

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA - IMECC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**ASPECTOS DA GEOMETRIA COMPLEXA
DAS VARIEDADES BANDEIRA**

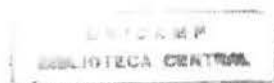
Tese de Doutorado

MARLIO PAREDES GUTIERREZ

Orientador: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

CAMPINAS

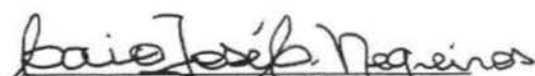
Fevereiro de 2000



Aspectos da Geometria Complexa das Variedades Bandeira

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e defendida
por Marlio Paredes Gutierrez e aprovada
pela comissão julgadora

Campinas, 17 de Fevereiro de 2000


Prof. Dr. Caio José C. Negreiros
(Orientador)

Banca examinadora

1. Prof. Dr. Caio José C. Negreiros (Orientador)
2. Prof. Dr. Celso José da Costa
3. Profa. Dra. Susana Candida Fornari
4. Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva
5. Prof. Dr. Valery Manerich

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica,
UNICAMP, como requisito parcial para a
obtenção do título de Doutor em Matemática

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Paredes Gutierrez, Marlio

P214a Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira / Marlio
Paredes Gutierrez-- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

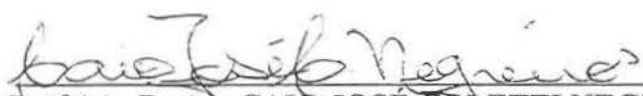
Orientador : Caio José Colletti Negreiros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Variedades complexas. 3. Torneios. I.
Negreiros, Caio José Colletti. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Tese de Doutorado defendida em 17 de fevereiro de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS



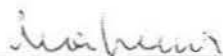
Prof (a). Dr (a). CELSO JOSÉ DA COSTA



Prof (a). Dr (a). SUSANA CANDIDO FORNARI



Prof (a). Dr (a). ANTONIO ROBERTO DA SILVA



Prof (a). Dr (a). VALERY MARENICH

Resumo

Novas famílias de métricas invariantes (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$, diferentes das de Kähler e das parabólicas, são estudadas. Mais precisamente, para cada $n \geq 5$ são caracterizadas $n - 3$ famílias n -dimensionais distintas de métricas invariantes (1,2)-simpléticas. Cada uma destas famílias corresponde a uma classe de estruturas quase-complexas invariantes distintas sobre $F(n)$.

Os casos das variedades $F(5)$, $F(6)$ e $F(7)$ são estudados completamente. Obtem-se as seguintes famílias de métricas (1,2)-simpléticas distintas das de Kähler e das parabólicas: Em $F(5)$, 2 famílias 5-paramétricas; em $F(6)$, 4 famílias 6-paramétricas, das quais duas generalizam as mencionadas para $F(5)$ e em $F(7)$, 8 famílias 7-paramétricas, das quais 4 generalizam as 4 famílias mencionadas para $F(6)$.

Estas métricas são usadas para produzir novos exemplos de aplicações harmônicas $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$, aplicando um conhecido Teorema de Lichnerowicz.

Finalmente, usando resultados de Negreiros estudamos a estabilidade destas aplicações harmônicas.

Abstract

New families of (1,2)-symplectic invariant metrics on $F(n)$, different to the Kähler and parabolic, are presented. Exactly, we characterize $n - 3$ different n -dimensional families of (1,2)-symplectic invariant metrics, for each $n \geq 5$. Each of them corresponds to a different class of invariant almost-complex structure on $F(n)$.

The $F(5)$, $F(6)$ and $F(7)$ cases are completely studied. We obtain the following families of (1,2)-symplectic invariant metrics, different to the Kähler and parabolic: On $F(5)$, two 5-parametric families; on $F(6)$, four 6-parametric families, two of them generalizing the two families of $F(5)$ case and, on $F(7)$ we obtain eight 7-parametric families, four of them generalizing the four ones of the $F(6)$ case.

These metrics are used to produce new examples of harmonic maps $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$, applying a known Theorem due to Lichnerowicz.

Finally, using Negreiros results, the stability of this harmonic maps are studied.

À minha esposa Carmen Elisa,
à minha filha Luana Maria,
e ao bebê que está vindo.

Agradecimentos

- Ao Professor Caio José Colletti Negreiros, pela acertada orientação e pela amizade que me ofereceu.
- À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.
- Ao Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología Francisco José de Caldas - COLCIENCIAS.
- Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC - UNICAMP.
- À Universidad Industrial de Santander - UIS.
- Ao Professor Xiaohuan Mo da Universidade de Pekin, pelas enriquecedoras discussões e valiosas sugestões.
- Ao Professor José Fernando Escobar da Universidade de Cornell pelo seu decisivo apoio e seus acertados conselhos.
- Ao colega e amigo Ryuchi Fukuoka pela ajuda com o português.
- Ao pessoal do predinho, que enriqueceu e alegrou a minha passagem pelo IMECC.
- Aos meus amigos da Universidad del Valle, Gonzalo Garcia e José Raul Quintero pela força.

- Aos meus amigos da Universidad Industrial de Santander, Julio Cesar Carrillo, Gabriel Yañez, Guillermo Gonzalez e Alberto Higuera pela ajuda oferecida durante todos estes anos.
- Ao amigo José Emilio Maiorino pela ajuda e as dicas de \LaTeX durante a escritura da tese.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 As Variedades Bandeira $F(n)$	6
1.2 Torneios e Estruturas Quase-Complexas	7
1.3 As Formas de Maurer-Cartan de $U(n)$	12
1.4 Métricas Invariantes à Esquerda	14
1.5 Aplicações Harmônicas	21
2 Estruturas Parabólicas sobre $F(n)$	27
2.1 Estruturas Parabólicas	27
2.2 Observações	32
3 Métricas (1,2)-Simpléticas sobre $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$ e $F(7)$	39
3.1 O caso $F(3)$	39
3.2 O caso $F(4)$	41
3.3 O caso $F(5)$	42
3.4 O caso $F(6)$	47
3.5 O caso $F(7)$	52

4	Métricas (1,2)-Simpléticas sobre $F(n)$	78
4.1	Primeira Família de Métricas	79
4.2	Segunda Família de Métricas	84
4.3	Terceira Família de Métricas	89
4.4	Quarta Família de Métricas	94
4.5	Uma Família mais Geral	98
5	Aplicações Harmônicas e Estabilidade	108
5.1	Aplicações Harmônicas	108
5.2	Estabilidade	109
	Conclusões e Problemas	115
	Bibliografia	117

Introdução

Sejam (M, g) e (N, h) duas variedades Riemannianas. Uma aplicação $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é harmônica se ela é um ponto crítico do funcional energia

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 v_g, \quad (0.1)$$

onde $|d\phi|$ é a norma de Hilbert-Schmidt da aplicação linear $d\phi$. Isto é, ϕ é harmônica se e somente se satisfaz as equações de Euler-Lagrange

$$\delta E(\phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) = 0, \quad (0.2)$$

para toda variação (ϕ_t) , $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, de ϕ . O livro de Eells e Lemaire [EL] é uma excelente referencia para estudar a teoria geral de aplicações harmônicas. As fórmulas 0.2 são equações parciais de segunda ordem e quando procuramos por aplicações harmônicas estamos procurando soluções destas equações.

Eells e Sampson provaram, em [ES], o seguinte resultado

Teorema 1. *Se $\phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação holomorfa e as variedades M e N são de Kähler então ϕ é harmônica.*

Este Teorema foi mais tarde generalizado por Lichnerowicz:

Teorema 2. (ver [L] ou [Sa]) Sejam (M, g, J_1) e (N, h, J_2) variedades quase-Hermitianas com M co-simplética e N $(1,2)$ -simplética. Se $\phi : (M, J_1) \rightarrow (N, J_2)$ é uma aplicação holomorfa então ϕ é harmônica.

Lembremos que para ϕ ser holomorfa, ela deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann e estas são equações de primeira ordem. Assim, o Teorema 2 nos dá uma importante redução na ordem das equações 0.2.

Estamos particularmente interessados em estudar o caso no qual a variedade M é uma superfície de Riemann fechada e a variedade N é uma variedade bandeira maximal $F(n) = \frac{U(n)}{U(1) \times \dots \times U(1)}$. Neste caso a condição de M ser co-simplética é imediatamente verificada pois toda superfície de Riemann fechada é uma variedade de Kähler. Além disso, o funcional energia é invariante por mudanças conformes da métrica sobre a superfície M . Então, devido ao Teorema 2 temos interesse em estudar as métricas $(1,2)$ -simpléticas sobre $F(n)$.

Outra razão para estudar aplicações harmônicas é que quando M é uma superfície de Riemann com alguma estrutura conforme, uma imersão é harmônica se e somente se ela é mínima (ver [EL]).

O estudo das métricas invariantes sobre $F(n)$ envolve as estruturas quase-complexas invariantes. Borel e Hirzebruch [BH] provaram que existem $2^{\binom{n}{2}}$ estruturas quase-complexas $U(n)$ -invariantes sobre $F(n)$ e este também é o número de torneios com n vértices. Um torneio é um digrafo no qual cada par de vértices estão unidos por exatamente um arco orientado. Existe uma identificação natural entre estruturas quase-complexas invariantes sobre $F(n)$ e torneios com n vértices (ver seção 1.2).

Notamos que os torneios podem ser classificados em classes de isomorfis-

mos, sendo que uma destas corresponde às estruturas integráveis e as outras classes correspondem à estruturas não integráveis. Burstall e Salamon [BS] têm explorado esta relação entre estruturas quase-complexas e torneios, e eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 3. *Uma estrutura quase-complexa invariante J sobre $F(n)$ é integrável se e somente se o torneio associado é isomorfo ao torneio canônico. (ver seção 1.2)*

Borel em [Bo] mostrou que existe uma família de dimensão $n - 1$ de métricas de Kähler invariantes sobre $F(n)$ para cada estrutura quase-complexa invariante integrável. Eells e Salamon [ESa] mostraram que as estruturas quase-complexas parabólicas sobre $F(n)$ admitem métrica $(1,2)$ -simplética. Em trabalho recente, Mo e Negreiros [MN2] mostraram explicitamente a existência de uma família n -dimensional de métricas $(1,2)$ -simpléticas invariantes para cada estrutura quase-complexa parabólica invariante e nesse trabalho eles usam fortemente a relação entre torneios e estruturas quase-complexas invariantes (ver Teorema 2.1.2).

Nesta tese estudamos novas famílias n -paramétricas de métricas $(1,2)$ -simpléticas invariantes sobre $F(n)$ diferentes das de Kähler e das parabólicas. Mais especificamente, para cada $n \geq 5$ são caracterizadas $n - 3$ famílias n -paramétricas distintas de métricas $(1,2)$ -simpléticas. Cada uma destas famílias corresponde a uma classe de torneios ou equivalentemente de estruturas quase-complexas não integráveis (Capítulo 4).

Os casos das variedades $F(5)$, $F(6)$ e $F(7)$ são estudados completamente (Capítulo 3). Obtêm-se as seguintes famílias de métricas $(1,2)$ -simpléticas distintas das de Kähler e das parabólicas:

- Em $F(5)$, 2 famílias 5-paramétricas.
- Em $F(6)$, 4 famílias 6-paramétricas, das quais duas generalizam as mencionadas para $F(5)$.
- Em $F(7)$, 8 famílias 7-paramétricas, das quais 4 generalizam as 4 famílias mencionadas para $F(6)$.

Na obtenção destes resultados, a correspondência natural entre torneios e estruturas quase-complexas invariantes desempenha um papel importante.

Estes resultados sugerem duas interessantes conjecturas:

Conjectura 1. *As famílias de métricas $(1,2)$ -simpléticas sobre $F(n)$ diferentes das de Kähler são n -paramétricas.*

Conjectura 2. *Considere a variedade bandeira $(F(n), ds_A^2, J)$, com $n \geq 5$. A métrica de Borel ds_A^2 é $(1,2)$ -simplética se e somente se todo subtorneio de ordem 4 do torneio $\mathcal{T}(J)$, associado a estrutura quase-complexa J , é irreduzível ou é transitivo (Figura 0.1).*

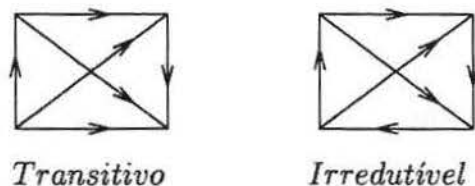


Figura 0.1: 4-torneio transitivo e 4-torneio irreduzível

As métricas $(1,2)$ -simpléticas obtidas são usadas para produzir novos exemplos de aplicações harmônicas através do Teorema 2. Como para isto precisamos conhecer exemplos de aplicações holomorfas $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$, usamos

as aplicações de Eells-Wood introduzidas por Negreiros em [N2], as quais por sua vez foram baseadas no estudo das aplicações de uma superfície M^2 para o espaço projetivo \mathbb{CP}^{n-1} contruídas por Eells e Wood no importante trabalho [EW]. Além disso, são apresentados vários resultados de estabilidade destas aplicações harmônicas usando os resultados obtidos por Negreiros em [N3].

A tese está dividida em 5 capítulos:

- O Capítulo 1 contém os preliminares necessários para desenvolver os outros capítulos: a geometria das variedades bandeira, torneios, estruturas quase-complexas invariantes e aplicações harmônicas.
- O Capítulo 2 contém um resultado de caracterização das estruturas quase-complexas parabólicas invariantes.
- O Capítulo 3 contém os resultados sobre as variedades bandeira $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$ e $F(7)$.
- O Capítulo 4 contém os resultados gerais para $F(n)$.
- O Capítulo 5 contém os resultados sobre aplicações harmônicas.
- Finalmente o Capítulo 6 contém as conclusões e alguns problemas abertos que surgiram como consequência da tese.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 As Variedades Bandeira $F(n)$

Neste capítulo estudaremos as variedades bandeira maximais

$$F(n) = \{(L_1, \dots, L_n) : L_i \text{ é subespaço de } \mathbb{C}^n, \dim_{\mathbb{C}} L_i = 1, L_i \perp L_j\}.$$

O grupo unitario $U(n) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\}$ age transitivamente sobre $F(n)$. Usando esta ação obtemos uma descrição algébrica para $F(n)$:

$$F(n) = \frac{U(n)}{T},$$

onde $T = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n\text{-vezes}}$ é um toro máximo em $U(n)$. Em todo este trabalho chamaremos estas variedades de variedades bandeira.

Seja $\mathfrak{p} = T(F(n))_{(T)}$ o espaço tangente a $F(n)$ em (T) . Sabemos que a álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$, do grupo de Lie $U(n)$, é tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\} \\ &= \mathfrak{p} \oplus \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{u}(1)}_{n\text{-vezes}}, \end{aligned}$$

(ver [ChE] para maiores detalhes). Em todo este trabalho, quando falarmos de $F(n)$, entenderemos $n \geq 3$.

Definição 1.1.1. Uma estrutura quase-complexa invariante sobre $F(n)$ é uma aplicação linear $J : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ tal que $J^2 = -I$.

Borel e Hirzebruch [BH] provaram que existem $2^{\binom{n}{2}}$ estruturas quase-complexas $U(n)$ -invariantes sobre $F(n)$. $2^{\binom{n}{2}}$ também é o número de torneios com n jogadores e existe uma correspondência natural entre estruturas quase-complexas invariantes e torneios, a qual é muito útil no estudo da geometria das variedades bandeira. Vejamos então o que é um torneio e qual é essa correspondência natural com estruturas quase-complexas invariantes.

1.2 Torneios e Estruturas Quase-Complexas

Uma boa referência para estudar torneios é o livro de Moon [M].

Definição 1.2.1. Um torneio ou n -torneio \mathcal{T} , consiste de um conjunto finito p_1, p_2, \dots, p_n de vértices ou jogadores distintos tal que cada par de vértices estão unidos por exatamente um arco $p_i \rightarrow p_j$ ou $p_j \rightarrow p_i$. Se $p_i \rightarrow p_j$ dizemos que p_i ganha de p_j .

Definição 1.2.2. Sejam \mathcal{T}_1 um torneio com n jogadores $\{1, \dots, n\}$ e \mathcal{T}_2 um torneio com m jogadores $\{1, \dots, m\}$. Um homomorfismo entre \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 é uma aplicação $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{T}_1} t \implies \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \phi(t) \text{ ou } \phi(s) = \phi(t).$$

Quando ϕ é bijetiva dizemos que \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 são isomorfos.

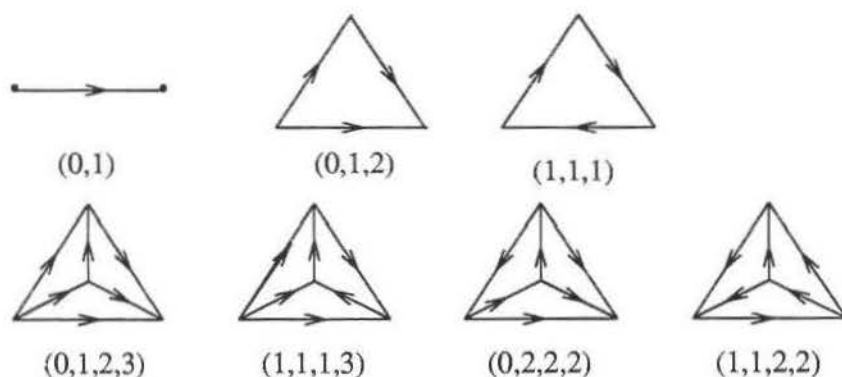


Figura 1.1: Classes de isomorfismos de torneios para $n = 2, 3, 4$.

Cada torneio determina um vetor placar

$$(s_1, \dots, s_n) : 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n; \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}$$

cujas entradas são o número de jogos ganhos por cada jogador. Claramente torneios isomorfos têm o mesmo vetor placar. O conjunto dos torneios pode ser particionado em classes de isomorfismos. A Figura 1.1 contém as classes de isomorfismos de torneios para $n = 2, 3, 4$ junto com o vetor placar correspondente. Para $n = 5$ existem torneios não isomorfos com o mesmo vetor placar (ver Figuras 2.2 e 2.3).

Definição 1.2.3. O torneio com n jogadores $\{1, \dots, n\}$, definido por

$$i \rightarrow j \iff i < j,$$

é chamado de torneio canônico. O seu vetor placar é: $(0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Dada uma estrutura quase-complexa invariante J , podemos fazer-lhe corresponder naturalmente um torneio $\mathcal{T}(J)$ com n jogadores $\{1, \dots, n\}$ da

seguinte maneira: Se $J(a_{ij}) = (a'_{ij})$ então $\mathcal{T}(J)$ é tal que para $i < j$

$$i \rightarrow j \quad \Longleftrightarrow \quad a'_{ij} = \sqrt{-1}a_{ij}$$

ou

$$i \leftarrow j \quad \Longleftrightarrow \quad a'_{ij} = -\sqrt{-1}a_{ij}.$$

(ver [MN3]).

Exemplo 1.1: Consideremos

$$F(3) = \frac{U(3)}{U(1) \times U(1) \times U(1)} = \frac{U(3)}{T}.$$

Neste caso,

$$\mathfrak{p} = T(F(3))_{(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tomemos a seguinte estrutura quase-complexa sobre $F(3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & (-\sqrt{-1})a & (-\sqrt{-1})b \\ (-\sqrt{-1})\bar{a} & 0 & (\sqrt{-1})c \\ (-\sqrt{-1})\bar{b} & (\sqrt{-1})\bar{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como o elemento $(1,2)$ da matriz foi multiplicado por $-\sqrt{-1}$, o torneio correspondente tem uma seta indo de 2 para 1; o mesmo acontece com o elemento $(1,3)$ e o torneio tem uma seta indo de 3 para 1. O elemento $(2,3)$ foi multiplicado por $\sqrt{-1}$, então o torneio tem uma seta indo de 2 para 3. O torneio da Figura 1.2 é o torneio associado a esta estrutura quase-complexa.

