Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Tipo e Cotipo de Espaços de Banach e Espaços $\mathcal{L}_p$ de Banach

por

Vinícius Vieira Fávaro†

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Fávaro, Vinícius Vieira

F277t Tipo e cotipo de espaços de Banach e espaços Lp de Banach / Vinícius Vieira Fávaro -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Mário Carvalho de Matos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Análise funcional. I. Matos, Mário Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Type and cotype of Banach spaces and Lp-spaces

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Banach spaces. 2. Functional analysis.

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Mestre em matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (UNICAMP)
Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (UNICAMP)
Prof. Dr. Geraldo M. de Azevedo Botelho (FAMAT-UFU)
Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar (UNICAMP)

Data da defesa: 25/02/2005

Tipo e Cotipo de Espaços de Banach e Espaços $\mathcal{L}_p$ de Banach

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Vinícius Vieira Fávaro** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de fevereiro de 2005.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Geraldo Márcio de A. Botelho.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de Fevereiro de 2005 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Aos meus queridos familiares

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, meu guia, meu caminho e minha salvação. Sem Ele nada disso teria sentido.

Ao meu orientador, Mário Matos, pela credibilidade que depositou em mim, pela paciência com o meu limitado conhecimento matemático e por toda ajuda (que não foi pouca) que me concedeu com o seu extenso conhecimento matemático.

À minha mãe, Júnia, e minha irmã, Lucília, que sempre me propiciaram um ambiente familiar sadio e dentro dos ensinamentos de Deus.

Ao meu irmão e amigo, Tatinho, que ajudou a construir o meu caráter e além disso sempre me mostrou vários caminhos para seguir, mas sempre confiou em mim deixando que eu escolhesse o que meu coração pedia.

Ao meu pai que me incentivou a fazer mestrado e me ajudou bastante.

À minha namorada, Fernanda, por me propocionar uma vida mais feliz e pelo carinho e amor que sempre me deu. Além disso, à toda sua familia sou grato.

Aos meus sobrinhos, Thais, Carlos Jr., Daniel, Thales, Tatiana, Lucas, Leandro e Natália e à minha cunhada, Tatinha, pelo carinho que sempre me dão.

À minha família que fiz em Campinas, Marcelo, Ariosvaldo, Weber e Helson; ao amigo Germano, companheiro de sinuca e violão, ao amigo José Antônio, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória.

Aos professores do IMECC-UNICAMP e aos professores da FAMAT-UFU, em especial aos professores Geraldo Botelho, que me iniciou na Análise e que até hoje me ajuda em tudo que preciso, e Sandro Costa, grande professor e amigo.

ABSTRACT

In this work we study two topics: the basic theory of type and cotype and the $\mathcal{L}_p$-spaces theory. We show that each $\mathcal{L}_r$ -space, $1 \leq r < \infty$, has type $\min\{r, 2\}$ and cotype $\max\{r, 2\}$. We also prove that no infinite dimensional $\mathcal{L}_\infty$ -space can have type > 1 and cotype $< \infty$. We detail the study of the Khintchine and Kahane inequalities, needed in order to have full understanding of the type, cotype theory. A chapter is dedicated to the study of generalizations of the Khintchine inequality (the classical Rademacher functions are replaced by the so called n-Rademacher functions). It is shown that if we use these n-Rademacher functions to define type and cotype, the new definitions are equivalent to the usual ones.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo de dois tópicos, principalmente: a teoria básica de tipo e cotipo e a teoria básica dos espaços $\mathcal{L}_p$. Mostramos como estes dois conceitos se relacionam, mais especificamente mostramos que cada espaço $\mathcal{L}_r$, $1 \leq r < \infty$, tem tipo $\min\{r, 2\}$ e cotipo $\max\{r, 2\}$ e que nenhum espaço $\mathcal{L}_\infty$ de dimensão infinita pode ter tipo maior que 1 e cotipo menor que ∞. Como alicerce para a teoria de tipo e cotipo, detalhamos um estudo sobre as desigualdades de Khintchine e Kahane. Além disso, devotamos um capítulo ao estudo, num contexto mais geral, da desigualdade de Khintchine e dos conceitos de tipo e cotipo, mostrando que estes conceitos não melhoram em nada a teoria já que são equivalentes aos conceitos tradicionais de tipo e cotipo.

CONTEÚDO

Introdução

A área do conhecimento matemático na qual este trabalho se insere é a Análise Funcional, na teoria de espaços de Banach.

Os conceitos básicos de tipo e cotipo de espaços de Banach foram introduzidos por B. Maurey e, independentemente, por J. Hoffmann-Jörgensen, no início dos anos 70. Maurey usou estes conceitos principalmente para problemas de fatoração de operadores lineares, enquanto que Hoffmann-Jörgensen os usou em seus estudos sobre teoria de probabilidade em espaços de Banach, mais especificamente em séries de variáveis aleatórias em espaços de Banach. Tais conceitos já tiveram reconhecimento de suas importâncias quando resultados como o de Kwapién , sobre caracterização de espaços hilbertizáveis, puderam ser traduzidos para a linguagem de tipo e cotipo. Os trabalhos de B. Maurey e G. Pisier que associaram tais conceitos à geometria dos espaços de Banach, impulsionaram definitivamente o desenvolvimento e o interesse pelos mesmos. Além das áreas já mencionadas acima (teoria de operadores, geometria dos espaços de Banach e teoria de probabilidade em espaços de Banach), várias outras áreas tiveram aplicações dos conceitos de tipo e cotipo, tais como, a teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach (ver [5] e [9]), a teoria de ideais de operadores e a teoria de produtos tensoriais topológicos (ver [7]).

Já o conceito de espaços $\mathcal{L}_p$ foi introduzido em 1968 por J. Lindenstrauss e A. Pelczynski, num artigo intitulado *" Absolutely Summing Operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications"*. Vários espaços importantes, tais como, os espaços L_p e os espaços de funções contínuas definidas num espaço de Hausdorff compacto, foram provados ser, de certa forma, espaços $\mathcal{L}_p$. Conseqüentemente, o interesse por tais espaços e aplicações utilizando-os surgiram rapidamente (ver [15] e [8]).

Justificativa e Objetivo

Como ainda não existem textos em português abordando a teoria de tipo e cotipo e os textos que existem oferecem dificuldades para quem está estudando estes conceitos pela primeira vez, o objetivo deste trabalho é produzir um texto didático abordando com todos os detalhes os conceitos básicos da teoria de tipo e cotipo de espaços de Banach, introduzir o conceito de espaços $\mathcal{L}_p$ e analisar como estes espaços se comportam em relação a tipo e cotipo.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, desenvolvemos a teoria necessária dos espaços $\mathcal{L}_p$. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [8], [15] e [16].

  Na seção 1.1, definimos as funções de Rademacher e provamos os principais resultados envolvendo-as.

  Na seção 1.2, definimos os espaços $\mathcal{L}_p$ e provamos que os espaços L_p e o espaço das funções contínuas definidas num espaço de Hausdorff compacto são, de certa forma, espaços $\mathcal{L}_p$.

  Na seção 1.3, estudamos o conceito de λ-representabilidade e provamos um simples resultado que diz que um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ é λ-representável no espaço ℓ_p.

- No capítulo 2, provamos as desigualdades de Khintchine e Kahane, sendo que a desigualdade de Khintchine foi feita na seção 2.1 e a desigualdade de Kahane na seção 2.2. A principal referência utilizada neste capítulo foi [8].

- No capítulo 3, desenvolvemos a teoria básica de tipo e cotipo. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [8] e [16].

  Na seção 3.1, mostramos como os espaços ℓ_p se comportam em relação a tipo e cotipo, mesmo antes de definir tais conceitos, já que este caso serve até de motivação para as definições de tipo e cotipo.

Na seção 3.2, desenvolvemos toda a teoria básica de tipo e cotipo e mostramos como tais conceitos podem ser relacionados com os espaços $\mathcal{L}_p$ e com o conceito de λ-representabilidade.

- No capítulo 4, fazemos um apanhado geral sobre as funções de Rademacher generalizadas e tratamos alguns resultados dos capítulos anteriores que estão feitos para as funções de Rademacher tradicionais, no contexto das funções de Rademacher generalizadas. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [5] e [9].

Notações e Definições Básicas

Nesta seção apresentaremos as principais terminologias usadas neste trabalho e as definições básicas.

O conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam os corpos dos números reais e complexos, respectivamente. Para nós, $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Se X é um espaço de Banach, B_X denota a bola fechada e unitária de X, isto é, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma em X. Quando houver perigo de confusão, usaremos $\|\cdot\|_X$ ao invés de $\|\cdot\|$. Denotamos por $\mathcal{F}_X$ a coleção de todos os subespaços de dimensão finita de X. Se Y também é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ denota a coleção de todos os operadores (transformações lineares contínuas) $u\colon X \longrightarrow Y$, o qual é um espaço de Banach com a norma $\|u\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\|$. Se $X = Y$, denotamos $\mathcal{L}(X, X)$ apenas por $\mathcal{L}(X)$. Dizemos que um operador $u\colon X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo, se é uma bijeção; e é uma isometria se $\|u(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Dizemos que X e Y são isometricamente isomorfos se existe $u : X \longrightarrow Y$ isomorfismo e isometria.

O dual do espaço de Banach X é $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Se $x^* \in X^*$ e $x \in X$, algumas vezes, por conveniência, denotaremos a ação de x^* em x por $\langle x^*, x\rangle$, ao invés de $x^*(x)$ ou x^*x. O bidual de X é o dual de X^*, denotado por X^{**}.

Se X é um espaço de Hilbert e $x, y \in X$, denotamos o produto interno de x por y como $(x \mid y)$.

O espaço de Banach $C(K)$ é o espaço das funções contínuas $f\colon K \longrightarrow \mathbb{K}$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto. A norma em $C(K)$ é dada por $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$, $\forall f \in C(K)$.

Para $1 \leq p < \infty$, ℓ_p denota o espaço de todas as seqüências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tais que

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Este espaço se torna um espaço de Banach com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Para $p = \infty$, ℓ_∞ denota o espaço de todas as seqüências limitadas $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ que se torna um espaço de Banach com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty} = \sup_{x\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Denotamos por c_0 o espaço de Banach (é um subespaço fechado de ℓ_∞) de todas as seqüências em $\mathbb{K}$ que convergem para 0, com a norma $\|\cdot\|_{c_0} = \|\cdot\|_{\ell_\infty}$.

Se X é um espaço de Banach, para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $\ell_p(X)$ o espaço de todas as seqüências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$. Este espaço se torna um espaço de Banach com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p(X)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Para $p = \infty$, $\ell_\infty(X)$ denota o espaço de todas as seqüências limitadas $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ que se torna um espaço de Banach com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(X)} = \sup_{x\in\mathbb{N}} \|x_n\|$. Note que ℓ_p é um $\ell_p(X)$ para $X = \mathbb{K}$.

O espaço ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$, denota o espaço das seqüências $x = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...) \subset \mathbb{K}$ com a norma $\|\cdot\|_{\ell_p}$. Temos que $\dim \ell_p^n = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é base para tal espaço que chamaremos de base canônica (cada e_j tem 1 na j-ésima coordenada e 0 nas demais).

Sejam X um espaço de Banach e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, isto é, Ω é um conjunto, Σ é uma σ-álgebra sobre Ω e μ é uma medida sobre Σ. Dado, $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue-Bochner, denotado por $L_p(\mu, X)$, como sendo o espaço de todas as (classes de equivalência de) funções mensuráveis μ-Bochner integráveis, isto é, $\int_\Omega \|f(w)\|^p \, d\mu(w) < \infty$, $\forall f \in L_p(\mu, X)$. Este espaço se torna um espaço de Banach com a norma $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = \left(\int_\Omega \|f(w)\|^p \, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}}$. Quando $X = \mathbb{K}$, escrevemos apenas $L_p(\mu)$ ou L_p (se não houver perigo de confusão) e denotamos a norma por $\|\cdot\|_{L_p}$. Para $p = \infty$, $L_\infty(\mu, X)$ denota o espaço de todas as (classes de equivalência de) funções $f\colon \Omega \longrightarrow X$ que são limitadas quase sempre, isto é, $f \in L_\infty(\mu, X)$ se, e somente se, existem $c > 0$ e $U \in \Sigma$, com $\mu(U) = 0$, tais que $\|f(x)\|_X \leq c$, $\forall x \in \Omega \backslash U$. Tal espaço é um espaço de Banach com a norma $\|f\|_{L_\infty(\mu,X)} = \inf\{c > 0; \|f(x)\|_X \leq c \text{ quase sempre}\}$. Quando $X = \mathbb{K}$, escrevemos apenas $L_\infty(\mu)$ ou L_∞ (se não houver perigo de confusão) e denotamos a norma por $\|\cdot\|_{L_\infty}$.

Demais definições e notações necessárias serão apresentadas durante o presente trabalho.

CAPÍTULO 1

Os espaços $\mathcal{L}_p$ e λ-representabilidade

1.1 Preliminares

1.1.1 Funções de Rademacher

As funções de Rademacher, juntamente com suas propriedades dadas abaixo, são de fundamental importância para o presente trabalho. Principalmente para os capítulos 2 e 3, cujos resultados são praticamente todos fundados em tais funções. Neste capítulo usaremos tais funções para demonstrar o lema 1.2.5, por isso é importante ter familiaridade com elas desde já.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto e $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos o* sinal da função f *como sendo a função $sign(f)\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$sign\left(f\left(x\right)\right) = \begin{cases} 1, & se\ f\left(x\right) > 0 \\ -1, & se\ f\left(x\right) < 0 \\ 0, & se\ f\left(x\right) = 0 \end{cases}, x \in X.$$

Definição 1.1.2. *A n-*ésima função de Rademacher *é a função $r_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $r_n\left(t\right) = sign\left(sen\left(2^n \pi t\right)\right),\ n \in \mathbb{N}$.*

Uma das características importantes das funções de Rademacher é que elas possuem boas propriedades de ortogonalidade, no seguinte sentido:

Proposição 1.1.3. *Se $0 < n_1 < n_2 < ... < n_k$ e $p_1, p_2, ..., p_k \geq 0$ são números naturais, então*

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdot \cdots \cdot r_{n_k}^{p_k}(t)\, dt = \begin{cases} 1, & \text{se } p_j \text{ é par, } \forall j = 1, ..., k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Demonstração. Se p_j é par, $\forall j = 1, ..., k$, então $r_{n_j}^{p_j}(t) = 1$, com excessão do número finito de pontos onde r_{n_j} se anula, logo

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdot \cdots \cdot r_{n_k}^{p_k}(t)\, dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Observe também que se algum p_i é par, onde $i \in \{1, ..., k\}$, então $r_{n_i}^{p_i}(t)$ pode ser retirada da expressão e podemos analisar somente o que acontece com a integral do produto $r_{n_1}^{p_1}(t) \cdot \cdots \cdot r_{n_{i-1}}^{p_{i-1}}(t) . r_{n_{i+1}}^{p_{i+1}}(t) \cdot \cdots \cdot r_{n_k}^{p_k}(t)$. Então, para concluir a demonstração, basta analisar o caso em que p_j é ímpar, $\forall j = 1, ..., k$. Mas analisar este caso, é o mesmo que analisar o caso em que $p_1 = ... = p_k = 1$, pois $r_{n_j}^{p_j}(t) = r_{n_j}(t)$, $\forall j = 1, ..., k$. Para isto, procederemos indutivamente:

Para $n_1 < n_2$, defina $I_j^{n_1} = \left[\frac{j}{2^{n_1}}, \frac{j+1}{2^{n_1}}\right]$; $j = 0, ..., 2^{n_1} - 1$. Pela construção das funções de Rademacher, temos que $r_{n_2}(t)$ assume os valores ± 1 em $I_j^{n_1}$em quantidades iguais de subintervalos de comprimento $\frac{1}{2^{n_2}}$ e, portanto, $\int_{I_j^{n_1}} r_{n_2}(t)\, dt = 0$, $\forall j = 0, ..., 2^{n_1} - 1$. Logo

$$\int_0^1 r_{n_1}(t) . r_{n_2}(t)\, dt = \sum_{j=1}^{2^{n_1}-1} (\pm 1) . \int_{I_j^{n_1}} r_{n_2}(t)\, dt = 0.$$

Para $n_1 < n_2 < n_3$, defina $I_j^{n_1}$ como anteriormente. Então,

$$\int_0^1 r_{n_1}(t) . r_{n_2}(t) . r_{n_3}(t)\, dt = \sum_{j=1}^{2^{n_1}-1} (\pm 1) . \int_{I_j^{n_1}} r_{n_2}(t) . r_{n_3}(t)\, dt = 0.$$

Mas, para cada $j = 0, ..., 2^{n_1} - 1$, temos que

$$I_j^{n_1} = \bigcup_{l=j.2^{n_2-n_1}}^{(j+1).2^{n_2-n_1}-1} I_{j,l}^{n_2}, \text{ onde } I_{j,l}^{n_2} = \left[\frac{l}{2^{n_2}}, \frac{l+1}{2^{n_2}}\right]$$

e pela construção de r_{n_3} segue que $\int_{I_{j,l}^{n_2}} r_{n_3}(t)\, dt = 0$. Logo,

$$\int_0^1 r_{n_1}(t) . r_{n_2}(t) . r_{n_3}(t)\, dt = \sum_{j=1}^{2^{n_1}-1} (\pm 1) . \sum_{l=j.2^{n_2-n_1}}^{(j+1).2^{n_2-n_1}-1} (\pm 1) . \int_{I_{j,l}^{n_2}} r_{n_3}(t)\, dt = 0.$$

Procedendo recursivamente obtemos os demais casos, concluindo assim a demonstração. $\square$

Em particular, temos que

$$\int_0^1 r_n(t).r_m(t)\,dt = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases},$$

logo a seqüência dos r_n's em $L_2[0,1]$ é ortonormal e, portanto

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n.r_n(t)\right|^2 dt = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n.r_n\right\|_{L_2}^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n.r_n \middle| \sum_{n=1}^{\infty} a_n.r_n\right) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i.a_j.\int_0^1 r_i(t).r_j(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2, \forall (a_n) \in \ell_2.$$

1.1.2 Partição da Unidade

O resultado central deste capítulo (teorema 1.2.8) está fortemente apoiado no lema 1.2.9 e para demonstrar este lema várias ferramentas são utilizadas, dentre elas, um resultado sobre partições da unidade. Então, para não sobrecarregar mais as demonstrações destes dois resultados, definiremos aqui partição da unidade e provaremos o resultado sobre a existência de partição da unidade no caso que nos é necessário.

