

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA - IMECC

HIPERSUPERFÍCIES NO ESPAÇO
EUCLIDIANO COM CONDIÇÕES
SOBRE A GEOMETRIA INTRÍNSECA

TESE DE DOUTORADO

RYUICHI FUKUOKA

ORIENTADOR: PROF. DR. FRANCESCO MERCURI

ABRIL DE 1999

Hipersuperfícies no espaço euclidiano com condições sobre a geometria intrínseca

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Ryuichi Fukuoka e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de abril de 1999


Prof. Dr. Francesco Mercuri (orientador)

Banca examinadora

1. Prof. Dr. Francesco Mercuri (orientador)
2. Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas
3. Prof. Dr. Manfredo Perdigão do Carmo
4. Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito
5. Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação – Científica, UNICAMP**, como requisito parcial para a obtenção do Título de **DOUTOR em MATEMÁTICA**

Tese de Doutorado defendida em 23 de abril de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof(a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI


Prof (a). Dr (a). JOSÉ ADONAI PEREIRA SEIXAS


Prof (a). Dr (a). MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO


Prof (a). Dr (a). FÁBIO GUSTAVO BRAGA BRITO


Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA

Resumo

A tese está dividida em duas partes:

Parte 1: Hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante.

Seja M^n uma variedade riemanniana conformemente plana de dimensão $n \geq 3$ e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com curvatura média constante. Para estas imersões, o único caso não classificado é aquele onde o operador de Weingarten possui três autovalores distintos. Para este caso em aberto, pusemos uma condição adicional natural: Por todo ponto passa uma linha de curvatura que também é uma geodésica. Esta condição é natural pois ela é sempre verdadeira para dimensão maior do que três. O teorema principal classifica tais hipersuperfícies como sendo um aberto de um cone sobre um toro de Clifford.

Parte 2: Hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1.

Seja M^n uma variedade riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$, $\rho : G \times M \rightarrow M$ uma ação por isometrias de cohomogeneidade 1 de um grupo compacto e conexo G e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Dizemos que uma isometria g é induzida por uma isometria h do espaço ambiente se $f \circ g = h \circ f$. f é dita padrão se todas as isometrias de G são induzidas por isometrias do ambiente.

O teorema principal diz que uma hipersuperfície f nas condições acima é uma imersão padrão.

Abstract

The thesis has two parts:

Part 1: Conformally flat hypersurfaces with constant mean curvature.

Let M^n be a conformally flat manifold with dimension $n \geq 3$ and $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a hypersurface with constant mean curvature. For this immersions, the only unclassified case is the tridimensional one, where the Weingarten operator has three different eigenvalues. In this open case, we have put a natural condition: For every point passes a curvature line that is also a geodesic. This condition is natural because it is always true for dimensions greater than 3. The main theorem classifies those hypersurfaces as a piece of a cone over the Clifford Torus.

Part 2: Compact hypersurfaces of cohomogeneity one.

Let M^n a compact riemannian manifold with dimension $n \geq 5$, $\rho : G \times M \rightarrow M$ a cohomogeneity one action of a connected and compact isometry group G and $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a hypersurface. We say that an isometry $g \in G$ is induced by an isometry h of the ambient space if $f \circ g = h \circ f$. f is called a standard immersion if every isometry that belong to G are induced by an ambient space isometry.

The main theorem proves that a hypersurface f that satisfies the above conditions is a standart immersion.

Agradecimentos

Ao professor Francesco Mercuri, por me orientar durante todos estes anos (1992-1999).

Aos meus pais Hiroyasu e Yasuko, por me darem todas as condições para chegar até aqui.

Aos meus irmãos Rika, Miriam e Dennis, por tudo que passamos e passaremos juntos.

Aos meus amigos Francis Henrique Ramos França, Claudio Aguinaldo Buzzi, Antônio Soiero Cardoso Júnior, Emerson Luiz do Monte Carmelo e Marlio Paredes Gutierrez pela amizade sincera que nos acompanhou durante estes anos.

Às pessoas com as quais tive a oportunidade de conversar sobre a tese, em especial ao professor José Adonai Pereira Seixas, que encontrou diversos erros e deu sugestões valiosas.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, pelo apoio durante a fase final da dissertação.

Ao pessoal do predinho, que enriqueceu e alegrou a minha passagem durante este tempo.

Ao povo paulista e brasileiro, que através da FAPESP e da CAPES financiaram este trabalho.

Índice

Introdução Geral	1
Hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante	1
Hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1	3
I Hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante	5
1 Preliminares	6
1.1 Introdução	6
1.2 O cone sobre o toro de Clifford	11
1.3 Demonstração do teorema 1.4	12
1.4 Demonstração do teorema 1.5	14
2 Certas hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante	16
2.1 Introdução	16
2.2 Valores de $\bar{\nabla}_{E_i} E_j$	17
2.3 Equações de Gauss e γ -Codazzi	19
2.4 Não existência de certas $CP >$	19
2.5 A condição curvatura de Gauss-Kroenecker 0	24
3 Caracterização das $CP >$	26
3.1 Introdução	26
3.2 Fórmulas de conexão para as $CP >$	26
3.3 Classificação das $CP >$	28
3.4 Item (4) do teorema 1.6	34

II Caracterização de certas hipersuperfícies no espaço euclidiano sob a ação de grupos compactos de isometrias de cohomogeneidade 1 36

4 Preliminares	37
4.1 Geometria Equivariante	37
4.2 Introdução ao problema	38
4.3 Órbitas principais	40
4.3.1 Classificação das órbitas	40
4.3.2 Decomposição da órbita	42
5 Operadores de Weingarten	45
5.1 Introdução	45
5.2 Análise pontual dos operadores de Weingarten de h	45
5.2.1 O operador de Weingarten de h nos casos (c1), (c2) e $(\tilde{c}2)$	45
5.2.2 O operador de Weingarten de h no caso (b)	47
5.3 Relações entre A_ξ e A_ξ^Σ	47
5.4 ξ ao longo de uma órbita	49
5.5 Uma expressão para o operador de Weingarten A_ξ	51
5.6 Sistema de coordenadas adaptado às órbitas e a diferenciabilidade de A_ξ^Σ	52
6 Demonstração do teorema 4.9	55
6.1 Introdução	55
6.2 O centro da órbita	56
6.3 As aplicações γ e $\bar{\gamma}$	57
6.3.1 Casos (b), (c1) e (c2)	57
6.3.2 Caso $(\tilde{c}2)$	58
6.4 A constância de γ e $\bar{\gamma}$	59
6.4.1 Órbitas difeomorfas a $S^2 \times S^{n-3}$, $n > 5$	60
6.4.2 Órbitas difeomorfas a $S^2 \times S^2$	61
6.4.3 Órbitas difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$	61
6.5 Não existência de hipersuperfícies compactas do tipo (b)	62
6.6 Conclusão da demonstração do teorema 4.9	64

Conclusão Geral	66
Bibliografia	67

Introdução Geral

A tese está dividida em duas partes: Hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante e Hipersuperfícies compactas de co-homogeneidade 1.

As variedades consideradas, fora menção em contrário, serão conexas.

Adotamos o livro [3] como referência para a parte de Geometria Riemanniana básica.

Hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conformemente plana com curvatura média constante.

As hipersuperfícies conformemente planas quase-umbílicas com curvatura média constante são conhecidas: Elas são abertos de uma hipersuperfície de revolução gerada pela ação de $SO(n)$ em uma curva de Delaunay, ou um aberto de uma imersão do tipo $(inc \times id) : (S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1})$, onde inc é uma esfera redonda e id é a aplicação identidade. A demonstração deste resultado se encontra na seção 1.3.

Uma hipersuperfície conformemente plana de dimensão maior ou igual a quatro é sempre quase-umbílica. Para dimensão igual a 2, temos que toda superfície é conformemente plana, e a planitude conforme não representa nenhuma restrição.

Portanto, no estudo de hipersuperfícies conformemente planas do \mathbb{R}^n com curvatura média constante, o caso interessante é aquele onde a dimensão é

igual a três e os autovalores do operador de Weingarten são distintos dois a dois. Denotaremos as hipersuperfícies conformemente planas $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ com os autovalores do operador de Weingarten distintos dois a dois (sem hipóteses sobre a curvatura média) por $CP3 \neq$.

Na teoria geral das $CP3 \neq$, as distribuições bidimensionais ortogonais às direções principais são integráveis (vide teorema 1.5). Esta estrutura geométrica será bastante utilizada no capítulo 3.

O estudo das $CP3 \neq$ com curvatura média constante sem a imposição de uma hipótese adicional é bastante complexo. Por isso, colocamos uma hipótese que julgamos ser bastante natural, a qual explicaremos abaixo.

Para o caso quase-umbílico, sempre existe uma direção principal onde as curvas integrais dessa direção são geodésicas. De fato, observando a classificação dada pelo teorema 1.4, temos que se a hipersuperfície é de revolução, a curva geratriz da hipersuperfície satisfaz a condição acima, enquanto que na imersão do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, as curvas $S^1 \times \{pto\}$ satisfazem esta condição. Portanto, a existência de uma direção principal cujas curvas integrais são geodésicas, é uma condição bastante natural para ser imposta para as $CP3 \neq$ com curvatura média constante, pois todas as hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante de dimensão maior do que três satisfazem esta propriedade. Denotaremos tais hipersuperfícies por $CP >$ (Hipersuperfícies (C)onformemente (P)lanas de curvatura média constante semelhantes àsquelas de dimensão ($>$) 3). Nosso objetivo na primeira parte da tese é classificar tais hipersuperfícies.

O teorema 1.6 nos dá, para as $CP3 \neq$ com curvatura média constante, condições que são equivalentes à existência de uma direção principal cuja curva integral é uma geodésica. Conseguimos as equivalências (1) \Leftrightarrow (2) e (2) \Leftrightarrow (3) obtendo certas restrições sobre o operador de Weingarten de uma $CP >$. Estas restrições são obtidas utilizando as equações de Gauss, Codazzi e a caracterização tensorial das variedades conformemente planas de dimensão três. Os cálculos necessários para a obtenção dessas equivalências ocupam a maior parte do capítulo 2 a partir da seção 2.3.

No capítulo 3, caracterizamos as $CP >$ como sendo um aberto do cone sobre o toro de Clifford. Finalmente, a equivalência entre o item (4) do teorema 1.6 e os outros itens é obtido a posteriori, ou seja, após a caracterização acima mencionada.

Hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta de cohomogeneidade 1. Dizemos que f é uma imersão padrão se as isometrias de f são induzidas pelas isometrias de \mathbb{R}^{n+1} . Queremos demonstrar o teorema 4.9, que diz que se o grupo de isometrias que age em M^n , $n \geq 5$, for compacto e conexo, então f é uma imersão padrão.

Um teorema devido a H. P. Castro e M. H. Noronha (teorema 4.8) classifica certas imersões homogêneas de codimensão dois e dimensão maior ou igual a quatro. Este teorema é o suficiente para dizer, após uma adaptação para o nosso caso, como são as órbitas principais das imersões que estamos tratando (vide proposição 4.11).

Quando as órbitas são isométricas a S^{n-1} , f é de revolução, e portanto f é uma imersão padrão (vide [1]). Se as órbitas são hipersuperfícies isoparamétricas de uma esfera que não são difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$ e nem a $S^2 \times S^{n-3}$, então f é uma imersão padrão (vide [11]). Os casos que faltam são aqueles cujas órbitas principais são difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$ ou a $S^2 \times S^{n-3}$, sendo que o primeiro caso não precisa ser necessariamente uma hipersuperfície isoparamétrica de uma esfera. Em ambos os casos, a imersão das órbitas é um produto, ou seja, são imersões do tipo $(inc_1 \times inc_2) : (S^{n_1-1} \times S^{n_2-1}) \mapsto (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, onde $n_1 + n_2 = n + 1$ e $n_1 = 2$ ou 3 . Então, ao fixarmos uma órbita, aproveitamos a sua estrutura de produto para estabelecer a decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \Pi_1 \oplus \Pi_2$, onde Π_1 é o subespaço onde S^{n_1-1} imerge.

Para uma variedade compacta de cohomogeneidade um, o espaço de órbitas é difeomorfo a S^1 ou a $[0, 1]$. No primeiro caso, existem somente órbitas principais enquanto que no segundo, $\{0, 1\}$ representam as duas órbitas não principais e $(0, 1)$ representam as órbitas principais. Da parte principal do espaço das órbitas, considere um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Podemos definir uma aplicação $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G_{n_1}$ que leva a órbita correspondente a $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ no n_1 -plano Π_1 . (A rigor, daquilo que foi dito neste parágrafo, existe um caso que exige adaptações. Mas por ora, vamos nos restringir à idéia principal). Mostraremos que γ é diferenciável (vide lemas 6.3 e 6.4) e que γ é "localmente constante" (vide proposição 6.5). Estas propriedades são suficientes para demonstrarmos a constância de γ na parte principal do

espaço das órbitas.

Finalmente, utilizando-se a constância de γ e do centro da órbita (vide definição 4.12 e lema 6.1) e a equivariância do fluxo geodésico normal, conseguimos demonstrar o teorema 4.9.

Devemos ressaltar a importância do estudo dos operadores de Weingarten e do comportamento do vetor normal de f ao longo de uma órbita. Estes temas, que foram abordados no capítulo 5, são fundamentais para a demonstração da constância local de γ .

Parte I

Hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Uma variedade riemanniana n -dimensional M^n é dita (*localmente*) *conformemente plana* se $\forall p \in M^n$, existe uma vizinhança de p conformemente difeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^n . Nos capítulos 1, 2 e 3, estudaremos imersões isométricas com curvatura média constante de uma variedade riemanniana conformemente plana M^n em \mathbb{R}^{n+1} . Antes de enunciar nossos resultados, lembraremos de alguns fatos básicos.

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de M . Então

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z \quad (1.1)$$

é o tensor de curvatura de M .

Ao tensor de curvatura está associado o operador de curvatura $R : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^* \otimes T_p M$, que é definido conforme a fórmula (1.1). O asterisco representa o espaço dual. Denotaremos tanto o tensor como o operador de curvatura por R , sendo que a escolha ficará clara no contexto.

Fixe $\{z_1, \dots, z_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. $Ricc : T_p M \rightarrow T_p M$ definido por

$$\langle Ricc(X), Y \rangle := \sum_{i=1}^n \langle R(X, z_i)Y, z_i \rangle$$

é o tensor de Ricci e

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle$$

é a curvatura escalar.

O tensor de Schouten $\gamma : T_p M \rightarrow T_p M$ é definido por

$$\gamma(X) = \frac{1}{n-2} \left[Ricc(X) - \frac{S}{2(n-1)} X \right]$$

e o tensor de Weyl $W : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^* \otimes T_p M$ é dado por

$$W(X, Y) = -R(X, Y) - \gamma(X) \wedge Y - X \wedge \gamma(Y),$$

onde o bivetor $X_1 \wedge X_2 : T_p M \rightarrow T_p M$ significa $X_1 \wedge X_2(Y) = \langle X_1, Y \rangle X_2 - \langle X_2, Y \rangle X_1$.

É um fato bem conhecido que toda superfície é conformemente plana, devido a existência de parâmetros isotermas. Se $n \geq 3$, a caracterização mais conhecida das variedades conformemente planas é a seguinte:

1.1 Teorema: *Uma variedade riemanniana M^n , $n \geq 3$, é conformemente plana se e somente se:*

1. $W = 0$,
2. γ é um tensor de Codazzi, i.e.:
 $(\nabla_X \gamma)(Y) = (\nabla_Y \gamma)(X)$.

Além disso, $W = 0$ para qualquer variedade riemanniana de dimensão $n = 3$, e se $n \geq 4$, a condição (1) implica (2).

Se $n \geq 4$, temos uma bonita caracterização das variedades conformemente planas devida a Kulkarni:

1.2 Teorema: *Uma variedade riemanniana M^n , $n \geq 4$, é conformemente plana se e somente se para cada quádrupla de vetores ortonormais $\{X_1, \dots, X_4\}$, temos*

$$K(X_1, X_2) + K(X_3, X_4) = K(X_1, X_3) + K(X_2, X_4),$$

onde $K(X, Y)$ é a curvatura seccional do plano gerado por X e Y .

