



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LEILA SILVEIRA

Classificação de Cônicas

Campinas

2017

Leila Silveira

Classificação de Cônicas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Leila Silveira e orientada pelo Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma.

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si39c Silveira, Leila, 1981-
Classificação de cônicas / Leila Silveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cônicas - Classificação. 2. Transformação de coordenadas. 3. Matemática
- Estudo e ensino. I. Ledesma, Diego Sebastian, 1979-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Conical classification

Palavras-chave em inglês:

Conics - Classification

Coordinate transformations

Mathematics - Study and teaching

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestra

Banca examinadora:

Diego Sebastian Ledesma [Orientador]

Roberto Andreani

Cristiane Alexandra Lázaro

Data de defesa: 18-05-2017

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 18 de maio de 2017
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). CRISTIANE ALEXANDRA LÁZARO

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica da aluna.

Aos meus pais...

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus pela oportunidade de poder voltar a estudar e participar desse curso, que colaborou não só com aprofundamento teórico matemático, mas também com minha prática em sala de aula, levando aos meus alunos novos recursos computacionais e novas ideias disseminadas pelos professores desse instituto, que estavam sempre dispostos a esclarecer, contribuindo sempre com a minha formação.

Agradeço aos meus familiares e amigos que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos, não só durante a trajetória desse curso, mas também durante minha trajetória como professora.

Agradeço aos colegas de trabalho e colegas de curso por colaborarem com as ideias matemáticas para que esse estudo se realizasse.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos aqueles que fazem parte da minha vida de alguma maneira, pois todas as pessoas nos ensinam algo novo todos os dias.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar o conjunto solução de equações da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, com A, B, C não simultaneamente nulos. Introduziremos a notação matricial e ferramentas da álgebra que permitirão simplificar o estudo da mesma. Para isso se traz um estudo sobre rotação e translações no plano, além da diagonalização de matrizes.

Mostra-se que as soluções se correspondem com elipses, hipérboles e parábolas; e com cônicas degeneradas, como retas ou ponto.

Ao final, é proposto um plano de aula contendo exemplos detalhados de todos os conteúdos abordados no trabalho, a fim de que seja aplicado aos estudantes do ensino médio que queiram se aprofundar no tema, ou ainda a estudantes no início da graduação.

Palavras-chave: Classificação de Cônicas. Transformação de Sistemas de Coordenadas. Ensino de Matemática

Abstract

This work aims to study the solution set of equations of the form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

where $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, with A, B, C not simultaneously zero. We introduce matrix notation and algebra tools that will simplify the study of it. For this is carried out a study on rotation and translations in the plane, besides the diagonalization of matrices.

We will show that the solutions correspond with ellipses, hyperboles and parabolas and degenerate conics, such as straight lines or point.

At the end, a lesson plan containing detailed examples of all the contents addressed in work is proposed, so that it can be applied to the high school students who wish to study the subject or to the students at the beginning or their graduation.

Keywords: Cônica classification. Coordinate System Transformations. Teaching of Mathematics.

Sumário

	Introdução	10
1	DEFINIÇÕES E EXEMPLOS	12
1.1	Elipse	12
1.2	Hipérbole	15
1.3	Parábola	18
1.4	Cônicas Degeneradas	20
2	MATRIZES, AUTOVALORES E AUTOVETORES	22
2.1	Introdução	22
2.2	Espaço Vetorial	22
2.3	Matrizes	28
2.3.1	Produto de Matrizes e Transposta de uma matriz	29
2.3.2	Tipos particulares de Matrizes	33
2.4	Produto Interno	35
2.5	Autovalores e Autovetores	39
2.6	Teoremas	42
2.7	Diagonalização de Matrizes	45
3	CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS	49
3.1	Introdução	49
3.2	Sistema de Coordenadas	49
3.3	Transformações no plano	50
3.3.1	Rotação de Coordenadas	52
3.3.2	Translação de coordenadas	54
3.4	Classificação das Cônicas	56
4	PLANO DE AULA	69
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS	94

Introdução

O estudo sistematizado das cônicas teve seu início com Apolônio de Perga em 261 a.C. com o “tratado sobre cônica”. Apolônio mostrou que, a partir de um cone reto com base circular, obtêm-se secções cônicas como a parábola, a elipse e a hipérbole. Contudo, o estudo analítico das cônicas só aconteceu com Fermat (1601-1665), que determinou equações simples para a hipérbole, elipse e parábola expressas por equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) .

Como dito anteriormente, as cônicas são obtidas através da secção de um plano em um cone reto. A elipse é gerada por um plano que corta apenas uma das “folhas” do cone, interceptando todas as geratrizes. A hipérbole é obtida pela secção de um plano a ambas as “folhas” do cone, obtendo assim, um par de curvas, uma em cada folha do cone. A parábola é obtida através da secção de um plano paralelo à geratriz do cone.

As aplicações das cônicas se dão nos mais variados segmentos: física, medicina, tecnologia e arquitetura.

O físico alemão Johannes Kepler (1571-1630) escreveu que o movimento descrito pelos planetas (órbita) está na forma elíptica, sendo o Sol um dos focos. Na saúde, podemos observar como um exemplo de aplicação de elipse os espelhos refletores dos dentistas, que concentram o máximo de luz onde se está trabalhando, evitando assim que os raios luminosos atinjam a vista do paciente.

Outro exemplo, na acústica da propriedade de reflexão da elipse pode encontrar-se em salas que têm a forma de um elipsóide. Se duas pessoas se posicionarem nos focos e uma delas falar, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala seja grande e haja outros ruídos. Duas salas que podemos tomar como exemplo são a Catedral de São Paulo em Londres e o edifício do Capitólio em Washington, D.C.

Qualquer objeto, atirado de forma oblíqua, descreve uma discreta curva parabólica, assim como a água que jorra de um bebedouro. Um outro exemplo interessante é a antena parabólica. Ela recebe os sinais de rádio ou luz pela parábola e os concentra em um único ponto, o foco, que os amplia e depois os reflete.

Na engenharia civil, temos o hiperboloide (sólido originado da rotação de uma hipérbole) que é utilizado na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. A estrutura nesse formato permite uma minimização dos ventos transversais e mantém a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção.

O objetivo desse trabalho é estudar o conjunto solução de equações do segundo

grau da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, com A, B, C não simultaneamente nulos, mostrando assim, tratar-se das cônicas ou de um caso degenerado. Apresenta-se no primeiro capítulo as definições de cônicas, os elementos principais e características gerais, bem como as cônicas degeneradas.

No segundo capítulo, utiliza-se das ferramentas da álgebra linear para transformar a equação do segundo grau em uma escrita matricial, a fim de facilitar o estudo. Trata-se também de conhecimentos preliminares sobre espaço de matrizes e dos processos para a diagonalização de matrizes simétricas, ferramenta essa, que será muito importante para o desenvolvimento do trabalho.

O terceiro capítulo traz ao leitor as transformações no plano e classificação das cônicas, ou seja, as aplicações dos capítulos 1 e 2 com exemplos de fácil entendimento, baseados nas teorias estudadas.

O quarto capítulo contém um plano de aula, como sugestão, para ser utilizado por professores do Ensino Médio que queiram se aprofundar no estudo de cônicas com os estudantes. O mesmo também poderá ser utilizado por estudantes no início da graduação.

Para tanto o embasamento teórico apoiar-se-á nos capítulos dois e três com as devidas demonstrações e exemplos que podem ser seguidos e estudados pelos interessados, assim como, algumas questões propostas para aplicação e verificação do entendimento.

1 Definições e Exemplos

De maneira geral, uma cônica é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ no plano tais que

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, com A, B, C não simultaneamente nulos. Esse capítulo se propõe ao estudo das cônicas não degeneradas, os elementos principais e características gerais. Também haverá uma breve discussão sobre cônicas degeneradas. As referências básicas utilizadas para este capítulo são os livros de G. Iezzi [3], A. Santos Machado [6], Anthony Pettofrezzo [7] e de Reginaldo Santos [8].

1.1 Elipse

A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos dados, F_1 e F_2 , do plano, é igual a uma constante $2a$, maior que a distância $dis(F_1, F_2)$, isto é, o conjunto de pontos P tais que:

$$dis(P, F_1) + dis(P, F_2) = 2a.$$

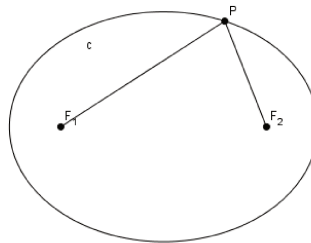


Figura 1 – elipse

Os pontos F_1 e F_2 chamam-se Focos e a medida do segmento F_1F_2 é chamada de distância focal que será representada por $2c$. A reta a qual os focos pertencem é um eixo de simetria da curva que intercepta a elipse nos pontos A_1 e A_2 (que chamam-se de vértices da elipse). O segmento A_1A_2 é chamado eixo maior da elipse.

No ponto médio dos focos se encontra o centro da elipse e passando uma reta perpendicular por ele, tem-se outro eixo de simetria da curva. Esse eixo intercepta a elipse nos pontos B_1 e B_2 . O segmento determinado por esses pontos é chamado eixo menor e sua medida será representado por $2b$.

Do triângulo retângulo formado decorre a relação $a^2 = b^2 + c^2$ e, portanto, sempre se tem $a > b$.

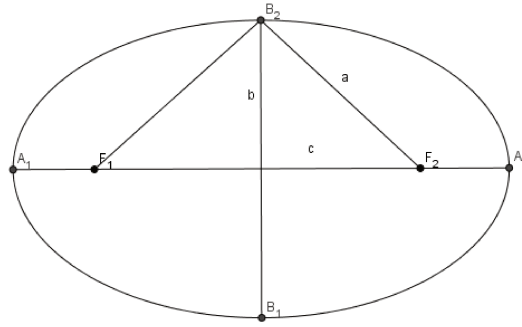


Figura 2 – elipse

Chama-se de excentricidade ao quociente entre as distâncias entre focos e a distância entre vértices, isto é

$$e = \frac{d(F_1, F_2)}{d(A_1, A_2)}.$$

Observa-se que, da definição, para a elipse $e < 1$.

Considere A_1 e A_2 pontos onde a elipse intercepta o eixo maior. Observa-se que $dis(A_1, A_2) = 2a$. De fato, sejam

$$dis(A_1, F_1) = x, \quad dis(F_1, F_2) = 2c \quad \text{e} \quad dis(F_2, A_2) = y.$$

Como o A_1 está na elipse tem-se que, da equação,

$$dis(A_1, F_1) + dis(A_1, F_2) = 2a.$$

Utilizando $dis(A_1, F_2) = dis(A_1, F_1) + dis(F_1, F_2)$ tira-se que

$$2x + 2c = 2a$$

Analogamente, tem-se $2y + 2c = 2a$. Subtraindo estas duas equações, vê-se que $x = y$, ou seja, $dis(A_1, F_1) = dis(A_2, F_2)$. Logo,

$$\begin{aligned} dis(A_1, A_2) &= dis(A_1, F_1) + dis(F_1, F_2) + dis(F_2, A_2) \\ &= x + 2c + y \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1. Considere a elipse que no sistema cartesiano tem os focos no eixo das abscissas, isto é, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Deduz-se a equação da elipse, neste caso, considerando a distância entre os vértices $2a$. Assim, da definição, se tem:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \implies \\
\implies \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies \\
\implies (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \implies \\
\implies a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \implies \\
\implies a^2(x-c)^2 + a^2y^2 &= (a^2 - cx)^2 \implies \\
\implies a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \implies \\
\implies (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \implies \\
\implies b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \implies \\
\implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtém-se a equação da elipse que no sistema cartesiano tem os focos no eixo das ordenadas, isto é, $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$. Dessa forma, se tem a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Quando a elipse tem centro em um ponto diferente da origem mas paralelo ao sistema OXY suas equações são

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

com o eixo maior sobre a abscissa e

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

com o eixo maior sobre a ordenada.

Exemplo 1.2. *Seja*

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$$

a equação de uma elipse com centro na origem do sistema cartesiano. Observa-se que o eixo maior se localiza sobre o eixo das ordenadas e o eixo menor sobre as abscissas, logo a equação é da forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Tem-se $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, logo $a = 5$ e $b = 4$, de onde obtém-se $c = 3$.

Comparando com a teoria desenvolvida, conclui-se que os focos são $F_1(0, -3)$ e $F_2(0, 3)$ e os vértices $A_1(0, 5)$ e $A_2(0, -5)$.

O gráfico da curva é dado por:

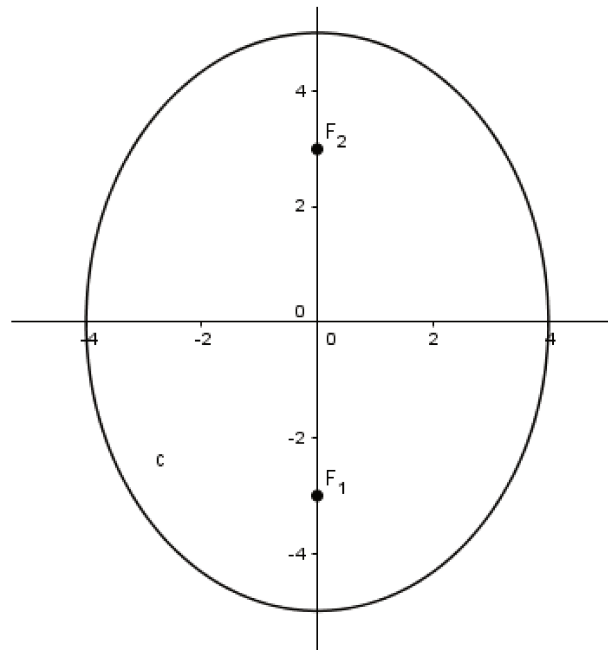


Figura 3 – Elipse

1.2 Hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos dados, F_1 e F_2 do plano é, em valor absoluto, igual a uma constante $2a$ menor que a distância $dis(F_1, F_2)$, isto é, o conjunto de pontos P tais que

$$|dis(P, F_1) - dis(P, F_2)| = 2a.$$

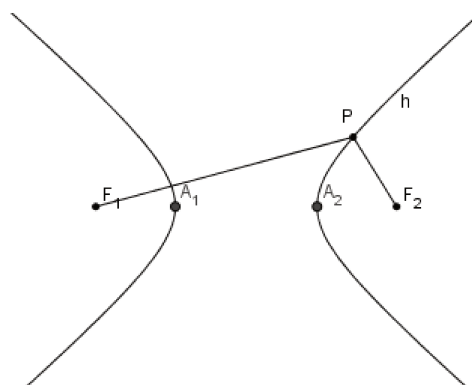


Figura 4 – Hipérbole

Os pontos F_1 e F_2 chamam-se Focos e a medida do segmento F_1F_2 é chamada de distância focal, que será representada por $2c$. A reta na qual os focos estão localizados é um eixo de simetria da curva que intercepta a hipérbole nos pontos A_1 e A_2 , chamados de vértices. A distância entre os vértices será representada por $2a$. O segmento A_1A_2 é chamado eixo real da hipérbole.

No ponto médio dos focos encontra-se o centro da hipérbole, e passando uma reta perpendicular por ele, tem-se o outro eixo de simetria da curva. Esse eixo intercepta a hipérbole nos pontos B_1 e B_2 . O segmento determinado por esses pontos é chamado eixo conjugado (ou imaginário) e será representado com medida $2b$.