Definição 1.1.4. *Uma* partição da unidade *num espaço topológico X é uma família $\mathcal{F}$ de funções contínuas de X no conjunto dos números reais não negativos tal que $\sum_{f\in\mathcal{F}} f(x) = 1$, para cada $x \in X$, e exceto um número finito de membros de $\mathcal{F}$ se anula sobre alguma vizinhança de cada ponto de X.*
Dizemos que uma partição da unidade $\mathcal{F}$ é subordinada a uma cobertura $\mathcal{U}$ *de X, ou* relativa a uma cobertura $\mathcal{U}$ *de X, se cada membro de $\mathcal{F}$ se anula fora de algum membro de $\mathcal{U}$.*

Teorema 1.1.5. (Partição da Unidade) *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto e $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_n\}$ uma cobertura de K tal que nenhum subconjunto próprio de $\mathcal{U}$ cobre K. Então, existem $\varphi_1, ..., \varphi_n \in C(K)$ tais que, para todo $i = 1, ..., n$, $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$, $\forall x \in K$. Além disso, $\|\varphi_i\|_\infty = 1$ e supp$(\varphi_i) \subset U_i$, para todo $i = 1, ..., n$. (supp$(\varphi_i) = \overline{\{x; \varphi_i(x) \neq 0\}}$ e é chamado* suporte *de φ_i).*

Note que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ é uma partição da unidade subordinada a cobertura $\mathcal{U}$.

Demonstração. Como $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, dado $x \in K$, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $x \in U_j$. Como K é Hausdorff e compacto, segue que K é um espaço regular, logo existe um aberto W_x tal que $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset U_j$. Então $\bigcup_{x \in K} W_x$ cobre K e pela compacidade de K podemos extrair uma subcobertura finita e denotá-la por $W_1, ..., W_s$, tal que $K = \bigcup_{k=1}^{s} W_k$. Além disso, cada W_k satisfaz $\overline{W_k} \subset U_j$ onde $j = j(k)$ que depende de k. Utilizando este argumento novamente, obtemos abertos $V_1, ..., V_r$ cobrindo K e cada V_i satisfaz

$$\overline{V_i} \subset W_{k(i)} \subset \overline{W_{k(i)}} \subset U_{j(i)}.$$

Agora, para cada $i = 1, ..., r$, chame $B = \overline{V_i}$ e $A = W_{k(i)}^C$ (complementar de $W_{k(i)}$). Temos que A e B são fechados e disjuntos então, pelo lema de Urysohn, existe $g_i \colon K \longrightarrow [0,1]$ contínua tal que $g(B) = 1$ e $g(A) = 0$. Além disso, como $\{x; g_i(x) \neq 0\} \subset W_{k(i)}$, segue que $\operatorname{supp}(g_i) \subset U_{j(i)}$.
Vamos agora construir, indutivamente, funções $\psi_1, ..., \psi_r \in C(K)$ tais que

$$1 - (1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_r) = g_1.\psi_1 + \ldots + g_r.\psi_r.$$

Defina $\psi_1 = 1$, então $\psi_1 \in C(K)$ e

$$1 - (1 - g_1) = g_1 = g_1.\psi_1.$$

Definidas $\psi_1, ..., \psi_{r-1}$, defina

$$\psi_r = -(1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_{r-1}),$$

então $\psi_r \in C(K)$ e

$$1 - (1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_r) = 1 - (1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_{r-1}) - g_r.(1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_{r-1}) =$$
$$= g_1.\psi_1 + \ldots + g_r.\psi_{r-1} + g_r.(-(1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_{r-1})) = g_1.\psi_1 + \ldots + g_r.\psi_r,$$

como queríamos. Mas

$$(1 - g_1) \cdot \cdots \cdot (1 - g_r) \equiv 0,$$

pois se $x \in K$, então $x \in V_i$, para algum $i = 1, ..., r$, logo

$$g_i(x) = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{r} g_i.\psi_i = 1.$$

Agora, para cada $j = 1, ..., n$, sejam

$$N_j = \{i : i \in \{1, ..., r\} \text{ e supp}(g_i.\psi_i) \subset U_j, \text{ mas supp}(g_i.\psi_i) \nsubseteq U_l \text{ se } l < j\}$$

e defina $\varphi_j = \sum_{i \in N_j} g_i.\psi_i$. Como g_i e ψ_i estão em $C(K)$, para todo $i = 1, ..., r$, segue que cada $\varphi_j \in C(K)$, $j = 1, ..., n$. Além disso, $N_1, ..., N_n$ é uma partição disjunta de $\{1, ..., r\}$, pois se existisse $i_0 \in \{1, ..., r\}$ tal que $i_0 \in N_j$ e $i_0 \in N_l$, com $j \neq l$, teríamos que supp$(g_{i_0}.\psi_{i_0}) \subset U_j$ e supp$(g_{i_0}.\psi_{i_0}) \subset U_l$ que é uma contradição, logo

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{r} g_i.\psi_i = 1.$$

Temos também que supp$(\varphi_j) \subset U_j$, $\forall j = 1, ..., n$. Agora, fixando $j \in \{1, ..., n\}$, existe $x_j \in U_j$ tal que $x_j \notin U_i$ se $i \neq j$ e, portanto,

$$\varphi_j(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_j) = 1.$$

Finalmente, para cada $j = 1, ..., n$,

$$\|\varphi_j\|_\infty = \sup\{\varphi_j(x); x \in K\} \leq 1,$$

mas $\varphi_j(x_j) = 1$, logo $\|\varphi_j\|_\infty = 1$. □

1.2 Espaços $\mathcal{L}_p$

Os resultados cruciais desta seção, 1.2.9 e 1.2.8, foram obtidos do artigo de J. Lindenstrauss e A. Pelczynski já mencionado na introdução, de um artigo de 1969 de J. Lindenstrauss - H.P. Rosenthal, intitulado *"The $\mathcal{L}_p$ spaces"* e do artigo de 1964 de J. Lindenstrauss, intitulado *"Extesion of Compact Operators"*.

Antes de definir os espaços $\mathcal{L}_p$, precisamos de uma definição auxiliar.

Definição 1.2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Definimos a* distância de Banach-Mazur*, e denotamos por $d(X,Y)$, como sendo o número $d(X,Y) = \inf\{\|u\| . \|u^{-1}\|; u\colon X \longrightarrow Y$ é isomorfismo$\}$.*

Definição 1.2.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um espaço de Banach X é chamado um* espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, *para $1 \leq \lambda < \infty$, se dado $E \in \mathcal{F}_X$, existe $F \in \mathcal{F}_X$ contendo E e tal que $d\left(F, \ell_p^n\right) \leq \lambda$, onde* $\dim F = n$.
Um espaço de Banach X é chamado um espaço $\mathcal{L}_p$, *se ele é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, para algum* $\lambda \geq 1$.

Observação 1.2.3. *Sem formalismo matemático, podemos dizer que esses espaços são espaços de Banach, tais que seus subespaços de dimensão finita têm a mesma estrutura que os espaços ℓ_p^n.*

Proposição 1.2.4. *Um espaço de Banach X é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ se, e somente se, dados $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{F}_X$, existem $F \in \mathcal{F}_X$ contendo E e um isomorfismo $u \colon F \longrightarrow \ell_p^n$ tais que* $\|u\| . \|u^{-1}\| \leq \lambda + \varepsilon$.

Demonstração. Conseqüência imediata da definição de ínfimo. □

Um resultado interessante é que um espaço $\mathcal{L}_p$ não é um espaço $\mathcal{L}_2$, se $p \neq 2$, mas para demonstrar este resultado, precisaremos de dois lemas de auxílio.

Lema 1.2.5. *Se $p > 2$ e $T \colon \ell_p^n \longrightarrow \ell_2^n$ é um operador linear, então* $\sum\limits_{i=1}^{n} \|Te_i\|^{\frac{2p}{p-2}} \leq \|T\|^{\frac{2p}{p-2}}$.

Demonstração. Seja (a_{ij}) a representação matricial de T, isto é, se $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base canônica de vetores em ℓ_p^n, então $Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) b_i$, onde $\{b_1, ..., b_n\}$ é a base canônica de vetores em ℓ_2^n. Suponhamos primeiro que (a_{ij}) é diagonal, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e tome $x_i = |a_{ii}|^{\frac{2}{p-2}}$. Então, para $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, temos que

$$\|Tx\|_{\ell_2} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) b_i \right\|_{\ell_2} = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i b_i \right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ii} . a_{ii}^{\frac{2}{p-2}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

mas também

$$\|Tx\|_{\ell_2} \leq \|T\| . \|x\|_{\ell_p} = \|T\| . \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

logo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\| . \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^{\frac{2p}{p-2}} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^{\frac{2p}{p-2}} \leq \|T\|^{\frac{2p}{p-2}}.$$

Para o caso geral, fixe $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, com $\|x\|_{\ell_p} \leq 1$ e considere $r_1, ..., r_n$ as funções de Rademacher. Para cada $t \in [0,1]$,

$$\left\| T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j r_j(t) e_j\right)\right\|_{\ell_2}^2 \leq \|T\|^2,$$

pois

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j r_j(t) e_j \right\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p} \leq 1$$

e como

$$\left\| T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j r_j(t) e_j\right)\right\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j(t) x_j \right|^2,$$

temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j(t) x_j \right|^2 \leq \|T\|^2.$$

Portanto,

$$\|T\|^2 \geq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j(t) x_j \right|^2 .m([0,1]) \geq \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j(t) x_j \right|^2 dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j(t) x_j \right|^2 dt \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 . |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) |x_j|^2,$$

onde $m([0,1])$ denota o comprimento do intervalo $[0,1]$.

Agora, definindo o operador $S\colon \ell_p^n \longrightarrow \ell_2^n$ por $S(e_j) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} b_j$, para cada $j = 1, ..., n$, temos que S é diagonal. Além disso, se $\|y\|_{\ell_p} \leq 1$, $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, então

$$\|Sy\|_{\ell_2}^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) |y_j|^2 \leq \|T\|^2 \Longrightarrow \|S\| \leq \|T\| \Longrightarrow \|S\|^{\frac{2p}{p-2}} \leq \|T\|^{\frac{2p}{p-2}}.$$

Como S é diagonal, segue do primeiro caso que

$$\|S\|^{\frac{2p}{p-2}} \geq \sum_{j=1}^{n} \|Se_j\|_{\ell_2}^{\frac{2p}{p-2}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2p}{p-2}\right)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{p}{p-2}} = \sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^{\frac{2p}{p-2}},$$

portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^{\frac{2p}{p-2}} \leq \|T\|^{\frac{2p}{p-2}}.$$

$\square$

Lema 1.2.6. *Se $2 < p < \infty$, então $d\left(\ell_p^n; \ell_2^n\right) = n^{\frac{p-2}{2p}}$. Além disso, $d\left(\ell_\infty^n; \ell_2^n\right) = d\left(\ell_1^n; \ell_2^n\right) = \sqrt{n}$ e se $1 < \varepsilon < 2$, então $d\left(\ell_\varepsilon^n; \ell_2^n\right) = n^{\frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}}$.*

Demonstração. Sejam $2 < p < \infty$ e $T\colon \ell_p^n \longrightarrow \ell_2^n$ um isomorfismo com $\|T^{-1}\| = 1$. Como

$$\|Te_i\| = \left\|T^{-1}\right\| . \|Te_i\| \geq \left\|T^{-1}\left(Te_i\right)\right\| = \|e_i\| = 1, \forall i = 1, ..., n,$$

segue que $n \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \|Te_i\|^{\frac{2p}{p-2}}$. Pelo lema 1.2.5, $\sum\limits_{i=1}^{n} \|Te_i\|^{\frac{2p}{p-2}} \leq \|T\|^{\frac{2p}{p-2}}$, logo $\|T\| \geq n^{\frac{p-2}{2p}}$. Agora, seja $T\colon \ell_p^n \longrightarrow \ell_2^n$ um isomorfismo qualquer e defina o isomorfismo $S^{-1} = \frac{T^{-1}}{\|T^{-1}\|}$, então $\|S^{-1}\| = 1$ e $T = \frac{S}{\|T^{-1}\|}$, daí

$$\|T\| . \left\|T^{-1}\right\| = \frac{\|S\|}{\|T^{-1}\|} \left\|T^{-1}\right\| = \|S\| \geq n^{\frac{p-2}{2p}}$$

e, portanto

$$d\left(\ell_p^n; \ell_2^n\right) \geq n^{\frac{p-2}{2p}}.$$

Agora, defina o isomorfismo $T\colon \ell_p^n \longrightarrow \ell_2^n$ por $Te_j = b_j$, para $j = 1, ..., n$, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base canônica de vetores em ℓ_p^n e $\{b_1, ..., b_n\}$ é a base canônica de vetores em ℓ_2^n. Seja $y \in \ell_2^n$, com $\|y\|_{\ell_2} \leq 1$, então existe $x \in \ell_p^n$ tal que $y = Tx$. Temos que $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ e

$$1 \geq \|y\|_{\ell_2} = \|Tx\|_{\ell_2} = \left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right\|_{\ell_2} = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j Te_j\right\|_{\ell_2} = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mas,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\ell_p} = \left\|T^{-1}\left(Tx\right)\right\|_{\ell_p} = \left\|T^{-1}y\right\|_{\ell_p}$$

e como $p > 2$, temos que $\|\cdot\|_{\ell_p} \leq \|\cdot\|_{\ell_2}$ e, portanto

$$\left\|T^{-1}y\right\|_{\ell_p} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Logo, $\|T^{-1}\| \leq 1$ e como $\|T^{-1}b_i\|_{\ell_p} = \|e_i\|_{\ell_p} = 1$, segue que $\|T^{-1}\| = 1$. Agora, usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|x_j|^2\right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} .n^{\frac{1}{q}},$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{2}{p} = 1$, portanto $\|Tx\|_{\ell_2}^2 \leq n^{\frac{1}{q}}. \|x\|_{\ell_p}^2$ e daí

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_{\ell_2}}{\|x\|_{\ell_p}}; x \neq 0 \right\} \leq n^{\frac{1}{2q}} = n^{\frac{p-2}{2p}}.$$