Consideremos agora uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Se E_4 é um campo (local) unitário normal, denotaremos por A_{E_4} o operador de Weingarten $A_{E_4}(X) = -\bar{\nabla}_X E_4$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}^{n+1} . A_{E_4} é um operador simétrico cujos autovalores são as *curvaturas principais* e os autovetores são as *direções principais*. Seja $B(X, Y) := \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. A geometria local da imersão é determinada pelas equações de Gauss e de Codazzi, que são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle, \\ (\nabla_X A_{E_4})(Y) &= (\nabla_Y A_{E_4})(X). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Lembramos que uma hipersuperfície é *quase-umbílica* se o operador de Weingarten tem um autovalor de multiplicidade maior ou igual a $(n-1)$. Do teorema 1.2 e de cálculos simples, temos o seguinte resultado:

1.3 Teorema: *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se a imersão é quase-umbílica, então M^n é conformemente plana. Se $n \geq 4$ e M^n é conformemente plana então a imersão é quase-umbílica.*

Um primeiro resultado, que decorre imediatamente do trabalho de do Carmo e Dajczer (vide [5]), é o seguinte:

1.4 Teorema: *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica quase-umbílica com curvatura média constante. Então $f(M^n)$ é um aberto de uma hipersuperfície de revolução ou um aberto de um cilindro $\text{inc} \times \text{id} : S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde inc é a esfera redonda.*

(Vide demonstração na seção 1.3).

Portanto, no estudo de hipersuperfícies conformemente planas do \mathbb{R}^n com curvatura média constante, o caso interessante é o tridimensional, onde em algum ponto, o operador de Weingarten possui autovalores distintos dois a dois. Denotaremos tais hipersuperfícies por $CP3 \neq$ (Hipersuperfícies (C)onformemente (P)lanas com (3) autovalores (\neq) 2 a 2).

O. J. Garay pergunta em [8] se é verdade que uma hipersuperfície mínima conformemente plana de \mathbb{R}^4 é necessariamente quase-umbílica. A resposta a essa pergunta (que foi a pergunta que motivou este trabalho) é negativa. De

fato, não é difícil ver que o cone sobre o toro de Clifford é uma hipersuperfície mínima, conformemente plana, com três curvaturas principais distintas (veja seção 1.2).

Para as $CP^3 \neq$, ficam definidos três campos tangentes ortonormais diferenciáveis $\{E_1, E_2, E_3\}$, que são os autovetores unitários do operador de Weingarten (vide [12]). Nesta situação temos o seguinte teorema, que será demonstrado na seção 1.4.

1.5 Teorema: *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma $CP^3 \neq$. As distribuições determinadas por quaisquer duas direções principais são integráveis. Em particular existe um sistema de coordenadas local $\{x_1, x_2, x_3\}$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é paralelo a $E_i, i = 1, 2, 3$.*

Chamaremos este sistema de coordenadas de *sistema de coordenadas principais*. No sistema de coordenadas principais, a métrica de M é dada por

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 e^{2h_i(x)} dx_i^2, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.3)$$

O resultado principal da primeira parte do trabalho é o seguinte:

1.6 Teorema: *Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície conformemente plana, com curvatura média constante e curvaturas principais distintas duas a duas. As condições abaixo são equivalentes:*

1. *Existe uma direção principal cujas curvas integrais são geodésicas.*
2. *Uma curvatura principal é constante ao longo da superfície integral determinada pelas direções principais complementares.*
3. *A curvatura de Gauss Kroeneker é nula.*
4. *Existe um sistema de coordenadas principais $\{x_1, x_2, x_3\}$ onde a métrica é dada por*

$$ds^2 = e^{h_1(x)} dx_1^2 + e^{h_2(x)} dx_2^2 + dx_3^2$$

Além disso, cada uma das condições acima implica que $f(M^3)$ é um aberto de um cone sobre um toro de Clifford.

1.7 Observações: Em [15], Suyama estuda duas classes de $CP^3 \neq$, que são aquelas cujas métricas em um sistema de coordenadas principais satisfazem:

$$\begin{aligned} T_1: \quad h_1 &= h_2 = h_3, \\ T_2: \quad h_3 &= 0. \end{aligned}$$

(A classe T_1 , na realidade, já tinha sido estudada por Lancaster em [10].)

As condições (3) e (4) no teorema anterior estão relacionados com as condições T_1 e T_2 respectivamente. De fato, segue-se do trabalho de Lancaster que uma $CP^3 \neq$ com curvatura média constante satisfazendo a condição T_1 possui curvatura de Gauss-Kroenecker nula.

A condição 4 no teorema 1.6 pode ser enfraquecida, caracterizando-se as métricas do tipo T_2 como sendo aquelas com $h_3 = h_3(x_3)$. Isso é obtido fazendo-se reparametrizações na coordenada x_3 .

1.8 Definição: Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dita austera se para cada curvatura principal $k \neq 0$, $-k$ é também curvatura principal com a mesma multiplicidade.

Os teoremas 1.4 e 1.6 têm a seguinte consequência imediata:

1.9 Corolário: Se M^n , $n \geq 3$, é uma variedade conformemente plana e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é austera, então $n = 3$ e $f(M)$ é parte de um cone sobre um toro de Clifford.

1.10 Observação: Se relaxarmos a condição sobre a multiplicidade do autovalor do operador de Weingarten na definição de hipersuperfície austera, obtemos também as hipersuperfícies de revolução de \mathbb{R}^{n+1} obtidas pela revolução da curva $x_2 = \tau(x_1)$, onde τ é solução positiva da equação $1 + (\tau')^2 = \tau''\tau$.

1.11 Observação: Sejam $g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e $f : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ uma imersão definida por $f := g \times \text{id}$. Sabemos que todas as superfícies são conformemente planas, que f é mínima e que $f(\{\text{pto}\}, \mathbb{R})$ é tanto curva integral de uma direção principal como uma geodésica. No entanto f , que a primeira vista parece satisfazer todas as condições do teorema 1.6, não é conformemente plana.

1.2 O cone sobre o toro de Clifford

Seja $TC := (inc_1 \times inc_2) : (S^1 \times S^1) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ o mergulho cuja imagem $inc_i(S^1)$ é a esfera de centro na origem e raio 1. TC é o *toro de Clifford*.

Seja $CTC : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o cone sobre o toro de Clifford com vértice na origem. CTC pode ser parametrizado por

$$CTC(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r \cos \theta, r \sin \theta, r \cos \phi, r \sin \phi),$$

onde $r > 0$ é a distância do ponto $CTC(r, \theta, \phi)$ à origem.

Queremos demonstrar que CTC é uma hipersuperfície mínima e conformemente plana, com nulidade relativa 1-dimensional.

1.12 Proposição: *CTC é conformemente plana.*

Demonstração:

Basta demonstrarmos que existe um sistema de coordenadas ortogonais $\{t, \theta, \phi\}$ em M tal que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial \phi} \right\|,$$

pois $\{t, \theta, \phi\} \mapsto CTC$ nos daria explicitamente um difeomorfismo conforme entre um aberto de \mathbb{R}^3 e a sua imagem em CTC .

Seja

$$(t, \theta, \phi) \mapsto \sqrt{2}e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi).$$

Nesta parametrização, a distância do ponto (t, θ, ϕ) à origem é igual a $r = 2e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$. Afirmamos que a parametrização acima serve. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi) \Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\| = \frac{r}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \sqrt{2}e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0) \Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \right\| = \frac{r}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= \sqrt{2}e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(0, 0, -\sin \phi, \cos \phi) \Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial \phi} \right\| = \frac{r}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição. \square

1.13 Proposição: *CTC é mínima e de nulidade relativa 1-dimensional.*

Demonstração:

Basta demonstrar o que o operador de Weingarten fica

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

para uma dada base.

Faremos o cálculo de A_{E_4} nos campos de vetores ortonormais

$$\left\{ E_1 = \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\|}, E_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \right\|}, E_3 = \frac{\frac{\partial}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \phi} \right\|} \right\}$$

ou

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi)}{\sqrt{2}}, \\ E_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0), \\ E_3 &= (0, 0, -\sin \phi, \cos \phi). \end{aligned}$$

Escolheremos $E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, -\cos \phi, -\sin \phi)$. Os elementos a_{ij} da matriz A_{E_4} na base $\{E_1, E_2, E_3\}$ são definidos por $a_{ij} = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_4 \rangle$. Fazendo os cálculos, obtemos:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & \forall i \neq j, \\ a_{11} = 0, \\ a_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}r}, \\ a_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}r}, \end{cases}$$

o que demonstra a proposição. \square

1.3 Demonstração do teorema 1.4

Enunciemos o teorema de M. do Carmo e M. Dajczer (vide [5]) que será utilizado nesta seção.

1.14 Teorema: *Seja $f : M^n \rightarrow Q^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície na forma espacial $Q^{n+1}(c)$ de curvatura c . Se as curvaturas principais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfazem $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = -\lambda \neq 0$, $\lambda_n = -\mu = -\mu(\lambda)$ e $\lambda - \mu \neq 0$ então $f(M^n)$ está contida numa hipersuperfície de revolução.*

Demonstração do teorema 1.4

Uma hipersuperfície quase-umbílica tem um autovalor de multiplicidade maior ou igual a $(n - 1)$. Descrevamos o operador de Weingarten como

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \mu \end{bmatrix}.$$

Considere uma hipersuperfície de curvatura média constante igual a d . Então $\mu = d - (n - 1)\lambda$ (portanto μ se escreve como uma função de λ) e a hipersuperfície satisfaz uma das hipóteses do teorema 1.14.

Se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \mu$ para algum ponto da hipersuperfície, então todas as hipóteses do teorema 1.14 estão satisfeitas localmente. Neste caso, a hipersuperfície será localmente uma hipersuperfície de revolução com curvatura média constante. As hipersuperfícies de revolução completas com curvatura média constante já foram classificadas em [9], e são obtidas via ação de $SO(n)$ nas curvas de Delauney. Chamaremos estas hipersuperfícies de *hipersuperfícies de Delauney*. Então, pela unicidade da extensão de uma hipersuperfície de curvatura média constante, temos que a hipersuperfície em questão é um aberto de uma hipersuperfície de Delauney.

Se as condições $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \mu$ não são satisfeitas simultaneamente para nenhum ponto em f , não é difícil ver que $\lambda = 0$ em um aberto de f ou $\lambda = \mu$ em um aberto de f .

Se $\lambda = 0$ em um aberto de f , então o operador de Weingarten é da forma

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & d \end{bmatrix}$$

Se $d \neq 0$, a hipersuperfície é um aberto da aplicação $inc \times id$ do enunciado do teorema 1.4 (vide [4, pág 143]). Se $d = 0$, a hipersuperfície é um aberto de um hiperplano (que é uma hipersuperfície de revolução).

Finalmente, se $\lambda = \mu$ para um aberto de f , então f é o aberto de um hiperplano ou de uma esfera redonda, e ambos são hipersuperfícies de revolução. \square

1.4 Demonstração do teorema 1.5

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma $CP^3 \neq$, E_4 um campo normal à f , e fixe $\{E_1, E_2, E_3\}$ uma terna de vetores ortonormais em $T_p M$ que diagonalize o operador de Weingarten A_{E_4} . Então se A_{E_4} é da forma

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1,$$

em relação ao campo de vetores ortonormais E_1, E_2 e E_3 . γ fica

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix},$$

onde

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\lambda_i(\lambda_j + \lambda_k) - \frac{1}{2}\lambda_j\lambda_k, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (1.4)$$

1.15 Observação: *Por convenção, os índices $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ serão sempre distintos dois a dois.*

Demonstração do teorema 1.5

Sejam E_1, E_2 e E_3 campos de vetores ortonormais que diagonalizam A_{E_4} . Pelo teorema 1.1

$$(\nabla_{E_j} \gamma)E_i = (\nabla_{E_i} \gamma)E_j, \quad (1.5)$$

ou seja, γ é de Codazzi. Desenvolvendo o primeiro termo da equação (1.5) temos

$$\begin{aligned} (\nabla_{E_j} \gamma) E_i &= E_j(\gamma_i) E_i + \gamma_i \langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \rangle E_j + \gamma_i \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle E_k \\ &\quad - \gamma_j \langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \rangle E_j - \gamma_k \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle E_k, \end{aligned}$$

onde $E_j(\gamma_i)$ é a derivada de γ_i na direção E_j .

Podemos obter uma equação análoga para $(\nabla_{E_i} \gamma) E_j$. Feito isso e substituindo as equações obtidas na igualdade (1.5) temos

$$E_j(\gamma_i) = \lambda_k(\lambda_j - \lambda_i) \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle, \quad (1.6)$$

$$\lambda_j(\lambda_i - \lambda_k) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle = \lambda_i(\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle. \quad (1.7)$$

O operador de Weingarten também satisfaz a equação de Codazzi. Repetindo as contas de γ para A_{E_4} :

$$E_i(\lambda_j) = (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \rangle, \quad (1.8)$$

$$(\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = (\lambda_i - \lambda_k) \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle. \quad (1.9)$$

Comparando (1.7) com (1.9) obtemos

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = 0, \quad (1.10)$$

da onde segue-se que

$$\langle [E_i, E_j], E_k \rangle = 0, \quad (1.11)$$

o que prova a integrabilidade das distribuições $\{E_1, E_2\}$, $\{E_2, E_3\}$ e $\{E_3, E_1\}$.

Portanto, as distribuições $\{E_i, E_j\}$ determinam uma família de folheações Σ_k em M ortogonais duas a duas.

Para definirmos um sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, x_3\}$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ seja proporcional a E_i , basta definirmos submersões $x_i : M \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que x_i seja constante em Σ_i . De fato, $\text{grad}(x_i)$ será proporcional a E_i , pois ele é perpendicular a $\Sigma_i = \text{span}\{E_j, E_k\}$. \square

Capítulo 2

Certas hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante

2.1 Introdução

Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma $CP3 \neq$ com curvatura média constante que possui uma direção principal cujas linhas de curvatura são geodésicas.

A condição sobre as linhas de curvaturas é natural pois todas as hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante de dimensão maior do que três possuem essa propriedade. De fato, vendo as hipersuperfícies classificadas no teorema 1.4, temos que no caso de hipersuperfícies de revolução, as linhas geratrizes da hipersuperfície que são ortogonais às órbitas gozam desta propriedade, enquanto que na inclusão $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$, as curvas $S^1 \times \{p\}$ verificam esta propriedade. Denotaremos as hipersuperfícies $CP3 \neq$ com curvatura média constante que verificam esta propriedade por $CP >$ (Hipersuperfícies (C)onformemente (P)lanas de curvatura média constante semelhantes àquelas que têm dimensão ($>$) 3). Note que $CP >$ está exatamente nas condições do item (1) do teorema 1.6.

O objetivo deste capítulo e do próximo é demonstrar o teorema 1.6, sendo que neste capítulo, caracterizaremos o operador de Weingarten de uma $CP >$. Começaremos desenvolvendo as equações básicas da teoria dos $CP3 \neq$.

2.2 Valores de $\nabla_{E_i} E_J$

Sejam $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma $CP^3 \neq$, E_4 um campo de vetores unitário normal à hipersuperfície e E_1, E_2 e E_3 campos de vetores ortonormais que diagonalizam A_{E_4} . Nesta seção, iremos obter $\nabla_{E_i} E_J$, $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq J \leq 4$. Vamos às contas:

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_i, E_i \rangle} = 0, \quad (2.1)$$

pois

$$0 = E_i \langle E_i, E_i \rangle = 2 \langle \nabla_{E_i} E_i, E_i \rangle = 0.$$

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle} = \frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (2.2)$$

por

$$0 = E_i \langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle + \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle,$$

e pela equação (1.8)

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle = \frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_i, E_4 \rangle} = \langle A_{E_4} E_i, E_i \rangle = \lambda_i. \quad (2.3)$$

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle} = \frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} \quad (2.4)$$

por (1.8).

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_j, E_j \rangle} = 0. \quad (2.5)$$

de modo análogo ao caso $\langle \nabla_{E_i} E_i, E_i \rangle$.

