



TIAGO SCHUSTER

**MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS  $\mathbb{L}$ -FUZZY COM ÊNFASE EM  
MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY INTERVALARES**

CAMPINAS

2015





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

TIAGO SCHUSTER

**MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS  $\mathbb{L}$ -FUZZY COM ÊNFASE EM  
MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY INTERVALARES**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

**Orientador: Prof. Dr. Peter Sussner**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO TIAGO  
SCHUSTER E ORIENTADA PELO PROF. DR. PETER  
SUSSNER.

**Assinatura do Orientador**

CAMPINAS

2015

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Schuster, Tiago, 1987-  
Sch88m Memórias associativas L-fuzzy com ênfase em memórias associativas fuzzy  
intervalares / Tiago Schuster. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Peter Sussner.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas fuzzy. 2. Memória associativa. 3. Morfologia matemática. 4.  
Conjuntos fuzzy. 5. Previsão de séries temporais. I. Sussner, Peter, 1961-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** L-fuzzy associative memories with an emphasis on interval-valued  
fuzzy associative memories

**Palavras-chave em inglês:**

Fuzzy systems

Associative memory

Mathematical morphology

Fuzzy sets

Time-series forecasting

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Peter Sussner [Orientador]

Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Rosangela Ballini

**Data de defesa:** 28-01-2015

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 28 de janeiro de 2015 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



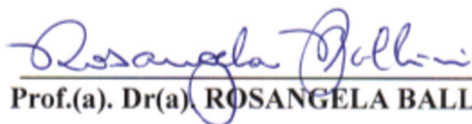
---

**Prof.(a). Dr(a). PETER SUSSNER**



---

**Prof.(a). Dr(a). MARCOS EDUARDO RIBEIRO DO VALLE MESQUITA**



---

**Prof.(a). Dr(a). ROSANGELA BALLINI**



## Abstract

The last decade has witnessed the emergence of a variety of lattice computing approaches towards computational intelligence such as morphological neural networks and fuzzy lattice reasoning / neuro-computing models. Here, the technical term “lattice” refers to a lattice in the mathematical sense of Birkhoff’s seminal work. Lattice theory grew out of Boolean algebra and has found a wide range of applications such as *mathematical morphology*, formal concept analysis, computational intelligence, and fuzzy set theory. Mathematical morphology on complete lattices represents the theoretical basis for a range of computational intelligence models known as morphological neural networks (MNNs) including gray-scale and *fuzzy morphological associative memories* (FMAMs).

The advent of type-2 fuzzy systems suggests the development of type-2 FMAMs and in particular interval type-2 FMAMs or interval-valued FMAMs. Recall that the class of fuzzy sets as well as the classes of type-2, interval type-2, and interval-valued fuzzy sets over an arbitrary universe together with different choices of partial orderings form classes of  $\mathbb{L}$ -fuzzy sets, where  $\mathbb{L}$  denotes a complete lattice. In this master’s thesis, we introduce  $\mathbb{L}$ -*fuzzy morphological associative memories* ( $\mathbb{L}$ -FMAMs) on the basis of  $\mathbb{L}$ -FMM. Our focus is on interval-valued FMAMs since interval type-2 fuzzy systems, have found various applications in engineering, computing with words, and approximate reasoning. We applied the aforementioned interval-valued FMAM models in conjunction with the interval-valued fuzzy c-means clustering technique to a time-series prediction problem in industry, namely the problem of forecasting the average monthly streamflow of a hydroelectric plant located in southeastern Brazil, and compared the predictions produced by the IV-FMAM approach with the ones produced by a number of competitive models from the literature.

**Keywords:** Fuzzy systems, associative memory, mathematical morphology, fuzzy sets, time-series forecasting.

## Resumo

As últimas décadas têm testemunhado a emergência de uma variedade de abordagens à re-

solução de problemas com base na computação em reticulados como, por exemplo, as redes neurais morfológicas e os modelos neurocomputação e de raciocínio fuzzy em reticulados. Usamos aqui o termo “reticulado” no sentido dado no trabalho seminal de Birkhoff. A teoria dos reticulados nasceu da álgebra booleana e tem um grande leque de aplicações como a análise de conceitos formais, a inteligência computacional, a teoria dos conjuntos fuzzy e a *morfologia matemática* (MM). A MM em reticulados completos representa a base teórica para uma série de modelos de inteligência computacional conhecidos como redes neurais morfológicas (MNNs), que incluem as memórias associativas morfológicas em tons de cinza e as *memórias associativas morfológicas fuzzy* (FMAMs).

O advento de sistemas fuzzy tipo-2 sugere o desenvolvimento das FMAMs tipo-2 e em particular FMAMs tipo-2 intervalar, ou FMAMs intervalar (IV-FMAMs). Observemos aqui que a classe dos conjuntos fuzzy, assim como a dos conjuntos fuzzy tipo-2, fuzzy tipo-2 intervalar e fuzzy intervalar sobre um universo arbitrário em conjunção com diferentes escolhas de ordens parciais formam classes de conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy, em que  $\mathbb{L}$  denota um reticulado completo. Nessa dissertação de mestrado, introduzimos as *memórias associativas  $\mathbb{L}$ -fuzzy* ( $\mathbb{L}$ -FMAMs) com base na morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy ( $\mathbb{L}$ -FMM). Nosso foco está nas FMAMs fuzzy intervalar, uma vez que sistemas fuzzy intervalar têm sido aplicados com sucesso em problemas de engenharia, computação com palavras e raciocínio aproximado. Nós aplicamos os modelos de IV-FMAMs em conjunção com a técnica de clusterização fuzzy c-means intervalar a um problema de predição de série temporal, especificamente o prognóstico da vazão mensal de uma usina hidroelétrica localizada no sudeste brasileiro. Por fim, comparamos as predições produzidas pela abordagem das IV-FMAMs com aquelas produzidas por modelos competitivos da literatura.

**Palavras-chave:** Sistemas fuzzy, memória associativa, morfologia matemática, conjuntos fuzzy, previsão de séries temporais.



