$q \equiv 2 \pmod{4}$: *a real*

$q \equiv 3 \pmod{4}$: $Re(a) = Im(a)$

- φ_2 -reversibilidade

$p \equiv 0 \pmod{4}$

q par: *a imaginário puro*

q ímpar: *a real*

$p \equiv 1 \pmod{4}$

q par: $Re(a) = Im(a)$

q ímpar: $Re(a) = -Im(a)$

$p \equiv 2 \pmod{4}$

q par: *a real*

q ímpar: *a imaginário puro*

$p \equiv 3 \pmod{4}$

q par: $Re(a) = -Im(a)$

q ímpar: $Re(a) = Im(a)$

- φ_3 -reversibilidade

$p \equiv 0 \pmod{4}$: *a imaginário puro*

$p \equiv 1 \pmod{4}$: $Re(a) = Im(a)$

$p \equiv 2 \pmod{4}$: *a real*

$p \equiv 3 \pmod{4}$: $Re(a) = -Im(a)$

- φ_4 -reversibilidade

$p + q \equiv 0 \pmod{4}$

q par: a imaginário puro

q ímpar: a real

$$p + q \equiv 1 \pmod{4}$$

q par: $Re(a) = Im(a)$

q ímpar: $Re(a) = -Im(a)$

$$p + q \equiv 2 \pmod{4}$$

q par: a real

q ímpar: a imaginário puro

$$p + q \equiv 3 \pmod{4}$$

q par: $Re(a) = -Im(a)$

q ímpar: $Re(a) = Im(a)$

- φ_5 -reversibilidade

$$q \equiv 0 \pmod{4}$$

p + q par: a imaginário puro

p + q ímpar: a real

$$q \equiv 1 \pmod{4}$$

p + q par: $Re(a) = Im(a)$

p + q ímpar: $Re(a) = -Im(a)$

$$q \equiv 2 \pmod{4}$$

p + q par: a real

p + q ímpar: a imaginário puro

$$q \equiv 3 \pmod{4}$$

p + q par: $Re(a) = -Im(a)$

p + q ímpar: $Re(a) = Im(a)$

- φ_6 -reversibilidade

$p + q \equiv 0 \pmod{4}$: a imaginário puro

$p + q \equiv 1 \pmod{4}$: $\operatorname{Re}(a) = -\operatorname{Im}(a)$

$p + q \equiv 2 \pmod{4}$: a real

$p + q \equiv 3 \pmod{4}$: $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Im}(a)$

Demonstração. A demonstração segue o mesmo padrão. A φ_2 -reversibilidade é um caso bem geral e nos limitaremos a prová-lo. Seja $v = a\bar{z}_1^{-q-1}z_2^p \frac{\partial}{\partial z_1}$. Temos

$$\varphi_2(v) = -\bar{a}z_1^{q-1}\bar{z}_2^p \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$v|_{(-\bar{z}_1, -i\bar{z}_2)} = a\bar{z}_1^{-q-1}(i\bar{z}_2)^p$$

Logo, $\bar{a} = (-1)^{q-1}i^p a$. Portanto, basta considerar os valores de $p \pmod{4}$ e $q \pmod{2}$ para obter o resultado enunciado. \square

A partir dos dois lemas acima, podemos enunciar o

Corolário 3.4. *Seja X é um campo φ_0, φ_1 -reversível em $4D$ com equilíbrio elíptico $p : q$ -ressonante na origem. Se*

- $q \equiv 1 \pmod{4}$ ou
- $q \equiv 3 \pmod{4}$ ou
- $q \equiv 0 \pmod{4}$ e $p + q$ ímpar ou
- $q \equiv 2 \pmod{4}$ e $p + q$ par,

então a forma normal de X , dada em (3.13), não contém monômios das formas $\bar{z}_1^{-nq-1}z_2^n p \frac{\partial}{\partial z_1}$ e $\bar{z}_1^{mq-mp-1}z_2^m \frac{\partial}{\partial z_2}$.

Vamos tratar agora outro tipo de monômio. As demonstrações dos lemas que tratam disso serão omitidas, por serem idênticas à que foi feita.

Lema 3.5. *Seja $v = az_1z_1^qz_2^{-p} \frac{\partial}{\partial z_1}$. Então:*

- φ_0 -reversibilidade

$p + q$ par: a é imaginário puro

$p + q$ ímpar: a real

- φ_1 -reversibilidade

$q \equiv 0 \pmod{4}$: a imaginário puro

$q \equiv 1 \pmod{4}$: $Re(a) = Im(a)$

$q \equiv 2 \pmod{4}$: a real

$q \equiv 3 \pmod{4}$: $Re(a) = -Im(a)$

- φ_2 -reversibilidade

$p \equiv 0 \pmod{4}$

$p + q$ par: a imaginário puro

$p + q$ ímpar: a real

$p \equiv 1 \pmod{4}$

$p + q$ par: $Re(a) = Im(a)$

$p + q$ ímpar: $Re(a) = -Im(a)$

$p \equiv 2 \pmod{4}$

$p + q$ par: a real

$p + q$ ímpar: a imaginário puro

$p \equiv 3 \pmod{4}$

$p + q$ par: $Re(a) = -Im(a)$

$p + q$ ímpar: $Re(a) = Im(a)$

- φ_3 -reversibilidade

$p \equiv 0 \pmod{4}$: a imaginário puro

$p \equiv 1 \pmod{4}$: $Re(a) = -Im(a)$

$p \equiv 2 \pmod{4}$: a real

$p \equiv 3 \pmod{4}$: $Re(a) = Im(a)$

- φ_4 -reversibilidade

$$p + q \equiv 0 \pmod{4}$$

q par: a imaginário puro

q ímpar: a real

$$p + q \equiv 1 \pmod{4}$$

q par: $Re(a) = Im(a)$

q ímpar: $Re(a) = -Im(a)$

$$p + q \equiv 2 \pmod{4}$$

q par: a real

q ímpar: a imaginário puro

$$p + q \equiv 3 \pmod{4}$$

q par: $Re(a) = -Im(a)$

q ímpar: $Re(a) = Im(a)$

- φ_5 -reversibilidade

$$q \equiv 0 \pmod{4}$$

p par: a imaginário puro

p ímpar: a real

$$q \equiv 1 \pmod{4}$$

p par: $Re(a) = -Im(a)$

p ímpar: $Re(a) = Im(a)$

$$q \equiv 2 \pmod{4}$$

p par: a real

p ímpar: a imaginário puro

$$q \equiv 3 \pmod{4}$$

p par: $Re(a) = Im(a)$

p ímpar: $Re(a) = -Im(a)$

- φ_6 -reversibilidade

$p + q \equiv 0 \pmod{4}$: a imaginário puro

$p + q \equiv 1 \pmod{4}$: $Re(a) = Im(a)$

$p + q \equiv 2 \pmod{4}$: a real

$p + q \equiv 3 \pmod{4}$: $Re(a) = -Im(a)$

Com isso, temos o

Corolário 3.6. *Seja X é um campo φ_0, φ_1 -reversível em $4D$ com equilíbrio elíptico $p : q$ -ressonante na origem. Se*

- $q \equiv 1 \pmod{4}$ ou
- $q \equiv 3 \pmod{4}$ ou
- $q \equiv 0 \pmod{4}$ e $p + q$ ímpar ou
- $q \equiv 2 \pmod{4}$ e $p + q$ par,

então a forma normal de X , dada em (3.13), não contém monômios das formas $z_1(z_1^q \bar{z}_2^p)^m \frac{\partial}{\partial z_1}$ e $z_2(z_1^q \bar{z}_2^p)^m \frac{\partial}{\partial z_2}$, para $m \geq 1$.

O mesmo resultado vale para o outro tipo de monômio ressonante.

Corolário 3.7. *Seja X é um campo φ_0, φ_1 -reversível em $4D$ com equilíbrio elíptico $p : q$ -ressonante na origem. Se*

- $q \equiv 1 \pmod{4}$ ou
- $q \equiv 3 \pmod{4}$ ou
- $q \equiv 0 \pmod{4}$ e $p + q$ ímpar ou
- $q \equiv 2 \pmod{4}$ e $p + q$ par,

então a forma normal de X , dada em (3.13), não contém monômios das formas $z_1(\overline{z_1^q z_2^p})^m \frac{\partial}{\partial z_1}$ e $z_2(\overline{z_1^q z_2^p})^m \frac{\partial}{\partial z_2}$, para $m \geq 1$.

Será interessante separar a forma normal em dois casos: quando ela só possui monômios da forma $z_j \Delta_1^m \Delta_2^n \frac{\partial}{\partial z_j}$ e quando existem monômios de outros tipos. Resumiremos os resultados numa tabela, que nos dirá (entre outras coisas) sob que condições (sobre p e q) ocorre o primeiro caso.

Diremos que os monômios da forma $z_j (z_1 \bar{z}_1)^m (z_2 \bar{z}_2)^n \frac{\partial}{\partial z_j}$ são de **primeira espécie** e os demais monômios ressonantes (vide pág. 43) de **segunda espécie**. Os grupos G_j foram definidos no comentário abaixo do Lema 3.1. Sejam

- ★ : $q \equiv_4 1$ ou $q \equiv_4 3$ ou ($q \equiv_4 0$ e $p + q = 2k + 1$) ou ($q \equiv_4 2$ e $p + q = 2k$)
- ★★ : $p \equiv_4 1$ ou $p \equiv_4 2$ ou $p \equiv_4 3$
- ★★★ : $p \equiv_4 1$ ou $p \equiv_4 3$ ou ($p \equiv_4 0$ e $q = 2k + 1$) ou ($p \equiv_4 2$ e $q = 2k$)

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
segunda espécie	★	★★	★★★	★★★	★	★★

Tabela 3.1: Condições para que os monômios de segunda espécie **não** apareçam na forma normal.

A Tabela 3.1 deve ser lida da seguinte forma: se p e q satisfazem ★, a forma normal de um campo G_5 -reversível com equilíbrio elíptico $p : q$ -ressonante em \mathbb{R}^4 , que é da forma (3.13), não possui monômios de segunda espécie (isto é, o coeficiente dos monômios de segunda espécie é zero).

A validade da Tabela 3.1 pode ser comprovada com cálculos simples, baseados nos lemas anteriores. Por exemplo, se o coeficiente a de um certo monômio precisa ser imaginário puro e, ao mesmo tempo, satisfazer $Re(a) = Im(a)$, então segue que $a = 0$.

Exemplo 3.8. *Seja X um campo 3 : 5-ressonante em \mathbb{R}^4 . Uma forma normal G_j -reversível de X (para $1 \leq j \leq 5$) é da forma*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= pi\lambda z_1 + z_1 f(\Delta_1, \Delta_2) \\ \dot{z}_2 &= qi\lambda z_2 + z_2 g(\Delta_1, \Delta_2) \end{cases},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e f, g são funções sem termos constantes. Para ver isso, basta notar que $p \equiv_4 3$ e $q \equiv_4 1$ e conferir a Tabela 3.1.

