

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

# Problema de Stefan de uma fase: O Caso Unidimensional

*Autor:* LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA

*Orientador:* PROF. DR. JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos pré-requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

**Junho de 1999**



9916661

# Problema de Stefan de uma fase: O Caso Unidimensional

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luiz Antonio Ribeiro de Santana** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 08 de julho de 1999

*José Luiz Boldrini*

---

**Prof. Dr. José Luiz Boldrini**  
**Orientador**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Santana, Luiz Antonio Ribeiro de  
Sa59p Problema de Stefan de uma fase: o caso unidimensional / Luiz Antonio  
Ribeiro de Santana – Campinas, [S.P.: s.n.], 1999.

Orientador: José Luiz Boldrini

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais parabólicas.  
I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 30 de junho de 1999 e aprovada  
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

*José Luiz Boldrini*

---

Prof (a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

*Marko Antonio Rojas Medar*

---

Prof (a). Dr(a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

*Jaime Angulo Pava*

---

Prof (a). Dr(a). JAIME ANGULO PAVA

Eu dedico este trabalho ao  
Professor Antonio Olavo da Silva Neto.

---

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais Moraes e Irani, e ao meu irmão William, pelo apoio incondicional a mim prestado, mesmo nos momentos mais difíceis.

Devo agradecer ao Professor Boldrini, meu orientador, pela paciência e pelos ensinamentos a mim dados.

Gostaria de agradecer aos meus colegas de curso, pela ajuda e pelo companheirismo durante este tempo. Merecem ser citados os nomes de Portugal, Saulo, Denise, Akiles, Cantão, Patrícia, Gil e Jaqueline.

Portugal merece um agradecimento especial por ter sido mais que um grande amigo: um irmão muito querido e admirado.

Ao Professor Jaime, por ter me ajudado numa parte deste trabalho.

Fora do ambiente acadêmico, gostaria de agradecer ao Brod, Alex, Tenório e Takeda por terem sido minha família aqui em Campinas, aos instrutores João, Carlos e Renato, aos amigos Fernando, Danilo, Maurício, Júlio e Marco Antônio, e à Sandra, por ter me adotado.

E finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

---

# Sumário

Resumo	1
Abstract	3
Introdução	5
1 Colocação do Problema	7
2 Existência e Unicidade de Solução	13
1 Preliminares . . . . .	13
2 Existência e Unicidade de Solução da Desigualdade Variacional . . . . .	20
3 A Fronteira Livre . . . . .	35
3 Regularidade da Solução	41
1 Limitação das Derivadas Segundas . . . . .	41
2 Propriedades de Integrabilidade das Derivadas . . . . .	42
3 A Lipschitz Continuidade de $u_t$ . . . . .	47
4 A Diferenciabilidade da Fronteira Livre	59
A Resumo de Análise Funcional Linear	65
1 Espaços de Banach . . . . .	65
2 Operadores Lineares Limitados . . . . .	66
3 Convergência Fraca . . . . .	67
B Convolução e Suavização	69

<b>C</b>	<b>Apontamentos de Espaços de Sobolev</b>	<b>71</b>
1	Derivadas Generalizadas (Fracas) . . . . .	71
2	Normas de Sobolev e Espaços Associados . . . . .	73
3	Imersões Compactas de $W^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	74
4	Traços de Funções em $W^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	76



---

## Resumo

Um *Problema de Stefan* consiste, em geral, na modelagem do fenômeno de mudança de fase num meio termo-condutor onde energia térmica é cedida ou retirada do sistema, sendo o problema mais simples neste contexto o do derretimento de um bloco de gelo mantido em contato com uma região com água.

Classificamos os Problemas de Stefan em que estamos interessados em dois tipos: quando assumimos que a temperatura do bloco de gelo é constante e igual a zero graus Celsius, diz-se que o Problema de Stefan é de *uma fase*. Se a temperatura do gelo não for constante, isto é, se o comportamento da temperatura da região do gelo for regida por uma outra equação diferencial, o Problema de Stefan em questão será de *duas fases*.

Neste trabalho trataremos apenas de Problemas de Stefan de uma fase *unidimensionais*, isto é, trabalharemos com um fino bloco de gelo que ocupa inicialmente um intervalo semi-infinito. Este bloco está em contato com uma região (intervalo finito) com água. A distribuição inicial de temperatura da água é dada, assim como o comportamento da fonte de calor situada no ponto  $x = 0$ . Nosso objetivo básico é o de realizar o detalhamento matemático deste problema, conforme encontrado em uma das referências deste trabalho.

---

# Abstract

A *Stefan Problem* consists, generally, in modeling the phenomenon of changing the phase in a thermo-conductor medium where thermal energy is given to or taken away from the system. A simple problem in this context is the melting process of a body of ice kept in contact with a region of water.

We classify the Stefan Problems, in which we are concerned, in two types: when we assume the body of ice temperature to be constant and equal to zero degree Celsius, one says it is a *one phase* Stefan Problem. If the ice temperature is not constant, that is if the behavior of the ice region temperature is ruled by another differential equation, we are dealing with a *two phase* Stefan Problem.

In this work, we are concerned only with *one-dimensional*, one phased Stefan Problems, *e.g.*, we work with a thin body of ice which initially occupies a semi-infinite interval. This body is kept in contact with a region (finite interval) with water. The initial temperature distribution of water is given, and it is also given the behavior of the heat supply located at the point  $x = 0$ . Our basic aim here is to present the mathematical details of this problem, as it was found in one of the references of this work.

---

## Introdução

Um *Problema de Stefan* consiste, em geral, na modelagem do fenômeno de mudança de fase num meio termo-condutor onde energia térmica é cedida ou retirada do sistema, sendo o problema mais simples neste contexto o do derretimento de um bloco de gelo mantido em contato com uma região com água.

Problemas de Stefan pertencem a uma classe de problemas nos quais parte da fronteira é “livre”, ou seja, não é dada e deve ser determinada em conjunto com a solução da equação diferencial parcial que modela o comportamento da distribuição de temperatura da água no decorrer do tempo. Uma condição de fronteira adicional, que consiste na conservação de energia na interface gelo-água, é imposta sob a fronteira livre.

Classificamos os Problemas de Stefan em que estamos interessados em dois tipos: quando assumimos que a temperatura do bloco de gelo é constante e igual a  $0^{\circ}\text{C}$ , diz-se que o Problema de Stefan é de *uma fase*. Se a temperatura do gelo não for constante, ou seja, se o comportamento da temperatura da região do gelo for regida por uma outra equação diferencial, o Problema de Stefan em questão será de *duas fases*.

O Problema de Stefan foi formulado como uma desigualdade variacional parabólica pela primeira vez por G. Duvaut [4]. A solução de tal desigualdade variacional é interpretada como uma solução generalizada do Problema de Stefan. Em dimensão dois, o problema de duas fases foi completamente resolvido. Uma solução com fronteira livre contínua foi encontrada por Friedman [7].

Para dimensões superiores a um, Kamenomostkaja [9] e Friedman [7] provaram a existência e unicidade para o problema de duas fases. Em [7] ainda foi mostrado que, no caso de uma fase, a fronteira livre não possui pontos interiores.

Neste trabalho trataremos apenas de Problemas de Stefan de uma fase *unidimensionais*, isto é, trabalharemos com um fino bloco de gelo que ocupa inicialmente um intervalo semi-infinito.

Este bloco está em contato com uma região (intervalo finito) com água. A distribuição inicial de temperatura da água é dada, assim como o comportamento da fonte de calor situada no ponto  $x = 0$ . Nosso objetivo básico é o de realizar o detalhamento matemático deste problema, conforme encontrado em Kinderlehrer e Stampacchia<sup>†</sup> [10].

No Capítulo 1, apresentamos a formulação clássica do Problema de Stefan e a partir desta, obtemos a formulação variacional deste mesmo problema, na qual concentramos nosso estudo.

No Capítulo 2, provamos a existência e unicidade de solução da desigualdade variacional parabólica e faremos um estudo inicial da fronteira livre, provando que ela é uma curva contínua monótona crescente.

No capítulo seguinte, obtemos limitação das derivadas segundas da solução generalizada, além de demonstrarmos integrabilidade e continuidade das mesmas.

No quarto e último capítulo, consideramos a questão da diferenciabilidade da interface gelo-água, apresentando uma dificuldade técnica na prova apresentada da existência de uma parametrização infinitamente diferenciável da fronteira livre.

Finalmente, nos apêndices damos algumas noções básicas da Teoria de Distribuições e Espaços de Sobolev, assim como alguns resultados de Análise Funcional Linear, convolução e suavização de funções.

## Colocação do Problema

A formulação clássica do Problema de Stefan, a partir da qual obtemos a formulação variacional ou fraca do mesmo, é descrita a seguir: Sejam  $T > 0$  e  $s_0 > 0$  dados. Desejamos encontrar uma função temperatura  $\Theta(x, t)$  e uma curva  $\Gamma : t = s(x)$ ,  $x > s_0$  (que fornece a posição de interface gelo-água quando o tempo  $t$  varia), tais que

$$-\Theta_{xx} + \Theta_t = 0, \quad \text{em } (x, t); \quad s(x) < t < T, \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \Theta = 0, \\ \Theta_x \cdot s'(x) = -k, \end{cases} \quad (x, t) \in \Gamma, \quad (1.2)$$

$$\Theta(x, 0) = h(x), \quad 0 < x < s_0, \quad (1.3)$$

$$\Theta(0, t) = g(t), \quad 0 < t < T. \quad (1.4)$$

Onde

- A constante  $k$  que aparece acima (lei de conservação de energia) é positiva e dada;
- $h(x)$  é a distribuição inicial de temperatura da água (não-negativa);
- $g(t)$  é a fonte de calor situada na origem (também não negativa).

Primeiramente devemos notar que sobre a curva  $\Gamma$  temos  $\Theta = 0 = \min \Theta(x, t)$  e assim, a função  $\Theta$  decresce nas proximidades de  $\Gamma$  na direção  $x$ ; logo, concluímos que sobre  $\Gamma$  vale  $\Theta_x \leq 0$ . Por (1.2), temos que  $s'(x) \geq 0$ , e então a curva  $\Gamma$  é *monótona*, fato importante para a elaboração da formulação variacional que analisaremos neste trabalho.

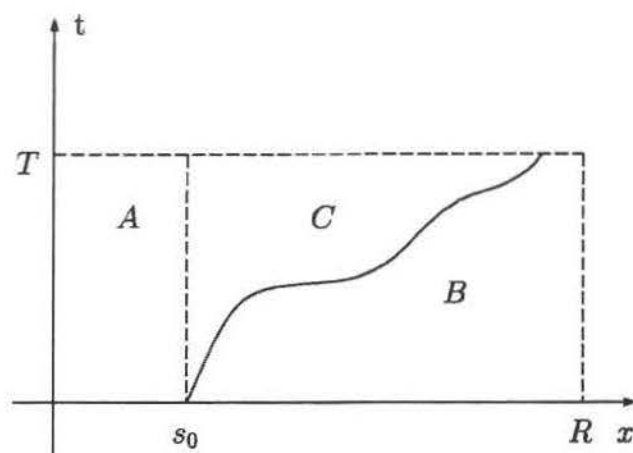


Figura 1.1: Regiões de definição de  $u$ .

Tal formulação é obtida através do uso de uma função auxiliar  $u$  definida a partir de  $\Theta$  via integração adequada no tempo.

Em detalhe, consideramos a seguir a função  $u$  definida a partir de  $\Theta$  por:

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{s(x)}^t \Theta(x, \tau) d\tau, & \text{quando } s(x) \leq t \leq T, \quad s_0 \leq x \leq R, \\ 0, & \text{quando } 0 \leq t \leq s(x), \quad s_0 \leq x \leq R, \\ \int_0^t \Theta(x, \tau) d\tau, & \text{quando } 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq s_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Aqui  $R > s_0 > 0$  é uma constante, que consideramos a princípio arbitrária. Posteriormente veremos que tal constante não influi na solução deste problema.

Introduzimos a seguir as regiões de definição de  $u$  (cf. Figura 1.1):

$$A = \{(x, t); s(x) \leq t \leq T, s_0 \leq x \leq R\},$$

$$B = \{(x, t); 0 \leq t \leq s(x), s_0 \leq x \leq R\},$$

$$C = \{(x, t); 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq s_0\}.$$

Com o intuito de reescrever o problema original em termos desta nova função, necessitamos expressões para as derivadas parciais de  $u$  nas regiões  $A$  e  $C$ , onde ela não é identicamente nula:

Expressões para as derivadas de  $u$  na **Região A**:

$$u_x(x, t) = \int_{s(x)}^t \Theta_x(x, \tau) d\tau - \Theta(x, s(x)) \cdot s'(x).$$

Usando (1.2), temos que

$$u_x(x, t) = \int_{s(x)}^t \Theta_x(x, \tau) d\tau, \quad s(x) < t < T, \quad s_0 < x < R.$$

Com base nisto, calculemos  $u_{xx}$ :

$$u_{xx}(x, t) = \int_{s(x)}^t \Theta_{xx}(x, \tau) d\tau - \Theta_x(x, s(x)) \cdot s'(x).$$

Utilizando (1.1) e (1.2), temos

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= \int_{s(x)}^t \Theta_{xx}(x, \tau) d\tau + k \\ &= \Theta(x, t) - \Theta(x, s(x)) + k. \end{aligned}$$

E, finalmente, por (1.2), vem

$$u_{xx}(x, t) = \Theta(x, t) + k,$$

e, portanto,

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) + k, \quad s(x) < t < T, \quad s_0 < x < R. \quad (1.6)$$

Expressões para as derivadas de  $u$  na **Região C**:

$$u(x, t) = \int_0^t \Theta(x, \tau) d\tau$$

$$u_x(x, t) = \int_0^t \Theta_x(x, \tau) d\tau$$

$$u_{xx}(x, t) = \int_0^t \Theta_{xx}(x, \tau) d\tau$$

Usando (1.1)

$$u_{xx}(x, t) = \int_0^t \Theta_\tau(x, \tau) d\tau = \Theta(x, t) - \Theta(x, 0).$$

E, por (1.3),

$$u_{xx}(x, t) = \Theta(x, t) - h(x).$$

Assim, temos

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) - h(x) \quad , 0 < t < T \quad , 0 < x < s_0. \quad (1.7)$$

Definimos

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & , 0 \leq x < s_0 \\ -k & , s_0 \leq x \leq R. \end{cases} \quad (1.8)$$

Temos por (1.6) e (1.7) que

$$-u_{xx} + u_t = \begin{cases} f & , \text{em } A \text{ e } C \\ 0 & , \text{em } B \end{cases} \quad (1.9)$$

Definimos também

$$\psi(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad , 0 \leq t \leq T. \quad (1.10)$$

Estamos assumindo que as funções  $g$  e  $h$  são curvas positivas e suaves em  $(0, T)$  e  $(0, s_0)$ , respectivamente.

Passemos agora a descrever o problema variacional associado ao problema inicial. Denotamos

$$D = (0, R) \times (0, T)$$

e por  $\mathbb{K}$  o conjunto fechado convexo das funções não-negativas em  $L^2(D)$ , isto é,

$$\mathbb{K} = \{v \in L^2(D); v \geq 0 \text{ q.t.p.}\}.$$

Tomemos  $v \in \mathbb{K}$  qualquer. Pela equação (1.9), temos que nas regiões  $A$  e  $C$  vale

$$(-u_{xx} + u_t) - f = 0,$$

que multiplicado por  $(v - u)$  nos dá

$$(-u_{xx} + u_t)(v - u) - f(v - u) = 0 \quad \text{em } A \text{ e } C \quad (1.11)$$



Na região  $B$ ,  $u = 0$ . Assim,  $-u_{xx} + u_t = 0$ . Multiplicando esta equação por  $(v - u)$  e somando o termo  $f(v - u)$  na mesma, obtemos

$$(-u_{xx} + u_t)(v - u) + f(v - u) = 0 + f(v - 0) = fv.$$

Como  $f = k$  nesta região, (cf. (1.8))

$$(-u_{xx} + u_t)(v - u) + f(v - u) = kv \geq 0 \quad \text{em } B. \quad (1.12)$$

Assim, por (1.11) e (1.12), temos que para qualquer  $v \in \mathbb{K}$  vale a desigualdade seguinte:

$$(-u_{xx} + u_t)(v - u) + f(v - u) \geq 0 \quad (1.13)$$

Devemos ter  $\Theta \geq 0$ ; assim, impomos a condição  $u_t \in \mathbb{K}$ . Se  $x = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , observamos que

$$u(0, t) = \int_0^t \Theta(0, \tau) d\tau$$

que, por (1.4) e (1.10) se torna

$$u(0, t) = \psi(t).$$

Se  $x = R$ ,  $0 \leq t \leq T$ , temos

$$u = 0$$

por (1.5). E finalmente, se  $t = 0$ ,  $0 \leq x \leq R$ , (1.5) também nos dá  $u = 0$ .

Agora estamos em condições de colocar o problema variacional associado ao problema clássico do início desta seção:

**Problema 1.1** Encontrar  $u \in L^2(0, T; H^2(0, R)) \cap \mathbb{K}$  tal que

$$u_t \in \mathbb{K},$$

$$(-u_{xx} + u_t)(v - u) \geq f(v - u) \quad q.t.p. \quad , \forall v \in \mathbb{K}$$

$$u = \psi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = 0,$$

$$u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = R,$$

$$u = 0, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq R,$$

onde  $f$  é dada em (1.8) e  $\psi$  por (1.10).

Como veremos no capítulo seguinte, a constante  $R$  escolhida inicialmente de maneira arbitrária poderá ser escolhida de forma tal que  $u = 0$  numa vizinhança de  $x = R$ .

Para finalizar o presente capítulo, lembramos que uma vez obtida a solução  $u$  do Problema 1.1 acima, uma solução (fraca)  $\Theta$  do problema clássico introduzido no início deste mesmo capítulo é dada por  $\Theta = u_t$ .