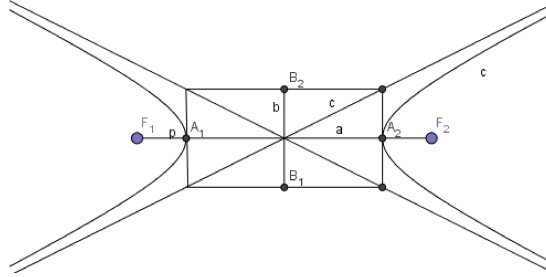


Figura 5 – Hipérbole

Do triângulo retângulo formado obtém-se a relação $c^2 = a^2 + b^2$.

Chama-se de excentricidade o quociente entre as distâncias focais e as distâncias entre os vértices, isto é

$$e = \frac{d(F_1, F_2)}{d(A_1, A_2)}.$$

Observa-se que, da definição, para a hipérbole $e > 1$.

Considere A_1 e A_2 pontos onde a hipérbole intercepta o eixo real. Observa-se que $\text{dis}(A_1, A_2) = 2a$. De fato, sejam

$$\text{dis}(A_1, F_1) = x, \quad \text{dis}(F_1, F_2) = 2c \quad \text{e} \quad \text{dis}(F_2, A_2) = y.$$

Como o A_1 está na hipérbole, tem-se da equação,

$$\text{dis}(A_1, F_1) - \text{dis}(A_2, F_2) = 2a.$$

Utilizando que $\text{dis}(F_1, F_2) = \text{dis}(F_1, A_1) + \text{dis}(A_1, A_2)$ tem-se que

$$2c = 2x - 2a.$$

Analogamente prova-se que $2c = 2y - 2a$. Subtraindo estas duas equações se vê que $x = y$, ou seja, $\text{dis}(F_1, A_1) = \text{dis}(A_2, F_2)$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{dis}(A_1, A_2) &= \text{dis}(F_1, F_2) - [\text{dis}(F_1, A_1) + \text{dis}(A_2, F_2)] \\ &= 2c - [x + y] = 2c - 2x \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3. Considere a hipérbole que no sistema cartesiano tem os focos no eixo das abscissas, isto é $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Assim, da definição deduz-se a equação da hipérbole:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a \implies \\
\implies (\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 &= (\pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \implies \\
\implies (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \implies \\
\implies \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \implies \\
\implies (\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (4a^2 - 4cx)^2 \implies \\
\implies (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \implies \\
\implies -b^2x^2 + a^2y^2 &= -a^2b^2 \implies \\
\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtém-se a equação da hipérbole que no sistema cartesiano tem seus focos no eixo das ordenadas, isto é, $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$. Dessa forma, se tem a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

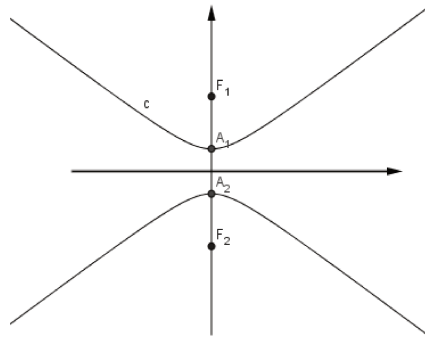


Figura 6 – $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Quando a hipérbole tem centro fora da origem, mas com os eixos paralelos ao OXY suas equações são

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

com o eixo real sobre a abscissa e

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

com o eixo real sobre a ordenada.

Assíntotas: Pode-se observar na figura 1.5 o retângulo formado de dimensões $2a$ e $2b$. As retas que contém as diagonais desse retângulo são as assíntotas da hipérbole e, como elas passam pelo centro da hipérbole, sua equação é dada por

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

no caso da hipérbole ter a reta focal coincidente com o eixo das abscissas, ou

$$x = \pm \frac{b}{a}y$$

no caso de ter a reta focal coincidente ao eixo das ordenadas.

Exemplo 1.4. *Seja*

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a equação de uma hipérbole com centro na origem do sistema cartesiano. Observa-se que o eixo real está localizado sobre o eixo das abscissas e eixo conjugado sobre o eixo das ordenadas, portanto a equação geral é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tem-se $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, logo $a = 4$ e $b = 3$, e assim $c = 5$.

Comparando com a teoria desenvolvida, conclui-se que os focos são os pontos $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$, e os vértices $A_1(-4, 0)$ e $A_2(4, 0)$. As equações das assíntotas são $y = \pm \frac{3}{4}x$.

O gráfico da curva é dado por:

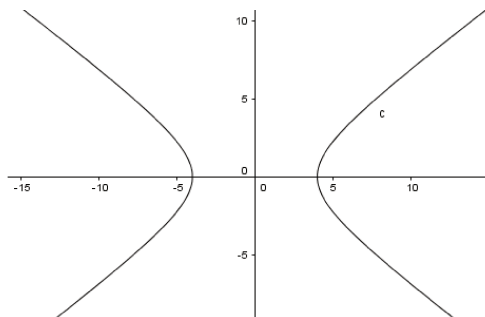


Figura 7 – Hipérbole

1.3 Parábola

A parábola é o lugar geométrico dos pontos P de um plano equidistantes de uma reta (diretriz) dada e de um ponto F (foco), então

$$dis(P, F) = dis(P, r).$$

Toma-se também um número positivo $4p$, chamado de parâmetro que será a distância entre o foco e a diretriz. Na parábola se encontra o vértice no ponto médio do foco e da interseção da diretriz com o eixo da parábola.

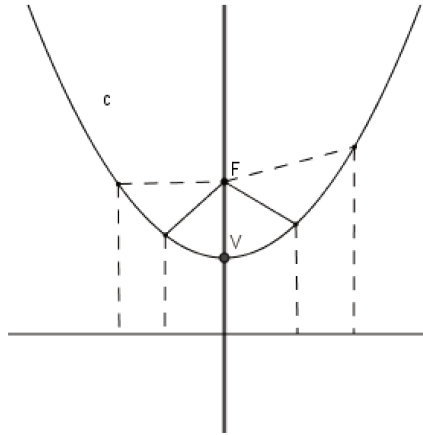


Figura 8 – Parábola

Exemplo 1.5. Considere uma parábola que no sistema cartesiano tem seu foco no eixo das abscissas, isto é, $F(p, 0)$ e a diretriz de equação $x = -p$. Deduz-se a equação reduzida da parábola nesse caso partindo da definição:

$$\begin{aligned}
 \text{dis}(P, F) &= \text{dis}(P, r) \implies \\
 \implies \sqrt{(x - p)^2 + y^2} &= |x + p| \implies \\
 \implies (x - p)^2 + y^2 &= (x + p)^2 \implies \\
 \implies x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \implies \\
 \implies -2px + y^2 &= 2px \implies \\
 \implies y^2 &= 4px.
 \end{aligned}$$

Nessas condições, se F está à direita de V , a equação da parábola será da forma

$$y^2 = 4px,$$

e, se F está à esquerda de V , a equação da parábola será da forma

$$y^2 = -4px,$$

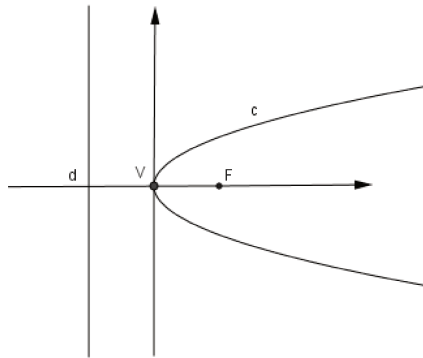
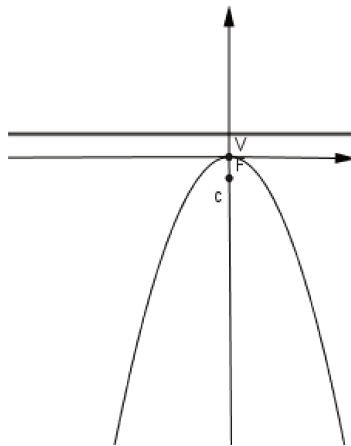
De modo análogo, obtém-se a equação da parábola quando o vértice está na origem do sistema e o foco no eixo das ordenadas. Nesse caso tem-se

$$x^2 = 4py,$$

quando F está acima de V e,

$$x^2 = -4py,$$

quando F está abaixo de V .

Figura 9 – $y^2 = 4px$ Figura 10 – $x^2 = -4py$

Se a parábola não estiver com seu vértice localizado na origem do sistema mas se o eixo que contém o foco for paralelo a abscissa tem-se a equação

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

. E se o eixo que contém o foco estiver paralelo ao eixo da ordenada tem-se a equação

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Exemplo 1.6. Seja $(y - 8)^2 = 6(x - 7)$ a equação de uma parábola do tipo $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, com eixo paralelo ao eixo das abscissas e F á direita de $V(7,8)$. A figura abaixo representa graficamente essa equação:

1.4 Cônicas Degeneradas

Como se vê, a elipse, a hipérbole e a parábola têm equações que serão representadas na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Entretanto, nem toda equação

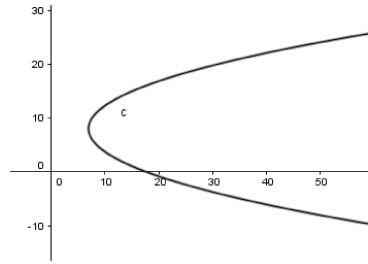


Figura 11 – Parábola

dessa forma, representa uma das curvas já citadas. Há equações que representam uma única solução, ou seja, um ponto; ou ainda, um par de retas. Essas representações são as cônicas degeneradas, que se verá a seguir.

1. Par de retas: o conjunto solução de uma equação do segundo grau que pode ser fatorada na forma $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ são reais e $a_1 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$ representa um par de retas, podendo ser paralelas, concorrentes ou mesmo coincidentes.

Exemplo 1.7. A equação $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ representa um par de retas paralelas, pois pode ser fatorada como $(x + y + 1)(x + y - 1) = 0$.

Exemplo 1.8. A equação $x^2 + 2y^2 - 3xy + x - 3y - 2 = 0$ também representa um par de retas, já que pode ser fatorada como $(x - 2y - 1)(x - y + 2) = 0$.

Exemplo 1.9. A equação $x^2 - 4y^2 = 0$ representa retas concorrentes que em sua forma fatorada fica $(x + 2y)(x - 2y) = 0$.

2. Um ponto: o conjunto solução de uma equação do segundo grau que pode ser escrito na forma $k_1(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ com $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ representa um ponto, pois só o ponto (x_0, y_0) satisfaz essa equação.

A equação $x^2 + y^2 = 0$ representa um ponto, o $(0, 0)$.

2 Matrizes, Autovalores e Autovetores

2.1 Introdução

Esse capítulo se introduzirá uma linguagem que simplificará a manipulação das equações estudadas. Esta é a linguagem matricial.

As matrizes podem ser vistas como transformações sobre uma estrutura algébrica muito importante em matemática, a dos espaços vetoriais.

Em particular, como a matriz que dirige a equação da cônica é simétrica, se verá que ela sempre será diagonalizada por meio de uma matriz ortogonal O , isto é, se A é a matriz que dirige a cônica, então existe uma matriz diagonal D e uma ortogonal O tal que $O^t A O = D$. Isto vai simplificar trabalho.

Neste capítulo utiliza-se como referências os livros de Hoffman e Kunze [2], Elon Lages Lima [5], Serge Lang [4] e Anthony Pettofrezzo [7]. Destaca-se que as demonstrações dos teoremas 2.6 e 2.7 foram adaptações conveniente dos resultados das referências.

2.2 Espaço Vetorial

Começa-se o capítulo com a definição de Espaço Vetorial.

Definição 2.1. *Um Espaço Vetorial V é um conjunto de elementos, chamados vetores, munido de duas operações: adição $+$: $V \times V \rightarrow V$ e multiplicação por escalar \cdot : $V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- 1) *Associativa:* $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- 2) *Elemento neutro:* Existe um elemento de V de tal forma que $0 + u = u + 0 = u$.
- 3) *Comutativa:* $u + v = v + u$.
- 4) *Simétrico:* Dado um elemento qualquer de V existe um elemento $-u$ de tal forma que $u + (-u) = 0$.
- 5) *Distributiva* $a(u + v) = au + av$.
- 6) $(a + b)v = av + bv$.
- 7) $(ab)v = a(bv)$.
- 8) *Elemento neutro:* Para todo elemento de V tem-se que $1.v = v$.

Observação: Na verdade um espaço vetorial pode ser definido sobre um corpo de escalares qualquer e não somente sobre os reais. Como no trabalho não se utilizará nada além de números reais, será apresentada a teoria para este caso. Portanto, quando se refere a um espaço vetorial se considerará um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Exemplo 2.1. *Seja o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Sobre o conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\},$$

introduz-se as operações soma e produto por escalar da seguinte forma:

- *Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n se define*

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n).$$

- *Dado um vetor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n por um escalar a , define-se por*

$$av = (av_1, \dots, av_n).$$

Mostra-se agora que, com estas operações, o conjunto \mathbb{R}^n é um espaço vetorial provando cada uma das propriedades:

1) *Associativa $(u + v) + w = u + (v + w)$:*

$$\begin{aligned} [(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)] + (w_1, \dots, w_n) &= (u_1, \dots, u_n) + [(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)] \\ (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) + (w_1, \dots, w_n) &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \\ (u_1 + v_1 + w_1, \dots, u_n + v_n + w_n) &= (u_1 + v_1 + w_1, \dots, u_n + v_n + w_n). \end{aligned}$$

2) *Seja $\bar{O} = (0, 0, \dots, 0)$ o vetor nulo de \mathbb{R}^n , então $u + \bar{O} = u$, pois*

$$(u_1 + 0, \dots, u_n + 0) = (u_1, \dots, u_n).$$

3) *Comutativa: $u + v = v + u$.*

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) &= (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) \\ (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) &= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n). \end{aligned}$$

4) *Seja $-u$ o simétrico de u definido por $-u = (-u_1, \dots, -u_n)$, então $u + (-u) = 0$, pois,*

$$(u_1, \dots, u_n) + (-u_1, \dots, -u_n) = (0, \dots, 0).$$

5) *Distributiva*: $a(u + v) = au + av$.

$$\begin{aligned} a(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) &= (au_1, \dots, au_n) + (av_1, \dots, av_n) \\ (au_1 + av_1, \dots, au_n + av_n) &= (au_1 + av_1, \dots, au_n + av_n). \end{aligned}$$

6) $(a + b)u = au + bu$.

$$\begin{aligned} (a + b)(u_1, \dots, u_n) &= (au_1, \dots, au_n) + (bu_1, \dots, bu_n) \\ (au_1 + bu_1, \dots, au_n + bu_n) &= (au_1 + bu_1, \dots, au_n + bu_n). \end{aligned}$$

7) $(ab)u = a(bu)$.

$$\begin{aligned} ab(u_1, \dots, u_n) &= a(bu_1, \dots, bu_n) \\ (abu_1, \dots, abu_n) &= (abu_1, \dots, abu_n). \end{aligned}$$

8) $1u = u$, pois,

$$1(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n).$$

Definição 2.2. *Seja V um espaço vetorial. Um subespaço de V é um subconjunto W de V tal que munido com as operações de soma e multiplicação por escalar de V é um espaço vetorial.*

Teorema 2.1. *Um subconjunto não vazio W de V é um subespaço se, e somente se, para quaisquer dois vetores u e v em W e qualquer escalar a o vetor $au + v \in W$.*

Demonstração. \Rightarrow) Se W é subespaço então W é espaço vetorial com a soma e produto herdada de V , donde para qualquer escalar a e vetores $u, v \in W$ tem-se $au + v \in W$.

