

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

**Alguns Aspectos da Geometria Riemanniana
das Variedades de Hilbert**

Autor: Leonardo Biliotti

Orientador: Prof. Dr. Francesco Mercuri

Co-Orientador: Prof. Dr. Daniel Victor Tausk

12 de março de 2002

UNIDADE	B e
Nº CHAM	T/VN/CAMP
	8492a
V	
TOMBO	48577
PROC.	16-8 37/10
c	18
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	
Nº CPD	

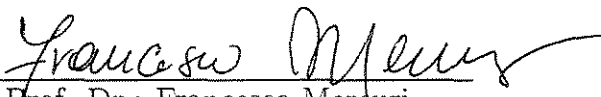
CM00166699-1


BIB ID 238407

Alguns Aspectos da Geometria Riemanniana das Variedades de Hilbert

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Leonardo Biliotti** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de março de 2002


Prof. Dr.: Francesco Mercuri
(Orientador)

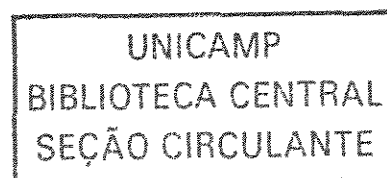

Prof. Dr.: Daniel Victor Tausk
(Co-Orientador)

Banca Examinadora:

- 1-Prof. Dr. Daniel Victor Tausk (Co-Orientador)
- 2-Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti
- 3-Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa
- 4-Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa
- 5-Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor** em Matemática Pura.

2217859



**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Biliotti, Leonardo

B492a Alguns aspectos da geometria riemanniana das variedades de
Hilbert / Leonardo Biliotti -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Francesco Mercuri

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria riemanniana. 2. Curvatura. 3. Hilbert, Espaço de. I.
Mercuri, Francesco. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 12 de março de 2002 e aprovada

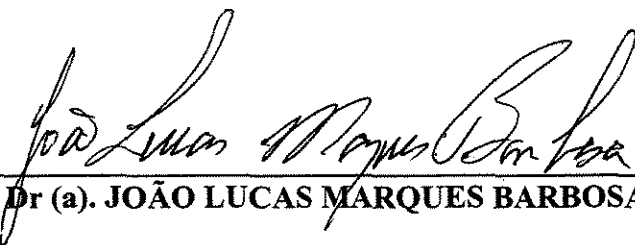
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). DANIEL VICTOR TAUSK



Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI



Prof (a). Dr (a). JOÃO LUCAS MARQUES BARBOSA



Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA



Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Resumo

O objetivo deste trabalho é formalizar a teoria local das variedades infinito dimensionais e estudar a geometria/topologia no caso em que a curvatura seccional seja limitada por duas constantes positivas, comparando-se com o caso finito dimensional e enfatizando as diferenças. A teoria local já era conhecida desde 1960, e por isso nós apresentamos, sem muitos detalhes, alguns resultados tais como a existência e unicidade da conexão de Levi Civita, lema de Gauss e a existência de vizinhanças convexas. Porém, nós provamos que o critério de tensorialidade não é verificado em dimensão infinita e introduzimos uma classe, que nós chamamos de C^∞ -fracamente contínua, cujo critério é verificado.

Quando queremos estudar as propriedades globais, o fato da variedade ser completa é fundamental, como no caso finito dimensional, mas como o teorema de Hopf-Rinow nem sempre é verificado não temos a equivalência com o fato da variedade ser geodesicamente completa. As variedades completas com curvatura seccional constante simplesmente conexas não apresentam as patologias anteriores e obtemos a mesma classificação finito dimensional. Porém, a classe das variedades completas com curvatura constante positiva é maior do que a respectiva classe de dimensão finita. Esse fato é consequência do estudo dos grupos que podem atuar efetivamente e de modo propriamente descontínuo, como grupo de isometrias, na esfera unitária dos espaços de Hilbert de dimensão infinita. Os dois fatos básicos que justificam nossa afirmação são que cada grupo de isometrias, finito, que atua de modo propriamente descontínuo na esfera euclidiana unitária, atua também na esfera unitária de qualquer espaço de Hilbert de dimensão infinita, com as mesmas propriedades, e que cada grupo G sem torção atua efetivamente e de modo propriamente descontínuo como grupo de isometrias na esfera unitária de $l_2(G)$.

O estudo das variedades completas com curvatura seccional limitada por duas constantes positivas nos levou a estender os teoremas de comparação de Rauch e o teorema de Topogonov, no caso de variedades que verificam o teorema de Hopf-Rinow. Como corolário obtemos vários resultados da geometria Riemanniana finito dimensional tais como o teorema de Berger-Topogonov sobre o diâmetro máximo e, sobre a hipótese de que o raio de injetividade é maior do que π , resultados na mesma linha do teorema da esfera clássico.

Abstract

The aim of this work is to formalize the local theory of infinite dimensional Riemannian manifold and to study the geometry/topology when the sectional curvature is bounded by two positive constant. We compare this situation with the finite dimensional case and emphasize the difference. The local theory was already developed since 1960, so we describe, briefly, the basic facts of the theory as the existence and uniqueness of Levi Civita connection, Gauss lemma and existence of convex neighborhood. However, we proved that the fundamental theorem of tensor field is not verified and we introduced a class, that we called C^∞ -weakly, for which the criterion holds. When we want to study the global properties, the fact that the manifold is complete is fundamental, as in finite dimensional case, but as the Hopf-Rinow theorem is not always verified, completeness is not always equivalent to geodesic completeness. These pathology is not verified by complete simply connected manifolds with constant sectional curvature and we have the same classification as the finite dimensional case. However, the class of infinite dimensional manifolds of constant positive curvatura is bigger than the respective class in the finite dimensional case. This fact is consequence of the study of the groups that could acts effective and properly discontinuosly, as isometry group, on the unitary sphere on infinite dimensional Hilbert spaces. The two basics facts that justify our are that any infinite dimensional Hilbert space and any group G without torsion, acts without fixed point and properly discontinuous, as isometry group, on the sphere in $l_2(G)$. The extension of theorems of Rauch and Topogonov, is fundamental when we study the geometry of with sectional curvature bounded by two positive constants. The consequence are the extension of some classical result, that we have proved in chapter 6, like of Berger-Topogonov theorem about the maximal diameter and, when we assume that the radius of injectivity of the manifolds is at least π , some results in the spirit of the pinching theorems.

Introdução

As variedades infinito dimensionais aparecem de modo natural como os domínios de definição dos funcionais do cálculo das variações. Já nos anos 50, sabia-se que a maioria dos espaços de funções entre variedades diferenciáveis admitiam uma estrutura de variedade de dimensão infinita e, em geral, as propriedades de tais variedades refletiam propriedades do contra-domínio. Os casos mais interessantes são as variedades de seções de Sobolev de fibrados sobre variedades compactas e esta teoria foi essencialmente desenvolvida por Palais em [30]. A importância destes exemplos motivaram, nos anos 60, o estudo da geometria/topologia diferencial das variedades infinito dimensionais. O fato que a teoria local se desenvolve essencialmente como no caso de dimensão finita ficou logo claro. As primeiras diferenças substanciais na teoria global apareceram nos trabalhos de Grossman e McAlphin em 1965.

Grossman e McAlphin produziram, veja [14] e [25], variedades completas nas quais o teorema de Hopf-Rinow não é verificado. Porém, Ekeland 1978, veja [12], provou que o teorema de Hopf-Rinow nas variedades completas vale genericamente no sentido que, dado um ponto p em uma variedade Riemanniana completa M , de dimensão finita ou infinita, o conjunto dos pontos q tal que existe uma única geodésica minimal unindo p a q é denso. O teorema de Hopf-Rinow está relacionado ao fato de que, em dimensão finita, o funcional energia, definido na variedade de dimensão infinita dos laços de Sobolev (de classe H^1), que ligam dois pontos, verifica a condição (C) de Palais-Smale. A não validade, em geral, do teorema de Hopf-Rinow implica que o funcional energia nem sempre verifica esta condição, no caso de variedade infinito dimensional. Porém, Eliason ([13]) provou que nas variedades de seções de Sobolev de fibrados sobre variedades compactas o funcional energia satisfaz a condição (C) e, portanto, o teorema de Hopf-Rinow é verificado.

Uma outra diferença, que foi tratada por Grossman em [14], é que existem dois tipos diferentes de pontos conjugados. De fato, um ponto conjugado é um valor crítico da aplicação exponencial e, em dimensão infinita, podemos ter pontos onde $d(\exp)$ não é injetivo, *pontos monoconjugados*, e pontos onde $d(\exp)$ não é sobrejetivo, *pontos epiconjugados*. Grossman construiu um exemplo onde os pontos conjugados ao longo de uma geodésica de comprimento finito se acumulam, em contraste com o caso de dimensão finita. A existência de pontos epiconjugados é até agora um pouco misteriosa e, surpre-

endentemente, a existência de pontos epiconjugados, não-monoconjugados e isolados não influenciam na estabilidade das geodésicas (veja capítulo 5). O único problema de geometria global que foi tratado por Grossman, e estendido ao caso infinito dimensional, foi o teorema de Hadamard: uma variedade completa com curvatura seccional não-positiva a aplicação exponencial é uma aplicação de recobrimento (em qualquer ponto da variedade). Este teorema prova, em particular, que as variedades simplesmente conexas com curvatura seccional não positiva admitem geodésicas minimais entre pontos distintos quaisquer. Um outro resultado clássico de geometria global resolvido em 1986 por Anderson, veja [2], é o teorema de Bonnet sobre o diâmetro de variedades completas com curvatura seccional $K \geq K_0 > 0$. Este resultado, cuja demonstração aparece no capítulo 4, é uma simples aplicação do teorema de Ekeland, que nos permite fazer a mesma demonstração que no caso de dimensão finita.

Sucessivamente as pesquisas em dimensão infinita se direcionaram principalmente ao estudo de exemplos concretos de variedades de dimensão infinita, como as variedades das seções de Sobolev, deixando de lado a teoria geral. Por exemplo Misiolek, ([26]), provou que no espaço dos laços de Sobolev $\Omega(M)$ de uma variedade compacta M , a aplicação exponencial é Fredholm de índice zero e que ao longo de geodésicas de comprimento finito só pode ter um número finito de pontos conjugados. Os resultados de Misiolek provam que em $\Omega(M)$ não acontecem as patologias descritas por Grossman e isso confirma ainda a intuição de que as variedades de funções refletem as propriedades do contra-domínio.

Em 1996, em um congresso em Palermo (Itália) M. Gromov durante uma conferência cujo título era “Geometria em dimensão finita e infinita” propôs o estudo de uma análise comparativa entre o caso de dimensão finita e o caso de dimensão infinita, propondo algumas questões, entre as quais a validade do “teorema da esfera” e mais em geral o estudo da topologia das variedades com curvatura seccional limitadas por constantes positivas. Esta proposta foi a motivação principal deste trabalho.

No capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos da teoria das variedades de dimensão infinita e a teoria local da geometria Riemanniana como distância, existência e unicidade da conexão de Levi Civita e existência de vizinhanças convexas. Estes resultados eram bem conhecidos já nos anos 60 e aparecem na literatura, a menos do resultado apresentado na seção 1.6, o qual trata do critério de tensorialidade em dimensão infinita. Damos um exemplo onde este critério não vale e provamos um teorema que garante que

em uma classe oportuna, tal critério é verificado e que a conexão de Levi Civita pertence a esta classe.

No capítulo 2, estudamos os campos de Jacobi transportando a equação de Jacobi no espaço tangente do ponto inicial da geodésica reduzindo-a ao estudo de uma E.D.O., tipo Sturm, de operadores. Este ponto de vista foi usado por Karcher, ([17]) e permite provar uma versão fraca do teorema de comparação de Rauch, no caso em que a curvatura seccional é limitada por constantes.

No capítulo 3, consideramos o conceito de variedade completa enfatizando as diferenças com o caso de dimensão finita, discutindo alguns exemplos de Grossman. Estendemos o resultado clássico que o grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana coincide com o grupo das aplicações que preservam a distância e apresentamos a classificação das variedades completas com curvatura seccional constante. A seção 3.3 apresenta a parte mais original deste trabalho: trata-se do estudo das ações propriamente descontínuas sobre a esfera unitária de um espaço de Hilbert de dimensão infinita para produzir exemplos de variedades com curvatura constante. No caso de dimensão finita, como corolário do teorema de Bonnet-Myers, as variedades completas com curvatura seccional $K \geq K_o > 0$ têm grupo fundamental $\pi_1(M)$ finito. No caso em que o espaço é de dimensão infinita podemos encontrar grupos de isometrias arbitrariamente grandes que atuam sem pontos fixos e de modo propriamente descontínuo. Além disso, se o espaço modelo é separável então o grupo fundamental tem cardinalidade enumerável. O resultado principal da seção 3.3 é o seguinte.

Teorema 3.3.10 Seja G um grupo sem torção e sejam $p_1 < \dots < p_n$ primos. Então o grupo

$$H \cong G \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}}$$

atua como grupo de isometrias sem pontos fixos de modo propriamente descontínuo na esfera unitária do espaço de Hilbert $l_2(G)$.

Ainda na seção 3.3, apresentaremos também condições necessárias a fim de que os grupos finitos possam atuar sem pontos fixos, provando que os grupos que contêm subgrupos do tipo $Z_n \oplus Z_m$ com $MDC(m, n) \neq 1$ não podem atuar sem pontos fixos linearmente. Tais condições se encaixam nas classificações dos subgrupos do grupo $O(n)$ que atuam de maneira propriamente descontínua sem pontos fixos.

No capítulo 4, apresentamos as fórmulas de variações da Energia e do Comprimento e estudamos algumas aplicações como o teorema de Bonnet ([2]), e alguns exemplos de Grossman, comparando-os com o caso de dimensão finita.

No capítulo 5, estudamos os pontos críticos da aplicação exponencial ao longo de geodésicas que, como comentamos anteriormente, são de dois tipos: epiconjugados e monoconjugados. A distribuição de tais pontos difere muito do caso de dimensão finita e nós construímos um exemplo onde os pontos focais se acumulam ao longo de uma geodésica de comprimento finito. O resultado principal é o Lema do índice, na sua generalidade, que nos permite estender os teoremas de comparação de Rauch que são os instrumentos básicos para estudar a geometria/topologia das variedades com curvatura seccional limitada por duas constantes.

No capítulo 6, apresentamos algumas aplicações dos teoremas de Rauch e do teorema de Topogonov na classe das variedades onde o teorema de Hopf-Rinow é verificado. Apresentamos também dois teoremas do tipo Teorema da esfera, assumindo que o raio de injetividade seja maior que π : um usando somente o teorema de Rauch clássico, com “piching” $\sim \frac{3}{4}$ e outro na classe das variedades que verificam o teorema de Hopf-Rinow, com “pinching” $\frac{4}{9}$.

Existem muitos problemas nesta área, mas ainda não são claras todas as diferenças, entre o caso de dimensão finita e infinita quando queremos estudar as propriedades globais. Neste trabalho nós provamos que existem diferenças mas ainda não está claro por exemplo, se é possível provar o teorema da esfera no seu enunciado mais geral. Lembramos por fim que sendo a esfera de dimensão infinita contrátil teríamos, em caso de resposta positiva, que as variedades completas, simplesmente conexas, com “pinching” de $\frac{1}{4}$ são contráteis.

Agradecimentos

Alla mia famiglia, babbo mamma e fratello, per avermi insegnato a lottare per ottenere i risultati desiderati, per avermi dato la possibilità di studiare, sempre nella massima libertà, e per avermi sopportato nei momenti in cui il mio nervosismo si rifletteva nel mio relazionamento con loro.

À Selma, minha namorada e companheira destes últimos dois anos, pelo amor, os carinhos, mas principalmente pelo fato de existir e de me ter escolhido como seu namorado.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pelo suporte financeiro.

Ringrazio tantissimo il mio “Orientador” Francesco Mercuri per avermi dato la possibilità di studiare all’ Unicamp, per tutti i suoi innumerevoli consigli e per la disponibilità offerta anche al di fuori del normale relazionamento di alunno e professore.

Ao meu Co-Orientador Daniel Victor Tausk pela disponibilidade oferecida toda vez que pedi sua ajuda.

Ao Prof. Adonai pelas ótimas conversas matemáticas e pelas ajudas oferecidas para resolver os problemas de TEX.

Ao Prof. Jorge Mujica pelo ótimo curso de análise funcional e pelas ajudas oferecidas nestes anos de doutorado.

Em relação ao Prof. Ananin, deveria escrever muitas linhas para agradecer-lo. Devo-lhe muito do meu conhecimento matemático e sempre foi disponível a conversas sobre matemática e outras coisas.

Uma das coisas melhores desta minha experiência brasileira foram as amizades. Devo agradecer aos colegas da Unicamp e Usp que frequentaram o seminário de geometria, em particular à Armando Caputi, Martha e Zé Carlos (Zezinho, voce é de mais), pela amizade e pelas proveitosas discussões matemáticas. Desejo ainda agradecer aos amigos Daniel (Gatinho), Edson(meninão), Luiz (fala mano), Maurício (gaúcho), Irene (italiana pazza),

Osmar (viche), Roberto Carlos (carioca), Stefano Deleo (forza Lecce).

Também, ao pessoal do futebol pelos “empolgantes” jogos e a sincera amizade oferecida, principalmente Arthur, Clauzionor, Ítalo, Leandro e Mauro .

A Rodrigo, companheiro de boteco e de muitas cervejadas.

Conteúdo

1	Variedades Riemannianas: a Teoria Local	1
1.1	Variedades diferenciáveis	1
1.2	Subvariedades, imersões e mergulhos	2
1.3	Partições da unidade	4
1.4	Derivações e colchete de campos vetoriais	4
1.5	Métricas e conexões Riemannianas	5
1.6	Campos tensoriais	10
1.7	Exponencial	12
1.8	Vizinhança convexa	15
2	Curvatura e Campos de Jacobi	18
2.1	Tensor de curvatura	18
2.2	Campos de Jacobi	20
2.3	Fluxo de Jacobi	22
3	Variedades Completas: Teorema de Hadamard e Variedades de Curvatura Constante	29
3.1	Variedades completas: diferenças entre o caso de dimensão finita e infinita	29
3.2	Variedade com curvatura constante e teorema de Hadamard	33
3.3	Formas espaciais	39
4	Variações de Energia e do Comprimento	51
4.1	Primeira e segunda fórmulas de variações	51
4.2	Teorema de Bonnet e outras aplicações	54
5	Teoremas de Comparação de Rauch	56
5.1	Pontos conjugados e pontos focais	56

5.2	Teoremas de comparação de Rauch	64
6	Variedades Riemannianas: a Teoria Global	69
6.1	Aplicações dos teoremas de Rauch	69
6.2	Teorema de Topogonov	77

Capítulo 1

Variedades Riemannianas: a Teoria Local

1.1 Variedades diferenciáveis

Seja \mathbb{H} um espaço de Banach e seja M um espaço topológico. Uma estrutura diferenciável de classe C^k em M , modelada em \mathbb{H} , é uma família $\mathcal{D} = \{(U_i; \phi_i), i \in I\}$ onde:

- (1) U_i é um aberto de \mathbb{H} , $\phi_i(U_i)$ é um aberto de M e $M = \bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i)$;
- (2) cada $\phi_i : U_i \longrightarrow M$ é um homeomorfismo sobre o aberto $\phi_i(U_i)$ e, para cada $i, j \in I$ com $\phi_i(U_i) \cap \phi_j(U_j) \neq \emptyset$, as aplicações $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ são de classe C^k ;
- (3) \mathcal{D} é maximal em relação às condições acima.

O par (U_i, ϕ_i) é chamado sistema de coordenadas (ou carta local) de M e se $p \in \phi_i(U_i)$ nós diremos que o par (U_i, ϕ_i) é um sistema de coordenadas (ou carta local) de M em p . O espaço modelo \mathbb{H} , sendo Banach, é metrizável; uma aplicação do teorema de A. Stone e Y. Smirnov, veja [28], prova que M é metrizável se e somente se M é paracompacto e Hausdorff. Isso justifica a seguinte definição.

Definição 1.1.1. Uma variedade diferenciável de classe C^k modelada em \mathbb{H} , é uma par (M, \mathcal{D}) , onde:

1. M é um espaço topológico de *Hausdorff* e *paracompacto*;
2. \mathcal{D} é uma estrutura diferenciável de classe C^k , modelada em \mathbb{H} .

Além disso, se \mathbb{H} é um espaço de Hilbert então diremos que M é uma variedade Hilbertiana (ou de Hilbert) de classe C^k .

Observação 1.1.2. Neste trabalho assumiremos, geralmente, que $k = \infty$ e quando o contexto for claro, nós nos referimos a M simplesmente como variedade diferenciável (Hilbertiana) ou variedade.

Podemos definir, como no caso clássico, o conceito de funções diferenciáveis entre variedades diferenciáveis e o conceito de difeomorfismo. Isso nos permite definir o espaço tangente de M em $p \in M$, $T_p M$, como classes de equivalência de curvas diferenciáveis que passam por p . Usando as cartas locais de M em p podemos transportar em $T_p M$ uma estrutura de espaço vetorial topológico, induzida por uma estrutura de Banach ([23]). Com a noção de espaço tangente podemos estender, como no caso de dimensão finita, a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Agora, dada M variedade diferenciável de classe C^k , $k \geq 1$, modelada em \mathbb{H} , definimos o fibrado tangente TM como a união disjunta dos espaços tangentes $T_p M$. Nota-se que temos uma projeção

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

que manda $T_p M$ em p e é fácil ver que TM tem uma estrutura natural de variedade diferenciável de classe C^{k-1} , modelada em $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, de modo que (TM, π, M) é um fibrado vetorial ([23]) e os diferenciais das cartas são de classe C^{k-1} . As seções de classe C^{k-1} deste fibrado são os *campos vetoriais* de M , que nós denotaremos por $\mathcal{H}(M)$, e este conjunto admite uma estrutura de espaço vetorial real e de módulo sobre o anel $\mathcal{F}(M)$ das funções diferenciáveis com valores reais. Uma diferença entre o caso de dimensão finita e infinita é que se o espaço modelo \mathbb{H} é um espaço de Hilbert de dimensão infinita, sendo $GL(\mathbb{H})$ contrátil ([20]), o fibrado tangente TM é sempre trivial.

1.2 Subvariedades, imersões e mergulhos

Seja (M, \mathcal{D}) uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $N \subset M$. Assumimos que para cada $p \in N$ existe um sistema de coordenadas (U, ϕ) de M em p , tal que

$$\phi : \mathbb{H} \cong \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \supset V_1 \times V_2 \longrightarrow U \subset M$$

onde V_i são abertos dos subespaços fechados \mathbb{E}_i do espaço modelo \mathbb{H} , e:

$$\phi(N \cap U) = V_1 \times \{a_1\}.$$

Então diremos que N é uma subvariedade de M e é fácil ver que a família $\overline{\mathcal{D}} = \{(U_i \cap N, \phi_i), i \in I\}$ é uma estrutura diferenciável de classe C^k modelada em \mathbb{E}_1 . Como no caso de dimensão finita, os conceitos de imersão, mergulho e submersão podem ser extendidos ao nosso caso. Porém, é conveniente uma hipótese suplementar, que é trivialmente verificada no caso de dimensão finita.

Definição 1.2.1. Para $i = 1, 2$ sejam \mathbb{H}_i espaços de Banach, M_i variedades de classe C^k modeladas sobre \mathbb{H}_i e $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma função diferenciável.

1. f é uma submersão se $(df)_p : T_p M_1 \longrightarrow T_{f(p)} M_2$ é sobrejetora e o núcleo é complementado em $T_p M_1$, $\forall p \in M_1$;
2. f é uma imersão se $(df)_p : T_p M_1 \longrightarrow T_{f(p)} M_2$ é injetiva e a imagem é fechada e complementada em $T_{f(p)} M_2$, $\forall p \in M_1$;
3. f é um mergulho se f é uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem (com a topologia induzida de M_2).

Como no caso de dimensão finita, veja [1], temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.2. Sejam M e N variedades diferenciáveis de classe C^k modeladas em \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 respectivamente e seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação C^k . Dado $y \in N$ se, para cada $p \in f^{-1}(y)$, o diferencial de f no ponto p é sobrejetor e seu núcleo é complementado em $T_p M$, então $Z = f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de M de classe C^k e o seu espaço tangente é dado por:

$$T_p Z = \text{Ker}(df_p),$$

para cada $p \in Z$.

Como no caso de dimensão finita, a imagem de um mergulho $f : M \longrightarrow N$ é uma subvariedade de N e $T_{f(x)} f(M) = df_x(T_x M)$, para todo $x \in M$.

1.3 Partições da unidade

Partições da unidade são uma das ferramentas básicas na teoria clássica das variedades diferenciáveis. A existência de partições da unidade de classe C^k , no caso em que $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, depende de dois fatores: a paracompacidade da variedade M e a existência de funções, de classe C^k , não nulas com suporte limitado. Um teorema de Palais, veja [1] p. 384, garante que no caso de variedades modeladas em espaço de Banach, a existência de partições da unidade na variedade se reduz a existência de partições da unidade no espaço modelo. Em 1966 R. Bonic e J. Frampton, veja [6], provaram que se o espaço de Banach é separável a existência de partições da unidade é equivalente a existência de funções de classe C^k no espaço modelo com suporte limitado. Enfim, Wulbert, veja [35], provou que cada espaço de Hilbert admite partições da unidade de classe C^∞ . A existência de partições da unidade permite provar, veja [35], o teorema de imersão de Whitney no caso de variedades Hilbertianas.

Teorema 1.3.1. Se M é uma variedade Hilbertiana de classe C^k então existe um mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{H}$ de classe C^k com $f(M)$ fechado em \mathbb{H} .

Em dimensão infinita temos também que se M é modelada em um espaço de Banach separável \mathbb{H} então M é difeomorfa a um aberto de \mathbb{H} ([16]), que é uma outra diferença com o caso de dimensão finita.

1.4 Derivações e colchete de campos vetoriais

Seja (M, \mathcal{D}) uma variedade de classe C^k modelada em \mathbb{H} . Dada uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e um campo vetorial $X \in \mathcal{H}(M)$ podemos definir

$$p \longrightarrow X(p)(f) = (df)_p(X(p))$$

uma aplicação de classe C^{k-1} . Agora, fixado um ponto $p \in M$, podemos definir, como no caso de dimensão finita, a noção de derivação. Todavia em geral, não conseguimos provar, como no caso de dimensão finita, a correspondência bijetiva entre campos de vetores e derivações, a menos que \mathbb{H} seja reflexivo e admita uma norma de classe C^k fora da origem ([1] p. 274). Por isso não usaremos o conceito de derivação, para introduzir o conceito

de colchete entre campos vetoriais, mas uma construção que funcione em geral. Sejam $X, Y \in \mathcal{H}(M)$; em coordenadas locais campos são aplicações de abertos de \mathbb{H} em \mathbb{H} . Indicamos, com abuso de notação, ainda com X, Y estas aplicações. Definimos

$$[X, Y](p) := (dY)_p(X(p)) - (dX)_p(Y(p)).$$

Não é difícil verificar, veja [23], que a definição fica bem posta e que o colchete verifica:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X]; \\ [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] &= 0; \quad \text{id. de Jacobi} \\ [fX, Y] &= f[X, Y] - Y(f)X; \\ [X, fY] &= f[X, Y] + X(f)Y. \end{aligned}$$

Além disso, se M, N são variedades diferenciáveis e $\phi : M \longrightarrow N$ é uma função diferenciável, temos o conceito de campos ϕ -relacionados, como no caso de dimensão finita e o colchete de Lie de campos ϕ -relacionados é ϕ -relacionado ao colchete de Lie ([23]).