# 2

---

## Existência e Unicidade de Solução

### 1 Preliminares

O método que utilizaremos para obtenção de existência do Problema 1.1 do Capítulo 1 será o de *penalização*, que consiste em aproximar a solução  $u$  por uma família de soluções de problemas conhecidos. Com a intenção de simplificar as provas de existência e regularidade, utilizaremos algumas funções auxiliares, a saber:

- Seja  $\varepsilon > 0$  e  $\beta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  satisfazendo

$$\beta_\varepsilon(t) = 0, \quad t \geq \varepsilon,$$

$$\beta_\varepsilon(0) = -1,$$

$$\beta'_\varepsilon(t) > 0, \quad 0 < t < \varepsilon, \tag{1.1}$$

$$\beta''_\varepsilon(t) \leq 0,$$

$$\beta''_\varepsilon(t) = 0, \quad -\infty < t < 0$$

(*cf.* Figura 2.1). Tal função pode ser obtida via convolução de um núcleo suavizante  $\phi$  (*cf.*

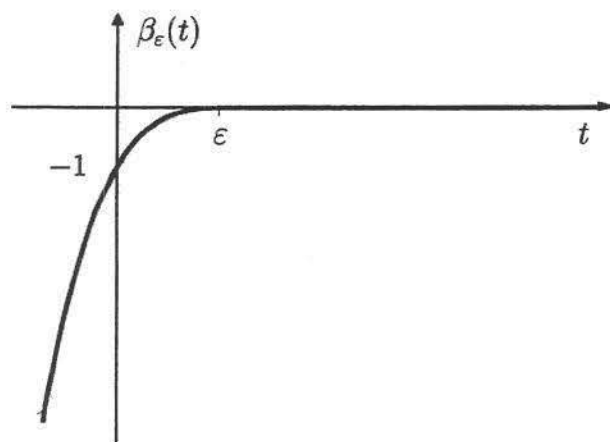


Figura 2.1: Esboço do gráfico de  $\beta_\varepsilon(t)$ .

Apêndice B) com uma função

$$\gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{t+1}{\gamma_0}, & t \leq 0, \\ \frac{-1 + \sqrt{t/\varepsilon}}{\gamma_0}, & 0 < t \leq \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon, \end{cases}$$

ou seja,

$$\beta_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t-\tau)\phi(\tau) d\tau.$$

(A constante  $\gamma_0$  é dada por

$$\gamma_0 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(-x)\gamma(x) dx \right|,$$

para garantir que tenhamos  $\beta_\varepsilon(0) = -1$ .)

- Seja  $\{f_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$  uma família de funções suaves em  $[0, R]$  uniformemente limitadas, ou seja, existe uma constante  $M$ , independente de  $\varepsilon$  e  $x$  tal que

$$|f_\varepsilon(x)| \leq M. \quad (1.2)$$

Assumimos também que a família  $\{f_\varepsilon(x)\}$  converge pontualmente de forma decrescente para  $f$  (cf. (1.8), Capítulo 1) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

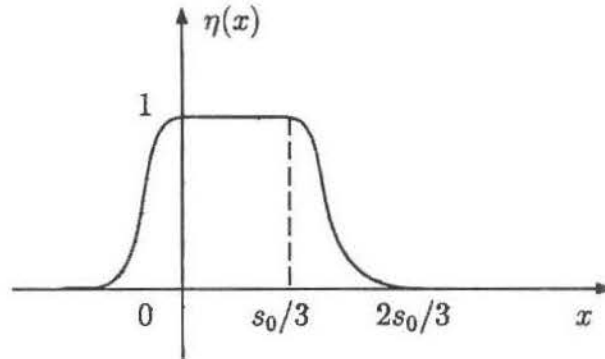


Figura 2.2: Esboço do gráfico de  $\eta(x)$ .

- E, considere a função  $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  que satisfaz (cf. Figura 2.2):

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}s_0 \\ 0, & \frac{2}{3}s_0 \leq x, \end{cases}$$

$$\text{e } 0 \leq \eta(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Com as considerações anteriores, podemos descrever o problema penalizado a ser considerado:

**Problema 2.1** Para  $T > 0, R > s_0 > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , encontrar  $u_\varepsilon(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{D}$ , tal que

$$-u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon t} + k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = f_\varepsilon \quad \text{em } D,$$

$$u_\varepsilon = \varepsilon\eta, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq R,$$

$$u_\varepsilon = \psi + \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = 0,$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = R,$$

com  $k$  e  $\psi$  definidos anteriormente.

A existência, unicidade e regularidade da solução clássica  $u_\varepsilon$  do Problema 2.1 acima é provada em Friedman [6].

A idéia básica que seguiremos é aquela de que quando  $\varepsilon$  se aproxima de zero deveremos ter  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em algum sentido, onde  $u$  deverá ser a solução do Problema 1.1. Para provar que isto é verdadeiro necessitamos estimativas em várias normas das funções  $u_\varepsilon$ . Iniciamos com o seguinte

**Lema 1.1** *Seja  $u_\varepsilon$  solução do Problema 2.1 em  $\bar{D}$ . Então existem  $\varepsilon_0 > 0$  e  $C > 0$  tais que*

$$0 \leq \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) \leq C \text{ em } D,$$

onde  $C$  é independente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

**Demonstração:** Para obter a estimativa acima, denotemos  $w = \partial u_\varepsilon / \partial t$  e busquemos o problema associado a  $w$ . Para isto, derivemos a equação e as condições de contorno e de fronteira do Problema 2.1 com respeito a  $t$ . Obtemos:

- Derivando a equação do Problema 2.1 com respeito ao tempo, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} [-(u_\varepsilon)_{xx} + (u_\varepsilon)_t + k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)] = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} = 0.$$

Ou seja,

$$-[(u_\varepsilon)_t]_{xx} + (u_\varepsilon)_{tt} + k\beta'_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot (u_\varepsilon)_t = 0$$

e, portanto,

$$-w_{xx} + w_t + k\beta'_\varepsilon(u_\varepsilon)w = 0 \text{ em } D. \quad (1.4)$$

- A condição inicial para  $w$  pode ser obtida como se segue: da equação do Problema 2.1, temos

$$w = u_{\varepsilon t} = f_\varepsilon - u_{\varepsilon xx} - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

Mas, como  $u_\varepsilon$  é uma solução clássica, calculando esta última expressão em  $t = 0$ , vem que  $u(x, 0) = \varepsilon\eta(x)$ . Portanto

$$w(x, 0) = f_\varepsilon(x) - \varepsilon\eta''(x) - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0)). \quad (1.5)$$

- As condições de fronteira podem ser obtidas da seguinte forma: Temos  $u_\varepsilon(0, t) = \psi(t) + \varepsilon$ , e assim  $u_{\varepsilon t}(0, t) = \psi'(t)$  e portanto,

$$w(0, t) = \psi'(t). \quad (1.6)$$

Em  $x = R$ , temos  $u_\varepsilon(R, t) = 0$  e portanto

$$w(R, t) = 0. \quad (1.7)$$

Logo, de (1.4)–(1.7), obtemos que a função  $w = \partial u_\varepsilon / \partial t$  deve satisfazer o seguinte problema

$$\begin{aligned} -w_{xx} + w_t + k\beta'_\varepsilon(u_\varepsilon)w &= 0 && \text{em } D, \\ w(x, 0) &= f_\varepsilon(x) + \varepsilon\eta''(x) - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0)), \\ w(0, t) &= \psi'(t), \\ w(R, t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Como  $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 0$  em  $D$ , obtemos do Princípio do Máximo para Equações Parabólicas de Segunda Ordem (cf. Ladyženskaja *et al.* [11]) as seguintes desigualdades:

$$\min \left[ \left( \min_{\partial_p D} w \right), 0 \right] \leq w(x, t) \leq \max \left[ \left( \max_{\partial_p D} w \right), 0 \right], \tag{1.9}$$

onde  $\partial_p D = \{(x, T); 0 < x < R\}$  é a fronteira parabólica de  $D$ .

Estudando a primeira desigualdade de (1.9), temos que para  $t = 0$  (por (1.3)):

$$0 \leq u_\varepsilon = \varepsilon\eta(x) \leq \varepsilon,$$

e então, por (1.8), Capítulo 1, (1.1) e (1.2),

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= f_\varepsilon(x) + \varepsilon\eta''(x) - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0)) \\ &\geq f(x) + \varepsilon\eta''(x) - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ &> f(x) + \varepsilon\eta''(x) \\ &= h(x) + \varepsilon\eta''(x) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

se tomarmos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, pela continuidade de  $\eta''$  e não-negatividade de  $h$  em  $[0, s_0)$ . Logo,

$$w(x, 0) > 0, \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{2s_0}{3}. \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$w(x, 0) = f_\varepsilon + \varepsilon\eta''(x) - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0)).$$

Se  $t = 0$ ,  $2s_0/3 \leq x \leq s_0$ , temos por (1.3), que  $\eta''(x) = 0$ . Logo, do Problema 2.1 e (1.1), temos

$$u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon\eta(x) = 0 \Rightarrow \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(0) = -1.$$

Portanto,  $w(x, 0) \geq f(x) + k = h(x) + k > 0$ , ou seja,

$$w(x, 0) > 0, \text{ se } \frac{2s_0}{3} \leq x \leq s_0. \quad (1.11)$$

Se  $t = 0$ ,  $s_0 < x < R$ , temos por (1.8), Capítulo 1, (1.1) e (1.3), que

$$\eta''(x) = 0,$$

$$f_\varepsilon(x) \geq f(x) = -k, \text{ e}$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon\eta(x)$$

e então

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(0) = -1.$$

Assim,  $w(x, 0) \geq -k + k = 0$ , donde obtemos a desigualdade

$$w(x, 0) \geq 0, \text{ se } s_0 < x < R. \quad (1.12)$$

Nas fronteiras verticais da fronteira, por (1.8):

$$w(0, t) = \psi'(t) = g(t) > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.13)$$

$$w(R, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (1.14)$$

Finalmente, de (1.10)–(1.14), obtemos

$$\min \left[ \left( \min_{\partial_p D} w \right), 0 \right] = 0. \quad (1.15)$$

Analisando a segunda desigualdade de (1.9), notamos que se  $t = 0$  então, pelo Problema 2.1 temos

$$u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon\eta(x)$$



e então

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0)) = \beta_\varepsilon(\varepsilon\eta(x)).$$

Como  $0 \leq \varepsilon\eta \leq \varepsilon$ , concluímos por (1.1), que

$$-1 \leq \beta_\varepsilon(\varepsilon\eta(x)) \leq 0 \Rightarrow |\beta_\varepsilon(\varepsilon\eta(x))| \leq 1.$$

Assim, se  $t = 0$ , então

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) + \varepsilon\eta''(x) - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0))| &\leq |f_\varepsilon(x)| + \varepsilon|\eta''(x)| + k|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, 0))| \\ &\leq M + \varepsilon_0 \cdot \sup |\eta''(x)| + k \\ &= K_1, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\max \left[ \left( \max_{\partial_p D} w \right), 0 \right] \leq \max [ \max g, K_1 ] = C. \quad (1.16)$$

(1.15) e (1.16) nos dão o resultado desejado. ■

**Lema 1.2** *Seja  $u_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , solução de  $(P_\varepsilon)$ . Então*

$$\|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(D)} \leq 1, \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

**Demonstração:** Pelo lema anterior,  $\partial u_\varepsilon / \partial t \geq 0$ . Como  $u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon\eta(x) \geq 0$ , temos que para cada  $x$  fixo,  $u_\varepsilon(x, t)$  é uma função crescente de  $t$ . Assim,  $u_\varepsilon(x, t) \geq u_\varepsilon(x, 0) \geq 0$  para  $t > 0$  em  $D$ . Por (1.1), temos

$$-1 \leq \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, t)) \leq 0$$

e portanto

$$\|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(D)} \leq 1. \quad \blacksquare$$

**Lema 1.3** *Seja  $u_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , a solução do Problema 2.1. Então  $u_{\varepsilon xx} \in L^\infty(D)$  e para  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 < t < T$ , temos*

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{W^{2,p}(0,R)} \leq C_p,$$

onde  $C_p$  é uma constante que independe de  $\varepsilon$  e  $t$ .

**Demonstração:** Tendo em mente os dois últimos lemas, observamos que

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon xx}\|_{L^\infty(D)} &= \|f_\varepsilon - u_{\varepsilon t} - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(D)} \\ &\leq M + C + k = C_1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

independente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Assim, para cada  $t$  fixo, podemos utilizar as estimativas para problemas elípticos e uma estimativa da norma de  $u_\varepsilon(\cdot, t)$  em  $W^{2,p}(0, R)$  em termos da norma  $L^p(0, R)$  de  $u_{\varepsilon xx}(\cdot, t)$  e dos valores de fronteira em  $x = 0$  e  $x = R$ . Então

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{W^{2,p}(0,R)} &\leq C(p, R) \{ \|u_{\varepsilon xx}\|_{L^p(0,R)} \\ &\quad + [(\psi(t) + \varepsilon)^p + \psi'(t)^p + \psi''(t)^p]^{1/p} \} \\ &\leq 2C(p, R) \{ \|u_{\varepsilon xx}\|_{L^p(0,R)} + [\varepsilon_0^p \\ &\quad + \psi(t)^p + \psi'(t)^p + \psi''(t)^p]^{1/p} \} \leq C_p. \end{aligned}$$

■

## 2 Existência e Unicidade de Solução da Desigualdade Variacional

Agora estamos em condições de provar a existência e unicidade da desigualdade variacional definida no Problema 1.1 do Capítulo 1:

**Teorema 2.1** *Existe uma única solução para o Problema 1.1 do Capítulo 1. Esta solução possui as seguintes propriedades:*

$$u, u_t, u_{xx} \in L^\infty(D);$$

$$u \geq 0, u_t \geq 0 \text{ em } D;$$

$$u \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(0, R)).$$

Para cada  $\varepsilon > 0$ , seja  $u_\varepsilon$  a solução do Problema 2.1. Então quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(D)$ ,  $1 < p < \infty$  e  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $W^{2,p}(0, R)$ ,  $1 < p < \infty$ , para cada  $0 < t < T$ . Assim,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  uniformemente em  $D$  e  $(u_\varepsilon)_x \rightarrow u_x$  uniformemente em  $(0, R)$  para cada  $t \in (0, T)$ .

**Demonstração:** Como conseqüência dos lemas anteriores, a solução  $u_\varepsilon$  do Problema 2.1 satisfaz, para  $1 < p < \infty$ ,

$$\begin{aligned} (\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(D)})^p &= \int_0^T \int_0^R |u_\varepsilon|^p dx dt + \int_0^T \int_0^R |u_{\varepsilon x}|^p dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^R |u_{\varepsilon t}|^p dx dt \\ &\leq TC_p^p + K^p RT = C < \infty \end{aligned}$$

que é independente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Como  $W^{1,p}(D)$  é um espaço de Banach reflexivo, existe uma subseqüência  $\tilde{u}_\varepsilon$  de  $u_\varepsilon$  e  $u \in W^{1,p}(D)$  tais que

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p}(D).$$

o que equivale dizer que  $\tilde{u}_\varepsilon$ ,  $\tilde{u}_{\varepsilon x}$  e  $\tilde{u}_{\varepsilon t}$  convergem fracamente para  $u$ ,  $u_t$  e  $u_x$  em  $L^p(D)$ , respectivamente.

A imersão compacta de  $W^{1,p}(D)$  em  $C(\overline{D})$  se  $p > 2$ , e de  $W^{2,p}(0, R)$  em  $C^1[0, R]$ ,  $t \in (0, T)$  fixo, se  $p > 1/2$  é garantida pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (cf. Adams [1]). Chamemos a subseqüência de  $\tilde{u}_\varepsilon$  que converge fortemente em  $C(\overline{D})$  e em  $C^1[0, R]$  também de  $\tilde{u}_\varepsilon$ .

Provemos que o limite forte em  $C(\overline{D})$  também é  $u$ : Temos que  $\tilde{u}_\varepsilon$  converge fracamente para  $u$  em  $C(\overline{D})$ , convergência esta justificada pela imersão compacta acima. Chamemos o limite forte em  $C(\overline{D})$  de  $v$ . Como convergência forte implica convergência fraca, concluímos que  $\tilde{u}_\varepsilon$  converge fracamente para  $v$  em  $C(\overline{D})$ . A unicidade do limite fraco nos dá  $u = v$ . Prova-se analogamente que o limite forte em  $C^1[0, R]$  também é  $u$ .

Como convergência uniforme implica convergência pontual, a função limite  $u$  é não-negativa e satisfaz as condições inicial e de fronteira do Problema 1.1 do Capítulo 1.

Pelo Lema 1.3, garantimos a existência de uma subseqüência de  $\tilde{u}_\varepsilon$ , denotada por  $\tilde{\tilde{u}}_\varepsilon$ , que converge fracamente em  $W^{2,p}(0, R)$  para cada  $t \in (0, T)$ . Este limite também é  $u$ , pois chamando inicialmente de  $v$  o limite fraco em  $W^{2,p}(0, R)$  temos, em particular, que  $\tilde{\tilde{u}}_\varepsilon \rightharpoonup v$  em  $L^p(0, R)$ . O Teorema de Rellich-Kondrachov também garante a imersão compacta de  $W^{1,p}(D)$  em  $L^p(0, R)$  para  $p > 2$ . Assim,  $\tilde{\tilde{u}}_\varepsilon \rightharpoonup u$  em  $L^p(0, R)$ . A unicidade do limite fraco implica  $u = v$ .



Provemos a seguir que a seqüência  $\tilde{u}_\varepsilon$  inteira converge para  $u$  em  $W^{2,p}(0, R)$ . Isto será feito mostrando que ela é Cauchy no sentido fraco, ou seja, que dada qualquer  $v \in L^q(0, R)$  temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2} v \, dx \right| &\rightarrow 0 \\ \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} v \, dx \right| &\rightarrow 0 \\ \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 xx} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 xx} v \, dx \right| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ . A convergência fraca de  $\tilde{u}_\varepsilon$  para  $u$  em  $L^p(0, R)$  implica que dada  $v \in L^q(0, R)$  temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2} v \, dx \right| &\leq \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1} v \, dx - \int_0^R uv \, dx \right| \\ &\quad + \left| \int_0^R uv \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} v \, dx \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ . Mostremos que um resultado análogo vale para  $\tilde{u}_{\varepsilon x}$ : Dada  $\varphi \in C_0^\infty(0, R)$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} \varphi \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} \varphi \, dx \right| &= \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon_2 x} - \tilde{u}_{\varepsilon_1 x}) \varphi_x \, dx \right| \\ &\leq \|\tilde{u}_{\varepsilon_2} - \tilde{u}_{\varepsilon_1}\|_{L^p(0, R)} \|\varphi_x\|_{L^q(0, R)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

sendo que a última convergência é justificada pelo fato de  $\tilde{u}_\varepsilon$  convergir uniformemente para  $u$  em  $(0, R)$  e, por  $(0, R)$  ter medida finita, convergir fortemente em  $L^p(0, R)$ , o que implica que  $\tilde{u}_\varepsilon$  é Cauchy em  $L^p(0, R)$ , no sentido forte.