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle} = 0 \quad (2.6)$$

por (1.10).

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_j, E_4 \rangle} = \langle A_{E_4} E_i, E_j \rangle = 0. \quad (2.7)$$

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_4, E_i \rangle = - \langle \nabla_{E_i} E_i, E_4 \rangle = -\lambda_i} \quad (2.8)$$

por (2.3).

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_4, E_j \rangle = - \langle \nabla_{E_i} E_j, E_4 \rangle = 0} \quad (2.9)$$

por (2.7).

$$\underline{\langle \nabla_{E_i} E_4, E_4 \rangle = 0} \quad (2.10)$$

de modo análogo ao caso $\langle \nabla_{E_i} E_i, E_i \rangle$.

Com isso, estamos aptos a calcular o valor de todas as combinações de $\nabla_{E_i} E_J$

2.1 Proposição: *Sejam $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ e $J \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Então

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_i &= \frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_j} E_j + \frac{E_k(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_k} E_k + \lambda_i E_4, \\ \nabla_{E_i} E_j &= \frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} E_i, \\ \nabla_{E_i} E_4 &= -\lambda_i E_i. \end{aligned}$$

2.2 Observação: *Note que a primeira equação da proposição 2.1 nos dá a equivalência entre os itens (1) e (2) do teorema 1.6. De fato, se i é tal que a curva integral de E_i é uma geodésica, então*

$$\nabla_{E_i} E_i = \frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_j} E_j + \frac{E_k(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_k} E_k = 0.$$

As equações acima são satisfeitas se e somente se

$$E_j(\lambda_i) = E_k(\lambda_i) = 0,$$

e estas igualdades são válidas se e somente se λ_i é constante nas folhas integrais da distribuição gerada por E_j e E_k

2.3 Equações de Gauss e γ -Codazzi

Nesta seção, explicitaremos a equação (1.6) de um modo mais conveniente. Além disso, apresentaremos e desenvolveremos as equações de Gauss de uma CP^3 .

Tome a equação (1.6), substitua γ_i por (1.4) e $\langle \nabla_{\bar{E}_i} E_j, E_i \rangle$ por $\frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i}$ (Proposição 2.1). Com isso, chegamos à equação

$$E_j(\lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k) + E_j(\lambda_k)(\lambda_i - \lambda_j) + E_j(\lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k) = 0. \quad (2.11)$$

As equações de Gauss são obtidas calculando-se explicitamente

$$\bar{R}(E_i, E_j)E_i = 0$$

via Proposição 2.1. Como resultado dos cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(E_i, E_j)E_i, E_j \rangle &= -E_j \left(\frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} \right) - E_i \left(\frac{E_i(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right) - \left(\frac{E_j(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} \right)^2 - \\ &\quad - \left(\frac{E_i(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right)^2 - \frac{E_k(\lambda_i) \cdot E_k(\lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_i) \cdot (\lambda_k - \lambda_j)} - \\ &\quad - \lambda_i \cdot \lambda_j = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(E_i, E_j)E_i, E_k \rangle &= -E_j \left(\frac{E_k(\lambda_i)}{\lambda_k - \lambda_i} \right) + \frac{E_j(\lambda_i) \cdot E_k(\lambda_j)}{(\lambda_j - \lambda_i) \cdot (\lambda_k - \lambda_j)} \\ &\quad - \frac{E_j(\lambda_i) \cdot E_k(\lambda_i)}{(\lambda_j - \lambda_i) \cdot (\lambda_k - \lambda_i)} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4 Não existência de certas $CP >$

Nesta seção, iremos demonstrar que um $CP >$ com curvatura média constante d deve ter um autovalor constante $\frac{d}{3}$.

2.3 Proposição: *Não existem CP > de curvatura média constante d com todas as curvaturas principais distintas de $\frac{d}{3}$.*

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que nenhum dos autovalores seja igual a $\frac{d}{3}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a direção k é aquela cujas curvas integrais são geodésicas. Combinando $\lambda_k = d - \lambda_i - \lambda_j$ com (2.11), mais o fato de que nenhum dos autovalores é igual a $\frac{d}{3}$, chegaremos à equação

$$E_j(\lambda_i) = \frac{(-\lambda_i - 2\lambda_j + d)}{3\lambda_j - d} E_j(\lambda_j). \quad (2.14)$$

Note que $(-\lambda_i - 2\lambda_j + d) = (\lambda_k - \lambda_j)$ é diferente de zero.

A equação acima é importante porque iremos utilizar constantemente termos do tipo $E_j(\lambda_i)$ e $E_j(\lambda_j)$. Pela equação (2.14), podemos substituir os termos do tipo $E_j(\lambda_i)$ por termos do tipo $E_j(\lambda_j)$, e com isso, utilizamos somente termos do tipo $E_j(\lambda_j)$ ($E_i(\lambda_i)$, $E_k(\lambda_k)$). Deste modo, uniformizaremos as contas, facilitando a resolução do problema. Note que só podemos obter (2.14) devido a hipótese $\lambda_i \neq \frac{d}{3}$.

Pela primeira equação da proposição 2.1 temos

$$\nabla_{E_k} E_k = \frac{E_i(\lambda_k)}{\lambda_k - \lambda_i} E_i + \frac{E_j(\lambda_k)}{\lambda_k - \lambda_j} E_j + \lambda_k E_4.$$

A curva integral de E_k é uma geodésica. Portanto $\nabla_{E_k} E_k = 0$ e devemos ter

$$E_i(\lambda_k) = E_j(\lambda_k) = 0.$$

Utilizando-se a equação (2.14), concluímos que $E_i(\lambda_l) = E_j(\lambda_l) = 0$ para todo $l \in \{1, 2, 3\}$. Portanto, as únicas derivadas que eventualmente são distintas de zero são aquelas feitas na direção E_k . A equação (2.12) fica

$$\frac{E_k(\lambda_i) \cdot E_k(\lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_i) \cdot (\lambda_k - \lambda_j)} = -\lambda_i \cdot \lambda_j. \quad (2.15)$$

Se utilizarmos (2.14) na equação (2.15) para que fique tudo em termos de " $E_k(\lambda_k)$ ", obtemos

$$(E_k(\lambda_k))^2 = (3\lambda_k - d)^2 \cdot \lambda_i \cdot (\lambda_i + \lambda_k - d). \quad (2.16)$$

Se permutarmos j e k em (2.12) temos

$$-E_k \left(\frac{E_k(\lambda_i)}{\lambda_k - \lambda_i} \right) - \lambda_i \cdot \lambda_k - \left(\frac{E_k(\lambda_i)}{\lambda_k - \lambda_i} \right)^2 = 0. \quad (2.17)$$

Se utilizarmos (2.14) na equação (2.17) para que fique tudo em termos de " $E_k(\lambda_k)$ " e desenvolvermos posteriormente a expressão obtida, teremos

$$E_k E_k(\lambda_k) = \frac{-2.\lambda_i^2 + 13.\lambda_i.\lambda_k + 16.\lambda_k^2 - 3.d.\lambda_i - 15.d.\lambda_k + 3d^2}{(3\lambda_k - d)(\lambda_i + 2\lambda_k - d)(\lambda_k - \lambda_i)} (E_k(\lambda_k))^2 + \frac{\lambda_i.(3\lambda_k - d).\lambda_k.(\lambda_k - \lambda_i)}{\lambda_i + 2\lambda_k - d}. \quad (2.18)$$

Se permutarmos i e k em (2.12), e repetirmos para esta equação, aquilo que foi feito para a equação (2.17), obteremos

$$-\lambda_j.\lambda_k - E_k \left(\frac{E_k(\lambda_j)}{\lambda_k - \lambda_j} \right) - \left(\frac{E_k(\lambda_j)}{\lambda_k - \lambda_j} \right)^2 = 0 \quad (2.19)$$

e

$$E_k E_k(\lambda_k) = \frac{-2.\lambda_i^2 - 17.\lambda_i.\lambda_k + \lambda_k^2 + 7.d.\lambda_i + 5.d.\lambda_k - 2d^2}{(3\lambda_k - d)(\lambda_i + 2\lambda_k - d)(\lambda_k - \lambda_i)} (E_k(\lambda_k))^2 + \frac{-\lambda_k.(3\lambda_k - d).(2.\lambda_k + \lambda_i - d)(\lambda_i + \lambda_k - d)}{\lambda_k - \lambda_i}. \quad (2.20)$$

Igualando os termos à direita das equações (2.18) e (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} & 5.(2.\lambda_i + \lambda_k - d)(E_k(\lambda_k))^2 = \\ & = -\lambda_k.(3\lambda_k - d).(2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2.\lambda_k + 9.\lambda_i.\lambda_k^2 + \\ & + 4.\lambda_k^3 - 3d\lambda_i^2 - 10d\lambda_i\lambda_k - 8d\lambda_k^2 + 3d^2\lambda_i + 5d^2\lambda_k - d^3). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Substituindo $(E_k(\lambda_k))^2$ da equação acima por aquele dado na equação (2.16) e fazendo alguns cálculos adicionais, a equação (2.21) fica

$$(-d + 2\lambda_i + \lambda_k).(-4\lambda_k^3 - 16\lambda_k^2\lambda_i - 16\lambda_k\lambda_i^2 + 4d\lambda_k^2 + 21d\lambda_i\lambda_k + 5d\lambda_i^2 - d^2\lambda_k - 5d^2\lambda_i) = 0. \quad (2.22)$$

Se $d = 0$ (caso mínimo), chegamos imediatamente a um absurdo, pois a equação (2.22) se reduz a

$$(2\lambda_i + \lambda_k) \cdot (-16\lambda_i^2\lambda_k - 16\lambda_i\lambda_k^2 - 4\lambda_k^3) = -4 \cdot (2\lambda_i + \lambda_k)^3 \cdot \lambda_k = 0$$

o que é impossível, pois $\lambda_k \neq 0$ ($0 = \frac{d}{3}$) por hipótese e $2\lambda_i + \lambda_k = \lambda_i - \lambda_j \neq 0$ porque f é uma $CP^3 \neq$. Portanto não existe $CP >$ mínima com todos os autovalores distintos de zero.

Para $d \neq 0$, temos a seguinte observação:

2.4 Observação: Para resolvermos o problema para o caso $d \neq 0$, basta resolvê-lo para $d = 1$, pois qualquer hipersuperfície com curvatura média constante pode ser transformada numa hipersuperfície com curvatura média 1 através de homotetias e mudanças de orientação.

Fixe atenção na equação (2.22) e considere $d = 1$. Note que $(-1 + 2\lambda_i + \lambda_k) = (\lambda_i - \lambda_j)$ é diferente de zero. Para demonstrar a proposição 2.3, devemos provar que não existem λ_i e λ_k que solucionem

$$-5\lambda_i - \lambda_k + 5\lambda_i^2 + 21\lambda_i\lambda_k + 4\lambda_k^2 - 16\lambda_i^2\lambda_k - 16\lambda_i\lambda_k^2 - 4\lambda_k^3 = 0. \quad (2.23)$$

Pondo os termos λ_i da equação (2.23) em evidência obtemos:

$$(5 - 16\lambda_k)\lambda_i^2 + (-5 + 21\lambda_k - 16\lambda_k^2)\lambda_i + (-\lambda_k + 4\lambda_k^2 - 4\lambda_k^3) = 0. \quad (2.24)$$

Note que $(5 - 16\lambda_k) \neq 0$. De fato, se fizermos a substituição $\lambda_k = \frac{5}{16}$ na equação acima, chegaremos facilmente a um absurdo. Portanto, ao fixarmos um valor de λ_k , teremos uma equação do segundo grau em λ_i . Reescrevamos (2.24) dividindo todos os termos por $(5 - 16\lambda_k)$

$$\lambda_i^2 + (\lambda_k - 1)\lambda_i - \frac{\lambda_k(2\lambda_k - 1)^2}{5 - 16\lambda_k} = 0. \quad (2.25)$$

λ_j também deverá satisfazer a equação acima, pois podemos repetir todo o desenvolvimento até chegar na equação (2.25) invertendo-se i com j . Portanto λ_i e λ_j são as duas raízes de (2.25), os quais, após algumas simplificações, são expressas conforme a equação abaixo:

$$\lambda_i = \frac{(1 - \lambda_k) \pm \sqrt{\frac{(7\lambda_k - 5)(3\lambda_k - 1)}{(5 - 16\lambda_k)}}}{2}. \quad (2.26)$$

Para os nossos propósitos, escolheremos λ_i como sendo

$$\lambda_i = \frac{(1 - \lambda_k) + \sqrt{\frac{(7\lambda_k - 5)(3\lambda_k - 1)}{(5 - 16\lambda_k)}}}{2}. \quad (2.27)$$

Para chegarmos a um absurdo, combinaremos a equação (2.27) com a equação (2.14), o qual re-escrevemos abaixo:

$$E_k(\lambda_i) = \frac{(-\lambda_i - 2\lambda_k + 1)}{(3\lambda_k - 1)} E_k(\lambda_k). \quad (2.28)$$

Substituindo (2.27) na equação (2.28), chegaremos, após alguns cálculos, à equação

$$\begin{aligned} \frac{-168\lambda_k^2 + 105\lambda_k - 15}{(5 - 16\lambda_k)^2} \sqrt{\frac{(5 - 16\lambda_k)}{(7\lambda_k - 5)(3\lambda_k - 1)}} E_k(\lambda_k) = \\ = - \frac{\sqrt{\frac{(7\lambda_k - 5)(3\lambda_k - 1)}{5 - 16\lambda_k}}}{(3\lambda_k - 1)} E_k(\lambda_k). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Elevando os dois lados de (2.29) ao quadrado e fazendo alguns cálculos adicionais, obtemos a seguinte igualdade:

$$[(-168\lambda_k^2 + 105\lambda_k - 15)^2 + (-112\lambda_k^2 + 115\lambda_k - 25)^2](E_k(\lambda_k))^2 = 0.$$

O polinômio de quarto grau que multiplica $(E_k(\lambda_k))^2$ na equação acima pode ter no máximo quatro raízes reais. Portanto se $(E_k(\lambda_k)) \neq 0$ em um ponto da hipersuperfície, ele o será em uma vizinhança deste ponto, e nesta vizinhança, a hipersuperfície será isoparamétrica, pois os valores de λ_i e λ_j são univocamente determinados em termos de λ_k (vide (2.26)). Mas isso é um absurdo, pois não existem hipersuperfícies isoparamétricas no espaço euclidiano com os três autovalores do operador de Weingarten distintos dois a dois. Portanto $E_k(\lambda_k) = 0$. Mas a equação (2.14) nos diz que $E_k(\lambda_l) = 0$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Portanto $E_s(\lambda_l) = 0$ para $l, s \in \{1, 2, 3\}$. Combinando este fato com a equação (2.12), chegamos às seguintes equações

$$\begin{aligned}\lambda_i \lambda_j &= 0, \\ \lambda_j \lambda_k &= 0, \\ \lambda_i \lambda_k &= 0,\end{aligned}$$

o que implica que dois dos autovalores de A_{E_4} se anulam. Mas isso é um absurdo, pois os autovalores do operador de Weingarten são distintos dois a dois.

Portanto sempre existe um autovalor de A_{E_4} igual a $\frac{d}{3}$. \square

2.5 A condição curvatura de Gauss-Kroencker 0

No teorema 1.6, a passagem (3) \Rightarrow (2) é óbvia. Demonstremos a inversa.

2.5 Proposição: *No teorema 1.6, (2) \Rightarrow (3).*

Demonstração:

Suponha que a condição (2) é satisfeita. Neste caso, demonstramos na seção anterior que o operador de Weingarten é da forma

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{d}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda + \frac{d}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{3} \end{bmatrix}.$$

Então basta demonstrar que $d = 0$. Suporemos o contrário e chegaremos a um absurdo.