\Leftarrow) Assuma que para quaisquer dois vetores u e v em W e qualquer escalar a o vetor $au + v \in W$. Mostra-se que todas as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas. Mas isto é simples, partindo da hipótese pois, só se deve variar a, u e v de forma tal de provar o pedido. \square

Exemplo 2.2. *Em \mathbb{R}^n , $n > 2$, o conjunto*

$$W = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 = 0\},$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n . De fato, dados $u = (0, u_2, \dots, u_n)$, $v = (0, v_2, \dots, v_n)$ e $a \in \mathbb{R}$ tiramos que

$$au + v = (0, au_2 + v_2, \dots, au_n + v_n) \in W.$$

Teorema 2.2. *Seja V um espaço vetorial. A interseção de qualquer coleção de subespaços de V é um subespaço de V .*

Demonstração. Para mostrar este resultado denota-se por $W = \cap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ à interseção de uma coleção de subespaços W_λ . Sejam $u, v \in W$ quaisquer e $a \in \mathbb{R}$, então $u, v \in W_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, donde $au + v \in W_\lambda$ para todo λ . Portanto, $au + v \in W$ e W é subespaço. \square

Definição 2.3. *Seja S uma coleção de vetores em V . O subespaço gerado por S é definido como a interseção de todos os subespaços de V que contém S .*

Definição 2.4. *Seja V um espaço vetorial e u_1, u_2, \dots, u_n os elementos de V . Diz-se que um vetor \vec{v} é combinação linear desses vetores, se existirem escalares, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n.$$

Definição 2.5. *Seja um espaço vetorial V , e sejam u_1, u_2, \dots, u_n elementos de V . Diz-se que u_1, u_2, \dots, u_n são linearmente dependentes se existem escalares a_1, a_2, \dots, a_n em V , não todos nulos, tais que*

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n = 0.$$

Se não existirem tais números, os vetores são linearmente independentes. Um caso especial: se os vetores \vec{u} e \vec{v} não são múltiplos um do outro, então são linearmente independentes.

Exemplo 2.3. *Verifique a dependência ou independência linear dos vetores $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 2)$.*

Solução: Partindo da definição, verifica-se a dependência linear entre esses vetores através da expressão

$$a \vec{u}_1 + b \vec{u}_2 = 0,$$

e determina-se os escalares:

$$a(1, 1) + b(1, 2) = 0$$

$$(a, a) + (b, 2b) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se $a = b = 0$, ou seja, escalares todos nulos, portanto os vetores são linearmente independentes.

Exemplo 2.4. *Verifique se o vetor $\vec{v} = (2, 3)$ é combinação linear de $\vec{v}_1 = (1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1)$.*

Solução: Deve-se encontrar a e b que satisfaz a equação vetorial

$$\vec{v} = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2.$$

Ou seja,

$$(2, 3) = a(1, -1) + b(0, 1).$$

Resolve-se o sistema de equações formado por

$$a + 0b = 2$$

$$-a + b = 3$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 5$. Logo, o vetor \vec{v} pode ser escrito como combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 da seguinte forma:

$$\vec{v} = 2 \vec{v}_1 + 5 \vec{v}_2.$$

Teorema 2.3. *O subespaço gerado por um subconjunto não vazio S de V é o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S .*

Demonstração. Seja $W = \text{span}\{S\}$, isto é, a interseção de todos o subespaços que contém S , e L o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S . Se $x \in L$ então claramente x está em todo subespaço que contém S , onde $x \in W$. Por outro lado, como $S \subset L$ e L é subespaço temos que $W \subset L$. \square

Definição 2.6. *Se S_1, \dots, S_n são subconjuntos de um espaço vetorial V , o conjunto das somas*

$$u_1 + \dots + u_n$$

de vetores $u_i \in S_i$ é chamada de soma dos subconjuntos S_1, \dots, S_n e é denotada por $\sum_{i=1}^n S_i$.

Definição 2.7. *Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto S de vetores em V é dito linearmente dependente se existem vetores u_1, \dots, u_k diferentes entre si e escalares a_1, \dots, a_k em \mathbb{R} , não todos eles 0, tais que*

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0.$$

Um conjunto que não é linearmente dependente é chamado linearmente independente.

Definição 2.8. *Sejam W_1, \dots, W_k subespaços de V . Dizemos que W_1, \dots, W_k são linearmente independentes se*

$$u_1 + \dots + u_k = 0, \quad u_i \in W_i$$

implica $u_i = 0$ para todo i . Neste caso dizemos que a soma $\sum_i W_i$ é direta e a denotamos por $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

Corolário 2.1. *Um subconjunto $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ é linearmente independente se, e somente se, para toda combinação linear*

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0.$$

implica que $a_i = 0$, para todo i .

Demonstração. \Rightarrow) Se $\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$ e algum dos $a_i \neq 0$ então o conjunto é linearmente dependente.

\Leftarrow) trivial da definição. □

Definição 2.9. *Seja V um espaço vetorial. Uma base de V é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram V . O espaço V é finito dimensional se tem base finita.*

Exemplo 2.5. *O subconjunto S de \mathbb{R}^n formado por*

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

é uma base de \mathbb{R}^n .

O seguinte resultado é o mais importante de espaços vetoriais. Não se apresenta aqui a demonstração, pois ela está baseada no Lema de Zorn, cuja discussão e pré-requisitos para o enunciado do mesmo foge do escopo do presente trabalho.

Teorema 2.4. *Todo espaço vetorial admite uma base. Mais ainda, duas bases de um mesmo espaço vetorial possuem a mesma cardinalidade.*

Definição 2.10. *A dimensão de um espaço vetorial V é igual à cardinalidade da base do espaço.*

Portanto, um espaço vetorial de dimensão n possui uma base de n elementos. Neste trabalho sempre se tratará com espaços vetoriais de dimensão finita.

2.3 Matrizes

Nesta seção se estudará o espaço vetorial das matrizes. Estas fornecem uma linguagem que permitem simplificar as equações tratadas neste trabalho.

Uma matriz pode ser representada por uma tabela com dados dispostos em linhas e colunas.

Algebricamente uma matriz pode ser representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Os elementos da matriz A são indicados por a_{ij} , onde o índice i representa a linha e o índice j representa a coluna na qual o elemento está localizado. A matriz de m linhas por n colunas é chamada de matriz de ordem $m \times n$. Denota-se por $\mathcal{M}(m \times n)$ ao conjunto das matrizes sobre os números reais de tamanho $m \times n$. Quando $m = n$, diz-se que a matriz é quadrada.

Representa-se a matriz A por $A = (a_{ij})$, isto é, pelos elementos.

O conjunto das matrizes é um espaço vetorial quando munidos das seguintes operações: adição $+: \mathcal{M}(m \times n) \times \mathcal{M}(m \times n) \rightarrow \mathcal{M}(m \times n)$ e multiplicação por escalar $\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{M}(m \times n) \rightarrow \mathcal{M}(m \times n)$. Estas operações são definidas da seguinte forma:

- Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrizes de tamanho $m \times n$, então a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$, também de tamanho $m \times n$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para todo i, j .

- Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de tamanho $m \times n$ e $a \in \mathbb{R}$ um escalar. A multiplicação por escalar kA é uma matriz $C = (c_{ij})$ de tamanho $m \times n$ cujos elementos estão dados por

$$c_{ij} = (ka_{ij}).$$

Logo, a multiplicação da matriz por um escalar é comutativa

$$k(a_{ij}) = (a_{ij})k = (ka_{ij}),$$

para todo i, j .

É fácil verificar que com estas operações o conjunto das matrizes formam um espaço vetorial.

Considere as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$. Para a adição é fácil mostrar que as propriedades são válidas pois, a mesma só se pode efetuar quando as matrizes são de mesma ordem.

Mostra-se que a propriedade comutativa é válida, tomando as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ de mesma ordem. A propriedade comutativa afirma que $A+B = B+A$, então $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ para todo par (i, j) .

A associatividade $(A + B) + C = A + (B + C)$ também é válida pois, $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$.

Exemplo 2.6. *Sejam as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Então

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Seja O a matriz nula, composta somente por elementos zeros. Para toda matriz A de ordem m por n existe uma matriz nula de mesma ordem tal que $A + 0 = 0 + A = A$. Então facilmente verifica-se a propriedade do elemento neutro para a adição.

Observa-se que a matriz A e a matriz kA serão de mesma ordem, então se $k = -1$ temos $A + (-1)A = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = 0$. Sendo assim, $(-1)A$ é o aditivo inverso da matriz A .

Sejam k e l números e A e B matrizes de mesma ordem, então:

$$\begin{aligned} kA + lA &= (k + l)A, \\ klA &= k(lA) = l(kA) = (kl)A, \\ k(A + B) &= kA + kB. \end{aligned}$$

Exemplo 2.7. *Seja a matriz B do exemplo anterior. Se quiser multiplicá-la por $c=3$ tem-se*

$$3A = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -3 & 21 \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Produto de Matrizes e Transposta de uma matriz

Como apresentado anteriormente, o espaço das matrizes formam um espaço vetorial. No entanto existem outras operações que podem ser definidas nestes conjuntos e que enunciar-se-á a seguir.

Multiplicação de Matrizes

Além das propriedades estudadas é importante definir uma operação entre as matrizes que é a multiplicação de matrizes. Esta operação tem algumas restrições, como se verá a seguir, quanto a ordem das matrizes, porém no caso das matrizes quadradas não representará nenhum problema.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e uma matriz $B = (b_{jk})_{n \times p}$, denomina-se produto de A por B , a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, tal que o elemento c_{ik} é a soma dos produtos da i -ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna de B . Escreve-se:

$$C = AB = C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Exemplo 2.8. *Sejam as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

efetuando o produto de A por B :

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 2.3 + 3.1 & 2(-2) + 3.0 & 2.2 + 3(-1) \\ 1.3 + (-4).1 & 1(-2) + (-4)0 & 1.2 + 9 - 4(-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então

$$A.B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

O produto entre duas matrizes A e B só existe se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B . Portanto, se o produto AB existe, o produto BA pode não existir, isso significa que o produto de matrizes não é comutativo.

Exemplo 2.9. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

verifique se é possível efetuar o produto de A por B , assim como o de B por A .

Solução: Escrevendo o produto AB :

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -7 & -8 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

No entanto o produto BA não existe, pois, o número de linhas da matriz B não é igual ao número de colunas da matriz A .

A multiplicação de matrizes também possui algumas propriedades, dentre elas:

1. Associativa: $A.(BC) = (AB).C$

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes de ordem $k \times m$, $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. Então os produtos AB , BC , $A(BC)$ e $(AB)C$ existem. Os elementos da i -ésima linha de A são $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$, e os elementos da j -ésima coluna de BC são

$$b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \dots + b_{1n}c_{nj}, b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \dots + b_{2n}c_{nj}, \dots, b_{m1}c_{1j} + b_{m2}c_{2j} + \dots + b_{mn}c_{nj}.$$

Além disso, os ij -ésimos elementos de $A(BC)$ são:

$$a_{i1}(b_{11}c_{1j} + \dots + b_{1n}c_{nj}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \dots + b_{2n}c_{nj}) + \dots + a_{im}(b_{m1}c_{1j} + b_{m2}c_{2j} + \dots + b_{mn}c_{nj}),$$

que é o mesmo que

$$(a_{i1}b_{11} + \dots + a_{im}b_{m1})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{im}b_{m2})c_{2j} + \dots + (a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \dots + a_{im}b_{mn})c_{nj},$$

que representa o ij -ésimo elemento de $(AB)C$. Então

$$A(BC) = (AB)C.$$

□

2. Distributiva: $C(A + B) = CA + CB$.

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$, e seja $C = (c_{ij})$ uma matriz de ordem $k \times m$. Então $A + B$, CA , CB e $C(A + B)$ existem. Os elementos da i -ésima linha de C são

$$c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im}$$

e os elementos da j -ésima coluna de $A + B$ são

$$a_{1j} + b_{1j}, a_{2j} + b_{2j} + \dots + a_{mj} + b_{mj}.$$

Além disso, os elementos de $C(A + B)$ são

$$c_{i1}(a_{1j} + b_{1j}) + c_{i2}(a_{2j} + b_{2j}) + \dots + c_{im}(a_{mj} + b_{mj}),$$

o que significa

$$(c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \dots + c_{im}a_{mj}) + (c_{i1}b_{1j} + c_{i2}b_{2j} + \dots + c_{im}b_{mj}),$$

que é a soma dos ij -ésimos elementos de CA e CB , respectivamente. Então

$$C(A + B) = CA + CB.$$

□

Transposição de Matrizes

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de tamanho $m \times n$ defini-se a matriz transposta como sendo a matriz $B = (b_{ij})$ de tamanho $n \times m$ cujas entradas são dadas por $b_{ij} = a_{ji}$. Denota-se esta matriz por A^t .

Exemplo 2.10. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

A operação da transposição possui as seguintes propriedades:

- A operação da transposição é reflexiva, ou seja, $(A^t)^t = A$.

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})$ e $A^t = (b_{ij})$. Então $b_{ij} = a_{ji}$ para todo par (i, j) . A transposta de A^t é (b_{ji}) que é igual a a_{ij} . Logo, $(A^t)^t = A$. □

- A transposta da soma (ou diferença) de duas matrizes é igual a soma (ou diferença) das transpostas, ou seja, $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})$ e $B^t = (b_{ij})$ duas matrizes $m \times n$. Então $A + B = C$ onde $C = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$A^t = (a_{ji}),$$

$$B^t = (b_{ji}),$$

Então,

$$\begin{aligned} (A + B)^t &= (c_{ji}) \\ &= (a_{ji} + b_{ji}) \\ &= A^t + B^t. \end{aligned}$$

□

- A transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas na ordem contrária, ou seja, $(AB)^t = B^t A^t$.

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $k \times m$ e $B = (b_{ij})$ uma matriz $m \times n$. Seja também o produto $AB = (c_{ij})$. Então

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj},$$

e os elementos da j -ésima linha de i -ésima coluna de $(c_{ij})^t = (AB)^t$.

Os elementos $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}$ da j -ésima coluna de B são os j -ésimos elementos da linha de B^t . Os elementos $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ da i -ésima linha de A são os j -ésimos elementos da coluna de A^t .

O produto de $B^t A^t = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \dots + a_{im}b_{mj}$, que consequentemente corresponde a $(AB)^t = B^t A^t$.

□

2.3.2 Tipos particulares de Matrizes

Enuncia-se algumas matrizes que serão utilizadas neste trabalho.

- **Matriz Simétrica:**

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é dita simétrica $A = A^t$.

Exemplo 2.11. *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

é simétrica pois quando se troca as linhas pelas colunas ela permanece a mesma.