---

# CONTEÚDO

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Sobre Redes Neurais Artificiais . . . . .	2
1.2 Memórias Associativas Neurais . . . . .	6
1.3 Memórias Associativas Fuzzy . . . . .	7
1.4 Organização da Dissertação . . . . .	10
<b>2 Teoria de Reticulados e Morfologia Matemática</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução e Conceitos Básicos da Teoria dos Reticulados . . . . .	12
<b>3 Morfologia Matemática <math>\mathbb{L}</math>-fuzzy</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e suas Extensões . . . . .	19
3.2 Teoria dos Conjuntos $\mathbb{L}$ -Fuzzy . . . . .	22

3.3	Morfologia Matemática $\mathbb{L}$ -fuzzy . . . . .	29
3.3.1	Alguns Conceitos Relevantes da Morfologia Matemática Fuzzy . . . . .	29
3.3.2	Conceitos Básicos da Morfologia Matemática $\mathbb{L}$ -fuzzy . . . . .	34
3.4	Operadores da Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar . . . . .	37
3.4.1	Noções Básicas da Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intervalares . . . . .	37
3.4.2	Operadores Fuzzy Intervalares Baseados em Operadores Fuzzy . . . . .	39
3.5	Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar . . . . .	43
3.5.1	Construção de Operadores Baseada em Adjunção . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Memórias Associativas Morfológicas <math>\mathbb{L}</math>-Fuzzy e Fuzzy Intervalar</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução às Memórias Associativas Morfológicas Fuzzy . . . . .	52
4.1.1	Max-C FMAMs . . . . .	54
4.2	Memórias Associativas Morfológicas $\mathbb{L}$ -Fuzzy . . . . .	56
4.2.1	Max- $\mathcal{C}$ $\mathbb{L}$ -FMAMs . . . . .	56
4.2.2	IV-FMAMs . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Previsão de vazões de Furnas</b>	<b>65</b>
5.1	Sobre Furnas . . . . .	65
5.2	O Previsor Baseado nas IV-FAMs . . . . .	67
5.2.1	Resultados Computacionais . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>

*À minha grande família.*



---

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Marisa Konart Schuster e Valdir Schuster, pelo amor e apoio incondicionais, cruciais e inestimáveis para meu desenvolvimento assim como para o desenvolvimento dessa dissertação. Sou extremamente grato a minha família, tanto a de sangue quanto a de coração, pelo apoio em todas as circunstâncias, alegres ou tristes.

À Isabella Cristina Stangherlin Santucci, minha noiva e companheira inseparável, por todos os momentos de carinho, amor e compreensão, agradeço imensamente.

Agradeço a todos meus amigos, pelas experiências e momentos inesquecíveis, sejam do passado ou aquelas que ainda certamente virão.

Expresso minha gratidão ao Prof. Dr. Peter Sussner, meu orientador, por ser paciente, compreensivo e por ser um ótimo professor e orientador, assim como um grande amigo.

Agradeço à Prof. Dr. Rosangela Ballini e ao Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita pelas sugestões e críticas à essa dissertação. Agradeço também a todos os professores e funcionários da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, que me acolheram e contribuíram para minha formação acadêmica e desenvolvimento como ser humano.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro durante esses anos.



*“Any man could,  
if he were so inclined,  
be the sculptor of his own brain.”*

[Santiago Ramón y Cajal – Advice for a Young Investigator]





---

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação de uma rede de neurônios por Santiago Ramón y Cajal. . . . .	3
1.2	O modelo de neurônio artificial de McCulloch& Pitts. . . . .	4
2.1	O reticulado Potencia de Conjuntos. . . . .	14
3.1	Função de pertinência do conjunto fuzzy “números próximos de 0”. . . . .	21
3.2	Definições de função de pertinência diferentes de “temperatura agradável”. . .	22
3.3	Exemplos de figuras em preto e branco e tons de cinza. . . . .	30
3.4	Exemplo de figura intervalar construída com diferentes iluminações da mesma figura em tons de cinza. . . . .	31
3.5	Exemplo de elemento estruturante e uma imagem. . . . .	31
3.6	Exemplo de erosão e dilatação morfológicas binárias. . . . .	32
3.7	Exemplo de erosão e dilatação morfológicas fuzzy. . . . .	32
3.8	Abertura e fechamento morfológico fuzzy. . . . .	33
3.9	Relação entre erosões e dilatações com respeito a adjunção e negação de um reticulado. . . . .	36
3.10	O reticulado $\mathbb{I}$ . . . . .	38

3.11	Exemplo de figura intervalar construída com diferentes iluminações da mesma figura em tons de cinza. . . . .	46
3.12	Exemplo de figura intervalar construída com diferentes iluminações da mesma figura em tons de cinza. . . . .	46
3.13	Relações entre conectivos representáveis e pseudo-representáveis em $\mathbb{I}$ e suas R-implicações e R-conjunções. . . . .	48
5.1	Esquematização de um sistema de inferência neuro-fuzzy. As regras do sistema são armazenadas em uma memória associativa. . . . .	67
5.2	Função de pertinência de um conjunto fuzzy intervalar visto como caso particular de conjunto fuzzy tipo-2. . . . .	70
5.3	Previsão da vazão mensal do reservatório de 1996 até 2005 utilizando a IV-FMAM baseada no operador $C_F^r$ . . . . .	74
5.4	Previsão da vazão do lago de 1996 até 2005 utilizando a IV-FMAM baseada no operador otimista $C_F^o$ . . . . .	75
5.5	Previsão da vazão do lago de 1996 até 2005 utilizando a IV-FMAM baseada no operador $C_F^r$ (em vermelho) e a IT2-FLS de Mamdani (em preto). . . . .	75

---

## LISTA DE TABELAS

2.1	Propriedades das operações de reticulado $\vee$ e $\wedge$ . . . . .	13
5.1	Erros produzidos na validação cruzada leave-one-out de 1931 até 1995. . . .	72
5.2	Erros produzidos pelos modelos de predição. . . . .	73
5.3	Resultados produzidos pelo IT2 FLS de Mamdani nos dados de teste. . . . .	73



---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

Nascida como uma nova abordagem a construção de sistemas computacionais inteligentes, a Computação Flexível, ou *Soft Computing*, foi introduzida como área formal de estudo na década de 90 para tratar de problemas reais complexos, que requerem conhecimento, técnica e metodologia das mais diversas fontes [68].