Podemos fixar $d = 1$ devido à observação 2.4, e supor, sem perda de generalidade, que o autovalor fixo $\frac{1}{3}$ do operador de Weingarten é o λ_3 . O operador de Weingarten fica

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Afirmamos que $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 0$. De fato, se fizermos a substituição $\lambda_k = -\lambda_i - \lambda_j + 1$ na equação (2.11), obteremos

$$(3\lambda_j - 1).E_j(\lambda_i) = (-\lambda_i - 2\lambda_j + 1).E_j(\lambda_j). \quad (2.30)$$

$E_1(\lambda_3) = E_2(\lambda_3) = E_3(\lambda_3) = 0$. Utilizando-se (2.30) e o fato de que $(-\lambda_i - 2\lambda_j + 1) = (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0$, temos que $E_1(\lambda_1) = E_1(\lambda) = -E_1(\lambda_2) = 0$ e $E_2(\lambda_2) = E_2(\lambda) = -E_2(\lambda_1) = 0$. Portanto, as únicas expressões $E_i(\lambda_i)$ que eventualmente são não-nulos são $E_3(\lambda_1) = E_3(\lambda) = -E_3(\lambda_2)$.

Se pusermos $i = 1, j = 3$ e $k = 2$ na equação (2.12), obtemos:

$$E_3\left(\frac{E_3(\lambda)}{\lambda}\right) - \left(\frac{E_3(\lambda)}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\lambda + \frac{1}{3}\right) \quad (2.31)$$

Por outro lado, se $i = 3, j = 2$ e $k = 1$, a equação (2.12) fica:

$$E_3\left(\frac{E_3(\lambda)}{\lambda}\right) - \left(\frac{E_3(\lambda)}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(-\lambda + \frac{1}{3}\right) \quad (2.32)$$

Comparando (2.31) com (2.32), obtemos $\lambda = 0$ e a imersão é umbflica, o que vai contra a hipótese de termos os autovalores do operador de Weingarten distintos dois a dois. \square

Capítulo 3

Caracterização das $CP >$

3.1 Introdução

Na seção 2.5, obtivemos a expressão

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda \neq 0$$

para as $CP >$. Neste capítulo, iremos caracterizar as $CP >$ como sendo um aberto do cone sobre o toro de Clifford. Após essa caracterização, demonstraremos a equivalência do item (4) do teorema 1.6 com os demais itens.

3.2 Fórmulas de conexão para as $CP >$

Seja $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma $CP >$. Seu operador de Weingarten é dado por:

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Podemos escolher E_4 de modo que $\lambda > 0$.

Vamos simplificar as equações da proposição 2.1 para as $CP >$. Para isso, precisaremos da proposição 3.1 e da equação (3.2).

3.1 Proposição: $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 0$. Portanto λ é constante nas superfícies integrais determinadas por $\{E_1, E_2\}$.

Demonstração:

Tome $j = 1$ e $i = 2$ na equação (1.6).

$$\lambda_j = \lambda; \quad \lambda_i = -\lambda; \quad \lambda_k = 0; \quad \gamma_i = \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda^2.$$

Então

$$E_1(-\frac{1}{2}\lambda^2) = -\lambda E_1(\lambda) = 0 \Rightarrow E_1(\lambda) = 0.$$

Tomando $j = 2$ e $i = 1$, concluímos de modo similar que $E_2(\lambda) = 0$, o que demonstra a proposição. \square

As superfícies integrais de $\{E_1, E_2\}$ serão denotadas por Σ_λ , onde λ é o autovalor positivo do operador de Weingarten. Devido às proposições 2.1 e 3.1, a curvatura gaussiana de Σ_λ é nula. Com isso, a equação de Gauss para a imersão $\bar{g} : \Sigma_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$ fica

$$0 = \frac{E_3^2(\lambda)}{\lambda^2} - \lambda^2 \Rightarrow \frac{E_3(\lambda)}{\lambda} = \pm\lambda. \quad (3.1)$$

Podemos escolher o sentido de E_3 como sendo aquele que

$$\frac{E_3(\lambda)}{\lambda} = \lambda. \quad (3.2)$$

Pelas proposições 2.1 e 3.1, e pela equação (3.2) temos:

3.2 Proposição: Sejam $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma CP >, E_4 escolhido de modo que $\lambda > 0$ e E_3 escolhido segundo a equação (3.2). Então temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= \lambda E_3 + \lambda E_4, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= -\lambda E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_4 &= -\lambda E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= \lambda E_3 - \lambda E_4, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_3 &= -\lambda E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_4 &= \lambda E_2, \end{aligned}$$

sendo que $\nabla_{E_i} E_J = 0$ nos demais casos.

3.3 Classificação das $CP >$

Um teorema central para a classificação das $CP >$ é o que se segue abaixo.

3.3 Teorema: *Seja Σ_λ uma superfície conexa em \mathbb{R}^m com o vetor curvatura média paralelo no fibrado normal. Então M é uma das seguintes superfícies:*

- (i) *Superfície mínima em \mathbb{R}^m .*
- (ii) *Superfície mínima de uma hipersfera de \mathbb{R}^m .*
- (iii) *Superfície em uma 3-esfera $S^3(p, r)$ contida em um 4-espaço afim de \mathbb{R}^m .*
- (iv) *Superfície em um 3-espaço afim de \mathbb{R}^m .*

Demonstração: Vide [2].□

Calculando o vetor curvatura média de $\bar{g} : \Sigma_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$ obtemos

$$H = 2\lambda E_3.$$

Temos que $\nabla^\perp H = 0$. Com isso, \bar{g} satisfaz a condição do teorema 3.3.

Note que H não pode ser nulo. Com isso, a possibilidade (i) do teorema 3.3 nunca ocorre. Outro caso que nunca ocorre é o (iv), pois $\{E_1, E_2, \nabla_{E_1} E_1, \nabla_{E_2} E_2\}$ gera um espaço de dimensão 4 e Σ_λ não pode estar contida em um 3-espaço afim. Finalmente (ii) está contido em (iii). Portanto Σ_λ é uma superfície em uma hipersfera de \mathbb{R}^4 .

Com esses dados em mãos, demonstremos o teorema principal deste capítulo (que é a última parte do teorema 1.6):

3.4 Teorema: *Uma hipersuperfície mínima, conformemente plana em \mathbb{R}^4 , com distribuição de nulidade relativa 1-dimensional é um aberto do cone sobre um Toro de Clifford.*

A demonstração do teorema será subdividida em vários lemas.

3.5 Lema: Σ_λ é isoparamétrica em $S^3(p, r)$.

Demonstração:

Seja $F = \cos \xi E_3 + \sin \xi E_4$ um vetor unitário tangente a $S^3(p, r)$ e normal a Σ_λ . Da proposição 3.2 temos que:

1. A curvatura de Σ_λ é nula (De fato, E_1 e E_2 são paralelos em Σ_λ).
2. O operador de Weingarten \tilde{A}_ξ da imersão $g := f|_{\Sigma_\lambda}: \Sigma_\lambda \rightarrow S^3(p, r)$ tem autovalores $\lambda_1^g := \lambda(\cos \xi + \sin \xi)$ e $\lambda_2^g := \lambda(\cos \xi - \sin \xi)$.

Portanto, pela equação de Gauss de g temos

$$0 = \frac{1}{r^2} + \lambda^2(\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \Rightarrow \cos 2\xi = -\frac{1}{\lambda^2 r^2}, \quad (3.3)$$

e já que λ é constante em Σ_λ , ξ e os autovalores de \tilde{A}_ξ são constantes. Isto conclui o lema. \square

A equação (3.3) nos diz que

$$\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{4} < \xi < \frac{7\pi}{4}, \quad (3.4)$$

pois $\cos 2\xi < 0$. Em particular, E_3 não pode ser tangente à $S^3(p, r)$ e $\lambda_1^g \neq \lambda_2^g$. A menos de isometrias e homotetias, as superfícies isoparamétricas de S^3 com autovalores do operador de Weingarten distintos são abertos de imersões $h_\eta: S^1 \times S^1 \rightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$ do tipo

$$h_\eta(\theta, \varphi) = (\cos \eta \cdot \cos \theta, \cos \eta \cdot \sin \theta, \sin \eta \cdot \cos \varphi, \sin \eta \cdot \sin \varphi), \quad \eta \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Em particular, $h_{\frac{\pi}{2}}$ é o Toro de Clifford (vide [7, pág. 22]).

As curvas integrais de E_3 são segmentos de reta pois $\nabla_{E_3} E_3 = 0$. Indicaremos por $\kappa(x, t) \in \mathbb{R}^4$, a curva integral de E_3 tal que $\kappa(x, 0) = x$ e elas têm as seguintes propriedades:

1. $E_3(\lambda) = \lambda^2 \Rightarrow t \mapsto \lambda(\kappa(q, t))$ cresce com derivada estritamente positiva.

2. Fixe $\bar{t} \in [-\delta, \delta]$. Então $\lambda(\kappa(q_1, \bar{t})) = \lambda(\kappa(q_2, \bar{t}))$ se q_1 e q_2 pertencem ao mesmo Σ_{λ_0} , pois tanto $\lambda(\kappa(q_1, t))$ como $\lambda(\kappa(q_2, t))$ são funções que satisfazem a equação diferencial ordinária $E_3(\lambda) = \lambda^2$, com condição inicial $\lambda(\kappa(q_1, 0)) = \lambda(\kappa(q_2, 0)) = \lambda_0$.

Fixe $q \in \Sigma_{\lambda_0}$. Tome $U_q \subset \Sigma_{\lambda_0}$ vizinhança conexa “pequena” de q . As curvas integrais do campo vetorial E_3 passam ortogonalmente a U_q . Pelo teorema da vizinhança tubular, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\kappa : U_q \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre a imagem. Note que $V_q := \kappa(U_q \times (-\epsilon, \epsilon))$ é folheado por superfícies $U_q^{\bar{t}} := \{p \in V_q, p = \kappa(U_q, \bar{t})\}$, com $\bar{t} \in (-\epsilon, \epsilon)$.

O próximo passo é provar que:

3.6 Lema: *As superfícies $U_q^{\bar{t}}$ estão contidas em esferas com o mesmo centro p e são superfícies integrais de $\{E_1, E_2\}$.*

Demonstração:

A superfície U_q é substancial em \mathbb{R}^4 , ou seja, não está contida em nenhum subespaço de dimensão 3. Para comprovar isso, basta verificar que o subespaço gerado por $\{E_1, E_2, \nabla_{E_1} E_1, \nabla_{E_2} E_2\}$ tem dimensão 4, o que pode ser feito utilizando-se a proposição 3.2.

Tome cinco pontos $q_1, \dots, q_5 \in U_q$ em posição geral. Então $q_i^\epsilon := \kappa(q_i, \epsilon)$, $1 \leq i \leq 5$, ainda estarão em posição geral para ϵ suficientemente pequeno. Esses cinco pontos q_i^ϵ determinam uma única esfera $S^3(\bar{p}, \bar{r})$. Demonstraremos que $p = \bar{p}$, provando que todos os q_i^ϵ estão a mesma distância de p .

Tome o triângulo (eventualmente degenerado a um triângulo de ângulos $0, 0, \pi$) formado por p, q_i e q_i^ϵ . O lado $\overline{pq_i}$ do triângulo mede r independentemente de i . O lado $\overline{q_i q_i^\epsilon}$ mede ϵ independentemente de i . O ângulo formado por esses dois lados é ξ independentemente de i . Portanto todos os cinco triângulos são congruentes e a distância entre p e q_i^ϵ é o mesmo, independentemente de i . Portanto, *as superfícies U_q^ϵ pertencem a esferas com centro em p .*

Finalmente, para ver que $U_q^{\bar{t}}$ são superfícies integrais de $\{E_1, E_2\}$, observe que $q_1, q_2 \in U_q^{\bar{t}} \Leftrightarrow \lambda(q_1) = \lambda(q_2)$ devido às propriedades 1 e 2 das curvas integrais de E_3 . \square

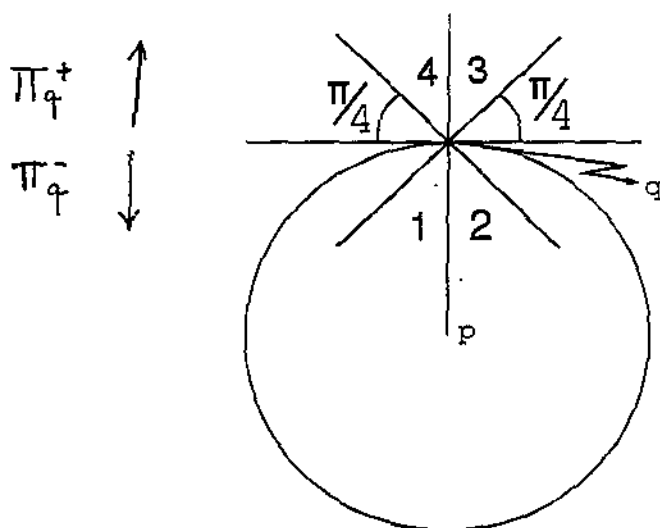


Figura 3.2:

Iremos fazer os cálculos na variável $\omega(t)$ (vide fig. 3.2) convertendo depois para a variável $\bar{\xi}$ através da relação $\bar{\xi} = \pi - \omega$.

$$\tan(\omega(t)) = \frac{\bar{r}(0) \operatorname{sen} \omega(0) - t}{\bar{r}(0) \cos \omega(0)}.$$

Derivando os dois lados temos

$$\begin{aligned} \sec^2 \omega(t) \cdot \omega'(t) &= -\frac{1}{\bar{r}(0) \cos \omega(0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega'(0) &= -\frac{\cos \omega(0)}{\bar{r}(0)}. \end{aligned}$$

Convertendo de ω para $\bar{\xi}$, temos que

$$\begin{cases} \bar{\xi}'(t) = -\omega'(t) \\ \cos \bar{\xi}(0) = \cos(\pi - \omega(0)) = -\cos \omega(0) \end{cases} \Rightarrow \bar{\xi}'(0) = -\frac{\cos \bar{\xi}(0)}{\bar{r}(0)}. \quad (3.5)$$

O cálculo de $\bar{r}'(0)$ fica:

$$\begin{aligned}\bar{r}(t) &= \sqrt{\bar{r}(0)^2 \cos^2 \omega(0) + (\bar{r}(0) \sin \omega(0) - t)^2} = \\ &= \sqrt{\bar{r}(0)^2 - 2\bar{r}(0) \sin \omega(0) \cdot t + t^2}.\end{aligned}$$

Derivando temos que:

$$\bar{r}'(0) = -\sin \omega(0).$$

Transformando para a variável $\bar{\xi}$ temos

$$\bar{r}'(0) = -\sin \bar{\xi}(0). \quad (3.6)$$

Reescrevamos as equações que serão importantes para provarmos que $\xi = \frac{\pi}{2}$:

$$\bar{\lambda}'(0) = \bar{\lambda}^2(0), \quad (3.7)$$

$$\bar{\xi}'(0) = -\frac{\cos \bar{\xi}(0)}{\bar{r}(0)}, \quad (3.8)$$

$$\bar{r}'(0) = -\sin \bar{\xi}(0), \quad (3.9)$$

$$\cos 2\bar{\xi}(t) = -\frac{1}{\bar{\lambda}^2(t)\bar{r}^2(t)}. \quad (3.10)$$

Ressaltamos que chegaremos às equações (3.7) - (3.10) independente das combinações de E_3 e E_4 que tomarmos. Por exemplo, se tomarmos E_3 na região 4 e E_4 em Π_q^+ , obteremos novamente as equações (3.7) - (3.10). O mesmo vale trivialmente se tomarmos $\xi = \frac{\pi}{2}$ ou $\xi = \frac{3\pi}{2}$.