- Se A e B são matrizes simétricas, então AB é uma matriz simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

Demonstração. Seja A e B matrizes simétricas de mesma ordem de modo que AB é uma matriz simétrica. Então,

$$\begin{aligned} AB &= (AB)^t \\ &= B^t A^t \\ &= BA. \end{aligned}$$

Consequentemente, $AB = BA$. Se $AB = BA$, onde A e B são matrizes simétricas, então:

$$\begin{aligned} (AB)^t &= (BA)^t \\ &= A^t B^t \\ &= AB, \end{aligned}$$

desde que A e B sejam matrizes simétricas.

Consequentemente, AB é uma matriz simétrica.

□

- **Matriz Anti-simétrica:**

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é dita anti-simétrica quando $A = -A^t$.

Exemplo 2.12. A matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

é um exemplo de matriz anti-simétrica.

Observa-se que toda matriz quadrada pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica. De fato, dada A matriz quadrada escreve-se

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

- **Matriz Ortogonal**

As matrizes ortogonais são exemplos de matrizes que representam rotações no plano em torno da origem, que será melhor tratado no capítulo 3. Por enquanto apresenta-se apenas a definição:

Seja A uma matriz quadrada e A^t sua transposta. A matriz A será dita ortogonal se $A.A^t = I$. Além disso, $A^t = A^{-1}$, ou seja, uma matriz é ortogonal se, e somente se, a transposta e inversa são iguais.

Pode-se mostrar também que:

- se A é uma matriz ortogonal então $(A^{-1})(A^{-1})^t = A^t(A^t)^t = A^t.A = I$, o que significa que a inversa de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal.

-Se A e B são matrizes ortogonais, então $(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$.

Exemplo 2.13. Verifique a ortogonalidade da matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Solução: Para determinar se uma matriz é ortogonal verifica-se $A.A^t = I$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Produto Interno

Seja V um espaço vetorial. O produto interno é uma operação $\langle u, v \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a um par de vetores u e v um número real e que satisfaz as seguintes propriedades:

Sejam u, v, w vetores do plano e k um número real, então:

$$1) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0.$$

$$2) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0.$$

$$3) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

$$4) \langle u + v, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, v + w \rangle.$$

$$5) \langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Exemplo 2.14. Considere sobre o espaço vetorial \mathbb{R}^n o produto interno por

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Sejam $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, pode-se observar

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0;$$

e

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = \langle v, u \rangle,$$

o que confirma as propriedades 1 e 3.

Para a propriedade 2 se tem:

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Para a propriedade 4: Seja $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, então:

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= (x_1 + y_1)w_1 + (x_2 + y_2)w_2 + \dots + (x_n + y_n)w_n \\ &= (x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n) + (y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_nw_n) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Para a propriedade 5: Seja k um número real, então:

$$\langle ku, v \rangle = (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \dots + (kx_n)y_n = k(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) = k \langle u, v \rangle.$$

Portanto, tem-se um produto interno.

Exemplo 2.15. Calcule $x \in \mathbb{R}$ de modo que, o produto interno dos vetores $\vec{u} = (3, -4)$ e $\vec{v} = (x, 2)$ seja igual a 6.

Solução: Tem-se

$$\begin{aligned} 6 &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ 6 &= 3x - 4 \cdot 2 \\ x &= \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.16. Sejam $v = (3, 1, 0)$ e $w = (-2, 1, 9)$. O produto interno de v por w é dado por

$$\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 9 = -5$$

O produto interno permite definir o conceito de norma de um vetor. A norma de um vetor é uma aplicação que associa a cada vetor um número real (isto é $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$) que é definida por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

A aplicação norma possui as seguintes propriedades:

- $\|\vec{u}\| \geq 0$.
- $\|\vec{u}\| = 0$ se, e só se, $\vec{u} = 0$
- $\|a\vec{u}\| = |a| \|\vec{u}\|$.

Definição 2.11. Dois vetores u, v em um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$.

Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto linearmente independente de vetores sobre um espaço com produto interno V e seja W o espaço por ele gerados. Então pode-se construir um conjunto $\{u_1, \dots, u_k\}$ de vetores linearmente independentes tais que $\|u_i\| = 1$ para todo i e $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Para isto se utiliza o método de Gram-Schmidt que consiste em aplicar recursivamente o seguinte

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}$$

$$u_{j+1} = \frac{1}{\left\| \left(v_{j+1} - \sum_{i \leq j} \frac{\langle v_{j+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \right) \right\|} \left(v_{j+1} - \sum_{i \leq j} \frac{\langle v_{j+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \right).$$

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dado um subespaço $W \subset V$ define-se por W^\perp ao conjunto

$$W^\perp = \{v \in V, \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in W\}$$

Lema 2.1. W^\perp é um subespaço de V e, mais ainda, $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. Dados $v, w \in W^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$ vê-se, para todo $u \in W$, que

$$\begin{aligned} \langle av + w, u \rangle &= \langle av, u \rangle + \langle w, u \rangle \\ &= a \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Onde $av + w \in W^\perp$ e portanto W^\perp é subespaço.

Para a segunda parte, primeiramente se vê que $W \cap W^\perp = \{0\}$. De fato, se $u \in W \cap W^\perp$ então

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 0,$$

pois u é ortogonal a ele mesmo. De onde tem-se $u = 0$. Prova-se o resto por indução na dimensão de W . Se $\dim(W) = 1$, então seja $\{u_1\}$ sua base. Dado $u \in V$ defina

$$w = u - \frac{\langle u, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1.$$

Claramente $\langle u_1, w \rangle = 0$ e, portanto, $w \in W^\perp$. Como

$$u = \frac{\langle u, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + w,$$

tem-se que $V = W \oplus W^\perp$.

Assumindo que vale para $\dim(W) \leq k$ vemos o caso $k + 1$ (sempre assumindo $k < n$ pois nesse caso é trivial). Se $\dim(W) = k + 1$, seja $u \in W$ um vetor não nulo. Então, como W é um espaço vetorial com produto interno herdado de V se tira que, se W_1 é subespaço de W perpendicular a subespaço de W gerado por $\{u_1\}$ se tem pelo passo anterior que:

$$W = \{u_1\} \oplus W_1.$$

Observa-se que W_1 é um subespaço de V de dimensão k e que $u_1 \in W_1^\perp$. Por hipótese indutiva, $V = W_1 + W_1^\perp$. Assim, se $u \in v$ existem v_1, v_2 tais que $v_1 \in W_1$ e $v_2 \in W_1^\perp$ e $u = v_1 + v_2$. Escreve-se então

$$w_1 = v_1 + \frac{\langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|u_1\|^2} \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|u_1\|^2}.$$

Claramente $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$ e $u = w_1 + w_2$. □

Definição 2.12. Um vetor v em um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dito unitário se $\|v\| = 1$.

Definição 2.13. Uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dita ortonormal se

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 2.17. Determine o normalizado do vetor $\vec{u} = (-1, 5)$.

Solução: Como $\|u\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, então o normalizado é:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|u\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}} \right).$$

Pode-se observar que existe uma relação entre a multiplicação de duas matrizes e o produto interno. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

pode-se considerar cada linha ou coluna da matriz como um vetor pertencentes a \mathbb{R}^n . Assim, tem-se o vetor $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ que é formado pelas entradas da primeira linha da matriz, bem como também o vetor $\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ formado pelas entradas da última coluna da matriz.

Na multiplicação de matrizes efetua-se o produto interno entre os vetores linhas e os vetores colunas das matrizes dadas.

Exemplo 2.18. *Sejam as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os vetores linha que compõe a matriz A são $\vec{a}_1 = (1, 2)$ e $\vec{a}_2 = (-1, 3)$, e os vetores coluna que compõe a matriz B são $\vec{b}_1 = (0, 2)$ e $\vec{b}_2 = (4, -1)$.

O resultado da multiplicação dessas matrizes será uma matriz C , de ordem 2×2 tal que cada elemento c_{ij} será o resultado do produto interno dos vetores linhas de A pelos vetores coluna de B . Ou seja, o elemento $c_{11} = 1.0 + 2.2 = 4$, $c_{12} = 1.4 + 2.(-1) = 2$, $c_{21} = -1.0 + 3.2 = 6$ e o elemento $c_{22} = -1.4 + 3.(-1) = -7$. Tais elementos podem ser escritos na forma matricial:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2. *Se A for uma matriz ortogonal então suas linhas e colunas formam uma base ortonormal. Mais ainda, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , então a matriz $A = (u_1 | \dots | u_n)$ cujas colunas são dadas pelos vetores da base, é uma matriz ortogonal.*

Demonstração. A primeira parte é imediata da definição de ortogonalidade da matriz. De fato ao fazer $AA^t = I$ ou, equivalentemente, $A^t A = I$ tem-se, da discussão acima que se $A = (u_1 | \dots | u_n)$ onde u'_i s são os vetores formados pelas colunas da matriz então:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Quanto a segunda parte segue da ortonormalidade da base. □

Exemplo 2.19. *Sejam os vetores $\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de \mathbb{R}^2 . Já foi demonstrado que eles formam uma matriz ortogonal. Toma-se seu produto interno e tem-se*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

2.5 Autovalores e Autovetores

Nessa seção estudar-se-á os conceitos de autovalores e autovetores que serão de utilidade no estudo das cônicas.

Seja V o espaço vetorial das matrizes coluna de tamanho $m \times 1$. Um elemento $v \in V$ é chamado de autovetor da matriz A de tamanho $n \times n$ se existe um escalar λ tal que $Av = \lambda v$. Diz-se que λ é um autovalor de A associado ao autovetor v .

Utilizando a matriz identidade I pode-se reescrever esta equação como $(A - \lambda I)X = 0$.

Seja I a matriz identidade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $IX = X$, então a equação pode ser escrita como

$$AX = \lambda IX,$$

ou

$$(A - \lambda I)X = 0.$$

Assim, qualquer vetor não nulo X , tal que $(A - \lambda I)X = 0$ é chamado de autovetor da matriz A associado ao autovalor λ .

Vê-se, assim, que um autovetor não nulo é uma solução não trivial do sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$. A teoria de resolução de sistemas lineares nos permite concluir então que para encontrar as soluções não triviais do sistema, o determinante $\det(A - \lambda I) = 0$. Essa equação é chamada de equação característica. Na forma algébrica matricial tem-se

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ao desenvolver a equação característica, encontra-se um polinômio em λ , chamado de polinômio característico, onde, sua solução, são os autovalores reais de A .

Exemplo 2.20. *Determine os autovalores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução: Escrevendo a equação característica tem-se

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned}(5 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 9\lambda + 14 &= 0.\end{aligned}$$

As soluções $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores da matriz.

Exemplo 2.21. Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Escrevendo a equação característica tem-se

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned}(2 - \lambda)(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 + 9 - 3(1 - \lambda) - 3(2 - \lambda) + 2(-1 - \lambda) &= 0 \\ -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 &= 0.\end{aligned}$$

As soluções $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 3$ são os autovalores da equação característica. Como para cada autovalor existe um autovetor associado, tem-se que:

Para $\lambda_1 = 1$ a equação $(A - 1I)X = 0$ fica assim escrita:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

portanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

onde $x_1 = -x_3$ e $x_1 + 3x_3 = 2x_2$ portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x(1, -1, -1), x \in \mathbb{R}\},$$

logo, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

Para $\lambda_2 = -2$ a equação $(A + 2I)X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto,

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $x_1 = -3x_2 - x_3$ e $x_3 = -14x_2$. Portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x(11, 1, -14), \ x \in \mathbb{R}, \}$$

logo, $v_2 = \frac{1}{318}(11, 1, -14)$.

Para $\lambda_3 = 3$ a equação $(A - 3I)X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $3x_3 = x_1 + 2x_2$ e $x_1 = 2x_2 - x_3$. Logo, o conjunto solução é da forma e,

$$S = \{x(1, 1, 1), \ x \in \mathbb{R}, \}$$

portanto, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

2.6 Teoremas

Nesta seção colocar-se-á em sequência os teoremas fundamentais para o desenvolvimento do trabalho e que simplificam o estudo do conjunto solução das equações consideradas neste trabalho.

Teorema 2.5. *Se os autovalores de uma matriz são diferentes, então os autovetores associados são linearmente independentes.*

Demonstração. Seja A uma matriz quadrada de ordem n com diferentes autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e associados aos autovetores X_1, X_2, \dots, X_n , respectivamente, assume-se que o

conjunto dos autovetores é linearmente dependente. Então, existem escalares k_1, k_2, \dots, k_n , não todos zeros, tais que $k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_nX_n = 0$.

Multiplica-se ambos os lados por $(A - \lambda_2I)(A - \lambda_3I)\dots(A - \lambda_nI)$ e utilizando a equação $(A - \lambda_iI)X_i = 0$, obtém-se: $k_1(A - \lambda_2I)(A - \lambda_3I)\dots(A - \lambda_nI)X_1 = 0$.

Como $(A - \lambda_1I)X_1 = 0$ é igual a $AX_1 = \lambda_1X_1$, pode-se reescrever a equação da seguinte forma

$k_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\dots(\lambda_1 - \lambda_n)X_1 = 0$ que implica que $k_1 = 0$, o que contradiz a hipótese. Portanto, o conjunto dos autovetores é linearmente independente.

□

Teorema 2.6. *Se A é uma matriz simétrica, então os autovalores de A são números reais.*

Demonstração. Seja A uma matriz simétrica, λ_i um autovalor de A , e X_i o autovetor associado a λ_i . Então

$$\begin{aligned}(A - \lambda_iI)X_i &= 0. \\ AX_i - \lambda_iX_i &= 0. \\ X_i^tAX_i - \lambda_iX_i^tX_i &= 0.\end{aligned}$$

Uma vez que cada autovetor é diferente de zero, $X_i^tX_i$ é um número real diferente de zero e $\lambda_i = \frac{X_i^tAX_i}{X_i^tX_i}$. Tem-se também que

$$\begin{aligned}X_i^tAX_i &= X_i^tA^tX_i \\ &= (X_i^tAX_i)^t \\ &= \overline{X_i^tA^tX_i}.\end{aligned}$$

isso é, $X_i^tA^tX_i$ é igual ao seu conjugado, e portanto, é real. Além disso, λ_i é o quociente de dois números reais, portanto é real.

□

Teorema 2.7. *Se A é uma matriz simétrica, então A possui autovetores.*

Demonstração. O seguinte argumento de cálculo será utilizado: toda função real contínua em valores reais sobre um conjunto fechado e limitado assume seu valor máximo no conjunto.