No próximo capítulo, veremos que a “situação ideal” ocorre quando valem simultaneamente ★, ★★ e ★★★. Caso p, q satisfaçam ★, ★★ e ★★★, então a forma normal bireversível coincide com a do caso genérico, isto é, só apresenta monômios da forma

$$z_j \Delta_1^m \Delta_2^n \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

CAPÍTULO 4

HAMILTONIEDADE DOS CAMPOS REVERSÍVEIS

A melhor maneira de mostrar que um certo campo X é Hamiltoniano é exibir uma função H e uma matriz simplética J tal que $X = J\nabla H$. É exatamente isso que iremos fazer neste capítulo, exibir Hamiltonianos e matrizes simpléticas para cada um dos casos estudados. Quando houver necessidade, mostraremos que de fato a Hamiltoniedade pode ser atingida (fazendo certas escolhas de coeficientes).

Em cada caso, vamos fixar a matriz simplética. No entanto, é fácil perceber que a parte linear do campo determina, a menos de sinal, a forma simplética. Especificamente para nosso problema, em cada caso, temos duas matrizes simpléticas possíveis (a menos de reescalonamento) e com ambas obtém-se o mesmo resultado.

Neste capítulo provamos os Teoremas 2 e 3.

4.1 Caso genérico: conjugação formal

Neste seção provaremos o Teorema 2-(a) e parte do Teorema 3-(a). Sejam $\Delta_1 = x_1^2 + x_2^2$ e $\Delta_2 = y_1^2 + y_2^2$. A forma normal do campo no caso genérico é dada por (3.2), que rerepresentamos abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_1 = -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases} \quad (4.1)$$

Definamos

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\alpha}{2} \Delta_1 + \frac{\beta}{2} \Delta_2 + \sum_{i+j=2}^{\infty} \bar{a}_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j, \quad (4.2)$$

onde \bar{a}_{ij} são coeficientes a serem determinados. Usaremos a matriz simplética

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com isso, o sistema $\dot{x} = J\nabla H$, que denotaremos X_H , tem a forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} 2(i+1) \bar{a}_{i+1,j} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} 2(i+1) \bar{a}_{i+1,j} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_1 = -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} 2(j+1) \bar{a}_{i,j+1} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} 2(j+1) \bar{a}_{i,j+1} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases}$$

Pondo $\bar{a}_{i+1,j} = \frac{1}{2(i+1)} a_{ij}$, obtemos o campo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_1 = -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} \tilde{b}_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} \tilde{b}_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde $\tilde{b}_{ij} = a_{i-1,j+1}$ para $i > 0$, $j < k-1$ e $\tilde{b}_{0k} = b_{0k}$ para todo $k > 0$.

Resta provar que é possível definir um difeomorfismo formal que leva o campo X (dado por (4.1)) no campo X_H (dado por (4.3)), ou seja, devemos mostrar que é possível efetuar as atribuições

$$\begin{array}{cccccccc} a_{10} & a_{01} & \vdots & a_{20} & a_{11} & a_{02} & \vdots & a_{30} & a_{21} & a_{12} & a_{03} \\ & \swarrow & & \vdots & \swarrow & \swarrow & & \vdots & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ b_{10} & b_{01} & \vdots & b_{20} & b_{11} & b_{02} & \vdots & b_{30} & b_{21} & b_{12} & b_{03} \end{array}$$

entre os coeficientes de (4.1). Primeiro vamos cuidar dos jatos 3 e 5, para motivar o leitor.

O 3-jato de (4.1) é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - x_2 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2) \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_1 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2) \\ \dot{y}_1 = -\beta y_2 - y_2 (b_{10}\Delta_1 + b_{01}\Delta_2) \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + y_1 (b_{10}\Delta_1 + b_{01}\Delta_2) \end{cases} \quad (4.4)$$

Devemos mostrar que é possível transformar o b_{10} em a_{01} . Primeiro, propomos um chute inicial para a transformação de coordenadas:

$$\Psi_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 + \lambda_{10}y_1\Delta_1 \\ y_2 + \lambda_{10}y_2\Delta_1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Não é difícil perceber que, até ordem 3, $\Delta_1|_{\Psi_0} = \Delta_1$ e $\Delta_2|_{\Psi_0} = \Delta_2$, já que

$$\begin{aligned} (y_1 + \lambda_{10}y_1\Delta_1)^2 + (y_2 + \lambda_{10}y_2\Delta_2)^2 &= y_1^2 + y_2^2 + 2y_1^2\lambda_{10}\Delta_1 + \lambda_{10}^2y_1^2\Delta_1^2 + \\ &+ 2y_2^2\lambda_{10}\Delta_2 + \lambda_{10}^2y_2^2\Delta_2^2 \\ &= \Delta_2 + o(4) \end{aligned}$$

Portanto, até ordem 3, o campo (4.4) no novo sistema de coordenadas fica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - x_2 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2) \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_1 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2) \\ \dot{y}_1 = -\beta y_2 - y_2 ((\beta\lambda_{10} + b_{10})\Delta_1 + b_{01}\Delta_2) \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + y_1 ((\beta\lambda_{10} + b_{10})\Delta_1 + b_{01}\Delta_2) \end{cases} \quad (4.6)$$

Logo, para efetuar a troca $b_{10} := a_{01}$, basta escolher

$$\lambda_{10} := \frac{a_{01} - b_{10}}{\beta} \quad (4.7)$$

e pronto! Com esta escolha, obtemos a mudança desejada e o 3-jato de (4.1) se torna Hamiltoniano.

Tudo perfeito, mas a mudança de coordenadas afeta negativamente os outros termos de (4.1). Podemos eventualmente até perder a expressão do campo, em Δ_1 e Δ_2 . O que fazer? Voltar o campo (transformado) para sua forma normal!

De nossa discussão sobre formas normais, sabemos que existe uma mudança de coordenadas (formal) Ψ_1 que reorganiza os termos e volta o campo à sua forma normal, deixando fixo o 3-jato. Considerando as duas mudanças de coordenadas (tornar Hamiltoniano e voltar à forma normal), o 5-jato do novo campo fica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\alpha x_2 - x_2 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2 + a_{20}\Delta_1^2 + a_{11}\Delta_1\Delta_2 + a_{02}\Delta_2^2) \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + x_1 (a_{10}\Delta_1 + a_{01}\Delta_2 + a_{20}\Delta_1^2 + a_{11}\Delta_1\Delta_2 + a_{02}\Delta_2^2) \\ \dot{y}_1 &= -\beta y_2 - y_2 (a_{01}\Delta_1 + b_{01}\Delta_2 + b_{20}\Delta_1^2 + b_{11}\Delta_1\Delta_2 + b_{02}\Delta_2^2) \\ \dot{y}_2 &= \beta y_1 + y_1 (a_{01}\Delta_1 + b_{01}\Delta_2 + b_{20}\Delta_1^2 + b_{11}\Delta_1\Delta_2 + b_{02}\Delta_2^2) \end{cases}, \quad (4.8)$$

onde os coeficientes a_{ij} e b_{ij} com $i + j = 2$ não necessariamente são os mesmos de antes.

Neste ponto, devemos obter uma mudança de coordenadas que efetue as trocas $b_{02} := a_{11}$ e $b_{11} := a_{02}$. Vamos propor a mudança de coordenadas

$$\Psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 + \lambda_{20}y_1\Delta_1^2 + \lambda_{11}y_1\Delta_1\Delta_2 \\ y_2 + \lambda_{20}y_2\Delta_1^2 + \lambda_{11}y_2\Delta_1\Delta_2 \end{pmatrix}$$

Com cálculos parecidos com os de antes, descobrimos que devem ser tomados

$$\lambda_{20} := \frac{a_{11} - b_{20}}{\beta}, \quad \lambda_{11} := \frac{a_{02} - b_{11}}{\beta}$$

a fim de realizar a troca de coeficientes necessária à Hamiltoniedade do 5-jato. Renormalizando o campo por outra mudança de coordenadas Ψ_3 , voltamos à sua forma normal já Hamiltoniana até o 5-jato (no sistema de coordenadas $\Psi_3\Psi_2\Psi_1\Psi_0$).

Não é difícil ver que, continuando o processo, teremos uma sequência de mudanças de coordenadas de classe C^∞ Ψ_{2k} ($k \geq 0$) para realizar escolhas de coeficientes e outra sequência de mudanças de coordenadas formais Ψ_{2k+1} ($k \geq 0$) renormalizadora. A expressão dos Ψ_{2k+1} é, a priori, desconhe-

cida; já a dos Ψ_{2k} é claramente

$$\begin{aligned} \Psi_{2k}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 + y_1 \Delta_1 \left(\sum_{i+j=k} \lambda_{i+1,j} \Delta_1^i \Delta_2^j \right) \\ y_2 + y_2 \Delta_1 \left(\sum_{i+j=k} \lambda_{i+1,j} \Delta_1^i \Delta_2^j \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 + y_1 \left(\lambda_{k+1,0} \Delta_1^{k+1} + \lambda_{k,1} \Delta_1^k \Delta_2 + \dots + \lambda_{1,k} \Delta_1 \Delta_2^k \right) \\ y_2 + y_2 \left(\lambda_{k+1,0} \Delta_1^{k+1} + \lambda_{k,1} \Delta_1^k \Delta_2 + \dots + \lambda_{1,k} \Delta_1 \Delta_2^k \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com

$$\lambda_{k+1-j,j} = -\frac{b_{k+1-j,j} - a_{k-j,1+j}}{\beta}, \quad j = 0, \dots, k.$$

Isso conclui a demonstração do Teorema 2-(a). Com a observação de que a \mathbb{D}_4 -reversibilidade não acrescenta mais condições aos coeficientes da forma normal do campo, consideramos demonstrada a primeira parte do Teorema 3-(a).