A equação (3.10) pode ser reescrita como

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{1}{\bar{r}(t)\sqrt{-\cos 2\bar{\xi}(t)}}. \quad (3.11)$$

Derivando (3.11) em t e restringindo o resultado para $t = 0$ temos

$$1 = -\tan 2\bar{\xi}(0) \cdot \cos \bar{\xi}(0) \cdot \sqrt{-\cos 2\bar{\xi}(0)} + \sin \bar{\xi}(0) \cdot \sqrt{-\cos 2\bar{\xi}(0)}. \quad (3.12)$$

Uma condição necessária para que a equação (3.12) tenha solução é que o quadrado do termo da direita seja igual a 1. Mas o quadrado do termo da direita de (3.12) é

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \bar{\xi}(0)}{\operatorname{sen}^2 \bar{\xi}(0) - \cos^2 \bar{\xi}(0)}. \quad (3.13)$$

Igualando (3.13) a 1 temos

$$\cos \bar{\xi}(0) = 0 \Rightarrow \bar{\xi}(0) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (3.14)$$

Testando os valores obtidos em (3.14) na equação (3.12), vemos que somente os valores $\bar{\xi}(0) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ satisfazem a equação. Portanto E_3 está direcionado para o centro de $S^3(p, r)$, o que demonstra o teorema 3.4. \square

3.4 Item (4) do teorema 1.6

Demonstraremos a equivalência do item (4) do teorema 1.6 com os demais itens.

$$(1) \Rightarrow (4)$$

(1) implica que f é um aberto de um cone sobre o toro de Clifford. Então a métrica no sistema de coordenadas $(x_1 = \theta, x_2 = \phi, x_3 = r) \rightarrow (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi)$ é dado por $r^2 \cdot dx_1^2 + r^2 \cdot dx_2^2 + dx_3^2$, que é uma métrica do tipo (4).

$$(4) \Rightarrow (2)$$

A demonstração está no Lema 4.1 de [15]. Pelo fato de [15] ser um preprint, demonstraremos a implicação.

Seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ um sistema de coordenadas principais, onde a métrica de M é dada por $ds^2 = e^{h_1(x)} \cdot dx_1^2 + e^{h_2(x)} \cdot dx_2^2 + dx_3^2$. Os símbolos de Christoffel podem ser obtidos como funções dos termos da métrica. Calculando-se Γ_{33}^1 e Γ_{33}^2 obtemos

$$\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0.$$

Mas pela proposição 2.1,

$$0 = \Gamma_{33}^1 = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_3}} \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \right\| \cdot \frac{E_1(\lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_1}$$

e

$$0 = \Gamma_{33}^2 = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_3}} \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle = \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \right\| \cdot \frac{E_2(\lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

Portanto λ_3 é constante ao longo das folhas integrais da distribuição gerada por E_1 e E_2 . \square

Parte II

Caracterização de certas
hipersuperfícies no espaço
euclidiano sob a ação de grupos
compactos de isometrias de
cohomogeneidade 1

Capítulo 4

Preliminares

4.1 Geometria Equivariante

Nesta seção, recordaremos alguns fatos básicos de geometria equivariante. Seja \bar{M} uma variedade riemanniana e G um subgrupo fechado do grupo de isometrias de \bar{M} . No conjunto das classes de conjugação dos subgrupos de isotropia, existe um único elemento minimal. As órbitas correspondentes à esse elemento são chamadas de órbitas principais, e cada uma delas é difeomorfa às outras. A união das órbitas principais é a parte regular $M \subset \bar{M}$. É conhecido que M é aberto e denso em \bar{M} .

4.1 Definição: *Seja \bar{M} uma variedade riemanniana e G um subgrupo fechado do grupo de isometrias de \bar{M} . Dizemos que G atua em \bar{M} com cohomogeneidade k se a codimensão das órbitas principais for k . Neste caso dizemos que \bar{M} é uma variedade de cohomogeneidade k .*

Estamos interessados no caso $k = 1$.

4.2 Definição: *Seja \bar{M} uma variedade de cohomogeneidade 1. Uma geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ parametrizada pelo comprimento de arco é chamada geodésica normal se $\alpha'(t)$ é perpendicular à órbita $G(\alpha(t))$ em $\alpha(t)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

4.3 Observação: *Se uma geodésica α é normal a uma órbita principal em um determinado ponto, α será normal em todas as órbitas pelas quais passa, e portanto será uma geodésica normal.*

Uma geodésica normal α têm a seguinte propriedade:

4.4 Proposição: *Se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma geodésica normal e $g \in G$, então $(g \circ \alpha)$ também é uma geodésica normal.*

Vide [14, pág. 23].

Seja ε suficientemente pequeno. Quando a geodésica normal $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$ está contida nas órbitas principais de \bar{M} , o teorema 4.4 nos permite definir uma aplicação $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \{\text{órbitas de } f\}$, que é induzida pela aplicação α . De fato: Pelo teorema do “slice”, Φ estabelece um homeomorfismo local entre o intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e o espaço das órbitas. Então $(-\varepsilon, \varepsilon)$ pode ser identificado com um pedaço do espaço das órbitas.

4.5 Teorema: *Se \bar{M} é uma variedade compacta de cohomogeneidade 1, então o seu espaço de órbitas \bar{M}/G é homeomorfo a S^1 ou a $[0, 1]$. No primeiro caso, só existem órbitas principais e no segundo, as órbitas principais correspondem ao conjunto $(0, 1)$.*

(Vide [14, pág. 21])

4.6 Observação: *Daqui em diante, fora menção em contrário, estaremos sempre considerando a parte regular M da variedade.*

Estabeleça um fluxo geodésico normal suave $\tilde{\alpha}' : \Phi(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T(\Phi(-\varepsilon, \varepsilon))$. Esse fluxo pode ser definido fixando-se uma geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ que define o fluxo α' em $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$, e daí estende-se esse fluxo para todo $\Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ através do campo de vetores $dg_x(\alpha'(t))$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $x = \alpha(t)$ e $g \in G$. Então para cada $x \in \Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$, passa uma geodésica normal $\alpha_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\alpha'_x = \tilde{\alpha}'|_{\alpha_x(-\varepsilon, \varepsilon)}$ e $\alpha_x(0) = x$.

$\tilde{\alpha}'$ denotará o campo $\tilde{\alpha}'|_{\Sigma}$.

As notações acima serão utilizadas posteriormente.

4.2 Introdução ao problema

Sejam W e Z duas variedades riemannianas, $\rho : G \times W \rightarrow W$ a ação por isometrias de um grupo G e $f : W \rightarrow Z$ uma imersão isométrica. Dizemos

que uma isometria $g \in G$ é induzida por uma isometria \bar{g} de Z se $f \circ g = \bar{g} \circ f$. f é dita uma imersão padrão, se todas as isometrias de ρ são induzidas por isometrias de Z .

Em [11], Mercuri, Podestà e Seixas demonstraram o seguinte resultado:

4.7 Teorema: *Sejam \bar{M}^n uma variedade riemanniana compacta, $\rho : G \times \bar{M}^n \rightarrow \bar{M}^n$ a ação por isometrias de um grupo compacto G de cohomogeneidade um e $f : \bar{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $n \geq 5$ e as órbitas principais não forem difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$ ou a $S^2 \times S^{n-3}$, então f será uma imersão padrão.*

O teorema 4.7 utiliza o seguinte teorema devido a Castro e Noronha (vide [6]).

4.8 Teorema: *Seja $h : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana homogênea compacta. h e Σ estão em um dos casos abaixo:*

(a) Σ é isométrica a esfera S^{n-1} e h é a composição de uma imersão canônica de S^{n-1} em um hiperplano com uma imersão isométrica desse hiperplano em \mathbb{R}^{n+1} .

(b) Σ é recoberto por $S^{n-2} \times \mathbb{R}$ e $h \circ \zeta$ é a composição $\phi \circ (\beta \times id)$, onde ζ é a aplicação de recobrimento, β é a aplicação canônica de S^{m-1} em um hiperplano, id a aplicação identidade e ϕ uma imersão isométrica deste hiperplano em \mathbb{R}^{n+1} .

(c) $h(\Sigma)$ é uma hipersuperfície isoparamétrica compacta de uma esfera.

O objetivo da segunda parte do trabalho é demonstrar o teorema que se segue:

4.9 Teorema: *Sejam \bar{M}^n uma variedade riemanniana compacta, $\rho : G \times \bar{M}^n \rightarrow \bar{M}^n$ a ação por isometrias de um grupo compacto e conexo G de cohomogeneidade 1 e $f : \bar{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $n \geq 5$, então f é uma imersão padrão.*

Completaremos a demonstração do teorema 4.7 para os casos onde as órbitas principais são difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$ ou a $S^2 \times S^{n-3}$.

4.3 Órbitas principais

4.3.1 Classificação das órbitas

Antes de classificarmos as órbitas, enunciemos um lema elementar:

4.10 Lema: *Sejam $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ e Π um k -plano em \mathbb{R}^{n+1} . O ponto $q \in \Pi$ que minimiza a distância entre p e Π é dado por $q = (\Pi^\perp + p) \cap \Pi$.*

Demonstração:

Seja x um ponto qualquer de Π . Então

$$\|p - x\|^2 = \|(p - q) - (x - q)\|^2 = \|p - q\|^2 + \|x - q\|^2 \geq \|p - q\|^2$$

onde a segunda igualdade é devido ao teorema de Pitágoras. \square

As órbitas de uma ação por isometrias de um grupo em uma variedade riemanniana são subvariedades homogêneas da variedade. Logo, o teorema 4.8 nos fornece informações sobre as órbitas principais dos teoremas 4.7 e 4.9.

Conserve a notação do teorema 4.8. Demonstremos a seguinte proposição, que explicita os tipos de órbitas que podemos ter:

4.11 Proposição: *Seja $f : \bar{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 5$, uma hipersuperfície compacta de cohomogeneidade 1 com o grupo de isometrias compacto. Então as órbitas principais são:*

(a) *Isométricas a $S^{n-1}(p, r)$*

(b) *Isométricas a $S^1(p_1, r_1) \times S^{n-2}(p_2, r_2)$*

(c) *Uma hipersuperfície isoparamétrica de $S^n(p, r)$.*

Além disso, temos que $f|_\Sigma$ no caso (b) é uma imersão $S^1 \times S^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$, com $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (Note que a primeira inclusão pode ser bem “caótica”, tendo várias auto-interseções).

Demonstração:

Utilizaremos *id* para diversas aplicações identidade. Isso não causará confusão, pois o uso da mesma sempre ficará clara no contexto.

Os casos (a) e (c) são uma repetição do teorema 4.8 e portanto não requerem demonstrações. Vejamos o caso (b).

Mantendo a notação do teorema 4.8, $h \circ \zeta$ é a composição $\phi \circ (\beta \times id)$. $(\beta \times id)$ nos dá a inclusão $inc : [S^{n-2}(0, r) \times \mathbb{R}] \subset [\Lambda^{n-1} \times \mathbb{R}]$, onde Λ^{n-1} é isométrico a \mathbb{R}^{n-1} . Em seguida, $\Lambda^n := [\Lambda^{n-1} \times \mathbb{R}]$ é imerso isometricamente, via ϕ , em \mathbb{R}^{n+1} . O conjunto $(0, \mathbb{R}) \subset (\Lambda^{n-1} \times \mathbb{R})$ será chamado de eixo de inc e será denotado por ϑ .

ϕ é um cilindro em \mathbb{R}^{n+1} (vide [4, pág. 143]). De modo mais preciso, existe um 2-plano Π e uma curva $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow \Pi$ tal que $\phi = [\varrho \times id] : [\mathbb{R} \times \Pi^\perp] \rightarrow [\Pi \times \Pi^\perp]$. Para $q \in \Pi^\perp$, $(\mathbb{R}, q) \subset (\mathbb{R} \times \Pi^\perp)$ é uma reta totalmente geodésica em $\Lambda^n (= (\mathbb{R} \times \Pi^\perp))$. Este conjunto de retas gera uma folheação Ψ em Λ^n .

Afirmamos que $\vartheta \subset \Psi$. Em outras palavras, afirmamos que as decomposições $(\Lambda^n = \Lambda^{n-1} \times \mathbb{R})$ e $(\Lambda^n = \Pi^\perp \times \mathbb{R})$ coincidem. Fixe $\varphi \subset \Psi$. Ao supormos $\vartheta \not\subset \Psi$, demonstraremos que $h(\vartheta)$ se afastará indefinidamente de $h(\varphi)$. Isso gerará uma contradição porque $h(\vartheta)$ está a uma distância finita de $h(\Sigma)$ e portanto $h(\Sigma)$ também se afastará indefinidamente de $h(\varphi)$. Mas isso não pode acontecer, pois $h(\Sigma)$ é compacto.

Suponha então $\vartheta \not\subset \Psi$ e chegaremos ao absurdo mencionado acima.

Se $\vartheta \not\subset \Psi$, então ϑ se afastará indefinidamente de φ . Se demonstrarmos que para $x \in \vartheta$, $dist_{\Lambda^n}(x, \varphi) = dist_{\mathbb{R}^{n+1}}(h(x), h(\varphi))$, teremos demonstrado o nosso argumento de contradição. Vejamos como é feito o cálculo de $dist_{\Lambda^n}(x, \varphi)$ e de $dist_{\mathbb{R}^{n+1}}(h(x), h(\varphi))$.

1. $dist_{\Lambda^n}(x, \varphi)$: Lembrando que neste caso o nosso ambiente é Λ^n , o ponto $y_\varphi \in \varphi$ que realiza a distância de x a φ é dado por $y_\varphi = \varphi \cap (\Pi^\perp + x)$. Em particular, x e y_φ pertencem ao mesmo subconjunto $(t, \Pi^\perp) \subset (\mathbb{R} \times \Pi^\perp)$.
2. $dist_{\mathbb{R}^{n+1}}(h(x), h(\varphi))$: Note que $h(\varphi) \subset (\Pi + z)$ para algum $z \in \mathbb{R}^{n+1}$. Afirmamos que $y_{h(\varphi)} = (\Pi + z) \cap (\Pi^\perp + h(x))$ é o ponto que realiza a distância de $h(x)$ a $h(\varphi)$. De fato, o ponto que realiza a distância entre $h(x)$ e $(\Pi + z)$ é $y_{h(\varphi)}$. Mas $y_{h(\varphi)} \in h(\varphi)$ pois $y_{h(\varphi)}$ e $h(x)$ estão em um mesmo conjunto $\phi[(t, \Pi^\perp)]$. Portanto $y_{h(\varphi)}$ é o ponto que realiza a distância de $h(x)$ a $h(\varphi)$.

Pela construção dos pontos que minimizam a distância, podemos notar que $h(y_\varphi) = y_{h(\varphi)}$. Note agora que se \bar{x} e \tilde{x} pertencem ao mesmo subconjunto $(t, \Pi^\perp) \subset (\mathbb{R} \times \Pi^\perp)$, então $\text{dist}_{\Lambda^n}(\bar{x}, \tilde{x}) = \text{dist}_{\mathbb{R}^{n+1}}(h(\bar{x}), h(\tilde{x}))$, pois a imersão de (t, Π^\perp) em \mathbb{R}^{n+1} via ϕ é totalmente geodésica. Então $\text{dist}_{\Lambda^n}(x, \varphi) = \text{dist}_{\mathbb{R}^{n+1}}(h(x), h(\varphi))$, o que gera a contradição desejada. Portanto $\vartheta \subset \Psi$ e as decomposições $(\Lambda^n = \Lambda^{n-1} \times \mathbb{R})$ e $(\Lambda^n = \Pi^\perp \times \mathbb{R})$ coincidem. Isto implica em

$$\begin{aligned} & (\phi \circ (\beta \times \text{id}))(S^{n-2} \times \mathbb{R}) = \\ & ((\text{id} \times \varrho) \circ (\beta \times \text{id}))(S^{n-2} \times \mathbb{R}) = \\ & ((\text{id} \circ \beta) \times (\varrho \circ \text{id}))(S^{n-2} \times \mathbb{R}) = \\ & (\beta \times \varrho)(S^{n-2} \times \mathbb{R}) = \\ & \beta(S^{n-2}) \times \varrho(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

deve ser compacto e portanto $\varrho(\mathbb{R})$ deve ser compacto. Mas uma variedade unidimensional compacta e sem bordo é difeomorfa a S^1 . Portanto $h(\Sigma) = (\varrho \subset \Pi) \times (S^{n-2} \subset \Pi^\perp)$, conforme queríamos demonstrar. \square

4.3.2 Decomposição da órbita

Analisemos as órbitas da Proposição 4.11.

Se as órbitas principais forem isométricas a uma esfera redonda (caso (a)), [1] nos diz que a hipersuperfície é de revolução, e portanto é uma imersão padrão.

