

O TEOREMA DE ENUMERAÇÃO DE PÓLYA,
GENERALIZAÇÕES E APLICAÇÕES

por
Eduardo Bovo

2 0 0 5

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecario: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Bovo, Eduardo

B669t O teorema de enumeração de Pólya, generalizações e aplicações / --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problemas de enumeração combinatória. 2. Grupos de
permutação. 3. Funções geradoras . I. Santos, José Plínio de Oliveira. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Pólya's enumeration theorem, generalizations and applications.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Combinatorial enumeration problems. 2.
Permutation groups. 3. Generating functions.

Área de concentração: Combinatória enumerativa

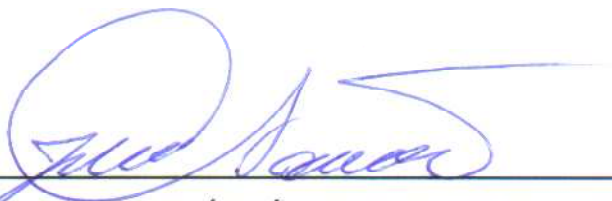
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IME-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Mondek (UFMS)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IME-UNICAMP)

Data da defesa: 29/04/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de abril de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof. (a). Dr (a). PAULO MONDEK



Prof. (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO

Abstract

In this dissertation we present algebraic, analytic and combinatorial results that are used to prove Polya's Enumeration Theorem. Applications to counting patterns (graphs, colourings, permutations, etc.) are given. This classical Theorem has its foundations on the theory of groups and uses, mainly, the concept of generating functions which allows great generality and computability of results. At the end some generalizations of the main theorem are given including applications and, also, an important probabilistic interpretation.

Resumo

Neste trabalho são desenvolvidos conceitos algébricos, analíticos e combinatórios que culminam no Teorema de Enumeração de Polya: bem como são fornecidas muitas de suas aplicações em enumeração de padrões (grafos, colorações geométricas, tipos de permutações, etc.). Tal teorema clássico, que tem suas bases em Teoria dos Grupos, utiliza fundamentalmente o conceito de funções geradoras, o que permite grande generalidade e computabilidade de resultados. Finalmente são apresentadas algumas generalizações do resultado principal, aplicações destas e também uma importante interpretação probabilística.

SUMÁRIO

RESUMO	3
CAPÍTULO 1. DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES	4
1.1. Grupos de Simetria	5
1.2. Anel de séries de potências formais com coeficientes complexos	8
1.3. Partições de Inteiros	11
CAPÍTULO 2. GRUPOS DE PERMUTAÇÕES	13
2.1. Representação por ciclos disjuntos	13
2.2. Ordens de Permutações	15
2.3. Números de Stirling	16
CAPÍTULO 3. ÍNDICE DE CICLOS	20
3.1. Tipo cíclico, Índice de ciclos e partições de Inteiros	20
3.2. A função geradora para o índice de ciclos de S_n e aplicações	27
3.3. Interpretação probabilística do Índice de Ciclos de S_n	31
CAPÍTULO 4. AÇÃO DE GRUPOS E COLORAÇÕES	35
4.1. Introdução	35
4.2. Ação de grupos	37
4.3. Colorações e ações de grupos	38
CAPÍTULO 5. ÓRBITAS E ESTABILIZADORES	41
5.1. Órbitas e relações de equivalência	41
5.2. Estabilizadores	42
5.3. Objetos rotulados e não-rotulados	46
5.4. O Lema de Burnside	48
5.5. Aplicações do Lema de Burnside	50
CAPÍTULO 6. O TEOREMA DE ENUMERAÇÃO DE PÓLYA	54
6.1. Introdução	54
6.2. Pesos de colorações, enumerador de estoque e inventários	54
6.3. Demonstração do Teorema de Pólya e Corolários	58
6.4. Aplicações	61
6.5. Enumerando grafos	71
6.6. Generalizações e Aplicações	77
REFERÊNCIAS	80

Capítulo 1

DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo definimos conceitos e desenvolvemos vários resultados que permearão todo o trabalho.

Definição 1. (i) Dado $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, definimos $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$;

(ii) $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ isto é, o conjunto dos inteiros não-negativos;

(iii) Dados dois inteiros k_1, k_2 , denotamos seu máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, respectivamente, por (k_1, k_2) e $[k_1, k_2]$;

(iv) A função maior inteiro é a que associa a cada número real x o maior inteiro menor do que ou igual a x . Denotamos este valor por $\lfloor x \rfloor$.

Definição 2. Dado $x \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ definimos as potências fatoriais crescentes e decrescentes, respectivamente por

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ x(x+1) \cdots (x+n-1), & \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ x(x-1) \cdots (x-n+1), & \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Observe que a segunda linha em cada definição é um produto vazio para $n = 0$, o que geralmente definimos como tendo valor igual a 1.

A título de curiosidade, pois neste trabalho não utilizaremos esta propriedade, estas expressões são chamadas de potências fatoriais, pois se Δ é o operador diferença, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, então

$$\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}.$$

1.1 Grupos de Simetria

Para a enumeração de diversos objetos combinatórios e geométricos, o conceito de grupo de simetrias é muito útil.

Definição 3. *Para as aplicações, entende-se por uma figura um conjunto F de pontos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .*

Definição 4. *Dada uma figura F , uma simetria de F é uma aplicação $f : F \rightarrow F$ com as seguintes propriedades*

- (i) *f é uma isometria*
- (ii) *f é sobrejetiva*

Pela definição dada, uma simetria é uma aplicação que leva a figura nela mesma e que preserva distâncias.

Exemplo 5. *Um triângulo equilátero possui 6 simetrias: 1 delas é a identidade, 2 são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ e 3 delas são reflexões através de suas medianas.*

Exemplo 6. *Um quadrado desenhado no plano possui 8 simetrias: 1 delas é a identidade, 3 são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$, 2 são reflexões através de suas mediatrizes e 2 são reflexões através de suas diagonais.*

Podemos utilizar números para marcar as figuras e assim relacionar os grupos de simetrias a grupos de permutações. Fazemos isso comumente associando números aos vértices de figuras, mas de uma maneira geral podemos também associar números a lados, diagonais, faces, ou outros elementos das figuras.

Na *Figura 1* abaixo, estão listadas as 6 simetrias do triângulo e as 8 do quadrado, bem como as permutações correspondentes de seus vértices numerados. Também denominamos as simetrias do quadrado para referência futura.

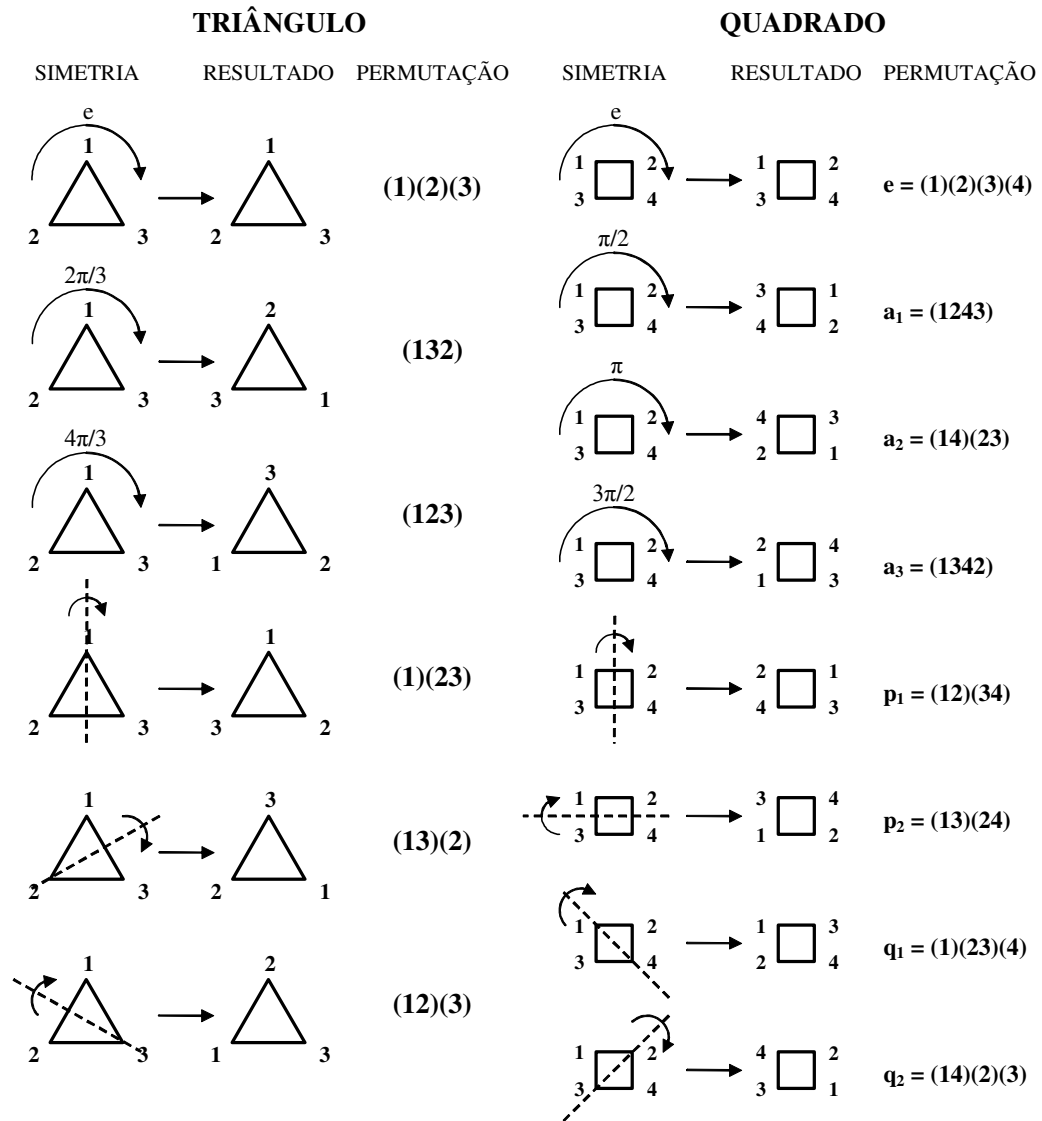


Figura 1: Simetrias do triângulo e do quadrado

Teorema 7. *Seja F uma figura. Então o conjunto de todas as simetrias de F , com a operação de composição de funções, forma um grupo.*

Dem. Seja G o conjunto de todas as simetrias de F . Verificamos a seguir que G munido da operação de composição de funções satisfaz os axiomas de grupo.

A identidade $I_F : F \rightarrow F$ é obviamente uma simetria, e portanto G possui um elemento identidade.

Denotando por $d(x, y)$ a distância entre os pontos x e y , suponha que $f, g \in G$. Inicialmente, temos que $f \circ g$ é uma isometria, pois

$$\begin{aligned} d(f(g(x)), f(g(y))) &= d(g(x), g(y)), \text{ pois } f \text{ é uma isometria} \\ &= d(x, y), \text{ pois } g \text{ é uma isometria} \end{aligned}$$

Como $(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$, e $f \circ g$ é uma isometria, segue então que $f \circ g$ é uma simetria e portanto está em G .

Toda simetria (isometria) f é injetora, e portanto possui uma inversa f^{-1} . Dados $z, w \in F$, como f é sobrejetiva também,

$$d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = d(f(f^{-1}(z)), f(f^{-1}(w))) = d(z, w)$$

Assim f^{-1} é uma simetria e portanto pertence a G .

A associatividade da composição de simetrias segue diretamente da associatividade de composição de funções. ■

Exemplo 8. Temos 3 diferentes tipos de eixos de rotação para um cubo, indicados na figura abaixo:

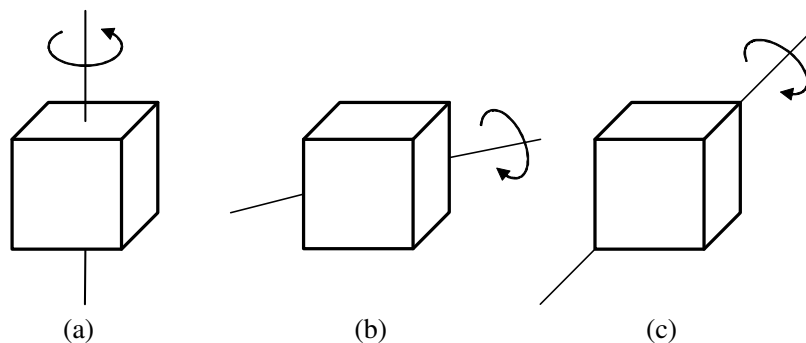


Figura 2: Os 3 tipos de eixos das simetrias rotacionais do cubo

- (a) Rotação em torno de um eixo que passa pelos centros de faces opostas;
- (b) Rotação em torno de um eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas;
- (c) Rotação em torno de um eixo que passa por vértices opostos.

Assim, as 24 simetrias rotacionais de um cubo são divididas em:

- 1) A identidade e ;
- 2) 3 rotações de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ pelo tipo de eixo indicado em (a);
- 3) 3 rotações de um ângulo de π pelo tipo de eixo indicado em (a);
- 4) 3 rotações de um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ pelo tipo de eixo indicado em (a);
- 5) 6 rotações de um ângulo de π pelo tipo de eixo indicado em (b);
- 6) 4 rotações de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ pelo tipo de eixo indicado em (c);
- 7) 4 rotações de um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$ pelo tipo de eixo indicado em (c).

1.2 Anel de séries de potências formais com coeficientes complexos

Os conceitos a seguir servirão de base para a manipulação de séries e produtos infinitos de séries de potências formais.

Entendemos por $\mathbb{C}[[x]] = \{\sum_{n \geq 0} a_n x^n : a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$ como o anel de séries de potências formais com respeito às operações usuais de adição e multiplicação. Consultar [3] para as definições básicas e demonstrações dos resultados sobre este anel.

Definição 9. Definimos a função $[x^\bullet]^\bullet : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{C}[[x]] \rightarrow \mathbb{C}$ que extrai o n -ésimo coeficiente de $f(x)$ por:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \in \mathbb{C}[[x]], \text{ colocamos } [x^n] f(x) = [x^n] \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m := a_n$$

É costume denotar o coeficiente $a_0 = [x^0] f(x)$ simplesmente por $f(0)$.

Abaixo está a definição do que entendemos por convergência de uma seqüência de séries de potências formais.

Definição 10. Se $\langle f_i(x) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em $\mathbb{C}[[x]]$ e $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, dizemos que $f_i(x)$ converge para $f(x)$ quando $i \rightarrow \infty$, denotando $f_i(x) \rightarrow f(x)$, se para todo

$n \in \mathbb{N}_0$, existir um número $\delta(n)$ suficientemente grande tal que

$$[x^n] f(x) = [x^n] f_i(x), \forall i \geq \delta(n)$$

Em outras palavras; à medida que fazemos i cada vez maior, eventualmente a sequência de coeficientes $\langle [x^n] f_i(x) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ torna-se constante e igual ao coeficiente $[x^n] f(x)$.

Definição 11. Dada $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $f(x) \neq 0$, definimos o grau de $f(x)$ como sendo

$$\deg f(x) = \min_{n \geq 0} \{n : a_n \neq 0\} = \min_{n \geq 0} \{n : [x^n] f(x) \neq 0\}$$

Observamos que para quaisquer $f, g \in \mathbb{C}[[x]]$ vale a seguinte identidade

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

De posse do conceito de grau de uma série de potências formais, podemos formular o conceito de convergência de séries e produtos infinitos pela seguinte proposição.

Proposição 12. (i) Seja $\langle f_i \rangle_{i \in \mathbb{N}_0}$ uma sequência em $\mathbb{C}[[x]]$. Então a série infinita $\sum_{i \geq 0} f_i(x)$ converge se, e somente se, $\lim_{i \rightarrow \infty} \deg f_i(x) = \infty$.

(ii) Seja $\langle f_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}[[x]]$ com $f_i(0) = 1, \forall i \in \mathbb{N}$. Então o produto infinito $\prod_{i \geq 1} f_i(x)$ converge se, e somente se, $\lim_{i \rightarrow \infty} \deg(f_i(x) - 1) = \infty$.

Dem. A demonstração é trivial. ■

É essencial observar que ao avaliarmos uma série convergente $\sum_{i \geq 0} f_i(x)$ (ou similarmente um produto $\prod_{i \geq 1} f_i(x)$), o coeficiente de x^n pode ser computado utilizando apenas processos *finitos*. Com efeito, se i é suficientemente grande, digamos $i > \delta(n)$, então $\deg f_i(x) > n$ é tal que

$$[x^n] \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) = [x^n] \sum_{i=0}^{\delta(n)} f_i(x)$$

onde a última expressão claramente envolve uma soma finita apenas.

A aplicação combinatória mais importante da noção de convergência acima é para a composição de séries de potências formais, definida a seguir.

Definição 13 (Composição de séries de potências). *Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, com $f(x) = \sum_{j \geq 0} a_j x^j$ e $g(0) = 0$. Definimos a composição $f(g(x))$ como sendo a série*

$$f(g(x)) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j g(x)^j \quad (1.1)$$

Proposição 14. *A composição de séries em (1.1) é bem definida.*

Dem. A série composta é bem definida uma vez que $\deg(g(x)^j) = j \deg g(x) \geq j$ (pois $g(0) = 0$), e podemos aplicar a **Proposição 12 (i)**. ■

Assim podemos ver porque uma expressão como $e^{1+x} = \sum_{j \geq 0} \frac{(1+x)^j}{j!}$ não faz sentido, pois não converge pela definição feita anteriormente. Por outro lado, uma expressão como e^{e^x-1} faz sentido, pois possui a forma $f(g(x))$ com

$$f(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \text{ e } g(x) = \sum_{j \geq 1} \frac{x^j}{j!}$$

Definição 15. *Se $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, definimos a derivada formal $\frac{df}{dx}$ (também denotada por $f'(x)$ ou $Df(x)$) como sendo a série de potências formais*

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

A proposição a seguir é imediata, para mais detalhes e outros resultados consulte [3].