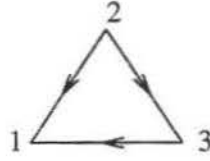


Figura 1.2: Torneio do Exemplo 1.1

Definição 1.2.4. Uma estrutura quase-complexa J sobre $F(n)$ é dita integrável se a variedade $(F(n), J)$ é uma variedade complexa, isto é, admite sistemas de coordenadas locais complexas com mudanças de coordenadas holomorfas. Uma condição equivalente é a famosa equação de Newlander-Nirenberg [NN]:

$$[JX, JY] = J[X, JY] + J[JX, Y] + [X, Y],$$

para todo X, Y campos vetoriais.

O seguinte resultado é devido a Burstall e Salamon [BS]

Teorema 1.2.1. *Uma estrutura quase-complexa J é integrável se e somente se $\mathcal{T}(J)$ é isomorfo ao torneio canônico.*

Moon([M]) provou que um torneio é isomorfo ao torneio canônico se e somente se ele não contém 3-ciclos, isto é, se não contém torneios como aquele na Figura 1.1 que têm vetor placar $(1,1,1)$. Portanto, se $\mathcal{T}(J)$ contém um 3-ciclo então J não é integrável. Por exemplo, a estrutura quase-complexa do Exemplo 1.1 é integrável.

Uma classe de estruturas quase-complexas não integráveis de interesse especial é a classe das estruturas parabólicas as quais foram estudadas por Mo e Negreiros em [MN2].

Definição 1.2.5. Uma estrutura quase-complexa invariante J sobre $F(n)$ é chamada de parabólica se existe uma permutação τ de n elementos tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é, para $i < j$, dado por:

$$\begin{cases} \tau(j) \rightarrow \tau(i), & \text{se } j - i \text{ é par} \\ \tau(i) \rightarrow \tau(j), & \text{se } j - i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

No Capítulo 2, provaremos um resultado que caracteriza o vetor placar destas estruturas.

Definição 1.2.6. Um torneio \mathcal{T} é chamado de irredutível se não existe um homomorfismo sobrejetor de \mathcal{T} em um 2-torneio, ou equivalentemente, se não for possível separar o conjunto dos vértices de \mathcal{T} em dois subconjuntos não vazios A e B de tal forma que cada vértice de A ganha de cada vértice de B .

Definição 1.2.7. Um torneio \mathcal{T} é chamado de forte, se qualquer par de vértices i, j de \mathcal{T} podem ser unidos por um caminho

$$i = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_r = j.$$

Definição 1.2.8. Um torneio \mathcal{T} é chamado de Hamiltoniano se ele contém um n -ciclo passando por todos seus vértices, isto é, um caminho

$$\pi(n) \rightarrow \pi(1) \rightarrow \pi(2) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi(n-1) \rightarrow \pi(n),$$

onde π é alguma permutação de n elementos.

Roy (ver [R] ou [M]) provou que um torneio é forte se e somente se ele é irredutível. Camion (ver [C] ou [M]) provou mais tarde que um torneio com pelo menos 3 jogadores é Hamiltoniano se e somente se é irredutível.

Definição 1.2.9. Um torneio é transitivo se dados três vértices i, j, k de \mathcal{T} temos que

$$i \rightarrow j \text{ e } j \rightarrow k \implies i \rightarrow k.$$

O n -torneio canônico (Definição 1.2.3) é transitivo e todos os outros torneios transitivos são isomorfos a ele. Então, os torneios transitivos formam uma única classe de isomorfismo com vetor placar $(0, 1, 2, \dots, n-1)$.

1.3 As Formas de Maurer-Cartan de $U(n)$

A referência para a maior parte do material apresentado nesta seção é [ChW].

Sejam $V, W \in \mathbb{C}^n$, $V = (v_1, \dots, v_n)$ e $W = (w_1, \dots, w_n)$. Munimos \mathbb{C}^n com o produto Hermitiano usual

$$\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{w_i}.$$

A seguinte proposição, cuja prova é simples, contém algumas propriedades deste produto interno.

Proposição 1.3.1. Se $V, W, Z \in \mathbb{C}^n$ e $a, b \in \mathbb{C}$ então

1. $\overline{\langle V, W \rangle} = \langle W, V \rangle$
2. $\langle aV + bZ, W \rangle = a \langle V, W \rangle + b \langle Z, W \rangle$
3. $\langle V, aW + bZ \rangle = \bar{a} \langle V, W \rangle + \bar{b} \langle V, Z \rangle$.

Usaremos a convenção

$$\overline{v_i} = v_{\bar{i}} \quad \text{e} \quad \overline{f_{ij}} = f_{\bar{i}\bar{j}}.$$

Definição 1.3.1. Um referencial consiste de um conjunto ordenado de n vetores linearmente independentes (Z_1, \dots, Z_n) tais que

$$Z_1 \wedge \dots \wedge Z_n \neq 0,$$

e é chamado de unitário se

$$\langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (1.1)$$

Claramente, o espaço dos referenciais unitários pode ser identificado com o grupo unitário $U(n)$.

Escrevemos

$$dZ_i = \sum_j \omega_{ij} Z_j, \quad (1.2)$$

onde as ω_{ij} são 1-formas, conhecidas como as formas de Maurer-Cartan.

Proposição 1.3.2. *As formas de Maurer-Cartan são anti-Hermitianas, isto é, satisfazem*

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (1.3)$$

Prova: Derivando (1.1) temos

$$\langle dZ_i, Z_j \rangle + \langle Z_i, dZ_j \rangle = 0.$$

Agora usando (1.2) obtemos

$$\left\langle \sum \omega_{ik} Z_k, Z_j \right\rangle + \left\langle Z_i, \sum \omega_{jk} Z_k \right\rangle = 0.$$

Usando a linearidade do produto interno e usando de novo (1.1) temos

$$\begin{aligned} \sum \omega_{ik} \langle Z_k, Z_j \rangle + \sum \overline{\omega_{jk}} \langle Z_i, Z_k \rangle &= 0 \\ \omega_{ij} + \overline{\omega_{ji}} &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0.$$

□

Proposição 1.3.3. *As formas de Maurer-Cartan satisfazem a equação*

$$d\omega_{i\bar{j}} = \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}}. \quad (1.4)$$

Prova: Tomando derivada exterior na equação (1.2) temos:

$$\begin{aligned} \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \omega_{i\bar{j}} dZ_j &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} dZ_k &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} \left(\sum_j \omega_{k\bar{j}} Z_j \right) &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_j \left(\sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}} \right) Z_j &= 0 \\ \sum_j \left(d\omega_{i\bar{j}} - \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}} \right) Z_j &= 0. \end{aligned}$$

A última equação implica o resultado.

□

1.4 Métricas Invariantes à Esquerda

Consideremos a variedade $F(n)$ com uma estrutura quase-complexa invariante J e torneio associado $\mathcal{T}(J)$. Todas as métricas invariantes à esquerda sobre $(F(n), J)$ têm a forma

$$ds_\Lambda^2 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{\bar{i}j}, \quad (1.5)$$

onde $\Lambda = (\lambda_{ij})$ é uma matriz real simétrica que satisfaz:

$$\lambda_{ij} \begin{cases} > 0, & \text{se } i \neq j \\ = 0, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.6)$$

e as formas $\omega_{i\bar{j}}$ de Maurer-Cartan de $U(n)$ são tais que

$$\omega_{i\bar{j}} \in \mathbb{C}^{1,0} \quad (\text{formas de tipo } (1,0)) \quad \Longleftrightarrow \quad i \xrightarrow{\tau(J)} j.$$

(Ver [N1] ou [Bl]). O espaço $\mathbb{C}^{1,0}$ é o auto-espaço de J para o auto-valor $\sqrt{-1}$ (ver [EL]).

Note que na fórmula 1.5 quando $\lambda_{ij} = 1$, para todo i, j , obtemos justamente a métrica normal induzida pela forma de Cartan-Killing de $U(n)$ (ver [ChE]).

Proposição 1.4.1. *As métricas 1.5, chamadas de métricas tipo Borel, são quase-Hermitianas para cada estrutura quase-complexa invariante J . Isto é,*

$$ds_{\Lambda}^2(JX, JY) = ds_{\Lambda}^2(X, Y),$$

para todos os campos vetoriais X, Y .

Prova:

$$\begin{aligned} ds_{\Lambda}^2(JX, JY) &= \sum_{i,j} (\lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{\bar{i}j})(JX, JY) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}}(JX) \omega_{\bar{i}j}(JY) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} J\omega_{i\bar{j}}(X) J\omega_{\bar{i}j}(Y). \end{aligned}$$

Consideremos,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \rightarrow j \\ -1 & \text{se } j \rightarrow i \\ 0 & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.7)$$

Como J é multiplicação por $\pm\sqrt{-1}$, então

$$\begin{aligned} ds_{\Lambda}^2(JX, JY) &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} \varepsilon_{ij} \sqrt{-1} \omega_{i\bar{j}}(X) \varepsilon_{ij} (-\sqrt{-1}) \omega_{\bar{i}j}(Y) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} (\varepsilon_{ij})^2 (\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) \omega_{i\bar{j}}(X) \omega_{\bar{i}j}(Y) \\ &= \sum_{i,j} (\lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{\bar{i}j})(X, Y). \end{aligned}$$

□

Se J for integrável na proposição acima, então dizemos que ds_{Λ}^2 é Hermítica. Aqui estamos usando definições contidas em [Sa].

Definição 1.4.1. Seja J uma estrutura quase-complexa sobre $F(n)$ e $\mathcal{T}(J)$ o torneio associado a ela. A forma quase-Kähler associada a J é definida para cada par de vetores tangentes X, Y , por:

$$\Omega(X, Y) = ds_{\Lambda}^2(X, JY). \quad (1.8)$$

Seja Σ_n o grupo de permutações de n elementos. Mo e Negreiros, em [MN2], provaram que para cada permutação $\tau \in \Sigma_n$, a forma quase-Kähler se escreve como:

$$\Omega = -2\sqrt{-1} \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}, \quad (1.9)$$

onde

$$\mu_{\tau(i)\tau(j)} = \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)} \lambda_{\tau(i)\tau(j)}, \quad (1.10)$$

e ε_{ij} é definido em (1.7).

Definição 1.4.2. Se J é uma estrutura quase-complexa invariante sobre $F(n)$, então dizemos que $F(n)$ é uma variedade quase-Kähler se a forma Ω associada a J for fechada, isto é, se $d\Omega = 0$. Quando J é integrável e Ω é fechada dizemos que $F(n)$ é uma variedade de Kähler.

Teorema 1.4.1. *Seja $(F(n), J, ds_\Lambda^2)$ uma variedade bandeira e Ω a forma quase-Kähler associada a J . Então*

$$d\Omega = 4 \sum_{i < j < k} C_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} \Psi_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}, \quad (1.11)$$

onde

$$C_{ijk} = \mu_{ij} - \mu_{ik} + \mu_{jk}, \quad (1.12)$$

e

$$\Psi_{ijk} = \text{Im}(\omega_{i\bar{j}} \wedge \omega_{\bar{i}k} \wedge \omega_{j\bar{k}}). \quad (1.13)$$

Prova: Derivando (1.9) e usando (1.3) e (1.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{2} d\Omega &= \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} [(d\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge (d\omega_{\tau(i)\tau(j)}))] \\ &= \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \left\{ \sum_k (\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge (\sum_k \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)}) \right\} \\ &= \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \left\{ \sum_k \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_k \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \right\} \\ &= \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \left\{ (\omega_{\tau(i)\tau(i)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(i)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} + \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(j)} + \sum_{k \neq i, j} \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)}) \right\} \\ &= \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \left\{ \sum_{k \neq i, j} (\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \right. \\ &\quad \left. - \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) \right\} \\ &= 2\sqrt{-1} \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \sum_{k \neq i, j} \text{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}). \end{aligned}$$

Agora podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}d\Omega &= \sum_{k < i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) + \\
&\quad + \sum_{i < k < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) + \\
&\quad + \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) \\
&= \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(j)\tau(k)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(j)\tau(i)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}) + \\
&\quad + \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(k)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)}) + \\
&\quad + \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) \\
&= - \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(j)\tau(k)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}) - \\
&\quad - \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(k)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}) - \\
&\quad - \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}) \\
&= \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(j)\tau(k)} \operatorname{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}}) - \\
&\quad - \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(k)} \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}}) + \\
&\quad + \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}}) \\
&= \sum_{i < j < k} (\mu_{\tau(i)\tau(j)} - \mu_{\tau(i)\tau(k)} + \mu_{\tau(j)\tau(k)}) \operatorname{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}}).
\end{aligned}$$

□

O teorema acima devido a Mo e Negreiros [MN2] é a chave para os resultados que serão apresentados nos Capítulos 3 e 4.

Denotamos por $\mathbb{C}^{p,q}$ o espaço das formas complexas de tipo (p, q) sobre $F(n)$. Se i, j, k formam um 3-ciclo como na Figura 1.3, então $\omega_{i\bar{j}} \in \mathbb{C}^{1,0}$, $\omega_{i\bar{k}} \in \mathbb{C}^{1,0}$ e $\omega_{j\bar{k}} \in \mathbb{C}^{1,0}$ e portanto $\Psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3}$. Da mesma forma,

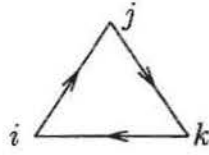


Figura 1.3: 3-ciclo

quando i, j, k não formam um 3-ciclo como o torneio da Figura 1.4, então $\omega_{ij} \in \mathbb{C}^{1,0}$, $\omega_{ik} \in \mathbb{C}^{0,1}$ e $\omega_{jk} \in \mathbb{C}^{1,0}$ e portanto $\Psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2}$. Assim, para qualquer i, j, k temos que:

$$\Psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3} \quad (1.14)$$

ou

$$\Psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2}. \quad (1.15)$$

Como $d\Omega$ é uma 3-forma, então ela têm parte (3,0), parte (2,1), parte (1,2) e parte (0,3), isto é

$$d\Omega = (d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2} + (d\Omega)^{0,3}.$$

Claramente,

$$\overline{(d\Omega)^{3,0}} = (d\Omega)^{0,3} \quad \text{e} \quad \overline{(d\Omega)^{2,1}} = (d\Omega)^{1,2}.$$

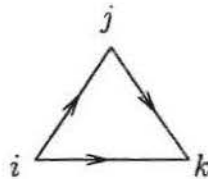


Figura 1.4: 3-torneio canônico

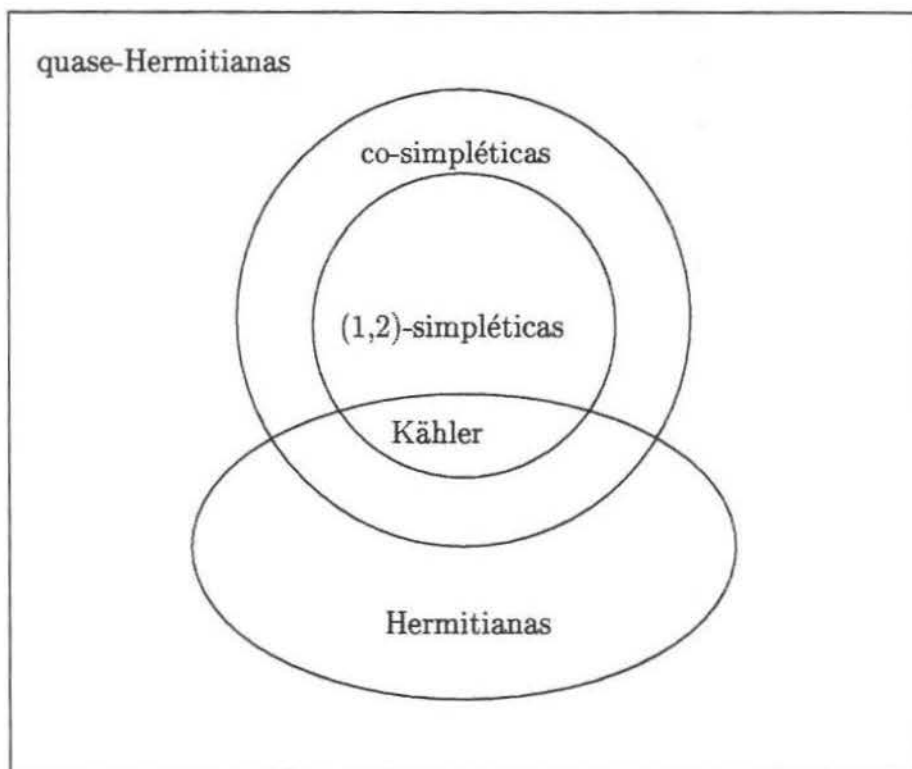


Figura 1.5: Estruturas quase-Hermitianas

Definição 1.4.3. Uma métrica quase-Hermitiana sobre $F(n)$ é dita (1,2)-simplética se

$$(d\Omega)^{1,2} = 0. \quad (1.16)$$

Definição 1.4.4. Uma métrica quase-Hermitiana sobre $F(n)$ é dita co-simplética se Ω é co-fechada, isto é se

$$d^*\Omega = 0. \quad (1.17)$$

A Figura 1.5, tomada de [Sa], apresenta as classes de variedades quase-Hermitianas em que estamos interessados (para uma classificação completa

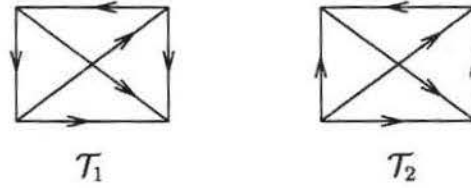


Figura 1.6: 4-torneios do Teorema 1.4.2.

ver [GH]).

Este diagrama nos diz que:

$$\text{Kähler} \implies (1,2)\text{-simplética} \implies \text{co-simplética}.$$

Nos próximos capítulos estudaremos estas métricas, e para isto o seguinte resultado, devido a Mo e Negreiros [MN2], será fortemente utilizado.

Teorema 1.4.2. *Se J é uma estrutura quase-complexa $U(n)$ -invariante sobre $F(n)$, $n \geq 4$, tal que $\mathcal{T}(\mathcal{J})$ contém um dos 4-torneios da Figura 1.6 então J não admite métrica $(1,2)$ -simplética invariante.*

1.5 Aplicações Harmônicas

Sejam (M, g) e (N, h) duas variedades Riemannianas. Uma aplicação $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é harmônica se ela é um ponto crítico do funcional energia

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi(x)|^2 v_g, \quad (1.18)$$

onde $d\phi(x) : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} M$, $x \in M$ e a norma de $d\phi(x)$ é dada por:

$$|d\phi(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \langle d\phi(x)(X_i), d\phi(x)(X_i) \rangle_h, \quad (1.19)$$

para uma base ortonormal X_1, \dots, X_m de $T_x M$.

Assim, ϕ é harmônica se e somente se satisfaz as equações de Euler-Lagrange

$$\delta E(\phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) = 0, \quad (1.20)$$

para toda variação (ϕ_t) , $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, de ϕ .

Definição 1.5.1. Uma aplicação $\phi : (M, g, J_1) \rightarrow (N, h, J_2)$ é holomorfa se satisfaz

$$d\phi \circ J_1 = J_2 \circ d\phi. \quad (1.21)$$

O seguinte Teorema, devido a Lichnerowicz [L], é a chave para a construção das aplicações harmônicas apresentadas no Capítulo 5.

Teorema 1.5.1. *Sejam (M, g, J_1) e (N, h, J_2) variedades quase-Hermitianas com M co-simplética e N (1,2)-simplética. Então qualquer aplicação holomorfa $\phi : (M, J_1) \rightarrow (N, J_2)$ é harmônica.*

Estamos interessados em estudar o caso em que M é uma superfície de Riemann compacta e orientada e N é uma variedade bandeira $F(n)$. Como toda superfície de Riemann é de Kähler e vimos na seção 1.4 que a condição de ser Kähler implica na de co-simplética, então toda superfície de Riemann é co-simplética. Assim, para construirmos aplicações harmônicas $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$ precisamos estudar somente as métricas (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$.