Estas exigências fazem com que as ferramentas feitas para resolver estes problemas sejam baseadas em diversas técnicas diferentes das mais diversas áreas. E é exatamente este o paradigma da Computação Flexível, baseado no tripé composto pelas *redes neurais artificiais*, *conjuntos fuzzy* e *técnicas de otimização heurísticas* para construir *sistemas inteligentes híbridos* que incorporam as características das três áreas citadas. Das redes neurais artificiais vêm a adaptabilidade e capacidade de aprendizado, dos sistemas de inferência fuzzy a capacidade de síntese do conhecimento especialista, de inferência e tomada de decisão em meios de grande imprecisão e das técnicas heurísticas de otimização a simplicidade e performance em buscas aleatórias sistemáticas [68].

Um dos exemplos mais representativos de sistemas que seguem o paradigma da computação flexível são os *sistemas híbridos neuro-fuzzy*, que consistem na combinação de redes neurais artificiais e sistemas de inferência fuzzy [67]. Estes modelos híbridos, conhecidos

amplamente por *redes neurais fuzzy*, são usualmente representadas por redes neurais especiais *feedforward* de várias camadas, mas constam na literatura com outras arquiteturas como mapas auto-organizáveis e redes recorrentes [10, 21, 22, 160], e tem sido de grande utilidade prática por se tratarem de aproximadores universais com a habilidade de formar regras fuzzy *se-então* humanamente interpretáveis [68]. Casos particularmente interessantes destas redes neurais fuzzy são as *memórias associativas fuzzy*, que foram paralelamente desenvolvidas em relação as memórias associativas clássicas como meio de armazenamento de regras fuzzy com todas as vantagens de que contam as memórias associativas [85].

Nesta dissertação vamos propor uma extensão das memórias associativas morfológicas fuzzy com base na morfologia matemática em reticulados completos e de maneira especial, em conjuntos fuzzy intervalares. Para isso vamos inicialmente fazer uma contextualização histórica das diferentes áreas que compõe a computação flexível e das memórias associativas morfológicas fuzzy, o que inclui um breve histórico do desenvolvimento das redes neurais e redes neurais fuzzy durante o século XX, em particular das memórias associativas e memórias associativas fuzzy que seguiram na literatura, assim como da *teoria dos conjuntos fuzzy* e da *morfologia matemática* durante esse mesmo período.

## 1.1 Sobre Redes Neurais Artificiais

Inspiradas na arquitetura das redes neurais encontradas no cérebro humano, as *redes neurais artificiais* podem ser vistas, segundo Haykin [54], como processadores massivamente paralelos e distribuídos, compostos por unidades simples de processamento e uma rede de ligações entre essas unidades, em uma estrutura análoga a das redes neurais naturais. Esta estrutura análoga é construída de maneira que os sistemas resultantes herdem ao menos algumas das características das redes naturais, como sua capacidade de aprendizado e generalização [54].

Por essas características, as ANNs têm sido amplamente aplicadas em problemas em que não se tem conhecimento prévio dos dados ou há uma necessidade de aprendizado e adaptação do sistema a novas situações. Exemplos dessas aplicações incluem reconhecimento de

caracteres [124], compressão de imagens [46], esteganografia [66], além de serem utilizadas no mercado financeiro desde a década de 80 em áreas como a análise de risco e previsão [87, 134]. Aplicações como estas demonstram um grande interesse no desenvolvimento da área, de maneira que a literatura recente sobre as ANNs se mostra muito rica, principalmente após alguns grandes avanços ocorridos nas últimas décadas [54].

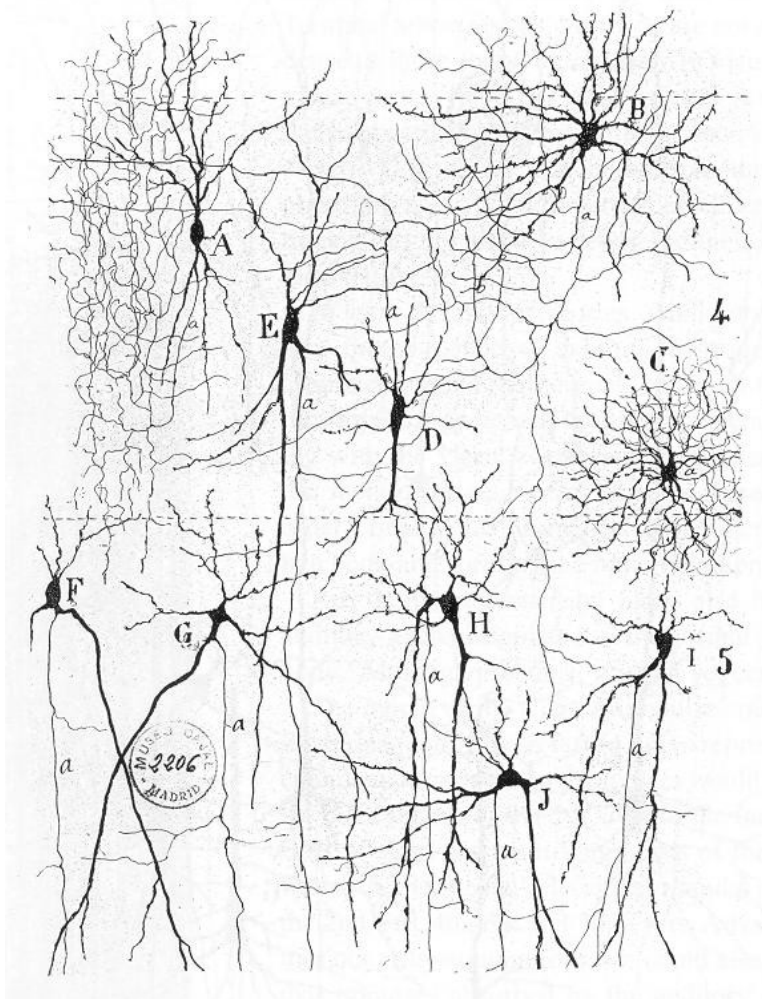


Figura 1.1: Representação de uma rede de neurônios por Santiago Ramón y Cajal [40].