Proposição 16. (i) $(f+g)' = f' + g'$

(ii) $(fg)' = f'g + fg'$

(iii) $f(g(x))' = g'(x) f'(g(x))$

Os conceitos de convergência para séries formais se estendem de maneira muito direta para séries de potências em várias variáveis. Várias noções algébricas e topológicas, assim como profundos resultados combinatórios sobre estes anéis podem ser encontrados em [7] e [8].

1.3 Partições de Inteiros

Uma partição do inteiro positivo n é uma soma

$$\begin{aligned} n &= k_{l_1} l_1 + k_{l_2} l_2 + \cdots + k_{l_s} l_s \\ \text{com } l_j, k_{l_j} &\in [n], l_1 < \cdots < l_s \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde temos k_{l_j} partes iguais a l_j para $j = 1, \dots, s$, $s \in \mathbb{N}$. Nesta notação estamos pensando o número de partes como função de seus tamanhos, $k_{l_j} = k(l_j)$

De maneira equivalente, uma partição do inteiro positivo n é uma soma

$$\begin{aligned} n &= k_1 + k_2 \cdot 2 + \cdots + k_n \cdot n \\ \text{com } k_n &\in \{0\} \cup [n] \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde temos k_j partes iguais a j para $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

É usual listar uma partição com as partes aparecendo em ordem não-crescente, adotamos o contrário aqui devido à facilidade de relacioná-las a ciclos de permutações.

O número de partições de um inteiro n é denotado por $p(n)$.

Abaixo consta uma tabela, a título de curiosidade, de alguns valores de $p(n)$.

n	$p(n)$	n	$p(n)$
1	1	10	42
2	2	20	627
3	3	30	5604
4	5	40	37338
5	7	50	204226
6	11	60	966467
7	15	70	4087968
8	22	80	15796476
9	30	90	56634173

Exemplo 17. De acordo com a definição das condições (1.2):

$$10 = 1 + 1 + 2 + 3 + 3, \text{ com } l_1 = 1, k_1 = 2, l_2 = 2, k_2 = 1, l_3 = 3, k_3 = 2$$

$$12 = 3 + 4 + 5, \text{ com } l_1 = 3, l_2 = 4, l_3 = 5, k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

De acordo com a definição das condições (1.3):

$$10 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3, \text{ com } k_1 = k_3 = 2, k_2 = 1, k_j = 0 \text{ se } j \notin [3]$$

$$12 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5, \text{ com } k_3 = k_4 = k_5 = 1, k_j = 0 \text{ se } j \notin \{3, 4, 5\}$$

Teorema 18. *O número de partições de n em exatamente k partes é dado pelo coeficiente de $z^k x^n$ na expansão do produto infinito*

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - zx^j}$$

Dem. Para uma demonstração ver [6, Pág. 560]. Observe que este produto infinito formal converge, pelas nossas definições. ■

Capítulo 2

GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

2.1 Representação por ciclos disjuntos

Denotamos o conjunto $S(X)$ como o conjunto de todas as permutações do conjunto X . $S(X)$ munido de composição de funções é um grupo e se $\#X = n$, isto é, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, temos então que $|S(X)| = n!$. Denota-se $S_n = S([n])$.

Um algoritmo simples ([2, Pág. 30]) fornece para uma permutação $\sigma \in S_n$ a seguinte representação por $t = t(\sigma)$ ciclos disjuntos,

$$\sigma = \left(j_1^{(1)} j_2^{(1)} \dots j_{l_1}^{(1)} \right) \left(j_1^{(2)} j_2^{(2)} \dots j_{l_2}^{(2)} \right) \dots \left(j_1^{(t)} j_2^{(t)} \dots j_{l_t}^{(t)} \right) \quad (2.1)$$

com $t \in \mathbb{N}$, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ particionado pela seguinte reunião disjunta

$$[n] = \bigcup_{i=1}^t \left\{ j_1^{(i)}, \dots, j_{l_i}^{(i)} \right\}$$

Esta representação é única a menos de permutações dos ciclos e permutações cíclicas dos elementos internos de cada ciclo. Portanto obtemos uma representação da permutação σ por meio de ciclos disjuntos. Denominamos um ciclo de comprimento l simplesmente de l -ciclo; se $l = 1$ dizemos que o ciclo é um *ponto fixo* e se $l = 2$ dizemos que o ciclo é uma *transposição*. Uma *involução* é uma permutação composta apenas de pontos fixos e transposições.

Observe que na representação (2.1) podemos ter ciclos disjuntos de mesmo comprimento. Assim os números l_1, \dots, l_t podem não ser todos distintos. Suponha, sem perda de generalidade, que no conjunto $\{l_1, \dots, l_t\}$ tenhamos apenas $s \leq t$ números distintos, e os redenominamos na ordem crescente $l_1 < l_2 < \dots < l_s$. Conseqüentemente, podemos afirmar que existem k_{l_1} ciclos de comprimento l_1 , k_{l_2} ciclos de comprimento l_2 , ..., k_{l_s} ciclos de comprimento l_s ; onde $k_{l_j}, l_j \in [n]$ para $j = 1, 2, \dots, s$.

Desta forma, podemos concluir que para toda $\sigma \in S_n$ fixada, temos a unicidade dos números $s = s(\sigma)$, $l_j = l_j(\sigma)$ e $k_{l_j}(\sigma)$, onde $j = 1, 2, \dots, s$.

De maneira semelhante, podemos tomar $l_1 = 1, l_2 = 2, \dots, l_n = n$ e fazer $k_j = 0$, caso não tenhamos ciclos de comprimento j . Claramente os inteiros não-negativos k_1, k_2, \dots, k_n são únicos por esta definição.

Formalizamos também para permutações a notação já adotada anteriormente para partições.

Definição 19. Dada $\sigma \in S_n$, definimos

- (i) $k_i = k_i(\sigma) :=$ o número de ciclos de σ com comprimento i ;
- (ii) $k = k(\sigma) :=$ o número total de ciclos de σ .

Observe então que, de acordo com a representação (2.1), temos verificadas as equações $n = \sum_{i \in [n]} i k_i(\sigma)$ e $k = k(\sigma) = \sum_{i \in [n]} k_i(\sigma)$.

Proposição 20. O sinal de uma permutação $\sigma \in S_n$ é dado pela fórmula

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k(\sigma)}$$

Dem. Em qualquer livro-texto básico de grupos podemos encontrar o fato de que um (e apenas um, módulo a identidade $\text{sgn}(\sigma \circ \delta) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\delta)$) sinal do conjunto $\{+1, -1\}$ está bem definido para toda permutação σ em S_n ; mais ainda, o sinal é $+1$ sse σ for produto de um número par de transposições, e -1 sse σ for um produto de um número ímpar de transposições. Como

$$(j_1 j_2 \dots j_l) = (j_1 j_l) \cdots (j_1 j_3) (j_1 j_2)$$

então um ciclo de comprimento l possui sinal -1 sse seu comprimento é par, o que mostra que

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i \text{ par}} (-1)^{k_i(\sigma)}$$

Como $n = \sum_i i k_i(\sigma)$ e $k = \sum_i k_i(\sigma)$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
 (-1)^{n-k(\sigma)} &= (-1)^{\sum_i (i-1)k_i(\sigma)} \\
 &= (-1)^{\sum_{i \text{ par}} (i-1)k_i(\sigma)} \cdot (-1)^{\sum_{i \text{ ímpar}} (i-1)k_i(\sigma)} \\
 &= \prod_{i \text{ par}} \left((-1)^{(i-1)}\right)^{k_i(\sigma)} \cdot \prod_{i \text{ ímpar}} \left((-1)^{(i-1)}\right)^{k_i(\sigma)} \\
 &= \prod_{i \text{ par}} (-1)^{k_i(\sigma)} \cdot \prod_{i \text{ ímpar}} 1^{k_i(\sigma)} \\
 &= \operatorname{sgn}(\sigma)
 \end{aligned}$$

e assim demonstramos nossa proposição. ■

2.2 Ordens de Permutações

Seja G um grupo finito. A ordem de um elemento g é (bem) definida como o menor inteiro positivo l tal que $g^l = e$. Isto implica que para qualquer múltiplo $m = rl$ de l , também temos a equação $g^m = e$.

Portanto, uma permutação que seja um l -ciclo possui ordem l e este l -ciclo elevado a qualquer múltiplo de l também resulta na identidade. Como os ciclos da representação de σ são disjuntos, para todo $l \in \mathbb{N}$

$$\sigma^l = \left(j_1^{(1)} j_2^{(1)} \dots j_{l_1}^{(1)}\right)^l \left(j_1^{(2)} j_2^{(2)} \dots j_{l_2}^{(2)}\right)^l \dots \left(j_1^{(t)} j_2^{(t)} \dots j_{l_t}^{(t)}\right)^l$$

(Aqui entende-se o expoente l como sendo a iteração l -ésima da permutação em S_n .)

Assim para encontrar a ordem de σ , precisa-se que todos os ciclos de sua representação, quando elevados a l , resultem na identidade, o que ocorrerá quando l for um múltiplo comum de l_1, \dots, l_t . Mas pela definição de ordem de um elemento, queremos o menor l que seja um múltiplo comum. Portanto a ordem de σ é igual a $\operatorname{mmc}[l_1, \dots, l_t]$.

É costume omitir da representação de σ os ciclos unitários, porém, será fundamental mais adiante, para a determinação do tipo cíclico de uma permutação, que

os ciclos unitários não sejam "esquecidos". Desta forma, ou devemos logo listar os ciclos unitários, ou ter em mente o grupo subjacente ao qual a permutação analisada pertence.

2.3 Números de Stirling

Temos 2 seqüências muito importantes na análise de permutações que definiremos a seguir e demonstraremos algumas de suas propriedades. Existe uma miríade de resultados e identidades envolvendo estas seqüências, e citamos o livro [9, Seção 6.1] como bom ponto de partida para um estudo deles.

Definição 21. (i) O número $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ de permutações de S_n com exatamente k ciclos disjuntos é chamado de número de Stirling de primeiro tipo. Em símbolos,

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \# \{ \sigma \in S_n : k(\sigma) = k \}$$

(ii) O número de Stirling do segundo tipo $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ é definido como o número de partições distintas do conjunto $[n]$ em k subconjuntos não-vazios.

A seguir estabelecemos as importantes relações de recorrência que estas duas seqüências satisfazem.

Lema 22. (i) Os números $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right], \quad n, k \in \mathbb{N}$$

com $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$ se $n \leq 0$ ou $k \leq 0$ exceto $c(0,0) = 1$;

(ii) Os números $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

com $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ se $n \leq 0$ ou $k \leq 0$ exceto $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$.

Dem. (i) Aqui definimos $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, e observamos que uma permutação em S_n deve ter pelo menos um ciclo, o que implica na igualdade $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $n = 1$, então por estas observações temos trivialmente a recorrência acima satisfeita. Também definimos por conveniência $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ quando $n \geq 0, k < 0$.

Seja $n > 1$, e considere uma permutação $\sigma \in S_{n-1}$ com k ciclos. Podemos inserir o símbolo n depois de qualquer um dos números $1, \dots, n-1$ na decomposição de σ por ciclos disjuntos de $n-1$ maneiras. O resultado é uma decomposição em ciclos disjuntos de uma permutação $\sigma' \in S_n$ com k ciclos, no qual n aparece num ciclo de comprimento maior ou igual a 2. Portanto existem $(n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ permutações $\sigma' \in S_n$ com k ciclos para as quais $\sigma'(n) \neq n$.

Por outro lado, se escolhermos uma permutação $\sigma \in S_{n-1}$ com $k-1$ ciclos, podemos estendê-la para uma permutação $\sigma' \in S_n$ com k ciclos satisfazendo $\sigma(n) = n$, definindo

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \text{se } i \in [n-1] \\ n, & \text{se } i = n \end{cases}$$

Portanto existem $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ permutações $\sigma' \in S_n$ com k ciclos para as quais $\sigma'(n) = n$, concluindo a demonstração.

(ii) Por uma argumentação e definições semelhantes às feitas inicialmente em (i), podemos concluir que $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 0$ se $n \leq 0$ ou $k \leq 0$ exceto $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1$.

Considere um conjunto com $n > 1$ objetos particionado em k subconjuntos (não-vazios). Podemos colocar o último objeto tanto num subconjunto unitário de $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$ maneiras, ou podemos colocá-lo junto de outro subconjunto dos outros $n-1$ objetos anteriores. Existem $k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$ possibilidades para este último caso. Com efeito, cada uma das $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$ maneiras de distribuirmos os primeiro $n-1$ objetos em k subconjuntos, nos fornece k subconjuntos aos quais o n -ésimo objeto pode se unir. E assim concluímos a demonstração. ■

Teorema 23. *Seja x uma variável e $n \geq 0$ fixo. Então*

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1) \cdots (x+n-1) = x^{\overline{n}}$$

e

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x(x-1) \cdots (x-k-1) = x^n$$

Dem. Definimos $F_n(x) = x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n f(n, k) x^k$. Claramente $f(0, 0) = 1$ pois $x^{\overline{0}} = 1$, e $f(n, k) = 0$ se $n < 0$ ou $k < 0$. Mais ainda, como $F_n(x) = (x+n-1)F_{n-1}(x)$, temos

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n f(n-1, k-1) x^k + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} f(n-1, k) x^k$$

e isto implica que

$$f(n, k) = (n-1)f(n-1, k) + f(n-1, k-1)$$

Assim $f(n, k)$ satisfaz a mesma relação de recorrência e condições iniciais de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, e portanto são idênticas.

De maneira completamente análoga podemos derivar a segunda identidade. ■

Estas analogias observadas entre os números de Stirling de primeiro e segundo tipo não são coincidências, e o teorema a seguir pode ser demonstrado facilmente.

Teorema 24. (i) $x^n = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$

(ii) *Os números de Stirling de primeiro e segundo tipo são de certa forma inversos um do outro, satisfazendo a fórmula de inversão*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \delta_{mn},$$

onde δ_{mn} é o símbolo δ de Kronecker.

(iii) *Sejam $D = \frac{d}{dz}$, $\vartheta = zD$ operadores diferenciais. Então temos as seguintes*

fórmulas operacionais que os relacionam

$$\begin{aligned}\vartheta^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} z^k D^k \\ z^n D^n &= \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} \vartheta^k\end{aligned}$$

Dem. Ver [9, Seção 6.1] para (i) e (ii), e o exercício 6.13 do mesmo livro para (iii).

■

Capítulo 3

ÍNDICE DE CICLOS

3.1 Tipo cíclico, Índice de ciclos e partições de Inteiros

A definição a seguir captura a estrutura cíclica de uma permutação, e será muito importante nos desenvolvimentos posteriores.

De acordo com a representação (2.1) por ciclos disjuntos, definimos

Definição 25. O tipo cíclico de $\sigma \in S_n$ é o monômio $TC(\sigma)$ determinado pelo produto

$$TC(\sigma) = \prod_{i=1}^t x_{l_i} \quad (3.1)$$

Definição 26. Se G é um grupo de permutações, o índice de ciclos de G , denotado $Z(G)$, é definido como sendo o polinômio

$$Z(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} TC(\sigma)$$

A soma dos coeficientes do polinômio acima deve ser igual a 1, uma vez que temos $|G|$ termos monomiais com coeficientes unitários na soma, divididos pelo fator $|G|$.

Pelas observações feitas na seção 2.1, temos que o tipo cíclico de σ toma as seguintes formas, mais intuitivas e explícitas,

$$TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} x_{l_2}^{k_{l_2}} \cdots x_{l_s}^{k_{l_s}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

onde cada natural k_{l_j} é o número de ciclos de comprimento l_j para $j = 1, \dots, s$ e $k(\sigma) = \sum_j k_{l_j}$ é o total de ciclos. Na segunda representação do tipo cíclico, temos k_j como sendo o número de ciclos de comprimento j , podendo algum k_j eventualmente ser nulo. É também muito útil representar o tipo cíclico como o vetor (k_1, k_2, \dots, k_n) .

Como $\sigma \in S_n$ é uma permutação dos números de $[n]$, devemos ter n símbolos distribuídos entre todos os ciclos de sua representação. Isto implica que $k_{l_1}l_1 + k_{l_2}l_2 + \dots + k_{l_s}l_s = n$, e pela ordenação $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_s \leq n$, e definições de k_{l_j} , temos então uma partição do inteiro $n = k_{l_1}l_1 + \dots + k_{l_s}l_s$.

Reciprocamente, se temos uma partição do inteiro n dada por

$$n = k_{l_1}l_1 + k_{l_2}l_2 + \dots + k_{l_s}l_s \\ \text{com } l_j, k_{l_j} \in [n], l_1 < \dots < l_s$$

onde temos k_{l_j} partes iguais a l_j para $j = 1, \dots, s$, então é possível encontrar uma permutação $\sigma \in S_n$ com tipo cíclico $TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} x_{l_2}^{k_{l_2}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$. Na verdade podem existir muitas permutações em S_n com este tipo cíclico dado, e o teorema a seguir nos diz quantas são. A demonstração abaixo é devido a Cauchy e foi adaptada da referência [14, Págs. 71-72].