Logo, $\|T\| . \|T^{-1}\| \leq n^{\frac{p-2}{2p}}$ obtendo assim $d\left(\ell_p^n; \ell_2^n\right) = n^{\frac{p-2}{2p}}$.
Os demais casos são análogos. O que ainda carece de demonstração é que $d\left(\ell_\infty^n; \ell_2^n\right) = d\left(\ell_1^n; \ell_2^n\right)$.
Seja $v\colon \ell_1^n \longrightarrow \ell_2^n$ um isomorfismo e considere a transformação transposta de v, denotada por $v^*\colon \left(\ell_2^n\right)^* \longrightarrow \left(\ell_1^n\right)^*$ e definida por $v^*(\varphi)(x) = \varphi \circ v(x)$, onde $\varphi \in \left(\ell_2^n\right)^*$ e $x \in \ell_1^n$. Sabemos que $\left(\ell_2^n\right)^* = \ell_2^n$ (isomorfo isometricamente) e $\left(\ell_1^n\right)^* = \ell_\infty^n$ (isomorfo isometricamente) e como v é isomorfismo, temos que v^* também é e podemos escrever $v^*\colon \ell_2^n \longrightarrow \ell_\infty^n$. Além disso, $(v^*)^{-1} = (v^{-1})^*$ e $\|v\| = \|v^*\|$, portanto

$$\|v\| . \left\|v^{-1}\right\| = \|v^*\| . \left\|\left(v^{-1}\right)^*\right\| \Longrightarrow d\left(\ell_\infty^n; \ell_2^n\right) \leq d\left(\ell_1^n; \ell_2^n\right).$$

A desigualdade $d\left(\ell_\infty^n; \ell_2^n\right) \geq d\left(\ell_1^n; \ell_2^n\right)$ decorre analogamente quando tomamos $u\colon \ell_\infty^n \longrightarrow \ell_2^n$, pois como a dimensão de ℓ_∞^n é finita, vale que $\left(\ell_\infty^n\right)^* = \ell_1^n$. □

Teorema 1.2.7. *Um espaço $\mathcal{L}_p$ de dimensão infinita não é um espaço $\mathcal{L}_2$, se $p \neq 2$.*

Demonstração. Seja X um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda_p}$, com $p \neq 2$ e suponha que X é um espaço $\mathcal{L}_{2,\lambda_2}$. Pelo fato de X ser um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda_p}$, dados $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathcal{F}_X$, existe $G_p \in \mathcal{F}_X$, com $F \subset G_p$ tal que $u_p\colon G_p \longrightarrow \ell_p^{n_p}$ é isomorfismo e $\|u_p\| . \left\|u_p^{-1}\right\| \leq \lambda_p + \varepsilon$. Pelo fato de X ser um espaço $\mathcal{L}_{2,\lambda_2}$, existe $G_2 \in \mathcal{F}_X$, com $G_p \subset G_2$ tal que $u_2\colon G_2 \longrightarrow \ell_2^{n_2}$ é isomorfismo e $\|u_2\| . \left\|u_2^{-1}\right\| \leq \lambda_2 + \varepsilon$. Defina $u\colon G_p \to u_2(G_p) \subset \ell_2^{n_2}$ por $u(x) = u_2(x)$, logo u é isomorfismo $(\dim u_2(G_p) = n_p)$. Seja $\left\{b_1, ..., b_{n_p}\right\}$ uma base ortonormal para $u_2(G_p)$ (tal base existe pois $\ell_2^{n_2}$ é um espaço de Hilbert), então para cada $j = 1, ..., n_p$, podemos escrever $b_j = \sum\limits_{k=1}^{n_2} a_{jk} e_k$, onde $\{e_1, ..., e_{n_2}\}$ é a base canônica em $\ell_2^{n_2}$. Defina $v\colon u_2(G_p) \longrightarrow \ell_2^{n_p}$ por $v(x) = \sum\limits_{j=1}^{n_p} a_j e_j$, onde $x = \sum\limits_{j=1}^{n_p} a_j b_j$.

Claramente v é isomorfismo e como $\|b_j\| = 1$ e $(b_j|\, b_k) = 0$ se $j \neq k$, temos que v é uma isometria, pois

$$\|v(x)\|_{\ell_2}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n_p} a_j e_j \right\|_{\ell_2}^2 = \sum_{j=1}^{n_p} |a_j|^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n_p} a_j b_j \middle| \sum_{j=1}^{n_p} a_j b_j \right) = \left\| \sum_{j=1}^{n_p} a_j b_j \right\|_{\ell_2}^2 = \|x\|_{\ell_2}^2 .$$

Logo, $\|v\| = \|v^{-1}\| = 1$

Para finalizar, tome $w \colon \ell_p^{n_p} \longrightarrow \ell_2^{n_p}$ dada por $w = v \circ u \circ u_p^{-1}$, então

$$\|w\| . \left\|w^{-1}\right\| = \left\|v \circ u \circ u_p^{-1}\right\| . \left\|u_p \circ u^{-1} \circ v^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \|v\| . \|u\| . \left\|u_p^{-1}\right\| . \|u_p\| . \left\|u^{-1}\right\| . \left\|v^{-1}\right\| \leq (\lambda_p + \varepsilon) . (\lambda_2 + \varepsilon) ,$$

logo

$$d\left(\ell_p^{n_p}; \ell_2^{n_p}\right) \leq (\lambda_p + \varepsilon) . (\lambda_2 + \varepsilon) .$$

Mas, pelo Lema 1.2.6, $d\left(\ell_p^{n_p}; \ell_2^{n_p}\right) = n_p^{\frac{|p-2|}{2p}}$ e $n_p^{\frac{|p-2|}{2p}} \longrightarrow \infty$, quando $n_p \longrightarrow \infty$ e isto é uma contradição. Portanto, X não é um espaço $\mathcal{L}_2$. □

Veremos agora que alguns espaços de Banach de grande importância são espaços $\mathcal{L}_p$.

Teorema 1.2.8. (a) *Se (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida qualquer e $1 \leq p \leq \infty$, então $L_p(\mu)$ é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, $\forall \lambda > 1$.*

(b) *Se K é um espaço de Hausdorff compacto, então $C(K)$ é um espaço $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$, $\forall \lambda > 1$.*

Para a prova deste teorema, precisaremos de um importante resultado, que será apresentado no seguinte lema.

Lema 1.2.9. *Suponha que X é um espaço $L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ou um espaço $C(K)$. Suponha que M é um subconjunto não vazio e compacto de X e seja $\varepsilon > 0$. Então, existe um projeção $P \in \mathcal{L}(X)$ com imagem de dimensão finita, tal que:*

(a) $\|P\| = 1$;

(b) $\|Pf - f\| \leq \varepsilon$, $\forall f \in M$;

(c) *$P(X)$ é isometricamente isomorfo a ℓ_p^n, onde $n = \dim P(X)$. No caso $X = C(K)$, tomamos $p = \infty$.*

Demonstração. Provaremos primeiro o caso $X = L_p(\mu)$. Considere o conjunto $\{f_1, ..., f_k\}$ sendo uma $\frac{\varepsilon}{2}$-rede para M, consistindo de funções simples, isto é, $\forall f \in M$, existe $f_i \in \{f_1, ..., f_k\}$ tal que $\|f - f_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vamos provar que tal $\frac{\varepsilon}{2}$-rede realmente existe. Como $M \subset L_p(\mu)$ é compacto, existem $g_1, ..., g_k \in L_p(\mu)$ tal que $\bigcup_{i=1}^{k} B\left(g_i, \frac{\varepsilon}{4}\right) \supset M$. Como o conjunto das funções simples é denso em $L_p(\mu)$, existem funções simples $f_1, ..., f_k \in L_p(\mu)$ tais que $\|f_i - g_i\| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\forall i = 1, ..., k$. Logo, dada $f \in M$, $\|f - f_i\| \leq \|f_i - g_i\| + \|f - g_i\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$, concluindo assim que $\{f_1, ..., f_k\}$ é uma $\frac{\varepsilon}{2}$-rede para M.

Considere agora $A_1, ..., A_n \in \Sigma$ conjuntos dois a dois disjuntos com medida positiva e finita, tais que cada f_j é constante em cada A_i e se anula fora de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Defina $P\colon L_p(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$ por

$$Pf = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i} f d\mu\right).1_{A_i},$$

onde 1_{A_i} denota a função característica, e vamos provar que P é projeção. Para isto, basta provar que P é linear e $P^2 = P$. É claro que P é linear pela linearidade da integral e

$$P^2 f = P\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i} f d\mu\right).1_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i} f d\mu\right).P(1_{A_i}).$$

Mas $P(1_{A_i}) = 1_{A_i}$, logo $P^2 f = Pf$ e, portanto, P é projeção.

Vamos agora provar que $\|P\| \leq 1, \forall 1 \leq p \leq \infty$. Se $p = \infty$, tome $f \in L_\infty(\mu)$, com $\|f\| \leq 1$, então $|f(x)| \leq 1$ quase sempre, logo

$$\int_{A_i} f d\mu \leq \int_{A_i} 1 d\mu = \mu(A_i).$$

Assim, $\|Pf\| \leq 1 \Longrightarrow \|P\| = \sup\left\{\|Pf\| : f \in B_{L_\infty(\mu)}\right\} \leq 1$.

Se $1 \leq p < \infty$, temos que

$$\|Pf\|^p = \left(\left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i} f d\mu\right).1_{A_i}\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i} f d\mu\right).1_{A_i}\right|^p d\mu.$$

Como $1_{A_i}.1_{A_j} = 0$, se $i \neq j$, segue que

$$\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i} f d\mu\right).1_{A_i}\right|^p d\mu \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)^p}.\left|\int_{A_i} f d\mu\right|^p.1_{A_i} d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{A_i} f d\mu\right|^p.\mu(A_i)^{1-p} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{A_i} |f|\, d\mu\right)^p.\mu(A_i)^{1-p}.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{A_i}|f|\,d\mu\right)^{p}.\mu(A_i)^{1-p}\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\int_{A_i}|f|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_{A_i}1^{\frac{p}{p-1}}d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{p}.\mu(A_i)^{1-p}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{A_i}|f|^{p}\,d\mu\right).\left(\mu(A_i)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{p}.\mu(A_i)^{1-p}=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|f|^{p}\,d\mu\leq\int_{\Omega}|f|^{p}\,d\mu=\|f\|^{p}.$$

Logo, $\|Pf\|^{p}\leq\|f\|^{p}$, mas $\|P\|=\sup\limits_{\|f\|\neq 0}\left\{\frac{\|Pf\|}{\|f\|}\right\}$ e como $\frac{\|Pf\|^{p}}{\|f\|^{p}}\leq 1$, segue que $\|P\|\leq 1$.
Como $M\neq\phi$, existe $g\in M$ e $Pg=g$, logo $\|Pg\|=\|g\|\Longrightarrow\frac{\|Pg\|}{\|g\|}=1\Longrightarrow\|P\|=1$ e o ítem *(a)* está provado.
Agora, seja $f\in M$, então $\|f-f_i\|<\frac{\varepsilon}{2}$, para algum $i=1,...,k$ e como $Pf_i=f_i$, temos que

$$\|Pf-f\|=\|Pf-f+f_i-f_i\|\leq\|Pf-f_i\|+\|f-f_i\|=$$

$$=\|P(f-f_i)\|+\|f-f_i\|\leq\|P\|.\|f-f_i\|+\|f-f_i\|\leq 1.\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

e o ítem *(b)* está provado.
Agora, como os e_i's formam uma base para ℓ_p^n, defina φ: $\ell_p^n\longrightarrow P(L_p(\mu))$ por $\varphi(e_i)=\mu(A_i)^{\frac{-1}{p}}.1_{A_i}$. Vamos mostrar que φ é um isomorfismo isométrico. Claramente, φ é linear e pela definição de P, temos que $\dim P(L_p(\mu))=n$.
Note que $\mu(A_i)^{\frac{-1}{p}}.1_{A_i}=\mu(A_j)^{\frac{-1}{p}}.1_{A_j}\Longleftrightarrow i=j$, logo φ é injetora.
Seja $g\in P(L_p(\mu))$, então existe $f\in X$ tal que $Pf=g$, ou seja,

$$g=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu(A_i)}.\left(\int_{A_i}fd\mu\right).1_{A_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{A_i}\frac{f}{\mu(A_i)^{\frac{p-1}{p}}}d\mu\right).\varphi(e_i)=$$

$$=\varphi\left(\int_{A_1}\frac{f}{\mu(A_1)^{\frac{p-1}{p}}}d\mu,...,\int_{A_n}\frac{f}{\mu(A_n)^{\frac{p-1}{p}}}d\mu\right)$$

e, portanto, φ é sobrejetora.
Agora, seja $(x_1,...,x_n)\in\ell_p^n$, então

$$\|\varphi(x_1,...,x_n)\|_{L_p}=\left(\int_{\Omega}|\varphi(x_1,...,x_n)|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\Omega}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i.\frac{1}{\mu(A_i)^{\frac{1}{p}}}.1_{A_i}\right|^{p}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i.\frac{1}{\mu(A_i)^{\frac{1}{p}}}.1_{A_i}\right|^{p}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i.\frac{1}{\mu(A_i)^{\frac{1}{p}}}.1_{A_i}\right|^{p}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j.\frac{1}{\mu(A_j)^{\frac{1}{p}}}.1\right|^{p}.\mu(A_j)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=\|(x_1,...,x_n)\|_{\ell_p},$$

logo φ é isometria. Como φ é linear e isometria, segue que φ é contínua. Portanto, φ é um isomorfismo isométrico provando assim o ítem *(c)*.

Vamos provar agora o caso $X = C(K)$. Considere uma $\frac{\varepsilon}{4}$-rede para M, denotada por $\{f_1, ..., f_n\}$. Considere também uma cobertura $\Omega_1, ..., \Omega_m$ de K tal que, se w e $\overline{w}$ pertencem ao mesmo Ω_i, então $|f_j(w) - f_j(\overline{w})| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall 1 \leq j \leq n$. Vamos provar que tal cobertura existe: como as funções $f_j, 1 \leq j \leq n$, são contínuas, para cada $a \in K$, existe uma vizinhança de a em K, denotada por $V_\varepsilon(a)$, tal que $|f_j(b) - f_j(a)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \forall 1 \leq j \leq n$ e $\forall b \in V_\varepsilon(a)$. Como K é compacto e $K = \bigcup_{a \in K} V_\varepsilon(a)$, existem $a_1, ..., a_m \in K$ tais que $K = \bigcup_{i=1}^{m} V_\varepsilon(a_i)$. Tome $\Omega_i = V_\varepsilon(a_i)$, para cada $i = 1, ..., m$. Então, se w e $\overline{w}$ pertencem ao mesmo Ω_i, segue que

$$|f_j(w) - f_j(\overline{w})| \leq |f_j(w) - f_j(a_i)| + |f_j(a_i) - f_j(\overline{w})| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que, para cada $i = 1, ..., m$, $\Omega_i - \bigcup_{l \neq j} \Omega_l \neq \varnothing$, pois caso contrário, $\Omega_i \subset \bigcup_{l \neq j} \Omega_l$ e poderíamos considerar a cobertura $\bigcup_{l \neq j} \Omega_l$ para K. Escolha um elemento w_i em cada Ω_i que não esteja em Ω_l, para $l \neq i$ e seja $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ uma partição da unidade subordinada a $(\Omega_1, ..., \Omega_m)$, isto é, cada φ_i pertence a $C(K)$, tem valores em $[0, 1]$, se anula fora de Ω_i e $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(w) = 1$, para cada $w \in K$ (tal partição existe pelo teorema 1.1.5).

Como $\varphi_i(w_i) = 1$ e $\varphi_i(w_j) = 0$, se $i \neq j$, temos que $P \in \mathcal{L}(C(K))$, dada por $Pf = \sum_{i=1}^{m} f(w_i) \varphi_i$ é uma projeção, pois é claramente linear e

$$P^2 f = P\left(\sum_{i=1}^{m} f(w_i) \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(f(w_i) \varphi_i) = \sum_{i=1}^{m} f(w_i) \sum_{j=1}^{m} \varphi_i(w_j) \varphi_j = \sum_{i=1}^{m} f(w_i) \varphi_i = Pf.$$

A imagem de P é o espaço gerado pelos φ_i's, logo tem dimensão m. Vamos provar que $\|P\| = 1$. Temos que

$$\|Pf\| = \sup\{|Pf(x)|; x \in K\} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{m} f(w_i) . \varphi_i(x)\right|; x \in K\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{m} \max_{i=1,...m} |f(w_i)| . \varphi_i(x)\right|; x \in K\right\} = \max_{i=1,...m} |f(w_i)| \leq \sup\{|f(x)|; x \in K\} = \|f\|$$

e como no caso anterior, $\|P\| = 1$ provando assim o ítem *(a)*.