Seja A uma matriz real simétrica de tamanho $n \times n$. Define-se a função $f(x) = |\langle x, Ax \rangle|$ sobre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}, \|x\| = 1\}$. Observa-se que a esfera é fechada e limitada portanto f assume seu valor máximo $\lambda \in \mathbb{R}$ nela sobre o ponto x_0 , isto é

$$\lambda = \max\{f(x), x \in S_{n-1}\} = |\langle x_0, Ax_0 \rangle|.$$

Substituindo A por $-A$, se necessário, podemos assumir que

$$\langle x_0, Ax_0 \rangle = \lambda.$$

Mostra-se que x_0 é o autovetor de A com autovalor λ . Observa-se que $x_0 \in S_{n-1}$ também garante que $x_0 \neq 0$. Também tem-se que:

$$\begin{aligned} \langle (A - \lambda I)x_0, (A - \lambda I)x_0 \rangle &= \langle Ax_0, Ax_0 \rangle - 2\lambda \langle Ax_0, x_0 \rangle + \lambda^2 \langle x_0, x_0 \rangle \\ &= \langle Ax_0, Ax_0 \rangle - 2\lambda^2 + \lambda^2 \\ &= \langle Ax_0, Ax_0 \rangle - \lambda^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle (A - \lambda I)x_0, (A + \lambda I)x_0 \rangle &= \langle Ax_0, Ax_0 \rangle - \lambda \langle Ax_0, x_0 \rangle + \lambda \langle Ax_0, x_0 \rangle - \lambda^2 \langle x_0, x_0 \rangle \\ &= \langle Ax_0, Ax_0 \rangle - \lambda^2. \end{aligned}$$

Subtraindo as equações tem-se que:

$$\langle (A - \lambda I)x_0, Ax_0 \rangle = 0.$$

Onde

$$\langle Ax_0, Ax_0 \rangle - \lambda^2 = 0.$$

Portanto,

$$\|(A - \lambda I)x_0\| = 0,$$

e, consequentemente, $Ax_0 = \lambda x_0$. □

Teorema 2.8. *Se A é uma matriz simétrica, então os autovetores de A associados com diferentes autovalores são mutuamente vetores ortogonais.*

Demonstração. Seja A uma matriz simétrica, considera-se X_1 e X_2 os autovetores associados a dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 respectivamente. Então:

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \quad e \quad (A - \lambda_2 I)X_2 = 0;$$

isso é,

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad e \quad AX_2 = \lambda_2 X_2.$$

Multiplicando ambos os lados da primeira equação por X_2^t , tem-se

$$\begin{aligned}\lambda_1 X_2^t X_1 &= X_2^t A X_1 \\ &= X_2^t A^t X_1 \\ &= (A X_2)^t X_1 \\ &= \lambda_2 X_2^t X_1.\end{aligned}$$

Então

$$X_2^t X_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} X_2^t X_1.$$

Como λ_1 e λ_2 são números reais e distintos, $X_2^t X_1$ deve ser zero. Consequentemente, X_1 e X_2 são autovetores ortogonais. \square

2.7 Diagonalização de Matrizes

Ver-se-á como funcionam os resultados acima para obter a diagonalização de uma matriz simétrica. Começa-se então com uma matriz simétrica A de ordem $n \times n$. Denota-se por $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n na qual

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

com a entrada 1 na posição j .

Dada A sabe-se (pelos teoremas 2.6 e 2.7) que existe um autovalor λ_1 e um autovetor, que se escolhe unitário, u_1 tal que

$$A u_1 = \lambda_1 u_1.$$

Chama-se de W_1 ao subespaço gerado por $\{u_1\}$ e escolhe-se uma base ortonormal $\{v_2^1, \dots, v_n^1\}$ de W_1^\perp . Desta forma, a matriz O_1 cujas colunas são dadas por $O_1 = (u_1 | v_2^1 | \dots | v_n^1)$ é uma matriz ortogonal. Com isto, a matriz $B_1 = O_1^t A O_1$ é uma matriz simétrica. Mais ainda ela é da forma

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

com A_1 matriz simétrica de tamanho $(n-1) \times (n-1)$. De fato, ao fazer

$$\begin{aligned}\langle B_1 e_1, e_j \rangle &= e_j^t O_1^t A O_1 e_1 \\ &= \lambda_1 (O_1 e_j)^t u_1 \\ &= \begin{cases} \lambda_1 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

Como A_1 é simétrica, tem-se, novamente pelos teoremas 2.6 e 2.7, que existe um vetor unitário $u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ e um escalar λ_2 (que pode ser igual a λ_1) tal que $A_1 u_2 = \lambda_2 u_2$. Primeiramente verifica-se que se λ_1 é autovalor, caso contrário procura-se $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Observa-se também que, como a matriz O_1 é ortogonal, o autovalor de A_1 é autovalor de A . Seja W_2 é o subespaço de \mathbb{R}^{n-1} gerado por $\{u_2\}$ e escolhe-se uma base ortonormal $\{v_3^2, \dots, v_n^2\}$ de W_2^\perp . Escreve-se

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_3^2 & \cdots & v_n^2 \end{pmatrix}$$

Então, $B_2 = O_2^t O_1^t A O_1 O_2$ é uma matriz simétrica da forma

$$B_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

com A_2 simétrica. De fato, ao fazer

$$\begin{aligned} \langle B_2 e_1, e_j \rangle &= e_j^t O_2^t O_1^t A O_1 O_2 e_1 \\ &= \lambda_1 (O_1 O_2 e_j)^t u_1 \\ &= \begin{cases} \lambda_1 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pois se $j = 1$, então,

$$O_1 O_2 e_1 = O_1 e_1 = u_1,$$

e se $j > 1$ então $O_2 e_j \perp u_1$, e portanto, $O_1 O_2 e_j \perp u_1$. e

$$\begin{aligned} \langle B_2 e_2, e_j \rangle &= e_j^t O_2^t B_1 O_2 e_2 \\ &= \lambda_2 (O_2 e_j)^t \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \lambda_2 & \text{se } j = 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Observa-se que o produto $O_1 O_2$ define uma matriz ortogonal, pois

$$(O_1 O_2)(O_1 O_2)^t = O_1 O_2 O_2^t O_1^t = I.$$

Assim, tem-se novamente uma matriz simétrica A_2 de tamanho $(n-2) \times (n-2)$. Repetindo o argumento anterior n vezes, chegar-se-á a existência de n matrizes ortogonais O_1, \dots, O_n de tamanho $n \times n$ tais que

$$(O_1 \cdots O_n)^t A (O_1 \cdots O_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pela ortogonalidade das matrizes O_i tira-se que $O = O_1 \cdots O_n$ é ortogonal.

Teorema 2.9. (Teorema dos eixos principais) Dada uma matriz simétrica A de tamanho $n \times n$, existe uma matriz ortogonal O tal que a matriz $D = O^t A O$ é diagonal e as entradas da diagonal são dadas pelos autovalores de A . Mais ainda, as colunas de O estão formadas pelos autovetores de A .

Demonstração. Pelo escrito anteriormente tem-se que existe uma matriz ortogonal O e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que

$$O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Escreve-se $O = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ onde cada v_i é a coluna na posição i . Observa-se que

$$A O = (A v_1 | A v_2 | \dots | A v_n)$$

e que

$$O \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \dots | \lambda_n v_n).$$

Como

$$O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A O = O \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Então,

$$A v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

□

Exemplo 2.22. Determinar se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

é diagonalizável.

Primeiramente calcula-se os autovalores da matriz dada.

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} (-1 - \lambda)(2 - \lambda)(-\lambda) + 2 + 2 - 2(2 - \lambda) - (-1)(-1 - \lambda) - 2\lambda &= 0 \implies \\ \implies -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Como os autovalores são distintos, então os autovetores também serão. Assim, para o autovalor $\lambda_1 = 1$ tem-se que calcular $(A - 1I)X = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $x_1 = -x_2 - x_3$, portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1), x \in \mathbb{R}\}$$

Para $\lambda_2 = -1$ tem que calcular, da mesma forma $(A + 1I)X = 0$ Então:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $x_2 = -x_3$ e $x_1 = 2x_3$ portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_3(2, -1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Os vetores $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ e $(2, -1, 1)$ são linearmente independentes. Portanto a matriz, dada é diagonalizável.

3 Classificação de cônicas

3.1 Introdução

Neste capítulo se desenvolverá o principal resultado do trabalho, que é o bem conhecido teorema de Classificação de Cônicas. Começar-se-á discutindo o conceito de sistemas de coordenadas para depois passar a transformações de sistemas de coordenadas. Em particular, se estudará Rotações e Translações de coordenadas. Finalmente se dará a demonstração do resultado principal.

As referências utilizadas para a redação deste capítulo são os trabalhos de R. Santos [8] e A. Petoffrezzo [7]. Embora o tratamento da parte de sistemas de coordenadas e a demonstração do Teorema 62 sejam de composição do autor do trabalho não encontrando-se nestas referências.

3.2 Sistema de Coordenadas

Conforme exposto anteriormente, uma cônica é o conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfazem uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

na qual $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Portanto, para começar a estudar a equação, surge a seguinte pergunta: O que significa $P(x, y)$? ou melhor, como represento no plano o ponto $P(x, y)$?

Tem-se habituado ao plano euclidiano, onde se traça duas retas perpendiculares (que chamamos de eixos coordenados) e sobre elas se medem distâncias para depois achar o ponto. Embora esta construção seja visualmente satisfatória, não é a melhor para manipular a equação algébrica acima. Portanto, começar-se-á revisando o conceito de Sistema de Coordenadas.

Fixa-se \mathbb{R}^2 como espaço vetorial com o produto interno

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd.$$

O plano será identificado com \mathbb{R}^2 .

Definição 3.1. *Um sistema de coordenadas de eixos ortogonais sobre o plano \mathbb{R}^2 consiste num conjunto $S = \{O, \{v_1, v_2\}\}$ formado por um ponto O no plano, chamado origem de coordenadas, e dois vetores $\{v_1, v_2\}$ que formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 . Os eixos coordenados são identificados com os subespaços $E_1 = \text{span}\{v_1\}$ e $E_2 = \text{span}\{v_2\}$. Neste*

caso, diz-se que um ponto P no plano tem coordenadas $P(x, y)$ se o vetor \vec{OP} é escrito como combinação linear

$$\vec{OP} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2.$$

Observa-se que, segue trivialmente da definição, que O tem coordenadas $(0, 0)$. Além disso, os eixos coordenados são dados por

$$E_1 = \{P(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \quad E_2 = \{P(0, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 3.1. Considere o sistema de coordenadas canônico $S = \{O, \{\vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1)\}\}$. Neste caso

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x(1, 0) + y(0, 1) \\ &= x \vec{i} + y \vec{j}. \end{aligned}$$

Decorre disto que, x está associado a uma distância sobre o eixo associado a \vec{i} , e y sobre o eixo associado a \vec{j} . Observa-se que ao fazer o gráfico do sistema de coordenadas deve-se fazer, sobre o papel, uma escolha de um ponto e de duas direções ortogonais, assim como de uma unidade de medida. Feito isso, os pontos podem ser naturalmente caracterizados pelas suas coordenadas.

Com esta definição clara de sistema de coordenadas pode-se entender a equação da cônica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

como uma equação sobre os coeficientes das combinações lineares.

3.3 Transformações no plano

Um sistema de coordenadas é uma escolha de um conjunto $S = \{O, \{v_1, v_2\}\}$, visto acima. Cada ponto do plano é representado por $P(x, y)$ relativas a este sistema. O problema surge quando se tem um outro sistema de coordenadas $S' = \{O', \{u_1, u_2\}\}$, no qual o mesmo ponto P será representado por coordenadas $P(x', y')$. Surge então a necessidade de “traduzir” de S' para S e o procedimento para fazê-lo. Esta “tradução” será chamada de transformações de coordenadas.

Para começar precisa-se de alguma informação. Assim, supõe-se que se tem as coordenadas do ponto $O'(x_0, y_0)$ segundo o sistema S , isto é

$$\vec{OO'} = x_0 \vec{v}_1 + y_0 \vec{v}_2,$$

e que

$$\vec{u}_1 = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2 \quad \vec{u}_2 = c \vec{v}_1 + d \vec{v}_2 .$$

para números reais a , b , c e d .

Primeiramente se observa que, do fato de $\|\vec{u}_1\| = 1$, $\|\vec{u}_2\| = 1$ e $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$, tem-se que

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1 \quad \text{e} \quad ac + bd = 0.$$

Nesse caso, pode-se escrever $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$, $c = \cos(\phi)$ e $d = \sin(\phi)$ para $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$. Claramente estas escolhas de a , b , c e d satisfazem as primeiras duas equações. A terceira, pode ser escrita

$$0 = ac + bd = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) \quad (3.1)$$

$$= \cos(\theta - \phi), \quad (3.2)$$

onde $\theta = \phi + \pi/2$ e, portanto,

$$u_1 = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2 \quad u_2 = -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2.$$

Com esta informação obtém-se que as coordenadas do ponto $P(x', y')$, segundo S' , e (x, y) segundo S , se relacionam por

$$\begin{aligned} \vec{O'P} &= x'u_1 + y'u_2 \\ &= x'(\cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2) + y'(-\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2) \\ &= (x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta))v_1 + (x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta))v_2. \end{aligned}$$

Como

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P},$$

tem-se

$$\begin{aligned} xv_1 + yv_2 &= x_0v_1 + y_0v_2 + (x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta))v_1 + (x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta))v_2 \\ &= (x_0 + x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta))v_1 + (y_0 + x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta))v_2. \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ y &= y_0 + x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta). \end{aligned}$$

Ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Identifica-se duas transformações.

3.3.1 Rotação de Coordenadas

A rotação se corresponde com a mudança de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o sistema de coordenadas

$$S' = \{O, \{\cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2, u_2 = -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2\}\}.$$

A matriz

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal, chamada de matriz de rotação. Por ser uma matriz ortogonal $U^{-1} = U^t$, cada linha ou coluna dessa matriz de rotação representa um par único de vetores ortonormais. Por outro lado, se U é uma matriz ortogonal, facilmente se deduz do dito acima que existe um θ tal que a matriz se escreve dessa forma.

Graficamente vê-se que o sistema de coordenadas S' comparte origem com o sistema S mas seus eixos coordenados estão rotacionados um ângulo θ . Por isto o nome de rotação.

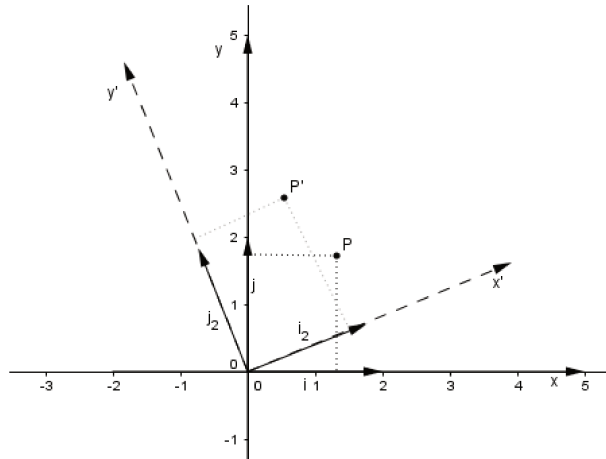


Figura 12 – Rotação

Exemplo 3.2. Determinar as coordenadas da imagem do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ sobre um ângulo de rotação de 30° a partir da origem.

Solução: Seja o ângulo de rotação $\theta = 30^\circ$, então $\sin \theta = \frac{1}{2}$ e $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A matriz de rotação pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo na forma matricial correspondente, tem-se:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a imagem do ponto P é o ponto $P' = (1, \sqrt{3})$.

Exemplo 3.3. Determinar a equação que apresenta o conjunto de pontos da imagem da equação $x^2 - xy + y^2 = 16$, sobre um ângulo de 45° a partir da origem. Seja

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a equação matricial correspondente é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Então:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, substituindo x por

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

e y por

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

na equação $x^2 - xy + y^2 = 16$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 &= 16 \\ \frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2} + \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} + \frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{x'^2}{2} &= 16 \\ \frac{3x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} &= 16. \end{aligned}$$

Ou ainda $3x'^2 + y'^2 = 32$ que representa a equação de uma elipse.