Teorema 27. *Seja uma partição de n , dada por $n = k_{l_1}l_1 + k_{l_2}l_2 + \dots + k_{l_s}l_s$, com $l_j, k_{l_j} \in [n]$ e $l_1 < l_2 < \dots < l_s$. Então existem*

$$\frac{n!}{l_1^{k_{l_1}} k_{l_1}! l_2^{k_{l_2}} k_{l_2}! \dots l_s^{k_{l_s}} k_{l_s}!}$$

permutações $\sigma \in S_n$ com tipo cíclico $TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} x_{l_2}^{k_{l_2}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$. De forma mais simplificada; dado um tipo cíclico $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ temos

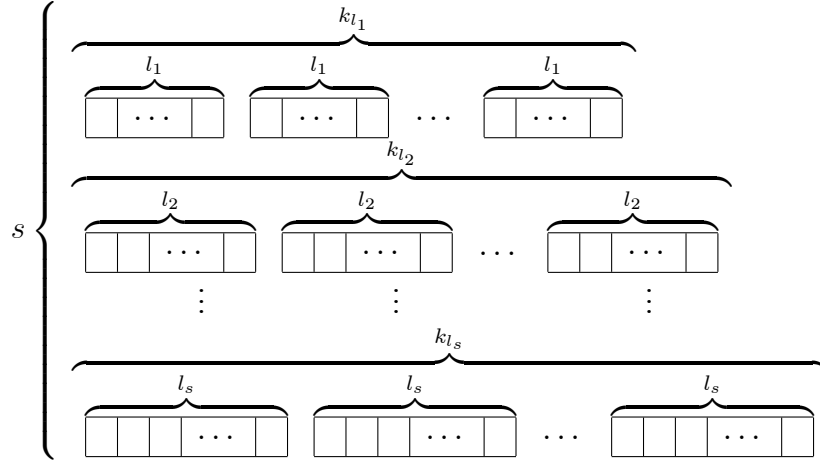
$$h(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!}$$

permutações em S_n com este tipo cíclico.

Dem. Seja h o número de permutações $\sigma \in S_n$ satisfazendo $TC(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} x_{l_2}^{k_{l_2}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$, isto é, contendo k_{l_j} ciclos de comprimento l_j para $j = 1, \dots, s$.

Vamos considerar as permutações com o tipo cíclico desejado, decompostas em seus ciclos componentes. Primeiro listamos os k_{l_1} ciclos de comprimento l_1 e representamos cada ciclo por l_1 quadrados, depois listamos os k_{l_2} ciclos de comprimento l_2 ,

e representamos cada ciclo por l_2 quadrados e assim sucessivamente, até finalmente listarmos os k_{l_s} ciclos de comprimento l_s e seus quadrados.



Sabemos que o total de quadrados do diagrama acima é n , pois trata-se de uma permutação em S_n . Então procedemos preenchendo arbitrariamente os n símbolos dentro dos n quadrados, isto é, vamos inserir as $n!$ permutações dos números $[n]$ dentro dos n quadrados. Assim obtemos uma aplicação do conjunto das $n!$ permutações no conjunto das permutações com o tipo cíclico determinado acima.

Claramente, ao preencher os quadrados, podemos ter mais de uma permutação determinando o mesmo resultado. Por exemplo, se $n = 8$, $TC(\sigma) = x_1 x_2^2 x_3$, ambos os preenchimentos abaixo resultam na mesma permutação $(4)(23)(15)(687)$:

4	2	3	5	1	7	6	8
4	1	5	3	2	8	7	6

Seja P uma das h permutações de S_n com o tipo cíclico fixado anteriormente. Como P possui k_{l_1} ciclos de comprimento l_1 , a fim de produzirmos P no preenchimento, suas k_{l_1} l_1 -uplas de elementos devem ser colocados nos k_{l_1} blocos de l_1 quadrados cada. Cada l_1 -upla pode ser colocada em qualquer ordem entre os k_{l_1} blocos, assim temos $k_{l_1}!$ maneiras de fazer isso. Cada um dos k_{l_1} blocos, pode ser rotacionado ciclicamente e isto pode ser feito de l_1 maneiras por bloco, pois seu comprimento é l_1 .

Assim temos $l_1^{k_{l_1}}$ possibilidades para as rotações cíclicas dos elementos dos blocos e portanto no total temos $k_{l_1}!l_1^{k_{l_1}}$ maneiras de obtermos os k_{l_1} ciclos de comprimento l_1 de P . O mesmo raciocínio pode ser aplicado aos demais ciclos de P , isto é, temos $k_{l_j}!l_j^{k_{l_j}}$ maneiras de obter os k_{l_j} ciclos de comprimento l_j para $j = 1, \dots, s$. Portanto, temos um total de

$$k_{l_1}!l_1^{k_{l_1}} k_{l_2}!l_2^{k_{l_2}} \dots k_{l_s}!l_s^{k_{l_s}}$$

permutações que quando colocadas nos quadrados geram os ciclos de P . Assim, se preencheremos todas as $n!$ permutações nos quadrados do diagrama, cada permutação com esse tipo cíclico é gerada exatamente o número de vezes indicado acima. Como temos, por definição, h permutações de S_n com este tipo cíclico, podemos concluir que

$$h \cdot k_{l_1}!l_1^{k_{l_1}} k_{l_2}!l_2^{k_{l_2}} \dots k_{l_s}!l_s^{k_{l_s}} = n!$$

de onde segue o resultado. ■

Corolário 28. *Existe uma correspondência biunívoca entre os tipos cíclicos dos elementos de S_n e as partições do inteiro n . Portanto, existem $p(n)$ diferentes tipos cíclicos para as permutações de S_n , onde $p(n)$ é o número de partições do inteiro n .*

Para encontrarmos a maior ordem que um elemento de S_n pode ter, por exemplo, uma maneira é procurar nas partições de $n = x_1 + \dots + x_s$, aquela que tem o maior valor para $mmc[x_1, \dots, x_s]$.

Os resultados a seguir relacionam o tipo cíclico à relação de conjugação em S_n .

Definição 29. *Duas permutações $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ são conjugadas se existir $h \in S_n$ tal que $\sigma_2 = h\sigma_1h^{-1}$*

Teorema 30. *Duas permutações possuem o mesmo tipo cíclico se, e somente se, elas são conjugadas.*

Dem. Suponha que para algum $h \in S_n$, $\sigma_2 = h\sigma_1 h^{-1}$. Seja $(x_1 x_2 \dots x_k)$ um ciclo de σ_1 , tal que $\sigma_1(x_i) = x_{i+1}$ para $i \in [k-1]$, e $\sigma_1(x_k) = x_1$. Seja $y_i = h(x_i)$ para $i \in [k]$. Então para $i \in [k-1]$, temos que

$$\sigma_2(y_i) = (h\sigma_1)(h^{-1}(y_i)) = (h\sigma_1)(x_i) = h(\sigma_1(x_i)) = h(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

e de maneira similar $\sigma_2(y_k) = y_1$. Portanto $(y_1 y_2 \dots y_k)$ é um ciclo de σ_2 . Assim obtemos uma decomposição em ciclos de σ_2 dos ciclos de σ_1 , substituindo cada ponto pela sua imagem por h . Desta forma o tipo cíclico é o mesmo para σ_1 e σ_2 .

Reciprocamente, suponha que σ_1 e σ_2 possuam o mesmo tipo cíclico. Calculamos a decomposição por ciclos de cada uma, e escrevemos a de σ_2 abaixo da de σ_1 , de tal forma que os ciclos de mesmo comprimento correspondam verticalmente. Agora seja h a permutação obtida pela aplicação que associa cada ponto da decomposição de σ_1 ao ponto verticalmente abaixo dele. Então $\sigma_2 = h\sigma_1 h^{-1}$ pelos mesmos cálculos acima. ■

O teorema abaixo fornece uma fórmula fechada para os coeficientes do índice de ciclos de S_n :

Teorema 31. *Temos a seguinte expressão geral para o índice de ciclos do grupo simétrico S_n*

$$\begin{aligned} Z(S_n) &= \sum_{\substack{k_{l_1} l_1 + \dots + k_{l_s} l_s = n \\ l_j, k_{l_j} \in [n]}} \frac{1}{l_1^{k_{l_1}} k_{l_1}! l_2^{k_{l_2}} k_{l_2}! \dots l_s^{k_{l_s}} k_{l_s}!} x_{l_1}^{k_{l_1}} x_{l_2}^{k_{l_2}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{k_1 + k_2 \cdot 2 + \dots + k_n \cdot n = n \\ k_j \in \{0\} \cup [n]}} \mathbf{h}(k_1, \dots, k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \end{aligned}$$

onde a soma é efetuada sobre todas as partições do inteiro n .

Dem. Este resultado sai diretamente do **Teorema 27** e da **Definição 26**, do índice de ciclos. Basta somar nos $p(n)$ diferentes tipos cíclicos possíveis para as permutações de S_n . ■

Corolário 32 (Identidade de Cauchy).

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=n \\ k_j \in \{0\} \cup [n]}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!} = 1$$

Dem. Pela observação feita na **Definição 26**, a soma dos coeficientes no **Teorema 31** deve ser 1. Isto conclui a demonstração. ■

Acima encontramos uma expressão para o índice de ciclos de S_n somando sobre as partições do inteiro n . A seguir demonstramos uma fórmula fechada para o índice de ciclos do grupo cíclico C_n , desta vez somando sobre os divisores de n . De posse desta última, também deduzimos uma expressão para o índice de ciclos do grupo diedral D_{2n} .

Lema 33. *O grupo C_n (cíclico de ordem n) contém para cada divisor d de n , $\phi(d)$ elementos de ordem d , onde ϕ é a função totiente de Euler. Cada um desses elementos possui n/d ciclos de comprimento d .*

Dem. Podemos identificar C_n com o grupo $(\mathbb{Z}_n, +_n) = (\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1})$. A ordem de uma classe \overline{m} , de congruência módulo n , é o menor inteiro positivo x tal que

$$x\overline{m} = \overbrace{\overline{m} +_n \overline{m} +_n \dots +_n \overline{m}}^{x \text{ somandos}} = \overline{0}$$

e esta igualdade ocorre se, e somente se, existir algum $y \in \mathbb{N}$ tal que

$$xm = ny = yn \tag{3.2}$$

Dividimos ambos os lados desta equação por (m, n) para obter

$$x \frac{m}{(m, n)} = y \frac{n}{(m, n)}$$

Como dividimos m e n pelo máximo de seus divisores comuns, temos

$$\left(\frac{m}{(m, n)}, \frac{n}{(m, n)} \right) = 1$$

e portanto

$$\frac{m}{(m, n)} | y \text{ e } \frac{n}{(m, n)} | x$$

o que significa que existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{m}{(m, n)} k = y \text{ e } \frac{n}{(m, n)} l = x \quad (3.3)$$

Assim, a menor solução positiva x de (3.2) é obtida colocando $l = 1$ em (3.3), a saber,

$$x = \frac{n}{(m, n)} \text{ e } y = \frac{m}{(m, n)}$$

e portanto a ordem de \overline{m} é $n / (m, n)$.

Além disso, dado um divisor d de n , desejamos saber quantas classes distintas \overline{m} possuem ordem $n / (m, n) = d$. Para um tal \overline{m} temos $m = (m, n) y$ onde y deve satisfazer $(y, d) = 1$. Temos $\phi(d)$ escolhas para y nestas condições, cada uma delas originando um único $m = ny/d$. Isso encerra a demonstração. ■

Teorema 34. *O índice de ciclos de C_n é dado por*

$$Z(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d}$$

onde a soma é efetuada nos divisores d de n .

Dem. Imediata a partir do **Lema 33** anterior e da definição do índice de ciclos. ■

Corolário 35. *O índice de ciclos do grupo diedral D_{2n} é dado por*

$$Z(D_{2n}) = \frac{1}{2} (Z(C_n) + R_n)$$

onde

$$R_n = \begin{cases} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2} \left(x_2^{\frac{n}{2}} + x_1^2 x_2^{\frac{(n-2)}{2}} \right), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Dem. O grupo diedral D_{2n} contém o subgrupo C_n mais n reflexões. Se $n \equiv 1 \pmod{2}$ então cada reflexão tem um ponto fixo e $\frac{(n-1)}{2}$ transposições (2-ciclos); enquanto que se $n \equiv 0 \pmod{2}$, temos $\frac{n}{2}$ reflexões formadas por $\frac{n}{2}$ transposições e $\frac{n}{2}$ reflexões formadas por 2 pontos fixos e $\frac{(n-2)}{2}$ transposições. Desta forma obtemos o resultado. ■

O índice de ciclos, apesar de caracterizar várias propriedades combinatórias de um grupo, não o caracteriza completamente em sua tábua de Cayley. Pólya forneceu um exemplo de 2 grupos não isomorfos com o mesmo índice de ciclos. Estes 2 grupos possuem ordem p^3 , ambos com a propriedade de que todos os seus elementos, exceto a identidade, possuem ordem p ; entretanto um deles é abeliano enquanto o outro é não-abeliano.

Este exemplo foi dado em [10, Pág. 176], mas podemos encontrar uma tradução da construção em [5, Pág. 37].

3.2 A função geradora para o índice de ciclos de S_n e aplicações

No teorema fundamental abaixo está a função geradora ordinária para o índice de ciclos de S_n , onde é conveniente definirmos $Z(S_0) = 1$. Esta função geradora, apesar da grande quantidade de informação que carrega, possui uma fórmula fechada muito elegante.

Teorema 36. *Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, então a função geradora ordinária para S_n , em série de potências formais é dada por*

$$C(\mathbf{x}, z) := \sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n; x_1, \dots, x_n) z^n = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j z^j}{j} \right)$$

Dem. Para a convergência do membro direito, primeiro observamos que

$$\exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j z^j}{j} \right) = f(g(z)),$$

$$\text{com } f(z) = \exp z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \text{ e } g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j z^j}{j}, \text{ com } g(0) = 0.$$

Assim temos pela **Proposição 14** que a composta é bem definida. Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n; x_1, \dots, x_n) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=n \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} z^n \\ &= \sum_{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots} \frac{x_1^{k_1} z^{k_1}}{1^{k_1} k_1!} \frac{x_2^{k_2} z^{2k_2}}{2^{k_2} k_2!} \frac{x_3^{k_3} z^{3k_3}}{3^{k_3} k_3!} \dots \\ &= \sum_{k_1 \geq 0} (x_1 z)^{k_1} \frac{1}{k_1!} \sum_{k_2 \geq 0} \left(\frac{x_2 z^2}{2} \right)^{k_2} \frac{1}{k_2!} \sum_{k_3 \geq 0} \left(\frac{x_3 z^3}{3} \right)^{k_3} \frac{1}{k_3!} \dots \\ &= e^{zx_1} e^{\frac{z^2 x_2}{2}} e^{\frac{z^3 x_3}{3}} \dots \\ &= \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j z^j}{j} \right) \end{aligned}$$

■

Apresentamos a seguir uma série de aplicações da função geradora obtida no **Teorema 36**.

Vale observar que todas as substituições abaixo estão em conforme com a existência da composta demonstrada na dedução da função geradora para $C(\mathbf{x}, z)$.

Corolário 37. *Podemos obter novamente a primeira parte do Teorema 23 pela função geradora de $C(\mathbf{x}, z)$, isto é,*

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x^{\bar{n}}$$

Dem. Se fizermos a substituição

$$x_1 = x_2 = \dots = x$$

no índice de ciclos de S_n , estaremos interessados em permutações de S_n que possuem $k(\sigma) = k_1 + \dots + k_n$ ciclos, independentemente de seus comprimentos. Em símbolos esta afirmação significa que

$$Z \left(S_n; \overbrace{x, \dots, x}^n \right) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Portanto, pelo **Teorema 36**,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \right) z^n &= \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x z^j}{j} \right) \\
 &= \exp \left(x \log \left(\frac{1}{1-z} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\log \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)^x \\
 &= \left(\frac{1}{1-z} \right)^x \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\overline{n}}}{n!} z^n
 \end{aligned}$$

onde a última passagem segue por uma aplicação do teorema binomial ver [11, Págs. 122-123] e **Definição 2**, da potência fatorial crescente. ■

Corolário 38. *O número $d(n, k)$ de permutações de S_n contendo exatamente k ciclos, nenhum dos quais é um ponto fixo, é dado pela função geradora*

$$\sum_{k=0}^n d(n, k) x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k x^{\overline{n-k}}$$

com a seguinte fórmula para $d(n, k)$

$$d(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} \begin{bmatrix} n-j \\ k-j \end{bmatrix}$$

Dem. De acordo com a definição de $d(n, k)$, vemos que este número é o coeficiente de x^k em

$$Z \left(S_n; 0, \overbrace{x, \dots, x}^{n-1} \right).$$

Assim, pelo **Teorema 36** e pela demonstração do **Corolário 37** temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n d(n, k) x^k \right) z^n &= \exp \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{x z^j}{j} \right) \\
&= \exp \left(x \left(\log \frac{1}{1-z} \right) - z \right) \\
&= \left(\frac{1}{1-z} \right)^x \exp(-xz) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k x^{n-k} \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

onde na última manipulação, multiplicamos duas funções geradoras exponenciais em séries de potências.