Agora, sejam  $\eta > 0$  e  $v \in L^q(0, R)$ . A densidade de  $C_0^\infty(0, R)$  em  $L^q(0, R)$  garante a existência de  $\varphi \in C_0^\infty(0, R)$  tal que

$$\|\varphi - w\|_{L^q(0, R)} < \frac{\eta}{3C_p}.$$

Com esta  $\varphi$ , sejam  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  tais que

$$\left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} \varphi \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} \varphi \, dx \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} v \, dx \right| &\leq \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} \varphi \, dx \right| \\
&\quad + \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 x} \varphi \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} \varphi \, dx \right| \\
&\quad + \left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} \varphi \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 x} v \, dx \right| \\
&< \|\tilde{u}_{\varepsilon_1 x}\|_{L^p(0,R)} \|w - \varphi\|_{L^q(0,R)} + \frac{\eta}{3} \\
&\quad + \|\tilde{u}_{\varepsilon_2 x}\|_{L^p(0,R)} \|w - \varphi\|_{L^q(0,R)} \\
&< \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Mostra-se de forma análoga que

$$\left| \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_1 xx} v \, dx - \int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon_2 xx} v \, dx \right| \rightarrow 0, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0.$$

Isto prova que a seqüência inteira  $\tilde{u}_\varepsilon$  converge para  $u$  em  $W^{2,p}(0, R)$ ,  $\forall t \in (0, T)$ .

Mostremos agora que  $u_{xx} \in L^\infty(D)$ . A limitação uniforme de  $u_{\varepsilon xx} \in L^\infty(D)$  obtida pelo Lema 1.3 garante a existência de uma subsequência de  $\tilde{u}_\varepsilon$ , denotada por  $\tilde{\tilde{u}}_\varepsilon$ , tal que  $\tilde{\tilde{u}}_\varepsilon$  converge fracamente-\* em  $L^\infty(D)$  para um elemento  $w \in L^\infty(D)$ .

Da convergência uniforme de  $\tilde{u}_\varepsilon$  para  $u$  em  $D$ , temos que dada qualquer  $\varphi \in C_0^\infty(D)$  temos

$$\begin{aligned}
\iint_D \tilde{u}_{\varepsilon xx} \varphi \, dx \, dt &= \iint_D \tilde{u}_\varepsilon \varphi_{xx} \, dx \, dt \\
&\rightarrow \iint_D u \varphi_{xx} \, dx \, dt = \iint_D u_{xx} \varphi \, dx \, dt,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo que a última igualdade é justificada pelo fato de  $u_{xx} \in L^1(D)$ , e portanto  $u_{xx} \in L^1_{loc}(D)$ .

A convergência fraca-\* de  $\tilde{\tilde{u}}_{\varepsilon xx}$  para  $w$  em  $L^\infty(D)$  implica que dada  $v \in L^1(D)$ , temos

$$\iint_D \tilde{\tilde{u}}_{\varepsilon xx} v \, dx \, dt \rightarrow \iint_D w v \, dx \, dt.$$

Para provar que  $w = u_{xx}$ , basta tomar  $\varphi \in C_0^\infty \subset L^1(D)$  para obter

$$\iint_D \tilde{u}_{\varepsilon xx} \varphi \, dx \, dt \longrightarrow \iint_D w \varphi \, dx \, dt.$$

Comparando com (2.2), temos a seguinte identidade, válida para toda  $\varphi \in C_0^\infty(D)$ :

$$\iint_D (u_{xx} - w) \varphi \, dx \, dt = 0.$$

Assim, concluímos que  $u_{xx} = w$  q.t.p. e portanto  $u_{xx} \in L^\infty(D)$ . Prova-se analogamente que  $u_t \in L^\infty(D)$ , valendo  $0 \leq u_t \leq C$ , pelo Lema 1.1. Para mostrar que  $u \in L^\infty(D)$ , notemos que

$$|u(x, t)| \leq |u(x, 0)| + \int_0^t |u_t(x, \tau)| \, d\tau \leq CT < \infty.$$

Mostremos agora que  $u$  é de fato solução do Problema 1.1 do Capítulo 1: Considere os seguintes conjuntos:

$$C_1 = \{v \in L^\infty(0, R); v \geq \delta, \delta > 0\}, \quad (2.3)$$

$$C_2 = \{v \in L^2(0, R); v \geq 0\}. \quad (2.4)$$

Tomemos  $v \in C_1$  e multipliquemos a equação diferencial do Problema 2.1 por  $v - u_\varepsilon$  para obter

$$(-u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon t})(v - u_\varepsilon) - k[\beta_\varepsilon(v) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)](v - u_\varepsilon) = f_\varepsilon(v - u_\varepsilon),$$

onde tomamos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno  $\varepsilon < \delta$  para que valha  $\beta_\varepsilon(v) = 0$ . Integrando a equação acima com respeito a  $x$  no intervalo  $[0, R]$  e observando que

$$[\beta_\varepsilon(v) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)](v - u_\varepsilon) \geq 0 \quad (\beta'_\varepsilon \geq 0),$$

obtemos

$$\int_0^R (-u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon t})(v - u_\varepsilon) \, dx \geq \int_0^R f_\varepsilon(v - u_\varepsilon) \, dx, \quad \varepsilon < \delta. \quad (2.5)$$

Analisemos agora as convergências dos termos da desigualdade (2.5) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , iniciando com o primeiro membro desta desigualdade:

$$\int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon xx} v \, dx \longrightarrow \int_0^R u_{xx} v \, dx$$

pela convergência fraca de  $u_\varepsilon$  para  $u$  em  $W^{2,p}(0, R)$ ,  $t \in (0, T)$ .

Agora,

$$\int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon xx} \tilde{u}_\varepsilon dx \longrightarrow \int_0^R u_{xx} u dx$$

pois

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon xx} \tilde{u}_\varepsilon - u_{xx} u) dx \right| &\leq \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon xx} \tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_{\varepsilon xx} u) dx \right| + \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon xx} u - u_{xx} u) dx \right| \\ &\leq \|\tilde{u}_{\varepsilon xx}\|_{L^p(0,R)} \|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L^q(0,R)} + \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon xx} - u_{xx}) u dx \right| \\ &\leq C_p \|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L^q(0,R)} + \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon xx} - u_{xx}) u dx \right|, \end{aligned}$$

onde  $q$  é tal que  $(1/p) + (1/q) = 1$ . A convergência uniforme de  $\tilde{u}_\varepsilon$  para  $u$  em  $D$ , e o fato de o intervalo  $(0, R)$  ter Medida de Lebesgue finita implicam que  $\|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L^q(0,R)} \rightarrow 0$ . A convergência fraca de  $\tilde{u}_\varepsilon$  para  $u$  em  $W^{2,p}(0, R)$  implica que

$$\left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon xx} - u_{xx}) u dx \right| \longrightarrow 0.$$

A convergência uniforme de  $\tilde{u}_\varepsilon$  para  $u$  em  $D$  e um argumento de densidade semelhante ao que foi realizado em (2.1) nos fornece que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos

$$\int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon t} v dx \longrightarrow \int_0^R u_t v dx, \quad v \in C_1.$$

Finalmente, para provar que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos

$$\int_0^R \tilde{u}_{\varepsilon t} \tilde{u}_\varepsilon dx \longrightarrow \int_0^R u_t u dx,$$

basta notar que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon t} \tilde{u}_\varepsilon - u_t u) dx \right| &\leq \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon t} \tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_{\varepsilon t} u) dx \right| + \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon t} u - u_t u) dx \right| \\ &\leq \|\tilde{u}_{\varepsilon t}\|_{L^p(0,R)} \|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L^q(0,R)} + \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon t} - u_t) u dx \right| \\ &\leq CR^{1/p} \|\tilde{u}_\varepsilon - u\|_{L^q(0,R)} + \left| \int_0^R (\tilde{u}_{\varepsilon t} - u_t) u dx \right|. \end{aligned}$$

Os dois últimos termos vão a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que prova a convergência do primeiro membro.

Consideremos agora o segundo membro de (2.5):  $f_\varepsilon v$  é uma seqüência de funções tal que  $f_\varepsilon v \rightarrow f v$  pontualmente em  $(0, R)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $|f_\varepsilon v| \leq M|v|$  que é integrável (o intervalo  $(0, R)$  possui medida finita). Assim, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos

$$\int_0^R f_\varepsilon v \, dx \longrightarrow \int_0^R f v \, dx.$$

Também,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R (f_\varepsilon u_\varepsilon - f u) \, dx \right| &\leq \left| \int_0^R (f_\varepsilon u_\varepsilon - f_\varepsilon u) \, dx \right| + \left| \int_0^R (f_\varepsilon u - f u) \, dx \right| \\ &\leq \|f_\varepsilon\|_{L^p(0,R)} \|u - u_\varepsilon\|_{L^q(0,R)} + \left| \int_0^R (f_\varepsilon - f) u \, dx \right| \\ &\leq M R^{1/p} \|u - u_\varepsilon\|_{L^q(0,R)} + \left| \int_0^R (f_\varepsilon - f) u \, dx \right|, \end{aligned}$$

que vai a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Assim, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (2.5), temos

$$\int_0^R (-u_{xx} + u_t)(v - u) \, dx \geq \int_0^R f(v - u) \, dx, \quad v \in C_1 \quad (2.6)$$

(cf. (2.3)).

Para provar que (2.6) vale para  $v \in C_2$  (cf. (2.4)), notemos inicialmente que o conjunto  $C_1$  é denso em  $C_2$ . Aproximando  $v \in C_2$  por elementos de  $C_1$  na norma de  $L^2(0, R)$  e notando que ambos os membros de (2.6) podem ser considerados como funcionais lineares contínuos em  $L^2(0, R)$ , temos no limite que

$$\int_0^R (-u_{xx} + u_t)(v - u) \, dx \geq \int_0^R f(v - u) \, dx, \quad v \in C_2,$$

o que prova que  $u$  é solução do Problema 1.1 do Capítulo 1.

Mostremos agora que a solução  $u$  é única em  $L^2(0, T; H^2(0, R))$ : Para isto considere  $u_1$  e  $u_2$  duas soluções do Problema 1.1 do Capítulo 1 e denotemos  $w = u_1 - u_2$ . Esta nova função  $w$  satisfaz o seguinte problema:

$$(w_{xx} - w_t)w \geq 0 \quad \text{q.t.p.}$$

$$w = 0 \quad \text{em } \partial_p(D).$$



Integrando a desigualdade obtida acima para  $w$  em  $[0, R]$  e integrando por partes obtemos

$$-\int_0^R w_x^2 dx - \int_0^R w w_t dx \geq 0,$$

pois  $w|_{\partial_p(D)} = 0$ . Integremos agora na variável temporal no intervalo  $[0, T]$  e notando que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} w^2 = w w_t$$

para obter, pelo Teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned} -\iint_D w_x^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^R [w(x, T)^2 - w(x, 0)^2] dx &= -\iint_D w_x^2 dx dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^R w(x, T)^2 dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

donde concluímos que  $w_x = 0$  q.t.p. e, pela Fórmula de Newton-Leibniz, temos

$$w(x, t) = w(0, t) + \int_0^x w_\xi(\xi, t) d\xi = 0,$$

ou seja,  $u_1 = u_2$ .

Como a solução  $u$  é única, ela independe da seqüência inicial  $u_\varepsilon$  tomada. Logo, concluímos que a seqüência  $u_\varepsilon$  inteira converge para  $u$  em  $W^{1,p}(D)$ ,  $C(D)$ , em  $W^{2,p}(0, R)$ ,  $C^1(0, R)$  para cada  $t \in (0, T)$  fixo. Como o limite fraco obedece à desigualdade em norma que é obedecida pela seqüência da qual é limite, obtemos do Lema 1.3 que  $u \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(0, R))$ . ■

**Corolário 2.2** *Sejam  $u$  solução do Problema 1.1 do Capítulo 1 e*

$$\Omega(t) = x \in (0, R); u(x, t) > 0, 0 \leq t \leq T.$$

*Então  $\Omega(t) \subset \Omega(t')$  para  $t < t'$ ,  $t, t' \in [0, T]$ .*

**Demonstração:** Sejam  $x \in \Omega(t)$  qualquer e  $t' > t$ ,  $t, t' \in [0, T]$ . Deduzimos então pela Fórmula de Newton-Leibniz, e pelo fato de que  $u_t \geq 0$  em  $D$ ), que

$$u(x, t') = u(x, t) + \int_t^{t'} u_\tau(x, \tau) d\tau \geq u(x, t) > 0,$$

o que implica que  $x \in \Omega(t')$ . Logo,  $\Omega(t) \subset \Omega(t')$ . ■

Para compreender como a solução  $u$  do Problema 1.1 do Capítulo 1, obtida no Teorema 2.1, e que em princípio está relacionado com o problema original, apresentaremos a seguir uma seqüência de lemas que nos levarão à conclusão que para  $R$  escolhido adequadamente grande, a solução em  $D = (0, R) \times (0, T)$  será automaticamente nula para  $x$  numa vizinhança de  $R$ . Isto nos permite recuperar a solução do problema original a partir da solução do problema variacional.

Provemos primeiramente um teorema de comparação:

**Lema 2.3** *Suponha que  $f \leq \hat{f}$  e  $\psi \leq \hat{\psi}$  e que  $u, \hat{u}$  são soluções do Problema 1.1 do Capítulo 1 para  $f, \psi$  e  $\hat{f}, \hat{\psi}$ , respectivamente. Então*

$$u \leq \hat{u} \text{ em } D.$$

**Demonstração** Seja  $\mathbb{K}^*$  o conjunto das funções não negativas em  $H^1(D)$  que satisfazem as condições de contorno do Problema 1.1 do Capítulo 1 para  $\hat{\psi}$ . Se  $u$  é solução do Problema 1.1 do Capítulo 1, então ao integrarmos no domínio  $D$  nós obtemos a seguinte inequação integral:

$$\iint_D [(-\hat{u}_{xx} + \hat{u}_t)(v - \hat{u})] dx dt \geq \iint_D f(v - \hat{u}) dx dt, \quad v \in \mathbb{K}^*. \quad (2.7)$$

Temos ao integrar por partes que

$$\begin{aligned} \iint_D -\hat{u}_{xx}(v - \hat{u}) dx dt &= \int_0^T \left[ -\hat{u}_x(v - \hat{u}) \Big|_0^R - \int_0^R (-\hat{u}_x)(v - \hat{u})_x dx \right] dt \\ &= \iint_D \hat{u}_x(v - \hat{u})_x dx dt. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (2.7) da seguinte forma:

$$\iint_D [(\hat{u}_x(v - \hat{u}) + \hat{u}_t(v - \hat{u}))] dx dt \geq \iint_D f(v - \hat{u}) dx dt, \quad v \in \mathbb{K}^*. \quad (2.8)$$

Consideremos agora a função  $v = \max(u, \hat{u})$ . Como  $u, \hat{u} \in H^1(D)$ , temos que  $v \in H^1(D)$  e

$$v_x = \begin{cases} u_x & \text{em } \{x \in D; u(x) > \hat{u}(x)\} \\ \hat{u}_x & \text{em } \{x \in D; u(x) \leq \hat{u}(x)\} \end{cases}$$

no sentido das distribuições, valendo resultado análogo para  $v_t$ . Para isto, consulte o Apêndice C deste trabalho e considere a função

$$v = \hat{u} + \max(u - \hat{u}, 0).$$

A não negatividade de  $u$  e  $\hat{u}$  implica a não negatividade de  $v$ . Esta função  $v$  satisfaz às condições iniciais e de fronteira do Problema 1.1 do Capítulo 1 para  $\hat{\psi}$ , pois quando  $x = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $u = \max(\psi, \hat{\psi}) = \hat{\psi}$  ( $\psi \leq \hat{\psi}$ ). Nas outras duas partes de  $\partial_p(D)$ ,  $u = \hat{u} = 0$ , o que implica  $v = 0$  nestas partes. Portanto concluímos que  $v \in \mathbb{K}^*$  e, assim, podemos utilizá-la em (2.8)

Definimos a seguir o conjunto

$$Z = \{(x, t) \in D; u(x, t) > \hat{u}(x, t)\}$$

e fazendo  $v = \hat{u} + \max(u - \hat{u}, 0)$  em (2.8), obtemos

$$\iint_Z [\hat{u}_x(u - \hat{u})_x + \hat{u}_t(u - \hat{u})] dx dt \geq \iint_Z \hat{f}(u - \hat{u}) dx dt. \quad (2.9)$$

Notamos que o conjunto  $Z$  definido acima se encontra na união das regiões  $A$  e  $C$  (cf. (1.5), Capítulo 1) pois  $u > \hat{u} \geq 0$  lá, valendo então  $-u_{xx} + u_t = f$  q.t.p. Logo, multiplicando esta equação por  $\zeta = \max(u - \hat{u}, 0)$ , que é zero em  $\partial_p(D)$ , obtemos, ao integrarmos em  $D$  e utilizarmos integração por partes que

$$\iint_D [u_x \zeta_x + u_t \zeta] dx dt = \iint_D f \zeta dx dt. \quad (2.10)$$

Reescrevendo (2.9) em termos de  $\zeta$ , temos

$$\iint_D [\hat{u}_x \zeta_x + \hat{u}_t \zeta] dx dt \geq \iint_D \hat{f} \zeta dx dt. \quad (2.11)$$

Subtraindo (2.10) de (2.11), temos

$$- \iint_D [(u - \hat{u})_x \zeta_x + (u - \hat{u})_t \zeta] dx dt \geq \iint_D (\hat{f} - f) \zeta dx dt \geq 0,$$

desigualdade última justificada pelo fato de  $f \leq \hat{f}$ , por hipótese. Utilizemos novamente a definição de  $\zeta$  para obter

$$- \iint_D \zeta_x^2 dx dt - \iint_D \zeta_t dx dt \geq 0.$$

Utilizemos o Teorema de Fubini na segunda integral acima,

$$- \iint_D \zeta_x^2 dx dt - \int_0^R [\zeta(x, T)^2 - \zeta(x, 0)^2] dx =$$

$$- \iint_D \zeta_x^2 dx dt - \int_0^R \zeta(x, T)^2 dx \geq 0,$$

implicando que  $\zeta_x = 0$  q.t.p. Daí temos da Fórmula de Newton-Leibniz, notando que  $\zeta = 0$  em  $\partial_p(D)$ , que

$$\zeta(x, t) = \zeta(0, t) + \int_0^x \zeta_x(\xi, t) d\xi = 0.$$

Assim, o conjunto  $Z$  possui Medida de Lebesgue nula. Levando em conta a definição do conjunto  $Z$ , isto é o que queríamos demonstrar. ■

A seguir apresentamos uma solução explícita de um Problema de Stefan particular, que utilizamos para dominar a solução  $u$  do nosso problema variacional:

Sejam  $M$  uma constante positiva a ser determinada,

$$\hat{\Theta}(x, t) = F\left(\frac{x}{(t+1)^{1/2}}\right),$$

onde

$$F(z) = C \int_z^\infty e^{-\zeta^2/4} d\zeta - C',$$

com  $C$  e  $C'$  satisfazendo

$$2Ce^{-M^2/4} = kM \tag{2.12}$$

$$F(M) = C \int_M^\infty e^{-\zeta^2/4} d\zeta - C' = 0 \tag{2.13}$$

e

$$\Phi(x, t) = x - M(t+1)^{1/2}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.14}$$

O par constituído pela função  $\hat{\Theta}(x, t)$  e a curva  $\hat{\Gamma}$  definida por  $\Phi(x, t) = 0$  é solução do Problema de Stefan clássico (1.1)–(1.4) do Capítulo 1 com

$$\hat{h}(x) = F(x), \quad 0 \leq x \leq M,$$

$$\hat{g}(t) = F(0), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Passemos a verificar que este fato é verdadeiro: Em primeiro lugar calculemos as derivadas parciais de  $\hat{\Theta}$ , e verifiquemos se a Equação do Calor é satisfeita:

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\frac{d}{dz} \left[ C \int_{\infty}^z e^{-\zeta^2/4} d\zeta + C' \right] \\ &= -C e^{-z^2/4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_t &= F' \left( \frac{x}{(t+1)^{1/2}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{(t+1)^{1/2}} \right) \\ &= F' \left( \frac{x}{(t+1)^{1/2}} \right) \left( -\frac{x}{2(t+1)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{Cx}{2(t+1)^{3/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{4(t+1)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_x &= F' \left( \frac{x}{(t+1)^{1/2}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(t+1)^{1/2}} \right) \\ &= -\frac{C}{(t+1)^{1/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{4(t+1)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{xx} &= -\frac{C}{(t+1)^{1/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{4(t+1)} \right) \left( -\frac{2x}{4(t+1)} \right) \\ &= \frac{Cx}{2(t+1)^{3/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{4(t+1)} \right) \\ &= \hat{\Theta}_t. \end{aligned}$$

Agora, analisemos as condições inicial e de fronteira:

$$\hat{\Theta}(x, 0) = F \left( \frac{x}{(0+1)^{1/2}} \right) = F(x) = \hat{h}(x);$$

$$\hat{\Theta}(0, t) = F \left( \frac{0}{(t+1)^{1/2}} \right) = F(0) = \hat{g}(t).$$

E, finalmente, estudemos as condições existentes sob a fronteira livre  $\hat{\Gamma}$ : A partir de  $\Phi(x, t) = 0$  (cf. (2.14)), vem  $x - M(t + 1)^{1/2} = 0$  e portanto,

$$t = \hat{s}(x) = -1 + \frac{x^2}{M^2}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}(x, \hat{s}(x)) &= F\left(\frac{x}{(\hat{s}(x)^2 + 1)^{1/2}}\right) \\ &= F(M) = 0.\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_x(x, \hat{s}(x)) \cdot \hat{s}'(x) &= -\frac{C}{(\hat{s}(x) + 1)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\hat{s}(x) + 1)}\right) \left(-1 + \frac{x^2}{M^2}\right)' \\ &= -\frac{2C}{M} e^{-M^2/4} \\ &= -k.\end{aligned}$$

Portanto, o par  $\hat{\Theta}(x, t)$ ,  $\hat{\Gamma}(x, t)$  é de fato uma solução do Problema de Stefan Clássico particular definido acima.

Por (2.12), temos que

$$C = \frac{kM}{2} e^{M^2/4} \rightarrow \infty \text{ quando } M \rightarrow \infty.$$

O comportamento da constante  $C'$  quando  $M \rightarrow \infty$  necessita de um estudo cuidadoso, feito a seguir: Chamemos

$$I_M = \int_M^\infty e^{-x^2/4} dx.$$

O objetivo aqui é estimar  $I_M^2$  utilizando como instrumento a mudança de coordenadas retangulares para polares:

$$\begin{aligned}I_M^2 &= \int_M^\infty e^{-x^2/4} dx \int_M^\infty e^{-y^2/4} dy \\ &= \int_M^\infty \int_M^\infty e^{-(x^2+y^2)/4} dx dy \\ &\leq \int\int_{\Xi} e^{-(x^2+y^2)/4} dx dy,\end{aligned}$$

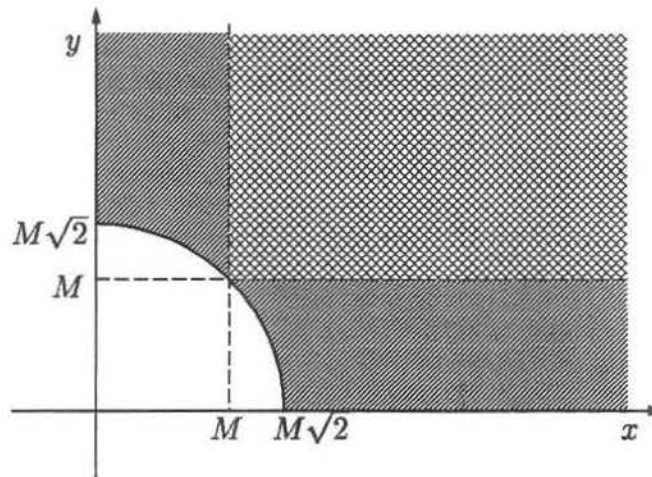


Figura 2.3: Comparação das regiões de integração.

onde  $\Xi$  é a região do plano obtida do primeiro quadrante retirando o quarto de circunferência centrado na origem de raio  $M\sqrt{2}$  (cf. Figura 2.3). Façamos agora a mudança de coordenadas para obter

$$\begin{aligned} \iint_{\Xi} e^{-(x^2+y^2)/4} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_{M\sqrt{2}}^{\infty} e^{-\rho^2/4} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ -2e^{-\rho^2/4} \right]_{M\sqrt{2}}^{\infty} \\ &= \pi e^{-M^2/2}, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$I_M \leq \sqrt{\pi} e^{-M^2/4}. \quad (2.15)$$

Estes cálculos nos permitirão provar o seguinte

**Teorema 2.4** Para  $R > 0$  suficientemente grande, a solução  $u$  do Problema 1.1 do Capítulo 1 é identicamente nula numa vizinhança de

$$\{(R, t), 0 \leq t \leq T\}.$$

**Demonstração:** Com as notações anteriores e (2.15) obtemos, com base nos cálculos feitos acima, a seguinte limitação para o crescimento de  $C'$  quando  $M \rightarrow \infty$ :

$$C' = \frac{kM}{2} e^{M^2/4} I_M \leq \frac{\pi}{2} kM.$$

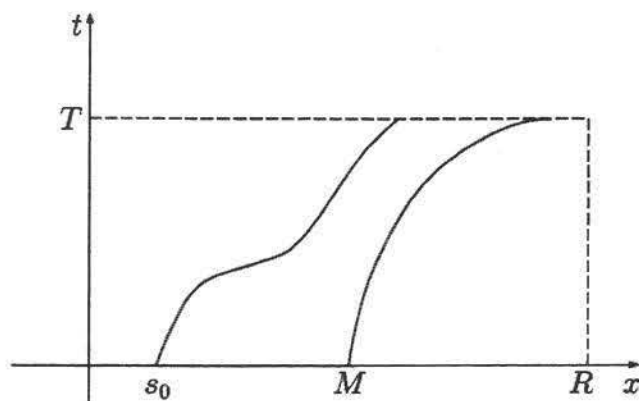


Figura 2.4: Ilustração da dominação de  $u$ .

Seja então  $\hat{u}$  a solução fraca associada à solução clássica  $\hat{\Theta}$  definida acima. Observando que o crescimento de  $C$  é maior que o de  $C'$  quando  $M$  se torna grande, tendo em mente a regularidade das funções  $g$  e  $h$  (cf. Capítulo 1) e lembrando que a constante positiva  $k$  é a mesma para  $u$  e  $\hat{u}$ , podemos encontrar  $M$  suficientemente grande de tal forma que

$$\hat{h}(x) \geq h(x) \quad \text{e} \quad \hat{g}(t) \geq g(t).$$

Estamos agora em condições de aplicar o Lema 2.3 para concluir que  $\hat{u} \geq u$  em  $D$ . Como  $\hat{u} = 0$  para  $x \geq M(t+1)^{1/2}$  (região do gelo), temos  $0 = \hat{u} \geq u \geq 0$ , ou seja,  $u = 0$  se  $x \geq M(t+1)^{1/2}$ .

Assim

$$\Omega(t) \subset \{x; 0 < x < M(t+1)^{1/2}\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

e então podemos concluir que dado  $T > 0$ , é possível escolher  $R > 0$  suficientemente grande de tal forma que a solução  $u$  do Problema 1.1 do Capítulo 1 se anule numa vizinhança de  $\{(R, t); 0 \leq t \leq T\}$ , bastando para isso escolher  $M$  como acima e  $R > M(T+1)^{1/2}$  (cf. Figura 2.4). ■

A partir da próxima seção, consideramos  $R$  escolhido de forma que a condição acima esteja satisfeita.



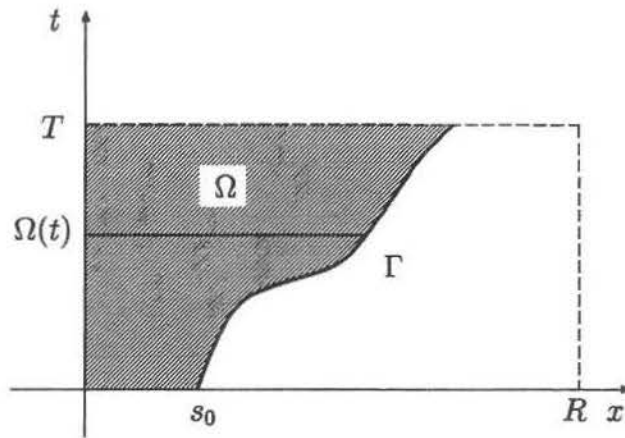


Figura 2.5: Ilustração das regiões definidas na Seção 2.3.

### 3 A Fronteira Livre

O objetivo desta seção é fazer um estudo preliminar da fronteira livre do Problema 1.1 do Capítulo 1. Para isto, definimos os seguintes conjuntos (cf. Figura 2.5):

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x, t); u(x, t) > 0\}, \\ \Omega(t) &= \{x; (x, t) \in \Omega\}, \quad 0 < t \leq T, \\ \Gamma &= \partial\Omega \cap D.\end{aligned}\tag{3.1}$$

**Teorema 3.1** *Seja  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1. Então  $\Gamma$  definida em (3.1) admite a representação*

$$\Gamma: x = \sigma(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde  $\sigma$  é uma função contínua e crescente de  $t$ , com  $s_0 = \sigma(0) < \sigma(t)$  para  $t > 0$ .

**Demonstração:** Primeiramente mostremos que para cada  $t \in (0, T)$ ,  $\Omega(t)$  é um conexo. O intervalo  $(0, s_0)$  está contido em  $\Omega(t)$  para todo  $0 < t < T$ , pois se isto não fosse verdade, existiriam  $x_0 \in (0, s_0)$  e  $t_0 \in (0, T)$  tais que  $u(x_0, t_0) = 0$ . Como  $u(x_0, 0) = 0$  e  $u_t \geq 0$  em  $D$ , temos que a função  $u$  é monótona crescente na variável  $t$ , o que nos permite deduzir que

$$u(x_0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Chamando  $Q = (0, x_0) \times (0, t_0)$ , temos que a solução  $u$  do Problema 1.1 do Capítulo 1 neste caso satisfaz

$$u_t - u_{xx} = f = h \geq 0 \text{ em } Q,$$

$$u = \psi, \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

$$u = 0, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

$$u = 0, \quad x = x_0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Para cada  $t \in [0, T)$  fixo, temos que  $u \in C^1(0, R)$ , pelo Teorema 2.1. Assim, como a solução  $u$  cai a zero em  $D \setminus \Omega$  e lá permanece, temos que

$$u_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma.$$

Considere agora a solução (clássica)  $v$  do problema

$$v_t - v_{xx} = h \text{ em } Q,$$

$$v = 0 \text{ em } \partial_p Q.$$

Como  $h \geq 0$ , temos ao aplicar o Princípio do Máximo que

$$v \geq \min_{\partial_p Q} v = 0.$$

Logo, pelo Princípio do Máximo de Hopf-Friedman, (*cf.* Protter e Weinberger [12]) e notando que em  $(x_0, t)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$  a derivada normal exterior a  $Q$  coincide com a derivada parcial com respeito a  $x$ , temos

$$v_x(x_0, t) < 0, \text{ se } 0 \leq t \leq t_0,$$

Considere agora a função  $w = u - v$ , solução generalizada do seguinte problema

$$w_t - w_{xx} = 0 \text{ em } Q,$$

$$w = \psi, \text{ se } x = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

$$w = 0, \quad t = 0, \text{ em } 0 \leq x \leq x_0,$$

$$w = 0, \quad x = x_0, \text{ em } 0 \leq t \leq t_0.$$

A analiticidade de  $w$  em  $Q$  e a positividade de  $\psi$  nos dão

$$w_x = (u - v)_x(x_0, t) < 0, \quad 0 < t \leq t_0$$

pois se para algum  $0 < t_1 \leq t_0$  tivéssemos  $w_x(x_0, t_1) \geq 0$ , obteríamos pela Fórmula de Newton-Leibniz que

$$\psi(t_1) = w(0, t_1) = w(x_0, t_1) + \int_{x_0}^0 w_x(\xi, t_1) d\xi = - \int_0^{x_0} w_x(\xi, t_1) d\xi \leq 0,$$

o que contradiria a positividade de  $\psi$ . Juntando as desigualdades obtidas acima, temos

$$0 = u_x(x_0, t) < v_x(x_0, t) < 0,$$

o que é uma contradição. Logo,  $(0, s_0) \subset \Omega(t)$ ,  $\forall t \in (0, T)$ .

Agora suponhamos que exista um intervalo aberto  $(x_1, x_2)$  contida em  $\Omega(t)$ , que é também aberto (pela continuidade de  $u$ ) que não contenha  $(0, s_0)$ . Então

$$-u_{xx}(x, t) = -k - u_t(x, t) \leq -k < 0 \text{ em } (x_1, x_2),$$

fato este justificado por estarmos na região  $A$  e  $u_t \geq 0$ . Daí, pelo Princípio do Máximo para Equações Elípticas,

$$u(x, t) \leq \max(u(x_1, t), u(x_2, t)) = 0, \quad x_1 < x < x_2,$$

o que é uma contradição, pela definição de  $\Omega(t)$ , donde se deduz que  $\Omega(t)$  é um conexo.

Definimos a função  $\sigma$  como

$$\sigma(t) = \sup\{x; x \in \Omega(t)\}, \quad 0 < t \leq T,$$

(3.2)

$$\sigma(0) = s_0.$$

Como  $\Omega(t) \subset \Omega(t')$  se  $t < t'$ , temos

$$\sigma(t) = \sup\{x; x \in \Omega(t)\} \leq \sup\{x; x \in \Omega(t')\} = \sigma(t'),$$

o que prova a monotonicidade de  $\sigma$ . Agora provemos que  $\sigma$  é contínua, primeiramente mostrando por absurdo que ela é semi-contínua superiormente: Suponha que existam  $x_1$  e  $x_2$  tais que

$$x_1 = \sigma(t) < \lim_{t' \rightarrow t^+} \sigma(t') = x_2$$

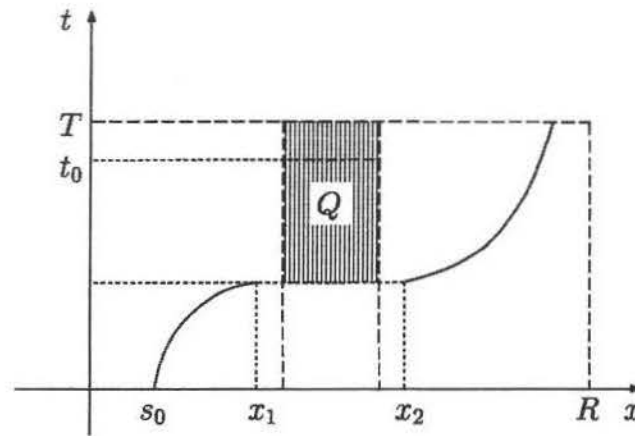


Figura 2.6: Ilustração da demonstração de continuidade de  $\sigma$ .

para algum  $t_0 \in [0, T)$ . Neste caso, para  $\varepsilon > 0$  adequado,

$$Q = \{(x, t); x_1 + \varepsilon < x < x_2 - \varepsilon, t_0 < t < T\} \subset \Omega,$$

e como ele se encontra na região  $A$ , (cf. Figura 2.6), temos que  $u$  satisfaz

$$u_t - u_{xx} = -k \text{ em } Q, \tag{3.3}$$

$$u(x, t_0) = 0, \quad x_1 < x < x_2.$$

Pela regularidade do Problema de Cauchy acima (cf. Friedman [6]),  $u$  é analítica em  $\bar{Q}$ ; como não há crescimento na direção  $x$  quando  $t = t_0$ , temos que

$$u(x, t_0) = u_x(x, t_0) = u_{xx}(x, t_0), \quad x_1 + \varepsilon < x < x_2 - \varepsilon;$$

logo, de (3.3) concluímos que  $u_t(x, t_0) = -k$  em  $x_1 < x < x_2$ , ou seja, que  $u_t(x, t) < 0$  numa vizinhança em  $Q \subset \Omega$  de  $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), t_0)$ , o que contradiz o Teorema de Existência da solução  $u$ . Logo  $\sigma$  é semi-contínua superiormente.

Provemos agora semi-continuidade inferior. Analogamente, suponha por absurdo que existam  $x_1$  e  $x_2$  tais que

$$x_2 = \sigma(t) > \lim_{t' \rightarrow t^-} \sigma(t') = x_1$$

para algum  $t_0 \in [0, T)$ . Neste caso, para  $\varepsilon > 0$  adequado,

$$Q = \{(x, t); x_1 + \varepsilon < x < x_2 - \varepsilon, t_0 < t < T\} \subset \Omega,$$

e como ele se encontra na região  $A$ , (cf. (1.5), Capítulo 1), temos que  $u$  satisfaz

$$u_t - u_{xx} = -k \text{ em } Q, \quad (3.4)$$

$$u(x, t_0) = 0, \quad x_1 < x < x_2.$$

Pela regularidade do Problema de Cauchy acima,  $u$  é uma curva analítica em  $\bar{Q}$ ; como não há crescimento na direção  $x$  quando  $t = t_0$ ,

$$u(x, t_0) = u_x(x, t_0) = u_{xx}(x, t_0), \quad x_1 + \varepsilon < x < x_2 - \varepsilon;$$

logo, de (3.4) concluímos que  $u_t(x, t_0) = -k$  em  $x_1 < x < x_2$ , ou seja, que  $u_t(x, t) < 0$  numa vizinhança em  $Q \subset \Omega$  de  $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), t_0)$ , o que é novamente uma contradição. Logo  $\sigma$  é semi-contínua inferiormente, e portanto contínua.