Sejam $f \in M$ e $w \in K$ então, para algum $1 \leq j \leq n$, $\|f - f_j\| < \frac{\varepsilon}{4}$ e assim,

$$|Pf(w) - f(w)| = \left|\sum_{i=1}^{m} f(w_i).\varphi_i(w) - f(w).\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(w)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m}(f(w_i) - f(w)).\varphi_i(w)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m}(|f(w_i) - f_j(w_i)| + |f_j(w_i) - f_j(w)| + |f_j(w) - f(w)|).\varphi_i(w) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=1}^{m}|f_j(w_i) - f_j(w)|.\varphi_i(w) + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{\{i:w\in\Omega_i\}}|f_j(w_i) - f_j(w)|.\varphi_i(w) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}.\sum_{\{i:w\in\Omega_i\}}\varphi_i(w) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\|Pf - f\| \leq \varepsilon$ e o ítem *(b)* está provado.

Agora, defina ϕ: $\ell_\infty^m \longrightarrow P(C(K))$ por $\phi((a_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i$ e vamos provar que ϕ é um isomorfismo isométrico. Claramente ϕ é linear. Agora, sejam $(a_i)_{i=1}^m, (b_i)_{i=1}^m \in \ell_\infty^m$, então se

$$\sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i = \sum_{i=1}^{m} b_i.\varphi_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i(w_j) = \sum_{i=1}^{m} b_i.\varphi_i(w_j), \forall j = 1, ...m \Longrightarrow a_i = b_i, \forall i = 1, ...m.$$

Logo ϕ é injetora.

Seja $g \in P(C(K))$, então $g = Ph$, para alguma função $h \in C(K)$, logo $g = \sum_{i=1}^{m} h(w_i)\varphi_i = \phi((h(w_i))_{i=1}^m)$ e, portanto ϕ é sobrejetora.

Vamos provar que ϕ é isometria. Para isto, seja $(a_i)_{i=1}^m \in \ell_\infty^m$, então

$$\|\phi((a_i)_{i=1}^m)\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i\right\| = \sup_{x\in K}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i(x)\right\} \leq \max_{i=1,\ldots,m}|a_i| = \|(a_i)_{i=1}^m\|.$$

Por outro lado,

$$\|(a_i)_{i=1}^m\| = \max_{i=1,\ldots,m}|a_i| = \sup_{j=1,\ldots,m}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i(w_j)\right\} \leq \sup_{x\in K}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i.\varphi_i(x)\right\} = \|\phi((a_i)_{i=1}^m)\|.$$

Portanto ϕ é isometria e como é linear, segue que ϕ é contínua, concluindo assim a demonstração. □

Demonstração. (Teorema 1.2.8) Resolveremos os casos *(a)* e *(b)* simultaneamente. Seja $E \in \mathcal{F}_X$, onde X é $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, ou $C(K)$. Seja $Q \in \mathcal{L}(X)$ uma projeção sobre E e escolha $\delta > 0$ tal que $\delta. \|Q\| < 1$. Como B_E é compacta, o lema 1.2.9 nos dá uma projeção $P \in \mathcal{L}(X)$ de norma 1, tal que $\|Px - x\| \leq \delta$ para cada $x \in B_E$ e $P(X)$ é isometricamente isomorfo a ℓ_p^n, onde $n = \dim P(X)$. Defina $u = id_X + PQ - Q$, onde id_X denota a função identidade definida em X. Como id_X, PQ e Q estão em $\mathcal{L}(X)$, segue que $u \in \mathcal{L}(X)$, além disso

$$\|u - id_X\| = \|PQ - Q\| = \|(P - id_X) \circ Q\| = \sup_{x \in B_X} \|(P - id_X) \circ Q(x)\| =$$
$$= \sup_{x \in B_X} \left\| (P - id_X) \circ \left(\frac{\|Q\| . Q(x)}{\|Q\|} \right) \right\| = \|Q\| . \sup_{x \in B_X} \left\| (P - id_X) \circ \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|} \right) \right\|$$

e como $\frac{Q(x)}{\|Q\|} \in B_X$, segue que

$$\|Q\| . \sup_{x \in B_X} \left\| (P - id_X) \circ \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|} \right) \right\| \leq \|Q\| . \delta < 1 \Longrightarrow \|u - id_X\| < 1.$$

Vamos agora provar que u^{-1} existe e pode ser expressa por $u^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (id_X - u)^k$. Chame $T = id_X - u$, como $\|T\| = \|u - id_X\| < 1$, temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| (id_X - u)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(id_X - u)\|^k < \infty,$$

logo a série $\sum_{k=0}^{\infty} (id_X - u)^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ é convergente. Como X é Banach, $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \in \mathcal{L}(X)$. Defina $S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k$, então

$$(id_X - T) . S_m = (id_X - T) . \left(id_X + T + T^2 + ... + T^m \right) =$$
$$= id_X + T + T^2 + ... + T^m - T - T^2 - ... - T^m - T^{m+1} = id_X - T^{m+1}.$$

Passando o limite com $m \longrightarrow \infty$, segue que $(id_X - T) . S = id_X$, pois $T^{m+1} \longrightarrow 0$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (id_X - u)^k = S = (id_X - T)^{-1} = (id_X - (id_X - u))^{-1} = u^{-1}.$$

Claramente $\|u\| \leq 1 + \delta. \|Q\|$ e

$$\left\| u^{-1} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (id_X - u)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|id_X - u\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\delta. \|Q\|)^k .$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} (\delta. \|Q\|)^k$ é uma série geométrica de razão menor que 1, segue que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\delta. \|Q\|)^k = \frac{1}{1-\delta. \|Q\|} = (1-\delta. \|Q\|)^{-1},$$

logo

$$\left\|u^{-1}\right\| \leq (1-\delta. \|Q\|)^{-1}.$$

Considere $u^{-1}Pu \in \mathcal{L}(X)$ que é linear e como $(u^{-1}Pu)^2 = (u^{-1}Pu) \circ (u^{-1}Pu) = u^{-1}P^2u = u^{-1}Pu$, é também uma projeção. Sua imagem, denotada por F, é também um subespaço n-dimensional de X e se $x \in E$, então

$$\begin{gathered} u(x) = (id_X + PQ - Q)(x) = x + PQ(x) - Q(x) = x + P(x) - x = P(x) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow u(x) = P(x) = P(P(x)) = P(u(x)) \Longrightarrow x = u^{-1}Pu(x) \Longrightarrow x \in F, \end{gathered}$$

logo $E \subset F$. Restringindo u a F, obtemos um isomorfismo $u_0 \colon F \longrightarrow P(X)$ e como $P(X)$ é isometricamente isomorfo a ℓ_p^n, obtemos um isomorfismo $v \colon F \longrightarrow \ell_p^n$ dado por $v = w \circ u_0$, onde w é um isomorfismo isométrico entre $P(X)$ e ℓ_p^n, que satisfaz

$$\begin{gathered} d\left(F, \ell_p^n\right) \leq \|v\| . \left\|v^{-1}\right\| = \|w \circ u_0\| . \left\|(w \circ u_0)^{-1}\right\| \leq \\ \leq \|w\| . \left\|w^{-1}\right\| . \|u_0\| . \left\|u_0^{-1}\right\| = \|u_0\| . \left\|u_0^{-1}\right\| \leq (1+\delta. \|Q\|) . (1-\delta. \|Q\|)^{-1}. \end{gathered}$$

Com uma escolha conveniente de δ, este último valor pode ser menor que qualquer $\lambda > 1$ e o teorema está provado. □

1.3 λ-representabilidade

Nesta seção estudaremos o conceito de λ-representabilidade e provaremos um simples resultado que diz que um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ é λ-representável no espaço ℓ_p.

Uma aplicação mais clara deste conceito será feita no capítulo 3.

Definição 1.3.1. *Sejam X e Y espaços de Banach e $\lambda \geq 1$. Dizemos que Y é* λ-representável *em X se dados $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathcal{F}_Y$, existem $E \in \mathcal{F}_X$ e um isomorfismo $u \colon F \longrightarrow E$ tais que $\|u\| . \|u^{-1}\| \leq \lambda + \varepsilon$.*
Quando $\lambda = 1$, dizemos que Y é finitamente representável *em X no lugar de 1-representável.*

Proposição 1.3.2. *Se X é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, então X é λ-representável no espaço ℓ_p.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{F}_X$. Como X é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, existem $F \in \mathcal{F}_X$, com $E \subset F$ e $u\colon F \longrightarrow \ell_p^m$ tais que $\|u\|\,.\,\|u^{-1}\| \leq \lambda + \varepsilon$. Considerando $v\colon E \longrightarrow u\,(E)$, dado por $v\,(x) = u\,(x)$, temos que $u\,(E) \in \mathcal{F}_{\ell_p}$, v é isomorfismo, $\|v\| \leq \|u\|$ e $\|v^{-1}\| \leq \|u^{-1}\|$, então $\|v\|\,.\,\|v^{-1}\| \leq \|u\|\,.\,\|u^{-1}\| \leq \lambda + \varepsilon$. Portanto X é λ-representável em ℓ_p. $\square$

CAPÍTULO 2

As Desigualdades de Khintchine e Kahane

Neste capítulo apresentaremos as desigualdades de Khintchine e Kahane, que compõem o alicerce do próximo capítulo e, como dito no capítulo 1, utilizaremos bastante as funções de Rademacher e, principalmente, suas propriedades de ortonormalidade.

2.1 Desigualdade de Khintchine

Teorema 2.1.1. (Desigualdade de Khintchine) *Para qualquer* $0 < p < \infty$*, existem constantes positivas* A_p *e* B_p *tais que*

$$A_p\left(\sum_n |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_n a_n r_n\left(t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\left(\sum_n |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

qualquer que seja a seqüência $(a_n) \in l_2$.

Demonstração. Vamos fazer a demonstração para o caso dos escalares reais, pois o caso complexo segue deste, decompondo os escalares em partes real e imaginária. Primeiramente vamos provar o caso $p = 4$ e depois o caso geral.

Caso $p = 4$*:*

Vamos provar o resultado para uma seqüência finita de escalares $(a_1, ..., a_m)$, pois para um

elemento qualquer de l_2, basta tomar o limite com $m \to \infty$.
Temos que

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} a_i r_i(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} a_j r_j(t)\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_k r_k(t)\right)\left(\sum_{l=1}^{m} a_l r_l(t)\right) dt =$$
$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} a_i a_j a_k a_l \int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, r_k(t)\, r_l(t)\, dt.$$

Pela ortonormalidade das funções de Rademacher, $\int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, r_k(t)\, r_l(t)\, dt = 1$ quando os índices são iguais em pares e $\int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, r_k(t)\, r_l(t)\, dt = 0$ nos demais casos. Logo,

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt = 3\sum_{i,j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 - 2\sum_{i=1}^{m} a_i^4 \leq 3\sum_{i,j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 = 3\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \sum_{j=1}^{m} a_j^2 = 3\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^2.$$

Assim, obtemos um dos lados da desigualdade tomando $B_p = 3^{\frac{1}{4}}$, já que

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n\right\|_{L_4} = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para obter o outro lado da desigualdade, basta tomar $A_p = 1$, pois utilizando a monotonicidade das normas de L_p temos que,

$$\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n\right\|_{L_2} \leq$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n\right\|_{L_4} = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Caso p qualquer:
Novamente provaremos para uma seqüência finita de escalares, mas primeiro provaremos que se $p \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$, então
$$|y|^p < p!\left(1 + \frac{|y|^p}{p!}\right) \leq p! e^{|y|}.$$

Note que $|y|^p < p!+|y|^p = p!\left(1+\frac{|y|^p}{p!}\right)$ e portanto temos a desigualdade da esquerda. Agora, $e^{|y|} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|y|^k}{k!} = 1+|y|+...+\frac{|y|^p}{p!}+... \geq 1+\frac{|y|^p}{p!}$, logo $p!\left(1+\frac{|y|^p}{p!}\right) \leq p!e^{|y|}$ e o resultado está provado.

Seja $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n r_n(t)$, então

$$\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \leq p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \leq p! \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right) dt,$$

pois como $|y| = y$ ou $-y$ e $e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R}$, segue que $e^{|y|} < e^y + e^{-y}$.

Além disso,

$$e^{f(t)} = e^{\sum\limits_{n=1}^{m} a_n r_n(t)} = \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)}$$

e assim,

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)} dt = \prod_{n=1}^{m} \int_0^1 e^{a_n r_n(t)} dt = \prod_{n=1}^{m} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n r_n(t))^k}{k!} dt =$$

$$= \prod_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^{2k}}{(2k)!} = \prod_{n=1}^{m} \cosh(a_n).$$

Temos também que $e^{\left(\frac{a_n^2}{2}\right)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^{2k}}{2^k.k!}$, e como $(2k)! = 2k.(2k-1).....k! \geq 2.2.....k! = 2^k.k!$, segue que $\frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k.k!}, \forall k \in \mathbb{N}$, e portanto $\frac{a_n^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{a_n^{2k}}{2^k.k!}$, obtendo

$$\cosh(a_n) \leq e^{\left(\frac{a_n^2}{2}\right)}, \forall n \in \{1, ..., m\}.$$

Portanto

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \prod_{n=1}^{m} \cosh(a_n) \leq \prod_{n=1}^{m} e^{\left(\frac{a_n^2}{2}\right)} = e^{\left(\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{a_n^2}{2}\right)} = e^{\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{m} a_n^2\right)} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Por simetria, $\int_0^1 e^{-f(t)} dt \leq e^{\frac{1}{2}}$ e, portanto,

$$\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \leq p! \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right) dt \leq 2.p!.e^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, para $2 \leq p < \infty$, como as normas de L_p são monótonas temos que,

$$\left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p} = \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n r_n \right\|_{L_p} \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n r_n \right\|_{L_k} =$$

$$= \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t) \right|^k dt \right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(2.k!.e^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(2.k!.e^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde k é o primeiro inteiro maior que p. Claramente, basta considerar $A_p = 1$ e $B_p = \left(2.k!.e^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{k}}$ e temos a desigualdade.

Falta o caso em que $0 < p < 2$. Seja $0 < \theta < 1$ dado por $\theta = \left(2 - \frac{p}{2}\right)^{-1}$ e vamos provar que $p\theta + 4(1-\theta) = 2$. De fato,

$$\theta = \frac{1}{2 - \frac{p}{2}} \Longrightarrow 2\theta - \frac{p}{2}\theta = 1 \Longrightarrow 4\theta - p\theta = 2 \Longrightarrow 4\theta - 2 = p\theta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4\theta + 2 = p\theta + 4 \Longrightarrow 2 = p\theta + 4(1-\theta).$$

Como $\theta + (1-\theta) = 1$, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_0^1 |f(t)|^{p\theta} . |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \leq \left(\int_0^1 \left(|f(t)|^{p\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} dt \right)^{\theta} . \left(\int_0^1 \left(|f(t)|^{4(1-\theta)} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} dt \right)^{1-\theta} =$$

$$= \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} . \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta},$$

portanto,

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} . |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} . \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta} = \|f\|_{L_p}^{p\theta} . \|f\|_{L_4}^{4(1-\theta)}.$$

Pelo caso $p = 4$, temos que $\|f\|_{L_4} \leq B_4 \|f\|_{L_2}$ e, portanto $B_4^{2-\frac{4}{p}} \|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p}$. De fato,

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta} . \|f\|_{L_4}^{4(1-\theta)} \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta} B_4^{4(1-\theta)} \|f\|_{L_2}^{4(1-\theta)} \Longrightarrow B_4^{-4(1-\theta)} \|f\|_{L_2}^{2-4(1-\theta)} \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta}.$$

Como $p\theta + 4(1-\theta) = 2$, segue que

$$B_4^{p\theta-2} \|f\|_{L_2}^{p\theta} \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta} \Longrightarrow B_4^{\frac{p\theta-2}{p\theta}} \|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p},$$

mas

$$\frac{p\theta-2}{p\theta}=1-\frac{2}{p\theta}=1-\frac{2}{p}\left(2-\frac{p}{2}\right)=1-\frac{4}{p}+1=2-\frac{4}{p},$$

então

$$B_4^{2-\frac{4}{p}}\left\|f\right\|_{L_2}\leq\left\|f\right\|_{L_p}.$$

Finalmente, pela monotonicidade das normas de L_p, $\left\|f\right\|_{L_p}\leq\left\|f\right\|_{L_2}$, assim basta tomar $A_p=B_4^{2-\frac{4}{p}}$ e $B_p=1$.