1.5 Métricas e conexões Riemannianas

De agora em diante todas as variedades serão Hilbertianas e, por simplicidade, a diferenciabilidade será de classe C^∞ . Lembramos, ainda, que sendo \mathbb{H} um espaço de Hilbert podemos “localizar” campos vetoriais e funções.

Definição 1.5.1. Uma métrica Riemanniana em M é uma lei que associa a cada $p \in M$ um produto escalar $g(p)$ em $T_p M$ de modo que $\forall p \in M$, existe uma carta local $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{H} \rightarrow M$ tal que

- (1) a aplicação $x \in \Omega \longrightarrow \tilde{g}(x)(X, Y) := g(\phi(x))(d\phi_x X, d\phi_x Y)$ é uma aplicação diferenciável de Ω no espaço (de Banach) $B_s(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ das aplicações bilineares simétricas e contínuas de \mathbb{H} ;
- (2) $d\phi_x : \mathbb{H} \rightarrow T_x M$ é um isomorfismo topológico, onde $T_x M$ é munido da topologia associada ao produto interno $g(x)$.

Uma variedade Riemanniana é um par constituído de uma variedade Hilbertiana e uma métrica Riemanniana.

Em particular, uma métrica Riemanniana define em cada $T_p M$ uma estrutura Hilbertiana compatível com a estrutura de \mathbb{H} e, claramente, as condições acima não dependem da carta local escolhida. Além disso, sendo o espaço modelo de Hilbert, sempre existem métricas Riemannianas em variedades Hilbertianas.

Observação 1.5.2. Como de costume, quando não houver ambigüidades, escreveremos simplesmente $\langle \xi, \eta \rangle$ em lugar de $g(p)(\xi, \eta)$.

Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Dada $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável de classe C^1 , podemos definir o comprimento de γ :

$$L(\gamma) := \int_a^b [g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))]^{\frac{1}{2}} dt,$$

e estender, tal definição ao caso de curvas C^1 por partes. Analogamente ao caso de dimensão finita, é fácil ver que o comprimento de uma curva C^1 por partes não depende da parametrização escolhida. Também diremos que γ é *parametrizada por (respectivamente, proporcionalmente ao) comprimento de arco* se $g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 1$ (respectivamente, $g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \text{const}$). Como podemos medir comprimento de curva, podemos definir a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par (p, q) o ínfimo dos comprimentos das curvas C^1 por partes que ligam os dois pontos.

Proposição 1.5.3. (M, d) é um espaço métrico e a topologia induzida por d é equivalente a topologia de M .

Demonstração: obviamente $d(p, q) \geq 0$ e a desigualdade triangular é facilmente verificada. Falta provar que $d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$. O resultado será consequência dos seguintes fatos.

Lema 1.5.4. Seja \mathbb{E} um espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ uma curva de classe C^1 por partes. Então

$$\int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt \geq \|f(b) - f(a)\|.$$

Demonstração: A prova resume-se a usar as propriedades da integral de Bochner e o teorema de Hahn-Banach.

Lema 1.5.5. Seja $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert, $p \in \mathbb{H}$ e $G : U \longrightarrow B_s(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ uma aplicação contínua definida em uma vizinhança de p com valores nas aplicações bilineares simétricas contínuas definidas positivas. Suponha que $G(x)$ define a mesma topologia que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathbb{H} para todo $x \in U$. Então existe $r \geq 0$ tal que G é definida em $B_r(p) = \{x \in \mathbb{H} : \|x - p\| \leq r\}$, e duas constantes positivas K, L tal que

1. se $c : [a, b] \longrightarrow B_r(p)$ é uma curva C^1 por partes com $c(a) = p$ então

$$L \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \leq \int_a^b G(c(t))(\dot{c}(t), \dot{c}(t))^{\frac{1}{2}} dt \leq K \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt;$$

2. se $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}$ é uma curva de classe C^1 por partes com $c(a) = p$ e $\xi = \sup\{t \in [a, b] : c([a, t]) \subset B_r(p)\}$, então

$$\int_a^\xi G(c(t))(\dot{c}(t), \dot{c}(t))^{\frac{1}{2}} dt \geq Lr$$

Demonstração: [28].

Sejam $q \neq p$ em M e (U, ϕ) um sistema de coordenadas em M de p que não contém q e $\phi(0) = p$. Seja $c : [a, b] \longrightarrow M$ uma curva entre p e q . Como M é paracompacta e Hausdorff (e em particular T3), podemos diminuir a carta (U, ϕ) de modo que ϕ leve fechados de \mathbb{H} contidos em U em fechados de M . Denotamos por G^ϕ a representação da métrica em (U, ϕ) . Tomando constantes K, L, r como no lema anterior temos:

$$\int_a^b \|\dot{c}(t)\|^{\frac{1}{2}} dt \geq Lr,$$

e logo $d(p, q) > 0$. Além disso se $0 \leq \xi \leq r$ temos

$$\mathcal{B}_{K\xi}(p) \supset \phi(B_\xi(0)) \supset \mathcal{B}_{L\xi}(p),$$

onde $\mathcal{B}_s(p) = \{q \in M : d(p, q) < s\}$, que implica que a topologia induzida pela distância d é a mesma topologia de M . c.q.d.

Definição 1.5.6. Uma conexão (linear) em M é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M), \quad \nabla(X, Y) := \nabla_X Y,$$

tal que

1. ∇ é $\mathcal{F}(M)$ -linear na primeira variável;
2. $\nabla_X fY = X(f)Y + \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}(M), f \in \mathcal{F}(M).$

Como temos partições da unidade sempre existem conexões lineares. Uma conexão é dita simétrica se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

No caso em que M seja uma variedade Riemanniana diremos que uma conexão é compatível com a métrica Riemanniana, se

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{H}(M).$$

Observação 1.5.7. Como veremos na próxima seção, a $\mathcal{F}(M)$ -linearidade na primeira variável, não implica, em geral, a “tensorialidade” de ∇ na primeira variável.

Como no caso de dimensão finita, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ compatível com a estrutura de \mathbb{H} , a fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \end{aligned}$$

nos permite provar o seguinte resultado de existência e unicidade.

Teorema 1.5.8. Dada uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão simétrica e compatível com a métrica. Esta conexão é chamada de conexão de Levi Civita ou conexão Riemanniana e é dada pela fórmula de Koszul.

Se nós fixamos (Ω, ϕ) uma carta local, usando a fórmula de Koszul, obtemos que localmente a conexão de Levi Civita é do tipo

$$\nabla_X Y = dY(X) + \Gamma^\phi(X, Y),$$

onde $\Gamma^\phi : \Omega \rightarrow L(\mathbb{H}, \mathbb{H}; \mathbb{H})$ é uma aplicação diferenciável, chamada símbolo de Christoffel e é definida por

$$\begin{aligned} 2g(x)(\Gamma^\phi(x)(X, Y), Z) &= (dg)_x(X, Y, Z) + (dg)_x(Y, Z, X) \\ &- (dg)_x(Z, X, Y). \end{aligned}$$

Note que o símbolo de Christoffel é simétrico, isto é, $\Gamma^\phi(X, Y) = \Gamma^\phi(Y, X)$, que a conexão é tensorial na primeira variável e se (V, ψ) é um outra carta local, para cada $x \in U \cap V$ temos

$$d(\phi^{-1} \circ \psi)_x \circ \Gamma^\psi = d^2(\phi^{-1} \circ \psi)_x + \Gamma^\phi(d(\phi^{-1} \circ \psi)_x, d(\phi^{-1} \circ \psi)_x).$$

Quando uma conexão escreve-se na forma anterior, podemos definir o conceito de derivadas de campos ao longo de aplicações: seja $F : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Um campo ao longo de F é uma seção do fibrado induzido sobre N , via F , do fibrado TM . Indicamos por $F^*(TM)$ tal fibrado e por $\mathcal{H}(F^*(TM))$ as suas seções diferenciáveis.

Proposição 1.5.9. Sejam M uma variedade que admite uma conexão do tipo anterior e $F : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Então existe uma única aplicação

$$\bar{\nabla} : \mathcal{H}(N) \times \mathcal{H}(F^*(TM)) \rightarrow \mathcal{H}(F^*(TM))$$

tal que

- (1) $\bar{\nabla}$ é $C^\infty(N)$ linear no primeiro argumento e uma derivação no segundo
- (2) se $V = Y \circ F$, onde $Y \in \mathcal{H}(M)$ então

$$\bar{\nabla}_X V(p) = \nabla_{(dF)(X)} Y(F(p)).$$

Além disso, se ∇ é a conexão de Levi Civita, para cada $X, Y \in \mathcal{H}(N)$ e para cada $V, W \in \mathcal{H}(F^*(TM))$ temos

$$(3) \quad \bar{\nabla}_X(dF)(Y) - \bar{\nabla}_Y(dF)(X) = (dF)([X, Y]);$$

$$(4) \quad X\langle V, W \rangle = \langle \bar{\nabla}_X V, W \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_X W \rangle.$$

Demonstração: seja $X \in \mathcal{H}(N)$ e $V \in \mathcal{H}(F^*(TM))$. Definimos em coordenadas

$$\bar{\nabla}_X V(p) = (dV)_p(X) + \Gamma[F(p)]((dF)_p(X), V(p))$$

e, usando as propriedades dos símbolos de Christoffel, temos que esta definição é bem posta. É fácil ver que $\bar{\nabla}$ é única e que verifica, também no caso que ∇ seja Levi Civita, as propriedades anteriores. c.q.d.

1.6 Campos tensoriais

Sejam \mathbb{H} um espaço de Hilbert, $B(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de \mathbb{H} em si, e seja $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ um aberto de \mathbb{H} .

Consideramos uma aplicação $A : \Omega \rightarrow B(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ e, para cada $\xi \in \mathcal{H}(\Omega)$, a função $\tilde{A}(\xi)(x) := A(x)(\xi(x))$. Se $\tilde{A}(\xi) \in \mathcal{H}(\Omega)$, para cada $\xi \in \mathcal{H}(\Omega)$, então nós diremos que A é *fracamente diferenciável*. Observamos que em dimensão finita as aplicações fracamente diferenciáveis são diferenciáveis. Seja

$$\tilde{A} : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$$

uma aplicação entre o espaço dos campos vetoriais de Ω e lembremos que:

1. \tilde{A} é um campo tensorial de tipo (1,1) fracamente diferenciável (resp. diferenciável), se existe uma aplicação fracamente diferenciável (resp. diferenciável), $A : \Omega \rightarrow B(\mathbb{H})$ tal que $\tilde{A}(\xi)(x) = A(x)\xi(x)$;
2. \tilde{A} é pontual se $\xi(x_0) = 0$ implica $\tilde{A}(\xi)(x_0) = 0$;
3. \tilde{A} é um operador diferenciável de ordem 0 se \tilde{A} é $\mathcal{F}(\Omega)$ -linear.

Observação 1.6.1. Ser $\mathcal{F}(\Omega)$ -linear implica que \tilde{A} é, de fato, um *operador diferencial*, isto é, se $\xi = 0$ em um aberto $U \subset \Omega$, então $\tilde{A}(\xi) = 0$ em U .

As condições 1 e 2 são equivalentes e $2 \Rightarrow 3$. É fácil provar que se o espaço de Hilbert tem dimensão finita as condições anteriores são equivalentes; por exemplo provemos que $3 \Rightarrow 2$:

seja $\{e_i, i = 1 \dots n = \dim \mathbb{H}\}$ uma base ortonormal e $\xi = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Sendo \tilde{A} $\mathcal{F}(\Omega)$ -linear, $\tilde{A}(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{A}(e_i)$, logo a propriedade 2 é satisfeita.

Nosso objetivo é discutir quais são as relações entre as condições anteriores em dimensão infinita. O primeiro fato importante é que 3 não é equivalente a 2 como mostrará o exemplo seguinte.

Exemplo 1.6.2. Seja $\lambda : B(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H}$ uma aplicação linear e contínua não nula tal que o núcleo contém o subespaço fechado dos operadores compactos. Definimos

$$\tilde{A}(\xi)(x) = \lambda((d\xi)_x).$$

Afirmção: \tilde{A} é $\mathcal{F}(\Omega)$ -linear.

Seja $f \in \mathcal{F}(\Omega)$. Então $d(f\xi)_{x_0} = (df)_{x_0}\xi(x_0) + f(x_0)(d\xi)_{x_0}$. O primeiro pedaço da diferencial anterior é compacto pois, a dimensão da imagem é no máximo um. Logo

$$\tilde{A}(f\xi)(x_0) = \lambda((df)_{x_0}\xi(x_0) + f(x_0)(d\xi)_{x_0}) = f(x_0)\lambda((d\xi)_{x_0}) = f(x_0)\tilde{A}(\xi)(x_0).$$

De outro lado se nós pegamos um operador ξ , que não está no núcleo de λ , teremos $\tilde{A}(\xi - \xi(x_0)) \neq 0$, isto é, \tilde{A} não é pontual.

Assumimos, por simplicidade, que o espaço \mathbb{H} seja separável. Se nós pedirmos que o operador \tilde{A} seja contínuo em relação a convergência pontual em $\mathcal{H}(\Omega)$ poderemos repetir a mesma demonstração do caso de dimensão finita para concluir que $3 \Rightarrow 2$. Esta condição não é muito interessante pois, na maioria das aplicações as derivadas direcionais aparecem. Todavia, se nós fixarmos uma base Hilbertiana ortonormal $\{e_i\} \subset \mathbb{H}$, podemos escrever pontualmente

$$\xi \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \xi(p) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(p)e_i, \quad x_i \in \mathcal{F}(\Omega)$$

e tal série converge pontualmente com as derivadas parciais. De fato, o diferencial no ponto p do campo ξ é dado por

$$d(\xi)_p(v) := \frac{d}{dt}\xi(p + tv)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} d(x_i)_p(v)e_i,$$

pois o vetor tangente à curva $\alpha(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t)e_i$ é $\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t)e_i$. Esta simples observação justifica a seguinte definição.

Definição 1.6.3. Um operador $\tilde{A} : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ é fracamente C^∞ -contínuo se para toda sequência de campos convergentes pontualmente, com todas as derivadas parciais, a imagem converge pontualmente na topologia fraca.

Observação 1.6.4. Como um conjunto $A \subseteq \mathbb{H}$ é limitado se e somente se $\phi(A)$ é limitado $\forall \phi \in \mathbb{H}^*$, existe uma função $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa, tal que para cada campo vetorial constante temos $\|\tilde{A}(E)(x)\| \leq K(x)\|E\|$.

Teorema 1.6.5. Se o operador \tilde{A} é fracamente C^∞ -contínuo então $3 \Rightarrow 2$.

Demonstração: seja $\xi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, com $\xi(p) = 0$. A seqüência $\xi_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ verifica as hipóteses então $\tilde{A}(\xi_n)(p)$ converge fracamente para $\tilde{A}(\xi)(p) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i$. Como $\xi_n(p) = 0$ então $\tilde{A}(\xi_n)(p) = 0$ e para cada $i \in \mathbb{N}$ temos

$$y_i = \langle \tilde{A}(\xi)(p), e_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{A}(\xi_n)(p), e_i \rangle = 0.$$

Daí concluímos que $\tilde{A}(\xi)(p) = 0$. c.q.d.

Na seção anterior introduzimos o conceito de conexão linear. Podemos modificar um pouco o exemplo anterior para obter conexões que não sejam tensoriais no primeiro argumento. Porém, se a conexão linear é a conexão de Levi Civita, a fórmula de Koszul e as propriedades do colchete mostram que a expressão é $\mathcal{F}(\Omega)$ -linear em X e Z . De outro lado, nesta fórmula aparecem somente as derivadas parciais e então obtemos que o operador é fracamente C^∞ -contínuo, em relação a primeira variável. Portanto provamos, usando o teorema anterior, que a conexão de Levi Civita é pontual na primeira variável. Sempre aplicando o teorema anterior prova-se que os símbolos de Christoffel são fracamente C^∞ -contínuos nas duas variáveis. Em dimensão finita cada conexão é da forma da Levi Civita, onde em geral os símbolos de Christoffel não são simétricos. Alguns autores, veja por exemplo [18], definem as conexões lineares como dada localmente, a partir dos símbolos de Christoffel, pois a curvatura, conceito que nós introduziremos no capítulo 2, é pontual nas suas variáveis.

1.7 Exponencial

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi Civita ∇ e seja $c : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes. Se V é um campo ao longo de c , indicaremos por $V'(t)$ ou $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V(t)$ a derivada de V em t , segundo a conexão induzida em $c^*(TM)$.

Definição 1.7.1. Um campo vetorial V , ao longo de uma curva diferenciável $c : [a, b] \rightarrow M$, é um campo paralelo se $V'(t) = 0$, para cada $t \in [a, b]$.

Proposição 1.7.2. Seja $c : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Então

1. $\forall V \in T_{c(a)}M$ existe um único campo paralelo $V(t)$ ao longo de c tal que $V(c(a)) = V$;
2. a aplicação

$$\tau_t^s : T_{c(t)}M \rightarrow T_{c(s)}M$$

que associa a cada vetor V o valor $V(s)$, do transporte paralelo ao longo de c no ponto $c(s)$, é uma isometria;

3. sejam $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Então

$$\nabla_X Y(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_t^0(Y),$$

onde τ_t^0 é o transporte paralelo ao longo de qualquer curva que tenha $X(p)$ como vetor tangente.

Demonstração:

1. em coordenadas, $V(t)$ é um campo paralelo se satisfaz a seguinte equação de primeira ordem

$$\dot{V}(t) + \Gamma(c(t))(\dot{c}(t), V(t)) = 0.$$

Sendo uma equação linear temos existência e unicidade;

2. basta observar que ∇ preserva a métrica;
3. seja $Z \in T_p M$ e seja $c : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva tal que $\dot{c}(0) = X$ e $c(0) = p$. Seja $Z(t)$ o transporte paralelo de Z ao longo de c . Para cada $t \in [0, 1]$ temos

$$g(c(t))(Y(c(t)), Z(t)) = g(p)(\tau_t^0(Y(c(t))), Z).$$

Derivando em t e usando que ∇ é Levi Civita temos

$$g(p)(\nabla_X Y(p), Z) = g(p)\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_t^0(Y(c(t))), Z\right).$$

c.q.d.

O próximo passo é definir a classe de curvas mais importantes quando temos uma conexão linear na variedade.

Definição 1.7.3. Uma curva diferenciável $c : [a, b] \longrightarrow M$ é dita uma geodésica se o vetor tangente é paralelo ao longo dela, isto é, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c}(t) = 0$.

Em coordenadas a equação das geodésicas fica

$$\frac{d^2 c}{dt^2} + \Gamma(c(t))(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0.$$

Usando os resultados clássicos sobre soluções de equações ordinárias, em espaços de Banach (veja [23]), prova-se o seguinte resultado.

Teorema 1.7.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então

1. $\forall p \in M, X \in T_p M$, existe uma geodésica $c : (-\delta, \epsilon) \longrightarrow M$ tal que $c(0) = p, \dot{c}(0) = X$. Esta geodésica é única, a menos do intervalo de definição, e será denotada por $c_X(t)$.
2. se $c(t)$ é uma geodésica então $c(kt)$, com $k \in \mathbb{R}$, é também uma geodésica com vetor tangente $k\dot{c}(kt)$;
3. existe uma vizinhança W da seção nula $m \rightarrow 0_m \in T(M)$ tal que, para cada $X \in W$, a geodésica que sai de $\pi(X)$ com vetor tangente X é definida por $|t| < 2$.

Demonstração: [18].

Tomando W como no teorema anterior, definimos a aplicação exponencial

$$\begin{aligned} \exp : W &\rightarrow M \times M, \\ X &\rightarrow (\pi(X), c_X(1)), \end{aligned}$$

e a restrição $\exp|_{W \cap T_p M}$ será denotada por \exp_p . Como $(d \exp_p)_0 = Id$ temos, como no caso de dimensão finita, o seguinte fato.

Teorema 1.7.5. Seja $p \in (M, g)$. Existem dois números reais positivos $\epsilon(p)$, $\eta(p)$ tal que

$$\exp_p : B_\epsilon(o_p) \longrightarrow \mathcal{B}_\epsilon(p),$$

onde $B_\epsilon(o_p) = \{v \in T_p M : \|v\| < \epsilon\}$ e $\mathcal{B}_\epsilon(p) = \{q \in M : d(p, q) < \epsilon\}$, é um difeomorfismo sobrejetor no conjunto aberto $\mathcal{B}_\epsilon(p)$ de p . Além disso

1. $\forall q, r \in \mathcal{B}_\epsilon(p)$ existe uma única geodésica

$$c_{qr} : [0, 1] \longrightarrow M$$

que liga q e r de comprimento $\leq \eta$;

2. a aplicação

$$(q, r) \in \mathcal{B}_\epsilon(p) \longrightarrow c_{qr} \in C^0([0, 1], M)$$

é contínua;

3. $\forall q \in \mathcal{B}_\epsilon(p)$, a exponencial $\exp_q : \mathcal{B}_\eta(o_q) \longrightarrow \mathcal{B}_\eta(q)$ é um difeomorfismo sobrejetivo com $\mathcal{B}_\epsilon(p) \subset \mathcal{B}_\eta(q)$.

Demonstração: [18].

1.8 Vizinhança convexa

Nesta seção estudaremos a geometria local das variedades Riemannianas. Na seção anterior nós provamos a existência de coordenadas normais (1) e coordenadas polares (2):

1. seja $i_p : (T_p M, g(p)) \longrightarrow (\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma isometria; $(\mathcal{B}_\theta(0), \exp_p \circ i_p^{-1})$ é uma carta local em p sobre a bola $\mathcal{B}_\theta(p)$ para cada $\theta \leq \epsilon(p)$. Note-se que o símbolo de Christoffel é nulo na origem pois, as geodésicas por p são imagens das retas que passam pela origem.
2. seja $X \in T_p M - \{o_p\} \xrightarrow{j_p} (\frac{i_p(X)}{\|X\|}, \|X\|) \in S(\mathbb{H}) \times (0, \infty)$. Então para cada $\theta \leq \epsilon(p)$, $(S(\mathbb{H}) \times (0, \theta), \exp_p \circ j_p^{-1})$ é uma carta local em p com imagem $\mathcal{B}_\theta(p) - \{p\}$.

Lema 1.8.1. (lema de Gauss) Seja $p \in M$ e sejam $X, Y \in T_p M$. Assumimos que a exponencial seja definida em $B_r(o_p)$. Então para cada $t \leq r$ temos

$$g(\exp_p(tX))(d(\exp_p)_{tX}(X), d(\exp_p)_{tX}(Y)) = g(p)(X, Y).$$

Demonstração: primeiramente, nota-se que é suficiente provar o caso em que $g(p)(X, Y) = 0$. Seja $X(s)$ uma curva em $B_r(o_p)$ com $X(0) = tX$, $\dot{X}(0) = Y$ e $\|X(s)\| = \|tX\|$. Podemos escolher ϵ, η suficientemente pequenos de modo que

$$\begin{aligned} F : (-\eta, \eta) \times (-\epsilon, 1 + \epsilon) &\longrightarrow M \\ (s, h) &\longrightarrow \exp_p(hX(s)) \end{aligned}$$

é bem definido. Quando fixamos s , a curva $F(s, \cdot)$ é uma geodésica e por isso

$$\frac{\partial}{\partial h} g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial h}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial F}{\partial h}, \frac{\partial F}{\partial h}\right) = 0.$$

Logo, $g\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial h}\right)$ não depende de h e sendo $g\left(\frac{\partial F}{\partial s}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial h}(0, 0)\right) = 0$ concluímos que

$$0 = g\left(\frac{\partial F}{\partial s}(0, 1), \frac{\partial F}{\partial h}(0, 1)\right) = g(\exp_p(tX))(d(\exp_p)_{tX}(X), d(\exp_p)_{tX}(Y)).$$

c.q.d.

Os próximos resultados são conseqüências imediatas do lema de Gauss.

Corolário 1.8.2. Suponhamos que a aplicação \exp_p esteja definida em uma vizinhança aberta U do segmento $\{tu : t \in [0, l]\}$ no espaço tangente $T_p M$. Seja $\phi : [0, l] \longrightarrow U$ uma curva C^1 por partes que liga os vetores $\phi(0) = 0_p$ e $\phi(l) = lu$. Denotamos por $c(t) = \exp_p(tu)$ a geodésica relativa a u e por $\psi(t) = \exp_p(\phi(t))$. Então $L[c] \leq L[\psi]$ e se a diferencial da aplicação exponencial é um isomorfismo em cada ponto de U , então a igualdade é verificada se e somente se ψ é uma reparametrização da geodésica c .

Corolário 1.8.3. Seja $p \in M$, $\epsilon(p), \eta(p)$ como no Teorema (1.7.5). Então cada geodésica de comprimento $\leq \eta(p)$, que tem como ponto inicial um ponto $q \in \mathcal{B}_{\epsilon(p)}(p)$, minimiza a distância.

Corolário 1.8.4. Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ uma curva de classe C^1 por partes parametrizada com comprimento de arco. Se $L(\alpha) \leq L(c)$, para cada curva c que liga $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, então α é uma geodésica.

Um fato importante em dimensão finita é a existência da vizinhança convexa. Por exemplo, usando as vizinhanças convexas podemos provar que o grupo fundamental de uma variedade compacta é finitamente gerado.

Definição 1.8.5. Um conjunto aberto U é chamado convexo se para cada $x, y \in U$ existe uma única geodésica minimal em U que liga x e y .

Lema 1.8.6. Seja $p \in M$ e $\eta > 0$ tal que $\exp_p : B_\eta(o_p) \rightarrow \mathcal{B}_\eta(p)$ é um difeomorfismo sobrejetivo. Então existe um número real não negativo $\epsilon_o < \eta$ tal que a esfera $\mathcal{S}_\epsilon(p)$ é mergulhada de modo convexo para cada $\epsilon \leq \epsilon_o$, isto é, se c é uma geodésica que intercepta a esfera geodésica em $c(t_o) \in \mathcal{S}_\epsilon(p)$ e $\dot{c}(t_o)$ é tangente a $\mathcal{S}_\epsilon(p)$, então $c(t)$ fica fora de $\mathcal{B}_\epsilon(p)$ para cada $t \neq t_o$ suficientemente pequeno.

