

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

OSCILAÇÕES DE BURACOS NEGROS

por

Fábio Dadam [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

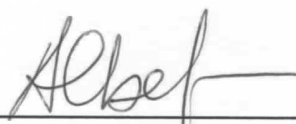
Orientador: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

OSCILAÇÕES DE BURACOS NEGROS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fábio Dadam** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 04 de Fevereiro de 2005.



Prof. Dr. ALBERTO VAZQUEZ SAA

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa.
(Orientador) IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. Marcos B. Jardim.
IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. Frank M. Forger.
IME-USP

Prof. Dr. Caio J. C. Negreiros.
(Suplente) IMECC-UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Dadam, Fábio

D12o Oscilações de buracos negros / Fábio Dadam -- Campinas, [S.P.
:s.n.], 2005.

Orientador : Alberto Vazquez Saa

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Buracos negros (Gravitação). 2. Ondas gravitacionais. 3.
Geometria riemaniana. I. Saa, Alberto Vazquez. II. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: Black hole oscillations

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Black holes (Gravitation). 2. Gravitational waves. 3.
Riemannian geometry.

Área de concentração: Geometria

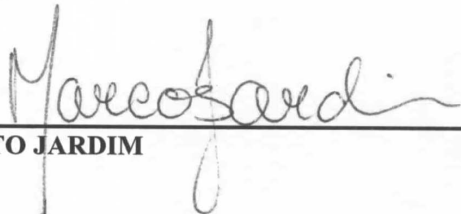
Titulação: Mestre em matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP)
Prof. Dr. Frank Michael Forger (IME-USP)
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros (UNICAMP)

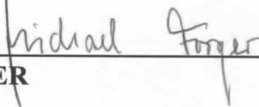
**Dissertação de Mestrado defendida em 04 de fevereiro de 2005 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA



Prof (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



Prof (a). Dr (a). FRANK MICHAEL FORGER

Ao meu herói
“Espanta-me o silêncio desses espaços infinitos.”

O Caminho

*Agradeço a você,
Professor Nelson Hein, por ter me iluminado o caminho quando não
consegui enxergá-lo;
Professora Rosinete Gaertner, por ter me ensinado o valor do caminho
quando tentei deixá-lo;
Professora Maria Salett Biembengut, por insistir que seguisse o caminho
mesmo quando me recusei;
Professor Alberto Saa, por ter me dado liberdade para seguir o caminho
sempre que precisei.*

*Agradeço a você,
Tiago, por ter compartilhado o caminho;
Rogério, por ter poupado o caminho;
Roy, por ter bebido o caminho;
Andrielber, por ter percorrido parte do caminho;
Gustavo, por ter assistido o caminho;
Edgar, por ter dormido no caminho;
Émille, por ter motivado o caminho;
Alessandra, por ter sido a irmã durante o caminho.*

*Agradeço a você,
Rodrigo, por me ajudar a entender o caminho e me puxar para fora;
Marcelo, por gritar comigo e me puxar para dentro;
Julião, por me escutar com calma e permanecer no centro;
Fábio, por me estender a mão na mais sofrida hora.*

*Agradeço a você,
Tia Ite, pelo apoio quando me acharam enganado;
Tia Dalva, pelo café que me manteve acordado;
Minha Mãe, por me ajudar do seu jeito e sempre estar ao meu lado;
e a todos aqueles que caminharam comigo, muito obrigado!*

RESUMO

Oscilações de buracos negros adquiriram importância nos últimos anos devido à possibilidade de se comprovar a existência de tais corpos celestes por meio da detecção da radiação gravitacional emitida por eles. Nesse trabalho, o estudo da propagação de ondas de diferentes tipos incidentes em um buraco negro é apresentado sob o ponto de vista matemático. Inicialmente, são usados elementos de Geometria Diferencial a fim de se estabelecer a estrutura matemática da gravitação e, a partir de um conjunto de hipóteses, determina-se uma família de soluções das Equações de Einstein que caracteriza os buracos negros (Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman). As Equações de Teukolsky, que governam as perturbações de buracos negros, são obtidas com a ajuda do formalismo de Newman-Penrose e transformadas em uma equação de onda unidimensional. Obedecendo a condições de fronteira específicas, soluções dessa equação para frequências complexas são então determinadas a partir de diferentes métodos semi-analíticos.

ABSTRACT

In the past few years, black hole oscillations became a very interesting research area mainly due to the possibility of proving the existence of such celestial bodies through the gravitational radiation emitted by them. In this work, the study of the propagation of different kinds of incident waves on a black hole is presented under the mathematical point of view. Initially, elements of differential geometry are used to establish the mathematical structure of gravitation and, under certain hypotheses, a family of solutions to the Einstein equations is obtained, describing the black holes (Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr and Kerr-Newman). Teukolsky equations, which govern the black hole perturbations, are obtained with the aid of Newman-Penrose formalism and transformed to a one-dimensional wave equation. According to certain boundary conditions, solutions of this equation for complex frequencies are determined from different semi-analytic methods.

Introdução

Buracos negros consistem em soluções exatas das Equações de Einstein, as quais descrevem como a matéria e a energia afetam a geometria do espaço-tempo, produzindo o que se conhece como gravitação. Embora ainda não exista nenhuma evidência concreta da existência de buracos negros na Natureza, imagina-se que eles sejam corpos astronômicos formados pelo colapso estelar e que constituem-se na fonte de energia responsável pela atividade observada no núcleo das galáxias. Na década de 50, o trabalho pioneiro de Regge & Wheeler [27] iniciou o estudo das perturbações dos buracos negros com o intuito de analisar sua estabilidade mediante influência externa. Esse estudo foi motivado pelo fato de que buracos negros, assim como as estrelas, oscilam mediante a incidência de campos de ondas, ou acréscimo de matéria, de forma que surge a questão: caso tal objeto se forme, será possível a sua permanência na Natureza? Tentando responder a essa questão, Vishweshwara [31] propôs a necessidade de se considerar o efeito das frequências complexas nas equações de perturbação, em que a parte real representa a frequência de oscilação e a parte imaginária representa a taxa de amortecimento; tal observação é condizente com o fato de que um buraco negro deve ser visto como uma membrana infinita ao invés de um sistema oscilante fechado, como uma corda de violão.

Quando um corpo astronômico oscila, ele emite radiação determinada principalmente pelo fenômeno que provocou tal oscilação; no entanto, acredita-se que uma perturbação irá, em seus últimos estágios, decair de uma maneira característica do objeto oscilante e independente da causa original, apresentando frequências e taxas de amortecimento determinadas exclusivamente pelos parâmetros daquele objeto, da mesma forma que as últimas notas emitidas por um sino. Soluções das equações de perturbação dos buracos negros para certas frequências complexas, denominadas *modos quase-normais* (MQN), captam essa idéia e permitem caracterizar um buraco negro através

da radiação gravitacional emitida por ele. Após o trabalho de Vishweshwara, foram feitos vários desenvolvimentos numéricos [8] e semi-analíticos ([10], [13], [19]), mas nos últimos anos, o interesse pelos MQN de buracos negros intensificou-se porque, diferentemente do caso estelar, a teoria prevê que a radiação gravitacional emitida por buracos negros com grande massa e rotação é suficientemente forte para ser detectada pelos detectores de ondas gravitacionais que estão sendo construídos atualmente [16]. Assim, o estudo dos MQN pode ser a chave para se comprovar a existência de buracos negros na Natureza.

O objetivo principal desse trabalho é realizar uma revisão da literatura e apresentar a teoria em que se baseia o estudo das perturbações de buracos negros sob um ponto de vista axiomático, deduzindo os resultados a partir de argumentos puramente matemáticos desde o início e mostrando que as construções realizadas se adequam perfeitamente às interpretações físicas conhecidas. No Capítulo 1, construir-se-á toda a estrutura matemática a fim de se caracterizar o espaço-tempo como uma variedade riemanniana quadridimensional em que o tensor métrico obedece às Equações de Einstein. No Capítulo 2, mostrar-se-á que, sob determinadas hipóteses, as Equações de Einstein apresentam uma única família de soluções de buracos negros e que existem quatro tipos básicos de buracos negros, determinados por um conjunto de três parâmetros.

No Capítulo 4, as equações dos campos de partículas sem massa - fótons, neutrinos e grávitons - serão expressas no formalismo de Newman-Penrose, introduzido no Capítulo 3, e então reduzidas e separadas nas chamadas Equações de Teukolsky. A partir de uma forma padrão das Equações de Teukolsky, serão determinadas condições necessárias e suficientes para transformá-la numa equação de onda. Em cada caso (fótons, neutrinos e grávitons), serão obtidas as barreiras de potencial e feita uma análise dos coeficientes de reflexão e transmissão das ondas incidentes nos buracos negros a fim de se entender como elas são espalhadas e absorvidas. A teoria de perturbação via formalismo de Newman-Penrose foi aqui adotada, ao invés do procedimento usual de linearização das Equações de Einstein, por ser somente através dessa abordagem que o problema adquire uma solução analítica completa. Mesmo assim, como será visto no Capítulo 5, as equações de perturbação do buraco negro de Kerr-Newman - a solução mais geral - aparentemente não permitem o desacoplamento evidenciado pelas soluções de Schwarzschild e Kerr (Capítulo 4), e de Reissner-Nordström (Capítulo 5). Finalmente, o Capítulo 6 apresentará a formulação matemática dos modos

quase-normais como soluções da equação de onda, obtida no Capítulo 4, para frequências complexas, e satisfazendo condições de fronteira apropriadas para uma resposta extrema do buraco negro a perturbações externas; além disso, será feita uma análise dos principais métodos semi-analíticos desenvolvidos na tentativa de se determiná-los.

O material é apresentado na forma de definições, teoremas e provas de teoremas, visando rigor matemático e, ao mesmo tempo, propiciando liberdade ao leitor para omitir os conceitos e resultados mais básicos em uma leitura rápida do texto. Além disso, cada capítulo contém uma última seção cuja finalidade é contextualizar fisicamente os conceitos e resultados matemáticos apresentados nas seções anteriores.

Sumário

Agradecimento	i
Resumo	iii
Abstract	v
Introdução	1
1 TEORIA DA GRAVITAÇÃO	7
1.1 Elementos de Geometria Diferencial	8
1.2 As Equações de Einstein	28
2 BURACOS NEGROS	33
2.1 Soluções das Equações de Einstein	34
2.2 Buracos Negros	44
3 FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE	49
3.1 Formalismo de Newman-Penrose	50
3.2 Cones de Luz	62
4 PERTURBAÇÕES DE BURACOS NEGROS	63
4.1 Equações de Teukolsky	64
4.1.1 Fótons	65
4.1.2 Neutrinos	67
4.1.3 Grávitons	78
4.1.4 Equações Gerais de Teukolsky	81
4.2 Teoria da Perturbação	81
4.2.1 Teoria da Transformação	81
4.2.2 Potenciais	86
4.2.3 Teoria de Espalhamento	89
4.3 Modos Normais	93

5	BURACOS NEGROS CARREGADOS	97
5.1	Perturbações do Buraco Negro de Kerr-Newman	98
5.2	Perturbações do Buraco Negro de Reissner-Nordström	100
5.3	Considerações Finais	104
6	MODOS QUASE-NORMAIS	107
6.1	Descrição Matemática dos MQN	108
6.2	Determinação dos MQN	110
6.2.1	Potenciais Invertidos	111
6.2.2	Aproximação WKB	115
6.2.3	Frações Contínuas	118
6.3	Discussão dos Resultados	120
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	125
	Referências Bibliográficas	129

Capítulo 1

TEORIA DA GRAVITAÇÃO

O objetivo desse capítulo é fornecer a base matemática necessária para que o leitor possa compreender as Equações de Einstein da Gravitação. Com esse fim, serão introduzidos os conceitos de variedade diferenciável, conexão e geodésica, bem como as definições dos tensores de torção e curvatura. A partir daí, será introduzida uma métrica e mostrar-se-á que a mesma induz de forma única uma conexão na variedade, agora denominada variedade riemanniana. As Equações de Maurer-Cartan foram incluídas porque serão utilizadas no Capítulo 2 para a determinação das soluções de buracos negros. Identificado o espaço-tempo com uma variedade riemanniana, as Equações de Einstein são postuladas como uma condição a ser obedecida pela métrica em tal variedade e interpretadas como a ação da energia-momento sobre a geometria do espaço-tempo, cuja consequência se conhece como gravitação.

1.1 Elementos de Geometria Diferencial

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável n -dimensional é um conjunto M munido de uma família $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tal que:*

- i) *Cada $\phi_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um mapeamento injetor de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M , denominado parametrização.*
- ii) $\bigcup_\alpha \phi_\alpha(U_\alpha) = M$.
- iii) *Quando $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a aplicação $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$ é um difeomorfismo¹ entre os subconjuntos abertos $\phi_\alpha^{-1}(W)$ e $\phi_\beta^{-1}(W)$, contidos no \mathbb{R}^n .*
- iv) *A família $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ é maximal em relação às condições anteriores.*

A família $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, denominada *atlas* ou *estrutura diferenciável*, induz de forma natural uma topologia em M , definindo-se que $A \subseteq M$ é *aberto* se $\phi_\alpha^{-1}(A \cap \phi_\alpha(U_\alpha)) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto para todo α . De fato, segue de (i) que M e \emptyset são abertos. As condições relativas à união e à interseção finita de abertos decorrem das relações

$$\phi_\alpha^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

$$\phi_\alpha^{-1}\left(\bigcap_\alpha U_\alpha\right) = \bigcap_\alpha \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

e das propriedades distributiva e associativa dos operadores união e interseção.

A idéia por trás do conceito² de variedade diferenciável é a de um espaço que pode ser curvo e possuir topologias complicadas, mas que localmente se assemelha ao \mathbb{R}^n . Dessa forma, as condições (i)-(iii) da Definição 1.1 garantem que toda variedade pode ser mapeada mediante *cartas* (U_α, ϕ_α) , desde que cartas distintas possam ser transformadas uma na outra quando sobrepostas. O propósito da condição (iv) é evitar que dois espaços equivalentes, munidos de atlas diferentes, contem como variedades distintas.

¹Função diferenciável com inversa diferenciável.

²Inicialmente proposto por Gauss no contexto do mapeamento da superfície terrestre.

Definição 1.2 *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma vizinhança parametrizada $\psi(V)$ em $f(p)$ existe uma vizinhança parametrizada $\phi(U)$ em p , com $f \circ \phi(U) \subseteq \psi(V)$, e a aplicação*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\phi^{-1}(p) \in \mathbb{R}^m$.

Definição 1.3 *Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em um ponto $p \in M$. Uma curva passando por $p \in M$ é uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$. O vetor tangente à curva γ em p é a função $X(p) : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$X(p)f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(M). \quad (1.1)$$

Teorema 1.1 *Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. O conjunto $T_p M$ dos vetores tangentes a curvas em $p \in M$ forma um espaço linear n -dimensional sobre \mathbb{R} , isomorfo ao espaço dos operadores derivada direcional ao longo de curvas que passam por p .*

Demonstração.

Pela Definição 1.1 existe parametrização ϕ numa vizinhança de $p \in M$ tal que

$$\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [(f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \gamma)] \right|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x^i} \left. \frac{d(\phi^{-1} \circ \gamma)^i}{dt} \right|_{t=0}, \quad (1.2)$$

onde a soma sobre índices repetidos (um superior e outro inferior) foi assumida³. Da Definição 1.2, resulta o isomorfismo

$$\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \left[\left(\frac{dx^i}{dt} \right)(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \right] f = \frac{d}{d\gamma} f, \quad (1.3)$$

pois \mathbb{R} é variedade unidimensional (Definição 1.1). Comparando com (1.1) e observando que f é arbitrária, segue o resultado do teorema. ■

³Essa convenção de soma será adotada ao longo de todo o texto.

Teorema 1.2 *Seja M uma variedade n -dimensional. Os conjuntos $\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n\}$ (via isomorfismo) e $\{dx^j : j = 1, \dots, n\}$ são bases duais para $T_p M$ e $T_p M^*$, respectivamente, denominadas bases locais de coordenadas (ou canônicas).*

Demonstração.

De (1.3) é imediato que o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n\}$ é base para $T_p M$. Seja agora $df \in T_p M^*$, definido por

$$df(X) = Xf \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Como a dimensão de $T_p M$ é finita (Teorema 1.1), a afirmação de que o conjunto $\{dx^j : j = 1, \dots, n\}$ é uma base de $T_p M^*$ decorre da equação (1.4), colocando-se $f = x^j$ e $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$. ■

Definição 1.4 *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. O espaço $T_p M$ denomina-se espaço tangente a M em p . O dual $T_p M^*$ é denominado espaço co-tangente a M em p e seus elementos são chamados de 1-formas.*

Teorema 1.3 *Seja M uma variedade diferenciável. Existe, associada a cada ponto $p \in M$, uma única álgebra linear não-comutativa graduada, gerada pelos espaços $T_p M$ e $T_p M^*$.*

Demonstração.

A existência e unicidade de uma álgebra gerada por um espaço linear é demonstrada de forma construtiva no Capítulo 4 da referência [17]. Uma abordagem do mesmo problema, mas com enfoque físico, é dada no Capítulo 2, volume 1, da referência [25]. ■

A álgebra descrita no Teorema 1.3 denomina-se *álgebra tensorial* e cada elemento seu de grau (r,s) , denominado *tensor de ordem (r,s)* , corresponde a uma aplicação multilinear

$$T : \prod_{i=1}^r T_p M^* \times \prod_{i=1}^s T_p M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

O conjunto dos tensores de ordem (r,s) será denotado por $T_s^r(M)$. Dados os tensores $T \in T_s^r(M)$ e $S \in T_q^p(M)$, o produto de T por S na álgebra tensorial, denominado *produto tensorial*, é o tensor $T \otimes S \in T_{s+q}^{r+p}(M)$ dado por

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^1, \dots, \omega^r, \dots, \omega^{r+p}, X_1, \dots, X_s, \dots, X_{s+q}) = \\ T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)S(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+p}, X_{s+1}, \dots, X_{s+q}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $\omega^i \in T_p^*M, i = 1, \dots, r+p$, e $X_j \in T_pM, j = 1, \dots, s+q$.

Teorema 1.4 *O conjunto dos elementos de grau (r,s) constitui um espaço linear de dimensão n^{r+s} , cuja base é dada por elementos da forma $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$, onde $\{e_{i_k} : i_k = 1, \dots, n\}$ é base de T_pM e $\{e^{j_l} : j_l = 1, \dots, n\}$ é base de T_p^*M . Em particular, $\mathbb{R} \equiv T_0^0(M)$, $T_pM \equiv T_0^1(M)$ e $T_pM^* \equiv T_1^0(M)$.*

Demonstração.

Sejam $X_l = X^{j_l} e_{j_l} \in T_pM$ e $\omega^k = \omega_{i_k} e^{i_k} \in T_p^*M$. Da multilinearidade dos tensores, tem-se

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \omega_{i_1} \dots \omega_{i_r} X^{j_1} \dots X^{j_s} T(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}), \quad (1.6)$$

para todo $T \in T_s^r(M)$. Como⁴ $\omega_{i_k} = \omega^k(e_{i_k}) \equiv e_{i_k}(\omega^k)$ e $X^{j_l} = X_l(e^{j_l}) \equiv e^{j_l}(X_l)$, segue de (1.5) que

$$\begin{aligned} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \\ = [T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}](\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s), \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$.

A independência do conjunto $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}\}$ resulta da expressão

$$T(e^{p_1}, \dots, e^{p_r}, e_{q_1}, \dots, e_{q_s}) = T_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_s} = 0, \quad \forall T \in T_s^r(M). \quad (1.8)$$

Portanto, $T_s^r(M)$ é um espaço linear n^{r+s} -dimensional, pois consiste num espaço de funções com base formada por n^{r+s} elementos. ■

⁴Essas identificações são possíveis, pois o espaço linear T_pM tem dimensão finita e, portanto, é reflexivo.

Decorre da definição de variedade que todos os tensores estão definidos a menos de mudanças de coordenadas, ou seja, difeomorfismos que transformam as componentes quando a base coordenada de $T_s^r(M)$ muda.

O Teorema 1.4 garante que tensores são objetos pontuais, mas todo tensor pode ser estendido a uma vizinhança do ponto. Com efeito, é consequência da topologia induzida pelas parametrizações que toda variedade é localmente conexa, pois sempre existe uma vizinhança aberta em $p \in M$ homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^n . O caráter local dos tensores decorre dessa observação e do Teorema 1.1. Portanto, pelo menos localmente é possível falar-se indistintamente em tensores ou campos tensoriais, os quais são definidos como aplicações multilineares do produto de módulos $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{X}^*(M)$ sobre $\mathcal{D}(M)$ em $\mathcal{D}(M)$ (ao invés de espaços vetoriais reais)⁵. Em particular, $\mathcal{D}(M) \equiv T_0^0(M)$, $\mathcal{X}(M) \equiv T_0^1(M)$ e $\mathcal{X}^*(M) \equiv T_1^0(M)$. Mais que isso, o caráter local dos tensores motiva a busca por formas de diferenciá-los ao longo da variedade.

Definição 1.5 *A conexão consiste num operador*

$$\nabla : T_s^r(M) \times T_0^1(M) \longrightarrow T_s^r(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\nabla(f, Z) = \nabla_Z f = Zf$,
- b) $\nabla_{fZ_1 + gZ_2} T = f\nabla_{Z_1} T + g\nabla_{Z_2} T$,
- c) $\nabla_Z(T + S) = \nabla_Z T + \nabla_Z S$,
- d) $\nabla_Z(T \otimes S) = \nabla_Z T \otimes S + T \otimes \nabla_Z S$,

onde $f, g \in T_0^0(M)$, $Z, Z_1, Z_2 \in T_0^1(M)$ e $T, S \in T_s^r(M)$. Fixando $T \in T_s^r(M)$, segue da linearidade no último argumento da conexão (propriedade b) que ∇T é um legítimo tensor de ordem $(r, s+1)$, denominado diferencial covariante de T , cujo valor $\nabla_Z T \in T_s^r(M)$ denomina-se derivada covariante de T ao longo do campo vetorial Z .

⁵Campos tensoriais podem ser definidos globalmente quando o módulo $\mathcal{X}(M)$ é finitamente gerado. Mesmo quando essa condição não se verifica, a existência de campos tensoriais ao longo de uma variedade de Hausdorff paracompacta está garantida quando os campos vetoriais e escalares são C^∞ ([25], Capítulo 2, v.1).

Teorema 1.5 *Toda variedade diferenciável M , de dimensão n , admite uma derivada covariante que é única a menos de um conjunto de n^3 campos escalares ω_{lk}^j , que caracterizam a conexão.*

Demonstração.

Seja $\{e_j : j = 1, \dots, n\}$ uma base de $T_0^1(M)$. Pelas propriedades (a)-(d) da Definição 1.5, observando que $fY = f \otimes Y \forall f \in T_0^0(M)$, resulta

$$\nabla(Y, X) \equiv \nabla_X Y = \nabla_X(Y^j e_j) = (XY^j)e_j + Y^j \nabla_X e_j = (XY^j)e_j + Y^j X^k \nabla_{e_k} e_j. \quad (1.9)$$

Pela definição de ∇ , tem-se $\nabla_X e_j \in T_0^1(M)$ de forma que, na base escolhida,

$$\nabla_X e_j = \omega_j^l(X) e_l, \quad (1.10)$$

onde ω_j^l são 1-formas. Substituindo em (1.9) e rearranjando os índices, vem

$$\nabla_X Y = [XY^j + \omega_{lk}^j Y^l X^k] e_j, \quad (1.11)$$

em que $\omega_{lk}^j = \omega_l^j(e_k)$.

Por um raciocínio análogo, obtém-se

$$\nabla_X \Omega = [X\Omega_j + \tilde{\omega}_{jk}^l \Omega_l X^k] e^j, \quad (1.12)$$

onde $\Omega \in T_1^0(M)$, $\{e^j : j = 1, \dots, n\}$ é a dual da base escolhida e $\nabla_X e^j = \tilde{\omega}_l^j(X) e^l$.

A fim de se estabelecer uma relação entre ω_{jk}^l e $\tilde{\omega}_{jk}^l$, é necessário assumir que a derivada covariante comuta com contrações⁶. Utilizando esse fato e a propriedade (d) da Definição 1.5, segue que a contração da derivada covariante do tensor $\Omega \otimes Y \in T_1^1(M)$ é dada por

$$\nabla_X(\Omega_j Y^j) = (\nabla_X \Omega)_j Y^j + \Omega_j (\nabla_X Y)^j, \quad (1.13)$$

onde $\Omega_j Y^j = \Omega(Y)$ é a contração de $\Omega \otimes Y$.

⁶A contração de um tensor de tipo (r,s) com componentes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, relativamente aos índices i_p e i_q , é o tensor de tipo (r-1,s-1) com componentes $T_{j_1 \dots j_{q-1} k j_{q+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_{p+1} \dots i_r}$ onde a convenção da soma foi utilizada. Dizer que a derivada covariante comuta com contrações significa que

$$(\nabla T)_{j_1 \dots j_{q-1} k j_{q+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_{p+1} \dots i_r} = \nabla(T_{j_1 \dots j_{q-1} k j_{q+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_{p+1} \dots i_r}),$$

para todo $T \in T_s^r(M)$.

Aplicando as propriedades (c), (d) e (a) da Definição 1.5 ao lado esquerdo de (1.13) e substituindo (1.11) e (1.12), conclui-se que

$$\tilde{\omega}_{jk}^l = -\omega_{jk}^l, \quad (1.14)$$

de modo que a equação (1.12) pode ser reescrita como

$$\nabla_X \Omega = [X\Omega_j - \omega_{jk}^l \Omega_l X^k] e^j. \quad (1.15)$$

Como todo tensor pode ser expresso como o produto tensorial de vetores tangentes e 1-formas, segue da propriedade (d) e das equações (1.11) e (1.15) que a derivada covariante está bem definida e é única, uma vez que são especificadas as n^3 funções ω_{jk}^l . ■

A derivada covariante de um tensor T ao longo do campo vetorial Z corresponde a uma projeção da derivada parcial de T sobre o espaço tangente dos pontos ao longo das curvas integrais de Z (isto é, curvas cujo vetor tangente é Z). A forma como é feita essa projeção é determinada pelos coeficientes de conexão ω_{lk}^j ([6], p.56).

Teorema 1.6 *Uma vez estabelecida a conexão em uma variedade diferenciável, a diferencial covariante de um tensor de ordem (r,s) é o tensor de ordem $(r,s+1)$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s, Z) = \\ Z(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) - T(\nabla_Z \omega^1, \dots, X_s) - \dots - T(\omega^1, \dots, \nabla_Z X_s), \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde $\nabla_Z X_j, j=1, \dots, s$, e $\nabla_Z \omega^i, i=1, \dots, r$, estão definidos pelas equações (1.11) e (1.15), respectivamente.

Demonstração.

Como todo tensor pode ser expresso como o produto tensorial de vetores tangentes e 1-formas, segue da propriedade (d) da Definição 1.5 e da equação (1.13) que a igualdade (1.16) é verdadeira. ■

Em uma base canônica $\{\partial_k, dx^l\}$, as equações (1.11) e (1.15) podem ser escritas como

$$Y_{;k}^j = Y_{,k}^j + Y^l \Gamma_{lk}^j \quad (1.17)$$

e

$$\Omega_{j;k} = \Omega_{j,k} - \Omega_l \Gamma_{jk}^l, \quad (1.18)$$

onde foram utilizadas as notações

$$\Gamma_{lk}^j \equiv \omega_{lk}^j, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv \partial_k \equiv_{;k} \quad e \quad \nabla_{\partial_k} \equiv_{;k}. \quad (1.19)$$

Definição 1.6 *Sejam M uma variedade diferenciável e I um intervalo aberto da reta. Diz-se que um tensor T é paralelamente transportado ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ com vetor tangente X se*

$$\nabla_X T = 0. \quad (1.20)$$

A Definição 1.6 permite interpretar a derivada covariante de um tensor como sendo uma medida de sua mudança em relação àquela sofrida se ele tivesse sido transportado paralelamente ao longo do mesmo caminho. O transporte paralelo de um tensor T depende do caminho no qual é realizado, pois os coeficientes de conexão exibem uma dependência funcional das componentes do vetor X , tangente ao caminho, como mostra a equação (1.10).

Definição 1.7 *Uma curva que transporta paralelamente seu vetor tangente denomina-se geodésica.*

Como a condição de transporte paralelo é definida pela equação (1.20), de natureza tensorial, segue que a geodésica é um conceito local. Variedades em que as geodésicas podem ser definidas globalmente são denominadas geodesicamente completas.

Teorema 1.7 *Seja M uma variedade n -dimensional, $p \in M$ e U uma vizinhança de p . Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ passando por p será uma geodésica se, e somente se, satisfizer o sistema de n equações diferenciais de 2ª ordem*

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{lk}^j \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (1.21)$$

onde $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ em U .

Demonstração.

Aplicando a Definição 1.7 ao vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j}$, e utilizando a

propriedade (b) da Definição 1.5, juntamente com a equação (1.17), tem-se que γ será geodésica se, e somente se,

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \left[\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma_{lk}^j \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt}\right] \frac{\partial}{\partial x^j} = 0. \quad (1.22)$$

Como $\{\frac{\partial}{\partial x^j} : j = 1, \dots, n\}$ é base de $T_0^1(M)$, segue o resultado. ■

O Teorema 1.7 afirma que a derivada covariante do vetor $\frac{d\gamma}{dt}$, tangente à curva geodésica γ , é nula na vizinhança parametrizada U . Mais que isso, a equação (1.21) determina uma família de parâmetros para a geodésica, denominados *parâmetros afins*⁷, pois a única liberdade que se tem na escolha de t em (1.21) é a sua origem e escala.

Definição 1.8 *Seja M uma variedade com uma conexão e $X, Y, Z \in T_0^1(M)$. A torção é o tensor de ordem (1,2) dado por*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (1.23)$$

onde $[X, Y]$ é o campo vetorial definido por

$$[X, Y]f = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (1.24)$$

e denominado comutador de X e Y . A curvatura (ou tensor de Riemann) é o tensor de ordem (1,3) dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (1.25)$$

A partir de uma análise do comutador de derivadas covariantes, Carroll([6], p.74-75) interpreta os tensores de curvatura e torção como medidas da mudança sofrida por um vetor que é transportado paralelamente ao longo de um *loop infinitesimal* numa variedade.

A partir do comutador é possível construir outro operador de diferenciação sobre tensores.

Definição 1.9 *A derivada de Lie consiste num operador*

$$\mathcal{L}_X : T_s^r(M) \rightarrow T_s^r(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

⁷Mesmo em um contexto mais geral, é sempre possível efetuar uma transformação nos parâmetros a fim de se encontrar um conjunto de parâmetros afins onde (1.21) se verifica ([7], p.20).

- (a) $\mathcal{L}_X f = Xf$,
- (b) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$,
- (c) $\mathcal{L}_X(T + S) = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_X S$,
- (d) $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = \mathcal{L}_X T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_X S$,

onde $f \in T_0^0(M)$, $X, Y \in T_0^1(M)$, $T \in T_s^r(M)$, $S \in T_q^p(M)$ e $[X, Y]$ está definido pela equação (1.24).

