

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM
ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NEWTONIANOS
ATRAVÉS DE TUBOS CILÍNDRICOS POROSOS

DARIO FIORENTINI

Orientador

Prof.Dr. RAKESH KUMAR BHATNAGAR

Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática Aplicada.

Agosto - 1980.

Classif.	<u>I</u>
Autor	<u>FS12d</u>
V	Ex
Ex.	
Tombo BCI	<u>3605</u>

CM-00030756-2

MINHA GRATIDÃO

Ao Prof. Dr. Rakesh Kumar Bhatnagar pela sugestão dos problemas e pela paciente orientação.

A Profa.Dra. Maria Cristina Cunha Bezerra pela revisão final deste trabalho.

Ao Prof. e amigo Fernando Prado pelos conselhos e pelo apoio.

Ao Prof. Dr. Hugo Torriani pelos valiosos ensinamentos.

A Universidade de Passo Fundo nas pessoas do Pe.Alcides, Pe. Eli, Prof. Spalding e Prof. Lauro pela oportunidade da realização do curso.

A Reynaldo e Antonio Carlos pelo auxílio na plotagem dos gráficos.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram e me incentivaram.

À minha esposa, Dora

A meus pais, José e Maria

A meus irmãos

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
----------------------	---

CAPÍTULO I

1.1 - INTRODUÇÃO À TEORIA DE PERTURBAÇÕES	1
1.2 - INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES GERAIS DO ESCOAMENTO	6
1.2.1 - Equação da Continuidade	8
1.2.2 - Equações do Movimento	9
1.2.3 - Equações de Navier-Stokes	11
1.2.4 - Equação da Energia	12

CAPÍTULO II

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO ATRAVÉS DE UM TUBO CILÍNDRICO POROSO.

2.1 - INTRODUÇÃO	16
2.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	17
2.3 - REDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO	18
2.4 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO	21
2.5 - REDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA	25
2.6 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA	27
2.6.1 - Solução da Equação (2.54)	29
2.6.2 - Solução da Equação (2.55)	30
2.6.3 - Solução da Equação (2.56)	32
2.7 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	34

CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO ATRAVÉS DE UM TUBO ANELADO COM PAREDES POROSAS.

3.1 - INTRODUÇÃO	52
3.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	52
3.3 - REDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO	54
3.4 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO	55
3.5 - REDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA	56
3.6 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA	57
3.7 - DISTRIBUIÇÃO MÉDIA DE TEMPERATURA	59
3.8 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	
BIBLIOGRAFIA	73

INTRODUÇÃO

A preocupação fundamental do presente trabalho é discutir as soluções das equações de Navier-Stokes e da Energia para fluidos Newtonianos em tubos cilíndricos porosos. Esse estudo é realizado especificamente nos capítulos II e III.

O capítulo I aborda elementarmente a teoria de perturbações, objetivando justificar o seu emprego na solução das equações de Navier-Stokes e da Energia no capítulo II. Ainda, neste capítulo, apresentamos as equações gerais do escoamento. Partimos das equações integrais e as reduzimos a equações diferenciais procurando sempre restringi-las às condições dos problemas apresentados nos capítulos subsequentes.

No capítulo II, analisamos a distribuição de temperatura em um escoamento laminar permanente de um fluido Newtoniano através de um tubo cilíndrico poroso. Além disso, assumimos que a temperatura é constante na parede do tubo e finita ao longo do eixo. Não foi possível, aqui, encontrar soluções exatas das equações. Assim, fizemos uso do método clássico de perturbações para obter a solução aproximada da Equação da Energia. Foi escolhido como parâmetro de perturbação o número adimensional de Reynolds, R . Por conseguinte, nossa solução é válida para $|R| < 1$. Mormente, esta escolha faz sentido, uma vez que R é um parâmetro responsável pela intensidade de sucção ou injeção de fluido pelos poros. No final do capítulo II discutimos os resultados graficamente. Estas figuras, bem como as do capítulo III, foram plotadas pelo Plotter Calcomp cilíndrico do Dec System 10 do Centro de Computação da UNICAMP.

No capítulo III, estudamos a distribuição de temperatura em um escoamento laminar permanente de um fluido Newtoniano através de um tubo anelado poroso, onde as paredes dos tubos mantêm-se a temperaturas constantes. Assumimos ainda que a razão de injeção de fluido numa parede é igual à razão de sucção de fluido noutra parede. Esta condição possibilita exibir soluções analíticas exatas das equações de Navier-Stokes e da Energia. A solução da equação da Energia, como no problema anterior, envolve quatro parâmetros físicos e o resultado da variação dos mesmos é apresentado graficamente no final do capítulo.

Notemos que o escoamento de Poiseuille em tubos cilíndricos não-porosos constitui-se num caso particular dos problemas aqui considerados bastando, para isso, fixar $R = 0$.

CAPÍTULO I

Neste capítulo, primeiramente, apresentamos uma idéia elementar das mais simples e usual técnica de aproximação; a expansão da solução de uma equação diferencial em séries de potências de um parâmetro: A TÉCNICA CLÁSSICA DE PERTURBAÇÃO, a qual será usada no capítulo II desta pesquisa.

Em segundo lugar introduzimos as equações gerais de escoamento. Partimos das equações integrais reduzindo-as a equações diferenciais, as quais serão empregadas nos capítulos II e III.

1.1 - INTRODUÇÃO À TEORIA DE PERTURBAÇÕES

Grande parte dos problemas de origem física exibidos sob determinadas características, tais como, não-linearidade, coeficientes variáveis, formas complicadas de contorno e condições de contorno não-lineares de equações diferenciais, não possuem solução analítica exata. Assim, a fim de obter informações sobre as soluções, somos forçados a recorrer a aproximações, soluções numéricas ou combinações de ambas.

Como veremos, os métodos de aproximação são, antes de tudo, métodos de perturbação (assintótica). Isto é, a solução é apresentada pelos primeiros termos de uma expansão assintótica obtida em torno de um parâmetro (pequeno ou grande), o qual aparece naturalmente nas equações ou então pode ser introduzido artificialmente.

A TÉCNICA FUNDAMENTAL DE PERTURBAÇÃO DE PARÂMETROS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Consideremos a equação diferencial ordinária não-linear e não-homogênea de ordem n ,

$$y^{(n)}(x) + g_1 \left(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \dots, y'(x), y(x), x \right) + \dots + g_{n-1} \left(y'(x), y(x), x \right) + g_n \left(y(x), x \right) = v(x) \quad (1.1)$$

que por simplicidade reescrevemos como

$$F(y) = v(x) , \quad (1.2)$$

onde F é um operador diferencial.

Seja L um operador diferencial linear e

$$L(y) = v \quad (1.3)$$

uma equação diferencial linear auxiliar de (1.2) e de mesma ordem, tal que é possível explicitar por processos usuais a solução

$$y = T(v) . \quad (1.4)$$

Podemos, então, escrever (1.2) na forma

$$L(y) + \left(F(y) - L(y) \right) = v . \quad (1.5)$$

Definindo a nova função

$$N(y) = F(y) - L(y) , \quad (1.6)$$

escrevemos (1.5) como

$$L(y) = v + N(y) . \quad (1.7)$$

Introduziremos agora um parâmetro ε , tal que

$$L(y) = v + \varepsilon N(y) . \quad (1.8)$$

Notemos que se $\varepsilon = 0$, caímos na equação (1.3) cuja solução por (1.4) é

$$y(x) = T(v) \equiv y_0(x) . \quad (1.9)$$

Suponhamos que (1.8) tenha uma solução na forma

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots, \quad (1.10)$$

ou seja, uma expansão em série de potências em torno de $\varepsilon = 0$ com coeficientes $y_k(x)$ independentes de ε .

Desde que L seja linear e assumindo que N seja analítica, temos por (1.10) que

$$L(y) = L(y_0) + \varepsilon L(y_1) + \varepsilon^2 L(y_2) + \dots \quad (1.11)$$

e

$$N(y) = N(y_0) + \varepsilon N_1(y_0, y_1) + \varepsilon^2 N_2(y_0, y_1, y_2) + \dots \quad (1.12)$$

Substituindo (1.11) e (1.12) em (1.7), temos

$$L(y_0) + \varepsilon L(y_1) + \varepsilon^2 L(y_2) + \dots = v + \varepsilon N(y_0) + \varepsilon^2 N_1(y_0, y_1) + \dots \quad (1.13)$$

Comparando, agora, os coeficientes de cada potência de ε temos o sistema de equações

$$\begin{aligned} L(y_0) &= v(x) \\ L(y_1) &= N(y_0) \\ L(y_2) &= N_1(y_0, y_1) \\ &\dots \\ L(y_{k+1}) &= N_k(y_0, y_1, \dots, y_k), \end{aligned} \quad (1.14)$$

que é resolvido recursivamente, pois a determinação de $y_k(x)$ envolve conhecimento apenas de $y_n(x)$ ($0 \leq n \leq k-1$).

Da primeira equação obtemos uma aproximação de grau zero, constituindo para (1.8) uma solução de aproximação linear,

$$y^{(0)}(x) = y_0(x) = T(v(x)). \quad (1.15)$$

Da segunda equação, obtemos uma aproximação de grau um,

$$y^{(1)}(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) = T(v(x)) + \epsilon T(N(T(v(x)))) \quad (1.16)$$

e assim por diante, até o grau de aproximação conveniente.

A série infinita (1.10), cujos coeficientes são determinados por (1.14) é chamada uma solução formal da equação (1.8). Para se obter uma solução formal de (1.7), basta fixar $\epsilon = 1$.

Num grande número de situações, este parâmetro ocorre naturalmente, representando diversos parâmetros físicos como o número adimensional de Reynolds (R), em Mecânica dos Fluidos; a intensidade de um choque; constantes físicas como a constante de Planck (h) ou a amplitude de um termo forçante. Nestes casos podemos escrever a equação (1.1) perturbada na seguinte forma:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x, \epsilon) = 0, \quad (1.17)$$

com a condição de que F é uma equação diferencial linear de ordem " n " no limite quando ϵ tende a zero. Essa linearidade limite é que possibilita realizar o processo de perturbação.

Deste modo, em torno de $\epsilon = 0$, (1.17) se escreve como

$$F(y^{(n)}, \dots, y', y, x, 0) + \epsilon \cdot \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(y^{(n)}, \dots, y', y, x, 0) + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon^2}(y^{(n)}, \dots, y', y, x, 0) + \dots = 0 \quad (1.18)$$

É fácil ver que (1.18) é uma equação diferencial da forma

$$L(y) - v(x) + \epsilon N(y) + \epsilon^2 M(y) + \dots = 0, \quad (1.19)$$

onde M é também analítica.

Sendo (1.19) uma equação equivalente a (1.8), seu procedimento de resolução é análogo.

Convém ressaltar que, no que se refere a teoria de perturbações, não existe infelizmente na literatura uma grande coleção de resultados rigorosamente estabelecidos. Existem muitos problemas em aberto, tais como:

- (1) condições necessárias e/ou suficientes para que a série infinita de (1.10) convirja e realmente represente uma solução de (1.7);
- (2) se as séries convergem, que estimativas da razão de convergência podemos dar e que técnicas podemos usar para acelerar a convergência;
- (3) se o problema apresenta naturalmente o parâmetro ε , como obter uma solução de (1.8) para grandes valores do parâmetro ε ?

Quanto ao último item, Yuan [2] em sua pesquisa sobre escoamento laminar permanente em canais com paredes porosas utilizou, como solução de seu problema, a expansão em série de potências desenvolvida perto de $1/R = 0$, obtendo um resultado, para grandes valores do parâmetro R , que mostrou ser melhor que outros métodos numéricos.

Embora tenhamos falado somente da aplicação do método a equações diferenciais ordinárias, na verdade, ele também é aplicado em equações diferenciais parciais. Veja capítulo II, item 2.6.

Maiores informações sobre essa teoria são encontradas nas referências [12], [16] e [17].

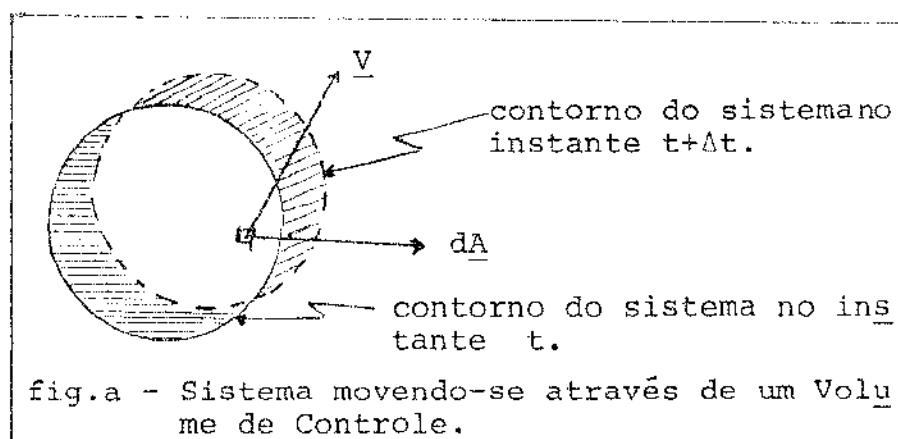
1.2 - INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES GERAIS DO ESCOAMENTO

Em qualquer escoamento de um fluido existem cinco variáveis básicas, isto é, três componentes de velocidade e duas componentes termodinâmicas. Assim, podemos exibir cinco equações básicas que descrevem o escoamento,

- (a) a equação da continuidade;
- (b) três equações de movimento;
- (c) a equação da energia.

Existem dois pontos de vista pelos quais podemos usar o campo de velocidade para se obter as equações. O ponto de vista Euleriano permite-nos observar o movimento das partículas em escoamento que passam por uma posição fixa do espaço, enquanto o Lagrangeano segue uma partícula analisando seu comportamento individual.

Fixando-nos ao primeiro ponto de vista, o qual nos leva ao uso do método de Volume de Controle (fig. a), obtemos as seguintes equações integrais



(a) Equação da Continuidade:

$$\oint_{SC} \rho \underline{V} \cdot d\underline{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV. \quad (1.20)$$

(b) Equações do Movimento :

$$\underline{F}_S + \iiint_{VC} \underline{B} dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \underline{V} (\rho dv) + \oint_{SC} \underline{V} (\rho \underline{V} \cdot d\underline{A}) . \quad (1.21)$$

(c) Equação da Energia:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} e \rho dv + \oint_{SC} e \rho \underline{V} \cdot d\underline{A} , \quad (1.22)$$

onde ρ é a densidade do fluido; \underline{V} é o vetor de velocidade; $d\underline{A}$ é a normal externa à superfície de controle; v é o volume; VC é o volume de controle fixo no espaço e limitado pela superfície de controle (SC); \underline{F}_S é a força total de contato; \underline{B} é a força de campo também chamada externa (como gravidade, campo magnético, etc.) por unidade de volume; Q é a quantidade de calor adicionado ao sistema; W é o trabalho realizado pelo sistema e "e" é a energia total associada à massa do sistema e compreende três partes, $e = U/m + v^2/2 + gz$, onde U é a energia interna associada ao comportamento molecular atômico, " $mv^2/2$ " é a energia cinética e " mgz " é a energia potencial.

A equação (1.20), também chamada Equação de Conservação de Massa, fisicamente quer dizer que "a vazão em massa para fora

da SC é igual ao decréscimo de massa no interior do VC na unidade de tempo".

A equação (1.21) fundamenta-se na segunda lei de Newton e diz que "o somatório das distribuições de forças de contato, agindo sobre SC, e de campo agindo no fluido existente no interior do VC é igual ao somatório das razões da variação da quantidade de mo

vimento, no interior do VC, e de efluxo da quantidade de movimento, através da SC".

A equação (1.22) baseia-se na primeira lei da termodinâmica e estabelece que "a diferença entre a quantidade de calor adicionada ao sistema e o trabalho total realizado pelo mesmo, na unidade de tempo é igual à razão de variação de energia armazenada no interior do VC mais o efluxo de energia armazenada no VC através da SC".

A seguir, deduziremos as equações diferenciais do escoamento a partir das equações integrais (1.20), (1.21) e (1.22).

AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO ESCOAMENTO

1.2.1 - Equação da Continuidade

Usando o Teorema da Divergência de Gauss, a equação (1.20), para um escoamento incompressível onde ρ é considerada constante, reduz-se a

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{V} = \text{div } \underline{V} = 0} \quad , \quad (1.23)$$

Representado o campo de velocidade $\underline{V} = (u_1, u_2, u_3)$ na direção das coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , (1.23) se escreve

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad (1.24)$$

e em coordenadas cilíndricas,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{r}{v} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0} \quad , \quad (1.25)$$

onde o escoamento é representado pelo campo de velocidade $\underline{V} = (v, w, u)$ nas direções de r , θ e x respectivamente.

1.2.2 - Equações do Movimento

A equação (1.21), sob o regime de escoamento incompressível permanente com forças de campo desprezíveis reduz-se a

$$\underline{F}_S = \oint_{SC} \underline{V}(\rho \underline{V} \cdot d\underline{A}). \quad (1.26)$$

A equação (1.26) é uma equação vetorial. As equações escalares componentes nas direções ortogonais x_1, x_2, x_3 podem ser escritas simplesmente tomando-se as componentes dos vetores $\underline{V} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\underline{F}_S = ((F_S)_{x_1}, (F_S)_{x_2}, (F_S)_{x_3})$. Assim

$$(F_S)_{x_i} = \oint_{SC} u_i (\rho \underline{V} \cdot d\underline{A}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.27)$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss (1.27) pode ser escrito como

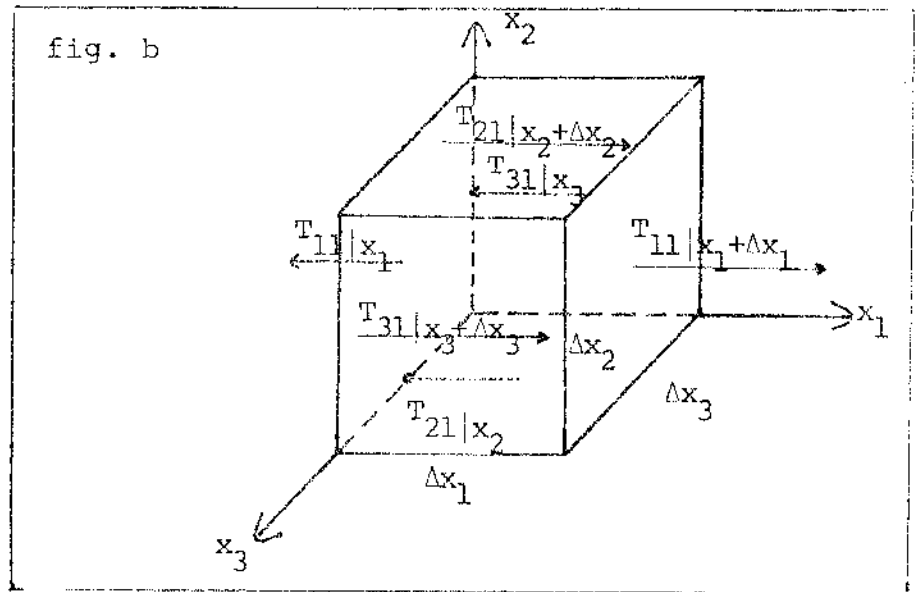
$$(F_S)_{x_i} = \iiint_{VC} \underline{V} \cdot \nabla (\rho u_i) dV. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.28)$$

Apliquemos, agora, a forma integral (1.28) a um volume elementar (pequeno cubo de fluido de arestas dx_1, dx_2 e dx_3) e definimos o Tensor de Tensões T_{ij} para descrever as forças de contato " F_S ", onde o primeiro índice caracteriza a face de atuação da tensão, e o segundo indica a direção da tensão.