No entanto, todos estes avanços só foram possíveis graças a progressos iniciais na área da neurofisiologia ocorridos após o final do século XIX, especificamente, com a descoberta do neurônio como unidade metabólica distinta e unidade básica de processamento do cérebro dos seres vivos. Esta descoberta, feita pelo anatomista espanhol Santiago Ramón y Cajal,

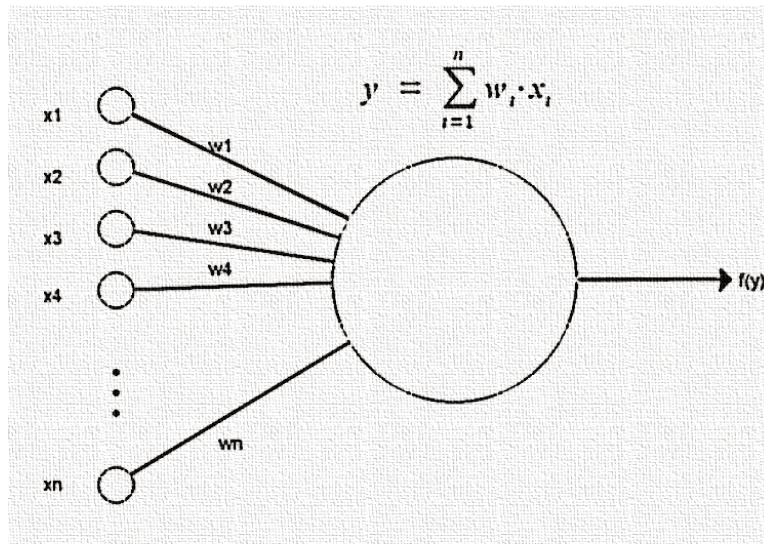


Figura 1.2: O modelo de neurônio artificial de McCulloch & Pitts.

provocou na época uma mudança radical nos estudos da neurociência, pois foi de encontro aos trabalhos de Golgi que postulava que o cérebro formava uma estrutura contínua [40]. Cajal, um exímio desenhista, foi também responsável por belos desenhos de neurônios dos mais diversos tipos vistos no microscópio, como os da Figura 1.1, e serviram como referência durante muito tempo na área da neurofisiologia.

Na tentativa de entender como essas unidades metabólicas funcionam, o neurofisiologista Warren McCulloch e o matemático Walter Pitts apresentam em 1943 o que seria o primeiro modelo matemático de um neurônio, em sua publicação “*A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*” [104] no *Bulletin of Mathematical Biophysics*. Neste trabalho, algumas funcionalidades pertinentes dos neurônios biológicos foram modeladas seguindo a Lei de Polarização Dinâmica de Cajal [8] da seguinte maneira: os sinais de entrada, denotados por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , vindos de outros neurônios ou de outras células estimuladas, chegam ao dendrito do neurônio receptor com certo peso, determinado pela força da sinapse entre os neurônios em questão, podendo este sinal chegar ao corpo celular do neurônio receptor parcial ou integralmente. A força dessas ligações, ou *pesos sinápticos*, foram modelados por  $w_1, w_2, \dots, w_n \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . No corpo celular então se somam todos os sinais de entrada já com seus respectivos pesos,  $y = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i$ , para somente então o neurônio passar o sinal



adiante de acordo com uma função de saída,  $f(y)$ , que modela o potencial mínimo de ação das vesículas sinápticas da membrana do axônio, como mostra a Figura 1.2. Este modelo representa a base do *paradigma conexionista* de computação [37, 53, 59].

Deste modelo inicial foram derivados muitos outros, como os *neurônios semi-lineares*, e *pulsantes* [98], que podem ser mais próximos, ou não, dos modelos que encontramos nos organismos vivos. Apesar da inspiração biológica, alguns destes modelos acabam se afastando dessa inspiração a medida em que são desenvolvidos. No entanto, os modelos resultantes apresentam grandes vantagens pois são dotados de maior abstração matemática, o que possibilita uma análise formal de suas características como desempenho e capacidade de generalização. Um destes modelos são as *memórias associativas* (AMs) que, antes vistas como redes neurais feedforward de uma única camada baseadas na regra de ativação neuronal de Hebb [55], são estudadas hoje como sistemas não-lineares que armazenam associação de padrões [85].

## 1.2 Memórias Associativas Neurais

As *memórias associativas neurais* são sistemas baseados nas redes neurais que associam padrões de entrada e saída e tiveram sua origem nos estudos de Taylor em 1956 e Steinbruch [137, 151] que, em 1961, introduziu a *Lernmatrix* baseada em estudos de matrizes de correlação e na regra de Hebb de ativação neuronal [55, 123].

Depois da *Lernmatrix*, foram propostas as *memórias associativas holográficas* [39, 60, 157, 158] por P. J. van Herdeen, que assumia que o processo de armazenamento de memórias em sistemas biológicos era baseada na holografia [163]. Independentemente em 1972, Anderson [2], Teuvo Kohonen [79] e Nakano [111] sugerem a construção de uma memória associativa no estilo da de Steinbruch, isto é, baseada na regra de aprendizado de Hebb, mas substituindo a *lernmatrix* por uma matriz de correlação de sinais componentes, modelo este que ficou conhecido como *memória associativa linear (LAM)*.

Um pouco depois, em 1977, Kohonen publicou o que seria o primeiro livro com uma análise detalhada dos modelos de memórias associativas [80]. Neste mesmo ano, Anderson et al. [3] introduziram o *Brain-State-in-a-Box* [42, 43, 52, 64], um modelo de memória auto-associativa que mais tarde seria aplicado no armazenamento de um grande número de registros médicos contendo sintomas, diagnósticos e tratamentos para cada caso, chamado *Instant Physician* [56].