Teorema 1.8 *Sejam $X, Y \in T_0^1(M)$ e $\omega \in T_1^0(M)$. Numa base local de coordenadas $\{\partial_k, dx^l\}$, os tensores $\mathcal{L}_X Y$ e $\mathcal{L}_X \omega$ são expressos como*

$$\mathcal{L}_X Y = (X^k Y_{,k}^j - Y^k X_{,k}^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1.26)$$

e

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^k \omega_{j,k} + \omega_k X_{,j}^k) dx^j. \quad (1.27)$$

Demonstração.

A equação (1.26) é simplesmente a propriedade (b) da Definição 1.9 com uso da definição (1.24) de comutador, escrita em termos de componentes. Aplicando a propriedade (d) da Definição 1.9 ao produto tensorial $\omega \otimes Y \in T_0^1(M)$ e assumindo que a derivada de Lie comuta com contrações, resulta, na base canônica, a expressão

$$X^k (\omega_j Y^j)_{,k} = (\mathcal{L}_x \omega)_j Y^j + \omega_j (\mathcal{L}_x Y)^j. \quad (1.28)$$

Substituindo (1.26) em (1.28), vem

$$(\mathcal{L}_x \omega)_j Y^j = (X^k \omega_{j,k} + \omega_k X_{,j}^k) Y^j. \quad (1.29)$$

A equação (1.27) segue do fato de $Y \in T_0^1(M)$ ser arbitrário. ■

Teorema 1.9 *A derivada de Lie de um tensor $T \in T_s^r(M)$ está definida de forma única pela equação*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X [T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)] = \\ (\mathcal{L}_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + T(\mathcal{L}_X \omega^1, \dots, Y_s) + \dots + T(\omega^1, \dots, \mathcal{L}_X Y_s), \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde $\omega^1, \dots, \omega^r \in T_1^0(M)$ e $Y_1, \dots, Y_s \in T_0^1(M)$.

Demonstração.

Como todo tensor pode ser expresso como o produto tensorial de vetores tangentes e 1-formas, segue da propriedade (d) da Definição 1.9 e da equação (1.28) que a igualdade (1.30) é verdadeira. ■

Retornando às equações da Definição 1.8, é imediato a observação de que os tensores de curvatura e torção são ambos anti-simétricos no par de argumentos X e Y , ou seja,

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \quad e \quad T(X, Y) = -T(Y, X). \quad (1.31)$$

Devido a essa propriedade, torna-se interessante estudá-los por meio de tensores completamente anti-simétricos.

Definição 1.10 *Uma s -forma Ω é um tensor de ordem $(0, s)$ invariante sob a ação do operador de anti-simetrização A , ou seja,*

$$A\Omega(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \Omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}) = \Omega(X_1, \dots, X_s). \quad (1.32)$$

Decorre da expressão acima que $T_0^0(M)$ é o conjunto das 0-formas e $T_1^0(M)$ é o conjunto das 1-formas.

Definição 1.11 *O produto exterior $\Omega \wedge \Psi$ da s -forma Ω com a t -forma Ψ é a $(s+t)$ -forma dada por*

$$\Omega \wedge \Psi = A(\Omega \otimes \Psi), \quad (1.33)$$

onde A denota o operador de anti-simetrização.

Teorema 1.10 *Seja M uma variedade n -dimensional. O conjunto de s -formas define em cada ponto $p \in M$ um espaço linear de dimensão $\frac{n!}{s!(n-s)!}$, denotado por $\Lambda^s T_p M^*$. Dada uma base $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} : i_k = 1, \dots, n\}$ de tensores de ordem $(0, s)$, $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_s} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n\}$ é uma base para $\Lambda^s T_p M^*$.*

Demonstração.

A estrutura linear de $\Lambda^s T_p M^*$ decorre da linearidade da somatória e da natureza tensorial de Ω na definição (1.32). Ainda de (1.32) resulta que

Ω se anula quando dois quaisquer de seus argumentos coincidem. Logo, dada uma base $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} : i_k = 1, \dots, n\}$ para $T_s^0(M)$, existem apenas $\frac{n!}{s!(n-s)!}$ combinações para as n 1-formas e^{i_k} da base de $T_p M^*$, tomadas s a s , satisfazendo a equação de definição (1.32). A independência do conjunto $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_s} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n\}$ resulta do processo de construção utilizado. ■

Definição 1.12 *A derivada exterior consiste num operador*

$$d : \Lambda^p T_p M^* \rightarrow \Lambda^{p+1} T_p M^*$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $df(X) = Xf$,
- (b) $d(\Omega_1 + \Omega_2) = d\Omega_1 + d\Omega_2$,
- (c) $d(\Omega \wedge \Psi) = d\Omega \wedge \Psi + (-1)^p \Omega \wedge d\Psi$,
- (d) *(Lema de Poincaré)* $d(d\Omega) = 0$,

onde $f \in \Lambda^0 T_p M^*$, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega \in \Lambda^p T_p M^*$, $\Psi \in \Lambda^q T_p M^*$ e $X \in T_0^1(M)$.

Teorema 1.11 *Existe um único operador derivada exterior, definido em uma base de coordenadas por*

$$d\Omega = d\Omega_{j_1 \dots j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = \frac{\partial \Omega_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, \quad \Omega \in \Lambda^p T_p M^*. \quad (1.34)$$

Demonstração.

Sejam $\omega, \psi \in \Lambda^1 T_p M^*$. Pelas Definições 1.10 e 1.11, tem-se

$$\omega \wedge \psi = \frac{1}{2}(\omega \otimes \psi - \psi \otimes \omega), \quad (1.35)$$

de modo que

$$\omega \wedge \psi = -\psi \wedge \omega \quad (1.36)$$

e o produto exterior é anti-comutativo. A verificação das propriedades (a)-(d) da Definição 1.12 para o operador descrito em (1.34) decorre dessa anti-comutatividade. Para provar a unicidade, suponha outro operador D satisfazendo as propriedades da Definição 1.12. Então, por (c),

$$D(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = \sum_k \pm dx^{j_1} \wedge \dots \wedge D(dx^{j_k}) \wedge \dots \wedge dx^{j_p}. \quad (1.37)$$

Por (a) e (d),

$$D(dx^{j_k}) = D(Dx^{j_k}) = 0. \quad (1.38)$$

Segue das equações (1.33) e (1.5) que $D(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = 0$. Pelo Teorema 1.10, $\Omega = \Omega_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \in \Lambda^p T_p M^*$. Então por (b) e (c),

$$D\Omega = \sum_{(j_1 \dots j_p)} [D(\Omega_{j_1 \dots j_p}) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} + \Omega_{j_1 \dots j_p} D(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p})]. \quad (1.39)$$

Como $D(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = 0$ e $D(\Omega_{j_1 \dots j_p}) = d\Omega_{j_1 \dots j_p}$, tem-se $D\Omega = d\Omega$. ■

Teorema 1.12 *Seja M variedade n -dimensional com uma conexão especificada pelas n^2 1-formas $\omega_l^j = \omega_{lk}^j e^k$. Então a torção e a curvatura obedecem às relações*

$$\frac{1}{2} T_{km}^j e^k \wedge e^m = de^j + \omega_l^j \wedge e^l \quad (1.40)$$

e

$$\frac{1}{2} R_{lkm}^j e^k \wedge e^m = d\omega_l^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k. \quad (1.41)$$

As identidades acima são denominadas *Equações Estruturais de Maurer-Cartan*.

Demonstração.

Sejam $\{e_j : j = 1, \dots, n\}$ e $\{e^j : j = 1, \dots, n\}$ bases duais de $T_0^1(M)$ e $T_1^0(M)$, respectivamente. Utilizando a equação (1.11) na definição (1.23) da torção, resulta

$$T^j(X, Y) = X(e^j(Y)) - Y(e^j(X)) - e^j([X, Y]) + \omega_l^j(X) e^l(Y) - \omega_l^j(Y) e^l(X). \quad (1.42)$$

A expressão (1.40) segue da identidade⁸

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}[X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])] \quad (1.43)$$

e da definição de produto exterior. Utilizando (1.11) e propriedades da derivada covariante na definição (1.25) da curvatura, resulta

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & [X(\omega_l^j(Y)) - Y(\omega_l^j(X)) - \omega_l^j([X, Y]) \\ & + \omega_k^j(X)\omega_l^k(Y) - \omega_k^j(Y)\omega_l^k(X)]e^l(Z)e_j \end{aligned} \quad (1.44)$$

ou, fazendo uso da identidade (1.43), obtém-se

$$\frac{1}{2}R(X, Y)Z = (d\omega_l^j + \omega_k^j \wedge \omega_l^k)(X, Y)e^l(Z)e_j. \quad (1.45)$$

Além disso, para toda 1-forma ω ,

$$\begin{aligned} R(\omega, Z, X, Y) &= R_{lkm}^j [e_j \otimes e^l \otimes (e^k \wedge e^m)](\omega, Z, X, Y) \\ &= (R_{lkm}^j e^k \wedge e^m)(X, Y)e^l(Z)e_j(\omega). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Comparando as equações (1.45) e (1.46), obtém-se a expressão (1.41). ■

Teorema 1.13 *Em uma base local de coordenadas*

$$T_{lk}^j = \Gamma_{lk}^j - \Gamma_{kl}^j \quad (1.47)$$

e

$$R_{lm,n}^j = \Gamma_{lm,n}^j - \Gamma_{ln,m}^j + \Gamma_{kn}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ln}^k. \quad (1.48)$$

Essa é a forma convencional como são definidos os tensores de torção e curvatura.

Demonstração.

Em uma base local de coordenadas, tem-se

$$e^j = dx^j \quad e \quad \omega_l^j = \Gamma_{lk}^j dx^k. \quad (1.49)$$

Substituindo-se essas expressões nas Equações de Maurer-Cartan e aplicando as propriedades da derivada exterior e a Definição 1.10, seguem as expressões (1.47) e (1.48). ■

⁸Para a demonstração dessa identidade, ver [7], p.16.

Definição 1.13 *Uma métrica em uma variedade diferenciável M consiste em um tensor $g \in T_2^0(M)$ que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica não-degenerada em $T_p M$. Se $g(X, X) \geq 0 \forall X \in T_p M$, a métrica é dita riemanniana (ou positiva-definida). Caso contrário, a métrica é chamada de indefinida.*

Como toda forma bilinear simétrica pode ser posta em sua forma canônica, conclui-se que em um ponto $p \in M$ sempre é possível representar as componentes da métrica por meio de uma matriz diagonal com $g_{ii} = \pm 1$ ou 0 . Se g_{ii}^+ é o número de $+1$'s e g_{ii}^- é o número de -1 's na forma canônica, então $(g_{ii}^+ - g_{ii}^-)$ é a *assinatura* da métrica. Uma variedade diferenciável com uma métrica positiva-definida denomina-se *variedade riemanniana*. Quando a métrica possui $g_{ii}^+ = 1$, tem-se uma *variedade lorentziana* (ou *pseudo-riemanniana*). Embora a geometria de uma variedade lorentziana seja diferente da riemanniana (por exemplo, não se define cone de luz para essa última), será usada uma só terminologia para ambas, salvo possível menção em contrário. Assim, fica subentendido que o termo “variedade riemanniana” usado no texto significa “variedade com métrica”.

Carroll([6], pp.49-50) afirma que não há nenhuma dificuldade em simultaneamente escolher bases de vetores em cada ponto de uma variedade tal que a métrica assuma sua forma canônica; o problema é que em geral não se conseguirá uma base local de coordenadas, e não haverá meio de transformá-la em uma⁹. Entretanto, há um resultado que garante a existência de um sistema de coordenadas, denominadas *coordenadas normais de Riemann*, no qual a métrica em sua forma canônica pode ser aproximada em primeira ordem.

Teorema 1.14 *(Teorema da Planitude Local) Em todo ponto de uma variedade diferenciável existe um sistema de coordenadas em que a métrica assume sua forma canônica e suas derivadas primeiras se anulam.*

Demonstração.

Conferir [28], pp.158-160. ■

⁹Para uma análise mais completa do problema da existência de bases globais em uma variedade, ver [25], v.1, pp. 92-93.

É possível definir-se um tensor métrico localmente em uma variedade diferenciável. Para fazê-lo globalmente é necessário que a variedade admita uma *partição diferenciável da unidade*. Uma condição necessária e suficiente para que uma variedade M possua uma partição da unidade é que toda componente conexa de M seja de Hausdorff e tenha base enumerável ([4], Capítulo 3).

Teorema 1.15 *Uma variedade diferenciável M de Hausdorff e com base enumerável possui uma métrica.*

Demonstração.

Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade de M subordinada a uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de vizinhanças parametrizadas $V_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \phi_\beta)\}$ de M . Isto significa que $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura localmente finita (isto é, cada ponto de M possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices) e que $\{f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ é um conjunto de funções diferenciáveis em M satisfazendo:

- 1) $f_\alpha \geq 0$, com $f_\alpha = 0$ no complementar do fecho \bar{V}_α .
- 2) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Como cada V_α admite uma métrica g_α induzida pela parametrização, basta definir

$$g(X, Y)(p) = \sum_\alpha f_\alpha(p) g_\alpha(X, Y)(p), \quad \forall p \in M, X, Y \in T_p M. \quad (1.50)$$

■

A partir desse ponto, todas as variedades consideradas serão de Hausdorff e com base enumerável.

Teorema 1.16 *(Levi-Civita) Dada uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão em M satisfazendo as condições:*

- i) *A torção é nula.*
- ii) $\nabla_X g = 0 \quad \forall X \in T_0^1(M)$.

Tal conexão é denominada conexão riemanniana (ou de Christoffel, ou de Levi-Civita) e depende exclusivamente da métrica em M .

Demonstração.

Suponha que exista tal conexão. Da propriedade (ii) e da equação (1.16), segue que

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (1.51)$$

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \quad (1.52)$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad (1.53)$$

$\forall X, Y, Z \in T_0^1(M)$. Da propriedade (i) e da equação (1.23), resulta

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in T_0^1(M). \quad (1.54)$$

Somando (1.51) com (1.52) e subtraindo (1.53), tem-se, após usar (1.54) e propriedades da métrica, que

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) &= \frac{1}{2} \{ X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z) \}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

A expressão (1.55) garante a existência e unicidade da conexão ∇ a partir da métrica g . ■

Teorema 1.17 *Em uma base local de coordenadas, tem-se*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} [\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}] g^{km}, \quad (1.56)$$

que é a expressão clássica da conexão riemanniana em termos das componentes da métrica.

Demonstração.

Sejam $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ e $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Como $\omega_i^l(e_j) = \omega_{ij}^l$, segue das equações (1.10) e (1.19) que

$$\nabla_{\partial_j}(\partial_i) = \Gamma_{ij}^l \partial_l. \quad (1.57)$$

Substituindo em (1.55), resulta

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} [\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}], \quad (1.58)$$

onde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Como g é um tensor não-degenerado, ele admite uma inversa $g \in T_0^2(M)$ cujas componentes são definidas por

$$g_{lk} g^{km} = \delta_l^m. \quad (1.59)$$

Aplicando a inversa da métrica à equação (1.58), tem-se o resultado. ■

Define-se *espaço plano* como aquele em que é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual as componentes da métrica permanecem constantes e, portanto, a conexão riemanniana se anula. Esse fato permite extrair uma série de propriedades de variedades riemannianas. Por exemplo, conclui-se das equações (1.17) e (1.18) que a derivada covariante relativa à conexão de Christoffel se reduz à noção de derivada parcial em um espaço plano. Além disso, em termos da conexão riemanniana, geodésicas consistem na generalização da linha reta, pois em um espaço plano a equação (1.21) fornece

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = 0. \quad (1.60)$$

Finalmente, decorre dos Teoremas 1.14 e 1.17 que uma variedade riemanniana se torna plana em coordenadas normais de Riemann.

Definição 1.14 *A partir do tensor de Riemann e da métrica, definem-se:*

(i) *a curvatura de Ricci como sendo o tensor $(0,2)$ cujas componentes são dadas por*

$$R_{lm} = R_{ljm}^j = -R_{lmj}^j, \quad (1.61)$$

(ii) *a curvatura escalar como sendo o tensor $R \in T_0^0(M)$ dado por*

$$R = g^{lm} R_{lm}. \quad (1.62)$$

Teorema 1.18 *Em relação à conexão riemanniana, o tensor de Ricci é simétrico e corresponde à única contração independente do tensor de Riemann. Nesse caso, define-se o tensor de Weyl, cujas componentes são dadas*

por

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{(n-2)}(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) \\ + \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R \quad (1.63)$$

e que corresponde à parte “sem-traço” do tensor de Riemann.

Demonstração.

Seja $R_{ijkl} = g_{im}R_{jkl}^m$ o tensor de Riemann completamente covariante¹⁰. Da equação (1.31), conclui-se que $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$. Além disso, quando a conexão é riemanniana, o tensor de Riemann completamente covariante é também anti-simétrico no primeiro par de índices e invariante por mudança simultânea dos dois pares (ij) e (kl) ([7], pp. 30-31). A simetria do tensor de Ricci provém dessas simetrias do tensor de Riemann, pois

$$R_{ij} = R_{imj}^m = g^{lk}R_{likj} = g^{kl}R_{kqli} = R_{jmi}^m = R_{ji} \quad (1.64)$$

já que, por definição, a métrica é um tensor simétrico. Por exaustão, a única contração possível para o tensor de Riemann com essas simetrias é o tensor de Ricci. Além disso,

$$g^{jl}C_{ijkl} = 0, \quad (1.65)$$

enquanto que

$$g^{jl}R_{ijkl} = R_{ik}. \quad (1.66)$$

■

A métrica induz na variedade as noções de norma e ortogonalidade. O tensor métrico também é usado para se definir o comprimento de arco s entre os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, ao longo de uma curva γ :

$$s = \int_a^b \left| g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right|^{\frac{1}{2}} dt. \quad (1.67)$$

A conexão riemanniana torna esses conceitos mais naturais ao longo das geodésicas.

¹⁰Um tensor de tipo (r, s) é também conhecido como tensor r contra-variante e s co-variante.

Teorema 1.19 *Sejam M uma variedade riemanniana e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva com vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt} \in T_0^1(M)$. Considere $X, Y \in T_0^1(M)$ dois vetores transportados paralelamente ao longo de γ relativamente à conexão riemanniana. Então a quantidade $g(X, Y)$ é constante ao longo de γ . Em particular, a norma do vetor tangente a uma geodésica é constante ao longo da curva.*

Demonstração.

Como $g(X, Y) \in T_0^0(M)$, segue das hipóteses do teorema que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(g(X, Y)) &= \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(g_{ij}X^iY^j) \\ &= \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(g_{ij})X^iY^j + g_{ij}\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(X^i)Y^j + g_{ij}X^i\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(Y^j) = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Da definição de geodésica e do fato de que $|\frac{d\gamma}{dt}|^2 = g(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt})$, conclui-se que a norma do vetor tangente a uma geodésica é constante ao longo da curva. ■

Com base na definição (1.67) e no Teorema 1.19, conclui-se que os parâmetros afins de uma geodésica, relativa à conexão riemanniana, são proporcionais ao comprimento de arco s (a menos de possível translação), onde a constante de proporcionalidade corresponde à norma do vetor tangente.

Teorema 1.20 *Em uma variedade riemanniana, os extremos do funcional de comprimento são atingidos por curvas geodésicas com respeito à conexão riemanniana.*

Demonstração.

O teorema consiste na solução de um problema de Cálculo Variacional aplicado à integral

$$I = \int_a^b L ds, \quad (1.69)$$

onde $L = g_{ij} \frac{dx^i}{ds}(\gamma(s)) \frac{dx^j}{ds}(\gamma(s))$ e a curva γ está parametrizada pelo comprimento de arco s . A solução pode ser obtida a partir da Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0, \quad (1.70)$$

onde $\dot{x}^j = \frac{dx^j}{ds}(\gamma(s))$. Como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = 2g_{ij}\dot{x}^i \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial x^j} = \partial_j g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad (1.71)$$

a Equação de Euler-Lagrange fornece

$$g_{ij}\ddot{x}^i + (\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}\partial_j g_{ik})\dot{x}^i \dot{x}^k = 0, \quad (1.72)$$

e, rearranjando índices,

$$g_{ij}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik})\dot{x}^i \dot{x}^k = 0. \quad (1.73)$$

Finalmente, contraindo (1.73) com a métrica inversa (equação (1.59)), resulta

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik})g^{jl}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (1.74)$$

onde t é um parâmetro afim. Dos Teoremas 1.7 e 1.17 conclui-se a afirmação do enunciado. ■

1.2 As Equações de Einstein

Uma das observações mais antigas sobre a gravitação remonta a Galileu em seus experimentos jogando pesos do alto da Torre de Pisa¹¹: *no vácuo, todos os corpos caem com a mesma aceleração*. Em outras palavras, é possível distinguir-se movimento de queda livre da ação de um campo eletromagnético pelas diferentes acelerações de partículas com diferentes cargas; com a gravidade isso não acontece porque a resposta da matéria à gravitação é universal. É claro que isso é válido para regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, pois caso contrário surgem discrepâncias no campo gravitacional que são detectadas como forças de maré.

Einstein extrapolou esse raciocínio e estabeleceu o seu famoso Princípio de Equivalência:

Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, é impossível distinguir-se entre a ação da gravidade e referenciais uniformemente acelerados, não importa qual experimento seja feito.

O Princípio de Equivalência de Einstein afirma que a gravitação acopla não apenas com a massa de repouso (como estabeleceu Newton), mas com

¹¹Essa é uma imagem pictórica; na verdade, Galileu chegou a suas conclusões analisando a queda de pesos em planos inclinados.

todas as formas de energia. Como consequência, não existe objeto *gravitacionalmente neutro* em relação ao qual se possa medir a aceleração devida à gravidade. Diante disso e do papel desenvolvido pelos referenciais uniformemente acelerados, definiu-se como aceleração gravitacional zero, o movimento de corpos em queda livre. Como o Princípio de Equivalência de Einstein vale apenas localmente, os referenciais inerciais (corpos em queda livre) de objetos distantes são independentes, ou seja, as velocidades medidas em relação a eles não podem ser comparadas.

A idéia de que referenciais inerciais, onde valem as leis da Relatividade Especial (espaço plano quadridimensional), só podem existir localmente, corresponde à possibilidade de se reduzir a métrica à sua forma canônica em cada ponto de uma variedade, como garante o Teorema da Planitude Local (Teorema 1.14). A impossibilidade de se comparar velocidades (vetores) entre dois referenciais inerciais distantes corresponde à dependência do caminho durante o transporte paralelo ao longo de uma curva. O movimento de queda livre, definido como aceleração nula (derivada covariante do vetor tangente à curva igual a zero), corresponde às geodésicas (devidamente parametrizadas). Essas considerações foram suficientes para motivar Einstein a considerar a gravitação como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

Em poucas palavras, a Teoria da Gravitação pode ser descrita como:

O espaço-tempo consiste numa variedade pseudo-riemanniana quadridimensional com uma métrica que dá origem a uma conexão para a qual o traço reverso do tensor de curvatura é proporcional ao tensor energia-momento que descreve a matéria e os campos não-gravitacionais.

A necessidade de uma métrica indefinida de assinatura -2 provém do fato de que o espaço-tempo, pelo Princípio de Equivalência, deve ser localmente semelhante ao Espaço de Minkowski da Relatividade Especial, que possui uma métrica da forma¹²

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.75)$$

onde c denota a velocidade da luz (geralmente tomada igual a um por escolha de unidades).

Com essa assinatura, a métrica do espaço-tempo é indefinida de modo que qualquer uma das condições abaixo pode se verificar para um vetor X :

- i) $g(X, X) > 0$, caso em que X denomina-se *de tipo-tempo*;

¹²A representação ds^2 decorre da definição (1.67) de comprimento de uma curva.

- ii) $g(X, X) = 0$, caso em que X denomina-se *de tipo-luz* (ou *nulo*);
- iii) $g(X, X) < 0$, caso em que X denomina-se *de tipo-espaço*.

Partículas materiais (massa de repouso finita) descrevem trajetórias *de tipo-tempo*, enquanto que partículas sem massa (isto é, fótons, grávitons e neutrinos) descrevem trajetórias *de tipo-luz*. O comprimento de arco das geodésicas do tipo-tempo é interpretado como o tempo próprio medido no referencial da partícula material. Geodésicas do tipo-luz não podem ser parametrizadas pelo comprimento de arco, mas admitem parâmetros afins (ver observações após Teoremas 1.19 e 1.7).

O Teorema 1.19 garante o caráter (tipo-tempo, luz ou espaço) do movimento geodésico descrito pelas partículas em queda livre. O Teorema 1.20 unifica as noções de linha reta (geodésica) e caminho mais curto entre dois pontos para um espaço curvo. Juntamente com o Teorema 1.18, essas propriedades da conexão riemanniana justificam sua escolha.

Como localmente a gravitação acopla com todas as formas de energia e sua ação é manifestada pela curvatura do espaço-tempo, Einstein supôs que a relação mais simples entre essas quantidades seria uma equação tensorial de proporcionalidade entre os tensores T e \mathcal{G} ,

$$\mathcal{G} = kT, \quad (1.76)$$

ambos simétricos de tipo (0,2), onde T representa o tensor energia-momento e \mathcal{G} deveria ser obtido do tensor de Riemann e possuir divergente nulo, ou seja,

$$\mathcal{G}^i_{j;i} = 0 \quad (1.77)$$

ao longo da variedade (por causa da conservação da energia, representada por $T^i_{j;i} = 0$).

Como em uma conexão riemanniana o tensor de Ricci é simétrico e é a única contração independente do tensor de Riemann (Teorema 1.18), cujo traço reverso

$$\mathcal{G}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \quad (1.78)$$

satisfaz a condição (1.77), seguem as Equações de Einstein

$$\mathcal{G} = \frac{8\pi G}{c^4}T \quad (1.79)$$

ou, em componentes,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad (1.80)$$

onde $\frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante de proporcionalidade¹³ obtida a partir de comparações com o limite newtoniano¹⁴.

Contraindo (1.80) com a métrica inversa (equação (1.59)), obtém-se em quatro dimensões,

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T), \quad (T = g^{ij}T_{ij}), \quad (1.81)$$

de forma que no vácuo (regiões do espaço-tempo em que $T_{ij} = 0$), as Equações de Einstein se reduzem a

$$R_{ij} = 0. \quad (1.82)$$

As Equações de Einstein representam equações diferenciais de segunda ordem nas funções g_{ij} que compõem a métrica. Como ambos os membros constituem-se de tensores simétricos de ordem (0,2), existem apenas dez equações independentes. O fato do tensor \mathcal{G} , denominado *tensor de Einstein*, satisfazer a condição (1.77) impõe mais quatro graus de liberdade à solução, reduzindo para seis o número de equações independentes. Isso condiz com a definição do espaço-tempo como uma variedade quadridimensional, pois assim todos os tensores estão definidos a menos de mudanças de coordenadas (difeomorfismos, cuja representação envolve quatro funções).

Quando o tensor energia-momento é dado pelo tensor de Maxwell do campo eletromagnético,

$$T_{ab} = \eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{ef}F^{ef}, \quad (1.83)$$

¹³A constante G geralmente é posta igual a um por escolha de unidades.

¹⁴O limite newtoniano consiste nas três condições abaixo:

- (i) As partículas devem se mover lentamente com respeito à velocidade da luz: $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}, i = 1, 2, 3$.
- (ii) O campo gravitacional é fraco, podendo ser considerado como uma perturbação da métrica η do espaço plano (ver equação (1.75)): $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, $|h_{ij}| \ll 1, i, j = 0, 1, 2, 3$.
- (iii) O campo gravitacional é estático, ou seja, é invariante com o tempo: $\partial_0 g_{ij} \equiv 0, i, j = 0, 1, 2, 3$.

as equações (1.80) são conhecidas como *Equações de Einstein-Maxwell*. No Capítulo 2 de [7], essas equações estão explicitadas para o caso de uma métrica suficientemente geral.

Capítulo 2

BURACOS NEGROS

No Capítulo 1 foram apresentadas as Equações de Einstein que descrevem como a matéria e a energia afetam o espaço e o tempo produzindo o que se conhece como gravitação. Nesse capítulo será apresentada uma família de soluções exatas dessas equações, denominadas buracos negros. Inicialmente será estabelecida a forma geral da métrica que caracteriza o tipo de espaço-tempo que se espera obter. Feito isso, será demonstrado um teorema garantindo a existência e unicidade dessas soluções, as quais serão explicitadas e classificadas de acordo com um conjunto de parâmetros. A interpretação física desses parâmetros bem como uma análise comparativa dos buracos negros será realizada na parte final do capítulo.

2.1 Soluções das Equações de Einstein

Definição 2.1 *Um vetor de Killing em uma variedade riemanniana é um campo K tal que*

$$\mathcal{L}_K g = 0, \quad (2.1)$$

onde g é a métrica e \mathcal{L} é o operador derivada de Lie.

Teorema 2.1 *Seja M uma variedade riemanniana que possui um vetor de Killing. Então é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual a métrica é independente de uma das coordenadas.*

Demonstração.

Seja K o vetor de Killing e considere um sistema de coordenadas em que a primeira coordenada x^1 é o parâmetro ao longo da curva integral de K , dada pela solução da equação

$$\frac{dx^i}{dx^1} = K^i. \quad (2.2)$$

Nesse sistema, $K^i = \frac{\partial}{\partial x^1} = (1, 0, \dots, 0)$. Então a Definição 1.9 fornece

$$(\mathcal{L}_K X)^i = [K, X]^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^1}. \quad (2.3)$$

Segue do Teorema 1.9 com as substituições (2.1) e (2.3) que

$$\frac{\partial g}{\partial x^1}(X, Y) = g\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}, Y\right) + g\left(X, \frac{\partial Y}{\partial x^1}\right). \quad (2.4)$$

Substituindo $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$ na equação acima e usando o fato da métrica ser bilinear, segue o resultado do teorema. ■

Definição 2.2 *Uma métrica g é dita estacionária se possui um vetor de Killing K de tipo-tempo, isto é, $g(K, K) > 0$. Uma métrica é chamada estática se possui um vetor de Killing de tipo-tempo que é ortogonal a uma família de hipersuperfícies¹.*

¹Uma hipersuperfície em uma variedade n -dimensional é uma sub-variedade de dimensão $n - 1$.

Definição 2.3 *Uma métrica g é dita axisimétrica se possui um vetor de Killing K de tipo-espaço, isto é, $g(K, K) < 0$. Uma métrica é chamada esfericamente simétrica se possui um vetor de Killing de tipo-espaço que é ortogonal a uma família de hipersuperfícies.*

A fim de se encontrar a forma geral da métrica para espaços-tempo estacionários e axisimétricos será preciso fazer uso do resultado abaixo.

Lema 2.1 *A métrica*

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2 \quad (2.5)$$

de um espaço bidimensional (x^1, x^2) , com assinatura $+2$ (positiva-definida) ou -2 (negativa-definida), pode sempre ser globalmente diagonalizada por meio de uma transformação de coordenadas, isto é, pode ser posta na forma

$$ds^2 = \pm e^{2\mu}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2], \quad (2.6)$$

onde $e^{2\mu}$ é uma função de x^1 e x^2 .

Demonstração.