Exemplo 4.1. *Vamos a um exemplo concreto, que explicita as mudanças de coordenadas. Considere o sistema*

$$X : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^2 y_1 - 5x_2(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - 5x_1(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{y}_1 = -\sqrt{2}y_2 - 3y_2(x_1^2 + x_2^2) + 2y_2(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{y}_2 = \sqrt{2}y_1 + 5y_2^2 x_2 \end{cases},$$

com aproximação linear $A(1, \sqrt{2}, 0)$. É fácil ver X é reversível por

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_1, x_2, y_1, -y_2).$$

A mudança de coordenadas

$$\Psi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 x_2 y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2^2 y_2 \\ x_2 + 10x_2(y_1^2 + y_2^2) \\ y_1 \\ y_2 + \frac{15}{7} x_1 y_2^2 + \frac{20}{7} x_1 y_1^2 + \frac{10\sqrt{2}}{7} x_2 y_1 y_2 - \sqrt{2} y_1^2 y_2 + \\ + \frac{3\sqrt{2}}{2} x_1^2 y_2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} x_2^2 y_2 - \sqrt{2} y_2^3 \end{pmatrix}$$

transforma o campo X em

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - 5x_2y_2^2 - 5x_2y_1^2 - 5x_2^2y_1y_2^2 - 5x_2^2y_1^3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}x_2^3y_2^2 + \\ + (2 - 5\sqrt{2})x_1x_2y_2^3 + (2 - 5\sqrt{2})x_1x_2y_1^2y_2 - 3x_1x_2^3y_2 - 5x_1^2y_1y_2^2 - \\ - 5x_1^2y_1^3 - x_1^2x_2y_2^2 - 3x_1^3x_2y_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 5x_1y_2^2 + 5x_1y_1^2 + 40x_2y_1y_2^3 + 40x_2y_1^3y_2 + 100x_2^2y_2^3 - 60x_2^3y_1y_2 - \\ - 50x_1y_2^4 - 100x_1y_1^2y_2^2 - 50x_1y_1^4 - 60x_1^2x_2y_1y_2 \\ \dot{y}_1 = -\sqrt{2}y_2 + 2y_2^3 + 2y_1^2y_2 - 3x_2^2y_2 - 3x_1^2y_2 \\ \dot{y}_2 = \sqrt{2}y_1 - 2y_1y_2^2 - 2y_1^3 + 3x_2^2y_1 + 3x_1^2y_1 - 4\sqrt{2}y_1y_2^4 - 4\sqrt{2}y_1^3y_2^2 + \\ + \left(-\frac{85\sqrt{2}}{7} - \frac{75}{7}\right)x_2y_2^4 + \left(-25 - \frac{15\sqrt{2}}{7}\right)x_2y_1^2y_2^2 - \frac{100}{7}x_2y_1^4 + \\ + \frac{92\sqrt{2}}{7}x_2^2y_1y_2^2 + \frac{45\sqrt{2}}{14}x_2^3y_2^2 + \left(-\frac{50\sqrt{2}}{7} + \frac{80}{7}\right)x_1y_1y_2^3 + \\ + \left(-\frac{50\sqrt{2}}{7} + \frac{80}{7}\right)x_1y_1^3y_2 + \left(-30\sqrt{2} + \frac{150}{7}\right)x_1x_2y_2^3 - 30\sqrt{2}x_1x_2y_1^2y_2 - \\ - \frac{120}{7}x_1x_2^2y_1y_2 + \left(-\frac{15}{7} + 6\sqrt{2}\right)x_1^2y_1y_2^2 - \frac{20}{7}x_1^2y_1^3 + \\ + \frac{45\sqrt{2}}{14}x_1^2x_2y_2^2 + \left(-\frac{120}{7} - 3\sqrt{2}\right)x_1^3y_1y_2 \end{cases}, \quad (4.9)$$

que é **quase** Hamiltoniano até ordem 3. O único impecilho à Hamiltoniedade é o **3** que aparece em negrito nas equações de \dot{y}_1 e \dot{y}_2 : ele deveria ser um 5. Sem problemas! Como em (4.5) e (4.7), seja

$$\Psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 + y_1 \sqrt{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ y_2 + y_2 \sqrt{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

O campo resultante (efetuadas as mudanças de coordenadas Ψ_1 e Ψ_2) é Hamiltoniano (até ordem 3), com função Hamiltoniana dada por

$$H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_2 - \frac{1}{2}\Delta_1\Delta_2 + \frac{5}{2}\Delta_2^2.$$

Isso finaliza o processo para o 3-jato. Agora basta fazer tudo novamente para o 5-jato, o 7-jato e assim por diante. Para poupar o leitor da visão do campo (4.9) no sistema de coordenadas Ψ_2 , vamos parar por aqui.

4.2 Caso genérico: equivalência orbital

Neste seção provaremos o Teorema 2-(c). Seja \tilde{X} o campo (forma normal do caso genérico) dado em (4.1). Nesta seção mostraremos que efetuando reparametrizações do tempo e mudanças de coordenadas formais, é possível levar \tilde{X} à forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - \epsilon_1 x_2 \Delta_1 - \epsilon_3 x_2 \Delta_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \epsilon_1 x_1 \Delta_1 - \epsilon_3 x_1 \Delta_1^2 \\ \dot{y}_1 &= -\lambda y_2 - \epsilon_2 y_2 \Delta_2 \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_1 + \epsilon_2 y_1 \Delta_2, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $\Delta_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\Delta_2 = y_1^2 + y_2^2$, $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\epsilon_1 = \pm 1$, $\epsilon_2 = \pm 1$ e $\epsilon_3 \in \mathbb{R}$ são parâmetros.

Note que o sistema (4.10) é Hamiltoniano, com função Hamiltoniana dada por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{\lambda}{2}\Delta_2 + \frac{1}{4}\epsilon_2\Delta_2^2 + \frac{1}{4}\epsilon_1\Delta_1^2 + \frac{1}{6}\epsilon_3\Delta_1^3.$$

Primeiro vamos transformar o 3-jato de (4.1) no 3-jato de (4.10). Seja

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_0 + \sigma_{10}\Delta_1 + \sigma_{01}\Delta_2$$

Assim, $j^3(f_1\tilde{X})$ é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\sigma_0\alpha x_2 + (-\sigma_{01}\alpha - \sigma_0 a_{01})x_2 y_2^2 + (-\sigma_{01}\alpha - \sigma_0 a_{01})x_2 y_1^2 + (-\sigma_0 a_{10} - \sigma_{10}\alpha)x_2^3 + (-\sigma_0 a_{10} - \sigma_{10}\alpha)x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sigma_0\alpha x_1 + (\sigma_0 a_{01} + \sigma_{01}\alpha)x_1 y_2^2 + (\sigma_0 a_{01} + \sigma_{01}\alpha)x_1 y_1^2 + (\sigma_{10}\alpha + \sigma_0 a_{10})x_1 x_2^2 + (\sigma_{10}\alpha + \sigma_0 a_{10})x_1^3 \\ \dot{y}_1 &= -\beta\sigma_0 y_2 + (-\sigma_{01}\beta - \sigma_0 b_{01})y_2^3 + (-\sigma_{01}\beta - \sigma_0 b_{01})y_1^2 y_2 + (-\sigma_0 b_{10} - \sigma_{10}\beta)x_2^2 y_2 + (-\sigma_0 b_{10} - \sigma_{10}\beta)x_1^2 y_2 \\ \dot{y}_2 &= \beta\sigma_0 y_1 + (\sigma_{01}\beta + \sigma_0 b_{01})y_1 y_2^2 + (\sigma_{01}\beta + \sigma_0 b_{01})y_1^3 + (\sigma_0 b_{10} + \sigma_{10}\beta)x_2^2 y_1 + (\sigma_0 b_{10} + \sigma_{10}\beta)x_1^2 y_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Para obtermos o 3-jato de (4.10) a partir do sistema (4.11), devemos escolher

$$\sigma_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad \sigma_{10} = -\frac{b_{10}}{\alpha\beta}, \quad \sigma_{01} = -\frac{a_{01}}{\alpha^2}$$

e obter o campo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_2 \tilde{\epsilon}_1 \Delta_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1 \tilde{\epsilon}_1 \Delta_1 \\ \dot{y}_1 &= -\lambda y_2 - y_2 \tilde{\epsilon}_2 \Delta_2 \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_1 + y_1 \tilde{\epsilon}_2 \Delta_2, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{onde } \lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \tilde{\epsilon}_1 = \frac{\alpha b_{10} - a_{10}\beta}{\alpha\beta} \text{ e } \tilde{\epsilon}_2 = \frac{b_{01}\alpha - a_{01}\beta}{\alpha^2}.$$

Considerando $\alpha b_{10} - a_{10}\beta \neq 0$ e $b_{01}\alpha - a_{01}\beta \neq 0$ (condições genéricas), podemos reescalonar $\tilde{\epsilon}_1 = \pm 1$ e $\tilde{\epsilon}_2 = \pm 1$. Desta forma, obtemos a equivalência entre os 3-jatos de (4.1) e (4.10).

Abusando da notação, vamos continuar denotando por \tilde{X} o campo $f_1\tilde{X}$ reescalonado. Desta forma, o sistema (4.12), que antes era $j^3(f_1\tilde{X})$, agora será simplesmente $j^3(\tilde{X})$.

No âmbito dos 5-jatos, vamos fazer o mesmo que fizemos para o 3-jato: descobrir uma função que deixe este campo com o formato que queremos. O 5-jato de \tilde{X} é da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_2(\epsilon_1\Delta_1 + \nu_{20}\Delta_1^2 + \nu_{11}\Delta_1\Delta_2 + \nu_{02}\Delta_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1(\epsilon_1\Delta_1 + \nu_{20}\Delta_1^2 + \nu_{11}\Delta_1\Delta_2 + \nu_{02}\Delta_2^2) \\ \dot{y}_1 = -\lambda y_2 - y_2(\epsilon_2\Delta_2 + \tau_{20}\Delta_1^2 + \tau_{11}\Delta_1\Delta_2 + \tau_{02}\Delta_2^2) \\ \dot{y}_2 = \lambda y_1 + y_1(\epsilon_2\Delta_2 + \tau_{20}\Delta_1^2 + \tau_{11}\Delta_1\Delta_2 + \tau_{02}\Delta_2^2) \end{cases} \quad (4.13)$$

onde ν_{ij} e τ_{rs} são bem-conhecidos.

Vamos precisar novamente de uma mudança de coordenadas

$$\Psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1(\mu_{10}\Delta_1 + \mu_{01}\Delta_2 + \mu_{20}\Delta_1^2 + \mu_{11}\Delta_1\Delta_2 + \mu_{02}\Delta_2^2) \\ x_2 + x_2(\mu_{10}\Delta_1 + \mu_{01}\Delta_2 + \mu_{20}\Delta_1^2 + \mu_{11}\Delta_1\Delta_2 + \mu_{02}\Delta_2^2) \\ y_1 + y_1(\theta_{10}\Delta_1 + \theta_{01}\Delta_2 + \theta_{20}\Delta_1^2 + \theta_{11}\Delta_1\Delta_2 + \theta_{02}\Delta_2^2) \\ y_2 + y_2(\theta_{10}\Delta_1 + \theta_{01}\Delta_2 + \theta_{20}\Delta_1^2 + \theta_{11}\Delta_1\Delta_2 + \theta_{02}\Delta_2^2) \end{pmatrix},$$

onde as constantes μ_{ij} , θ_{rs} serão especificadas a seguir.