No início da década de 80, Hopfield publicou o seu clássico artigo “*Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities*” [62], no qual ele trata de um modelo de memória auto-associativa dinâmica para padrões bipolares, mais tarde conhecido como *rede de Hopfield*, que foi responsável por inúmeras aplicações, como na solução eficiente do clássico problema do *caixeiro viajante* [54, 63, 150]. A partir da rede de Hopfield se desenvolveram diversas variações como as *memórias associativas de Hopfield com armazenamento por projeção* de Personnaz et al. [116] e Kanter e Sompolinsky [73] e as *memórias associativas bidirecionais (BAM)* de Kosko no final da década de 80 [82, 83, 113].

Já no final dos anos 80 e início dos anos 90 houve a emergência de pesquisas na área de Computação Flexível e sistemas neuro-fuzzy, sistemas estes que possuem a vantagem do po-

der de representação dos conjuntos fuzzy e a capacidade de aprendizado e generalização das redes neurais. Dentre os diversos sistemas neuro-fuzzy que foram surgindo, citamos as *redes neurais fuzzy (FNN)* [21] e em particular as *memórias associativas fuzzy (FAMs)* [85]. As FAMs tiveram sua teoria concebida como consequência direta do estudo de sistemas de inferência baseado em regras fuzzy e mapeamentos entre conjuntos fuzzy [84, 115], isto é, elas foram desenvolvidas em um ramo paralelo em relação aos modelos de memória associativa biologicamente inspirados até então desenvolvidos.

## 1.3 Memórias Associativas Fuzzy

Introduzida por Zadeh em 1965 [169], a *teoria dos conjuntos fuzzy* veio com o objetivo de sanar problemas inerentes de representação de características vagas ou imprecisas de objetos reais que aparecem na teoria clássica de conjuntos. Estas características vagas ou imprecisas aparecem naturalmente na *linguagem natural* humana e em medidas feitas direta ou indiretamente em objetos usuais. Por isso, os conjuntos fuzzy tem sido aplicados com sucesso nas mais diversas áreas: processamento de imagens [159] e de linguagem natural [58], otimização [129], avaliação de sistemas [23], medicina [1], mineração de dados [61], dentre muitas outras aplicações industriais. Além disso, a característica intrínseca de representação de informações vagas faz com que a teoria dos conjuntos fuzzy tenha muitas vezes laços estreitos com a área de sistemas de controle inteligente.

Juntamente com a popularização de *sistemas baseados em regras fuzzy* para a implementação de controladores de comportamento “inteligente” um esforço grande se deu também no âmbito teórico. No final da década de 80 Kosko propôs o estudo de sistemas fuzzy na visão de simples mapeamentos entre cubos de conjuntos fuzzy, isto é, produtos vetoriais de conjuntos fuzzy [85]. Nesta visão, uma regra como a seguinte R1: “Se o tráfego está PESADO nessa direção então mantenha o sinal verde por MAIS TEMPO” poderia ser codificada como uma associação entre os conjuntos fuzzy PESADO e MAIS TEMPO, que formariam um par associado (PESADO, MAIS TEMPO), par este que ele chamou de *regra FAM*. Desta maneira, Kosko propôs que um sistema fuzzy se comporta como uma memó-

ria associativa, fato que liga indiscutivelmente o estudo de sistemas fuzzy com o campo das memórias associativas. Dessa maneira nasceram as *memórias associativas fuzzy* (FAMs), definidas como mapeamentos entre cubos de conjuntos fuzzy capazes de armazenar um banco de regras FAM[85].

No campo prático as FAMs são usadas em diversas áreas como em previsão de séries temporais [24] e controle [81]. Elas podem ser escritas como um produto matricial fuzzy, isto é, uma generalização fuzzy do produto matricial clássico. Por exemplo, o produto matricial fuzzy *max-min* é obtido pela substituição da soma e produto clássicos pelas operações de máximo e mínimo, respectivamente. Diferentes composições fuzzy dão origem a diferentes FAMs, por exemplo aquelas propostas por Chung e Lee, que deram origem as *memórias associativas fuzzy generalizadas* (GFAM), usando a composição *max-t*, onde  $t$  é uma t-norma [25]. Esta composição é também utilizada pelas *memórias associativas fuzzy implicativas* [156], IFAMs, cujo diferencial em relação às GFAMs é o método de aprendizado, além destas memórias apresentarem capacidade ilimitada de armazenamento e convergência em um passo no caso auto-associativo [70]. As memórias fuzzy implicativas pertencem a uma classe mais geral de memórias associativas, que são as *memórias associativas morfológicas fuzzy*, FMAMs [100, 109, 139, 149, 154].

Estas memórias, as FMAMs, surgiram como generalização das *memórias associativas morfológicas*, MAMs [120], e apresentam um rol de aplicações bastante diversificado, que inclui problemas de reconhecimento de movimento em humanos [152], controle [81, 168] e detecção de falhas instrumentais [128]. Além disso, estas memórias generalizam muitos modelos de AM e FAMs previamente propostos na literatura, apresentam métodos de aprendizado simples e uma boa capacidade de armazenamento graças a conceitos como a adjunção da morfologia matemática (fuzzy).

A *morfologia matemática* (MM), por sua vez, é uma teoria para análise de estruturas espaciais, especialmente para análise da forma de objetos, baseada na teoria dos conjuntos, geometria integral e álgebra de reticulados [127, 136]. Não somente uma teoria, a MM é uma reconhecida e poderosa ferramenta de análise de imagens, e apresenta aplicações diversas como filtro de imagens, segmentação, classificação, reconhecimento de padrões, análise de

textura, dentre outras tantas aplicações encontradas na literatura [20, 47, 48, 49, 76, 118, 135, 136]. Esta poderosa teoria teve sua origem na década de 60 na França [103] a partir de estudos de meios porosos, os quais podem ser representados por um conjunto binário no sentido de que um ponto neste meio pertence ou não ao material que contorna os poros. Tendo este conceito em mente, Georges Matheron e Jean Serra [101, 102] introduziram um formalismo de conjuntos baseados nas operações de adição e subtração de Minkowski [108] para a análise de imagens binárias, de maneira que imagens binárias puderam a partir daí ser tratadas com operações simples como uniões, intersecções, complementos e translações.