O Tensor de Tensões pode ser escrito como

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \text{ onde } T_{ij} = T_{ji}.$$

Com referência a "fig. b" (onde mostramos as forças na direção x_1) e a equação (1.28), podemos escrever o balanço da quantidade de movimento para a direção x_1 , como



$$\begin{aligned}
 & (T_{11}|_{x_1+\Delta x_1} - T_{11}|_{x_1}) \Delta x_2 \Delta x_3 + (T_{21}|_{x_2+\Delta x_2} - T_{21}|_{x_2}) \Delta x_1 \Delta x_3 + \\
 & + (T_{31}|_{x_3+\Delta x_3} - T_{31}|_{x_3}) \Delta x_1 \Delta x_2 = \Delta x_2 \Delta x_3 (\rho u_1^2|_{x_1+\Delta x_1} - \rho u_1^2|_{x_1}) + \\
 & + \Delta x_1 \Delta x_3 (\rho u_1 u_2|_{x_2+\Delta x_2} - \rho u_1 u_2|_{x_2}) + \Delta x_1 \Delta x_2 (\rho u_1 u_3|_{x_3+\Delta x_3} - \rho u_1 u_3|_{x_3}).
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

Se dividirmos (1.29) por $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, tomarmos o limite quando $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \rightarrow 0$ e usarmos (1.24), temos

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = \rho \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right]. \tag{1.30}$$

Usando-se a convenção de soma de Eistein, escrevemos (1.30) como

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \quad (1.31)$$

Analogamente nas direções x_2 e x_3 , temos

$$\frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \quad (1.32)$$

e

$$\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \quad (1.33)$$

Usando-se a notação tensorial cartesiana escrevemos (1.31), (1.32) e (1.33) como

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.34)$$

1.2.3 - Equações de Navier-Stokes

Estas equações descrevem o movimento de um fluido Newtoniano. Para um fluido Newtoniano o Tensor de Tensões é dado por

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (1.35)$$

onde o Tensor de Tensões é dividido em duas parcelas: pressão e de formação ; E_{ij} é o tensor simétrico de Deformação dado por

$$E_{ij} = 1/2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad (1.36)$$

p é a pressão; δ_{ij} é o Delta de Kronecker e " μ " representa a viscosidade do fluido.

Substituindo (1.35) e (1.36) em (1.34) obtemos as equações de Navier-Stokes na forma tensorial cartesiana para um escoamento permanente com forças externas desprezíveis:

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i, \quad (i=1,2,3) \quad (1.37)$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace e é dado por

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right).$$

Em coordenadas cilíndricas (1.37) transforma-se em

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w^2}{r} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right], \\ v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{vw}{r} &= - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left[\nabla^2 w + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r^2} \right], \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \nabla^2 u, \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad v = \frac{\mu}{\rho}$$

é a viscosidade cinética.

1.2.4 - Equação da Energia.

Para obtermos a equação diferencial de (1.22) façamos o balanço da energia no VC.

Seja \underline{q} o vetor de fluxo de calor por condução e radiação de dentro para fora do VC. Assim o Fluxo Total de Calor $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$ no VC pode ser expresso como

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{SC} \underline{q} \cdot d\underline{A} = - \oint_{SC} q_i dA_i \quad (1.39)$$

Quanto ao trabalho realizado pelo fluido no VC, podemos dividi-lo em duas partes, em Reversível realizado pela pressão (p) na SC e Irreversível pelas tensões de cisalhamento na SC.

Então, em termos do Tensor de Tensões (1.35), o Trabalho T_o tal realizado pelo fluido no VC é

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_{SC} u_i T_{ij} dA_j \quad (1.40)$$

Com o auxílio de (1.39) e (1.40) e equação geral da energia (1.22) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho p dV + \oint_{SC} \rho p \underline{V} \cdot d\underline{A} = & - \oint_{SC} q_i dA_i + \oint_{SC} u_i T_{ij} dA_j + \\ & + \iiint_{VC} q''' dV \end{aligned} \quad (1.41)$$

onde q''' é a geração interna de calor por unidade de volume.

Usando-se o Teorema da Divergência de Gauss, a equação constitutiva de Newton (1.35) e o fato de o volume v ser arbitrário, a equação (1.41) torna-se

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \underline{u}_j) = - \nabla \cdot \underline{q} + q''' - \nabla \cdot (\rho u_i) + 2\mu \nabla \cdot (u_j \underline{E}_{ij}). \quad (1.42)$$

Expandindo os termos e usando a equação da continuidade, a equação (1.42) restrita a um escoamento permanente é

$$\rho e (\nabla \cdot \underline{V}) + \rho u_j \frac{\partial(e)}{\partial x_j} = - \nabla \cdot \underline{q} - p (\nabla \cdot \underline{V}) - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu u_i \nabla^2 u_i + q''' + \Phi, \quad (1.43)$$

onde $\Phi = 2E_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ é a função dissipação e $\dot{\epsilon}$ é a taxa em que as tensões de cisalhamento realizam trabalho irreversível sobre o fluido.

Tomando-se o produto escalar de \underline{V} pela equação de movimento (1.37), obtemos

$$\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial (V^2/2)}{\partial x_j} = - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu u_i \nabla^2 u_i, \quad (1.44)$$

que é a equação da energia mecânica. Considerando-se também que $e = U + \frac{V^2}{2}$, onde desprezamos a energia potencial, a equação (1.43) fica

$$\rho e (\nabla \cdot \underline{V}) + \rho u_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = - \nabla \cdot \underline{q} - p (\nabla \cdot \underline{V}) + q''' + \Phi. \quad (1.45)$$

Introduzindo-se, agora, a Lei de Fourier da condução de calor, $\underline{q} = -k \nabla T$, onde k é a condutibilidade térmica constante, e ainda estabelecendo que $dU = C_p dT$, podemos escrever (1.45) como

$$\rho C_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho e (\nabla \cdot \underline{V}) = - p (\nabla \cdot \underline{V}) + k \nabla^2 T + q''' + \Phi, \quad (1.46)$$

onde C_p é o calor específico e T é a temperatura absoluta.

Para um fluido incompressível ($\nabla \cdot \underline{V} = 0$) e desprezando-se a geração interna de calor ($q''' = 0$), temos a seguinte equação da energia na forma tensorial cartesiana,

$$\rho C_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = k \nabla^2 T + \Phi, \quad (1.47)$$

onde

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} E_{12}^2 + \frac{1}{2} E_{23}^2 + \frac{1}{2} E_{13}^2 \right].$$

Expandindo (1.47) em coordenadas cilíndricas, obtemos

$$\rho C_p \left[v \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial \theta} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = k \nabla^2 T + \Phi, \quad (1.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi = 2\mu & \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Maiores detalhes sobre a redução dessas equações, bem como sua fundamentação teórica, podem ser obtidos nas referências [7], [8], [9] e [10].

CAPÍTULO II

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO ATRAVÉS DE UM TUBO CILÍNDRICO POROSO.

2.1 - INTRODUÇÃO

Muito já se tem investigado sobre escoamentos em tubos ou canais porosos. Berman [1], em 1953, iniciou o estudo sobre escoamento laminar em canais com paredes porosas, obtendo o campo de velocidade pelo método de perturbações, para $|R| < 1$. Em 1956, Yuan [2] analisou o mesmo problema para $|R| > 1$.

Mais tarde, Bhatnagar [5] em 1963 estendeu o estudo a tubos cilíndricos porosos, obtendo o campo de velocidade para um escoamento permanente de um fluido visco-elástico, tendo como caso particular o fluido Newtoniano, também restrito ao parâmetro de Reynolds $|R| < 1$.

Nossa preocupação agora, é estudar a distribuição de temperatura em um escoamento. Este estudo é motivado pela importância em refrigeração, transportes, órgãos artificiais do corpo humano e pesquisas de laboratório.

No presente capítulo buscamos informações sobre a distribuição de temperatura em um escoamento de um fluido Newtoniano através de um tubo cilíndrico poroso. Para tal, necessitamos primeiramente conhecer o escoamento, isto é, obter as componentes da velocidade que regem o escoamento. No final do capítulo discutiremos os resultados através de gráficos obtidos pela variação dos parâmetros físicos.

2.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.

Consideremos um tubo cilíndrico poroso de raio "a" com sucção ou injeção de fluido na parede. Representemos o escoamento pelo campo de velocidade $\underline{V}(v,w,u)$ na direção das coordenadas cilíndricas polares (r,θ,x) , onde r é a coordenada radial, x estende-se ao longo do eixo do cilindro e θ é a coordenada angular. Assim, denominaremos v , w e u simplesmente de velocidade radial, transversal e axial, respectivamente.

As seguintes condições são impostas ao escoamento:

- 1) o fluido a ser usado no escoamento é o Newtoniano;
- 2) prevalece o estado permanente do escoamento;
- 3) o fluido é incompressível;
- 4) não existem forças externas agindo no fluido;
- 5) o escoamento é laminar;
- 6) o escoamento é bi-dimensional e axialmente simétrico;
- 7) as partículas de fluido em contato com a parede do tubo tem velocidade axial nula e velocidade radial constante v_0 ;
- 8) ao longo do eixo, a velocidade axial é finita e a radial nula.

Devido à simetria axial, a coordenada θ não aparecerá em nosso trabalho e pelo fato do escoamento ser bi-dimensional não consideraremos a componente w de velocidade. Isso facilita o estudo do problema, pois podemos seccionar horizontalmente pelo meio o cilindro, fixando-nos assim ao estudo de uma parte.

Para a distribuição de temperatura assumimos que a parede

do tubo mantem-se a uma temperatura constante T_0 e que ao longo do eixo seja finita, isto é,

$$\begin{aligned} T &= T_0 \quad \text{em} \quad r = a \\ T &\text{ finito em} \quad r = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.3 - REDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO.

De acordo com as condições impostas ao problema e definindo o parâmetro não-dimensional

$$\lambda = (r/a) \quad , \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \quad (2.2)$$

as equações de continuidade (1.25) e de Navier-Stokes (1.38) reduzem-se a

$$\frac{\partial}{\partial x} [\lambda u] + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda v] = 0 \quad ; \quad (2.3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \quad , \quad (2.4)$$

e

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + v \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda v) \right] \right\} \quad (2.5)$$

As condições de contorno do problema são

$$\begin{aligned} u(x,1) &= 0 & v(x,1) &= v_0 \\ (\partial u / \partial \lambda)_{\lambda=0} &= 0^* & v(x,0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Introduzimos agora a função de corrente $\psi(x,\lambda)$ definida por

$$u(x,\lambda) = \frac{1}{a^2 \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.7)$$

* foi verificado que esta condição equivale a supor que $(u,0)$ é finito.

e

$$v(x, \lambda) = - \frac{1}{a\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.8)$$

A função de corrente satisfaz identicamente a equação de continuidade (2.3). Segundo Berman [1], uma escolha conveniente para a função de corrente é

$$\psi(x, \lambda) = g(x) \phi(\lambda). \quad (2.9)$$

Então as componentes da velocidade (2.7) e (2.8) são dadas por

$$u = \frac{1}{a^2 \lambda} g(x) \phi'(\lambda) \quad (2.10)$$

e

$$v = \frac{1}{a\lambda} g'(x) \phi(\lambda). \quad (2.11)$$

Usando-se (2.10), (2.11) e a condição $v(x, 1) = v_0$ encontramos

$$g(x) = \frac{1}{\phi(1)} \left[\frac{a^2 \bar{u}_0}{2} - a v_0 x \right], \quad (2.12)$$

onde \bar{u}_0 é a velocidade média axial em $x = 0$ dada por

$$\bar{u}_0 = 2 \int_0^1 \lambda u(0, \lambda) d\lambda. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.9), (2.10) e (2.11) obtemos

$$\psi(x, \lambda) = \left(\frac{a^2 \bar{u}_0}{2} - a v_0 x \right) \lambda W(\lambda); \quad (2.14)$$

$$u(x, \lambda) = \left(\frac{\bar{u}_0}{2} - \frac{x}{a} v_0 \right) \omega(\lambda) \quad (2.15)$$

e

$$v(x, \lambda) = v_0 W(\lambda) \quad (2.16)$$

onde

$$\omega(\lambda) = \frac{\phi'(\lambda)}{\lambda \phi(1)} \quad (2.17)$$

e

$$W(\lambda) = \frac{\phi(\lambda)}{\lambda \phi(1)} = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 t \omega(t) dt \quad (2.18)$$

Nas equações acima, $\omega(\lambda)$ é uma função do parâmetro de distância λ , ainda a ser determinada. Notemos também que desde que a velocidade de sucção v_0 é tomada constante, a componente radial de velocidade torna-se somente função de λ .

Substituindo as componentes da velocidade (2.15) e (2.16) nas equações de Navier-Stokes (2.4) e (2.5), obtemos

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\bar{u}_0}{2} - \frac{x}{a} v_0 \right) \left[-\frac{v_0}{a} (\omega^2 - W\omega') - \frac{v}{a^2} (\omega'' + \frac{\omega'}{\lambda}) \right] \quad (2.19)$$

e

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = v_0^2 W\omega' - \frac{v}{a} v_0 \left[W'' + \frac{1}{\lambda^2} (\lambda W' - W) \right], \quad (2.20)$$

onde os traços denotam a ordem da derivada com respeito a λ .

Derivando a equação (2.19) com respeito a λ e a equação (2.20) com respeito a x e comparando-as obtemos

$$\left(\frac{\bar{u}_0}{2} - \frac{x}{a} v_0 \right) \left[\frac{v_0}{a} [2\omega\omega' - W\omega'' - W'\omega'] + \frac{v}{a^2} \left(\omega'''' + \frac{1}{\lambda} \omega''' - \frac{1}{\lambda^2} \omega'' \right) \right] = 0, \quad (2.21)$$

isto é, reduzimos a equação de continuidade e as duas equações de Navier-Stokes a uma única equação diferencial a duas variáveis. Porém, observemos que se a equação (2.21) é satisfeita para todo x , então

$$R(2\omega\omega' - W\omega'' - W'\omega') + \left(\omega'''' + \frac{1}{\lambda}\omega''' - \frac{1}{\lambda^2}\omega''\right) = 0 \quad (2.22)$$

onde $R = av_0/\nu$ é o número adimensional de Reynolds de entrada vertical, o qual será responsável pela injeção ou sucção de fluido pelos poros da parede do cilindro.

Reduzimos, assim, o problema a uma equação diferencial ordinária não-linear de terceira ordem.

De (2.15) e (2.16) sob as condições de contorno (2.6), obtemos as seguintes condições para as funções ω e W :

$$\omega(1) = \omega'(0) = 0 \quad (2.23)$$

$$W(0) = 0, \quad W(1) = 1. \quad (2.24)$$

2.4 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO.

Se considerarmos a forma limitante de (2.22) quando R tende a zero, temos uma simples equação homogênea de terceira ordem não-linear,

$$\omega''''(\lambda) + (1/\lambda)\omega'''(\lambda) - (1/\lambda^2)\omega''(\lambda) = 0, \quad (2.25)$$

cujas soluções $\omega(\lambda)$, sujeitas às condições (2.23), descrevem o bem conhecido escoamento de Poiseuille em um tubo cilíndrico.

Podemos então, estudar os desvios do escoamento de Poiseuille pelo método clássico de perturbações, onde o número de Reynolds R é usado como o parâmetro de perturbação. Assim a solução $\omega(\lambda)$ a ser obtida será válida para valores de R suficientemente pequenos.

Expandimos, portanto, as funções ω e W na forma:

$$\omega[\lambda] = \omega_0[\lambda] + R\omega_1[\lambda] + R^2\omega_2[\lambda] + \dots + R^n\omega_n[\lambda] + \dots \quad (2.26)$$

e

$$W[\lambda] = W_0[\lambda] + RW_1[\lambda] + R^2W_2[\lambda] + \dots + R^nW_n[\lambda] + \dots \quad (2.27)$$

onde, por (2.18),

$$W_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda t\omega_n[t] dt \quad (2.28)$$

e $\omega_n(\lambda)$, $W_n(\lambda)$ são consideradas independentes de R .

Substituindo-se (2.26) e (2.27) em (2.22) e comparando os coeficientes das várias potências de R , obtemos o conjunto de equações:

$$\omega_0'''' + \frac{1}{\lambda} \omega_0'' - \frac{1}{\lambda^2} \omega_0' = 0, \quad (2.29)$$

$$\omega_1'''' + \frac{1}{\lambda} \omega_1'' - \frac{1}{\lambda^2} \omega_1' = W_0\omega_0'' - 2\omega_0\omega_0', \quad (2.30)$$

$$\omega_2'''' + \frac{1}{\lambda} \omega_2'' - \frac{1}{\lambda^2} \omega_2' = W_0\omega_1'' + W_1\omega_0'' + W_1'\omega_0' + \omega_1'W_0' - 2\omega_0\omega_1' - 2\omega_1\omega_0', \quad (2.31)$$

e assim por diante.

As condições a serem satisfeitas por ω_n e W_n são

$$\omega_n(1) = \omega_n'(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.32)$$

$$W_0(1) = 1, \quad W_n(1) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.33)$$

Integrando três vezes sucessivamente a equação (2.29) em relação a λ e atendendo às condições (2.32) e (2.33) obtemos unicamente,

$$\omega_0(\lambda) = -4(\lambda^2 - 1) \quad (2.34)$$

e

$$W_0(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2). \quad (2.35)$$

Com o auxílio de (2.34) e (2.35), repetimos o procedimento para (2.30), donde resulta unicamente

$$\omega_1(\lambda) = \frac{2}{9} - \lambda^2 + \lambda^4 - \frac{2}{9} \lambda^6 \quad (2.36)$$

e

$$W_1(\lambda) = \frac{1}{9} \lambda - \frac{1}{4} \lambda^3 + \frac{1}{6} \lambda^5 - \frac{1}{36} \lambda^7 \quad (2.37)$$

Substituindo (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37) em (2.31) e repetindo o processo resulta

$$\omega_2(\lambda) = \frac{83}{1350} - \frac{38}{135} \lambda^2 + \frac{11}{36} \lambda^4 - \frac{1}{9} \lambda^6 + \frac{1}{36} \lambda^8 - \frac{1}{450} \lambda^{10} \quad (2.38)$$

e

$$W_2(\lambda) = \frac{83}{2700} \lambda - \frac{19}{270} \lambda^3 + \frac{11}{216} \lambda^5 - \frac{1}{72} \lambda^7 + \frac{1}{360} \lambda^9 - \frac{1}{5400} \lambda^{11} \quad (2.39)$$

Assim obtemos os graus de aproximação da solução de (2.22):

1. aproximação de grau zero

$$\omega^0(\lambda) = -4(\lambda^2 - 1) \quad (2.40)$$

$$W^0(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2); \quad (2.41)$$

2. aproximação de grau um:

$$\omega^1(\lambda) = -4(\lambda^2 - 1) + R\left(\frac{2}{9} - \lambda^2 + \lambda^4 - \frac{2}{9}\lambda^6\right) \quad (2.42)$$

$$W^1(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2) + R\left(\frac{1}{9}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^5 - \frac{1}{36}\lambda^7\right); \quad (2.43)$$

3. aproximação de grau dois:

$$\begin{aligned} \omega^2(\lambda) = & -4(\lambda^9 - 1) + R\left(\frac{2}{9} - \lambda^2 + \lambda^4 - \frac{2}{9}\lambda^6\right) \\ & + R^2\left(\frac{83}{1350} - \frac{38}{135}\lambda^2 + \frac{11}{36}\lambda^4 - \frac{1}{9}\lambda^6 + \frac{1}{36}\lambda^8 - \frac{1}{450}\lambda^{10}\right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} W^2(\lambda) = & -\lambda(\lambda^2 - 2) + R\left(\frac{1}{9}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^5 - \frac{1}{36}\lambda^7\right) \\ & + R^2\left(\frac{83}{2700}\lambda - \frac{19}{270}\lambda^3 + \frac{11}{216}\lambda^5 - \frac{1}{72}\lambda^7 + \frac{1}{360}\lambda^9 - \frac{1}{5400}\lambda^{11}\right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.44) e (2.45) em (2.15) e (2.16) obtemos as componentes da velocidade na forma adimensional

$$\begin{aligned} \frac{u(x, \lambda)}{\bar{u}_0} = & \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} - \frac{R}{NRe}\right) \left[4(1 - \lambda^2) + R\left(\frac{2}{9} - \lambda^2 + \lambda^4 - \frac{2}{9}\lambda^6\right) \right. \\ & \left. + R^2\left\{\frac{83}{1350} - \frac{38}{135}\lambda^2 + \frac{11}{36}\lambda^4 - \frac{1}{9}\lambda^6 + \frac{1}{36}\lambda^8 - \frac{1}{450}\lambda^{10}\right\} \right] \end{aligned}$$

(2.46)

$$\frac{v(\lambda)}{\bar{v}_0} = \lambda(2 - \lambda^2) + R\left(\frac{1}{9}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^5 - \frac{1}{36}\lambda^7\right) + R^2\left\{\frac{83}{2700}\lambda - \frac{19}{270}\lambda^3 + \frac{11}{216}\lambda^5 - \frac{1}{72}\lambda^7 + \frac{1}{360}\lambda^9 - \frac{1}{5400}\lambda^{11}\right\}$$

(2.47)

onde $NRe = \bar{a}u_0/\nu$ é o número de Reynolds de entrada horizontal.