Considere o caso onde as órbitas principais de f são hipersuperfícies isoparamétricas de alguma esfera (Caso (c)). Denote essa imersão por $\bar{h} : \Sigma^{n-1} \rightarrow S^n(p, r)$. Seja A o operador de Weingarten de \bar{h} . É um resultado clássico que o número de autovalores distintos g de A é igual a 1, 2, 3, 4 ou 6 (vide [7]). O teorema 4.7 demonstra que para os casos $g = 1$, $g \geq 3$ e $g = 2$ com os dois autovalores de A possuindo multiplicidade maior do que 2, f é uma imersão padrão.

O nosso objetivo é demonstrar o teorema 4.7 para os casos que faltam. Eles são:

1- Órbitas do tipo (b): Consideraremos as imersões $[h = (h_1 \times h_2)] : (S^1 \times S^{n-2}) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1})$, onde $h_1(S^1) \subset \mathbb{R}^2$ não é a esfera redonda.

2- Órbitas do tipo (c): São subdivididas em três:

2a- Órbitas do tipo (c1): Imersões do tipo $[h = (h_1 \times h_2)] : (S^1 \times S^{n-2}) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1})$ onde $h_1(S^1) \subset \mathbb{R}^2$ é a esfera redonda.

2b- Órbitas do tipo (c2): Imersões do tipo $[h = (h_1 \times h_2)] : (S^2 \times S^{n-3}) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{n-2})$, com $n > 5$.

2c- Órbitas do tipo (c̃2): Imersões do tipo $[h = (h_1 \times h_2)] : (S^2 \times S^2) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

No caso (c1), a órbita é uma hipersuperfície isoparamétrica da esfera, com $g = 2$ e multiplicidades 1 e $(n - 2)$. Nos casos (c2) e (c̃2), a órbita é uma hipersuperfície isoparamétrica da esfera, com $g = 2$ e multiplicidades 2 e $(n - 3)$. Em todos os casos, a órbita é uma soma direta. Denotaremos o contradomínio de h_1 por Π_1 e o contradomínio de h_2 por Π_2 . n_i será a dimensão de Π_i , $i = 1, 2$. $\pi_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Pi_i$ será a projeção ortogonal, $i = 1, 2$.

Definiremos agora um sistema de coordenadas baseado nesta decomposição da órbita. Para isso, utilizaremos algumas definições adicionais.

4.12 Definição: *Sejam W uma variedade riemanniana e $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. O ponto*

$$p = \frac{\int_{x \in W} F(x) \cdot dW}{Vol(W)} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (4.1)$$

será chamado centro de F .

Note que a definição de centro de F não depende do sistema de coordenadas adotado.

4.13 Observação: *O centro de uma aplicação produto é o produto dos centros.*

4.14 Observação: *O centro de uma esfera canônica é o centro propriamente dito.*

Fixe uma órbita $h(\Sigma)$ e seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal em \mathbb{R}^{n+1} tal que

- $\{e_1, \dots, e_{n_1}\}$ gera Π_1
- $\{e_{n_1+1}, \dots, e_{n+1}\}$ gera Π_2

Esta base será denominada base Π_i -canônica e o respectivo sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ com origem fixada no centro de $h(\Sigma)$ será denominado sistema de coordenadas Π_i -canônico.

Sejam $e_0^\perp(x) \in \Pi_1$ e $e_{\pi/2}^\perp(x) \in \Pi_2$ vetores unitários em $\nu_x h$. Note que $\nu_x h = \text{span}\{e_0^\perp(x), e_{\pi/2}^\perp(x)\}$ e que $e_0^\perp(x)$ e $e_{\pi/2}^\perp(x)$ podem ser estendidos a campos e_0^\perp e $e_{\pi/2}^\perp$ em $\nu\Sigma$. $e_{\theta(x)}^\perp$ denotará o vetor $e_0^\perp \cdot \cos \theta(x) + e_{\pi/2}^\perp \cdot \sin \theta(x) \in \nu_x h$.

Com essas notações definidas, passemos ao próximo capítulo.

Capítulo 5

Operadores de Weingarten

5.1 Introdução

Na seção 5.2, analisaremos os operadores de Weingarten de h pontualmente. Na seção 5.4, estudaremos o comportamento da normal de f ao longo das órbitas utilizando os operadores de Weingarten. Na seção 5.5, expressaremos o operador de Weingarten de f em uma base adequada. Por fim, na seção 5.6, demonstraremos que o operador de Weingarten de h é “diferenciável”.

5.2 Análise pontual dos operadores de Weingarten de h

5.2.1 O operador de Weingarten de h nos casos (c1), (c2) e ($\tilde{c}2$)

Sejam Σ^{n-1} uma órbita de ρ e $h : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a imersão da órbita em \mathbb{R}^{n+1} . Por convenção, o vetor $e_{\pi/2}^\perp$ estará direcionado para o centro da esfera $S^{n2-1}(p_2, r_2) \subset \Pi_2$. Para os casos (c1), (c2) e ($\tilde{c}2$), e_0^\perp estará direcionado para o centro da esfera $S^{n1-1}(p_1, r_1) \subset \Pi_1$.

Sejam $A_{e_0^\perp}^\Sigma$ o operador de Weingarten da aplicação h na direção e_0^\perp e $A_{e_{\pi/2}^\perp}^\Sigma$ o operador de Weingarten da aplicação h na direção $e_{\pi/2}^\perp$. Fixe uma base

$\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de $T_x h$ tal que $T_x h_1 = \text{span}\{e_1, e_{n1-1}\}$ e $T_x h_2 = \text{span}\{e_{n1}, \dots, e_{n-1}\}$. A representação de $A_{e_0^\perp}^\Sigma$ e $A_{e_{\pi/2}^\perp}^\Sigma$ nesta base fica:

$$A_{e_0^\perp}^\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{e_{\pi/2}^\perp}^\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}$$

ou

$$A_{e_0^\perp}^\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & & & \\ & \frac{1}{r_1} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{e_{\pi/2}^\perp}^\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \frac{1}{r_2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}$$

conforme estivermos no caso (c1) ou $((c2) \cup (\bar{c}2))$.

Denote por $A_{\xi(x)}$ o operador de Weingarten da imersão f em x , onde $\xi(x)$ é um vetor normal da hipersuperfície. Então $\xi(x) = e_{\theta(x)}^\perp$ para um certo $\theta(x)$. O operador de Weingarten de h na direção ξ é dado por:

$$A_{\xi(x)}^\Sigma = \begin{bmatrix} \cos \theta(x) \cdot \frac{1}{r_1} & & & \\ & \text{sen } \theta(x) \cdot \frac{1}{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \text{sen } \theta(x) \cdot \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

ou

$$A_{\xi(x)}^{\Sigma} = \begin{bmatrix} \cos \theta(x) \cdot \frac{1}{r_1} & & & & \\ & \cos \theta(x) \cdot \frac{1}{r_1} & & & \\ & & \text{sen } \theta(x) \cdot \frac{1}{r_2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \text{sen } \theta(x) \cdot \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

5.2.2 O operador de Weingarten de h no caso (b)

Este caso é similar ao (c1), com $\frac{1}{r_1}$ substituído pela curvatura k_1 da curva h_1 . Note que neste caso, k_1 não é constante ao longo da órbita. Os operadores de Weingarten ficam:

$$A_{e_0^\perp}^{\Sigma} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_{e_{\pi/2}^\perp}^{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \frac{1}{r_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}$$

e

$$A_{\xi(x)}^{\Sigma} = \begin{bmatrix} \cos \theta(x) \cdot k_1 & & & & \\ & \text{sen } \theta(x) \cdot \frac{1}{r_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \text{sen } \theta(x) \cdot \frac{1}{r_2} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

5.3 Relações entre A_{ξ} e A_{ξ}^{Σ}

5.1 Observação: Seja $\zeta : TM \rightarrow T\Sigma$ a projeção ortogonal. Então A_ξ^Σ é dado por

$$A_\xi^\Sigma = \zeta \circ A_\xi |_{T\Sigma},$$

porque se u e v são vetores em $T\Sigma$, temos por definição que

$$\langle A_\xi^\Sigma u, v \rangle = \langle \nabla_u v, \xi \rangle = \langle A_\xi u, v \rangle.$$

Denotaremos o posto de um operador por $rk(\cdot)$ e a nulidade por $nl(\cdot)$. Podemos relacionar o posto e a nulidade de A_ξ e A_ξ^Σ utilizando a observação 5.1,

5.2 Lema: Temos as seguintes relações entre o posto e a nulidade de A_ξ e A_ξ^Σ :

- (a) $|nl(A_\xi) - nl(A_\xi^\Sigma)| \leq 1$.
- (b) $0 \leq rk(A_\xi) - rk(A_\xi^\Sigma) \leq 2$.

Demonstração:

A primeira desigualdade de (b) ocorre pois o posto de uma matriz A_ξ é maior ou igual ao posto de sua submatriz A_ξ^Σ . A segunda desigualdade de (b) é consequência direta de (a), pois a diferença entre as dimensões dos domínios de A_ξ e A_ξ^Σ é 1.

Portanto, para demonstrarmos o lema, basta demonstrarmos (a).

Afirmção 1: Se $nl(A_\xi) = k$, então $nl(A_\xi^\Sigma) \geq (k - 1)$. Portanto, se $nl(A_\xi^\Sigma) = k$, então $nl(A_\xi) \leq (k + 1)$.

Denote por N_ξ o núcleo de A_ξ . Fazendo $N_\xi^\Sigma = N_\xi \cap T\Sigma$, temos que a dimensão de N_ξ^Σ é maior ou igual a $(k - 1)$, com a igualdade ocorrendo quando a interseção é transversal. Além disso, temos que $N_\xi^\Sigma \subset \ker(A_\xi^\Sigma)$ devido à observação 5.1. Portanto $nl(A_\xi^\Sigma) \geq (k - 1)$. A segunda parte da afirmação é consequência direta da primeira.

Afirmção 2: Se $nl(A_\xi^\Sigma) = k$, então $nl(A_\xi) \geq (k - 1)$. Portanto, se $nl(A_\xi) = k$, então $nl(A_\xi^\Sigma) \leq (k + 1)$.

$nl(A_\xi^\Sigma) = k$. Então existe uma base ortonormal $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n-1}\}$ em $T_x\Sigma$ onde A_ξ^Σ é representado por:

$$A_\xi^\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & a_{k+1,k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Tome um vetor \tilde{e}_n tal que $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ seja uma base ortonormal de $T_x M$. Então o operador A_ξ nessa base fica

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 0 & & & & a_{k,n} \\ & & & a_{k+1,k+1} & & & a_{k+1,n} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$rk(A_\xi) \leq [n - (k - 1)]$. Portanto $nl(A_\xi) \geq (k - 1)$. A segunda parte da afirmação é uma consequência direta da primeira.

Finalmente, note que as duas afirmações anteriores implicam (a), o que demonstra o lema. \square

5.4 ξ ao longo de uma órbita

5.3 Proposição: *Seja f uma hipersuperfície compacta de cohomogeneidade 1 em \mathbb{R}^{n+1} sob a ação de um grupo compacto de isometrias. Se a dimensão da hipersuperfície for $n \geq 5$ e as órbitas forem difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$ ou a $S^2 \times S^{n-3}$, então a normal ξ ao longo de uma órbita Σ será $\xi = e_\theta^\perp$, com θ fixo. Se a órbita for do tipo (b), teremos necessariamente $\xi = e_0^\perp$.*

Demonstração:

Casos (b), (c1), (c2)

Se $\xi = \pm e_0^\perp$ ao longo da órbita, não há o que demonstrar.

Suponha que exista $x \in \Sigma$ tal que $\xi(x) \neq \pm e_0^\perp$. Então $rk(A_{\xi(x)}) \geq 3$ (vide equações (5.1), (5.2) e (5.3)) o que implica $rk(A_\xi) \geq 3$ numa vizinhança V_x de x . $G(V_x)$ é uma vizinhança equivariante de Σ com $rk(A_\xi) \geq 3$ e portanto $G(V_x)$ é rígida. Em particular, a ação de G em $G(V_x)$ é induzida por uma ação de um grupo de isometrias do ambiente. Logo o ângulo entre a normal de f e o vetor posição (com a origem no centro da órbita) é constante ao longo das órbitas. Então

$$\begin{aligned}\frac{\langle \xi(x), \vec{px} \rangle}{\|\vec{px}\|} &= -r_1 \cdot \frac{\langle \xi(x), e_0^\perp \rangle}{\|\vec{px}\|} - r_2 \cdot \frac{\langle \xi(x), e_{\pi/2}^\perp \rangle}{\|\vec{px}\|} \\ &= -\frac{r_1}{\|\vec{px}\|} \cdot \cos \theta - \frac{r_2}{\|\vec{px}\|} \cdot \sin \theta = cte.\end{aligned}$$

Já que r_1 , r_2 e $\|\vec{px}\|$ são constantes ao longo da órbita, θ é constante ao longo da órbita. Portanto $\xi = e_\theta^\perp$ ao longo de uma órbita.

As órbitas em $G(V_x)$ estão contidas em esferas e portanto Σ é isoparamétrica na esfera que a contém. Então, se $\xi(x) \neq \pm e_0^\perp$, ela não pode ser do tipo (b). Portanto, se a órbita é do tipo (b), $\xi(x) = \pm e_0^\perp$ para todo $x \in \Sigma$.

Caso (c2)

Se $\xi = \pm e_0^\perp$ ou $\xi = \pm e_{\pi/2}^\perp$ ao longo da órbita, não há o que demonstrar.

Se existe $x \in \Sigma$ tal que $\xi(x) \notin \{\pm e_0^\perp, \pm e_{\pi/2}^\perp\}$, chegamos a $\xi(x) = e_\theta^\perp$ para todo $x \in \Sigma$ utilizando o mesmo argumento do caso anterior. Portanto, em todos os casos temos $\xi = e_\theta^\perp$ ao longo de uma órbita. \square

5.4 Corolário: Se ξ for diferente de $\pm e_0^\perp$ e $\pm e_{\pi/2}^\perp$ em $x \in \Sigma$, então f será rígida numa vizinhança equivariante de Σ . Nos casos (c1) e (c2), basta ξ ser diferente de $\pm e_0^\perp$ em $x \in \Sigma$ para que f seja rígida numa vizinhança equivariante de Σ .

5.5 Corolário: Se $rk(A_\xi) \leq 2$ ao longo da órbita, então $\xi \in \{\pm e_0^\perp\}$ (casos (b), (c1) e (c2)) ou $\xi \in \{\pm e_0^\perp, \pm e_{\pi/2}^\perp\}$ (caso (c2)).

5.5 Uma expressão para o operador de Weingarten A_ξ

Fixe $x \in M$. Iremos determinar uma base de $T_x M$ tal que o operador de Weingarten A_ξ nesta base tenha uma expressão simplificada.