Além disso, se quisermos usar o Teorema 1.5.1, precisamos conhecer ou estudar aplicações holomorfas $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$. Então usamos as aplicações Eells-Wood introduzidas por Negreiros em [N2]. A seguir vamos ver o que são as aplicações de Eells-Wood.

Seja $h : M^2 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ holomorfa e não degenerada (ou cheia), isto é, $h(M)$ não está contida em nenhum \mathbb{CP}^k , para todo $k < n - 1$. Localmente, em um aberto $U \subset M^2$, podemos representar h como

$$h_U = (u_0, \dots, u_{n-1}) : M^2 \supset U \rightarrow \mathbb{C}^n - 0,$$

onde U é tal que $\pi \circ h_U = h$ para $\pi : \mathbb{C}^n - 0 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$. Isto é,

$$h(z) = [h_U(z)] = [(u_0(z), \dots, u_{n-1}(z))].$$

Definimos a k -ésima curva associada a h como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k : M^2 &\longrightarrow \mathbb{G}_{k+1}(\mathbb{C}^n) \\ z &\longmapsto h_U(z) \wedge \partial h_U(z) \wedge \dots \wedge \partial^k h_U(z), \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq n - 1$.

Seja

$$\begin{aligned} h_k : M^2 &\longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1} \\ z &\longmapsto \mathcal{O}_k^\perp(z) \cap \mathcal{O}_{k+1}(z), \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq n - 1$.

O seguinte importante Teorema, devido a Eells e Wood [EW], classifica as aplicações harmônicas da esfera $S^2 \sim \mathbb{CP}^1$ em um espaço projetivo \mathbb{CP}^{n-1} .

Teorema 1.5.2. *Para cada k , $h_k : M^2 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ é harmônica. Além disso, dada uma aplicação harmônica e não degenerada $\phi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$, existem únicos h e k tais que $\phi = h_k$.*

Este Teorema fornece de modo natural aplicações

$$\begin{aligned} \Psi : M^2 &\longrightarrow F(n) \\ z &\longmapsto (h_0(z), \dots, h_{n-1}(z)), \end{aligned} \tag{1.22}$$

as quais são chamadas de aplicações de Eells-Wood (ver [N2]).

Definição 1.5.2. Dizemos que uma aplicação $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_\Lambda^2)$ é equi-harmônica se ela for harmônica em relação a toda métrica invariante do tipo Bczel ds_Λ^2 .

O seguinte resultado é devido a Negreiros (ver [N2] ou [MN4]).

Teorema 1.5.3. *As aplicações de Eells-Wood são equi-harmônicas.*

Uma aplicação $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$ induz aplicações

$$\pi_i = p_i \circ \phi : M^2 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1},$$

onde

$$\begin{aligned} p_i : F(n) &\longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1} \\ (L_1, \dots, L_n) &\mapsto L_i. \end{aligned}$$

Assim, podemos pensar ϕ como n aplicações π_i , ou seja,

$$\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n).$$

Teorema 1.5.4. ([Bl]) Se $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow F(n)$ é equi-harmônica, então $\pi_i : M^2 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ é harmônica para cada $0 \leq i \leq n-1$.

Agora apresentamos alguns resultados sobre estabilidade de aplicações harmônicas, os quais serão usados no Capítulo 5.

Definição 1.5.3. Uma aplicação harmônica $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é dita estável se

$$\delta^2 E(\phi) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} E(\phi_t) \geq 0. \quad (1.23)$$

Borel em [Bo] provou que as métricas de Kähler invariantes ds_{Λ}^2 , salvo permutações, são dadas pela matriz simétrica:

$$\Lambda_K = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \cdots & \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 & \cdots & \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} \\ * & * & * & * & \cdots & \lambda_{n-1} \\ * & * & * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Lichnerowicz em [L] provou o seguinte resultado:

Teorema 1.5.5. *Seja $\phi : (M, g, J_1) \rightarrow (N, h, J_2)$ uma aplicação holomorfa entre variedades de Kähler. Então ϕ é harmônica e estável.*

Este teorema implica que qualquer aplicação de Eells-Wood $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda_K}^2)$ é harmônica e estável.

Os dois resultados seguintes foram provados por Negreiros em [N3].

Teorema 1.5.6. *Seja $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda'}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, onde $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ é a seguinte perturbação da matriz $\Lambda_K = (\lambda_{ij})$:*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{se } j = i + 1 \\ \lambda_{ij} + \varepsilon_{ij}, & \text{se } j \neq i + 1, \end{cases}$$

com $\varepsilon_{ij} \geq 0$. Então ψ é estável.

Teorema 1.5.7. *Seja $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda'}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, onde $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ é a seguinte perturbação da matriz $\Lambda_K = (\lambda_{ij})$:*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{se } j = i + 1 \\ \lambda_{ij} - \varepsilon_{ij}, & \text{se } j \neq i + 1, \end{cases}$$

com $\varepsilon_{ij} \geq 0$. Então ψ não é estável.

Capítulo 2

Estruturas Parabólicas sobre

$$F(n)$$

Neste capítulo provamos um resultado que dá uma condição necessária para que uma estrutura quase-complexa seja parabólica. A condição é dada sobre o torneio associado à estrutura quase-complexa, mais precisamente sobre o vetor placar do dito torneio.

2.1 Estruturas Parabólicas

Lembremos (Definição 1.2.5) que uma estrutura quase-complexa invariante J sobre $F(n)$ é chamada de parabólica se existe uma permutação $\tau \in \Sigma_n$ tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é, para $i < j$, dado por:

$$\begin{cases} \tau(j) \rightarrow \tau(i), & \text{se } j - i \text{ é par} \\ \tau(i) \rightarrow \tau(j), & \text{se } j - i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Os torneios, com seu respectivo vetor placar, apresentados na Figura 2.1

são exemplos de torneios correspondentes a estruturas parabólicas e podem ser construídos usando a definição

Teorema 2.1.1. *Se J é uma estrutura parabólica sobre $F(n)$, então $\mathcal{T}(J)$ sempre contém k -torneios, para $k = 3, 4, \dots, n - 1$, correspondentes a estruturas parabólicas sobre $F(k)$.*

Prova: A prova é feita por indução sobre n começando com $n = 4$. Claramente o torneio para $n = 4$ contém um torneio de ordem 3 parabólico, pois o torneio parabólico de ordem 3 é um 3-ciclo.

Suponha agora que a afirmação é verdadeira para n e provemos que ela também é verdadeira para $n + 1$. Devido ao fato que o n -torneio parabólico contém subtorneios parabólicos de ordem k , para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$, só precisamos provar que o $(n + 1)$ -torneio parabólico contém um n -torneio parabólico.

Sem perda de generalidade, podemos rotular os vértices do $(n + 1)$ -torneio parabólico com os números $1, 2, \dots, n + 1$ de tal forma que cada subtorneio $(1\ 2 \dots k)$ seja parabólico, para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Provemos que o subtorneio $(1\ 2 \dots n)$ é parabólico.

Supondo por absurdo que $(1\ 2 \dots n)$ não é parabólico então podem acontecer duas possibilidades: que $i \rightarrow n$ e $n - i$ seja par para algum $i = 1, 2, \dots, n - 1$, mas isto não é possível porque no $(n + 1)$ -torneio parabólico $n \rightarrow i$ ou que $n \rightarrow i$ e $n - i$ seja ímpar para algum $i = 1, 2, \dots, n - 1$, mas isto não é possível porque no $(n + 1)$ -torneio parabólico $i \rightarrow n$. \square

Pelo Teorema acima, o torneio $\mathcal{T}(J)$ correspondente a uma estrutura parabólica sempre contém um 3-ciclo. Então temos o seguinte resultado:

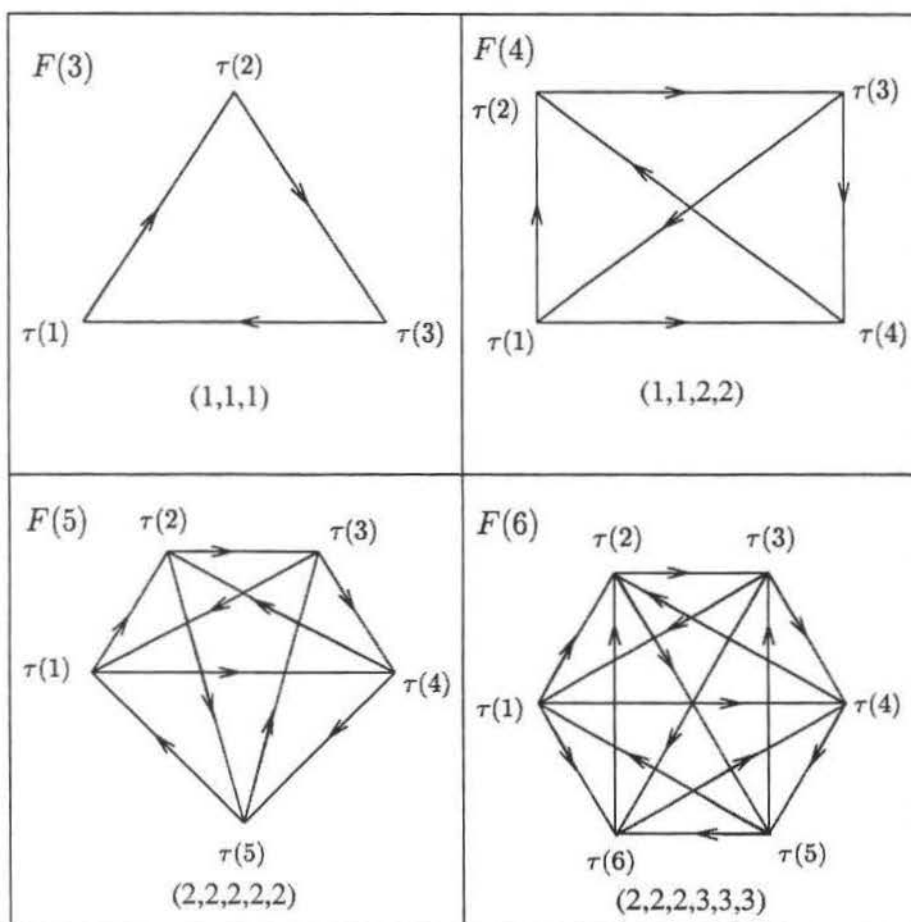


Figura 2.1: Classes de torneios parabólicos e vetor placar correspondente.

Corolário 2.1.1. *Todas as estruturas quase-complexas parabólicas sobre $F(n)$ não são integráveis.*

Mo e Negreiros provaram em [MN2] o seguinte resultado para estruturas quase-complexas parabólicas.

Teorema 2.1.2. *Suponha que J é uma estrutura quase-complexa parabólica invariante sobre $F(n)$. Então uma métrica ds_Λ^2 é $(1,2)$ -simplética relativa a J se e somente se Λ satisfaz*

$$\lambda_{\sigma(i)\tau(k)} = \begin{cases} a_i + a_{i+2} + \dots + a_{k-2}, & \text{if } k-i \in 2\mathbb{N}, \\ a_k + a_{k+2} + \dots + a_{N-1} + a_1 + a_3 + \dots + a_{i-2}, & \text{if } i, N \in 2\mathbb{N}-1 \text{ and } k \in 2\mathbb{N}, \\ a_k + a_{k+2} + \dots + a_N + a_2 + a_4 + \dots + a_{i-2}, & \text{if } N, k \in 2\mathbb{N}-1 \text{ and } i \in 2\mathbb{N}, \\ a_k + a_{k+2} + \dots + a_{N-2} + a_{N-1} + a_1 + a_3 + \dots + a_{i-2}, & \text{if } N, k \in \mathbb{N} \text{ and } i \in 2\mathbb{N}-1, \\ a_k + a_{k+2} + \dots + a_{N-3} + a_N + a_2 + a_4 + \dots + a_{i-2}, & \text{if } i, N \in 2\mathbb{N} \text{ and } k \in 2\mathbb{N}-1, \end{cases}$$

onde $a_0 = a_N, a_{-1} = a_{N-1}$.

Para estas métricas temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3. *Se J é uma estrutura quase-complexa parabólica sobre $F(n)$, então o vetor placar do torneio associado $\mathcal{T}(J)$ tem a forma:*

$$\begin{cases} (n-k, \dots, n-k); & \text{se } n = 2k-1 \\ (n-(k+1), \dots, n-(k+1), n-k, \dots, n-k); & \text{se } n = 2k. \end{cases}$$

Prova: Para facilitar as contas, levaremos em conta a ordem dos vértices do torneio. Assim o vetor placar de $\mathcal{T}(J)$ terá a forma:

$$\begin{cases} (n-k, \dots, n-k); & \text{se } n = 2k-1 \\ (n-k, n-(k+1), \dots, n-k, n-(k+1)); & \text{se } n = 2k. \end{cases}$$

Usamos indução para fazer a prova, notemos que:

- (i) O resultado é verdadeiro para $n = 3, 4, 5$ pela Figura 2.1.

- (ii) Suponha que a afirmação é verdadeira para n e provemos que o mesmo ocorre para $n + 1$. Se $n = 2k - 1$ então o vetor placar de $\mathcal{T}(J)$ é:

$$(n - k, \dots, n - k).$$

Como $n + 1 = 2k$ então da definição de estrutura parabólica temos:

$$\begin{aligned} (n + 1) - n = 1 &\implies \tau(n) \rightarrow \tau(n + 1) \\ (n + 1) - (n - 1) = 2 &\implies \tau(n + 1) \rightarrow \tau(n - 1) \\ &\vdots \\ (n + 1) - 2 = n - 1 = 2k - 2 &\implies \tau(n + 1) \rightarrow \tau(2) \\ (n + 1) - 1 = n = 2k - 1 &\implies \tau(1) \rightarrow \tau(n + 1). \end{aligned}$$

Segue-se que $\tau(n + 1)$ ganha $k - 1 = n - k$ jogos e perde k jogos, e que $\tau(n + 1)$ perde para $\tau(i)$ se i é ímpar e ganha de $\tau(i)$ se i é par. Assim o vetor placar para $n + 1$ é: $(n - k + 1, n - k, \dots, n - k + 1, n - k) = ((n + 1) - k, (n + 1) - (k + 1), \dots, (n + 1) - k, (n + 1) - (k + 1))$, isto é, a afirmação é verdadeira para $n + 1$.

Agora se $n = 2k$, então o vetor placar de $\mathcal{T}(J)$ é:

$$(n - k, n - (k + 1), \dots, n - k, n - (k + 1))$$

Argumentamos de forma similar ao caso anterior. Como $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, então da definição temos:

$$\begin{aligned} (n + 1) - n = 1 &\implies \tau(n) \rightarrow \tau(n + 1) \\ (n + 1) - (n - 1) = 2 &\implies \tau(n + 1) \rightarrow \tau(n - 1) \\ &\vdots \\ (n + 1) - 2 = n - 1 = 2k - 1 &\implies \tau(2) \rightarrow \tau(n + 1) \\ (n + 1) - 1 = n = 2k &\implies \tau(n + 1) \rightarrow \tau(1). \end{aligned}$$

Neste caso, temos que $\tau(n+1)$ ganha $k = n - k$ jogos e perde k jogos, e que $\tau(n+1)$ perde para $\tau(i)$ se i é par e ganha de $\tau(i)$ se i é ímpar. Então o vetor placar para $n+1$ é:

$$(n-k, n-(k+1)+1, \dots, n-k, n-(k+1)+1, n-k) = (n-k, \dots, n-k).$$

Portanto, fica provada a proposição. \square

2.2 Observações

1. Entre os torneios de ordem 3, 4 e 5, só existe uma classe de torneios com o mesmo vetor placar que os parabólicos. Para 3-torneios a classe parabólica tem vetor placar (1,1,1) e para 4-torneios tem vetor placar (1,1,2,2) (ver Figuras 1.1 e 2.1). Para 5-torneios, a classe parabólica tem vetor placar (2,2,2,2,2) (ver Figuras 2.2 e 2.3).
2. Entre os 6-torneios, existem 5 classes com o mesmo vetor placar que a classe parabólica, o qual é (2,2,2,3,3,3) (Figura 2.6). Neste caso, não é claro qual delas é a classe das estruturas parabólicas como foi nos casos anteriores. Provamos então que é a classe (52) exibindo um isomorfismo.

Usando a Definição 1.2.5 de estrutura parabólica, contruimos o torneio correspondente e obtemos o 6-torneio da Figura 2.1. Vamos pensar nele tomando τ como sendo a permutação identidade, isto é $\tau(i) = i$. Então a permutação dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

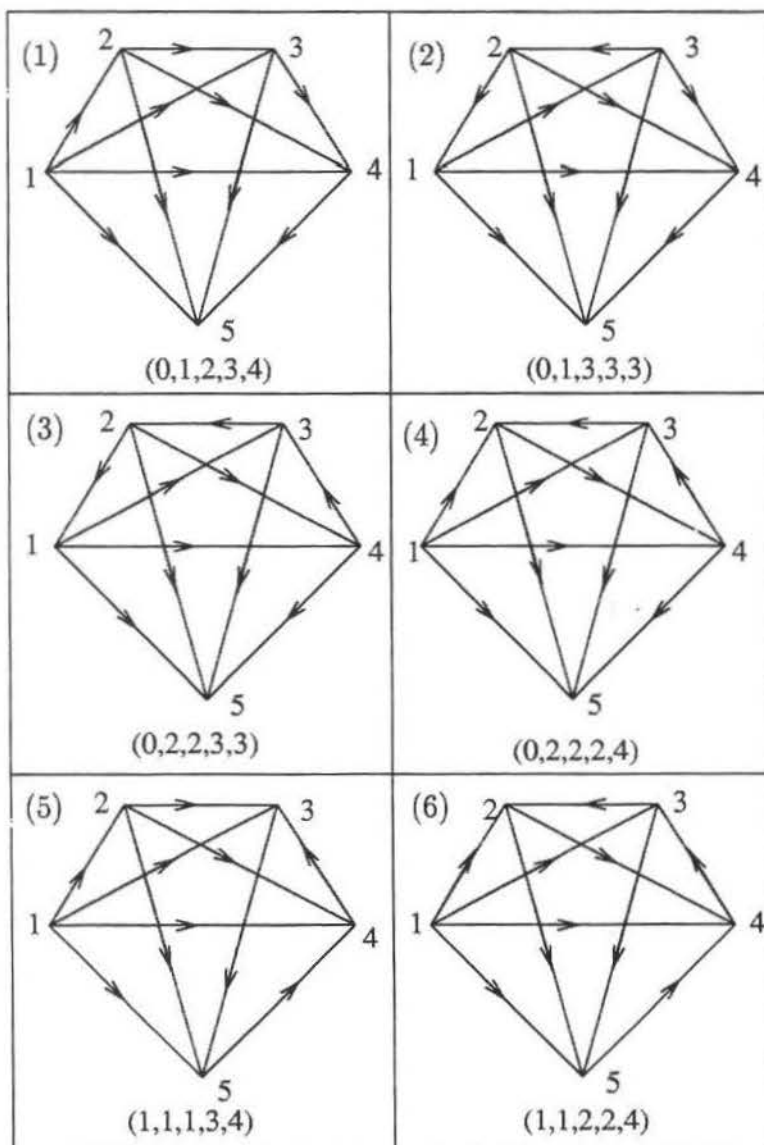


Figura 2.2: Classes de torneios com 5 jogadores e vetores piacar correspondentes.