Observa-se que a mudança de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

pode também ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Escrever as rotações desta forma não acrescenta nada do ponto de vista teórico, mas do ponto de vista prático ajuda na hora de manipular expressões.

3.3.2 Translação de coordenadas

A translação se corresponde com a mudança de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o sistema de coordenadas

$$S' = \{O'(x_0, y_0), \{v_1, v_2\}\}.$$

Graficamente vê-se que o sistema de coordenadas S' tem seus eixos coordenados paralelos aos do sistema S , porém seu ponto origem está transladado como se observa na figura:

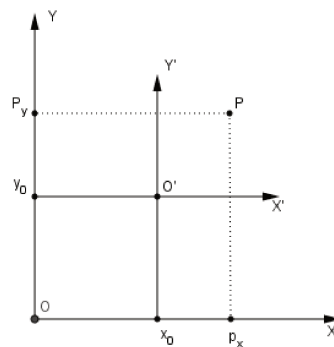


Figura 13 – Translação no plano

Na forma matricial, podemos-se escrever:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x' \\ y_0 + y' \end{pmatrix}$$

Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde $(x', y', 1)$ são as coordenadas da imagem do ponto $(x, y, 1)$. E a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz de translação.

Exemplo 3.4. *Determinar a equação que satisfaz as imagens dos pontos do conjunto $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 7 = 0$, sofrendo uma translação no plano com origem no ponto $(-1, 2)$.*

Solução: Como $x = x' + x_0$ e $y = y' + y_0$, sendo $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$, basta substituir esses dados na equação dada. Logo:

$$3(x + 1)^2 + 2(y - 2)^2 - 6(x + 1) + 8(y - 2) - 7 = 0.$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando os termos semelhantes conclui-se que a equação que satisfaz o enunciado é uma elipse tal que $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Exemplo 3.5. *Determinar as coordenadas da imagem do ponto $P(-5, -2)$ após uma translação no plano com origem no ponto $(5, 2)$.*

Solução: Baseado na teoria anterior pode-se escrever um sistema matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde $(x_0, y_0) = (-5, -2)$ e $(x, y) = (5, 2)$, então

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Após realizada a multiplicação das matrizes tem-se que o ponto $P'(0, 0)$ é a imagem do ponto $P(-5, -2)$.

Também pode-se realizar essas transformações ao mesmo tempo: rotação seguida de translação; ou translação seguida de rotação, já que suas imagens geram pontos diferentes. Considera-se os dois casos, escrevendo na forma matricial respectivamente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + x_0 \\ x\sin\theta + y\cos\theta + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + x_0\cos\theta - y_0\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta + x_0\sin\theta + y_0\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6. Encontre a imagem do ponto $P = (\frac{3-5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2})$ sofrendo uma rotação de 30° em torno da origem, seguida de uma translação em torno do ponto $(2, -1)$.

Solução: Sabendo que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e utilizando a forma matricial exposta no texto, tem-se:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3-5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}.$$

3.4 Classificação das Cônicas

Uma vez introduzidos todos os conceitos e ferramentas, parte-se para o objetivo do trabalho: estudar o conjunto solução de equações da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Primeiramente observa-se que, com a linguagem matricial, escreve-se a equação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Percebe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

chamada de matriz da secção cônica é uma matriz simétrica, ou seja, $A = A^t$.

Segundo os teoremas estudados no capítulo anterior, existe uma matriz ortogonal R tal que

$$R^t A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. A matriz R pode ser interpretada como uma matriz de rotação escrita como

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quando se considera a rotação do sistema de coordenadas, se tem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, substituindo isto na equação 3.3 se obtém

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ou, fazendo as contas,

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 & \beta \\ \alpha & \beta & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.4)$$

onde,

$$\begin{cases} \alpha = d\cos\theta - e\sin\theta \\ \beta = d\sin\theta + e\cos\theta \end{cases}$$

Tem-se uma equação sem o termo misto em xy , isto é, no novo sistema de coordenadas tendo que a cônica pode ser descrita como o conjunto de pontos $P(x', y')$ que satisfazem a equação

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' + f = 0.$$

Deve-se a partir daqui analisar dois casos.

1) Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Pode-se realizar uma translação no plano a fim de eliminar os termos em x' e y' substituindo a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\alpha}{\lambda_1} \\ 0 & 1 & -\frac{\beta}{\lambda_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo na equação 3.4, se tem

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\lambda_1} & -\frac{\beta}{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 & \beta \\ \alpha & \beta & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\alpha}{\lambda_1} \\ 0 & 1 & -\frac{\beta}{\lambda_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ou, fazendo as contas

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

onde $f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}$. Portanto, a cônica fica descrita, neste último sistema de coordenadas, como o conjunto de pontos $P(x'', y'')$ que satisfazem a equação

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Analisa-se os possíveis valores para os autovalores da matriz da secção cônica a fim de determinar qual é a cônica que a equação está representando.

Pode-se ter os seguintes casos:

- Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal e $f' \neq 0$, então a equação representa uma elipse. O caso em que os λ_i e f' tenham sinais iguais é entendido como o conjunto vazio.
- Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal e $f' = 0$ então a equação representa um ponto que é uma cônica degenerada.
- Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos e $f' = 0$ então a equação representa um par de retas concorrentes.
- Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos e $f' \neq 0$, então a equação representa uma hipérbole.

2) Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Neste caso procede-se de maneira semelhante ao caso anterior, fazendo uma translação de coordenadas, que na nossa linguagem é o mesmo que:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ao substituir isto na equação 3.4 tem-se

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 & \beta \\ \alpha & \beta & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta}{\lambda_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ou, fazendo as contas

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \alpha & 0 & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Portanto, a equação pode ser escrita no sistema $x''y''$ como:

$$\lambda_2 y''^2 + 2\alpha x'' + f' = 0.$$

Novamente, tem-se dois casos:

a) Para o caso em que $\alpha = 0$ tem-se que a equação representa um par de retas paralelas.

b) Se $\alpha \neq 0$ a equação representará uma parábola.

Desta discussão, tem-se o seguinte resultado que caracteriza os conjuntos soluções para equações polinomiais em duas variáveis de grau 2.

Teorema 3.1. *O conjunto de pontos $P(x, y)$ no plano que satisfazem a equação*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

pode ser uma das seguintes possibilidades: elipse, hipérbole, parábola, um ponto, um par de retas concorrentes, um par de retas paralelas ou o conjunto vazio.

Exemplo 3.7. Utilizando a teoria enunciada, identifique a cônica representada pela equação $x^2 + xy + y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$.

Solução: Primeiramente escreve-se a equação em sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4} &= 0 \\ 4\lambda^2 - 8\lambda + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ são as raízes da equação característica.

Pode-se concluir que, como os autovalores são diferentes de zero e possuem o mesmo sinal, essa equação pode representar uma elipse ou um ponto. Para determinar se a cônica é degenerada ou não, analisa-se agora o valor de f' . Para isso, calcula-se os autovetores respectivos aos autovalores.

Para $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ tem-se que $\left| A - \frac{3}{2}I \right| X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Onde tem-se $x_1 = x_2$, portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(1, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente tem-se que obter a norma que se dá por:

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Então divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Sabendo que $\alpha = d\cos\theta - e\sin\theta$ se tem:

$$\alpha = 2\frac{1}{\sqrt{2}} - (-3)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo, $\alpha = \frac{5}{\sqrt{2}}.$

Sabendo que $\beta = d\sin\theta + e\cos\theta$ tem-se

$$\beta = 2\frac{1}{\sqrt{2}} + (-3)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Como $f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}$ obtém-se

$$f' = 5 - \frac{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{3}{2}} - \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $f' = -\frac{13}{3}.$

Conclui-se que, como $f' \neq 0$, trata-se de uma elipse. Escreve-se sua equação que é da forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Logo, a equação da elipse é dada por

$$\frac{3}{2}x''^2 + \frac{1}{2}y''^2 - \frac{13}{3} = 0.$$

Ou ainda

$$9x''^2 + 3y''^2 = 26.$$

Exemplo 3.8. Utilizando a teoria enunciada, identifique a cônica representada pela equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 0$.

Solução: Primeiramente, escreve-se a equação em sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

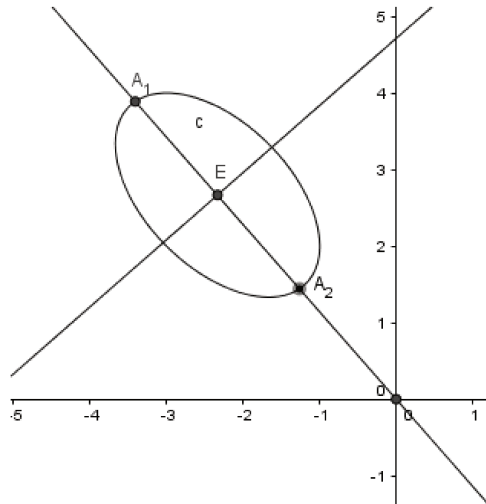


Figura 14 – Elipse

Então

$$\begin{aligned}(5 - \lambda)(5 - \lambda) - 9 &= 0 \\ \lambda^2 - 10\lambda + 16 &= 0.\end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$ são as raízes da equação característica.

Conclui-se que como os autovalores são diferentes de zero e possuem o mesmo sinal, essa equação pode representar uma elipse ou um ponto. Para determinar se a cônica é degenerada ou não, será analisado agora o valor de f' . Para isso, calcula-se os autovetores respectivos aos autovalores.

Para $\lambda_1 = 2$, tem-se $|A - 2I| X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se que $x_1 = -x_2$. Portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-1, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente tem-se que obter a norma que se dá por

$$\|(-1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Então, divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor

$$v_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Sabendo que $\alpha = d\cos\theta - e\sin\theta$, tem-se $\alpha = 0$, pois $d = e = 0$.

Sabendo que $\beta = d\sin\theta + e\cos\theta$, se tem que $\beta = 0$, pois $d = e = 0$.

Como $F = 0$ na equação dada, então $f' = 0$.

Portanto, a equação representa um ponto, uma cônica degenerada.

Escreve-se a equação na forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Logo, a equação do ponto é

$$2x''^2 + 8y''^2 = 0.$$

Exemplo 3.9. Utilizando a teoria enunciada, identifique a cônica representada pela equação $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$.

Solução: Primeiramente, escreve-se a equação em sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da seção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ -4 & -12 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(3 - \lambda)(-12 - \lambda) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 + 9\lambda - 52 = 0.$$

Os autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -13$ são as raízes da equação característica.

Pode-se concluir que, como os autovalores são diferentes de zero e tem sinais opostos, essa equação pode representar uma hipérbole ou um par de retas. Para determinar se a cônica é degenerada ou não, será analisado o valor de f' . Para isso calcula-se os autovetores respectivos aos autovalores.

Para $\lambda_1 = 4$ tem-se $|A - 4I|X = 0$, então:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se que $x_1 = -4x_2$, portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-4, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente tem-se que obter a norma que se dá por

$$\|(-4, 1)\| = \sqrt{17}.$$

Então, divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma obtendo

$$v_1 = \left(\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}} \right).$$

Sabendo que $\alpha = d\cos\theta - e\sin\theta$, se tem que $\alpha = 0$, pois $d = e = 0$.

Sabendo que $\beta = d\sin\theta + e\cos\theta$, tem-se que $\beta = 0$, pois $d = e = 0$.

Tem-se $f' = F - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}$ mas $\alpha = \beta = 0$, então $f' = F = 81$.

Portanto como $f' \neq 0$ a equação representa uma hipérbole.

Escreve-se a equação na forma de

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Logo, a equação é dada por

$$4x''^2 - 13y''^2 + 81 = 0.$$

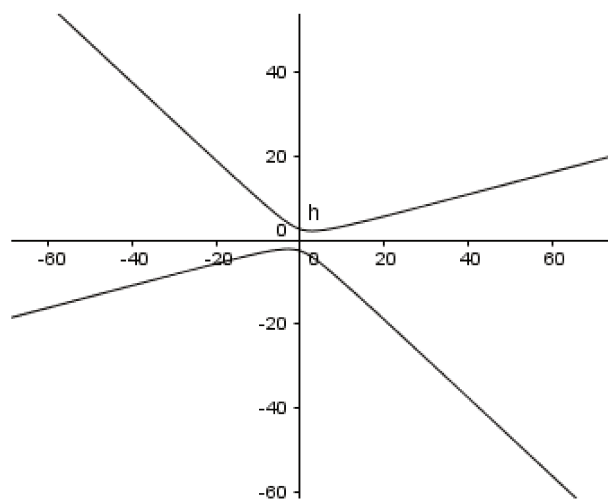


Figura 15 – Hipérbole

Exemplo 3.10. Utilizando a teoria enunciada identifique a cônica representada pela equação $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$.

Solução: Escreve-se a equação em sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -10\sqrt{10} \\ 3 & 1 & 10\sqrt{10} \\ -10\sqrt{10} & 10\sqrt{10} & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} (9 - \lambda)(1 - \lambda) - 9 &= 0 \\ \lambda^2 - 10\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$ são as raízes da equação característica.

Conclui-se que como um dos autovalores é zero, essa equação pode representar uma parábola ou um par de retas. Para definir se a equação representa uma cônica ou sua degenerada se analisa o valor de β . Para isso calcula-se os autovetores correspondentes aos autovalores.

Para $\lambda_1 = 0$ tem-se $|A - 0I|X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se que $x_2 = -3x_1$, portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_1(1, -3) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente tem-se que obter a norma que se dá por

$$\|(1, -3)\| = \sqrt{10}.$$

Então, divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

Sabendo que $\alpha = d\cos\theta - e\sin\theta$ tem-se que

$$\alpha = -10\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - 10\sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Logo, $\alpha = -40$.

Sabendo que $\beta = d\sin\theta + e\cos\theta$ tem-se que

$$\beta = -10\sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 10\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Logo, $\beta = 40$.

Como $\beta \neq 0$, então a equação é uma parábola.

Para escrever a equação da cônica, calculamos o valor de f' . Como $f' = F - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}$, substituindo os valores já calculados tem-se

$$f' = 90 - 0 - \frac{40^2}{10}.$$

Logo $f' = -70$.

Pode-se escrever sua equação que é da forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Logo, a equação da parábola é dada por

$$10y''^2 - 70 = 0.$$

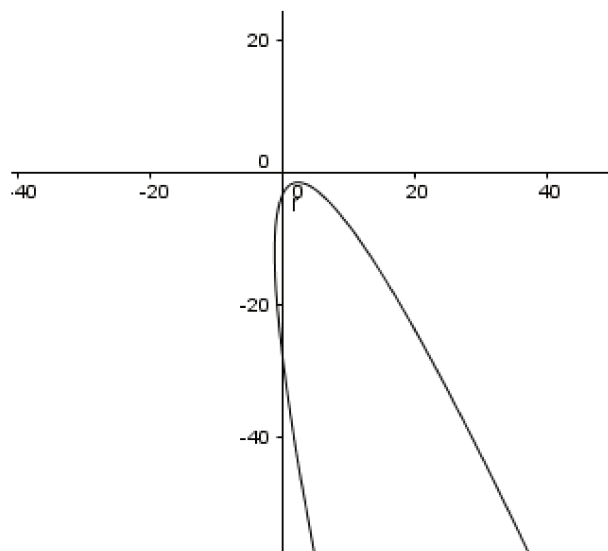


Figura 16 – Parábola

Exemplo 3.11. Utilizando a teoria enunciada, identifique a cônica representada pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$.