Demonstração: seja $c(t)$ uma geodésica com $|t - t_o| \leq \delta$, como nas hipóteses, e seja $u(t)$ a curva em $T_p M$ tal que $\exp_p(u(t)) = c(t)$. A função

$$F(t) = \frac{1}{2} \langle u(t), u(t) \rangle = \frac{1}{2} d(p, c(t))^2$$

é diferenciável e

$$\frac{dF}{dt}(t_o) = \langle u(t_o), \dot{u}(t_o) \rangle = 0, \quad (\text{lema de Gauss})$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(t_o) = \langle \dot{u}(t_o), \dot{u}(t_o) \rangle + \left\langle \frac{d^2 u}{dt^2}(t_o), u(t_o) \right\rangle.$$

Sendo c uma geodésica, $u(t)$ satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \Gamma(u(t))(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) = 0.$$

Agora, $\Gamma(0) = 0$ então existe $0 < \xi < 1$ e $0 < \epsilon_o < \eta$ tal que, para cada $\|u\| \leq \epsilon_o$, temos $\|\Gamma(u)\| \leq \xi$. Daí obtemos

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(t_o) \geq \|u(t_o)\| (1 - \xi),$$

o que prova que se $0 < \epsilon < \epsilon_o$ então $F(t_o)$ é um máximo local. c.q.d.

Teorema 1.8.7. Seja $p \in M$ e seja ϵ_o como no lema anterior. Então para cada $\chi \leq \chi_o = \frac{\epsilon_o}{2}$, a bola $\mathcal{B}_\chi(p)$ é convexa.

Demonstração: como no caso de dimensão finita ([10]).

Capítulo 2

Curvatura e Campos de Jacobi

2.1 Tensor de curvatura

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e seja ∇ a conexão de Levi Civita. Como no caso de dimensão finita queremos medir quanto a geometria da nossa variedade difere da geometria do espaço modelo; por isso nós introduziremos o conceito de curvatura. A curvatura R associa a cada ponto p uma aplicação trilinear $R : T_p M \times T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p M$, assim definida: sejam $x, y, z \in T_p M$ e sejam campos $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ que coincidem no ponto p com os três vetores tangentes em p . Definimos

$$R(x, y)z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Em coordenadas temos que a curvatura R é dada por

$$\begin{aligned} R(x)(X, Y)Z &= d\Gamma(x)(X, Y, Z) - d\Gamma(x)(Y, X, Z) \\ &+ \Gamma(x)(X, \Gamma(x)(Y, Z)) - \Gamma(x)(Y, \Gamma(x)(X, Z)), \end{aligned}$$

onde Γ é o símbolo de Christoffel. Nota-se que R está bem definida e é tensorial em cada variável; por isso chamaremos R de tensor de curvatura.

Proposição 2.1.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e seja R o tensor de curvatura. Então

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$;

3. se $F : N \longrightarrow M$ é uma aplicação diferenciável então $\forall X_1, X_2 \in T_x N$ e $\forall V \in \mathcal{H}(F^*(TM))$ temos

$$\bar{\nabla}_{X_1} \bar{\nabla}_{X_2} V - \bar{\nabla}_{X_2} \bar{\nabla}_{X_1} V - \bar{\nabla}_{[X_1, X_2]} V = R((dF)_x(X_1), dF_x(X_2))V.$$

Sejam $x, y, z, t \in T_p M$. Definimos, como no caso finito dimensional, a curvatura Riemanniana $R(x, y, z, t) = g(R(x, y)z, t)$. Usando as propriedades do tensor de curvatura é fácil ver que

1. $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T)$;
2. $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$;
3. $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$;
4. $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$;

onde a última propriedade é chamada de identidade de Bianchi.

Observação 2.1.2. Como R é fracamente C^∞ -contínua em cada variável, aplicando o teorema (1.6.5), concluímos que R é um tensor, como no caso de dimensão finita.

Observação 2.1.3. Note-se que para cada $p \in M$ e $X \in T_p M$ a aplicação linear

$$T_p M \xrightarrow{R_X} T_p M, \quad Y \longrightarrow R(X, Y)X$$

é contínua e auto-adjunta pela propriedade (3).

Definição 2.1.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, seja $p \in M$ e sejam $v, w \in T_p M$ linearmente independentes. Definimos

$$K(v, w) = \frac{R(v, w, w, v)}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

a curvatura seccional $K(v, w)$ relativa a v, w .

Como no caso de dimensão finita temos que a curvatura seccional depende só do subespaço η gerado por v, w , determina univocamente o tensor de curvatura e, usando a identidade de Bianchi, verifica

$$\begin{aligned} K(\eta) &= K_o, \text{ para cada 2-plano } \eta \subset T_p M \Leftrightarrow \\ R(X, Y)Z &= K_o(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y). \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.5.

1. Seja \mathbb{H} um espaço de Hilbert. Então a conexão de Levi Civita é dada por $\nabla_X Y = dY(X)$ e é fácil ver que $R(X, Y)Z = 0$;
2. Seja $S_\xi(\mathbb{H})$ a esfera de raio ξ . Pode-se demonstrar que $K = \frac{1}{\xi^2}$;
3. Seja $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e seja B_ξ a bola aberta de raio ξ . Defina-se em B_ξ a seguinte métrica:

$$g(u)(X, Y) = \frac{4\langle X, Y \rangle}{(1 - \frac{\langle u, u \rangle}{\xi^2})^2}.$$

Pode-se provar que a curvatura Riemanniana desta variedade, chamada de espaço hiperbólico, é constante e igual $K = -\frac{1}{\xi^2}$.

2.2 Campos de Jacobi

A equação dos campos de Jacobi representa a linearização da exponencial. Os campos de Jacobi são muito importantes pois, eles determinam a geometria local das variedades Riemannianas.

Definição 2.2.1. Seja $c : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica. Um campo de Jacobi ao longo de c é um campo $Y(t)$ que satisfaz a equação

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t) + R(Y(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0,$$

chamada de equação de Jacobi.

A equação de Jacobi é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Os teoremas clássicos de E.D.O. (veja [23]) garantem que a solução de tal equação é sempre definida e o espaço vetorial das soluções \mathcal{I}_c é isomorfo naturalmente a $T_{c(0)}M \times T_{c(0)}M$ via a aplicação $Y \longrightarrow (Y(0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0))$. Isto significa que para cada $v, w \in T_p M$ existe um único campo de Jacobi $Y(t)$ com $Y(0) = w$ e $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0) = v$. Suponhamos que $\dot{c} \neq 0$ e seja Y um campo de Jacobi ao longo de c . A função

$$\langle Y(t), \dot{c} \rangle = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0), \dot{c}(0) \rangle t + \langle Y(0), \dot{c}(0) \rangle$$

é afim e fica claro que os campos de Jacobi interessantes são aqueles que são ortogonais ao vetor tangente da geodésica; chamaremos tais campos de campos de Jacobi normais. A fórmula anterior prova que se as condições iniciais são ortogonais ao vetor $\dot{c}(0)$ então o campo Y é um campo de Jacobi normal.

Agora, lembramos que uma variação de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é uma aplicação

$$F : (-\eta, \alpha) \times I \longrightarrow M$$

diferenciável, onde α e η são reais positivos, tal que $F(0, t) = c(t)$. Como no caso de dimensão finita Y é um campo de Jacobi ao longo de c se e somente se existe uma variação F da curva c tal que

- a curva $c_s(t) = F(s, t)$ é uma geodésica;
- $Y(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(0, t)$.

Os campos ao longo de F são chamados variacionais e no caso em que a variação seja do tipo anterior diremos que F é uma variação geodésica.

Corolário 2.2.2. Seja $c : [0, a] \longrightarrow M$ uma geodésica não constante e seja $Y(t)$ um campo de Jacobi ao longo de c com condições iniciais $Y(0) = 0$ e $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(0) = w \in T_{c(0)}M$. Então, identificando $T_{\dot{c}(0)}(T_{c(0)}) \simeq T_pM$, temos

$$Y(t) = d(\exp_p)_{\dot{c}(0)}(tw).$$

Corolário 2.2.3. Seja $u \in T_pM$. Assumimos que \exp_p seja definida em um aberto que contém $\{tu : t \in [0, a]\}$. Então

1. $d(\exp_p)_{tu}(u) = \dot{c}_u(t)$;
2. $\langle d(\exp_p)_{tu}(\xi), \dot{c}_u(t) \rangle = \langle u, \xi \rangle$.

O próximo resultado, devido a Ambrose, embora muito simples, nos permitirá obter informações sobre os pontos críticos da aplicação exponencial.

Lema 2.2.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e sejam $p \in M$ e $u \in T_pM$. Assumimos que a exponencial seja definida em uma vizinhança que contém $\{tu : t \in [0, a]\}$ e seja $c(t) = \exp_p(tu)$ a geodésica respectiva. Sejam $\xi(t)$ e $\eta(t)$ dois campos de Jacobi ao longo de c . Então

$$\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \eta(t), \xi \rangle - \langle \eta(t), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \xi(t) \rangle = \text{constante } C.$$

Demonstração: é suficiente observar que a derivada da expressão anterior é nula. c.q.d.

É interessante calcular os campos de Jacobi nas variedades de curvatura constante pois, quando nós tivermos limitações sobre as curvatura seccional, o conhecimento da geometria das variedades com curvatura seccional constante será fundamental para obtermos informações sobre a nossa variedade.

Exemplo 2.2.5. (*Campos de Jacobi em variedade de curvatura constante*)
Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante K , seja $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ uma geodésica parametrizada com comprimento de arco em M e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ . Como

$$R(J(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = KJ(t),$$

então verifica-se facilmente que os campos de Jacobi, com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) = w$, $\langle w, \dot{\gamma}(0) \rangle = 0$, são

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t) & \text{se } K < 0; \\ tw(t) & \text{se } K = 0; \\ \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t) & \text{se } K > 0; \end{cases}$$

onde $w(t)$ é o transporte paralelo ao longo de γ de w . Analogamente podemos calcular os campos de Jacobi ao longo de γ com outras condições iniciais.

Como no caso de dimensão finita, podemos calcular a fórmula de Taylor da norma dos campos de Jacobi, o que representa intuitivamente a “velocidade de afastamento” das geodésicas.

Proposição 2.2.6. Seja $c : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica e seja $J(t)$ um campo de Jacobi ao longo de c com $J(0) = 0$ e denotamos por $J' = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J$. Então

$$\|J(t)\|^2 = \|J'(0)\|^2 (t^2 - \frac{1}{3}K(\dot{c}(0), J'(0))t^4) + o(t^4).$$

2.3 Fluxo de Jacobi

Todas as informações sobre as geodésicas estão contidas na equação de Jacobi. Nosso objetivo é construir uma E.D.O. que generalize a equação de Sturm, que representa os campos de Jacobi e de estimar a norma quando temos limitações inferiores e superiores sobre a curvatura seccional. Cada estimativa é feita considerando geodésicas parametrizadas por comprimento de arco e campos de Jacobi normais.

Proposição 2.3.1. Seja $c : [0, l] \longrightarrow M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco. Suponhamos que

$$\Delta(s) \geq \langle R(u, \dot{c}(s))\dot{c}(s), u \rangle, \quad \langle u, \dot{c}(s) \rangle = 0, \quad \langle u, u \rangle = 1.$$

Então se J é um campo de Jacobi normal temos

$$\| J(s) \|'' \geq -\Delta(s) \| J(s) \|^2$$

no intervalo onde J não é nulo.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \| J(s) \|' &= \| J(s) \|^{-1} \langle J(s), \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J(s) \rangle \\ \| J(s) \|'' &= \| J(s) \|^{-3} (-\langle J(s), \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J(s) \rangle^2 + \| \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J(s) \|^2 \| J(s) \|^2) \\ &\quad + \langle J(s), \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J(s) \rangle \| J(s) \|^{-1} \\ &= \| J(s) \|^{-3} (\| \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J(s) \|^2 \| J(s) \|^2 - \langle J(s), \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J(s) \rangle^2) \\ &\quad - \langle R(\frac{J(s)}{\| J(s) \|}, \dot{c}(s))\dot{c}(s), \frac{J(s)}{\| J(s) \|} \rangle \| J(s) \| \\ &\geq -\Delta(s) \| J(s) \|^2 \end{aligned}$$

c.q.d.

Corolário 2.3.2. Seja f a solução da equação diferencial:

$$\begin{cases} f''(t) + \Delta(t)f(t) = 0; \\ f(0) = \| J(0) \|, \quad f'(0) = \| J \|' (0). \end{cases}$$

Então no intervalo onde f é positiva temos

$$\| J(s) \| \geq f(s), \quad \frac{\| J(t) \|}{f(t)} < \frac{\| J(s) \|}{f(s)}, \quad 0 < t \leq s.$$

Demonstração: primeiramente nota-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|J(t)\|}{f(t)} = 1,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\|J(t)\|}{f(t)} &= \frac{1}{f^2(t)} \int_0^t (\|J(s)\|'' f(s) - f(s)'' \|J(s)\|) ds \\ &\geq \frac{1}{f^2(t)} \int_0^t (\Delta(s)f(s) - \Delta(s)f(s)) \|J(s)\| ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daí segue-se que onde $J(s)$ é diferente de zero e onde $f(s)$ é positivo temos a desigualdade desejada. De outro lado, a fórmula anterior prova também que o primeiro zero de J , se existir, aparece depois do primeiro zero de f . c.q.d.

O próximo passo é transportar no espaço tangente a equação de Jacobi, via transporte paralelo, para reduzir o estudo dos campos de Jacobi a uma E.D.O. no espaço tangente. Fixamos $c : [0, b] \rightarrow M$ uma geodésica e definimos

$$R_s : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(0)}M, \quad R_s(X) = \tau_s^0(R(\tau_0^s(X), \dot{c}(s))\dot{c}(s))$$

uma curva de operadores simétricos em T_pM . Nós queremos estudar os campos com condições ao bordo genéricas. Indicamos por $p = c(0)$, tomamos \mathbb{H}_o um subespaço fechado de T_pM e

$$A : \mathbb{H}_o \rightarrow \mathbb{H}_o$$

um operador contínuo e simétrico. Podemos pensar $T_pM = \mathbb{H}_o \oplus \mathbb{H}_o^\perp$ e consideramos o sistema

$$\begin{cases} T''(s) + R_s(T(s)) = 0; \\ T(0)(v, w) = (v, 0), \quad T'(0)(v, w) = (-A(v), w). \end{cases}$$

A primeira observação é que a família a um parâmetro de aplicações bilineares

$$\begin{aligned} T_pM \times T_pM &\xrightarrow{\Phi(t)} \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \langle T(t)(u), T'(t)(w) \rangle \end{aligned}$$

é simétrica pois, ela é simétrica em $t = 0$, sendo A simétrico e a derivada

$$(\langle T(t)(u), T'(t)(w) \rangle - \langle T(t)(w), T'(t)(u) \rangle)' = 0$$

é nula.

Proposição 2.3.3. Para cada $(v, w) \in T_p M$ o campo de Jacobi com condições iniciais

$$J(0) = v \in \mathbb{H}_o, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) + A(J(0)) = w \in \mathbb{H}_o^\perp,$$

é dado por $\tau_0^t(T(t)(v, w))$.

Demonstração: seja $Z(t)$ o transporte paralelo de um campo $u \in T_p M$ ao longo de γ e indiquemos por $Y(t) = \tau_0^t(T(t)(v, w))$. Então

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t), Z(t) \rangle &= \langle Y(t), Z(t) \rangle'' \\ &= \langle T(t)(v, w), u \rangle'' \\ &= -\langle R_t(T(t)(v, w), u) \rangle \\ &= -\langle R(Y(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), Z(t) \rangle \end{aligned}$$

que prova que o campo $Y(t)$ é de Jacobi e obviamente verifica as condições desejadas. c.q.d.

A proposição anterior nos diz que estudar os campos de Jacobi ou as soluções da E.D.O. anterior é equivalente; por isso chamaremos $T(t)$ *fluxo de Jacobi*. É interessante calcular o adjunto de $T(b)$: fixamos $u \in T_p M$ e calculamos $\langle T(b)(v, w), u \rangle$. Considere J o campo de Jacobi ao longo de γ tal que

$$J(b) = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(b) = \tau_0^b(u).$$

Aplicando o lema de Ambrose temos

$$\langle T(b)(v, w), u \rangle = \langle T(0)(v, w), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) \rangle - \langle T'(0)(v, w), J(0) \rangle.$$

Seja $\bar{c}(t) = c(b - t)$ e seja

$$\begin{cases} \tilde{T}''(s) + R_s(\tilde{T}(s)) = 0; \\ \tilde{T}(0) = 0, \quad \tilde{T}'(0) = id, \end{cases}$$

o fluxo de Jacobi relativo a $\bar{c} : [0, b] \rightarrow M$. É fácil ver que se J é um campo de Jacobi ao longo de c então $\bar{J}(t) = J(b - t)$ é um campo de Jacobi ao longo de \bar{c} com $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{J}(b) = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0)$. Por isso segue-se que

$$\begin{aligned} \langle T(b)(v, w), u \rangle &= \langle (v, o), \tau_b^0(\tilde{T}'(b)(-\tau_0^b(u))) \rangle \\ &= \langle (-A(v), w), \tau_b^0(\tilde{T}(b)(-\tau_0^b(u))) \rangle \end{aligned}$$

e daí concluímos que

$$\begin{aligned}\langle T^*(b)(u), (v, 0) \rangle &= -\langle \tau_b^0(\tilde{T}'(b)(\tau_0^b(u))) + A(p_t(\tau_b^0(\tilde{T}(b)(\tau_0^b(u)))) \rangle, (v, 0) \rangle, \\ \langle T^*(b)(u), (0, w) \rangle &= \langle \tau_b^0(\tilde{T}(b)(\tau_0^b(u))), (0, w) \rangle.\end{aligned}$$

A fórmula anterior mostra também que existe uma correspondência bijetiva, entre o núcleo de $T(b)$ e o núcleo de $T^*(b)$; de fato se $T(b)(w) = 0$ então o campo de Jacobi

$$Y(t) = \tau_0^t(T(t)(w)) = \tau_b^t(\tilde{T}(t)(\bar{w})) \quad (2.1)$$

para um único $\bar{w} \in T_{c(b)}M$. Agora, usando as condições iniciais do fluxo $T(t)$ é fácil ver que

$$T^*(b)(\tau_b^0(\bar{w})) = 0.$$

Vice-versa se \bar{w} está no núcleo de $T^*(b)$ então o campo de Jacobi $\tau_b^t\tilde{T}(t)(\bar{w})$ satisfaz as condições do fluxo $T(t)$ no ponto $c(0)$. Por isso obtemos a fórmula (2.1) para um certo $w \in T_pM$ e como anteriormente prova-se que w pertence ao núcleo de $T(b)$. Lembrando que $\text{Ker}T^*(b) = \overline{\text{Im}T}^\perp$ temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.4. Se $T(b)$ é uma aplicação injetiva então a imagem de $T(b)$ é densa.

Analisemos com mais detalhe o caso onde $\mathbb{H}_o = 0$ e o caso onde $\mathbb{H}_o = T_pM$ e $A = 0$. Indiquemos por f_Δ a solução da equação diferencial ordinária $f''(t) + \Delta(s)f(s) = 0$ com condições $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, quando trata-se do fluxo de Jacobi com $\mathbb{H}_o = 0$ ou com condições $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, quando trata-se do fluxo de Jacobi com $\mathbb{H}_o = T_pM$ e $A = 0$.

Proposição 2.3.5. Assumimos que $\delta(s) \leq \langle R(u, \dot{c}(s))\dot{c}(s), u \rangle \leq \Delta(s)$ ao longo de c . Então

1. no intervalo onde $T(s)$ é invertível temos

$$(\langle T'T^{-1}u, u \rangle)' \leq -(\Delta(s) + \langle T'T^{-1}u, T'T^{-1}u \rangle^2);$$

2. $\|T(s)u\| \geq f_\Delta(s)\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ se $f_\Delta(s)$ é não negativa no intervalo $0 < s \leq s_o$;

3. $\langle T'u, Tu \rangle f_\Delta \geq \langle Tu, Tu \rangle f'_\Delta$, se $f_\Delta(s)$ é não negativa no intervalo $0 < s \leq s_o$;
4. $\langle T'u, Tu \rangle f_\delta \leq \langle Tu, Tu \rangle f'_\delta$, $0 < s \leq s_o$ se $T(s)$ é invertível em $0 < s \leq s_1$ ($s_1 \geq s_o$);
5. se $T(s)$ é invertível em $0 < s \leq s_1$ então

$$\| T(s) \| f_\delta(t) \geq \| T(t) \| f_\delta(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq s_1;$$

6. $\| T(s) \| \leq f_\delta(s) < u, u > \frac{1}{2}, \quad 0 \leq s \leq s_1.$

Demonstração: veja [17]

Os operadores $T(s)$ representam a aplicação exponencial e por isso, é interessante conhecer, sobre hipóteses oportunas, a distribuição dos pontos singulares quando temos limitações sobre a curvatura seccional.

Proposição 2.3.6. Seja

$$\begin{cases} T''(s) + R_s(T(s)) = 0; \\ T(0)(v, w) = (v, o), \quad T'(0)(v, w) = (-A(v), w), \end{cases}$$

o fluxo Jacobi, onde $\mathbb{H}_o = 0$ ou $\mathbb{H}_o = T_p M$ e $A = 0$. Assumimos também que a curvatura seccional $K \leq H$ é limitada por cima. Então:

- (a) caso $\mathbb{H}_o = 0$ o fluxo de Jacobi é um isomorfismo topológico para cada $t \geq 0$, se $H \leq 0$ e no intervalo $0 \leq t < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ se $H > 0$;
- (b) caso $\mathbb{H}_o = T_p M$ e $A = 0$ então o fluxo de Jacobi é um isomorfismo topológico para cada $t \geq 0$, se $H \leq 0$ e no intervalo $0 \leq t < \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$ se $H > 0$.

Demonstração: aplicando a segunda propriedade da proposição anterior, com $\Delta(s) = H$, obtemos que o fluxo é injetivo e a imagem é fechada no intervalo desejado. De outro lado aplicando a proposição (2.3.4) temos que $T(s)$ é também sobrejetor. c.q.d.

Como corolário obtemos uma versão fraca do teorema de Rauch, que provaremos na sua generalidade no capítulo 5.

Teorema 2.3.7. (Rauch fraco) Assuma que ao longo de uma geodésica $c : [0, b] \rightarrow M$ com vetor tangente unitário temos que a curvatura seccional é limitada por baixo e por cima por constantes

$$L \leq K(\dot{c}(t), v) \leq H,$$

para cada t e $v \in T_{c(t)}M$ unitário e ortogonal a $\dot{c}(t)$. Então $d(\exp_p)_{t\dot{c}(0)}$ é um isomorfismo topológico para cada $t \geq 0$, se $H \leq 0$ e no intervalo $0 \leq t < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ se $H > 0$ e, em tal intervalo, temos

$$\frac{f_H(t)}{t} \|v\| \leq \|d(\exp_p)_{t\dot{c}(0)}(v)\| \leq \frac{f_L(t)}{t} \|v\|.$$

Demonstração: aplicar as proposições (2.3.5) e (2.3.6). c.q.d.

Capítulo 3

Variedades Completas: Teorema de Hadamard e Variedades de Curvatura Constante

3.1 Variedades completas: diferenças entre o caso de dimensão finita e infinita

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Nós sabemos que podemos definir uma distância em M e diremos que (M, g) é *completa* se ela é completa como espaço métrico. Nota-se que pelo teorema (1.3.1) existe uma métrica Riemanniana tal que (M, g) seja completo. Por outro lado, podemos introduzir a noção de *geodesicamente completa (em p)* se a aplicação exponencial é definida no espaço tangente inteiro $\forall p \in M$ ($p \in M$). Em dimensão finita geodesicamente completa (em p) é equivalente à variedade ser completa, devido ao teorema de Hopf-Rinow que prova a existência de geodésicas que minimizam a distância entre dois pontos distintos quaisquer. Em dimensão infinita a situação fica mais complicada pois, existem variedades completas onde há dois pontos sem geodésicas minimais; o exemplo a seguir é devido a Grossman ([15]).

Exemplo 3.1.1. Seja $M := \{x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i : x_1^2 + \sum_{i=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{i})^2 x_i^2 = 1\}$

e sejam $p = e_1$, $q = -e_1 \in M$. Nota-se que M é uma subvariedade fechada de l_2 e por isso completa com a métrica induzida por l_2 . Consideramos

$$T : l_2 \longrightarrow l_2, \quad T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = x_1 e_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{i}\right) x_i e_i.$$

T é um isomorfismo linear e $T(M) = S(l_2)$, a esfera unitária em l_2 . Seja $\alpha : [0, 1] \longrightarrow M$ uma curva que liga p e q . A curva $T(\alpha)$ liga p e q também em $S(l_2)$ e é fácil ver que

$$\pi \leq L[T(\alpha)] = \int_0^1 \|T(\dot{\alpha}(t))\| dt < L[\alpha].$$

Por outro lado temos que as curvas, $\gamma_n(t) = \cos t e_1 + \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})} \sin t e_n$ ligam p e q , em M , e $\lim_{n \rightarrow \infty} L[\gamma_n] = \pi$. Logo, $d(p, q) = \pi$. Agora, assumimos que exista uma geodésica minimal c que liga p e q . Então a curva $T(c)$ teria comprimento estritamente menor do que π , o que é absurdo, pois na esfera $d(p, q) = \pi$.

No exemplo de Grossman a aplicação exponencial em p é sobrejetora. Atkin (veja [3]) exibiu uma variedade completa M onde existem dois pontos p, q tal que q não pertence a imagem de \exp_p . Este exemplo mostra que ser geodesicamente completo em um ponto não é equivalente a ser completa; de fato a variedade $M - \{q\}$ não é completa, mas é geodesicamente completa em p . De outro lado, como no caso de dimensão finita, ser completo implica geodesicamente completo. Logo, a classe para estudar propriedades globais é a classe das variedades completas e nessa classe é interessante estudar as variedades que verificam o teorema de Hopf-Rinow.

Definição 3.1.2. Uma variedade (M, g) completa é dita de Hopf-Rinow se dados dois pontos $p, q \in M$ existe pelo menos uma geodésica entre p e q que minimiza a distância.

O artigo de Eliason (veja [13]) prova que as variedades de Sobolev, que contêm as seções de Sobolev dos fibrados vetoriais sobre variedades compactas, são Hopf-Rinow. Em geral, na classe das variedades completas, não temos nenhum critério para garantir a existência de geodésicas minimais. Todavia, Ekeland (veja [12]) provou que o teorema de Hopf-Rinow é genérico no caso completo.

Teorema 3.1.3. (Ekeland) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa como espaço métrico e seja $p \in M$. O conjunto dos pontos $q \in M$ tais que existe uma única geodésica minimal que liga p a q contém um G_δ denso.

Este teorema é uma aplicação do teorema de Baire. Como (M, g) não tem pontos isolados é fácil ver, sempre usando o teorema de Baire, que a cardinalidade dos conjuntos G_δ não pode ser enumerável. O teorema de Ekeland é interessante também no caso de dimensão finita, pois ele afirma que o conjunto chamado de cut-locus é uma união enumerável de subconjuntos fechados com interior vazio.

A priori não temos critérios gerais para garantir a completitude, mas nós desejamos que os espaços de recobrimento de variedades completas sejam completas e também as variedades recobertas por variedades completas sejam variedades completas, no caso em que a aplicação de recobrimento seja uma isometria local. Para provar isso introduziremos primeiramente a noção de curva convergente.