2.5 - REDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Atendendo às condições impostas ao problema, descritas no item 2.2, a equação da energia (1.48) torna-se

$$\rho C_p \left[v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = k \nabla^2 T + 2\mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

(2.48)

onde

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

com as condições de contorno (2.1).

Fazendo agora T , u , v , x e r adimensionais pelas relações,

$$\tilde{T} = T/T_0; \quad \tilde{u} = u/\bar{u}_0; \quad \tilde{v} = v/\bar{v}_0$$

$$\lambda = r/\bar{a} \quad \text{e} \quad \tilde{x} = x/\bar{a}, \quad (2.49)$$

a equação (2.48) é escrita como

$$\sigma \left(R\tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \lambda} + NRe\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \right) = v^2 \tilde{T} +$$

$$+ 2\sigma E \left[\frac{R^2}{NRe^2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{R^2}{NRe^2} \left(\frac{\tilde{v}}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \quad (2.50)$$

onde

$$\sigma = \frac{\mu c}{k} P \quad \text{é o número adimensional de Prandtl ;}$$

$$E = \frac{\tilde{u}_0^2}{C_p \cdot T_0} \quad \text{é o número adimensional de Eckert.}$$

e

$$v^2 \tilde{T} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} .$$

Substituindo \tilde{u} e \tilde{v} , dados por (2.46) e (2.47), em (2.50) e desprezando os coeficientes das potências de R maiores que dois (com efeito, isto é válido, pois estamos interessados para $|R| < 1$), obtemos:

$$v^2 \tilde{T} - \sigma \{ R g_1(\lambda) + R^2 g_2(\lambda) \} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \lambda} - \sigma \{ NRe g_3(\lambda) + R \left[\frac{NRe}{2} g_4(\lambda) - 2\tilde{x} g_3(\lambda) \right]$$

$$+ R^2 \left[\frac{NRe}{2} g_5(\lambda) - \tilde{x} g_4(\lambda) \right] \} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}$$

$$= - 2\sigma E \{ g_6(\lambda) + R [g_7(\lambda) - \frac{4\tilde{x}}{NRe} g_6(\lambda)] + R^2 [g_8(\lambda, NRe) - \frac{4\tilde{x}}{NRe} g_7(\lambda) +$$

$$+ \frac{4(\tilde{x})^2}{NRe^2} g_6(\lambda)] \} , \quad (2.51)$$

onde

$$\begin{aligned}
 g_1(\lambda) &= \lambda(2 - \lambda^2), \\
 g_2(\lambda) &= \lambda\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^4 - \frac{1}{36}\lambda^6\right), \\
 g_3(\lambda) &= 2(1 - \lambda^2), \\
 g_4(\lambda) &= \frac{2}{9} - \lambda^2 + \lambda^4 - \frac{2}{9}\lambda^6, \\
 g_5(\lambda) &= \frac{83}{1350} - \frac{38}{135}\lambda^2 + \frac{11}{36}\lambda^4 - \frac{1}{9}\lambda^6 + \frac{1}{36}\lambda^8 - \frac{1}{450}\lambda^{10}, \\
 g_6(\lambda) &= 8\lambda^2 \\
 g_7(\lambda) &= 4\lambda^2\left(1 - 2\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^4\right), \\
 g_8(\lambda, NRe) &= \left(\frac{439}{270} - \frac{40}{9}\lambda^2 + 4\lambda^4 - \frac{16}{9}\lambda^6 + \frac{4}{15}\lambda^8\right)\lambda^2 + \\
 &\quad + \frac{2}{NRe^2}(12 - 24\lambda^2 + 13\lambda^4).
 \end{aligned}$$

As condições de contorno da equação (2.51) são

$$\begin{aligned}
 \tilde{T} &= 1 && \text{em } \lambda = 1 \\
 T &\text{ finito em } \lambda = 0,
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde \tilde{T} está em função de \tilde{x} e λ .

2.6 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Para obter a solução da equação (2.51) usemos o Método Clássico de Perturbações.

Assim, expandimos a função $\tilde{T}(\tilde{x}, \lambda)$ na forma

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \lambda) = \tilde{T}_0(\tilde{x}, \lambda) + R\tilde{T}_1(\tilde{x}, \lambda) + R^2\tilde{T}_2(\tilde{x}, \lambda) + \dots + R^n\tilde{T}_n(\tilde{x}, \lambda) + \dots, \tag{2.53}$$

onde $\tilde{T}(\tilde{x}, \lambda)$ é independente de R .

Substituindo (2.53) em (2.51) e comparando os coeficientes das várias potências de R , obtemos o conjunto de equações:

(i) equação de aproximação de ordem zero:

$$\nabla^2 \tilde{T}_0 - \sigma \text{NRe } g_3 \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tilde{x}} = -2\sigma E g_6 ; \quad (2.54)$$

(ii) equação de aproximação de ordem dois:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{T}_1 - \sigma \text{NRe } g_3 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{x}} &= \sigma g_1 \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \lambda} + \sigma \left(\frac{\text{NRe}}{2} g_4 - 2\tilde{x} g_3 \right) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tilde{x}} \\ &- 2\sigma E \left(g_7 - \frac{4\tilde{x}}{\text{NRe}} g_6 \right) ; \end{aligned} \quad (2.55)$$

(iii) equação de aproximação de ordem três:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{T}_2 - \sigma \text{NRe } g_3 \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial \tilde{x}} &= \sigma g_1 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \lambda} + \sigma g_2 \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \lambda} + \sigma \left(\frac{\text{NRe}}{2} g_5 - \tilde{x} g_4 \right) \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tilde{x}} \\ &+ \sigma \left(\frac{\text{NRe}}{2} g_4 - 2\tilde{x} g_3 \right) \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{x}} - 2\sigma E \left(g_8 - \frac{4\tilde{x}}{\text{NRe}} g_7 + \frac{4(\tilde{x})^2}{\text{NRe}^2} g_6 \right) ; \end{aligned} \quad (2.56)$$

e assim por diante.

De (2.52) as condições para a função $\tilde{T}_n(\tilde{x}, \lambda)$ são descritas do seguinte modo:

$$\tilde{T}_n(\tilde{x}, 1) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\tilde{T}_n(\tilde{x}, 0) \quad \text{finito para qualquer } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

Claramente, as equações (2.54), (2.55) e (2.56) apresentam as funções de \tilde{x} somente na forma polinomial inteira. Assim, para qualquer n suficientemente grande, podemos assumir que:

$$\tilde{T}_i(\tilde{x}, \lambda) = \tilde{T}_{i0}(\lambda) + \tilde{x} \tilde{T}_{i1}(\lambda) + (\tilde{x})^2 \tilde{T}_{i2}(\lambda) + \dots + (\tilde{x})^n \tilde{T}_{in}(\lambda)$$

$$(i = 0, 1, 2) \quad (2.58)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00}(1) &= 1 ; \\ \tilde{T}_{in}(1) &= 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \\ \tilde{T}_{in}(0) &\text{ finito para todo } i, n. \end{aligned} \quad (2.59)$$

A série (2.58) é válida para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ pois, na resolução das referidas equações, mostraremos que para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{T}_{ik}(\lambda) \equiv 0$, para todo inteiro $k \geq N_i$.

2.6.1 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (2.54)

Substituindo (2.58), onde $i = 0$ e $n \geq 2$, em (2.54) e comparando os coeficientes de \tilde{x} de mesma potência, obtemos o sistema:

$$\tilde{T}_{00}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{00}' - \sigma N \text{Reg}_3 \tilde{T}_{01} + 2\tilde{T}_{02} = -2\sigma E g_6 ; \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_{01}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{01}' - 2\sigma N \text{Reg}_3 \tilde{T}_{02} + 6\tilde{T}_{03} &= 0 ; \\ - - - \\ \tilde{T}_{0n-1}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{0n-1}' - n\sigma N \text{Reg}_3 \tilde{T}_{0n} &= 0 ; \\ \tilde{T}_{0n}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{0n}' &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Devido as condições (2.59), todas as equações do conjunto (2.61) reduzem-se recursivamente à forma:

$$\tilde{T}_{ok}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{ok}' = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.62)$$

cuja solução única é a solução trivial, isto é ,

$$\tilde{T}_{ok}'(\lambda) = 0 \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots, n.$$

Por conseguinte, a equação (2.60) torna-se

$$\tilde{T}_{oo}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{oo}' = -16 \sigma E \lambda^2 \quad \text{que,} \quad (2.63)$$

sob as condições (2.59), apresenta como solução única a função

$$\tilde{T}_{oo}(\lambda) = \sigma E p_o(\lambda) + 1 \quad , \quad (2.64)$$

onde $p_o(\lambda) = 1 - \lambda^4$.

Assim, por (2.58), temos como solução da equação (2.54) a função independente de \tilde{x} .

$$\boxed{\tilde{T}_o(\tilde{x}, \lambda) = \sigma E p_o(\lambda) + 1 \quad .} \quad (2.65)$$

2.6.2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (2.55)

Substituindo-se (2.58) em (2.55), onde $i = 1$ e $n \geq 3$, obtemos da comparação dos coeficientes de \tilde{x} de mesma potência:

$$\tilde{T}_{10}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{10}' - \sigma N \text{Reg}_3 \tilde{T}_{11} + 2\tilde{T}_{12} = -\sigma E [g_6 + 8(\sigma-2)\lambda^4 + \frac{4}{3}(4-3\sigma)\lambda^6] ; \quad (2.66)$$

$$\tilde{T}_{11}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{11}' - 2\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{12} + 6\tilde{T}_{13} = \frac{8\sigma E}{NRe} g_6 ; \quad (2.67)$$

$$\tilde{T}_{12}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{12}' - 3\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{13} + 12\tilde{T}_{14} = 0 ;$$

...

$$\tilde{T}_{1n-1}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{1n-1}' - n\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{1n} = 0$$

e

$$\tilde{T}_{1n}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{1n}' = 0 . \quad (2.68)$$

Analogamente ao que ocorreu com a resolução da equação (2.54), todas as equações do conjunto (2.68) reduzem-se recursivamente à forma

$$\tilde{T}_{1k}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{1k}' = 0, \text{ onde agora } k = 2, 3, \dots, n.$$

Daí, sob as condições (2.59), obtemos unicamente $\tilde{T}_{1k}(\lambda) \equiv 0$, para todo $k = 2, 3, \dots, n$.

Assim a equação (2.67) reduz-se a

$$\tilde{T}_{11}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{11}' = \frac{8\sigma E}{NRe} g_6$$

cujas soluções únicas, obtidas por duas integrações sucessivas e respeitadas as condições (2.59), é

$$\tilde{T}_{11}(\lambda) = - \frac{4\sigma E}{NRe} p_0(\lambda) \quad (2.69)$$

Por sua vez, a equação (2.66), com o auxílio de (2.69) reduz-se à:

$$\tilde{T}_{10}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{10}' = - 8\sigma E [\sigma + (1-\sigma)\lambda^2 - 2\lambda^4 + (\frac{2}{3} + \frac{\sigma}{2})\lambda^6] , \quad (2.70)$$

cujas soluções, obtidas de maneira análoga a anterior, é

$$\tilde{T}_{10}(\lambda) = \sigma E p_1(\sigma, \lambda) \quad (2.71)$$

$$\text{onde } p_1(\sigma, \lambda) = \frac{5}{36} + \frac{25}{16} \sigma - 2\sigma\lambda^2 + \left(\frac{\sigma-1}{2}\right)\lambda^4 + \frac{4}{9}\lambda^6 - \left(\frac{1}{12} + \frac{\sigma}{16}\right)\lambda^8.$$

Finalmente, substituindo (2.69) e (2.71) em (2.58), obtemos a solução da equação (2.55):

$$\tilde{T}_1(\tilde{x}, \lambda) = \sigma E \left[p_1(\sigma, \lambda) - \frac{4\tilde{x}}{NRe} p_0(\lambda) \right] \quad (2.72)$$

2.6.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (2.56)

Conhecidas as funções \tilde{T}_0 e \tilde{T}_1 , substituímos (2.59) em (2.56), onde $i = 2$ e $n \geq 4$. Comparando-se, daí, os coeficientes de \tilde{x} de mesma potência encontramos o sistema de equações:

$$\tilde{T}_{20}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{20}' - \sigma NRe g_3 \tilde{T}_{21} + 2\tilde{T}_{22} = -4\sigma E h_1(NRe, \sigma, \lambda) \quad (2.73)$$

$$\tilde{T}_{21}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{21}' - 2\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{22} + 6\tilde{T}_{23} = \frac{-16\sigma E}{NRe} h_2(\sigma, \lambda) \quad (2.74)$$

$$\tilde{T}_{22}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{22}' - 3\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{23} + 12\tilde{T}_{24} = \frac{-64\sigma E}{NRe^2} \lambda^2 \quad (2.75)$$

$$\tilde{T}_{23}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{23}' - 4\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{24} + 20\tilde{T}_{25} = 0$$

...

$$\tilde{T}_{2n-1}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{2n-1}' - n\sigma NRe g_3 \tilde{T}_{2n} = 0 \quad (2.76)$$

$$\tilde{T}_{2n}'' + \frac{1}{\lambda} \tilde{T}_{2n}' = 0$$

onde

$$\begin{aligned}
h_1(NRe, \sigma, \lambda) = & \left(\frac{12}{NRe^2} + \frac{\sigma}{9} \right) + \left(\frac{439}{540} - \frac{24}{NRe^2} - \frac{\sigma}{2} + 2\sigma^2 \right) \lambda^2 + \left(-\frac{20}{9} + \frac{13}{NRe^2} + \right. \\
& + \frac{3}{2} \sigma - 2\sigma^2 \right) \lambda^4 + \left(2 - \frac{61}{36} \sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) \lambda^6 + \left(-\frac{8}{9} + \frac{2}{3} \sigma + \frac{\sigma^2}{4} \right) \lambda^8 + \\
& + \left(\frac{2}{15} - \frac{\sigma}{12} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \lambda^{10}
\end{aligned}$$

e

$$h_2(\sigma, \lambda) = -\sigma + (\sigma-2)\lambda^2 + (4-\sigma)\lambda^4 - \frac{4}{3}\lambda^6.$$

Repetindo o processo anterior de resolução e obedecendo às condições (2.59) obtemos as seguintes funções:

$$\tilde{T}_{2k}(\lambda) \equiv 0 ; \text{ para todo } k \geq 3 \quad (2.77)$$

$$\tilde{T}_{22}(\lambda) = \frac{4\sigma E}{NRe^2} p_0(\lambda) ; \quad (2.78)$$

$$\tilde{T}_{21}(\lambda) = -\frac{4\sigma E}{NRe} p_1(\sigma, \lambda) \quad (2.79)$$

$$e \quad \tilde{T}_{20}(\lambda) = \sigma E p_2(NRe, \sigma, \lambda) \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
\text{onde } p_2(NRe, \sigma, \lambda) = & \frac{83}{9NRe^2} + \frac{1603}{32400} + \frac{10753}{43200} \sigma + \frac{2581}{1200} \sigma^2 - \\
& - \left(\frac{14}{NRe^2} + \frac{7}{18} \sigma + \frac{25}{8} \sigma^2 \right) \lambda^2 + \left(-\frac{439}{2160} + \frac{6}{NRe^2} + \frac{7}{36} \sigma + \frac{41}{32} \sigma^2 \right) \lambda^4 \\
& + \left(\frac{20}{81} - \frac{11}{9NRe^2} - \frac{1}{18} \sigma - \frac{1}{3} \sigma^2 \right) \lambda^6 - \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{576} \sigma - \frac{1}{32} \sigma^2 \right) \lambda^8 \\
& + \left(\frac{8}{225} + \frac{7}{450} \sigma - \frac{1}{200} \sigma^2 \right) \lambda^{10} - \left(\frac{1}{270} + \frac{\sigma}{432} \right) \lambda^{12}.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (2.77), (2.78), (2.79) e (2.80) em (2.58), obtemos a solução da equação (2.56):

$$\tilde{T}_2(\tilde{x}, \lambda) = \sigma E \left[p_2(NRe, \sigma, \lambda) - \left(\frac{4\tilde{x}}{NRe} \right) p_1(\sigma, \lambda) + \left(\frac{2\tilde{x}}{NRe} \right)^2 p_0(\lambda) \right]. \quad (2.81)$$

Finalmente, podemos exibir a função que rege a distribuição de temperatura substituindo (2.65), (2.72) e (2.81) em (2.53):

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \lambda) = \sigma E \left\{ p_0(\lambda) \left[1 - \frac{2R\tilde{x}}{NRe} \right]^2 + R p_1(\sigma, \lambda) \left[1 - \frac{4R\tilde{x}}{NRe} \right] + R^2 p_2(NRe, \sigma, \lambda) \right\} + 1 \quad (2.82)$$

Este resultado serve somente para $|R| < 1$. Valores positivos de R (ou v_o) representam sucção, enquanto que seus valores negativos representam injeção na parede.

2.7 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Pode-se ver de (2.82) que a função que rege a distribuição de temperatura num escoamento laminar permanente de um fluido Newtoniano através de um tubo cilíndrico poroso depende das distâncias radial e axial.

Na ausência do escoamento vertical, isto é, $R = 0$, a função distribuição de temperatura (2.82) é dada por

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \lambda) = \sigma E p_0(\lambda) + 1, \quad (2.83)$$

a qual descreve a distribuição de temperatura num escoamento de Poiseuille para um tubo cilíndrico não-poroso.

De (2.83) vemos que na ausência do escoamento vertical a função distribuição de temperatura depende somente da distância radial.

Conforme a figura 1, seus perfis de temperatura são parabólicos achatados no centro do tubo tomando quase sua forma tubular e formando junto à parede uma leve camada térmica. A temperatura máxima ocorre no centro do tubo e é dada por

$$\left| \frac{T\left(\frac{x}{a}, 0\right)}{T_o} \right|_{R=0} = \sigma E + 1 . \quad (2.84)$$

A função (2.84) é uma função constante e depende somente dos parâmetros físicos adimensionais de Prandtl e Eckert.