Obtemos a fórmula para $d(n, k)$, substituindo a expressão para função geradora x^{n-k} dos números de Stirling de primeiro tipo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n d(n, k) x^k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k} \left[\begin{matrix} n-k \\ j \end{matrix} \right] x^j \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^k \binom{n}{k} \left[\begin{matrix} n-k \\ j \end{matrix} \right] x^{j+k} \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\begin{matrix} n-k \\ j-k \end{matrix} \right] x^j \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{n}{k} \left[\begin{matrix} n-k \\ j-k \end{matrix} \right] x^j \\
&= \sum_{k'=0}^n \left(\sum_{j'=0}^{k'} (-1)^{j'} \binom{n}{j'} \left[\begin{matrix} n-j' \\ k'-j' \end{matrix} \right] \right) x^{k'}
\end{aligned}$$

onde na penúltima passagem invertemos a ordem dos somatórios e na última aplicamos as mudanças de variáveis mudas $j \rightarrow k'$ e $k \rightarrow j'$. Desta forma concluímos a demonstração. ■

Corolário 39. *Seja $m \in \mathbb{N}$, fixado. O número de permutações de S_n cuja m -ésima potência é a identidade possui como função geradora exponencial*

$$\exp \left(\sum_{d|m} \frac{x^d}{d} \right)$$

Dem. Segundo as observações feitas anteriormente, se $\sigma^m = e$, então todos os seus comprimentos de ciclos devem ser divisores de m . Desta forma, no índice de ciclos de S_n fazemos esta triagem colocando

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j|m \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e obtemos diretamente do **Teorema 36** a função geradora requerida. ■

Corolário 40. *O número de involuções t_n em S_n é dado pela função geradora*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t_n}{n!} x^n = e^{x + \frac{1}{2}x^2}$$

Dem. Basta tomar $m = 2$ no **Corolário 39** e observar que apenas a identidade e e transposições t satisfazem $t^2 = e$. ■

3.3 Interpretação probabilística do Índice de Ciclos de S_n

Como $n!$ é o número total de permutações de S_n e $\mathbf{h}(k_1, \dots, k_n)$ é o número delas que possui tipo cíclico $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, em vista do **Teorema 31**, podemos interpretar o índice de ciclos

$$Z(S_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k_1+k_2 \cdot 2 + \dots + k_n \cdot n = n \\ k_j \in \{0\} \cup [n]}} \left(\frac{1}{n!} \mathbf{h}(k_1, \dots, k_n) \right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

de forma probabilística, colocando $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$,

$$Z(S_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k_1+k_2 \cdot 2 + \dots + k_n \cdot n = n \\ k_j \in \{0\} \cup [n]}} \text{Prob}(\mathbf{k}, n) \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$$

onde $Prob(\mathbf{k}, n)$ é a probabilidade de que uma permutação de n símbolos possui o tipo cíclico \mathbf{k} .

A seguir demonstramos um lema elementar, que nos permitirá extrairmos informações analíticas da função geradora formal para o índice de ciclos de S_n .

Lema 41. *Seja $\sum_j b_j$ uma série convergente no sentido usual. Então na expansão em série de potências da função*

$$\frac{1}{1-z} \sum_j b_j z^j = \sum_n \alpha_n z^n$$

temos que $\lim_n \alpha_n$ existe e é igual a $\sum_j b_j$.

Dem. Por manipulação de séries de potências (ver [12, Pág. 37]), temos que α_n é a soma dos b_j para $j \leq n$. A última soma claramente aproxima o limite requerido. ■

Sejam $|z| < 1$ e T um conjunto (finito ou infinito) de inteiros positivos, com a propriedade que

$$\sum_{t \in T} \frac{1}{t} < \infty$$

Na função geradora $C(\mathbf{x}, z)$ colocamos todos $x_i = 1$ para todo $i \notin T$. Isto significa que não estaremos interessados nos comprimentos de ciclos que não estão no conjunto T . Os demais são arbitrários, e portanto

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} Z(S_n; x_1, \dots, x_n) z^n \\ &= \exp \left(\sum_{i \in T} x_i \frac{z^i}{i} + \sum_{i \notin T} \frac{z^i}{i} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{i \in T} \frac{(x_i - 1)}{i} z^i + \log \frac{1}{1-z} \right) \\ &= \frac{1}{1-z} \exp \left(\sum_{i \in T} \frac{(x_i - 1)}{i} z^i \right) \end{aligned}$$

Pelo **Lema 41**, escolhendo os x_i limitados para $i \in T$, temos que o coeficiente de z^n na última expressão acima se aproxima do limite

$$\exp \left(\sum_{i \in T} \frac{(x_i - 1)}{i} \right)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim temos provado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(\mathbf{k}, n)$ existe, e concluimos o seguinte resultado:

Teorema 42. *Seja T um conjunto de inteiros positivos tais que $\sum_{t \in T} \frac{1}{t}$ converge, e seja \mathbf{k} um vetor de tipo cíclico fixado. Então a probabilidade de que o tipo cíclico de uma permutação qualquer escolhida ao acaso, coincida com \mathbf{k} em todos os seus componentes cujos índices pertençam a T existe e é igual a*

$$e^{-(\sum_{t \in T} \frac{1}{t})} [\mathbf{x}^{\mathbf{k}}] \exp \left(\sum_{t \in T} \frac{x_t}{t} \right) = \frac{1}{\prod_{t \in T} \left(e^{\frac{1}{t}} t^{k_t} k_t! \right)} \quad (3.4)$$

Exemplo 43. Tome $T = \{1\}$, o que significa que estamos interessados apenas em pontos fixos. Então por (3.4), a probabilidade de que uma permutação escolhida aleatoriamente tenha exatamente k pontos fixos é dada por $\frac{1}{k!e}, \forall k \geq 0$. Obviamente as permutações de

Exemplo 44. Tome $T = \{r\}$, então a probabilidade de que uma permutação escolhida aleatoriamente tenha exatamente k r -ciclos é dada por

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{r}} r^k k!}, \forall k \geq 0.$$

Exemplo 45. Seja $T = \{r, s\}$. A probabilidade de que uma permutação escolhida aleatoriamente possua exatamente k_r r -ciclos e exatamente k_s s -ciclos é

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{r} + \frac{1}{s}} r^{k_r} s^{k_s} k_r! k_s!}.$$

Definição 46. Se $\text{Re}(s) > 1$, definimos a função zeta de Riemann por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Exemplo 47. *Seja $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Qual é a probabilidade de que uma permutação escolhida aleatoriamente não possua ciclos de comprimentos que sejam s -ésimas potências naturais?*

Tomamos $T_s = \{n^s : n \in \mathbb{N}\}$ e \mathbf{k} com componentes quaisquer cujos índices não pertençam a T_s (isto é, que não sejam s -ésimas potências). Primeiramente observamos que

$$\sum_{t \in T_s} \frac{1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

converge para $s \geq 2$. Pelo **Teorema 42**, esta probabilidade é dada por

$$\frac{1}{\prod_{t \in T_s} \left(e^{\frac{1}{t}}\right)} = \frac{1}{e^{\sum_{t \in T_s} \frac{1}{t}}} = e^{-\zeta(s)}$$

Para $s = 2$ é bem sabido que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Desta forma, a probabilidade de que uma permutação escolhida ao acaso não possua ciclos de comprimentos que sejam quadrados é de

$$e^{-\frac{\pi^2}{6}} \approx 0,193$$

aproximadamente 20%.

Capítulo 4

AÇÃO DE GRUPOS E COLORAÇÕES

4.1 Introdução

Considere um tabuleiro de xadrez 2×2 . Temos um total de $2^4 = 16$ colorações utilizando 2 cores (preta e branca):

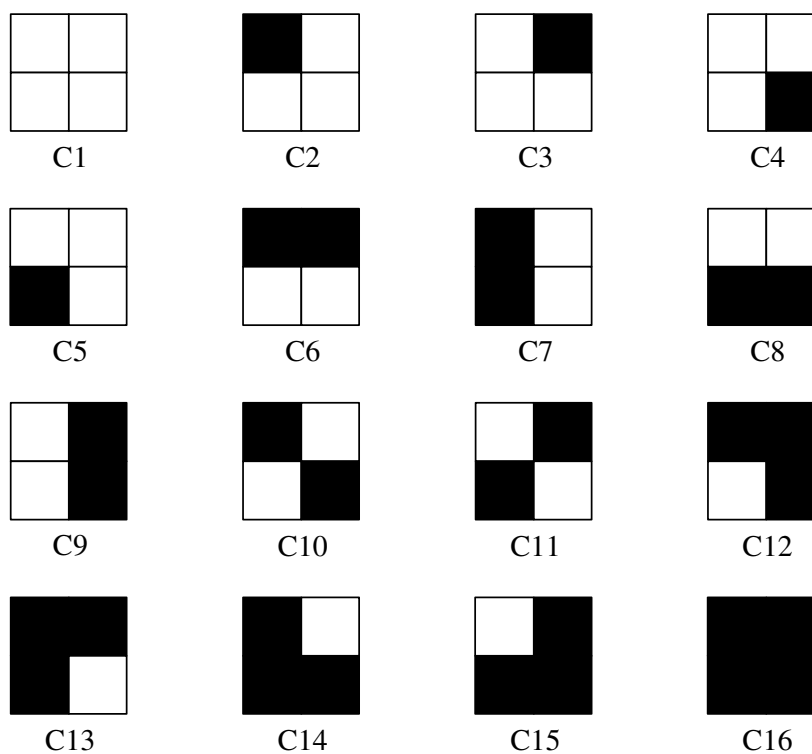


Figura 3: 16 colorações de um tabuleiro de xadrez 2×2 , nas cores preto e branco.

Do total listado acima, podemos inferir os seguintes conjuntos de padrões equivalentes:

$$\begin{aligned} &\{C1\} \\ &\{C2, C3, C4, C5\} \\ &\{C6, C7, C8, C9\} \\ &\{C10, C11\} \\ &\{C12, C13, C14, C15\} \\ &\{C16\} \end{aligned}$$

Assim, por exemplo $C6$ e $C8$ estão no mesmo conjunto, pois um pode ser obtido do outro através de uma rotação de um ângulo π . Num tabuleiro 2×2 por ser mais simples, não faz diferença se considerarmos ou não as reflexões; isto é, basta considerarmos as rotações para diferenciar os padrões.

Se tivéssemos por exemplo, considerando tabuleiros 3×3 , os diagramas abaixo não poderiam ser obtidos um do outro apenas por rotações; necessitaríamos também das reflexões.

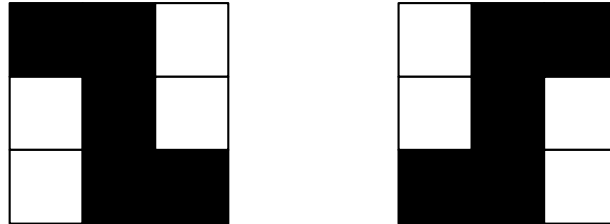


Figura 4: Um padrão não pode ser levado no outro por rotações

De qualquer forma, nas nossas observações sobre padrões de coloração equivalentes são as simetrias do quadrado que estão sendo consideradas na diferenciação. O que estão implícitos em toda esta discussão são conceitos sobre a interação entre um grupo (como o de simetrias de um quadrado, por exemplo) e os membros de algum outro conjunto (como as 16 colorações do tabuleiro 2×2).

Queremos descrever a situação geral onde temos uma interação entre um grupo G e um conjunto X não vazio.

Por motivos didáticos, devemos manter este exemplo dos tabuleiros de xadrez em mente nos desenvolvimentos a seguir. Utiliza-se largamente a referência [1] nas

visualizações e construções dos conceitos que permeiam todo este trabalho.

4.2 Ação de grupos

Definição 48. *Seja G um grupo e X um conjunto não-vazio. Dizemos que G age em X se, para todo $g \in G$ e para todo $x \in X$, existir um elemento $g \cdot x \in X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(A1) *Para todo $x \in X$, $e_G \cdot x = x$, onde e_G é a identidade de G .*

(A2) *Para todo $g, h \in G$, $x \in X$, temos*

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$$

O axioma (A1) significa que a ação do elemento identidade de G é sempre trivial, isto é, fixa todo elemento de X .

O segundo relaciona a ação do grupo à sua operação.

Sempre que um grupo age em um conjunto, dizemos que temos uma *ação de grupo*, e os axiomas (A1) e (A2) são chamados de *axiomas de ação de grupos*.

Ao contrário do que fazemos com as operações de grupos, jamais devemos omitir o símbolo \cdot que representa a ação de grupos. Isto porque estamos combinando elementos de conjuntos que geralmente são diferentes (G e X).

Exemplo 49. *Tome G como o grupo das simetrias do quadrado, e seja X o conjunto das colorações de um tabuleiro 2×2 nas cores preta e branca.*

Exemplo 50. *Tome G como o grupo das simetrias rotacionais de um cubo, e X o conjunto de colorações das faces do cubo usando as cores vermelho, preto e verde.*

Exemplo 51. *Seja G qualquer grupo e X o conjunto dos elementos de G . Definimos uma ação de grupo por*

$$\forall g, x \in G, \text{ temos } g \cdot x = gxg^{-1}$$

Esta ação é chamada de conjugação e o elemento do grupo gxg^{-1} é chamado de conjugado de x , como visto anteriormente.

Abaixo encontra-se um lema fundamental para ações de grupos.

Lema 52. *Seja G um grupo que age no conjunto X . Então para todo $g \in G$, $x, y \in X$, temos*

$$g \cdot x = y \iff g^{-1} \cdot y = x$$

Dem. Sejam $g \in G$, $x, y \in X$ e suponha que $g \cdot x = y$. Então

$$\begin{aligned} g^{-1} \cdot y &= g^{-1} \cdot (g \cdot x) \\ &= (g^{-1} \cdot g) \cdot x \\ &= e \cdot x \\ &= x \end{aligned}$$

A recíproca é obtida aplicando o que acabamos de demonstrar, trocando x por y e g por g^{-1} . ■

4.3 Colorações e ações de grupos

Primeiro, como um exemplo mais concreto, consideramos novamente o tabuleiro de xadrez 2×2 .

α_1	α_2
α_3	α_4

Figura 5: Tabuleiro 2×2 genérico

Então, se estamos colorindo de branco e preto, podemos considerar uma coloração f como uma aplicação do conjunto dos quadrados $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ no conjunto das

cores $\{preto, branco\}$, isto é

$$f : \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \rightarrow \{preto, branco\}$$

As 16 colorações diferentes correspondem então às 16 aplicações diferentes com os domínios e contradomínios definidos acima.

A título de exemplo, a coloração correspondente a $C10$ denotada por f_{10} é a coloração

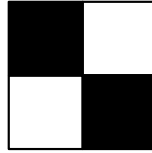


Figura 6: Coloração $C10$

determinada por

$$\begin{aligned} f_{10}(\alpha_1) &= f_{10}(\alpha_4) = preto \\ f_{10}(\alpha_2) &= f_{10}(\alpha_3) = branco \end{aligned}$$

Como utilizaremos este exemplo do tabuleiro 2×2 de maneira recorrente, é conveniente denotar por f_j a coloração correspondente ao diagrama Cj da *Figura 3*.

Procedemos agora para a definição geral do conceito.

Definição 53. *Sejam C e D dois conjuntos não-vazios (em geral são diferentes também), e $X = \mathcal{F}(D, C) = C^D$, o conjunto de todas as funções com domínio D e contradomínio C . Dizemos então que qualquer função $f \in X$ é uma coloração de D em C .*

Estaremos mais interessados nos casos em que C e D são finitos, e se $\#D = n$, $\#C = m$, temos pelo princípio multiplicativo um total de m^n colorações de D diferentes, isto é $\#X = m^n$

Exemplo 54. Se D é um conjunto de contas ou pedrinhas, podemos ter C como conjunto das formas $\{\text{quadrada, redonda, triangular}\}$.

Exemplo 55. Se D é um conjunto de quadrados de um tabuleiro 2×2 , podemos ter C como o conjunto das cores $\{\text{preto, branco}\}$

Agora relacionamos o conceito de ações de grupos com colorações.

Tomamos G como algum grupo de permutações de símbolos de D . Isto é, G é algum subgrupo de $S(D)$, o grupo de todas as permutações do conjunto D .

Definimos uma ação de G no conjunto das colorações X , por

$$\forall \sigma \in G, \forall f \in X \Rightarrow \sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1} \quad (4.1)$$

Teorema 56. A fórmula (4.1) acima define uma ação de grupo.

Dem. Seja e a identidade de G . Então e é a aplicação identidade $e : D \rightarrow D$ e para toda $f \in X$,

$$e \cdot f = f \circ e^{-1} = f \circ e = f$$

e assim (A1) se verifica.

Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ e $f \in X$. Então, pela nossa definição,

$$\begin{aligned} \sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot f) &= \sigma_2 \cdot (f \circ \sigma_1^{-1}) \\ &= (f \circ \sigma_1^{-1}) \circ \sigma_2^{-1} \\ &= f \circ (\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1}) \\ &= f \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)^{-1} \\ &= (\sigma_2 \circ \sigma_1) \cdot f \end{aligned}$$

e portanto (A2) também é válido concluindo a demonstração. ■

Capítulo 5

ÓRBITAS E ESTABILIZADORES

5.1 Órbitas e relações de equivalência

Definimos o conceito de ação de grupos, de forma a estabelecer o que entendemos por diferentes padrões de coloração. No caso do tabuleiro 2×2 , o grupo relevante é o grupo de simetrias do quadrado. Consideramos que duas colorações do tabuleiro são essencialmente as mesmas se a ação de uma das simetrias leva uma coloração na outra. Agora tornamos mais precisos estes conceitos de equivalência.

Lembramos que consideramos X como um *conjunto finito*.

Definição 57. *Seja G um grupo agindo em X . Definimos uma relação \sim_G em X da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \text{Para todo } x, y &\in X, \\ x &\sim_G y \iff \exists g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, vamos denotar esta relação simplesmente por \sim .

Lema 58. *A relação \sim no conjunto X é uma relação de equivalência.*

Dem. Mostramos que \sim é reflexiva, simétrica e transitiva.

Sejam $x, y, z \in X$. Como $e \in G$ é sua identidade, por (A1) segue que $e \cdot x = x$ e portanto temos que $x \sim x$, e \sim é reflexiva.

Se tivermos que $x \sim y$, então existe $g \in G$ com $g \cdot x = y$. Como G é grupo, existe o inverso g^{-1} e pelo **Lema 52** temos que $g^{-1} \cdot y = x$ e portanto $y \sim x$. Assim \sim é simétrica.

Suponhamos agora que $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existem $g, h \in G$ tais que $g \cdot x = y$ e $h \cdot y = z$. Como G é grupo, temos que $hg \in G$ e usando (A2) obtemos

$$(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = z$$

o que implica em $x \sim z$. Isto mostra que \sim é transitiva, e encerramos a demonstração do lema. ■

No exemplo envolvendo as colorações do tabuleiro de xadrez, temos que as classes de equivalência são aqueles conjuntos que possuem colorações todas com o mesmo padrão.