Definição 3.1.4. Uma curva contínua $c : [a, b) \rightarrow M$ é dita convergente se existe um conjunto discreto, enumerável ou finito, D tal que

1. $c : [a, b) - D \rightarrow M$ é de classe C^1 ;

2. $\lim_{t \rightarrow b} \int_a^t \|\dot{c}(t)\| dt$ é finito.

Proposição 3.1.5. Uma variedade Riemanniana (M, g) , conexa, é completa se e somente se cada curva convergente tem imagem relativamente compacta.

Demonstração: se (M, g) é completa é fácil ver que cada curva convergente tem imagem relativamente compacta. Vice-versa assumimos que cada curva convergente tenha imagem relativamente compacta. Nosso objetivo é provar que toda seqüência de Cauchy é convergente e por isso é suficiente provar que toda seqüência de Cauchy admite uma subsequência que converge. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy. Em correspondência de $\epsilon = \frac{1}{2^k}$, existe um $n(k)$ tal que $\forall n, m \geq n(k), \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Podemos supor que $n(k+1) \geq n(k) + 2$ e seja (a_n) uma seqüência tal que

$$\begin{cases} a_1 = 0; \\ a_n > 0, \quad n \geq 2; \\ \sum_1^\infty a_n = 1. \end{cases}$$

Daí segue-se que para cada k inteiro não negativo existe uma curva de classe C^1 , $\gamma_k : [\sum_1^k a_n, \sum_1^{k+1} a_n] \rightarrow M$, que liga $x_{n(k)}$ com $x_{n(k+1)}$ de comprimento

$$L[\gamma_k] \leq d(x_{n(k)}, x_{n(k+1)}) + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Usando as γ_k , definimos $\gamma : [0, 1) \rightarrow M$ como $\gamma(t) = \gamma_k(t)$ no intervalo $t \in [\sum_1^k a_n, \sum_1^{k+1} a_n]$. É fácil ver que γ é uma curva convergente e por isso (x_n) admite uma subsequência que converge. c.q.d.

Corolário 3.1.6. Seja $(M, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ uma aplicação de recobrimento entre variedades Riemannianas. Assumimos também que a aplicação de recobrimento seja uma isometria local. Então M é completa se e somente se N é completa.

Demonstração: assumimos M completa. Seja $\gamma : [a, b) \rightarrow N$ curva convergente. Podemos levantar esta curva e o levantamento $\bar{\gamma} : [a, b) \rightarrow M$ é uma curva convergente também pois, π é uma isometria local. Logo $\bar{\gamma}$ tem imagem relativamente compacta e sendo

$$\gamma([a, b)) \subseteq \pi(\overline{(\bar{\gamma}([a, b))}),$$

temos que a imagem de γ é também relativamente compacta e daí segue-se que N é completa.

Vice-versa assumimos que N seja completa e seja (x_n) seqüência de Cauchy em M . Então $(\pi(x_n) = y_n)$ é de Cauchy também e sendo N completa $y_n \rightarrow y_o$. Como π é uma isometria e uma aplicação de recobrimento, existe um $\epsilon_o > 0$ tal que a bola geodésica em N de y_o de raio $\epsilon \leq \epsilon_o$ é uniformemente recoberta pelas bolas de mesmo raio dos elementos da fibra. Agora usando que (x_n) é Cauchy é fácil ver que (x_n) admite uma subsequência que converge. c.q.d.

Um outro critério de completitude é a próxima proposição e foi o argumento que Grossmann usou em [15] para estender o teorema de Hadamard ao caso de dimensão infinita. Este resultado generaliza o resultado anterior, mas a demonstração que aparece em [23] não é muito clara. A demonstração fica mais clara se usamos o conceito de curva convergente, para provar a completitude, e um argumento do tipo que aparece em [9], p. 383, para completar a prova.

Proposição 3.1.7. Seja $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ um difeomorfismo local de classe C^1 entre variedades Riemannianas. Assumimos que exista uma constante C tal que $\forall m \in M, \|(df)_m(w)\| \geq C \|w\|$. Assumimos também que (M, g) seja completa e que (N, h) seja conexa. Então f é uma aplicação de recobrimento e (N, h) é completa.

Demonstração: veja [23]

3.2 Variedade com curvatura constante e teorema de Hadamard

Nesta seção classificaremos as variedades de curvatura constante completas. Quando queremos classificar devemos especificar em relação a qual grupo de transformações queremos classificar. No nosso caso temos uma estrutura métrica e as transformações que preservam o tensor métrico são chamadas de isometrias.

Definição 3.2.1. Seja $F : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ um difeomorfismo (local). F é chamada de isometria (local) se para cada $p \in M$ temos

$$\langle (dF)_p(X), (dF)_p(Y) \rangle_h = \langle X, Y \rangle_g.$$

Uma isometria é rígida no seguinte sentido.

Lema 3.2.2. Sejam $F, G : M \longrightarrow N$, isometrias locais. Assumimos que existe $p \in M$ tal que

$$F(p) = G(p), \quad (dF)_p = (dG)_p.$$

Assumimos também que M é conexa. Então $F = G$.

Demonstração: seja $S := \{q \in M : F(q) = G(q), (dF)_q = (dG)_q\}$. Nosso objetivo é provar que S é aberto e fechado em M , o conclui a nossa prova, porque M é conexa. Obviamente S é fechado e S é aberto pois, para cada isometria local $H : M \longrightarrow N$ se tomamos $p \in M$ e r não negativo tal que a aplicação exponencial de M em p é um difeomorfismo sobrejetivo de $B_r(o_p)$ em $\mathcal{B}_r(p)$ e o mesmo é verificado para a aplicação exponencial em $H(p)$ de N então

$$H(\exp_p^M(tv)) = \exp_{H(p)}^N(t(dH)_p(v)), \quad \|v\| \leq r.$$

c.q.d.

Como no caso de dimensão finita, nós provaremos que o grupo das isometrias coincide com as transformações que preservam a distância.

Proposição 3.2.3. Seja $F : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ uma aplicação sobrejetiva entre duas variedades Riemannianas. Então F é uma isometria se e somente se $d_g(p, q) = d_h(F(p), F(q))$, para todos $p, q \in M$.

Demonstração: (\Rightarrow) é óbvia.

(\Leftarrow) primeiramente nota-se que F é um homeomorfismo. Seja $p \in M$, $r > 0$ tal que \exp_p^M e $\exp_{F(p)}^N$ são difeomorfismos sobrejetivos respectivamente em $\mathcal{B}_r(p)$ e $\mathcal{B}_r(F(p))$ e seja $X \in T_p M$, $\|X\| = 1$. Então

$$t = d(p, \exp_p^M(tX)) = d(F(p), F(\exp_p^M(tX))), \quad 0 \leq t < r.$$

Isso significa que a curva $t \rightarrow F(\exp_p^M(tX))$ é uma geodésica minimal, então existe um único vetor $h(X) = Y \in T_{F(p)} N$ unitário, tal que

$$F(\exp_p^M(tX)) = \exp_{F(p)}^N(tY).$$

Definimos $\Phi : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ como

$$\Phi(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X = 0 \\ \|X\| h(\frac{X}{\|X\|}) & \text{se } X \neq 0. \end{cases}$$

Nosso objetivo é provar que $(dF)_p = \Phi$ e que Φ é uma isometria entre os espaços tangentes.

Lema 3.2.4. Seja $\Phi : \mathbb{H}_1 \longrightarrow \mathbb{H}_2$ uma aplicação entre espaços de Hilbert que preserva o produto escalar e $\Phi(0) = 0$. Então Φ é linear e contínua.

Demonstração: é fácil ver que

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\lambda X) - \lambda \Phi(X), \Phi(\lambda X) - \lambda \Phi(X) \rangle &= 0, \\ \langle \Phi(X + Y) - \Phi(X) - \Phi(Y), \Phi(X + Y) - \Phi(X) - \Phi(Y) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

e daí concluímos que Φ é linear. A continuidade segue do fato do operador preservar o produto escalar.

Lema 3.2.5. Sejam $X, Y \in T_p M$ unitários. Então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|sX - sY\|}{d(\exp_p(sX), \exp_p(sY))} = 1.$$

Demonstração: seja $r > 0$ tal que $\exp_p : B_r(o_p) \rightarrow \mathcal{B}_r(p)$ é um difeomorfismo sobrejetivo. Como $d(\exp_p)_0 = Id$ então dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \eta \leq r$ tal que

$$1 - \epsilon \leq \|d(\exp_p)_q\| \leq 1 + \epsilon,$$

para cada $q \in B_\eta(o_p)$. Agora sejam $m, a \in \mathcal{B}_{\frac{\eta}{2}}(p)$; nota-se que $d(m, a) < \frac{\eta}{2}$ e para medir esta distância é suficiente considerar as curvas em $\mathcal{B}_\eta(p)$. De fato, seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ que liga m e a e assumimos que tal curva não esteja contida em $\mathcal{B}_\eta(p)$. Como $[0, 1]$ é conexo, existe $t_o, t_1 \in [0, 1]$ tal que $d(p, \gamma(t_o)) \geq \frac{\eta}{2}$ e $d(\gamma(t_1), p) \geq \eta$ e pelo lema de Gauss temos que

$$L[\gamma] \geq \int_{t_o}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \frac{\eta}{2}.$$

Cada curva c com imagem em $\mathcal{B}_\eta(p)$ é imagem de uma curva em $T_p M$; então $c(t) = \exp_p(\xi(t))$ e

$$(1 - \epsilon) \int_0^1 \|\dot{\xi}(t)\|_p dt \leq \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt \leq (1 + \epsilon) \int_0^1 \|\dot{\xi}(t)\|_p dt.$$

Daí concluímos que dado ϵ positivo existe $s_o = \frac{\eta}{4}$ tal que para cada $s < s_o$ temos

$$(1 - \epsilon)(\|sX - sY\|_p) \leq d(m, a) \leq (1 + \epsilon)(\|sX - sY\|_p),$$

que prova o nosso lema.

Sejam $X, Y \in T_p M$ unitários. Então

$$\langle sX - sY, sX - sY \rangle^{\frac{1}{2}} = (2s) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

onde α é o ângulo entre os dois vetores. Indiquemos por α' o ângulo entre $h(X)$ e $h(Y)$. Como F preserva a distância e aplicando o lema anterior temos

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha'}{2} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} d(\exp_{F(p)}^N(sh(X)), \exp_{F(p)}^N(sh(Y))) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} d(\exp_p^M(sX), \exp_p^M(sY)) \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo $\alpha' = \alpha$. Agora por definição de Φ segue-se que

$$\begin{aligned}\langle \Phi(X), \Phi(Y) \rangle &= \langle \|X\| h(\frac{X}{\|X\|}), \|Y\| h(\frac{Y}{\|Y\|}) \rangle \\ &= \|X\| \|Y\| \langle h(\frac{X}{\|X\|}), h(\frac{Y}{\|Y\|}) \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle.\end{aligned}$$

Logo, Φ é uma isometria e $\Phi = (dF)_p$ pois, para cada $\|X\| \leq r$ temos que $(\exp_{F(p)}^N)^{-1} \circ F \circ \exp_p^M(X) = \Phi(X)$. c.q.d.

Um resultado importante para classificar as variedades de curvatura constante é o teorema de Cartan. Este teorema afirma que a métrica é determinada localmente pela curvatura.

Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas modeladas nos espaços de Hilbert $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ respectivamente. Denotamos as conexões de Levi Civita por ∇ e ∇^* de M e N . Seja $I = [0, a]$ um intervalo fechado e sejam $c : I \rightarrow M$ e $c^* : I \rightarrow N$ geodésicas com o mesmo comprimento. Assumimos que \mathbb{H}_1 é isométrico a um subespaço fechado de \mathbb{H}_2 e escolhemos uma isometria

$$i_o : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c^*(0)}N,$$

tal que $i_o(\dot{c}(0)) = \dot{c}^*(0)$. Denotamos por $\chi_{t_1}^{t_2}$ o transporte paralelo ao longo de c^* entre os pontos $c^*(t_1)$ e $c^*(t_2)$. Definimos

$$\begin{aligned}T_{c(t)}M &\xrightarrow{i_t} T_{c^*(t)}N, \\ i_t &= \chi_0^t \circ i_o \circ \tau_t^0.\end{aligned}$$

Proposição 3.2.6.

1. cada i_t é uma isometria;
2. Se $Y(t)$ é um campo ao longo de c então $Y^*(t) = i_t(Y(t))$ é um campo ao longo de c^* . Além disso, $\nabla^* \circ i_t = i_t \circ \nabla$.

Demonstração:

1. obvia;

2. seja $t_o \in [0, a]$ e seja $Z \in T_{c^*(t_o)}N$. Denotamos por $Z^*(t)$ o transporte paralelo da componente de Z no subespaço $\chi_0^{t_o}(i_o(T_{c(0)}M))$, ao longo de c^* . Então

$$\begin{aligned} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^* i_{t_o} Y(t_o), Z) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_o} h(i_t Y(t), Z^*(t)); \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_o} g(Y(t), i_t^{-1}(Z^*(t))); \\ &= g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t), i_{t_o}^{-1}(Z^*(t_o))); \\ &= h(i_{t_o} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t_o), Z). \end{aligned}$$

Teorema 3.2.7. (Cartan) Sejam M e M^* variedades Riemannianas modeladas sobre o mesmo espaço de Hilbert \mathbb{H} . Sejam $p \in M$, $p^* \in M^*$ e seja $\eta > 0$ tal que $B_\eta(o_p)$ é uma vizinhança normal de M e a aplicação \exp_{p^*} é não singular na bola $B_\eta(o_{p^*})$. Seja $i_o : T_p M \longrightarrow T_{p^*} M^*$ uma isometria entre os espaços tangentes. Então a aplicação

$$\Phi : \exp_{p^*} \circ i_o \circ \exp_p^{-1} : B_\eta(p) \longrightarrow B_\eta(p^*)$$

é de classe C^∞ e leva geodésicas radiais em geodésicas radiais. Além disso, se para cada geodésica radial $c(t)$ e a sua imagem $c^*(t) = \Phi(c(t))$ temos

$$i_t \circ R_{\dot{c}(t)} = R_{\dot{c}^*(t)} \circ i_t,$$

então Φ é uma isometria local.

Demonstração: seja $u \in B_\eta(o_p)$. Por definição de Φ temos

$$\Phi(\exp_p(tu)) = \exp_{p^*}(t(i_o u))$$

e daí segue-se que Φ manda geodésicas radiais em geodésicas radiais. Sendo os campos de Jacobi campos variacionais de variações geodésicas, temos que o diferencial manda campos de Jacobi com condição inicial nula em campos de Jacobi com a mesma condição inicial. Se $i_t \circ R_{\dot{c}(t)} = R_{\dot{c}^*(t)}^* \circ i_t$, aplicando a proposição (3.2.6) é fácil ver que se $Y(t)$ é um campo de Jacobi com $Y(0) = 0$ então $i_t(Y(t))$ é um campo de Jacobi ao longo da geodésica radial respectiva. Além disso, sendo i_t uma isometria o diferencial de Φ é uma isometria. c.q.d.

Teorema 3.2.8. Seja (M, g) uma variedade completa simplesmente conexa, modelada em \mathbb{H} . Assumimos que a curvatura seccional é constante e igual K_o . Então M é isométrica a:

1. $B_\rho(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : \|x\| \leq \rho\}$ com métrica $g(u)(X, Y) = \frac{4\langle X, Y \rangle}{(1 - \frac{\langle u, u \rangle}{\rho^2})^2}$ se $K_o = -\frac{1}{\rho^2}$;
2. $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se $K_o = 0$;
3. $S_\rho(\mathbb{H} \times \mathbb{R})$ com a métrica produto induzida se $K_o = \frac{1}{\rho^2}$.

Demonstração: caso $K_o \leq 0$:

aplicando o teorema de Rauch fraco temos que para cada $p \in M$ a diferencial de \exp_p é um isomorfismo topológico e

$$\|d(\exp_p)_w(v)\| \geq \|w\|,$$

$\forall v, w \in T_p M$. Sejam $p \in M$ e $N \in M^{K_o}$, a variedade de curvatura constante K_o como assumido. A aplicação $\exp_p \circ i_o \circ \exp_N^{-1}$, onde i_o é uma isometria entre $T_p M$ e $T_N M^{K_o}$, é uma isometria local, pelo teorema de Cartan, e aplicando a proposição (3.1.7) temos que tal aplicação é uma aplicação de recobrimento. Logo, M é difeomorfo, sendo simplesmente conexo, a M^{K_o} .

caso $K_o > 0$:

fixamos $p \in M$ e $N = (0, \rho) \in S_\rho(T_p M \times \mathbb{R})$ e seja i_o uma isometria linear entre os espaços tangentes em N e em p . Definimos

$$f = \exp_p \circ i_o \circ \exp_N^{-1} : S_\rho(T_p M \times \mathbb{R}) - \{-N\} \longrightarrow M.$$

Pelo teorema de Cartan f é uma isometria local. Escolhemos agora $N' \neq N$ em $S_\rho(T_p M \times \mathbb{R})$ e $q \neq p$ em M com $f(N') = q$. Escolhemos também $i = d(f)_{-N}$ e definimos

$$f' = \exp_{N'} \circ i \circ \exp_q^{-1} : S_\rho(T_p M \times \mathbb{R}) - \{-N'\} \longrightarrow M,$$

que é uma isometria local. Observa-se que $W = S_\rho(T_p M \times \mathbb{R}) - \{-N, -N'\}$ é conexo, $N' \in W$ e

$$f(N') = f'(N'), \quad (df)_{N'} = (df')_{N'}.$$

Segue-se, pelo lema (3.2.2) que $f = f'$ em W . Por conseguinte, podemos definir uma aplicação

$$g(r) = \begin{cases} f(r) & \text{se } r \in S_\rho(T_p M \times \mathbb{R}) - \{-N\} \\ f'(r) & \text{se } r \in S_\rho(T_p M \times \mathbb{R}) - \{-N'\} \end{cases}$$

que é obviamente uma isometria local. Logo, aplicando a proposição (3.1.7), g é uma aplicação de recobrimento e sendo M simplesmente conexa, g é uma isometria. c.q.d.

Concluiremos esta seção enunciando o teorema de Hadamard. Tal teorema foi provado por Grossman ([15]) na sua tese de doutorado. Este resultado nos diz também que as variedades simplesmente conexas com curvatura seccional não positiva são Hopf-Rinow.

Teorema 3.2.9. Seja (M, g) uma variedade com curvatura seccional $K \leq 0$ e seja $p \in M$. Então a aplicação exponencial \exp_p é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração: aplicando o teorema de Rauch fraco temos que para cada $v, w \in T_p M$ o $d(\exp_p)_v$ é um isomorfismo linear e

$$\| d(\exp_p)_v(w) \| \geq \| w \| .$$

Aplicando a proposição (3.1.7) provamos o teorema. c.q.d.

3.3 Formas espaciais

Um conjunto G parcialmente ordenado, isto é., dotado de uma relação de ordem (\leq) transitiva e reflexiva, é dito dirigido se para cada $\alpha, \beta \in G$ existe $\eta \in G$ tal que $\alpha \leq \eta$ e $\beta \leq \eta$. Uma rede em um espaço vetorial X é uma aplicação $\Phi : G \longrightarrow X$ onde G é um conjunto dirigido. Exatamente como no caso de seqüências podemos definir o conceito de convergência de rede: uma rede $\Phi : G \longrightarrow X$ converge para x_o se para cada vizinhança V de x_o existe um $\delta \in G$ tal que para cada $\alpha \geq \delta$ temos $\Phi(\alpha) \in V$. Agora, analisemos o caso que $X = \mathbb{H}$ é um espaço de Banach e seja $f : G \longrightarrow \mathbb{H}$ uma aplicação. Podemos associar a f a rede das somas finitas, isto é, como conjunto dirigido Λ , consideremos os conjuntos finitos de G com a relação de ordem

$$F \leq J \Leftrightarrow F \subseteq J,$$

e a rede $\Phi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{H}$ é definida como

$$\Phi(F) = \sum_{i \in F} f(i).$$

Se a rede converge, e em tal caso é fácil ver que o limite é único, diremos com abuso de notação que a série $\sum_{g \in G} f(g)$ converge e que f é somável. Explicitamente uma série $\sum_{g \in G} f(g)$ converge a L_o se e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito $J_o \subset G$ tal que, para cada conjunto finito $J \supseteq J_o$ temos

$$\left\| \sum_{g \in J} f(g) - L_o \right\| \leq \epsilon.$$

Consideremos o espaço

$$l_2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{g \in G} [x(g)]^2 < \infty\}.$$

É fácil verificar que

1. $N = \{g \in G : x(g) \neq 0\}$ é enumerável;
2. $\sum_{g \in G} [x(g)]^2 = \sup\{\sum_{g \in F} [x(g)]^2 : F \text{ é um subconjunto finito de } G\}.$

A segunda propriedade nos diz que se a série $\sum_{g \in G} [x(g)]^2$ converge, então para qualquer bijeção $\phi : G \rightarrow G$ temos que

$$\sum_{g \in G} [x(g)]^2 = \sum_{g \in G} [x(\phi(g))]^2.$$

Na realidade esta propriedade é verdadeira para funções somáveis quaisquer. O próximo resultado é bem conhecido em análise funcional.

Proposição 3.3.1. $l_2(G)$ é um espaço de Hilbert em relação ao produto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{g \in G} x(g)y(g).$$

Além disso uma base Hilbertiana é dada pelas funções $e_h(g) = \delta_{hg}$, $h, g \in G$.

Como as séries de termos positivos são incondicionalmente convergentes, no caso que G seja enumerável, obtemos o espaço de Hilbert separável l_2 clássico. Assumimos agora que G seja um grupo. Denotamos por $R_g : G \rightarrow G$ a translação à direita por g , isto é $R_g(h) = gh$. Como R_g é bijetiva então se $x \in l_2(G)$ então $x \circ R_g$ está também em $l_2(G)$ e tem a mesma norma. Além disso, temos o seguinte resultado cuja prova é simples.

Lema 3.3.2. A aplicação $x \rightarrow x \circ R_g$ é uma isometria sobrejetora de $l_2(G)$ em si mesmo, e a aplicação

$$\mu : G \times l_2(G) \rightarrow l_2(G) \quad \mu(g, x) = x \circ R_g$$

é uma ação efetiva (isto é, nenhum elemento distinto da identidade fixa todo o espaço) de G em $l_2(G)$ por isometrias.

Em particular, μ induz uma ação por isometrias sobre a esfera unitária $S(l_2(G)) = \{x \in l_2(G) : \|x\| = 1\}$. Como é usual, tendo fixada a ação μ , escreveremos gx em lugar de $\mu(g, x)$.

Recordamos que uma ação de um grupo G num espaço topológico X é dita *propriamente descontínua* se valem as seguintes condições:

- a ação é livre;
- para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x com $gU \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$ diferente da unidade;
- para todos $x, y \in X$ com $y \notin Gx$ existem vizinhanças abertas U, V de x, y , respectivamente com $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$.

Se G é uma ação propriamente descontínua num espaço topológico X então o quociente X/G é Hausdorff e a aplicação quociente $X \rightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento.

Teorema 3.3.3. Se G não possui elementos de ordem finita, a ação induzida em $S(l_2(G))$ é propriamente descontínua. Além disso a projeção canônica $S(l_2(G)) \rightarrow S(l_2(G))/G$ é uma isometria local e uma aplicação de recobrimento. Por isso $S(l_2(G))/G$ possui uma métrica completa de curvatura constante 1.

Demonstração: dividimos a demonstração em três simples afirmações.

Afirmção 1: a ação é livre.

Se $gx = x$, também temos $g^n x = x$ e daí segue que para todo $h \in G$ e todo $n \in \mathbb{Z}$ temos $x(h) = x(hg^n)$. Os elementos $\{hg^n, n \in \mathbb{Z}\}$ são distintos pois, g tem ordem infinita. Portanto, se $x \neq 0$, existe $h \in G$ tal que $x(h) \neq 0$ e daí segue que $\sum_{n=1}^{\infty} [x(hg^n)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [x(h)]^2 = \infty$, o que é absurdo pela propriedade (2).

Afirmção 2: se a ação não for propriamente descontínua, existiria uma seqüência de elementos distintos $(g_n) \subseteq G$ e $x \in S(l_2(G))$ tal que $g_n x \rightarrow y$, para algum y .

Como a ação de G é por isometrias, é fácil ver que a ação é propriamente descontínua se e somente se a órbita de cada ponto for discreta e fechada. Mas isso significa justamente que nenhuma seqüência de elementos distintos da órbita converge.

Afirmção 3: não existe nenhuma seqüência $(g_n) \subseteq G$ de elementos distintos e $x \in S(l_2(G))$ tal que $g_n x$ converge para algum $y \in S(l_2(G))$.

De fato, seja g_n uma seqüência de elementos distintos de G tais que $g_n x \rightarrow y$. Para cada $\alpha \in G$ temos

$$y(\alpha) = \langle y, e_\alpha \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n x, e_\alpha \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} x(\alpha g_n).$$

Todos os elementos αg_n são distintos e $\sum_{n=1}^{\infty} [x(\alpha g_n)]^2 \leq 1$, pois o vetor $x \in S(l_2(G))$. Portanto,

$$y(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(\alpha g_n) = 0, \quad \forall \alpha \in G$$

e isso implica $y = 0$, que é absurdo.

Agora, como usualmente $S(l_2(G))/G$ admite uma estrutura de variedade diferenciável tal que a projeção canônica seja uma aplicação de recobrimento. Por outro lado, sendo G um grupo de isometrias, $S(l_2(G))$ induz uma métrica em $S(l_2(G))/G$ tal que a projeção é uma isometria local. Logo, aplicando o corolário (3.1.6) temos que $S(l_2(G))/G$ é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante unitária. c.q.d.

Em dimensão infinita a esfera é difeomorfa ao espaço de Hilbert ([4]); em particular a esfera é simplesmente conexa. Por isso demonstramos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.4. Dado um grupo G sem torção existe uma variedade completa com curvatura seccional constante 1 com grupo fundamental G .

Este fato está em contraste com o caso de dimensão finita onde só os grupos finitos podem atuar na esfera como grupo de isometrias sem pontos fixos. Por exemplo, no caso l_2 o resultado anterior prova que os racionais atuam na esfera de modo propriamente descontínuo. outra observação interessante é que se a variedade é modelada em um espaço de Hilbert separável então

o grupo fundamental tem cardinalidade finita ou enumerável. De fato, pelo teorema de Sierpinski ([34]) um espaço métrico conexo localmente separável é separável. Daí o recobrimento universal de uma variedade Riemanniana, modelada em um espaço separável, é métrico, “pullback” da métrica de baixo, e separável. Logo, a cardinalidade da fibra, sendo um conjunto discreto, tem cardinalidade finita ou enumerável. Agora, pelo resultado clássico de topologia algébrica a cardinalidade da fibra é a cardinalidade do grupo fundamental. Um outro fato importante é que se a cardinalidade do espaço de Hilbert aumenta, os grupos que podem atuar, aumentam também.

Teorema 3.3.5. Seja G um subgrupo de isometrias de \mathbb{R}^n ou de l_2 que atua de modo propriamente descontínuo na esfera unitária. Então G opera de modo propriamente descontínuo na esfera unitária de qualquer espaço de Hilbert \mathbb{H} de dimensão infinita.