Para efeito de ilustração gráfica, tomemos a água como um caso particular de um fluido Newtoniano. Nestes casos, o número de Prandtl varia de acordo com a tabela fornecida por Schlichting [8].

SUBSTÂNCIA	GRAUS CENTÍGRADOS	NÚMERO PRANDTL	(2.85)
Água	20°C	7.03	
Água	40°C	4.35	
Água	60°C	3.01	
Água	80°C	2.22	
Água	100°C	1.75	

Para o número de Reynolds (NRe) de entrada horizontal fixemos $NRe = 1000$, ou seja, uma intensidade suficiente para caracterizar o sentido do escoamento.

A variação do número de Eckert, E, como mostra a figura 3, é diretamente proporcional ao aumento de temperatura. Além disso,

a variação é uniforme. Portanto, na maioria dos casos fixaremos esse número em $E = 2$.

A variação de Prandtl também é diretamente proporcional ao aumento de temperatura, no entanto só é uniforme no escoamento de Poiseuille (figura 1), enquanto que num escoamento com sucção (figura 2) a temperatura máxima dos perfis é bem maior e perdem suas formas parabólicas achatadas.

Na figura 4 mostramos os efeitos da variação do número de Reynolds vertical, R , no início do escoamento, $x/a = 5$. Neste gráfico vemos que todos os perfis são parabólicos exceto no caso de pequena injeção ($R = 0.1$). Observamos ainda que \tilde{T} é maior nos casos de sucção do que nos casos de injeção da mesma intensidade. Agora, se considerarmos um escoamento pouco mais adiantado (figura 5), teremos um pequeno decréscimo da distribuição de temperatura. Esse fenômeno fica mais evidente na figura 5A, onde consideramos um escoamento bem desenvolvido, $x/a = 1300$. Nesta distância axial, como vemos, os perfis, no caso de injeção, já perderam completamente sua forma parabólica.

Nas figuras 6 e 6A fazemos uma comparação entre sucção e injeção de mesma intensidade nos diferentes estágios do escoamento.

No caso da sucção (figura 6) vemos que a distribuição de temperatura é inversamente proporcional à variação da distância axial (x/a). Mas, mesmo assim não perde sua forma parabólica, tendo máximo em $\lambda = 0$. Já no caso de injeção (figura 6A) a distribuição de temperatura é diretamente proporcional à distância axial, porém, perde sua forma parabólica a partir de uma certa distância axial e

a temperatura máxima ocorre próximo à parede do tubo, formando por conseguinte, uma acentuada camada térmica.

Nas figuras 7 e 8 diminuimos a intensidade de sucção e injeção. A figura 7 mostra que a perda da forma parabólica dos perfis ocorre a uma distância axial bem menor do que ocorreu na figura 6A. A figura 6 mostra que a temperatura máxima, no início do escoamento, é bem maior que na figura 8, porém decresce mais rapidamente a medida que a distância axial aumenta.

É interessante fazer uma comparação entre os gráficos 6A e 7. Vemos pela figura 7 que, para o caso de pequenas injeções, $-0.1 \leq R < 0$, os perfis desde o início do escoamento já possuem a forma não-parabólicas com pontos máximos próximos da parede do tubo. Enquanto que, para o caso de injeção um pouco maior, $R = -0.3$, como mostra a figura 6A, os perfis só deixam de ter forma parabólica quando o escoamento é bem desenvolvido, por exemplo, $\frac{x}{a} > 800$, aproximadamente.

Como complemento às figuras 6, 6A, 7 e 8 temos as figuras 9, 10 e 11 onde analisamos o comportamento da temperatura sobre o eixo do cilindro.

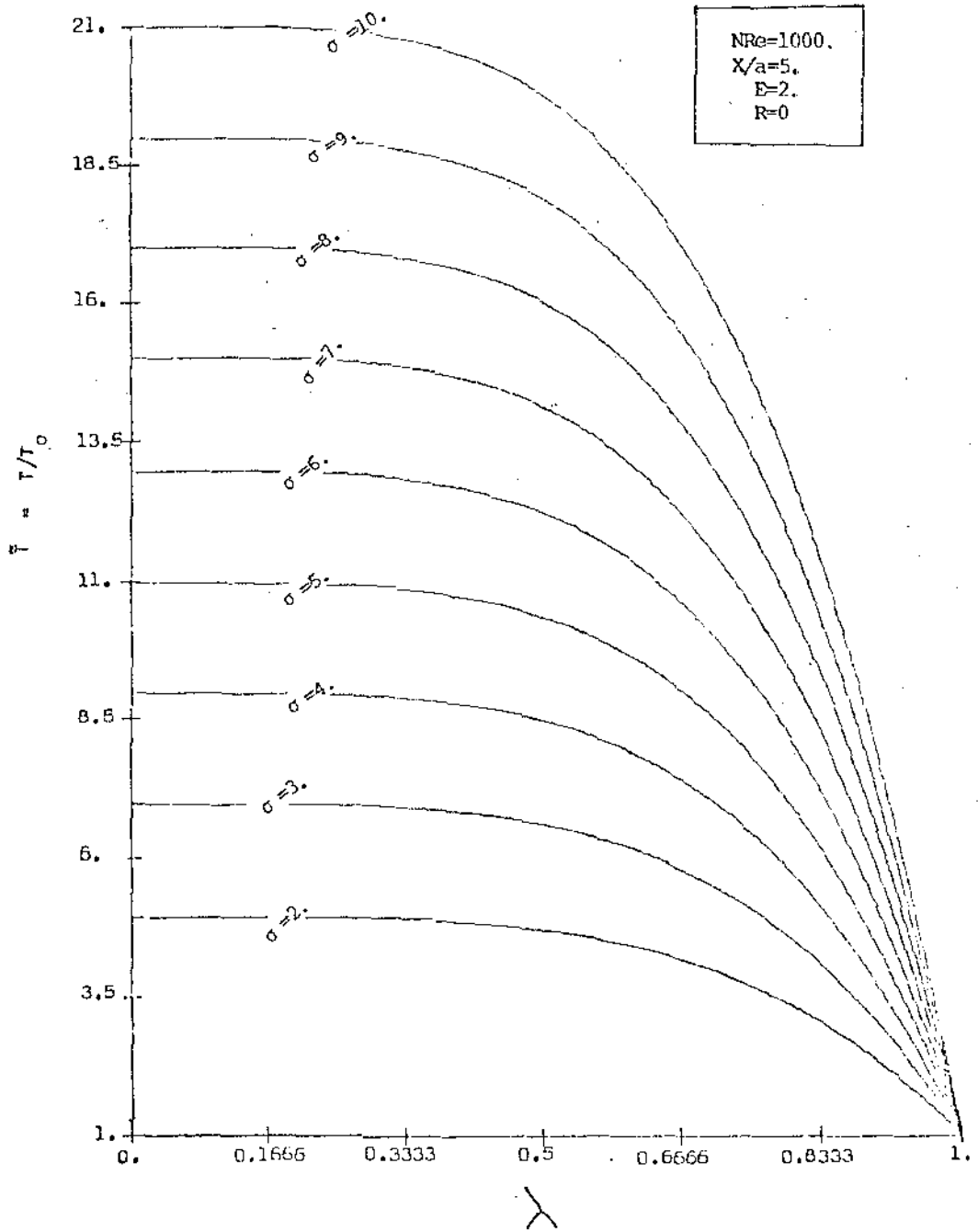
A função distribuição de temperatura, neste caso, é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\tilde{x}, 0) = & \sigma E \left\{ (1) + R \left[\frac{5}{36} + \frac{25}{16} \sigma - \frac{4\tilde{x}}{NRe} \right] \right. \\ & + R^2 \left[\left(\frac{83}{9NRe^2} + \frac{1603}{32400} + \frac{10573}{43200} \sigma + \frac{2581}{1200} \sigma^2 \right) \right] \\ & \left. - \left(\frac{5}{9} + \frac{25}{4} \sigma \right) \frac{\tilde{x}}{NRe} + 4 \left(\frac{\tilde{x}}{NRe} \right)^2 \right\} + 1 \quad . \end{aligned} \quad (2.86)$$

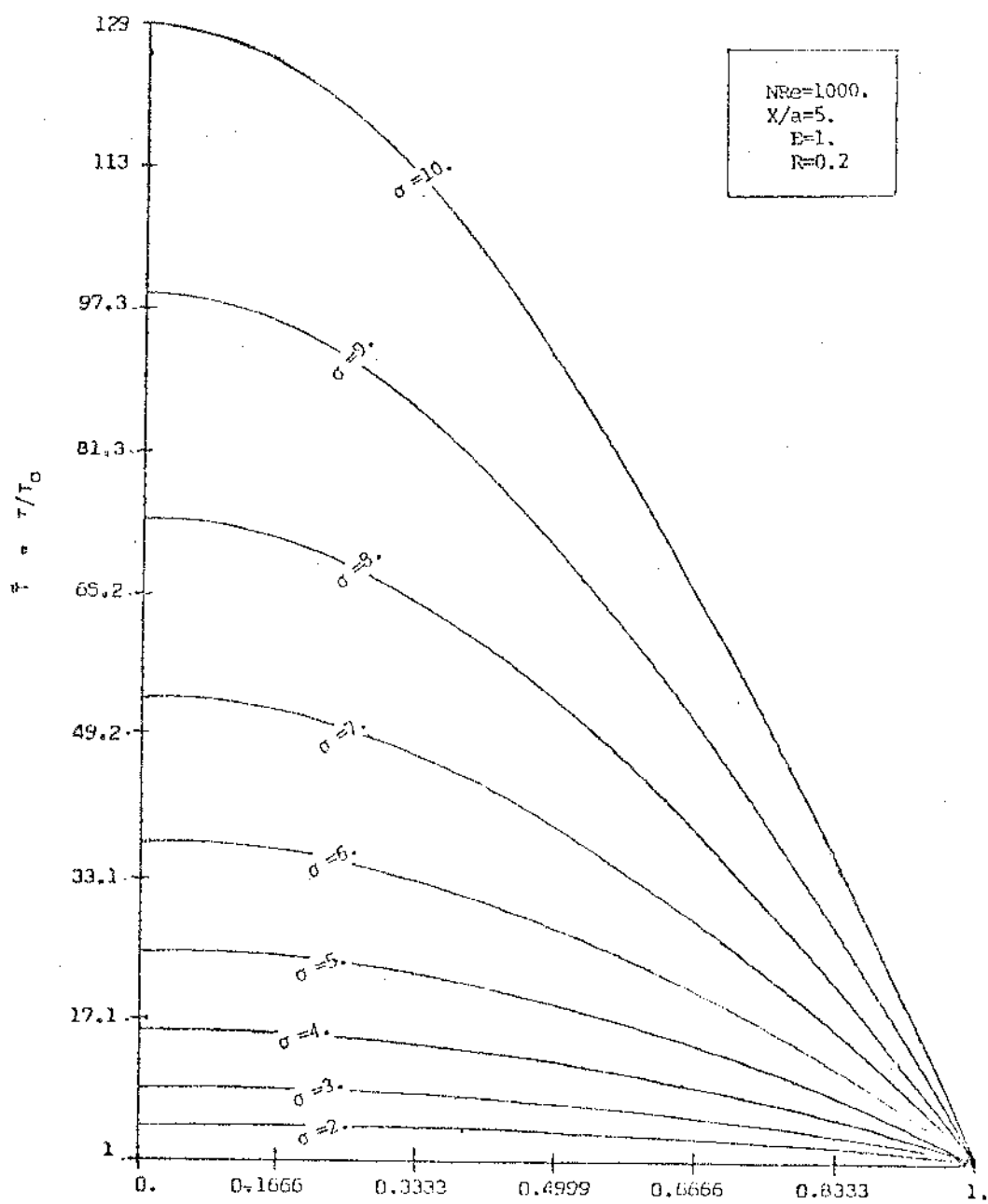
A figura 9 mostra que, nos casos de sucção, a temperatura decresce para zero a medida que a distância axial aumenta. Isto é compatível pois, havendo sucção de fluido pela parede do tubo é natural que a partir de uma certa distância axial não haverá mais fluido no cilindro. No caso em que não há sucção e nem injeção ($R = 0$), a distribuição da temperatura mantém-se constante. Nos casos de injeção, se for de pequena intensidade os perfis crescem lentamente (quase linearmente), porém, se aumentarmos um pouco a intensidade, os perfis decrescem um pouco no início para depois crescerem quase exponencialmente.

Na figura 10, aumentamos o número de Prandtl para 4 e verificamos que os efeitos retratados na figura anterior ficam bem definidos a uma distância axial maior. Este fato é bem ilustrado pela figura 11, onde consideramos uma pequena sucção ($R = 0.1$) e variamos o número de Prandtl. A distribuição de temperatura decresce quase linearmente, sendo mais abrupta para os números de Prandtl maiores.