Em geral, as classes de equivalência da relação \sim são chamadas de *órbitas* da ação do grupo. A órbita à qual o elemento x pertence é denotada por O_x . Assim

$$O_x = O_y \iff x \sim y$$

e como $x \sim y \iff y = g \cdot x$ para algum $g \in G$, segue que

$$O_x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

No **Exemplo 51**, as classes de equivalência são chamadas de classes de conjugação do grupo em questão. Assim, se $G = S_n$, existe um total de $p(n)$ classes de conjugação em vista dos resultados anteriores.

Como as órbitas são classes de equivalência, elas particionam o conjunto X em conjuntos disjuntos.

Assim nossa pergunta de quantos padrões diferentes temos ao colorir os tabuleiros é na verdade a de quantas órbitas diferentes existem.

5.2 Estabilizadores

Na seção 4.2, através do axioma (A1), determinamos que a identidade e de um grupo G agindo em X , fixasse todos os elementos de X . No entanto, podemos ter, além da identidade, outros elementos de G fixando elementos de X .

Assim, dado $x \in X$, chamamos de *estabilizador de x* , o conjunto dos elementos de G que na ação de grupo fixam x .

Definição 59. O estabilizador S_x de x é definido por

$$S_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

O lema a seguir mostra que para qualquer $x \in X$, o estabilizador S_x é um subgrupo de G .

Lema 60. Seja G um grupo agindo em X . Então, para todo $x \in X$, temos que S_x é subgrupo de G .

Dem. Verificamos as condições de subgrupo para S_x . Primeiro suponha que $g, h \in S_x$. Então $g \cdot x = x$ e $h \cdot x = x$, e pelo axioma (A2) temos que

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$$

e assim $gh \in S_x$, o que mostra que S_x é fechado.

Por (A1), $e \cdot x = x$ e assim S_x contém a identidade de G .

Novamente, se $g \in S_x$, temos que $g \cdot x = x$ e pelo **Lema 52** temos que $g^{-1} \cdot x = x$ o que mostra que g^{-1} também está em S_x . Assim S_x é um subgrupo de G . ■

Abaixo consta um quadro com os estabilizadores e as órbitas das colorações de um tabuleiro de xadrez 2×2 :

Elemento de X	Estabilizador	Órbita
$C1$	$\{e, a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, q_1, q_2\}$	$\{C1\}$
$C2$	$\{e, q_1\}$	$\{C2, C3, C4, C5\}$
$C3$	$\{e, q_2\}$	
$C4$	$\{e, q_1\}$	
$C5$	$\{e, q_2\}$	
$C6$	$\{e, p_2\}$	$\{C6, C7, C8, C9\}$
$C7$	$\{e, p_1\}$	
$C8$	$\{e, p_2\}$	
$C9$	$\{e, p_1\}$	
$C10$	$\{e, a_2, q_1, q_2\}$	$\{C10, C11\}$
$C11$	$\{e, a_2, q_1, q_2\}$	
$C12$	$\{e, q_2\}$	$\{C12, C13, C14, C15\}$
$C13$	$\{e, q_1\}$	
$C14$	$\{e, q_2\}$	
$C15$	$\{e, q_1\}$	
$C16$	$\{e, a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, q_1, q_2\}$	$\{C16\}$

Observe que em todas as linhas (elementos x de X) temos a equação $\#(O_x) \times \#(S_x) = 8$. Isto não é uma coincidência e a seguir está um teorema a respeito, muito importante para nosso estudo.

Teorema 61 (O Teorema Órbita-Estabilizador). *Seja G um grupo que age em X . Então para cada $x \in X$,*

$$\#(O_x) \times \#(S_x) = \#(G)$$

Dem. Pelo **Lema 60**, temos que S_x é um subgrupo de G , e pelo teorema de Lagrange segue que

$$|G : S_x| \times \#(S_x) = \#(G)$$

Assim precisamos mostrar que

$$\#(O_x) = |G : S_x| \tag{5.1}$$

Os elementos de O_x possuem a forma $g \cdot x$, para $g \in G$ e as classes laterais de S_x possuem a forma gS_x para $g \in G$. Podemos provar a equação (5.1) mostrando que a

correspondência $g \cdot x \leftrightarrow gS_x$ é uma correspondência um-a-um entre os elementos de O_x e as classes laterais de S_x em G . Em outras palavras, basta mostrar que, para todo $g, h \in G$,

$$gS_x = hS_x \iff g \cdot x = h \cdot x$$

Sejam $g, h \in G$. Então

$$\begin{aligned} gS_x = hS_x &\iff h^{-1}g \in S_x, \text{ pelo \textbf{Lema 60}} \\ &\iff (h^{-1}g) \cdot x = x, \text{ pela definição de } S_x \\ &\iff h^{-1} \cdot (g \cdot x) = x, \text{ por (A2)} \\ &\iff g \cdot x = h \cdot x, \text{ pelo \textbf{Lema 52}} \end{aligned}$$

■

Corolário 62. *Seja G um grupo finito que age no conjunto X . Então o número de elementos de X em cada órbita é um divisor da ordem de G .*

Dem. Imediata a partir da equação multiplicativa do teorema Órbita-Estabilizador.

■

O teorema Órbita-Estabilizador fornece uma relação entre o número de elementos em cada órbita e o número de elementos em cada estabilizador. Abaixo está um resultado, que será modificado adiante para a obtenção do lema de Burnside, que fornece uma fórmula para o número de diferentes órbitas da ação.

Teorema 63. *Seja G um grupo finito agindo em X . Então o número de órbitas distintas é dado por*

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{x \in X} \#(S_x)$$

Dem. Suponhamos que existam m órbitas distintas O_{x_1}, \dots, O_{x_m} . Se $1 \leq j \leq m$,

temos para a j -ésima órbita que

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in O_{x_j}} \#(S_x) &= \sum_{x \in O_{x_j}} \frac{\#(G)}{\#(O_x)}, \text{ pelo Teorema Órbita-Estabilizador} \\
 &= \#(G) \sum_{x \in O_{x_j}} \frac{1}{\#(O_{x_j})}, \text{ pois } O_x = O_{x_j} \text{ para todo } x \in O_{x_j} \\
 &= \frac{\#(G)}{\#(O_{x_j})} \sum_{x \in O_{x_j}} 1 \\
 &= \#(G)
 \end{aligned}$$

Assim, somando para todas as órbitas obtemos,

$$\sum_{x \in X} \#(S_x) = \sum_{j=1}^m \sum_{x \in O_{x_j}} \#(S_x) = \sum_{j=1}^m \#(G) = m\#(G)$$

o que nos fornece o resultado desejado. ■

Observe que esta fórmula ainda não é de muito uso, pois devemos listar todos os elementos de X , o que nos possibilitaria, sem nenhuma teoria elaborada, diferenciar os padrões desejados por inspeção. No caso do tabuleiro 2×2 , temos que $\#(X) = 16$, mas no caso do tabuleiro de xadrez 8×8 , por exemplo, temos que $\#(X) = 2^{64} > 10^{19}$, o que torna impraticável listar todos os elementos de X .

5.3 Objetos rotulados e não-rotulados

Ações de grupos e estabilizadores são úteis no discernimento entre objetos rotulados e não-rotulados. Nesta seção, objetivamos um desenvolvimento não tão formal destes conceitos, a título de exposição. Para maiores detalhes, ver [2, Seções 14.1-14.4].

Podemos considerar um objeto como um par (X, \mathcal{S}) onde X é um conjunto e \mathcal{S} uma estrutura qualquer em X , que não precisa ser especificada. \mathcal{S} pode consistir de pares ordenados ou não-ordenados (isto é, grafos ou digrafos) de elementos de X , um conjunto de subconjuntos ou partições de X , etc. O importante é que, dado uma permutação g de X , deva existir uma maneira natural de aplicar g em \mathcal{S} . Por

exemplo, se (X, \mathcal{S}) é um grafo, então aplicamos g a cada aresta em \mathcal{S} para obter o conjunto de arestas $g\mathcal{S}$.

Uma permutação g de X é um *automorfismo* de (X, \mathcal{S}) se $g\mathcal{S} = \mathcal{S}$. O grupo de automorfismos de (X, \mathcal{S}) é o conjunto $Aut(X, \mathcal{S})$ de todos os automorfismos de (X, \mathcal{S}) .

Seja \mathcal{C} uma classe de objetos com estruturas num conjunto $[n]$. Os elementos de \mathcal{C} podem consistir de grafos, famílias de conjuntos, etc. Dizemos que dois objetos rotulados C e C' em \mathcal{C} são contados como o mesmo objeto não-rotulado se, e somente se, eles são isomorfos, isto é, se existir uma permutação de S_n que mapeie a estrutura de C na de C' .

Consideramos então a ação de S_n na classe \mathcal{C} de objetos rotulados (entendendo que as permutações de S_n agem nas respectivas estruturas dos pares). Nesta ação, objetos não rotulados correspondem às órbitas, e o estabilizador de um objeto C é na verdade seu grupo de automorfismos; isto é, o conjunto de todas as permutações de S_n que o fixam.

Teorema 64. (i) O número de diferentes rotulações de um objeto $C \in \mathcal{C}$ é igual a

$$\frac{n!}{|Aut(C)|}$$

(ii) Suponha que existam M objetos rotulados e m objetos não rotulados, C_1, \dots, C_m em \mathcal{C} . Então

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{|Aut(C_j)|} = \frac{M}{n!}$$

Dem. (i) Pelo Teorema Órbita-Estabilizador temos que $\forall C \in \mathcal{C}$, $|O_C| |S_C| = |S_n| = n!$. A cardinalidade da órbita representa o número de objetos rotulados de \mathcal{C} que são isomorfos ao objeto C . Assim desejamos saber o valor de

$$|O_C| = \frac{n!}{|S_C|} = \frac{n!}{|Aut(C)|}$$

(ii) Temos

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{|Aut(C_j)|} = \sum_{j=1}^m |O_{C_j}|$$

e como existem m objetos não rotulados em \mathcal{C} , temos m órbitas no total. Desta forma, como temos M objetos rotulados no total, e as órbitas particionam \mathcal{C} , segue imediatamente que

$$\sum_{j=1}^m |O_{C_j}| = |\mathcal{C}| = M$$

■

5.4 O Lema de Burnside

Apesar do lema a seguir ter se associado ao nome de William Burnside, ele foi primeiramente provado por Georg Frobenius em 1887. Burnside publicou um livro muito influente em teoria dos grupos e sua primeira edição foi o primeiro texto em inglês deste assunto, por exemplo. Nesta primeira edição, Burnside coloca o teorema e o atribui a Frobenius, mas essa atribuição não passou para a segunda edição, de muito maior penetração. É provável que isso tenha originado toda essa confusão histórica.

A fim de se obter a versão desejada para o número de órbitas, considere a figura abaixo,

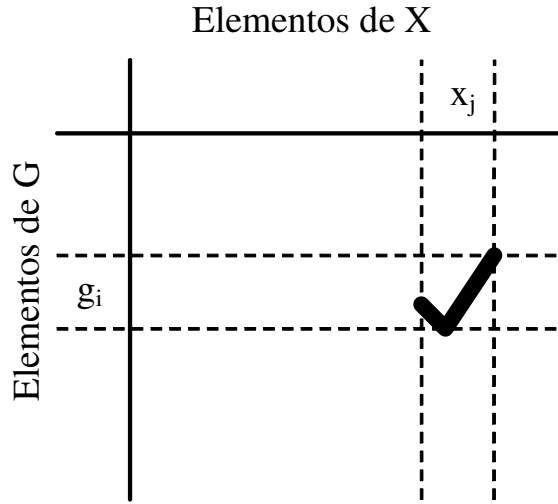


Figura 7: Elementos de G versus Elementos de X

onde as linhas correspondem a elementos de G e as colunas a elementos de X .

Marca-se uma entrada na tabela na interseção de uma j -ésima coluna com uma i -ésima linha, isto é, da coluna de um elemento de X , com a linha de um elemento de G , se e somente se,

$$g_i \cdot x_j = x_j$$

isto é, se e somente se, $g_i \in S_{x_j}$.

Assim, o número de marcas em uma coluna j é $\#(S_{x_j})$ e portanto o número total de marcas na tabela é $\sum_{x \in X} \#(S_x)$.

Agora ao invés de adicionarmos as marcas por colunas, adicionaremos por linhas.

O número de marcas na i -ésima linha é dado pelo número de elementos do conjunto

$$\{x \in X : g_i \cdot x = x\}$$

isto é, o número de elementos de X que são fixados pelo elemento g_i de G .

Definição 65. *Seja G um grupo agindo em X , definimos o Fix de $g \in G$ como*

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$$

Observe que $\text{Fix}(g)$ é igual a $k_1(g)$, o número de pontos fixos da permutação g .

Se somarmos o total de marcas de cada linha, obtemos todas as marcas da tabela, isto é,

$$\sum_{g \in G} \#(\text{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} \#(S_x)$$

Demonstramos então o lema, fundamental em todo este estudo:

Teorema 66 (Lema de Burnside). *Se G é um grupo finito agindo em um conjunto X , então o número de órbitas distintas é dado por*

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \#(\text{Fix}(g))$$

5.5 Aplicações do Lema de Burnside

Problema 67. *Obter o número de permutações circulares de n elementos; isto é, determinar o número de maneiras de arranjarmos n objetos distintos em torno de um círculo.*

Solução 68. *Neste problema, o conjunto X de colorações é formado pelas $n!$ permutações (aqui $C = D = [n]$) dos n objetos distintos. Para definirmos o grupo G de simetrias, basta notar que uma disposição em círculo é considerada a mesma que outra, se uma puder ser obtida da outra por alguma rotação de $\frac{2\pi}{n}$. Portanto o grupo G é o composto pela identidade e por $(n-1)$ rotações. A identidade e fixa todos os $n!$ elementos de X , mas qualquer outro elemento $g \in G$ é tal que $\text{Fix}(g) = 0$. Isto porque os n elementos são todos distintos e qualquer rotação não-trivial leva uma configuração de X em alguma outra diferente. Pelo lema de Burnside temos então que o número de permutações circulares de n elementos é dado por*

$$\frac{1}{n} \left(n! + \overbrace{0 + \dots + 0}^{n-1 \text{ zeros}} \right) = (n-1)!$$

Problema 69. De quantas maneiras diferentes podemos pintar as faces de um cubo, utilizando c cores diferentes? Calcule o número de pinturas utilizando as cores vermelho, preto e verde.

Solução 70. O número total de colorações presentes em X neste caso é dado por c^6 , pois um cubo tem 6 faces. Entendemos por igualdade entre uma pintura e outra, se uma puder ser obtida da outra por alguma simetria de rotação do cubo. No **Exemplo 8** listamos as 24 simetrias rotacionais do cubo descrevendo-as em 7 itens. Uma coloração de X é fixada por $g \in G$ se, e somente se, todas as faces no mesmo ciclo de g possuem a mesma cor. Vamos calcular aqui para cada simetria de cada item quantos elementos de X ela fixa:

- (1) A identidade e fixa todos os elementos de $X \Rightarrow \text{Fix}(e) = c^6$;
- (2) Cada rotação de $\frac{\pi}{2}$ pelo eixo indicado em (a) possui 1 ciclo de comprimento 4 e 2 ciclos de comprimento 1 nas faces. Assim, se uma coloração destas faces permanece inalterada após a rotação, teremos c diferentes possibilidades de cores para as 4 faces que compõem o ciclo de comprimento 4 e c cores diferentes para as faces de cada ciclo unitário. Portanto pelo princípio multiplicativo, temos $c \cdot c \cdot c$ diferentes colorações que são fixadas por cada rotação de $\frac{\pi}{2}$ indicada em (a). A contribuição destas 3 rotações é de $3c^3$;
- (3) Para a rotação de π pelo eixo indicado em (a), temos 2 ciclos de comprimento 2 e 2 ciclos de comprimento 1. Pelas mesmas considerações feitas no item (2) acima, concluímos pelo princípio multiplicativo que o Fix de cada uma das 3 rotações é dado por $c \cdot c \cdot c \cdot c$. Assim a contribuição destas 3 rotações é de $3c^4$;
- (4) Uma rotação de $\frac{3\pi}{2}$ pelo eixo de (a) é equivalente a uma de $-\frac{\pi}{2}$ pelo mesmo eixo. Por simetria temos a mesma contribuição do item (2), isto é, $3c^3$;
- (5) Cada rotação de π pelo eixo indicado em (b) possui 3 ciclos de comprimento 2. Assim temos uma contribuição de $6c^3$;
- (6) Cada rotação de $\frac{2\pi}{3}$ pelo eixo indicado em (c) possui 2 ciclos de comprimento

3. Portanto temos uma contribuição de $4c^2$;

(7) Uma rotação de $\frac{4\pi}{3}$ é equivalente a uma de $-\frac{2\pi}{3}$, e por simetria temos a mesma contribuição do item (6), isto é, $4c^2$.

Pelo lema de Burnside, temos então que o número de pinturas distintas das faces do cubo utilizando c cores é

$$\frac{1}{24} (c^6 + 3c^3 + 3c^4 + 3c^3 + 6c^3 + 4c^2 + 4c^2) = \frac{1}{24} (c^6 + 3c^4 + 12c^3 + 8c^2)$$

Para 3 cores, basta substituir $c = 3$ no polinômio acima para obter 57 pinturas distintas.

Problema 71. Quantas moléculas orgânicas diferentes da forma

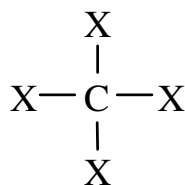


Figura 8: Molécula com C no centro e 4 ligações

existem, onde C é um átomo de carbono e cada X denota qualquer um dos 4 componentes CH_3 (metil), C_2H_5 (etil), H (hidrogênio) ou Cl (cloro)? (Aqui da química sabemos que cada molécula desse tipo pode ser modelada por um tetraedro regular com o carbono ocupando seu centro e os componentes X ocupando os vértices).