Solução: Primeiramente se escreve a equação na sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$ são as raízes da equação característica.

Conclui-se que como um dos autovalores é zero, essa equação representa uma parábola ou um par de retas. Para definir se ela representa a cônica ou a degenerada, analisa-se o valor de β .

Como nessa equação os valores de $D = E = 0$, não se faz necessário calcular os autovetores, pois $\beta = d \sin \theta + e \cos \theta$ e, nesse caso, $\beta = 0$. Portanto, a equação representa um par de retas.

Escreve-se sua equação na forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

De onde conclui-se

$$2x''^2 - 1 = 0.$$

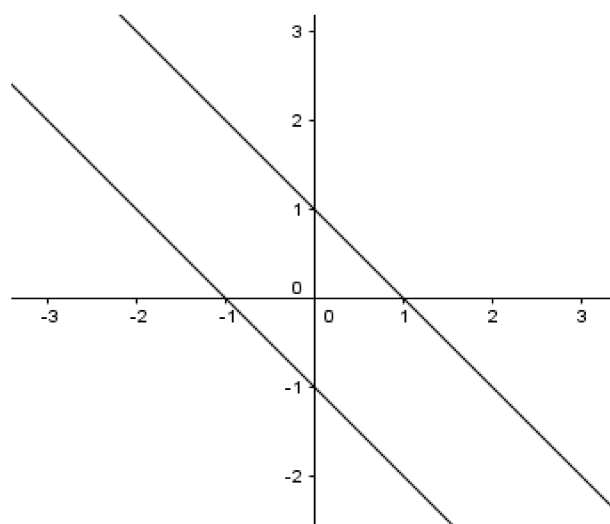


Figura 17 – Retas Paralelas

4 Plano de aula

O capítulo traz ao professor um plano de aula sobre o conteúdo deste trabalho para que ele possa abordá-lo de forma segura e embasada na teoria matemática, contendo as questões a serem propostas aos alunos e as devidas resoluções.

Este plano destina-se a alunos que estejam concluindo o ensino médio e queiram se aprofundar no tema como também para alunos que estejam no início da graduação.

As primeiras aulas destinam-se a explicação dos conceitos que diferenciam as cônicas, seguidos de exemplos e exercícios propostos. O exemplos que deverão ser utilizados para a explanação da teoria ficam a critério do professor, podendo utilizar o material proposto neste trabalho ou outro de sua preferência.

Questões a serem propostas:

1. Determine a equação da elipse, sendo os focos $F_1(-6, 0)$ e $F_2(6, 0)$ e $a = 10$.

Solução: Observa-se que os focos estão localizados sobre o eixo OX, então a equação da elipse é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como a distância focal é

$$\begin{aligned} 2c &= \text{dis}(F_1, F_2) \\ &= \sqrt{(6 - (-6))^2 + (0 - 0)^2} = 12, \end{aligned}$$

tem-se que $c = 6$.

Da relação

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

vê-se que $b = 8$. Logo, substituindo esses dados na equação reduzida se tem que

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

é a equação procurada.

2. Determine os focos da cônica de equação $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Solução: A equação da cônica em questão trata-se de uma elipse da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

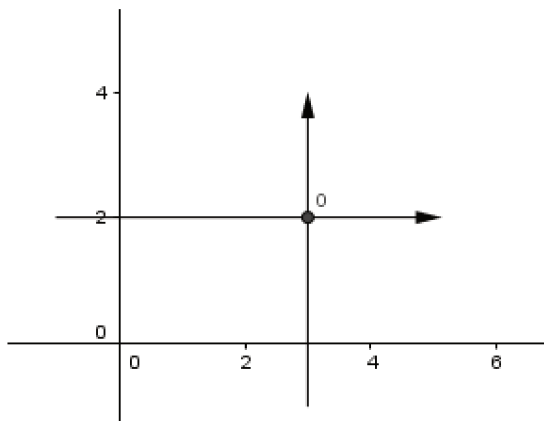


Figura 18 – Centro da elipse

Verifica-se também que o centro dessa elipse está sob o ponto $O'(3, 2)$. Além disso, o eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas. Ou seja, houve uma translação dos eixos coordenados, o centro deixou de ser o ponto $O(0, 0)$, para ser o ponto $O'(3, 2)$.

Tem-se $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, logo, $a = 5$ e $b = 3$, tendo $c = 4$.

Portanto, os focos estão deslocados 4 unidades para a esquerda e 4 unidades para a direita a partir do centro da elipse. Além disso, os focos pertencem à reta $y = 2$, então os focos são $F_1(-1, 2)$ e $F_2(7, 2)$.

3. Construa o gráfico das funções dadas e em seguida classifique-as.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solução: O centro da elipse é a origem $(0, 0)$. Como $a^2 = 25$ é o denominador de x , isto indica que o eixo maior está sobre o eixo das abscissas.

Para construir o gráfico se tem:

se $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, então $a = 5$ e $b = 3$, tendo $c = 4$.

Logo, os valores das coordenadas de $A_1 = (5, 0)$, $A_2 = (-5, 0)$, $B_1 = (0, 3)$ e $B_2 = (0, -3)$.

Portanto, a visualização do gráfico:

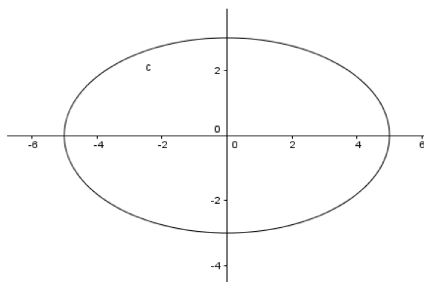


Figura 19 – Elipse

b) $x^2 - 15y^2 = 60$.

Solução: Divide-se a equação dada por 60 para deixar na forma canônica, de onde se tem

$$\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Como na hipérbole o eixo real coincide com o eixo da coordenada correspondente à variável de coeficiente positivo, no nosso caso, o eixo real é o eixo das abscissas.

Como $a^2 = 60$ e $b^2 = 4$, então $a = \sqrt{60}$ e $b^2 = 4$, tendo $c = 8$.

Logo, os valores das coordenadas de $A_1 = (\sqrt{60}, 0)$, $A_2 = (-\sqrt{60}, 0)$, $F_1 = (8, 0)$ e $F_2 = (-8, 0)$.

Portanto, a visualização do gráfico:

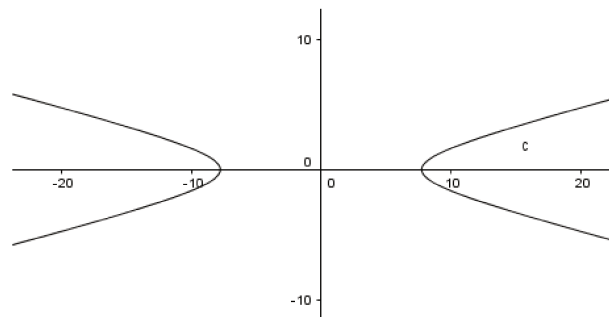


Figura 20 – Hipérbole

c) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$.

Solução: A equação dada não possui o termo y^2 , então, separa-se os termos da equação e completa-se quadrado no termo em x , a fim de visualizar a equação na forma reduzida.

A equação fica reescrita na forma:

$$x^2 - 2x + 1 = 20y + 39 + 1,$$

$$(x - 1)^2 = 20y + 40,$$

$$(x - 1)^2 = 20(y + 2).$$

A equação encontrada representa uma parábola da forma

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Segundo a teoria, a parábola tem seu vértice na coordenada $V = (1, -2)$ e da relação $4p = 20$, tem-se $p = 5$. Logo, o gráfico:

d) $y^2 + 2y - 16x - 31 = 0$.

Solução: A equação dada não possui o termo em x^2 , então, separa-se os termos da equação e completa-se quadrado no termo em y , a fim de visualizar a equação

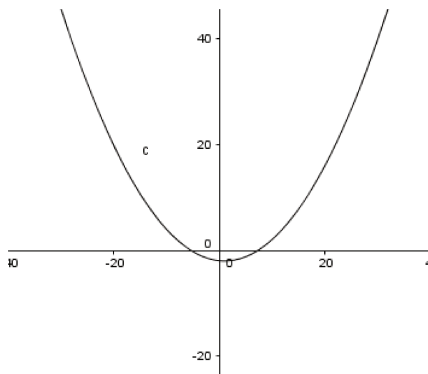


Figura 21 – Parábola

na forma reduzida:

$$\begin{aligned} y^2 + 2y + 1 &= 16x + 31 + 1, \\ (y + 1)^2 &= 16x + 32, \\ (y + 1)^2 &= 16(x + 2). \end{aligned}$$

A equação encontrada representa uma parábola da forma

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Segundo a teoria, a parábola tem seu vértice na coordenada $V = (-1, -2)$ e da relação $4p = 16$, tendo $p = 4$. Logo, seu gráfico

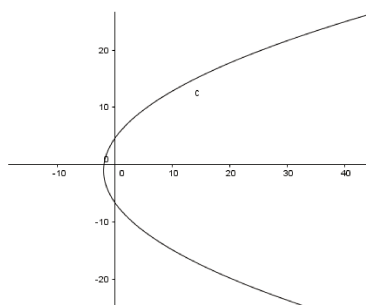


Figura 22 – Parábola

4. Determine as coordenadas do vértice da parábola cuja equação é $2x^2 + 4x + 3y - 4 = 0$.

Solução: A equação dada não tem o termo em y^2 , então manipula-se algebricamente a equação, a fim de reescrevê-la na forma reduzida, de forma que observa-se os

elementos.

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 4x + 3y - 4 &= 0 \\
 x^2 + 2x &= 2 - \frac{3y}{2} \\
 x^2 + 2x + 1 &= 2 - \frac{3y}{2} + 1 \\
 (x + 1)^2 &= 3 - \frac{3y}{2} \\
 (x + 1)^2 &= 3 \left(-\frac{y}{2} + 1 \right) \\
 (x + 1)^2 &= \frac{3}{2} (y - 2).
 \end{aligned}$$

A equação encontrada é $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ que é uma parábola. Portanto, o vértice da parábola é o ponto $V(-1, 2)$.

5. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $144y^2 - 25x^2 = 3600$.

Solução: Divide-se a equação por 3600, assim, se tem a equação da hipérbole reescrita em sua forma reduzida. Logo

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1.$$

A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Como $a^2 = 25$ e $b^2 = 144$, então $a = 5$ e $b = 12$, tendo $c = 13$.

Portanto, os focos são $F_1 = (0, 13)$ e $F_2 = (0, -13)$.

6. Considere a parábola $(y - 5)^2 = 12(x - 3)$, determine o vértice e o foco.

Solução: Sabendo que a equação da parábola em questão é

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0),$$

o vértice é dado por $(3, 5)$.

Da relação $4p = 12$, tem-se $p = 3$; valor esse, que determina a distância entre a diretriz e o foco. Então, a distância entre o foco e o vértice é $\frac{p}{2} = 1,5$, portanto o foco $F = (4, 5; 5)$.

7. Mostre que a equação $x^2 + 2y^2 - 3xy + x - 3y - 2 = 0$ representa um par de retas.

Solução: Um equação representa um par de retas quando ela pode ser fatorada na forma $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$. Para isso, calcula-se o valor de x em função de y reorganizando os termos da equação dada da seguinte forma:

$$x^2 + (-3y + 1)x + (2y^2 - 3y - 2) = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau formada:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-3y+1) \pm \sqrt{(y+3)^2}}{2}, \\x &= \frac{(3y-1) \pm (y+3)}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, as soluções da equação são $x_1 = 2y + 1$ e $x_2 = y - 2$.

A forma fatorada de uma equação do segundo grau é $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Logo,

$$1(x - 2y - 1)(x - y + 2) = 0,$$

é a forma fatorada da equação que representa um par de retas, sendo uma delas

$$x - 2y - 1 = 0,$$

e a outra

$$x - y + 2 = 0.$$

8. Qual a representação gráfica no plano cartesiano de $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$?

Solução: Completa-se os quadrados perfeitos, já que essa equação não tem o termo misto em xy :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 &= 0 \\x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= -10 + 9 + 1 \\(x - 1)^2 + (y - 3)^2 &= 0.\end{aligned}$$

A solução para essa equação é o ponto $P = (1, 3)$.

A sequência de exercícios que seguem se trata dos conceitos abordados no capítulo 2 desse trabalho, no qual pretende-se que o aluno estude os conceitos fundamentais dos tópicos de matrizes, autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes.

1. Dada as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix},$$

calcule:

- a) $A+B$

b) B-C

Solução: Para que se possa efetuar as operações de adição e subtração de matrizes se faz necessário que elas sejam de mesma ordem. Como esse fato se verifica, se resolve a questão somando ou subtraindo os elementos correspondentes:

a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 3+5 \\ 4+0 & -2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b)

$$B - C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 & 5-2 \\ 0-(-7) & 7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

obtenha a matriz X tal que $X = A + A^t$.

Solução: É necessário lembrar que a operação da transposição é aquela que troca as linhas pelas colunas de uma matriz, sendo assim, a transposta da matriz A , designada por A^t é dada por:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para obter a matriz X , basta resolver a adição de $A + A^t$:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Dada as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

calcule $3A - 2B$.

Solução: Calcula-se o produto das matrizes pelos escalares 2 e 3, para então subtrair os resultados. Logo:

$$3A - 2B = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 18 & 12 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 18 & -2 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 11 \\ 18 & 8 & -25 \end{pmatrix}.$$

4. Calcule a e b de modo que

$$a \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -23 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Solução: Como a e b são os escalares que estão multiplicando as matrizes antes da adição acontecer, se efetua essa operação:

$$\begin{pmatrix} -a & 2a \\ 3a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -3b \\ 2b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -23 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calculando a adição das matrizes:

$$\begin{pmatrix} -a + b & 2a - 3b \\ 3a + 2b & 0 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -23 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Para que a igualdade das matrizes seja verificada é necessário que todos os elementos correspondentes sejam iguais, então tem-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} -a + b &= 9 \\ 2a - 3b &= -23 \\ 3a + 2b &= -2 \\ -b &= -5. \end{aligned}$$

Na quarta equação $b = 5$. Substituindo na primeira equação $a = -4$.

O estudante pode ainda substituir os valores encontrados nas outras duas equações a fim de verificar a sua solução.