A situação no momento é: temos 10 constantes, μ 's e θ 's, e devemos dar valores a elas para que o sistema $D\Phi_2(\tilde{X})$ tenha o mesmo 5-jato que o sistema (4.10).

Não é difícil perceber que devemos tomar os parâmetros

$$\begin{aligned} \mu_{10} = 0, \mu_{01} = 0, \mu_{20} = -\nu_{20} + \epsilon_2, \mu_{11} = -\nu_{11}, \mu_{02} = -\nu_{02}, \\ \theta_{01} = 0, \theta_{10} = 0, \theta_{20} = -\frac{\tau_{20}\alpha}{\beta}, \theta_{11} = -\frac{\tau_{11}\alpha}{\beta}, \theta_{02} = -\frac{\tau_{02}\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

para obter o que queremos. Vamos novamente abusar da notação e denotar $\tilde{X} = D\Phi_2(\tilde{X})$.

Corolário 4.2. *O 5-jato de X é formalmente orbitalmente equivalente a X_H .*

Resta agora mostrar que todos os termos de ordem superior a 5 podem ser eliminados efetuando mudanças de coordenadas e reparametrizações do tempo. Vamos mostrar como eliminar os termos de ordem 7, ilustrando assim o método geral. O 7-jato de X tem a forma

$$X(x_1, x_2, y_1, y_2) = X_H(x_1, x_2, y_1, y_2) + \begin{pmatrix} x_2 \left(\omega_{30}\Delta_1^3 + \omega_{21}\Delta_1^2\Delta_2 + \omega_{12}\Delta_1\Delta_2^2 + \omega_{03}\Delta_2^3 \right) \\ x_1 \left(\omega_{30}\Delta_1^3 + \omega_{21}\Delta_1^2\Delta_2 + \omega_{12}\Delta_1\Delta_2^2 + \omega_{03}\Delta_2^3 \right) \\ y_2 \left(\nu_{30}\Delta_1^3 + \nu_{21}\Delta_1^2\Delta_2 + \nu_{12}\Delta_1\Delta_2^2 + \nu_{03}\Delta_2^3 \right) \\ y_1 \left(\nu_{30}\Delta_1^3 + \nu_{21}\Delta_1^2\Delta_2 + \nu_{12}\Delta_1\Delta_2^2 + \nu_{03}\Delta_2^3 \right) \end{pmatrix}$$

Sejam

$$f_3(\Delta_1, \Delta_2) = 1 + \zeta_3\Delta_1^3 + \zeta_4\Delta_1^2\Delta_2 + \zeta_5\Delta_1\Delta_2^2 + \zeta_6\Delta_2^3,$$

$$\Psi_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 \left(\nu_{30}\Delta_1^3 + \nu_{21}\Delta_1^2\Delta_2 + \nu_{12}\Delta_1\Delta_2^2 + \nu_{03}\Delta_2^3 \right) \\ x_2 + x_2 \left(\nu_{30}\Delta_1^3 + \nu_{21}\Delta_1^2\Delta_2 + \nu_{12}\Delta_1\Delta_2^2 + \nu_{03}\Delta_2^3 \right) \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Tomando

$$\zeta_3 = -\nu_{30}\frac{\alpha}{\beta}, \quad \zeta_4 = -\nu_{21}\frac{\alpha}{\beta}, \quad \zeta_5 = -\nu_{12}\frac{\alpha}{\beta}, \quad \zeta_6 = -\nu_{03}\frac{\alpha}{\beta} \quad (4.14)$$

$$\nu_{30} = \frac{-\omega_{30}\beta + \nu_{30}\alpha}{\beta}, \quad \nu_{21} = \frac{-\omega_{21}\beta + \nu_{21}\alpha}{\beta}, \quad \nu_{12} = \frac{\nu_{12}\alpha - \omega_{12}\beta}{\beta}, \quad \nu_{03} = \frac{\nu_{03}\alpha - \omega_{03}\beta}{\beta} \quad (4.15)$$

temos o

Corolário 4.3. *O 7-jato de X é formalmente orbitalmente equivalente a X_H .*

Note que o sistema que resolvemos para encontrar as soluções (4.14) e (4.15) são diagonais. Isso é o que acontece geralmente. Considerando que $j^{2k+1}X = j^{2k+1}X_H = X_H$, afim de anular os coeficientes de $j^{2k+3}\tilde{X}$, dado por

$$X(x_1, x_2, y_1, y_2) = X_H(x_1, x_2, y_1, y_2) + \begin{pmatrix} x_2 \left(\sum_{i+j=k+1} \omega_{ij}\Delta_1^i\Delta_2^j \right) \\ x_1 \left(\sum_{i+j=k+1} \omega_{ij}\Delta_1^i\Delta_2^j \right) \\ y_2 \left(\sum_{i+j=k+1} \nu_{ij}\Delta_1^i\Delta_2^j \right) \\ y_1 \left(\sum_{i+j=k+1} \nu_{ij}\Delta_1^i\Delta_2^j \right) \end{pmatrix},$$

é suficiente tomar

$$f_k(\Delta_1, \Delta_2) = 1 + \sum_{i+j=k} \zeta_{ij}\Delta_1^i\Delta_2^j$$

$$\Psi_k(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 \left(\sum_{i+j=k} v_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \right) \\ x_2 + x_2 \left(\sum_{i+j=k} v_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \right) \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

onde $\zeta_{ij} = -v_{ij} \frac{\alpha}{\beta}$ e $v_{ij} = \frac{v_{ij}\alpha - \omega_{ij}\beta}{\beta}$.

Com isso, provamos o Teorema 2-(c). Observe que a idéia utilizada para construir as funções que farão o reescalonamento do tempo e a mudança de coordenadas é bem semelhante à usada na demonstração do Teorema 2-(a), na seção anterior.

4.3 Caso 1:1 não semi-simples

Neste seção provaremos os Teoremas 2-(b) e 3-(a). Seja $\Delta_3 = x_1 y_2 - y_2 y_1$. Temos por (3.10) que a forma normal de X é

$$\tilde{X} : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + y_1 + x_2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j \Delta_3^j \\ \dot{x}_2 = x_1 + y_2 + x_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j \Delta_3^j \\ \dot{y}_1 = -y_2 + y_2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j \Delta_3^j \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j \Delta_3^j \end{cases} \quad (4.16)$$

Aproveitando os coeficientes a_j do sistema acima, considere a função

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2} \Delta_2 + \Delta_3 + \sum_{j=2}^{\infty} j a_j \Delta_3^j$$

Considerando a matriz simplética

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o campo $X_H = J\nabla H$ neste caso é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + y_1 + x_2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j \Delta_3^j \\ \dot{x}_2 &= x_1 + y_2 + x_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j \Delta_3^j \\ \dot{y}_1 &= -y_2 + y_2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} a_j \Delta_3^j \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_1 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j \Delta_3^j \end{cases} \quad (4.17)$$

Note que os sistemas (4.16) e (4.17) são idênticos! Como X é formalmente conjugado a \tilde{X} , temos a demonstração do Teorema 1-(b).

Invocando mais uma vez o Lema 3.2, a \mathbb{D}_4 -reversibilidade não acrescenta mais condições aos coeficientes da forma normal do campo no caso de ressonância do tipo $1 : 1$, concluindo a prova do Teorema 3-(a).

4.4 Caso $p:q$

Neste seção provaremos os Teoremas 2-(d) e 3. Vimos em (3.13) que, na presença de ressonância do tipo $p : q$, a forma normal em coordenadas complexas do campo com o qual estamos trabalhando é

$$X : \begin{cases} \dot{z}_1 &= piz_1 + z_1 f_1(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) + \bar{z}_1^{q-1} z_2^p f_2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \\ \dot{z}_2 &= qiz_2 + z_2 g_1(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) + z_1^q \bar{z}_2^{p-1} g_2(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \end{cases} \quad (4.18)$$

A reversibilidade do campo impõe condições sobre os coeficientes de f_1, f_2, g_1, g_2 , por exemplo impondo que certos coeficientes sejam imaginários puros, outros sejam reais, etc. Em [29, Teorema 5] é provado que tal campo, se reversível, é formalmente orbitalmente equivalente a um campo Hamiltoniano, com função Hamiltoniana dada por

$$H(z_1, z_2) = \frac{p}{2} z_1 \bar{z}_2 + \frac{q}{2} z_2 \bar{z}_2 + \dots$$

Noutras palavras, com uma sequência de mudanças de coordenadas e reescalamentos no tempo, é possível realizar as condições para que X seja um campo Hamiltoniano. A demonstração desse fato é essencialmente a mesma que fizemos na Seção 4.2 para o caso genérico. Para exemplificar o método, vamos esboçar a prova de como estabelecer a Hamiltoniedade no caso $1 : 2$, que é o caso em que aparecem os monômios de ordem mais baixa.

Na verdade, mostramos algo um pouco mais forte abaixo: o campo X será formalmente conjugado a um campo Hamiltoniano, isto é, existe um difeomorfismo formal Ψ tal que $D\Psi(x)X(x)$ é Hamiltoniano.