Solução 72. Considere a figura abaixo exibindo os dois tipos de eixo de rotação que o tetraedro regular possui:

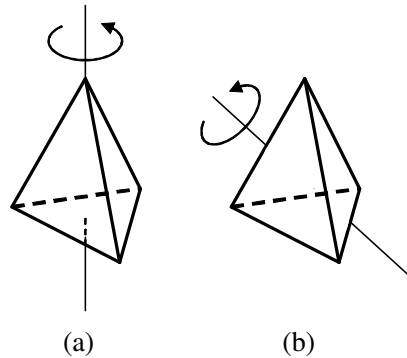


Figura 9: Os 2 tipos de eixos das simetrias rotacionais do tetraedro regular

Temos um total de $4^4 = 256$ colorações diferentes no conjunto X , pois neste caso estamos colorindo os vértices do tetraedro com 4 "cores" distintas. G é definido como o grupo das 12 simetrias rotacionais do tetraedro regular e vamos calcular o Fix de cada uma delas:

- (1) A identidade fixa todas as 256 colorações de X .
- (2) Temos 8 simetrias de rotação pelo tipo de eixo indicado em (a), que passa por um vértice e pelo centro da face oposta. São 4 simetrias de rotação de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ e 4 simetrias de rotação de um ângulo de $-\frac{2\pi}{3}$. Cada rotação é composta de 1 ciclo de comprimento 1 e 1 ciclo de comprimento 3. Assim temos uma contribuição de $8 \cdot 4 \cdot 4 = 128$ colorações fixadas.
- (3) Temos 3 simetrias de rotação de um ângulo de π pelo tipo de eixo indicado em (b), que passa pelos pontos médios de arestas opostas. Cada rotação desta é composta de 2 ciclos de comprimento 2. Portanto temos uma contribuição de $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ colorações fixadas.

Aplicando o lema de Burnside obtemos que o número de moléculas distintas nas condições do problema é igual a

$$\frac{1}{12} (256 + 128 + 48) = 36$$

Capítulo 6

O TEOREMA DE ENUMERAÇÃO DE PÓLYA

6.1 Introdução

Vamos desenvolver um método algébrico para descrever colorações, utilizando funções geradoras. Aqui a situação ideal é obter uma função geradora que determine o número de padrões de cada tipo para a situação em questão.

Já vimos que temos um total de 16 maneiras de colorir um tabuleiro de xadrez 2×2 , sem considerarmos as relações de equivalência de padrões; isto é, não estamos contando as órbitas. Observe que na expansão

$$(p + b)^4 = (p + b)(p + b)(p + b)(p + b) = p^4 + 4p^3b + 6p^2b^2 + 4pb^3 + b^4$$

obtemos cada coeficiente escolhendo de cada parênteses o símbolo p ou b , e isso corresponde às 16 colorações diferentes do tabuleiro 2×2 nas cores preta e branca. Mais ainda, cada termo na expansão lista o número de colorações de acordo com quantas cores brancas e pretas estão sendo utilizadas. Deste modo, o termo p^3b tem como coeficiente 4, que é o número de colorações ($C12$, $C13$, $C14$ e $C15$) contendo 3 cores pretas e 1 branca. O termo p^4 tem coeficiente 1, indicando que temos apenas 1 coloração ($C16$) contendo 4 cores pretas.

No entanto, esta expressão algébrica não nos diz nada acerca de quantos padrões diferentes existem por equivalência; isto é, não nos exhibe informações sobre as órbitas das colorações.

6.2 Pesos de colorações, enumerador de estoque e inventários

As definições a seguir serão necessárias para a construção do Teorema de Pólya, que fornece a função geradora contendo a informação sobre as órbitas das colorações.

Os símbolos algébricos p e b correspondem às cores *preta* e *branca*, respectivamente, ambas elementos do conjunto C . No caso geral, entendemos por uma função peso no conjunto C , uma função ω que associa a cada $c \in C$, um símbolo algébrico ou um número denotado por $\omega(c)$, denominado peso de c .

Definição 73. *Uma função peso ω no conjunto C é qualquer função $\omega : C \rightarrow R$, onde R é um anel comutativo contendo os racionais.*

Entendendo o conjunto C como um estoque de cores que podemos utilizar para "pintar" os elementos de D , definimos abaixo uma função geradora especial.

Definição 74. *O enumerador de estoque de C por peso ω é definido como sendo a soma $\sum_{c \in C} \omega(c)$.*

Isto é, o enumerador de estoque representa de maneira algébrica todos os valores que os elementos do conjunto D podem receber através das colorações de D em C .

Exemplo 75. *Sejam $C = \{\text{vermelho claro}, \text{vermelho escuro}, \text{azul}\}$, $\omega(\text{vermelho claro}) = r$, $\omega(\text{vermelho escuro}) = R$ e $\omega(\text{azul}) = a$. Então o enumerador de estoque (de tintas, ou cores, no caso) é $r + R + a$; isto é, interpretando a soma como função geradora, significa que temos exatamente 1 cor vermelho clara, 1 cor vermelho escura e 1 cor azul.*

Mais à frente consideraremos o enumerador de estoque como uma série de potências formais.

Para enumerarmos órbitas de colorações por peso, necessitamos também definir o peso de uma coloração.

Definição 76. *Para cada coloração $f \in X$, definimos seu peso $W(f)$ pela equação*

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$$

O lema a seguir será utilizado na demonstração do teorema de Pólya, ele nos diz que colorações na mesma órbita possuem o mesmo peso.

Lema 77. *Sejam $f_1, f_2 \in X$. Se $f_1 \sim f_2$ então $W(f_1) = W(f_2)$*

Dem. Como $f_1 \sim f_2$ então existe $g \in G$ tal que $f_2 = g \cdot f_1$. Desta forma

$$\begin{aligned} W(f_2) &= W(g \cdot f_1) = \prod_{d \in D} \omega((g \cdot f_1)(d)) \\ &= \prod_{d \in D} \omega(f_1(g \cdot d)) \\ &= \prod_{d \in D} \omega(f_1(g^{-1}(d))) \\ &= \prod_{d' \in D} \omega(f_1(d')) = W(f_1) \end{aligned}$$

■

Agora definimos o conceito de inventário.

Definição 78. *O inventário de $S \subset X$ é definido por*

$$\sum_{f \in S} W(f)$$

O problema de maior interesse para nosso estudo é o de determinar o inventário das colorações que contém exatamente 1 coloração de cada padrão (órbita). Vamos à definição do inventário padrão, que será fornecido pelo Teorema de Enumeração de Pólya.

Definição 79. *O inventário padrão F_G é definido como sendo a soma*

$$F_G := \sum^* W(f) := \sum_{f \in R} W(f)$$

onde a soma é estendida sobre um sistema de representantes R para as órbitas da ação de G em $X = C^D$.

Para termos os conceitos dados acima fixados, retornamos ao exemplo do tabuleiro 2×2 .

Relembramos que $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, o conjunto dos 4 quadrados do tabuleiro, $C = \{preto, branco\}$, o conjunto das cores e $X = \mathcal{F}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \{preto, branco\})$ é o conjunto das colorações de D em C .

A função peso no nosso exemplo é dada por

$$\begin{aligned}\omega(preto) &= p \\ \omega(branco) &= b\end{aligned}$$

A coloração f_{10} é tal que

$$\begin{aligned}f_{10}(\alpha_1) &= preto \\ f_{10}(\alpha_2) &= branco \\ f_{10}(\alpha_3) &= branco \\ f_{10}(\alpha_4) &= preto\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}W(f_{10}) &= \prod_{d \in D} \omega(f_{10}(d)) = \omega(f_{10}(\alpha_1)) \omega(f_{10}(\alpha_2)) \omega(f_{10}(\alpha_3)) \omega(f_{10}(\alpha_4)) \\ &= \omega(preto) \omega(branco) \omega(branco) \omega(preto) \\ &= pbbp \\ &= p^2 b^2\end{aligned}$$

O inventário de todas as 16 colorações (isto é $S = X$), como visto anteriormente, é dado por

$$\sum_{f \in X} W(f) = p^4 + 4p^3b + 6p^2b^2 + 4pb^3 + b^4 = (p + b)^4,$$

enquanto que o inventário padrão é

$$F_G = \sum^* W(f) = p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4,$$

conforme pode ser visto na *Figura 3*.

6.3 Demonstração do Teorema de Pólya e Corolários

Teorema 80 (Teorema de Enumeração de Pólya - TEP). *Seja $X = \mathcal{F}(D, C)$ o conjunto de todas as colorações do conjunto D em C , e seja ω uma função peso em C . Seja G o grupo das permutações de D que age em X de maneira usual. Se o índice de ciclos de G é*

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots)$$

então o inventário padrão F_G é dado por

$$F_G = \sum^* W(f) = Z\left(G; \sum_{c \in C} \omega(c), \sum_{c \in C} \omega(c)^2, \sum_{c \in C} \omega(c)^3, \dots\right)$$

Dem. Seja $N = \sum_{(\sigma, f)} W(f)$ com a soma estendida a todos os pares (σ, f) com $\sigma \in G, f \in C^D$ e $\sigma \cdot f = f$. Então temos

$$N = \sum_{f \in C^D} W(f) |S_f|$$

onde S_f é o estabilizador de f . Considere os termos $W(f) |S_f|$ enquanto f percorre uma órbita O_{f_0} de G em C^D : cada valor deste é igual a $W(f_0) \frac{|G|}{|O_{f_0}|}$ onde f_0 é um representante da órbita O_{f_0} , colorações na mesma órbita possuem o mesmo peso e utilizamos o teorema órbita-estabilizador.

A soma de tais termos é igual a $W(f_0) |G|$, e então se torna claro que

$$N = |G| \sum^* W(f)$$

Analisando a soma N por outro lado, temos que

$$N = \sum_{\sigma \in G} \sum_{\sigma \cdot f = f} W(f)$$

Assim, lembrando a definição de $Z(G)$, vemos que a prova estará completa se mostrarmos que

$$\sum_{\sigma \cdot f = f} W(f) = \left(\sum_{c \in C} \omega(c) \right)^{k_1} \left(\sum_{c \in C} \omega(c)^2 \right)^{k_2} \cdots \left(\sum_{c \in C} \omega(c)^n \right)^{k_n}$$

onde σ é uma permutação de tipo $TC(\sigma) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Uma aplicação $f : D \rightarrow C$ é fixada por σ se, e somente se, f é constante em cada ciclo de σ em D .

Sejam $C_1, C_2, \dots, C_{k_1}, C_{k_1+1}, \dots, C_k$ os ciclos de σ em D , onde $k = k_1 + \dots + k_n$.

As aplicações $f \in C^D$ fixadas por σ estão em correspondência 1-a-1 com as k -uplas (c_1, \dots, c_k) de elementos em C (a aplicação correspondente é aquela associando c_i a todos os elementos de C_i).

O peso da aplicação f correspondente a (c_1, \dots, c_k) é $\prod_{i=1}^k \omega(c_i)^{|C_i|}$ e somando sobre todas as k -uplas (c_1, \dots, c_k) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \cdot f = f} W(f) &= \sum_{c_1, c_2, \dots, c_k} \omega(c_1)^{|C_1|} \omega(c_2)^{|C_2|} \dots \omega(c_k)^{|C_k|} \\
&= \sum_{c_1} \omega(c_1)^{|C_1|} \sum_{c_2} \omega(c_2)^{|C_2|} \dots \sum_{c_k} \omega(c_k)^{|C_k|} \\
&= \sum_{c_1} \omega(c_1)^{|C_1|} \dots \sum_{c_{k_1}} \omega(c_{k_1})^{|C_{k_1}|} \sum_{c_2} \omega(c_2)^{|C_2|} \dots \sum_{c_{k_2}} \omega(c_{k_2})^{|C_{k_2}|} \dots \sum_{c_k} \omega(c_k)^{|C_k|} \\
&= \underbrace{\sum_{c \in C} \omega(c)^1 \dots \sum_{c \in C} \omega(c)^1}_{k_1} \underbrace{\sum_{c \in C} \omega(c)^2 \dots \sum_{c \in C} \omega(c)^2}_{k_2} \dots \underbrace{\sum_{c \in C} \omega(c)^n \dots \sum_{c \in C} \omega(c)^n}_{k_n} \\
&= \left(\sum_{c \in C} \omega(c)^1 \right)^{k_1} \left(\sum_{c \in C} \omega(c)^2 \right)^{k_2} \dots \left(\sum_{c \in C} \omega(c)^n \right)^{k_n}
\end{aligned}$$

e isto conclui a demonstração. ■

Corolário 81. *Em particular, se todos os pesos são escolhidos como unitários, obtém-se o número de padrões distintos, órbitas, pela fórmula*

$$Z(G; |C|, |C|, |C|, \dots)$$

Considerando agora o enumerador de estoque como uma função geradora ordinária, em série de potências formais, coloca-se o peso de cada cor como $\omega(c) = x^j$,

e impõe-se a restrição de que existe no máximo um número finito c_j de cores com peso x^j . Então temos como enumerador de estoque a função geradora

$$c(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

Assim deduz-se mais um corolário

Corolário 82. *Seja $X = \mathcal{F}(D, C)$ o conjunto de todas as colorações do conjunto D em C , e seja $c(x)$ a função geradora que enumera estoque por peso, como definido acima. Seja G o grupo das permutações de D que age em X de maneira usual. Se o índice de ciclos de G é*

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots)$$

então o inventário padrão é dado por

$$Z(G; c(x), c(x^2), c(x^3), \dots)$$

Abaixo interpretamos os coeficientes do polinômio obtido, ao se substituir o enumerador de estoque $1+x$ no índice de ciclos de um grupo G de permutações arbitrário.

Definição 83. *Dois r -conjuntos $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ e $S' = \{x'_1, \dots, x'_r\}$ são chamados de G -equivalentes, se para algum $g \in G$, $gS = S'$.*

Corolário 84. *O coeficiente de x^r em $Z(G; 1+x, 1+x^2, 1+x^3, \dots)$ é o número de classes de G -equivalência de r -subconjuntos de X .*

Dem. No enumerador de estoque $1+x$ o termo $1 = x^0$ pode indicar a ausência de um objeto em X enquanto que $x = x^1$ indica sua presença. Portanto x^r significa que r objetos distintos, formando um r -conjunto, estão presentes. E assim o corolário se segue do TEP. ■

6.4 Aplicações

Problema 85. *Obter a função geradora (inventário padrão) para o número de colorações de um tabuleiro de xadrez 2×2 nas cores preto e branco.*

Solução 86. *Nesta solução vamos utilizar o grupo diedral, mas sabemos que para tabuleiros 2×2 não faz diferença se considerarmos apenas as rotações, ou as reflexões também.*

α_1	α_2
α_3	α_4

Figura 10: Tabuleiro 2×2 genérico

Aqui $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$, a função peso é dada por $\omega(\text{branco}) = b$, $\omega(\text{preto}) = p$. O grupo de permutações de D corresponde às 8 simetrias do quadrado, e portanto

$$G = \left\{ e, (\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3), (\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4), (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4), \right. \\ \left. (\alpha_2\alpha_3)(\alpha_1)(\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2)(\alpha_3) \right\}$$

com índice de ciclos dado por

$$Z(G, x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{8} (x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4).$$

Portanto pelo TEP, devemos substituir x_1 por $b+p$, x_2 por b^2+p^2 e x_4 por b^4+p^4 em $Z(G, x_1, x_2, x_4)$, obtendo o inventário padrão

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{1}{8} \left((b+p)^4 + 2(b+p)^2(b^2+p^2) + 3(b^2+p^2)^2 + 2(b^4+p^4) \right) \\ &= p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4 \end{aligned}$$

como já esperávamos.

Problema 87. *De quantas maneiras podemos colorir as faces de um cubo utilizando as cores verde, amarelo e branco, de maneira que em cada pintura tenhamos exatamente 2 faces amarelas e 2 verdes? E a quantidade de pinturas contendo exatamente 1 face amarela?*

Solução 88. *Baseado nas considerações da **Solução 70**, podemos obter facilmente a seguinte expressão para o índice de ciclos das simetrias de rotação de um cubo:*

$$\frac{1}{24} (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

Colocamos como peso de cada cor

$$\omega(\text{amarelo}) = a$$

$$\omega(\text{verde}) = v$$

$$\omega(\text{branco}) = b$$

e assim obtemos o enumerador de estoque

$$a + v + b$$

Então, pelo TEP, temos que o inventário padrão é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} ((a + v + b)^6 + 3(a + v + b)^2 (a^2 + v^2 + b^2)^2 + 6(a + v + b)^2 (a^4 + v^4 + b^4) + \\ & + 6(a^2 + v^2 + b^2)^3 + 8(a^3 + v^3 + b^3)^2) \end{aligned}$$

É conveniente usar algum software de álgebra simbólica para expandir esta soma e obter

$$\begin{aligned} & a^6 + b^6 + v^6 + ab^5 + a^5b + av^5 + a^5v + bv^5 + b^5v + \\ & + 2abv^4 + 2ab^4v + 2a^4bv + 2a^2b^4 + 2a^3b^3 + 2a^4b^2 + \\ & + 2a^2v^4 + 2a^3v^3 + 2a^4v^2 + 2b^2v^4 + 2b^3v^3 + 2b^4v^2 + \\ & + 3ab^2v^3 + 3ab^3v^2 + 3a^2bv^3 + 3a^2b^3v + 3a^3bv^2 + 3a^3b^2v + 6a^2b^2v^2 \end{aligned}$$

Para responder a primeira parte do problema, buscamos o coeficiente do termo $a^2v^2b^2$, que é igual a 6.