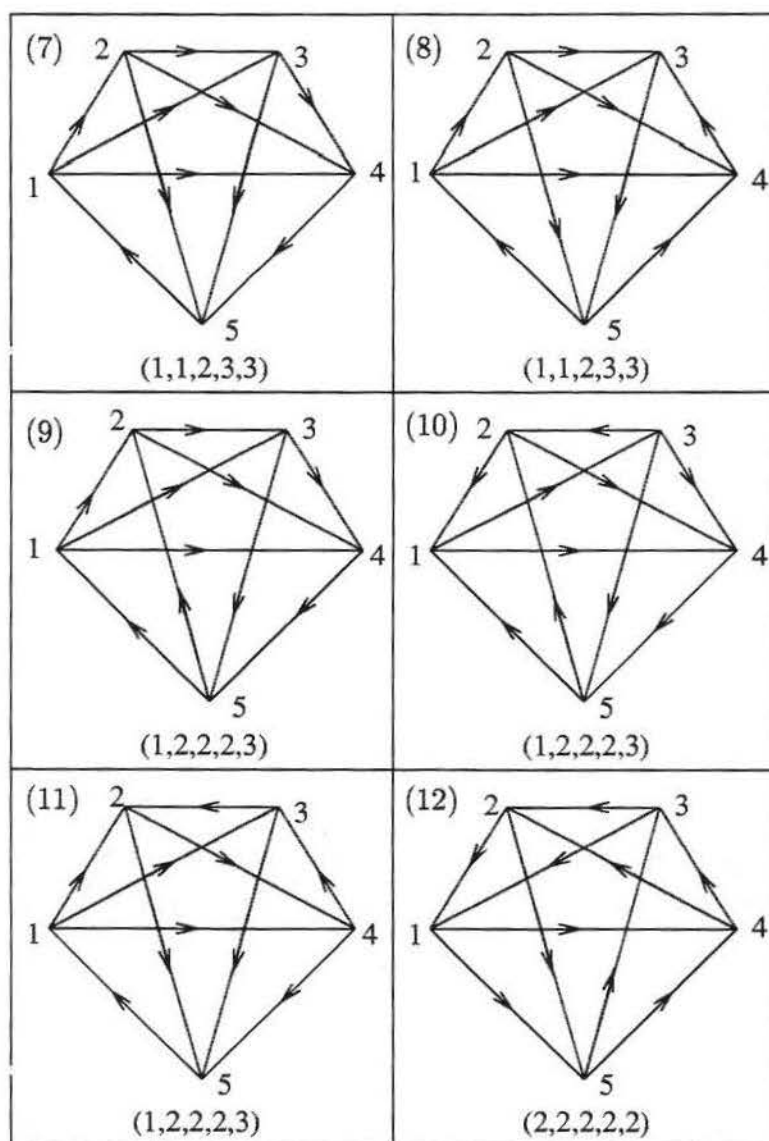


Figura 2.3: Classes de torneios com 5 jogadores e vetores placar correspondentes.

é um isomorfismo do 6-torneio parabólico para o torneio (52) na Figura 2.6. Para verificar que nenhuma das outras classes é isomorfa à classe parabólica é preciso fazer as contas para cada caso, esse é um trabalho um pouco longo mas não é difícil.

3. A recíproca do Teorema 2.1.3 é falsa, pois por exemplo a classe de torneios (55) têm o mesmo vetor placar que a classe (52) e não é parabólica.

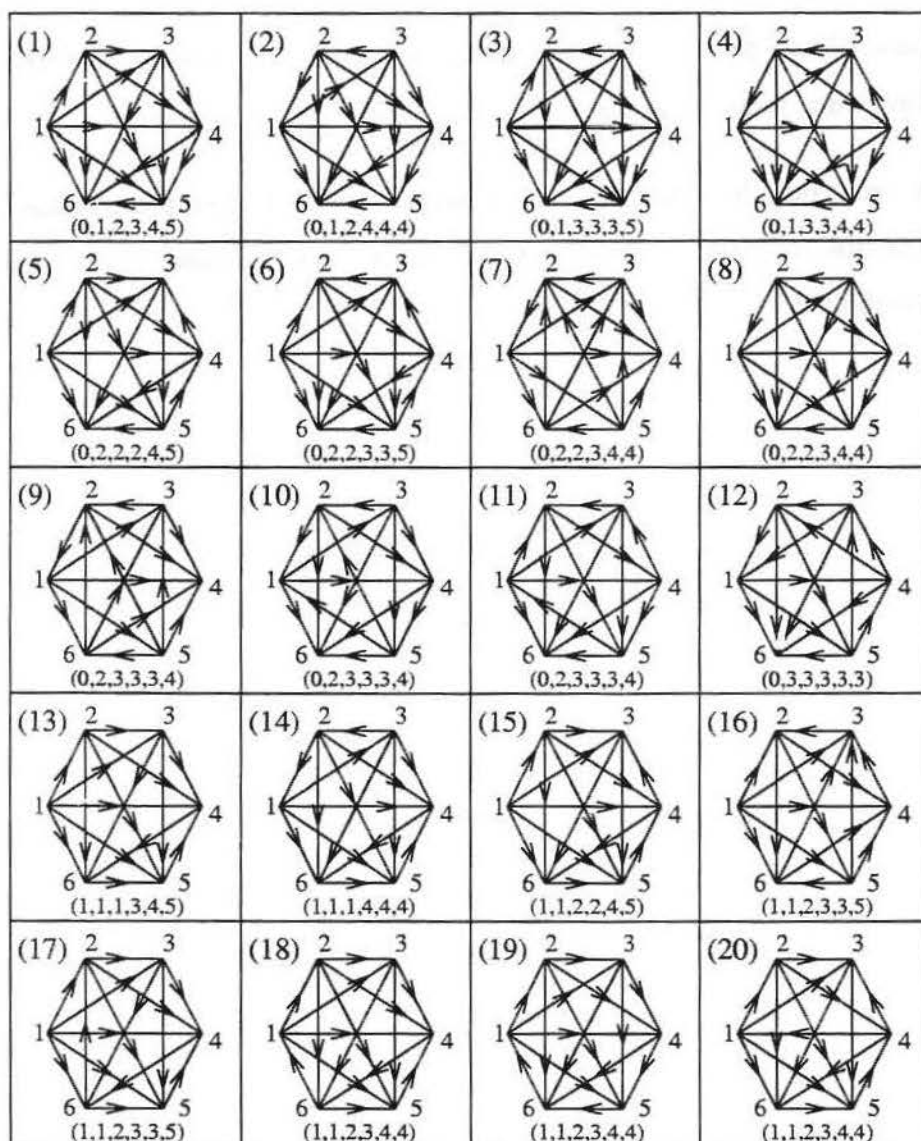


Figura 2.4: Classes de torneios com 6 jogadores e vetor placar correspondente.

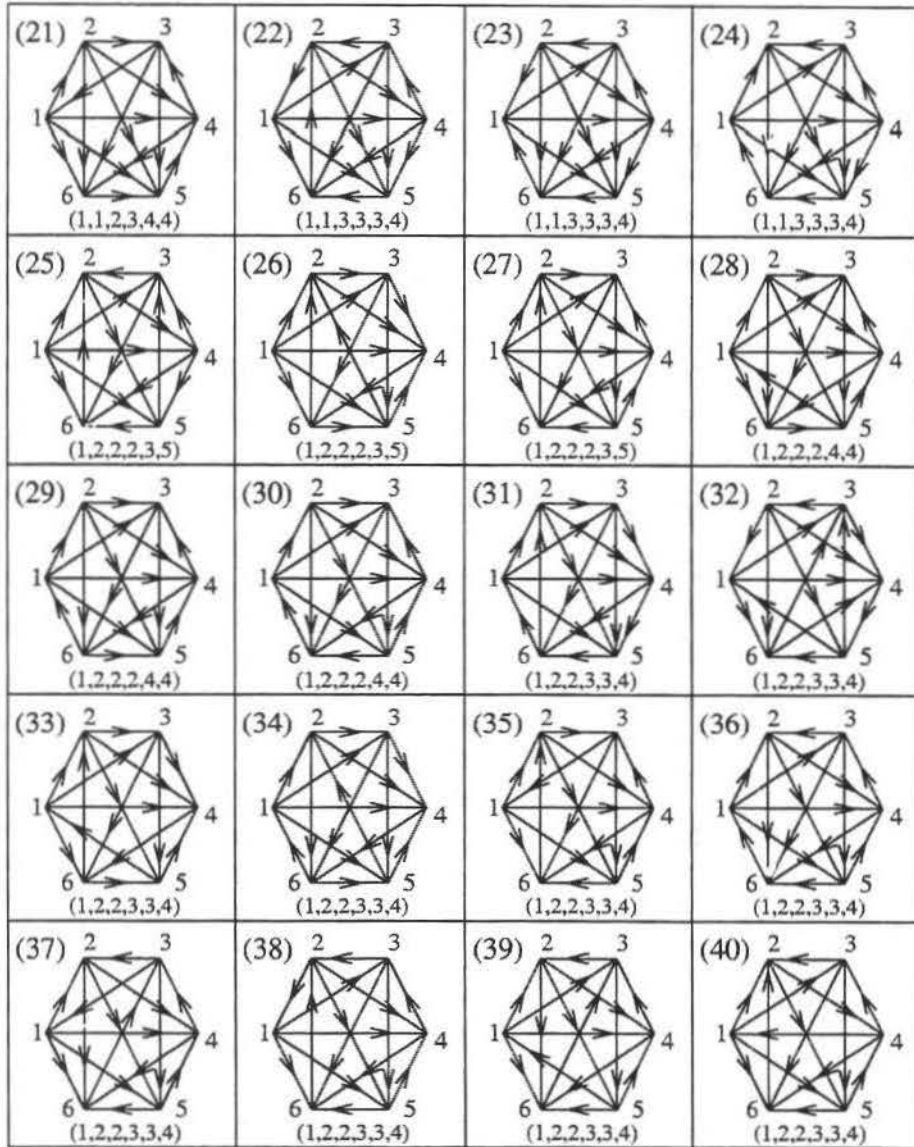


Figura 2.5: Classes de torneios com 6 jogadores e vetor placar correspondente.

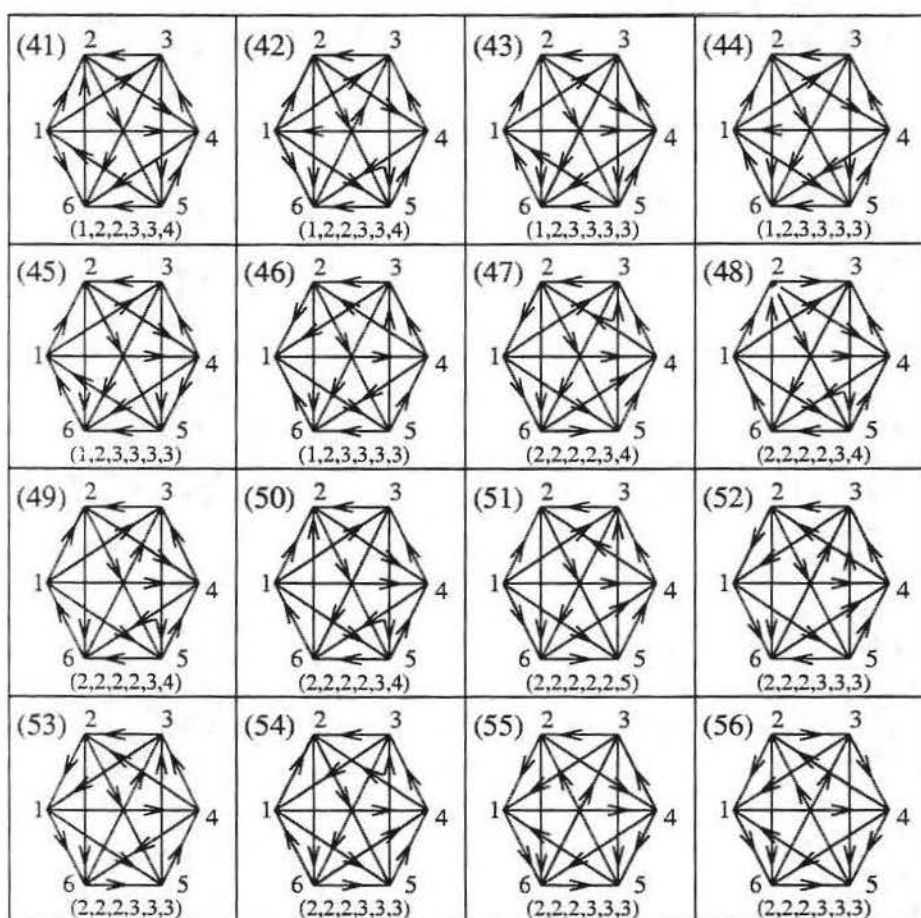


Figura 2.6: Classes de torneios com 6 jogadores e vetor placar correspondente.

Capítulo 3

Métricas (1,2)-Simpléticas sobre $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$ e $F(7)$

Neste capítulo caracterizamos todas as métricas (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$ para $n = 3, 4, 5, 6, 7$. São discutidos os casos $F(3)$ e $F(4)$ os quais são já bem conhecidos. Apresentamos resultados novos que caracterizam famílias n -paramétricas de métricas (1,2)-simpléticas, para $n = 5, 6, 7$. Estas famílias são distintas da parabólica que já foi caracterizada por Mo e Negreiros (Teorema 2.1.2) e também são distintas da Kähler.

3.1 O caso $F(3)$

Em $F(3)$, só temos duas classes de isomorfismos de estruturas quase-complexas, pois existem somente duas classes de isomorfismos de torneios com 3

jogadores. A Figura 3.1 mostra as classes de isomorfismos de torneios com 3 jogadores.

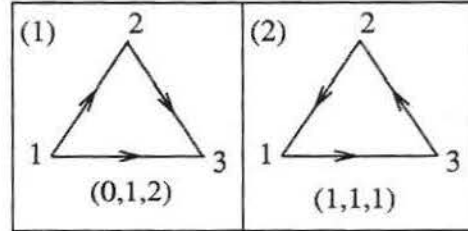


Figura 3.1: Classes de isomorfismos de 3-torneios

A primeira classe corresponde às estruturas quase-complexas integráveis e contém as estruturas quase-complexas correspondentes às métricas de Kähler (ver [MN1]). A segunda classe corresponde às estruturas quase-complexas não integráveis e é dentro desta que vamos procurar métricas (1,2)-simpléticas.

Usando o Teorema 1.4.1 neste caso temos

$$\begin{aligned} d\Omega &= C_{123}\Psi_{123} \\ &= (-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{23})\text{Im}(\omega_{1\bar{2}} \wedge \omega_{1\bar{3}} \wedge \omega_{2\bar{3}}). \end{aligned}$$

Vemos que $C_{123} = -\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{23} \neq 0$ e $\Psi_{123} = \text{Im}(\omega_{1\bar{2}} \wedge \omega_{1\bar{3}} \wedge \omega_{2\bar{3}}) \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3}$, então $d\Omega = (d\Omega)^{3,0} \neq 0$ e $(d\Omega)^{1,2} \equiv 0$. Portanto, todas as métricas obtidas aqui são (1,2)-simpléticas e não são de Kähler.

Assim, as métricas de Borel ds_Λ^2 sobre $F(3)$ que são (1,2)-simpléticas e distintas das de Kähler são aquelas cuja matriz Λ tem a forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas métricas coincidem, neste caso, com as descritas por Mo e Negreiros em [MN2], pois a segunda classe de torneios corresponde à classe das estruturas quase-complexas parabólicas em $F(3)$.

3.2 O caso $F(4)$

A Figura 3.2 contém as classes de isomorfismos de torneios com 4 jogadores.

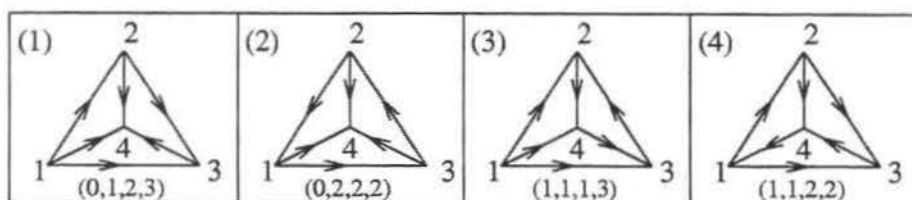


Figura 3.2: Classes de torneios com 4 jogadores e vetor placar correspondente.

De novo a classe (1) corresponde às estruturas quase-complexas integráveis e contém as métricas de Kähler. As classes (2), (3) e (4) correspondem às estruturas quase-complexas não integráveis. O Teorema 1.4.2, provado por Mo e Negreiros em [MN2], nos diz que as classes (2) e (3) não admitem métricas $(1,2)$ -simpléticas. No mesmo artigo eles provaram que a classe (4), que é a parabólica, admite uma família 4-paramétrica de métricas $(1,2)$ -simpléticas.

3.3 O caso $F(5)$

Moon em [M] descreve completamente as 12 classes de isomorfismos de torneios com 5 jogadores. As Figuras 2.2 e 2.3 contêm os representantes de cada classe com seu vetor placar correspondente.

Os torneios da classe (1) correspondem às estruturas quase-complexas integráveis e as métricas correspondentes ds^2_λ contêm as métricas de Kähler. As outras classes correspondem a estruturas não integráveis, em particular a classe (12) corresponde às estruturas quase-complexas parabólicas. Mo e Negreiros [MN2] provaram que esta classe admite uma família 5-paramétrica de métricas (1,2)-simpléticas. Entre as classes restantes, queremos saber quais podem produzir métricas (1,2)-simpléticas em $F(5)$, e nesse sentido temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. *Entre as classes de torneios dadas nas Figuras 2.2 e 2.3, as únicas que fornecem métricas (1,2)-simpléticas diferentes das de Kähler e das parabólicas, são as classes (7) e (9).*

Prova:

- (i) Para provar que as classes (2), (3), (4), (5), (6), (8), (10) e (11) não admitem métricas (1,2)-simpléticas usamos o Teorema 1.4.2. Então devemos mostrar que cada torneio, representante de cada uma destas classes, contém como subtorneio um dos 4-torneios \mathcal{T}_1 ou \mathcal{T}_2 da Figura 1.6. Isto pode ser feito facilmente observando cada torneio.

- (2) contém \mathcal{T}_1 , formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (3) contém \mathcal{T}_1 , formado pelos vértices 2,3,4,5.

- (4) contém \mathcal{T}_2 , formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (5) contém \mathcal{T}_2 , formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (6) contém \mathcal{T}_2 , formado pelos vértices 1,3,4,5.
- (8) contém \mathcal{T}_2 , formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (10) contém \mathcal{T}_1 , formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (11) contém \mathcal{T}_2 , formado pelos vértices 1,2,3,4.

(ii) Provemos que a classe (7) admite métrica (1,2)-simplética. Lembremos que salvo permutações a forma de Kähler pode ser escrita como

$$\Omega = -2\sqrt{-1} \sum_{i < j} \mu_{ij} \omega_{i\bar{j}} \wedge \omega_{\bar{i}j},$$

e seu diferencial como

$$d\Omega = 4 \sum_{i < j < k} C_{ijk} \Psi_{ijk},$$

onde $C_{ijk} = \mu_{ij} - \mu_{ik} + \mu_{jk}$, $\mu_{ij} = \epsilon_{ij} \lambda_{ij}$ e $\Psi_{ijk} = \text{Im}(\omega_{i\bar{j}} \wedge \omega_{\bar{i}k} \wedge \omega_{j\bar{k}})$.