Agora, sejam $a_1,...,a_n$ quaisquer e defina para cada $i=1,...,n$, $b_i=\frac{a_i}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k\right\|_{L_2}}$.

Temos que $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}r_kb_k\right\|_{L_2}=1$ e como

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}r_kb_k\right\|_{L_p}=\frac{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k\right\|_{Lp}}{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}r_ka_k\right\|_{L_2}}\text{ e }A_p\leq\left\|\sum_{k=1}^{n}r_kb_k\right\|_{L_p}\leq B_p$$

segue que

$$A_p.\left\|\sum_{k=1}^{n}r_ka_k\right\|_{L_2}\leq\left\|\sum_{k=1}^{n}r_ka_k\right\|_{Lp}\leq B_p.\left\|\sum_{k=1}^{n}r_ka_k\right\|_{L_2}$$

e o resultado está provado. □

Uma questão que surge naturalmente é a seguinte: existe uma desigualdade como a de Khintchine, para espaços de Banach gerais?

A resposta é não e os contra-exemplos são encontrados rapidamente em c_0 e ℓ_1. Considerando as seqüências $e_1,e_2,...,e_n$, temos que

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n}r_k\left(t\right)e_k\right\|_{c_0}^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}=1$$

e

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n}r_k\left(t\right)e_k\right\|_{\ell_1}^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}=n,$$

enquanto que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|e_k\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=n^{\frac{1}{2}},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ em ambos os casos. Agora, é claro que não existem constantes A_p e B_p satisfazendo

$$A_p.n^{\frac{1}{2}} \leq n \leq B_p.n^{\frac{1}{2}}$$

e

$$A_p.n^{\frac{1}{2}} \leq 1 \leq B_p.n^{\frac{1}{2}},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Desigualdade de Kahane

Teorema 2.2.1. (Desigualdade de Kahane) *Se* $0 < p, q < \infty$, *então existe uma constante* $K_{p,q} > 0$ *para a qual*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

quaisquer que sejam as escolhas do espaço de Banach X *e do número finito de vetores* $x_1, ..., x_n \in X$.

Antes de demonstrar esta desigualdade, precisamos de familiaridade com alguns conceitos da teoria de probabilidade e de alguns resultados auxiliares que serão enunciados na forma de lemas.

Um *espaço de probabilidade* é uma tripla (Ω, Σ, P), onde Ω é um conjunto, Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma medida de probabilidade sobre Σ, isto é, $P(\Omega) = 1$. Uma *variável aleatória a valores reais* χ num espaço de probabilidade (Ω, Σ, P), é uma função Borel mensurável de Ω em $\mathbb{R}$ (isto é, $\chi^{-1}(B) \in \Sigma$, $\forall B \in \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ denota a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$). No nosso caso, uma *soma aleatória num espaço de Banach* X é dada por $\sum\limits_{k=1}^{n} \chi_k.x_k$, onde cada $x_k \in X$ e os χ_k's são variáveis aleatórias. Quando as variáveis aleatórias forem dadas pelas funções de Rademacher, dizemos que $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k x_k$ é uma *soma de Rademacher no espaço de Banach* X.

A *distribuição* de uma variável aleatória χ é a medida P_χ sobre os conjuntos de Borel em $\mathbb{R}$, dada por $P_\chi(B) = P(\chi \in B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$. Aqui estamos usando uma notação comum de probabilidade e escrevendo $P(\chi \in B)$ ao invés de $P(\{\omega \in \Omega : \chi(\omega) \in B\})$. Vamos continuar usando esta notação até o final do capítulo, por exemplo, $P(\chi > a)$ quer dizer $P(\{\omega \in \Omega : \chi(\omega) > a\})$ e assim por diante.

Uma variável aleatória χ é dita *simétrica* se $P(\chi > a) = P(\chi < -a)$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, χ é simétrica se, e somente se, $P(\chi \in I) = P(-\chi \in I)$, para cada intervalo I. Pelo teorema de extensão de probabilidades dado em [14], página 23, segue que se χ é simétrica, então $P_\chi = P_{-\chi}$, isto é, as variáveis aleatórias χ e $-\chi$ têm a mesma distribuição.

As variáveis aleatórias $\chi_1, ..., \chi_n$ em (Ω, Σ, P) são ditas *independentes* se

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{\chi_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(\chi_k \in B_k),$$

quaisquer que sejam os conjuntos de Borel $B_k \subset \mathbb{R}$. Equivalentemente, $\chi_1, ..., \chi_n$ são independentes se, e somente se, a medida P_n, definida por $P_n(B) = P((\chi_1, ..., \chi_n) \in B)$, para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{R}^n$, coincide com o produto das medidas $P\chi_k$, com $k = 1, ..., n$. Conseqüentemente, se $(\chi_1, ..., \chi_n)$ e $(\chi_1^*, ..., \chi_n^*)$ são duas n-uplas de variáveis aleatórias independentes com $P\chi_k = P\chi_k^*$, para todo $k = 1, ..., n$ e se $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Borel mensurável, então as variáveis aleatórias $f(\chi_1, ..., \chi_n)$ e $f(\chi_1^*, ..., \chi_n^*)$ têm a mesma distribuição. O principal interesse nessa observação é o caso em que as variáveis aleatórias $\chi_1, ..., \chi_n$ são simétricas e independentes, pois $f(\chi_1(\cdot), ..., \chi_n(\cdot))$ e $f(\varepsilon_1.\chi_1(\cdot), ..., \varepsilon_n.\chi_n(\cdot))$ terão a mesma distribuição, quaisquer que sejam as escolhas dos $\varepsilon_i = \pm 1$.

Note também que se χ é uma variável aleatória simétrica no espaço de probabilidade (Ω, Σ, P), então ela tem a mesma distribuição que $r_k(\cdot).|\chi(\cdot)|$ no espaço produto $[0,1] \times \Omega$. Considerando a medida produto entre a medida m de Lebesgue sobre $[0,1]$ e a medida P, isto é, $(m \times P)(A \times B) = m(A).P(B)$, temos que, para $a > 0$,

$$\begin{gathered}
(m \times P)(\{(t,\omega) : \ r_k(t).|\chi(\omega)| > a\}) = \\
= (m \times P)(\{(t,\omega) : \ |\chi(\omega)| > a \text{ e } r_k(t) = 1\} \cup \{(t,\omega) : \ |\chi(\omega)| < -a \text{ e } r_k(t) = -1\}) = \\
= (m \times P)(\{(t,\omega) : \ |\chi(\omega)| > a \text{ e } r_k(t) = 1\}) + \\
+ (m \times P)(\{(t,\omega) : \ |\chi(\omega)| < -a \text{ e } r_k(t) = -1\}) = \\
= (m \times P)(\{(t,\omega) : \ |\chi(\omega)| > a \text{ e } r_k(t) = 1\}) = \frac{1}{2}.P(\{\omega : |\chi(\omega)| > a\}) = \\
= \frac{1}{2}.[P(\{\omega : \chi(\omega) > a\}) + P(\{\omega : \chi(\omega) < -a\})] = \frac{1}{2}.2.P(\{\omega : \chi(\omega) > a\}) = \\
= P(\{\omega : \chi(\omega) > a\}).
\end{gathered}$$

Como conseqüência destas duas últimas observações, decorre o seguinte lema (consideremos agora as $f_k's$ independentes e simétricas):

Lema 2.2.2. *Seja* $\sum_{k=1}^{n} f_k x_k$ *uma soma aleatória num espaço de Banach* X*, atuando sobre um espaço de probabilidade* (Ω, Σ, P) *.Então,*

a) Para qualquer escolha $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n = \pm 1$, $\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_k(\cdot) x_k \right\|$ *e* $\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(\cdot) x_k \right\|$ *têm a mesma distribuição.*

b) Além disso, $\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(\cdot) x_k \right\|$ *e* $\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(\cdot) |f_k(\cdot)| x_k \right\|$ *têm a mesma distribuição.*

Lema 2.2.3. *(Desigualdade de Lévy): Seja* $\sum_{k=1}^{n} f_k x_k$ *uma soma aleatória num espaço de Banach* X*, atuando sobre um espaço de probabilidade* (Ω, Σ, P) *. Para cada* $a > 0$*, temos que*

$$P\left(\max_{k \leq n} \left\| \sum_{j=1}^{k} f_j x_j \right\| \geq a \right) \leq 2.P\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} f_j x_j \right\| \geq a \right).$$

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{N}$, defina $S_0 = 0$ e $S_k = f_1 x_1 + ... + f_k x_k$, para $1 \leq k \leq n$. Defina $A = \left\{ \max_{k \leq n} \|S_k\| \geq a \right\}$, $B = \{\max \|S_n\| \geq a\}$ e para cada $1 \leq k \leq n$, defina $A_k = \bigcap_{j=0}^{k-1} (\{\|S_j\| < a\} \cap \{\|S_k\| \geq a\})$. Vamos provar que os A_k's formam uma partição de A (isto é, $A_j \cap A_i = \phi, \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ e $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$).

Suponha que exista $\omega \in A_j \cap A_i$, onde $j, i \in \{1, ..., n\}$ e, sem perda de generalidade, que $i > j$. Então

$$\omega \in \left(\bigcap_{l=0}^{i-1} (\{\|S_l\| < a\} \cap \{\|S_i\| \geq a\}) \right) \cap \left(\bigcap_{l=0}^{j-1} (\{\|S_l\| < a\} \cap \{\|S_j\| \geq a\}) \right),$$

em particular, $\omega \in \{\|S_j\| \geq a\}$ e

$$\omega \in \bigcap_{l=0}^{i-1} \{\|S_l\| < a\} = \left(\bigcap_{l=0}^{j} \{\|S_l\| < a\} \right) \cap \left(\bigcap_{l=j+1}^{i-1} \{\|S_l\| < a\} \right) \Longrightarrow \omega \in \{\|S_j\| < a\},$$

o que é um absurdo, logo $\forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, temos que $A_j \cap A_i = \phi$. Agora, seja $\omega \in A_k, 1 \leq k \leq n$, então $\omega \in \{\|S_k\| \geq a\} \Longrightarrow \omega \in \{\max_{k \leq n} \|S_k\| \geq a\} = A$, então $A_k \subset A$ e portanto, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Seja $\omega \in A$, então existe $0 \leq k_0 \leq n$ tal que $\|S_{k_0}(\omega)\| \geq a$. Tome $n_0 = \min\{j : 0 \leq j \leq k_0 \text{ e } \|S_j(\omega)\| \geq a\}$, então, pela minimalidade de n_0, $\|S_{n_0}(\omega)\| \geq a$ e $\{\|S_j\| < a\}, \forall 1 \leq j \leq n_0 - 1$, ou seja, $\omega \in A_{n_0} \Longrightarrow \omega \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Assim $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ e portanto

os A_k's formam uma partição de A. É obvio que $B \subset A$.
Defina agora $\overline{S_n} = S_k - f_{k+1}x_{k+1} - ... - f_n x_n$, para $0 \leq k \leq n$ fixado. Se $\omega \in A_k$, então

$$\|S_n(\omega)\| + \left\|\overline{S_n}(\omega)\right\| \geq \left\|S_n(\omega) + \overline{S_n}(\omega)\right\| = \|2S_k(\omega)\| \geq 2a,$$

e então

$$\|S_n(\omega)\| \geq a \text{ ou } \left\|\overline{S_n}(\omega)\right\| \geq a.$$

Tome $U = A_k \cap \{\|S_n\| \geq a\}$,$V = A_k \cap \left\{\left\|\overline{S_n}\right\| \geq a\right\}$ e vamos provar que esses eventos ocorrem com igual probabilidade. Pelo lema 2.2.2 , ítem (a), escolhendo $\varepsilon_1 = ... = \varepsilon_k = 1$ e $\varepsilon_{k+1} = ... = \varepsilon_n = -1$, temos que $\|S_n(\cdot)\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\cdot)\, x_i\right\|$ e $\left\|\overline{S_n}(\cdot)\right\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i(\cdot)\, x_i\right\|$ têm a mesma distribuição, assim

$$P(\|S_n\| \in [a, +\infty)) = P\left(\left\|\overline{S_n}\right\| \in [a, +\infty)\right),$$

isto é,

$$P(\|S_n\| \geq a) = P\left(\left\|\overline{S_n}\right\| \geq a\right).$$

Agora, como os f_i's são independentes,

$$\begin{aligned} P(U) &= P(A_k \cap \{\|S_n\| \geq a\}) = P(A_k) . P(\{\|S_n\| \geq a\}) = \\ &= P(A_k) . P\left(\left\{\left\|\overline{S_n}\right\| \geq a\right\}\right) = P\left(A_k \cap \left\{\overline{\|S_n\|} \geq a\right\}\right) = P(V). \end{aligned}$$

Como $U \subset A_k$ e $V \subset A_k$, então $U \cup V \subset A_k$. Seja $\omega \in A_k$, então $\|S_n(\omega)\| \geq a$ ou $\left\|\overline{S_n}(\omega)\right\| \geq a$, ou seja, $\omega \in U$ ou $\omega \in V$, logo $A_k \subset U \cup V$. Portanto

$$P(A_k) = P(U \cup V) \leq P(U) + P(V) = 2P(U) = 2P(A_k \cap \{\|S_n\| \geq a\})$$

e como $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, segue que

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq 2\sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap \{\|S_n\| \geq a\}) = \\ &= 2P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap \{\|S_n\| \geq a\}\right) = 2P(A \cap \{\|S_n\| \geq a\}) = 2P(\{\|S_n\| \geq a\}) \end{aligned}$$

e a desigualdade está provada. □

Lema 2.2.4. *Considere uma soma de Rademacher* $\sum_{k=1}^{n} r_k x_k$ *num espaço de Banach* X*, atuando sobre o espaço de probabilidade* $([0,1], \mathcal{B}, m)$ *(aqui* $\mathcal{B}$ *denota a* σ*-álgebra de Borel sobre* $[0,1]$ *e* m *a medida de Lebesgue sobre* $[0,1]$*). Então, para cada* $a > 0$*,*

$$m\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right\| \geq 2a\right) \leq 4\left(m\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right\| \geq a\right)\right)^2.$$

Demonstração. Para cada $1 \leq k \leq n$, defina $S_k = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j$ e $S_0 = 0$. Seja $a > 0$ e considere os conjuntos

$$A = \left\{\max_{k \leq n} \|S_k\| \geq a\right\}, B = \{\|S_n\| \geq a\} \text{ e } C = \{\|S_n\| \geq 2a\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $m(C) \leq 4.m(B)^2$.
Pelo lema 2.2.3, $m(A) \leq 2m(B)$. Considere nossa partição de A como na demonstração do lema 2.2.3: $A_k = \bigcap_{j=0}^{k-1} (\{\|S_j\| < a\} \cap \{\|S_k\| \geq a\})$, para cada $1 \leq k \leq n$. Temos que $A_k \cap C$ é um subconjunto de $C_k = \{\|S_n - S_{k-1}\| \geq a\}$ tal que $m(A_k \cap C) \leq m(A_k \cap C_k)$. De fato, se

$$\omega \in A_k \cap C \Longrightarrow \|S_n(\omega) - S_{k-1}(\omega)\| \geq \|S_n(\omega)\| - \|S_{k-1}(\omega)\| \geq 2a - a = a \Longrightarrow \omega \in C_k.$$

Assim

$$A_k \cap C \subset C_k \Longrightarrow A_k \cap C \subset A_k \cap C_k \Longrightarrow m(A_k \cap C) \leq m(A_k \cap C_k).$$

Como $C \subset B \subset A$, temos que

$$m(C) = m(A \cap C) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap C\right) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k \cap C) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k \cap C_k).$$

Vamos mostrar agora que, para cada $k = 1, ..., n$, A_k e C_k são independentes. Os conjuntos C_k e $\left\{\left\|x_k + \sum_{j=k+1}^{n} r_k r_j x_j\right\| \geq a\right\}$ são iguais a menos de um número finito de termos, pois $r_k^2 = |r_k| = 1$ com excessão do número finito de pontos onde r_k se anula, portanto

$$m(C_k) = m\left(\left\{\left\|x_k + \sum_{j=k+1}^{n} r_k r_j x_j\right\| \geq a\right\}\right).$$

Assim, segue que os C_k's dependem de $r_k.r_{k+1}, ..., r_k.r_n$ enquanto que os A_k's dependem de $r_1, ..., r_k$. Como as variáveis aleatórias $r_1, ..., r_k$ são independentes, segue que as variáveis aleatórias $r_1, ..., r_k, r_k.r_{k+1}, ..., r_k.r_n$ são independentes. De fato, quaisquer que sejam $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, ..., n$ temos que

$$m\left(r_1 = \varepsilon_1, ..., r_k = \varepsilon_k, r_k.r_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, ..., r_k.r_n = \varepsilon_n\right) =$$
$$= m\left(r_1 = \varepsilon_1, ..., r_k = \varepsilon_k, r_{k+1} = \varepsilon_k.\varepsilon_{k+1}, ..., r_n = \varepsilon_k.\varepsilon_n\right) = 2^{-n} =$$
$$= m\left(r_1 = \varepsilon_1\right).....m\left(r_k = \varepsilon_k\right).m\left(r_k.r_{k+1} = \varepsilon_{k+1}\right).....m\left(r_k.r_n = \varepsilon_n\right).$$

Portanto, $m\left(A_k \cap C_k\right) = m\left(A_k\right).m\left(C_k\right)$, pois cada um deles é a interseção de imagens inversas de conjuntos mensuráveis por funções mensuráveis que são variáveis aleatórias independentes.