Demonstração: primeiro provaremos que se $G \subset O(n)$ então ele atua em l_2 com as mesmas propriedades. Seja $g \in G$. Definimos

$$T_g : l_2 \longrightarrow l_2, \quad T_g\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} g\left(\sum_{j=n(i-1)}^{ni-1} x_{j+1} e_{j+1}\right),$$

com as identificações, $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T_i} l_2$, $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \sum_{j=n(i-1)}^{ni-1} x_{j+1} e_{j+1}$. Claramente T_g é uma isometria, a aplicação $g \rightarrow T_g$ é um homeomorfismo e $T_g x = x$ implica $x = 0$. Portanto, G atua em $S(l_2)$ sem pontos fixos e sendo finito, de modo propriamente descontínuo. O caso geral é similar; pela teoria clássica de análise funcional, qualquer espaço de Hilbert é isométrico a $l_2(D)$ onde D é a cardinalidade da base e

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j, \quad D_i \cong \mathbb{N},$$

veja [22] p. 678. Seja $f \in l_2(D)$. Definimos

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D_i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmção: $f = \sum_{i \in I} f_i$.

Como $f \in l_2(D)$, pela propriedade 2, $f_i \in l_2(D)$. Uma consequência fácil da propriedade 2 é que dado $\epsilon > 0$ existe $J(\epsilon) \subseteq D$ finito tal que para cada

$J \subseteq D - J(\epsilon)$ finito temos $\sum_{d \in J} [f(d)]^2 \leq \epsilon$. Seja $\epsilon > 0$ e seja $J(\epsilon)$ como anteriormente. Escolhemos $I_o := \{i \in I : D_i \cap J(\epsilon) \neq \emptyset\}$ e calculemos, para $I \supseteq I_o$ finito,

$$\begin{aligned} \|\sum_{i \in I} f_i - f\|^2 &= \sup\{\sum_{g \in J} [f_i(g) - f(g)]^2, J \text{ finito}\} \\ &= \sup\{\sum_{g \in J - J(\epsilon)} [f(g)]^2, J \text{ finito}\} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Logo a série $\sum_{i \in I} f_i$ converge para f . Usando a notação anterior é fácil ver que $\alpha f + \beta g = \sum_{i \in I} \alpha f_i + \beta g_i$ e se $f = \sum_{i \in I} f'_i$, onde $f'_i = 0$ fora de D_i então $f_i = f'_i$, pois $f(x) = f'_i(x)$, se $x \in D_i$. Além disso, como para $J \subset I$ finito temos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \|f_i\|^2 &= \sum_{i \in J} \sup(\sum_{g_i \in J_i} [f_i(g_i)]^2) \quad J_i \subseteq D_i \text{ finito} \\ &= \sup(\sum_{g \in \cup J_i} [f(g)]^2) \end{aligned}$$

segue-se que $\sum_{i \in I} \|f_i\|^2 = \|f\|^2$. Por isso, se nós definirmos

$$T_g : l_2(D) \longrightarrow l_2(D), \quad T_g(\sum_{i \in I} f_i) = \sum_{i \in I} g f_i,$$

identificando $l_2 \xrightarrow{T_i} l_2(D)$ como

$$f \longrightarrow \begin{cases} f \circ s_i(x) & \text{se } x \in D_i; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde s_i é uma bijeção entre D_i e \mathbb{N} , a aplicação $g \rightarrow T_g$ é um homomorfismo injetivo no grupo das isometrias de $l_2(G)$. Se G não atuasse de modo propriamente descontínuo existiria uma sequência g_n e um elemento $x = \sum_{i \in I} x_i \neq 0$ tal que

$$g_n x = \sum_{i \in I} g_n x_i \rightarrow x = \sum_{i \in I} x_i.$$

Logo $g_n x_i \rightarrow x_i$ e por isso $x_i = 0$ para cada i , que é absurdo. c.q.d.

Queremos estudar as condições afim de que os elementos de ordem finita possam atuar sem pontos fixos, exceto a origem, pois, queremos estender o teorema (3.3.3) para uma classe de grupos que admitem elementos de torção. Daqui para frente quando nós dissermos que o operador linear T não tem pontos fixos, significará que a origem é seu único ponto fixo.

Seja T uma aplicação de um espaço de Hilbert \mathbb{H} de ordem finita m , isto é, $T^m = Id$ e m é o menor inteiro positivo que satisfaz esta propriedade. Afim que T não tenha pontos fixos T deve ser solução da equação

$$T^{m-1} + T^{m-2} + \cdots + T + Id = 0$$

pois, caso contrário temos pontos fixos. Em particular, no caso que $m = 2$ o operador T deve ser necessariamente o operador $-Id$, que comuta com todos os operadores lineares. Esta simples observação já mostra algumas restrições.

Proposição 3.3.6. Se um grupo G atua como grupo linear sem pontos fixos, exceto a origem, em um espaço de Hilbert \mathbb{H} , de dimensão finita ou infinita, então G possui no máximo um elemento de ordem dois e este elemento deve pertencer ao centro.

Exemplo 3.3.7. Os grupos $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $S_3 = \langle \phi, \psi; \phi^2 = \psi^3 = 1, \phi\psi = \psi^2\phi \rangle$ (grupo simétrico), $D_8 = \langle \sigma, \tau; \sigma^4 = \tau^2, \tau\sigma\tau = \sigma^3 \rangle$ (grupo diedral), não podem atuar linearmente sem pontos fixos.

Para entender de modo melhor a situação é conveniente trabalhar com espaços de Hilbert complexos. Isso não é restritivo pois, se T é uma isometria de um espaço de Hilbert real \mathbb{H} , a sua complexificação $T^{\mathbb{C}}$ é uma isometria do complexificado $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$. Além disso, T não tem pontos fixos se e somente se $T^{\mathbb{C}}$ não tem pontos fixos.

Seja agora T um operador linear de \mathbb{H} de ordem n e tal que T e as suas potências não tenham pontos fixos. Seja $\mathbb{C}[z]$ o anel dos polinômios com coeficientes em \mathbb{C} . Temos então um homomorfismo de anéis

$$\theta_T : \mathbb{C}[z] \rightarrow B(\mathbb{H}, \mathbb{H}), \quad \theta(f) = f(T).$$

Sendo $\mathbb{C}[z]$ um anel de ideais principais, $\text{Ker}\theta_T$ é gerado por um polinômio que podemos assumir mônico, $p_T \in \mathbb{C}[z]$, chamado *polinômio mínimo* de T . Como o operador linear T tem ordem finita então o polinômio mínimo de T , $p_T = (z - \xi_1) \cdots (z - \xi_m)$, onde os ξ_i são raízes da unidade. Em correspondência temos uma decomposição

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{H}_m$$

em subespaços T -invariantes, com

- $\mathbb{H}_i = \text{Ker}(T - \xi_i Id)$;

- $p_{T|_{\mathbb{H}_i}} = (z - \xi_i).$

A prova é a mesma do caso de dimensão finita; por exemplo veja [24]. Como os subespaços \mathbb{H}_i são T -invariantes um vetor $x = x_1 + \cdots + x_m$ é ponto fixo de T^k , $1 \leq k \leq n$, se e somente se $T^k(x_i) = x_i$. Em cada subespaço \mathbb{H}_i o operador T atua como multiplicação por ξ_i ; então se ξ_i não fosse raiz primitiva n -ésima da unidade alguma potência de T teria pontos fixos. Vice-versa, se p_T só tem raízes primitivas n -ésimas da unidade, os operadores T, \dots, T^{n-1} não têm pontos fixos pois, não têm pontos fixos em cada subespaços \mathbb{H}_i . Enfim provamos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.8. Seja $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ um operador linear de ordem finito n de um espaço de Hilbert de dimensão finita ou infinita sobre o corpo \mathbb{C} ou \mathbb{R} . Uma condição necessária e suficiente afim de que T, \dots, T^{n-1} não tenham pontos fixos é que

$$\Phi_n(T) = 0$$

onde $\Phi_n(t)$ é o n -ésimo polinômio ciclotômico.

Agora seja $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ um operador de ordem n e seja $L : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ um operador de ordem m . Assumimos que os dois operadores comutam e que existe p primo que divide m e n . Indicamos por $T_1 = T^{\frac{n}{p}}$ e por $L_1 = L^{\frac{m}{p}}$; obviamente os dois operadores comutam e têm a mesma ordem. Em relação a T_1 temos uma decomposição

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{H}_n$$

e como L_1 comuta com T_1 os \mathbb{H}_i são L_1 -invariantes. Localizando o estudo no primeiro subespaço; em relação a L_1 temos:

$$\mathbb{H}_1 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

O operador $T_1|_{\mathbb{H}_1} = \xi_1$, onde ξ_1 é raiz p -ésima primitiva, e o operador $L_1|_{V_1} = \xi_1^k$; por isso $T_1^{p-k} \circ L_1|_{V_1} = Id$. Esta simples observação permite encontrar uma outra obstrução afim de que um grupo possa atuar sem pontos fixos como grupo linear.

Proposição 3.3.9. Afim que um grupo G atue como grupo linear sem pontos fixos, exceto a origem, é necessário que para cada elemento g de ordem finita e para cada m no centralizador de g , de ordem finita, ou uma potência de m é igual a uma potência de g ou $MDC(o(m), o(g)) = 1$.

O resultado anterior prova que os grupos que contêm subgrupos do tipo

$$\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$$

com $MDC(n, m) \neq 1$ não podem atuar sem pontos fixos. Nosso objetivo é provar que os grupos abelianos finitamente gerados, cuja parte de torção não apresenta subgrupos da forma anterior, atuam de modo propriamente descontínuo, como grupo de isometria em qualquer espaço de Hilbert de dimensão infinita. Anteriormente provamos que cada grupo que atua em dimensão finita atua também no caso de dimensão infinita. Todavia estas ações, a priori, não comutam com aquelas que construímos para os grupos sem torção. Por isso queremos construir uma ação explícita para os grupos de torção, para depois provar o resultado principal desta seção. Agora, consideramos os grupos abelianos finitos do tipo

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{\alpha_m}}$$

com $p_1 < \dots < p_m$. Escolhemos $\xi_1 \dots \xi_m$ raízes $p_i^{\alpha_i}$ -ésima primitivas da unidade e $\theta_i = \arg(\xi_i)$. Em geral, dados $\theta \in \mathbb{R}$ definimos

$$T_\theta : \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \quad T_\theta(x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y).$$

É fácil ver que

1. T_θ é uma isometria sobrejetora;
2. $\forall \theta, \alpha \in \mathbb{R}, T_\theta \circ T_\alpha = T_\alpha \circ T_\theta = T_{\theta+\alpha}$;
3. T_θ tem pontos fixos se e somente se $\theta = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Os operadores T_{θ_i} têm ordem $p_i^{\alpha_i}$ e as potências não triviais não tem pontos fixos. Usando as raízes ξ_i podemos definir em $\mathbb{H}^\mathbb{C}$ os operadores $v \rightarrow \xi_i v$, que indicaremos por ξ_i , e fixados s_1, \dots, s_m inteiros positivos é fácil ver que $\forall (x, y) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ temos

$$\prod_{i=1}^m \xi_i^{s_i}(x + iy) = \pi_1\left(\prod_{i=1}^m T_{\theta_i}^{s_i}(x, y)\right) + i(\pi_2\left(\prod_{i=1}^m T_{\theta_i}^{s_i}(x, y)\right)), \quad (3.1)$$

onde π_1 e π_2 são as projeções sobre o primeiro e segundo fator do espaço de Hilbert $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Provaremos que os operadores T_{θ_i} representam o grupo G

como grupo de isometrias sem pontos fixos. Primeiramente provaremos que a soma é direta. Assumimos que existem $s_1 \dots s_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T_{\theta_i}^{s_i} = \prod_{j \neq i} T_{\theta_j}^{s_j}.$$

Pela fórmula (3.1) temos

$$\xi_i^{s_i} = \prod_{j \neq i} \xi_j^{s_j}$$

e daí segue-se que $\xi_i^{s_i}$ é raiz $\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$ -ésima da unidade. Como os p_i são distintos, lembrando que se ξ é uma raiz n -ésima e m -ésima então ξ é $MDC(m, n)$ -ésima, concluímos que $\xi_i^{s_i} = 1$. Falta provar que os operadores

$$\prod_{i=1}^m T_{\theta_i}^{s_i}$$

não têm pontos fixos. Caso contrário, aplicando a fórmula (3.1), segue-se que

$$\prod_{i=1}^m \xi_i^{s_i} = 1$$

e daí temos que cada $\xi_i^{s_i}$ é raiz $\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$ -ésima da unidade. Logo $\xi_i^{s_i} = 1$ para cada $1 \leq i \leq m$.

Finalmente podemos provar o resultado principal usando a ação que construímos para os elementos de torção.

Teorema 3.3.10. Seja $H \cong G \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{\alpha_m}}$, onde G é um grupo sem torção e p_i são primos distintos. Então H atua como grupo de isometrias de modo propriamente descontínuo na esfera unitária de $l_2(G)$.

Demonstração: nosso objetivo é representar H como subgrupo de isometrias do espaço de Hilbert $l_2(G) \oplus l_2(G)$ que é isométrico a $l_2(G)$. Os elementos $g \in G$ atuam em $l_2(G) \oplus l_2(G)$, como $g \oplus g$ e é fácil ver que tal ação verifica as mesmas propriedades da ação de G em $l_2(G)$. Cada elemento de torção, que indicaremos por A , atua como anteriormente. A demonstração se divide em três passos:

1. $G \cap A = e$.

Se $\prod_{i=1}^n T_{\theta_i}^{s_i} = T_\theta = g_o$, onde $\theta = \theta_1 s_1 + \dots + \theta_n s_n$, então

$$g_o(e_e, e_e) = (e_{g_o^{-1}}, e_{g_o^{-1}}) = (e_e(\cos \theta - \sin \theta), e_e(\cos \theta + \sin \theta)).$$

Logo $g_o = e$ e $\theta = 2\pi k$;

2. $\forall g \in G$ e $\forall a \in A$, $ag = ga$.

É suficiente provar que o operador T_θ comuta com g , para cada $g \in G$ e para cada $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &g(T_\theta((\sum_{h \in G} x_h e_h, \sum_{h \in G} y_h e_h))) = \\ &g(\sum_{h \in G} (x_h \cos \theta - y_h \sin \theta) e_h, \sum_{h \in G} (x_h \sin \theta + y_h \cos \theta) e_h) = \\ &(\sum_{h \in G} (x_h \cos \theta - y_h \sin \theta) e_{hg^{-1}}, \sum_{h \in G} (x_h \sin \theta + y_h \cos \theta) e_{hg^{-1}}) = \\ &T_\theta((\sum_{h \in G} x_h e_{hg^{-1}}, \sum_{h \in G} y_h e_{hg^{-1}})) = \\ &T_\theta(g(\sum_{h \in G} x_h e_h, \sum_{h \in G} y_h e_h)). \end{aligned}$$

3. ag não tem pontos fixos e a ação é propriamente descontínua.

Se

$$ag(\sum_{h \in G} x_h e_h, \sum_{h \in G} y_h e_h) = (\sum_{h \in G} x_h e_h, \sum_{h \in G} y_h e_h)$$

então

$$\sum_{h \in G} (x_h \cos \theta - y_h \sin \theta) e_{hg^{-1}} = \sum_{h \in G} x_h e_h$$

e

$$\sum_{h \in G} (x_h \cos \theta + y_h \sin \theta) e_{hg^{-1}} = \sum_{h \in G} y_h e_h.$$

As igualdades anteriores mostram que para cada $\alpha \in G$ temos

$$x_\alpha \cos \theta + y_\alpha \cos \theta = y_{\alpha g^{-1}}; \quad (1)$$

$$x_\alpha \cos \theta - y_\alpha \cos \theta = x_{\alpha g^{-1}}. \quad (2)$$

Se o elemento fixado é diferente do vetor nulo existe $\alpha \in G$ tal que $x_\alpha \neq 0$ ou $y_\alpha \neq 0$. Aplicando (1) e (2) recursivamente, obtemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{\alpha g^{-n}}|^2 + |y_{\alpha g^{-n}}|^2 = |x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2.$$

Por isso temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{\alpha g^{-n}}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_{\alpha g^{-n}}|^2 = \infty$$

que é absurdo, pois as duas séries são convergentes. Para completar devemos provar que a ação é propriamente descontínua. Por isso é suficiente provar que para cada seqüência de elementos distintos $g_n a_n$ e para cada elemento $x \neq 0$, a seqüência $g_n a_n x$ não converge. Caso contrário, sendo A um grupo finito podemos escolher uma subsequência tal que $a_{n(k)} = a_o$ e daí teremos que $g_{n(k)}(a_o x)$ converge em contradição com o fato de que G atua de modo propriamente descontínuo na esfera unitária de $l_2(G) \oplus l_2(G)$. c.q.d.

Como corolário do teorema anterior e do corolário (3.3.6), temos os seguintes resultados.

Corolário 3.3.11. Todo grupo abeliano G finitamente gerado com torção do tipo

$$\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{a_m}},$$

sendo p_i primos distintos, atua, como grupo de isometrias, de modo propriamente descontínuo na esfera unitária de qualquer espaço de Hilbert. Por isso, existem variedades de Hilbert completas com curvatura constante unitária, cujo grupo fundamental é G .

Capítulo 4

Variações de Energia e do Comprimento

4.1 Primeira e segunda fórmulas de variações

Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana e seja $c : [a, b] \rightarrow M$ uma curva de classe C^p por partes. Definimos Comprimento e a Energia da curva c como

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt,$$
$$E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$L^2(c) \leq 2(b - a)E(c)$$

onde a igualdade é verificada se e somente se o vetor tangente tem módulo constante. Nota-se que o funcional Energia não é invariante para reparametrizações ao contrário do funcional Comprimento. Nós estamos interessados em minimizar estes funcionais e por isso nesta seção consideraremos curvas com particulares condições ao bordo. Seja B uma subvariedade fechada de $M \times M$ e denotamos por

$$C_B([a, b]) := \{c : [a, b] \rightarrow M : c \text{ é } C^\infty \text{ por partes com } (c(a), c(b)) \in B\}$$

Lembramos ainda que, como no caso de dimensão finita, podemos introduzir a noção de imersão isométrica, fibrado normal, conexão normal, operadores de Weingarten, e obter as equações de Gauss, Codazzi e Ricci (veja [18]).

Definição 4.1.1. Seja $\gamma \in C_B([a, b])$. Uma variação C^∞ por partes de uma curva γ é uma aplicação contínua

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$$

tal que

1. $\alpha(0, t) = \gamma(t)$;
2. existe uma partição $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ tal que a aplicação $\alpha|_{(-\epsilon, \epsilon) \times (t_{i-1}, t_i)}$ é C^∞ para cada $1 \leq i \leq n$;
3. $\alpha(s, \cdot) \in C_B([a, b])$;

Indicamos por

$$T_c C_B([a, b]) := \{X \in \mathcal{H}(c^*(TM)) \text{ } C^\infty \text{ por partes : } (X(a), X(b)) \in T_{(c(a), c(b))} B\}.$$

Lema 4.1.2. Para cada $X \in T_c C_B([a, b])$ existe uma variação α de c tal que $X(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$.

Demonstração: veja [33]

Proposição 4.1.3. Sejam $X \in T_c C_B([a, b])$, α uma variação de c relativa a X e seja $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\alpha|_{(-\epsilon, \epsilon) \times (t_{i-1}, t_i)}$ é C^∞ . Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(\alpha(s, \cdot)) &= - \int_a^b \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c}(t), X(t) \rangle dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \langle X(t_i), \dot{c}(t_{i-o}) - \dot{c}(t_{i+o}) \rangle \\ &+ \langle X(b), \dot{c}(b) \rangle - \langle X(a), \dot{c}(a) \rangle; \\ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\alpha(s, \cdot)) &= - \int_a^b \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}, X(t) \rangle dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \langle X(t_i), \frac{\dot{c}(t_{i-o})}{\|\dot{c}(t_{i-o})\|} - \frac{\dot{c}(t_{i+o})}{\|\dot{c}(t_{i+o})\|} \rangle \\ &+ \langle X(b), \frac{\dot{c}(b)}{\|\dot{c}(b)\|} \rangle - \langle X(a), \frac{\dot{c}(a)}{\|\dot{c}(a)\|} \rangle. \end{aligned}$$

Demonstração: veja [33]

Corolário 4.1.4. Uma curva $c : [a, b] \longrightarrow M$ é ponto crítico do funcional Energia e Comprimento se e somente se c é uma geodésica com condição ao bordo $(\dot{c}(a), -\dot{c}(b)) \in (T_{(c(a), c(b))}B)^\perp$.

Quando uma geodésica c satisfaz a condição anterior diremos que c é uma B -geodésica.

Proposição 4.1.5. Seja c uma B -geodésica e seja $X \in T_c C_B([a, b])$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} E(\alpha(s, \cdot)) &= \int_a^b \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(t)\|^2 - \langle X(t), R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) \rangle dt \\ &- \langle\langle A_{(\dot{c}(a), -\dot{c}(b))}(X(a), X(b)), (X(a), X(b)) \rangle\rangle \\ \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} L(\alpha(s, \cdot)) &= \frac{1}{l} \int_a^b \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X^\perp(t)\|^2 - \langle R(X^\perp(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X^\perp(t) \rangle dt \\ &- \frac{1}{l} \langle\langle A_{(\dot{c}(a), -\dot{c}(b))}(X(a), X(b)), (X(a), X(b)) \rangle\rangle . \end{aligned}$$

onde $X^\perp(t)$ é a componente normal relativa a $\dot{c}(t)$, $l = \|\dot{c}(t)\|$, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é a métrica produto em $M \times M$ e A é o operador de Weingarten de $B \hookrightarrow M \times M$.

Demonstração: veja [33].

A forma do índice $D^2 E(c)$ em $T_c C_B([a, b])$ é definida como

$$\begin{aligned} D^2 E(c)(X, Y) &= \int_a^b \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(t)\|^2 - \langle Y(t), R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) \rangle dt \\ &- \langle\langle A_{(\dot{c}(a), -\dot{c}(b))}(X(a), X(b)), (Y(a), Y(b)) \rangle\rangle . \quad (4.1) \end{aligned}$$

Sendo o tensor de curvatura simétrico e o operador de Weingarten também simétrico obtemos que a forma do índice $D^2 E(c)$ é uma forma bilinear e simétrica. Dada uma partição $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ tal que o campo X é C^∞ , podemos escrever a forma do índice como

$$\begin{aligned} D^2 E(c)(X, Y) &= - \int_a^b \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(t) + R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), Y(t) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(t_{i-0}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(t_{i+0}), Y(t_i) \rangle \\ &- \langle\langle A_{(\dot{c}(a), -\dot{c}(b))}(X(a), X(b)), (Y(a), Y(b)) \rangle\rangle \\ &+ \langle\langle (-\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(a), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(b)), (Y(a), Y(b)) \rangle\rangle . \end{aligned}$$

Usando a fórmula anterior é fácil ver que um campo $X \in T_c C_B([a, b])$ pertence a nulidade de $D^2 E(c)$ se e somente se X é um campo de Jacobi e satisfaz a seguinte condição

$$(-\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(a), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X(b)) + A_{(\dot{c}(a), -\dot{c}(b))}(X(a), X(b)) \in (T_{c(a), c(b)} B)^\perp.$$

4.2 Teorema de Bonnet e outras aplicações

Passaremos agora a algumas aplicações da fórmula da segunda variação da Energia, comparando-se com o caso de dimensão finita.

Teorema 4.2.1. (Bonnet) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \geq K_o > 0$. Então o diâmetro da variedade M , $d(M) = \sup\{d(p, q) : p, q \in M\}$ é finito e resulta menor ou igual que $\frac{\pi}{\sqrt{K_o}}$

Demonstração: suponhamos por absurdo que $d(M) > \frac{\pi}{\sqrt{K_o}}$. Como, pelo teorema de Ekeland, o teorema de Hopf-Rinow é genericamente satisfeito, existem dois pontos $p, q \in M$, com $d(p, q) > \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ e uma geodésica minimal entre eles. Denotamos por c a geodésica minimal que liga p e q . Seja $Y(t) = \sin \frac{\pi t}{l} w(t)$ um vetor ao longo de c , onde $w(t)$ é o transporte paralelo de um vetor unitário ortogonal a $\dot{c}(0)$ e $l > 0$. O índice de Y é

$$D^2 E(c)(Y, Y) = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi t}{l}\right) \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \langle R(w(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), w(t) \rangle\right) dt.$$

Se $l > \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, então o índice deste campo é negativo o que implica que a geodésica c não é mínima, que é um absurdo. c.q.d.

Sobre o grupo fundamental, como vimos no capítulo 3, não podemos colocar nenhuma restrição. Este ponto difere muito do caso de dimensão finita pois, neste caso concluímos que o grupo fundamental é finito.

Um outra aplicação da segunda fórmula de variação é o teorema de Weinstein-Synge. Este teorema prova a existência de pontos fixos das isometrias em variedade, com curvatura seccional positiva, com dimensão par que preserva a orientação e com dimensão ímpar que reverte a orientação. No caso de dimensão infinita, devido aos resultados apresentados na seção 3.3, não podemos estender este teorema. Além disso, podemos construir uma

isometria sem pontos fixos na esfera de um espaço de Hilbert separável com $\inf\{d(f(x), x) : x \in S(\mathbb{H})\} = 0$ como prova o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\cos(\frac{1}{i})x_{2i-1} + \sin(\frac{1}{i})x_{2i})e_{2i-1} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (\cos(\frac{1}{i})x_{2i} - \sin(\frac{1}{i})x_{2i-1})e_{2i}. \end{aligned}$$

Um outro problema ligado a variação de Energia é a existência, no caso de dimensão finita, da geodésica de energia mínima em variedades compactas em cada classe de homotopia livre. A primeira idéia é substituir compacta por diâmetro finito. Todavia Grossman construiu um exemplo, veja [14] para mais detalhes, onde o diâmetro é finito, que não tem geodésicas fechadas de Energia mínima. A idéia é considerar as isometrias de l_2 dadas por

$$E_n(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + \delta_n^i (1 + \frac{1}{n}))e_i,$$

considerar o grupo gerado por $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e enfim, considerar o espaço quociente (Toro generalizado). Sendo as E_n isometrias podemos induzir uma métrica tal que a projeção natural é uma isometria local e uma aplicação de recobrimento. Agora os elementos na mesma classe de equivalência da origem são $q_n = (1 + \frac{1}{n})e_n$ e as geodésicas fechadas cujo ponto inicial é a classe da origem são levantadas nas retas que ligam a origem com os pontos q_n . Logo, não existe uma geodésica fechada minimal cujo ponto inicial é a classe da origem.

Capítulo 5

Teoremas de Comparação de Rauch

5.1 Pontos conjugados e pontos focais

Seja N uma subvariedade de (M, g) e seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ uma geodésica tal que

1. $\gamma(a) = p \in N$;
2. $\dot{\gamma}(a) = \xi \in T_p N^\perp$.

Definição 5.1.1. Um campo de Jacobi ao longo de γ é dito N -Jacobi se satisfaz as seguintes condições ao bordo

$$Y(a) \in T_p N, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(a) + A_\xi(Y(a)) \in T_p^\perp N,$$

onde A_ξ é o operador de Weingarten de N .