5. Efetue, se possível, o produto entre as matrizes.

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deve-se verificar primeiro que para que a multiplicação de duas matrizes A e B seja possível, para isto, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B . Só será possível resolver os itens a e b, já que no item c a definição não se verifica. Portanto:

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 - 2(-2) \\ 7 \cdot 1 + 3(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1(-1) + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

6. Verifique a ortogonalidade da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Solução: Para responder a essa questão verifica-se $A \cdot A^t = I$. Então:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Escreva a equação característica, e calcule os autovalores e autovetores para cada item. Em particular, calcule os autovetores unitários.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A equação característica da matriz A é dada por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Onde:

$$\begin{aligned}(5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda + 36 &= 0.\end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 4$ são as raízes da equação característica. Cada autovalor tem um respectivo autovetor correspondente, calcula-se separadamente cada autovalor. Para $\lambda_1 = 9$:

$$|A - 9I| X = 0.$$

O que equivale a:

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Onde tem-se que $x_2 = 2x_1$, portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_1 (1, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por:

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{5}.$$

Então, divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Seguindo as mesmas etapas para $\lambda_2 = 4$ escreve-se

$$|A - 4I| X = 0.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se que $x_1 = -x_2$. Portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-2, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por:

$$\|(-2, 1)\| = \sqrt{5}.$$

Então, divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo

$$v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação característica é:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ são as raízes da equação característica. Cada autovalor tem um respectivo autovetor correspondente, calcula-se separadamente para cada um. Para $\lambda_1 = 0$:

$$|A - 0I| X = 0,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se que $x_1 = x_2$. Portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_1(1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por:

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Então divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma obtendo

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Seguindo as mesmas etapas para $\lambda_2 = 2$:

$$|A - 2I| = 0,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se que $x_2 = -x_1$, logo, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_1(1, -1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por:

$$\|(1, -1)\| = \sqrt{2}.$$

Então divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma obtendo

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

8. Verifique se é diagonalizável a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução: Calcula-se os autovalores da matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Então:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^2 - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. Como os autovalores são distintos, os autovetores também serão. Assim para o autovalor $\lambda_1 = -1$ calcula-se $(A + I)X = 0$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde $x_1 = x_2$, e, portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_1(1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_2 = 3$ calcula-se $(A - 3I)X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde $x_1 = -x_2$, e, portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-1, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Como os vetores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são linearmente independentes, a matriz dada é diagonalizável.

A matriz diagonal D é a matriz composta pelos autovalores de A . Assim:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Conclui-se o plano de aula deste material com alguns exercícios sobre o conteúdo estudado no capítulo 3. Trata-se de questões que englobam translações e rotações de pontos inicialmente e posteriormente de cônicas, bem como questões que tratam da classificação das cônicas, objetivo deste trabalho.

1. Determine a equação que representa o conjunto de pontos da imagem da equação $2x^2 - 3y^3 = 1$, tendo sofrido uma rotação de um ângulo de 45° em relação a origem.

Solução: Tem-se $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, escreve-se a matriz de rotação correspondente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Querendo os novos valores para x e y , reescreve-se a equação matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{aligned}$$

Substituindo na equação $2x^2 - 3y^2 = 1$:

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 1.$$

Desenvolvendo e simplificando os termos semelhantes, o resultado é a equação

$$-x'^2 + 10x'y' - y'^2 = 2.$$

2. Determine as coordenadas da imagem do ponto $P(3, -4)$ após uma translação no plano em torno do ponto $(5, 2)$.

Solução: Sabendo que uma translação no plano pode ser descrita pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto P . Resolve-se a equação:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, no novo sistema de coordenadas o ponto $P = (8, -2)$ é a imagem de $P(3, -4)$ após realizada a translação no plano em torno do ponto $(5, 2)$.

3. Determine as coordenadas da imagem do ponto $P(3+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2})$ após uma translação no plano com origem no ponto $(-3, -4)$ seguida por uma rotação do plano em torno da origem de um ângulo θ de 45° .

Solução: Sabendo que uma translação no plano seguida de uma rotação pode ser descrita pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então, a imagem do ponto $P(3 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$, é o ponto P' , onde:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} \\ 4 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} \\ 4 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A imagem do ponto $P(3 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$ após as transformações é o ponto $P' = (2, 0)$.

4. Seja a quadrática $x^2 - 2xy + y^2 = 0$. Escreva sua forma matricial correspondente, encontre a mudança de coordenadas e o novo sistema na qual a equação pode ser escrita na sua forma elementar.

Solução: A equação pode ser escrita na forma matricial correspondente a:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

onde $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Considerando a matriz canônica A , a equação característica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ são as raízes da equação característica. Como, cada autovalor tem um autovetor correspondente, para $\lambda_1 = 0$, se tem

$$|A - 0I| X = 0,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

De onde tem-se $x_1 = x_2$, e, portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_1(1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente, deve-se obter a norma que se dá por

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Então, divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Seguindo as mesmas etapas para $\lambda_2 = 2$:

$$|A - 2I| X = 0,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se $x_1 = -x_2$ portanto o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-1, 1) \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente, deve-se obter a norma que se dá por

$$\|(-1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma obtendo

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Segundo o estudo dos capítulos anteriores, a escrita matricial e canônica se dá pela seguinte multiplicação:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x'^2.$$

5. Identifique a cônica representada pela equação e reescreva em sua forma simplificada.

a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$

Solução: Sabendo que a escrita matricial dessa equação é da forma

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & d \\ \frac{b}{2} & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

onde $a = 5$, $b = 4$, $c = 8$, $d = e = 0$, e $f = -36$, se tem:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

então:

$$\begin{aligned} (5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda + 36 &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 4$ são as raízes da equação característica.

Conclui-se que como os autovalores são diferentes de zero e possuem mesmo sinal, logo, essa equação pode representar uma elipse ou um ponto. Para determinar se a cônica é degenerada ou não, analisa-se agora o valor de f' . Para isso, calcula-se os autovetores respectivos aos autovalores.

Para $\lambda_1 = 9$ tem-se $|A - 9I| X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Tem-se $x_2 = 2x_1$, portanto o conjunto solução é da forma:

$$S = \{x_1(1, 2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente, deve-se obter a norma que se dá por:

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{5}.$$

Divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Como $D = E = 0$, então $\alpha = \beta = 0$.

Portanto, $f' = -36$. Conclui-se, que como $f' \neq 0$, trata-se de uma elipse. Escreve-se a equação na forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Logo, a equação da elipse é dada por

$$9x''^2 + 4y''^2 - 36 = 0.$$

Ou ainda,

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Segue a visualização gráfica:

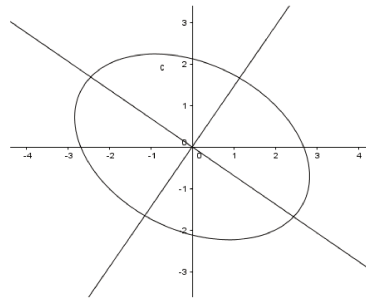


Figura 23 – Elipse

b) $x^2 - 12xy - 4y^2 = 0$.

Solução: Sabendo que a escrita matricial dessa equação é da forma

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & d \\ \frac{b}{2} & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

onde $a = 1$, $b = -12$, $c = -4$, $d = e = f = 0$:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -6 \\ -6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(-4 - \lambda) - 36 &= 0 \\ \lambda^2 + 3\lambda - 40 &= 0. \end{aligned}$$

Os autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -8$ são as raízes da equação característica.

Conclui-se que, como os autovalores são diferentes de zero e tem sinais opostos, essa equação pode representar uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

Para determinar se a cônica é degenerada ou não, analisa-se agora o valor de f' . Para isso, calcula-se o valor dos autovetores respectivos.

Para $\lambda_1 = 5$ tem-se $|A - 5I| X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde tem-se $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$, e, portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \left\{ x_1 \left(1, -\frac{2}{3} \right); x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por

$$\left\| \left(1, -\frac{2}{3} \right) \right\| = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Dividindo as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtém-se o vetor

$$v_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{13} \right).$$

Como $D = E = F = 0$, então $\alpha = \beta = 0$ e $f' = 0$. Portanto, trata-se de um par de retas concorrentes.

Escreve-se a equação na forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - f' = 0.$$

A equação é dada por

$$5x''^2 - 8y''^2 = 0.$$

c) $x^2 - 2xy + y^2 + 4y = 0.$

Solução: Reescreve-se a equação em sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

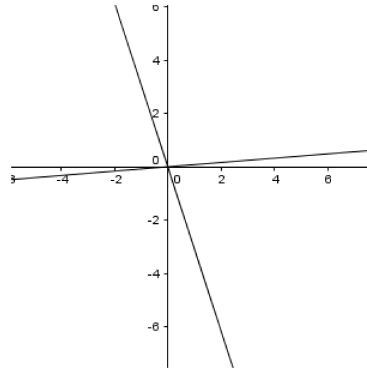


Figura 24 – Retas

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ são as raízes da equação característica.

Como um dos autovalores é zero, a equação representará uma parábola ou um par de retas.

Para determinar se é uma cônica ou um caso degenerado, analisa-se o valor de β , pois se $\beta \neq 0$ é uma parábola, e se $\beta = 0$ é um par de retas.

É necessário primeiro calcular os autovetores correspondentes aos autovalores.

Para $\lambda_1 = 0$ tem-se $|A - 0I| X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde tem-se $x_1 = x_2$. Portanto, o conjunto solução é da forma:

$$S\{x_1(1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por:

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

Divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Consegue-se descobrir que o ângulo de rotação sofrido por essa cônica, degenerada ou não é de $\theta = 45^\circ$, sendo o $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Finalmente, calcula-se o valor de β , que é dado por

$$\beta = d \operatorname{sen} 45^\circ + e \cos 45^\circ$$

Então,

$$\begin{aligned}\beta &= 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Como $\beta \neq 0$, então a equação representa uma parábola.

Para escrever sua equação, calcula-se o valor de α que se dá pela equação

$$\alpha = d \cos 45^\circ - e \operatorname{sen} 45^\circ.$$

Então:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha &= -2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

O valor de f' é dado pela equação

$$f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}$$

Então

$$\begin{aligned}f' &= 0 - 0 - \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ f' &= -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Escreve-se a equação na forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - f' = 0.$$

Logo, a equação é dada por:

$$2y''^2 + \sqrt{2} = 0.$$

d) $-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0.$

Solução: Reescreve-se a equação em sua forma matricial correspondente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 & \sqrt{5} \\ 4 & -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

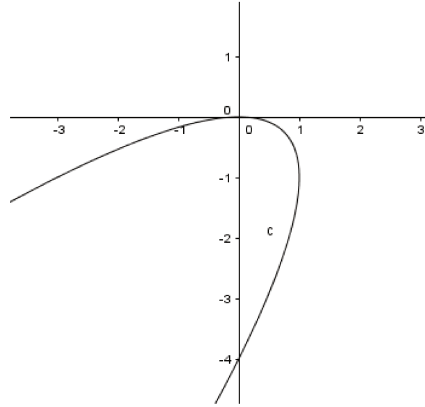


Figura 25 – Parábola

A equação característica da matriz da secção cônica é dada por:

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & 4 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-7 - \lambda)(-1 - \lambda) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0.$$

Os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -9$ são as raízes da equação característica.

Como esses são valores são distintos e possuem sinais opostos, tem-se uma hipérbole ou um par de retas.

Para determinar se temos a cônica ou um caso degenerado, analisa-se o valor de f' . Se $f' \neq 0$, se tem a hipérbole, se $f' = 0$, a reta.

Para isso, é necessário calcular os autovetores correspondentes aos autovalores.

Então, para $\lambda_1 = 1$ tem-se $(A - 1I)X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde tem-se $x_2 = 2x_1$, e, portanto, o conjunto solução é na forma:

$$S = \{x_1(1, 2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Para o cálculo do autovetor unitário correspondente deve-se obter a norma que se dá por

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{5}.$$

Divide-se as coordenadas do conjunto solução pela norma, obtendo o vetor

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Para $\lambda_2 = -9$ tem-se $(A + 9I)X = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde tem-se $x_1 = -2x_2$, e, portanto, o conjunto solução é da forma

$$S = \{x_2(-2, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Dividindo as coordenadas do conjunto solução pela norma:

$$v_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Sabendo que $\alpha = d\cos\theta - e\sin\theta$ obtém-se

$$\alpha = \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Logo, $\alpha = 3$.

Sabendo que $\beta = d\cos\theta - e\sin\theta$:

$$\beta = \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Logo, $\beta = 3$.

Como $f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}$:

$$f' = 0 - \frac{(-1)^2}{1} - \frac{3^2}{(-9)}.$$

Logo, $f' = -8$. Conclui-se que como $f' \neq 0$, trata-se de uma hipérbole.

Escreve-se a equação que na forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

A equação da hipérbole é dada por:

$$1x''^2 - 9y''^2 - 8 = 0.$$

Ou ainda,

$$x''^2 - 9y''^2 = 8.$$

Obtendo a visualização gráfica abaixo:

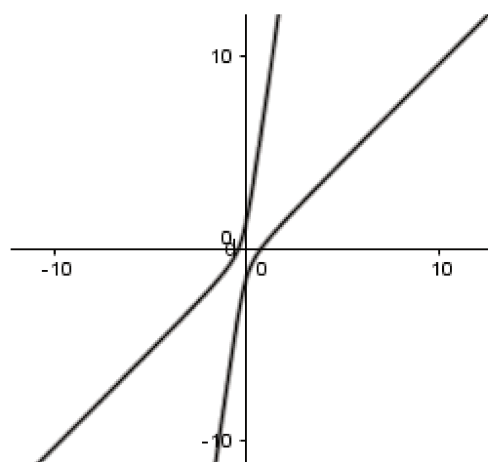


Figura 26 – Hipérbole

5 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo principal o estudo do conjunto solução de equações de segundo grau na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, utilizando das ferramentas da álgebra linear.

Mostra-se que tais soluções referem-se às cônicas: elipses, hipérboles e parábolas, bem como as cônicas degeneradas, ponto ou retas.

A partir das ferramentas da álgebra linear, estuda-se o espaço das matrizes a fim de reescrever a equação na forma matricial e, com isso, mostrar que a equação que dirige a cônica é uma matriz simétrica e que ela pode ser sempre diagonalizável.

Outras transformações no plano se fizeram necessárias para simplificar a equação quando $B \neq 0$. Para realizar essas transformações do espaço \mathbb{R}^2 se fez necessário o estudo das transformações nos eixos coordenados, como a translação e a rotação. Assim a equação em estudo ficaria mais simples de ser estudada e, com isso, a cônica seria mais facilmente identificada.

A abordagem do tema foi feita de forma simples, mas embasada em fundamentações teóricas e com exemplos a cada novo tópico, a fim de facilitar a compreensão do leitor.

Espera-se que este trabalho contribua para a formação do estudante do ensino médio, que hoje, encontra-se defasada no assunto; também possa servir de norte aos alunos no início da graduação, onde a linguagem matemática muitas vezes se torna complexa e de difícil compreensão.

Referências

- [1] Boulos, Paulo & Camargo, Ivan de. *Geometria Analítica um tratamento vetorial*, (Makron books do Brasil Editora LTDA), 1987.
- [2] Hoffman, K. & Kunze, R. *Linear Algebra*. Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [3] Iezzi, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 7*, (Atual Ed), 2005.
- [4] Lang, Serge. *Álgebra Linear*. Editora Ciência Moderna, 2003.
- [5] Lima, Elon Lages. *Coleção Matemática Universitária*. Rio de Janeiro, 2005.
- [6] Machado, Antonio dos Santos. *Matemática - Temas e Metas Vol. 5 -Geometria Analítica e Polinômios*, (Atual Ed), 1986.
- [7] Pettofrezzo, Anthony J. *Matrices and Transformation*. Dover Publications, New York, 1978.
- [8] Santos, Reginaldo J. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, 2010.