-- FIGURA 1 --



-- FIGURA 2 --



-- FIGURA 3 --

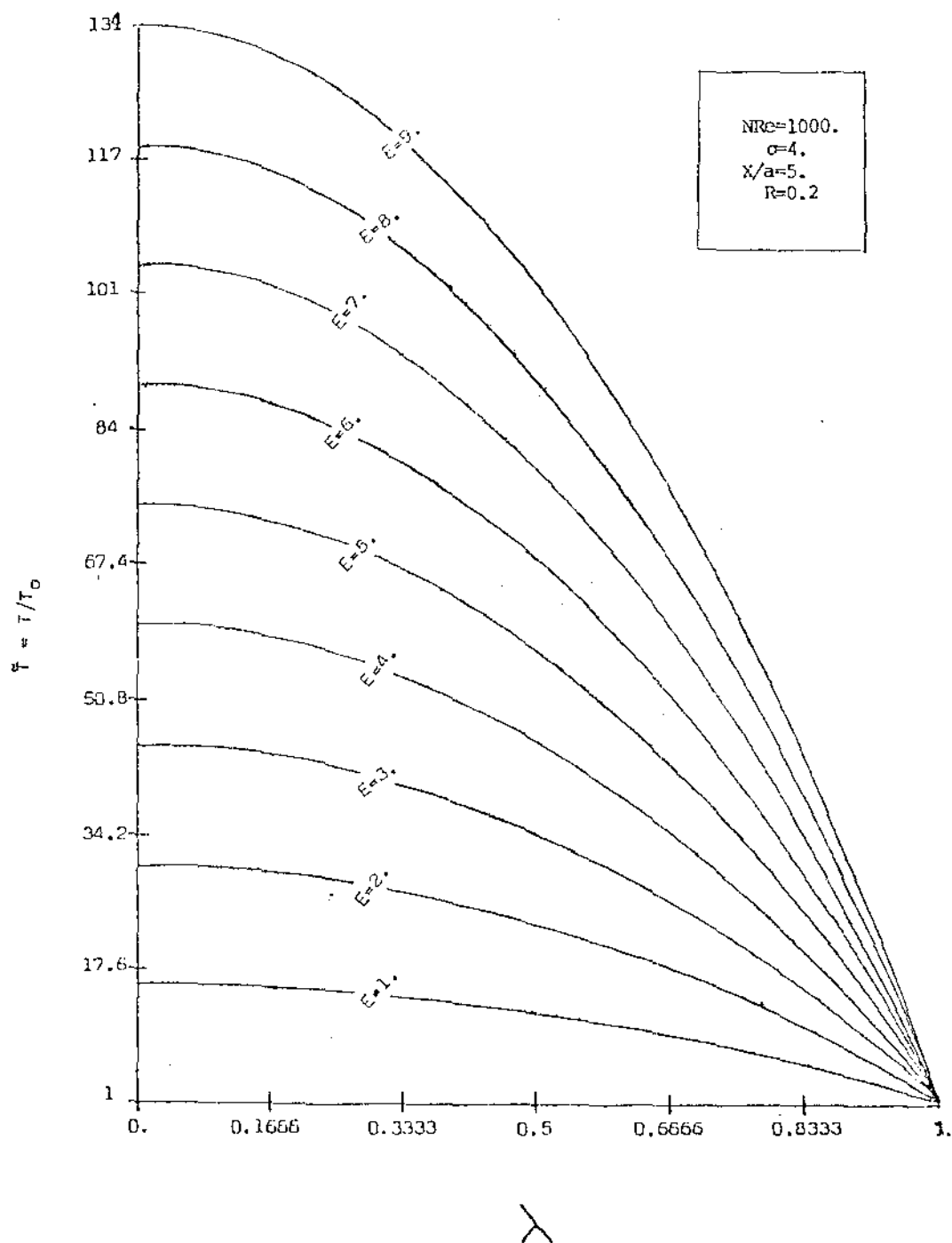


FIGURE 5

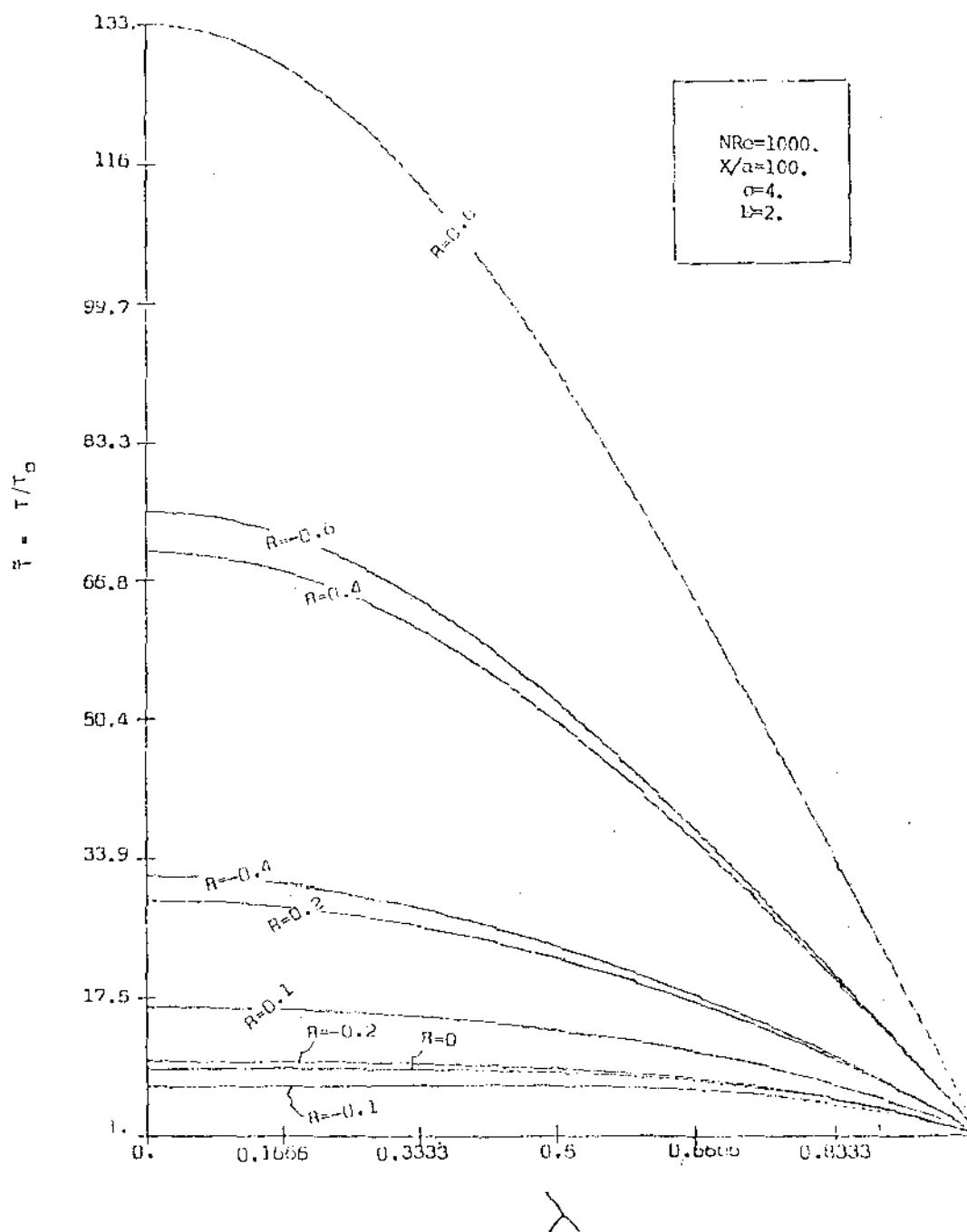


FIGURA 6 --

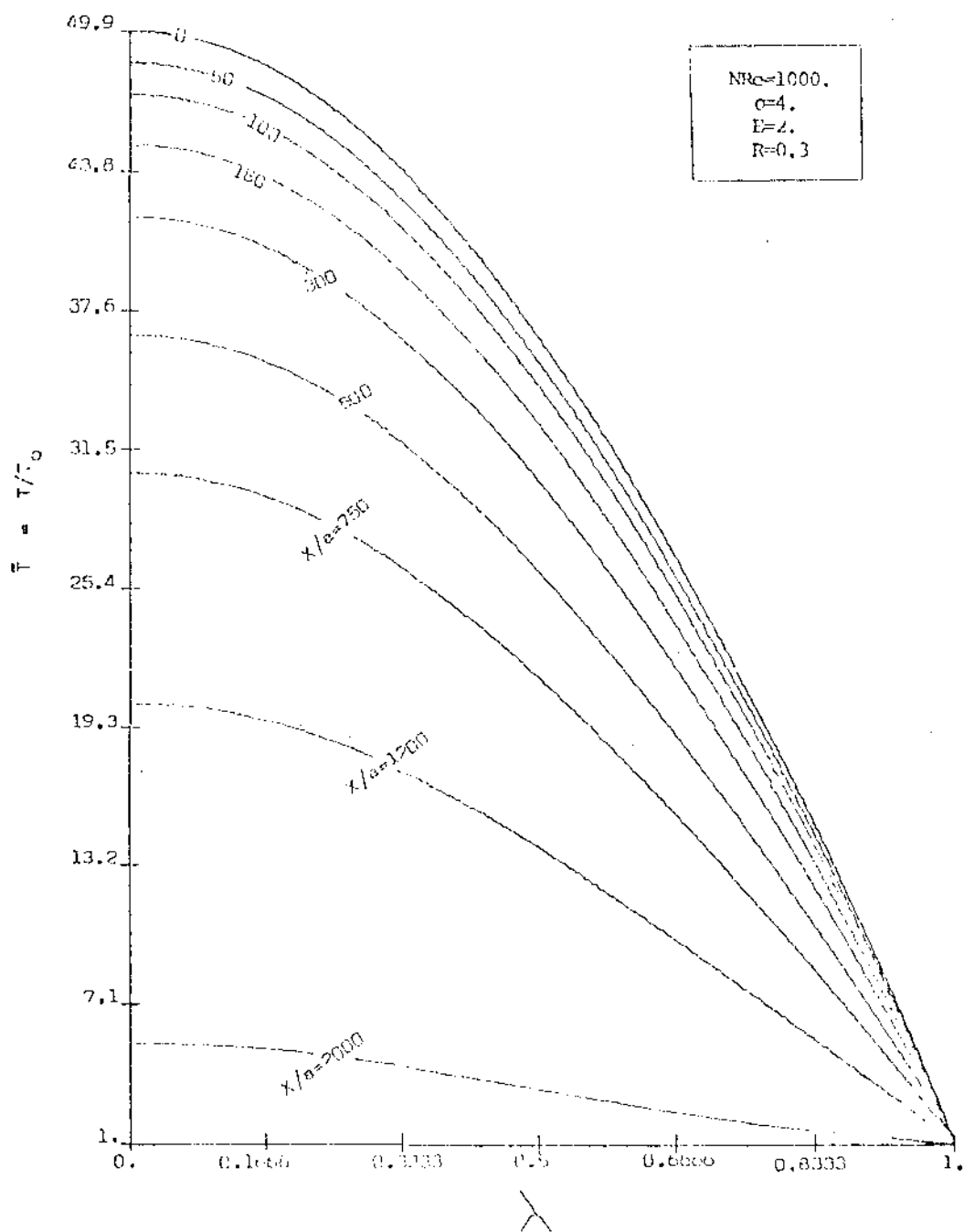


FIGURA 6A

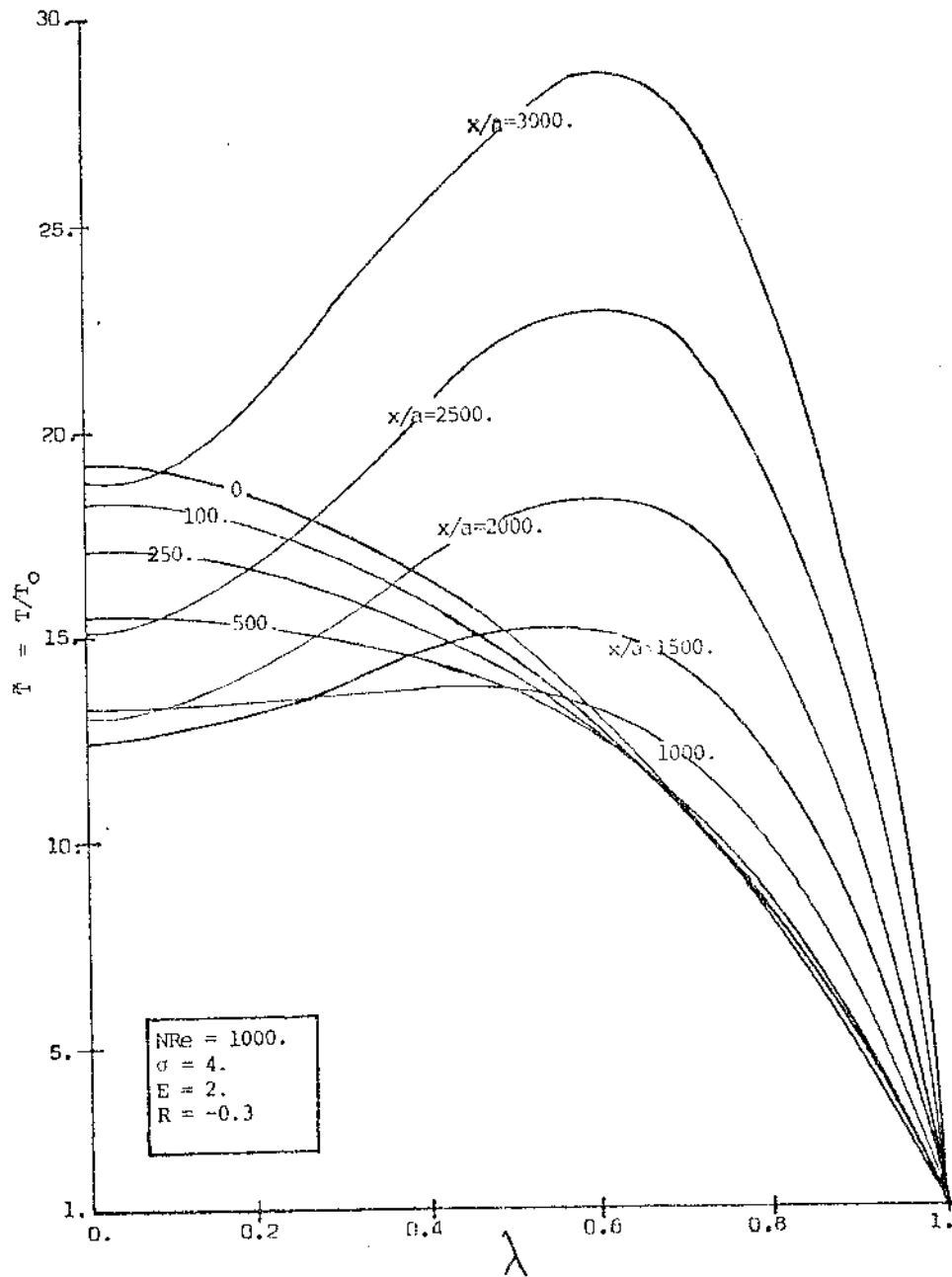
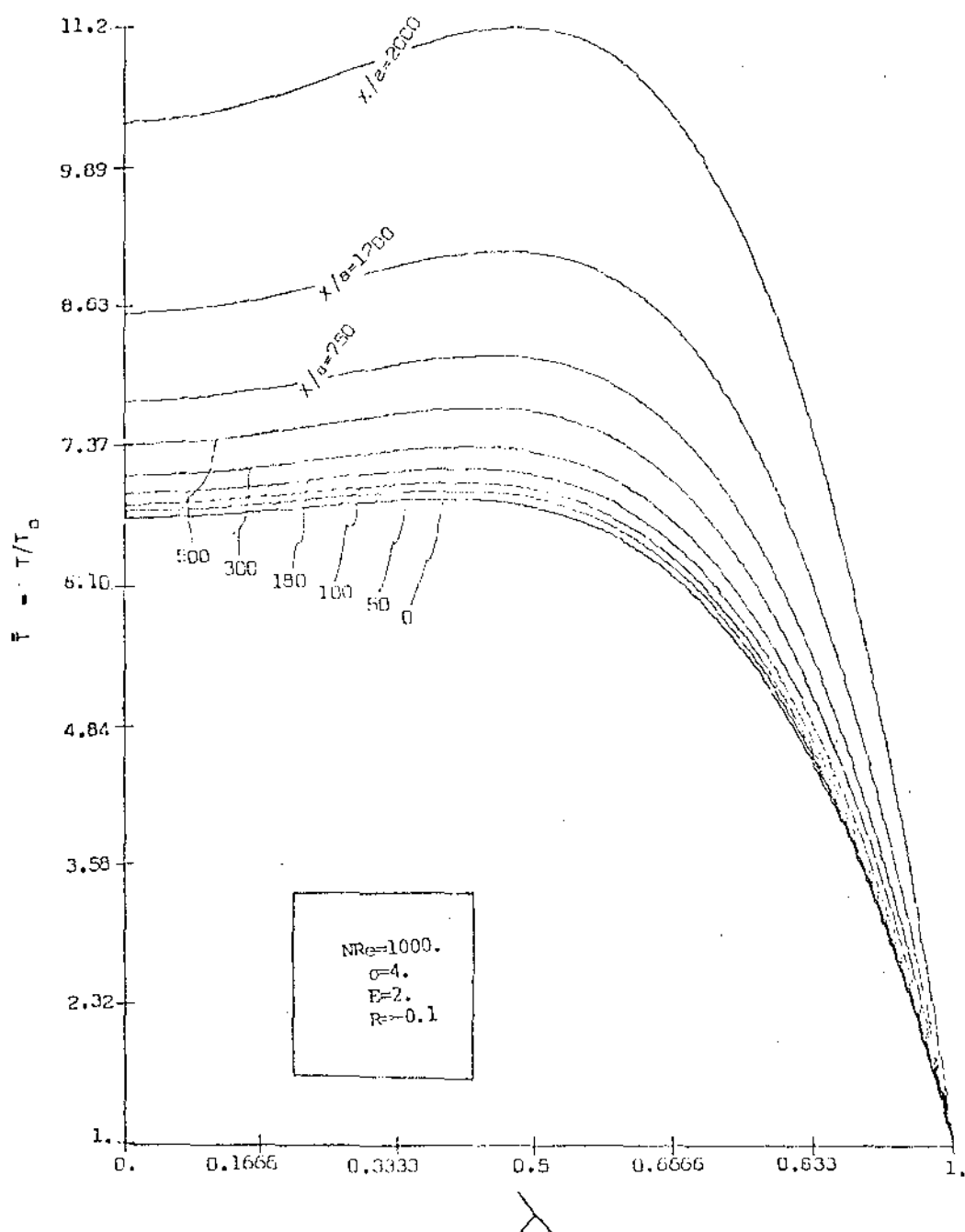
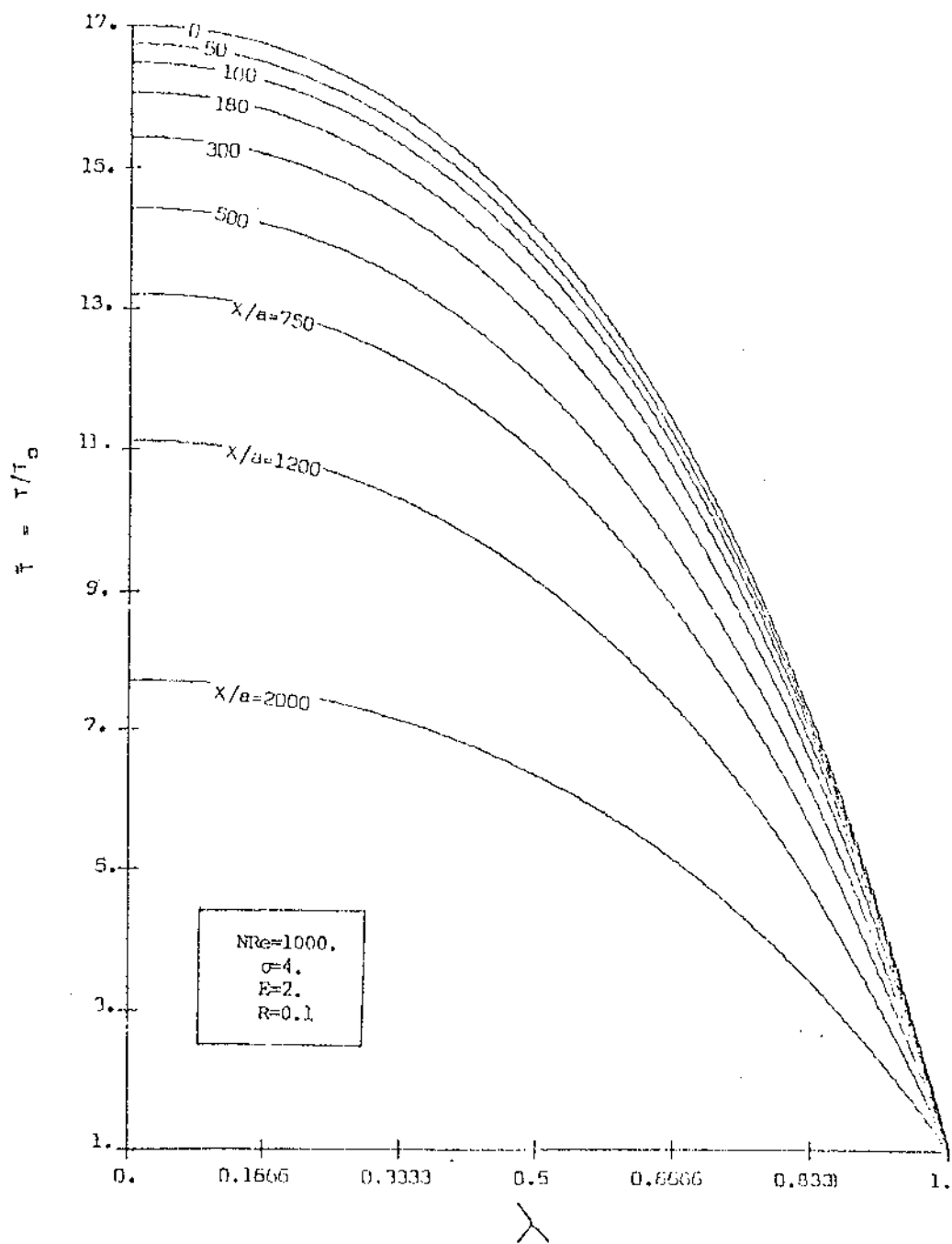