Finalmente, provemos que  $\sigma(t) > s_0$  se  $t > 0$ . Suponha, por absurdo, que exista  $t_0 > 0$  com a propriedade  $\sigma(t_0) = s_0$ . Como a curva  $\sigma$  é monótona, temos que  $\sigma(t) = s_0$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , e assim sendo, considere, para cada  $\varepsilon > 0$ , o retângulo

$$Q = \{(x, t); s_0 - \varepsilon < x < s_0, 0 < t < t_0\}.$$

Observamos que  $Q$  se encontra na região  $C$  (cf. Figura 2.7); logo, por (1.5), (1.8) e (1.9), Capítulo 1,

$$u_t - u_{xx} = f = h \text{ em } Q,$$

$$u = 0, \quad x = s_0, \quad 0 < t < t_0, \quad (3.5)$$

$$u > 0, \quad x = s_0 - \varepsilon, \quad 0 < t < t_0,$$

$$u = 0, \quad 0 < x < s_0, \quad t = 0.$$

Para cada  $t$  fixado,  $u_x$  é função contínua na variável  $x$ . Como  $u$  atinge seu mínimo zero em  $(s_0, t)$  e continua zero para  $t > s_0$ , deduzimos que

$$u_x(s_0, t) = 0, \quad 0 < t < t_0. \quad (3.6)$$

Consideremos também a solução (clássica)  $v$  do Problema de Dirichlet

$$v_t - v_{xx} = h \text{ em } Q,$$

$$v = 0 \text{ em } \partial_p Q,$$

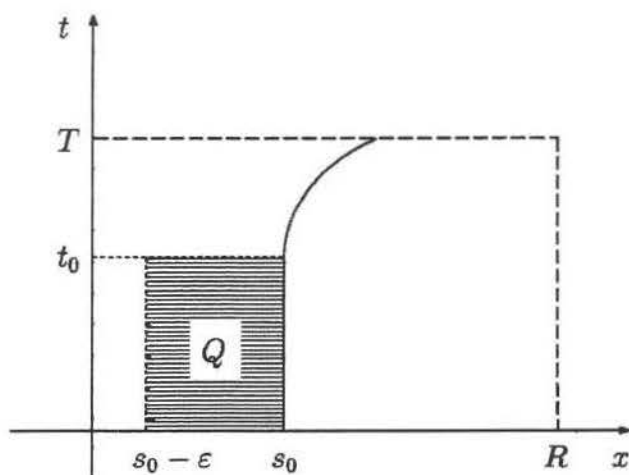


Figura 2.7: Ilustração da prova de  $\sigma(t) > s_0$ ,  $t > 0$ .

onde  $\partial_p Q$  denota a fronteira parabólica de  $Q$ . Como  $h \geq 0$ , o Princípio do Máximo para Equações Parabólicas nos dá

$$v \geq \min_{\partial_p Q} v = 0 \text{ em } Q.$$

Nos pontos  $(s_0, t)$ ,  $0 < t < t_0$ , a derivada normal exterior na fronteira parabólica coincide com a derivada parcial com respeito a  $x$ ; logo, pelo Princípio do Máximo de Hopf-Friedman,

$$v_x(s_0, t) < 0, \quad 0 < t < t_0. \quad (3.7)$$

Por outro lado,  $w = u - v$  é uma solução para o problema homogêneo associado a (3.5). Pela analiticidade de  $w$  e positividade de  $\psi$  temos

$$(u - v)_x(s_0, t) < 0.$$

Combinando a desigualdade acima com (3.6) e (3.7), obtemos

$$0 = u_x(s_0, t) < v_x(s_0, t) < 0, \text{ para } 0 < t < t_0,$$

a contradição desejada. ■

**Observação:** A função  $\sigma$  por ser crescente, admite derivada em quase todo ponto. Através de uma rotação dos eixos  $x$  e  $t$  de  $\pi/4$  no sentido anti-horário, notamos que a derivada fica confinada no intervalo  $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ . Deduzimos daí que  $\sigma$  é uma curva Lipschitz neste novo sistema de coordenadas. Assim  $\Gamma$  é na verdade uma curva Lipschitz, e por conseqüência disso, uma função  $\zeta \in H^1(\Omega)$  admite traço em  $L^2(\Gamma)$  (cf. Apêndice C).

## Regularidade da Solução

Neste capítulo demonstraremos alguns resultados sobre a regularidade da solução do problema variacional e que serão úteis no próximo capítulo, onde analisaremos mais a fundo propriedades de regularidade da fronteira livre  $\Gamma$ . Mostraremos aqui que  $u_{xx}(x, t)$  e  $u_{xt}(x, t)$  são funções contínuas em  $\Omega$  nas proximidades de  $\Gamma$ .

### 1 Limitação das Derivadas Segundas

Nesta seção apresentamos um lema de limitação das derivadas espacial e temporal da função  $u_x$  no quadrado  $[0, s_0/3] \times (0, T)$ .

**Lema 1.1** *Seja  $u_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , a solução do Problema 2.1 do Capítulo 2. Então*

$$\left| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial t}(x, t) \right| \leq C, \quad 0 \leq x \leq s_0/3, \quad 0 < t < T$$

e

$$\left| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C, \quad 0 \leq x \leq s_0/3, \quad 0 < t < T,$$

onde  $C > 0$  é uma constante que independe de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

**Demonstração:** Pela condição inicial do Problema 2.1 do capítulo 2 e (1.3), Capítulo 1,

$$u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq s_0/3.$$

Como  $u_{\varepsilon t} \geq 0$ ,

$$u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, 0) + \int_0^t u_{\varepsilon t}(x, \tau) d\tau \geq \varepsilon, \quad x \in [0, s_0/3], \quad t \in [0, T].$$

Tendo em mente (1.1), Capítulo 1, temos que  $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, t)) = 0$  em  $[0, s_0/3] \times [0, T]$ , e por isso  $u_\varepsilon$  é solução de

$$u_{\varepsilon t} - u_{\varepsilon xx} = f_\varepsilon, \quad 0 < x < s_0/3, \quad 0 < t < T.$$

O resultado desejado é consequência da Teoria de Regularidade em Espaços de Schauder para a Equação do Calor (cf. Friedman [6]). ■

## 2 Propriedades de Integrabilidade das Derivadas

Aqui descrevemos algumas propriedades de integrabilidade de algumas derivadas parciais mistas de  $u_\varepsilon$  e  $u$ .

**Lema 2.1** *Seja  $u_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , a solução do Problema 2.1 do Capítulo 2. Então existe uma constante  $C$  independente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , tal que*

$$\iint_D u_{\varepsilon xt}(x, t)^2 dx dt \leq C.$$

**Demonstração:** Com o intuito de simplificar a notação da prova, denotemos  $u = u_\varepsilon$ ,  $\beta = \beta_\varepsilon$ , e  $w = u_{\varepsilon t}$ . Começemos multiplicando a equação diferencial de (1.8), Capítulo 2, por  $w$  e integrando em  $x$  de 0 a  $R$  para obter:

$$-\int_0^R w w_{xx} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^R w^2 dx + k \int_0^R \beta'(u) w^2 dx = 0.$$

Integremos a primeira parcela da equação acima por partes:

$$\begin{aligned} -\int_0^R w w_{xx} dx &= -[w w_x]_0^R + \int_0^R w_x^2 dx \\ &= \int_0^R w_x^2 dx + w(0, t) w_x(0, t) - w(R, t) w_x(R, t) \\ &= \int_0^R w_x^2 dx + w(0, t) w_x(0, t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

desigualdade última justificada pelo fato de  $u$  se anular numa vizinhança de  $x = R$ .

Utilizemos agora o Lema 1.1 para obtermos limitação uniforme para o termo  $w(0, t) w_x(0, t)$ :

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, t+h) - u(0, t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h} = \psi'(t) = g(t). \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} |w(0, t) w_x(0, t)| &= |g(t)| \cdot |u_{\varepsilon xt}(0, t)| \\ &\leq C \max_{t \in [0, T]} |g(t)| = C_1. \end{aligned}$$



Logo, de (1.1), Capítulo 2, e (2.1),

$$\begin{aligned} \int_0^R w_x^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^R w^2 dx &= -k \int_0^R \beta'(u) w^2 dx - w(0, t) w_x(0, t) \\ &\leq -k \int_0^R \beta'(u) w^2 dx + C_1 \leq C_1. \end{aligned}$$

Temos ao integrar esta desigualdade em  $t$  de 0 a  $T$  e ao usar Teorema de Fubini que

$$\iint_D w_x^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^R [w(x, T)^2 - w(x, 0)^2] dx \leq C_1 T.$$

Do Lema 1.1 do Capítulo 2, temos que  $|w(x, t)| \leq C$ , independente de  $\varepsilon$ ; logo,

$$\begin{aligned} \iint_D w_x^2 dx dt &\leq C_1 T - \frac{1}{2} \int_0^R [w(x, T)^2 - w(x, 0)^2] dx \\ &\leq C_1 T + \frac{1}{2} \int_0^R [|w(x, T)|^2 + |w(x, 0)|^2] dx \\ &\leq C_1 T + C^2 R < \infty. \end{aligned}$$

e o lema está provado. ■

**Lema 2.2** *Seja  $u_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , a solução do Problema 2.1 do Capítulo 2. Então para  $0 < \sigma \leq t < T$  vale*

$$\int_0^R u_\varepsilon(x, t)^2 dx + \int_\sigma^t \int_0^R u_{\varepsilon tt}(x, \tau)^2 dx d\tau \leq \frac{C}{\sigma},$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

**Demonstração:** Como antes, denotemos  $u = u_\varepsilon$ ,  $\beta = \beta_\varepsilon$ , e  $w = u_{\varepsilon t}$ . Multiplicando a equação de (1.8), Capítulo 2, por  $w_t$  e integrando em  $x$  no intervalo  $(0, R)$  obtemos

$$\int_0^R -w_{xx} w_t dx + \int_0^R w_t^2 dx + \int_0^R k \beta'(u) w_t w dx = 0. \quad (2.2)$$

Integremos por partes a primeira parcela da equação acima:

$$\begin{aligned}
 -\int_0^R w_t w_{xx} dx &= -[w_t w_x]_0^R + \int_0^R w_x w_{xt} dx \\
 &= \int_0^R w_x w_{xt} dx - w_t w_x(R, t) + w_t w_x(0, t) \\
 &= \int_0^R w_x w_{xt} dx + w_t w_x(0, t) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^R w_x^2 dx + w_t w_x(0, t),
 \end{aligned}$$

pois  $u$  se anula numa vizinhança de  $R$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

Quando  $x = 0$ , podemos utilizar o Lema 1.1 e a hipótese de suavidade da função  $g$  para obter limitação uniforme em  $t$  para o termo  $w_x(0, t)w_t(0, t)$ :

$$\begin{aligned}
 w_t(0, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(0, t+h) - w(0, t)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi'(t+h) - \psi'(t)}{h} \\
 &= \psi''(t) = g'(t).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \therefore |w_x(0, t)w_t(0, t)| &= |u_{xt}(0, t)||g'(t)| \\
 &\leq C \max_{t \in [0, T]} |g'(t)| = C_2,
 \end{aligned}$$

constante independente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Como consequência de (1.4), Capítulo 2,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^R w_x^2 dx + \int_0^R w_t^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^R \beta'(u) \frac{\partial}{\partial t} w^2 dx \leq C_2. \quad (2.3)$$

Para estimar a última parcela da desigualdade acima, notamos, pela Regra da Cadeia, que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} [\beta'(u)w^2] &= \beta'(u) \frac{\partial}{\partial t} w^2 + w^2 \frac{\partial}{\partial t} \beta'(u) \\
 &= \beta'(u) \frac{\partial}{\partial t} w^2 + w^2 \beta''(u) \frac{\partial u}{\partial t} \\
 &= \beta'(u) \frac{\partial}{\partial t} w^2 + \beta''(u) w^3.
 \end{aligned}$$

Assim, integrando em  $x$  no intervalo em  $(0, R)$ , temos por (1.1), Capítulo 2, que

$$\int_0^R \beta'(u) \frac{\partial}{\partial t} w^2 dx - \frac{d}{dt} \int_0^R \beta'(u) w^2 dx = - \int_0^R \beta''(u) w^3 dx \geq 0.$$

Utilizando isto em (2.2),

$$\begin{aligned} C_2 &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^R w_x^2 dx + \int_0^R w_t^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^R \beta'(u) \frac{\partial}{\partial t} w^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^R [w_x^2 + \beta'(u) w^2] dx + \int_0^R w_t^2 dx \end{aligned}$$

Dado  $\tau > 0$ ,  $\tau < t$ , integremos a expressão acima com respeito ao tempo no intervalo  $(\tau, t)$ :

$$\begin{aligned} &\int_0^R [w_x(x, t)^2 + k\beta'(u)w(x, t)^2] dx + 2 \int_\tau^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau' \\ &\leq 2C_2(t - \tau) + \int_0^R [w_x(x, \tau)^2 + k\beta'(u)w(x, \tau)^2] dx. \end{aligned}$$

Como esta estimativa é válida para todo  $\tau < t$ , podemos integrá-la com respeito ao tempo em  $(0, \sigma)$ ,  $\sigma < t$ , para obter

$$\begin{aligned} &\int_0^\sigma \int_0^R [w_x(x, t)^2 + k\beta'(u)w(x, t)^2] dx d\tau + 2 \int_0^\sigma \int_\tau^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau' d\tau \\ &\leq 2C_2 \int_0^\sigma (t - \tau) d\tau + \int_0^\sigma \int_0^R [w_x(x, \tau)^2 + k\beta'(u)w(x, \tau)^2] dx d\tau \\ &= 2C_2 \left( t\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \int_0^\sigma \int_0^R w_x(x, \tau)^2 dx d\tau + k \int_0^\sigma \int_0^R w(x, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \beta(u(x, \tau)) dx d\tau \\ &\leq 2C_2 \frac{3T^2}{2} + \int_0^T \int_0^R w_x(x, \tau)^2 dx d\tau + kC \int_0^T \int_0^R \frac{\partial}{\partial t} \beta(u(x, \tau)) dx d\tau. \end{aligned}$$

Utilizemos o Teorema de Fubini, denotemos  $C_3 = 3C_2T^2$ , e façamos uso do Lema 1.2 do Capítulo 2 e do Lema 2.1 para obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &\sigma \int_0^R [w_x(x, t)^2 + k\beta'(u)w(x, t)^2] dx + 2 \int_0^\sigma \int_\tau^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau' d\tau \\ &\leq C_3 + \int_0^T \int_0^R w_x(x, \tau)^2 dx d\tau + kC \int_0^R [\beta(u(x, T)) - \beta(u(x, 0))] dx \quad (2.4) \\ &\leq C_3 + \int_0^T \int_0^R w_x(x, \tau)^2 dx + 2RkC \leq C_4. \end{aligned}$$

Para completar a prova, desenvolvemos uma estimativa para o segundo membro da desigualdade de (2.4): Utilizando o Teorema de Fubini e integração por partes

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\sigma \int_\tau^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau' d\tau \\
 &= \int_0^R \int_0^\sigma \int_\tau^t w_t^2 d\tau' d\tau dx \\
 &= \int_0^R \left[ \tau \int_\tau^t w_t^2 d\tau' \right]_0^\sigma dx + \int_0^R \int_0^\sigma \tau w_t(x, \tau)^2 d\tau dx \\
 &\geq \sigma \int_0^R \int_\sigma^t w_t^2 d\tau' dx = \sigma \int_\sigma^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Logo, da estimativa acima e de (2.4)

$$\begin{aligned}
 C_4 &\geq \sigma \int_0^R [w_x(x, t)^2 + k\beta'(u)w(x, t)^2] dx \\
 &\quad + 2 \int_0^\sigma \int_\tau^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau' d\tau \\
 &\geq \sigma \int_0^R w_x(x, t)^2 dx + 2\sigma \int_\sigma^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau \\
 &\geq \sigma \int_0^R w_x(x, t)^2 dx + \sigma \int_\sigma^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\int_0^R w_x^2(x, t)^2 dx + \int_\sigma^t \int_0^R w_t^2 dx d\tau \leq \frac{C_4}{\sigma}.$$

Se levarmos em conta as convenções iniciais, este é o resultado desejado. ■

**Teorema 2.3** *Seja  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1. Então existe uma constante positiva  $C$  tal que para cada  $\sigma > 0$ ,*

$$\int_0^R u_{xt}(x, t)^2 dx + \int_\sigma^t \int_0^R u_{tt}(x, \tau)^2 dx d\tau \leq \frac{C}{\sigma}, \text{ para } \sigma < t < T.$$

**Demonstração:** Segue imediatamente do teorema anterior, da convergência fraca de  $u_\epsilon$  para  $u$  em  $L^p(D)$  e por um argumento de densidade análogo ao feito em (2.1). Note que da desigualdade acima deduz-se que  $u_\epsilon \in H^1(D \cap \{(x, t); t \geq \sigma\})$  para cada  $\sigma > 0$ .

### 3 A Lipschitz Continuidade de $u_t$

O objetivo desta seção é provar que a função  $u_t$  se comporta como uma função Lipschitz nas proximidades da fronteira livre  $\Gamma$ . Para isto, necessitaremos do

**Lema 3.1** *Seja  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1 e por  $\Gamma$  a fronteira livre associada a esta solução. Então para cada  $(x_0, t_0) \in \Gamma$  existe uma vizinhança  $U$  de  $(x_0, t_0)$  tal que*

$$u_x(x, t) < 0 \text{ em } U \cap \Omega.$$

**Demonstração:** Pela monotonicidade de  $\Gamma$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $(x_0, t_0) \in \Gamma$  tal que  $U \subset \{(x, t); x > s_0, t > 0\}$ . Como nesta região vale  $f(x) = -k$ , por (1.8), Capítulo 2, temos que

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) + k \geq k > 0 \text{ em } U \cap \Omega,$$

e daí, levando em conta o fato de que  $u_x(x, t) = 0$ ,  $(x, t) \in \Gamma$  para cada  $0 < t < T$  (cf. Teorema 3.1, Capítulo 2),

$$u_x(x, t) = u_x(\sigma, t) + \int_{\sigma}^x u_{xx}(\xi, t) d\xi < 0,$$

onde  $\sigma$  é tal que  $(\sigma, t) \in \Gamma$ . ■

Teremos que utilizar também a informação contida no seguinte lema:

**Lema 3.2** *Sejam  $\Gamma$  a fronteira livre associada à solução  $u$  do Problema 1.1, Capítulo 1, e*

$$Q = \{(x, t); |x - x_0| < \varepsilon, 0 < t_0 - t < \delta\}$$

para  $(x_0, t_0) \in \Gamma$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  dados. Suponha que  $v \in H^1(Q \cap \Omega)$  e que satisfaça

$$-v_{xx} + v_t \geq 0 \text{ em } (Q \cap \Omega),$$

$$v \geq 0 \text{ em } \partial_p(Q \cap \Omega),$$

onde  $\partial_p(Q \cap \Omega) = \partial(Q \cap \Omega) - \{(x, t_0); |x - x_0| < \varepsilon\}$  denota a fronteira parabólica de  $Q \cap \Omega$ . Então  $v \geq 0$  em  $Q \cap \Omega$ .