Seja $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_x h$ tais que $\text{span}\{e_1, e_{n-1}\} = T_x h_1$ e $\text{span}\{e_{n1}, \dots, e_{n-1}\} = T_x h_2$. O operador A_ξ^Σ nesta base é dado pelas equações (5.1), (5.2) ou (5.3). A expressão do operador A_ξ na base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, onde e_n é um vetor do fluxo geodésico normal em $\tilde{\alpha}'$, é dado por

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\xi^\Sigma \\ a_{1n} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \\ a_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Pela definição de a_{in}

$$a_{in} = \langle A_\xi e_i, e_n \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_n, \xi \rangle. \quad (5.4)$$

Pela proposição 5.3, existe θ tal que $\xi = \cos \theta e_0^\perp + \sin \theta e_{\pi/2}^\perp$ ao longo de Σ . $e_n \in \nu_x h$, que é perpendicular a ξ , é dado por $e_n = \pm(-\sin \theta e_0^\perp + \cos \theta e_{\pi/2}^\perp)$. Ao substituímos as expressões de ξ e e_n em (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} a_{in} &= \pm \langle \nabla_{e_i} (-\sin \theta e_0^\perp + \cos \theta e_{\pi/2}^\perp), (\cos \theta e_0^\perp + \sin \theta e_{\pi/2}^\perp) \rangle \\ &= \mp \sin \theta \cdot \cos \theta \langle \nabla_{e_i} e_0^\perp, e_0^\perp \rangle \mp \sin^2 \theta \langle \nabla_{e_i} e_0^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle \pm \\ &\quad \pm \cos^2 \theta \langle \nabla_{e_i} e_{\pi/2}^\perp, e_0^\perp \rangle \pm \sin \theta \cdot \cos \theta \langle \nabla_{e_i} e_{\pi/2}^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Afirmamos que a_{in} se anula para $1 \leq i \leq (n-1)$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_i} e_0^\perp, e_0^\perp \rangle &= \frac{1}{2} e_i \left(\langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle \right) = 0, \\ \langle \nabla_{e_i} e_{\pi/2}^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle &= \frac{1}{2} e_i \left(\langle e_{\pi/2}^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle \right) = 0, \\ \langle \nabla_{e_i} e_0^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle &= \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq (n1-1), \text{ pois } \nabla_{e_i} e_0^\perp \in \Pi_1, \\ 0, & n1 \leq i \leq (n-1), \text{ pois } e_i \in \Pi_2 \Rightarrow \nabla_{e_i} e_0^\perp = 0, \end{cases} \\ \langle \nabla_{e_i} e_{\pi/2}^\perp, e_0^\perp \rangle &= -\langle \nabla_{e_i} e_{\pi/2}^\perp, e_0^\perp \rangle = 0, \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade é consequência de

$$0 = e_i \left(\langle e_0^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle \right) = \langle \nabla_{e_i} e_0^\perp, e_{\pi/2}^\perp \rangle + \langle \nabla_{e_i} e_{\pi/2}^\perp, e_0^\perp \rangle.$$

Portanto, a representação de A_ξ na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ fica:

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\xi^\Sigma \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.6 Sistema de coordenadas adaptado às órbitas e a diferenciabilidade de A_ξ^Σ .

5.6 Proposição: A_ξ^Σ é diferenciável.

Demonstração:

Sejam M^n uma variedade de cohomogeneidade um e $p \in M$ um ponto numa órbita principal Σ . Tome uma vizinhança $V_p^\Sigma \ni p$, $V_p^\Sigma \subset \Sigma$, suficientemente pequena. Pelo teorema do “slice”, existe uma vizinhança $V_p \ni p$ em M , um ε suficientemente pequeno e um difeomorfismo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p^\Sigma \rightarrow V_p$, onde $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{x\}$ é uma geodésica normal.

Considere um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em V_p tal que

1. $x, y \in V_p$ pertencem à mesma órbita $\Leftrightarrow (x)_n = (y)_n$.
2. $x, y \in V_p$ pertencem à mesma geodésica normal $\Leftrightarrow (x)_i = (y)_i, 1 \leq i \leq n-1$.

onde $(x)_i$ indica a i -ésima coordenada de x . Denominaremos tal sistema de coordenadas de sistema de coordenadas adaptado às órbitas.

Seja

$$A_\xi^\Sigma = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

o operador de Weingarten de h representado na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right\}$, onde (x_1, \dots, x_n) é um sistema de coordenadas adaptado às órbitas. Iremos demonstrar que as funções a_{ij} são diferenciáveis. Fixe $s \in \{1, \dots, n-1\}$ e demonstremos que a_{sj} é diferenciável para $1 \leq j \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \xi \right\rangle &= \left\langle A_{\xi}^{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n-1} a_{sk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} a_{sk} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.7)$$

é uma função diferenciável. Reescrevendo a equação (5.7), obtemos o sistema de equações lineares com incógnitas a_{sk} .

$$\begin{cases} a_{s1} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle + \dots + a_{s(n-1)} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \xi \right\rangle \\ a_{s1} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle + \dots + a_{s(n-1)} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \frac{\partial}{\partial x_2}, \xi \right\rangle \\ \vdots \\ a_{s1} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle + \dots + a_{s(n-1)} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \xi \right\rangle. \end{cases}$$

Se a matriz dos coeficientes

$$Coef = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle \end{bmatrix}$$

tiver determinante não-nulo, as incógnitas a_{sk} serão funções racionais de $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ e $\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle$ e portanto serão diferenciáveis. Calculemos o determinante de $Coef$.

Escolha uma base ortonormal em $T_p \Sigma$ e seja $\frac{\partial}{\partial x_k} = (c_{k1}, \dots, c_{k(n-1)})$ a representação de $\frac{\partial}{\partial x_k}$ nesta base. Então

$$\begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(n-1)} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{(n-1)1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{(n-1)2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1(n-1)} & c_{2(n-1)} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \right| = \\
& = \left| \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(n-1)} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(n-1)1} & c_{(n-1)2} & \cdots & c_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \right|^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto as funções a_{ij} são diferenciáveis. \square

Capítulo 6

Demonstração do teorema 4.9

6.1 Introdução

Na seção 6.2, demonstraremos que todas as órbitas têm o mesmo centro.

Sejam $(-\varepsilon, \varepsilon)$ um pedaço qualquer do espaço das órbitas principais e G_{n1} o espaço das $n1$ -Grassmannianas em \mathbb{R}^{n+1} . Sabemos que cada órbita Σ induz uma decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \Pi_1(\Sigma) \oplus \Pi_2(\Sigma)$. Na seção 6.3, demonstraremos que a aplicação $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G_{n1}$, que leva uma órbita na parcela Π_1 da decomposição de \mathbb{R}^{n+1} é diferenciável. Na seção 6.4, demonstraremos que γ é constante em um aberto e denso no espaço das órbitas principais. Portanto γ será constante em todo o espaço das órbitas principais e a decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ será a mesma para todas as órbitas.

Na seção 6.5, demonstraremos que não existem hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1 com órbitas do tipo (b). Juntando-se todas as informações acima, temos que:

- As órbitas são hipersuperfícies isoparamétricas da esfera.
- A decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ é a mesma para todas as órbitas.
- Todas as órbitas possuem o mesmo centro.

Estes dados nos fazem concluir que todas as órbitas têm suas isometrias induzidas pelo mesmo grupo $[SO(n1) \oplus SO(n2) \subset SO(n+1)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$ (por enquanto em cada órbita separadamente).

Finalmente, demonstraremos na seção 6.6 que o grupo de isometrias da variedade é induzido pelo grupo de isometrias do ambiente.

6.2 O centro da órbita

Seja $\Upsilon : \{\text{órbitas de } f\} \rightarrow \{\text{centro da órbita}\}$. Então $\Xi : \Upsilon \circ \Phi$ nos dá a evolução do centro das órbitas a medida que percorremos o intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ξ é diferenciável pois

$$\Xi(t) = \frac{\int_{x \in \Sigma} h(x, t) \cdot d\Sigma}{\text{Vol}(\Sigma)},$$

onde $h(x, t) := \alpha_x(t)$ é a geodésica normal passando pelo ponto x . Então

$$\Xi'(t) = \frac{\int_{x \in \Sigma} \alpha'_x(t) \cdot d\Sigma}{\text{Vol}(\Sigma)}.$$

6.1 Lema: Ξ é constante, ou seja, todas as órbitas principais possuem o mesmo centro p .

Demonstração:

Demonstraremos que o fluxo $\bar{\alpha}'$ em Σ mantém o centro da órbita constante infinitesimalmente, ou seja, que $\Xi'(t) = 0$. Vamos subdividir a demonstração do lema em três casos:

1- $rk(A_{\xi(x)}^{\Sigma}) \geq 3$ para algum $x \in \Sigma$.

Ξ é constante como consequência da demonstração da proposição 5.3.

2- $rk(A_{\xi}^{\Sigma}) \in \{0, 1\}$

Estamos necessariamente no caso (c1) ou (b) (vide (5.1)). Então $\xi = \pm e_0^\perp$ e $\bar{\alpha}' = \pm e_{\pi/2}^\perp$.

$\bar{\alpha}'$ é proporcional ao raio da esfera $h_2 : S^{n-1} \subset \Pi_2$. Então $\int_{\Sigma} \bar{\alpha}'_x \cdot dx = 0$ e $\Xi'(t) = 0$.

2- $rk(A_{\xi}^{\Sigma}) = 2$.

Estamos necessariamente no caso (c2) ou (c2) (vide (5.2)).

Então $\xi \in \{\pm e_0^\perp, \pm e_{\pi/2}^\perp\}$ e portanto $\bar{\alpha}'$, que é perpendicular a ξ em $\nu_x h$, também estará no conjunto $\{\pm e_0^\perp, \pm e_{\pi/2}^\perp\}$ (vide corolário 5.5). Agora basta utilizar um argumento similar ao do caso $rk(A_\xi^\Sigma) \in \{0, 1\}$ para concluirmos que $\Xi'(t) = 0$. \square

6.3 As aplicações γ e $\bar{\gamma}$

Cada órbita Σ induz uma decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \Pi_1(\Sigma) \oplus \Pi_2(\Sigma)$. Conforme dito na introdução, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G_{n1}$ será a aplicação que relaciona uma órbita $\Phi(t)$ ao $n1$ -plano Π_1 correspondente. Para definir γ de modo preciso, utilizaremos o seguinte teorema de Nomizu.

6.2 Teorema: *Sejam D^{m_1} um aberto de um espaço Euclidiano m_1 -dimensional, S_{m_2} o espaço das matrizes simétricas $m_2 \times m_2$ e $A : D^{m_1} \rightarrow S_{m_2}$ uma aplicação diferenciável. Se λ é uma função contínua em D tal que para cada $x \in D$ o valor $\lambda(x)$ seja um autovalor de S_{m_2} com multiplicidade constante m_3 , então λ será uma função diferenciável. Além disso, para cada $x_0 \in D$, existem m_3 aplicações diferenciáveis X_1, \dots, X_{m_3} de uma vizinhança $U \ni x_0$ em \mathbb{R}^{m_2} tal que para cada $x \in U$, $\{X_1(x), \dots, X_{m_3}(x)\}$ formam uma base ortonormal do autoespaço de $A(x)$ relativo ao autovalor $\lambda(x)$.*

Demonstração:

Vide [12]. \square

Podemos aplicar o teorema acima às variedades, pois ele é de caráter local.

Dividiremos a definição de γ em dois casos.

6.3.1 Casos (b), (c1) e (c2)

6.3 Lema: *γ está bem definida e é diferenciável.*

Demonstração:

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, denotaremos por ξ_θ o campo de vetores em $\nu_x h$ que forma um ângulo θ com o campo ξ , ou seja, se $\xi = \cos \bar{\theta}.e_0^\perp + \sin \bar{\theta}.e_{\pi/2}^\perp$, então $\xi_\theta = \cos(\bar{\theta} + \theta).e_0^\perp + \sin(\bar{\theta} + \theta).e_{\pi/2}^\perp$.

Dividiremos a demonstração em dois casos:

Casos (c1) e (c2)

Fixe $x \in \Sigma$ e seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que o operador de Weingarten $A_{\xi_\theta}^\Sigma$ tenha dois autovalores distintos (vide equações (5.1) e (5.2)).

Seja $V_x \subset M$ uma vizinhança de x e considere o campo de operadores $A_{\xi_\theta}^\Sigma : V_x \rightarrow \text{End}(T\Sigma_x, T\Sigma_x)$ que associa a cada ponto de V_x o operador de Weingarten $A_{\xi_\theta}^\Sigma$ correspondente. Podemos mostrar que esta aplicação é diferenciável utilizando argumentos idênticos daqueles utilizados na proposição 5.6. Se utilizarmos sistemas de coordenadas adaptado às órbitas (vide seção 5.6) em V_x , estaremos nas condições do teorema 6.2, onde $T\Sigma_x$ é gerado por $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{n-1}\}$.

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $A_{\xi_\theta}^\Sigma$ com multiplicidades $(n_1 - 1)$ e $(n_2 - 1)$ respectivamente. Os autoespaços $T\Sigma_1$ e $T\Sigma_2$ dos autovalores λ_1 e λ_2 formam distribuições diferenciáveis em V_x (vide 6.2).

Denote por $(-\varepsilon, \varepsilon)$ um pedaço do espaço das órbitas principais tal que $\Phi(t) \cap V_x \neq \emptyset$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sabemos que $T\Sigma_1$ é diferenciável em V_x e isso implica que $df(T\Sigma_1)$ é diferenciável também. Ocorre que $\text{span}\{df_x(T\Sigma_1); x \in \Phi(t) \cap V_x\} = \gamma(t)$, pois este espaço vetorial contém $S^{n_1-1} \subset \Pi_1(\Phi(t))$ e está claramente contido em $\Pi_1(\Phi(t))$. Portanto, pela construção acima, γ está bem definida e é diferenciável.

Caso (b)

Fixe $x \in \Sigma$ tal que a curvatura k_1 da curva $\pi_1 \circ h$ seja diferente de zero em $\pi_1(x)$ e repita o argumento feito no caso anterior. \square

6.3.2 Caso ($\tilde{c}2$)

Neste caso, Π_1 e Π_2 têm a mesma dimensão, e a decomposição $\mathbb{R}^6 = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ é única a menos da permutação dos termos Π_1 e Π_2 . Para contornar

este problema, faremos o seguinte: Considere $H_3 = \frac{G_3}{\mathbb{Z}_2}$, onde H_3 é a variedade quociente de G_3 com os 3-planos ortogonais identificados. Denote por $\varsigma : G_3 \rightarrow H_3$ a aplicação projeção. Seja $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H_3$ dada por $\bar{\gamma} = \varsigma \circ \gamma$.

6.4 Lema: *$\bar{\gamma}$ está bem definida e é diferenciável.*

Demonstração:

A demonstração segue exatamente os moldes da demonstração do lema 6.3. \square

6.4 A constância de γ e $\bar{\gamma}$

O posto de A_ξ ao longo de uma órbita é uma constante maior ou igual a 2, ou varia entre 0 e 1.

Considere o conjunto $(rk\gamma 3) := \{t \in (-\varepsilon, \varepsilon); rk(A(\Phi(t))) \geq 3\}$. Este é um conjunto aberto em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, pois o posto do operador de Weingarten é localmente não decrescente. Denote o fecho de $(rk\gamma 3)$ por $P3$.

Considere o conjunto $(rk\gamma 2) := \{t \in (-\varepsilon, \varepsilon) - P3; rk(A(\Phi(t))) = 2\}$. Este também é um conjunto aberto em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, pois o posto do operador de Weingarten é localmente não decrescente. Denote o fecho de $(rk\gamma 2)$ por $P2$.

Finalmente denote por $P1$ o fecho do conjunto $(rk\gamma 1) := (-\varepsilon, \varepsilon) - P2 - P3$.

$(rk\gamma 1) \cup (rk\gamma 2) \cup (rk\gamma 3)$ é um conjunto aberto e denso em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Então, $(rk\gamma 1) \cup (rk\gamma 2) \cup (rk\gamma 3)$ é uma união de subintervalos e $(-\varepsilon, \varepsilon) = P1 \cup P2 \cup P3$. Note que cada subintervalo conexo L de $(rk\gamma 1) \cup (rk\gamma 2) \cup (rk\gamma 3)$ está contido em um dos conjuntos $rk\gamma i$, $i = 1, 2$ ou 3 . Se demonstrarmos que γ é constante nos intervalos conexos L , γ será constante em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ devido a sua diferenciabilidade.

6.5 Proposição: *γ e $\bar{\gamma}$ são constantes em L . Portanto γ e $\bar{\gamma}$ são constantes em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, e conseqüentemente na parte regular do espaço de órbitas.*

Demonstração:

Vamos subdividir a demonstração nos diversos casos que podem ocorrer.

6.4.1 Órbitas difeomorfas a $S^2 \times S^{n-3}$, $n > 5$

$$rk(A_\xi) \geq 3$$

$f|_{\Phi(L)}$ é rígido. Portanto a ação $[SO(n1) \oplus SO(n2)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$ se mantém constante ao longo das órbitas e $\gamma|_L$ é constante.

$$rk(A_\xi) = 2$$

Neste caso, $rk(A_\xi^\Sigma) \leq 2$ (lema 5.2) e $\xi = \pm e_0^\perp$ (corolário 5.5). Fixe $x \in \Sigma$ e escolha uma base Π_x -canônica tal que $\{e_1, e_2, e_4, e_5, \dots, e_n\}$ seja uma base de $T_x \Sigma$. A representação de A_ξ^Σ e A_ξ na base ortonormal $\{e_1, e_2, e_4, e_5, \dots, e_n, \alpha'_x\}$ fica

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & & & & \\ & \frac{1}{r_1} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde $r_1 \neq 0$ e o colchete interno representa A_ξ^Σ (vide equação (5.6)).