A partir da generalização desse formalismo de conjuntos que possui a MM binária, diversas extensões foram propostas de tal maneira que ela pudesse também tratar imagens em tons de cinza e multiespectrais. No caso da morfologia matemática em tons de cinza podemos citar as extensões de Serra e Sternberg [127, 138], a técnica de *umbra* [126] e a *morfologia matemática fuzzy (FMM)* [16, 31, 109], sendo que esta última generaliza as operações com conjuntos clássicos para conjuntos fuzzy. A própria FMM apresenta uma gama vasta de abordagens como a de De Baets [27, 28], Sinha e Dougherty [130, 131, 132], Bloch e Maitre [16, 17], Deng e Heijmans [31], Nachtgaele e Kerre [109] e Maragos [100]. Atualmente, é amplamente aceito que o framework apropriado a condução da MM é o de reticulados completos [57, 122, 127], fato que conduz a uma vantajosa algebrização da MM. A partir dessa algebrização, Sussner et. al. definiram uma morfologia matemática conduzida nos conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy ( $\mathbb{L}$ -FMM) [143, 142], que generaliza não só a morfologia matemática clássica e diversas abordagens da morfologia matemática em tons de cinza, como a FMM, mas também extensões da FMM, como a morfologia matemática em conjuntos fuzzy intervalares [143] e a FMM em conjuntos fuzzy bipolares [15].

Por esta capacidade de generalização e por seus casos particulares interessantes, escolhemos a morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy como base teórica para uma nova classe de memórias associativas, as *memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy*. Daremos uma especial ênfase em um caso especial, as *memórias associativas morfológicas fuzzy intervalares (IV-FMAMs)*, pela maturidade alcançada na literatura da formalização dos conjuntos fuzzy intervalares e da própria morfologia fuzzy intervalar [143].

## 1.4 Organização da Dissertação

Para que possamos definir as memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalar, vamos apresentar o conteúdo desta dissertação da seguinte maneira: no capítulo 2, faremos um apanhado dos tópicos pertinentes da morfologia matemática e definiremos seus operadores com base na teoria dos reticulados.

Após introduzirmos as definições básicas dos operadores da MM em reticulados completos faremos no, Capítulo 3, seguindo as linhas dos trabalhos de Sussner et al.[143, 142], um apanhado da teoria dos conjuntos fuzzy e suas extensões pertinentes, com especial cuidado na definição e construção de operadores representáveis e pseudo-representáveis. Logo após isto, apresentaremos uma abordagem a morfologia matemática fuzzy,  $\mathbb{L}$ -fuzzy e, em especial, a morfologia matemática fuzzy intervalar, baseada na extensão dos conceitos de inclusão e intersecção fuzzy que formam dilatações e erosões.

A partir desses operadores dilativos e erosivos e do framework apresentado no Capítulo 3, iremos no Capítulo 4 apresentar as memórias associativas morfológicas fuzzy e introduzir o caso  $\mathbb{L}$ -fuzzy, em particular as memórias associativas morfológicas fuzzy intervalares, que são o foco desta dissertação. No Capítulo 5 apresentaremos uma aplicação de predição da vazão de uma usina hidrelétrica utilizando as novas IV-FMAMs em um sistema híbrido neuro-fuzzy, comparando com diversos métodos da literatura e, finalmente, no Capítulo 6, faremos a conclusão.

---

## CAPÍTULO 2

---

# TEORIA DE RETICULADOS E MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Trazida a luz por trabalhos na área da lógica proposicional [18] e formalizada na álgebra moderna por Dedekind no final do século XIX [29], a Teoria dos Reticulados se desenvolveu com trabalhos como os de Kurosh, Malcev, Ore, von Neumann, Tarsky e, em especial, com os trabalhos de Birkhoff [12] que, juntamente com o desenvolvimento dos computadores digitais, os quais respondem por inúmeras aplicações, foram responsáveis pela popularização dessa teoria. Hoje os conceitos da teoria dos reticulados estão difundidos por toda a álgebra moderna e têm aplicações nas mais diversas áreas como em inteligência computacional, que incluem as redes neurais morfológicas [117, 121, 140, 146], modelos neurocomputacionais de raciocínio aproximado [71, 72, 90], análise de conceitos formais, teoria dos conjuntos fuzzy e morfologia matemática. Intimamente ligada com a Teoria dos Reticulados como sua base formal por Serra [127], a morfologia matemática representa a base de um leque de modelos de inteligência computacionais conhecidos como redes neurais morfológicas (MNN) [26] e, em especial, as memórias associativas morfológicas (MAM) [120] e memórias associativas morfológicas fuzzy [154], assim como a extensão  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalar que

serão introduzidas nesta dissertação.

## 2.1 Introdução e Conceitos Básicos da Teoria dos Reticulados

Vamos tratar nessa seção dos conceitos básicos da teoria dos reticulados e como eles são utilizados para construir os operadores básicos da morfologia matemática. Para isso, iniciemos com um dos conceitos mais básicos desta teoria, que é a de um conjunto parcialmente ordenado (poset) .

**Definição 1.** Um *poset*  $(X, \leq)$  é um conjunto não-vazio  $X$  dotado de uma ordenação parcial  $\leq$ , isto é, no qual a relação binária  $x \leq y$  é definida segundo as seguintes condições,  $\forall x, y, z \in X$ :

P1)  $x \leq x$ ;

P2) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  então  $x = y$ ;

P3) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  então  $x \leq z$ .

O poset  $(X, \leq)$  é um **conjunto totalmente ordenado**, ou uma **cadeia**, se também satisfizer a propriedade P4:

P4)  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ ,  $\forall x, y \in X$ .