Conseqüentemente,

$$m\left(C\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m\left(A_k \cap C_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m\left(A_k\right).m\left(C_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m\left(A_k\right).\max_{k \leq n} m\left(C_k\right) =$$
$$= m\left(A\right).\max_{k \leq n} m\left(C_k\right) \leq 2.m\left(B\right).\max_{k \leq n} m\left(C_k\right).$$

Agora, qualquer que seja a escolha de $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1} = \pm 1$, defina

$$C_{k,\varepsilon}^{\pm} = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\}\right) \cap C_k \cap \{\|(S_n - S_{k-1}) \pm S_{k-1}\| \geq a\},$$

então

$$C_{k,\varepsilon}^{+} = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\}\right) \cap C_k \cap B.$$

Vamos provar que os eventos $C_{k,\varepsilon}^{+}$ e $C_{k,\varepsilon}^{-}$ são igualmente prováveis e que

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\}\right) \cap C_k = C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-}.$$

Pelo lema 2.2.2, ítem (a), as variáveis aleatórias $\|(S_n - S_{k-1}) - S_{k-1}\|$ e $\|S_n\|$ têm a mesma distribuição, logo os eventos $C_{k,\varepsilon}^{+}$ e $C_{k,\varepsilon}^{-}$ são igualmente prováveis e, portanto $m\left(C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-}\right) \leq 2.m\left(C_{k,\varepsilon}^{+}\right)$. Agora, é claro que $C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-} \subset \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\}\right) \cap C_k$, então suponha que exista $t \in C_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\}\right)$ tal que $t \notin C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-}$. Chame $\alpha = \sum_{j=k}^{n} r_j(t)\, x_j$ e $\beta = \sum_{j=1}^{k-1} r_j(t)\, x_j$, então $\|\alpha + \beta\| < a$ e $\|\alpha - \beta\| < a$. Logo,

$$\|2\alpha\| = \|\alpha + \beta + \alpha - \beta\| \leq \|\alpha + \beta\| + \|\alpha - \beta\| < a + a = 2a \Longrightarrow \|\alpha\| < a.$$

Por outro lado, como $t \in C_k$, segue que

$$a \leq \|S_n(t) - S_{k-1}(t)\| = \left\| \sum_{j=k}^{n} r_j(t) x_j \right\| = \|\alpha\|,$$

o que é uma contradição, portanto $t \in C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-}$ e assim

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\} \right) \cap C_k = C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} m(C_k) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1}=\pm 1} m\left(C_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\} \right) \right) &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1}=\pm 1} m\left(C_{k,\varepsilon}^{+} \cup C_{k,\varepsilon}^{-} \right) \leq \\ \leq \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1}=\pm 1} 2.m\left(C_{k,\varepsilon}^{+} \right) &= 2. \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1}=\pm 1} m\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\} \right) \cap C_k \cap B \right) \leq \\ \leq 2. \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-1}=\pm 1} m\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{r_j = \varepsilon_j\} \right) \cap B \right) &= 2.m(B). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\max_{k \leq n} m(C_k) \leq 2.m(B),$$

mas provamos anteriormente que

$$m(C) \leq 2.m(B) . \max_{k \leq n} m(C_k),$$

logo

$$m(C) \leq 4.m(B)^2.$$

$\square$

Agora estamos preparados para demonstrar a desigualdade de Kahane.

Demonstração. (Desigualdade de Kahane) Se $p \geq q$, basta tomar $K_{p,q} = 1$, pois $\|\cdot\|_{Lq} \leq \|\cdot\|_{Lp}$.

Vamos agora considerar o caso $0 < p < q < \infty$. Primeiramente, sejam $x_1, \ldots x_n \in X$ tais que $\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^p dt = 1$. Então, temos que

$$m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 8^{\frac{1}{p}} \right) \leq \frac{1}{8}.$$

De fato, tome $A = \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 8^{\frac{1}{p}} \right\}$ e suponha que $m(A) > \frac{1}{8}$, então

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^p dt = \int_A \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^p dt + \int_{A^C} \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^p dt \geq$$

$$\geq \int_A \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^p dt \geq 8.m(A) > 8.\frac{1}{8} = 1,$$

o que é uma contradição.

Agora vamos provar por indução finita e utilizando o lema 2.2.4 que

$$m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 2^l 8^{\frac{1}{p}} \right) \leq \frac{1}{4}.2^{-2^l}, \text{ para } l = 0, 1, 2, ...$$

Para $l = 0$, foi o que acabamos de provar acima. Seja $l = 1$, pelo lema 2.2.4

$$m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 2^1 8^{\frac{1}{p}} \right) \leq 4.\left(m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 8^{\frac{1}{p}} \right) \right)^2$$

e pelo caso $l = 0$, segue que

$$4.\left(m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 8^{\frac{1}{p}} \right) \right)^2 \leq 4.\left(\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{1}{4}.2^{-2^1}.$$

Agora, suponha o resultado válido para l e provemos para $l + 1$. Então, pelo lema 2.2.4,

$$m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 2^{l+1} 8^{\frac{1}{p}} \right) = m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 2.\left(2^l 8^{\frac{1}{p}} \right) \right) \leq$$

$$\leq 4.\left(m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 2^l 8^{\frac{1}{p}} \right) \right)^2.$$

Logo, pela hipótese de indução,

$$4.\left(m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq 2^l 8^{\frac{1}{p}} \right) \right)^2 \leq 4.\left(\frac{1}{4}.2^{-2^l} \right)^2 = \frac{1}{4} 2^{-2^l.2} = \frac{1}{4} 2^{-2^{l+1}}.$$

Vamos provar também que

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^q dt = \int_0^\infty q.s^{q-1}.m\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\| \geq s \right) ds.$$

Para $n = 1$, temos que

$$\int_0^\infty q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1\| \geq s\right)ds = \int_0^{\|x_1\|} q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1\| \geq s\right)ds +$$
$$+\int_{\|x_1\|}^\infty q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1\| \geq s\right)ds = \int_0^{\|x_1\|} q.s^{q-1}ds + 0 = \|x_1\|^q - 0^q = \|x_1\|^q .$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 \|r_1(t)\, x_1\|^q\, dt = \int_0^1 \|x_1\|^q\, dt = \|x_1\|^q .$$

Para $n = 2$, temos duas possibilidades para $\|r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2\|$:

$$\|x_1 + x_2\| \text{ ou } \|x_1 - x_2\| .$$

Vamos supor que $\|x_1 + x_2\| \geq \|x_1 - x_2\|$, pois o caso contrário é anólogo. Então

$$\int_0^\infty q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1 + r_2x_2\| \geq s\right)ds = \int_0^{\|x_1-x_2\|} q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1 + r_2x_2\| \geq s\right)ds +$$
$$+\int_{\|x_1-x_2\|}^{\|x_1+x_2\|} q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1 + r_2x_2\| \geq s\right)ds + \int_{\|x_1+x_2\|}^\infty q.s^{q-1}.m\left(\|r_1x_1 + r_2x_2\| \geq s\right)ds =$$
$$= \int_0^{\|x_1-x_2\|} q.s^{q-1}ds + \int_{\|x_1-x_2\|}^{\|x_1+x_2\|} q.s^{q-1}.\frac{1}{2}ds + 0 = \|x_1 - x_2\|^q + \frac{\|x_1 + x_2\|^q}{2} - \frac{\|x_1 - x_2\|^q}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}.\left(\|x_1 - x_2\|^q + \|x_1 + x_2\|^q\right).$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 \|r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2\|^q\, dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \|r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2\|^q\, dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \|r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2\|^q\, dt +$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \|r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2\|^q\, dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 \|r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2\|^q\, dt = 2.\int_0^{\frac{1}{4}} \|x_1 + x_2\|^q\, dt +$$
$$+2.\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \|x_1 - x_2\|^q\, dt = \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\|^q + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^q$$

e o resultado está provado para $n = 2$. Procedendo da mesma forma obtemos a igualdade para os demais números naturais.

Considere agora $\alpha_0 = 0$, $\alpha_l = 2^{l-1}.8^{\frac{1}{p}}$ para cada $l = 1, 2, ...$, e defina

$$f(s) = q.s^{q-1}.m\left(\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\right\| \geq s\right), \text{ para } s \geq 0.$$

Então

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k \right\|^q dt = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} f(s)\, ds \leq \int_0^{\alpha_1} q.s^{q-1} ds + \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\alpha_l+1}^{\alpha_{l+2}} f(s)\, ds.$$

Como provamos que

$$m\left(\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\| \geq 2^l 8^{\frac{1}{p}} \right) \leq \frac{1}{4}.2^{-2^l}, \text{ para } l = 0, 1, 2, ...,$$

temos que

$$\int_0^{\alpha_1} q.s^{q-1} ds + \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\alpha_l+1}^{\alpha_{l+2}} f(s)\, ds \leq \int_0^{\alpha_1} q.s^{q-1} ds + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-2^l} \int_{\alpha_{l+1}}^{\alpha_{l+2}} q.s^{q-1} ds =$$

$$= \alpha_1^q + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-2^l} \left(\alpha_{l+2}^q - \alpha_{l+1}^q \right) = 8^{\frac{q}{p}} 2^0 + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-2^l} \left(8^{\frac{q}{p}} 2^{lq+q} - 8^{\frac{q}{p}} 2^{lq} \right) =$$

$$= 8^{\frac{q}{p}} + \frac{8^{\frac{q}{p}}}{4} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-2^l} 2^{lq} \left(2^q - 1 \right) = 8^{\frac{q}{p}} + \frac{8^{\frac{q}{p}} \left(2^q - 1 \right)}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{lq}}{2^{2^l}} < \infty.$$

Agora, basta tomar $K_{p,q} = \left(8^{\frac{q}{p}} + \frac{8^{\frac{q}{p}}(2^q-1)}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{lq}}{2^{2^l}} \right)^{\frac{1}{q}}$, pois como $\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k \right\|^p dt = 1$, segue que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q}.1 = K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, sejam $x_1, ..., x_n \in X$ quaisquer e defina para cada $i = 1, ..., n$, $y_i = \frac{x_i}{\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_p}}$.

Temos que $y_i \in X, \forall i = 1, ..., n$ e $\left\| \sum_{k=1}^n r_k y_k \right\|_{L_p} = 1$. Logo,

$$\frac{\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{Lq}}{\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_p}} = \left\| \sum_{k=1}^n r_k y_k \right\|_{L_q} \leq K_{p,q}$$

e, portanto

$$\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{Lq} \leq K_{p,q} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{Lp}.$$

□

CAPÍTULO 3

Tipo e Cotipo

Vimos no capítulo anterior que não existe uma desigualdade como a de Khintchine, para espaços de Banach gerais, mesmo assim vale a pena ver o que acontece nos espaços ℓ_r, $1 \leq r < \infty$, antes de estudar o assunto central deste capítulo.

3.1 Somas de Rademacher em ℓ_r

Proposição 3.1.1. *Para cada $1 \leq r < \infty$, existem constantes $\theta(r)$ e $\delta(r)$ tais que, para qualquer escolha de $x_1, ..., x_n$ em ℓ_r,*
(a) *se $1 \leq r \leq 2$, então*

$$\delta(r) . \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\ell_r}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_{\ell_r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq \theta(r) . \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\ell_r}^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

(b) *se $2 \leq r < \infty$, então*

$$\delta(r) . \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\ell_r}^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_{\ell_r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq \theta(r) . \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\ell_r}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. (a) Para $k = 1, ..., n$, denote $x_k = (\xi_{k,i})_{i=1}^{\infty} \in \ell_r$. Então,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_{\ell_r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(t) . \xi_{k,i}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(t) . \xi_{k,i}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pela desigualdade de Khintchine, existem constantes positivas $\theta(r)$ e $\delta(r)$ tais que

$$(\delta(r))^r \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,i} r_k(t)\right|^r dt\right) \leq (\theta(r))^r \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}},$$

portanto

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\delta(r))^r \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_{\ell_r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\theta(r))^r \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Vamos provar primeiro a desigualdade da direita. Como $r \leq 2$, então $\|\cdot\|_{\ell_2} \leq \|\cdot\|_{\ell_r}$, logo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}} = \|(\xi_{1,i}, \ldots, \xi_{n,i})\|_{\ell_2}^r \leq \|(\xi_{1,i}, \ldots, \xi_{n,i})\|_{\ell_r}^r = \sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^r.$$

Assim,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_{\ell_r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq \theta(r) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$
$$\leq \theta(r) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \theta(r) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{\ell_r}^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Agora, vamos provar a desigualdade da esquerda. Já sabemos que,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_{\ell_r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \geq \delta(r) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}},$$

daí

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_{k,i}|^{2}\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_{k,i}|^{2\cdot\frac{r}{r}}\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left(|\xi_{k,i}|^{r}\right)_{k=1}^{n}\right\|_{l_{\frac{2}{r}}}\right)^{\frac{1}{r}}\geq$$

$$\geq\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(|\xi_{k,i}|^{r}\right)_{k=1}^{n}\right\|_{l_{\frac{2}{r}}}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_{k,i}|^{r}\right)_{k=1}^{n}\right\|_{l_{\frac{2}{r}}}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_{k,i}|^{r}\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}=$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_{k,i}|^{r}\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_{\ell_r}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\,x_k\right\|_{\ell_r}^{r}dt\right)^{\frac{1}{r}}\geq\delta(r)\,.\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_{\ell_r}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ e o ítem *(a)* está provado.

(b) A demonstração é análoga, mas com algumas desigualdades invertidas. □

3.2 Tipo e Cotipo: Teoria Básica

Definição 3.2.1. *Um espaço de Banach X tem* tipo p *se existe uma constante $\theta\geq 0$ tal que, qualquer que seja a escolha finita de vetores $x_1,...,x_n\in X$,*

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\,x_k\right\|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq\theta\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se X tem tipo p, denotamos a menor constante θ que satisfaz a desigualdade acima por $T_p(X)$ e a chamamos de constante tipo p *de X.*

Um espaço de Banach X tem cotipo q *se existe uma constante $\delta\geq 0$ tal que, qualquer que seja a escolha finita de vetores $x_1,...,x_n\in X$,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\delta\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\,x_k\right\|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para tratar o caso $q=\infty$, o lado esquerdo da desigualdade acima deverá ser substituído por $\max\limits_{k\leq n}\|x_k\|$.

Se X tem cotipo q, denotamos a menor constante δ que satisfaz a desigualdade acima por $C_q(X)$ e a chamamos de constante cotipo q *de X.*

Observação 3.2.2. (a) *Pela desigualdade de Kahane, poderiamos trabalhar com qualquer norma L_r, com $0 < r < \infty$, nas definições de tipo e cotipo ao invés da norma L_2, mas obviamente, teríamos que ajustar as constantes.*
(b) *Claramente, se Y é um subespaço de um espaço de Banach X de tipo p (respectivamente cotipo q), então Y é também de tipo p (respectivamente cotipo q) e $T_p(Y) \leq T_p(X)$ (respectivamente $C_q(Y) \leq C_q(X)$).*

Vamos agora provar alguns resultados básicos de tipo e cotipo.