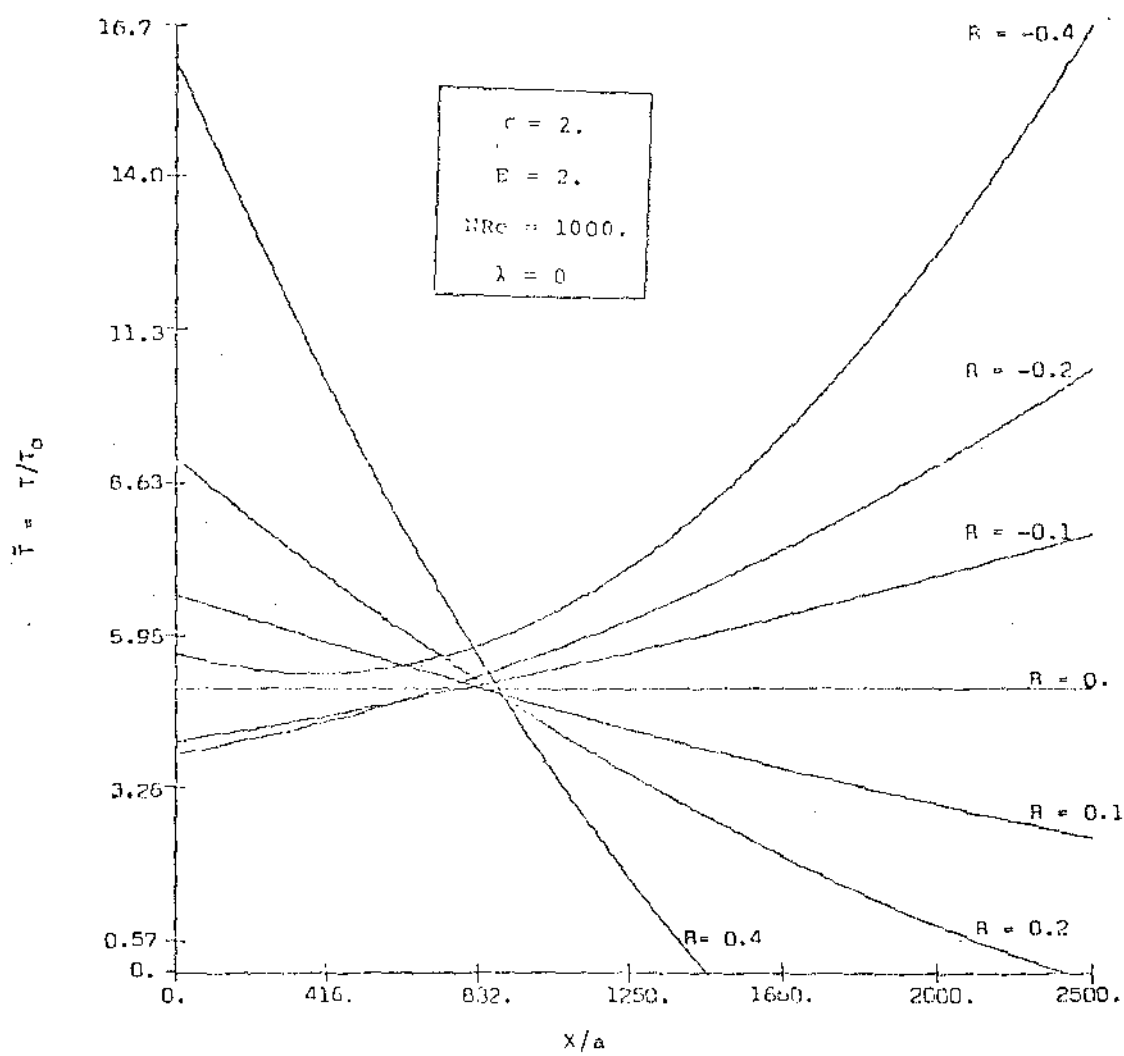
FIGURA 7



-- FIGURA 8 --



-- FIGURA 9 --



-- FIGURA 10 --

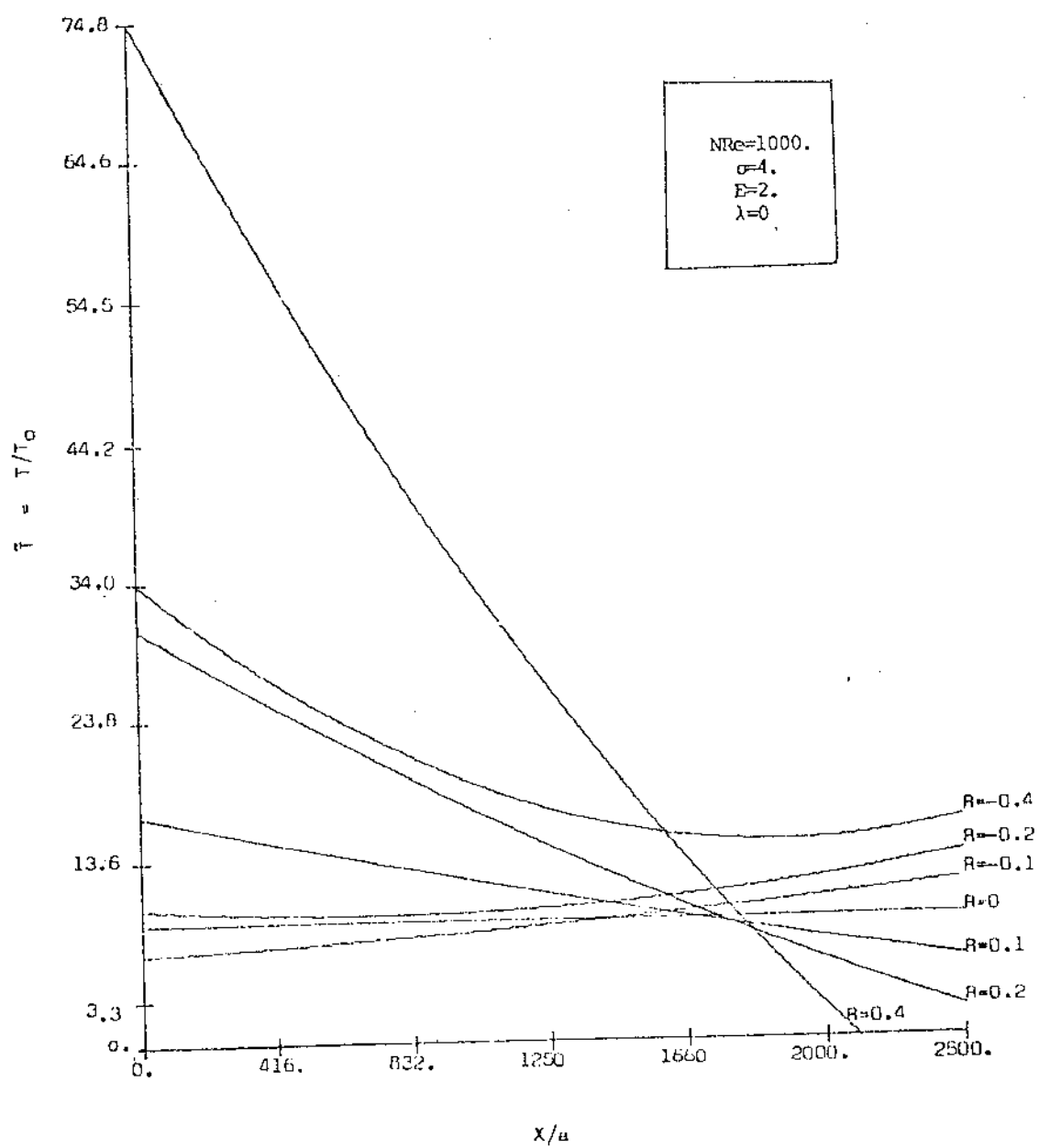
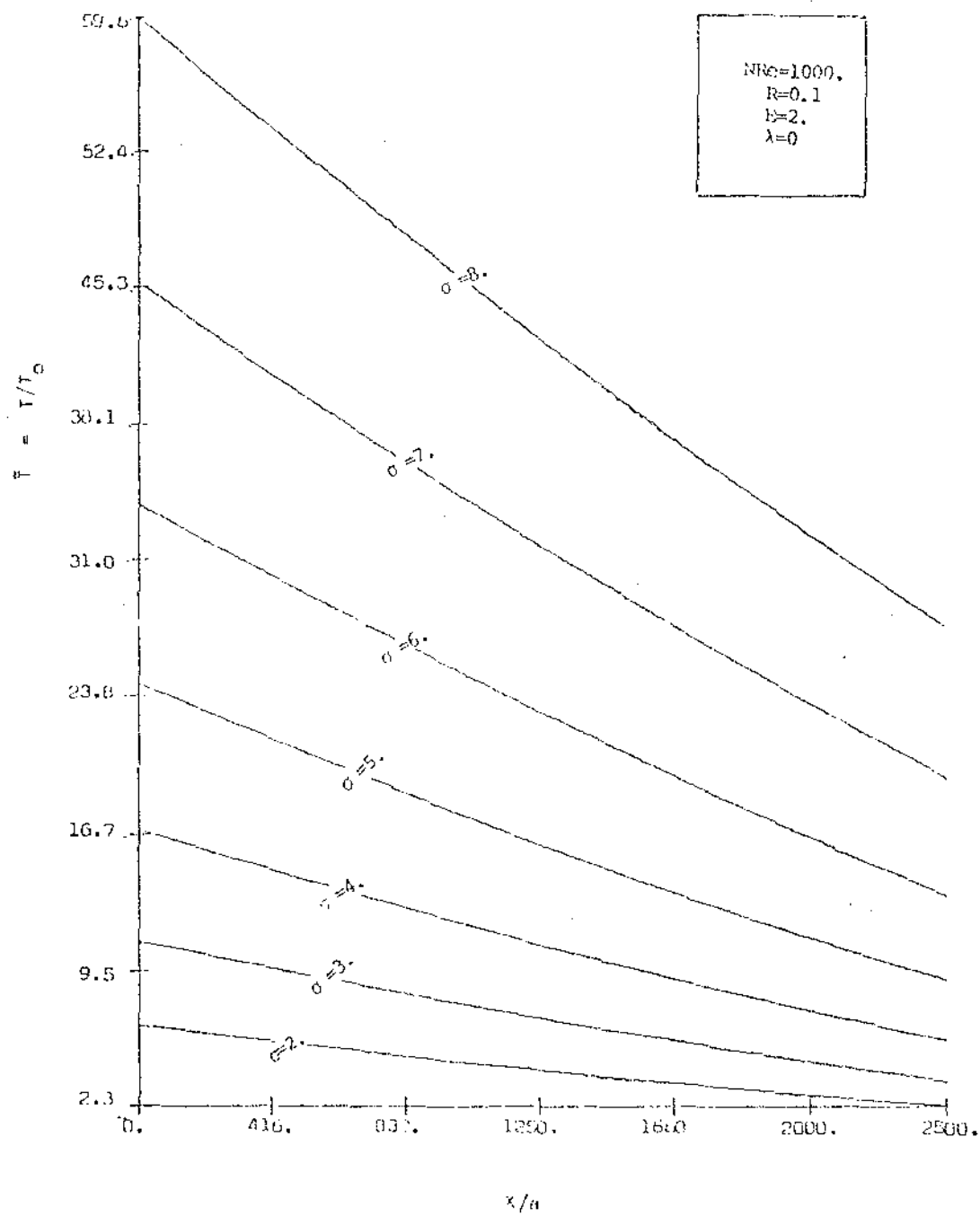


FIGURA 11



CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO ATRAVÉS DE UM TUBO ANELADO COM PARADES POROSAS .

3.1 - INTRODUÇÃO.

A pesquisa desenvolvida neste capítulo visa dar continuidade ao estudo do comportamento da temperatura em tubos porosos. Consideramos aqui um escoamento anelar, isto é, um escoamento limitado por duas paredes porosas de dois tubos cilíndricos concêntricos.

Sobre esse tipo de problema, Berman [4] em 1958, sob certas restrições aplicadas à componente radial de velocidade do escoamento, obteve uma solução exata das equações de Navier-Stokes. Mais tarde em 1963, Bhatnagar [5] generalizou o problema para fluidos visco-elásticos e obteve as componentes de velocidade através de método clássico de perturbações.

O propósito do presente capítulo é estender esse estudo ao problema da distribuição de temperatura de um escoamento laminar permanente de fluidos Newtonianos entre dois tubos cilíndricos coaxiais porosos.

Aqui, obtemos uma solução exata para a equação da energia . O comportamento dessa solução é analisado graficamente no final do capítulo.

3.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.

Consideremos dois tubos cilíndricos concêntricos infinitos

com paredes porosas de raios 'a' e 'b' ($a > b$).

Denominemos simplesmente de r o segmento de raio que varia de 'b' a 'a' ($b \leq r \leq a$).

Usemos a mesma notação do capítulo anterior para o campo de velocidade.

Assumimos que a razão de injeção de fluido em uma parede é igual à razão de sucção de fluido noutra parede. Esta condição é satisfeita se

$$bv_b = av_a \quad (3.1)$$

onde v_b e v_a são as velocidades radiais dos tubos menor e maior respectivamente, isto é,

$$v(r) = \begin{cases} v_a & \text{em } r = a \\ v_b & \text{em } r = b \end{cases} \quad (3.2)$$

Além disso, o escoamento obedece às seguintes condições:

- 1) o fluido é Newtoniano incompressível;
- 2) o escoamento é laminar permanente;
- 3) não existe forças externas agindo no fluido;
- 4) o escoamento é bi-dimensional;
- 5) as partículas de fluido em contato com as paredes dos tubos tem velocidade axial nula.

Para a distribuição de temperatura, assumimos que as paredes maior e menor dos tubos, mantem-se, durante o escoamento, a temperaturas constantes T_1 e T_2 respectivamente.

3.3 - REDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO.

Uma vez escolhido o sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo dos x estendendo-se ao longo do eixo comum aos cilindros, as equações de continuidade e de Navier-Stokes são iguais a (2.3), (2.4) e (2.5), com ressalva de que o parâmetro $\lambda = \frac{r}{a}$ é agora de menor extensão e é dado por

$$\xi \leq \lambda \leq 1, \quad (3.3)$$

onde $\xi = \frac{b}{a}$.

Devido a restrição (3.1) para o escoamento vertical, a componente axial de velocidade, u , não depende de x .

Em vista disso, as equações (2.3), (2.4) e (2.5) reduzem-se a:

$$\frac{\partial(\lambda v)}{\partial \lambda} = 0 \quad ; \quad (3.4)$$

$$\frac{v}{a} \frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{1}{a^2} \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \frac{1}{a^2 \lambda} \frac{du}{d\lambda} \right) \quad (3.5)$$

e

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} = - \frac{1}{a\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (3.6)$$

sujeitas às condições de contorno.

$$v = \begin{cases} v_a & \text{em } \lambda = 1 \\ v_b & \text{em } \lambda = \xi \end{cases} \quad (3.7)$$

e

$$u(1) = u(\xi) = 0 \quad (3.8)$$

3.4 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO.

De (3.4) e (3.7) segue-se que

$$\boxed{v(\lambda) = -\frac{v_a}{\lambda}} \quad (3.9)$$

Assim, a componente radial de velocidade também independe da distância axial.

Portanto, as equações (3.5) e (3.6), com o auxílio de (3.9), passam a ser

$$\frac{a^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d^2 u}{d\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{du}{d\lambda} \quad (R - 1) \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{v_a^2}{\lambda^3} \quad (3.11)$$

onde agora $R = \frac{a v_a}{v}$.

Por (3.11) temos que

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \lambda} = 0 \quad (3.12)$$

Assim, se fizermos

$$\frac{a^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = C \equiv \text{const.}, \quad (3.13)$$

a equação (3.10) reduz-se a uma equação diferencial ordinária linear não-homogênea de 2ª ordem:

$$u''(\lambda) - \frac{1}{\lambda} u'(\lambda) (R - 1) = C \quad (3.14)$$

Integrando-se (3.14) com respeito a λ , obtemos

$$u'(\lambda) - \frac{R}{\lambda} u(\lambda) = \frac{C}{2} \lambda + \frac{C_1}{\lambda} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) configura-se a uma Equação Diferencial Linear de Cauchy de 1ª ordem que, segundo seu método de resolução e respeitando as condições (3.8), tem como solução única:

$$u(\lambda) = \frac{C}{2(2-R)} \left[(\lambda^2 - 1) + \frac{1-\xi^2}{1-\xi^R} (1 - \lambda^R) \right] \quad (3.16)$$

As soluções (3.9) e (3.16) identificam-se com as de Berman [4].

3.5 - REDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA.

Para o problema em questão, em que as velocidades axial e radial independem de x , e por isso também a temperatura, a equação da energia (2.48) reduz-se a:

$$\rho C_p \left(v \frac{dT}{dr} \right) = k \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + 2\mu \left[\left(\frac{dv}{dr} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \right] \quad (3.17)$$

As condições de contorno para a equação (3.17) são:

$$T(r) = \begin{cases} T_1 & \text{em } r = a \\ T_2 & \text{em } r = b \end{cases} \quad (3.18)$$

Fazendo T , u , v e r adimensionais pelas relações,

$$\begin{aligned} \bar{T} &= (T - T_2) / (T_1 - T_2) \quad ; \quad \bar{v} = v/v_a \quad ; \\ \bar{u} &= u/C \quad \quad \quad e \quad \quad \quad \lambda = r/a \quad (b \leq r \leq a) \end{aligned} \quad (3.19)$$

e substituindo-as em (3.17), vem

$$\sigma R \bar{v} \frac{d\bar{T}}{d\lambda} - \left(\frac{d^2 \bar{T}}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\bar{T}}{d\lambda} \right) =$$

$$\sigma E \left[2 \left(\frac{R}{NRe} \right)^2 \left(\frac{d\bar{v}}{d\lambda} \right)^2 + 2 \left(\frac{R}{NRe} \right)^2 \cdot \left(\frac{\bar{v}}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{u}}{d\lambda} \right)^2 \right], \quad (3.20)$$

onde agora $NRe = aC/v$, $\sigma = C_p \mu/k$ e $E = C^2/C_p(T_1 - T_2)$ são os números adimensionais de Reynolds para o escoamento horizontal, Prandtl e Eckert respectivamente.

Substituindo (3.9) e (3.16) em (3.20) encontramos a equação diferencial linear ordinária de 2ª ordem:

$$\bar{T}'' + \frac{(1-\sigma R)}{\lambda} \bar{T}' = - \sigma E \left\{ \left(\frac{2R}{NRe\lambda} \right)^2 + \left[\frac{1}{2(2-R)} (2\lambda - R \frac{1-\xi^2}{1-\xi^R} \lambda^{R-1}) \right]^2 \right\}, \quad (3.21)$$

com as condições de contorno

$$T(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{em } \lambda = 1 \\ 0 & \text{em } \lambda = \xi \end{cases}. \quad (3.22)$$

3.6 - SOLUÇÃO DA EQUACÃO DA ENERGIA.

Primeiramente, podemos reduzir a equação (3.21) a uma equação diferencial linear de Cauchy de 1ª ordem:

$$\bar{T}' - \frac{\sigma R}{\lambda} \bar{T} = \frac{C_1}{\lambda} - \frac{\sigma E}{\lambda} \int \left\{ \left(\frac{2R}{NRe\lambda} \right)^2 + \left[\frac{1}{2(R-R)} (2\lambda - R \frac{1-\xi^2}{1-\xi^R} \lambda^{R-1}) \right]^2 \right\} \lambda d\lambda, \quad (3.23)$$

onde C_1 é uma constante a ser determinada pelas condições (3.22).

Assim fica fácil encontrar a solução geral de (3.23):

$$\bar{T}(\lambda) = -\sigma E(\alpha_1 \lambda^{-2} + \alpha_2 \lambda^4 - \alpha_3 \lambda^{R+2} + \alpha_4 \lambda^{2R}) + C_2 \lambda^{\sigma R} - \frac{C_1}{\sigma R}, \quad (2.24)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{2R^2}{(\sigma R + 2)NRe^2};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4(4 - \sigma R)(2 - R)^2};$$

$$\alpha_3 = \frac{R(1 - \xi^2)}{(2 - R)^2(R + 2)(1 - \xi^R)(R - \sigma R + 2)};$$

$$\alpha_4 = \frac{(1 - \xi^2)^2}{8(2 - R)^2(1 - \xi^R)^2(2 - \sigma)}$$

e C_2 é também uma constante a ser determinada.

Finalmente, sob as condições (3.22), a função que rege a distribuição de temperatura no escoamento anelar é escrita como

$$\bar{T}(\lambda) = -\sigma E(\alpha_1 \lambda^{-2} + \alpha_2 \lambda^4 - \alpha_3 \lambda^{R+2} + \alpha_4 \lambda^{2R} + S_1 \lambda^{\sigma R} + S_2) \quad (3.25)$$

onde

$$S_1 = \frac{1}{1 - \xi^{\sigma R}} \left[\frac{\alpha_1(1 - \xi^2)}{\xi^2} - \alpha_2(1 - \xi^4) + \alpha_3(1 - \xi^{R+2}) - \alpha_4(1 - \xi^{2R}) - \frac{1}{\sigma E} \right]$$

e

$$S_2 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{-\alpha_1 (1-\xi^{\sigma R+2})}{\xi^2} + \alpha_2 (\xi^{\sigma R} - \xi^4) - \alpha_3 (\xi^{\sigma R} - \xi^{R+2}) + \right. \\ \left. + \alpha_4 (\xi^{\sigma R} - \xi^{2R}) + \frac{\xi^{\sigma R}}{\sigma E} \right].$$

Aqui, valores positivos de R (ou v_a e v_b) representam sucção na parede externa e injeção na parede interna, enquanto que os valores negativos de R representam sucção na parede interna e injeção na parede externa do anelado.

3.7 - DISTRIBUIÇÃO MÉDIA DE TEMPERATURA.

É interessante saber que efeitos ocorrem quando variamos a razão entre os raios dos cilindros.

Esta análise fica facilitada se calcularmos a distribuição média de temperatura no intervalo $[\xi, 1]$.

Assim, pelo Teorema do Valor Médio generalizado, definimos a distribuição média de temperatura no intervalo $[\xi, 1]$ pela relação

$$\bar{T}_M = \frac{2}{1-\xi^2} \int_{\xi}^1 \lambda \bar{T}(\lambda) d\lambda. \quad (3.26)$$

Pode-se ver facilmente que

$$\bar{T}_M = \frac{2\sigma E}{1-\xi^2} \left[\alpha_1 \ln \xi - \frac{\alpha_2 (1-\xi^6)}{6} + \frac{\alpha_3 (1-\xi^{R+4})}{R+4} - \frac{\alpha_4 (1-\xi^{2(R+1)})}{2(R+1)} \right. \\ \left. - \frac{S_1 (1-\xi^{\sigma R+2})}{\sigma R+2} - \frac{S_2 (1-\xi^2)}{2} \right] \quad (3.27)$$

3.8 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.

Estudemos agora o comportamento da função distribuição de temperatura dada por (3.25). Durante toda essa análise fixamos o número de Reynolds para o escoamento horizontal em $NRe = 1000$. Consideremos primeiramente o caso particular dos cilindros de paredes não porosas. Para isto, basta considerar a função (3.25) na ausência de escoamento vertical, isto é, $R = 0$.