Basta mostrar que existem transformações

$$x^{1'} = \phi(x^1, x^2) \text{ e } x^{2'} = \psi(x^1, x^2), \quad (2.7)$$

que diagonalizam a forma contra-variante da métrica,

$$ds^2 = g^{11}(dx_1)^2 + 2g^{12}dx_1dx_2 + g^{22}(dx_2)^2, \quad (2.8)$$

com coeficientes iguais em $(dx_1)^2$ e $(dx_2)^2$. Para tanto, é necessário e suficiente que

$$g^{1'2'} = g^{11}\phi_{,1}\psi_{,1} + g^{12}(\phi_{,1}\psi_{,2} + \phi_{,2}\psi_{,1}) + g^{22}\phi_{,2}\psi_{,2} = 0 \quad (2.9)$$

e

$$g^{1'1'} - g^{2'2'} = g^{11}(\phi_{,1}^2 - \psi_{,1}^2) + 2g^{12}(\phi_{,1}\phi_{,2} - \psi_{,1}\psi_{,2}) + g^{22}(\phi_{,2}^2 - \psi_{,2}^2) = 0. \quad (2.10)$$

As equações (2.9) e (2.10) são satisfeitas pelas substituições ([7], pp. 67-68)

$$\phi_{,i} = g^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{ij}g^{jk}\psi_{,k} \text{ e } (g^{\frac{1}{2}}g^{ik}\psi_{,k})_{,i} = 0, \quad (i, j, k = 1, 2), \quad (2.11)$$

onde ε_{ij} é o símbolo de Levi-Civita em dois índices,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

e g é o determinante da forma covariante da métrica,

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \frac{1}{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2}. \quad (2.13)$$

■

Teorema 2.2 *A forma geral da métrica descrevendo um espaço-tempo estacionário e axisimétrico é*

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (2.14)$$

onde ν, ψ, ω, μ_2 e μ_3 são funções das coordenadas x^2 e x^3 .

Demonstração.

Inicialmente, tomam-se como coordenadas o tempo $t(=x^0)$ e o ângulo azimutal $\varphi(=x^1)$ em torno do eixo de simetria. Pelo Teorema 2.1, as componentes da métrica estacionária e axisimétrica são dadas por

$$g_{ij} = g_{ij}(x^2, x^3), \quad (2.15)$$

onde x^2 e x^3 são as coordenadas espaciais restantes. Além disso, será imposta à métrica sua invariância por inversão simultânea de t e φ , isto é²,

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0, \quad (2.16)$$

pois os termos da métrica com esses coeficientes mudam de sinal sob a inversão, $t \rightarrow -t$ e $\varphi \rightarrow -\varphi$. Sob essas condições, a métrica adquire a forma

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 + [g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2]. \quad (2.17)$$

²A idéia por trás dessa condição é permitir que o tensor energia-momento apresente essa invariância, de modo que a fonte do campo gravitacional terá movimentos puramente rotacionais em torno do eixo de simetria. Em outras palavras, busca-se com isso descrever o espaço-tempo associado a um corpo em rotação.

Utilizando o Lema 2.1, resulta

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (2.18)$$

que de fato descreve uma métrica estacionária, axisimétrica e de assinatura -2 (perceba que (2.18) está diagonalizada) em uma variedade riemanniana quadridimensional. ■

É preciso salientar que as funções μ_2 e μ_3 no Teorema 2.2 não precisam ser distinguidas. Tal distinção foi feita com o intuito de oferecer a possibilidade - no Teorema 2.3 adiante - de se estabelecer o vínculo que definirá a *função de horizonte*, caracterizando as soluções de buracos negros.

Definição 2.4 *Um horizonte de eventos consiste numa sub-variedade diferenciável bidimensional de tipo-luz gerada por um vetor de Killing de tipo-tempo e outro de tipo-espço.*

Definição 2.5 *Um espaço-tempo \mathcal{M} , com métrica g_{ij} , é denominado assintoticamente plano se existe uma variedade diferenciável com fronteira³ $\bar{\mathcal{M}}$, com métrica \bar{g}_{ij} , campo escalar Ω e fronteira $\mathcal{I} = \partial\bar{\mathcal{M}}$ tal que:*

- (a) $\mathcal{M} = \text{int}\bar{\mathcal{M}}$
- (b) $\bar{g}_{ij} = \Omega^2 g_{ij}$ em \mathcal{M}
- (c) Ω e \bar{g}_{ij} são C^∞ em $\bar{\mathcal{M}}$
- (d) $\Omega > 0$ em \mathcal{M} ; e $\Omega = 0$, $\bar{\nabla}_i \Omega \neq 0$ em \mathcal{I}
- (e) cada geodésica de tipo-luz em \mathcal{M} possui um ponto terminal no passado e outro no futuro de \mathcal{I} .

A Definição 2.5 corresponde a uma transformação conforme no intervalo de comprimento do espaço-tempo

$$d\bar{s} = \Omega ds,$$

³Uma definição rigorosa de variedade com fronteira pode ser encontrada em [12]. Essencialmente, é um espaço cujos pontos têm vizinhanças parametrizadas por espaços euclidianos ou semi-espços euclidianos.

a fim de poder “tornar o infinito finito”, ou seja, estender a métrica continuamente para se anexar uma fronteira \mathcal{I} ao espaço-tempo. A condição (d) garante que os pontos de \mathcal{I} estão infinitamente distantes de seus vizinhos ($ds \rightarrow \infty$) e a condição (e) afirma que o infinito conforme \mathcal{I} é idêntico àquele do Espaço de Minkowski afim ([25], volume 2, Capítulo 9).

Teorema 2.3 *Existe uma única família de soluções para as Equações de Einstein-Maxwell que sejam assintoticamente planas, estacionárias e axisimétricas, com horizonte de eventos convexo e não-degeneradas fora desse horizonte.*

Demonstração.

Devido a sua extensão e complexidade, será esboçado apenas um esquema da demonstração. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada nos Capítulos 6 e 11 da referência [7]. Pelo Teorema 2.2, uma solução estacionária e axisimétrica das Equações de Einstein-Maxwell deve ter a forma (2.14) e a equação do horizonte de eventos deve ser do tipo

$$N(x^2, x^3) = 0. \quad (2.19)$$

Como o horizonte é sub-variedade de tipo-luz, segue de (2.14) e (1.59) que

$$g^{ij}N_{,i}N_{,j} = e^{2(\mu_3 - \mu_2)}(N_{,r})^2 + (N_{,\theta})^2 = 0, \quad (2.20)$$

onde $x^2 = r$ e $x^3 = \theta$. Utilizando a liberdade de escolha do vínculo entre μ_2 e μ_3 , garantida pela forma da métrica, impõe-se

$$e^{2(\mu_3 - \mu_2)} = \Delta(r), \quad (2.21)$$

onde $\Delta = \Delta(r)$ é denominada *função de horizonte*. Como o determinante da métrica do subespaço (t, φ) é dado por

$$-e^{2\beta}, \quad (\beta = \nu + \psi), \quad (2.22)$$

segue da Definição 2.4, das equações (2.21) e (2.20), e da identidade⁴

$$[e^{\mu_3 - \mu_2}(e^\beta)_{,2}]_{,2} + [e^{\mu_3 - \mu_2}(e^\beta)_{,3}]_{,3} = 0, \quad (2.23)$$

⁴As equações (2.23), (2.30) e (2.31) surgem a partir das Equações de Einstein-Maxwell expressas em termos das componentes do tensor de Riemann para a métrica (2.14), obtidas com o auxílio das Equações de Maurer-Cartan (Teorema 1.12) para a base de 1-formas

$$\omega^0 = e^\nu dt, \quad \omega^1 = e^\psi(d\varphi - \omega dt), \quad \omega^2 = e^{\mu_2} dx^2, \quad \omega^3 = e^{\mu_3} dx^3.$$

que a solução apropriada para uma função de horizonte convexa é

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + M_0^2, \quad (2.24)$$

onde M e M_0 são constantes. Além disso, $\Delta(r) = 0$ no horizonte de eventos e

$$e^\beta = \Delta^{\frac{1}{2}} \sin \theta. \quad (2.25)$$

Substituindo⁵

$$H = A + iB, \quad \chi = e^{\nu-\psi} \quad e \quad \delta = \sin^2 \theta \quad (2.26)$$

nas Equações de Einstein-Maxwell e efetuando uma série de manipulações algébricas, resultam as seguintes equações⁶

$$\left[\frac{\chi}{\sqrt{(\Delta\delta)}} \Delta H_{,2},_2 + \left[\frac{\chi}{\sqrt{(\Delta\delta)}} \delta H_{,3},_3 = i(\omega_{,2} H_{,3} - \omega_{,3} H_{,2}), \quad (2.27)$$

$$\left[\frac{\Delta}{\chi^2} \omega_{,2} - 2Im(HH_{,3}^*),_2 + \left[\frac{\delta}{\chi^2} \omega_{,3} + 2Im(HH_{,2}^*),_3 = 0 \quad (2.28)$$

e

$$[\Delta(\ln \chi)_{,2},_2 + [\delta(\ln \chi)_{,3},_3 = \frac{1}{\chi^2} [\Delta(\omega_{,2})^2 + \delta(\omega_{,3})^2] + \frac{2\chi}{\sqrt{(\Delta\delta)}} [\Delta|H_{,2}|^2 + \delta|H_{,3}|^2]. \quad (2.29)$$

A solução completa do problema consiste em se determinar as soluções (χ, ω) nas equações (2.27)-(2.29) e depois encontrar as funções ψ e ν por meio de (2.25) e (2.26). Uma vez determinado o par (χ, ω) , a integração das equações⁷

$$\begin{aligned} & (\psi + \nu)_{,2,3} - (\psi + \nu)_{,2}\mu_{2,3} - (\psi + \nu)_{,3}\mu_{3,2} + \psi_{,2}\psi_{,3} + \nu_{,2}\nu_{,3} = \\ & \frac{1}{2} e^{2\psi-2\nu} \omega_{,2}\omega_{,3} - 2e^{-2\psi} (A_{,2}A_{,3} + B_{,2}B_{,3}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

e

$$\begin{aligned} & 4e^{\mu_3-\mu_2} (\beta_{,2}\mu_{3,2} + \psi_{,2}\nu_{,2}) - 4e^{\mu_2-\mu_3} (\beta_{,3}\mu_{2,3} + \psi_{,3}\nu_{,3}) \\ & = 2e^{-\beta} \{ [e^{\mu_3-\mu_2} (e^\beta)_{,2},_2 - [e^{\mu_2-\mu_3} (e^\beta)_{,3},_3] \} - e^{2\psi-2\nu} [e^{\mu_3-\mu_2} (\omega_{,2})^2 - e^{\mu_2-\mu_3} (\omega_{,3})^2] \\ & + 4e^{-2\psi} \{ e^{\mu_3-\mu_2} [(A_{,2})^2 + (B_{,2})^2] - e^{\mu_2-\mu_3} [(A_{,3})^2 + (B_{,3})^2] \}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

⁵ A e B são funções potenciais obtidas a partir das componentes do tensor de Maxwell (1.83).

⁶ O índice 3 corresponde a $\cos \theta$ em vez de θ .

⁷ Ver nota de rodapé 3 na página 36.

juntamente com (2.21), fornece os valores de μ_2 e μ_3 .

Resta, portanto, resolver (2.27)-(2.29) para χ e ω . Substituindo Φ e Ψ , definidas por⁸

$$\begin{aligned} -\Phi_{,2} &= \frac{\delta}{\chi^2} \omega_{,3} + 2Im(HH_{,2}^*) \quad e \quad \Phi_{,3} = \frac{\Delta}{\chi^2} \omega_{,2} - 2Im(HH_{,3}^*); \\ \Psi &= \frac{\sqrt{(\Delta\delta)}}{\chi}, \quad Z = \Psi + |H|^2 + i\Phi, \end{aligned} \quad (2.32)$$

e, a partir de identidades entre elas, as equações (2.28) e (2.29) se tornam

$$\Psi[(\Delta Z_{,2})_{,2} + (\delta Z_{,3})_{,3}] = \Delta(Z_{,2})^2 + \delta(Z_{,3})^2 - 2H^*(\Delta Z_{,2}H_{,2} + \delta Z_{,3}H_{,3}), \quad (2.33)$$

enquanto que (2.27) resulta

$$\Psi[(\Delta H_{,2})_{,2} + (\delta H_{,3})_{,3}] = \Delta H_{,2}Z_{,2} + \delta H_{,3}Z_{,3} - 2H^*[\Delta(H_{,2})^2 + \delta(H_{,3})^2]. \quad (2.34)$$

O par (2.33) e (2.34) constitui-se nas *Equações de Ernst*.

A fim de reduzir as Equações de Ernst a uma única equação, toma-se

$$H = Q(Z + 1), \quad Q \in \mathbb{C}, \quad (2.35)$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(1 - 2|Q|^2)(Z + Z^*) - 2|Q|^2(|Z|^2 + 1)][(\Delta Z_{,2})_{,2} + (\delta Z_{,3})_{,3}] &= \\ = [1 - 2|Q|^2(Z^* + 1)][\Delta(Z_{,2})^2 + \delta(Z_{,3})^2]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Com a transformação

$$Z = \frac{1 + E}{1 - E} \quad e \quad \eta = \frac{(r - M)}{(M^2 - M_0^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.37)$$

a equação (2.36) se expressa como

$$\begin{aligned} (1 - 4|Q|^2 - |E|^2)\{[(\eta^2 - 1)E_{,\eta}]_{,\eta} + [(1 - \mu^2)E_{,\mu}]_{,\mu}\} &= \\ = -2E^*[(\eta^2 - 1)(E_{,\eta})^2 + (1 - \mu^2)(E_{,\mu})^2]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

⁸A existência de Φ é garantida pela equação (2.28).

A métrica de Kerr-Newman consiste na solução mais simples das Equações de Ernst para a métrica conjugada, que é obtida pela transformação

$$t \rightarrow i\varphi, \quad \varphi \rightarrow -it, \quad \tilde{\chi} = -\frac{\chi}{\chi^2 - \omega^2} \quad e \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2}. \quad (2.39)$$

A métrica conjugada satisfaz uma equação idêntica à equação (2.38) e admite a solução simples

$$\tilde{E} = -p\eta - iq\mu, \quad (2.40)$$

onde p e q são constantes reais que obedecem a relação

$$p^2 + q^2 = 1 - 4|Q|^2. \quad (2.41)$$

Revertendo para a variável r e escolhendo as constantes p e q como

$$p = \frac{(M^2 - M_0^2)^{\frac{1}{2}}}{M} \quad e \quad q = \frac{a}{M}, \quad (2.42)$$

pois corresponde à escolha mais simples consistente com a relação (2.41), obtém-se

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_*^2, \quad (2.43)$$

e

$$\tilde{\chi} = -\frac{\rho^2}{\Delta - a^2\delta} \sqrt{(\Delta\delta)} \quad \tilde{\omega} = \frac{a\delta}{\Delta - a^2\delta} [(r^2 + a^2) - \Delta]. \quad (2.44)$$

Retornando às variáveis originais e fazendo os cálculos descritos anteriormente, resulta

$$\chi = e^{\nu-\psi} = \frac{\rho^2 \sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sqrt{\delta}}, \quad e^{2\beta} = e^{2(\psi+\nu)} = \Delta\delta, \quad e^{2\psi} = \frac{\delta \Sigma^2}{\rho^2} \quad e \quad e^{2\nu} = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2}; \quad (2.45)$$

$$\omega = \frac{a}{\Sigma^2} (r^2 + a^2 - \Delta); \quad (2.46)$$

$$e^{\mu_2+\mu_3} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}, \quad e^{\mu_2-\mu_3} = \sqrt{\Delta}, \quad e^{2\mu_2} = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad e \quad e^{2\mu_3} = \rho^2, \quad (2.47)$$

onde

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2\delta\Delta. \quad (2.48)$$

Conclui-se do comportamento assintótico ($r \rightarrow +\infty$) das componentes da métrica⁹,

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &\longrightarrow 1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), & e^{2\psi} &\longrightarrow r^2 \sin^2 \theta + \mathcal{O}(r), \\ \omega &\longrightarrow \frac{2aM}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \\ e^{-2\mu_2} &\longrightarrow 1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), & e^{2\mu_3} &\longrightarrow r^2 + \mathcal{O}(r), \end{aligned} \quad (2.49)$$

que a métrica de Kerr-Newman descreve um espaço-tempo assintoticamente plano. De fato, tomando a métrica com componentes (2.49) e efetuando a mudança de coordenadas,

$$u = t - r - 2m \ln(r - 2m),$$

$$v = t + r + 2m \ln(r - 2m),$$

segue da Definição 2.5 para $\Omega = r^{-1}$ que o espaço-tempo em questão é assintoticamente plano ([25], v.2, Capítulo 9). A existência da família de soluções descrita no enunciado está provada. Para a demonstração de sua unicidade, conferir [7], pp.292-299. ■

Teorema 2.4 *Existe uma única família de soluções para as Equações de Einstein-Maxwell que sejam assintoticamente planas, estáticas e esfericamente simétricas, com horizonte de eventos convexo e não-degeneradas fora desse horizonte.*

Demonstração.

As afirmações do teorema decorrem das equações (2.45)-(2.49) quando se toma $a = 0$. ■

É importante ressaltar que as soluções pertencentes à família obtida no Teorema 2.3 estão unicamente determinadas por apenas três parâmetros, (M, a, Q_*) , permitindo a classificação das mesmas. Na próxima seção, tais parâmetros serão identificados com a massa, o momento angular por unidade

⁹Uma função f é dita de classe $\mathcal{O}(r^p)$ se $\lim_{r \rightarrow +\infty} |\frac{f}{r^p}| < \infty$.

de massa e a carga do buraco negro, respectivamente. Portanto, os parâmetros a e Q_* são escolhidos de forma a adquirir valores reais, enquanto que o parâmetro M está restrito aos valores não-negativos (essa restrição também precisa ser feita à coordenada radial r).

Definição 2.6 *A métrica obtida no Teorema 2.3, cuja forma geral é dada por*

$$ds^2 = \rho^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2} (dt)^2 - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \left(d\varphi - \frac{2aMr}{\Sigma^2} dt \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{\rho^2}{\Delta} (dr)^2 - \rho^2 (d\theta)^2, \quad (2.50)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.51)$$

e a função de horizonte é

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_*, \quad (2.52)$$

descreve um espaço-tempo denominado espaço-tempo de Kerr-Newman. Para $Q_* = 0$, tal métrica, correspondente ao espaço-tempo de Kerr, é formalmente idêntica à métrica (2.50), mas tem função de horizonte dada por

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (2.53)$$

Definição 2.7 *A métrica*

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} (dt)^2 - \frac{r^2}{\Delta} (dr)^2 - r^2 [(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta], \quad (\Delta = r^2 - 2Mr + Q_*), \quad (2.54)$$

obtida no Teorema 2.4 descreve um espaço-tempo denominado espaço-tempo de Reissner-Nordström. Para $Q_* = 0$, tal métrica se reduz a

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (dr)^2 - r^2 [(d\theta)^2 + (d\varphi)^2 \sin^2 \theta], \\ &(\Delta = r^2 - 2Mr), \end{aligned} \quad (2.55)$$

que corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild.

Pelas equações (2.50)-(2.55) é fácil perceber que existem pontos nos quais algumas componentes do tensor métrico se tornam infinitas. Como as componentes de um tensor são dependentes do sistema de coordenadas, é necessário algum indicador invariante por mudança de coordenadas para se concluir sobre as singularidades da métrica. Considera-se uma condição suficiente para existência de um ponto singular no espaço-tempo o fato de algum campo escalar obtido do tensor de Riemann tender ao infinito quando se aproxima do ponto.

Teorema 2.5 *As métricas de Kerr e Kerr-Newman apresentam uma singularidade em $(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$. As métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordström apresentam singularidade em $r = 0$.*

Demonstração.

Utilizando-se a base de 1-formas

$$\omega^0 = e^\nu dt, \quad \omega^1 = e^\psi (d\varphi - \omega dt), \quad \omega^2 = e^{\mu_2} dr \quad e \quad \omega^3 = e^{\mu_3} d\theta, \quad (2.56)$$

é possível determinar-se as componentes do tensor de Riemann fazendo uso das Equações de Maurer-Cartan (Teorema 1.12). A partir dessas componentes, o escalar $R^{ijkl}R_{ijkl}$ se torna infinito em $(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ para as métricas de Kerr e Kerr-Newman. Tomando-se $a = 0$, a singularidade se restringe a $r = 0$. ■

O teorema acima garante a existência de singularidades nas soluções encontradas. Surge a pergunta: existem outras singularidades em algumas dessas métricas? Uma possibilidade está em se considerar que um ponto não é singularidade no espaço-tempo se as geodésicas são bem comportadas nesse ponto ([6], pp.171-172). Baseado nesse fato, nenhuma das soluções encontradas apresenta singularidades além daquelas explicitadas no Teorema 2.5 ([7], [23], [6]).

2.2 Buracos Negros

Buracos negros são objetos no espaço-tempo constituídos de uma singularidade essencial “ocultada” por uma *trapped surface*, que consiste em uma superfície bidimensional fechada com a propriedade de que raios de luz,

perpendiculares a ela, convergem na direção um do outro à medida que se propagam ([23], p.934). As soluções encontradas no Teorema 2.3 possuem essa característica. De fato, segue do Teorema 2.5 que tais soluções admitem singularidades essenciais, isto é, locais do espaço-tempo em que a curvatura se torna infinita. Além disso, uma análise das geodésicas ([23],[6],[7]) que cruzam as superfícies descritas pelas raízes da função de horizonte Δ , descrita na equação (2.43), dadas por

$$r_+ = M + \sqrt{(M^2 - a^2 - Q_*^2)} \quad e \quad r_- = M - \sqrt{(M^2 - a^2 - Q_*^2)}, \quad (2.57)$$

mostra que tais superfícies são regulares¹⁰ e que r_+ envolve a singularidade em cada caso.

A superfície r_+ em (2.57) funciona globalmente como um ponto sem volta, no sentido de que geodésicas direcionadas para o futuro (isto é, no sentido crescente do parâmetro afim) que cruzam tal superfície não tornam a cruzá-la, ficando presas no interior do horizonte de eventos. O nome *buraco negro* surge da observação acima e do fato de que a luz descreve geodésicas (de tipo-luz) no espaço-tempo.

Em princípio pode haver uma vasta classe de buracos negros, dependendo do processo pelo qual são formados. No entanto, não importa quão assimétrico seja o processo que formou o buraco negro, ele rapidamente recai em um estado simétrico descrito pelas soluções dos Teoremas 2.3 e 2.4. Essa propriedade, que pode ser demonstrada individualmente para os vários campos que se imagina fazerem parte da construção de um buraco negro, é referida como *buracos negros não têm cabelos* ([6], pp.198-199). Assim, as soluções exatas das Equações de Einstein obtidas na seção precedente descrevem o estágio final de formação dos buracos negros.

Como foi visto na seção precedente, a família de soluções descrita no Teorema 2.3 está determinada de forma única por três parâmetros, denotados Q_* , M e a . A interpretação física dessas quantidades decorre de uma análise dos tipos de buracos negros, cujas métricas estão descritas nas Definições 2.6 e 2.7. A constante M corresponde à *massa* do buraco negro, pois das expressões (2.49) segue que a forma assintótica da métrica de Schwarzschild para $r \rightarrow +\infty$ representa o espaço-tempo exterior a uma distribuição esférica de massa inercial M . A função ω na forma geral da métrica, expressa pela equação (2.14), representa o *arrasto do referencial inercial*, isto é, uma partícula em repouso em relação a uma base ortonormal do espaço-tempo

¹⁰Para $a = Q_* = 0$, r_- degenera na singularidade de Schwarzschild.

terá uma velocidade angular ω numa base canônica ([7], pp.69-70). Decorre do comportamento assintótico de ω em (2.49) que a deve ser interpretado como o *momento angular por unidade de massa* do buraco negro. Finalmente, segue das Equações de Maxwell (Capítulo 3, Definição 3.7) para a métrica de Reissner-Nordström que o único componente não-nulo do tensor de Maxwell é dado por ([7], Capítulo 5)

$$F_{02} = -\frac{Q_*}{r^2}, \quad (2.58)$$

o que permite interpretar a constante Q_* como sendo a *carga* do buraco negro.

De acordo com a Definição 2.5, afirmar que um espaço-tempo é assintoticamente plano equivale a dizer que ele é originado por uma *fonte isolada*. Dessa forma, pelo que foi visto até o momento, o Teorema 2.3 pode ser enunciado como: *buracos negros isolados estão unicamente determinados por suas massas, cargas e momentos angulares*.

Os buracos negros apresentam características especiais e dão margem à imaginação humana ([23], [6]). Algumas das possibilidades mais especulativas que um espaço-tempo produzido por um buraco negro pode oferecer são:

- o buraco negro pode permitir a passagem a um outro universo assintoticamente plano, distinto do original;
- um viajante que, sob certas condições, atravesse o horizonte de Cauchy (superfície r_-) não tem sua vida futura guiada pelo seu passado;
- ao encontrar a singularidade essencial, o viajante “sai” do universo;
- em certos buracos negros, é possível desviar da singularidade e retornar ao universo;
- em alguns casos, está prevista a existência de *singularidades nuas*, de modo que elas podem ser atingidas e visualizadas por serem desprovidas de horizonte de eventos.

Uma característica interessante apresentada pelo buraco negro de Kerr é o fato de que a superfície $g_{tt} = 0$ não coincide com o horizonte de eventos $r = r_+$. A região entre essas duas superfícies denomina-se *ergoesfera* e nela o vetor de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$ torna-se de tipo-espaço. Desse comportamento resulta que uma partícula material que se encontre na ergoesfera pode extrair energia do

buraco negro; tal fenômeno é conhecido como *processo de Penrose*. Em geral, o ganho de energia δM e de momento angular δJ está sujeito à desigualdade

$$2r_+M\delta M \geq a\delta J \quad (2.59)$$

que, por sua vez, limita a quantidade de energia que pode ser extraída do buraco negro ([7], pp.366-375).

Como muito do que as soluções do Teorema 2.3 prevêem está fora da realidade física, sua importância reside principalmente na análise da estrutura matemática da teoria. Ao lado disso, é possível que existam buracos negros na Natureza provenientes do colapso de massas estelares. A vida de uma estrela é guiada pela luta entre os efeitos gravitacionais e as pressões internas. Originalmente, tais pressões surgem da queima de combustível nuclear; com o término do combustível, a pressão contrária à gravitação surge da repulsão entre elétrons (se essa pressão equilibra o efeito gravitacional, forma-se uma *anã branca*). Se o processo de colapso continuar, prótons e elétrons se combinam resultando numa *estrela de nêutrons*, a qual é formada quase que inteiramente por nêutrons. Como um fluido de nêutrons é o que existe de mais denso na Natureza, acredita-se que se a massa da estrela original for suficientemente alta (superior a dez massas solares), o colapso continuará, dando origem a um buraco negro ([23]).

Dessa forma, a solução de Schwarzschild (estática e esfericamente simétrica) descreve o colapso de estrelas sem rotação enquanto que a solução de Kerr (estacionária, axisimétrica e invariante por inversões simultâneas das coordenadas t e φ) corresponde ao colapso de estrelas com rotação. Além disso, como tais soluções são válidas apenas no vácuo ($T_{ij} = 0$, pois $Q_* = 0$) espera-se que elas sejam úteis na descrição do espaço exterior a uma estrela. Em princípio, as métricas de Kerr-Newman e Reissner-Nordström não descrevem sistemas físicos possíveis na Natureza na medida em que não se concebe a existência de um corpo macroscópico que possua carga resultante não-nula.

Capítulo 3

FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE

Nesse capítulo será introduzida a base matemática para o estudo das perturbações das métricas descritas no capítulo anterior. O estudo completo das perturbações em buracos negros só foi possível graças a uma abordagem diferenciada das Equações de Einstein via formalismo de Newman-Penrose. Tratado mediante tal formalismo, o problema adquire um caráter algébrico e - o que é mais importante - as equações são extremamente simplificadas para o caso dos buracos negros.

Inicialmente serão introduzidas as noções de base de tétrades e coeficientes de rotação, juntamente com as equações fundamentais da teoria. O formalismo de Newman-Penrose é então definido como aquele em que as tétrades são vetores de tipo-luz que obedecem certas condições. Também serão apresentadas as quantidades fundamentais do formalismo - a saber, os escalares de Weyl, Ricci, Maxwell e os coeficientes de spin - bem como as transformações possíveis nessas quantidades. Finalmente, será determinada a base de Newman-Penrose a ser utilizada em capítulos futuros bem como a expressão da solução geral para buracos negros via formalismo de Newman-Penrose, manifestando o caráter simplificado dos buracos negros quando descritos em tal formalismo.

3.1 Formalismo de Newman-Penrose

Definição 3.1 *Uma tétrade consiste numa base ortonormal de vetores tangentes definida em cada ponto de um espaço-tempo, ou seja,*

$$g(e_{(a)}, e_{(b)}) = g_{ij} e_{(a)}^i e_{(b)}^j = \eta_{(a)(b)}, \quad (3.1)$$

onde g é a métrica do espaço-tempo e $\eta_{(a)(b)}$ é uma matriz simétrica constante. Da mesma forma, pode-se definir uma base dual de tétrades em cada ponto do espaço co-tangente, dada por

$$e_{(a)}^i e_i^{(b)} = \delta_{(a)}^{(b)} \quad e \quad e_{(a)}^i e_j^{(a)} = \delta_j^i. \quad (3.2)$$

Teorema 3.1 *A matriz simétrica constante $\eta_{(a)(b)}$ descreve uma métrica plana no espaço-tempo.*

Demonstração.

A equação (3.1) garante que $\eta_{(a)(b)}$ define uma forma bilinear simétrica não-degenerada em cada ponto do espaço-tempo. Decorre daí que $\eta_{(a)(b)}$ admite uma métrica inversa $\eta^{(a)(b)}$ tal que

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)}. \quad (3.3)$$

Além disso, segue da Definição 3.1 que

$$\eta_{(a)(b)} e_i^{(a)} = e_{(b)i}, \quad \eta^{(a)(b)} e_{(a)i} = e_i^{(b)}, \quad (3.4)$$

e

$$e_{(a)i} e_j^{(a)} = g_{ij}. \quad (3.5)$$

A métrica $\eta_{(a)(b)}$ é dita plana, pois suas componentes são constantes em cada ponto do espaço-tempo. ■

Conclui-se da demonstração do teorema acima que a métrica plana $\eta_{(a)(b)}$ possui o mesmo comportamento que a métrica curva g_{ij} . Mais que isso, dado qualquer tensor, basta projetá-lo no referencial tétrade, à semelhança da equação (3.1), a fim de encontrar suas componentes tétrades. Baseado nesse processo, é possível estabelecer diferenciação no formalismo tétrade.

Definição 3.2 A derivada direcional de um vetor A , com componentes tétrades $A_{(a)}$, na direção $e_{(b)}$, é dada por

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} A_{(a)}. \quad (3.6)$$

Definição 3.3 A derivada intrínseca de um vetor A , com componentes tétrades $A_{(a)}$, na direção $e_{(b)}$, é dada por

$$A_{(a)|(b)} = e_{(a)}^i A_{i;j} e_{(b)}^j. \quad (3.7)$$

Teorema 3.2 Sejam $A_{(a)}$ as componentes tétrades de um vetor A na base tétrade. Então

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)} \quad (3.8)$$

e

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}, \quad (3.9)$$

onde

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}^k e_{(a)k;i} e_{(b)}^i \quad (3.10)$$

são denominados coeficientes de rotação de Ricci.