Como no caso de dimensão finita os campos N -Jacobi são relacionados com a aplicação $\text{Exp}^\perp : T^\perp N \longrightarrow M$, $\text{Exp}^\perp(X) = \exp^M(X)$; explicitamente, os campos N -Jacobi que se anulam em t_o estão em correspondência biunívoca com os vetores do núcleo de $d(\text{Exp}^\perp)_{t_o\xi}$ (veja [18]). Isso justifica a seguinte definição.

Definição 5.1.2. Um ponto $q = \gamma(t_o)$ ao longo de γ é dito:

1. monofocal se $d(\text{Exp}^\perp)_{t_o\xi}$ não é injetivo;
2. epifocal se $d(\text{Exp}^\perp)_{t_o\xi}$ não é sobrejetor.

No caso “degenerado”, isto é, o caso em que $N = p$, diremos que o ponto $q = \gamma(t_o)$ é *monoconjugado* ou *epiconjugado* ao longo de γ . Se não temos pontos epiconjugados (epifocais) e monoconjugados (monofocais) diremos que não temos pontos conjugados (focais) ao longo de γ . A distribuição de pontos conjugados ao longo de geodésicas difere muito do caso de dimensão finita pois, Grossman em [14] construiu um exemplo onde a distribuição de pontos monoconjugados tinha pontos acumulação. Equivalentemente construiremos um exemplo onde a distribuição de pontos epifocais e monofocais se acumulam.

Exemplo 5.1.3. Seja $M = \{x \in l_2 : x_1^2 + x_2^2 + \sum_{i=3}^\infty a_i x_i^2 = 1\}$, onde $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de números positivos. É fácil ver que a curva

$$\gamma(s) = \sin(s)e_1 + \cos(s)e_2$$

é uma geodésica e $T_{\gamma(s)}M = \langle \dot{\gamma}(s), e_3, e_4, \dots \rangle$. Para estudar a distribuição dos pontos epifocais ou monofocais, ao longo de γ , podemos restringir o estudo aos campos de Jacobi normais. Nota-se que para cada $k \geq 3$

$$E_k := \{x_1^2 + x_2^2 + a_k x_k^2 = 1\} \longrightarrow M$$

é totalmente geodésica que implica que $K(\dot{\gamma}(s), e_k) = a_k$ e os campos de Jacobi, com as condições iniciais $J_k(0) = e_k$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J_k(0) = 0$, são dados por $J_k(t) = \cos(\sqrt{a_k}t)e_k$. Por isso temos

$$d(\text{Exp}^\perp)_{\gamma(s)}\left(\sum_{k=3}^\infty b_k e_k\right) = \sum_{k=3}^\infty b_k \cos(\sqrt{a_k}s)e_k.$$

Os pontos $\gamma(r_k^m)$, $r_k^m = \frac{m\pi}{2\sqrt{a_k}}$ são pontos monofocais. Escolhamos $a_k = (1 - \frac{1}{k})^2$ e estudemos esta situação. Os pontos $\gamma(s_k)$, $s_k = \frac{k\pi}{2(1-k)}$ são monoconjugados, $s_k \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e

$$d(\text{Exp}^\perp)_{\gamma(\frac{\pi}{2})}\left(\sum_{k=3}^\infty b_k e_k\right) = \sum_{k=3}^\infty b_k \cos\left(\frac{k-1}{k}\frac{\pi}{2}\right)e_k.$$

Logo, o ponto $\gamma(\frac{\pi}{2})$ não é monoconjugado e cada vetor e_k pertence a imagem. Daí concluímos que a imagem é densa. De outro lado, se o vetor $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} e_k = d(\text{Exp}^\perp)_{\gamma(\frac{\pi}{2})}(\sum_{k=3}^{\infty} b_k e_k)$ então

$$\sin(\frac{\pi}{2k})b_k = \frac{1}{k}$$

e daí segue-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2k} \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2k})} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Logo, o ponto $\gamma(\frac{\pi}{2})$ é epiconjugado.

No capítulo 3 provamos que estudar os N -Jacobi ao longo de γ é equivalente ao estudo da seguinte E.D.O., em $T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$,

$$\begin{cases} T''(s) + R_s(T(s)) = 0; \\ T(a)(v, w) = (v, 0), \quad T'(a)(v, w) = (-A_\xi(v), w). \end{cases}$$

Por isso este sistema de E.D.O. é a linearização do Exp^\perp e os resultados na seção 3 traduzem-se no seguinte resultado.

Proposição 5.1.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional $L \leq K \leq H$, onde H, L são constantes. Seja N uma subvariedade de M e seja $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ uma geodésica, parametrizada com comprimento de arco, com $\gamma(0) = p \in N$ e $\dot{\gamma}(0) \in T_p^\perp N$. Então

1. se $d(\text{Exp}^\perp)_{t_0 \xi}$ é injetivo então a imagem é densa;
2. se $N = p$ e $L > 0$, então a distância d , ao longo de γ , entre p e o primeiro ponto monoconjugado ou epiconjugado satisfaz

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}};$$

3. se N é a subvariedade totalmente geodésica definida por $\dot{\gamma}(0)$ e $L > 0$, então a distância d , ao longo de γ , entre p e o primeiro ponto monofocal ou epifocal, satisfaz

$$\frac{\pi}{2\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{2\sqrt{L}}.$$

As propriedades 2 e 3 são verificadas também no caso de dimensão finita. Todavia, o exemplo anterior, junto com o exemplo de Grossman, provam que a distribuição dos pontos monofocais e epifocais ou monoconjugados e epiconjugados, ao longo de geodésicas, é muito diferente do caso de dimensão finita. Misiolek em [26], provou que no caso de $\Omega(M)$, o espaço dos laços livres de Sobolev de uma variedade compacta, a diferencial da aplicação exponencial é um operador de Fredholm de índice zero e por isso um ponto ao longo de uma geodésica é monoconjugado se e somente se é epiconjugado. Este fato é verificado também quando os operadores R_s são operadores compactos ([27]). A idéia da prova é integrar e observar que temos:

$$T(s) = sId - \int_0^s \left(\int_0^t R_h T(h) dh \right) dt.$$

Como os conjuntos dos operadores compactos são fechados então o fluxo de Jacobi $T(s) = sId - K(s)$, onde $K(s)$ é compacto. Agora, um clássico teorema de análise funcional implica que $T(s)$ é Fredholm e como $T(0) = Id$ segue-se que o índice é zero pois, o índice é constante em cada componente conexa. Misiolek provou também que em $\Omega(M)$ só pode ter um número finito de pontos monoconjugados ao longo de uma geodésica de comprimento finito.

O próximo passo é estender o lema do índice ao caso de dimensão infinita, para provar, na sua generalidade, os teoremas de comparação de Rauch. Seja $X : [0, 1] \rightarrow T_p M$, com $X(0) \in T_p N$ e definimos o índice focal de X como

$$\begin{aligned} I^N(X, X) &= \int_0^1 (\langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle - \langle R_t(X(t)), X(t) \rangle) dt \\ &- \langle A_\xi(X(0)), X(0) \rangle. \end{aligned}$$

No caso em que $N = p$ usaremos a notação $I(X, X)$ o qual chamaremos simplesmente índice. Obviamente cada campo ao longo de γ pode ser visto como transporte paralelo de uma aplicação $X : [0, b] \rightarrow T_p M$; indicaremos por $\bar{X}(t) = \tau_0^t(X)$ o campo associado a X .

Lema 5.1.5. $I^N(X, X) = D^2 E(\gamma)(\bar{X}, \bar{X})$, onde $D^2 E(\gamma)$ é a forma do índice relativa a $B = N \times M \rightarrow M \times M$ (veja 4.1).

Demonstração: comparando as duas expressões nota-se que é suficiente provar que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{X}(t) = \tau_0^t(\dot{X}(t))$. Seja $Z(t)$ o transporte paralelo de um vetor

em $T_p M$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{X}(t), Z(t) \rangle &= \langle \overline{X}(t), Z(t) \rangle' \\
&= \langle \tau_0^t X(t), \tau_0^t(Z) \rangle' \\
&= \langle X(t), Z \rangle' \\
&= \langle \dot{X}(t), Z \rangle \\
&= \langle \tau_0^t(\dot{X}(t)), Z(t) \rangle.
\end{aligned}$$

c.q.d.

A prova do lema do índice que será apresentada é feita no caso dos pontos focais. A prova no caso de pontos conjugados pode ser feita exatamente da mesma maneira e por isso não apresentaremos nenhuma prova. Lembramos ainda, que a família de aplicações bilineares

$$\Phi(t)(v, w) = \langle T(t)(v), T'(t)(w) \rangle,$$

é simétrica.

Lema 5.1.6. (Índice Focal) seja $X : [0, b] \longrightarrow T_p M$ uma aplicação diferenciável por partes com $X(0) \in T_p N$. Assumimos que $T(t)$ é invertível para cada $0 < t \leq a$. Então

$$I^N(X, X) \geq I^N(J, J),$$

onde $J(t) = T(t)(u)$ com $X(b) = T(b)u$. A igualdade é verificada se e somente se $X = T(t)(u)$.

Demonstração: sendo $T(t)$ invertível então existe um aplicação diferenciável por partes $Y : [0, b] \longrightarrow T_p M$ tal que $Y(0) = X(0) \in T_p N$ e a aplicação $X(t) = T(t)(Y(t))$. Então

$$\dot{X}(t) = T'(t)(Y(t)) + T(t)(\dot{Y}(t)) = A(t) + B(t).$$

O índice de X é igual a

$$\begin{aligned}
I(X, X) &= \int_0^b \langle A(t), A(t) \rangle + 2\langle A(t), B(t) \rangle + \langle B(t), B(t) \rangle dt \\
&\quad - \int_0^b \langle R_t(T(t)(Y(t)), T(t)(Y(t))) \rangle dt - \langle A_\xi(X(0), X(0)) \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle A(t), A(t) \rangle &= \langle T'(t)(Y(t)), T'(t)(Y(t)) \rangle \\
&= \langle T(t)(Y(t)), T'(t)(Y(t)) \rangle' \\
&- \langle T(t)(\dot{Y}(t)), T'(t)(Y(t)) \rangle \\
&- \langle T(t)(Y(t)), T''(t)(Y(t)) \rangle \\
&- \langle T(t)(Y(t)), T'(t)(\dot{Y}(t)) \rangle
\end{aligned}$$

e por isso

$$\begin{aligned}
\langle A(t), A(t) \rangle &= \langle T(t)(Y(t)), T'(t)(Y(t)) \rangle' \\
&- \langle B(t), A(t) \rangle \\
&+ \langle T(t)(Y(t)), R_t(T(t)(Y(t))) \rangle \\
&- \langle T(t)(\dot{Y}(t)), T'(t)(Y(t)) \rangle (= \langle A(t), B(t) \rangle),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que $\Phi(t)$ é simétrica. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \langle T(t)(Y(t)), T'(t)(Y(t)) \rangle' dt &= -\langle T(0)(Y(0)), T'(0)(Y(0)) \rangle \\
&+ \langle T(1)(Y(1)), T'(1)(Y(1)) \rangle \\
&= \langle X(0), A_\xi(X(0)) \rangle \\
&+ \langle T(1)(Y(1)), T'(1)(Y(1)) \rangle
\end{aligned}$$

e o índice focal de X é

$$I^N(X, X) = \langle T(1)(u), T'(1)(u) \rangle + \int_0^1 \|T(t)(\dot{Y}(t))\|^2 dt.$$

c.q.d

Uma simples aplicação da fórmula anterior é o seguinte resultado.

Proposição 5.1.7. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e sejam S e N subvariedades em M de codimensão 1. Assumimos que $p \in S \cap N$ e que no ponto p , N e S têm o mesmo vetor normal ($N_p = \overline{N}_p$). Assumimos também que

$$g(\nabla_X N, X) < g(\nabla_X \overline{N}, X),$$

para cada $X \in T_p N = T_p S$. Então se o fluxo de Jacobi T relativo a S é invertível em $(0, b)$ então o fluxo de Jacobi relativo a N não pode ter pontos monofocais em $(0, b)$.

Demonstração: seja $Y(t)$ um N -campo de Jacobi. Indicamos por A e \bar{A} os operadores de Weingarten relativamente a S e N . Sendo T invertível existe $X : [0, s] \rightarrow T_p M$ com $X(0) \in T_p S$, tal que $Y(t) = T(t)(X(t))$ e

$$\begin{aligned} Y(0) &= T(0)(X(0)) \\ Y'(0) &= T'(0)(X(0)) + T(0)(X'(0)) \\ (-\bar{A}(Y(0)), Y'(0)^n) &= (-A(X(0)) + X'(0)^t, 0). \end{aligned}$$

Daí segue-se que $Y(0) = X(0)$ e que $X'(0)^t = (A - \bar{A})(X(0))$. Aplicando a fórmula do índice temos

$$\begin{aligned} g(Y(s), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(s)) &= I^S(Y, Y) \\ &= g((A - \bar{A})(X(0)), X(0)) + \int_0^s \|T(t)(X'(t))\|^2 dt \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo $Y(s) \neq 0$. c.q.d.

Voltemos ao lema do índice; assumimos que exista um ponto epifocal, no intervalo $(0, b)$, isolado com imagem densa. Isso significa que o fluxo de Jacobi é um isomorfismo para $t \neq t_o$ em $(0, b)$ e em t_o o fluxo $T(t_o)$ tem imagem densa. Consideremos $X : [0, b] \rightarrow T_p M$ uma aplicação C^∞ por partes com $X(0) \in T_p N$. Fixado $\frac{\epsilon}{2}$, existe X_n^ϵ , $n = 1, 2$ tal que

$$\begin{aligned} \|T(t_o)(X_1^\epsilon) - X(t_o)\| &\leq \frac{\epsilon}{4} \\ \|T(t_o)(X_2^\epsilon) - \dot{X}(t_o)\| &\leq \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Escolhemos também Y^ϵ de modo que

$$\|T(t_o)(Y^\epsilon) - T'(t_o)(X_1^\epsilon)\| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Logo, existe $\eta(\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$ tal que no intervalo $\eta(\epsilon) - t_o \leq t \leq \eta(\epsilon) + t_o$ temos

$$\begin{aligned} \|T(t)(X_1^\epsilon + (t - t_o)(X_2^\epsilon - Y^\epsilon)) - X(t)\| &\leq \epsilon, \\ \|\frac{d}{dt}(T(t)(X_1^\epsilon + (t - t_o)(X_2^\epsilon - Y^\epsilon))) - \dot{X}(t)\| &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Indiquemos por X^ϵ a aplicação

$$X^\epsilon(t) = \begin{cases} X(t) & \text{se } 0 \leq t \leq t_o - \eta(\epsilon); \\ T(t)(X_1^\epsilon + (t - t_o)(X_2^\epsilon - Y^\epsilon)) & \text{se } t_o - \eta(\epsilon) < t < t_o + \eta(\epsilon); \\ X(t) & \text{se } t_o + \eta(\epsilon) \leq t \leq b. \end{cases}$$

Nota-se que $X^\epsilon = T(t)(Y(t))$ por um certo $Y(t)$ e pela prova anterior temos

$$I^N(X^\epsilon, X^\epsilon) \geq I^N(T(t)(u), T(t)(u)).$$

Calculemos o índice focal do campo X .

$$\begin{aligned} I(X, X) &= I(X^\epsilon, X^\epsilon) \\ &- \int_{t_o - \eta(\epsilon)}^{t_o + \eta(\epsilon)} \langle \dot{X}^\epsilon(t), \dot{X}^\epsilon(t) \rangle - \langle R(X^\epsilon(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X^\epsilon(t) \rangle dt \\ &+ \int_{t_o - \eta(\epsilon)}^{t_o + \eta(\epsilon)} \langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle - \langle R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

O segundo termo

$$\int_{t_o - \eta(\epsilon)}^{t_o + \eta(\epsilon)} \langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle - \langle R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X(t) \rangle dt,$$

tende para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ pois $X(t)$ é C^1 por partes e

$$\begin{aligned} \langle \dot{X}^\epsilon(t), \dot{X}^\epsilon(t) \rangle &\leq 4(\langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle + \epsilon^2) \\ \langle R(X^\epsilon(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X^\epsilon(t) \rangle &\leq 4 \|R_t\| \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle (\langle X(t), X(t) \rangle + \epsilon^2). \end{aligned}$$

Logo, fazendo o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos a seguinte versão do lema do índice.

Lema 5.1.8. (Índice generalizado) Se $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ é uma geodésica que contém só um número finito de pontos epifocais (epiconjugado) com imagem densa, no interior, então dado um campo X ao longo de γ com $X(0) \in T_p N$ o índice, relativo a $N \times M \rightarrow M \times M$, do campo X satisfaz $D^2 E(c)(X, X) \geq D^2 E(c)(J, J)$, onde J é o campo de Jacobi com $J(b) = X(b)$.

O lema anterior garante que o índice é definido positivo no espaço dos campos ao longo de γ com $X(0) = X(b) = 0$, se no interior da geodésica só tem um número finito de pontos epifocais (epiconjugados) que não são monofocais (monoconjugados). Como no caso de dimensão finita, depois de um ponto monoconjugado a geodésica não pode minimizar a distância.

Corolário 5.1.9. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica e assumimos que $c(t_o)$ seja monoconjugado ao longo de c . Então para cada $t > t_o$ a geodésica não pode ser um mínimo local do funcional Energia.

Demonstração: veja [8]

5.2 Teoremas de comparação de Rauch

Nesta seção provaremos os teoremas de comparação que nos permite entender a geometria da variedade quando a curvatura seccional é limitada superiormente ou inferiormente.

Teorema 5.2.1. (Rauch) Sejam $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle^*)$ variedades Riemannianas modeladas em \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 respectivamente com \mathbb{H}_1 isométrico linearmente a um subespaço fechado de \mathbb{H}_2 . Sejam

$$c : [0, a] \longrightarrow M, \quad c^* : [0, a] \longrightarrow N$$

geodésicas de igual comprimento. Assumimos que c^* tenha no máximo um número finito de pontos epiconjugados com imagem densa no interior. Assumimos também que se $t \in [0, a]$, para cada $X \in T_{c(t)}M$, $X_o \in T_{c^*(t)}N$ temos que

$$K^N(X_o, \dot{c}^*(t)) \geq K^M(X, \dot{c}(t)).$$

Sejam J e J^* campos de Jacobi ao longo de c e c^* tal que $J(0)$ e $J^*(0)$ são tangentes a c e c^* respectivamente e

1. $\| J(0) \| = \| J^*(0) \|$;
2. $\langle \dot{c}(0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) \rangle = \langle \dot{c}^*(0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J^*(0) \rangle$;
3. $\| \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) \| = \| \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J^*(0) \|$.

Então para cada $t \in [0, a]$

$$\| J(t) \| \geq \| J^*(t) \| .$$

Demonstração: os dois campos de Jacobi têm condições iniciais tangentes, com mesma norma e por isso as componentes ortogonais iniciais dos dois campos são nulas. Daí é fácil ver que as componentes dos campos de Jacobi tangentes são iguais. Esta observação inicial reduz a prova do teorema ao caso cujos campos de Jacobi têm as seguintes condições iniciais:

$$\| J(0) \| = \langle \dot{c}(0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) \rangle = \| J^*(0) \| = \langle \dot{c}^*(0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J^*(0) \rangle$$

e para hipótese sobre c^* o campo $J^*(t) \neq 0$. Escolhemos $t_o \in [0, a]$ e uma isometria

$$\begin{aligned} F : T_{c(0)}M &\longrightarrow T_{c^*(0)}N \\ F(\dot{c}(0)) &= \dot{c}^*(0) \\ F(\tau_{t_o}^0(J(t_o))) &= \chi_{t_o}^0(J^*(t_o)) \frac{\|J(t_o)\|}{\|J^*(t_o)\|}. \end{aligned}$$

Consideremos a família de isometrias

$$\begin{aligned} i_t : T_{c(t)}M &\longrightarrow T_{c^*(t)}N \\ i_t &= \chi_0^t \circ F \circ \tau_t^0, \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq t_o$, e seja $W(t) = i_t(J(t))$. Então

$$\begin{aligned} D^2E(c^*)(W, W) &= \int_0^{t_o} \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} W(t)\|^2 dt - \langle R^N(\dot{c}^*(t), W(t))\dot{c}^*(t), W(t) \rangle dt \\ &\leq \int_0^{t_o} \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(t)\|^2 dt - \langle R^M(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t), J(t) \rangle dt \\ &= D^2E(c)(J, J). \end{aligned}$$

O cálculo anterior prova que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_o} \langle J(t), J(t) \rangle &= \langle J(t_o), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(t_o) \rangle \\ &= D^2E(c)(J, J) \\ &\geq D^2E(c^*)(W, W) \\ &\geq D^2E(c^*)\left(J^* \frac{\|J(t_o)\|}{\|J^*(t_o)\|}, J^* \frac{\|J(t_o)\|}{\|J^*(t_o)\|}\right), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência do lema do índice generalizado. Como $J^*(t)$ é um campo de Jacobi, o índice do campo J^* é dado por $D^2E(c^*) = \langle J^*(t_o), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J^*(t_o) \rangle^*$. Daí segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_o} \langle J(t), J(t) \rangle &\geq D^2E(c^*)\left(J^* \frac{\|J(t_o)\|}{\|J^*(t_o)\|}, J^* \frac{\|J(t_o)\|}{\|J^*(t_o)\|}\right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_o} \langle J^*(t), J^*(t) \rangle^* \frac{\|J(t_o)\|^2}{\|J^*(t_o)\|^2}. \end{aligned}$$

A desigualdade anterior é verificada para cada t_o então se nós tomarmos $\epsilon > 0$, para cada $t \geq \epsilon$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \log(\|J(t)\|^2) \geq \frac{d}{dt} \log(\|J^*(t)\|^2)$$

e integrando em $[\epsilon, t]$ temos

$$\frac{\|J(t)\|^2}{\|J(\epsilon)\|^2} \geq \frac{\|J^*(t)\|^2}{\|J^*(\epsilon)\|^2}.$$

Agora, usando que $\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0)\| = \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J^*(0)\|$ e fazendo o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ da expressão anterior temos o nosso resultado. c.q.d

Misiolek, sempre em [26], provou que em $\Omega(M)$ o índice da forma bilinear $D^2E(c)$, ao longo de uma geodésica de comprimento finito, é finito. Logo, a variedade $\Omega(M)$ não pode ter curvatura estritamente positiva ao longo de qualquer geodésica de comprimento finito. De fato se $K \geq K_o > 0$, considere a esfera $S_{\frac{1}{\sqrt{K_o}}}(l_2)$ pois, $\Omega(M)$ é separável, e seja $N \in S_{\frac{1}{\sqrt{K_o}}}(l_2)$. Todo campo de Jacobi ao longo de qualquer geodésica que sai de N se anula no instante $t = \frac{\pi}{\sqrt{K_o}}$ e o espaço vetorial de tais campos tem codimensão 1. Sejam c^* uma geodésica em $\Omega(M)$ e c uma geodésica em $S_{\frac{1}{\sqrt{K_o}}}(l_2)$ com ponto inicial N . Assumimos também que as duas geodésicas sejam parametrizadas com comprimento de arco e elas têm comprimento igual a $\frac{\pi}{\sqrt{K_o}}$. Escolhemos uma isometria F tal que $F(\dot{c}(0)) = \dot{c}^*(0)$ e seja $J(t)$ um campo de Jacobi normal ao longo de c . Podemos definir, como na prova anterior, a família de isometrias i_t e associar ao campo de Jacobi $J(t)$ o campo $W(t) := i_t(J(t))$ ao longo da geodésica c^* . É fácil ver que

$$D^2E(c)(W, W) \leq D^2E(c^*)(J, J) = 0$$

e daí segue-se que o índice da forma bilinear $D^2E(c)$, não pode ser finito que é absurdo. O próximo resultado é um corolário clássico também em dimensão finita.

Corolário 5.2.2. Sejam M, N variedades Riemannianas modeladas em \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 onde \mathbb{H}_2 é isométrico a um subespaço fechado de \mathbb{H}_1 . Assumimos que para cada $m \in M$ e $n \in N$ e para cada $\eta \in T_p M$ e $\beta \in T_n N$ 2-subespaços temos

$$K^M(\eta) \geq K^N(\beta).$$

Seja $i : T_n N \longrightarrow T_p M$ uma isometria e seja $r > 0$ tal que

$$\begin{array}{ll} \exp_n : B_r(o_n) \longrightarrow B_r(m) & \text{difeomorfismo} \\ \exp_m : B_r(o_m) \longrightarrow B_r(n) & \text{não singular.} \end{array}$$

Seja $c : [a, b] \longrightarrow \exp_n(B_r(o_n))$ uma curva C^1 por partes e considere a curva $\bar{c}(s) = \exp_m \circ i \circ \exp_n^{-1}(c(s))$. Então

$$L(c) \geq L(\bar{c}).$$

Demonstração: [8]

Se nós comparamos curvas que são imagens da mesma curva, nos relativos espaços tangentes, podemos assumir que a aplicação \exp_p seja não singular a menos de um número finito de pontos e em tais pontos o diferencial é injetivo.

De forma análogo ao teorema de Rauch, pode-se provar o seguinte resultado relativo aos pontos epifocais e monofocais.

Teorema 5.2.3. (Rauch II) Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas modeladas em \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 , onde \mathbb{H}_1 é isométrico linearmente a um subespaço fechado de \mathbb{H}_2 . Sejam

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, b] &\longrightarrow M, \\ \gamma_2 : [0, b] &\longrightarrow N\end{aligned}$$

geodésicas com o mesmo comprimento. Assumimos que para todos vetores $X_1 \in T_{\gamma_1(t)}M$ e $X_2 \in T_{\gamma_2(t)}N$, temos

$$K^N(X_2, \dot{\gamma}_1(t)) \geq K^M(X_1, \dot{\gamma}_2(t)), \quad \langle X_1, \dot{\gamma}_1(t) \rangle = \langle X_2, \dot{\gamma}_2(t) \rangle = 0.$$

Assumimos também que γ_2 possui no máximo um número finito de pontos epifocais com imagem densa no interior, relativa a subvariedade geodésica definida por $\gamma_2(0)$. Sejam J e J^* campos ao longo de γ_1 e γ_2 respectivamente tal que

1. $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J(0) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} J^*(0) = 0$,
2. $\langle \dot{\gamma}_1(0), J(0) \rangle = \langle \dot{\gamma}_2(0), J^*(0) \rangle$, $\|J(0)\| = \|J^*(0)\|$.

Então,

$$\|J(t)\| \geq \|J^*(t)\|$$

para cada $t \in [0, b]$.

Corolário 5.2.4. Sejam M, N variedades modeladas em \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 com \mathbb{H}_2 isométrico a um subespaço de \mathbb{H}_1 . Sejam γ_1 e γ_2 geodésicas em M e N respectivamente com mesmo comprimento e definidas no mesmo intervalo. Sejam $V_1(t)$ e $V_2(t)$ campos paralelos respectivamente a γ_1 e γ_2 unitários e ortogonais às geodésicas. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e consideremos as curvas

$$\begin{aligned} b(t) &= \exp_{\gamma_1(t)}(f(t)V_1(t)); \\ b^*(t) &= \exp_{\gamma_2(t)}(f(t)V_2(t)). \end{aligned}$$

Assumimos que para cada $t \in I$ as geodésicas

$$\exp_{\gamma_2(t)}(sf(t)V_2(t)), \quad 0 \leq s \leq 1$$

não tenham pontos epifocais ou monofocais. Então $L(b) \geq L(b^*)$.