Tomando-se o limite de (3.25) quando R tende a zero, obtemos

$$[\bar{T}(\lambda)]_{R=0} = \frac{\sigma E}{64} \left\{ (1-\lambda^4) + \beta_1 (1-\lambda^2) - [\beta_2 + \beta_3 \ln(\lambda/\xi)] \ln \lambda \right\} - \frac{\ln(\lambda/\xi)}{\ln \xi}, \quad (3.28)$$

onde

$$\beta_1 = \frac{4(1-\xi^2)}{\ln \xi};$$

$$\beta_2 = \frac{(1-\xi^2)[(1-\xi^2)\ln \xi + 2(1-\xi^2)]}{\ln \xi^2}$$

$$\beta_3 = \frac{2(1-\xi^2)^2}{\ln \xi^2}.$$

A função (3.28) depende somente da distância radial e seu perfil é quase linear como mostram as figuras 12, 13, 14, 15 e 16. A variação dos parâmetros físicos de Prandtl e Eckert acarretam pequenas variações (quase insignificantes) em seus perfis (figuras 12 e 13).

Uma variação um pouco maior ocorre quando aumentamos ou diminuímos a razão do raio. Quanto menor a razão do raio ($\xi=0.2$, fig. 15) o perfil torna-se menos linear fazendo uma pequena saliência

na direção da parede interna. Enquanto que, quanto maior a razão ($\xi=0.8$, fig. 16) mais linear torna-se o perfil.

Em síntese, podemos dizer que num escoamento anelar, sem sucção ou injeção de fluido pelas paredes, a distribuição de temperatura é quase uniforme com uma leve tendência de maior distribuição para a parede interna.

Voltando agora aos cilindros porosos, analisemos primeira - mente o caso de sucção pela parede externa e injeção pela interna, isto é, $R > 0$.

Antes de tudo, notemos que a solução (3.25) possui forma in determinada para $R = 2$, $R = 4/\sigma$ e $R = 2/(\sigma-1)$. Obtemos as soluções restritas a esses casos, tomando-se o limite de (3.25) quando R tende aos respectivos valores. Assim temos,

$$[\bar{T}(\lambda)]_{R=2} = -\sigma E[h_1 \lambda^{-2} + (h_2 + h_3 \ln \lambda + h_4 \ln^2 \lambda) \lambda^4 - M_1 \lambda^{2\sigma} + M_2]; \quad (3.29)$$

$$[T(\lambda)]_{R=\frac{4}{\sigma}} = -\sigma E[\alpha_1 \lambda^{-2} - \alpha_3 \lambda^{R+2} + \alpha_4 \lambda^{2R} + f_1(\lambda) + \delta_1 \lambda^{\sigma R} + \delta_2]; \quad (3.30)$$

$$[T(\lambda)]_{R=\frac{2}{\sigma-1}} = -\sigma E[\alpha_1 \lambda^{-2} + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^{2R} + f_2(\lambda) + \eta_1 \lambda^{\sigma R} + \eta_2], \quad (3.31)$$

onde

$$h_1 = 4/(\sigma+1)NRe^2;$$

$$h_2 = \frac{\xi^2 \ln \xi}{16(1-\xi^2)^2(2-\sigma)^2} [2 \ln \xi (3\xi^2-2)(2-\sigma)^2 - 4\xi^2 + 2\sigma\xi^2 - \sigma^2] + \frac{1}{64(2-\sigma)}$$

$$h_3 = \frac{1}{16(1-\xi^2)(2-\sigma)^2} [4\xi^2 \ln \xi (2-\sigma) - \sigma(1-\xi^2)] ;$$

$$h_4 = \frac{1}{8(2-\sigma)} ;$$

$$M_1 = \frac{1}{1-\xi^{2\sigma}} \left[-\frac{h_1(1-\xi^2)}{\xi^2} + h_2(1-\xi^4) - (h_3+h_4 \ln \xi) \xi^4 \ln \xi + \frac{1}{\sigma E} \right] ;$$

$$M_2 = \frac{1}{1-\xi^{2\sigma}} \left[-\frac{h_1(1-\xi^{2\sigma+2})}{\xi^2} + h_2(\xi^{2\sigma} - \xi^4) + \frac{\xi^{2\sigma}}{\sigma E} \right] ;$$

$$f_1(\lambda) = \frac{\sigma^2[(1-\xi^4)\lambda^4 \ln \lambda - (1-\lambda^4)\xi^4 \ln \xi]}{16(1-\xi^4)(\sigma-2)^2}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{\alpha_1(1-\xi^2)}{\xi^2} + \alpha_3(1-\xi^{R+2}) - \alpha_4(1-\xi^{2R}) - \frac{1}{\sigma E} \right] ;$$

$$\delta_2 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{-\alpha_1(1-\xi^{\sigma R+2})}{\xi^2} - \alpha_3(\xi^{\sigma R} - \xi^{R+2}) + \alpha_4(\xi^{\sigma R} - \xi^{2R}) + \frac{\xi^{\sigma R}}{\sigma E} \right] ;$$

$$f_2(\lambda) = \frac{(\sigma-1)^2(1-\xi^2)[(1-\lambda^{\sigma R})\xi^{\sigma R} \ln \xi - (1-\lambda^{\sigma R})\lambda^{\sigma R} \ln \lambda]}{4\sigma(1-\xi^R)(1-\xi^{\sigma R})(\sigma-2)^2} ;$$

$$\eta_1 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{\alpha_1(1-\xi^2)}{\xi^2} - \alpha_2(1-\xi^4) - \alpha_4(1-\xi^{2R}) - \frac{1}{\sigma E} \right] ;$$

$$\eta_2 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{-\alpha_1(1-\xi^{\sigma R+2})}{\xi^2} + \alpha_2(\xi^{\sigma R} - \xi^4) + \alpha_4(\xi^{\sigma R} - \xi^{2R}) + \frac{\xi^{\sigma R}}{\sigma E} \right].$$

Nas figuras 12 e 13 fixamos o número de Reynolds para o escoamento vertical em $R = 5$. O perfil agora é de uma curva situada ao lado esquerdo do perfil correspondente a $R = 0$, ou seja, mais próximo da parede externa do anelado. A variação crescente do número de Prandtl implica numa diminuição gradativa de \bar{T} , acarretando, para grandes valores de σ , a formação de uma camada térmica junto à parede externa. No entanto, a variação do número de Eckert, fig. 13, não apresenta modificação significativa nos perfis de \bar{T} .

Nas figuras 14, 15 e 16 apresentamos a variação do número de Reynolds sob três razões diferentes de raio. Observamos que o aumento do número de Reynolds contribui para uma diminuição de \bar{T} . Para $R \geq 8$, aproximadamente, aparece a formação de camada térmica junto à parede externa. Essa camada fica mais acentuada à medida que a razão do raio (ξ) do anelado for diminuída.

Passemos, agora, para o caso em que a sucção é realizada pela parede interna e a injeção pela externa, isto é, $R < 0$.

Primeiramente consideremos as soluções restritas aos valores negativos de R que estabelecem formas indeterminadas de (3.25):

$$[\bar{T}(\lambda)]_{R=-2} = -\sigma E \{ \alpha_1 \lambda^{-2} + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_4 \lambda^{2R} + f_3(\lambda) + \eta_1 \lambda^{\sigma R} + \eta_2 \} \quad (3.32)$$

e

$$[\bar{T}(\lambda)]_{R=-\frac{2}{\sigma}} = -\sigma E \{ \alpha_2 \lambda^4 - \alpha_3 \lambda^{R+2} + \alpha_4 \lambda^{2R} + f_4(\lambda) + N_1 \lambda^{\sigma R} + N_2 \} \quad (3.33)$$

onde

$$f_3(\lambda) = \frac{-\xi^{2\sigma+2}}{16(1-\xi^{2\sigma})} \{ (1-\lambda^{-2\sigma}) \ln \xi - (1-\xi^{-2\sigma}) \ln \lambda \} ;$$

$$f_4(\lambda) = \frac{-8 \{ (1-\lambda^{-2}) \ln \xi + (1-\xi^2) \lambda^{-2} \ln \lambda \}}{N \operatorname{Re}^2 \sigma^2 (1-\xi^2)} ;$$

$$\eta_1 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{\alpha_1 (1-\xi^2)}{\xi^2} - \alpha_2 (1-\xi^4) - \alpha_4 (1-\xi^{2R}) - \frac{1}{\sigma E} \right] ;$$

$$\eta_2 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} \left[\frac{\alpha_1 (\xi^{\sigma R+2} - 1)}{\xi^2} + \alpha_2 (\xi^{\sigma R} - \xi^4) + \alpha_4 (\xi^{\sigma R} - \xi^{2R}) + \frac{\xi^{\sigma R}}{\sigma E} \right] ;$$

$$N_1 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} - [\alpha_2 (1-\xi^4) + \alpha_3 (1-\xi^{R+2}) - \alpha_4 (1-\xi^{2R}) - \frac{1}{\sigma E}] ;$$

$$N_2 = \frac{1}{1-\xi^{\sigma R}} [\alpha_2 (\xi^{\sigma R} - \xi^4) - \alpha_3 (\xi^{\sigma R} - \xi^{R+2}) + \alpha_4 (\xi^{\sigma R} - \xi^{2R}) + \frac{\xi^{\sigma R}}{\sigma E}] .$$

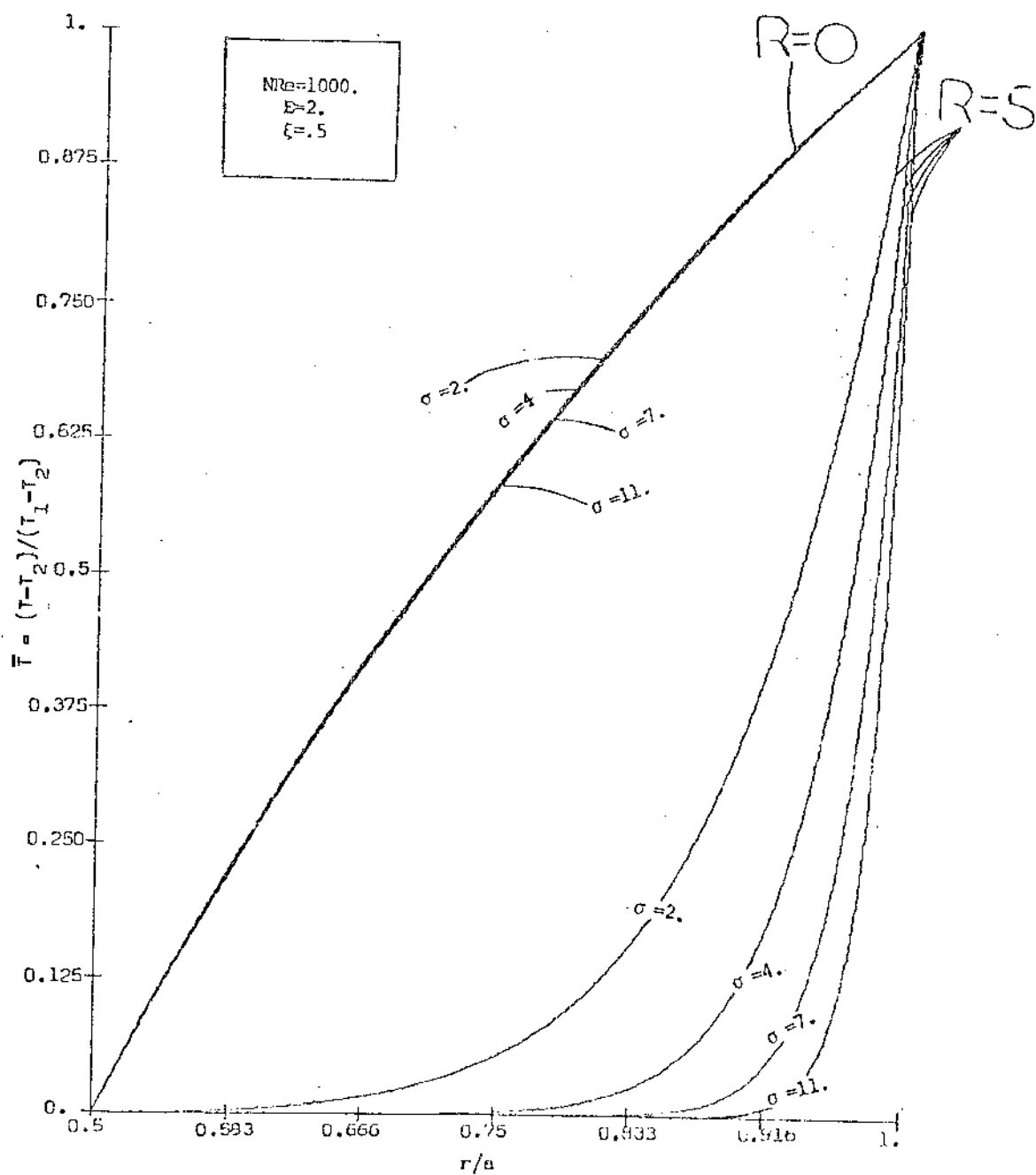
No caso de $R < 0$, os perfis situam-se do lado esquerdo do perfil correspondente a $R = 0$.

A razão de variação de \bar{T} é inversamente proporcional ao valor relativo de R (figuras 14, 15 e 16). Aqui a camada térmica é formada junto à parede interna e é bem acentuada para $R \leq -8$ e $\xi \leq 0.5$.

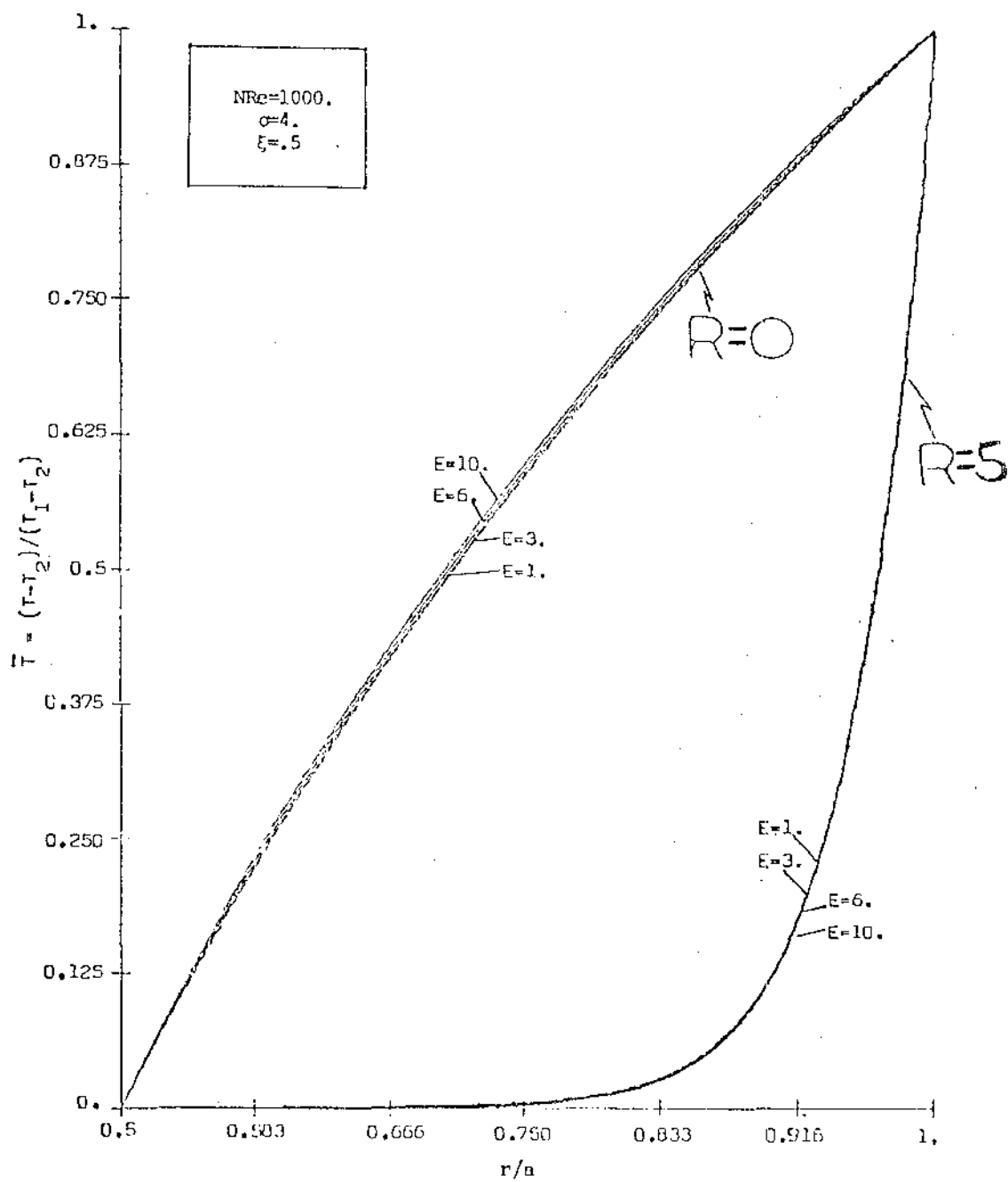
Nas figuras 17 e 18 tomamos R contra a distribuição média de temperatura dada pela relação (3.27). Nosso objetivo aqui é analisar os efeitos da variação das diferentes razões de raio. Genericamente, para qualquer $0 < \xi < 1$, podemos dizer que quando $R \rightarrow +\infty$,

$\bar{T}_M \rightarrow 0$ e quando $R \rightarrow -\infty$, $\bar{T}_M \rightarrow 1$. No entanto, afirmamos que quanto menor ξ mais rapidamente os limites são atingidos e, por conseguinte, mais acentuada será a camada térmica.