Demonstração.

De (3.6) segue

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} [e_{(a)}^j A_j] = e_{(b)}^i \nabla_{\partial_i} [e_{(a)}^j A_j] = e_{(b)}^i [e_{(a)}^j A_{j;i} + A_k e_{(a);i}^k], \quad (3.11)$$

onde foram utilizadas as propriedades da derivada covariante (Definição 1.5). De (1.59) obtém-se

$$e_{(a)j} A^j = e_{(a)}^j A_j. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.11), considerando o fato de que a conexão é riemanniana, e projetando o vetor A à semelhança de (3.1), resulta (3.8).

A equação (3.9) corresponde à equação (3.8) reescrita com o auxílio da definição (3.7) e da propriedade (3.4) da métrica plana. ■

Teorema 3.3 *Os coeficientes de rotação de Ricci podem ser determinados, sem o auxílio de derivadas covariantes, através da expressão*

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}[\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}], \quad (3.13)$$

onde

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}]e_{(a)}^i e_{(c)}^j. \quad (3.14)$$

Demonstração.

Pela Definição 3.1, tem-se

$$0 = \eta_{(a)(b),i} = e_{(a)j;i}e_{(b)}^j + e_{(a)j}e_{(b);i}^j. \quad (3.15)$$

Além disso, considerando o fato de que a conexão é simétrica, resulta de (3.14) e (3.10) que

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}. \quad (3.16)$$

As relações (3.16) e (3.15), com uso de (3.12), garantem que (3.13) está bem definida. ■

O teorema acima garante que, uma vez estabelecida a base de tetrades, toda a análise do espaço-tempo pode ser feita independentemente de um conhecimento prévio da conexão riemanniana.

Teorema 3.4 *As equações fundamentais do formalismo téttrade são:*

(i) *as relações de comutação*

$$[e_{(a)}, e_{(b)}] = \gamma_{(b)(a)}^{(c)} - \gamma_{(a)(b)}^{(c)}, \quad (3.17)$$

(ii) *a identidade de Ricci*

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} = & -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} \\ & + \gamma_{(b)(a)(f)}[\gamma_{(c)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}^{(f)}{}_{(c)}] + \gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(c)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

(iii) a identidade de Bianchi¹

$$R_{(a)(b)[(c)(d)](f)} = \frac{1}{6} \sum_{[(c)(d)(f)]} \{ R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} [\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)}] \}. \quad (3.19)$$

Demonstração.

As identidades de Ricci,

$$R^i_{jkl} Z_i = Z_{j;k;l} - Z_{j;l;k}, \quad Z \in T_0^1(M), \quad (3.20)$$

e de Bianchi,

$$R_{ij[kl;m]} = \frac{1}{3} (R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l}) = 0, \quad (3.21)$$

são identidades diferenciais obedecidas pelo tensor de curvatura em uma conexão riemanniana. As expressões (ii) e (iii) do teorema podem ser verificadas diretamente mediante a projeção sobre a base tétrade das identidades (3.20) e (3.21), respectivamente, e substituição das derivadas covariantes dos vetores da base pelos coeficientes de rotação, dados pela equação (3.10). A expressão (i) resulta da ação do comutador (1.24) sobre um campo escalar arbitrário, expressa em termos dos coeficientes de rotação. ■

Devido à anti-simetria dos coeficientes de rotação no primeiro par de índices, decorrente da expressão (3.15), segue que existem 24 coeficientes de rotação de Ricci. Além disso, pela forma como são construídas as equações do Teorema 3.4, conclui-se que existem 24 relações de comutação, 36 identidades de Ricci e 20 identidades de Bianchi independentes ([7], p.39).

Definição 3.4 *A base de Newman-Penrose (l, n, m, \bar{m}) consiste em uma base tétrade formada por vetores de tipo-luz, sendo dois reais (l, n) e dois*

¹Agrupar um conjunto de índices entre colchetes significa que a quantidade em questão está sob a ação do operador de anti-simetrização (Definição 1.10).

conjugados-complexos² (m, \bar{m}) , de forma que a matriz $\eta_{(a)(b)}$ é dada por

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Os vetores da base, considerados como derivadas direcionais, são denotados por símbolos especiais:

a) $e_1 = e^2 = D$;

b) $e_2 = e^1 = \bar{\Delta}$;

c) $e_3 = -e^4 = \delta$; e

d) $e_4 = -e^3 = \delta^*$.

(3.23)

Os vários coeficientes de rotação de Ricci, agora denominados *coeficientes de spin*, são representados pelos símbolos:

$$\begin{aligned} \kappa = \gamma_{311} \quad \lambda = \gamma_{244} \quad \rho = \gamma_{314} \quad \tau = \gamma_{312} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) \quad \alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) \\ \sigma = \gamma_{313} \quad \nu = \gamma_{242} \quad \mu = \gamma_{243} \quad \pi = \gamma_{241} \quad \gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) \quad \beta = \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Deve ficar claro que o conjugado-complexo de qualquer quantidade no formalismo de Newman-Penrose pode ser obtido pela substituição do índice 3, onde quer que ele ocorra, pelo índice 4, e vice-versa.

Decorre das simetrias do tensor de Riemann em uma conexão riemanniana numa variedade quadridimensional que os tensores de Weyl e Ricci possuem dez componentes independentes cada ([7], pp.42-43).

²A base de Newman-Penrose resulta da parametrização complexa do cone de luz - conjunto de vetores de tipo-luz - em um ponto do Espaço de Minkowski, que dá origem ao conceito de *espinor*. Ela é induzida por uma base normalizada do espaço de espinores de ordem 1 (ou vetores-spin). Uma breve introdução à álgebra e ao cálculo espinorial será feita na Seção 4.1.2; uma exposição completa do assunto pode ser encontrada em [25].

Definição 3.5 *No formalismo de Newman-Penrose, as dez componentes independentes do tensor de Weyl são representadas pelos cinco escalares complexos,*

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s, \\ \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\ \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\ \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\ \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s,\end{aligned}\tag{3.25}$$

denominados escalares de Weyl.

Definição 3.6 *No formalismo de Newman-Penrose, as dez componentes independentes do tensor de Ricci são representadas pelos quatro escalares reais e pelos três complexos:*

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{22}, & \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{44}; \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{13}, & \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, \\ \Lambda &= \frac{1}{24} = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}), & \Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{14}, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

As quantidades acima são denominadas escalares de Ricci.

Definição 3.7 *As Equações de Maxwell, as quais descrevem o campo eletromagnético, são*

$$F_{[ij;k]} = 0 \quad e \quad g^{ik}F_{ij;k} = 0\tag{3.27}$$

ou, em um referencial tétrade³,

$$F_{[(a)(b)|(c)]} = 0 \quad e \quad \eta^{(n)(m)}F_{(a)(n)|(m)} = 0,\tag{3.28}$$

onde F_{ij} denota o tensor de Maxwell.

³As equações (3.28) podem ser verificadas a partir da projeção sobre a base tétrade das equações (3.27) e substituição das derivadas covariantes dos vetores da base pelos coeficientes de rotação (3.10).

Definição 3.8 No formalismo de Newman-Penrose, o tensor de Maxwell F_{ij} , anti-simétrico de tipo $(0, 2)$, é substituído pelos três escalares complexos

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{13} = F_{ij}l^i m^j \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{12} + F_{43}) = \frac{1}{2}F_{ij}(l^i n^j + \bar{m}^i m^j) \\ \phi_2 &= F_{42} = F_{ij}\bar{m}^i n^j\end{aligned}\tag{3.29}$$

denominados escalares de Maxwell.

Uma vez escolhida uma base de Newman-Penrose é possível submetê-la a uma transformação de Lorentz em um ponto e estendê-la continuamente através do espaço-tempo. Dessa forma, tem-se seis graus de liberdade ao rodar o sistema tétrade escolhido, correspondendo aos seis parâmetros do grupo de transformações de Lorentz.

Definição 3.9 Uma transformação geral de Lorentz aplicada a uma base de Newman-Penrose, (l, n, m, \bar{m}) , é composta das seguintes três classes de rotações:

a) rotações de classe I:

$$l \longrightarrow l, \quad m \longrightarrow m + al, \quad \bar{m} \longrightarrow \bar{m} + a^*l, \quad n \longrightarrow n + a^*m + a\bar{m} + aa^*l;$$

b) rotações de classe II:

$$n \longrightarrow n, \quad m \longrightarrow m + bn, \quad \bar{m} \longrightarrow \bar{m} + b^*n, \quad l \longrightarrow l + b^*m + b\bar{m} + bb^*n;$$

c) rotações de classe III:

$$l \longrightarrow A^{-1}l, \quad n \longrightarrow An, \quad m \longrightarrow e^{i\theta}m, \quad \bar{m} \longrightarrow e^{-i\theta}\bar{m};$$

onde a, b são funções complexas e A, θ são funções reais sobre a variedade.

Observação. É fácil verificar que as transformações acima formam um grupo com seis parâmetros que preserva a métrica $\eta_{(a)(b)}$ da Definição 3.4.

Definição 3.10 Uma congruência de tipo-luz consiste numa família de curvas integrais de um vetor l de tipo-luz. Quando as curvas são geodésicas de tipo-luz, diz-se que a congruência é geodésica (ou de raios).

Teorema 3.5 *Os vetores l da base de Newman-Penrose formam uma congruência de geodésicas de tipo-luz se, e somente se, $\kappa = 0$. Além disso, as geodésicas estarão parametrizadas por parâmetros afins se, e somente se, $Re(\varepsilon) = 0$.*

Demonstração.

Da definição de coeficientes de rotação de Ricci no Teorema 3.2, segue que a variação infinitesimal sofrida pelo vetor da base $e_{(a)}$ na direção ξ é

$$\delta e_{(a)i} = e_{(a)i;j} \xi^j = e_i^{(b)} \gamma_{(b)(a)(c)} e_j^{(c)} \xi^j = -\gamma_{(a)(b)(c)} e_i^{(b)} \xi^{(c)}, \quad (3.30)$$

em que foi feito uso da anti-simetria dos coeficientes $\gamma_{(a)(b)(c)}$ no primeiro par de índices.

Aplicando (3.30) para δl_i na direção l e, utilizando-se os resultados (3.23) e (3.24), obtém-se

$$l_{i;j} l^j = (\varepsilon + \varepsilon^*) l_i - \kappa \bar{m}_i - \kappa^* m_i. \quad (3.31)$$

As afirmações do teorema decorrem da comparação entre (3.31) e a Definição 1.7 de geodésica. ■

A fim de se encontrar congruências de raios nos espaços-tempo que descrevem buracos negros é necessário determinar-se a forma explícita das geodésicas.

Teorema 3.6 *O movimento geodésico em um espaço-tempo com tensor métrico g_{ij} é descrito pela Equação de Hamilton-Jacobi*

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j}, \quad (3.32)$$

onde S denota a função principal de Hamilton.

Demonstração.

Conferir [23], pp.641-649. ■

Teorema 3.7 *A Equação de Hamilton-Jacobi aplicada à métrica de Kerr-Newman (e casos particulares desta) é separável e apresenta solução dada por*

$$\rho^4 \dot{r}^2 = \mathcal{R}, \quad (3.33)$$

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = \Theta, \quad (3.34)$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{\Delta} [2aMrE + (\rho^2 - 2Mr)L_z \csc^2 \theta], \quad (3.35)$$

$$\rho^2 \dot{t} = \frac{1}{\Delta} (\Sigma^2 E - 2aMrL_z), \quad (3.36)$$

onde

$$\mathcal{R} = E^2 r^4 + (a^2 E^2 - L_z^2 - \mathcal{L}) r^2 + 2Mr[\mathcal{L} + (L_z - aE)^2] - a^2 \mathcal{L} - \delta_1 r^2 \Delta \quad (3.37)$$

e

$$\Theta = \mathcal{L} + (a^2 E^2 - L_z^2 \csc^2 \theta) \cos^2 \theta - \delta_1 a^2 \cos^2 \theta \quad (3.38)$$

Demonstração.

Substituindo as componentes da métrica de Kerr-Newman (Definição 2.6) na Equação de Hamilton-Jacobi (3.32), resulta

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2 \Delta} [(r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi}]^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} [(a \sin^2 \theta) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}]^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} (\frac{\partial S}{\partial r})^2 - \frac{1}{\rho^2} (\frac{\partial S}{\partial \theta})^2. \quad (3.39)$$

A afirmação do teorema será verdadeira se a equação acima admitir solução da forma

$$S = \frac{1}{2} \delta_1 \tau - Et + L_z \varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (3.40)$$

Inserindo (3.40) e utilizando-se a identidade

$$(aE \sin^2 \theta - L_z)^2 \csc^2 \theta = (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + (L_z - aE)^2,$$

a equação (3.39) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \left\{ \Delta \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2 \right\} + \\ & + \left\{ \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \delta_1 a^2 \cos^2 \theta \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A equação (3.41) pode ser separada no par

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 &= \frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - [\mathcal{L} + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2], \\ \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 &= \mathcal{L} - (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2 + \delta_1 a^2) \cos^2 \theta,\end{aligned}\tag{3.42}$$

onde \mathcal{L} é uma constante de separação. A solução desse sistema é dada por

$$S = \frac{1}{2}\delta_1 \tau - Et + L_z \varphi + \int^r \frac{\sqrt{\mathcal{R}(r)}}{\Delta} dr + \int^\theta d\theta \sqrt{\Theta(\theta)},\tag{3.43}$$

onde \mathcal{R} e Θ são dadas pelas equações (3.37) e (3.38).

As equações (3.33)-(3.36) são obtidas a partir das derivadas parciais da solução S em (3.43) com respeito às quantidades conservadas, \mathcal{L} , δ_1 , E e L_z . ■

Pela Definição 3.4, tem-se que l é o vetor tangente a um raio de luz N e m é um vetor complexo ortogonal a l , de modo que em um ponto $p \in N$, a parte real de m gera com l um plano. Considerando um círculo nesse plano e seguindo os raios da congruência l que interceptam o círculo, na direção-futuro (parâmetro crescente), observa-se possível contração (ou expansão), rotação e distorção do círculo (em uma elipse). A contração (ou expansão), a rotação e a distorção são medidas, respectivamente, por $-Re(\rho)$, $Im(\rho)$ e σ ([7], pp. 56-58). Além disso, $\kappa = 0$ implica que os raios da congruência são geodésicas, como demonstrado no Teorema 3.5.

Dentre as congruências do vetor l , aquelas responsáveis por uma maior simplificação das quantidades e equações fundamentais são as *congruências geodésicas sem distorção*, para as quais $\kappa = \sigma = 0$. (Esse resultado decorre do Teorema de Goldberg-Sachs; [7], pp.62-63) O principal problema do formalismo de Newman-Penrose está em se encontrar uma base para a qual as congruências de l sejam geodésicas sem distorção.

Teorema 3.8 *Para o espaço-tempo de Kerr-Newman (e casos particulares deste), as geodésicas de tipo-luz definidas por*

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} E,\tag{3.44}$$

definem uma congruência geodésica sem distorção para o vetor

$$l = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right).$$

Demonstração.

Uma análise das equações do Teorema 3.7 ([7], pp.347-350 e 623) revela que as órbitas definidas por (3.44) constituem de fato geodésicas de tipo-luz no espaço-tempo de Kerr-Newman (e casos particulares deste).

Definindo-se a base de Newman-Penrose, a partir de (3.44), como

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \\ n &= \frac{1}{2\rho^2}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\ m &= \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}(i a \sin \theta, 0, 1, i \csc \theta), \\ \bar{m} &= \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}(-i a \sin \theta, 0, 1, -i \csc \theta), \end{aligned} \tag{3.45}$$

onde

$$\bar{\rho} = r + i a \cos \theta, \quad \bar{\rho}^* = r - i a \cos \theta, \quad e \quad \rho^2 = \bar{\rho} \bar{\rho}^*, \tag{3.46}$$

segue das equações (3.13), (3.14) e (3.24) que $\kappa = \sigma = 0$. ■

Teorema 3.9 *O conjunto de vetores de tipo-luz*

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \\ n &= \frac{1}{2\rho^2}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\ m &= \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}(i a \sin \theta, 0, 1, i \csc \theta), \\ \bar{m} &= \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}(-i a \sin \theta, 0, 1, -i \csc \theta), \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde

$$\bar{\rho} = r + i a \cos \theta, \quad \bar{\rho}^* = r - i a \cos \theta, \quad e \quad \rho^2 = \bar{\rho} \bar{\rho}^*, \tag{3.48}$$

constitui uma base de Newman-Penrose para a métrica de Kerr-Newman (e casos particulares desta). Além disso, os coeficientes de spin e os escalares

de Weyl e Maxwell para esse espaço-tempo, em termos dessa base, são dados por

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = 0, \quad (3.49)$$

$$\rho = -\frac{1}{\bar{\rho}^*}, \quad \beta = \frac{\cot \theta}{\bar{\rho} 2\sqrt{2}}, \quad \pi = \frac{i a \sin \theta}{\bar{\rho}^{*2} \sqrt{2}}, \quad \tau = -\frac{i a \sin \theta}{\rho^2 \sqrt{2}}, \quad (3.50)$$

$$\mu = -\frac{\Delta}{2\rho^2 \bar{\rho}^*}, \quad \gamma = \mu + \frac{r - M}{2\rho^2}, \quad \alpha = \pi - \beta^*; \quad (3.51)$$

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad (3.52)$$

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(\bar{\rho}^*)^3} + \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}(\bar{\rho}^*)^3}; \quad (3.53)$$

$$\phi_0 = \phi_2 = 0, \quad (3.54)$$

$$\phi_1 = -i \frac{Q_*}{2(\bar{\rho}^*)^2}. \quad (3.55)$$

Demonstração.

A afirmação de que o conjunto (3.47) constitui uma base de Newman-Penrose decorre diretamente da Definição 3.4. Aplicando a esse conjunto as equações (3.24), (3.13) e (3.14), obtém-se os coeficientes de spin (3.49)-(3.51). Os escalares de Weyl e Maxwell (3.52)-(3.55) resultam das equações do Teorema 3.4 e das Definições 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8, quando se faz uso das componentes do tensor de Riemann na métrica de Kerr-Newman (2.50), obtidas a partir das Equações de Maurer-Cartan (ver nota de rodapé 3 na página 36). ■

O Teorema 3.9 revela a adaptabilidade dos buracos negros ao formalismo de Newman-Penrose, não apenas pela descrição unificada das soluções, mas principalmente pela simplificação algébrica ($\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$) proporcionada nesses casos. Tal simplificação deve-se ao fato de que os espaços-tempo característicos de buracos negros permitem uma simplificação do tensor de Weyl, mediante transformações da base de Newman-Penrose (Definição 3.9), que tornam as congruências formadas pelos vetores l e n geodésicas sem distorção ([7], pp.62-63).

3.2 Cones de Luz

A noção de campos de tétrades, compondo bases ortonormais sujeitas ao grupo de transformações de Lorentz corresponde à construção de referenciais inerciais ao longo do espaço-tempo. Para o Espaço de Minkowski, esses referenciais são globais, enquanto que no caso geral sua definição é local (Seção 1.2).

O formalismo tétrade foi desenvolvido por Cartan e é equivalente ao formalismo tensorial da geometria riemanniana, mas enquanto esse último concentra as propriedades do espaço-tempo nas componentes do tensor métrico, a abordagem tétrade focaliza a análise na geometria dos vetores da base, através dos coeficientes de rotação. Dessa forma, pode-se explorar as simetrias presentes em certo espaço-tempo e escolher bases tétrades que se adaptem ao problema.

Outro conceito introduzido por Cartan, e desenvolvido por Penrose, é o de *espinor* (Seção 4.1.2), o qual surge no processo de parametrização complexa do cone de luz, definido como o conjunto de vetores de tipo-luz na origem do Espaço de Minkowski. Como a álgebra tensorial está incluída na álgebra espinorial, pode-se entender os tensores como sendo um tipo de espinor, mais precisamente como espinores “reais”. A base de Newman-Penrose consiste em um conjunto de espinores de ordem 2, mas pode ser vista, via inclusão, como uma tétrade de tensores reais e “complexos”. Nesse sentido, uma base de Newman-Penrose corresponde à utilização das congruências de raios de luz como referenciais.

O formalismo de Newman-Penrose foi construído de modo a descrever o espaço-tempo por meio da geometria (coeficientes de spin) dos cones de luz. Isso decorre da forte crença de Roger Penrose de que o elemento essencial de um espaço-tempo é sua estrutura de cone de luz. Além do caráter algébrico que a teoria adquire, com a possível classificação dos espaços-tempo de acordo com a forma do tensor de Weyl ([7], pp.58-62), é nas soluções representativas dos buracos negros que a estrutura do cone de luz se mostra mais efetiva, como evidenciado pela expressão simplificada desses espaços-tempo (Teorema 3.9) e pela separação das variáveis na função principal de Jacobi (Teorema 3.7).

Nos capítulos seguintes, a adaptabilidade do formalismo de Newman-Penrose aos buracos negros se tornará evidente, na medida em que permitirá o estudo das perturbações dos mesmos através da separabilidade, e conseqüente resolução, das equações fundamentais da teoria.

Capítulo 4

PERTURBAÇÕES DE BURACOS NEGROS

Este capítulo é devotado ao estudo das perturbações dos buracos negros de Kerr e Schwarzschild, para os quais existe um tratamento analítico completo da teoria. As perturbações em buracos negros carregados (Kerr-Newman e Reissner-Nordström) serão analisadas no próximo capítulo.

Estudar as perturbações em buracos negros consiste em se descrever a propagação de ondas de diferentes tipos pelo espaço-tempo e como elas são espalhadas e absorvidas. A necessidade de tal estudo surgiu no contexto da estabilidade de buracos negros, isto é, a configuração de colapso deve ser estável a qualquer tipo de perturbação externa a fim de que tais objetos possam se manter na Natureza (e serem detectados). Em outras palavras, um buraco negro será estável se toda perturbação inicial com suporte compacto permanecer limitada durante sua evolução ([7], pp.199-200).

Inicialmente as equações dos campos de partículas sem massa - fótons, neutrinos e grávitons - serão expressas de forma apropriada à solução de Kerr e então reduzidas e separadas nas chamadas Equações de Teukolsky. A partir de uma forma padrão das Equações de Teukolsky, serão determinadas condições necessárias e suficientes para transformá-la numa equação de onda. Em cada caso (fótons, neutrinos e grávitons), serão obtidas as barreiras de potencial e as soluções, denominadas *modos normais*, das respectivas equações de onda. Finalmente, será feita uma análise dos coeficientes de reflexão e transmissão das ondas incidentes nos buracos negros a fim de se entender como elas são espalhadas e absorvidas.

4.1 Equações de Teukolsky

Como a métrica de Kerr é estacionária e axisimétrica, é natural analisar uma perturbação geral desse espaço-tempo como uma superposição de ondas com diferentes frequências ω e períodos m em φ .

Definição 4.1 *Uma perturbação consiste numa superposição de diferentes modos com uma dependência nas variáveis t e φ , dada por*

$$e^{i(\omega t + m\varphi)}, \quad (4.1)$$

onde ω é um real positivo e m , um inteiro positivo, negativo ou zero¹.

No que segue, o fator comum da Definição 4.1, presente nas quantidades que descrevem a perturbação, será omitido de forma que tais grandezas estarão representadas por suas amplitudes. Em princípio, não há motivo para se esperar que a dependência das amplitudes nas variáveis restantes, r e θ , seja passível de separação. É um resultado surpreendente [29] que essa separação seja possível quando as equações dos campos de onda são escritas no formalismo de Newman-Penrose com a base de vetores escolhida no Teorema 3.9.

Teorema 4.1 *Seja (l, n, m, \bar{m}) a base de vetores do Teorema 3.9. Quando tais vetores atuam sobre funções com a dependência em t e φ especificada na Definição 4.1, resulta*

$$\begin{aligned} l &= D = \mathcal{D}_0, \\ n &= \bar{\Delta} = -\frac{\Delta}{2\rho^2} \mathcal{D}_0^\dagger, \\ m &= \delta = \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}} \mathcal{L}_0^\dagger, \\ \bar{m} &= \delta^* = \frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}} \mathcal{L}_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

¹Para o buraco negro de Schwarzschild, $m = 0$ devido à simetria esférica.

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n &= \partial_r + \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\
\mathcal{D}_n^\dagger &= \partial_r - \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\
\mathcal{L}_n &= \partial_\theta + Q + n \cot \theta, \\
\mathcal{L}_n^\dagger &= \partial_\theta - Q + n \cot \theta,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

e

$$K = (r^2 + a^2)\omega + am, \quad Q = a\omega \sin \theta + m \csc \theta, \tag{4.4}$$

$$\bar{\rho} = r + i a \cos \theta, \quad \bar{\rho}^* = r - i a \cos \theta, \quad \bar{\rho}^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \tag{4.5}$$

Demonstração.

As expressões (4.2) resultam da aplicação direta das equações (3.47) sobre os modos descritos na Definição 4.1. ■

Estabelecida a formulação matemática do problema, o objetivo agora consiste em expressar as equações das partículas sem massa - fótons, neutrinos e grávitons - no formalismo de Newman-Penrose, reduzi-las e separá-las a fim de se obter as Equações de Teukolsky. Esse procedimento será feito caso a caso.

4.1.1 Fótons

Teorema 4.2 *As Equações de Maxwell (Definição 3.7) no formalismo de Newman-Penrose são*

$$D\phi_1 - \delta^*\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2, \tag{4.6}$$

$$D\phi_2 - \delta^*\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\phi_2, \tag{4.7}$$

$$\delta\phi_1 - \bar{\Delta}\phi_0 = (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \tag{4.8}$$

$$\delta\phi_2 - \bar{\Delta}\phi_1 = -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2, \tag{4.9}$$

onde ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 são os escalares de Maxwell, $\lambda, \pi, \rho, \varepsilon, \mu, \gamma, \tau, \sigma, \nu, \beta$ são os coeficientes de spin e $D, \bar{\Delta}, \delta, \delta^*$ representam os operadores derivada direcional da base de Newman-Penrose (Teorema 4.1).

Demonstração.

O sistema (4.6)-(4.9) é obtido quando as equações (3.28) são escritas a partir dos escalares de Maxwell (Definição 3.8), dos coeficientes de spin (3.24) e dos operadores (4.2). ■

Teorema 4.3 *A propagação de fótons no espaço-tempo do buraco negro de Kerr é governada pelas equações*

$$(\Delta \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0^\dagger - 2i\omega r)(\Delta R_{+1}) = \mathcal{Q}(\Delta R_{+1}), \quad (4.10)$$

$$(\Delta \mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0 + 2i\omega r)R_{-1} = \mathcal{Q}R_{-1}, \quad (4.11)$$

$$(\mathcal{L}_0^\dagger \mathcal{L}_1 + 2a\omega \cos \theta)S_{+1} = -\mathcal{Q}S_{+1}, \quad (4.12)$$

$$(\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1^\dagger - 2a\omega \cos \theta)S_{-1} = -\mathcal{Q}S_{-1}, \quad (4.13)$$

com

$$\phi_0 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \quad (4.14)$$

e

$$\phi_2 = \frac{1}{2(\bar{\rho}^*)^2} R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \quad (4.15)$$

onde \mathcal{Q} é uma constante de separação, e $R_{\pm 1}$ e $S_{\pm 1}$ são, respectivamente, funções de r e θ somente.

Demonstração.

Substituindo nas Equações de Maxwell os coeficientes de spin (3.49)-(3.51), apropriados à métrica de Kerr ($Q_* = 0$), as derivadas direcionais definidas em (4.2), e fazendo as substituições

$$\Phi_0 = \phi_0, \quad \Phi_1 = \phi_1 \bar{\rho}^* \sqrt{2} \quad e \quad \Phi_2 = 2\phi_2 (\bar{\rho}^*)^2, \quad (4.16)$$

com $\bar{\rho}$ e $\bar{\rho}^*$ definidas em (4.5), obtém-se um sistema de quatro equações lineares de 1ª ordem que podem ser reduzidas ao sistema

$$[(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*})(\mathcal{L}_1 - \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*}) + \Delta(\mathcal{D}_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*})(\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*})]\Phi_0 = 0, \quad (4.17)$$

$$[(\mathcal{L}_0 + \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*})(\mathcal{L}_1^\dagger - \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*}) + \Delta(\mathcal{D}_0^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*})(\mathcal{D}_0 - \frac{1}{\bar{\rho}^*})]\Phi_2 = 0, \quad (4.18)$$

mediante a eliminação de Φ_1 , devido à comutatividade dos operadores $(\mathcal{D}_0 + \frac{1}{\bar{\rho}^*})$ e $(\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*})$, bem como dos operadores $(\mathcal{L}_0 + \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*})$ e $\Delta(\mathcal{D}_0^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*})$.

A equação (4.17) pode ser simplificada fazendo-se uso das identidades

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{D}_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*})(\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}) &= \Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^\dagger - \frac{2iK}{\bar{\rho}^*}, \\ (\mathcal{L}_0^\dagger + \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*})(\mathcal{L}_1 - \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*}) &= \mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1 + \frac{2ia \sin \theta}{\bar{\rho}^*}Q, \\ K - aQ \sin \theta &= \rho^2\omega, \end{aligned}$$

em que K e Q estão definidas por (4.4). Redução semelhante pode ser feita à equação (4.18), de modo que o sistema (4.17)-(4.18) se torna

$$[\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^\dagger + \mathcal{L}_0^\dagger\mathcal{L}_1 - 2i\omega(r + ia \cos \theta)]\Phi_0 = 0, \quad (4.19)$$

$$[\Delta\mathcal{D}_0^\dagger\mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_0\mathcal{L}_1^\dagger + 2i\omega(r + ia \cos \theta)]\Phi_2 = 0. \quad (4.20)$$

A separação das equações (4.19)-(4.20) é então possível mediante as substituições

$$\Phi_0 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \quad e \quad \Phi_2 = R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \quad (4.21)$$

resultando nas equações (4.10)-(4.13). ■

Observação. A constante de separação \mathcal{Q} é única porque as equações (4.12) e (4.13) são conjugadas complexas de modo que as funções S_{+1} e S_{-1} admitem o mesmo conjunto de auto-valores; tais equações podem ser expandidas e resolvidas a fim de se obter a constante de separação. Além disso, observando (4.10) e (4.11), conclui-se que ΔR_{+1} e R_{-1} também satisfazem equações conjugadas complexas.

As equações (4.10)-(4.13) e as funções $R_{\pm 1}$ e $S_{\pm 1}$ são denominadas, respectivamente, *Equações de Teukolsky* e *Funções de Teukolsky*.

4.1.2 Neutrinos

A fim de se expressar as Equações de Dirac - que descrevem o campo de neutrinos - no formalismo de Newman-Penrose, serão apresentadas a seguir as noções básicas do formalismo espinorial o qual está intimamente relacionado com a estrutura dos cones de luz.

Formalismo Espinorial

Definição 4.2 *Um cone de luz consiste no conjunto dos vetores nulos (ou de tipo-luz) através da origem do Espaço de Minkowski.*

A noção de espinor surge da observação de que o cone de luz em torno da origem do Espaço de Minkowski admite parametrização complexa, isto é, um ponto no cone de luz pode ser representado tanto por uma matriz com quatro entradas reais como por uma matriz com duas entradas complexas.