Para a classe (7) temos que as formas $\omega_{i\bar{j}}$ são

$$\begin{array}{ll} \omega_{1\bar{2}} \in \mathbb{C}^{1,0} & \omega_{1\bar{3}} \in \mathbb{C}^{1,0} \\ \omega_{1\bar{4}} \in \mathbb{C}^{1,0} & \omega_{1\bar{5}} \in \mathbb{C}^{0,1} \\ \omega_{2\bar{3}} \in \mathbb{C}^{1,0} & \omega_{2\bar{4}} \in \mathbb{C}^{1,0} \\ \omega_{2\bar{5}} \in \mathbb{C}^{1,0} & \omega_{3\bar{4}} \in \mathbb{C}^{1,0} \\ \omega_{3\bar{5}} \in \mathbb{C}^{1,0} & \omega_{4\bar{5}} \in \mathbb{C}^{1,0}. \end{array}$$

Então,

$$\begin{array}{ll} \Psi_{123} &= \text{Im}(\omega_{1\bar{2}} \wedge \omega_{\bar{1}3} \wedge \omega_{2\bar{3}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \\ \Psi_{124} &= \text{Im}(\omega_{1\bar{2}} \wedge \omega_{\bar{1}4} \wedge \omega_{2\bar{4}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \\ \Psi_{125} &= \text{Im}(\omega_{1\bar{2}} \wedge \omega_{\bar{1}5} \wedge \omega_{2\bar{5}}) \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3} \\ \Psi_{134} &= \text{Im}(\omega_{1\bar{3}} \wedge \omega_{\bar{1}4} \wedge \omega_{3\bar{4}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{135} &= \text{Im}(\omega_{1\bar{3}} \wedge \omega_{\bar{1}5} \wedge \omega_{3\bar{5}}) \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3} \\
\Psi_{145} &= \text{Im}(\omega_{1\bar{4}} \wedge \omega_{\bar{1}5} \wedge \omega_{4\bar{5}}) \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3} \\
\Psi_{234} &= \text{Im}(\omega_{2\bar{3}} \wedge \omega_{\bar{2}4} \wedge \omega_{3\bar{4}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \\
\Psi_{235} &= \text{Im}(\omega_{2\bar{3}} \wedge \omega_{\bar{2}5} \wedge \omega_{3\bar{5}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \\
\Psi_{245} &= \text{Im}(\omega_{2\bar{4}} \wedge \omega_{\bar{2}5} \wedge \omega_{4\bar{5}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \\
\Psi_{345} &= \text{Im}(\omega_{3\bar{4}} \wedge \omega_{\bar{3}5} \wedge \omega_{4\bar{5}}) \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2}.
\end{aligned}$$

Para as constantes C_{ijk} temos

$$\begin{aligned}
C_{123} &= \mu_{12} - \mu_{13} + \mu_{23} \\
&= \epsilon_{12}\lambda_{12} - \epsilon_{13}\lambda_{13} + \epsilon_{23}\lambda_{23} \\
&= \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} \\
C_{124} &= \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} \\
C_{125} &= \lambda_{12} + \lambda_{15} + \lambda_{25} \neq 0 \\
C_{134} &= \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} \\
C_{135} &= \lambda_{13} + \lambda_{15} + \lambda_{35} \neq 0 \\
C_{145} &= \lambda_{14} + \lambda_{15} + \lambda_{45} \neq 0 \\
C_{234} &= \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} \\
C_{235} &= \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} \\
C_{245} &= \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} \\
C_{345} &= \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45}.
\end{aligned}$$

Assim, $(d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{0,3} = C_{125}\Psi_{125} + C_{135}\Psi_{135} + C_{145}\Psi_{145} \neq 0$ e a parte (1,2) de $d\Omega$ é:

$$\begin{aligned}
(d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2} &= C_{123}\Psi_{123} + C_{124}\Psi_{124} + C_{134}\Psi_{134} + C_{234}\Psi_{234} + \\
&\quad + C_{235}\Psi_{235} + C_{245}\Psi_{245} + C_{345}\Psi_{345}.
\end{aligned}$$

Então para que nossa métrica seja (1,2)-simplética, os λ_{ij} devem satisfazer o seguinte sistema de 7 equações com 10 incógnitas

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} &= 0 \\
\lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} &= 0 \\
\lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} &= 0 \\
\lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} &= 0 \\
\lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} &= 0 \\
\lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} &= 0 \\
\lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} &= 0.
\end{aligned}$$

A solução deste sistema é:

$$\begin{aligned}
\lambda_{13} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} \\
\lambda_{14} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
\lambda_{24} &= \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
\lambda_{25} &= \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
\lambda_{35} &= \lambda_{34} + \lambda_{45},
\end{aligned}$$

e observamos que aqui todos os λ_{ij} são positivos como precisávamos e portanto ds^2_Λ é (1,2)-simplética para torneios da classe (7) se os λ_{ij} satisfazem as relações acima.

Fazendo cálculos similares para a classe (9) obtemos que esta classe admite métrica (1,2)-simplética se os λ_{ij} satisfizerem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\lambda_{13} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} \\
\lambda_{14} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
\lambda_{24} &= \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
\lambda_{25} &= \lambda_{12} + \lambda_{15} \\
\lambda_{35} &= \lambda_{34} + \lambda_{45}.
\end{aligned}$$

□

Agora podemos escrever explicitamente as matrizes $\Lambda_{(7)}$ e $\Lambda_{(9)}$ correspondentes as classes (7) e (9) respectivamente, as quais produzem métricas (1,2)-simpiéticas sobre $F(5)$:

$$\Lambda_{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{15} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} \\ \lambda_{15} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{15} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{15} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} \\ \lambda_{15} & \lambda_{12} + \lambda_{15} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 \end{pmatrix}.$$

As métricas correspondentes se escrevem como:

$$\begin{aligned}
ds_{\Lambda(7)}^2 = & -2\sqrt{-1} \left\{ \lambda_{12}\omega_{1\bar{2}} \otimes \omega_{\bar{1}2} + (\lambda_{12} + \lambda_{23})\omega_{1\bar{3}} \otimes \omega_{\bar{1}3} + \right. \\
& + (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34})\omega_{1\bar{4}} \otimes \omega_{\bar{1}4} + \lambda_{15}\omega_{1\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{1}5} + \\
& + \lambda_{23}\omega_{2\bar{3}} \otimes \omega_{\bar{2}3} + (\lambda_{23} + \lambda_{34})\omega_{2\bar{4}} \otimes \omega_{\bar{2}4} + \\
& + (\lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45})\omega_{2\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{2}5} + \lambda_{34}\omega_{3\bar{4}} \otimes \omega_{\bar{3}4} + \\
& \left. + (\lambda_{34} + \lambda_{45})\omega_{3\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{3}5} + \lambda_{45}\omega_{4\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{4}5} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
ds_{\Lambda(9)}^2 = & -2\sqrt{-1} \left\{ \lambda_{12}\omega_{1\bar{2}} \otimes \omega_{\bar{1}2} + (\lambda_{12} + \lambda_{23})\omega_{1\bar{3}} \otimes \omega_{\bar{1}3} + \right. \\
& + (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34})\omega_{1\bar{4}} \otimes \omega_{\bar{1}4} + \lambda_{15}\omega_{1\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{1}5} + \\
& + \lambda_{23}\omega_{2\bar{3}} \otimes \omega_{\bar{2}3} + (\lambda_{23} + \lambda_{34})\omega_{2\bar{4}} \otimes \omega_{\bar{2}4} + \\
& + (\lambda_{12} + \lambda_{15})\omega_{2\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{2}5} + \lambda_{34}\omega_{3\bar{4}} \otimes \omega_{\bar{3}4} + \\
& \left. + (\lambda_{34} + \lambda_{45})\omega_{3\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{3}5} + \lambda_{45}\omega_{4\bar{5}} \otimes \omega_{\bar{4}5} \right\}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que em $F(5)$ existem três famílias 5-paramétricas de métricas (1,2)-simpléticas que não são de Kähler e uma família 4-paramétrica de métricas de Kähler.

Em $F(3)$ e $F(4)$ a situação é diferente, pois as únicas métricas (1,2)-simpléticas que existem são as de Kähler e as contidas na classe das parabólicas. Resumindo, as variedades bandeira $F(n)$ admitem métricas (1,2)-simpléticas, diferentes das de Kähler e das parabólicas, somente para $n \geq 5$.

3.4 O caso $F(6)$

Existem 56 classes de isomorfismos de torneios com 6 jogadores (ver [M]) as quais apresentamos nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6

Como nos casos anteriores, os torneios da classe (1) correspondem às estruturas quase-complexas integráveis, e as métricas ds_{Λ}^2 correspondentes

contém as métricas de Kähler. As outras 55 classes correspondem a estruturas não integráveis. No Capítulo 2 mostramos que a classe (52) corresponde à classe das estruturas parabólicas. Já foi provado em [MN2] que esta classe contém uma família 6-paramétrica de métricas (1,2)-simpléticas. Para as outras classes temos o seguinte resultado

Teorema 3.4.1. *Entre as classes de torneios dadas nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6, as únicas que admitem métricas (1,2)-simpléticas diferentes das de Kähler e das parabólicas, são as classes (19), (31), (37) e (55).*

Prova:

i) Usamos de novo o Teorema 1.4.2 para mostrar que todas as classes diferentes das classes (1), (19), (31), (37), (52) e (55) não admitem métricas (1,2)-simpléticas:

- (2) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (3) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (4) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,5.
- (5) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (6) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (7) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (8) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (9) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (10) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (11) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.

- (12) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 2,3,5,6.
- (13) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (14) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (15) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (16) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (17) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (18) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (20) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (21) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (22) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,5.
- (23) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,5.
- (24) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (25) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (26) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (27) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (28) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (29) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (30) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (32) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (33) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (34) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 3,4,5,6.

- (35) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (36) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (38) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (39) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (40) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (41) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (42) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,6.
- (43) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (44) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 3,4,5,6.
- (45) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (46) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 2,3,5,6.
- (47) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,3,4,6.
- (48) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 2,3,4,5.
- (49) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (50) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,3,4.
- (51) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,3,5,6.
- (53) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,4,6.
- (54) contém \mathcal{T}_2 formado pelos vértices 1,2,4,5.
- (56) contém \mathcal{T}_1 formado pelos vértices 1,2,4,6.

ii) Fazendo cálculos similares aos feitos na prova do Teorema 3.3.1 obtemos:

- A classe (19) admite métrica (1,2)-simplética se os elementos da matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 \\
 \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0,
 \end{array}$$

cujas soluções são:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45}.
 \end{array}$$

Então a métrica ds_{Λ}^2 é (1,2)-simplética para torneios da classe (19) se os λ_{ij} satisfazem as relações acima.

- De forma similar, para a classe (31) obtemos a seguinte solução:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{26} = \lambda_{12} + \lambda_{16} \\
 \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45}.
 \end{array}$$

- Para a classe (37) obtemos a solução:

$$\begin{aligned}
\lambda_{14} &= \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{45} & \lambda_{26} &= \lambda_{25} + \lambda_{45} + \lambda_{46} \\
\lambda_{15} &= \lambda_{12} + \lambda_{25} & \lambda_{34} &= \lambda_{36} + \lambda_{46} \\
\lambda_{16} &= \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{45} + \lambda_{46} & \lambda_{35} &= \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{25} \\
\lambda_{23} &= \lambda_{12} + \lambda_{13} & \lambda_{56} &= \lambda_{45} + \lambda_{46} \\
\lambda_{24} &= \lambda_{25} + \lambda_{45}.
\end{aligned}$$

- Finalmente, para a classe (55) obtemos a solução:

$$\begin{aligned}
\lambda_{13} &= \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{35} & \lambda_{26} &= \lambda_{12} + \lambda_{14} + \lambda_{46} \\
\lambda_{15} &= \lambda_{12} + \lambda_{25} & \lambda_{34} &= \lambda_{36} + \lambda_{46} \\
\lambda_{16} &= \lambda_{14} + \lambda_{46} & \lambda_{45} &= \lambda_{35} + \lambda_{36} + \lambda_{46} \\
\lambda_{23} &= \lambda_{25} + \lambda_{35} & \lambda_{56} &= \lambda_{35} + \lambda_{36} \\
\lambda_{24} &= \lambda_{12} + \lambda_{14}.
\end{aligned}$$

□

As correspondentes matrizes $\Lambda_{(19)}$, $\Lambda_{(31)}$, $\Lambda_{(37)}$ e $\Lambda_{(55)}$, para as quais as métricas ds^2_Λ sobre $F(6)$ são (1,2)-simpléticas, são apresentadas nas páginas finais deste capítulo

3.5 O caso $F(7)$

Estudar $F(7)$ é um pouco mais complicado, pois não existem os desenhos dos torneios representantes de cada classe de isomorfismo de torneios com 7 jogadores.

Existem 456 classes de isomorfismos de torneios com 7 jogadores ([M], pag. 87). No trabalho de Dias [D], êle fez um programa de computação

para gerar as matrizes de adjacência dos representantes de cada uma destas classes. A matriz de adjacência $M(\mathcal{T}) = (a_{ij})$ de um torneio \mathcal{T} é a matriz com entradas zeros e uns, definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \xrightarrow{\mathcal{T}} i \\ 1, & \text{se } i \xrightarrow{\mathcal{T}} j. \end{cases}$$

Obviamente conhecer a matriz de adjacência é o mesmo que ter o desenho do torneio.

Usamos as matrizes geradas em [D] junto com o programa Digraph, desenvolvido pelo professor Davide Carlo Demaria, para saber se eles contém ou não um dos torneios da Figura 1.6, e assim poder aplicar o Teorema 1.4.2. Encontramos que 446 classes de torneios não admitem métrica (1,2)-simplética e 10 sim. A Tabela 3.1 contém as matrizes de adjacência destas 10 classes. Entre os 10 que admitem estão os correspondentes as métricas de Kähler e as parabólicas, os 8 restantes fornecem métricas (1,2)-simpléticas diferentes destas.

Usando as matrizes de adjacência podemos desenhar os torneios que admitem métrica (1,2)-simplética. As Figuras 3.3 e 3.4 contém estes torneios com seu vetor placar respectivo.

A classe (1) corresponde às estruturas integráveis as quais contém as de Kähler. Pelo Teorema 2.1.3, a classe (10) corresponde a classe das estruturas parabólicas, as quais fornecem uma família 7-paramétrica de métricas (1,2)-simpléticas (Teorema 2.1.2). Para as outras classes temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5.1. *As classes de torneios (2) a (9), dadas nas Figuras 3.3 e 3.4, admitem métricas (1,2)-simpléticas diferentes das de Kähler e das*

[illegible]

Tabela 3.1: Matrizes dos 7-torneios que admitem métrica (1,2)-simplética

parabólicas.

Prova:

A demonstração é feita de forma similar a como foram demonstrados os Teoremas 3.3.1 e 3.4.1. Isto é, calculamos $d\Omega$ usando o Teorema 1.4.1 e depois vemos como deve ser a matriz Λ para que a correspondente métrica ds_Λ^2 seja (1,2)-simplética.

i) Para a classe (2) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{16} + \lambda_{26} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{16} + \lambda_{36} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{14} - \lambda_{16} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{15} - \lambda_{16} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{27} + \lambda_{37} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{27} + \lambda_{47} = 0 & \lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{25} - \lambda_{27} + \lambda_{57} = 0 & \lambda_{26} - \lambda_{27} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{37} + \lambda_{47} = 0 & \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{35} - \lambda_{37} + \lambda_{57} = 0 & \lambda_{36} - \lambda_{37} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 \\
 \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0.
 \end{array}$$

Então a métrica ds_A^2 é (1,2)-simplética se os λ_{ij} satisfazem

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
\lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
\lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
\lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{27} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\
\lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
\lambda_{37} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
\lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.
\end{array}$$

ii) Para a classe (3), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
\lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{16} + \lambda_{26} = 0 \\
\lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 \\
\lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{16} + \lambda_{36} = 0 \\
\lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{16} + \lambda_{46} = 0 \\
\lambda_{15} - \lambda_{16} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 \\
\lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 \\
\lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 \\
\lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 \\
\lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{37} + \lambda_{47} = 0 \\
\lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{35} - \lambda_{37} + \lambda_{57} = 0 \\
\lambda_{36} - \lambda_{37} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 \\
\lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 & \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 \\
\lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0, &
\end{array}$$

cujas soluções são:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{37} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.
 \end{array}$$

iii) Para a classe (4), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{16} + \lambda_{26} = 0 \\
 \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{16} + \lambda_{36} = 0 \\
 \lambda_{13} + \lambda_{17} - \lambda_{37} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{14} - \lambda_{16} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{15} - \lambda_{16} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 & \lambda_{23} + \lambda_{27} - \lambda_{37} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 \\
 \lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 \\
 \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0,
 \end{array}$$

com solução

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{37} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.
 \end{array}$$

iv) Para a classe (5), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{16} + \lambda_{26} = 0 \\
 \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{16} + \lambda_{36} = 0 \\
 \lambda_{13} + \lambda_{17} - \lambda_{37} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{14} - \lambda_{16} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{14} + \lambda_{17} - \lambda_{47} = 0 \\
 \lambda_{15} - \lambda_{16} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 \\
 \lambda_{23} + \lambda_{27} - \lambda_{37} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{24} + \lambda_{27} - \lambda_{47} = 0 \\
 \lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{34} + \lambda_{37} - \lambda_{47} = 0 \\
 \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0, &
 \end{array}$$

com solução

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{37} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{47} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.
 \end{array}$$

v) Para a classe (6), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 & -\lambda_{16} + \lambda_{17} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{37} + \lambda_{47} = 0 & \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{35} - \lambda_{37} + \lambda_{57} = 0 & \lambda_{36} - \lambda_{37} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 \\
 \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0,
 \end{array}$$

com solução

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{17} + \lambda_{67} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{37} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.
 \end{array}$$

vi) Para a classe (7), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{13} + \lambda_{17} - \lambda_{37} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 -\lambda_{16} + \lambda_{17} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{26} + \lambda_{36} = 0 \\
 \lambda_{23} + \lambda_{27} - \lambda_{37} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{24} - \lambda_{26} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{25} - \lambda_{26} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 \\
 \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 & \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0, &
 \end{array}$$

com solução

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{17} + \lambda_{67} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{26} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{37} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}
 \end{array}$$

vii) Para a classe (8), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} + \lambda_{16} - \lambda_{26} = 0 \\
 \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 -\lambda_{16} + \lambda_{17} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 -\lambda_{26} + \lambda_{27} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{37} + \lambda_{47} = 0 \\
 \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{35} - \lambda_{37} + \lambda_{57} = 0 \\
 \lambda_{36} - \lambda_{37} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 & \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0, &
 \end{array}$$

com solução

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\
 \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{17} + \lambda_{67} \\
 \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\
 \lambda_{26} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{37} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\
 \lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.
 \end{array}$$

viii) Para a classe (9), obtemos o sistema de equações

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} + \lambda_{16} - \lambda_{26} = 0 \\
 \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{27} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 & \lambda_{13} + \lambda_{17} - \lambda_{37} = 0 \\
 \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 & -\lambda_{16} + \lambda_{17} + \lambda_{67} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{23} + \lambda_{27} - \lambda_{37} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 -\lambda_{26} + \lambda_{27} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{36} + \lambda_{46} = 0 & \lambda_{35} - \lambda_{36} + \lambda_{56} = 0 \\
 \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{47} + \lambda_{57} = 0 \\
 \lambda_{46} - \lambda_{47} + \lambda_{67} = 0 & \lambda_{56} - \lambda_{57} + \lambda_{67} = 0,
 \end{array}$$

com solução

$$\begin{array}{ll}\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\ \lambda_{15} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} = \lambda_{17} + \lambda_{67} \\ \lambda_{24} = \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{25} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} \\ \lambda_{26} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{27} = \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{35} = \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{37} = \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{46} = \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{47} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{57} = \lambda_{56} + \lambda_{67}.\end{array}$$

□

As páginas finais deste capítulo contém as matrizes Λ correspondentes.

Lembremos que Wolf e Gray [WG] provaram o seguinte resultado: a métrica normal sobre $F(n)$ não é (1,2)-simplética para $n \geq 4$. O caso $n = 4$ foi provado por Mo e Negreiros em [MN2]. Como consequência de nossos resultados, obtemos uma prova simples deste Teorema para $n = 5, 6, 7$.