Teorema 4.4. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo \mathbb{Z}_2 -reversível 1 : 2-ressonante. Então X é formalmente orbitalmente equivalente a um campo Hamiltoniano.*

Demonstração. A forma normal até ordem 3 de um campo 1 : 2-ressonante tem a forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= iz_1 - 2a_0\bar{z}_1z_2 + z_1(a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2) + \dots \\ \dot{z}_2 &= 2iz_2 + b_0z_1^2 + z_2(b_1\Delta_1 + b_2\Delta_3) + \dots \end{cases}$$

Vamos trabalhar com o campo em coordenadas reais; assim, a forma normal até ordem 3 é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + a_{1010}x_2y_2 + a_{1010}x_1y_1 - b_{1002}x_2y_2^2 - b_{1002}x_2y_1^2 + a_{2100}x_2^3 + a_{2100}x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_{1010}x_2y_1 + a_{1010}x_1y_2 + b_{1002}x_1y_2^2 + b_{1002}x_1y_1^2 - a_{2100}x_1x_2^2 - a_{2100}x_1^3 \\ \dot{y}_1 &= -2y_2 + c_{0200}x_2^2 - c_{0200}x_1^2 + c_{0021}y_2^3 + c_{0021}y_1^2y_2 - d_{2010}x_2^2y_2 - d_{2010}x_1^2y_2 \\ \dot{y}_2 &= 2y_1 - 2c_{0200}x_1x_2 - c_{0021}y_1y_2^2 - c_{0021}y_1^3 + d_{2010}x_2^2y_1 + d_{2010}x_1^2y_1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Façamos $c_{0200} := \frac{a_{1010}}{2}$ e $d_{2010} := b_{1002}$ (\star). Considere a função

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, y_1, y_2) &= -\frac{1}{4}a_{2100}x_2^4 - a_{1010}x_1x_2y_1 + \frac{1}{2}b_{1002}x_2^2y_1^2 + \frac{1}{2}b_{1002}x_1^2y_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2}a_{1010}x_1^2y_2 + \frac{1}{2}b_{1002}x_2^2y_2^2 + \frac{1}{2}b_{1002}x_1^2y_1^2 - \frac{1}{2}c_{0021}y_1^2y_2^2 - \\ &- \frac{1}{2}a_{1010}x_2^2y_2 - \frac{1}{2}a_{2100}x_1^2x_2^2 + y_2^2 + y_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}a_{2100}x_1^4 - \frac{1}{4}c_{0021}y_2^4 - \frac{1}{4}c_{0021}y_1^4 \end{aligned}$$

Note que $X = X_H := J\nabla H$, em relação à matriz simplética J_0 (pág. xix). Vamos mostrar que as condições (\star) podem ser realizadas por meio de uma mudança de coordenadas. O procedimento é análogo ao desenvolvido da Seção 4.2 (pág. 59). Para tornar os termos de grau 2 compatíveis com o campo Hamiltoniano (isto é, realizar a condição $c_{0200} := \frac{1}{2}a_{1010}$), considere a mudança de coordenadas

$$\Psi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 - \left(c_{0200} + \frac{a_{1010}}{2}\right)x_2^2 \\ y_2 + \left(\frac{a_{1010}}{2} + 2c_{0200}\right)x_1x_2 \end{pmatrix}$$

No sistema de coordenadas definido por Ψ , o sistema (4.19) é Hamiltoniano até o 2-jato. Aplicando uma mudança de coordenadas renormalizante ao campo nestas coordenadas, obtemos o campo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + a_{1010}x_2y_2 + a_{1010}x_1y_1 - b_{1002}x_2y_2^2 - b_{1002}x_2y_1^2 + a_{2100}x_2^3 + a_{2100}x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_{1010}x_2y_1 + a_{1010}x_1y_2 + b_{1002}x_1y_2^2 + b_{1002}x_1y_1^2 - a_{2100}x_1x_2^2 - a_{2100}x_1^3 \\ \dot{y}_1 &= -2y_2 + \frac{a_{1010}}{2}x_2^2 - \frac{a_{1010}}{2}x_1^2 + c_{0021}y_2^3 + c_{0021}y_1^2y_2 - d_{2010}x_2^2y_2 - d_{2010}x_1^2y_2 \\ \dot{y}_2 &= 2y_1 - a_{1010}x_1x_2 - c_{0021}y_1y_2^2 - c_{0021}y_1^3 + d_{2010}x_2^2y_1 + d_{2010}x_1^2y_1, \end{cases} \quad (4.20)$$

onde os coeficientes ξ_{ijkl} ($i + k + j + l = 3$, $\xi \in \{a, b, c, d\}$) não são necessariamente os mesmos da equação (4.19). Para obter a Hamiltoniedade desde campo (isto é, realizar a condição $d_{2010} := b_{1002}$), basta aplicar a este campo uma mudança de coordenadas como em (4.5) (pág. 55), já que os termos de grau 3 coincidem com os da forma normal no caso genérico. Com isso, o campo X é Hamiltoniano até ordem 3.

Os termos não lineares de grau 4, omitidos em (4.20), são

$$\left(\begin{aligned} &a_{3010}x_1^3y_1 + a_{1012}x_2y_2^3 + b_{3001}x_2^3y_2 + a_{1012}x_1y_1^3 + a_{1012}x_1y_1y_2^2 + a_{1012}x_2y_1^2y_2 + \\ &\quad + (2b_{3001} - a_{3010})x_1x_2^2y_1 + (-b_{3001} + 2a_{3010})x_1^2x_2y_2 \\ &a_{1012}x_1y_2^3 - a_{3010}x_2^3y_1 - a_{1012}x_2y_1^3 + a_{1012}x_1y_1^2y_2 + (-b_{3001} + 2a_{3010})x_1x_2^2y_2 + \\ &\quad + (-2b_{3001} + a_{3010})x_1^2x_2y_1 - a_{1012}x_2y_1y_2^2 + b_{3001}x_1^3y_2 \\ &c_{4000}x_1^4 + (-2c_{0220} - 2c_{2002})x_1x_2y_1y_2 - c_{4000}x_2^4 + c_{2002}x_1^2y_2^2 + c_{0220}x_2^2y_1^2 - c_{0220}x_1^2y_1^2 - c_{2002}x_2^2y_2^2 \\ &(-c_{0220} - c_{2002})x_1^2y_1y_2 + 2c_{4000}x_1^3x_2 + 2c_{4000}x_1x_2^3 + (c_{0220} + c_{2002})x_2^2y_1y_2 + 2c_{2002}x_1x_2y_1^2 - 2c_{0220}x_1x_2y_2^2 \end{aligned} \right)$$

Para normalizar estes termos, basta aplicar a mudança de coordenadas

$$\Psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\begin{aligned} &x_1 + (a_{1012} - 2h_{2003})x_2y_1y_2^2 + (a_{1012} - 2h_{2003})x_2y_1^3 + (2h_{0401} + a_{3010})x_2^3y_1 + \\ &\quad + (2h_{2003} - a_{1012})x_1y_2^3 + (2h_{2003} - a_{1012})x_1y_1^2y_2 + (-2a_{3010} + b_{3001})x_1x_2^2y_2 + \\ &\quad + (6h_{0401} + 2b_{3001} - a_{3010})x_1^2x_2y_1 + (-4h_{0401} - b_{3001})x_1^3y_2 \\ &x_2 + (a_{1012} - 2h_{2003})x_2y_2^3 + (a_{1012} - 2h_{2003})x_2y_1^2y_2 + (4h_{0401} + b_{3001})x_2^3y_2 + \\ &\quad + (a_{1012} - 2h_{2003})x_1y_1y_2^2 + (a_{1012} - 2h_{2003})x_1y_1^3 + (6h_{0401} + 2b_{3001} - a_{3010})x_1x_2^2y_1 + \\ &\quad + (-b_{3001} + 2a_{3010})x_1^2x_2y_2 + (2h_{0401} + a_{3010})x_1^3y_1 \\ &y_1 + (-\frac{1}{2}c_{0220} - h_{2003} - \frac{1}{2}c_{2002})x_2^2y_1y_2 + (c_{0220} - h_{2003})x_1x_2y_2^2 + (-3h_{2003} - c_{2002})x_1x_2y_1^2 + \\ &\quad + (-c_{4000} + h_{0401})x_1x_2^3 + (\frac{1}{2}c_{0220} + h_{2003} + \frac{1}{2}c_{2002})x_1^2y_1y_2 + (-c_{4000} + h_{0401})x_1^3x_2 \\ &y_2 + (\frac{1}{2}c_{0220} + h_{2003} + \frac{1}{2}c_{2002})x_2^2y_1^2 + (-\frac{1}{2}c_{4000} + \frac{1}{2}h_{0401})x_2^4 + \\ &\quad + (-c_{0220} - 2h_{2003} - c_{2002})x_1x_2y_1y_2 + (3h_{2003} + c_{2002})x_1^2y_2^2 + \\ &\quad + (\frac{1}{2}c_{2002} + 2h_{2003} - \frac{1}{2}c_{0220})x_1^2y_1^2 + (-\frac{1}{2}h_{0401} + \frac{1}{2}c_{4000})x_1^4 \end{aligned} \right)$$

Para o caso geral, seja

$$\Delta_0 = -x_1^2 y_2 + 2x_1 x_2 y_1 + x_2^2 y_2$$

e defina

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}\Delta_1 + \Delta_2 + \left(\sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij}\Delta_1^i \Delta_2^j \right) + \Delta_0 \left(\sum_{i+j=0}^{\infty} b_{ij}\Delta_1^i \Delta_2^j \right). \quad (4.21)$$

É fácil ver que o campo Hamiltoniano X_H associado não possui exatamente os mesmos monômios que a forma normal do campo X . Portanto, vamos precisar eliminar alguns monômios da forma normal de X para obter a equivalência entre X e X_H . Justamente por isto, não é possível utilizar a técnica da demonstração do Teorema 2-(a), e se faz necessário, a partir do 5-jato, recorrer a reescalamentos do tempo e aos Lemas de Takens, como foi feito em [29]. Isso conclui a demonstração do caso 1 : 2. \square

Um raciocínio análogo ao que fizemos demonstra o Teorema 2-(d). Para tal, basta converter a expressão (3.13) para sua forma real e utilizar uma expressão parecida com (4.21) para o Hamiltoniano. Uma demonstração um pouco diferente para os Teoremas 4.4 e 4.5 utiliza os Lemas de Takens e pode ser encontrada em [29].

Teorema 4.5. *Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^4)$ um campo \mathbb{Z}_2 -reversível $p : q$ -ressonante ($p \neq q$) com aproximação linear $DX(0) = A(p, q, 0)$. Então X é formalmente orbitalmente equivalente a um campo Hamiltoniano.*

Os resultados acima esgotam as possibilidades de Hamiltoniedade no caso $p : q$ -ressonante reversível. Vamos agora estudar como a bireversibilidade afeta a forma normal (4.18), utilizando as relações dadas na Tabela 3.1.

Teorema 4.6. *Suponha que X seja \mathbb{D}_4 -reversível e p, q satisfaçam as relações $\star, \star\star$ e $\star\star\star$ (veja pág. 51). Então X é formalmente conjugado a um campo Hamiltoniano e formalmente orbitalmente equivalente a um sistema Hamiltoniano polinomial.*

Demonstração. Como todas as estrelas são satisfeitas, a parte não-linear da forma normal de X coincide com a do caso genérico. Disto segue o resultado. \square

Corolário 4.7. *Sejam p, q números ímpares com $pq > 1$ e $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ um campo com equilíbrio $p : q$ -ressonante na origem. Se X é \mathbb{D}_4 -reversível, então X é formalmente conjugado a um campo Hamiltoniano e formalmente orbitalmente equivalente a um sistema Hamiltoniano polinomial.*

Como nem tudo são flores, algumas ressonâncias não são cobertas pelo Teorema 4.6. Já para o caso $1 : 2$, a menor ressonância depois do $1 : 1$, o teorema é inconclusivo: apesar de $\star\star$ e $\star\star\star$ serem válidas, \star não é satisfeita. Para estes casos, mesmo considerando o sistema bireversível, o melhor resultado que se pode obter é a equivalência orbital formal dada no Teorema 4.5.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Recapitulando o que foi feito

Nesta dissertação, trabalhamos com campos vetoriais reversíveis em \mathbb{R}^4 , singulares na origem e com aproximação linear

$$DX(0) = A(\alpha, \beta, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \epsilon & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}, \alpha\beta \neq 0, \epsilon \in \{0, 1\}. \quad (5.1)$$

Nossa proposta foi mostrar que tal campo é “equivalente” a um campo Hamiltoniano. A ferramenta escolhida para obter este resultado foi a teoria de formas normais: a partir da expressão da forma normal \tilde{X} de X , encontramos um campo Hamiltoniano X_H tal que $\tilde{X} = X_H$, onde o “=” quer dizer *por meio de reescalamentos do tempo e mudanças de coordenadas formais*.