Definição 4.3 *Os espinores de ordem 1, ξ^A e $\bar{\xi}^{A'}$, são vetores complexos em espaços bidimensionais, $(A, A' = 0, 1)$, sujeitos às transformações*

$$\xi_*^A = \alpha_B^A \xi^B \quad e \quad \bar{\xi}_*^{A'} = \bar{\alpha}_{B'}^{A'} \bar{\xi}^{B'}, \quad (4.22)$$

onde (α_B^A) e $(\bar{\alpha}_{B'}^{A'})$ são matrizes conjugadas complexas unimodulares², denominadas matrizes-spin.

Teorema 4.4 *Cada espinor de ordem 1 representa um ponto do cone de luz.*

Demonstração.

Seja $\xi^A, (A = 0, 1)$, um espinor de ordem 1 e considere o ponto $x^i, (i = 0, 1, 2, 3)$ no Espaço de Minkowski, dado por

$$\begin{aligned} x^0 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{0'} + \xi^1 \bar{\xi}^{1'}), \\ x^1 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{1'} + \xi^1 \bar{\xi}^{0'}), \\ x^2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{1'} - \xi^1 \bar{\xi}^{0'}), \\ x^3 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0 \bar{\xi}^{0'} - \xi^1 \bar{\xi}^{1'}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

ou, inversamente,

$$\begin{aligned} \xi^0 \bar{\xi}^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), & \xi^0 \bar{\xi}^{1'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \\ \xi^1 \bar{\xi}^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2), & \xi^1 \bar{\xi}^{1'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3). \end{aligned} \quad (4.24)$$

²A condição de unimodularidade aqui significa determinante real unitário.

Por essas equações, resulta

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 2(\xi^0 \bar{\xi}^{0'} \xi^1 \bar{\xi}^{1'} - \xi^0 \bar{\xi}^{1'} \xi^1 \bar{\xi}^{0'}) = 0. \quad (4.25)$$

Além disso, definindo-se x_*^i em termos de ξ_*^A e $\bar{\xi}_*^{A'}$ à semelhança de (4.22), pode-se mostrar ([7], pp.532-533) que as matrizes-spin da Definição 4.3 constituem-se em condição necessária e suficiente para que a transformação

$$x_*^i = \beta_j^i x^j$$

seja lorentziana. ■

É importante observar que existem duas classes de espinores (com e sem linha) conforme as transformações às quais elas estão sujeitas. Isso se deve ao fato de que existem dois conjuntos de vetores-spin, \mathcal{S}^A e $\mathcal{S}^{A'}$, interligados pela relação de *conjugação*,

$$\xi^A = (\xi^0, \xi^1) \in \mathcal{S}^A \mapsto \bar{\xi}^{A'} = (\bar{\xi}^{0'}, \bar{\xi}^{1'}) \in \mathcal{S}^{A'}, \quad (4.26)$$

de maneira que as componentes de $\bar{\xi}^{A'}$ são as conjugadas complexas das componentes de ξ^A .

Teorema 4.5 *O conjunto dos vetores-spin, \mathcal{S}^A , forma um espaço linear bidimensional sobre o corpo dos complexos e admite um produto interno anti-simétrico ϵ_{AB} , definido por*

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Demonstração.

Sejam $\kappa = (\kappa^0, \kappa^1)$, $\omega = (\omega^0, \omega^1) \in \mathcal{S}^A$ e considere as operações:

(i) adição: $\mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^A \longrightarrow \mathcal{S}^A$, dada por

$$\kappa + \omega = (\kappa^0, \kappa^1) + (\omega^0, \omega^1) = (\kappa^0 + \omega^0, \kappa^1 + \omega^1); \quad (4.28)$$

(ii) multiplicação escalar: $\mathbb{C} \times \mathcal{S}^A \longrightarrow \mathcal{S}^A$, dada por

$$\lambda \kappa = \lambda(\kappa^0, \kappa^1) = (\lambda \kappa^0, \lambda \kappa^1); \quad (4.29)$$

(iii) produto interno: $\mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^A \longrightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$\{\kappa, \omega\} = \{(\kappa^0, \kappa^1), (\omega^0, \omega^1)\} = \kappa^0 \omega^1 - \kappa^1 \omega^0. \quad (4.30)$$

Utilizando-se a Definição 4.3, pode-se verificar facilmente que tais operações permanecem invariantes por transformações-spin. O resultado do teorema é consequência das definições (4.28)-(4.30). ■

Observação. Analogamente, pode-se demonstrar um resultado similar para o conjunto $\mathcal{S}^{A'}$ dos vetores-spin definidos por (4.26).

Da mesma forma que no caso tensorial (Teorema 1.3), pode-se construir a *álgebra espinorial* gerada pelos espaços lineares \mathcal{S}^A e $\mathcal{S}^{A'}$, através de classes de equivalência de somas formais de produtos formais ([25], v.1, Capítulo 2). Assim, definem-se espinores de ordem superior como, por exemplo,

$$\begin{aligned} X^{AB} &\in \mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^A, \\ X^{AB'} &\in \mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}, \\ X_C^{AB'} &\in \mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'} \otimes \mathcal{S}_A, \end{aligned}$$

onde \mathcal{S}_A denota o dual de \mathcal{S}^A .

A necessidade de se construir a álgebra espinorial a partir dos espaços \mathcal{S}^A e $\mathcal{S}^{A'}$, e não apenas \mathcal{S}^A , reside no fato de que, desse modo, a *álgebra tensorial* pode ser vista como estando incluída na *álgebra espinorial*, da mesma forma com que o corpo dos números reais está incluído no corpo dos complexos. Assim, um *tensor real* (ou simplesmente *tensor*) corresponde ao espinor que é invariante pela operação de conjugação (4.26), ou seja, corresponde aos elementos da álgebra espinorial gerados por $\mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}$ que são hermitianos. Os espinores, em geral, gerados por $\mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}$ são denominados *tensores complexos*.

Embora o conceito de espinor esteja associado à noção de vetor nulo (Definição 4.2), segue da unicidade expressa no Teorema 1.3 e do fato de os vetores nulos gerarem o Espaço de Minkowski que a álgebra tensorial induzida pela álgebra espinorial está bem definida.

Pelo que foi visto, um vetor tangente pode ser expresso através de uma base de $T_0^1(M)$ ou por meio de uma base de \mathcal{S}^A . A correspondência entre essas bases é feita pelos *símbolos de Infeld-van der Waerden*.

Definição 4.4 *Sejam $\{\xi_A : A = 0, 1\}$, $\{\xi^A : A = 0, 1\}$ uma base para \mathcal{S}^A , e sua dual, e sejam $\{e_i : i = 0, 1, 2, 3\}$, $\{e^i : i = 0, 1, 2, 3\}$ uma base para*

$T_0^1(M)$, e sua dual. Os símbolos de Infeld-van der Waerden são definidos por³

$$\begin{aligned}\sigma_i^{AB'} &= e_i(\xi^A \xi^{B'}), \\ \sigma_{AB'}^i &= (\xi_A \xi_{B'}) e^i.\end{aligned}\tag{4.31}$$

A Definição 4.4 permite representar as componentes do vetor K em termos das componentes do mesmo vetor numa base espinorial, e vice-versa, isto é,

$$K^i = \sigma_{AB'}^i K^{AB'} \quad e \quad K^{AB'} = \sigma_i^{AB'} K^i.\tag{4.32}$$

Das equações (4.32) segue que as matrizes- σ devem ser hermitianas quando o vetor K for real. A equação (4.32) pode ser generalizada para tensores de ordem superior de forma natural; por exemplo, as componentes do tensor métrico são dadas por

$$g_{ij} = \sigma_i^{AB'} \sigma_j^{CD'} \epsilon_{AC} \epsilon_{B'D'}.\tag{4.33}$$

Com base no fato de que o espaço-tempo é localmente semelhante ao Espaço de Minkowski, é possível estabelecer, à semelhança das tétrades no caso tensorial, uma base espinorial ortonormal em cada ponto do espaço-tempo, $\zeta_{(a)}^A$ e $\zeta_{(a')}^{A'}$ ($a, a' = 0, 1$ e $A, A' = 0, 1$), denominada *base díade*⁴. Em particular, os espinores da base díade receberão símbolos especiais,

$$\zeta_{(0)}^A = o^A \quad e \quad \zeta_{(1)}^A = \iota^A,\tag{4.34}$$

e a condição de normalização será expressa por (Teorema 4.5)

$$\epsilon_{AB} o^A \iota^B = o^0 \iota^1 - o^1 \iota^0 = o_B \iota^B = -o^A \iota_A = 1.\tag{4.35}$$

Teorema 4.6 *Os espinores da base díade determinam uma base de Newman-Penrose através da correspondência*

$$\begin{aligned}\sigma_{AB'}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_0^{AB'}, \quad \sigma_{AB'}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1^{AB'}, \\ \sigma_{AB'}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2^{AB'}, \quad \sigma_{AB'}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3^{AB'}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

³Cada operação em (4.31) corresponde à expressão de mudança da base de $T_0^1(M)$ para a base de $\mathcal{S}^A \otimes \mathcal{S}^{A'}$, e vice-versa.

⁴A existência de campos de espinores globais depende de condições topológicas do espaço-tempo considerado. Uma condição necessária e suficiente é que o espaço-tempo seja não-compacto e paralelizável (Teorema de Geroch) de forma que o módulo dos vetores-spin possa ser finitamente gerado ([25], v.1, Capítulo 1).

Demonstração.

Considere o vetor K escrito em termos da base díade,

$$K = K^{00'} o^A \bar{o}^{B'} + K^{01'} o^A \bar{l}^{B'} + K^{10'} l^A \bar{o}^{B'} + K^{11'} l^A \bar{l}^{B'}, \quad (4.37)$$

e de uma base (l, n, m, \bar{m}) ,

$$K = K^0 l + K^1 n + K^2 m + K^3 \bar{m}. \quad (4.38)$$

Das equações (4.32) e (4.36), resulta

$$\begin{pmatrix} K^{00'} & K^{01'} \\ K^{10'} & K^{11'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^0 & K^2 \\ K^3 & K^1 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Substituindo (4.39) em (4.37), e comparando com (4.38), segue

$$\begin{aligned} l &= o^A \bar{o}^{B'}, & m &= o^A \bar{l}^{B'}, \\ \bar{m} &= l^A \bar{o}^{B'}, & n &= l^A \bar{l}^{B'}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Basta agora observar, a partir das equações (4.26), (4.30) e (4.35), que os vetores (4.40) satisfazem as condições da Definição 3.4. ■

Teorema 4.7 *Os espinores da base díade determinam uma tétrade no Espaço de Minkowski através da correspondência*

$$\begin{aligned} \sigma_0^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_{AB'}^0, & \sigma_1^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_{AB'}^1, \\ \sigma_2^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_{AB'}^2, & \sigma_3^{AB'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_{AB'}^3. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Demonstração.

Considere o vetor K escrito em termos da base díade,

$$K = K^{00'} o^A \bar{o}^{B'} + K^{01'} o^A \bar{l}^{B'} + K^{10'} l^A \bar{o}^{B'} + K^{11'} l^A \bar{l}^{B'}, \quad (4.42)$$

e de uma base (t, x, y, z) ,

$$K = K^0 t + K^1 x + K^2 y + K^3 z. \quad (4.43)$$

Das equações (4.32) e (4.41), resulta (ver equação (4.24))

$$\begin{pmatrix} K^{00'} & K^{01'} \\ K^{10'} & K^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} K^0 + K^3 & K^1 + iK^2 \\ K^1 - iK^2 & K^0 - K^3 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Substituindo (4.44) em (4.42), e comparando com (4.43), segue

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \bar{o}^{A'} + \iota^A \bar{\iota}^{A'}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(l + n), \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \bar{\iota}^{A'} + \iota^A \bar{o}^{A'}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(m + \bar{m}), \\ y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(o^A \bar{\iota}^{A'} + \iota^A \bar{o}^{A'}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(m - \bar{m}), \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \bar{o}^{A'} - \iota^A \bar{\iota}^{A'}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(l - n). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Basta agora observar, a partir das equações (4.26), (4.30) e (4.35), que os vetores (4.45) satisfazem as condições da Definição 3.1 para a métrica de Minkowski (ver equação (1.75))

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

Decorre da equação (4.40) que os equivalentes espinoriais para os operadores derivada direcional do formalismo de Newman-Penrose são dados por

$$\begin{aligned} \partial_{00'} &= D = l^i \partial_i, & \partial_{01'} &= \delta = m^i \partial_i, \\ \partial_{10'} &= \delta^* = \bar{m}^i \partial_i, & \partial_{11'} &= \bar{\Delta} = n^i \partial_i. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A *derivada covariante* de um campo espinorial $X_{CD'}$ é definida de forma natural através da correspondência

$$\nabla_i \longleftrightarrow \nabla_{AB'} \quad (4.47)$$

de forma que

$$X_{CD';AB'} = \sigma_{CD'}^j \sigma_{AB'}^i X_{j;i}. \quad (4.48)$$

A unicidade da definição é garantida por um conjunto de axiomas ([7], pp.539-543). Da mesma forma que no formalismo tétrade, é possível definir a noção de *derivada intrínseca* para espinores como a projeção na base díade da derivada covariante de campos espinoriais.

Definição 4.5 *A derivada intrínseca de um componente díade, $\xi_{(a)}$, de um espinor ao longo da direção $(b)(c')$ é*

$$\xi_{(a)|(b)(c')} = \zeta_{(a)}^A \xi_{A;BC'} \zeta_{(b)}^B \zeta_{(c')}^{C'} \quad (4.49)$$

ou, equivalentemente,

$$\xi_{(a)|BC'} = \zeta_{(a)}^A \xi_{A;BC'}, \quad (4.50)$$

onde $\zeta_{(a)}^A$ são os espinores da base díade.

Definição 4.6 *Os coeficientes de spin, $\Gamma_{(a)(b)(c)(d')}$, são definidos no formalismo díade por*

$$\Gamma_{(a)(b)(c)(d')} = [\zeta_{(a)F}]_{;CD'} \zeta_{(b)}^F \zeta_{(c)}^C \zeta_{(d')}^{D'} \quad (4.51)$$

ou, equivalentemente,

$$\Gamma_{(a)(b)CD'} = [\zeta_{(a)F}]_{;CD'} \zeta_{(b)}^F. \quad (4.52)$$

Teorema 4.8 *As derivadas intrínsecas das componentes díades de espinores de ordem 1, $\xi_{(a)}$ e $\xi^{(a)}$, são expressas em termos dos coeficientes de spin por*

$$\xi_{(a)|BC'} = \xi_{(a),BC'} + \Gamma_{(d)(a)BC'} \xi^{(d)} \quad (4.53)$$

e

$$\xi_{|BC'}^{(a)} = \xi_{,BC'}^{(a)} + \Gamma_{(d)BC'}^{(a)} \xi^{(d)}. \quad (4.54)$$

Demonstração.

Contraindo a equação (4.52) com $\zeta_E^{(b)}$ e fazendo uso das relações

$$\zeta_{(a)A} \zeta_{(b)}^A = -\zeta_{(a)}^A \zeta_{(b)A} = \epsilon_{(a)(b)} \quad e \quad \zeta_{(a)A} \zeta^{(b)A} = -\zeta_{(a)}^A \zeta_A^{(b)} = \delta_{(a)}^{(b)}, \quad (4.55)$$

as quais são conseqüências das definições (4.30), (4.34) e (4.35), segue que

$$[\zeta_{(a)E}]_{;CD'} = -\zeta_E^{(b)} \Gamma_{(b)(a)CD'} = \zeta_{(b)E} \Gamma_{(a)CD'}^{(b)}. \quad (4.56)$$

Agora, de (4.50) tem-se

$$\xi_{(a)|BC'} = \zeta_{(a)}^A \xi_{A;BC'} = [\xi_A \zeta_{(a)}^A]_{;BC'} - \xi_A [\zeta_{(a)}^A]_{;BC'}. \quad (4.57)$$

A partir das equações (4.48), (4.33) e (4.55), é possível demonstrar ([7], pp.540-541) que

$$[\zeta_{(b)F}]_{;CD'} \zeta_{(a)}^F = -[\zeta_{(b)}^F]_{;CD'} \zeta_{(a)F}. \quad (4.58)$$

Utilizando (4.56), (4.58) e observando que $\xi_A \zeta_{(a)}^A = \xi_{(a)}$ é um escalar, resulta (4.53). Analogamente, encontra-se o resultado (4.54). ■

Como a derivada covariante obedece à regra de Leibniz, o Teorema 4.8 pode ser estendido naturalmente a fim de se determinar a derivada intrínseca dos espinores de ordem superior.

De (4.58), segue que os coeficientes de spin são simétricos no primeiro par de índices de modo que existem apenas 12 coeficientes independentes ([7], p.541). São eles:

$(c)(d) \backslash (a)(b)$	00	01 ou 10	11
00'	κ	ε	π
10'	ρ	α	λ
01'	σ	β	μ
11'	τ	γ	ν

$$\Gamma_{(a)(b)(c)(d')} \quad (4.59)$$

A fim de se demonstrar a equivalência das definições dos coeficientes de spin nos formalismos espinorial e tétrade será necessário fazer uso do resultado a seguir.

Lema 4.1 (*Lema de Friedman*)

$$\Gamma_{(a)(b)CD'} = \frac{1}{2} \epsilon^{(k')(f')} \zeta_{(a)}^E \bar{\zeta}_{(f')}^{F'} [\zeta_{(b)E} \bar{\zeta}_{(k')F'}]_{;CD'}, \quad (4.60)$$

onde $\zeta_{(a)}^E \bar{\zeta}_{(f')}^{F'}$ e $\zeta_{(b)E} \bar{\zeta}_{(k')F'}$ são vetores da base de Newman-Penrose, de acordo com (4.55).

Demonstração.

Basta expandir o lado direito de (4.60) por meio da regra de Leibniz (propriedade (d), Definição 1.5) e reduzi-lo com o auxílio das relações (4.55) e da Definição 4.6. ■

Teorema 4.9 *As definições (4.59) para os coeficientes de spin concordam com aquelas dadas no Capítulo 3, equações (3.24), em termos dos coeficientes de rotação de Ricci, γ_{ijk} .*

Demonstração.

Decorre do Lema de Friedman e das definições (4.34), (4.40), (4.46) e (3.24). ■

Equações de Dirac

Definição 4.7 *As Equações de Dirac no Espaço de Minkowski, as quais descrevem o campo de neutrinos, são*

$$\sigma_{AB'}^i \partial_i P^A = 0, \quad (4.61)$$

$$\sigma_{AB'}^i \partial_i Q^A = 0, \quad (4.62)$$

onde $\sigma_{AB'}^i$ são as matrizes de Pauli (4.41), a menos do fator $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e (P^A, Q^A) é um par de espinores que descrevem a função de onda. A generalização dessas equações para um espaço-tempo curvo é dada por

$$\sigma_{AB'}^i P_{;i}^A = 0, \quad (4.63)$$

$$\sigma_{AB'}^i Q_{;i}^A = 0, \quad (4.64)$$

onde (Teorema 4.6)

$$\sigma_{AB'}^i = \begin{pmatrix} l^i & m^i \\ \bar{m}^i & n^i \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Teorema 4.10 *As Equações de Dirac no formalismo de Newman-Penrose são*

$$(D + \varepsilon - \rho)F_1 + (\delta^* + \pi - \alpha)F_2 = 0, \quad (4.66)$$

$$(\bar{\Delta} + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 = 0, \quad (4.67)$$

$$(D + \varepsilon^* - \rho^*)G_2 - (\delta + \pi^* - \alpha^*)G_1 = 0, \quad (4.68)$$

$$(\bar{\Delta} + \mu^* - \gamma^*)G_1 - (\delta^* + \beta^* - \tau^*)G_2 = 0, \quad (4.69)$$

onde $F_1 = P^0$, $F_2 = P^1$, $G_1 = \bar{Q}^{1'}$ e $G_2 = -\bar{Q}^{0'}$, ε , ρ , π , α , μ , γ , β , τ são os coeficientes de spin e D , $\bar{\Delta}$, δ , δ^* são os operadores da base de Newman-Penrose (Teorema 4.1).

Demonstração.

O sistema (4.66)-(4.69) é obtido expandindo-se a equação (4.63) e a conjugada complexa de (4.64), para $B' = 0$ e $B' = 1$, e fazendo uso das definições (4.65), (4.46), (4.54) e (4.59). ■

Teorema 4.11 *A propagação de neutrinos na geometria de Kerr é governada pelas equações*

$$\Delta \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_0^\dagger (\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}) = \mathcal{Q}^2 (\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}), \quad (4.70)$$

$$\Delta \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger \mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}^2 R_{-\frac{1}{2}}, \quad (4.71)$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger \mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\mathcal{Q}^2 S_{+\frac{1}{2}}, \quad (4.72)$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger S_{-\frac{1}{2}} = -\mathcal{Q}^2 S_{-\frac{1}{2}}, \quad (4.73)$$

com

$$P^0 = \frac{1}{\bar{\rho}^*} R_{-\frac{1}{2}}(r) S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \quad P^1 = \frac{1}{\bar{\rho}} R_{+\frac{1}{2}}(r) S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \quad (4.74)$$

$$\bar{Q}^{0'} = -\frac{1}{\bar{\rho}} R_{-\frac{1}{2}}(r) S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \quad \bar{Q}^{1'} = \frac{1}{\bar{\rho}^*} R_{+\frac{1}{2}}(r) S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \quad (4.75)$$

onde \mathcal{Q} é uma constante de separação, e $R_{\pm\frac{1}{2}}$ e $S_{\pm\frac{1}{2}}$ são, respectivamente, funções de r e θ somente.

Demonstração.

Inserindo os coeficientes de spin (3.49)-(3.51), apropriados à métrica de Kerr ($Q_* = 0$), as derivadas direcionais definidas em (4.2) e fazendo as substituições (4.74) e (4.75), as Equações de Dirac do Teorema 4.10 produzem

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}}) S_{-\frac{1}{2}} + (2^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}}) R_{+\frac{1}{2}} &= 0, \\ (\Delta \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger R_{+\frac{1}{2}}) S_{+\frac{1}{2}} - (2^{+\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger S_{-\frac{1}{2}}) R_{-\frac{1}{2}} &= 0, \\ (\mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}}) S_{+\frac{1}{2}} - (2^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger S_{-\frac{1}{2}}) R_{+\frac{1}{2}} &= 0, \\ (\Delta \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger R_{+\frac{1}{2}}) S_{-\frac{1}{2}} + (2^{+\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}}) R_{-\frac{1}{2}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Estas equações implicam a separação em quatro equações envolvendo a parte radial e quatro envolvendo a parte angular. Devido à consistência desse

sistema de oito equações, as constantes de separação podem ser expressas por uma única constante \mathcal{Q} (ver observação após Teorema 4.3), resultando nos dois pares de equações

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} &= \mathcal{Q} R_{+\frac{1}{2}}, \\ \Delta \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger R_{+\frac{1}{2}} &= 2\mathcal{Q} R_{-\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{4.77}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} &= -2^{\frac{1}{2}} \mathcal{Q} S_{-\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger S_{-\frac{1}{2}} &= +2^{\frac{1}{2}} \mathcal{Q} S_{+\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.78}$$

Com as substituições

$$2^{\frac{1}{2}} \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q} \quad e \quad 2^{\frac{1}{2}} R_{-\frac{1}{2}} \longrightarrow R_{-\frac{1}{2}},\tag{4.79}$$

as equações (4.77) e (4.78) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}\Delta^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_0^\dagger (\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}) &= \mathcal{Q} R_{-\frac{1}{2}}, \\ \Delta^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} &= \mathcal{Q} (\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}), \\ \mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} &= -\mathcal{Q} S_{-\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}^\dagger S_{-\frac{1}{2}} &= \mathcal{Q} S_{+\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{4.80}$$

e combinadas de modo a fornecer o sistema desacoplado (4.70)-(4.73). ■

Devido à semelhança formal manifesta entre os Teoremas 4.3 e 4.11, as equações (4.70)-(4.73) também serão denominadas *Equações de Teukolsky*.

4.1.3 Grávitons

Ao contrário dos campos de fótons e neutrinos, não se conhece uma definição geral para o tensor energia-momento do campo gravitacional. Dessa forma, não existe um análogo das Equações de Maxwell ou Dirac para os grávitons. Portanto, a fim de se estudar o comportamento das ondas gravitacionais incidentes no buraco negro de Kerr, é preciso analisar as perturbações nas componentes da métrica.

De acordo com o Teorema 3.9, a descrição do espaço-tempo de Kerr (assim como de todos os buracos negros) no formalismo de Newman-Penrose é bastante simplificada pelo anulamento dos escalares de Weyl, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3

e Ψ_4 , e dos coeficientes de spin, κ , σ , λ e ν , na base escolhida. Quando o buraco negro de Kerr é perturbado gravitacionalmente, tais quantidades deixam de se anular e adquirem valores de primeira ordem de grandeza. No que segue, as equações que governam as perturbações nessas quantidades serão obtidas e separadas de forma análoga ao procedimento realizado nas Seções 4.1.1 e 4.1.2 para os campos de fótons e neutrinos. Uma análise completa do problema, envolvendo a perturbação nas demais quantidades da geometria de Kerr aqui não consideradas, é extremamente complexa - envolvendo as relações de comutação e um conjunto maior de identidades de Bianchi e Ricci - e pode ser encontrada em [7], Capítulo 9.

Teorema 4.12 *O comportamento dos escalares de Weyl, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 e Ψ_4 , e dos coeficientes de spin, κ , σ , λ e ν , é descrito pelas quatro identidades de Bianchi e pelas duas identidades de Ricci (Teorema 3.4), dadas por*

$$(\delta^* - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 2\varepsilon - 4\tilde{\rho})\Psi_1 = 3\kappa\Psi_2, \quad (4.81)$$

$$(\bar{\Delta} - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 = 3\sigma\Psi_2, \quad (4.82)$$

$$(D - \tilde{\rho} - \tilde{\rho}^* - 3\varepsilon + \varepsilon^*)\sigma - (\delta - \tau + \pi^* - \alpha^* - 3\beta)\kappa = \Psi_0, \quad (4.83)$$

e

$$(D + 4\varepsilon - \tilde{\rho})\Psi_4 - (\delta^* + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 = -3\lambda\Psi_2, \quad (4.84)$$

$$(\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\bar{\Delta} + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 = -3\nu\Psi_2, \quad (4.85)$$

$$(\bar{\Delta} + \mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)\lambda - (\delta^* + 3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)\nu = -\Psi_4. \quad (4.86)$$

Demonstração.

O sistema (4.81)-(4.86) é obtido quando as equações (3.18) e (3.19) são escritas a partir dos escalares de Weyl (Definição 3.5), dos coeficientes de spin (3.24) e dos operadores (4.2). A razão para a escolha dessas seis equações, dentre todas possíveis, reside no fato de elas serem matematicamente simples, pois são homogêneas e lineares nas quantidades consideradas, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 , Ψ_4 , κ , σ , λ e ν . Como as perturbações nessas quantidades são de 1ª ordem, todas as demais quantidades podem ser substituídas por seus valores não-perturbados ([7], p.431). ■

Teorema 4.13 *A propagação de grávitons no espaço-tempo de Kerr é governada pelas equações*

$$(\Delta \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_0^\dagger - 6i\omega r)(\Delta^2 R_{+2}) = \mathcal{Q}(\Delta^2 R_{+2}), \quad (4.87)$$

$$(\Delta \mathcal{D}_{-1}^\dagger \mathcal{D}_0 + 6i\omega r)R_{-2} = \mathcal{Q}R_{-2}, \quad (4.88)$$

$$(\mathcal{L}_{-1}^\dagger \mathcal{L}_2 + 6a\omega \cos \theta)S_{+2} = -\mathcal{Q}S_{+2}, \quad (4.89)$$

$$(\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_2^\dagger - 6a\omega \cos \theta)S_{-2} = -\mathcal{Q}S_{-2}, \quad (4.90)$$

com

$$\Psi_0 = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta) \quad (4.91)$$

e

$$\Psi_4 = \frac{1}{(\bar{\rho}^*)^4} R_{-2}(r)S_{-2}(\theta), \quad (4.92)$$

onde \mathcal{Q} é uma constante de separação, e $R_{\pm 2}$ e $S_{\pm 2}$ são, respectivamente, funções de r e θ somente.

Demonstração.

A demonstração é análoga ao processo descrito na obtenção das equações (4.10)-(4.13). Para o caso dos grávitons, devem ser feitas as substituições

$$\Phi_0 = \Psi_0, \quad \Phi_1 = \Psi_1 \bar{\rho}^* \sqrt{2}, \quad k = \frac{\kappa}{(\bar{\rho}^*)^2 \sqrt{2}} \quad e \quad s = \frac{\sigma \bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}, \quad (4.93)$$

$$\Phi_4 = \Psi_4 (\bar{\rho}^*)^4, \quad \Phi_3 = \Psi_3 \frac{(\bar{\rho}^*)^3}{\sqrt{2}}, \quad l = \frac{\lambda \bar{\rho}^*}{2} \quad e \quad n = \frac{\nu \bar{\rho}^2}{\sqrt{2}}, \quad (4.94)$$

e usar as identidades,

$$Q_{,\theta} + Q \cot \theta = 2a\omega \cos \theta,$$

$$K - aQ \sin \theta = \rho^2 \omega,$$

a fim de reduzir o sistema (4.81)-(4.86) a um sistema de duas equações lineares de 2ª ordem em Φ_0 e Φ_4 , cujas variáveis podem ser separadas mediante as substituições

$$\Phi_0 = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta) \quad e \quad \Phi_4 = R_{-2}(r)S_{-2}(\theta).$$

■

As equações do Teorema 4.13 são também denominadas *Equações de Teukolsky*.

4.1.4 Equações Gerais de Teukolsky

É impossível não se surpreender com a simetria intrínseca apresentada pelas Equações de Teukolsky na geometria de Kerr, presentes nos Teoremas 4.3, 4.11 e 4.13, sugerindo uma possível representação geral e um tratamento formal (que será feito na próxima seção) englobando os três casos estudados.

Definição 4.8 *As Equações Gerais de Teukolsky, aplicáveis às partículas sem massa de spin s (fótons: $s = 1$; neutrinos: $s = \frac{1}{2}$; grávitons: $s = 2$), são dadas por*

$$\{\Delta \mathcal{D}_{1-s} \mathcal{D}_0^\dagger - 2(2s-1)i\omega r\} P_{+s} = \mathcal{Q} P_{+s}, \quad (4.95)$$

$$\{\Delta \mathcal{D}_{1-s}^\dagger \mathcal{D}_0 + 2(2s-1)i\omega r\} P_{-s} = \mathcal{Q} P_{-s}, \quad (4.96)$$

$$\{\mathcal{L}_{1-s}^\dagger \mathcal{L}_s + 2(2s-1)a\omega \cos \theta\} S_{+s} = -\mathcal{Q} S_{+s}, \quad (4.97)$$

$$\{\mathcal{L}_{1-s} \mathcal{L}_s^\dagger - 2(2s-1)a\omega \cos \theta\} S_{-s} = -\mathcal{Q} S_{-s}, \quad (4.98)$$

onde $P_{+s} = \Delta^s R_{+s}$ e $P_{-s} = R_{-s}$.