Para a segunda pergunta, devemos agrupar todos os termos que contém a^1 :

$$a(b^5 + v^5 + 2bv^4 + 2b^4v + 3b^2v^3 + 3b^3v^2)$$

totalizando então 12 maneiras distintas.

Problema 89. No **Problema 71**, qual é o número de moléculas que contém um ou mais átomos de hidrogênio?

Solução 90. O índice de ciclos em questão é facilmente obtido de **Solução 72**, sendo dado por

$$\frac{1}{12} (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$$

Designamos os pesos

$$\omega(CH_3) = w_1$$

$$\omega(C_2H_5) = w_2$$

$$\omega(Cl) = w_3$$

$$\omega(H) = 0$$

a cada um dos componentes do problema.

Assim nosso enumerador de estoque é

$$w_1 + w_2 + w_3$$

que, pelas nossas considerações na seção 8.2, é a função geradora para 1 componente CH_3 , 1 componente C_2H_5 , 1 componente Cl e nenhum componente H . Desta forma estaremos enumerando primeiro as moléculas que não possuem átomos de hidrogênio.

Pelo TEP, temos então que o inventário padrão é dado por

$$\frac{1}{12} \left((w_1 + w_2 + w_3)^4 + 8(w_1 + w_2 + w_3)(w_1^3 + w_2^3 + w_3^3) + 3(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^2 \right)$$

que ao ser expandido resulta em:

$$\begin{aligned} &w_1^4 + w_2^4 + w_3^4 + w_1w_2^3 + w_1^3w_2 + w_1w_3^3 + w_1^3w_3 + \\ &+ w_2w_3^3 + w_2^3w_3 + w_1w_2w_3^2 + w_1w_2^2w_3 + w_1^2w_2w_3 + \\ &+ w_1^2w_2^2 + w_1^2w_3^2 + w_2^2w_3^2 \end{aligned}$$

Portanto temos um total de 15 moléculas não contendo átomos de hidrogênio. Repare que a expressão acima diz muito mais que isso, pois nela está determinada qual a composição em componentes de cada uma das 15 moléculas. Também é interessante observar que, na função geradora acima, temos apenas 1 molécula para cada combinação dos 3 componentes CH_3 , C_2H_5 e Cl .

Como nesta resolução estamos interessados no número total de moléculas, pouparíamos trabalho se tivéssemos logo atribuído o peso 0 ao componente hidrogênio e peso 1 aos 3 componentes restantes. Do TEP obteríamos diretamente o número

$$\frac{1}{12} (3^4 + 8 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2) = 15$$

Assim, como o número total de moléculas obtidas na **Solução 72** é 36, temos

$$36 - 15 = 21$$

moléculas que contém pelo menos 1 átomo de hidrogênio.

Problema 91. Qual o número de colares distintos, formados por n contas de m cores diferentes? (Considere separadamente os casos onde apenas rotações são permitidas, e onde rotações e inversões são permitidas).

Solução 92. Ao se considerar apenas as rotações, pelo **Corolário 81** do TEP, sai que o número é dado por

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) m^{n/d} \quad (6.1)$$

onde foi utilizado o índice de ciclos de C_n .

Por outro lado se inversões (reflexões) também são permitidas, aplica-se o mesmo corolário mas utilizando o índice de ciclos de D_{2n} , e obtém-se

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) m^{n/d} + R_n(m) \right) \quad (6.2)$$

onde

$$R_n(m) = \begin{cases} m^{\frac{n+1}{2}}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2} m^{\frac{n}{2}} (1+m), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Problema 93. Calcule:

(a) o número de colares diferentes, por rotações, com 6 contas coloridas em preto e branco;

(b) o número de colares diferentes, por rotações e inversões, com 5 contas coloridas em preto, cinza e branco;

(c) as mesmas condições do item (b), exceto que cada colar deverá ter exatamente 1 conta na cor preta.

Solução 94. (a) Na fórmula (6.1) da **Solução 92** colocamos $n = 6, m = 2$ para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_{d|6} \phi(d) 2^{6/d} &= \frac{1}{6} (\phi(1) 2^6 + \phi(2) 2^3 + \phi(3) 2^2 + \phi(6) 2) \\ &= \frac{1}{6} (64 + 8 + 8 + 4) \\ &= 14 \end{aligned}$$

Portanto a resposta correta é 14 colares distintos.

(b) Substituímos na fórmula (6.2) da **Solução 92** $n = 5, m = 3$ e obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sum_{d|5} \phi(d) 3^{5/d} + R_5(3) \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} (\phi(1) 3^5 + \phi(5) 3) + 3^3 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} (243 + 12) + 27 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{255}{5} + 27 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (78) \\
 &= 39
 \end{aligned}$$

São 39 colares distintos como resposta para este item.

(c) Desta vez atribui-se os pesos

$$\omega(\text{preto}) = p$$

$$\omega(\text{cinza}) = 1$$

$$\omega(\text{branco}) = 1$$

e aplica-se o TEP, substituindo o enumerador de estoque no índice de ciclos de D_{10} , obtendo

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sum_{d|5} \phi(d) (p^d + 1^d + 1^d)^{5/d} + (p + 1 + 1) (p^2 + 1^2 + 1^2)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{10} ((p + 2)^5 + 4(p^5 + 2)) + \frac{(p + 2)(p^2 + 2)^2}{2} \\
 &= 10p + 12p^2 + 6p^3 + 2p^4 + p^5 + 8
 \end{aligned}$$

Nesta função geradora busca-se o coeficiente de p^1 que é igual a 10.

Abaixo estão listados todos os colares correspondentes aos números encontrados nesta solução:

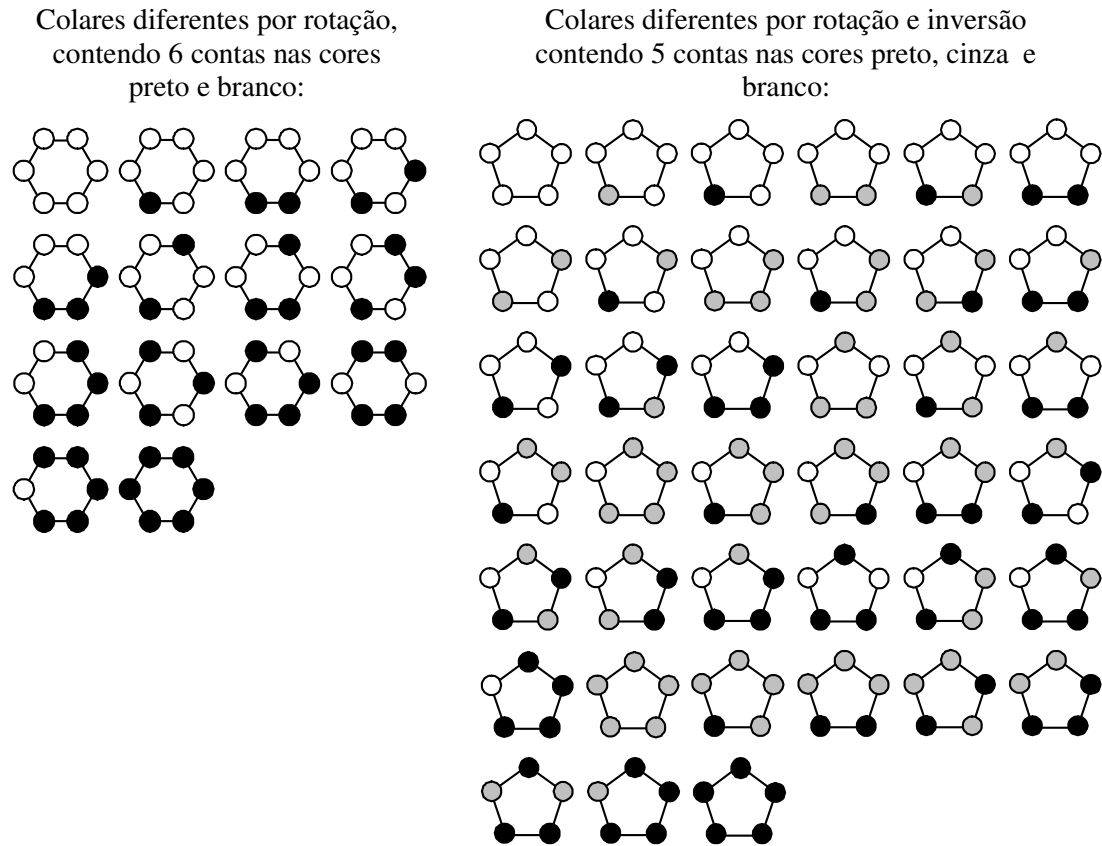


Figura 11: *Listagem dos colares referentes ao **Problema 93***

Outra aplicação é a obtenção da função geradora para o número de partições do inteiro n em no máximo k partes.

No **Corolário 82** toma-se $G = S_n$, enumerador de estoque igual a $\frac{1}{1-x}$ e obtém-se,

através da função geradora para o índice de ciclos de S_n ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} Z\left(S_n; \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-x^2}, \frac{1}{1-x^3}, \dots, \frac{1}{1-x^n}\right) z^n &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} \frac{z^j}{j}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kj} \frac{z^j}{j}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x^k z)^j}{j}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^k z}\right) \\
 &= \frac{1}{1-z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-zx^k}
 \end{aligned}$$

que fornece o resultado desejado, em vista do **Teorema 18**.

Problema 95. *Obtenha os índices de ciclos para os tabuleiros de xadrez $n \times n$, considerando 2 casos para as simetrias do tabuleiro: apenas rotações e considerando rotações e reflexões. Determine o número de colorações distintas do tabuleiro de xadrez $n \times n$ utilizando c cores diferentes, em ambos os casos.*

Solução 96. *Obviamente, as simetrias do tabuleiro são as mesmas simetrias do quadrado. Assim devemos considerar a ação do grupo de simetrias do quadrado (rotacionais e diedrais) no conjunto das n^2 células do tabuleiro.*

Denotamos o grupo de simetrias rotacionais e diedrais do tabuleiro respectivamente por $G_{C\Box}$ e $G_{D\Box}$.

Se uma simetria leva a região a numa região b do tabuleiro, ambas denotadas por números na figura, utilizamos a notação $a \rightarrow b$.

Observe a figura abaixo:

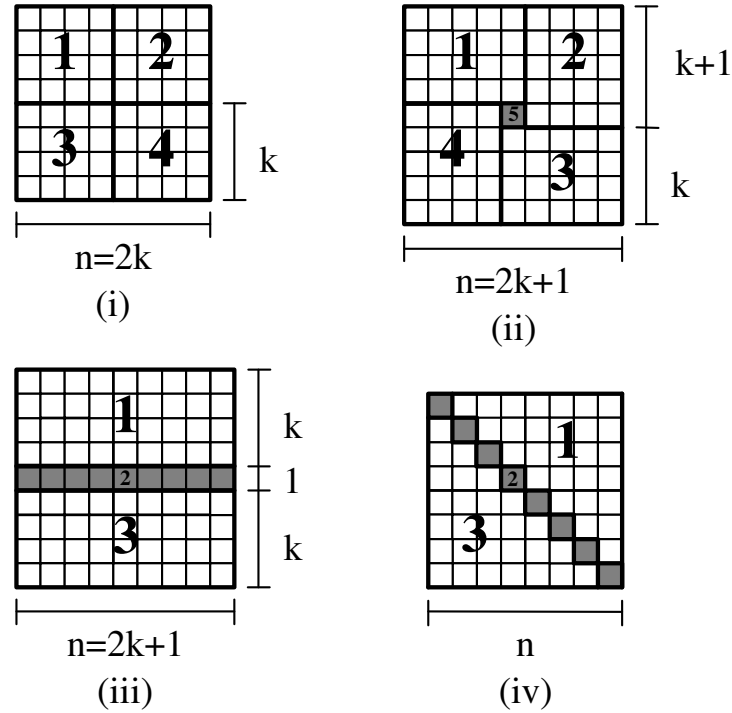


Figura 12: Casos a serem considerados para as simetrias do quadrado aplicadas ao tabuleiro de xadrez $n \times n$

1) e:

A identidade e determina uma permutação de n^2 símbolos (células) composta apenas de pontos fixos. Portanto, sua contribuição para o índice de ciclos é

$$e : x_1^{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

2) a_1, a_3 :

Estas rotações correspondem aos ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Primeiro consideramos n par, $n = 2k$. Observando o item (i) da figura, vemos que as simetrias a_1 e a_3 induzem, cada uma, uma permutação de n^2 símbolos, composta de $k^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$ ciclos de comprimento 4. Isto porque a_1 leva $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, e a_3 leva $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Se $n = 2k + 1$, olhamos para a figura (ii) e vemos que a_1 e a_3 induzem, cada uma, uma permutação de n^2 símbolos, composta de 1 ponto fixo e $k(k + 1) = \frac{n-1}{2} \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4}$ ciclos de comprimento 4. Portanto a contribuição de a_1 e a_3 juntas para o índice de ciclos é dada por

$$a_1, a_3 : \begin{cases} 2x_4^{\frac{n^2}{4}}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 2x_1^1 x_4^{\frac{n^2-1}{4}}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

3) a_2 :

Esta rotação corresponde a um ângulo π .

Se n é par, observamos em (i) que $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$. Portanto a_2 induz uma permutação de n^2 símbolos, composta por $\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$ ciclos de comprimento 2. Assim temos que a contribuição de a_2 é

$$a_2 : \begin{cases} x_2^{\frac{n^2}{2}}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ x_1^1 x_2^{\frac{n^2-1}{2}}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

De maneira análoga às análises feitas anteriormente, calculamos as seguintes contribuições das reflexões:

4) p_1, p_2

$$p_1, p_2 : \begin{cases} 2x_2^{\frac{n^2}{2}}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 2x_1^n x_2^{\frac{n(n-1)}{2}}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

5) q_1, q_2

$$q_1, q_2 : 2x_1^n x_2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Assim temos os seguintes índices de ciclos:

$$\begin{aligned} Z(G_{C\Box}; x_1, x_2, x_4) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \left(x_1^{n^2} + 2x_4^{\frac{n^2}{4}} + x_2^{\frac{n^2}{2}} \right), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{4} \left(x_1^{n^2} + 2x_1 x_4^{\frac{n^2-1}{4}} + x_1 x_2^{\frac{n^2-1}{2}} \right), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \\ Z(G_{D\Box}; x_1, x_2, x_4) &= \begin{cases} \frac{1}{8} \left(x_1^{n^2} + 2x_4^{\frac{n^2}{4}} + 3x_2^{\frac{n^2}{2}} + 2x_1^n x_2^{\frac{n(n-1)}{2}} \right), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{8} \left(x_1^{n^2} + 2x_1 x_4^{\frac{n^2-1}{4}} + x_1 x_2^{\frac{n^2-1}{2}} + 4x_1^n x_2^{\frac{n(n-1)}{2}} \right), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Observando que

$$\left\lfloor \frac{n^2 - 1}{4} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{n^2 - 1}{4}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\left\lfloor \frac{n^2 - 1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{n^2 - 1}{2}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

e definindo

$$b_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$c_n = 2b_{n-1} = \begin{cases} 2, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$d_n = 2b_n + 2 = \begin{cases} 2, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

então

$$Z(G_{C\Box}; x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{4} \left(x_1^{n^2} + 2x_1^{b_n} x_4^{\left\lfloor \frac{n^2-1}{4} \right\rfloor} + x_1^{b_n} x_2^{\left\lfloor \frac{n^2-1}{2} \right\rfloor} \right)$$

$$Z(G_{D\Box}; x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{8} \left(x_1^{n^2} + 2x_1^{b_n} x_4^{\left\lfloor \frac{n^2-1}{4} \right\rfloor} + x_1^{b_n} x_2^{\left\lfloor \frac{n^2-1}{2} \right\rfloor} + c_n x_2^{\frac{n^2}{2}} + d_n x_1^n x_2^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$$

Pelo **Corolário 81**, obtemos o total de colorações do tabuleiro $n \times n$ em c cores, substituindo

$$x_1 = x_2 = x_4 = c$$

nos índices de ciclos respectivos.:

$$Z(G_{C\Box}; c, c, c) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(c^{n^2} + c^{\frac{n^2}{2}} + 2c^{\frac{n^2}{4}} \right), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{4} \left(c^{n^2} + c^{\frac{n^2+1}{2}} + 2c^{\frac{n^2+3}{4}} \right), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$Z(G_{D\Box}; c, c, c) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(c^{n^2} + 2c^{\frac{n(n+1)}{2}} + 3c^{\frac{n^2}{2}} + 2c^{\frac{n^2}{4}} \right), & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{8} \left(c^{n^2} + 4c^{\frac{n(n+1)}{2}} + c^{\frac{n^2+1}{2}} + 2c^{\frac{n^2+3}{4}} \right), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

6.5 Enumerando grafos

Como o TEP enumera órbitas de funções, procedemos com uma correspondência natural entre grafos e funções. Seja $D = [p] = \{1, 2, \dots, p\}$, enquanto que denotamos

$D^{(2)}$ como o conjunto de todos os 2-subconjuntos de X . Então com $C = \{0, 1\}$, as funções de $D^{(2)}$ em C representam grafos rotulados de ordem p . Cada função f corresponde ao grafo $G(f)$ com conjunto de vértices D , no qual i e j são adjacentes se, e somente se, $f(\{i, j\}) = 1$. Portanto duas funções f e h representam o mesmo grafo se existir uma permutação α de D tal que, sempre que i e j forem adjacentes em $G(f)$, então $\alpha(i)$ e $\alpha(j)$ são adjacentes em $G(h)$. Portanto $G(f)$ e $G(h)$ são isomorfos se, e somente se, para alguma permutação α do conjunto D , tivermos

$$f(\{i, j\}) = h(\{\alpha(i), \alpha(j)\}), \forall \{i, j\} \in D^{(2)}$$

Estas observações sugerem as seguintes definições gerais.