Dado um poset  $(X, \leq)$  e um subconjunto  $Y \subset X$ , o elemento  $l \in X$  é um *limite inferior* de  $Y$  se  $l \leq y$  para todo  $y \in Y$ . O maior limite inferior  $l_0 \in X$ , se existir, é chamado de *ínfimo* de  $Y$ , i.e, dada qualquer cota inferior  $l$  de  $Y$ , vale  $l \leq l_0$ . Denotaremos aqui o ínfimo entre dois elementos  $x$  e  $y$  como  $x \wedge y$ . De maneira análoga, o elemento  $u \in X$  é um *limite superior* de  $Y$  se  $y \leq u$  para todo  $y \in Y$ . O menor limite superior  $u_0 \in X$ , se existir, é chamado de *supremo* de  $Y$ , i.e, dada qualquer cota superior  $u$  de  $Y$ , vale  $u_0 \leq u$ . Denotaremos aqui o supremo entre dois elementos  $x$  e  $y$  como  $x \vee y$ . Por fim, dado  $Y = \{y_i \mid i \in I\}$  para um



		Propriedade
L1. $x \vee x = x$	L1'. $x \wedge x = x$	Idempotência
L2. $x \vee y = y \vee x$	L2'. $x \wedge y = y \wedge x$	Comutatividade
L3. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	L3'. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	Associatividade
L4. $x \vee (x \wedge y) = x$	L4'. $x \wedge (x \vee y) = x$	Absorção
L5. $x \leq y \Leftrightarrow y = x \vee y$	L5'. $x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y$	Consistência
L6. $x \wedge (\bigvee_{i \in J} y_i) = \bigvee_{i \in J} (x \wedge y_i)$	L6'. $x \vee (\bigwedge_{i \in J} y_i) = \bigwedge_{i \in J} (x \vee y_i)$	Distributividade

Tabela 2.1: Propriedades das operações de reticulado  $\vee$  e  $\wedge$ .

conjunto de índices  $I$  qualquer, denotaremos o ínfimo entre os elementos de  $Y$  como  $\bigwedge_{i \in I} y_i$  e  $\bigvee_{i \in I} y_i$  como o supremo.

**Definição 2.** Um **reticulado** é um poset  $\mathcal{L}$  no qual quaisquer dois elementos  $x$  e  $y$  possuem uma maior cota inferior,  $x \wedge y$ , e uma menor cota superior,  $x \vee y$ . Um reticulado  $\mathbb{L}$  é dito **completo** se cada um de seus subconjuntos  $X$  possuir um ínfimo  $\bigwedge X$  e um supremo  $\bigvee X$  em  $\mathbb{L}$ .

Os símbolos  $\mathcal{L}$  e  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$  serão utilizados como notação para reticulados. Caso o reticulado em questão seja completo será utilizado  $\mathbb{L}$  no lugar de  $\mathcal{L}$ .

Algumas observações podem ser feitas a respeito das operações de reticulado  $\vee$  e  $\wedge$ . Por um lado, dado um reticulado  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ , suas operações satisfazem as quatro primeiras condições fundamentais dadas na Tabela 2.1. Por outro lado, um conjunto  $\mathcal{L}$  equipado com duas operações binárias  $\vee$  e  $\wedge$  que satisfazem L1-L4 (resp. L1'-L4') é um reticulado cujo supremo é dado por  $\vee$ , o ínfimo  $\wedge$  e a ordem parcial é dada por L5. Um reticulado  $\mathcal{L}$  é dito *distributivo* se satisfaz a sexta propriedade para qualquer conjunto de índices  $J$  finito. Alguns exemplos de reticulados serão dados a seguir.

**Exemplo 1.** Conjunto de potências  $\mathcal{P}$  de um conjunto é um reticulado que tem por elementos todos os subconjuntos de um conjunto e com a ordenação dada pela inclusão. Por exemplo, para  $X = \{A, B, C\}$  temos  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$ . Uma representação desse reticulado pode ser vista na Figura 2.1.

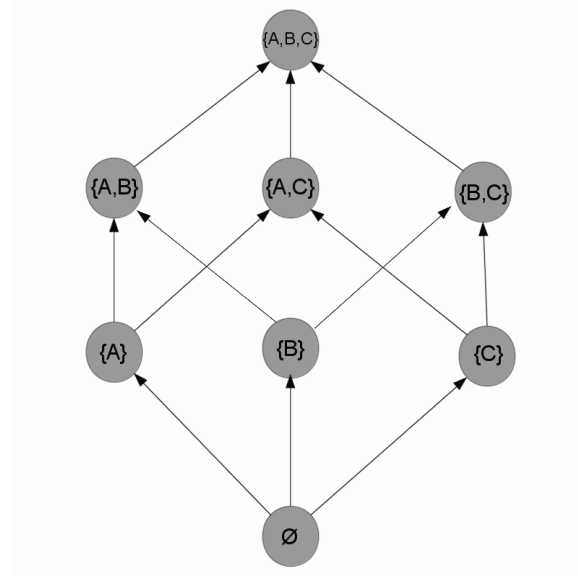


Figura 2.1: O reticulado Potencia de Conjuntos.

**Exemplo 2.** Todo conjunto totalmente ordenado é um reticulado.

**Exemplo 3.** O conjunto dos intervalos fechados de  $[0,1]$ ,  $\mathbb{I}$ , definido pelo conjunto:

$$\{[\underline{x}, \bar{x}] \mid (\underline{x}, \bar{x}) \in [0, 1]^2 \text{ e } \underline{x} \leq \bar{x}\} \quad (2.1)$$

com a ordenação parcial:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{\mathbb{I}} [\underline{y}, \bar{y}] \iff (\underline{x} \leq \underline{y} \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y}) \quad (2.2)$$

é um reticulado completo com ordenação parcial induzida do corpo dos números reais.

**Exemplo 4.** O produto  $\mathbb{I}^n = \mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \dots \times \mathbb{I}$ , no qual  $\mathbb{I}$  é um reticulado completo, é também um reticulado completo com a ordem parcial definida como a seguir, para todo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{I}^n$ :

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

**Exemplo 5.** É necessário observar que nem todo reticulado é completo. Um exemplo clássico de reticulado que não é completo é o intervalo aberto  $(0, 1)$ , pois seu supremo, 1, e seu ínfimo,

0, não pertencem ao intervalo. Outro caso é o conjunto dos números reais com a ordenação usual,  $\mathbb{R}$ , que não é completo a menos que se incluam as fronteiras  $+\infty$  e  $-\infty$ . Nesse caso, falamos do conjunto dos *reais estendidos*, denotado por  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Uma maneira interessante de construir reticulados completos a partir de um reticulado completo dado é utilizando o *reticulado das funções*. Especificamente, dado um reticulado completo  $\mathbb{L}$ , a classe de funções  $X \rightarrow \mathbb{L}$ , denotada por  $\mathbb{L}^X$ , é um reticulado completo com ordenação parcial elemento a elemento herdada do reticulado  $\mathbb{L}$ :

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \forall x \in X. \quad (2.4)$$

**Exemplo 6.** Considere a classe de funções  $X \rightarrow [0, 1]$ , denotada por  $[0, 1]^X$ , com a ordem parcial dada em 2.4. Este conjunto forma um reticulado completo, uma vez que o intervalo  $[0, 1]$  é ele mesmo um reticulado completo.