A interpretação física das perturbações de buracos negros consiste na análise das Equações de Teukolsky para a parte radial, cuja resolução completa está condicionada à determinação da constante de separação, obtida através da normalização e solução da parte angular.

4.2 Teoria da Perturbação

A análise matemática das perturbações do buraco negro de Kerr será feita em três passos: na Seção 4.2.1, as Equações Gerais de Teukolsky que governam a parte radial da perturbação serão transformadas em uma equação de onda unidimensional com potenciais a determinar; na Seção 4.2.2, soluções explícitas para os potenciais em cada caso (spins 1, $\frac{1}{2}$ e 2) serão encontradas; na Seção 4.2.3, o comportamento das ondas refletidas e transmitidas pelo buraco negro no horizonte será analisado.

4.2.1 Teoria da Transformação

Definição 4.9 *A coordenada tartaruga r_* é obtida da coordenada radial r por*

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{\varpi^2} \frac{d}{dr}, \quad (4.99)$$

onde Δ é a função de horizonte e $\varpi^2 = r^2 + \alpha^2$, com $\alpha^2 = a^2 + (\frac{am}{\omega})$.

Integrando a equação (4.99), obtém-se

$$r_* = r + \frac{2Mr_+ + (\frac{am}{\omega})}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2Mr_- + (\frac{am}{\omega})}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right), \quad (4.100)$$

de modo que a coordenada tartaruga só está definida para $r > r_+$, isto é, a análise através de r_* só é válida fora do horizonte de eventos.

Teorema 4.14 *Seja $\omega_s = -\frac{am}{2Mr_+}$ ($m < 0$). Então a coordenada tartaruga $r_*(r)$ é:*

- (a) *univaluada quando $\omega > \omega_s$, ou seja, $r_* \rightarrow +\infty$ para $r \rightarrow +\infty$ e $r_* \rightarrow -\infty$ para $r \rightarrow r_+ + 0^5$;*
- (b) *bivaluada quando $0 < \omega < \omega_s$, ou seja, $r_* \rightarrow +\infty$ para $r \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow r_+ + 0$.*

Demonstração.

As afirmações do teorema manifestam o comportamento de r_* , descrita pela equação (4.100), conforme a desigualdade

$$r_+^2 + \alpha^2 = 2Mr_+ + \left(\frac{am}{\omega}\right) > 0 \quad (4.101)$$

se verifique ou não. ■

Teorema 4.15 *A Equação Geral de Teukolsky para P_{+s} ,*

$$[\Delta \mathcal{D}_{1-s} \mathcal{D}_0^\dagger - 2(2s-1)i\omega r]P_{+s} = \mathcal{Q}P_{+s},$$

pode ser colocada na forma

$$\Lambda^2 Y + P\Lambda_- Y - QY = 0, \quad (4.102)$$

onde

$$Y = |\varpi^2|^{-s+\frac{1}{2}} P_{+s}, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ \quad e \quad \Lambda_\pm = \frac{d}{dr_*} \pm i\omega, \quad (4.103)$$

⁵A expressão “ $r \rightarrow r_+ + 0$ ” significa que r tende a r_+ pela direita.

e

$$P = \frac{2s}{\varpi^4} [2r\Delta - \varpi^2(r - M)], \quad (4.104)$$

$$Q = \frac{\Delta}{\varpi^4} \left\{ \mathcal{Q} - (2s - 1) \left[\frac{\Delta - 2(s - 1)r(r - M)}{\varpi^2} + (2s - 3) \frac{r^2 \Delta}{\varpi^4} \right] \right\}. \quad (4.105)$$

Demonstração.

Na Equação Geral de Teukolsky para P_{+s} , o período m ocorre explicitamente nos operadores \mathcal{D} e \mathcal{D}^\dagger através de (Teorema 4.1)

$$K = (r^2 + a^2)\omega + am. \quad (4.106)$$

A transformação para a forma (4.102) decorre da eliminação de m em (4.106) mediante a mudança (4.99) na variável independente e a mudança na variável dependente, expressa em (4.103). ■

No caso (b) do Teorema 4.14, as funções P e Q se tornam singulares em $r = |\alpha|$ de forma que a equação (4.102) deve ser analisada nos dois ramos da relação $r_*(r)$: $r_+ < r < |\alpha|$ e $r > |\alpha|$.

Uma vez que a Equação Geral de Teukolsky (para P_{+s}) foi posta na forma padrão (4.102), o próximo passo é reduzi-la a uma equação de onda unidimensional.

Teorema 4.16 *Uma condição necessária e suficiente para que a equação*

$$\Lambda^2 Y + P\Lambda_- Y - QY = 0$$

seja transformada na equação de onda

$$\Lambda^2 Z = VZ \quad (4.107)$$

consiste na existência de funções ℓ , β , R , T e V que satisfaçam o sistema

$$Y = \ell V Z + T\Lambda_+ Z, \quad (4.108)$$

$$\Lambda_- Y = -\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} \beta Z + R\Lambda_+ Z, \quad (4.109)$$

$$\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} K Z = RY - T\Lambda_- Y, \quad (4.110)$$

$$K\Lambda_+Z = \beta Y + \frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} \ell V \Lambda_- Y \quad (4.111)$$

ou, equivalentemente,

$$R - \ell V = \frac{dT}{dr_*}, \quad (4.112)$$

$$\frac{d}{dr_*} \left(\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} R \right) = \frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} (QT - 2i\omega R) + \beta, \quad (4.113)$$

$$R \left(R - \frac{dT}{dr_*} \right) + \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} \beta T = \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} K, \quad (4.114)$$

$$(R - Q\ell)V = \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} \frac{d\beta}{dr_*}, \quad (4.115)$$

onde Δ e ϖ são como na Definição 4.9.

Demonstração.

Como Y e Z satisfazem equações diferenciais de 2ª ordem, não há restrições em se supor que Y é combinação linear de Z e sua derivada; disso resulta (4.108). Aplicando o operador Λ_- , definido em (4.103), à equação (4.108) e fazendo-se uso de (4.107), obtém-se (4.109), onde

$$\beta = -\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} \left[\frac{d}{dr_*} (\ell V) + (T - 2i\omega \ell) V \right] \quad (4.116)$$

e R está definido por (4.112). As equações (4.113) e (4.115) são obtidas ao se determinar $\Lambda_- \Lambda_- Y$ a partir de (4.109) e (4.102) e, fazendo uso de resultados anteriores, igualar os coeficientes de Z e $\Lambda_+ Z$ nas duas expressões encontradas.

Finalmente, o conjunto de equações (4.109), (4.116), (4.112), (4.115) e (4.113) garante a existência da integral

$$\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s} R \ell V + \beta T = K = \text{constante}, \quad (4.117)$$

a qual possibilita escrever as inversas de (4.108) e (4.109), correspondentes às equações (4.110) e (4.111), bem como a equivalência dos dois sistemas apresentados no enunciado do teorema. A equação (4.114) consiste em uma forma alternativa da integral (4.117). ■

Teorema 4.17 *Sejam Z_1 e Z_2 duas soluções independentes da equação de onda (4.107). Então seu Wronskiano*

$$[Z_1, Z_2]_{r_*} = Z_1 \Lambda_- Z_2 - Z_2 \Lambda_- Z_1 \quad (4.118)$$

satisfaz a identidade

$$K[Z_1, Z_2]_{r_*} = -\Delta^{1-s} \frac{\varpi^{4s-2}}{|\varpi^2|^{2s-1}} [P_s(1), P_s(2)], \quad (4.119)$$

onde $P_s(1)$ e $P_s(2)$ são soluções distintas da Equação de Teukolsky correspondentes a Z_1 e Z_2 .

Demonstração.

Sejam Y_1 e Y_2 as soluções correspondentes a Z_1 e Z_2 em acordo com o Teorema 4.16. Substituindo (4.108) e (4.109) no Wronskiano

$$[Y_1, Y_2]_{r_*} = Y_1 \Lambda_- Y_2 - Y_2 \Lambda_- Y_1, \quad (4.120)$$

e fazendo uso da integral (4.117), resulta

$$[Y_1, Y_2]_{r_*} = K \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}} [Z_1, Z_2]_{r_*}. \quad (4.121)$$

Por outro lado, a definição de Y em (4.103) fornece

$$[Y_1, Y_2]_{r_*} = -\frac{\Delta}{\varpi^2 |\varpi^2|^{2s-1}} [P_s(1), P_s(2)]. \quad (4.122)$$

Combinando as equações (4.121) e (4.122), obtém-se a identidade wronskiana desejada. ■

Como Z_1 e Z_2 correspondem a soluções independentes da equação de onda (4.107), seu Wronskiano será constante. No entanto, quando $0 < \omega < \omega_s$, o potencial V se torna singular em $r = |\alpha|$ e a equação (4.118) precisa ser analisada, separadamente, nos dois ramos de r_* ($r_+ < r < |\alpha|$ e $r > |\alpha|$). Nesse caso, o Wronskiano assumirá valores constantes nos dois ramos, não necessariamente idênticos. O teorema a seguir garante que os valores são, na verdade, idênticos a menos de possível mudança de sinal - mudança essa que traz implicações físicas importantes (ver Seção 4.3).

Teorema 4.18 *Quando $0 < \omega < \omega_s$ (ou, equivalentemente, $\alpha^2 < 0$ e $r_+ < |\alpha|$), o sinal do Wronskiano, $[Z_1, Z_2]_{r_*}$, muda ao cruzar a singularidade $r = |\alpha|$ para $s = 1$ e 2, e mantém seu valor para $s = \frac{1}{2}$.*

Demonstração.

Como as soluções das Equações de Teukolsky não possuem singularidades para $r > r_+$, a identidade wronskiana (4.119) aplicada ao intervalo $0 < \omega < \omega_s$ fornece

$$\{[Z_1, Z_2]_{r_*}\}_{r < |\alpha|} = (-1)^{2s-1} \{[Z_1, Z_2]_{r_*}\}_{r > |\alpha|}. \quad (4.123)$$

A afirmação do teorema decorre dessa última identidade. ■

Antes de partir para a determinação de soluções explícitas para o potencial V nos casos $s = 1, \frac{1}{2}$ e 2, é preciso ressaltar que todo o raciocínio feito para P_{+s} pode ser aplicado à equação (4.96) da Definição 4.8 que governa P_{-s} , resultando em

$$\Lambda^2 Y + P \Lambda_+ Y - Q Y = 0 \quad (4.124)$$

que é conjugada complexa da equação (4.102). As soluções das equações (4.102) e (4.124) serão distinguidas por $Y^{(+\omega)}$ e $Y^{(-\omega)}$, respectivamente, assim como as funções, $Z^{(+\omega)}$ e $Z^{(-\omega)}$, que satisfazem as equações de onda unidimensionais associadas.

4.2.2 Potenciais

É um fato surpreendente que as condições do Teorema 4.16 sejam satisfeitas para as partículas de spins 1, $\frac{1}{2}$ e 2, de modo que as respectivas Equações de Teukolsky possam ser transformadas em equações de onda com funções potenciais explicitamente determinadas.

Fótons

Teorema 4.19 *A propagação de fótons ($s = 1$) na geometria de Kerr é governada pela equação de onda*

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\omega)} = V Z^{(\pm\omega)}, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (4.125)$$

onde o potencial é dado por

$$V = \frac{\Delta}{\varpi^4} [\mathcal{Q} - \alpha^2 \frac{\Delta}{\varpi^4} \mp i\alpha\varpi^2 \frac{d}{dr_*} (\frac{\Delta}{\varpi^4})], \quad (\varpi^2 = r^2 + \alpha^2), \quad (4.126)$$

Demonstração.

Para $s = 1$, as condições do Teorema 4.16 são satisfeitas para as funções

$$\begin{aligned} T &= 2i\omega, & R &= \mp 2\omega\alpha \frac{\Delta}{\varpi^4}, \\ K &= 4\omega^2(\mathcal{Q} \pm 2\omega\alpha), & \beta &= -2i\omega(\mathcal{Q} - \alpha^2 \frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\omega\alpha), \end{aligned} \quad (4.127)$$

com potencial V dado pela equação (4.126). ■

É importante salientar que o potencial V produz *duas* soluções distintas de acordo com a escolha do sinal em sua fórmula. Além disso, ambos os potenciais apresentam características comuns: tornam-se complexos para $\omega > \omega_c (= -\frac{m}{a})$; decaem exponencialmente em r_* , quando $r \rightarrow r_+ + 0$; comportam-se como r^{-2} , quando $r \rightarrow +\infty$; quando $\omega < \omega_s$, são singulares em $r = |\alpha|$.

Neutrinos

Teorema 4.20 *A propagação de neutrinos ($s = \frac{1}{2}$) na geometria de Kerr é governada pela equação de onda*

$$\Lambda^2 Z = V Z, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (4.128)$$

onde o potencial é dado por

$$V = \mathcal{Q}^2 \frac{\Delta}{\varpi^4} + \mathcal{Q} \frac{d}{dr_*} (\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}), \quad (\varpi^2 = r^2 + \alpha^2). \quad (4.129)$$

Demonstração.

Por questão de simplicidade, a demonstração será feita diretamente a partir das equações radiais no sistema (4.80), embora fique claro que o Teorema 4.16 continua válido e pode ser igualmente aplicado ao caso $s = \frac{1}{2}$.

Efetuada-se a transformação (4.99) na variável independente r , as equações radiais do sistema (4.80) se tornam

$$\left(\frac{d}{dr_*} - i\omega\right)P_{+\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}P_{-\frac{1}{2}} \quad (4.130)$$

e

$$\left(\frac{d}{dr_*} + i\omega\right)P_{-\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}P_{+\frac{1}{2}}. \quad (4.131)$$

Fazendo

$$Z_{\pm} = P_{+\frac{1}{2}} \pm P_{-\frac{1}{2}}, \quad (4.132)$$

e combinando as equações (4.130) e (4.131), resulta

$$\left(\frac{d}{dr_*} - \mathcal{Q}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}\right)Z_+ = i\omega Z_- \quad (4.133)$$

e

$$\left(\frac{d}{dr_*} + \mathcal{Q}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}\right)Z_- = i\omega Z_+. \quad (4.134)$$

A partir dessas equações resultam o potencial (4.129), para Z_+ , e o potencial (4.135) adiante, para Z_- . ■

Ao contrário do caso eletromagnético, o potencial resultante é *único* para $P_{+\frac{1}{2}}$; isso também vale para $P_{-\frac{1}{2}}$, onde ele é expresso por

$$V = \mathcal{Q}^2\frac{\Delta}{\varpi^4} - \mathcal{Q}\frac{d}{dr_*}\left(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}\right). \quad (4.135)$$

Entretanto, os potenciais para ondas de neutrinos se assemelham ao caso eletromagnético no seu comportamento para $r \rightarrow r_+ + 0$ (decaem exponencialmente em r_*) e para $r \rightarrow +\infty$ (decaem como r^{-2}); também apresentam singularidade em $r = |\alpha|$ para $\omega < \omega_s$.

Grávítos

Teorema 4.21 *A propagação de grávítos ($s = 2$) na geometria de Kerr é governada pela equação de onda*

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\omega)} = V Z^{(\pm\omega)}, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (4.136)$$

onde o potencial é dado por

$$V = -\frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta^2 + \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{Q}+2)}{F+\beta^2} - \frac{(F'-\kappa_2)(\kappa_2 F - \beta_2 F')}{(F-\beta_2)(F^2-\beta^2)}, \quad (\varpi^2 = r^2 + \alpha^2), \quad (4.137)$$

em que

$$F = \frac{1}{\Delta}[\mathcal{Q}\varpi^4 + 3\varpi^2(r^2 - a^2) - 3r^2\Delta], \quad F' = \frac{dF}{dr_*}, \quad (4.138)$$

$$\beta_2 = \pm 3\alpha^2, \quad (4.139)$$

$$\kappa_2 = \pm \{36M^2 - 2\mathcal{Q}[\alpha^2(5\mathcal{Q}+6) - 12a^2] + 2\beta_2\mathcal{Q}(\mathcal{Q}+2)\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.140)$$

e os sinais de κ_2 e β_2 são escolhidos independentemente.

Demonstração.

O resultado decorre do fato de que as condições do Teorema 4.16, no caso $s = 2$, são satisfeitas para as funções

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{F_{,r_*} - \kappa_2}{F - \beta_2}\right) + 2i\omega, & \beta &= [\kappa_2 - \beta_2\left(\frac{F_{,r_*} - \kappa_2}{F - \beta_2}\right)] + 2i\omega\beta_2, \\ K &= [\mathcal{Q}(\mathcal{Q}+2) - 4\omega^2\beta_2] + 2i\omega\kappa_2, & R &= \frac{\Delta^2}{\varpi^8}(F + \beta_2), \end{aligned} \quad (4.141)$$

e para o potencial V dado por (4.137), com F , β_2 e κ_2 definidas em (4.138)-(4.140). ■

Como os sinais de β_2 e κ_2 podem ser escolhidos independentemente, resulta que o potencial (4.137) produz *quatro* soluções distintas. Além disso, dependendo do sinal da quantidade sob a raiz quadrada na definição de κ_2 , o potencial pode ser complexo. Deve-se salientar que todos os potenciais gerados comportam-se como r^{-2} para $r \rightarrow +\infty$ e, quando se aproximam do horizonte ($r \rightarrow r_+ + 0$), decaem exponencialmente em r_* . Finalmente, os potenciais apresentam singularidades em $r = |\alpha|$ quando $\omega < \omega_s$.

4.2.3 Teoria de Espalhamento

De acordo com os resultados da Seção 4.2.2, todos os potenciais encontrados comportam-se como r^{-2} quando $r \rightarrow r_* \rightarrow +\infty$ e decaem exponencialmente

à medida que se aproximam do horizonte em $r_* \rightarrow -\infty$. No caso real, tal comportamento caracteriza uma *barreira de potencial*.

Analisar o comportamento das ondas incidentes sobre uma barreira de potencial unidimensional consiste em um problema de auto-valor e auto-vetor para o operador definido pela equação de onda (4.107), que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} - V\right)Z = (-\omega^2)Z \quad (4.142)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2 Z}{dr_*^2} + k^2 Z = 0, \quad (4.143)$$

onde $k^2(r_*) = \omega^2 - V(r_*)$.

A *teoria de espalhamento (independente do tempo)* consiste no estudo da equação (4.142) para tipos diversos de funções potenciais V . O caso mais simples ocorre quando a ação do sistema se dá de maneira uniforme em uma região infinita do espaço, isto é, o suporte da função potencial V corresponde a um intervalo $[-a, 0]$, $a > 0$, e $V(r_*)$ é constante nesse intervalo. Como fora da barreira, supõe-se movimento livre de partículas ($V(r_*) = 0$), as soluções de (4.143) são da forma (ver Definição 4.1)

$$Z(r_*) = A_1 e^{+i\omega r_*} + B_1 e^{-i\omega r_*}, \quad r_* > 0, \quad (4.144)$$

$$Z(r_*) = A_2 e^{+i\omega r_*} + B_2 e^{-i\omega r_*}, \quad -a \leq r_* \leq 0, \quad (4.145)$$

$$Z(r_*) = A_3 e^{+i\omega r_*} + B_3 e^{-i\omega r_*}, \quad r_* < -a. \quad (4.146)$$

As amplitudes, A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 e B_3 , são constantes de integração as quais podem ser determinadas a partir da condição de continuidade⁶ da função de onda $Z(r_*)$ e de sua derivada na fronteira de $[-a, 0]$, ou seja, (ver nota de rodapé 5 na página 78)

$$\begin{aligned} Z(-a-0) &= Z(-a+0), & Z(0-0) &= Z(0+0), \\ Z'(-a-0) &= Z'(-a+0), & Z'(0-0) &= Z'(0+0). \end{aligned} \quad (4.147)$$

Os termos da forma $e^{+i\omega r_*}$, e^{+ikr_*} representam ondas planas propagando-se no sentido negativo de r_* enquanto que os termos $e^{-i\omega r_*}$, e^{-ikr_*} correspondem às ondas que se deslocam na direção positiva de r_* . Considerando que a onda

⁶As condições de continuidade impostas à função de onda visam garantir que os auto-valores em (4.142) sejam reais ([26], pp.48-49), como exigido pela Definição 4.1.

incidente se propaga na direção negativa de r_* e o fato de que (4.147) permite dois graus de liberdade ao conjunto das constantes de integração, segue que

$$A_1 = 1 \quad e \quad B_3 = 0. \quad (4.148)$$

A razão entre as intensidades da onda refletida, $|B_1|^2$, e incidente, $|A_1|^2$, denomina-se *coeficiente de reflexão* \mathbb{R} . Da mesma forma, define-se o *coeficiente de transmissão* \mathbb{T} a partir das intensidades da onda transmitida, $|A_3|^2$, e da onda incidente, $|A_1|^2$. Decorre das equações (4.144)-(4.148) o resultado

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1, \quad (4.149)$$

que expressa a lei da conservação da energia.

O processo aqui descrito pode ser generalizado para os potenciais complexos V^j da Seção 4.2.2 para os quais a reflexão e transmissão das ondas incidentes no buraco negro ocorre no infinito ($r_* \rightarrow +\infty$) e no horizonte de eventos ($r_* \rightarrow -\infty$). O fato de os potenciais V^j , ($j = 1, \dots, 2s$), possuírem integral limitada ao longo de r_* garante que as soluções da equação (4.142) terão comportamentos assintóticos dados por ([7], p.408)

$$e^{\pm i\omega r_*}, \quad (r_* \rightarrow \pm \infty). \quad (4.150)$$

Definição 4.10 *Sejam $Z^{(\pm\omega)}$ soluções da equação de onda unidimensional⁷*

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\omega)} = V Z^{(\pm\omega)},$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{aligned} Z^{(\pm\omega)} &\longrightarrow C^{(\pm\omega)} e^{\pm i\omega r_*} + A^{(\pm\omega)} e^{\mp i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty), \\ &\longrightarrow B^{(\pm\omega)} e^{\pm i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (4.151)$$

Os coeficientes de reflexão \mathbb{R} e transmissão \mathbb{T} são definidos por

$$\mathbb{R} = \frac{A^{(+\omega)} A^{(-\omega)}}{C^{(+\omega)} C^{(-\omega)}} \quad e \quad \mathbb{T} = \frac{B^{(+\omega)} B^{(-\omega)}}{C^{(+\omega)} C^{(-\omega)}}. \quad (4.152)$$

Em geral, adota-se $C^{(\pm\omega)} = 1$.

⁷De acordo com os resultados da Seção 4.2.2, o potencial V pode ser real ou complexo.

As condições de fronteira (4.151) correspondem a uma *onda incidente* de amplitude unitária proveniente de $+\infty$, dando origem a uma *onda refletida* de amplitude $A^{(\pm\omega)}$ no infinito ($+\infty$) e uma *onda transmitida* de amplitude $B^{(\pm\omega)}$ no horizonte ($-\infty$). Se o potencial V é real, $A^{(+\omega)}$ e $B^{(+\omega)}$ são conjugados complexos de $A^{(-\omega)}$ e $B^{(-\omega)}$; dessa forma, a Definição 4.10 consiste de fato numa generalização da Teoria de Espalhamento para o caso dos potenciais complexos, onde $Z^{(+\omega)}$ e $Z^{(-\omega)}$ satisfazem a mesma equação, mas não são conjugados complexos.

Teorema 4.22 *Todos os potenciais V^j , $j = 1, \dots, 2s$, produzem os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão.*

Demonstração.

Sejam $Z^{(j,\pm\omega)}$ as soluções da equação (4.107), pertencentes ao potencial V^j , cujos comportamentos assintóticos são dados por (4.151). Devido às relações ([7], pp.512-513)

$$\begin{aligned} Z^i &\longrightarrow \frac{K^j}{K^i} e^{-i\omega r_*} \quad \text{para } Z^j \rightarrow e^{-i\omega r_*}, \\ Z^i &\longrightarrow e^{+i\omega r_*} \quad \text{para } Z^j \rightarrow e^{+i\omega r_*}, \end{aligned} \quad (4.153)$$

onde K^i , K^j estão definidos no Teorema 4.16, as soluções $Z^{(i,\pm\omega)}$, associadas ao potencial V^i , apresentarão comportamentos assintóticos com coeficientes

$$\begin{aligned} C^{(i,+\omega)} &= C^{(j,+\omega)}, & B^{(i,+\omega)} &= B^{(j,+\omega)}, & A^{(i,+\omega)} &= \frac{K^j}{K^i} A^{(j,+\omega)}, \\ C^{(i,-\omega)} &= \frac{K^j}{K^i} C^{(j,-\omega)}, & B^{(i,-\omega)} &= \frac{K^j}{K^i} B^{(j,-\omega)}, & A^{(i,-\omega)} &= A^{(j,-\omega)}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

O teorema decorre da substituição desses valores em (4.152). ■

Teorema 4.23 *Para ondas (eletromagnéticas, gravitacionais e de neutrinos) incidentes no buraco negro de Kerr, os coeficientes de reflexão e transmissão obedecem à lei de conservação*

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1, \quad (4.155)$$

em geral, e para frequências $\omega < \omega_s (= -\frac{am}{2Mr_+}, m < 0)$,

$$\mathbb{R} - \mathbb{T} = 1, \quad (4.156)$$

isto é, $\mathbb{T} < 0$. Para as ondas de neutrinos, essa última condição não se verifica.

Demonstração.

As afirmações do teorema são conseqüências da identidade wronskiana (4.119) e do Teorema 4.18 aplicados ao comportamento assintótico (4.151) das funções de onda, quando se faz uso dos resultados expressos nos Teoremas 4.16, 4.15 e nas Definições 4.8 e 4.1 ([7], p.419). ■

4.3 Modos Normais

Nos Teoremas 4.3, 4.11 e 4.13, foi visto que as perturbações do buraco negro de Kerr pelos campos de partículas sem massa (fótons, neutrinos e grávitons) são descritas pelas Equações de Teukolsky, expressas de maneira geral na Definição 4.8. Conforme a formulação matemática do problema, exposta na Definição 4.1, uma perturbação genérica propagando-se no espaço-tempo de Kerr corresponde a uma superposição de modos

$$R(r)S(\theta)e^{i(\omega t + m\varphi)} \quad (4.157)$$

em que a parte angular $S(\theta)$ satisfaz equações dependentes da geometria do buraco negro e do campo de ondas, enquanto que a parte radial $R(r)$ obedece à equação de onda da forma (Teorema 4.16)

$$\Lambda^2 Z = VZ, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2), \quad (4.158)$$

onde o potencial V é dado pelos Teoremas 4.19, 4.20 e 4.21. $Z(r)$ se relaciona com $R(r)$ através das transformações dadas nas Definições 4.8, 4.9, e nos Teoremas 4.15 e 4.16.

As soluções (4.157) são denominadas *modos normais* e, de acordo com a Definição 4.10, seus comportamentos assintóticos representam *ondas refletidas* no infinito e *ondas transmitidas* no horizonte do buraco negro, cujas

amplitudes definem os coeficientes de reflexão \mathbb{R} e transmissão \mathbb{T} . Chandrasekhar ([7], Seções 76, 98 e 107) mostra que os valores de \mathbb{R} e \mathbb{T} obtidos estão de acordo com os valores determinados para o fluxo de radiação (eletromagnética, gravitacional e de neutrinos) no infinito e através do horizonte do buraco negro.

De acordo com a interpretação física de \mathbb{R} e \mathbb{T} , conclui-se do Teorema 4.23 que o coeficiente de reflexão excede a unidade para as ondas incidentes de frequências $\omega < \omega_s$ e spins inteiros, isto é, parte da energia rotacional do buraco negro é extraída pelas ondas, eletromagnéticas ou gravitacionais. Esse fenômeno denomina-se *super-radiância* e constitui-se no análogo do processo de Penrose para partículas materiais, discutido no Capítulo 2 (Seção 2.2). A analogia entre os dois fenômenos se torna marcante através da comparação entre a desigualdade (equivalente a $\omega < \omega_s$)

$$2Mr_+\omega < -am \quad (4.159)$$

e a desigualdade (equação (2.59))

$$2Mr_+(\delta M) \geq a(\delta J),$$

pois elas são idênticas mediante as identificações

$$\begin{aligned} h\omega &\longleftrightarrow \delta M, \\ hm &\longleftrightarrow \delta J, \end{aligned} \quad (4.160)$$

onde h é a constante de Planck.

Considerando novamente a interpretação física de \mathbb{R} e \mathbb{T} , conclui-se que o Teorema 4.23 - e, portanto, a identidade wronskiana do Teorema 4.17 - expressa a conservação da energia. A ausência de super-radiância para ondas de neutrinos (spin $\frac{1}{2}$) é justificada no Teorema 4.18 o qual afirma que o Wronskiano dos modos normais não muda de sinal ao cruzar a singularidade do potencial em $r = |\alpha|$, ao contrário dos campos de fótons e grávitons (spins inteiros).

Toda a análise nesse capítulo foi tomada em relação ao buraco negro de Kerr, cuja métrica é estacionária e axisimétrica. No entanto, o procedimento pode ser realizado de forma análoga para o buraco negro de Schwarzschild, estático e esfericamente simétrico. Mais que isso, os resultados aqui obtidos valem para o espaço-tempo de Schwarzschild com as substituições $a = m = 0$. Por exemplo, no limite de Schwarzschild o Teorema 4.21 fornece

$$\beta_2 = 0, \quad \kappa_2 = \pm 6M \quad e \quad F = \frac{r^3}{\Delta}(\mathcal{Q}r + 6M)$$

de forma que os quatro potenciais (4.137) degeneram em dois:

$$\begin{aligned}
 V_{(+)} &= +\kappa_2 \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F} \right) + \kappa_2^2 \left(\frac{1}{F} \right)^2 + \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) \left(\frac{1}{F} \right) \\
 &= \frac{2\Delta}{r^5 \left(\frac{\mathcal{Q}}{2} + 3M \right)^2} \left[\frac{\mathcal{Q}^2(\mathcal{Q} + 2)}{8} r^3 + \frac{3M\mathcal{Q}^2}{4} r^2 + \frac{9M^2\mathcal{Q}}{2} r + 9M^3 \right]
 \end{aligned} \tag{4.161}$$

e

$$V_{(-)} = -\kappa_2 \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F} \right) + \kappa_2^2 \left(\frac{1}{F} \right)^2 + \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) \left(\frac{1}{F} \right) = \frac{\Delta}{r^5} [(\mathcal{Q} + 2)r - 6M]. \tag{4.162}$$

O potencial V_+ denomina-se *potencial de Zerilli* e dá origem às *perturbações polares* da métrica de Schwarzschild, caracterizadas por não induzirem rotação no buraco negro. O potencial V_- denomina-se *potencial de Regge-Wheeler* e está associado às *perturbações axiais* da métrica, cuja característica principal é a de introduzir rotação no buraco negro de Schwarzschild, originalmente ausente.

Pelo Teorema de Cotton-Darboux, uma métrica em um espaço tridimensional sempre pode ser diagonalizada por meio de uma transformação local das coordenadas. Desse fato, segue que a generalização natural da métrica (2.14) é dada por ([7], pp.70-73)

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\psi}(d\varphi - q_2 dx^2 - q_3 dx^3 - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \tag{4.163}$$

a qual também descreve espaços-tempo que não são estacionários nem axisimétricos. As perturbações polares da métrica de Schwarzschild (2.55) produzem alterações nas funções ν , ψ , μ_2 e μ_3 , enquanto que as perturbações axiais resultam em valores não-nulos para as quantidades ω , q_2 e q_3 . A terminologia polar/axial se justifica pelo efeito nas componentes da métrica perturbada (4.163), provocado por uma reversão no sinal da coordenada φ : não há efeito se a perturbação é polar, enquanto que, para o caso axial, as funções ω , q_2 e q_3 mudam de sinal⁸.