No Capítulo 3, conforme os valores de α, β e ϵ , calculamos uma forma normal para o campo X . Especificamente, foi preciso separar os casos $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$, $\alpha = \beta$ ($\epsilon = 1$) e $\alpha\beta^{-1} = pq^{-1}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$.

Para calcular as formas normais, utilizamos o software Maple 11 para resolver *certas* equações homológicas e determinar a forma normal até ordens baixas, o que nos permitiu conjecturar uma

expressão geral. Com base nesta conjectura, demonstramos formalmente que a expressão proposta era realmente uma forma normal para o campo X .

Vale ainda ressaltar que para os campos reversíveis, aplicamos o Teorema de Cartan-Montgomery-Bochner e fixamos uma involução para realizar os cálculos da forma normal. Já para campos bireversíveis por \mathbb{D}_4 , a aplicação do Teorema C-M-B não é tão imediata: após a linearização, foi preciso classificar as involuções pertinentes a nosso problema. Mostramos que existem 6 grupos distintos (porém isomorfos a \mathbb{D}_4) de involuções que deveriam ser considerados, e fizemos os cálculos com todos eles.

No Capítulo 4, encontramos os campos Hamiltonianos para cada caso. No caso genérico (isto é, $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$) foi preciso realizar algumas atribuições aos coeficientes da forma normal para obter a igualdade $\tilde{X} = X_H$. Estas atribuições foram realizadas aplicando mudanças de coordenadas à forma normal \tilde{X} . Estas mudanças foram definidas com base em aproximações para os jatos de ordem baixa, calculadas utilizando o software Maple 11. Como no cálculo das formas normais, a aproximação inicial serviu para conjecturarmos a expressão geral e demonstrarmos formalmente o resultado.

No caso de ressonância não semi-simples $1 : 1$ ($\alpha = \beta$ e $\epsilon = 1$), a forma normal calculada já possuía estrutura Hamiltoniana e não foi necessário utilizar outros métodos para obter a hamiltoniedade.

No caso de ressonância $p : q$ ($\alpha\beta^{-1} = pq^{-1}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$), apenas esboçamos a demonstração da Hamiltoniedade para o caso reversível e sugerimos o trabalho [29] para maiores detalhes. No caso bireversível, obtemos resultados um pouco mais fortes (com condições sobre p e q), graças a simplificações adicionais na forma normal.

O presente trabalho foi baseado no preprint “*On the Hamiltonian structure of normal forms for elliptic equilibria of reversible vector fields in \mathbb{R}^4* ”, de Teixeira e outros ([29]), que está em processo de finalização e será submetido para publicação em breve.

No preprint, o problema da Hamiltoniedade foi resolvido utilizando os Lemas de Takens (Lemas 2.15 e 2.16). Além disso, somente o caso reversível foi estudado e, no caso de ressonância $1 : 1$, a Hamiltoniedade foi obtida via equivalência orbital formal enquanto aqui obtemos por conjugação formal.

Além dos resultados inéditos sobre bireversibilidade e do estabelecimento de uma Hamiltoniedade “mais forte” no caso de ressonância $1 : 1$, esta dissertação contribui para a disseminação

de métodos computacionais exatos (algébricos) em sistemas dinâmicos, principalmente para cálculos de formas normais e mudanças de coordenadas formais, onde *quase tudo* se resume a resolver sistemas lineares e reduzir polinômios módulo um ideal, via bases de Groebner.

5.2 Aspectos geométricos

Vimos que campos \mathbb{Z}_2 -reversíveis genéricos ou \mathbb{D}_4 -reversíveis com ressonância $p : q$, p, q números ímpares com $pq > 1$, são formalmente conjugados ao campo Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_2 - x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_1 = -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \\ \dot{y}_2 = \beta y_1 + y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} \Delta_1^i \Delta_2^j \end{cases} \quad (5.2)$$

Já na presença de ressonância $1 : 1$, a conjugação formal é ao campo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + y_1 + x_2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \Delta_3^i \\ \dot{x}_2 = x_1 + y_2 + x_1 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i \Delta_3^i \\ \dot{y}_1 = -y_2 + y_2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \Delta_3^i \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_1 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i \Delta_3^i \end{cases} \quad (5.3)$$

Vamos extrair algumas conclusões sobre aspectos geométricos-qualitativos dos campos (5.2) e (5.3). Estes resultados não foram explorados neste trabalho, mas esperamos seguir nesta linha de pesquisa.

5.2.1 Caso genérico: Coordenadas bipolares e a Teoria KAM

Considerando o sistema de coordenadas bipolares

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad y_1 = \rho \cos(\vartheta), \quad y_2 = \rho \sin(\vartheta), \quad (5.4)$$

podemos reescrever o campo (5.2) como

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = \alpha + \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} r^{2i} \rho^{2j} \\ \dot{\vartheta} = \beta + \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij} r^{2i} \rho^{2j} \end{cases} \quad (5.5)$$

Passando a trabalhar numa vizinhança da origem onde $\alpha + \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij} r^{2i} \rho^{2j} \neq 0$, o sistema (5.5) é orbitalmente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\vartheta} = \beta\alpha^{-1} + F(r, \rho) \end{cases}, \quad (5.6)$$

onde

$$F(r, \rho) = \frac{b_{01} \rho^2}{\alpha} - \frac{a_{01} \beta \rho^2}{\alpha^2} + \frac{b_{10} r^2}{\alpha} - \frac{a_{10} \beta r^2}{\alpha^2} - \frac{a_{01} b_{01} \rho^4}{\alpha^2} + \frac{a_{01}^2 \beta \rho^4}{\alpha^3} - \frac{a_{10} b_{01} r^2 \rho^2}{\alpha^2} + \dots$$

No plano (r, θ) o sistema (5.6) se comporta exatamente igual ao campo

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

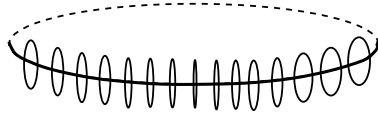


Figura 5.1: Órbitas em $S^1 \times S^1$, um toro invariante.

A mesma análise mostra que numa certa vizinhança da origem do plano (ρ, ϑ) , o sistema (5.6) também se comporta como o sistema acima, isto é, para cada ponto (r_0, θ_0) , há uma órbita periódica no plano (ρ, ϑ) . Portanto cada órbita está contida num conjunto da forma $S^1 \times S^1$, isto é, cada $r = c_0 > 0$, $\rho = d_0 > 0$ é um toro invariante para (5.6). Dizemos mais: como o campo não admite singularidades nestes toros, as órbitas são periódicas ou densas, conforme sejam os valores c_0, d_0 e $\alpha\beta^{-1}$ ([24, pág. 196]). Isso abre caminho para aplicar o Teorema KAM ([43]) a cada k -jato de uma perturbação de (5.5) ($k < \infty$).

5.2.2 Caso 1 : 1: Redução da dimensão

Utilizando as coordenadas bipolares dadas por (5.4), o campo (5.3) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{r} = \rho(\cos(\vartheta)\cos(\theta) + \sin(\vartheta)\sin(\theta)) \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{\rho}{r}(\cos(\theta)\sin(\vartheta) - \sin(\theta)\cos(\vartheta)) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(r\rho)^i(\cos(\theta)\sin(\vartheta) - \sin(\theta)\cos(\vartheta))^i \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\vartheta} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(r\rho)^i(\cos(\theta)\sin(\vartheta) - \sin(\theta)\cos(\vartheta))^i \end{cases} \quad (5.7)$$

Observando que

$$\begin{cases} \cos(\vartheta - \theta) = \cos(\vartheta)\cos(\theta) + \sin(\vartheta)\sin(\theta) \\ \sin(\vartheta - \theta) = \sin(\vartheta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\vartheta), \end{cases}$$

podemos reescrever (5.7) como

$$\begin{cases} \dot{r} = \rho \cos(\vartheta - \theta) \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 + \sigma \sin(\vartheta - \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (r \rho \sin(\vartheta - \theta))^i, \quad \sigma = \frac{\rho}{r} \\ \dot{\vartheta} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (r \rho \sin(\vartheta - \theta))^i, \end{cases} \quad (5.8)$$

Note que todas as órbitas de (5.8) no plano (ρ, ϑ) são periódicas. Seja $\kappa = \vartheta - \theta$. Assim, o sistema (5.8) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{r} = \rho \cos(\kappa) \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\kappa} = -\sigma \sin(\kappa), \quad \sigma = \frac{\rho}{r} \\ \dot{\vartheta} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (r \rho \sin(\kappa))^i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \rho \cos(\kappa) \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\kappa} = -\sigma \sin(\kappa), \quad \sigma = \frac{\rho}{r} \end{cases},$$

que é orbitalmente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{r} = r \rho \cos(\kappa) \\ \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\kappa} = -\rho \sin(\kappa) \end{cases} \quad (5.9)$$

Estudos futuros poderão esclarecer melhor como a dinâmica do campo (5.9) se relaciona com a do campo (5.8).

APÊNDICES

Os algoritmos abaixo foram produzidos para o software Maple 11. Os comandos estarão distinguidos por `>`. Faremos alguns comentários para esclarecer ao leitor cada passo do algoritmo, explicando como adaptá-lo para os diversos casos.

A1. Algoritmo para calcular a forma normal

O algoritmo será apresentado somente para o caso $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{Q}$. Não há maiores dificuldades para adaptá-lo para os outros casos, inclusive para o caso $1 : 1$, onde utilizamos a forma normal de Belitskii.

Inicialmente, limpamos a memória e carregados os pacotes necessários.

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> with(linalg):
> with(VectorCalculus):
```

A dimensão que estamos trabalhando será armazenada na variável n , e a maior ordem de ressonância na variável $kmax$. Calcularemos o $kmax$ -jato da forma normal.

```
> n:=4:kmax:=3:
```

A matriz A armazenará a aproximação linear do campo, com α, β definidos a posteriori.