**Demonstração:** Consideremos o seguinte conjunto:

$$Y = \{(x, t) \in Q \cap \Omega; v(x, t) < 0\}.$$

Neste conjunto vale

$$\iint_Y (-v_{xx} + v_t)v \, dx \, dt \leq 0.$$

Consideremos agora a função  $\hat{v} = -\max(-v, 0)$ , que se anula em  $\partial_p(Q \cap \Omega)$ . Como  $v \in H^1(Q \cap \Omega)$ ,  $\hat{v} \in H^1(Q \cap \Omega)$  (cf. Apêndice C); logo, deduzimos que

$$\iint_{Q \cap \Omega} (-\hat{v}_{xx} + \hat{v}_t)\hat{v} \, dx \, dt \leq 0,$$

desigualdade esta justificada pelo fato de  $v$  e  $\hat{v}$  coincidirem em  $Y$  e de  $v = 0$  em  $Y \setminus (Q \cap \Omega)$ . Integrando por partes primeiro membro e usando o Teorema de Fubini no segundo, temos

$$\begin{aligned} & \int \int_{(Q \cap \Omega)} \hat{v}_x^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^R [\hat{v}(x, T)^2 - \hat{v}(x, \sigma)] \, dx \\ &= \int \int_{(Q \cap \Omega)} \hat{v}_x^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^R \hat{v}(x, T)^2 \, dx \leq 0, \end{aligned}$$

onde  $\sigma$  é tal que  $(x, \sigma) \in \partial_p(Q \cap \Omega)$ . Assim,  $\hat{v}_x = 0$  q.t.p. em  $Q \cap \Omega$  e

$$\hat{v}(x, t) = \hat{v}(0, t) + \int_0^x \hat{v}_x(\xi, t) \, d\xi = 0.$$

Portanto,  $\hat{v} = 0$  q.t.p. em  $Q \cap \Omega$ ; logo,  $Y$  possui Medida de Lebesgue igual a zero. ■

**Corolário 3.3** *Sejam  $u$ ,  $\Gamma$  e  $Q$  definidos como no Lema 3.2. Suponha que  $w, \Theta \in H^1(Q \cap \Omega)$  e que satisfaçam*

$$-w_{xx} + w_t \geq 0 \quad \text{em } Q \cap \Omega,$$

$$-\Theta_{xx} + \Theta_t = 0 \quad \text{em } Q \cap \Omega,$$

$$w \geq \Theta \quad \text{em } \partial_p(Q \cap \Omega).$$

Então  $w \geq \Theta$  em  $Q \cap \Omega$ .

**Demonstração:** Basta aplicar o lema 3.2 com  $v = w - \Theta$ . ■

**Lema 3.4** *Seja  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1 e  $\Gamma$  sua fronteira livre. Então para cada  $(x_0, t_0) \in \Gamma$  com  $t_0 \geq \delta > 0$*

$$0 \leq u_t(x, t) \leq c_1(x - x_0)^2 - c_2 x u_x(x, t), \quad (x, t) \in Q \cap \Omega,$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\varepsilon$  são constantes positivas adequadas que independem de  $(x_0, t_0)$  e

$$Q = \{(x, t); |x - x_0| < \varepsilon, |t - t_0| < \varepsilon\}.$$

**Demonstração:** De acordo com o Teorema 2.2, existe uma vizinhança

$$Q = \{(x, t); |x - x_0| < \varepsilon, |t - t_0| < \varepsilon\}$$

tal que  $u_t \in H^1(Q)$ . Como  $\Gamma$  é uma curva Lipschitz,  $u_t$  admite traço  $u_t(\sigma(t), t)$  sobre  $\Gamma \cap Q$ .

Note que

$$u_t(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_t(x + \mu, t) \text{ em } H^1(Q),$$

(Este limite existe pois  $u_t, u_{xt}, u_{tt} \in L^2(Q)$  e quando  $f \in L^p$  temos  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \|f(x + \mu) - f(x)\|_{L^p} = 0$ ).

Como  $u_t = 0$  em  $Q \setminus \Omega$  e o traço é uma aplicação contínua de  $H^1(Q)$  em  $L^2(\Gamma \cap Q)$ , temos que  $u_t|_{\Gamma} = 0$ .

Agora, em  $Q \cap \Omega$ ,  $u$  satisfaz

$$-u_{xx} + u_t = -k,$$

e quando derivamos a equação acima com respeito a  $t$ , obtemos

$$-u_{txx} + u_{tt} = 0. \quad (3.1)$$

Por outro lado, com  $c_1$  e  $c_2$  constantes positivas a serem determinadas *a posteriori*, chamemos

$$w(x, t) = c_1(x - x_0)^2 - c_2 x u_x(x, t), \quad (x, t) \in Q \cap \Omega.$$

Escolhamos  $c_1$  grande o suficiente para que a desigualdade seguinte valha:

$$c_1(x - x_0)^2 \geq u_t(x, t) \text{ para } (x, t) \in \partial_p(Q \cap \Omega).$$

Observamos que isto é possível, já que  $(x - x_0)^2$  só se anula em  $x = x_0$ ,  $u_t = 0$  em  $\Gamma$  e  $u_t \in L^\infty(D)$  (basta tomar  $c_1 > \|u_t\|_{L^\infty(D)}$ ).

Assim, temos que em  $Q \cap \Omega$  vale

$$\begin{aligned} -w_{xx} + w_t &= -2c_1 + 2c_2 u_{xx}(x, t) + c_2 x u_{xxx}(x, t) - c_2 x u_{xt}(x, t) \\ &= -2c_1 + 2c_2 u_{xx}(x, t) - c_2 x [u_{xx}(x, t) - u_t(x, t)]_x \\ &= -2c_1 + 2c_2 u_{xx}(x, t), \end{aligned}$$

desigualdade última justificada pelo fato de valer  $u_{xx} - u_t = -k$  (constante) nesta região.

Portanto,

$$\begin{aligned} -w_{xx} + w_t &= -2c_1 + 2c_2 u_{xx}(x, t) \\ &= -2c_1 + 2c_2 [u_t(x, t) + k] \\ &\geq -2c_1 + 2kc_2 \quad \text{em } Q \cap \Omega. \end{aligned}$$

Se escolhermos  $c_2$  suficientemente grande para que  $-2c_1 + 2kc_2 > 0$  então teremos

$$-w_{xx} + w_t > 0 \quad \text{em } Q \cap \Omega. \quad (3.2)$$

Escolhamos agora  $Q$  de tal forma que  $-c_2 x u_x(x, t) > 0$  em  $Q \cap \Omega$  (cuja existência é garantida pelo Lema 3.1) para obter a seguinte desigualdade:

$$w \geq u_t \quad \text{em } \partial_p(Q \cap \Omega). \quad (3.3)$$

Por (3.1)–(3.3) e pelo Corolário 3.3 aplicado duas vezes aos pares  $w, u_t$  e  $u_t, 0$ , temos que

$$0 \leq u_t(x, t) \leq w(x, t), \quad (x, t) \in Q \cap \Omega,$$

que é o resultado desejado. ■

Finalmente passemos para a análise da Lipschitz continuidade de  $u_t$ . Vale o seguinte resultado:

**Teorema 3.5** *Sejam  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1 e  $\Gamma$  a fronteira livre associada a esta solução. Então para cada  $(x_0, t_0) \in \Gamma$  existe uma vizinhança  $U$  de  $(x_0, t_0)$  tal que*

$$u_t \in W^{1,\infty}(U).$$

**Demonstração:** Basta provar que  $u_t \in W^{1,\infty}(U \cap \Omega)$ : Se a função  $u_t$  é Lipschitz em  $(U \cap \Omega)$ , ela também é uniformemente contínua em  $(U \cap \Omega)$ . Por ser uniformemente contínua, estão definidos os limites de  $u_t$  quando  $(x, t)$  se aproxima de  $\Gamma$ , devendo valer zero, pelo lema anterior. A função assim definida em  $U \cap \bar{\Omega}$  também será uniformemente contínua. Tomando  $x \in U \cap \Omega$ ,  $y \in \Gamma$  e uma seqüência  $(y_n)$  convergente para  $y$ , temos que vale para cada  $n$  natural a seguinte desigualdade:

$$|u_t(x) - u_t(y_n)| \leq C|x - y_n|.$$



Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$|u_t(x) - u_t(y)| \leq C|x - y|,$$

ou seja,  $u_t \in W^{1,\infty}(U \cap \bar{\Omega})$ ; logo, também podemos dizer que  $u_t \in W^{1,\infty}(U)$ .

Recordemos aqui que  $\Theta = u_t$  (cf. (1.5), Capítulo 1), e assim, por simplicidade de notação, passaremos a estimar  $\Theta$ .

Como necessitamos empregar o Princípio do Máximo clássico para a Equação do Calor, (válido para funções suaves), faremos inicialmente uma regularização de  $\Theta$  através de convolução com núcleos regularizantes. Obteremos as estimativas para tais funções regularizadas, segundo o método de S. Bernstein [3], e então passaremos ao limite, obtendo as estimativas correspondentes para  $\Theta$ .

Para realizar este programa, seja  $\alpha$  um núcleo suavizante, e consideremos as funções

$$\alpha_h(\xi) = \frac{1}{h} \alpha\left(\frac{\xi}{h}\right), \text{ para } 0 < h < 1,$$

e a função regularizada de  $\Theta$ :

$$\Theta_h(x, t) = \int_0^R \alpha_h(x - \xi) \Theta(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega_h,$$

onde

$$\Omega_h = \{(x, t); 0 < x < \sigma(t) - h, 0 < t < T\}.$$

Observe que em  $\Omega_h$ ,

$$\begin{aligned} \Theta_{ht} &= \int_0^R \alpha_h(x - \xi) \Theta_t(\xi, t) d\xi. \\ \Theta_{hxx} &= \int_0^R \alpha_h''(x - \xi) \Theta(\xi, t) d\xi \\ &= [-\Theta(\xi, t) \alpha'(x - \xi)]_0^R + \int_0^R \alpha_h'(x - \xi) \Theta_\xi(\xi, t) d\xi \\ &= \int_0^R \alpha_h'(x - \xi) \Theta_\xi(\xi, t) d\xi \\ &= [-\Theta_\xi(\xi, t) \alpha(x - \xi)]_0^R + \int_0^R \alpha_h(x - \xi) \Theta_{\xi\xi}(\xi, t) d\xi \\ &= \int_0^R \alpha_h(x - \xi) \Theta_{\xi\xi}(\xi, t) d\xi \end{aligned} \tag{3.4}$$

lembrando que, em virtude de  $\alpha$  ser um núcleo suavizante, o suporte da função  $\alpha_h(x - \xi)$  (e da função  $\alpha'_h(x - \xi)$ ) é o conjunto  $\{\xi \in \mathbb{R}; x - h < \xi < x + h\}$ , o que justifica a eliminação dos termos do cálculo acima.

Observamos agora que a vizinhança  $Q$  se encontra na região  $A$  (cf. (1.5), Capítulo 1); por isso, a função  $u$  satisfaz

$$u_{xx} - u_t = -k,$$

que, ao derivarmos com respeito a variável  $t$ , nos dá

$$-\Theta_{xx} + \Theta_t = 0.$$

Assim, com base nisto e no cálculo realizado em (3.4), obtemos

$$-\Theta_{hxx} + \Theta_{ht} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_h. \quad (3.5)$$

Note também que

$$\Theta_h(x, t) = \int_0^R \alpha_h(x - \xi) \Theta(\xi, t) d\xi \geq 0 \quad \text{em } \Omega_h \cap Q,$$

pela não-negatividade das funções envolvidas na integral acima. Façamos agora uma limitação superior para  $\Theta_h$ :

$$\begin{aligned} \Theta_h(x, t) &\leq \int_0^R |\alpha_h(x - \xi)| |\Theta(\xi, t)| d\xi \\ &\leq \sup \Theta \int_0^R |\alpha_h(x - \xi)| d\xi \\ &\leq \sup \Theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \alpha\left(\frac{x - \xi}{h}\right) d\xi \\ &= \sup \Theta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\eta) d\eta \\ &= \sup \Theta, \end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$0 \leq \Theta_h(x, t) \leq \sup \Theta, \quad (x, t) \in \Omega_h. \quad (3.6)$$

A seguir, nós obtemos uma estimativa para  $\Theta_{hx}$  em  $\Gamma$ . Note inicialmente que quando  $(x, t) \in \partial\Omega_h$ , existe um  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $|x - y| = h$  e  $(y, t) \in \Gamma$ . Assim, tomemos uma vizinhança  $Q$  deste

ponto  $(y, t)$  na qual vale a estimativa do Lema (3.4) para realizar os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \leq \sup_{|y-\xi|<2h} \Theta(\xi, t) \\
 &\leq \sup_{|y-\xi|<2h} \{c_1(y-\xi)^2 - c_2\xi u_\xi(\xi, t)\} \\
 &\leq \sup_{|y-\xi|<2h} \{c_1(y-\xi)^2\} + \sup_{|y-\xi|<2h} \{c_2\xi |u_\xi(\xi, t) - u_\xi(y, t)|\} \\
 &\leq 4c_1h^2 + \sup_{|y-\xi|<2h} \{c_2R \|u_{\xi\xi}\|_{L^\infty(D)} |\xi - y|\} \\
 &< 4c_1h + 2c_2Rh \|u_{\xi\xi}\|_{L^\infty(D)} = c_3h,
 \end{aligned}$$

onde também utilizamos o fato de que  $u_x$  é uma função Lipschitz na variável  $x$  (cf. Teorema 2.1 do capítulo 2) e que  $u_x$  se anula em pontos da fronteira livre  $\Gamma$ . Logo, nós provamos que

$$0 \leq \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \leq ch, \quad (x, t) \in \partial\Omega_h \cap Q. \quad (3.7)$$

Limitemos agora  $\Theta_{hx}$ :

$$\begin{aligned}
 \Theta_{hx}(x, t) &\leq \int_{|x-\xi|<h} |\alpha'_h(x-\xi)| |\Theta(\xi, t)| d\xi \\
 &\leq \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \int_{|x-\xi|<h} |\alpha'_h(x-\xi)| d\xi \\
 &\leq c_3h \frac{1}{h} \int_{|\eta|\leq 1} \alpha'(\eta) d\eta \\
 &= c_4,
 \end{aligned}$$

tendo em mente (3.7).

Agora escolhamos uma função  $\zeta \in C_0^\infty(Q)$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ , com  $\zeta = 1$  próximo a  $(x_0, t_0)$  e denotemos

$$w = w_h = \zeta^2 \Theta_{hx}^2 + \mu \Theta_h^2, \quad (x, t) \in \Omega_h \cap Q,$$

onde  $\mu$  é uma constante positiva a ser determinada. Aplicando o operador do calor, obtemos

$$w_t - w_{xx} = -2\{\zeta^2 \Theta_{hxx}^2 + 4\zeta \zeta_x \Theta_{hx} \Theta_{hxx} + \Theta_{hx}^2 [(\zeta \zeta_x)_x - \zeta \zeta_t + \mu]\}.$$

Façamos uso da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} 4\zeta\zeta_x\Theta_{hx}\Theta_{hxx} &= (\sqrt{2}\zeta\Theta_{hxx})(2\sqrt{2}\zeta_x\Theta_{hx}) \\ &\geq -\varepsilon\zeta^2\Theta_{hxx}^2 - \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)\zeta_x^2\Theta_{hx}^2, \quad 0 < \varepsilon < 1 \end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &\leq -2 \left\{ (1 - \varepsilon)\zeta^2\Theta_{hxx}^2 + \Theta_{hx}^2 \left[ \mu + (\zeta\zeta_x)_x - \zeta\zeta_t - \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)\zeta_x^2 \right] \right\} \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade é obtida ao tomarmos uma constante  $\mu$  tal que

$$\mu + (\zeta\zeta_x)_x - \zeta\zeta_t - \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)\zeta_x^2 \geq 0,$$

que é possível graças ao fato de que  $\zeta \in C_0^\infty(Q)$ . Assim, pelo Princípio do Máximo para Equações Parabólicas, temos

$$w(x, t) \leq \max_{\partial_p(\Omega_h \cap Q)} w \leq c_3^2 + \mu \sup \Theta^2.$$

Notemos que a constante que limita superiormente  $w(x, t)$  independe de  $h$ . Logo, ao nos restringirmos a uma região  $U$  na qual  $\zeta|_U \equiv 1$  e passarmos o limite em  $h$  para 0 nós obtemos, pela convergência em quase toda parte de  $\Theta_h$  e  $\Theta_{hx}$  para  $\Theta$  e  $\Theta_x$  respectivamente, que

$$|\Theta_x|^2 - \mu|\Theta|^2 \leq |\Theta_x^2 + \mu\Theta^2| \leq c_3^2 + \mu \sup \Theta.$$

Então temos

$$|\Theta_x|^2 \leq c_4^2 + 2\mu \sup \Theta^2 = c_5^2.$$

Portanto,

$$|u_{tx}| \leq c_5 \text{ em } \Omega \cap U.$$

Portanto, provamos que  $u_t$  é uma função Lipschitz na variável espacial. Para provar que  $u_t$  também é Lipschitz na variável temporal, nós utilizamos raciocínio análogo ao realizado acima, mas fazendo uma suavização de  $\Theta$  em  $t$ , ou seja, tomamos a mesma função  $\alpha_h$  definida acima e consideramos a seguinte função  $\Psi_h$ :

$$\Psi_h(x, t) = \int_0^T \alpha_h(t - \tau)\Theta(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in \Xi_h,$$

onde

$$\Xi_h = \{(x, t); 0 < x < s_0, h < t < T\} \cup \{(x, t); s_0 \leq x \leq R, h + \sigma(t) < t < T\}.$$

Notemos que em  $\Xi_h$  a função  $\Psi_h$  obedece a seguinte equação:

$$-\Psi_{hxx} + \Psi_{ht} = 0.$$

A validade desta equação se deve ao fato que

$$\Psi_{hxx}(x, t) = \int_0^T \alpha_h(t - \tau) \Theta_{xx}(x, \tau) d\tau$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_{ht}(x, t) &= \int_0^T \alpha'_h(t - \tau) \Theta(x, \tau) d\tau \\ &= [-\alpha_h(t - \tau) \Theta(x, \tau)]_0^T + \int_0^T \alpha_h(t - \tau) \Theta_\tau(x, \tau) d\tau \\ &= \int_0^T \alpha_h(t - \tau) \Theta_\tau(x, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade vale pelo fato de o suporte da função  $\alpha_h$  cair a zero quando  $h \rightarrow 0$ .