Dado uma permutação $\sigma \in S_p$, corresponde uma permutação σ^* de $D^{(2)}$, definida por

$$\sigma^*(\{i, j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}, \forall \{i, j\} \in D^{(2)}$$

Desta forma o grupo que estaremos trabalhando é o grupo de todas as permutações σ^* correspondentes às permutações $\sigma \in S_p$. Seja $S_p^{(2)}$ este grupo, então

$$S_p^{(2)} = \{\sigma^* : \sigma \in S_p\}$$

O grupo $S_p^{(2)}$ age no conjunto $X = C^D = \mathcal{F}([p], \{0, 1\})$ da maneira usual, isto é

$$\sigma^* \cdot f = f \circ \sigma^{*-1}, \forall \sigma^* \in S_p^{(2)}, \forall f \in X$$

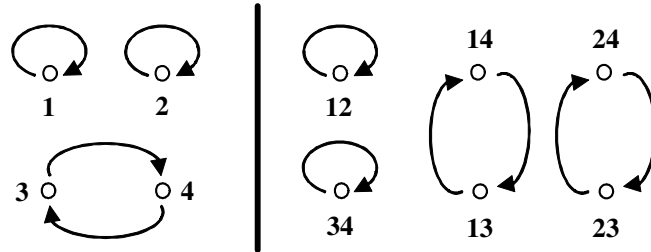


Figura 13: A permutação $(1)(2)(34)$ e sua permutação induzida em $S_4^{(2)}$

Segue de um exercício 11.6.6 de [An Introduction to Combinatorics - Alan Slomson], que para todo $p \neq 2$, a aplicação $\sigma \mapsto \sigma^*$ é um isomorfismo entre S_p e $S_p^{(2)}$. Disto se segue que, para $p \neq 2$, $S_p^{(2)}$ possui $p!$ permutações. O conjunto $D^{(2)}$ contém $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ possíveis arestas e portanto $S_p^{(2)}$ consiste, em geral, de uma pequena proporção de todas as permutações de $D^{(2)}$.

A seguir são enumerados os gráficos de ordem p pelo número de arestas.

Teorema 97. *O polinômio $g_p(x)$ que enumera grafos de ordem p pelo número de arestas é dado por*

$$g_p(x) = Z(S_p^{(2)}; 1+x, 1+x^2, \dots),$$

onde o índice de ciclos de $S_p^{(2)}$ é dado por:

$$Z(S_p^{(2)}) = \frac{1}{p!} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=p} \frac{p!}{\prod_{j=1}^p j^{k_j} k_j!} \prod_{j=1}^p x_{2j+1}^{jk_{2j+1}} \prod_{j=1}^p (x_j x_{2j}^{j-1})^{k_{2j}} x_j^{j \binom{k_j}{2}} \prod_{r < t} x_{[r,t]}^{(r,t)k_r k_t}$$

Dem. Definimos uma função peso ω em $C = \{0, 1\}$ por $\omega(0) = 1$, $\omega(1) = x$. Como já observamos anteriormente que $S_p^{(2)}$ é um grupo atuando em X , segue o resultado pelo TEP.

Agora vamos calcular o índice de ciclos para $S_p^{(2)}$. Dada uma permutação $\sigma \in S_p$ de tipo cíclico $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}$, denotamos o tipo cíclico de sua induzida σ^* pela flecha

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p} \longrightarrow TC(\sigma^*) \quad (6.3)$$

Para cada σ , existem 2 tipos de contribuições feitas por σ^* para o índice desejado; a primeira vem dos pares em $D^{(2)}$, nos quais ambos elementos estão no mesmo ciclo de σ , e a segunda vem dos pares de $D^{(2)}$, com cada um dos 2 elementos em ciclos distintos de σ .

Determinamos a primeira de tais contribuições. Seja $C_j = (12 \dots j)$ um ciclo de comprimento j em σ . A Figura 14 abaixo mostra a permutação induzida por C_j

para $j = 2, \dots, 6$. Observe que se j é ímpar, então C_j induz $\frac{j-1}{2}$ ciclos do mesmo comprimento j , isto é,

$$x_j \longrightarrow x_j^{\frac{j-1}{2}}$$

Por outro lado, quando j é par, encontramos

$$x_j \longrightarrow x_{\frac{j}{2}} x_j^{\frac{j-2}{2}}$$

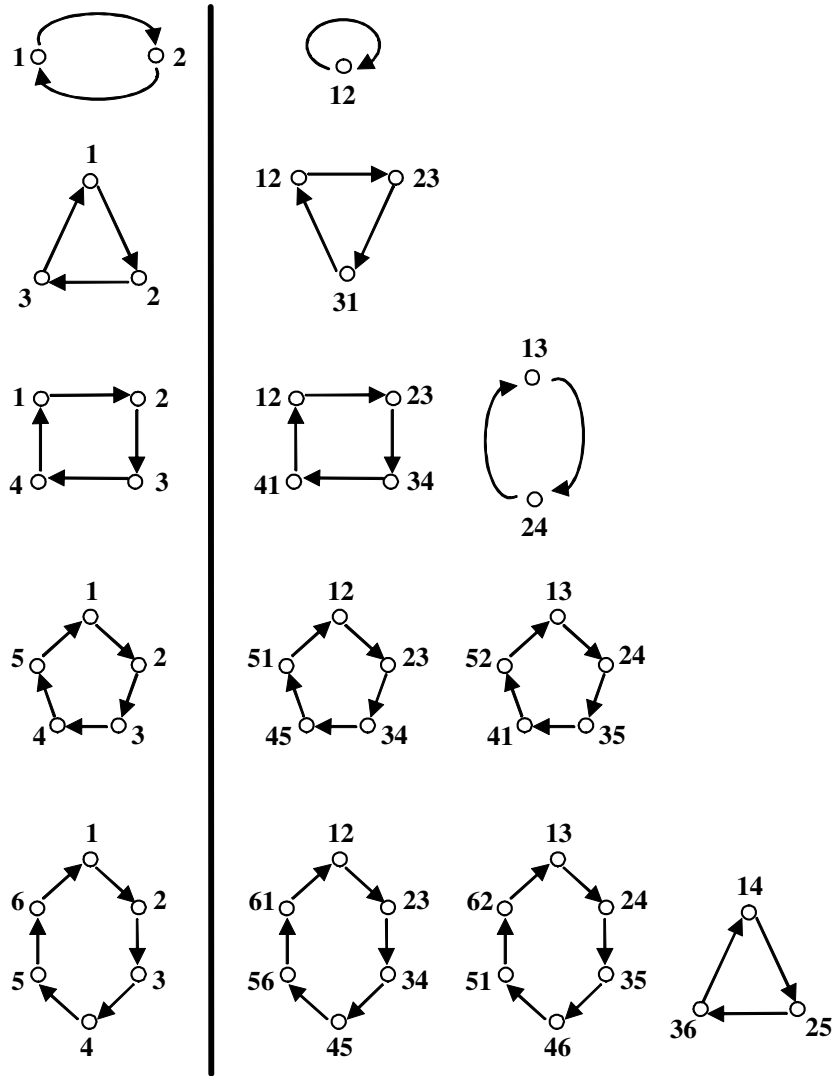


Figura 14: Ciclos em S_p e as permutações induzidas em $S_p^{(2)}$.

Portanto como existem k_j ciclos de comprimento j em σ , os pares de elementos contidos em ciclos comuns contribuem

$$x_j^{k_j} \longrightarrow \begin{cases} x_j^{k_j \frac{j-1}{2}}, & \text{se } j \equiv 1 \pmod{2} \\ \left(x_{\frac{j}{2}} x_j^{\frac{j-2}{2}}\right)^{k_j}, & \text{se } j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (6.4)$$

Para calcular a segunda contribuição, consideramos dois ciclos C_r e C_t em σ . Então os ciclos C_r e C_t induzem nos pares de elementos, um elemento de cada ciclo, exatamente (r, t) ciclos de comprimento $[r, t]$. Em particular, quando $r = t = j$, eles contribuem j ciclos de comprimento j . Portanto, quando $r \neq t$, temos

$$x_r^{k_r} x_t^{k_t} \longrightarrow x_{[r,t]}^{(r,t)k_r k_t} \quad (6.5)$$

e quando $r = t = j$,

$$x_j^{k_j} \longrightarrow x_j^{j \binom{k_j}{2}} \quad (6.6)$$

Agora multiplicando ambos os lados direitos de (6.4), (6.5) e (6.6) por todos os casos aplicáveis, obtemos (6.3) e chegamos na expressão para o índice de ciclos de $S_p^{(2)}$. ■

Teorema 98. *O número g_n de grafos com n vértices, não isomorfos 2 a 2, é dado pela fórmula*

$$g_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{2^{G_k}}{N_k}$$

onde a soma é tomada sobre todas as soluções não-negativas da equação

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$$

e

$$G_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{r,t=1}^n k_r k_t (r, t) - \sum_{j \text{ ímpar}} k_j \right)$$

onde (j, t) é o máximo divisor comum de j e t , e

$$N_k = 1^{k_1} 1! 2^{k_2} 2! \dots n^{k_n} n!$$

Dem. Basta substituir $x = 1$ na fórmula do teorema anterior para obter g_n como a soma dos coeficientes do polinômio, assim

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{1}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} k_j!} \prod_{j=1}^n 2^{jk_{2j+1}} \prod_{j=1}^n (2^j)^{k_{2j}} 2^{j \binom{k_j}{2}} \prod_{r < t} 2^{(r,t)k_r k_t} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{1}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} k_j!} 2^{\sum_{j=1}^n j k_{2j+1}} 2^{\sum_{j=1}^n j k_{2j} + j \binom{k_j}{2}} 2^{\sum_{r < t} (r,t)k_r k_t} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{1}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} k_j!} 2^{\sum_{j=1}^n j k_{2j+1} + \sum_{j=1}^n j k_{2j} + j \binom{k_j}{2} + \sum_{r < t} (r,t)k_r k_t}
\end{aligned}$$

Observe agora que o expoente G_k da potência de 2 acima pode ser manipulado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
G_k &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n 2j k_{2j+1} + \sum_{j=1}^n \left(2j k_{2j} + 2j \binom{k_j}{2} \right) + 2 \sum_{j < t} (j, t) k_j k_t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (2j+1) k_{2j+1} - \sum_{j=1}^n k_{2j+1} + \sum_{j=1}^n 2j k_{2j} + \sum_{j=1}^n 2j \binom{k_j}{2} + 2 \sum_{j < t} (j, t) k_j k_t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j \text{ ímpar}} j k_j - \sum_{j \text{ ímpar}} k_j + \sum_{j \text{ par}} j k_j + \sum_{j=1}^n 2j \frac{k_j(k_j-1)}{2} + 2 \sum_{j < t} (j, t) k_j k_t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j k_j - \sum_{j \text{ ímpar}} k_j + \sum_{j=1}^n (j, j) (k_j^2 - k_j) + \sum_{j < t} (j, t) k_j k_t + \sum_{j > t} (t, j) k_t k_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- \sum_{j \text{ ímpar}} k_j + \sum_{j=1}^n (j, j) k_j^2 + \sum_{j < t} (j, t) k_j k_t + \sum_{j > t} (j, t) k_j k_t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,t=1}^n k_j k_t (j, t) - \sum_{j \text{ ímpar}} k_j \right)
\end{aligned}$$

E assim a demonstração do corolário é concluída. ■

De maneira completamente análoga, mas definindo outros grupos induzidos pode se mostrar o seguinte.

Teorema 99. (i) O número d_n de digrafos com n vértices, não isomorfos 2 a 2, é

dado pela fórmula

$$d_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{2^{D_k}}{N_k}$$

onde

$$D_k = \sum_{j,t=1}^n k_j k_t (j, t) - \sum_{j=1}^n k_j$$

(ii) O número t_n de torneios (digrafos completos e anti-simétricos) com n vértices, não isomorfos 2 a 2, é dado pela fórmula

$$t_n = \sum_{k_1+3k_3+5k_5+\dots=n} \frac{2^{T_k}}{N_k}$$

onde

$$T_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,t=1}^n k_j k_t (j, t) - \sum_{j=1}^n k_j \right)$$

Dem. [5, Págs. 119-127]. ■

6.6 Generalizações e Aplicações

Sejam D e C conjuntos finitos, $|D| = n$, e sejam G e H grupos finitos, G agindo em D e H agindo em C . Assumimos que C e D são disjuntos. O produto direto $G \times H$ age em $X = \mathcal{F}(D, C)$ da seguinte forma:

$$\forall f \in X, \forall (\sigma, \delta) \in G \times H \text{ tem-se } (\sigma, \delta) \cdot f = \delta \circ (f \circ \sigma^{-1})$$

Para maiores detalhes ver [2, Pág. 229] ou [13, Seção 5.7].

Proposição 100. Se $Z(G)$ e $Z(H)$ são os índices de ciclos dos grupos G e H , respectivamente, então o índice de ciclos do produto direto $G \times H$ é dado por

$$Z(G \times H) = Z(G) \cdot Z(H)$$

Dem. Ver [2, Pág. 253]. ■

Teorema 101. (i) *O número de órbitas de colorações de D a C definidas pela ação acima é igual a*

$$\frac{1}{H} \sum_{\delta \in H} Z(G; m_1(\delta), m_2(\delta), \dots, m_n(\delta))$$

onde

$$m_i(\delta) = \sum_{d|i} dc_d(\delta), i \in [n]$$

(ii) *Na forma diferencial, o número de órbitas é igual a*

$$Z\left(G; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots\right) Z\left(H; \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right), \exp\left(2 \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k}\right), \exp\left(3 \sum_{k=1}^{\infty} x_{3k}\right), \dots\right)$$

calculado em

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$$

Dem. (i) Ver [5, Págs. 135-137].

(ii) Ver [13, Pág. 157]. ■

A seguir ilustramos algumas aplicações das generalizações enunciadas, começando pelo exemplo do tabuleiro de xadrez.

Problema 102. *Encontrar o número n de padrões de colorações em preto e branco de tabuleiros de xadrez 2×2 , considerando apenas o contraste das cores (Aplicação encontrada em [13, Pág. 158]).*

Solução 103. *No exemplo dos tabuleiros 2×2 , seja $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ o conjunto dos quatro quadrados e $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$ o das cores preto e branco. Seja G o grupo de rotações dos tabuleiros,*

$$G = \{e, (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \alpha_3), (\alpha_1 \alpha_4) (\alpha_2 \alpha_3), (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_2)\}$$

estamos interessados apenas no contraste das cores preto e branco, então tomamos

$$H = \{e, (\text{preto branco})\}$$

Então vem da forma diferencial do **Teorema 101** (ii) que o número n de diferentes padrões de contraste é dado por

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) (e^{2(x_1+x_2+x_3+x_4)} + e^{2(x_2+x_4)}) \right] (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0) \\ &= [e^{2x_2+2x_4} + 3 \exp(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4)] (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0) \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

como pode ser observado na Figura 3.

Problema 104. De quantas maneiras podemos distribuir 2 bolas azuis, 2 vermelhas em 2 caixas quadradas e 1 redonda? Não importa a ordem entre as caixas nem a ordem das bolas dentro das caixas, e caixas podem ficar vazias.

Solução 105. Aqui temos $D = \{a_1, a_2, v_1, v_2\}$, $G = S_2 \times S_2$, $C = \{r, q_1, q_2\}$, $H = S_1 \times S_2$

$$Z(G) = Z(S_2 \times S_2) = Z(S_2)^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2)^2, \text{ pela } \mathbf{Proposição 100}$$

$$\text{Se } \delta = ((1), (1')(2')), m_1(\delta) = m_2(\delta) = 3$$

$$\text{Se } \delta = ((1), (1'2')), m_1(\delta) = 1, m_2(\delta) = 3$$

E pelo **Teorema 101** (i) segue que o número de maneiras distintas é dado por:

$$\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!2!} \left[(3^2 + 3)^2 + (1^2 + 3)^2 \right] = \frac{1}{8} (144 + 16) = 20$$

REFERÊNCIAS

- [1] A. Slomson. **An Introduction to Combinatorics**. Chapman and Hall, United Kingdom, 1991.
- [2] P. J. Cameron. **Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms**. Cambridge University Press, United Kingdom 1994.
- [3] I. Niven. **Formal Power Series**, American Mathematical Monthly 76 (1969) 871-889.
- [4] N. G. de Bruijn. **Pólya's Theory of Counting**, Applied Combinatorial Mathematics 144-184. John Wiley & Sons, New York 1964.
- [5] F. Harary and E. M. Palmer. **Graphical Enumeration**. Academic Press, New York 1973.
- [6] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy. **Special Functions**, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 71. Cambridge University Press, New York 1999.
- [7] R. P. Stanley. **Enumerative Combinatorics, Vol I**, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49. Cambridge University Press, New York 1997.
- [8] R. P. Stanley. **Enumerative Combinatorics, Vol II**, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62. Cambridge University Press, New York 1999.
- [9] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik. **Concrete Mathematics**, 2nd Edition. Addison-Wesley Publishing Company, New York 1995.
- [10] G. Pólya. **Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen**, Acta Math. 68, 145-254 (1937).
- [11] J. P. Santos, M. P. Mello e I. T. C. Murari. **Introdução à Análise Combinatória**, 3ª Edição revista. Editora da Unicamp 2002.
- [12] H. S. Wilf. **Generatingfunctionology**, Academic Press Inc, versão disponível na web para objetivos educacionais, 1994.
<http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [13] C. L. Liu. **Introduction to Combinatorial Mathematics**, McGraw-Hill, New York 1968.

- [14] G. Pólya, R. E. Tarjan, D. R. Woods. **Notes on Introductory Combinatorics**, Progress in Computer Science and Applied Logic 4. Birkhäuser, Boston 1983.