```
> A:=Matrix([
> [0,-alpha,0,0],
> [alpha,0,0,0],
> [0,0,0,-beta],
> [0,0,beta,0]]);
```

Para realizar cálculos efetivos, devemos avaliar numericamente α e β . Vamos exemplificar com $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{2}$.

```
> alpha:=1; beta:=sqrt(2);
```

Definindo o reversor: Pelo teorema de Montgomery-Bochner, podemos tomar o reversor R como sendo linear e $Fix(R) = 2$. Uma exigência sobre R é que $R(A(x)) = -X(A(x))$, ou seja, $RA + XA = 0$. Com base nisso, vamos determinar todas as possíveis involuções para nosso problema.

```
> R:=Matrix(4,4):
> for i from 1 to 4 do: for j from 1 to 4 do:
> R[i,j]:=-r[i,j];
> od: od:
> R;
```

A matriz que deve se anular:

```
> CondRev:=R.A+A.R;
```

Vamos coletar os coeficientes da matriz acima para gerar um sistema linear.

```
> unassign('i','j'):colecacao:={}:
> unassign('i','j'):for i from 1 to 4 do: for j from 1 to 4 do:
> colecacao:=colecacao union {CondRev[i,j]}:
> od:od:
```

Agora resolvemos o sistema e aplicamos as condições.

```
> assign(solve(colecacao)):
```

Com isso, obtemos a expressão geral para a matriz R :

```
> R;
```

Autovalores da matriz R (verifica se são ± 1).

```
> autovalores:=eigenvalues(R);
```

Note que dois destes autovalores precisam ser iguais a 1. Portanto, uma das condições sobre os $r_{i,j}$'s é que

```
> '(autovalores[j])^2=1 ' '$'j'=1..4;
```

Queremos também que $R^2 = Id$.

```
> R2:=R.R;
```

Note que a condição para que $R^2 = Id$ é equivalente à condição sobre os autovalores. Assim, vamos definir o operador

```
> Rop:=(a,b,c,d)->(-w[2]*a+w[1]*b, w[1]*a+w[2]*b, w[3]*c+w[4]*d, w[4]*c-w[3]*d);
> R:=Transpose(Matrix([[Rop(1,0,0,0)], [Rop(0,1,0,0)], [Rop(0,0,1,0)], [Rop(0,0,0,1)]]));
> Rop(a,b,c,d);
```

e definir os parâmetros, verificando se satisfazem as condições. Variando estes parâmetros, obtemos outras involuções.

```
> w[1]:=0: w[2]:=1: w[3]:=sqrt(2)/2: w[4]:=-sqrt(2)/2:
> print("isso deve ser 1", w[1]^2+w[2]^2);
> print("isso deve ser 1", w[3]^2+w[4]^2);
```

Vamos testar se $RA + AR = 0$:

```
> R.A+A.R;
```

Se tudo estiver certo, a definição do reversor está concluída.

```
> R:=Rop;
```

Definindo a forma normal: Trabalharemos nas variáveis x_1, x_2, y_1, y_2 .

```
> vars:=Vector([x[1], x[2], y[1], y[2]]):
> Ax:=A.vars;
```

O laço abaixo vai usar a equação homológica para determinar a forma normal de Poincaré-Dulac do campo X , com aproximação linear A , para os jatos de ordem até k_{\max} . Primeiro vamos construir a forma normal h em coeficientes genéricos; a seguir, aplicamos as condições da equação homológica; finalmente, aplicamos as condições de reversibilidade.

```
> for k from 2 to kmax do;
>
> unassign('h');
```

Os comandos abaixo definem os polinômios homogêneos $monomios_j$, de grau k , que usaremos para construir a forma normal.

```
> dk:=n*binomial(n+k-1,k):
>
> monomios1:={}:
> for r from 0 to k do;
>   for j from 0 to k do;
>     for l from 0 to k do;
>       for s from 0 to k do;
>         if r+j+l+s=k then monomios1:=monomios1
>           union {a[cat( 'r', 'j', 'l', 's' )]*vars[1]^r*vars[2]^j*vars[3]^l*vars[4]^s};
>         fi;
>       od;
>     od;
>   od;
> od;
>
> monomios2:={}:
> for r from 0 to k do;
>   for j from 0 to k do;
>     for l from 0 to k do;
>       for s from 0 to k do;
>         if r+j+l+s=k then monomios2:=monomios2
>           union {b[cat( 'r', 'j', 'l', 's' )]*vars[1]^r*vars[2]^j*vars[3]^l*vars[4]^s};
>         fi;
>       od;
>     od;
>   od;
> od;
```

```
>
> monomios3:={}:
> for r from 0 to k do;
>   for j from 0 to k do;
>     for l from 0 to k do;
>       for s from 0 to k do;
>         if r+j+l+s=k then monomios3:=monomios3
>           union {c[cat( 'r', 'j', 'l', 's' )]*vars[1]^r*vars[2]^j*vars[3]^l*vars[4]^s};
>         fi;
>       od;
>     od;
>   od;
> od;
>
> monomios4:={}:
> for r from 0 to k do;
>   for j from 0 to k do;
>     for l from 0 to k do;
>       for s from 0 to k do;
>         if r+j+l+s=k then monomios4:=monomios4
>           union {d[cat( 'r', 'j', 'l', 's' )]*vars[1]^r*vars[2]^j*vars[3]^l*vars[4]^s};
>         fi;
>       od;
>     od;
>   od;
> od;
>
> unassign('i','j','pc'):
>
> pc[1]:=0:for i from 1 to dk/n do;
>   pc[1]:=pc[1]+monomios1[i];
> od;
>
> pc[2]:=0:for i from 1 to dk/n do;
>   pc[2]:=pc[2]+monomios2[i];
> od;
>
> pc[3]:=0:for i from 1 to dk/n do;
>   pc[3]:=pc[3]+monomios3[i];
```

```

> od;
>
> pc[4]:=0:for i from 1 to dk/n do;
>   pc[4]:=pc[4]+monomios4[i];
> od:
>
> i:=1:j:=1:
> h:=Vector([pc[1], pc[2], pc[3], pc[4]]);

```

Os próximos comandos definem a equação homológica. Como h é um polinômio, para encontrar condições sobre os coeficientes de h afim de que $Ah(x) - Dh(x)Ax = 0$, é suficiente resolver um sistema linear. É isto que fazem os comandos “collect”, coletam os coeficientes da equação homológica. A seguir, o comando “solve” resolve o sistema linear homogêneo associado.

```

> dh:=Jacobian(h, [x[1], x[2], y[1], y[2]]);
>
> homologica:=A.h-dh.A.vars:
>
> condc1:={coeffs(collect(expand(homologica[1]), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>   ['vars[i]','$i'=1..n])}:
> condc2:={coeffs(collect(expand(homologica[2]), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>   ['vars[i]','$i'=1..n])}:
> condc3:={coeffs(collect(expand(homologica[3]), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>   ['vars[i]','$i'=1..n])}:
> condc4:={coeffs(collect(expand(homologica[4]), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>   ['vars[i]','$i'=1..n])}:
>
> sols := solve( condc1 union condc2 union condc3 union condc4):
> assign(sols):
>
> h:=h+Ax;
>
> hh := unapply(h,'vars[i]','$i'=1..n):

```

Os próximos comandos definem as condições para que a forma normal seja reversível. Os comandos utilizados para encontrar estas condições são semelhantes aos usados para determinar a forma normal, com a diferença de que agora queremos resolver a equação $Rh(x) = -h(R(x))$.

```

> umlado:=hh(R(x[1],x[2],y[1],y[2])):
> outrolado:=R(hh(x[1],x[2],y[1],y[2])[1],
>             hh(x[1],x[2],y[1],y[2])[2],
>             hh(x[1],x[2],y[1],y[2])[3],
>             hh(x[1],x[2],y[1],y[2])[4]):
> unassign('j'):
>
> eqn11:=umlado[1]+outrolado[1]:
> eqn12:=umlado[2]+outrolado[2]:
> eqn13:=umlado[3]+outrolado[3]:
> eqn14:=umlado[4]+outrolado[4]:
>
> condc11:={coeffs(collect(expand(eqn11), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>                  ['vars[i]','$i'=1..n])}:
> condc12:={coeffs(collect(expand(eqn12), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>                  ['vars[i]','$i'=1..n])}:
> condc13:={coeffs(collect(expand(eqn13), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>                  ['vars[i]','$i'=1..n])}:
> condc14:={coeffs(collect(expand(eqn14), ['vars[i]','$i'=1..n], 'distributed'),
>                  ['vars[i]','$i'=1..n])}:
>
> sols:=solve(condc11 union condc12 union condc13 union condc14):
> assign(sols):
>
> hok[k]:=h:
>
> unassign('h'):
> od:

```

Ao longo do algoritmo, a parte linear é adicionada algumas vezes. O procedimento abaixo vai desfazer algumas destas somas, para colocar o campo na forma correta, e retornar a forma normal.

```

> unassign('i','j'):
> hsoma1 := sort(sum(hok[j][1], j = 2 .. kmax)-(kmax-2)*Ax[1],
>               ['$('vars[i]', 'i' = 1 .. n)], tdeg, ascending):
> hsoma2 := sort(sum(hok[j][2], j = 2 .. kmax)-(kmax-2)*Ax[2],
>               ['$('vars[i]', 'i' = 1 .. n)], tdeg, ascending):
> hsoma3 := sort(sum(hok[j][3], j = 2 .. kmax)-(kmax-2)*Ax[3],
>               ['$('vars[i]', 'i' = 1 .. n)], tdeg, ascending):

```

```

> hsoma4 := sort(sum(hok[j][4], j = 2 .. kmax)-(kmax-2)*Ax[4],
>               ['$('vars[i]', 'i' = 1 .. n)], tdeg, ascending):
>
> hsoma := Vector([hsoma1, hsoma2, hsoma3, hsoma4]):
> hh := unapply(hsoma, 'vars[i]','$i'=1 .. n):
> hsoma1;hsoma2;hsoma3;hsoma4;

```

A2. Algoritmo para calcular condições necessárias de Hamiltoniedade

O que vamos fazer agora é a parte principal do algoritmo. A idéia é simples: consideramos uma função H (polinomial de grau $kmax + 1$) e verificamos se há condições para que a forma normal que obtemos antes possa ser escrita como $J\nabla(H)$, onde J é alguma matriz simplética. Primeiro definiremos a matriz simplética que vamos usar.

A matriz Ω (veja Corolário 1.16, pág. 11)...

```

> Omega:=Matrix([[0,0,1,0],[0,0,0,1],[-1,0,0,0],[0,-1,0,0]]):

```

... e a matriz simplética que vamos usar:

```

> SimpleticaCasoGenerico:=Matrix([
> [0,-1,0,0],
> [1,0,0,0],
> [0,0,0,-1],
> [0,0,1,0]]):

```

Seria essa matriz simplética? Se a conta abaixo for zero, sim.