Proposição 3.2.3. (a) *Se X é um espaço de Banach de tipo p e cotipo q, então $0 < p \leq 2 \leq q$.*
(b) *Todo espaço de Banach tem tipo 1 e cotipo ∞.*
(c) *Se X é um espaço de Banach de tipo p e cotipo q, então X tem tipo $\widetilde{p}$ e cotipo $\widetilde{q}$, para todo $0 < \widetilde{p} \leq p$ e $\widetilde{q} \geq q$.*
(d) *Se X é um espaço de Hilbert, então X tem tipo 2 e cotipo 2.*
(e) *Se $1 \leq p \leq 2$, então ℓ_p tem tipo p e cotipo 2 e se $2 \leq q < \infty$, então l_q tem tipo 2 e cotipo q.*

Como conseqüência de *(b)* e *(c)*, todo espaço de Banach tem tipo p, para cada $0 < p \leq 1$.

Demonstração. *(a)* Tome $x_1 = ... = x_n = x$ com $\|x\| = 1$. Como X tem tipo p, existe $\theta \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \theta \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \theta . n^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}},$$

logo

$$n^{\frac{1}{2}} \leq \theta . n^{\frac{1}{p}}.$$

Como a escolha de n foi arbitrária, temos que esta útima desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto

$$n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq \theta, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n^{\frac{p-2}{2p}} \leq \theta, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{p-2}{2p} \leq 0 \Longrightarrow p - 2 \leq 0 \Longrightarrow p \leq 2.$$

Agora, como X tem cotipo q, existe $\delta \geq 0$ tal que

$$n^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \delta \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \delta \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \delta n^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$n^{\frac{1}{q}} \leq \delta n^{\frac{1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \leq \delta, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n^{\frac{2-q}{2q}} \leq \delta, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{2-q}{2q} \leq 0 \Longrightarrow q \geq 2.$$

(b) Sejam X um espaço de Banach e $x_1, ..., x_n \in X$. Vamos provar primeiramente que X tem tipo 1. Temos que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |r_k(t)|\, \|x_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Integrando, obtemos

$$\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\| dt \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\, dt = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Pela desigualdade de Kahane,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{1,2} \int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\| dt$$

e, portanto

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{1,2} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Logo, X tem tipo 1.

Agora vamos provar que X tem cotipo ∞. Sejam $x_1, ..., x_n \in X$. Como conseqüência do teorema de Hahn-Banach, conseguimos $1 \leq j \leq n$ e $x^* \in B_{X^*}$ tais que $\langle x^*, x_j\rangle = \max_{k \leq n} \|x_k\|$. Pela ortonormalidade das funções de Rademacher, temos que

$$\langle x^*, x_j\rangle = \int_0^1 \left\langle r_j(t)\, x^*, \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\rangle dt \leq \int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\| dt \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, X tem cotipo ∞.

(c) Sejam $\widetilde{p} < p$ e $x_1, ..., x_n \in X$. Pela monotonicidade das normas ℓ_r, temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{p}}}.$$

Como X tem tipo p, existe $\theta \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \theta \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \theta \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{p}}}$$

e, portanto X tem tipo $\widetilde{p}$.

Agora, sejam $\widetilde{q} > q$ e $x_1, ..., x_n \in X$. Temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{\widetilde{q}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

e como X tem cotipo q, existe $\delta \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{\widetilde{q}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \delta \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto X tem cotipo $\widetilde{q}$.

(d) Seja X um espaço de Hilbert e $x_1, ..., x_n \in X$. Temos que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right),$$

logo

$$\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} r_{k_1}(t)\, r_{k_2}(t)\, (x_{k_1} | x_{k_2})\, dt = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} (x_{k_1} | x_{k_2}) \int_0^1 r_{k_1}(t)\, r_{k_2}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k | x_k) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Tomando $\theta = \delta = 1$, segue que X tem tipo e cotipo 2.

(e) Este ítem é a proposição 3.1.1 (com alguns ajustes dados pelas desigualdades de normas), reescrita para a linguagem de tipo e cotipo. $\square$

Observação 3.2.4. *No ítem* (d), *provamos facilmente (apenas utilizando a ortonormalidade das funções de Rademacher) que todo espaço de Hilbert tem tipo e cotipo 2. Uma pergunta natural é se a recíproca de tal resultado é verdadeira. A resposta é "afirmativa" e quem provou tal teorema foi S. Kwapién, em 1972, no artigo intitulado* "Isomorphic Characterizations of Inner Product Spaces by Orthogonal Series with Vector Valued Coefficients", *caracterizando assim os espaços isomorfos aos espaços de Hilbert como sendo os únicos espaços a ter tipo e cotipo 2, simultaneamente. No entanto, a demonstração do teorema de Kwapién é bem mais complicada e pode ser encontrada em [8], pág. 246.*

Teorema 3.2.5. *Suponha que o espaço de Banach Y é λ-representável no espaço de Banach X, para algum $\lambda \geq 1$. Valem as seguintes afirmações:*
(a) *Se X tem tipo p, então Y tem tipo p e $T_p(Y) \leq \lambda . T_p(X)$.*
(b) *Se X tem cotipo q, então Y tem cotipo q e $C_q(Y) \leq \lambda . C_q(X)$.*

Demonstração. (a) Sejam $\varepsilon > 0$, $y_1, ..., y_n \in Y$ e considere F como sendo o subespaço de Y gerado por $y_1, ..., y_n$. Como Y é λ-representável em X, existem $E \in \mathcal{F}_X$ e um isomorfismo $u : F \longrightarrow E$, com $\|u\| . \|u^{-1}\| \leq \lambda + \varepsilon$. Para cada $i \in \{1, ...n\}$, considere $u(y_i) = x_i \in E$, então

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, u^{-1}(x_k)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_0^1 \left\|u^{-1}\left(\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \|u^{-1}\|^2 . \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|u^{-1}\| . \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como X tem tipo p,

$$\|u^{-1}\| . \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u^{-1}\| . T_p(X) . \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|u^{-1}\| . T_p(X) . \left(\sum_{k=1}^n \|u(y_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u^{-1}\| . T_p(X) . \left(\sum_{k=1}^n \|u\|^p \|y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|u^{-1}\| . \|u\| . T_p(X) . \left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\lambda + \varepsilon) . T_p(X) . \left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como ε é arbitrário, temos que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda.T_p(X).\left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, Y tem tipo p e $T_p(Y) \leq \lambda.T_p(X)$.
(b) Temos que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^n \left\|u^{-1}(x_k)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \left\|u^{-1}\right\|^q.\|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|u^{-1}\right\|.\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como X tem cotipo q,

$$\left\|u^{-1}\right\|.\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left\|u^{-1}\right\|.C_q(X).\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\|u^{-1}\right\|.C_q(X).\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, u(y_k)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|u^{-1}\right\|.C_q(X).$$

$$\left(\int_0^1 \left\|u\left(\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|u^{-1}\right\|.C_q(X).\left(\int_0^1 \|u\|^2 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\|u^{-1}\right\|.C_q(X).\|u\| \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\lambda+\varepsilon).C_q(X).\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right).$$

Como ε é arbitrário, temos que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \lambda.C_q(X).\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, Y tem cotipo q e $C_q(Y) \leq \lambda.C_q(X)$. □

Corolário 3.2.6. (a) *Cada espaço* $\mathcal{L}_r$, $1 \leq r < \infty$, *tem tipo* $\min\{r,2\}$ *e cotipo* $\max\{r,2\}$ *e esta é a melhor possibilidade para o caso de dimensão infinita.*
(b) *O espaço* ℓ_∞ *só tem tipo e cotipo triviais.*

Demonstração. (a) Seja X um espaço $\mathcal{L}_{r,\lambda}$, $\lambda \geq 1$. Então, pela proposição 1.3.2, X é λ-representável em ℓ_r, mas pelo ítem *(e)* da proposição 3.2.3, ℓ_r tem tipo $\min\{r,2\}$ e cotipo

$\max\{r, 2\}$. Assim, pelo teorema 3.2.5, segue que X tem tipo $\min\{r, 2\}$ e cotipo $\max\{r, 2\}$.
(b) Para provar este ítem, utilizaremos uma conseqüência do teorema de Hahn-Banach que diz que todo espaço normado separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de ℓ_∞. Particularmente, utilizaremos este resultado para os espaços ℓ_r, $1 \leq r < \infty$, que são separáveis.
Suponha que ℓ_∞ tenha tipo p não trivial, isto é, $1 < p \leq 2$. Então, cada subespaço de ℓ_∞ tem tipo p. Tome $r < p$, então existe um subespaço M_r de ℓ_∞ que é isomorfo a ℓ_r e, conseqüentemente tem tipo r, sendo esta a melhor possibilidade para M_r, o que gera uma contradição já que cada subespaço de ℓ_∞ tem tipo p.
Para o caso cotipo é análogo. □

Corolário 3.2.7. *Um espaço de Banach tem mesmo tipo e cotipo que seu bidual.*

Demonstração. Usando o Princípio de Reflexibilidade Local (que pode ser encontrado em [8], págs. 177-182) temos que o bidual de qualquer espaço de Banach é finitamente representável no espaço, assim, pelo teorema 3.2.5, todo espaço de Banach tem mesmo tipo e cotipo que seu bidual. □

Vimos em 3.2.6, ítem *(b)*, que ℓ_∞ só tem tipo 1 e cotipo ∞, mas falta saber se a situação é a mesma para um espaço $\mathcal{L}_\infty$ qualquer. A resposta está no seguinte teorema:

Teorema 3.2.8. *Cada espaço $\mathcal{L}_\infty$ só tem tipo 1 e cotipo ∞.*

Para a prova deste teorema precisaremos de um lema como auxílio.

Lema 3.2.9. (a) $\sup\limits_n T_p(\ell_\infty^n) = \infty$ *para* $1 < p \leq 2$.
(b) $C_q(\ell_\infty^n) \geq n^{\frac{1}{q}}$ *para* $2 \leq q < \infty$.
(c) *Um espaço E que contém os ℓ_∞^n uniformemente (isto é, existem subespaços $M_n \subset E$ tais que $\sup\limits_n d(M_n, \ell_\infty^n) < \infty$) só tem tipo $p = 1$ e cotipo $q = \infty$.*

Demonstração. *(a)* Sejam $e_1, ..., e_n$ os vetores da base canônica e tome $x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j$, para cada $j = 1, ..., n$. Então

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\| = n \text{ e } \|x_k\| = 1.$$

Logo,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k\left(t\right) x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 n^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = n$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left\|x_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$n \leq T_p\left(\ell_\infty^n\right).n^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow T_p\left(\ell_\infty^n\right) \geq n^{1-\frac{1}{p}}$$

e portanto

$$\sup_n T_p\left(\ell_\infty^n\right) = \infty.$$

(b) Considere os vetores da base canônica $e_1, ..., e_n$, então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left\|e_k\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = n^{\frac{1}{q}} \leq C_q\left(\ell_\infty^n\right).\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k\left(t\right) e_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = C_q\left(\ell_\infty^n\right),$$

portanto $C_q\left(\ell_\infty^n\right) \geq n^{\frac{1}{q}}$.
(c) Seja $d_E = \sup_n d\left(M_n, \ell_\infty^n\right)$. Como E contém os ℓ_∞^n uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $u_n \colon M_n \longrightarrow \ell_\infty^n$ com $\|u\|.\left\|u^{-1}\right\| < d_E + \varepsilon$. Suponha que E tem tipo p com $1 < p \leq 2$, então cada subespaço de E também tem tipo p (em particular os espaços M_n) e como tipo é herdado por isomorfismo, segue que ℓ_∞^n tem tipo p. Então, dados $y_1, ..., y_m \in \ell_\infty^n$, pelo feito na demonstração de 3.2.5, vale que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{m} r_k\left(t\right) y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|.\left\|u^{-1}\right\|.T_p\left(E\right).\left(\sum_{k=1}^{m} \left\|y_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(d_E + \varepsilon\right).T_p\left(E\right).\left(\sum_{k=1}^{m} \left\|y_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, $T_p\left(\ell_\infty^n\right) \leq \left(d_E + \varepsilon\right).T_p\left(E\right)$ e assim $\sup_n T_p\left(\ell_\infty^n\right) < \infty$, contradizendo o ítem *(a)*. Logo E só tem tipo 1.

Suponha agora que E tem cotipo q, com $2 \leq q < \infty$. Análogo ao que foi feito para tipo temos que, dados $y_1, ..., y_m \in \ell_\infty^n$ vale que

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|y_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|u\| . \left\|u^{-1}\right\| .C_q(E) . \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{m} r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq (d_E + \varepsilon) .C_q(E) . \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{m} r_k(t)\, y_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Então, $C_q(\ell_\infty^n) \leq (d_E + \varepsilon) .C_q(E)$, mas pelo ítem *(b)*, $C_q(\ell_\infty^n) \geq n^{\frac{1}{q}} \Longrightarrow (d_E + \varepsilon) .C_q(E) \geq n^{\frac{1}{q}}$ o que é uma contradição já que podemos tomar n suficientemente grande inicialmente, tendo assim $n^{\frac{1}{q}} > (d_E + \varepsilon) .C_q(E)$. Logo E só tem cotipo ∞. □

Demonstração. (Teorema 3.2.8) Agora o teorema é conseqüência imediata do ítem *(c)* do lema anterior, pois pela definição de espaço $\mathcal{L}_\infty$ segue que os ℓ_∞^n estão contidos uniformemente em tal espaço. Portanto um espaço $\mathcal{L}_\infty$ só tem tipo e cotipo triviais. □

Veremos agora que relação de tipo e cotipo obtemos entre um espaço de Banach e seu dual.

Teorema 3.2.10. *Se um espaço de Banach X tem tipo p, então seu dual X^* tem cotipo p^*, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, e $C_{p^*}(X^*) \leq T_p(X)$.*

Demonstração. Sejam $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$. Usando a definição da norma do dual, temos que

$$\|(x_k^*)_{k=1}^n\|_{l_{p^*}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} \langle x_k^*, x_k\rangle\right| : x_1, ..., x_n \in X \text{ e } \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p \leq 1\right\}.$$

Pela ortogonalidade das funções de Rademacher, temos que

$$\left|\int_0^1 \left\langle \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k^*, \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\rangle dt\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle x_k^*, x_j\rangle \int_0^1 r_k(t) .r_j(t)\, dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \langle x_k^*, x_k\rangle\right|.$$

Logo,

$$\|(x_k^*)_{k=1}^n\|_{l_{p^*}} = \sup\left\{\left|\int_0^1 \left\langle \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k^*, \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\rangle dt\right| : x_1, ..., x_n \in X \text{ e } \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p \leq 1\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\left|\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k^*\right\|_{X^*} . \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|_X dt\right| : x_1, ..., x_n \in X \text{ e } \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p \leq 1\right\},$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$\sup\left\{\left|\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k^*\right\|_{X^*}.\left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k\right\|_X dt\right| : x_1,...,x_n\in X \text{ e } \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\leq 1\right\}\leq$$

$$\leq \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k^*\right\|_{L_2(X^*)}.\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\right\|_{L_2(X)} : x_1,...,x_n\in X \text{ e } \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\leq 1\right\}.$$

Como X tem tipo p,

$$\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k^*\right\|_{L_2(X^*)}.\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k\right\|_{L_2(X)} : x_1,...,x_n\in X \text{ e } \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\leq 1\right\}\leq$$

$$\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k^*\right\|_{L_2(X^*)}.\sup\left\{T_p(X).\|x_k\|_{\ell_p} : x_1,...,x_n\in X \text{ e } \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\leq 1\right\}=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k^*\right\|_{L_2(X^*)}.T_p(X).\sup\left\{\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\leq 1 : x_1,...,x_n\in X \text{ e } \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\leq 1\right\}=$$

$$=T_p(X).\left\|\sum_{k=1}^n r_k x_k^*\right\|_{L_2(X^*)}.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k^*\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\leq T_p(X).\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k^*\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } C_{p^*}(X^*)\leq T_p(X).$$

□

Observação 3.2.11. (a) *Note que se X^* tem tipo p^*, então X tem cotipo p. De fato, como X^* tem tipo p^*, X^{**} tem cotipo p e por 3.2.7, segue que X tem cotipo p.*