A órbita é difeomorfa a $S^2 \times S^{n-3}$. Fixe um ponto $p \in S^2$ e vejamos como o subconjunto $\{p\} \times S^{n-3} \subset \Pi_1 \oplus \Pi_2$ evolui ao longo das geodésicas normais.

Por (6.1), o campo geodésico normal está contido na distribuição de nulidade relativa. Então a geodésica normal está contida em uma das variedades integrais da distribuição de nulidade relativa, que é totalmente geodésica em \mathbb{R}^{n+1} . Portanto a geodésica normal é totalmente geodésica em \mathbb{R}^{n+1} , ou seja, é uma reta. A geodésica normal é gerada pelo vetor $e_{\pi/2}^\perp$ e como consequência está direcionada para o centro da $(n-3)$ -esfera $\{p\} \times S^{n-3} \subset \{p\} \oplus \Pi_2$. Se escolhermos o sentido da geodésica normal como sendo aquele que aponta para fora da esfera, $\{p\} \times S^{n-3}(q, r)$ irá evoluir segundo a expressão $t \mapsto \{p\} \times S^{n-3}(q, r+t)$ a medida que percorrermos as geodésicas normais. Portanto p será mantido fixo à medida que percorrermos as órbitas.

Retornando à órbita $S^2 \times S^{n-3}(q, r)$ (sem fixar $p \in S^2$), sua evolução ao longo das geodésicas normais se dará conforme a expressão $t \mapsto S^2 \times$

$S^{n-3}(q, r+t)$. Mas é claro que para cada t fixo, $h|_{\Phi(t)} = S^2 \times S^{n-3}(q, r+t)$ é invariante pela mesma ação $[SO(3) \oplus SO(n-2)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$, independentemente de t . Portanto γ é constante em L .

$$rk(A_\xi) \leq 1$$

Não pode ocorrer devido ao lema 5.2.

6.4.2 Órbitas difeomorfas a $S^2 \times S^2$

Vale um argumento análogo ao utilizado para o caso (c2).

6.4.3 Órbitas difeomorfas a $S^1 \times S^{n-2}$

$$rk(A_\xi) \geq 3$$

$f|_{\Phi(L)}$ é rígida e $\gamma|_L$ é constante.

$$rk(A_\xi) = 2$$

Neste caso $\xi = \pm e_0^\perp$ e $\alpha'_x = \pm e_{\pi/2}^\perp$.

Fixe $x \in \Sigma$ e escolha uma base Π_i -canônica tal que $\{e_1, e_3, e_4, \dots, e_n\}$ seja uma base de $T_x \Sigma$. Por (5.6), a representação de A_ξ^Σ e A_ξ na base $\{e_1, e_3, e_4, \dots, e_n, \alpha'_x\}$ fica

$$A_\xi = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} k & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & a_{nn} \end{array} \right].$$

A distribuição de nulidade relativa $(n-2)$ -dimensional está contido no fibrado tangente da órbita. Mas isso é um absurdo, pois a órbita é compacta e as variedades integrais da distribuição de nulidade relativa são totalmente geodésicas em \mathbb{H}^{n+1} . Portanto, quando a órbita é difeomorfa a $S^1 \times S^{n-2}$, $(rk\gamma 2) = \emptyset$.

$$rk(A_\xi) \leq 1$$

Escolha um ponto $x_1 \in (S^1 = \pi_1 \circ h(\Sigma))$ onde $k \neq 0$. Isto é possível porque k é a curvatura de $S^1 \subset \Pi_1$. Escolha uma vizinhança $V_{(S^1, x_1)} \ni x_1$ de S^1 onde $k \neq 0$. Então $rk(A_\xi) = 1$ em $V_{(S^1, x_1)} \times S^{n-2}$.

$rk(A_\xi^\Sigma) = 1$ em uma vizinhança $V_{rk1} \subset M$ de $V_{(S^1, x_1)} \times S^{n-2}$, pois A_ξ^Σ é diferenciável no sentido da proposição 5.6. Utilizando um argumento similar ao do caso $rk(A_\xi) = 2$ da subseção 6.4.1 para V_{rk1} , podemos ver que as geodésicas que partem de $V_{(S^1, x_1)} \times S^{n-2}$ são retas direcionadas para o centro das esferas $\{p\} \times S^{n-2}$. Então, a evolução do conjunto $V_{(S^1, x_1)} \times S^{n-2}(q, r)$ ao longo da geodésica normal $\alpha(t)$ é dado por $t \mapsto V_{(S^1, x_1)} \times S^{n-2}(q, r + t)$ para t suficientemente pequeno. Utilizando agora a definição $\gamma(t) = \text{span}\{df_x(T\Sigma_1); x \in V_{(S^1, x_1)} \times S^{n-2}(q, r + t)\}$ (vide Lema 6.3), podemos ver que γ se mantém constante em um aberto $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ contendo $\Phi^{-1}(\Sigma)$. Pela diferenciabilidade de γ , ela se manterá constante no fecho de $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Portanto γ se manterá constante em L .

Isso conclui a proposição 6.5. \square

6.5 Não existência de hipersuperfícies compactas do tipo (b)

6.6 Teorema: *Não existem hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1 com órbitas do tipo (b).*

Demonstração:

Denote por B o subconjunto das órbitas do tipo (b). Afirmamos que se $B \neq \emptyset$, então $B = \{\text{espaço das órbitas principais}\}$ (Lembre-se que o espaço das órbitas principais é homeomorfo a $(0, 1)$ ou a S^1).

B é um aberto no espaço das órbitas, pois variedades que não estão contidas em nenhuma n -esfera continuarão com esta propriedade quando submetidas a pequenas deformações. Então das duas uma: Ou B é a união de intervalos abertos no espaço das órbitas principais ou B é homeomorfo a S^1 . Podemos considerar que estamos no primeiro caso, pois se B fosse

homeomorfo a S^1 , não teríamos nada para demonstrar. Escolha então uma componente conexa L de B .

Afirmamos que L é fechado no espaço das órbitas principais.

Quando temos órbitas do tipo (b), não podemos ter $rk(A_\xi) \geq 3$ (vide demonstração da proposição 5.3). Pela demonstração da proposição 6.5, $rk(A_\xi) = 2$ não pode acontecer. Então $rk(A_\xi) \leq 1$. Mas nesse caso, as órbitas são do tipo $(\pi_1 \circ f)(\Sigma) \times S^{n-2}(0, r+t)$ em L , pois:

- Π_1 se mantém constante ao longo de L (vide proposição 6.5).
- A projeção de $V_{(S^1, x)} \times S^{n-2}(0, r+t)$ (vide seção 6.4.3 para rever o significado de $V_{(S^1, x)} \times S^{n-2}(0, r+t)$) em Π_2 é $S^{n-2}(0, r+t)$. Então a projeção de $f(\Sigma)$ em Π_2 é $S^{n-2}(0, r+t)$, pois a projeção de uma órbita em Π_2 é obrigatoriamente uma $(n-2)$ -esfera.
- O campo geodésico normal está contido em Π_2 . Portanto ela não possui componentes em Π_1 e $(\pi_1 \circ f)(\Phi(t))$ se mantém constante. Portanto $(\pi_1 \circ f)(\Phi(t)) = (\pi_1 \circ f)(\Phi(0))$.

Escolha \bar{t} um ponto de acumulação em L . $\Phi(\bar{t})$ é aproximado por órbitas do tipo $(\pi_1 \circ f)(\Sigma) \times S^{n-2}(q, r+t)$, e tal tipo de aproximação não pode resultar numa órbita do tipo (c1). Então $\Phi(\bar{t})$ é do tipo (b) e isso prova que L é fechado no espaço das órbitas principais. Mas L também é aberto no espaço das órbitas principais. Portanto L é o espaço das órbitas principais.

Acabamos de provar que todas as órbitas principais são descritas por $[(\pi_1 \circ f)(\Sigma) \subset \Pi_1] \times [S^{n-2}(q, r+t) \subset \Pi_2]$. Mas para que esta imersão seja completa, é necessário que t tenda a infinito, o que fere a compacidade de f . Portanto não existem hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade um com órbitas do tipo (b). \square

6.7 Observação: A construção acima gera um contraexemplo para o teorema 4.9 se substituirmos a hipótese de \bar{M} compacta por \bar{M} completa. Se considerarmos o espaço de órbitas como sendo $t \in [0, \infty)$, obteremos a imersão não padrão $f = inc_1 \times id : S^1 \times \Pi_2 \rightarrow \Pi_1 \times \Pi_2$ de cohomogeneidade 1, cujas órbitas são dadas por $h = inc_1 \times inc_2 : S^1 \times S^{n-2}(0, t) \rightarrow \Pi_1 \times \Pi_2$.

6.6 Conclusão da demonstração do teorema 4.9

Demonstração do teorema 4.9

Devemos demonstrar o teorema somente para os casos (c1), (c2) e ($\bar{c}2$) devido ao teorema 6.6. $x \in \Sigma$ denotará tanto o ponto na órbita como a sua imagem em \mathbb{R}^{n+1} . Fixe um sistema de coordenadas Π_i -canônico. Pela invariância do centro da órbita e da decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ ao longo do espaço das órbitas, este sistema de coordenadas é Π_i -canônico ao longo de todas as órbitas principais. Seja $[x = (x_1, \dots, x_{n+1})] \in f(M)$ e

$$\Omega_x = [\text{span}\{(x_1, \dots, x_{n1}), (x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})\} + x].$$

Ω_x passa pela origem e pode ser identificado com \mathbb{R}^2 através da aplicação $isom : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega_x$,

$$isom(a, b) = a \cdot \frac{(x_1, \dots, x_{n1})}{\|(x_1, \dots, x_{n1})\|} + b \cdot \frac{(x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})}{\|(x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})\|}.$$

Além disso,

$$\frac{\Omega_x}{4} := \left\{ a \cdot \frac{(x_1, \dots, x_{n1})}{\|(x_1, \dots, x_{n1})\|} + b \cdot \frac{(x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})}{\|(x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})\|}; a, b > 0 \right\}$$

pode ser identificado com o espaço das órbitas principais. Seu fecho,

$$\overline{\left(\frac{\Omega_x}{4}\right)} := \left\{ a \cdot \frac{(x_1, \dots, x_{n1})}{\|(x_1, \dots, x_{n1})\|} + b \cdot \frac{(x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})}{\|(x_{n1+1}, \dots, x_{n+1})\|}; a, b \geq 0 \right\}$$

pode ser identificado com o espaço das órbitas (incluindo as órbitas não principais). Representaremos os pontos de $\frac{\Omega_x}{4}$ e $\overline{\left(\frac{\Omega_x}{4}\right)}$ através das coordenadas (a, b) . Citemos alguns fatos que ocorrem neste contexto:

1- $\nu_x h = \Omega_x$. Com isso, as geodésicas normais que partem de x sempre permanecem em $\frac{\Omega_x}{4}$, pois o fluxo geodésico normal em x está sempre em $\frac{\Omega_x}{4}$.

2- Dado um outro ponto $z \in f(M)$ e o respectivo espaço de órbitas $\frac{\Omega_z}{4}$, os pontos $\tilde{z} \in \frac{\Omega_z}{4}$ e $\tilde{x} \in \frac{\Omega_x}{4}$ pertencerão a mesma órbita se e somente as distâncias de \tilde{z} e \tilde{x} dos eixos coordenados forem os mesmos. De modo

equivalente, $\tilde{z} \in \frac{\Omega_x}{4}$ e $\tilde{x} \in \frac{\Omega_x}{4}$ pertencem a mesma órbita se e somente esses pontos possuem as mesmas coordenadas (a, b) .

Fixada uma órbita Σ , $\rho|_{\Sigma}$ é induzido pela ação $[SO(n_1) \oplus SO(n_2)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$ do espaço ambiente. Sejam $x \in \Sigma$ e $z = g(x)$, com $g \in G$. Se $\alpha : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \frac{\Omega_x}{4}$, com $\alpha(0) = x$, é a geodésica normal passando por x , então $g(\alpha) \subset \frac{\Omega_z}{4}$ é a geodésica normal passando por z (vide teorema 4.4 e fato 1). A particularidade é que a representação de α e de $g(\alpha)$ no sistema de coordenadas (a, b) é idêntica, ou seja, se $\alpha(t) = (a(t), b(t))_{\Omega_x}$, $g(\alpha(t)) = (a(t), b(t))_{\Omega_z}$ (vide fato 2). Mas isso quer dizer que o elemento $g \in G$ está sendo induzido por um elemento $\tilde{g} \in [SO(n_1) \oplus SO(n_2)]$ ao longo de todas as órbitas. Portanto a ação $\rho|_{reg} : G \times M \rightarrow M$ é induzida pela ação $[SO(n_1) \oplus SO(n_2)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$ do espaço ambiente.

Resta demonstrarmos que as órbitas não principais são invariantes por $[SO(n_1) \oplus SO(n_2)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$. Mas isso é verdade, pois as órbitas não principais correspondem aos eixos coordenados dos planos Ω_p , e estes são invariantes por $[SO(n_1) \oplus SO(n_2)] \times [\Pi_1 \oplus \Pi_2] \rightarrow [\Pi_1 \oplus \Pi_2]$.

Com isso, concluímos a demonstração do teorema 4.9. \square

Conclusão Geral

Os teoremas principais demonstrados na tese representam um avanço na teoria das hipersuperfícies conformemente planas com curvatura média constante e na teoria das hipersuperfícies compactas de cohomogeneidade 1. Entre os temas que podem ser explorados futuramente podemos citar:

- 1- Classificação das hipersuperfícies mínimas conformemente planas.
- 2- Generalização do teorema 4.9 para dimensões 3 e 4.

Estamos quase certos que as técnicas adotadas na tese não funcionam nestes casos. Para abordar estes temas, achamos que é necessário utilizar técnicas de equações diferenciais parciais elípticas e parabólicas.

Bibliografia

- [1] A. C. Asperti, F. Mercuri & M. H. Noronha, *Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of revolution*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7), **11**, (1997), no. 2, suppl., 199-215.
- [2] B. Y. Chen, *On the surfaces with parallel mean curvature vector*, Indiana Univ. Math. J., **22**, (1973), 655-666.
- [3] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, 1988.
- [4] M. do Carmo, *O método do referencial móvel*, Escola Latino Americana de Matemática (IMPA), 1976.
- [5] M. do Carmo & M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **277** (1983), no. 2, 685-709.
- [6] H. P. Castro, M. H. Noronha, *Homogeneous submanifolds of codimension two*, preprint.
- [7] D. Ferus, *Notes on Isoparametric hypersurfaces*, Escola de Geometria Diferencial (UNICAMP), 1980.
- [8] O. J. Garay, *A classification of certain 3-dimensional conformally flat Euclidean hypersurfaces*, Pacific J. Math. **161**, (1994), 13-25.
- [9] W. Y. Hsiang & W. C. Yu, *A Generalization of a Theorem of Delaunay*, J. Differential Geometry, **16** (1981) 161-177.
- [10] G. M. Lancaster, *Canonical metrics for certain conformally Euclidean spaces of dimension three and codimension one*, Duke Math J. **40** (1973), 1-8.

- [11] F. Mercuri, F. Podestà, J. A. P. Seixas, *Topology of cohomogeneity one hypersurfaces of euclidean spaces*, preprint.
- [12] K. Nomizu, *Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symmetric matrices*, Linear and Multilinear Algebra 1 (1973), 159-162.
- [13] F. Podestà, A. Spiro, *Cohomogeneity one Manifolds and Hypersurfaces of the Euclidean space*, Ann. Global Anal. and Geom. 13, (1995), 169-184.
- [14] J. A. P. Seixas, *Hipersuperfícies de cohomogeneidade um no espaço euclidiano*, tese de doutorado, (1996), UNICAMP.
- [15] Y. Suyama, *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space*, preprint.