```

> Transpose(SimpleticaCasoGenerico).Omega.SimpleticaCasoGenerico-Omega;

```

Definida a matriz simplética, vamos definir a função H , em termos gerais.

```

> coeficientesH:={}:
> unassign('k','r','j','l','s'):
> coletados:={}:
> kmin2:=2: kmax2:=kmax+1:

```



```

> for k from kmin2 to kmax2 do;
> for r from 0 to k do;
> for j from 0 to k do;
> for l from 0 to k do;
> for s from 0 to k do;
> if r+j+l+s=k then
>   coletados:=coletados union
>     {h[cat( 'r', 'j', 'l', 's' )]*vars[1]^r*vars[2]^j*vars[3]^l*vars[4]^s};
>   coeficientesH:=coeficientesH union {h[cat( 'r', 'j', 'l', 's' )]};
> fi;
> od;
> od;
> od;
> od;
> od;
> od;
>
> DK:=(n,k)->n*binomial(n+k-1,k):
> unassign('j'):
> SizeColetados:=sum(DK(n,j)/n, j=kmin2..kmax2):
> unassign('j'):
>
> H:=0: for j from 1 to SizeColetados do;
> H:=H+coletados[j];
> od:

```

Vamos definir como H_j a derivada parcial em relação a j -ésima variável da função H .

```

> H1:=diff(H, vars[1]):
> H2:=diff(H, vars[2]):
> H3:=diff(H, vars[3]):
> H4:=diff(H, vars[4]):

```

A variável *campoH* vai ordenar o campo X_H , considerando a forma simplética.

```

> campoH:=SimpleticaCasoGenerico.Vector([H1,H2,H3,H4]):

```

Agora vamos determinar quando ocorre $X = X_H$ até o $kmax$ -jato.

```

> condcHamil1:={coeffs(collect(campoH[1]-hsoma[1], ['vars[i]','$i'=1..n]),

```

```
>      'distributed'), ['vars[i]','$i'=1..n]}}:
> condcHamil2:={coeffs(collect(campoH[2]-hsoma[2], ['vars[i]','$i'=1..n],
>      'distributed'), ['vars[i]','$i'=1..n]}}:
> condcHamil3:={coeffs(collect(campoH[3]-hsoma[3], ['vars[i]','$i'=1..n],
>      'distributed'), ['vars[i]','$i'=1..n]}}:
> condcHamil4:={coeffs(collect(campoH[4]-hsoma[4], ['vars[i]','$i'=1..n],
>      'distributed'), ['vars[i]','$i'=1..n]}}:
>
> sols := solve( condcHamil1 union condcHamil4 union condcHamil2 union condcHamil3);
> assign(sols):
```

A resposta final é o campo original, o campo Hamiltoniano (que são iguais), e a função Hamiltoniana.

```
> hsoma[1];hsoma[2];hsoma[3];hsoma[4];
> campoH[1];campoH[2];campoH[3];campoH[4];
> H;
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin-Cummings, London, 1978.
- [2] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1990.
- [3] V. I. Arnold, *Dynamical Systems I*, Springer-Verlag New York, 1995.
- [4] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 250, Springer, 1996.
- [5] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag 1989.
- [6] G. Belitskii, *Smooth Equivalence of Germs of C^∞ Vector Fields with One Zero or a Pair of Pure Imaginary Eigenvalues*, *Funct. Anal. Appl.* 20, no. 4, 1986.
- [7] J. J. Binney, *A Short Course in Classical Mechanics*, Notas de aula. [online] Disponível na Internet via WWW. URL: www-thphys.physics.ox.ac.uk/user/JamesBinney/cmech.pdf. Arquivo capturado em 10 de dezembro de 2007.
- [8] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom*, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 18, No. 2. (Apr., 1917), pp. 199-300.
- [9] G. D. Birkhoff, *The restricted problem of three bodies*, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 39, 265-334.

- [10] S. Bochner, *Compact Groups of Differentiable Transformation*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 46, No. 3. (Jul., 1945), pp. 372-381.
- [11] S. Bochner, D. Montgomery, *Locally Compact Groups of Differentiable Transformations*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 47, No. 4. (Oct., 1946), pp. 639-653.
- [12] H. W. Broer, *KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper*, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (2004), 507-521.
- [13] A. D. Bruno, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Springer-Verlag, 1979.
- [14] H. Bursztyn, L. Macarini, *Introdução à Geometria Simplética*, Notas da XIV Escola de Geometria Diferencial, UFBA, 2006.
- [15] C. A. Buzzi, J. S. W. Lamb, *Reversible Hamiltonian Liapunov Center Theorem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series B), Volume 5, Number 1, February 2005.
- [16] C. A. Buzzi, M. A. Teixeira, *Time-reversible Hamiltonian Vector Fields with Symplectic Symmetries*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 16, No. 2, April 2004.
- [17] H. Cartan, *Sur les fonctions de deux variables complexes. Les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D* , Bull. de la S. M. F., tome 58, 1930.
- [18] A. R. Champneys, *Homoclinic Orbits in Reversible Systems and their Applications in Mechanics, Fluids and Optics*, Physica D, Vol. 112, (158 .. 186), 1998.
- [19] K. Chen, *Equivalence and Decomposition of Vector Fields about an Elementary Singular Point*, Amer. I. Math. 85, 1963.
- [20] S. N. Chow, C. Li, D. Wang, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, 1994.
- [21] R. Devaney, *Reversible Diffeomorphisms and Flows*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 218. (Apr., 1976), pp. 89-113.
- [22] J. Draisma, *Lie Algebra of Vector Fields*, PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.

- [23] G. Gaeta, *Normal Forms of Reversible Dynamical Systems*, International Journal of Theoretical Physics, Volume 33-9, 1994.
- [24] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1964.
- [25] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics: a series of monographs and textbooks, Academic Press 1974.
- [26] B. A. Kupershmidt, A. M. Vinogradov, *The structure of Hamiltonian mechanics*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 60 (1981), Cambridge Univ. Press, London.
- [27] J. S. W. Lamb, *Reversing Symmetries in Dynamical Systems*, PhD Thesis, University of Amsterdam, 1994.
- [28] J. S. W. Lamb, J. A. G. Roberts, *Time-Reversal Symmetry in Dynamical Systems: A Survey*, Physica D, 112, 1998.
- [29] J. S. W. Lamb, M. A. Teixeira, J. Yang, M. F. S. Lima, *On the Hamiltonian structure of normal forms for elliptic equilibria of reversible vector fields in \mathbb{R}^4* , preprint, 2006.
- [30] S. M. LaValle, *Planning Algorithms*, Cambridge University Press, 2006.
- [31] M. F. S. Lima, *Famílias de Conjuntos Minimais em Sistemas Reversíveis*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2006.
- [32] J. Llibre, Luci A. F. Roberto, *Pseudo Periodic Orbits of the Planar Collision Restricted 3-body Problem in Rotating Coordinates*, submetido, Nonlinear Analysis, 2007.
- [33] C. S. Marc, *Aristotle's Metaphysics*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), [online] Disponível na Internet via WWW. URL: plato.stanford.edu/archives/win2003/entries/aristotle-metaphysics/. Arquivo capturado em 20 de fevereiro de 2008.
- [34] J. C. van der Meer, J. A. Sanders and A. Vanderbauwhede, *Hamiltonian Structure of the Reversible Nonsemisimple 1:1 Resonance*, Dynamics, Bifurcation and Symmetry: New Trends and New Tools, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [35] W. de Melo, J. Palis, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, IMPA, 1978.

- [36] G. A. S. Miranda, *Órbitas Homoclínicas em Sistemas Reversíveis*, Tese de Mestrado, Unicamp, 2007.
- [37] P. Moireau, *Théorie de K.A.M.*, preprint, 2002.
- [38] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological Transformations Groups*, Interscience, 1995.
- [39] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems, with special emphasis on celestial mechanics*, Annals of Mathematics studies, vol. 77. Princeton NJ: Princeton University Press, 1973.
- [40] J. Murdock, *Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, 2002.
- [41] K. Oliveira, M. Viana, *Introdução à Teoria Ergódica*, Notas do Workshop de Geometria de Subvariedades e Dinâmica Caótica, UFAL, 2004.
- [42] H. Poincaré, *PhD Thesis*, 1928.
- [43] J. Pöschel, *A Lecture on the Classical KAM Theorem*, Proc. Symp. Pure Math. 69, 2001.
- [44] R. Rand, D. Armbruster, *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Springer 1987.
- [45] Luci A. F. Roberto, *Órbitas Periódicas em Sistemas Mecânicos*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2008.
- [46] C. Rousseau, *Normal Forms, Bifurcations and Finiteness Properties of Vector Fields*, preprint, 2002.
- [47] L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, 1999.
- [48] J. A. Sanders, F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences 59, Springer-Verlag, 1985.
- [49] M. B. Sevryuk, *Reversible systems*, Lecture Notes in Math. 1211 (Springer, Berlin, 1986).
- [50] C. W. Shi, *Bifurcations of Symmetric Periodic Orbits near Equilibrium in Reversible Systems*, Int. J. Bifurcation and Chaos. 7, (1997) 569-584.

- [51] G. F. da Silva, *Formas Normais de Sistemas Dinâmicos Reversíveis*, Tese de Mestrado, Unicamp, 2002.
- [52] J. M. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [53] S. Sternberg, *Local contractions and a theorem of Poincaré*, American Journal of Mathematics, Vol. 79, (1957), pág. 809-824.
- [54] S. Sternberg, *On the Structure of Local Homeomorphisms of Euclidean n -Space II*, American Journal of Mathematics, Vol. 80, No. 3. (Jul., 1958), pp. 623-631.
- [55] I. Stewart, *The Lorenz Attractor Exists*, Nature 406, 948-949, 2000.
- [56] E. Stróżyńska, H. Zoladek, *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity*, Journal of Differential Equations 179, Issue 2, March 2002, Pages 479-537.
- [57] F. Takens, *Normal forms for certain singularities of vectorfields*, Annales de l'institut Fourier, tome 23, n. 2, 1973, p. 163-195.
- [58] M. A. Teixeira, J. Yang, *Reversible Vector Fields with 1:1 Resonance*, preprint, 2004.
- [59] M. A. Teixeira, J. Yang, *Normal Forms of Reversible Vector Fields with 1:1 Resonance and Applications*, preprint, 2004.
- [60] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Texts in Applied Mathematics 2, Springer, 2003.
- [61] M. Viana, *What's New on Lorenz Strange Attractors*, Math. Intell. 22, 6-19.
- [62] J. Yang, *Polynomial Normal Forms of Vector Fields*, PhD Thesis, Israel Institute of Technology, 1997.