Os potenciais gerados no buraco negro de Schwarzschild, assim como aqueles associados ao buraco negro de Kerr, apresentam decaimento exponencial em r_* no horizonte e comportam-se como r^{-2} no infinito; eles também produzem os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão (Teorema 4.22).

⁸Conferir a interpretação de ω na Seção 2.2.

Os potenciais da forma (4.161) e (4.162) pertencem a uma classe de potenciais que garante a igualdade dos coeficientes de reflexão e transmissão ([7], Seção 28); questiona-se sobre a possibilidade da equação (4.137) representar uma classe mais ampla de potenciais que garantam essa igualdade.

Além disso, a relação de *paridade*, isto é, a presença do caráter polar/axial entre as perturbações originadas pelos potenciais reais de Regge-Wheeler e Zerilli, faz surgir a indagação sobre a existência de alguma simetria íntima, passível de interpretação física, no caso mais geral dos potenciais complexos associados ao buraco negro de Kerr. Historicamente, a evidência de paridade decorreu da análise das perturbações do buraco negro de Schwarzschild através do processo de linearização das Equações de Einstein para a métrica perturbada (4.163), enquanto que, para o buraco negro de Kerr, a separabilidade das equações de perturbação (Definição 4.8), e sua conseqüente resolução, só foi possível via formalismo de Newman-Penrose. Trabalhar diretamente com as componentes do tensor métrico propicia maior interpretação física do problema, mas nos casos mais gerais, a solução completa só é possível quando se considera a inclusão da álgebra tensorial na álgebra espinorial (Seção 4.1.2). Embora o conceito de objeto espinorial seja um tanto abstrato, existem fenômenos físicos que sugerem sua existência na Natureza ([25], pp.55-56), como o estado de elétrons, prótons e nêutrons, provenientes de formas alternativas das Equações de Dirac (Definição 4.7).

Os resultados da teoria da perturbação de buracos negros possibilitaram comprovar que o buraco negro de Schwarzschild é, de fato, completamente estável [31], isto é, assumindo a existência de fenômenos físicos que assegurem a formação de uma massa esférica colapsada e a conseqüente produção do buraco negro de Schwarzschild, tal objeto continuará a existir. Para o buraco negro de Kerr, a questão de sua estabilidade diante de pequenas perturbações foi alvo de muita discussão durante muito tempo, motivando o estudo de soluções das equações de perturbação para frequências complexas, denominadas *modos quase-normais* (ver Capítulo 6).

Capítulo 5

BURACOS NEGROS CARREGADOS

Embora a métrica de Kerr-Newman seja uma generalização da métrica de Kerr, o sucesso na análise das perturbações do buraco negro de Kerr não se repete quando se aplica a teoria desenvolvida no Capítulo 4 ao buraco negro de Kerr-Newman. Como será visto nesse capítulo, o acoplamento das perturbações eletromagnética e gravitacional na geometria de Kerr-Newman produz equações que, ao contrário das Equações de Teukolsky, não puderam ser separadas. Para o caso especial do buraco negro de Reissner-Nordström, no entanto, as equações que governam as perturbações foram separadas e a teoria da transformação pôde ser aplicada.

5.1 Perturbações do Buraco Negro de Kerr-Newman

O estudo das perturbações do buraco negro de Kerr-Newman seguirá o mesmo caminho traçado na Seção 4.1.3 com as alterações necessárias para englobar o efeito da presença de uma carga resultante Q_* no buraco negro.

Teorema 5.1 *O comportamento dos escalares de Weyl, Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 e Ψ_4 , dos coeficientes de spin, κ , σ , λ e ν , e dos escalares de Maxwell, ϕ_0 e ϕ_2 , é descrito pelas equações a seguir:*

$$(\delta^* - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 2\varepsilon - 4\rho)\Psi_1 = -\frac{\kappa}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) + Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (5.1)$$

$$(\bar{\Delta} - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 = -\frac{\sigma}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (5.2)$$

$$(D - \rho - \rho^* - 3\varepsilon + \varepsilon^*)\sigma - (\delta - \tau + \pi^* - \alpha^* - 3\beta)\kappa = \Psi_0, \quad (5.3)$$

$$(\bar{\Delta} - 3\gamma - \gamma^* - 2\mu + \mu^*)\kappa - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - 2\pi)\sigma = -2\Psi_1, \quad (5.4)$$

e

$$(D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\delta^* + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 = \frac{\lambda}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (5.5)$$

$$(\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\bar{\Delta} + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 = \frac{\nu}{(\rho^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\bar{\rho}}\right) + Q_*^2\frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}\right], \quad (5.6)$$

$$(\bar{\Delta} + \mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)\lambda - (\delta^* + 3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)\nu = -\Psi_4, \quad (5.7)$$

$$(\delta + \pi^* + 2\tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda - (D + 3\varepsilon + \varepsilon^* + 2\rho - \rho^*)\nu = -2\Psi_3, \quad (5.8)$$

onde $\bar{\rho} = r + ia \cos \theta$.

Demonstração.

Ao contrário das identidades de Ricci e Bianchi do Teorema 4.12, as Equações de Maxwell (Teorema 4.2) não se encontram linearizadas no sentido de serem homogêneas nas quantidades ϕ_0 e ϕ_2 , que se anulam no espaço-tempo perturbado (Teorema 3.9). Através de uma série de manipulações algébricas ([7], pp.238-239), as equações (4.6)-(4.9) são reduzidas ao sistema linearizado

$$\begin{aligned} & [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha) - (D - \epsilon + \epsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\bar{\Delta} + \mu - 2\gamma)]\phi_0 \\ & = 2\phi_1[(\bar{\Delta} - 3\gamma - \gamma^* - 2\mu + \mu^*)\kappa - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - 2\pi)\sigma + 2\Psi_1] \end{aligned} \quad (5.9)$$

e

$$\begin{aligned} & [(\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)(\delta - \tau + 2\beta) - (\bar{\Delta} + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)(D - \rho + 2\epsilon)]\phi_2 \\ & = 2\phi_1[(\delta + \pi^* + 2\tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda - (D + 3\epsilon + \epsilon^* + 2\rho - \rho^*)\nu + 2\Psi_3]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Efetuada uma rotação infinitesimal na base de Newman-Penrose perturbada (Definição 3.9), é possível obter

$$\phi_0 = \phi_2 = 0, \quad (5.11)$$

escolha que simplifica o sistema (5.9)-(5.10) e produz o par de equações (5.4)-(5.8).

As demais equações do teorema consistem nas identidades de Ricci e Bianchi do Teorema 4.12 com a inclusão dos termos envolvendo as componentes do tensor de Ricci, que não se anula na geometria de Kerr-Newman. Tais equações são obtidas a partir do Teorema 3.4 com auxílio das expressões (1.83), (3.29), (1.81), (3.26) e das Equações de Maxwell do Teorema 4.2.

A escolha (5.11) consiste na mais simples possível, pois todas as outras produzem equações mais complexas que as do sistema (5.1)-(5.8). A razão para a escolha das equações acima é a mesma explicada na demonstração do Teorema 4.12. ■

Teorema 5.2 *As perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas na geometria de Kerr-Newman são governadas por*

$$(\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^\dagger + \mathcal{L}_{-1}^\dagger\mathcal{L}_2 - 6i\omega\bar{\rho})\Phi_0 = -2Q_*^2(\mathcal{L}_{-1}^\dagger k \frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2} + \mathcal{D}_0 s \frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}) \quad (5.12)$$

e

$$(\Delta\mathcal{D}_2^\dagger\mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_2\mathcal{L}_{-1}^\dagger - 6i\omega\bar{\rho})\Phi_1 = +2Q_*^2(\Delta\mathcal{D}_2^\dagger k \frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2} - \mathcal{L}_2 s \frac{\bar{\rho}^*}{\bar{\rho}^2}), \quad (5.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Psi_0, & \Phi_1 &= \Psi_1 \bar{\rho}^* \sqrt{2}, & k &= \frac{\kappa}{(\bar{\rho}^*)^2 \sqrt{2}} & e & s = \frac{\sigma \bar{\rho}}{(\bar{\rho}^*)^2}; \\ \Phi_3 &= \Psi_3 \frac{(\bar{\rho}^*)^3}{\sqrt{2}}, & \Phi_4 &= \Psi_4 (\bar{\rho}^*)^4, & l &= \frac{\lambda \bar{\rho}^*}{2} & e & n = \frac{\nu \bar{\rho}^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Demonstração.

O sistema (5.12)-(5.13) é obtido aplicando-se as substituições (5.14) ao primeiro conjunto de equações do Teorema 5.1 e procedendo-se como na demonstração do Teorema 4.13. Para maiores detalhes, conferir [7], Seções 78-80 e 111. ■

O próximo passo seria separar as variáveis em funções puramente radiais e angulares, como nas Equações de Teukolsky (Teorema 4.13), mas todas as tentativas de realizar esse feito fracassaram. No entanto, uma análise das equações do Teorema 5.1 para o caso do buraco negro de Reissner-Nordström ($a = 0$) é possível.

5.2 Perturbações do Buraco Negro de Reissner-Nordström

Teorema 5.3 *As perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas na geometria de Reissner-Nordström são governadas pelas equações*

$$\mathcal{L}_2\Phi_0 - (\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r})\Phi_1 = -2k(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}), \quad (5.15)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r})\Phi_0 + \mathcal{L}_{-1}^\dagger\Phi_1 = +2s(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}), \quad (5.16)$$

$$(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r})s - \mathcal{L}_{-1}^\dagger k = \frac{\Phi_0}{r}, \quad (5.17)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r})k + \mathcal{L}_2s = 2\frac{\Phi_1}{r}, \quad (5.18)$$

e

$$\mathcal{L}_2^\dagger\Phi_4 + \Delta(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r})\Phi_3 = +2n(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}), \quad (5.19)$$

$$(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{r})\Phi_4 - \mathcal{L}_{-1}\Phi_3 = +2l(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}), \quad (5.20)$$

$$(\mathcal{D}_0 - \frac{3}{r})n - \mathcal{L}_2^\dagger l = 2\frac{\Phi_3}{r}, \quad (5.21)$$

$$\Delta(\mathcal{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r})l + \mathcal{L}_{-1}n = \frac{\Phi_4}{r}, \quad (5.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Psi_0, & \Phi_1 &= \Psi_1 r \sqrt{2}, & k &= \frac{\kappa}{r^2 \sqrt{2}} & e & s = \frac{\sigma}{r}; \\ \Phi_3 &= \Psi_3 \frac{r^3}{\sqrt{2}}, & \Phi_4 &= \Psi_4 r^4, & l &= \frac{\lambda r}{2} & e & n = \frac{\nu r^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Demonstração.

Basta tomar $a = 0$ nas equações do Teorema 5.1 e proceder como na demonstração do Teorema 4.13, aplicando-se as substituições (5.23). ■

Teorema 5.4 *Com as substituições*

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) &= R_{+2}(r)S_{+2}(\theta), & \Phi_1(r, \theta) &= R_{+1}(r)S_{+1}(\theta), \\ k(r, \theta) &= k(r)S_{+1}(\theta), & s(r, \theta) &= s(r)S_{+2}(\theta), \end{aligned} \quad (5.24)$$

o primeiro grupo do teorema anterior, equações (5.15)-(5.18), pode ser transformado no par de equações

$$\Lambda^2 Y_{+i} + P_i \Lambda_- Y_{+i} - Q_i Y_{+i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (5.25)$$

onde

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{d}{dr_*} \ln\left(\frac{r^8}{D_i}\right), & D_i &= \Delta^2 \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right), \\ Q_i &= \mu_2 \frac{\Delta}{r^4} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right), & Y_{+i} &= \frac{\Delta^2}{r^3} \left(R_{+2} + \frac{q_i k}{\mu}\right), \\ q_1 &= 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}, & q_2 &= 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Demonstração.

As substituições (5.24) nas equações (5.15)-(5.18) produzem o sistema acoplado para funções radiais

$$\mu R_{+2} - \left(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r}\right) R_{+1} = -2k \left(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}\right), \quad (5.27)$$

$$\Delta \left(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right) R_{+2} - \mu R_{+1} = +2s \left(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}\right), \quad (5.28)$$

$$\left(\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r}\right) s + \mu k = \frac{R_{+2}}{r}, \quad (5.29)$$

$$\Delta \left(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right) k + \mu s = 2\frac{R_{+1}}{r}, \quad (5.30)$$

em que μ está definida por

$$\mathcal{L}_2 S_{+2} = \mu S_{+1} \quad e \quad \mathcal{L}_{-1}^\dagger S_{+1} = -\mu S_{+2}. \quad (5.31)$$

Tal sistema pode ser desacoplado mediante as transformações

$$\begin{aligned} F_{+1} &= R_{+2} + q_1 \frac{k}{\mu}, & G_{+1} &= R_{+1} + q_1 \frac{s}{\mu}, \\ F_{+2} &= R_{+2} + q_2 \frac{k}{\mu}, & G_{+2} &= R_{+1} + q_2 \frac{s}{\mu}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde q_1 e q_2 estão definidas em (5.26). Para tanto, é preciso multiplicar (5.30) por $\frac{q_1}{\mu}$, somá-la a equação (5.28) e utilizar as identidades

$$q_1 + q_2 = 6M \quad e \quad -q_1 q_2 = 4Q_*^2 \mu^2.$$

De forma análoga, as equações (5.27) e (5.29) são combinadas, resultando em

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{D}_2^\dagger - \frac{3}{r})F_{+i} &= \mu(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r})G_{+j}, \\ (\mathcal{D}_0 + \frac{3}{r})G_{+i} &= \mu(1 + \frac{q_i}{\mu^2 r})F_{+j}. \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Realizando as transformações

$$F_{+i} = \frac{r^3}{\Delta^2} Y_{+i} \quad e \quad G_{+i} = \frac{1}{r^3} X_{+i}, \quad (5.34)$$

e eliminando X em favor de Y nas equações resultantes, obtém-se o resultado desejado. ■

De forma inteiramente similar, as equações (5.19)-(5.22) do Teorema 5.3 são transformadas em

$$\Lambda^2 Y_{-i} + P_i \Lambda_+ Y_{-i} - Q_i Y_{-i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (5.35)$$

por meio das substituições

$$\begin{aligned} \Phi_4(r, \theta) &= R_{-2}(r)S_{-2}(\theta), & \Phi_3(r, \theta) &= R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \\ n(r, \theta) &= n(r)S_{-1}(\theta), & l(r, \theta) &= l(r)S_{-2}(\theta), \\ Y_{-i} &= \frac{1}{r^3}(R_{-2} + \frac{q_i n}{\mu}), & X_{-i} &= \frac{r^3}{\Delta^2}(R_{-1} + \frac{q_i l}{\mu}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$q_1 = 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}, \quad q_2 = 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2 \mu^2}.$$

Teorema 5.5 *Os potenciais associados às perturbações eletromagnéticas e gravitacionais acopladas do buraco negro de Reissner-Nordström são dados por*

$$V_i = \pm q_j \frac{d}{dr_*} \left(\frac{1}{F_i} \right) + q_j^2 \left(\frac{1}{F_i} \right)^2 + \mathcal{Q}(\mathcal{Q} + 2) \left(\frac{1}{F_i} \right) \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (5.37)$$

onde

$$q_1 = 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2\mu^2}, \quad q_2 = 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q_*^2\mu^2}, \quad F_i = \frac{r^3}{\Delta}(\mu^2 r + q_j). \quad (5.38)$$

Demonstração.

Procedendo-se como na demonstração do Teorema 4.16, é possível mostrar que as equações (5.25) e (5.35) são transformadas em equações de onda unidimensionais,

$$\Lambda^2 Z_i = V_i Z_i, \quad (5.39)$$

através da substituição

$$Y_i = \ell_i V_i Z_i + T_i \Lambda_+ Z_i, \quad (5.40)$$

desde que existam funções ℓ_i , β_i , T_i , R_i e V_i que satisfaçam o sistema

$$-\frac{D_i}{r^8} \beta_i = \frac{d}{dr_*} (\ell_i V_i) + (T_i - 2i\omega \ell_i) V_i, \quad (5.41)$$

$$R_i = \ell_i V_i + \frac{dT_i}{dr_*}, \quad (5.42)$$

$$-\frac{D_i}{r^8} \frac{d\beta_i}{dr_*} = (Q_i \ell_i - R_i) V_i, \quad (5.43)$$

$$\frac{d}{dr_*} \left(\frac{r^8}{D_i} R_i \right) = \frac{r^8}{D_i} [Q_i (T_i - 2i\omega \ell_i) + 2i\omega (Q_i \ell_i - R_i)] + \beta_i, \quad (5.44)$$

$$\frac{r^8}{D_i} R_i \ell_i V_i + \beta_i (T_i - 2i\omega \ell_i) = K_i = \text{constante}, \quad (5.45)$$

onde D_i e Q_i estão definidos em (5.26).

O teorema decorre do fato de que o sistema (5.41)-(5.45) é compatível com as soluções

$$\begin{aligned} \beta_i^2 &= q_j^2 & K_i &= \mu^2(\mu^2 + 2) + 2i\omega q_j^2, & (i, j = 1, 2; i \neq j), \\ \ell_i &= 1, & R_i &= \mu^2 \frac{\Delta}{r^4} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right), \end{aligned} \quad (5.46)$$

e com o potencial V expresso por (5.37). ■

5.3 Considerações Finais

À semelhança do buraco negro de Schwarzschild, uma análise das equações (5.37) revela que o buraco negro de Reissner-Nordström é cercado por potenciais de curto-alcance, comportando-se como r^{-2} no infinito ($r \rightarrow +\infty$) e decaindo exponencialmente em r_* no horizonte ($r \rightarrow r_+ + 0$). Além disso, no limite de Schwarzschild ($Q_* = 0$), as equações (5.37) fornecem exatamente os potenciais de Zerilli e Regge-Wheeler, de forma que o buraco negro de Reissner-Nordström também admite paridade nas perturbações da métrica, como afirma Chandrasekhar ([7], p.270): *todas as barreiras de potencial pertencem a uma classe muito especial que assegura a igualdade de seu poder de reflexão a ondas de tipos axial e polar*. Chandrasekhar verifica ainda a igualdade dos coeficientes de reflexão e transmissão produzidos pela classe de funções à qual pertencem os potenciais do Teorema 5.5 e conclui que a reflexão de ondas incidentes pelo buraco negro de Reissner-Nordström produz conversão de energia eletromagnética em gravitacional, e vice-versa.

Resta observar que a análise completa das equações do Teorema 5.3, em contraste com o sistema do Teorema 5.2, só foi possível por causa da simetria esférica do espaço-tempo de Reissner-Nordström que assegurou a separabilidade das variáveis (Teorema 5.4). Além disso, o desacoplamento do sistema (5.15)-(5.18) no par de equações de 2ª ordem (5.25) está diretamente relacionado com as combinações (5.32), envolvendo as funções radiais e os coeficientes de spin. Portanto, a dificuldade no tratamento das perturbações do buraco negro de Kerr-Newman reside na presença simultânea das constantes a e Q_* , pois elevam a complexidade das equações (Teorema 5.1) ao ponto de impossibilitar a busca por combinações entre as funções radiais, associadas aos escalares de Weyl, e os coeficientes de spin.

Na verdade, a perturbação dos buracos negros esfericamente simétricos ($a = 0$) pôde ser determinada tanto pela linearização das Equações de Einstein como pelo formalismo de Newman-Penrose [7]. Para o buraco negro axisimétrico de Kerr ($a \neq 0, Q_* = 0$), a solução das equações de perturbação só foi possível mediante o uso dos tensores complexos de Newman-Penrose. Como visto na Seção 5.1, quando se considera o caso mais geral ($a \neq 0, Q_* \neq 0$), nem mesmo através de tensores complexos é possível encontrar-se solução analítica do problema, que continua em aberto.

Capítulo 6

MODOS QUASE-NORMAIS

A teoria da perturbação, apresentada nos capítulos anteriores, pode ser generalizada para englobar frequências complexas ao espectro de radiação dos buracos negros. Esse problema foi inicialmente proposto por Vishweshwara [31] no contexto da análise da estabilidade dos espaços-tempo gerados por buracos negros. Atualmente, o estudo de certas soluções para frequências complexas, denominadas *modos quase-normais*, é de grande importância em Astrofísica na tentativa de se detectar diretamente a presença de buracos negros no universo. Isso se deve ao fato de que os modos quase-normais são definidos de forma a representar radiação gravitacional que independe do processo de perturbação, ou seja, depende exclusivamente das características que definem a geometria do buraco negro.

Inicialmente o problema dos modos quase-normais (MQN) será formalizado matematicamente. Nas seções seguintes, serão apresentados os principais métodos semi-analíticos utilizados até hoje para a determinação dos MQN, baseados na similaridade de equações da teoria de perturbação com equações da teoria quântica. Os métodos serão confrontados e as propriedades dos MQN dos buracos negros de Schwarzschild e Kerr serão discutidas. A restrição da análise a essas soluções baseia-se no fato de que elas expressam os possíveis buracos negros existentes na Natureza; portanto, toda a discussão realizada nesse capítulo diz respeito aos buracos negros de Schwarzschild e Kerr, embora alguns resultados sejam válidos para a solução de Reissner-Nordström.

6.1 Descrição Matemática dos MQN

Como foi visto nos Capítulos 4 e 5, uma perturbação genérica de um buraco negro (Schwarzschild, Kerr e Reissner-Nordström) tem sua evolução governada pela superposição de modos normais, isto é, soluções $Z(r_*, \omega)$ da equação de onda (4.158) com frequências ω , reais e positivas. Vishweshwara [31], após analisar o comportamento do espaço-tempo de Schwarzschild para perturbações com frequências reais, sugeriu que a estabilidade dos buracos negros deveria ser também testada para frequências complexas.

Definição 6.1 *Modos quase-normais são as soluções $Z(r_*, \omega)$ das equações de perturbação correspondentes a frequências complexas ω e satisfazendo as condições de fronteira*

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow A(\omega)e^{-i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty), \\ &\longrightarrow B(\omega)e^{+i\omega r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty), \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde r_* é a coordenada tartaruga (Definição 4.9).

Por comparação com a equação (4.151), conclui-se que (6.1) corresponde a uma onda de incidência zero sendo puramente refletida no infinito ($r_* \rightarrow +\infty$) e puramente absorvida no horizonte ($r_* \rightarrow -\infty$) do buraco negro.

Teorema 6.1 *Sejam $\mathbb{R}(\omega)$ e $\mathbb{T}(\omega)$ os coeficientes de reflexão e transmissão de uma onda incidente num buraco negro. Então os MQN correspondem aos pólos da extensão analítica de $\mathbb{R}(\omega)$ ao plano das frequências complexas tais que $\text{Re}(\omega) \neq 0$ e $\frac{\mathbb{T}(\omega)}{\mathbb{R}(\omega)}$ é regular (e não-nulo).*

Demonstração.

No caso real, a Definição 4.10 fornece, para as soluções da equação de onda (4.158),

$$\mathbb{R}(\omega) = \frac{|A(\omega)|^2}{|C(\omega)|^2} = \frac{(\frac{\Gamma}{2})^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}, \tag{6.2}$$

que consiste na resposta apropriada a uma ressonância em um oscilador harmônico amortecido, onde ω_0 corresponde à frequência de ressonância e $\frac{\Gamma}{2}$

determina a taxa de amortecimento do oscilador [13]. Estendendo a função $\mathbb{R}(\omega)$ ao plano das frequências complexas, obtém-se

$$\frac{A(\omega)}{C(\omega)} = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (6.3)$$

Impondo as condições de fronteira (6.1) à expressão (6.3), segue o resultado. Os vínculos, $Re(\omega) \neq 0$ e $\frac{\mathbb{T}(\omega)}{\mathbb{R}(\omega)}$ regular não-nulo, servem para assegurar o cumprimento das condições de fronteira [11]. ■

Segue da interpretação física da equação (6.2) e da Definição 6.1 que os MQN constituem-se em oscilações amortecidas.

Teorema 6.2 *Os MQN dos buracos negros de Kerr e Schwarzschild estão distribuídos simetricamente em relação ao eixo imaginário do plano das frequências complexas.*

Demonstração.

Decorre do fato de que o potencial V em (4.158) é invariante sob inversão simultânea dos sinais de ω e m , no caso de frequências reais; dessa forma, $\mathbb{R}(\omega) = \mathbb{R}^*(-\omega^*)$ e $\mathbb{T}(\omega) = \mathbb{T}^*(-\omega^*)$ no plano complexo [11]. Assim, se ω for uma frequência quase-normal, $-\omega^*$ também será. ■

Teorema 6.3 *Os MQN do buraco negro de Schwarzschild divergem no infinito ($r_* \rightarrow +\infty$) e no horizonte ($r_* \rightarrow -\infty$).*

Demonstração.

Reescrevendo a equação de onda (4.158) na forma

$$\frac{d^2 Z}{dr_*^2} + [\omega^2 - V]Z = 0, \quad (6.4)$$

multiplicando-a por Z^* e integrando o resultado de $-\infty$ a $+\infty$, obtém-se o valor médio do potencial efetivo $U(r_*) = \omega^2 - V(r_*)$, dado por

$$\bar{U}(r_*) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} U(r_*)|Z|^2 dr_*}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Z|^2 dr_*}. \quad (6.5)$$

Para uma frequência complexa $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, tem-se que [11]

$$\bar{U} \geq 0 \Rightarrow \Gamma > 0. \quad (6.6)$$

Como foi visto na Seção 4.3, equações (4.161) e (4.162), o buraco negro de Schwarzschild produz barreiras de potencial reais que garantem a condição (6.6), pois $U(r_*) \geq 0$ em (6.5). Portanto, as frequências quase-normais estão confinadas ao semi-plano superior do plano das frequências complexas, mas para esse caso, $|Z| \rightarrow \infty$ quando $r_* \rightarrow \pm\infty$ ([7], p.201). ■

A condição (6.6) revela que o buraco negro de Schwarzschild admite apenas os modos quase-normais de oscilação que sejam amortecidos. Segue ainda do Teorema 6.3 que os MQN não representam perturbações pois divergem no horizonte onde a métrica é finita; esse resultado decorre da admissão implícita na Definição 6.1 de uma perturbação infinita no passado.

Kokkotas [15] afirma que não está claro ainda se, nos seus últimos estágios (isto é, para $t > r_*$), uma perturbação pode ser expandida pontualmente em termos de MQN. Ferrari&Mashhoon [11] determinaram que a resposta de um buraco negro a perturbações externas comporta-se, em seus últimos estágios, como

$$\Psi_{re}(r_*, t) = 2\pi i \sum_s \hat{f}(\omega_s) e^{i\omega_s(t-r_*)}, \quad (6.7)$$

onde $\hat{f}(\omega_s)$ é o resíduo, no ponto singular ω_s , da função que representa a distribuição das amplitudes das componentes da perturbação com diferentes frequências. As oscilações amortecidas correspondentes aos MQN estão presentes na expansão (6.7) com amplitudes dadas pelos resíduos de \mathbb{R} ; mais que isso, tal resultado mostra que, embora os MQN não representem perturbações propriamente ditas no que diz respeito a seu comportamento espacial (Teorema 6.3), quando a dependência temporal é levada em conta eles aparecem como oscilações amortecidas nos últimos estágios da perturbação.

6.2 Determinação dos MQN

Nessa seção serão apresentados métodos semi-analíticos para a determinação de MQN de buracos negros, isto é, desenvolvimentos da teoria de perturbação que resultam em análise numérica.

6.2.1 Potenciais Invertidos

O método baseia-se no estabelecimento de uma conexão entre modos quase-normais e os estados fundamentais¹ de potenciais de buracos negros submetidos a transformações apropriadas. Pelo Teorema 6.1, os MQN correspondem às singularidades do coeficiente de reflexão quando estendido ao plano das frequências complexas. Kramers&Heisenberg [18] indicaram que as singularidades das amplitudes de espalhamento estão relacionadas aos estados fundamentais do potencial. Na verdade, para um *poço* de potencial as singularidades de $\mathbb{R}(\omega)$ para $\omega = \omega^0 + i\Gamma$, $\omega^0 = 0$ e $\Gamma \leq 0$, correspondem aos estados fundamentais do poço. Como foi visto no Capítulo 4, os buracos negros apresentam *barreiras* de potencial, caso em que a conexão não é evidente; nessas condições, Ferrari&Mashhoon [11] mostraram que os MQN correspondem aos estados fundamentais do potencial *invertido*.

Uma perturbação genérica de um buraco negro é expressa pela superposição de modos da forma (4.157) em que a parte radial $R(r)$ satisfaz²

$$\Lambda^2 Z = VZ, \quad (\Lambda^2 = \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2). \quad (6.8)$$

O método consiste em associar um conjunto de parâmetros p ao potencial³ e submeter as funções envolvidas na equação acima à transformação formal

$$r_* \longrightarrow -ir_* \quad e \quad p \longrightarrow \pi(p), \quad (6.9)$$

de forma que o potencial permaneça invariante, isto é,

$$U(r_*; \Omega; p) = V(-ir_*; \omega(p'); p'), \quad (6.10)$$

onde

$$\Omega(p) = \omega(p'), \quad (6.11)$$

$$\phi(r_*; p) = \psi(-ir_*; p') \quad (6.12)$$

¹Em Física, estados fundamentais correspondem aos auto-vetores do operador de Schrödinger independente do tempo (ver nota de rodapé 4 na página 107). Classicamente, estados fundamentais constituem trajetórias limitadas em um campo de força central.

² $Z(r)$ se relaciona com $R(r)$ através das transformações dadas nas Definições 4.8 e 4.9, e nos Teoremas 4.15 e 4.16.

³Eles podem já pertencer ao potencial ou podem ser introduzidos como fatores de escala.

e

$$\frac{d^2\phi}{dr_*^2} + (-\Omega^2 + U)\phi = 0. \quad (6.13)$$

As condições de fronteira (6.1) para modos quase-normais se reduzem a

$$\begin{aligned} \phi(r_*; p) &\propto e^{-\Omega r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty), \\ &\propto e^{+\Omega r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para $\Omega(p)$ real não-negativo, as equações (6.13) e (6.14) correspondem à Equação de Schrödinger⁴ da Mecânica Quântica com potencial $-U$ e condições de fronteira apropriadas para estados fundamentais. Os MQN associados ao potencial $V(r_*, \omega)$ podem ser determinados pela transformação inversa

$$\omega(p) = \Omega(\pi^{-1}(p)) \quad e \quad \psi(r_*; p) = \phi(ix; \pi^{-1}(p)) \quad (6.15)$$

e pelo restabelecimento dos valores originais dos parâmetros.

Infelizmente as tentativas em se determinar analiticamente os estados fundamentais fracassaram; para os buracos negros, essa função foi estimada por Ferrari&Mashhoon [11] a partir do uso de um potencial mais simples que aproxima uma barreira de potencial, especialmente nas proximidades de seu máximo ($r_* = r_0$).