Demonstração: [8]

O corolário anterior é muito importante pois, nos permite comparar comprimentos de curvas entre variedades e isto será fundamental na prova do teorema de Topogonov que apresentaremos no próximo capítulo. Provaremos também, como os teoremas de comparação têm muitas aplicações de caráter global sobre as variedades com curvatura seccional limitada.

Capítulo 6

Variedades Riemannianas: a Teoria Global

Os teoremas de comparação de Rauch são os instrumentos básicos para estudar a geometria das variedades de curvatura seccional limitada. O fato de poder comparar uma variedade com modelos onde a geometria é bem conhecida, ajuda a entender as propriedades globais a partir de informações locais.

6.1 Aplicações dos teoremas de Rauch

Em dimensão infinita, também no caso de variedade completa, nós sabemos que a aplicação exponencial pode não ser sobrejetora. O teorema de Hadamard prova que nas variedades de curvatura seccional não positiva a aplicação \exp_p é sobrejetora para qualquer p . Quando a curvatura seccional é limitada por cima por uma constante obtemos que a aplicação \exp_p é sobrejetora ou parcialmente sobrejetora.

Proposição 6.1.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leq H$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva de classe C^1 por partes, com $L(c) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ se $H > 0$, então existe uma única curva de classe C^1 por partes $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \overline{B_{L(c)}(o_{c(0)})}$ tal que $\exp_{c(0)} \circ \bar{c}(t) = c(t)$. Em particular,

$$\exp_p(B_r(o_p)) = B_r(p)$$

para cada $p \in M$ e $r \geq 0$ se $H \leq 0$ e para $r < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ se $H > 0$.

Demonstração: provaremos apenas o caso em que $H > 0$ pois, o caso $H \leq 0$ é análogo. Seja

$$t_o = \sup\{ t \in [0, 1] : \exists! \bar{c} : [0, t] \longrightarrow \overline{B_{L(c)}(o_{c(0)})}, \text{ com } \bar{c}(t) = c(t) \}.$$

Pelo teorema de Rauch (comparando com a variedade de curvatura constante H) o exponencial é não singular na bola de raio $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Por isso t_o é estritamente positivo. Queremos provar que $t_o = 1$ e que $\bar{c}(t_o)$ está bem definido. Seja

$$\bar{c} : [0, t_o] \longrightarrow \overline{B_{L(c)}(o_{c(0)})}$$

o levantamento de c ; sempre pelo teorema de Rauch, versão fraca, temos

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= \|d(\exp_{c(o)} \bar{c}(t))(\dot{\bar{c}}(t))\| \\ &\geq \frac{\sin(\|\bar{c}(t)\|\sqrt{H})}{\sqrt{H}\|\bar{c}(t)\|} \|\dot{\bar{c}}(t)\| \\ &\geq \frac{\sin(L(c)\sqrt{H})}{\sqrt{H}L(c)} \|\dot{\bar{c}}(t)\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \int_0^{t_o} \|\dot{\bar{c}}(t)\| dt < \infty$$

o que implica que o limite $\lim_{t \rightarrow t_o} \bar{c}(t) = q$ existe pois, a imagem de \bar{c} é relativamente compacta em um espaço métrico $\overline{B_{L(c)}(o_{c(0)})}$ completo. Se $q \in B_{L(c)}(o_{c(0)})$ então sendo o exponencial não singular na bola $B_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}(o_{c(0)})$ podemos continuar o nosso levantamento e isso implica que $t_o = 1$. No caso em que $q \in \partial B_{L(c)}(o_{c(0)})$, pelo lema de Gauss, concluímos que $t_o = 1$ e c é uma geodésica. c.q.d.

Corolário 6.1.2. Seja (M, g) uma variedade completa com curvatura seccional $K \leq H$ e sejam $p, q \in M$, com $d(p, q) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ se $H > 0$. Então uma das duas seguintes condições são verificadas:

1. existe uma geodésica minimal entre p, q ;
2. existe uma seqüência (γ_n) de geodésicas entre p, q com $L(\gamma_n) > L(\gamma_{n+1})$ e $L(\gamma_n) \rightarrow d(p, q)$.

Demonstração: aplicando a proposição anterior à uma seqüência de curvas tal que o comprimento converge à distância entre os pontos p, q , obtemos a segunda propriedade. A primeira propriedade segue-se do fato que o teorema de Hopf-Rinow é genericamente satisfeito. c.q.d

O teorema de Bonnet mostra que as variedades com $K \geq L_o$ têm diâmetro limitado pelo diâmetro da esfera com curvatura L_o . Usando o teorema de Rauch, com algumas restrições, podemos provar um resultado na mesma linha do teorema de diâmetro máximo de Topogonov. Antes de provar esta simples aplicação, provaremos um lema que será útil também para outras aplicações nesta seção.

Lema 6.1.3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional $K \geq L$, onde L é uma constante não negativa. Assuma que o exponencial em um ponto $p \in M$ seja não singular na bola $B_r(o_p)$. Indicamos por $\delta(s)$ a curva que liga dois pontos antípodas na esfera de raio s no espaço tangente $T_p M$. Se indicamos por Δ a imagem via exponencial então

$$L(\Delta) \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}} \sin(s\sqrt{L}),$$

para $s < r$.

Demonstração: considere a esfera $S_{\frac{1}{\sqrt{L}}}(T_p M \times \mathbb{R})$ de raio $\frac{1}{\sqrt{L}}$ e seja $N = (0, \frac{1}{\sqrt{L}}) \in S_{\frac{1}{\sqrt{L}}}(T_p M \times \mathbb{R})$; é fácil ver que

$$\exp_N(v) = \frac{1}{\sqrt{L}}(\cos(\|v\| \sqrt{L})N + \sin(\|v\| \sqrt{L})\frac{v}{\|v\|}).$$

Sejam $v, w \in T_p M$ tal que $\langle v, w \rangle = 0$, $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$; cada meridiano da esfera de raio s em $T_p M$ pode ser escrito como

$$c_s(t) = s(\cos(s)v + \sin(s)w)$$

e $L(\exp_N(c_s)) = \frac{\pi}{\sqrt{L}} \sin(s\sqrt{L})$. Aplicando o corolário (5.2.2) segue-se que

$$L(\Delta) \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}} \sin(s\sqrt{L})$$

c.q.d.

Proposição 6.1.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa conexa com $K \geq 1$. Assumimos que o $d(M) = \pi$ e que exista um ponto $p \in M$ cujo exponencial é não singular na bola $B_\pi(o_p)$ e a função $m \rightarrow d_p(m) = d(p, m)$ contém o intervalo $[0, \pi)$. Então M é isométrica a esfera unitária $S(T_p M \times \mathbb{R})$.

Demonstração: seja $p \in M$ como assumido e seja $S_r(T_p M)$ a esfera de raio r , com $r < \pi$; aplicando o lema anterior obtemos que o diâmetro de $\exp_p(S_r(T_p M)) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \pi$ que implica que a imagem, via exponencial da esfera $S_\pi(T_p M)$, é um ponto. Como $d_p(M) \supseteq [0, \pi)$ aplicando o teorema de Ekeland existe uma seqüência q_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p, q_n) = \pi$ e cada q_n pode ser ligado a p por uma geodésica minimal. Se nós tomamos $v_n \in T_p M$ tal que $\exp_p(v_n) = q_n$ temos que $\|v_n\| \rightarrow \pi$ e por isso $q_n \rightarrow q$. Logo $d(p, q) = \pi$. Agora, seja $N = (0, 1) \in S(T_p M \times \mathbb{R})$ e definimos

$$\phi(m) = \begin{cases} \exp_p(\exp_N^{-1}(m)) & \text{se } m \neq -N; \\ q & \text{se } m = -N. \end{cases}$$

Nosso objetivo é provar que ϕ é uma isometria. Primeiramente nota-se que toda geodésica que sai de p no instante $t = \pi$ chega no ponto q , por isso todo campo de Jacobi se anula em $t = \pi$. Além disso o \exp_p é não singular em $B_\pi(o_p)$ então o índice ao longo das geodésicas radiais é não negativo. Agora, consideremos $c : [0, \pi] \rightarrow M$ uma geodésica com $c(0) = p$ e seja $W(t)$ o transporte paralelo ao longo de c de um vetor unitário e ortogonal a $\dot{c}(0)$. O índice do campo $Y(t) = \sin(t)W(t)$ é

$$\begin{aligned} 0 &\leq D^2 E(c)(Y, Y) \\ &= \int_0^\pi \langle Y(t), Y(t) \rangle - \langle R(Y(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), Y(t) \rangle dt \\ &\leq \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $K(W(t), \dot{c}(t)) = 1$ e $Y(t)$ é um campo de Jacobi. Daí concluímos, usando também a proposição (6.1.1), que M tem curvatura constante 1. Isso significa que ϕ é uma isometria local e uma aplicação de recobrimento, sendo a esfera $S(T_p M \times \mathbb{R})$ completa. De outro lado, como $d(p, q) = \pi$ toda geodésica que sai de p é minimal até chegar em q ; por isso ϕ é injetiva. Logo M é isométrica a esfera $S(T_p M \times \mathbb{R})$. c.q.d.

O teorema de Topogonov sobre o diâmetro máximo, em dimensão finita, pode ser demonstrado sem usar o teorema de Topogonov, mas simplesmente

usando o corolário (5.2.4). Esta prova foi dada por Berger e como temos todas as informações necessárias teremos o mesmo resultado com a mesma técnica.

Teorema 6.1.5. (Berger-Topogonov) Seja (M, g) uma variedade completa conexa com $\delta \leq K \leq 1$. Suponha que exista dois pontos p, q com $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ e pelo menos uma geodésica minimal entre ele. Então M é isométrica à esfera $S_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}(T_p M \times \mathbb{R})$.

Demonstração: comparando a nossa variedade M com a esfera $S(T_p M \times \mathbb{R})$ obtemos que o primeiro ponto focal, ao longo de qualquer geodésica, só pode aparecer depois do instante $\frac{\pi}{2}$. Além disso pelo teorema de Bonnet, existindo dois pontos com distância $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, concluímos que $d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Considere os pontos $p, q \in M$ como assumido e seja $\gamma : [0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}] \rightarrow M$ uma geodésica minimal entre p e q . Tomemos também o campo ao longo de γ

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sin(t\sqrt{\delta})W(t),$$

onde $W(t)$ é o transporte paralelo ao longo de γ ortogonal a $\dot{\gamma}(t)$. Definimos a variação da curva γ

$$\Omega(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sY(t)), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Cada curva $\Omega(s, \cdot)$ liga os pontos p, q e aplicando o corolário (5.2.4) temos

$$L[\Omega(s, \cdot)] \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Como $d(p, q) = d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, as curvas são geodésicas minimais e o campo $Y(t)$ é um campo de Jacobi. Além disso temos que $\Omega(\cdot, \cdot)$ é uma subvariedade totalmente geodésica. Usando estas informações é fácil ver que a aplicação \exp_p é não singular e injetiva na bola $B_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}(o_p)$, que $\exp_p(S_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}(T_p M)) = q$, e enfim que a aplicação

$$\Phi : S_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}(T_p M \times \mathbb{R}) \rightarrow M$$

definida por:

$$\begin{cases} \Phi(m) = \exp_p \circ \exp_N^{-1}(m) & \text{se } m \neq -N; \\ \Phi(-N) = q & \text{se } m = -N; \end{cases}$$

onde $N = (0, \frac{1}{\sqrt{\delta}})$, é uma isometria. c.q.d.

Um dos teoremas mais belos da geometria Riemanniana clássica é o teorema da esfera; $\pi_1(M) = 0$ e $\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1$ então M é homeomorfa a esfera. Durante os últimos dois anos procuramos encontrar uma generalização ao caso de dimensão infinita. Os problemas que aparecem são de vários tipos e nós não conseguimos um caminho para obter uma prova que fosse independente do caso de dimensão finita, ou uma prova que funcionasse também neste caso. O que vamos apresentar é um o primeiro teorema tipo esfera, que em dimensão finita foi tratado por Rauch em [32], assumindo que M é conexa e que o raio de injetividade $i(M)$, isto é, o menor real r onde a aplicação exponencial é um difeomorfismo na bola de raio r , para cada $p \in M$, seja maior de π . O lema fundamental é o seguinte.

Lema 6.1.6. Seja (M, g) uma variedade diferenciável com curvatura seccional $K \leq H$, H constante positiva. Seja $\phi : S(\mathbb{H}) \longrightarrow M$, onde \mathbb{H} é um espaço de Hilbert qualquer, um homeomorfismo local na imagem tal que $\phi(N) = p$ e a imagem de qualquer meridiano que sai de N tem comprimento menor que $r \leq r_o < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Então existe uma aplicação

$$\bar{\phi} : S(\mathbb{H}) \longrightarrow \overline{B_{r_o}(o_p)},$$

a qual é um homeomorfismo local na imagem, tal que $\exp_p \circ \bar{\phi} = \phi$.

Demonstração: Aplicando a proposição (6.1.1) a cada imagem dos meridianos, podemos definir uma aplicação

$$\bar{\phi} : S(\mathbb{H}) - \{-N\} \longrightarrow \overline{B_{r_o}(o_p)}.$$

Nosso objetivo é provar que $\bar{\phi}$ se estende a $-N$ e que é um homeomorfismo local, pois tal aplicação já é um levantamento de ϕ . Seja $\xi(t) = \exp_N(tv)$ um meridiano que sai de N e sejam $\gamma(t) = \phi(\xi(t))$ e $\bar{\gamma}(t)$ o levantamento de γ . Como a aplicação \exp_p é não singular na bola de raio $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$, $\forall t \in [0, \pi]$ existe $W(t)$ de $\bar{\gamma}(t)$ e $U(t)$ de $\gamma(t)$ tal que

$$\exp_p : W(t) \longrightarrow U(t)$$

é um difeomorfismo sobrejetor. Sendo ϕ um homeomorfismo local na imagem, existe $V(t)$ tal que $\phi(V(t)) \subset U(t)$ e ϕ restrita a $V(t)$ é um homeomorfismo.

Pela compacidade existe $0 = t_o \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = \pi$ tal que

$$\begin{cases} \xi([0, \pi]) \subseteq V(t_o) \cup \dots \cup V(t_n) = V; \\ \gamma([0, \pi]) \subseteq U(t_o) \cup \dots \cup U(t_n) = U; \\ \bar{\gamma}([0, \pi]) \subseteq W(t_o) \cup \dots \cup W(t_n) = W; \end{cases}$$

e também existe uma partição $0 < s_1 < \dots < s_n < s_{n+1} = \pi$ tal que $t_i < s_{i+1} < t_{i+1}$ e $\xi(s_{i+1}) \in V(t_i) \cap V(t_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n-1$. Esta condição é verificada também pelos meridianos que saem de N e que pertencem a uma vizinhança oportuna de ξ contida em V . Seja $\eta : [0, \pi] \rightarrow S(\mathbb{H})$ um meridiano que verifica as mesmas propriedades relativas à partição $0 < s_1 < \dots < s_n < s_{n+1} = \pi$ e indicamos por $\bar{\eta}$ o levantamento da curva $\phi(\eta)$. Nós sabemos que tal levantamento é único e utilizando a linguagem anterior temos

$$\bar{\eta}(t) = (\exp_p|_{W(t_i)})^{-1}(\phi(\eta(t))), \quad t \in [s_i, s_{i+1}].$$

Como em $W(t_n)$ existe só um elemento tal que a imagem é $\phi(\eta(\pi)) = \phi(\xi(\pi))$; então $\bar{\eta}(\pi) = \bar{\xi}(\pi)$. Daí temos que o conjunto

$$C := \{w \in T_N S(\mathbb{H}) : \overline{\exp_N(tw)}(\pi) = \bar{\xi}(\pi)\}$$

é aberto e usando o mesmo argumento anterior prova-se que é fechado. Logo, sendo $T_N S(\mathbb{H})$ conexo, $\bar{\phi}$ pode ser estendida em $-N$ e sendo um levantamento de ϕ segue-se que $\bar{\phi}$ é um homeomorfismo local. c.q.d.

O próximo passo é provar que a variedade é coberta por duas bolas geodésicas. Assumimos então que (M, g) é uma variedade Riemanniana completa conexa com curvatura seccional $0 < h \leq K \leq 1$ tal que h é solução da equação

$$\sin \sqrt{\pi h} = \frac{\sqrt{h}}{2} \quad (h \sim \frac{3}{4}).$$

Seja $p \in M$. Pelo teorema de Rauch a bola de raio π não tem pontos conjugados e aplicando o lema (6.1.3) temos que o comprimento da imagem dos meridianos, que indicaremos por Δ , da esfera de raio π em $T_p M$, resulta

$$L[\Delta] \leq \frac{\pi}{\sqrt{h}} \sin \pi \sqrt{h} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Logo existe um ϵ positivo tal que a imagem dos meridianos da esfera de raio $\pi - \epsilon$ tem como imagem uma curva de comprimento $r \leq r_1 < r_o < \pi - \epsilon$. Nota-se que ϵ não depende de p .

Lema 6.1.7. Seja $p \in M$ e seja $q \in \exp_p(S_{\pi-\epsilon}(T_p M))$. Então

$$M = \overline{B_{\pi-\epsilon}(p)} \bigcup \overline{B_{\pi-\epsilon}(q)}.$$

Demonstração: seja $m \in M$ e seja $c : [0, 1] \rightarrow M$ curva de classe C^1 por partes que liga p com m . Seja

$$t_o = \sup\{t \in [0, 1] : \exists \bar{c} : [0, t] \rightarrow \overline{B_{\pi-\epsilon}(o_p)} : \exp_p(\bar{c}(s)) = c(s)\}.$$

Como na prova da proposição (6.1.1) temos que \bar{c} esta definida em t_o e que $L(c_{[0, t_o]}) \geq \pi - \epsilon$. Se $t_o = 1$ a prova acabou. Se $t_o < 1$ nota-se que pelo lema (6.1.6) $c(t_o) \in \exp_q(\overline{B_{r_1}(o_q)})$. Logo, podemos definir

$$t_1 = \sup\{t \geq t_o : \exists \bar{c} : [t_o, t] \rightarrow \overline{B_{\pi-\epsilon}(o_q)}.\}$$

Como $r_1 < \pi - \epsilon$ temos que $t_1 > 0$ e, como anteriormente, $\bar{c}(t_1)$ está bem definida. Se $t_1 = 1$ a prova terminou. Senão, sempre aplicando o lema (6.1.6), o ponto $\bar{c}(t_1) \in \exp_p(\overline{B_{r_1}(o_p)})$ e pelo lema de Gauss

$$L[c_{[t_o, t_1]}] \geq r_1 - r_o.$$

Podemos então iterar este procedimento e a cada passo levantaremos, nos espaços tangentes em p ou em q , um pedaço de curva c com comprimento $\geq r_1 - r_o$. Logo, este procedimento deve terminar pois, o comprimento da curva c é finito e por isso m deve pertencer a uma das duas bolas geodésicas. c.q.d.

Teorema da Esfera (Rauch) Seja (M, g) uma variedade conexa completa com curvatura seccional $0 < h \leq K \leq 1$, com h sendo solução da equação $\sin(\pi\sqrt{h}) = \frac{\sqrt{h}}{2}$. Assumimos também que $i(M) \geq \pi$. Então M é contrátil e se $\mathbb{H} \cong l_2$ então M é difeomorfa a esfera $S(l_2)$.

Demonstração: Em dimensão infinita o bordo de um disco fechado é retrato forte de deformação, pelo teorema de Bessega que diz que \mathbb{H} é difeomorfo a $\mathbb{H} - 0$ e tal difeomorfismo fixa o complementar de um disco aberto unitário. Nosso objetivo é provar que $\pi_k(M) = 0$ pois, uma variedade de Banach é contrátil se e somente se $\pi_k(M) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (veja [29]).

Seja $f : S^k \rightarrow M$ uma aplicação contínua e seja

$$H : \overline{B_{\pi-\epsilon}(p)} \times [0, 1] \rightarrow \overline{B_{\pi-\epsilon}(p)}$$

uma homotopia entre a retração sobre o bordo e aplicação identidade, que deixa fixo o bordo. Podemos estender a homotopia H a uma homotopia \tilde{H} , definida em M , que fixa o complementar de $\mathcal{B}_{\pi-\epsilon}(p)$. A aplicação

$$\begin{aligned} F : S^k \times [0, 1] &\longrightarrow M, \\ F(x, t) &= \tilde{H}(f(x), t). \end{aligned}$$

é uma homotopia entre f e uma aplicação $\tilde{f} : S^k \longrightarrow \overline{\mathcal{B}_{\pi-\epsilon}(q)}$. Logo, sendo o espaço $\overline{\mathcal{B}_{\pi-\epsilon}(q)}$ contrátil temos que f é homótopa a constante. Se $\mathbb{H} \cong l_2$, pelo teorema de Kuiper-Burghlelea (veja [7]) a única variedade contrátil é a esfera. c.q.d.

6.2 Teorema de Topogonov

Nesta seção provaremos o resultado que nos permite comparar triângulos de uma variedade com curvatura seccional limitada por baixo e por cima, com os triângulos das variedades bidimensionais completas, simplesmente conexa, com curvatura constante. Este resultado será provado em uma classe particular das variedades infinito dimensionais; as variedades Hopf-Rinow.

Definição 6.2.1. Um triângulo geodésico é um conjunto de três geodésicas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, parametrizadas com comprimento de arco, de comprimento l_1, l_2, l_3 tal que $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$ e $l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2}$ (módulo 3); indicaremos por

$$\alpha_i = (-\dot{\gamma}_{i+1}(l_{i+1}), \dot{\gamma}_{i+2}(0))$$

o ângulo entre $-\dot{\gamma}_{i+1}(l_{i+1})$ e $\dot{\gamma}_{i+2}(0)$, $0 \leq \alpha_i \leq \pi$.

Neste trabalho nós nos referiremos a um triângulo com a notação anterior ou especificando os vértices.

Definição 6.2.2. Uma dobradiça é uma tripla $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ onde as γ_i são geodésicas com comprimentos l_i , com $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$ e $\alpha = (-\dot{\gamma}_1(l_1), \dot{\gamma}_2(0))$.

Indicamos por M^H a variedade Riemanniana completa, bidimensional, simplesmente conexa, com curvatura constante H e seja $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ um triângulo geodésico cujas geodésicas sejam minimais. Aplicando a lei do seno temos

$$H < 0 \quad \frac{\sinh \sqrt{-H}l_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sinh \sqrt{-H}l_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sinh \sqrt{-H}l_3}{\sin \alpha_3}$$

$$H = 0 \quad \frac{l_1}{\sin \alpha_1} = \frac{l_2}{\sin \alpha_2} = \frac{l_3}{\sin \alpha_3}$$

$$H > 0 \quad \frac{\sin \sqrt{H}l_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \sqrt{H}l_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \sqrt{H}l_3}{\sin \alpha_3}.$$

Proposição 6.2.3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional $H \leq K \leq \Delta$. Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça tal que γ_1 e γ_2 são geodésicas minimais, e o perímetro $P = l_1 + l_2 + d(\gamma_1(0), \gamma_2(\bar{l}_2)) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{H}} - 4\epsilon$, por $\epsilon > 0$. Além disso assumimos:

(i) se $H \leq 0$, que $l_2 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$;

(ii) se $H > 0$ que

$$l_2 \leq \inf(\epsilon, \frac{\sin \sqrt{H}\epsilon}{\sqrt{H}} \sin \frac{\pi \sqrt{H}}{2\sqrt{\Delta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}).$$

Se $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$ é uma dobradiça em M^H tal que $L[\gamma_i] = L[\bar{\gamma}_i]$, por $i=1,2$, então

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)).$$

Demonstração: assumimos que as geodésicas tenham como domínio $[0, 1]$. caso $H \leq 0$:

Considere $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ uma dobradiça em M^H com $\bar{l}_i = l_i$, $i=1,2$. Se $\alpha = \pi$ a curva $\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$ é uma geodésica minimal, que implica nossa desigualdade. Analisemos o caso em que $\alpha < \pi$. Pelo teorema de Hadamard, a aplicação \exp_p é um difeomorfismo sobrejetor para cada $p \in M^H$, então a geodésica minimal que liga $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(1)$ é dada por $\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_1(t)}(f(t)\bar{V}(t))$, onde $f(t) = d(\bar{\gamma}_1(t), \bar{\gamma}_3(t))$ e $\bar{V}(t)$ é transporte paralelo ao longo de $\bar{\gamma}_1(t)$ do vetor $\frac{\dot{\bar{\gamma}}_2(0)}{|\dot{\bar{\gamma}}_2(0)|}$. Indicamos por $a(t) = d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_3(t))$; aplicando a lei do seno temos

$$\frac{\sinh \sqrt{-H}f(t)}{\sin \bar{\alpha}_2} = \frac{\sinh \sqrt{-H}f(t)}{\sin \bar{\alpha}_3}.$$

Sendo a função $a(t)$ crescente temos que $f(t)$ é crescente e daí concluímos que $0 \leq f(t) \leq f(1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$; isso prova que as geodésicas

$$\theta(s) = \exp_{\gamma_1(t)}(sf(t)V(t)), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

onde $V(t)$ é o transporte paralelo ao longo de $\gamma_1(t)$ do vetor $\frac{\dot{\gamma}_2(0)}{|\dot{\gamma}_2(0)|}$, não têm pontos epifocais ou monofocais no interior. Aplicando o corolário (5.2.4) às curvas $c(t) = \exp_{\gamma_1(t)}(f(t)V(t))$ e $\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_1(t)}(f(t)\bar{V}(t))$, temos

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(1)) \leq L[c] \leq L[\bar{\gamma}_3] = d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(1)).$$

Caso $H > 0$:

Se $\alpha = \pi$ a desigualdade é facilmente verificada. Assumir então que $\alpha < \pi$. O perímetro da dobradiça é $\leq \frac{2\pi}{\sqrt{H}} - 4\epsilon$ então $d(\gamma_1(1), \gamma_1(0)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} - \epsilon$, pois caso contrário o perímetro deveria ser estritamente maior do que $\frac{2\pi}{\sqrt{H}} - 4\epsilon$. Se nós tomamos $\bar{\gamma}_3$ a geodésica minimal que liga $\bar{\gamma}_1(0)$ a $\bar{\gamma}_2(1)$ temos que o perímetro do triângulo é

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 \leq (\frac{\pi}{\sqrt{H}} - 2\epsilon) + \epsilon + (\frac{\pi}{\sqrt{H}} - 2\epsilon + \epsilon) = (\frac{2\pi}{\sqrt{H}} - 2\epsilon).$$

Como $\alpha < \pi$, obtemos que a geodésica minimal $\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_1(t)}(f(t)\bar{V}(t))$, com a mesma notação anterior. Se $d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(0)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$ aplicando a lei do seno ao triângulo de vértices $(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_1(t), \bar{\gamma}_3(t))$ temos

$$\sin \sqrt{H} f(t) = \frac{\sin \sqrt{H} a(t)}{\sin \alpha_3} \sin \alpha_2 \quad (6.1)$$

e daí concluímos que $f(t)$ é estritamente crescente e a função f tem imagem no intervalo $[0, \frac{\pi}{2\sqrt{H}}]$. Se $d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(1)) > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$, indicamos por t_o o máximo de f . Derivando (6.1) obtemos que $a(t_o) = \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$ e sendo $a(t)$ estritamente crescente temos

$$(\sin \sqrt{H} f(t))' \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_o$$

e por isso $f(t) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$. Em $t = t_o$, aplicando a lei do seno ao triângulo de vértices $(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_1(t_o), \bar{\gamma}_3(t_o))$ e ao triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{H} f(t_o) &= \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \\ &= \frac{\sin \sqrt{H} d(\bar{\gamma}_1(1), \bar{\gamma}_3(0))}{\sin \sqrt{H} d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_3(1))}. \end{aligned}$$

Assim, sendo $\frac{\pi}{2\sqrt{H}} < d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_3(1)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} - \epsilon$ segue-se que

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{H} f(t_o) &\leq \frac{\sin \sqrt{H} d(\bar{\gamma}_1(1), \bar{\gamma}_3(0))}{\sin \sqrt{H} \epsilon} \\ &\leq \frac{\sqrt{H}}{\sin \sqrt{H} \epsilon} \frac{\sin \sqrt{H} \epsilon}{\sqrt{H}} \sin \frac{\pi \sqrt{H}}{2\sqrt{\Delta}}. \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que $f(t_o) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$ e podemos usar o mesmo argumento do caso $H \leq 0$. c.q.d.