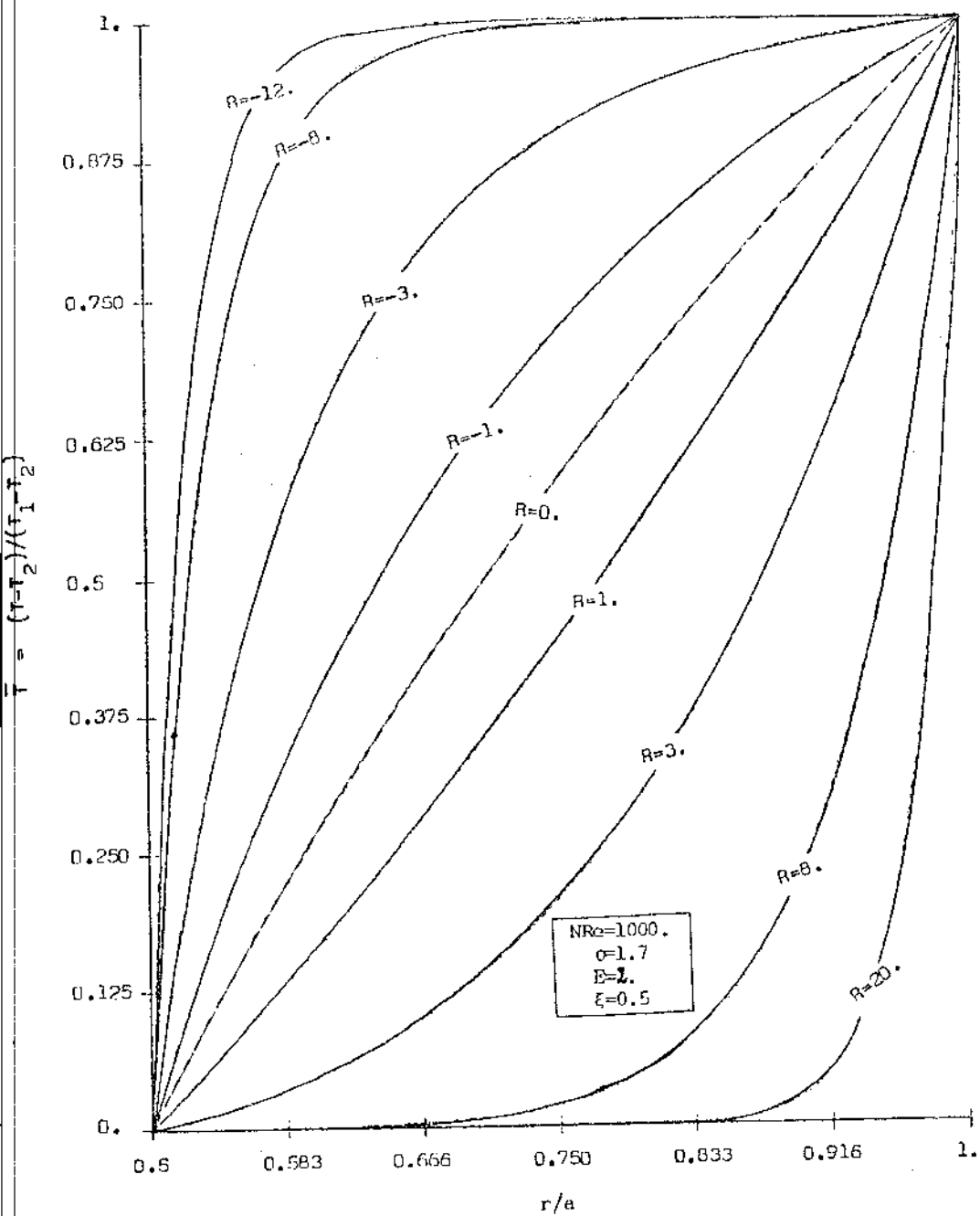
-- FIGURA 12 --



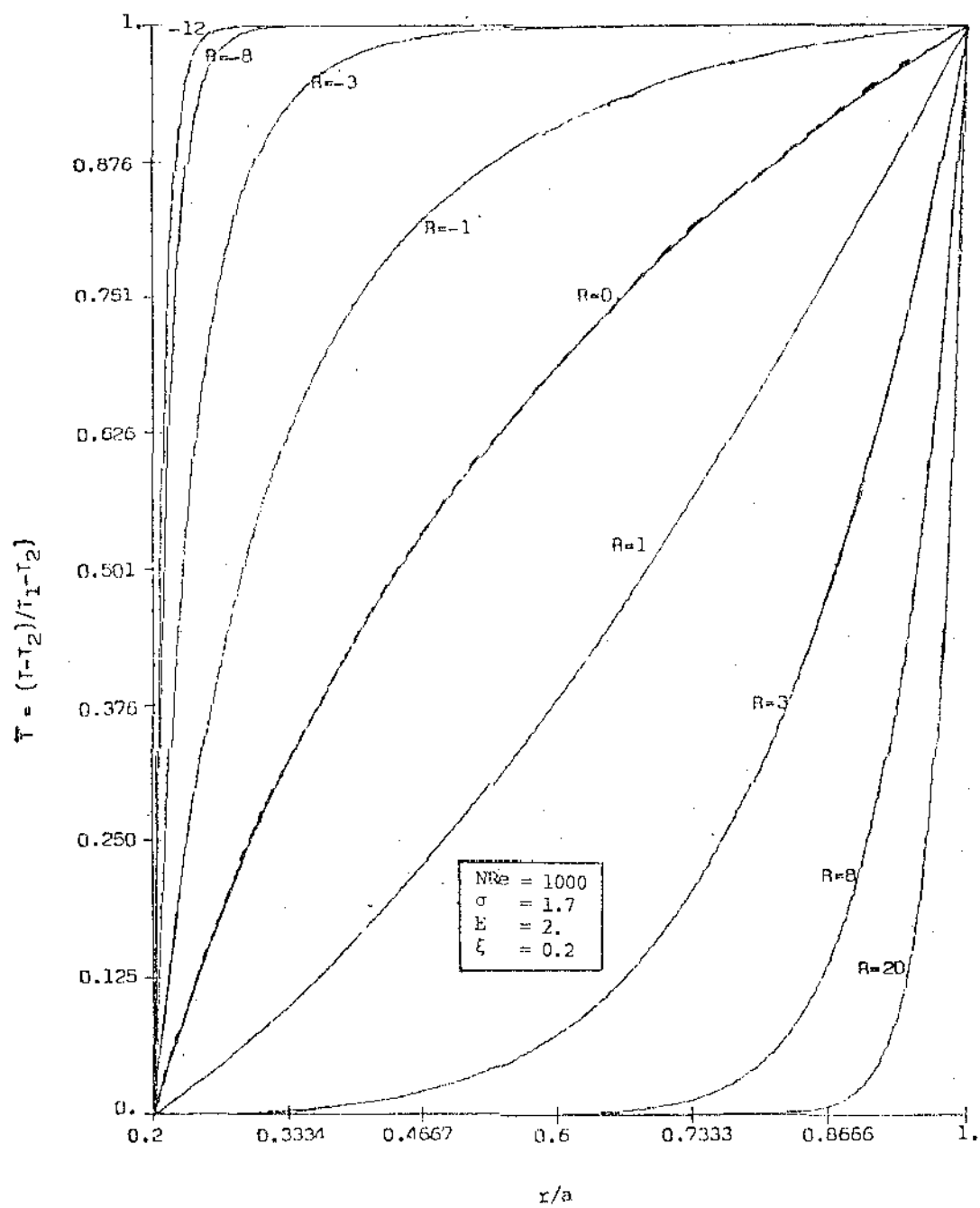
-- FIGURA 13 --



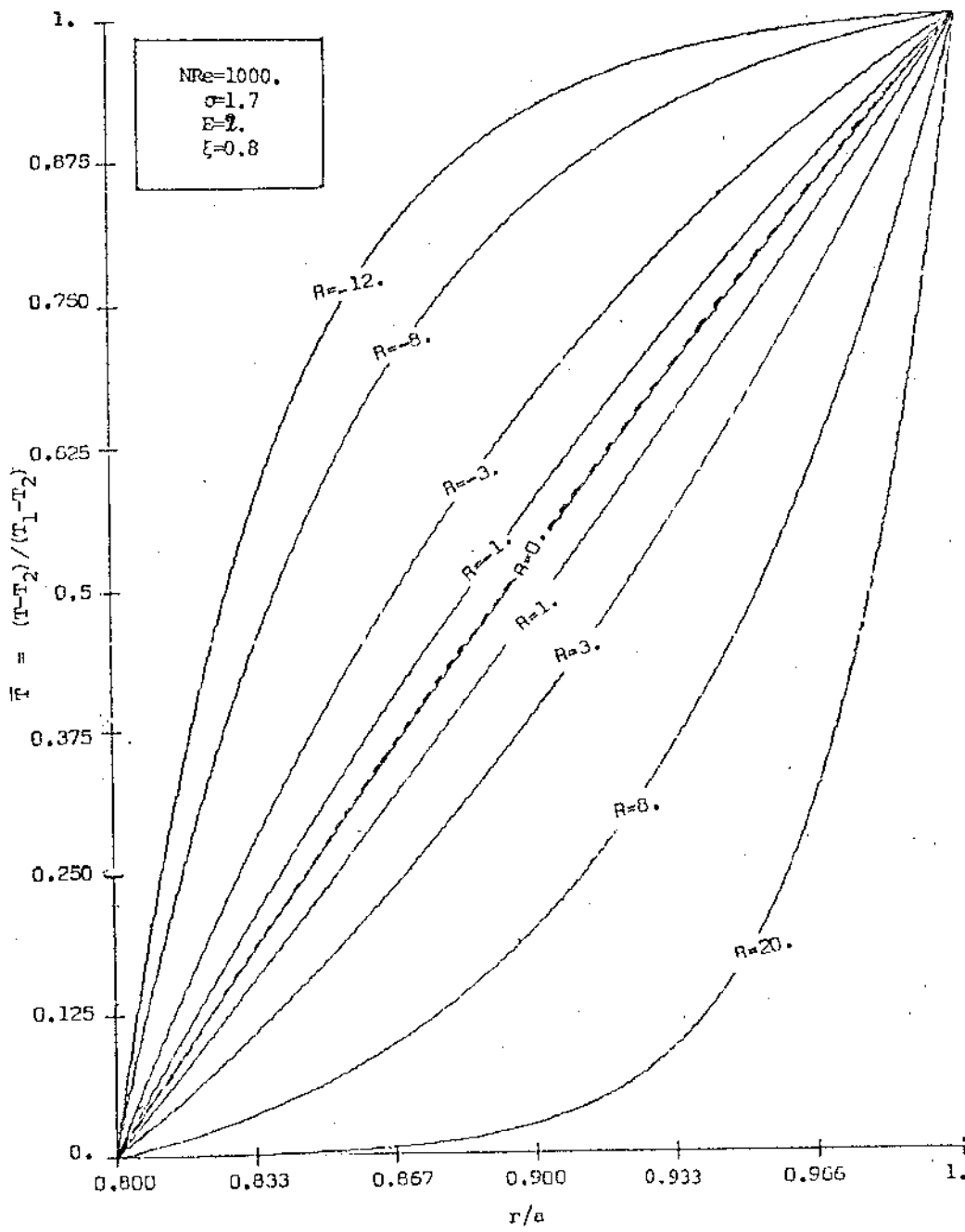
-- FIGURA 14 --



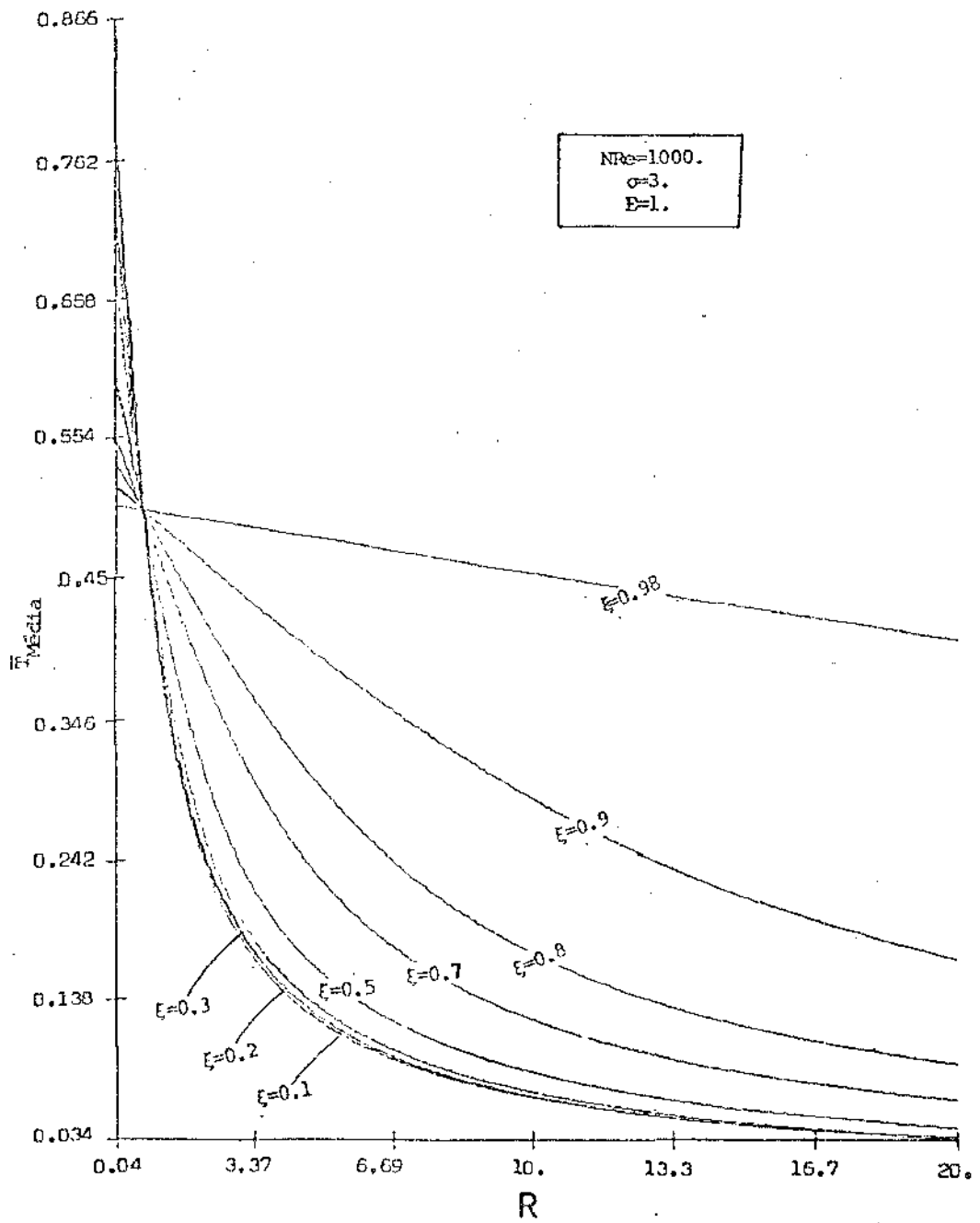
-- FIGURA 15 --



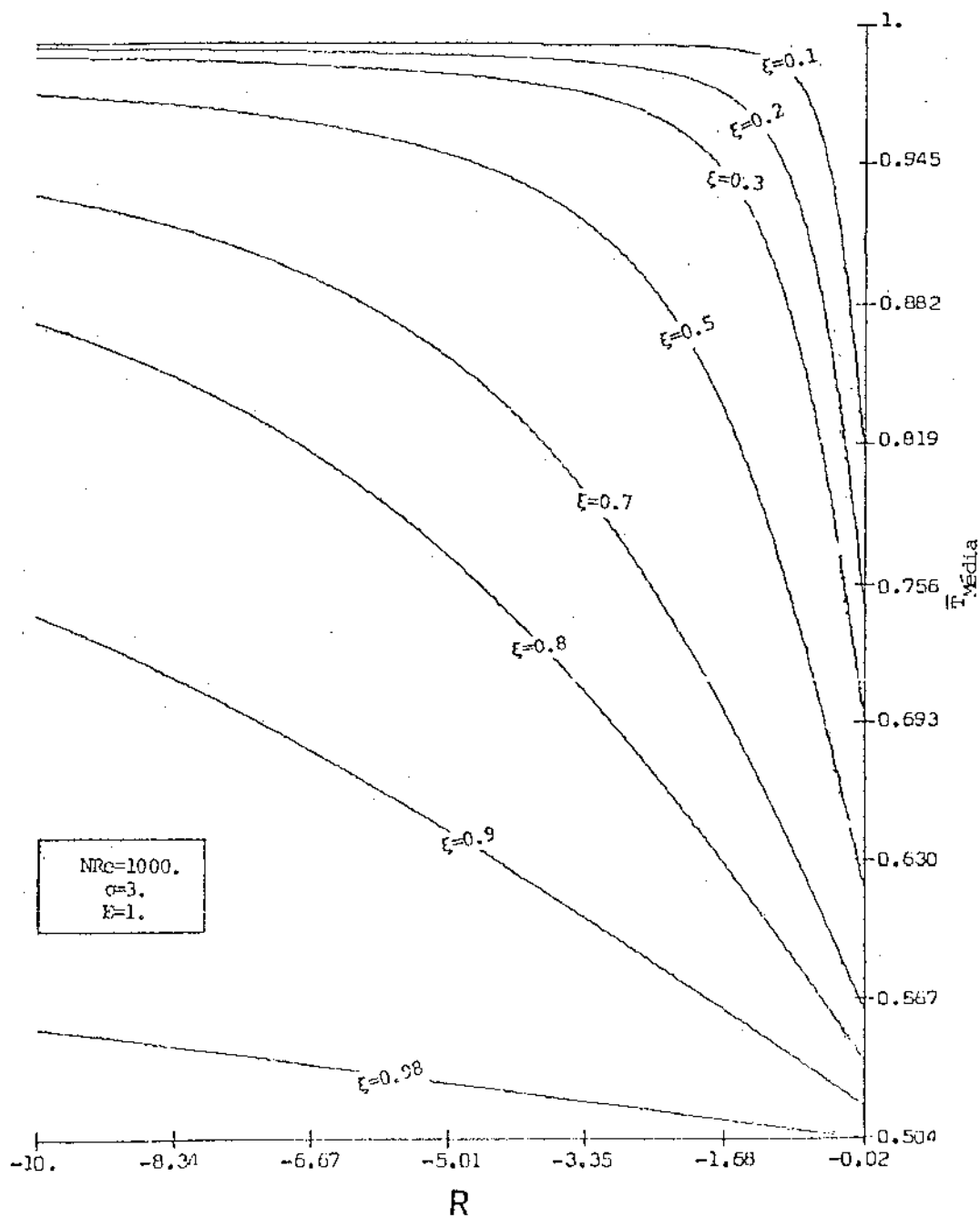
-- FIGURA 16 --



-- FIGURA 17 --



-- FIGURA 18 --



BIBLIOGRAFIA

- [1] BERMAN, A.S. - Laminar Flow in Channels with Porous Walls, Journal of Applied Physics, vol. 24, 1973, p. 1232-1235.
- [2] YUAN, S.W. - Further Investigation of Laminar Flow in Channels with Porous Walls, Journal of Applied Physics, vol. 27, 1956, p. 267-269.
- [3] UCHIDA, S. - The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe, ZAMP, vol. VIII, 1956, p. 403-422.
- [4] BERMAN, A.S. - Laminar Flow in an Annulus with Porous Walls, Journal of Applied Physics, vol 29, 1958, p. 71-75.
- [5] BHATNAGAR, R.K. - Steady Laminar Flow of Visco-Elastic Fluid Through a Pipe and Through an Annulus with Suction or Injection at the Walls, J.Ind. Inst. Sci., vol. 45, n° 4, 1963, p. 126-151.
- [6] BHATNAGAR, R.K. - Flow of an Oldroyd Fluid in a Circular Pipe with Time Dependent Pressure Gradient, Appl. Sci. Res., vol. 30, 1975, p. 241-267.
- [7] HOLDSTEIN, S. - Modern Developments in Fluid Mechanics, vol. II, Dover Publications, New York, 1965.

- [8] SCHLICHTING, H. - Boundary Layer Theory, Verlag G. Braun, 1965.
- [9] SHAMES, I.H. - Mecânica dos Fluidos, vols. I e II, Editora Edgard Blücher, 1973.
- [10] HUGHES, W.F. e BRIHTON, J.A. - Dinâmica dos Fluidos, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1974.
- [11] MORETTI, M.T. - Distribuição de Temperatura em um Escoamento de um Fluido Newtoniano entre duas Placas Porosas com Gradiente de Pressão Pulsante, Universidade Estadual de Campinas, 1979.
- [12] MORSE, P.M. e FESHBACH, H. - Methods of Theoretical Physics , vols. I e II, McGraw-Hill, 1953.
- [13] CODDINGTON, E.A. e LEVINSON, N. - Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [14] SOBOLEV, S. - Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Pergamon, Oxford, 1964.
- [15] CODDINGTON, E.A. - An Introduction to Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, 1961.
- [16] BELLMAN, R. - Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering, Dover, New York, 1966.

- [17] NAYFEH, A.H. - Perturbations Methods, Wiley, New York, 1973.
- [18] BHATNAGAR, R.K. - Flow of a Viscoelastic Fluid Between two Parallel Walls in Relative Motion with Uniform Suction at the Stationary Wall, ZAMM, vol. 51, 1971, p. 377-387.
- [19] BHATNAGAR, R.K. - Heat Transfer in the Plane Couette Flow of a Non-Newtonian Fluid with Uniform Suction at the Stationary Wall, ZAMM, vol. 53, n° 7, 1973, p.385-390.