Definição 6.2 *Seja U uma barreira de potencial. O potencial de Pöschl-Teller U_{PT} é dado por*

$$U_{PT} = \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha(r_* - r_0)}, \quad (6.16)$$

onde U_0 e $\alpha > 0$ são, respectivamente, a altura e a curvatura da barreira de potencial, ou seja,

$$U_0 = U(r_0) \quad (6.17)$$

e

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2U_0} \left[\frac{d^2 U}{dr_*^2} \right]_{r_0}. \quad (6.18)$$

⁴A forma clássica da Equação de Schrödinger independente do tempo é

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi,$$

onde E denota a energia do sistema, aqui identificada com $-\Omega^2$.

Teorema 6.4 *As frequências de MQN para o potencial $-U_{PT}$ são dadas por*

$$\omega_n = \pm(U_0 - \frac{\alpha^2}{4})^{\frac{1}{2}} + i\alpha(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.19)$$

Demonstração.

Substituindo (6.16) em (6.13) e fazendo uso da Definição 4.10, as soluções que satisfazem as condições de fronteira (6.14) produzem coeficientes de reflexão e transmissão dados por

$$\mathbb{R}(\omega) = \frac{\Gamma(-i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(1 + \beta + i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(-\beta + i\frac{\omega}{\alpha})}{\Gamma(i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(1 + \beta)\Gamma(-\beta)} \quad (6.20)$$

e

$$\mathbb{T}(\omega) = \frac{\Gamma(1 + \beta + i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(-\beta + i\frac{\omega}{\alpha})}{\Gamma(1 + i\frac{\omega}{\alpha})\Gamma(i\frac{\omega}{\alpha})}, \quad (6.21)$$

com

$$\beta = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{4} - \frac{U_0}{\alpha^2})^{\frac{1}{2}}.$$

As condições do Teorema 6.1 são satisfeitas quando $1 + \beta + i\frac{\omega}{\alpha}$ ou $-\beta + i\frac{\omega}{\alpha}$ se tornam iguais a $-n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), donde resulta

$$\omega_n = i\alpha(n + \frac{1}{2}) \pm i\alpha(\frac{\alpha^2 - 4U_0}{4\alpha^2})^{\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

Como o buraco negro de Schwarzschild verifica as condições (6.6) e $4U_0 > \alpha^2$, tem-se o resultado desejado. ■

Teorema 6.5 *Segundo o método dos potenciais invertidos, as frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild são dadas pela expressão (aproximada)*

$$\omega_n = \omega^0 + i\Gamma_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \gamma_0 \left\{ j(j+1) + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{54} \frac{(\sigma^2 - 1)[2(\sigma^2 - 1) - 3]}{j(j+1)} + \dots \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \Gamma_n &= \gamma_0 \left[1 + \frac{1}{9} \frac{(\sigma^2 - 1)}{j(j+1)} - \frac{1}{27} \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{j^2(j+1)^2} + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (6.24)$$

com

$$j = \frac{\sqrt{4Q-9}-1}{2} \quad (6.25)$$

e

$$\gamma_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}M}. \quad (6.26)$$

Nessas equações, $\sigma = 0$ para fótons e $\sigma = -3$ para grávitons.

Demonstração.

Para o buraco negro de Schwarzschild, os Teoremas 4.19 e 4.21 fornecem um potencial efetivo dado por

$$U(r_*) = \varepsilon(1 - \frac{2M}{r})(\frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{2\sigma M}{r^3}), \quad (6.27)$$

onde, em acordo com as equações (2.57) e (4.100),

$$r_* = r + \ln(\frac{r}{2M} - 1). \quad (6.28)$$

Na equação (6.27), $\sigma = 0$ para fótons e $\sigma = -3$ para grávitons; o parâmetro $\varepsilon > 0$ vale 1 para perturbações em buracos negros. Efetuando-se a transformação (6.9) com $\pi(M, \varepsilon) = (-iM, -\varepsilon)$, as frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild são dadas por

$$\omega = \omega^0 + i\Gamma = \Omega(iM, -1), \quad (6.29)$$

mas como dito anteriormente, não foi possível se determinar analiticamente a quantidade $\Omega(M, \varepsilon)$. As expressões (6.23)-(6.24) foram obtidas a partir da fórmula (6.19), considerando que o potencial efetivo (6.27) apresenta um único máximo r_0 determinado por

$$2y_0 = 3[1 - \frac{\sigma}{j(j+1)}] + \{9 + 14[\frac{\sigma}{j(j+1)}] + 9[\frac{\sigma}{j(j+1)}]^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (6.30)$$

em que r_0 e $r = My_0$ estão relacionados por (6.28). Para maiores detalhes, conferir [11], Apêndice B. ■

A determinação dos MQN do buraco negro de Kerr é complicada pelo fato de que os potenciais, equações (4.126), (4.129) e (4.137), podem ser

complexos e dependerem da frequência de radiação ω bem como do momento angular $J = aM$ do buraco negro. O método descrito acima pode ser aplicado, desde que seja escolhido um conjunto de parâmetros adequado a fim de produzir um potencial real. Ferrari&Mashhoon [11] determinaram explicitamente os MQN do buraco negro de Kerr para um caso restrito em que se evita o aparecimento de potenciais complexos.

Teorema 6.6 *As frequências quase-normais do buraco negro de Kerr com rotação lenta ($a \ll M$) e na aproximação eikonal ($j \gg 1$) são dadas por*

$$\omega_n = \omega^0 + i\Gamma_n, \quad (6.31)$$

com

$$\omega^0 = \pm \gamma_0 \left(j + \frac{1}{2}\right) + 2am\gamma_0^2 \quad (6.32)$$

e

$$\Gamma_n = \gamma_0 \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots (n \gg j), \quad (6.33)$$

onde j e γ_0 estão definidos por (6.25) e (6.26).

Demonstração.

Considerando apenas os termos lineares em $\frac{a}{M}$, pois $a \ll M$, e usando o fato de que na aproximação eikonal ω^0 é proporcional a j , o potencial efetivo para o buraco negro de Kerr é aproximadamente

$$U(r_*, \omega) \approx \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{4am\omega M}{r^3}. \quad (6.34)$$

Como esse é um potencial real independente do spin da perturbação, as frequências quase-normais podem ser estimadas por um procedimento análogo ao realizado no Teorema 6.5. ■

6.2.2 Aproximação WKB

A motivação para se utilizar esse método é a similaridade existente entre a equação de onda da teoria de perturbação dos buracos negros e a Equação de Schrödinger unidimensional para uma barreira de potencial. Da Definição 6.1, segue que os MQN são caracterizados basicamente por

possuírem frequências complexas e condições de fronteira correspondentes a ondas se afastando da barreira nas direções $\pm\infty$. Mantendo a analogia com a teoria quântica, MQN correspondem a ressonâncias do operador de Schrödinger com autovalores (energias) complexos [15].

Em ambos os casos, a equação básica (6.8) pode ser colocada na forma

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + Q(r_*, \omega)\psi = 0, \quad (Q = \omega^2 - V), \quad (6.35)$$

onde $Q(r_*, \omega)$ é o potencial efetivo que no caso quântico é real e, para os buracos negros, pode ser complexo.

Teorema 6.7 (*Fórmula de Schutz-Will*) *Considere a equação (6.35) na qual Q representa uma barreira de potencial efetivo com pico em r_0 . Então vale a relação*

$$Q_0 = \pm i[2Q_0'']^{\frac{1}{2}}(n + \frac{1}{2}), \quad (6.36)$$

onde $Q_0 = Q(r_0)$.

Demonstração.

Da equivalência já mencionada entre a equação (6.35) e a Equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula encontrando uma barreira de potencial, segue a validade da regra de Bohr-Sommerfeld,

$$\int_{r_1}^{r_2} [Q(r_*)]^{\frac{1}{2}} dr_* = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad (6.37)$$

onde r_1 e r_2 são raízes de Q . Aproximando o potencial Q por uma parábola em torno de seu máximo r_0 ,

$$Q(r_*) = Q(r_0) + \frac{1}{2} + Q''(r_0)(r_* - r_0)^2, \quad (6.38)$$

e substituindo em (6.37), obtém-se o resultado desejado. ■

É possível derivar-se a Fórmula de Schutz-Will a partir do método descrito em [13], baseado na determinação da matriz de conexão entre as soluções para diferentes regiões da barreira, mas a abordagem da aproximação WKB

via regra de Bohr-Sommerfeld é muito mais direta e geral, podendo inclusive ser estendida a potenciais complexos [15]. Iyer&Will [13] estenderam a fórmula (6.36) ao considerar mais termos na expansão de Q , obtendo

$$Q_0 = \Lambda + i[2Q_0'']^{\frac{1}{2}}(n + \frac{1}{2})(1 + \Omega), \quad (6.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \frac{1}{(2Q_0'')^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2) \right], \\ \Omega(n) &= \frac{\alpha}{2Q_0''} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left(\frac{Q_0'''' Q_0^{(4)}}{Q_0''^3} \right) (51 + 100\alpha^2), \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2304} \left(\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right)^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0''' Q_0^{(5)}}{Q_0''^2} \right) (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''} \right) (5 + 4\alpha^2) \right], \end{aligned} \quad (6.40)$$

com $\alpha = n + \frac{1}{2}$.

Por causa da expansão (6.38) do potencial efetivo Q em torno de seu ponto de máximo, a Fórmula de Schutz-Will é tanto mais precisa quanto maior for a proximidade entre os pontos de retorno r_1 e r_2 ; essa situação é possível para frequências com partes imaginárias de pequena magnitude. Kokkotas [15] afirma que esta é a única fórmula analítica a fornecer explicitamente as frequências dos MQN do buraco negro de Schwarzschild com precisão satisfatória.

Teorema 6.8 *As frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild são dadas por*

$$\omega^2 = V_0 \pm i[2V_0''']^{\frac{1}{2}}(n + \frac{1}{2}), \quad (6.41)$$

onde $V_0 = V(r_0)$ corresponde ao valor máximo do potencial.

Demonstração.

É imediato do Teorema 6.7 e da definição de Q em (6.35). ■

Para o buraco negro de Kerr, a equação (6.35) não é simples como no caso da solução de Schwarzschild. Decorre das equações (4.126), (4.129) e

(4.137) que o potencial efetivo correspondente a uma perturbação de spin s é dado por

$$Q(r_*; \omega, \alpha, s) = \omega^2 - 2is\omega \frac{2r\Delta - (r-1)(r^2 + \alpha^2)}{(r^2 + \alpha^2)^2} - \left[\frac{\lambda\Delta}{(r^2 + \alpha^2)^2} + G^2 + \frac{dG}{dr_*} \right], \quad (6.42)$$

onde

$$\lambda = \mathcal{Q} + a^2\omega^2 + 2am\omega - s(s+1), \quad (6.43)$$

$$G = \frac{s(r-1)}{r^2 + \alpha^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + \alpha^2)^2}. \quad (6.44)$$

e $\alpha^2 = a^2 + \frac{am}{\omega}$.

Dessa forma, uma expressão explícita como a do Teorema 6.7 não pode ser encontrada, pois a função $Q(r_*; \omega, \alpha, s)$ é complexa e a frequência complexa ω não está separada do potencial $V(r)$ de uma forma elementar. Assim, a equação complexa transcendental (6.36), ou sua extensão (6.39), será resolvida com r_0 calculado através da equação

$$\frac{dQ}{dr_*}(r_*; \omega, \alpha, s) = 0. \quad (6.45)$$

Kokkotas [15] sugere um procedimento numérico para a resolução do sistema de equações complexas não-lineares (6.36) e (6.45). A partir de um valor específico de α , são dadas três frequências e para elas a constante de separação \mathcal{Q} é determinada. Após isso, os coeficientes da parábola $F(\omega) = a\omega^2 + b\omega + c$ são calculados e a solução da equação $F(\omega) = 0$ fornece uma primeira estimativa para ω ; o processo continua iterativamente até que uma solução do sistema seja encontrada com a precisão desejada.

6.2.3 Frações Contínuas

O método das frações contínuas [19] consiste no único procedimento semi-analítico capaz de fornecer as frequências de MQN com partes imaginárias pequenas e grandes. Ao contrário dos procedimentos anteriores, essa abordagem baseia-se na observação de que as Equações de Teukolsky (Definição 4.8) são *equações de onda esferoidais generalizadas* do mesmo tipo que aquelas resolvidas por George Jaffé [14] na determinação do espectro eletrônico da molécula do íon de hidrogênio. As Equações de Teukolsky são resolvidas analiticamente com o auxílio de uma forma generalizada da solução de Jaffé,

devida a Baber&Hassé [1], eliminando a necessidade de integração numérica presente nos métodos anteriores. No entanto, as frequências quase-normais e as constantes de separação são definidas como raízes simultâneas de duas equações envolvendo frações contínuas, as quais devem ser resolvidas numericamente (mas com grande precisão).

Teorema 6.9 *As frequências de MQN do buraco negro de Kerr correspondem às raízes da equação⁵*

$$0 = \beta_0^r - \frac{\alpha_0^r \gamma_1^r}{\beta_1^r -} \frac{\alpha_1^r \gamma_2^r}{\beta_2^r -} \frac{\alpha_2^r \gamma_3^r}{\beta_3^r -} \dots, \quad (6.46)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_n^r &= n^2 + (r_0 + 1)n + r_0, \\ \beta_n^r &= -2n^2 + (c_1 + 2)n + c_3, \\ \gamma_n^r &= n^2 + (c_2 - 3)n + c_4 - c_2 + 2 \end{aligned} \quad (6.47)$$

e

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - s - i\omega - \frac{2i}{b} \left(\frac{\omega}{2} - am \right), \\ c_1 &= -4 + 2i\omega(2 + b) + \frac{4i}{b} \left(\frac{\omega}{2} - am \right), \\ c_2 &= s + 3 - 3i\omega - \frac{2i}{b} \left(\frac{\omega}{2} - am \right), \\ c_3 &= \omega^2(4 + 2b - a^2) - 2am\omega - s - 1 + (2 + b)i\omega - \mathcal{Q} + \frac{4\omega + 2i}{b} \left(\frac{\omega}{2} - am \right), \\ c_4 &= s + 1 - 2\omega^2 - (2s + 3)i\omega - \frac{4\omega + 2i}{b} \left(\frac{\omega}{2} - am \right), \quad (b = \sqrt{1 - 4a^2}). \end{aligned} \quad (6.48)$$

⁵Tem-se que

$$\beta_n - \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} -} \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} -} \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -} \dots = \beta_n - \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -} \dots}}.$$

Demonstração.

Utilizando a forma generalizada da solução de Jaffé, devida a Baber & Hassé, para as Equações de Teukolsky da Definição 4.8, é possível expressar a parte radial da perturbação como uma expansão de potências de $(\frac{r-r_+}{r-r_-})$, cujos coeficientes d_n obedecem a relação de recorrência

$$\begin{aligned} \alpha_0^r d_1 + \beta_0^r d_0 &= 0, \\ \alpha_n^r d_{n+1} + \beta_n^r d_n + \gamma_n^r d_{n-1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.49)$$

As condições do teorema garantem a convergência da série que define a parte radial da perturbação. Para maiores detalhes, conferir [19] e [24]. ■

Teorema 6.10 *As frequências de MQN do buraco negro de Schwarzschild correspondem às raízes da equação*

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 -} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 -} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 -} \dots, \quad (6.50)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n^2 + (2 - 2i\omega)n - 2i\omega + 1, \\ \beta_n &= -(2n^2 + (2 - 8i\omega)n - 8\omega^2 - 4i\omega + \mathcal{Q} - 2 - (s^2 - 1)), \\ \gamma_n &= n^2 - 4i\omega n - 4\omega^2 - (s^2 - 1) - 1. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Demonstração.

Decorre do Teorema 6.9 quando se toma $a \rightarrow 0$. ■

6.3 Discussão dos Resultados

Consiste numa evidência astrofísica que praticamente todo objeto estelar oscila de alguma forma. No entanto, a radiação gravitacional emitida pelas estrelas é fraca e com frequências muito baixas o que exclui sua relevância no estudo das ondas gravitacionais. Esse não é o caso quando se consideram objetos muito densos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, pois suas oscilações podem ser fortes o bastante para serem detectadas pelos detectores de ondas gravitacionais em construção atualmente.

Um buraco negro pode ser perturbado pela incidência de ondas de diversos tipos, mas também pode oscilar e emitir radiação devido ao acréscimo de matéria ao seu redor, ou pela presença de um objeto atraído por ele, ou durante sua formação mediante um colapso estelar (supernova). No entanto, *espera-se que uma perturbação irá, em seus últimos estágios, decair de uma maneira característica do buraco negro e independente da causa original, apresentando frequências e taxas de amortecimento próprias daquele objeto, da mesma forma que as últimas notas emitidas por um sino*. Essa é a idéia em que se baseia o conceito de *modos quase-normais* expresso na Definição 6.1. De fato, devido à emissão de ondas gravitacionais, o buraco negro não consiste num sistema oscilante fechado e, por isso, os modos normais dão lugar a modos com frequências *quase-normais* (complexas), em que a parte real corresponde à frequência de oscilação e a parte imaginária indica a taxa de amortecimento. Além disso, uma comparação entre as equações (4.151) e (6.1) revela que as condições de fronteira para MQN implicam na independência da perturbação original à qual é imposta amplitude zero. Daí a importância dos MQN na tentativa de se identificar buracos negros no universo.

Dos Teoremas 6.1 e 6.3, segue que os MQN correspondem a ressonâncias do operador de Schrödinger, ou seja, representam uma perturbação inicial infinita. Em outras palavras, MQN consistem nos modos de oscilação para os quais a resposta do buraco negro a uma perturbação externa é máxima. Por isso os MQN são importantes no estudo da estabilidade de buracos negros.

Com o intuito de se determinar os MQN de buracos negros, foram desenvolvidos vários métodos [16]. Entretanto, o padrão de estudo numérico dos MQN de buracos negros segue o modelo estabelecido por Chandrasekhar & Detweiler [8], o qual consiste em se escolher um valor para a frequência complexa, integrar a equação de perturbação, e determinar as soluções que satisfazem as condições de fronteira da Definição 6.1. Dos métodos semi-analíticos apresentados, aquele desenvolvido por Leaver se destaca no sentido de que evita a integração em favor da determinação das raízes de equações com frações contínuas.

O cálculo dos MQN mostrou que a parte real das frequências permanece constante enquanto que suas partes imaginárias (amortecimento) crescem proporcionalmente com a ordem do modo [16]. Resultados como esse, e como o da equação (6.7), visam garantir que os MQN de fato possam representar o comportamento da radiação emitida por buracos negros, observado através de investigações numéricas as quais revelaram que, nos seus últimos

estágios, a resposta dos buracos negros a perturbações externas é governada por oscilações amortecidas ([10],[16]).

Outra característica dos MQN é que, ao contrário do espectro contínuo de frequências reais (modos normais), o espectro das frequências quase-normais de um buraco negro é discreto. Essa propriedade decorre do fato de que a determinação dos MQN é equivalente ao problema da teoria quântica elementar de se encontrar os estados fundamentais de uma barreira de potencial (Seção 6.2.1). Mais que isso, o espectro de frequências quase-normais do buraco negro de Schwarzschild é infinito enumerável, pois existem infinitas raízes para a equação (6.50), à semelhança dos espectros da molécula do íon de hidrogênio [19]. Como foi visto no Teorema 6.2, tais frequências se distribuem simetricamente em relação ao eixo imaginário, ou seja, uma perturbação real que excite um MQN também excitará seu conjugado complexo; essa condição é essencial para que a radiação emitida seja de fato real (Definição 4.10).

Como foi explicado no Capítulo 4, o estudo das perturbações de buracos negros surgiu com o intuito de se analisar a estabilidade dos espaços-tempo associados a fim de se determinar a possibilidade da permanência de tais objetos na Natureza. Buracos negros astrofisicamente relevantes são consequência da coalescência de estrelas binárias de nêutrons, supostamente munidos de grande momento angular, de forma que um estudo detalhado dos MQN para o limite de Kerr ($a = M$) se faz necessário. Para o buraco negro de Kerr, uma análise da conservação do fluxo de radiação revela que um MQN com frequência real não pode existir no caso ordinário, mas é em princípio possível para o super-radiante [11]. Portanto, a amplitude de reflexão é *limitada* no eixo real restrito ao regime ordinário; dessa forma, se um MQN se aproxima dessa parte do eixo de frequências reais, seu resíduo se aproxima de zero. Decorre dessa observação e da equação (6.7) que MQN pouco amortecidos ($\Gamma \rightarrow 0$) não contribuem nos últimos estágios das oscilações de um buraco negro de Kerr. Esse resultado dá indícios de que buracos negros de Kerr sejam estáveis. Ao lado disso está a análise, feita pelo método das frações contínuas [24] e demonstrada analiticamente por Detweiler [9], indicando que as frequências de MQN de Kerr (para $a = 0$ até $a = M$) são limitadas pela frequência real

$$\omega_c = \frac{mc^3}{2GM}, \quad (6.52)$$

correspondente ao espalhamento super-radiante de uma onda incidente. Kokotas [15] afirma que Whiting [32] provou a estabilidade dos buracos negros de Kerr a todo tipo de perturbação; Onozawa [24] afirma que o comportamento

dos MQN para buracos negros com alta rotação (isto é, próximos do limite de Kerr) ainda não é bem conhecido.

Uma confrontação entre os resultados derivados pelos métodos semi-analíticos apresentados e evolução numérica das equações de perturbação revela que o método das frações contínuas possui maior precisão e funciona para frequências com pequeno e grande amortecimento. A aproximação WKB tem a vantagem de sua precisão poder ser aumentada mediante o acréscimo de mais termos na expansão (6.39), mas só produz resultados confiáveis para pequeno amortecimento; para frequências muito amortecidas, a parte imaginária mantém a acurácia, mas a parte real não. O método dos potenciais invertidos não é viável, pois depende de um potencial específico e sua precisão não pode ser determinada; sua importância reside no fato de ter sido a primeira tentativa de um método semi-analítico para esse tipo de problema. No limite de Schwarzschild ($a = 0$), a precisão dos resultados obtidos pelos métodos apresentados na Seção 6.2 está em bom acordo com as frequências determinadas por outros meios. A exceção está na aproximação WKB, pois os MQN do buraco negro de Kerr surgem da solução numérica do sistema de equações (6.36) e (6.45), de forma que um erro pequeno no cálculo de um dos parâmetros, r_0 ou ω , implica em erro no outro que, por sua vez, produz o mesmo efeito no valor, já errado, do parâmetro inicial.

O método de Leaver serve como padrão para qualquer novo método analítico relativo à determinação dos MQN de buracos negros. No entanto, ao contrário dos outros métodos, tal procedimento não fornece *insight* sobre as quantidades físicas envolvidas de modo que os resultados, muitas vezes, carecem de interpretação sobre qual configuração está sendo representada. Por isso, a importância da teoria de perturbação de buracos negros está em fornecer modelos a fim de permitir que os resultados numéricos possam ser comparados e interpretados fisicamente. Do ponto de vista matemático, o estudo dos MQN de buracos negros consiste em um campo aberto para a generalização da teoria de espalhamento da mecânica quântica: um exemplo disso é o desenvolvimento feito por Melrose [22], conhecido como *Teoria Geométrica de Espalhamento*.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, deve-se ressaltar que o objetivo do trabalho foi alcançado na medida em que propiciou uma revisão da literatura sobre perturbações de buracos negros, através de uma abordagem matemática da teoria, encadeando os conceitos e resultados puramente matemáticos em paralelo com as respectivas interpretações físicas.

Do ponto de vista matemático, a teoria apresentou diversos aspectos interessantes. Primeiramente, é preciso salientar a importância do formalismo de Newman-Penrose como abordagem alternativa para a Gravitação em detrimento do uso direto das Equações de Einstein em sua forma tensorial; nesse sentido, tal formalismo está para a Relatividade Geral assim como os formalismos de Lagrange e Hamilton estão para a Mecânica Newtoniana. Por meio dele, a teoria adquiriu um caráter algébrico na medida em que o espaço-tempo pôde ser caracterizado por campos escalares e classificado pela forma do tensor de Weyl; é a chamada *classificação de Petrov*. De acordo com essa classificação, os espaços-tempo de buracos negros são os mais simples possíveis, como se observou no texto através do anulamento de vários escalares de Weyl e coeficientes de spin.

Foi visto que o formalismo de Newman-Penrose possui relação íntima com os espinores e com a estrutura de cone de luz, fato que se destaca tanto matematicamente quanto fisicamente: no primeiro caso, a representação complexa por espinores é melhor, pois \mathbb{C} é corpo algebricamente fechado de modo que a álgebra e a análise complexas apresentam resultados mais simples e completos; no segundo caso, analisar o espaço-tempo da Relatividade Geral a partir de cones de luz parece ser condizente com a importância que a luz apresenta na Relatividade Restrita.

A principal contribuição do formalismo de Newman-Penrose consiste no fato de que o estudo das perturbações de buracos negros (Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr) só foi possível graças à separação das equações dos campos de partículas sem massa quando escritas em tal formalismo. Isso decorre do fato de que a abordagem focaliza a análise na geometria dos vetores da base induzida pela díade de espinores; as Equações de Teukolsky resultam de identidades envolvendo os operadores dessa base. Um fato surpreendente reside na possibilidade de se desenvolver um tratamento formal único para as Equações de Teukolsky e, mais que isso, concluir que campos distintos produzem potenciais com características semelhantes. Da paridade observada nas perturbações do buraco negro de Schwarzschild, surge a indagação sobre a existência de simetria íntima, passível de interpretação física, nas perturbações do buraco negro de Kerr, já que todos os potenciais produzem os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão.

Existem outras lacunas nos resultados obtidos, como o fato das equações de perturbação para a métrica de Kerr-Newman não conseguirem ser separadas, mesmo sendo esta uma generalização da métrica de Kerr. Do ponto de vista físico, é estranho que apenas a parte radial das Equações de Teukolsky possua interpretação física como solução de uma equação de onda, enquanto que a parte angular aparentemente não. No entanto, resultados físicos importantes puderam ser relacionados com propriedades matemáticas da teoria. Esse é o caso da conservação da energia e do fenômeno de super-radiância, os quais resultam do comportamento do Wronskiano de soluções independentes da equação de onda ao passar pela singularidade do potencial. A teoria desenvolvida nos Capítulos 4 e 5 ainda apresenta resultados fisicamente interessantes, como a conversão de energia gravitacional em eletromagnética, e vice-versa, num buraco negro de Reissner-Nordström perturbado e a espantosa analogia entre o fenômeno de super-radiância (partículas sem massa) e o processo de Penrose (partículas materiais), que revela consistência da teoria.

A presença de potenciais complexos nas perturbações de buracos negros permitiram generalizar a teoria de penetração de barreiras de potencial unidimensionais. A análise para frequências complexas (MQN) no Capítulo 6 é outra tentativa de generalização. O estudo dos modos quase-normais permitiu concluir que o buraco negro de Schwarzschild é completamente estável; além disso, é de fundamental importância para o estudo da estabilidade do buraco negro de Kerr. Mais ainda, tratados como ressonâncias do operador de Schrödinger, os MQN adquirem papel importante em Astrofísica na descrição da radiação gravitacional característica de um buraco negro; di-

ante dessa interpretação, ainda está em aberto a questão sobre a completude do sistema formado pelos MQN no espaço das funções que descrevem as perturbações de buracos negros, embora, como foi visto, existam tentativas nesse sentido.

O estudo das perturbações em buracos negros se mostrou um campo frutífero para futuras investigações sobre a estrutura íntima do espaço-tempo e para generalizações da estrutura matemática da Gravitação. Esse trabalho serve como ponto de partida para todo aquele que desejar prosseguir no assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] Baber,W.G., e Hassé,H.R., *Proc. Camb. phil. Soc.*, **25**, 564, (1935).
- [2] Bardeen,J.M., e Press,W.H., *J. Math. Phys.*, **14**, 7, (1973).
- [3] Bender,C.M., e Orszag,S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (McGraw-Hill, New York, 1978).
- [4] Brickell,F., e Clark,R.S., *Differentiable Manifolds*, (Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970).
- [5] Carmo,M.P. do, *Geometria Riemanniana*, (Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988).
- [6] Carroll,S.M., *Lecture Notes on General Relativity*, (1997), <http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/>.
- [7] Chandrasekhar,S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Clarendon Press, Oxford, 1983).
- [8] Chandrasekhar,S., e Detweiler,S., *Proc. Roy. Soc. London*, **A344**, 441, (1975).
- [9] Detweiler,S., *Astrophys. J.*, **239**, 292, (1980).
- [10] Ferrari,V., e Mashhoon,B., “Oscillations of a black hole”, *Phys. Rev. D*, **52**, 1361, (1984).
- [11] Ferrari,V., e Mashhoon,B., “New approach to the quasinormal modes of a black hole”, *Phys. Rev. D*, **30**, 295, (1984).
- [12] Guillemin,V., e Pollack,A., *Differential Topology*, (Prentice-Hall, New Jersey, 1974).

- [13] Iyer,S., e Will,C.M.,“Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher order WKB analysis of potential-barrier scattering”, *Phys. Rev. D*, **35**, 3621, (1987).
- [14] Jaffé,G., *Z.Phys.*, **87**, 535, (1934).
- [15] Kokkotas,K.D.,“Normal modes of the Kerr black hole”, *Class. Quantum Grav.*, **8**, 2217, (1991).
- [16] Kokkotas,K.D., e Schmidt, B.G.,“Quasi-normal modes of stars and black holes”, (1999), <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-1999-2/>.
- [17] Kostrikin,A.I., e Manin,Y.I., *Linear Algebra and Geometry*, (Gordon and Breach, New York, 1981).
- [18] Kramers,H.A., *Hand.Jahrb. Chem. Phys.*, **1**, 312, (1938); Heisenberg,W., *Z. Naturforsch.*, **1**, 608, (1946).
- [19] Leaver,E.W.,“An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes”, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **402**, 285, (1985).
- [20] Levich,B.G., Myamlin,V.A., e Vdovin,Yu.A., *Theoretical Physics - Quantum Mechanics*, v.3, (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973).
- [21] Marion,J.B., e Thornton,S.T., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, (Harcourt Brace & Company, Fort Worth, 1995).
- [22] Melrose,R., *Geometrical Scattering Theory*, (Cambridge University Press, 1995).
- [23] Misner,C.W.,Thorne, K.S., e Wheeler,J.W., *Gravitation*, (W.H.Freeman and Co., San Francisco, 1970).
- [24] Onozawa,H.,“Detailed study of quasinormal frequencies of the Kerr black hole”, *Phys. Rev. D*, **55**, 3593, (1997).
- [25] Penrose,R., e Rindler,W., *Spinors and Space-time*, v.1 e 2, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [26] Prugovecki,E., *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, (Academic Press, New York, 1971).

- [27] Regge,T., e Wheeler,J.A., *Phys. Rev.*, **108**, 1063, (1957).
- [28] Schutz,B., *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, (Cambridge, 1980).
- [29] Teukolsky,S.A., *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1114, (1972).
- [30] Teukolsky,S.A., *Astrophys. J.*, **185**, 635, (1973).
- [31] Vishweshwara,C.V., “Stability of the Schwarzschild metric”, *Phys. Rev. D*, **1**, 2870, (1970).
- [32] Whiting,B.F., *J. Math. Phys.*, **30**, 1301, (1989).