Teorema 6.2.4. (Topogonov) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa, completa, de Hopf-Rinow com curvatura seccional $H \leq K \leq \Delta$. Então

- (A) Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ um triângulo geodésico em M . Assumimos que γ_1 e γ_3 são geodésicas minimais e caso $H > 0$, $l_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Então em M^H existe um triângulo geodésico $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ tal que $l_i = \bar{l}_i$ e $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$, $\bar{\alpha}_2 \leq \alpha_2$. Além disso, o triângulo $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ é univocamente determinado a menos que $H > 0$ e $l_2 = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.
- (B) Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça e assumimos que γ_1 é uma geodésica minimal e caso $H > 0$, $l_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Seja $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$ uma dobradiça em M^H tal que $l_i = \bar{l}_i$, $i = 1, 2$ e $\alpha = \bar{\alpha}$. Então

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(0)).$$

Demonstração: a demonstração seguirá os mesmos passos da demonstração que aparece no livro de Cheeger-Ebin. Na realidade a prova deste teorema, em dimensão infinita, se resume a estender o teorema de Rauch II e depois imitar as demonstrações já conhecidas. Como na demonstração de Cheeger-Ebin, inicialmente trabalharemos em $M^{H-\epsilon}$, onde ϵ é um número positivo.

(1) Seja $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$ uma dobradiça em $M^{H-\epsilon}$ e $\bar{l}_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Quando α aumenta em $(0, \pi)$ a função $f(\alpha) = d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\bar{l}_2))$ é estritamente crescente de $\bar{l}_2 - \bar{l}_1$ até $D = \min(\frac{2\pi}{\sqrt{H-\epsilon}} - \bar{l}_1 - \bar{l}_2, \bar{l}_1 + \bar{l}_2)$.

Demonstração: se $H \leq 0$ pelo teorema de Hadamard $f(\alpha)$ é de classe C^∞ ; isto é verdadeiro também se $H > 0$ e se

$$d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}.$$

Deste forma, se $d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}$ a curva $\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$ seria uma geodésica quebrada entre pontos antípodas, que é um absurdo. Quando α varia o ponto $\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)$ pertence ao círculo geodésico de raio \bar{l}_2 de $\bar{\gamma}_2(0)$ e a geodésica minimal σ entre $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)$ não intercepta o círculo ortogonalmente, a menos que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. Caso contrário a curva $\sigma \cup -\bar{\gamma}_2$ seria uma geodésica minimal entre $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)$ diferente de $\bar{\gamma}_1$. Isso é impossível se $H \leq 0$, pelo teorema de Hadamard, e se $H > 0$ teremos que $l_1 = \frac{\pi}{\sqrt{H-\epsilon}}$ o que é absurdo. Daí, usando a primeira fórmula de variação obtemos

$$f'(\alpha) = \bar{l}_2^{-1} \langle V(\bar{l}_2), T(\bar{l}_2) \rangle \neq 0$$

pois, $V(t)$ não é ortogonal ao círculo geodésico o que implica que a função $f(\alpha)$ é monótona crescente pois,

$$f(0) = |\bar{l}_2 - \bar{l}_1| < f(\pi) = D.$$

(2) Em $M^{H-\epsilon}$ os triângulos cujos lados têm comprimento menor que $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ são univocamente determinados.

Demonstração: sejam $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ dois triângulos em $M^{H-\epsilon}$ com $l_i = \bar{l}_i$, para $i=1,2,3$. Pelo passo (1) γ_3 é univocamente determinada por α_3 ; então $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3$ e por isso a isometria que manda γ_i em $\bar{\gamma}_i$, $i=1,2$, leva $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ em $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$.

(3) Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça tal que γ_1 é minimal e $l_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Então as seguintes condições são equivalentes:

(i) seja γ_3 uma geodésica minimal entre $\gamma_2(l_2)$ e $\gamma_1(0)$. Então existe um triângulo em $M^{H-\epsilon}$ com $\bar{l}_i = l_i$, $i=1,2,3$, e $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$;

(ii) seja $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$ uma dobradiça em $M^{H-\epsilon}$ com $\bar{l}_i = l_i$, $i=1,2$. Então

$$l_2 - l_1 \leq d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(0)).$$

Demonstração: ((i) \Rightarrow (ii)) seja $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$ uma dobradiça em $M^{H-\epsilon}$. Aplicando (i) existe $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ com $\bar{l}_i = l_i$ e $\tilde{\alpha}_3 \leq \alpha_3$ e pelo item (1) e (2) obtemos

$$l_2 - l_1 \leq d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = \tilde{l}_3 \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(0)).$$

((ii) \Rightarrow (i)) tomamos a dobradiça como em (ii) e seja $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ o triângulo onde $\bar{\gamma}_3$ é uma geodésica minimal entre $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(0)$; aplicando o item (1)

devemos diminuir o ângulo $\bar{\alpha}_3$, para obter que $\bar{l}_3 = l_3$.

Uma dobradiça $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ é dita uma dobradiça pequena se $\frac{1}{2}r = \max(l_1, l_2)$ e $\exp_{\gamma_2(0)} : B_r(o_{\gamma_2(0)}) \longrightarrow B_r(\bar{\gamma}_2(0))$ é um difeomorfismo. Se $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é um triângulo geodésico, diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é um triângulo pequeno se cada $(\gamma_i, \gamma_{i+1}, \alpha_{i+2})$ é uma dobradiça pequena

- (4) (A) é verdadeiro para triângulos pequenos.
 (B) é verdadeiro para dobradiças pequenas

Demonstração: as duas afirmações são conseqüência do corolário (5.2.2) e nós provaremos só a primeira pois, a outra prova-se da mesma maneira. Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ um triângulo pequeno e fixemos $\gamma_2(0)$. Em $M^{H-\epsilon}$ considere a dobradiça $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$, onde $\bar{\alpha} = \alpha_3$ e $\bar{l}_i = l_i$, $i=1,2$. Por definição de r temos que a geodésica minimal $\bar{\gamma}_3$ que liga $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)$ pertence a $B_r(\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2))$. Logo $\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_2(0)}(c(t))$ e pelo o corolário (5.2.2) temos que

$$L[\bar{\gamma}_3] \geq L[\exp_{\gamma_2(l_2)}(c(t))] \geq d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)).$$

Sejam $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ uma dobradiça, $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \frac{\pi}{2})$ uma dobradiça em $M^{H-\epsilon}$ com $l_i = \bar{l}_i$ e seja $\bar{\gamma}_3$ uma geodésica minimal entre $\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)$ e $\bar{\gamma}_1(0)$. Podemos representar

$$\bar{\gamma}_3(t) = \exp_{\bar{\gamma}_2(t)}(f(t)\bar{E}(t)),$$

onde $\bar{E}(t)$ é o transporte paralelo ao longo de $\bar{\gamma}_2$ perpendicular a $\bar{\gamma}_2(t)$ e $f(t)$ uma função oportuna. Se $E(t)$ é o transporte paralelo do vetor $-\bar{\gamma}_1(l_1)$ ao longo de

$\bar{\gamma}_2$ chamaremos $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ uma dobradiça reta fina se as hipóteses do corolário (5.2.4) são satisfeitas. Isso é equivalente dizer que as geodésicas

$$s \rightarrow \exp_{\gamma_2(t)}(sE(t)), \quad s \leq f(t),$$

não têm pontos epifocais ou monofocais no interior.

(5) B é verdadeiro para dobradiças retas finas.

Demonstração: só aplicar o corolário (5.2.4).

Sejam $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça com $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ uma dobradiça em $M^{H-\epsilon}$ com $l_i = \bar{l}_i$, $i=1,2$, e seja $\bar{\gamma}_3$ uma geodésica minimal entre $\bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)$ e $\bar{\gamma}_1(0)$. Indicamos por $\bar{\sigma} : [0, l] \longrightarrow M^{H-\epsilon}$ uma geodésica que sai de $\bar{\gamma}_2(0)$ com

$$\langle \dot{\sigma}(0), \dot{\bar{\gamma}}_2(0) \rangle = 0, \quad \dot{\bar{\sigma}}(0) = \lambda_1 \dot{\bar{\gamma}}_1(l_1) + \lambda_2 \dot{\bar{\gamma}}_2(0), \quad \lambda_i > 0$$

e seja $\bar{\sigma}(l)$ o primeiro ponto que intercepta $\bar{\gamma}_3$. Tomamos σ uma geodésica que sai de $\gamma_2(0)$ com as mesmas propriedades de $\bar{\sigma}$. Diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ é uma dobradiça obtusa fina se $(\gamma_1, \sigma, \alpha - \frac{\pi}{2})$ é uma dobradiça pequena e $(\sigma, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ é um dobradiça reta fina.

(6) B é verdadeiro para dobradiças obtusas finas.

Demonstração: seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça obtusa fina. Aplicando a desigualdade triangular temos

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\gamma_1(0), \sigma(l)) + d(\sigma(l), \gamma_2(l_2)).$$

Pelos itens (4) e (5) temos

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(0), \sigma(l)) &\leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\sigma}(l)), \\ d(\gamma_2(l_2), \sigma(l)) &\leq d(\bar{\gamma}_2(l_2), \bar{\sigma}(l)). \end{aligned}$$

Então

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\sigma}(l)) + d(\bar{\gamma}_2(l_2), \bar{\sigma}(l)) = d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ uma dobradiça com $\alpha < \frac{\pi}{2}$ e seja $\gamma_2(l)$ o elemento da geodésica que fica mais perto de $\gamma_1(0)$. Indicamos por

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma_2 : [0, l] \longrightarrow M, \\ \theta &= \gamma_2 : [l, l_2] \longrightarrow M \end{aligned}$$

e por $\sigma : [0, k] \longrightarrow M$ uma geodésica minimal entre $\gamma_1(0)$ e $\gamma_2(l_2)$. Diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ é uma dobradiça aguda fina se (γ_1, τ, σ) é um pequeno triângulo e $(\sigma, \theta, \frac{\pi}{2})$ é uma dobradiça reta fina.

(7) B é verdadeiro para dobradiças retas finas.

Demonstração: aplicando (4) existe $(\bar{\gamma}_1, \bar{\tau}, \bar{\sigma})$ em $M^{H-\epsilon}$ tal que

$$\begin{aligned} l_1 &= \bar{l}_1 \\ L[\tau] &= L[\bar{\tau}] & \text{e} & \quad (-\dot{\bar{\gamma}}_1(l_1), \dot{\bar{\tau}}(0)) = \bar{\alpha} \leq \alpha \\ L[\sigma] &= L[\bar{\sigma}] & \text{e} & \quad (\dot{\bar{\tau}}(l), \dot{\bar{\sigma}}(0)) = \bar{\alpha}_1 \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Seja $\bar{\theta} : [l, l_2] \longrightarrow M^{H-\epsilon}$ a geodésica que sai de $\bar{\tau}(l)$ com vetor tangente $\dot{\bar{\tau}}(l)$ e considere a curva $\bar{\gamma}_2 = \bar{\tau} \cup \bar{\theta}$; então

$$(-\dot{\bar{\sigma}}(k), \dot{\bar{\theta}}(l_2)) = \pi - \bar{\alpha}_1 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por isso, a dobradiça $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ é uma dobradiça reta fina. Então pelo item (5) temos

$$d(\sigma(0), \theta(l_2)) \leq d(\bar{\sigma}(0), \bar{\theta}(l_2))$$

e daí concluímos que

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)).$$

Sendo $\bar{\alpha} \leq \alpha$, pelo item (1), obtemos o nosso resultado.

Diremos que $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é fino se $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ e $(\gamma_3, \gamma_2, \alpha_1)$ são dobradiças finas, no sentido de que são uma das dobradiças descritas anteriormente.

(8) (A) é verdadeiro por $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ fino.

Demonstração: pelos itens (5) e (7) existe $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha}_3)$ e $(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\alpha}_1)$ em $M^{H-\epsilon}$ que satisfazem (B). Sejam $\bar{\gamma}_3$ geodésica minimal entre $\bar{\gamma}_1(0)$ e $\bar{\gamma}_2(l_2)$ e $\tilde{\gamma}_3$ entre $\tilde{\gamma}_1(0)$ e $\tilde{\gamma}_2(\tilde{l}_2)$. Se nós diminuimos os ângulos $\bar{\alpha}_3$ e $\tilde{\alpha}_1$, pelo item (1), obtemos triângulos com lados iguais ao triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Agora pelo item (2) concluímos que os dois triângulos são iguais, que prova o nosso resultado.

Seja $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ como em (B). Dado $N > 0$, para cada inteiro positivo $0 \leq k, l \leq N$ ponhamos

$$\tau_{k,l} = \gamma_2 : [\frac{kl_2}{N}, \frac{(k+l)l_2}{N}] \longrightarrow M.$$

Indicamos por σ_k a geodésica minimal entre $\gamma_1(0)$ e $\gamma_2(\frac{kl_2}{N})$ e consideremos

$$T_{k,l} = (\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+l}).$$

Se $l_1 + L[\sigma_n] < l_2$ então se $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \alpha)$ é uma dobradiça em $M^{H-\epsilon}$ com $l_i = \bar{l}_i$ temos que

$$d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq |l_1 - l_2|;$$

em tal caso não temos nada para provar. Logo podemos assumir que

$$l_1 + L[\sigma_n] \geq l_2.$$

Queremos provar que cada $T_{k,l}$ é um triângulo geodésico. Sendo γ_1 e σ_N geodésicas minimais temos

$$\begin{aligned} L[\tau_{0,k}] + L[\sigma_k] &\geq l_1, \\ L[\tau_{k+l,N-k-l}] + L[\sigma_{k+l}] &\geq L[\sigma_N]. \end{aligned}$$

Então

$$L[\tau_{0,k}] + L[\sigma_k] + L[\tau_{k+l,N-k-l}] + L[\sigma_{k+l}] \geq l_2 = L[\tau_{0,k}] + L[\tau_{k,l}] + L[\tau_{k+l,N-k-l}].$$

Daí concluímos que $T_{k,l}$ são triângulos geodésicos.

(9) Existe N suficientemente grande tal que $T_{k,1}$ são finos.

Demonstração: no caso em que $H > 0$ podemos assumir que para cada $t \in [0, l_2]$ temos $d(\gamma_1(0), \gamma_2(t)) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ pois, caso contrário pelo teorema de Berger-Topogonov M seria isométrico à esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{H}}$ e daí não teremos nada para provar. Usando a compacidade de γ_2 , existe um ϵ_o de modo que, para cada $\epsilon \leq \epsilon_o$ existe $\eta(\epsilon) \leq \epsilon$ tal que para cada $s, t \in [0, l_2]$ temos

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(t)) + d(\gamma_1(0), \gamma_2(s)) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{H} - \epsilon} - 5\eta(\epsilon).$$

Daí segue-se que para $\epsilon \leq \epsilon_o$, se N é suficientemente grande em modo que $L[\tau_{k,1}] \leq \eta(\epsilon)$, então a cada dobradiça $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ e $(\sigma_{k+l}, \tau_{k,i}, \beta_k)$ podemos aplicar a proposição (6.2.3). Sempre pela compacidade de γ_2 existe $r_o > 0$ tal que

$$\exp_{\gamma_2(t)} : B_{2r_o}(o_{\gamma_2(t)}) \longrightarrow B_{2r_o}(\gamma_2(t))$$

é um difeomorfismo. Analisando cada caso provaremos que os triângulos $T_{k,1}$ são finos; verificaremos só as dobradiças $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ pois, as outras são completamente análogos.

1. $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$; neste caso $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ é uma dobradiça reta fina pois, pelo argumento anterior, podemos aplicar a proposição (6.2.3);

2. $\alpha_k > \frac{\pi}{2}$; o comprimento de σ , onde σ é geodésica que aparece no item (6), depende continuamente do comprimento de $\tau_{k,1}$. Logo, se assumirmos N suficientemente grande temos que para cada $0 \leq k \leq N$

$$r_o > \max(L[\tau_{k,1}], L[\sigma])$$

e por isso a dobradiça $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ é uma dobradiça obtusa fina.

3. $\alpha_k < \frac{\pi}{2}$; usando o mesmo argumento anterior prova-se que $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ é dobradiça aguda fina

No caso em que $H \leq 0$ e Δ seja negativo não temos problemas, em vez no caso em que $\Delta > 0$ consideramos N suficientemente grande de modo que (i) da proposição (6.2.3) seja verificado.

(10) Assumimos N como no item (9). Então se (A) é verdadeiro por $T_{k,l}$, l fixo e k qualquer, então (B) é verdadeiro por $T_{k,l+1}$, por k qualquer.

Demonstração: dado $(\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+l})$ existe $(\bar{\sigma}_k, \bar{\tau}_{k,l}, \bar{\sigma}_{k+l})$ em $M^{H-\epsilon}$ que satisfaz (A). Pelo item (1) e (2) concluímos que $\bar{\beta}_{k+l} \leq \beta_{k+l}$ e $\bar{\alpha}_k \leq \alpha_k$, onde α_k é o ângulo entre σ_k e $\tau_{k,l}$, β_{k+l} é o ângulo entre σ_{k+l} e $\tau_{k,l}$ e os outros dois nos respectivos triângulos em $M^{H-\epsilon}$. Prolongamos a geodésica $\bar{\tau}_{k,l}$ de modo a obter o mesmo comprimento da geodésica $\tau_{k,l+1}$. O ângulo $\bar{\alpha}_{k+l} \geq \alpha_{k+l}$ pois, $\beta_{k+l} + \alpha_{k+l} = \pi$, e sendo $(\sigma_{k+l}, \tau_{k,l+1}, \sigma_{k+l+1})$ um triângulo fino, obtemos, pelos itens (1) e (5) que $(\sigma_k, \tau_{k,l+1}, \alpha_k)$ verifica (B).

(11) Assumimos N como no item (9). Então (A) e (B) são verdadeiros para $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ em $M^{H-\epsilon}$.

Demonstração: É suficiente provar, usando um argumento de indução, que se $T_{k,l}$ verifica (A) e (B), l fixado e k qualquer, então $T_{k,l+1}$ verifica (A) e (B) para cada k .

Se $l = 1$ o triângulo geodésico $T_{k,1} := (\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$ é fino por hipótese e, por isso, verifica (B) e pelo item (3) verifica (A).

Suponhamos que a nossa afirmação é verdadeira para $l \leq l_o$. Como T_{k,l_o} , verifica (A) pelo item (10) T_{k,l_o+1} verifica (B) e pelo item (3) verifica (A).

(12) (A) é verificado para $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ e (B) é verificado por $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ em M^H .

Demonstração:

(B)

Nós sabemos que para cada $\epsilon > 0$ temos que

$$d(\bar{\gamma}_1^\epsilon(0), \bar{\gamma}_2^\epsilon(l_2)) \geq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)),$$

e a função à esquerda é contínua. Fazendo o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ encontramos uma dobradiça em M^H que satisfaz as propriedades anteriores, com ângulo α .

(A)

aplicar o item (3) ao triângulo $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ em $M^{H-\epsilon}$ e como anteriormente fazer o limite $\epsilon \rightarrow 0$. c.q.d.

Provaremos agora, alguns resultados que são consequência do teorema de Topogonov.

Corolário 6.2.5. Se $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ é um triângulo geodésico em uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $0 < H \leq K \leq \Delta$ então o perímetro do triângulo é no máximo $\frac{2\pi}{\sqrt{H}}$.

Demonstração: é suficiente aplicar (A) e observar que nas variedades M^H o máximo perímetro é exatamente $\frac{2\pi}{\sqrt{H}}$. c.q.d

Corolário 6.2.6. Seja (M, g) uma variedade de Hopf-Rinow conexa, completa, com curvatura seccional $0 < H \leq K \leq \Delta$. Assumimos que $d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ e que existe um ponto p tal que a função $q \rightarrow d(p, q)$ contém o intervalo $[0, \frac{\pi}{\sqrt{H}})$. Então M é isométrico a esfera $S_{\frac{1}{\sqrt{H}}}(T_p M \times \mathbb{R})$.

Demonstração: aplicando o teorema de Ekeland, existe uma seqüência q_n em M tal que

$$d(p, q_n) \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

e existe exatamente uma geodésica minimal que liga p com q_n . Aplicando o teorema de Topogonov à dobradiça $(\gamma_n, \gamma_m, \alpha_{n,m})$ temos que existe uma dobradiça em M^H $(\bar{\gamma}_n, \bar{\gamma}_m, \alpha_{n,m})$, com

$$d(q_n, q_m) \leq d(\bar{\gamma}_n(1), \bar{\gamma}_m(1)),$$

assumindo que cada geodésica tem como domínio $[0, 1]$. Como $\bar{\gamma}_n$ estão em $S_{\frac{1}{\sqrt{H}}}(T_p M \times \mathbb{R})$, a seqüência $\bar{\gamma}_n(1)$ converge e por isso q_n é uma seqüência de

Cauchy em M . Daí segue-se que $q_n \rightarrow q$ e $d(p, q) = d(M)$. Como a variedade M é de Hopf-Rinow, existe pelo menos uma geodésica minimal entre p e q e aplicando o teorema de Berger-Topogonov segue-se que a variedade M é isométrica à esfera $S_{\frac{1}{\sqrt{H}}}(T_p M \times \mathbb{R})$. c.q.d.

Terminaremos esta seção com uma versão do teorema da esfera na classe de variedade de Hopf-Rinow.

Teorema da Esfera Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, conexa, de Hopf-Rinow com curvatura seccional $\frac{4}{9} < \delta \leq K \leq 1$. Assumimos também que $i(M) \geq \pi$. Então M é contrátil e se $\mathbb{H} \cong l_2$, M é difeomorfa a $S(l_2)$.

Demonstração: como $\frac{4}{9} < \delta$ então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = \frac{3}{2}(\pi - \epsilon).$$

Como $i(M) \geq \pi$ existem dois pontos $p, q \in M$ tal que $d(p, q) = \pi - \epsilon$. Provaremos que

$$M = \overline{B_{\pi-\epsilon}(p)} \cup \overline{B_{\pi-\epsilon}(q)}.$$

Seja $r \in M$ tal que $d(p, r) \geq \pi - \epsilon$. Aplicando o corolário (6.2.5) do teorema de Topogonov ao triângulo geodésico de vértices (p, q, r) temos

$$d(q, r) \leq 2\left(\frac{3}{2}(\pi - \epsilon)\right) - 2(\pi - \epsilon) = \pi - \epsilon.$$

Agora, a prova continua exatamente como no teorema da Esfera (Rauch). c.q.d.

Bibliografia

- [1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E., AND RATIU, T. *Manifolds, tensor analysis, and application*. Applied Mathematical Sciences 75, Springer-Verlang, New York, 1988.
- [2] ANDERSON, L. The Bonnet-Myer theorem is true for Riemannian Hilbert manifold. *Math. Scand.* 58 (1986), 236–238.
- [3] ATKIN, C. J. The Hopf-Rinow theorem is false in infinite dimension. *Bull. London Math. Soc.* 7 (1975), 261–266.
- [4] BESSEGA, C. Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere. *Bull. Acad. Polon. Sci XIV* (1966), 27–31.
- [5] BILIOTTI, L., MERCURI, F., AND TAUSK, D. Note on tensor fields in Hilbert spaces. preprint, 2002.
- [6] BONIC, R., AND FRAMPTON, J. Smooth function on Banach manifolds. *J. Math. Mec.* 16 (1966), 877–898.
- [7] BURGHELEA, D., AND KUIPER, N. Hilbert manifolds. *Annals of Mathematics* 90 (1968), 379–417.
- [8] CHEEGER, J., AND EBIN, D. *Comparison theorem in Riemannian geometry*. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [9] DO CARMO, M. P. *Differential geometry of curves and surfaces*. Princeton-Hall, Inc, New Yersey, 1978.
- [10] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Segunda Edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.

- [11] EELLS, J. A setting for global analysis. *Bull. Amer. Math. Soc* 72 (1966), 751–807.
- [12] EKELAND, I. The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension. *Journal of Differential Geometry* 13 (1978), 287–301.
- [13] ELÍASON, H. Conduction (C) and geodesic on Sobolev manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* 77, n 6 (1971), 1002–1005.
- [14] GROSSMAN, N. *Geodesic on Hilbert manifolds*. PhD thesis, University of Minnesota, 1964.
- [15] GROSSMAN, N. Hilbert manifolds without epiconjugates points. *Proc. of Amer. Math. Soc* 16 (1965), 1365–1371.
- [16] HENDERSON, D. Infinite dimensional manifolds are open sets of Hilbert space. *Topology* 9 (1970), 25–33.
- [17] KARCHER, H. Riemannian center of mass and mollifier smoothing. *Comm. on Pure and Appl. Math.* XXX (1977), 509–541.
- [18] KLINGEMBERG, W. *Riemannian geometry*. De Gruyter studies in Mathematics, New York, 1982.
- [19] KOBAYASHI, S., AND NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*. vol I, Interscience Wiley, New York, 1963.
- [20] KUIPER, N. H. The homotopy group of the unitary group of a Hilbert space. *Topology* 3 (1965), 19–30.
- [21] KUIPER, N. H. Sur les variétés Riemanniennes très pinchées. *Séminaire Bourbaki* 24 année, 410 (1970–1971), 201–218.
- [22] LANG, S. *Algebra*. Second Edition. Addison-Wesley, New York, 1984.
- [23] LANG, S. *Differential and Riemannian manifolds*. Third Edition. Graduate Text in Mathematics, 160, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [24] LIMA, E. L. *Algebra linear*. Segunda Edição. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1998.
- [25] MCALPIN, J. *Infinite dimensional manifolds and Morse theory*. PhD thesis, University of Columbia, 1965.