Além disso, também temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \alpha_h(t - \tau) \Theta(x, \tau) d\tau \\ &\leq (\sup \Theta) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t - \tau) d\tau \\ &= (\sup \Theta) \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\left(\frac{t - \tau}{h}\right) d\tau \\ &= -(\sup \Theta) \int_{\infty}^{-\infty} \alpha(\eta) d\eta \\ &= (\sup \Theta) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\eta) d\eta = \sup \Theta \text{ em } \Xi_h. \end{aligned}$$

A primeira desigualdade da seqüência do desenvolvimento acima se justifica pelo fato de os termos do integrando serem positivos. Assim, temos também que

$$0 \leq \Psi_h \leq \sup \Theta \text{ em } \Xi_h.$$

Neste ponto nós obtemos uma estimativa para  $\Psi_{ht}$  numa porção da fronteira livre. Note que se  $(x, t) \in \partial\Xi_h$ , existe uma constante  $s$  tal que  $|t - s| = h$  e  $(x, s) \in \Gamma$ . Com este ponto  $(x, s)$ , tomemos a vizinhança  $Q$  garantida pelo Lema 3.4 para realizar os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{|t-\tau|<h} \Theta(x, \tau) \leq \sup_{|s-\tau|<2h} \Theta(x, \tau) \\
&\leq \sup_{|s-\tau|<2h} c_1(x - x)^2 - c_2 x u_x(x, \tau) \\
&\leq c_2 R \sup_{|s-\tau|<2h} |u_x(x, \tau) - u_x(x, s)| \\
&\leq c_2 R \sup_{|s-\tau|<2h} \|u_{xt}\|_{L^\infty(\Omega \cap Q)} |\tau - s| \\
&\leq 2c_2 R h \|u_{xt}\|_{L^\infty(\Omega \cap Q)} = c_6,
\end{aligned}$$

lembrando que  $u_{xt} \in L^\infty(\Omega \cap Q)$  pela primeira parte desta demonstração, e que  $u_x = 0$  em pontos da fronteira livre  $\Gamma$ . Logo, temos

$$0 \leq \sup_{|t-\tau|<h} \Theta(x, \tau) \leq c_6 h \text{ em } \partial\Xi_h \cap Q.$$

Agora nós obtemos uma estimativa para  $\Psi_{ht}(x, t)$  em  $\partial\Xi_h \cap Q$ :

$$\begin{aligned}
|\Psi_{ht}(x, t)| &\leq \int_{|t-\tau|<h} |\alpha_{ht}(t - \tau)| |\Theta(x, \tau)| d\tau, \quad (x, t) \in \partial\Xi_h \cap Q \\
&\leq \sup_{|t-\tau|<h} \Theta(x, \tau) \int_{|t-\tau|<h} |\alpha_{ht}(t - \tau)| d\tau \\
&\leq c_6 h \frac{1}{h} \int_{|t-\tau|<h} \left| \alpha' \left( \frac{t - \tau}{h} \right) \right| \frac{d\tau}{h} \\
&= c_6 \int_{|\eta|<1} |\alpha'(\eta)| d\eta = c_7.
\end{aligned}$$

Escolhamos uma função  $\zeta$  de forma análoga à primeira parte da prova e consideremos a função

$$z = z_h = \zeta^2 \Psi_{ht}^2 + \mu \Psi_{hx}^2,$$

onde  $\mu > 0$  é uma constante a princípio arbitrária. Aplicando o Operador do Calor nesta função, nós obtemos

$$z_t - z_{xx} = -2\{\zeta^2 \Psi_{htx}^2 + 4\zeta \zeta_x \Psi_{ht} \Psi_{htx} + \Psi_{ht}^2 [\mu - \zeta \zeta_t + (\zeta \zeta_x)_x]\}.$$

Tomemos  $0 < \varepsilon < 1$  para obter

$$z_t - z_{xx} \leq -2\left\{(1 - \varepsilon)\zeta^2 \Psi_{htx}^2 + \Psi_{ht}^2 \left[\mu + (\zeta \zeta_x)_x - \zeta \zeta_t - \left(\frac{4}{\varepsilon}\right) \zeta_x^2\right]\right\} \leq 0,$$

se tomarmos  $\mu \geq \left(\frac{4}{\varepsilon}\right) \zeta_x^2 + \zeta \zeta_t - (\zeta \zeta_x)_x$ , o que é possível pois  $\zeta \in C_0^\infty(Q)$ . Daí, pelo Princípio do Máximo para Equações Parabólicas, temos

$$z(x, t) \leq \max_{\partial_p(\Xi_h \cap Q)} z \leq c_7^2 + \mu c_5^2,$$

onde aqui notamos que  $\psi_{hx}$  é suavização de  $u_{tx}$ , sendo então dominada pela mesma constante  $c_5$  que domina  $u_{tx}$ .

Agora, consideremos somente uma vizinhança de  $(x, s)$  na qual  $\zeta = 1$  e passemos o limite quando  $h \rightarrow 0$  para concluirmos que

$$\begin{aligned} u_{tt}^2 + \mu u_{tx}^2 &\leq c_7^2 + \mu c_5^2 \\ \Rightarrow u_{tt}^2 &\leq c_7^2 + \mu c_5^2 - \mu u_{tx}^2 \leq c_7^2 + 2\mu c_5^2 = c_8^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$|u_{tt}| \leq c_8.$$

A última desigualdade obtida acima encerra a demonstração. ■

Terminaremos este capítulo com o seguinte resultado:

**Teorema 3.6** *Seja  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1 e  $\Gamma$  sua fronteira livre. Então para todo  $(x_0, t_0) \in \Gamma$  existe uma vizinhança  $U$  de  $(x_0, t_0)$  tal que*

$$u_{xx}, u_{xt} \in C(\bar{\Omega} \cap U).$$

**Demonstração:** Consideremos  $U$  obtido no teorema anterior. Como

$$u_{xx} = u_t + k, \quad (x, t) \in U \cap \Omega, \tag{3.8}$$

temos que  $u_{xx}$  é Lipschitz contínua em  $U \cap \Omega$ . Como a Lipschitz continuidade pode ser estendida para o fecho de um conjunto, temos em particular que  $u_{xx}$  é uma função Lipschitz em  $U \cap \bar{\Omega}$ . Derivando (3.8) com respeito a  $t$ , obtemos

$$u_{txx} = u_{tt} \in L^\infty(U \cap \Omega). \quad (3.9)$$

Assim, integrando a equação acima com respeito à variável espacial entre  $(x_1, t)$  e  $(x_2, t)$ , nós obtemos

$$|u_{xt}(x_1, t) - u_{xt}(x_2, t)| \leq \|u_{txx}\|_{L^\infty(U \cap \Omega)} |x_1 - x_2|, \quad (x_1, t), (x_2, t) \in U \cap \bar{\Omega}.$$

Além disso, como  $u_{xt}$  satisfaz a Equação do Calor no sentido fraco em  $U \cap \Omega$  (basta derivar (3.9) com respeito a  $x$ ), temos que  $u_{xt}$  é analítica na variável temporal em  $U \cap \Omega$ . Basta agora provar que  $u_{xt}$  é contínua em  $U \cap \Gamma$ . Para isto, tomemos  $(x, t_1) \in U \cap \Gamma$ ,  $(x, t_2) \in U \cap \Omega$  e utilizemos a Desigualdade Triangular para obter, tomando  $\varepsilon > 0$  arbitrário,

$$\begin{aligned} |u_{xt}(x, t_1) - u_{xt}(x, t_2)| &\leq |u_{xt}(x, t_1) - u_{xt}(x - \varepsilon, t_1)| \\ &\quad + |u_{xt}(x - \varepsilon, t_1) - u_{xt}(x - \varepsilon, t_2)| \\ &\quad + |u_{xt}(x - \varepsilon, t_2) - u_{xt}(x, t_2)| \\ &\leq 2\varepsilon \|u_{txx}\|_{L^\infty(U \cap \Omega)} + |u_{xt}(x - \varepsilon, t_1) - u_{xt}(x - \varepsilon, t_2)|. \end{aligned}$$

Passando o limite, temos pela continuidade de  $u_{xt}$  em  $U \cap \Omega$  que

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1^+} |u_{xt}(x, t_1) - u_{xt}(x, t_2)| \leq 2\varepsilon \|u_{txx}\|_{L^\infty(U \cap \Omega)}.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi tomado arbitrariamente, temos

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1^+} |u_{xt}(x, t_1) - u_{x,t}(x, t_2)| = 0,$$

e, por isso,  $u_{xt}$  é contínua na variável  $t$ , o que encerra a demonstração. ■



# 4

## A Diferenciabilidade da Fronteira Livre

Neste capítulo voltamos a estudar a fronteira livre  $\Gamma$  para mostrar que existe uma parametrização infinitamente diferenciável da mesma. Para isto, utilizamos a Transformada de Legendre, que nos dá uma fronteira livre mais regular, sob o preço de tornar a equação diferencial não-linear, mesmo nos casos mais simples.

Seja  $u$  a solução do Problema 1.1 do Capítulo 1 e  $\Gamma$  sua fronteira livre. Dado  $(x_0, t_0) \in \Gamma$  arbitrário, tomemos uma vizinhança  $U$  de  $(x_0, t_0)$  na qual  $u_x \in C^1(U \cap \bar{\Omega})$ , cuja existência é garantida pelo Teorema 3.6. Em Kinderlehrer e Stampacchia<sup>†</sup> [10], está enunciado (sem demonstração) que a Lipschitz continuidade da curva  $\Gamma$  garante uma extensão  $C^1(U)$  para  $u_x$ , fato este que *não* conseguimos verificar. Considerando a validade de tal resultado, consideremos a *Transformação Hodográfica Parcial de Primeira Ordem*

$$\begin{aligned}\xi &= -u_x(x, t) \\ \tau &= t, \quad (x, t) \in U.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Esta é uma aplicação  $C^1$ . Calculemos o jacobiano desta transformação para obter

$$\frac{\partial(\xi, \tau)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} -u_{xx}(x, t) & -u_{xt}(x, t) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -u_{xx}(x, t).\tag{1.2}$$

Como  $u_{xx}(x_0, t_0) = u_t(x_0, t_0) + k = k > 0$ , temos pelo Teorema da Função Inversa que existe uma vizinhança de  $(x_0, t_0)$  tal que a inversa da transformação definida em (1.1) está bem definida, além de ser também uma transformação  $C^1$ . Esta transformação mapeia a vizinhança  $U \cap \Omega$

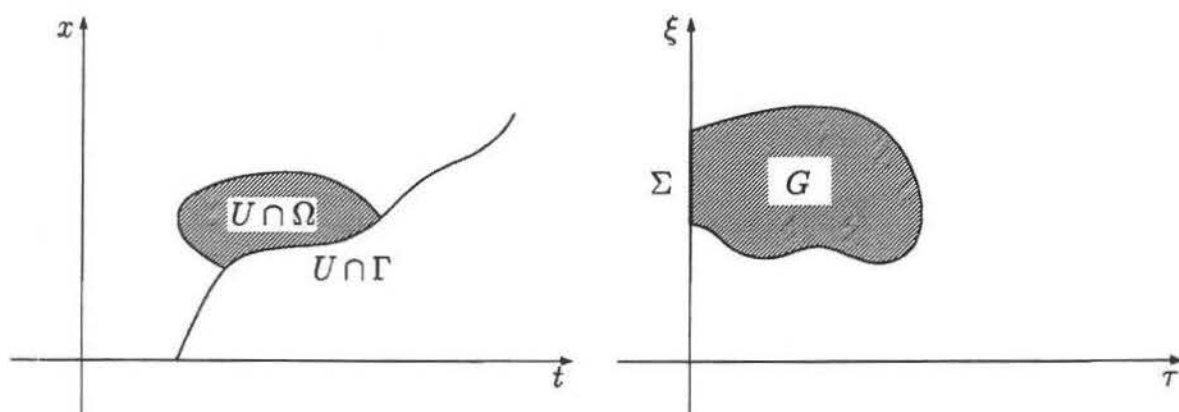


Figura 4.1: Efeito da transformação hodográfica numa vizinhança de  $\Gamma$ .

numa região

$$G \subset \{(\xi, \tau); \xi > 0\}$$

pois  $u_x < 0$  nesta vizinhança (cf. Lema 3.1). Além disso,  $U \cap \Gamma$  é levada por esta transformação num subconjunto

$$\Sigma \subset \{(\xi, \tau); \xi = 0\},$$

pois  $u_x = 0$  sobre  $\Gamma$ .

A Transformada de Legendre de  $u$  é dada por

$$v(\xi, \tau) = x\xi + u(x, t), \quad (\xi, \tau) \in G \cup \Sigma, (x, t) \in \bar{\Omega} \cap U,$$

sendo que  $x$  e  $t$  devem agora ser interpretadas como funções de  $\xi$  e  $\tau$ . Esta transformada goza da seguinte propriedade:

$$dv = x d\xi + \xi dx + u_x dx + u_t dt$$

$$x d\xi + \xi dx - \xi dx + u_t dt = x d\xi + u_t dt.$$

Como  $dv = v_\xi d\xi + v_\tau d\tau$ , temos ao comparar que

$$v_\xi = x,$$

$$v_\tau = u_t.$$

Notemos também que,

$$v_{\xi\xi} = \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{\partial \xi / \partial x} = -\frac{1}{u_{xx}}, \quad (1.3)$$

tendo em mente (1.2). O nosso problema de fronteira livre é

$$-u_{xx} + u_t = k \quad \text{em } U \cap \Omega,$$

$$u = u_x = 0 \quad \text{em } U \cap \Gamma,$$

que em termos de  $v$  se torna

$$\frac{1}{v_{\xi\xi}} + v_\tau = -k \quad \text{em } G,$$

$$v = 0 \quad \text{em } \Sigma.$$

Analisando o comportamento local deste operador diferencial não-linear via linearização aplicada em  $\zeta(\xi, \tau)$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} L\zeta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{(1 + \varepsilon\zeta)_{\xi\xi}} + (v + \varepsilon\zeta)_\tau \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{(v_{\xi\xi} + \varepsilon\zeta_{\xi\xi})^2} \zeta_{\xi\xi} + \zeta_\tau \right] \\ &= -\left( \frac{1}{v_{\xi\xi}^2} \right) \zeta_{\xi\xi} + \zeta_\tau \end{aligned}$$

que é um operador parabólico a coeficientes contínuos, por (1.3). Da teoria de equações diferenciais parabólicas (*cf.* Ladyženskaya *et al.* [11]), temos que

$$v \in C^\infty(G \cup U);$$

logo, como uma parte de  $U \cap \Gamma$  é representada por

$$(x, t) = (v_\xi(0, \tau), \tau)$$

com  $|\tau - t_0|$  suficientemente pequeno a fim de que valha o Teorema da Função Inversa. Obtemos assim uma parametrização  $C^\infty$  de uma porção de  $\Gamma$ . Como o ponto  $(x_0, t_0)$  foi escolhido de maneira arbitrária, podemos concluir que a curva  $\Gamma$  inteira admite uma parametrização  $C^\infty$ , como se queria demonstrar.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A. (1975), Sobolev Spaces. Academic Press, N.Y.
- [2] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994), The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer-Verlag, N.Y.
- [3] Bernstein, S. (1938), A limitation of the moduli of the derivatives of equations of parabolic type. *Dokl. Akad. Nauk, U.S.S.R.*, **18**, 385–388 (Russo).
- [4] Duvaut, G. (1973), Résolution d'un Problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zero degré). *C.R. Acad. Sc. Paris*, **276**, 1461–1463.
- [5] Evans, L. C. (1998), Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [6] Friedman, A. (1964), Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [7] Friedman, A. (1968), The Stefan Problem in Several Space Variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133**, 89–114.
- [8] Friedman, A. (1969), Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, N.Y.
- [9] Kamenomostkaja, S.L. (1965), On Stefan's Problem. *Mat. Sbornik*, **53** (95), 485–514.
- [10] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G.† (1980), An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, N.Y.
- [11] Ladyženskaja, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'ceva, N.N. (1968), Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs, Volume 23, American Mathematical Society.

- [12] Protter, M.H., Weinberger, H.F. (1967), Maximum Principles in Differential Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

# A

---

## Resumo de Análise Funcional Linear

O objetivo deste apêndice é fixar a notação empregada e dar ao leitor não familiarizado com métodos modernos de análise o fundamento necessário para acompanhar as demonstrações dos resultados deste trabalho. Para o leitor interessado em maiores detalhes sobre algum tópico mencionado neste apêndice, as referências dos tópicos abordados se encontram em Evans [5] e Brenner e Scott [2].

### 1 Espaços de Banach

Seja  $X$  um espaço vetorial real.

**Definição 1.1** Uma aplicação  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  é chamada uma norma se

1.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  para todos  $u, v \in X$ ;
2.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$  para todo  $u \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\|u\| = 0$  se e somente se  $u = 0$ .

A desigualdade 1 é conhecida por *desigualdade triangular*. Daqui em diante, nós assumimos que  $X$  é um espaço vetorial normado.

**Definição 1.2** Dizemos que uma seqüência  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  converge para  $u \in X$ , cuja notação é

$$u_k \rightarrow u,$$

se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0.$$

**Definição 1.3** Dizemos que uma seqüência  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  é uma seqüência de Cauchy se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que

$$\|u_k - u_l\| < \varepsilon \text{ para todos } k, l \geq N.$$

**Definição 1.4** Dizemos que  $X$  é completo se cada seqüência de Cauchy em  $X$  converge, ou seja, se  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  é uma seqüência de Cauchy, então existe  $u \in X$  tal que  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  converge para  $u$ .

**Definição 1.5** Um Espaço de Banach  $X$  é um espaço vetorial normado completo.

## 2 Operadores Lineares Limitados

Sejam agora  $X$  e  $Y$  espaços de Banach reais.