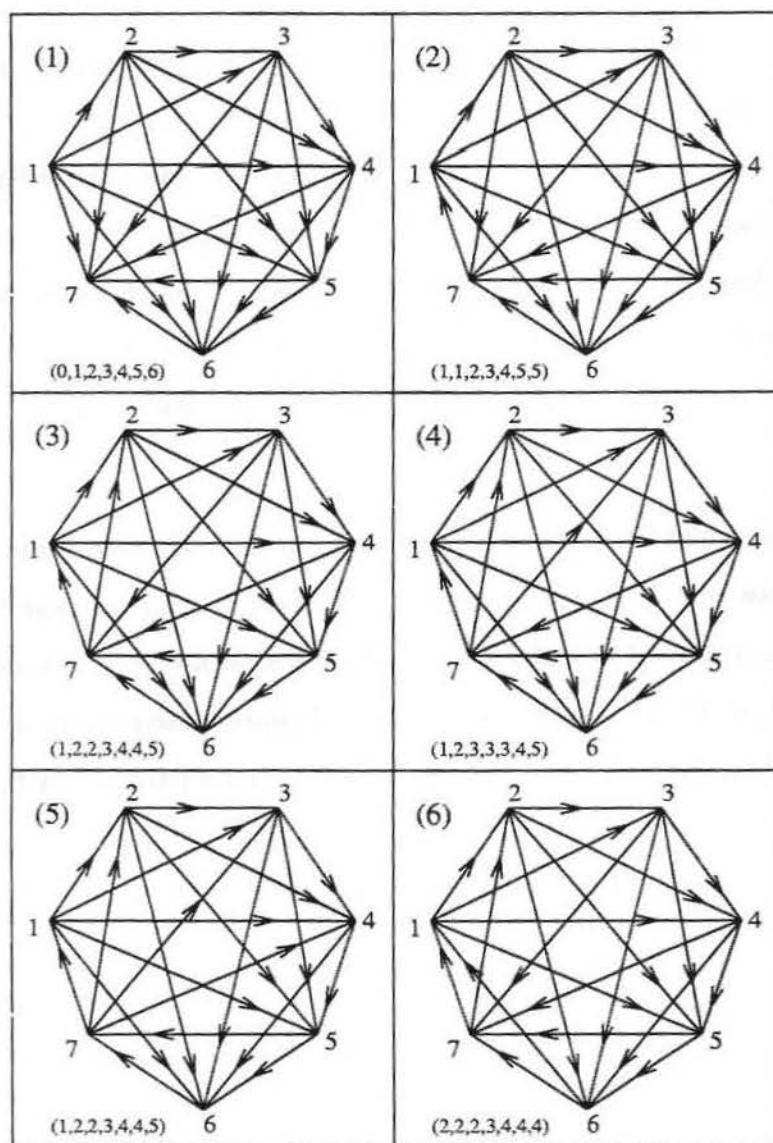


Figura 3.3: Classes de isomorfismos de 7-torneios que admitem métrica (1,2)-simplética

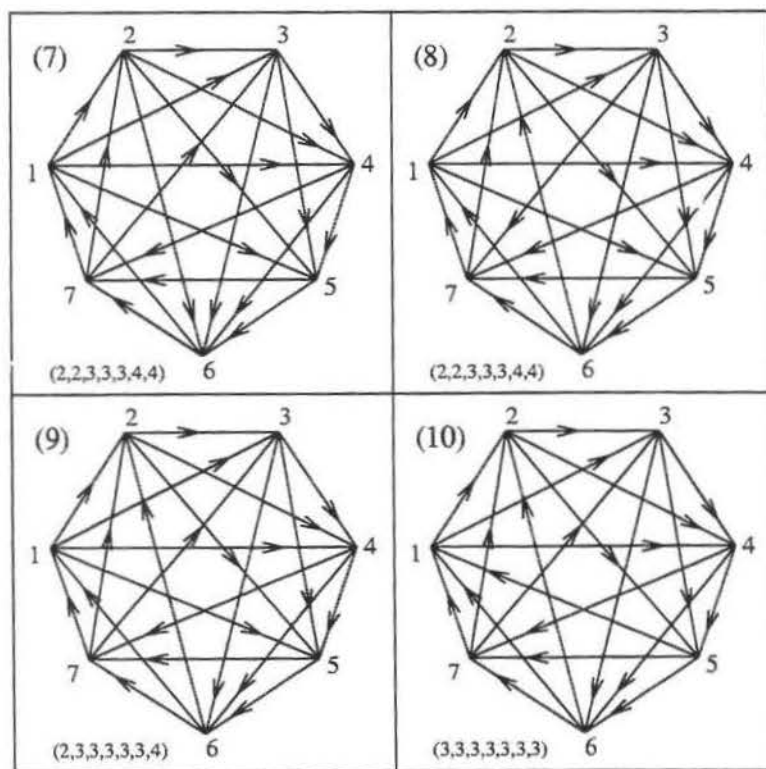


Figura 3.4: Classes de isomorfismos de 7-torneios que admitem métrica $(1,2)$ -simplética

$$\Lambda_{(19)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} \\ \lambda_{16} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{(31)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{16} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{16} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} \\ \lambda_{16} & \lambda_{12} + \lambda_{16} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(37)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{25} & \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{45} + \lambda_{46} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{12} + \lambda_{13} & \lambda_{25} + \lambda_{45} & \lambda_{25} & \lambda_{25} + \lambda_{45} + \lambda_{46} \\ \lambda_{13} & \lambda_{12} + \lambda_{13} & 0 & \lambda_{36} + \lambda_{46} & \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{25} & \lambda_{36} \\ \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{45} & \lambda_{25} + \lambda_{45} & \lambda_{36} + \lambda_{46} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{46} \\ \lambda_{12} + \lambda_{25} & \lambda_{25} & \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{25} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{45} + \lambda_{46} \\ \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{45} + \lambda_{46} & \lambda_{25} + \lambda_{45} + \lambda_{46} & \lambda_{36} & \lambda_{46} & \lambda_{45} + \lambda_{46} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(55)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{35} & \lambda_{14} & \lambda_{12} + \lambda_{25} & \lambda_{14} + \lambda_{46} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{25} + \lambda_{35} & \lambda_{12} + \lambda_{14} & \lambda_{25} & \lambda_{12} + \lambda_{14} + \lambda_{46} \\ \lambda_{12} + \lambda_{25} + \lambda_{35} & \lambda_{25} + \lambda_{35} & 0 & \lambda_{36} + \lambda_{46} & \lambda_{35} & \lambda_{36} \\ \lambda_{14} & \lambda_{12} + \lambda_{14} & \lambda_{36} + \lambda_{46} & 0 & \lambda_{35} + \lambda_{36} + \lambda_{46} & \lambda_{46} \\ \lambda_{12} + \lambda_{25} & \lambda_{25} & \lambda_{35} & \lambda_{35} + \lambda_{36} + \lambda_{46} & 0 & \lambda_{35} + \lambda_{36} \\ \lambda_{14} + \lambda_{46} & \lambda_{12} + \lambda_{14} + \lambda_{46} & \lambda_{36} & \lambda_{46} & \lambda_{35} + \lambda_{36} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda_{(3)} = \begin{pmatrix}
 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{17} \\
 \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\
 \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\
 \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\
 \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\
 \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 & \lambda_{67} \\
 \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{67} & 0
 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{17} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 & \lambda_{67} \\ \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{17} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 & \lambda_{67} \\ \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{17} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 & \lambda_{67} \\ \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{17} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 & \lambda_{67} \\ \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(8)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{17} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & 0 \\ \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{17} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{17} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \lambda_{56} + \lambda_{67} \\ \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{67} & \lambda_{34} + \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{45} + \lambda_{56} & \lambda_{56} & \lambda_{67} \\ \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} & \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{23} & \lambda_{45} + \lambda_{56} + \lambda_{67} & \lambda_{56} + \lambda_{67} & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Métricas (1,2)-Simpléticas sobre $F(n)$

Neste capítulo generalizamos quatro famílias de métricas (1,2)-simpléticas obtidas no capítulo anterior. Os resultados deste capítulo fornecem novas famílias n -paramétricas de métricas (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$. Além disso, obtemos um resultado mais geral (Teorema 4.5.1) o qual inclui os quatro teoremas mencionados acima. Também são apresentadas algumas caracterizações dos torneios correspondentes.

Usaremos a notação de Moon em [M] para torneios. Essa notação facilitou o entendimento e a obtenção dos resultados apresentados neste capítulo. Vejamos através de um exemplo a equivalência das duas notações. Os torneios da Figura 4.1 são os mesmos. A representação do lado esquerdo é a que nós usamos e a do lado direito é a usada por Moon. Em nossa notação entre cada par de vértices do torneio sempre existe um arco, enquanto que na representação de Moon existem pares de vértices entre os quais não existe nenhum

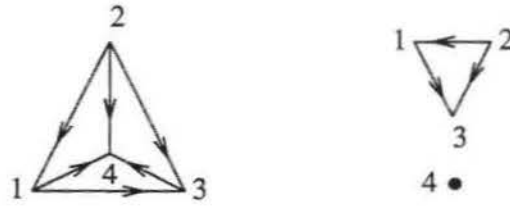


Figura 4.1: Notação de Moon

arco. Na notação de Moon deve ser entendido que, entre os vértices que não tem arco, existe um arco orientado indo de cada vértice superior para cada vértice inferior.

4.1 Primeira Família de Métricas

Os representantes das classes de torneios (4) na Figura 3.2, (7) na Figura 2.3, (19) na Figura 2.4 e (2) na Figura 3.3 podem ser representados, usando a notação de Moon, na forma como são apresentados na Figura 4.2. A Figura 4.3 contém o torneio correspondente para $F(n)$.

Teorema 4.1.1. *Suponha que J é uma estrutura quase-complexa invariante sobre $F(n)$, $n \geq 4$, tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é o torneio da Figura 4.3. Então uma métrica invariante à esquerda ds_Λ^2 é $(1,2)$ -simplética relativa a J se e somente se a matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfaz, salvo permutações, a equação*

$$\lambda_{ik} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \cdots + \lambda_{(k-1)k}$$

para $i = 1, \dots, n-1$ e $k = 2, \dots, n$, exceto para λ_{1n} .

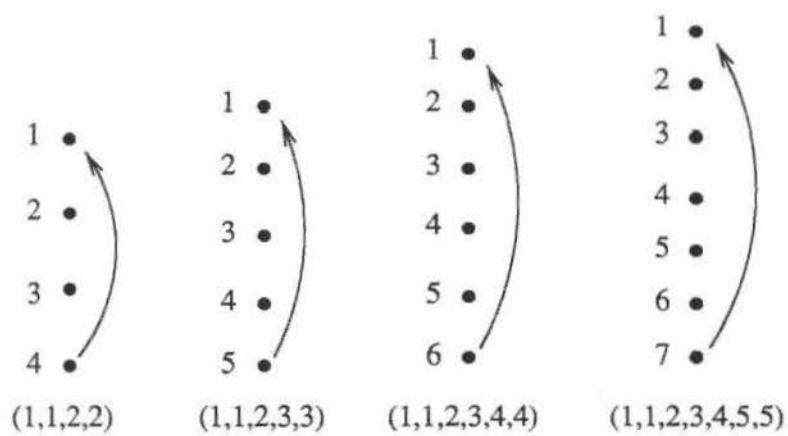


Figura 4.2: Torneios da Primeira Família

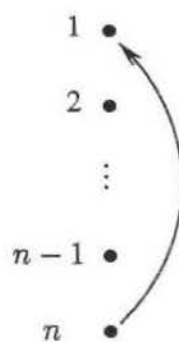


Figura 4.3: Torneio do Teorema 4.1.1

A matriz correspondente Λ^1 tem a forma:

$$\Lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova: Fazemos indução sobre n , começando com $n = 4$. Na seção 3.2, vimos que o resultado é verdadeiro para $n = 4$, e mais ainda, nas seções 3.3, 3.4 e 3.5 provamos que o resultado é verdadeiro para $n = 5, 6, 7$ respectivamente.

Suponha que o resultado é verdadeiro para $n - 1$. Isto significa então que a matriz Λ^1 para $n - 1$ tem a forma:

$$\Lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-3)(n-2)} & \lambda_{1(n-1)} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-3)(n-2)} & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-3)(n-2)} & \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\ * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-2)(n-1)} \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vejamos para n que acontece. Para calcular $d\Omega$ devemos considerar duas classes de 3-subtorneios do torneio $\mathcal{T}(J)$:

- (a) $i < j < k$, $i \neq 1$ ou $k \neq n$. Então $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk} = 1$ e $C_{ijk} = \lambda_{ij} - \lambda_{ik} + \lambda_{jk} \neq 0$.
- (b) $1 < j < n$. Então $\varepsilon_{1j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{1n} = -1$ e $C_{1jn} = \lambda_{1j} + \lambda_{1n} + \lambda_{jn} \neq 0$.

Por (b) obtemos

$$(d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{0,3} = \sum_{j=2}^{n-1} C_{1jn} \Psi_{1jn} \neq 0$$

e (a) nos fornece

$$(d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2} = \sum_{i < j < k} C_{ijk} \Psi_{ijk}, \quad i \neq 1, \quad k \neq n.$$

Assim, ds_{Λ}^2 é (1,2)-simplética se e somente se os λ_{ij} satisfazem o sistema linear

$$\begin{aligned} \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} &= 0 \\ \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \\ \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{13} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\ \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{1(n-2)} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} &= 0 \\ \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{23} - \lambda_{2n} + \lambda_{3n} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \\ \lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, este sistema contém todas as equações do sistema correspondente para $n - 1$. Então todos os elementos da matriz Λ^1 para $n - 1$ se repetem para n , exceto o elemento $\lambda_{1(n-1)}$. Precisamos então

ver como se escrevem os elementos $\lambda_{1(n-1)}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \dots, \lambda_{(n-2)n}$. Usando o sistema acima temos

$$\begin{aligned}\lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{2(n-1)} \\ &\implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)}\end{aligned}$$

$$\lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} = 0 \implies \lambda_{(n-2)n} = \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)n} \\ &\implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} + \\ &\quad + \lambda_{(n-1)n}\end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned}\lambda_{23} - \lambda_{2n} + \lambda_{3n} &= 0 \implies \lambda_{2n} = \lambda_{23} + \lambda_{3n} \\ &\implies \lambda_{2n} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-1)n}.\end{aligned}$$

□

Observações:

- Em $F(4)$ a família obtida nesta seção coincide com a obtida por Mo e Negreiros (Teorema 2.1.2), pois para $n = 4$ os torneios da família da Figura 4.3 coincidem com os torneios da classe das estruturas parabólicas. Enquanto que para $n \geq 5$, a família obtida aqui é diferente daquela de Mo e Negreiros.
- Os torneios do Teorema 4.1.1 são irredutíveis.
- Dado um torneio que pertence a esta família, todo subtorneio de ordem 4, ou é irredutível ou é transitivo (ver Figura 0.1).

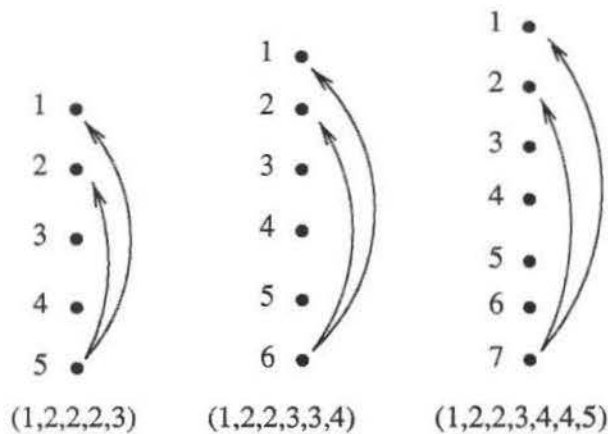


Figura 4.4: Torneios da Segunda Família

- O vetor placar dos torneios desta família (Figura 4.3), pode ser escrito na forma

$$(1, 1, 2, \dots, n-2, n-2)$$

para $n \geq 4$.

4.2 Segunda Família de Métricas

A família que descrevemos nesta seção só faz sentido para $n \geq 5$, isto é, não tem equivalente para $n = 4$. Os representantes das classes (9) na Figura 2.3, (31) na Figura 2.5 e (3) na Figura 3.3 podem ser representados, usando a notação de Moon [M], como os torneios da Figura 4.4. A Figura 4.5 contém o torneio correspondente para $F(n)$.

Teorema 4.2.1. *Suponha que J é uma estrutura quase-complexa invariante sobre $F(n)$, $n \geq 5$, tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é o torneio da Figura*

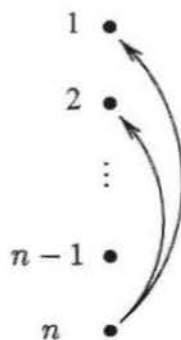


Figura 4.5: Torneio do Teorema 4.2.1

4.5. Então uma métrica invariante à esquerda ds_Λ^2 é $(1,2)$ -simplética relativa a J se e somente se a matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfaz, salvo permutações, a equação

$$\lambda_{ik} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \cdots + \lambda_{(k-1)k}$$

para $i = 1, \dots, n-1$ e $k = 2, \dots, n$, exceto para λ_{1n} e λ_{2n} , para os quais temos que $\lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n}$.

Agora a matriz Λ^2 fica

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova: Novamente fazemos indução sobre n , só que desta vez a indução começa com $n = 5$. Nas seções 3.3 e 3.4, provou-se que o resultado é verdade para $n = 5$ e 6 respectivamente. Suponha que o resultado é verdade para $n-1$. Então a matriz Λ^2 tem a seguinte forma para $n-1$:

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-3)(n-2)} & \lambda_{1(n-1)} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-3)(n-2)} & \lambda_{12} + \lambda_{1(n-1)} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-3)(n-2)} & \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\ * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-2)(n-1)} \\ * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Provemos então que a afirmação é verdadeira para n . Para calcular os C_{ijk} , devemos considerar 4 tipos de 3-subtorneios do torneio $\mathcal{T}(J)$:

- (a) $1 < j < n$, $j \neq 2$. Então $\varepsilon_{1j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{1n} = -1$ e $C_{1jn} = \lambda_{1j} + \lambda_{1n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (b) $2 < j < n$. Então $\varepsilon_{2j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{2n} = -1$ e $C_{2jn} = \lambda_{2j} + \lambda_{2n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (c) $i = 1$, $j = 2$, $k = n$. Então $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_{1n} = -1$ e $C_{12n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n}$.
- (d) $i < j < k$, e i, j e k não satisfazem nenhum dos casos anteriores. Então $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk} = 1$ e $C_{ijk} = \lambda_{ij} - \lambda_{ik} + \lambda_{jk}$.

Assim, temos que de (a) e (b) obtemos

$$(d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{0,3} = \sum_{j=2}^{n-1} C_{1jn} \Psi_{1jn} + C_{2jn} \Psi_{2jn} \neq 0$$

e de (c) e (d) obtemos

$$(d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2} = \sum_{i < j < k} C_{ijk} \Psi_{ijk} + C_{12n} \Psi_{12n}, \quad i \neq 1, 2 \quad k \neq n.$$

Portanto, ds_{Λ}^2 é $(1,2)$ -simplética se e somente se os λ_{ij} satisfazem o sistema linear

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} &= 0 \\
\lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} &= 0 \\
\lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{13} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{1(n-2)} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{34} - \lambda_{3n} + \lambda_{4n} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \\
\lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0.
\end{aligned}$$

Este sistema contém todas as equações do sistema correspondente para $n - 1$, exceto a equação dada pelo 3-torneio $(12(n - 1))$. No sistema, para $n - 1$ a equação dada por este 3-torneio é

$$\lambda_{12} + \lambda_{1(n-1)} - \lambda_{2(n-1)} = 0$$

enquanto que no sistema acima é

$$\lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} = 0.$$

Isto acontece porque no torneio correspondente ao caso $n - 1$, os vértices 1 e 2 perdem para o vértice $n - 1$, e no caso n , 1 e 2 ganham de $n - 1$. Então pela hipótese de indução, todos os elementos da matriz Λ^2 para $n - 1$ se repetem para n exceto os elementos $\lambda_{1(n-1)}$ e $\lambda_{2(n-1)}$. Precisamos então ver como se escrevem os elementos $\lambda_{1(n-1)}, \lambda_{2(n-1)}, \lambda_{2n}, \lambda_{3n}, \dots, \lambda_{(n-2)n}$. Usando o sistema acima temos

$$\begin{aligned}
 \lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} &= 0 \implies \lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\
 \lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{23} + \lambda_{3(n-1)} \\
 &\implies \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\
 \lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{2(n-1)} \\
 &\implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\
 \lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-2)n} = \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\
 \lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)n} \\
 &\implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\
 &\vdots \\
 \lambda_{34} - \lambda_{3n} + \lambda_{4n} &= 0 \implies \lambda_{3n} = \lambda_{34} + \lambda_{4n} \\
 &\implies \lambda_{3n} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \dots + \lambda_{(n-1)n}.
 \end{aligned}$$

□

A família obtida nesta seção é diferente da parabólica (Teorema 2.1.2). Os torneios desta família são todos irredutíveis e para cada um deles se tem que todo subtorneio de ordem 4, ou é irredutível ou é transitivo. O vetor placar dos torneios da Figura 4.5 pode ser escrito na forma

$$(1, 2, 2, \dots, n-3, n-3, n-2)$$

para $n \geq 5$.