(b) *Uma questão que aparece aqui é se vale o seguinte resultado: X tem cotipo $p \Longrightarrow X^*$ tem tipo p^*. A resposta é não, pois ℓ_1 tem cotipo* 2 *(por 3.2.3, ítem* (e)*) e o seu dual ℓ_∞ não tem tipo não trivial, isto é, ℓ_∞ só tem tipo* 1 *(por 3.2.6, ítem* (b)*).*

(c) *A recíproca do teorema 3.2.10 é falsa. De fato, ℓ_1 é o dual de c_0, ℓ_1 tem cotipo* 2*, mas c_0 tem apenas cotipo ∞, pois c_0 é um espaço $\mathcal{L}_\infty$ ($c_0\subset\ell_\infty$) e um espaço $\mathcal{L}_\infty$ só tem cotipo trivial.*

Teorema 3.2.12. (a) *Sejam $1<p\leq 2$ e $p\leq r<\infty$. Então X tem tipo p se, e somente se, $L_r(\mu,X)$ tem tipo p.*

(b) *Sejam $2 \leq q < \infty$ e $1 \leq r \leq q$. Então X tem cotipo q se, e somente se, $L_r(\mu, X)$ tem cotipo q.*

Demonstração. *(a)* ($\Longrightarrow$) Sejam $f_1, ..., f_n \in L_r(\mu, X)$. Pela desigualdade de Kahane,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{r,2}.\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= K_{r,2}.\left(\int_0^1 \left(\int_\Omega \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r d\mu(\omega)\right) dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Por linearidade,

$$\left(\int_0^1 \left(\int_\Omega \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r d\mu(\omega)\right) dt\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r dt\right) d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{r}}$$

e novamente pela desigualdade de Kahane,

$$\left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r dt\right) d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{r}} \leq K_{2,r}.\left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^2 dt\right)^{\frac{r}{2}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Tomando, $K = K_{r,2}.K_{2,r}$, temos que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K.\left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^2 dt\right)^{\frac{r}{2}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Como X tem tipo p,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K.T_p(X).\left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \|f_k(\omega)\|_X^p\right)^{\frac{r}{p}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{r}}$$

e pela desigualdade de Minkowski,

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \|f_k(\omega)\|_X^p\right)^{\frac{r}{p}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \left(\int_\Omega \|f_k(\omega)\|_X^r \, d\mu(\omega)\right)^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_r(\mu,X)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K.T_p(X).\left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_r(\mu,X)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

concluindo que $L_r(\mu, X)$ tem tipo p.
($\Longleftarrow$) Considere a transformação linear que associa a cada $x \in X$ a função $1_A(\cdot).x$, onde $A \in \Sigma$ é tal que $0 < \mu(A) < \infty$. Assim, temos um isomorfismo entre X e um subespaço M de $L_r(\mu, X)$. Como $L_r(\mu, X)$ tem tipo p, segue que M tem tipo p, conseqüentemente X tem tipo p herdado pelo isomorfismo com M (como visto na demonstração de 3.2.3, ítem *(a)*).
(b) Os argumentos para provar este ítem são análogos. $\square$

CAPÍTULO 4

Funções de Rademacher Generalizadas

A primeira aparição das funções de Rademacher generalizadas foi em 1989, [1]. Em 1992, várias aplicações dessas funções foram feitas em [2]. Nesse mesmo artigo, os autores mencionam que a desigualdade de Khintchine pode ser obtida para as funções n-Rademacher, trocando as funções de Rademacher tradicionais e adaptando a demonstração já conhecida. Como veremos abaixo, as funções n-Rademacher são definidas assumindo os valores das raízes n-ésimas da unidade, e denotadas por $s_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a desigualdade de Khintchine fica assim: para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $p \in (0, +\infty)$, existem constantes $a(n;p)$ e $b(n;p)$ tais que

$$[a(n;p)]^{-1} . \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k . s_k^{(n)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq b(n;p) . \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$.

Em [9], K. Floret e M. Matos deram uma outra demonstração da desigualdade de Khintchine para as funções n-Rademacher que produz constantes independentes de n.

Em [5], G. Botelho caracterizou tipo e cotipo via funções n-Rademacher, mas tal caracterização foi apenas uma motivação didática já que o mesmo provou, ainda em [5], que essa caracterização e a caracterização tradicional são equivalentes.

Neste capítulo daremos a definição das funções de Rademacher generalizadas, a demonstração dada em [9] da desigualdade de Khintchine para tais funções e a equivalência entre os conceitos de tipo e cotipo tradicionais e os conceitos de n-tipo e n-cotipo, dada em [5].

4.1 Funções n-Rademacher

Para definir as funções de Rademacher generalizadas, procedemos recursivamente da seguinte maneira:

Definição 4.1.1. *Seja n um inteiro positivo fixado e considere as raízes n-ésimas da unidade dadas por $\lambda_1, ..., \lambda_n$, consideradas na ordem crescente de seus argumentos. O intervalo $[0,1]$ é dividido em n intervalos disjuntos de mesma amplitude $I_1, ..., I_n$ descritos na ordem que aparecem da esquerda para a direita de $[0,1]$. Definimos $s_1 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ por $s_1(t) = \lambda_j$, se t pertence ao interior de I_j, para $j = 1, ..., n$, e $s_1(t) = 1$, se t é uma extremidade de algum dos intervalos I_j.*
Supondo $s_1, ..., s_k$ definidas, s_{k+1} é definida da seguinte forma: cada intervalo I usado na construção de s_k é dividido em n intervalos $J_1, ..., J_n$, da mesma maneira que $[0,1]$ foi dividido na construção de s_1. Então definimos $s_{k+1}(t) = \lambda_j$, se t pertence ao interior de algum J_j e $s_{k+1}(t) = 1$, se t é uma extremidade de algum desses intervalos.
A seqüência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ será chamada de seqüência das funções n-Rademacher. *Quando houver perigo de confusão em relação a n, escrevemos $s_k^{(n)}$ ao invés de s_k, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.*

Várias das propriedades das funções de Rademacher tradicionais são obtidas para as generalizadas, dentre elas a de multiortogonalidade, isto é,

$$\int_0^1 s_{j_1}^{(n)}(t) \cdot \cdots \cdot s_{j_n}^{(n)}(t)\, dt = \begin{cases} 1, & \text{se } j_1 = ... = j_n \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}.$$

A demonstração pode ser encontrada em [2].

Antes de enunciarmos e provarmos a desigualdade de Khintchine, consideremos o seguinte fato: se $n \geq 2$ é fixo, tome $D = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ o conjunto das raízes n-ésimas da unidade, μ_1 a medida $\mu_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k}$ (onde δ_λ é a medida de Dirac concentrada em λ), μ_m e μ as medidas produto de μ_1 sobre D^m e $D^{\mathbb{N}}$, respectivamente, e $h_k \colon D^{\mathbb{N}} \longrightarrow D$ a k-ésima projeção. Então, para todo $p \in (0, +\infty)$, temos que

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k . s_k(t) \right|^p dt = \int_{D^m} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k . w_k \right|^p d\mu_m(w_1, ..., w_m) = \int_{D^{\mathbb{N}}} \left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k . h_k \right|^p d\mu,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$.

Mais geralmente, tome $D \subset \mathbb{C}$ limitado, $\|D\| = \sup\{|z| : z \in D\}$ e μ_1 uma medida de probabilidade sobre D. Defina, μ_m e μ como sendo as medidas produto de μ_1 sobre D^m e $D^{\mathbb{N}}$ e $h_k \colon {}^{\mathbb{N}} \longrightarrow D$ a k-ésima projeção. Assuma que

$$\int_D w d\mu_1(w) = 0$$

e

$$c = \left(\int_D |w|^2 d\mu_1(w)\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Daí segue que os $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ formam um sistema bi-ortogonal em $L_2(\mu)$, com $\|h_k\|_{L_2} = c$.

Teorema 4.1.2. (Desigualdade de Khintchine) *Para todo* $p \in (0, +\infty)$, *existem constantes* a_p *e* b_p *tais que*

$$a_p. \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{D^{\mathbb{N}}} \left|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k . h_k\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq b_p. \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Da monotonicidade das normas L_p, para a_p basta considerar o caso $p \leq 2$; e para b_p, basta considerar o caso $p > 2$. Vejamos que, resolvendo o caso de b_p com $p > 2$, resolve-se também o caso de a_p com $p \leq 2$: dado $0 < p \leq 2$, tome $f = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k . h_k$, com $\sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 = 1$. Então

$$c^2 = \int |f|^2 d\mu = \int |f|^{\frac{p}{2}} . |f|^{2-\frac{p}{2}} d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int |f|^{4-p} d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{2}} . (b_4)^{\frac{4-p}{2}},$$

e portanto $a_p = (b_4)^{1-\frac{4}{p}} . c^{\frac{4}{p}}$ serve.

Para b_p, basta considerar $p > 2$, $p \in \mathbb{N}$, e α_k's reais tais que $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^2 = 1$. Defina novamente $f = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k . h_k$ e observe que

$$0 = \int_D \mathrm{Re}(w) d\mu_1(w) = \int_D \mathrm{Im}(w) d\mu_1(w).$$

Para $\phi = \mathrm{Re}$ ou $\phi = \mathrm{Im}$, temos que

$$\int_{D^{\mathbb{N}}} \exp\left(\phi\left(f\right)\right) d\mu = \prod_{k=1}^{m} \int_{D} \exp\left(\alpha_k.\phi\left(w_k\right)\right) d\mu_1\left(w_k\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \int_{D} \left[\exp\left(\alpha_k.\phi\left(w_k\right)\right) - \alpha_k.\phi\left(w_k\right)\right] d\mu_1\left(w_k\right) \leq \prod_{k=1}^{m} \int_{D} \exp\left(\alpha_k.\phi\left(w_k\right)\right)^2 d\mu_1\left(w_k\right) =$$

$$= \int_{D^{\mathbb{N}}} \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2.\left(\phi\left(w_k\right)\right)^2\right) d\mu_1\left(w_1, w_2..., \right) \leq \exp\left\|D\right\|^2,$$

pois $\exp\left(t\right) - t \leq \exp\left(t^2\right)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí segue que

$$\int \frac{1}{p!}\left|\phi\left(f\right)\right|^p d\mu \leq \int \left[\exp\left(\phi\left(f\right)\right) + \exp\left(-\phi\left(f\right)\right)\right] d\mu \leq 2.\exp\left\|D\right\|^2$$

e portanto,

$$\left\|f\right\|_{L_p} \leq \left\|\mathrm{Re}\left(f\right)\right\|_{L_p} + \left\|\mathrm{Im}\left(f\right)\right\|_{L_p} \leq 2.\left(2.p!\exp\left\|D\right\|^2\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Vamos agora definir n-tipo e n-cotipo e seguir na direção de demonstrar que estes conceitos e os conceitos de tipo e cotipo tradicionais são equivalentes.

Definição 4.1.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Dizemos que o espaço de Banach complexo E tem* n-tipo p *se existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda seqüência finita $x_1, ..., x_k$ de elementos de E, tivermos que*

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}\left(t\right).x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C.\left(\sum_{j=1}^{k}\left\|x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dizemos que E tem n-cotipo q *se existe $C > 0$ tal que, para toda seqüência finita $x_1, ..., x_k$ de elementos de E, tivermos que*

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\left\|x_j\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C.\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}\left(t\right).x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que quando $n = 2$, temos as noções tradicionais de tipo e cotipo.

Para demonstrar a equivalência mencionada acima, precisaremos primeiramente das definições de variáveis aleatórias gaussianas e tipo e cotipo gaussiano.

Definição 4.1.4. *Chamaremos de* γ *a* medida gaussiana padrão *no plano complexo, isto é:*

$$\gamma(B) = \frac{1}{\pi}\int_B e^{-|z|^2}dz = \frac{1}{\pi}\int_B e^{-\left(t^2+s^2\right)}dtds,$$

para todo boreliano $B \subset \mathbb{C}$*, onde* B *é visto na segunda integral como um subconjunto de* $\mathbb{R}^2$*. Fixemos um espaço de probabilidade* (Ω, Σ, P)*. Definimos uma* variável aleatória gaussiana independente g_k*, como sendo uma função mensurável de* Ω *em* $\mathbb{C}$ *cuja distribuição de probabilidade coincide com* γ*. Consideraremos* $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ *uma* seqüência de variáveis aleatórias gaussianas independentes.

Definição 4.1.5. *Dizemos que* E *tem* tipo gaussiano p *se existe uma constante* $C > 0$ *tal que , para todos* $x_1, ..., x_k \in E$*, tivermos que*

$$\left(\int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^k g_j(w).x_j\right\|^2 dP(w)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C.\left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dizemos que E *tem* cotipo gaussiano q *se existe uma constante* $C > 0$ *tal que , para todos* $x_1, ..., x_k \in E$*, tivermos que*

$$\left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C.\left(\int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^k g_j(w).x_j\right\|^2 dP(w)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A próxima proposição é a chave para o nosso almejado resultado e sua demonstração pode ser encontrada em [5], páginas 1235-1236.

Proposição 4.1.6. *Dados* $n \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$*, e* $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$*, temos que:*
(a) *E tem n-tipo p* $\Longleftrightarrow$ *E tem tipo gaussiano p.*
(b) *E tem n-cotipo q* $\Longleftrightarrow$ *E tem cotipo gaussiano q.*

Teorema 4.1.7. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$*, ambos maiores que* 1*, e* $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$*.*
(a) *Se E tem n-tipo p então E também tem m-tipo p.*
(b) *Se E tem n-cotipo q então E também tem m-cotipo q.*
Particularmente, tomando ora $n = 2$*, ora* $m = 2$*, este resultado nos diz que nas definições de tipo e cotipo tradicionais, podemos substituir a seqüência das funções de Rademacher, pela seqüência das funções n-Rademacher, qualquer que seja o inteiro* $n > 1$*.*

Demonstração. (a) Como E tem n-tipo p, pela proposição 4.1.6, ítem *(a)* $(\Longrightarrow)$, temos que E tem tipo gaussiano p. Como m está fixado, usando a proposição 4.1.6, ítem *(a)* $(\Longleftarrow)$, para m, segue que E tem m-tipo p.

(b) Como E tem n-cotipo q, pela proposição 4.1.6, ítem *(b)* $(\Longrightarrow)$, temos que E tem cotipo gaussiano q. Como m está fixado, usando a proposição 4.1.6, ítem *(b)* $(\Longleftarrow)$, para m, segue que E tem m-cotipo q. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] Aron, R. & Globevnik, J., *Analytic Functions in* c_0. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 2, 1989, 27-34.

[2] Aron, R., Lacruz, M., Ryan, R. & Tonge, A., *The Generalized Rademacher Functions.* Note Mat. 12, 1992, 15-25.

[3] Ash, R., *Real Analysis and Probability.* Academic Press, Inc., 1972.

[4] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry.* Elsevier Science Publishers B.V., Second revised edition, 1985.

[5] Botelho, G., *Type, Cotype and Generalized Rademacher Functions.* Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 28, Number 4, 1998.

[6] Botelho, G., *Tipo e Cotipo: Caracterização via Funções de Rademacher Generalizadas e Contribuições à Teoria de Aplicações Multilineares e Polinômios Homogêneos em Espaços de Banach.* Tese (IMECC-UNICAMP) 1995.

[7] Defant, A. & Floret, K., *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Math. Studies 176, 1993.

[8] Diestel, J., Jarchow, H. & Tonge, A., *Absolutely Summing Operators.* Cambridge studies in advanced mathematics 43, 1995.

[9] Floret, K. & Matos, M., *Application of a Khintchine Inequality to Holomorphic Mappings.* Math. Nachr., 176, 1995.

[10] Matos, M., *Notas de Aula de Análise Funcional.* IMECC-UNICAMP.

[11] Maurey, B., *Type, Cotype and K-convexity.* Preprint submited to Elsevier Preprint, 2002.

[12] Mujica, J., *Notas de Aula de Topologia Geral.* IMECC-UNICAMP, 2003.

[13] Mujica, J., *Notas de Aula de Análise Funcional.* IMECC-UNICAMP.

[14] Neveu, J., *Mathematical Foundations of The Calculus of Probability.* Holden Day, Inc., 1965.

[15] Rosenthal, H.P., *Notas de aula sobre Espaços $\mathcal{L}_p$, manuscritas por Hagler, J..* Berkeley, início dos anos 70.

[16] Tomczak-Jaegermann, N., *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals.* Longman Scientific & Technical, 1989.

[17] Wojtaszczyk, P., *Banach Spaces for Analysts.* Cambridge studies in advanced mathematics 25. Cambridge University Press, 1991.