**Definição 2.1** Uma aplicação  $A : X \rightarrow Y$  é operador linear se

$$A[\lambda u + \mu v] = \lambda Au + \mu Av$$

para todos  $u, v \in X$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.2** A imagem de  $A$  é o conjunto

$$R(A) := \{v \in Y; v = Au \text{ para algum } u \in X\}$$

e o espaço nulo ou núcleo de  $A$  é definido por

$$N(A) := \{u \in X; Au = 0\}.$$

**Definição 2.3** Dizemos que um operador linear  $A : X \rightarrow Y$  é limitado ou contínuo se

$$\|A\| := \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Au\|_Y < \infty.$$

**Definição 2.4** Dizemos que um operador linear limitado  $u^* : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear limitado em  $X$ .

**Definição 2.5** Nós denotamos por  $X^*$  a coleção de todos os funcionais lineares limitados definidos em  $X$ ;  $X^*$  é o espaço dual de  $X$ .

**Definição 2.6** Se  $u \in X$ ,  $u^* \in X^*$  nós denotamos por

$$\langle u^*, u \rangle$$

o número real  $u^*(u)$ . O símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto de dualidade de  $X$  e  $X^*$ .

**Definição 2.7** Nós definimos

$$\|u^*\| := \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle u^*, u \rangle|$$

**Definição 2.8** Um Espaço de Banach é reflexivo se  $(X^*)^* = X$ . Mais precisamente, isto significa que para cada  $u^{**} \in (X^*)^*$  existe  $u \in X$  tal que

$$\langle u^{**}, u \rangle = \langle u^*, u \rangle \quad \forall u^* \in X^*$$

### 3 Convergência Fraca

Seja  $X$  um Espaço de Banach real.

**Definição 3.1** Dizemos que uma seqüência  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  converge fracamente para  $u \in X$ , denotado por

$$u_k \rightharpoonup u,$$

se

$$\langle u^*, u_k \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle$$

para cada funcional linear limitado  $u^* \in X^*$ .

É fácil verificar que se  $u_k \rightarrow u$  então  $u_k \rightharpoonup u$ . Vale também o fato de que *qualquer seqüência fracamente convergente é limitada*. Além disso, se  $u_k \rightharpoonup u$ , então

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

**Teorema 3.2** (Compacidade Fraca). *Seja  $X$  um Espaço de Banach reflexivo e suponha que a seqüência  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  é limitada. Então existem uma subseqüência  $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  e  $u \in X$  tais que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Em outras palavras, seqüências limitadas em Espaços de Banach reflexivos são fracamente pré-compactas.

**Teorema 3.3** (Mazur). *Seja  $X$  um Espaço de Banach reflexivo e  $U \subset X$  um fechado e convexo. Então  $X$  é fracamente fechado, ou seja, seqüências fracamente convergentes em  $U$  têm limites pertencendo ao mesmo conjunto  $U$ .*

Um exemplo importante no qual utilizamos as idéias de convergência fracas é aquele no qual tomamos  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e assumimos  $1 \leq p < \infty$ . Então

$$\text{o espaço dual de } X = L^p(U) \text{ é } X^* = L^q(U),$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Mais precisamente, cada funcional linear limitado definido em  $L^p(U)$  pode ser representado como

$$f \mapsto \int_U g(x) f(x) dx$$



para alguma  $g \in L^q(U)$ . Daí

$$f_k \rightharpoonup f \text{ em } L^p(U)$$

significa

$$\int_U g(x) f_k(x) dx \rightarrow \int_U g(x) f(x) dx, \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall g \in L^q(U). \quad (3.1)$$

Em particular, o Teorema 3.2 então nos assegura que podemos extrair de uma seqüência limitada em  $L^p(U)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) uma seqüência *fracamente* convergente, isto é, uma seqüência que satisfaz (3.1). Este úm importante resultado de compacidade, mas notemos muito cuidadosamente que a convergência (3.1) não implica que  $f_k \rightarrow f$  pontualmente ou em quase toda parte.

**Definição 3.4** *Sejam  $X, Y$  dois espaços normados e  $f : X \rightarrow Y$  um operador linear. Dizemos que o operador  $f$  é compacto se  $\overline{f(A)}$  for compacto em  $Y$  para todo conjunto  $A \subset X$  limitado. (Um conjunto limitado num espaço normado é aquele o qual é contido na bola  $B_R(0)$  para algum  $R > 0$ .)  $f$  é completamente contínuo se for contínuo e compacto.  $f$  é limitado se  $f(A)$  for limitado em  $Y$  para todo  $A \subset X$  limitado.*

Todo operador compacto é limitado. Assim, todo operador linear compacto é completamente contínuo.

**Definição 3.5** *Dizemos que um espaço normado  $X$  é imerso num espaço normado  $Y$ , denotado por  $X \hookrightarrow Y$ , se*

1.  $X$  é um subespaço vetorial de  $Y$ ;
2. o operador identidade  $I : X \rightarrow Y$  é contínuo.

**Definição 3.6** *Dizemos que  $X$  é compactamente imerso em  $Y$ , denotado por  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ , se o operador de imersão  $I$  for compacto.*

# B

## Convolução e Suavização

Neste apêndice nós introduzimos ferramentas que nos permitirão construir aproximações suaves para funções dadas. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e para cada  $h > 0$ , definamos os conjuntos

$$\Omega_h := \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > h\}.$$

Consideremos a função  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

onde  $C > 0$  é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1.$$

Para cada  $h > 0$ , definimos

$$\eta_h(x) := \frac{1}{h^n} \eta\left(\frac{x}{h}\right).$$

Nós chamamos  $\eta$  o *núcleo suavizante padrão*. As funções  $\eta_h$  são  $C^\infty$  e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_h(x) dx = 1, \quad \text{supp}(\eta_h) \subset \{x; |x| < h\}.$$

**Definição 1.1** Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente integrável, definimos sua **regularização** como

$$f_h := \eta_h * f \quad \text{em } \Omega_h.$$

Isto é,

$$f_h(x) = \int_{\Omega} \eta_h(x-y)f(y) dy = \int_{|y|<h} \eta_h(x-y)f(y) dy$$

para  $x \in \Omega_h$ .

**Teorema 1.2** (Propriedades das regularizantes)

1.  $f_h \in C^\infty(\Omega_h)$ ;
2.  $f_h \rightarrow f$  q.t.p. quando  $h \rightarrow 0$ ;
3. Se  $f \in C(\Omega)$ , então  $f_h \rightarrow f$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $\Omega$ ;
4. Se  $1 \leq p < \infty$ , e  $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ , então  $f_h \rightarrow f$  em  $L^p_{loc}$ .

# C

## Apontamentos de Espaços de Sobolev

Neste apêndice damos algumas definições e resultados sobre os Espaços de Sobolev e Teoria das Distribuições, que são utilizados neste trabalho.

### 1 Derivadas Generalizadas (Fracas)

Antes de dar o conceito de derivada generalizada ou fraca, introduzimos alguns conceitos básicos e algumas notações, que são dadas assumindo que estamos trabalhando num conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mensurável no sentido de Lebesgue com interior não-vazio, ou seja, consideramos um domínio  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$ :

Um *multi-índice*, denotado por  $\alpha$ , é uma n-upla de números inteiros não-negativos  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . O comprimento de  $\alpha$  é dado por

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Para  $\phi \in C^\infty(\Omega)$ , denotemos por

$$D^\alpha \phi, D_x^\alpha \phi, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \phi, \phi^{(\alpha)}, \text{ ou } \partial_x^\alpha \phi$$

a derivada parcial usual:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Dado um vetor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , nós definimos  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Note que se  $x$  for substituído formalmente por  $\partial/\partial x := (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ , então esta definição de  $x^\alpha$  é consistente com a definição anterior de  $(\partial/\partial x)^\alpha$ . Note que a *ordem* desta derivada é dada por  $|\alpha|$ .

A seguir, introduzimos o conceito de *suporte* de uma função definida em algum domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ :

**Definição 1.1** Dada uma função  $u$ , definimos o suporte de  $u$  como o fecho do conjunto

$$\text{supp}(u) = \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}.$$

Se  $\text{supp}(x)$  for um conjunto compacto (*i.e.*, se for limitado) e se for um subconjunto do interior de  $\Omega$ , então dizemos que  $u$  possui suporte compacto em  $\Omega$ . Com o intuito de estender a função para todo o  $\mathbb{R}^n$ , é natural defini-la como sendo zero em  $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(x)$ . Quando  $\Omega$  é um conjunto limitado, é equivalente dizer que  $u$  se anula numa vizinhança da fronteira de  $\Omega$  (denotada por  $\partial\Omega$ ).

**Definição 1.2** *Seja  $\Omega$  um domínio no  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  ou  $C_0^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções  $C^\infty(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$ .*

O conjunto  $\mathcal{D}(\Omega)$  definido acima é não-vazio para todo conjunto  $\Omega$  com interior não-vazio, fato este verificado ao considerarmos translações e mudanças de escala convenientes da função  $\eta$  definida no apêndice anterior.

Nós usamos o espaço  $\mathcal{D}$  para estender a noção de derivada para uma classe de funções maiores que  $C^\infty$ , mas antes disso introduzimos um outro conceito:

**Definição 1.3** *Dado um domínio  $\Omega$ , o conjunto das funções localmente integráveis é denotado por*

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{f; f \in L^1(K) \forall K \subset\subset \Omega\},$$

onde  $K \subset\subset \Omega$  significa inclusão forte:  $K$  é compacto e subconjunto do interior de  $\Omega$ .

Finalmente, nós apresentamos a nova definição de derivada:

**Definição 1.4** *Dizemos que uma função  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  dada possui uma derivada fraca, denotada por  $D_w^\alpha f$ , se existe uma função  $g \in L_{loc}^1(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\phi^{(\alpha)}(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando a função a ser derivada fracamente é suficientemente regular, as derivadas generalizadas e usuais coincidem, motivo pelo qual nós ignoramos as diferenças entre os dois conceitos de derivada, ou seja, consideramos em geral derivação generalizada mas utilizamos as propriedades clássicas de derivadas quando for possível e oportuno.

A seguir enunciamos um teorema que útil para provar a existência da função auxiliar  $\eta(x)$  utilizada neste trabalho (*cf.* Capítulo 1):

**Teorema 1.5** *Sejam  $K, F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  e  $F$  disjuntos, sendo  $K$  compacto e  $F$  fechado. Então existe uma função  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  tal que  $\phi(x) = 1$  em  $K$  e  $\phi(x) = 0$  em  $F$ .*

## 2 Normas de Sobolev e Espaços Associados

Utilizando a noção de derivada fraca, nós podemos generalizar as normas e espaços de Lebesgue incluindo esta nova noção.

**Definição 2.1** *Sejam  $k$  um número inteiro não-negativo, e  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Suponha que as derivadas fracas  $D_w^\alpha f$  existam para todo  $|\alpha| \leq k$ . Definimos a Norma de Sobolev como*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

no caso  $1 \leq p < \infty$ , e

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Deste modo, nós definimos os Espaços de Sobolev como

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega); \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty\}.$$

Os Espaços de Sobolev estão relacionados a outros espaços de funções sob condições especiais. Por exemplo, relembrando a *norma Lipschitz*

$$\|f\|_{Lip(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|; x, y \in \Omega, x \neq y \right\},$$

e o espaço correspondente das *Funções Lipschitz*

$$Lip(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega); \|f\|_{Lip(\Omega)} < \infty\}.$$

Então temos que  $Lip(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega)$  com normas equivalentes, no caso de  $\Omega$  for dotado de alguma regularidade (e.g. convexidade).

No caso unidimensional ( $n = 1$ ), o espaço  $W^{1,1}(\Omega)$  pode ser caracterizado como o espaço das *funções absolutamente contínuas* num intervalo  $\Omega$ .

É fácil ver que  $\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  é uma norma.

**Teorema 2.2** *O Espaço de Sobolev é um Espaço de Banach, reflexivo para  $1 < p < \infty$ .*

Há uma outra definição para o Espaço de Sobolev, útil em alguns casos. Ao considerarmos o conjunto

$$C_B^\infty := C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega),$$

podemos definir o Espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  como o fecho de  $C_B^\infty$  na norma  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ , valendo então o seguinte

**Teorema 2.3** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto qualquer. Então  $C_B^\infty$  é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ .*

*Ao considerarmos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado, podemos provar que  $C_0^\infty(\Omega)$  não é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ . Denotemos então por  $W_0^{k,p}(\Omega)$  o espaço obtido através do complemento de  $C_0^\infty(\Omega)$  na norma  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ .*

Para encerrar esta seção, vamos enunciar um resultado de regularidade para a parte positiva de uma função em  $W^{1,p}(\Omega)$ :

**Teorema 2.4** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $\text{máx}(u, 0) \in W^{1,p}(\Omega)$  e, para  $1 \leq i \leq n$*

$$[\text{máx}(u, 0)]_{x_i} = \begin{cases} u_{x_i} & \text{em } \{x \in \Omega; u(x) > 0\} \\ 0 & \text{em } \{x \in \Omega; u(x) \leq 0\} \end{cases}$$

*no sentido das distribuições.*

### 3 Imersões Compactas de $W^{k,p}(\Omega)$

Muitas propriedades dos Espaços de Sobolev definidos num domínio  $\Omega$  e, em particular as propriedades de imersão destes espaços, dependem das propriedades de regularidade de  $\Omega$ . Tais propriedades são expressas através de condições geométricas que são ou não satisfeitas por um domínio dado. Nós especificamos algumas destas condições abaixo para em seguida enunciar o Teorema de Rellich-Kondrachov, que dá condições de para que os Espaços de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  possam ser imersos compactamente em outros espaços de funções.

**Definição 3.1** *Dado um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , uma bola aberta  $B_1$  centrada em  $x$ , e uma bola aberta  $B_2$  que não contém  $x$ , dizemos que o conjunto*

$$C_x := B_1 \cap \{x + \lambda(y - x); y \in B_2, \lambda > 0\}$$

*é um cone finito em  $\mathbb{R}^n$  possuindo vértice em  $x$ . Denotemos também por*

$$x + C_0 := \{x + y; y \in C_0\}$$

*o cone finito com vértice em  $x$  obtido via translação paralela de um cone finito  $C_0$  com vértice na origem.*

**Definição 3.2** *Dizemos que uma cobertura aberta  $\mathcal{O}$  de um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é localmente finita se qualquer subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^n$  tiver interseção com uma quantidade finita de elementos de  $\mathcal{O}$ . Tais coleções localmente finitas de conjuntos devem ser enumeráveis, logo podem ser listados numa seqüência.*

Se  $S$  for um fechado, então qualquer cobertura aberta de  $S$  possui uma subcobertura localmente finita.

Nas definições a seguir, consideramos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado:

**Definição 3.3** Dizemos que  $\Omega$  possui a propriedade do cone se existe um cone finito  $C$  tal que cada ponto  $x \in \Omega$  é o vértice de um cone finito  $C_x$  contido em  $\Omega$  e congruente a  $C$ , ou seja,  $C_x$  é obtido através de  $C$  por movimento rígido.

**Definição 3.4** Dizemos que  $\Omega$  possui uma fronteira (localmente) Lipschitz se cada ponto  $x \in \partial\Omega$  possui uma vizinhança  $U_x$  tal que  $\partial(\Omega \cap U_x)$  é o gráfico de uma função Lipschitz, num sistema de coordenadas conveniente.

**Definição 3.5** Se  $0 < \lambda \leq 1$ , nós definimos  $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$  como o subespaço de  $C^m(\bar{\Omega})$  que consiste das funções  $\phi$  para as quais, para  $0 \leq |\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha \phi$  satisfaz uma condição de Hölder de expoente  $\lambda$  em  $\Omega$ , ou seja, existe uma constante  $K$  tal que

$$|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)| \leq K|x - y|^\lambda, \quad x, y \in \Omega.$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$  é um Espaço de Banach com norma dada por

$$\|\phi\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|\phi\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)|}{|x - y|^\lambda}$$

Agora nós sumarizamos as várias imersões compactas de  $W^{k,p}(\Omega)$  no seguinte teorema.

**Teorema 3.6** (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Sejam  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_0$  um subdomínio limitado de  $\Omega$ , e  $\Omega_0^m$  a interseção de  $\Omega_0$  com um hiperplano de  $m$  dimensões do  $\mathbb{R}^n$ . Sejam  $j, k$  inteiros, com  $j \geq 0, m \geq 1$ , e seja  $1 \leq p < \infty$ .*

1. *Se  $\Omega$  possui a propriedade do cone e  $kp \leq n$ , então as seguintes imersões são compactas:*

$$W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^m) \quad \text{se } 0 < n - kp < m \leq n \text{ e} \tag{3.1}$$

$$1 \leq q < mp/(n - kp),$$

$$W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^m) \quad \text{se } n = kp, 1 \leq m \leq n \text{ e} \tag{3.2}$$

$$1 \leq q < \infty.$$



2. Se  $\Omega$  possui a propriedade do cone e  $kp > n$ , então as seguintes imersões são compactas:

$$W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j, \quad (3.3)$$

$$W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^m) \quad \text{se } 1 \leq q \leq \infty. \quad (3.4)$$

3. Se  $\Omega$  possui fronteira localmente Lipschitz, então as seguintes imersões são compactas:

$$W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}_0) \quad \text{se } kp > n, \quad (3.5)$$

$$W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0) \quad \text{se } n > kp \geq (k-1)p \text{ e} \quad (3.6)$$

$$0 < \lambda < k - (n/p).$$

4. Se  $\Omega$  é um domínio arbitrário do  $\mathbb{R}^n$ , então todas as imersões (3.1)-(3.6) são válidas se  $W^{k,p}(\Omega)$  é substituído por  $W_0^{k,p}(\Omega)$ .

## 4 Traços de Funções em $W^{k,p}(\Omega)$

No estudo de problemas de valores de fronteira para operadores diferenciais parciais definidos num domínio  $\Omega$ , é importante determinar, em algum sentido, valores de fronteira para funções em  $W^{k,p}(\Omega)$ , que é o objetivo do próximo

**Teorema 4.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz contínua,  $k \geq 1$  um inteiro e  $p \in [1, +\infty)$ . Então as seguintes proposições são verdadeiras:*

1. Se  $kp < n$  e  $1 \leq q \leq (n-1)p/(n-kp)$ , então existe uma única aplicação  $\gamma_0 : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$  linear, contínua tal que se  $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  então

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}.$$

Se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , nós chamamos  $\gamma_0 u$  o traço (de ordem 0) de  $u$  em  $\partial\Omega$ ; se  $p > 1$ , então  $\gamma_0$  é compacto;

2. Se  $kp = n$  então (1) vale para  $q \geq 1$  arbitrário;

3. Se  $kp > n$ , então o traço  $\gamma_0 u$  de  $u \in W^{k,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$  é a restrição clássica;

4.  $\overline{\gamma_0(W^{1,p}(\Omega))} = L^p(\partial\Omega)$ .