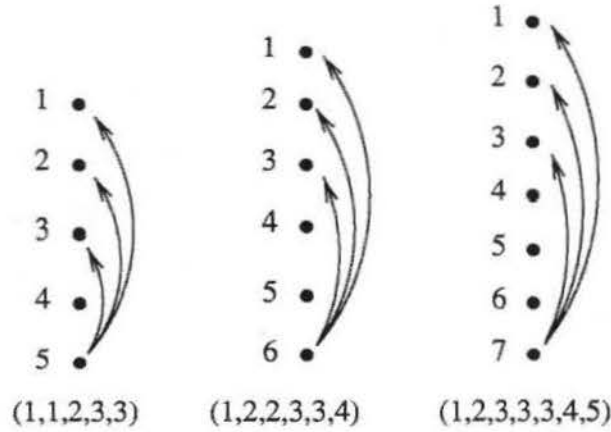


Figura 4.6: Torneios de Terceira Família

4.3 Terceira Família de Métricas

Consideremos agora os torneios da Figura 4.6. O primeiro é o mesmo que (7) da Figura 2.3. O segundo é isomorfo ao (37) na Figura 2.5, e a seguinte permutação é um isomorfismo do torneio (37) para este

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

E o terceiro é o (4) na Figura 3.3. Para este tipo de torneios temos o seguinte resultado

Teorema 4.3.1. *Suponha que J é uma estrutura quase-complexa invariante sobre $F(n)$, $n \geq 6$, tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é o torneio da Figura 4.7. Então uma métrica invariante à esquerda ds_Λ^2 é $(1,2)$ -simplética relativa a J se e somente se a matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfaz, salvo permutações, a equação*

$$\lambda_{ik} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \cdots + \lambda_{(k-1)k}$$



Figura 4.7: Torneio do Teorema 4.3.1

para $i = 1, \dots, n-1$ e $k = 2, \dots, n$, exceto para λ_{1n} , λ_{2n} e λ_{3n} os quais satisfazem as relações: $\lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n}$ e $\lambda_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n}$

A matriz Λ^3 para este caso é apresentada na página 104 neste mesmo capítulo.

Prova: Fazemos indução sobre n , começando com $n = 6$. Usamos a nova representação do torneio para $n = 6$, ou seja usamos o segundo torneio na Figura 4.6. Fazendo os cálculos como os feitos na prova do Teorema 3.3.1 encontramos que a matriz Λ^3 correspondente deve satisfazer o sistema:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} = 0 & \lambda_{12} - \lambda_{14} + \lambda_{24} = 0 \\
 \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{25} = 0 & \lambda_{12} + \lambda_{16} - \lambda_{26} = 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{13} - \lambda_{15} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{13} + \lambda_{16} - \lambda_{36} = 0 & \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} = 0 & \lambda_{23} - \lambda_{25} + \lambda_{35} = 0 \\
 \lambda_{23} + \lambda_{26} - \lambda_{36} = 0 & \lambda_{24} - \lambda_{25} + \lambda_{45} = 0 \\
 \lambda_{34} - \lambda_{35} + \lambda_{45} = 0 & \lambda_{45} - \lambda_{46} + \lambda_{56} = 0.
 \end{array}$$

Resolvendo este sistema, temos que a correspondente métrica ds_A^2 é (1,2)-simplética se e somente se os λ_{ij} satisfazem

$$\begin{aligned}\lambda_{13} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{14} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \\ \lambda_{15} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{24} &= \lambda_{23} + \lambda_{34} \\ \lambda_{25} &= \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{26} &= \lambda_{12} + \lambda_{16} \\ \lambda_{35} &= \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{36} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{16} \\ \lambda_{46} &= \lambda_{45} + \lambda_{56},\end{aligned}$$

ou seja, o resultado é verdadeiro para $n = 6$.

Suponhamos que o resultado é verdadeiro para $n - 1$ e provemos que também é verdadeiro para n . Para calcular os C_{ijk} , devemos considerar 5 tipos de subtorneios do torneio $\mathcal{T}(J)$:

- (a) $1 < j < n$, $j \neq 2, 3$. Então $\varepsilon_{1j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{1n} = -1$ e $C_{1jn} = \lambda_{1j} + \lambda_{1n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (b) $2 < j < n$, $j \neq 3$. Então $\varepsilon_{2j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{2n} = -1$ e $C_{2jn} = \lambda_{2j} + \lambda_{2n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (c) $3 < j < n$. Então $\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{3n} = -1$ e $C_{3jn} = \lambda_{3j} + \lambda_{3n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (d) $C_{12n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n}$, $C_{13n} = \lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n}$ e $C_{23n} = \lambda_{23} + \lambda_{2n} - \lambda_{3n}$.
- (e) $i < j < k$, e i, j e k não satisfazem nenhum dos casos anteriores. Então $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk} = 1$ e $C_{ijk} = \lambda_{ij} - \lambda_{ik} + \lambda_{jk}$.

(a), (b) e (c) nos dão os coeficientes da parte (3,0) de $d\Omega$ que será diferente de zero, enquanto que (d) e (e) dão conta da parte (1,2) de $d\Omega$. De (d) e (e)

temos que a métrica ds_Λ^2 é (1,2)-simplética se e somente se os λ_{ij} satisfazem o sistema linear

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} &= 0 \\
\lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{13} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n} &= 0 \\
\lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{1(n-2)} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\
\lambda_{23} + \lambda_{2n} - \lambda_{3n} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{34} - \lambda_{3(n-1)} + \lambda_{4(n-1)} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{45} - \lambda_{4n} + \lambda_{5n} &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \\
\lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0.
\end{aligned}$$

Este sistema contém todas as equações correspondentes para o caso $n-1$, exceto as equações correspondentes aos 3-torneios $(12(n-1))$, $(13(n-1))$ e $(23(n-1))$. Então pela hipótese de indução todos os elementos da matriz Λ^3

para $n - 1$, se repetem à exceção dos elementos $\lambda_{1(n-1)}$, $\lambda_{2(n-1)}$ e $\lambda_{3(n-1)}$. Assim, devemos calcular $\lambda_{1(n-1)}$, $\lambda_{2(n-1)}$, $\lambda_{3(n-1)}$, λ_{2n} , λ_{3n} , \dots , $\lambda_{(n-2)n}$. Usando o sistema acima temos

$$\lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} = 0 \implies \lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n} &= 0 \implies \lambda_{3n} = \lambda_{13} + \lambda_{1n} \\ &\implies \lambda_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{34} - \lambda_{3(n-1)} + \lambda_{4(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{3(n-1)} = \lambda_{34} + \lambda_{4(n-1)} \\ &\implies \lambda_{3(n-1)} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{23} + \lambda_{3(n-1)} \\ &\implies \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{2(n-1)} \\ &\implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} = 0 \implies \lambda_{(n-2)n} = \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)n} \\ &\implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} \lambda_{45} - \lambda_{4n} + \lambda_{5n} &= 0 \implies \lambda_{4n} = \lambda_{45} + \lambda_{5n} \\ &\implies \lambda_{4n} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \dots + \lambda_{(n-1)n} \end{aligned}$$

□

Como nos casos anteriores, a família obtida nesta seção é diferente das já conhecidas e os torneios correspondentes são irredutíveis. Além disso, dado um torneio destes, cada subtorneio de ordem 4, ou é irredutível ou é transitivo. O vetor placar dos torneios da Figura 4.7 pode ser escrito na forma:

$$(1, 2, 3, 3, \dots, n-4, n-4, n-3, n-2), \quad \text{para } n \geq 7.$$

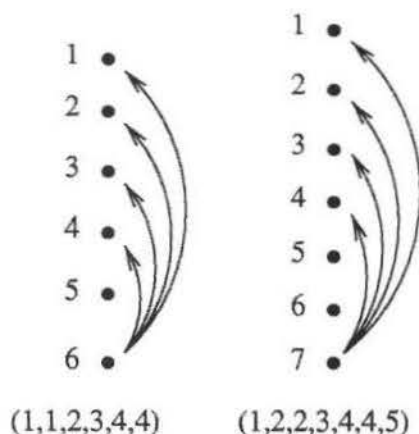


Figura 4.8: Torneios da Quarta Família

4.4 Quarta Família de Métricas

Nesta seção consideramos os torneios da Figura 4.8. O primeiro é o mesmo torneio (19) na Figura 2.4 e o segundo é o torneio (5) na Figura 3.3.

Teorema 4.4.1. *Suponha que J é uma estrutura quase-compleza invariante sobre $F(n)$, $n \geq 7$, tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é o torneio da Figura 4.9. Então uma métrica invariante à esquerda ds_{Λ}^2 é $(1,2)$ -simplética relativa a J se e somente se a matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfaz, salvo permutações, a equação*

$$\lambda_{ik} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \cdots + \lambda_{(k-1)k}$$

para $i = 1, \dots, n-1$ e $k = 2, \dots, n$, exceto para λ_{1n} , λ_{2n} , λ_{3n} e λ_{4n} para os quais temos as seguintes relações: $\lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n}$, $\lambda_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n}$ e $\lambda_{4n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n}$

A matriz Λ^4 para este caso é apresentada na página 105 deste capítulo.

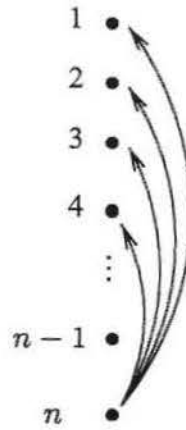


Figura 4.9: Torneio do Teorema 4.4.1

Prova: Fazamos indução sobre n , começando com $n = 7$. Na secção 3.5, já provamos que a afirmação é verdadeira para $n = 7$. Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n - 1$ e provemos que também é verdade para n . Desta vez, para calcular os C_{ijk} , precisamos considerar 6 casos:

- (a) $1 < j < n$, $j \neq 2, 3, 4$. Então $\varepsilon_{1j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{1n} = -1$ e $C_{1jn} = \lambda_{1j} + \lambda_{1n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (b) $2 < j < n$, $j \neq 3, 4$. Então $\varepsilon_{2j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{2n} = -1$ e $C_{2jn} = \lambda_{2j} + \lambda_{2n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (c) $3 < j < n$, $j \neq 4$. Então $\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{3n} = -1$ e $C_{3jn} = \lambda_{3j} + \lambda_{3n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (d) $4 < j < n$. Então $\varepsilon_{4j} = \varepsilon_{jn} = 1$, $\varepsilon_{4n} = -1$ e $C_{4jn} = \lambda_{4j} + \lambda_{4n} + \lambda_{jn} \neq 0$.
- (e) $C_{12n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n}$, $C_{13n} = \lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n}$, $C_{14n} = \lambda_{14} + \lambda_{1n} - \lambda_{4n}$, $C_{23n} = \lambda_{23} + \lambda_{2n} - \lambda_{3n}$, $C_{24n} = \lambda_{24} + \lambda_{2n} - \lambda_{4n}$ e $C_{34n} = \lambda_{34} + \lambda_{3n} - \lambda_{4n}$.

(f) $i < j < k$, e i, j e k não satisfazem nenhum dos casos anteriores.

Então $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk} = 1$ e $C_{ijk} = \lambda_{ij} - \lambda_{ik} + \lambda_{jk}$.

(a), (b), (c) e (d) nos dão os coeficientes da parte (3,0) de $d\Omega$ que será diferente de zero, enquanto que (e) e (f) dão conta da parte (1,2) de $d\Omega$. De (e) e (f) temos que a métrica ds^2_Λ é (1,2)-simplética se e somente se os λ_{ij} satisfazem o sistema linear

$$\begin{aligned}
 \lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{23} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \\
 \lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} &= 0 \\
 \lambda_{13} - \lambda_{14} + \lambda_{34} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{13} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\
 \lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n} &= 0 \\
 \lambda_{14} - \lambda_{15} + \lambda_{45} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{14} + \lambda_{1n} - \lambda_{4n} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{1(n-2)} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} &= 0 \\
 \lambda_{23} - \lambda_{24} + \lambda_{34} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \\
 \lambda_{23} + \lambda_{2n} - \lambda_{3n} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{24} + \lambda_{2n} - \lambda_{4n} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{34} - \lambda_{3(n-1)} + \lambda_{4(n-1)} &= 0 \\
 \lambda_{34} + \lambda_{3n} - \lambda_{4n} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{45} - \lambda_{4(n-1)} + \lambda_{5(n-1)} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{56} - \lambda_{5n} + \lambda_{6n} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \\
 \lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0.
 \end{aligned}$$

Este sistema contém todas as equações correspondentes para o caso $n-1$,

exceto as equações para os 3-torneios $(12(n-1))$, $(13(n-1))$, $(14(n-1))$, $(23(n-1))$, $(24(n-1))$ e $(34(n-1))$. Então, pela hipótese de indução, todos os elementos da matriz Λ^4 , para $n-1$, se repetem à exceção dos elementos $\lambda_{1(n-1)}$, $\lambda_{2(n-1)}$, $\lambda_{3(n-1)}$, $\lambda_{4(n-1)}$. Além disso, devemos calcular λ_{2n} , λ_{3n} , \dots , $\lambda_{(n-2)n}$. Usando o sistema acima temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} &= 0 \implies \lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\
\lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n} &= 0 \implies \lambda_{3n} = \lambda_{13} + \lambda_{1n} \\
&\implies \lambda_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\
\lambda_{14} + \lambda_{1n} - \lambda_{4n} &= 0 \implies \lambda_{4n} = \lambda_{14} + \lambda_{1n} \\
&\implies \lambda_{4n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n} \\
\lambda_{45} - \lambda_{4(n-1)} + \lambda_{5(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{4(n-1)} = \lambda_{45} + \lambda_{5(n-1)} \\
&\implies \lambda_{4(n-1)} = \lambda_{45} + \lambda_{56} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\
\lambda_{34} - \lambda_{3(n-1)} + \lambda_{4(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{3(n-1)} = \lambda_{34} + \lambda_{4(n-1)} \\
&\implies \lambda_{3(n-1)} = \lambda_{34} + \lambda_{45} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\
\lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{23} + \lambda_{3(n-1)} \\
&\implies \lambda_{2(n-1)} = \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\
\lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} &= 0 \implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{2(n-1)} \\
&\implies \lambda_{1(n-1)} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} \\
\lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-2)n} = \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\
\lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)n} \\
&\implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\
&\vdots \\
\lambda_{56} - \lambda_{5n} + \lambda_{6n} &= 0 \implies \lambda_{5n} = \lambda_{56} + \lambda_{6n} \\
&\implies \lambda_{5n} = \lambda_{56} + \lambda_{67} + \dots + \lambda_{(n-1)n}.
\end{aligned}$$

□

Assim como nos três casos anteriores, a família obtida nesta seção é dife-

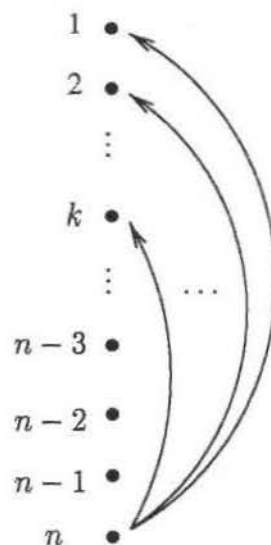


Figura 4.10: Torneio do Teorema 4.5.1

rente das já conhecidas, os torneios correspondentes são irredutíveis e para cada um destes tem-se que cada subtorneio de ordem 4, ou é irredutível ou é transitivo. O vetor placar dos torneios da Figura 4.9 pode ser escrito como:

$$(1, 2, 3, 4, 4, \dots, n-5, n-5, n-4, n-3, n-2)$$

para $n \geq 9$.

4.5 Uma Família mais Geral

Os resultados obtidos nas quatro primeiras seções deste capítulo sugerem considerar os torneios dados pela Figura 4.10, para $1 \leq k \leq n-3$.

A condição $1 \leq k \leq n-3$ é natural pois, se $k = n-2$, obtemos o torneio da Figura 4.11 que é o mesmo torneio da Figura 4.3. Isto é fácil de ver

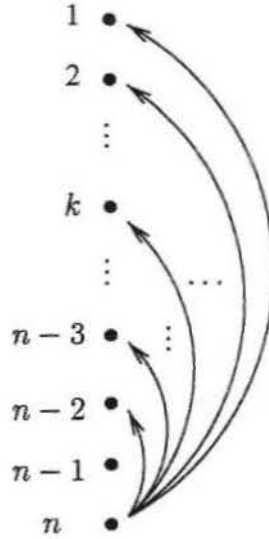


Figura 4.11: $1 \leq k \leq n - 3$

renomeando os vértices do torneio da Figura 4.11 assim: $n = 1$, $1 = 2$, $2 = 3, \dots, n - 1 = n$. Quando $k = n - 1$, o mesmo argumento mostra que o torneio obtido é o n -torneio canônico.

Teorema 4.5.1. *Suponha que J é uma estrutura quase-complexa invariante sobre $F(n)$, tal que o torneio associado $\mathcal{T}(J)$ é o torneio da Figura 4.10. Então uma métrica invariante à esquerda ds_Λ^2 é $(1, 2)$ -simpletica relativa a J se e somente se a matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfaz, salvo permutações, a equação*

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \dots + \lambda_{(j-1)j}$$

para $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = 2, \dots, n$, exceto para $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{kn}$, para os quais as seguintes relações são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n} &= \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\
\lambda_{3n} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\
&\vdots \\
\lambda_{kn} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{1n}
\end{aligned}$$

A última página deste capítulo contém a matriz Λ^k correspondente a este Teorema.

Prova: Novamente a prova é feita por indução sobre n , começando com $n = 4$ e fixando k . Os Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 e 4.4.1 mostram que o resultado é verdadeiro para $n = 4, 5, 6, 7$. Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n - 1$ e provemos que é verdadeira para n .

Precisamos calcular os C_{ijl} contidos na fórmula de $d\Omega$ (ver Teorema 1.4.1). Temos três tipos de 3-subtorneios do torneio $\mathcal{T}(J)$ para considerar:

- (a) Os 3-ciclos do torneio da Figura 4.10 nos darão a parte $(3,0)$ de $d\Omega$ que será não nula. Para este caso temos:

$$C_{ijn} = \lambda_{ij} + \lambda_{in} + \lambda_{jn} \neq 0$$

para $k < j < n$ e $i = 1, \dots, k$.

- (b) A segunda classe de subtorneios de ordem 3 do torneio da Figura 4.10 a considerar são os da forma (ijn) , com $i < j \leq k$ e $i = 1, 2, \dots, k-1$. Para esta classe de subtorneios temos:

$$C_{ijn} = \lambda_{ij} + \lambda_{in} - \lambda_{jn}.$$

- (c) O último caso que considerar é daqueles subtorneios de ordem 3 que não satisfazem nem (a) nem (b). Para este caso temos

$$C_{ijl} = \lambda_{ij} - \lambda_{il} + \lambda_{jl}, \quad i < j < l.$$

Os itens (b) e (c) nos dão a informação necessária para calcular a parte (1,2) de $d\Omega$. A métrica ds_A^2 é (1,2)-simplética se e somente se a matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$ satisfaz

$$\begin{cases} (1) & \lambda_{ij} + \lambda_{in} - \lambda_{jn} = 0; & i < j \leq k, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \\ (2) & \lambda_{ij} - \lambda_{il} + \lambda_{jl} = 0; & i < j < l, \quad \text{não satisfazem (a) e (b)}. \end{cases}$$

(1) e (2) incluem todas as equações correspondentes ao caso $n-1$, à exceção das equações dadas pelos seguintes 3-torneios:

$$(ij(n-1)), \quad \text{com } i = 1, \dots, k-1, \quad j = 2, \dots, k, \quad \text{e } i < j.$$

Daqui e da hipótese de indução, os elementos da matriz Λ^k correspondentes a $n-1$ se repetem no caso n , exceto os elementos $\lambda_{1(n-1)}, \lambda_{2(n-1)}, \dots, \lambda_{k(n-1)}$. Portanto precisamos calcular $\lambda_{1(n-1)}, \dots, \lambda_{k(n-1)}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{(n-2)n}$.

(i) Tomando $i = k, j = k+1$ e $l = n-1$ em (2) temos

$$\lambda_{k(k+1)} - \lambda_{k(n-1)} + \lambda_{(k+1)(n-1)} = 0,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \lambda_{k(n-1)} &= \lambda_{k(k+1)} + \lambda_{(k+1)(n-1)} \\ &= \lambda_{k(k+1)} + \lambda_{(k+1)(k+2)} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)}. \end{aligned}$$

De novo usamos (2) só que tomando $i = k-1, j = k$ e $l = n-1$ e obtemos

$$\lambda_{(k-1)k} - \lambda_{(k-1)(n-1)} + \lambda_{k(n-1)} = 0,$$

que implica

$$\begin{aligned} \lambda_{(k-1)(n-1)} &= \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{k(n-1)} \\ &= \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{k(k+1)} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)}. \end{aligned}$$

Continuamos usando (2) para os valores restantes: $i = k - 2, \dots, 2, 1$; $j = k - 1, \dots, 2, 1$ e $l = n - 1$ e assim chegamos às equações:

$$\lambda_{23} - \lambda_{2(n-1)} + \lambda_{3(n-1)} = 0$$

$$\lambda_{12} - \lambda_{1(n-1)} + \lambda_{2(n-1)} = 0,$$

das quais segue-se

$$\begin{aligned}\lambda_{2(n-1)} &= \lambda_{23} + \lambda_{3(n-1)} \\ &= \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{1(n-1)} &= \lambda_{12} + \lambda_{2(n-1)} \\ &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)}.\end{aligned}$$

Ou seja a equação (2) implica

$$\lambda_{i(n-1)} = \lambda_{i(i+1)} + \lambda_{(i+1)(i+2)} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)}$$

para $i = 1, 2, \dots, k$.

- (ii) Tomando $i = 1$ e $j = 2$ em (1), temos $\lambda_{12} + \lambda_{1n} - \lambda_{2n} = 0$. Segue-se que

$$\lambda_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n}.$$

Usando novamente (1) com $i = 1$ e $j = 3$ obtemos $\lambda_{13} + \lambda_{1n} - \lambda_{3n} = 0$, que implica

$$\begin{aligned}\lambda_{3n} &= \lambda_{13} + \lambda_{1n} \\ &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n}.\end{aligned}$$

Continuamos usando (1) até chegar nas equações

$$\begin{aligned}\lambda_{(k-2)(k-1)} + \lambda_{(k-2)n} - \lambda_{(k-1)n} &= 0 \\ \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{(k-1)n} - \lambda_{kn} &= 0.\end{aligned}$$

Segue-se

$$\begin{aligned}\lambda_{(k-1)n} &= \lambda_{(k-2)(k-1)} + \lambda_{(k-2)n} \\ &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(k-2)(k-1)} + \lambda_{1n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{kn} &= \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{(k-1)n} \\ &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{1n}.\end{aligned}$$

Então a equação (1) implica

$$\lambda_{in} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(i-1)i} + \lambda_{1n}$$

para $i = 2, 3, \dots, k$.

(iii) Resta calcular $\lambda_{(k+1)n}, \dots, \lambda_{(n-2)n}$. Para fazer isto usamos de novo (2) com $i = k+1, \dots, n-2$ e obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_{(n-2)(n-1)} - \lambda_{(n-2)n} + \lambda_{(n-1)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-2)n} = \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{(n-3)(n-2)} - \lambda_{(n-3)n} + \lambda_{(n-2)n} &= 0 \implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)n} \\ &\implies \lambda_{(n-3)n} = \lambda_{(n-3)(n-2)} + \lambda_{(n-2)(n-1)} + \\ &\quad + \lambda_{(n-1)n} \\ &\vdots \\ \lambda_{(k+1)(k+2)} - \lambda_{(k+1)n} + \lambda_{(k+2)n} &= 0 \implies \lambda_{(k+1)n} = \lambda_{(k+1)(k+2)} + \lambda_{(k+2)n} \\ &\implies \lambda_{(k+1)n} = \lambda_{(k+1)(k+2)} + \lambda_{(k+2)(k+3)} + \\ &\quad + \dots + \lambda_{(n-1)n}.\end{aligned}$$

□

Observações:

- As famílias de métricas (1,2)-simpléticas caracterizadas nesta seção correspondem à estruturas quase-complexas não integráveis e são diferentes da família contida na classe parabólica descrita por Mo e Nogueiros em (Teorema 2.1.2).

- Todas estas famílias são n -paramétricas.
- Nenhuma das famílias obtidas contém a métrica normal como era de se esperar, pois Wolf e Gray, em [WG], provaram que a métrica normal sobre $F(n)$ é $(1,2)$ -simplética se e somente se $n \leq 3$.
- Os torneios correspondentes a estas famílias, ou seja os torneios da Figura 4.10, são irredutíveis. E cada um destes torneios tem a propriedade que cada subtorneio de ordem 4 ou é irredutível ou é transitivo (Figura 0.1).
- O vetor placar dos torneios da Figura 4.10 pode ser escrito na forma:

$$(1, 2, \dots, k, k, \dots, n - k - 1, n - k - 1, \dots, n - 3, n - 2)$$

para $n \geq 2k + 1$.

$$\Lambda^3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \dots & \lambda_{12} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \dots & \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \dots & \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{34} & 0 & \lambda_{45} & \dots & \lambda_{45} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \lambda_{45} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ * & * & * & * & * & \dots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & * & \dots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & * & \dots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \dots & \lambda_{12} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{45} & \dots & \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{1n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \lambda_{34} + \lambda_{45} & \dots & \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(k-1)k} & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \dots + \lambda_{(k-1)k} & \dots & \lambda_{(k-1)k} & 0 & \lambda_{k(k+1)} & \lambda_{k(k+1)} + \dots + \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{(n-2)(n-1)} & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 5

Aplicações Harmônicas e Estabilidade

Neste capítulo usamos as métricas encontradas nos capítulos anteriores junto com o Teorema de Lichnerowicz (Teorema 1.5.1) para produzir novos exemplos de aplicações harmônicas, $\phi : M^2 \rightarrow F(n)$, de uma superfície de Riemann fechada M^2 para uma variedade bandeira $F(n)$.

Posteriormente, usando os resultados de Negreiros (Teoremas 1.5.6 e 1.5.7), obtemos alguns resultados de estabilidade para estas aplicações harmônicas.

5.1 Aplicações Harmônicas

Consideremos o seguinte conjunto de famílias de métricas (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$

$$\mathfrak{M}_n = \{g^k = ds_{\Lambda^k}^2 : 1 \leq k \leq n-3\}.$$

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Teorema 1.5.1.

Teorema 5.1.1. *Seja $g \in \mathfrak{M}_n$ e $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), g)$. Se ϕ é holomorfa, então é harmônica.*

De novo aplicando o Teorema 1.5.1, mas para aplicações entre variedades bandeira, temos:

Teorema 5.1.2. *Sejam $g \in \mathfrak{M}_l$ e $\tilde{g} \in \mathfrak{M}_n$. Se $\phi : (F(l), g) \rightarrow (F(n), \tilde{g})$ é holomorfa, então ϕ é harmônica.*

5.2 Estabilidade

Estamos interessados em estudar a estabilidade das aplicações harmônicas obtidas no Teorema 5.1.1, para isso usaremos os resultados obtidos por Negrinhos em [N3] e apresentados no capítulo 1 (Teoremas 1.5.6 e 1.5.7).

Borel em [Bo] provou que as métricas de Kähler invariantes ds_{Λ}^2 , salvo permutações, são dadas pela matriz simétrica:

$$\Lambda_K = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Lembremos que o Teorema 1.5.5 implica que qualquer aplicação de Eells-Wood $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda_K}^2)$ (ver Teorema 1.5.2) é harmônica e estável, pois as aplicações de Eells-Wood são holomorfas. Os Teoremas 1.5.6 e 1.5.7,

provados por Negreiros em [N3], mostram que perturbando adequadamente a métrica de Kähler $ds_{\Lambda_K}^2$, podemos obter outras aplicações harmônicas estáveis ou instáveis.

As perturbações usadas nos Teoremas 1.5.6 e 1.5.7 têm a forma:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} \pm \varepsilon_{13} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} \pm \varepsilon_{14} & \cdots & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \pm \varepsilon_{1n} \\ \lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} \pm \varepsilon_{24} & \cdots & \lambda_{23} + \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \pm \varepsilon_{2n} \\ \lambda_{12} + \lambda_{23} \pm \varepsilon_{13} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \lambda_{(n-2)(n-1)} + \lambda_{(n-1)n} \pm \varepsilon_{(n-2)n} \\ * & * & * & * & \cdots & \lambda_{(n-1)n} \\ * & * & * & * & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 5.2.1. Dada $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^1}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, temos:

- (i) Se $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ é estável.
- (ii) Se $\lambda_{1n} \leq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ não é estável.

Prova:

- (i) Tomando $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$, $\varepsilon_{ij} = 0$ nos outros casos e aplicando o Teorema 1.5.6, temos que ψ é estável.
- (ii) Tomando $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$, $\varepsilon_{ij} = 0$ nos outros casos e aplicando o Teorema 1.5.7, temos que ψ não é estável. \square

Teorema 5.2.2. Dada $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^2}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, temos:

- (i) Se $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ é estável.
- (ii) Se $\lambda_{12} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ não é estável.

Prova:

- (i) Tomamos $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \geq 0$, $\varepsilon_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ nos casos restantes.

Para ver que $\varepsilon_{2n} \geq 0$, escrevemos $\varepsilon_{2n} = 2\lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) = 2\lambda_{12} + \varepsilon_{1n} \geq 0$.

Então, pelo Teorema 1.5.6, temos que ψ é estável.

- (ii) Tomamos $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$, $\varepsilon_{2n} = \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{1n}) \geq 0$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ nos outros casos. $\varepsilon_{1n} > 0$ segue das desigualdades

$$\lambda_{1n} < \lambda_{12} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}.$$

Então, pelo Teorema 1.5.7, temos que ψ não é estável. □

Teorema 5.2.3. Dada $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^3}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, temos:

- (i) Se $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ é estável.
- (ii) Se $\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ não é estável.

Prova:

- (i) Tomamos $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \geq 0$, $\varepsilon_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$, $\varepsilon_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} - (\lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ nos casos restantes.

Precisamos verificar que $\varepsilon_{2n} \geq 0$ e $\varepsilon_{3n} \geq 0$. Para isso escrevemos

$$\varepsilon_{2n} = 2\lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) = 2\lambda_{12} + \varepsilon_{1n} \geq 0$$

e

$$\varepsilon_{3n} = 2\lambda_{12} + 2\lambda_{23} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) = 2\lambda_{12} + 2\lambda_{23} + \varepsilon_{1n} \geq 0.$$

Então, pelo Teorema 1.5.6, temos que ψ é estável.

- (ii) Tomamos $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$, $\varepsilon_{2n} = \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{1n})$, $\varepsilon_{3n} = \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n}) \geq 0$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ nos outros casos. $\varepsilon_{1n} > 0$ segue das desigualdades

$$\lambda_{1n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$$

e $\varepsilon_{2n} > 0$, pois

$$\lambda_{12} + \lambda_{1n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} < \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}.$$

Então, pelo Teorema 1.5.7, temos que ψ não é estável. \square

Teorema 5.2.4. Dada $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^4}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, temos:

- (i) Se $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ é estável.
- (ii) Se $\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{45} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ não é estável.

Prova:

- (i) Tomamos $\varepsilon_{1n} = \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \geq 0$, $\varepsilon_{2n} = \lambda_{12} + \lambda_{1n} - (\lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$, $\varepsilon_{3n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} - (\lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$, $\varepsilon_{4n} = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n} - (\lambda_{45} + \cdots + \lambda_{(n-1)n})$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ nos casos restantes.

Usando o mesmo argumento da prova anterior, temos que $\varepsilon_{2n} \geq 0$ e $\varepsilon_{3n} \geq 0$. Resta então verificar que $\varepsilon_{4n} \geq 0$, para o qual usamos um argumento similar:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{4n} &= 2\lambda_{12} + 2\lambda_{23} + 2\lambda_{34} + \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}) \\ &= 2\lambda_{12} + 2\lambda_{23} + 2\lambda_{34} + \varepsilon_{1n} \geq 0.\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 1.5.6, temos que ψ é estável.

- (ii) Tomamos $\varepsilon_{1n} = \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}$, $\varepsilon_{2n} = \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{1n})$, $\varepsilon_{3n} = \lambda_{34} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n})$, $\varepsilon_{4n} = \lambda_{45} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n}) \geq 0$ e $\varepsilon_{ij} = 0$ nos outros casos.

De novo, usando o mesmo argumento da prova anterior, temos que $\varepsilon_{1n} > 0$ e $\varepsilon_{2n} > 0$. $\varepsilon_{3n} > 0$ segue das desigualdades

$$\begin{aligned}\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{1n} &< \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} + \lambda_{1n} \\ &\leq \lambda_{45} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ &< \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}.\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 1.5.7, temos que ψ não é estável. \square

Teorema 5.2.5. Dada $\psi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda^k}^2)$ uma aplicação de Eells-Wood, com $1 \leq k \leq n-3$, temos:

(i) Se $\lambda_{1n} \geq \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ é estável.

(ii) Se $\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(k-1)k} + \lambda_{1n} \leq \lambda_{k(k+1)} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}$, então ψ não é estável.

Prova: A prova é feita de forma similar às provas anteriores.

(i) Tomando,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1n} &= \lambda_{1n} - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}), \\ \varepsilon_{in} &= \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(i-1)i} + \lambda_{1n} \\ &\quad - (\lambda_{i(i+1)} + \cdots + \lambda_{(n-1)n}), \text{ para } i = 2, \dots, k, \\ \varepsilon_{ij} &= 0 \text{ nos outros casos}\end{aligned}$$

e aplicando o Teorema 1.5.6, temos que ψ é estável.

(ii) Tomando,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1n} &= \lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} - \lambda_{1n}, \\ \varepsilon_{in} &= \lambda_{i(i+1)} + \cdots + \lambda_{(n-1)n} \\ &\quad - (\lambda_{12} + \cdots + \lambda_{(i-1)i} + \lambda_{1n}), \text{ para } i = 2, \dots, k, \\ \varepsilon_{ij} &= 0 \text{ nos outros casos}\end{aligned}$$

e aplicando o Teorema 1.5.7, temos que ψ não é estável.

□

Conclusões e Problemas

Esta tese mostra a importância da equivalência entre estruturas quase-complexas invariantes e torneios no caso das variedades bandeira. Além disso, reflete o interessante papel que desempenham os métodos combinatórios atualmente.

Parece que esta equivalência entre estruturas quase-complexas invariantes e torneios é importante para se obter uma classificação completa das métricas (1,2)-simpléticas sobre as variedades bandeira.

Como consequência deste trabalho, encontramos vários problemas que podem ser explorados futuramente, entre os quais podemos citar:

1. Classificação das métricas (1,2)-simpléticas sobre as variedades bandeira (ver Conjectura 2 na Introdução).
2. Dimensão das famílias de métricas (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$, diferentes das de Kähler (ver Conjectura 1 na Introdução).
3. Quantas famílias de métricas (1,2)-simpléticas existem sobre $F(n)$?
4. Existirão métricas co-simpléticas diferentes das (1,2)-simpléticas sobre $F(n)$?

5. Mais geralmente, tentar entender outras classes de métricas invariantes sobre $F(n)$.

Bibliografia

- [Bl] M. Black, *Harmonic Maps into Homogeneous Spaces*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 255, Longman, Harlow, 1991.
- [Bo] A. Borel, *Kählerian Coset Spaces of Semi-Simple Lie Groups*, Proc. Nat. Acad. of Sci. **40** (1954), 1147-1151.
- [BH] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 458-538.
- [BS] F. E. Burstall and S. Salamon, *Tournaments, Flags and Harmonic Maps*, Math. Ann. **277** (1987), 249-265.
- [C] P. Camion, *Chemins et Circuits Hamiltoniens des Graphes Complets*, C. R. Acad. Sci. Paris **249** (1959), 2151-2152.
- [ChE] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [ChW] S. S. Chern and J. G. Wolfson, *Harmonic Maps of the Two-Sphere into a Complex Grassmann Manifold II*, Ann. of Math. **125** (1987), 301-335.

- [D] A. O. Dias, *Invariantes Homotópicos em Torneios*, Tese de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1998.
- [EL] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, C. B. M. S. Regional Conference Series in Mathematics, No. 50, American Mathematical Society, Providence, 1983.
- [ES] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109-160.
- [ESa] J. Eells and S. Salamon, *Twistorial Constructions of Harmonic Maps of Surfaces into Four-Manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **12** (1985), 589-640.
- [EW] J. Eells and J. C. Wood, *Harmonic Maps from Surfaces to Complex Projective Spaces*, Advances in Mathematics **49** (1983), 217-263.
- [GH] A. Gray and L. M. Hervella, *The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants*, Ann. Mat. Pura Appl. **123** (1980), 35-58.
- [L] A. Lichnerowicz, *Applications Harmoniques et Variétés Kählériennes*, Symposia Mathematica 3 (Bologna, 1970), 341-402.
- [M] J. W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- [MN1] X. Mo and C. J. C. Negreiros, *Hermitian Structures on Flag Manifolds*, Relatório de Pesquisa 35/98, IMECC-UNICAMP (1998).

- [MN2] X. Mo and C. J. C. Negreiros, *(1,2)-Symplectic Structures on Flag Manifolds*, a aparecer no Tohoku Mathematical Journal (1999).
- [MN3] X. Mo and C. J. C. Negreiros, *Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds*, Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, Rio Claro, Brazil, World Scientific (1999).
- [MN4] X. Mo and C. J. C. Negreiros, *Equiharmonic Tori in Flag Manifolds*, Relatorio de Pesquisa 53/99, IMECC-UNICAMP (1999).
- [NN] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391-404.
- [N1] C. J. C. Negreiros, *Some Remarks about Harmonic Maps into Flag Manifolds*, Indiana University Mathematics Journal **37**, No. 3 (1988).
- [N2] C. J. C. Negreiros, *Harmonic Maps from Compact Riemann Surfaces into Flag Manifolds*, Thesis, University of Chicago, 1987.
- [N3] C. J. C. Negreiros, *On The Stability of Frenet Frames of Holomorphic Maps*, pre-print IMECC-UNICAMP, (1999).
- [R] B. Roy, *Sur Quelques Propriétés des Graphes Fortement Connexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), 399-401.
- [Sa] S. Salamon, *Harmonic and Holomorphic Maps*, Lecture Notes in Mathematics 1164, Springer, 1986.
- [WG] J. A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous Spaces Defined by Lie Groups Automorphisms. II*, Journal of Differential Geometry, Vol. 2, No. 2, (1968), 115 - 159.