O conjunto dos operadores sobre  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ , é um exemplo de reticulado de funções sobre  $\mathcal{L}$  e desse reticulado ele herda muitas das propriedades além da ordem parcial e os operadores  $\vee$  e  $\wedge$ , como distributividade de completeza. A seguir, daremos algumas definições sobre estes operadores:

**Definição 3.** Considere o reticulado  $\mathcal{L}$  e os operadores  $Id, \psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ .

- $Id$  é **identidade** se satisfaz  $Id(x) = x$  para todo  $x \in \mathcal{L}$ ;
- $\psi$  é dito **extensivo** se  $Id \leq \psi$  e **anti-extensivo** se  $\psi \leq Id$ ;
- $\psi$  é **idempotente** se  $\psi^2 = \psi$ ;

De interesse especial são os operadores monótonos, que se classificam em crescentes ou decrescentes de acordo com as definições abaixo:

- $\psi$  é **crescente** ou **isotônico** se  $X \leq Y \Rightarrow \psi(X) \leq \psi(Y)$ , isto é, se  $\psi$  preserva a ordem;
- **decrescente** ou **antitônico** se reverte a ordem, i.e, se  $X \leq Y \Rightarrow \psi(Y) \leq \psi(X)$ .

Exemplos especiais de operadores monótonos são os morfismos, em especial homomorfismos e automorfismos, que preservam o supremo e ínfimo do reticulado:

**Definição 4.** Um operador  $\psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$  é dito um **homomorfismo** se, e somente se,

$$\psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y) \text{ e } \psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y) \quad (2.5)$$

para todo  $x, y \in \mathcal{L}$ . Se  $\psi$  é bijetivo então ele é dito um **automorfismo**.

Uma negação em um reticulado é um automorfismo que também é involutivo:

**Definição 5.** O operador  $\nu \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$  é dito uma **negação** em  $\mathcal{L}$  se for uma bijeção involutiva, isto é,  $\nu^2 = Id$  e reverte a ordem parcial do reticulado. Para um elemento qualquer  $x \in \mathcal{L}$ , sua negação pelo operador  $\nu$  será denotada por  $x^\nu$ .

Analogamente pode-se definir uma negação em  $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ : dado um operador  $\psi \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ , sua negação com relação a  $\nu : \mathcal{O}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{L})$  é dada por  $\psi^\nu = \nu\psi\nu$ . Além disso, se o operador  $\psi$  satisfaz  $\psi^\nu = \psi$  então ele é dito **autodual**.

**Exemplo 7.** Considere a negação  $\nu(x) = 1 - x$  para  $x \in [0, 1]$  e um operador  $\psi$  em  $[0, 1]$ . A negação desse operador é dada por:

$$\psi^\nu(x) = 1 - \psi(1 - x) \quad (2.6)$$

De grande interesse são os seguintes operadores monótonos crescentes *erosão*, *dilatação*, *abertura* e *fechamento* algébricos, pois são a base da morfologia matemática moderna sobre reticulados completos. Note que chamamos estes operadores de algébricos por sua natureza puramente algébrica e generalizada em contraste com os operadores definidos nos princípios da morfologia matemática. A definição desses operadores é dada abaixo:

**Definição 6.** O operador  $\varepsilon$  em  $\mathbb{L}$  é uma **erosão** se satisfizer a seguinte equação para todo  $X \subset \mathbb{L}$ :

$$\varepsilon\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x), \quad (2.7)$$

isto é,  $\varepsilon$  é uma erosão se comutar com a operação de mínimo do reticulado.

De maneira análoga define-se a dilatação:

**Definição 7.** O operador  $\delta$  em  $\mathbb{L}$  é uma **dilatação** se satisfizer a seguinte equação para todo  $X \subset \mathbb{L}$ :

$$\delta\left(\bigvee_{x \in X} x\right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x), \quad (2.8)$$

isto é,  $\delta$  representa uma dilatação se comutar com a operação de máximo do reticulado.

**Definição 8.** Considere os operadores  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{L}$ :

- $\alpha$  é uma **abertura** se, e somente se,  $\alpha$  é crescente, idempotente e anti-extensivo.
- $\beta$  é um **fechamento** se, e somente se,  $\beta$  é crescente, idempotente e extensivo.

É importante notar aqui que as operações de erosão e dilatação requerem coleções  $\{x : x \in X\}$  arbitrariamente grandes de elementos do reticulado, possivelmente infinitas, e é por isso que as definições desses operadores e, conseqüentemente, a morfologia matemática, requerem uma estrutura de reticulado completo. Outro fato notável é de que dilatações e erosões aparecem geralmente em pares de acordo com o seguinte conceito de dualidade no reticulado, dada por uma adjunção:

**Definição 9.** Considere o par de operadores  $(\varepsilon, \delta)$  em  $\mathcal{L}$ . Este par é chamado de uma **adjunção** se, e somente se:

$$\delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (2.9)$$

Neste caso,  $\varepsilon$  e  $\delta$  são ditos **adjuntos**.

A adjunção, considerada por muitos autores como sinônimo de conexão de Galois [30], representa um papel importante na morfologia matemática ao garantir que um par de operador adjuntos é necessariamente formado por uma dilatação e uma erosão únicas [57, 127]. A seguinte proposição nos garante esta particularidade e ainda fornece uma expressão para o operador adjunto de uma dada erosão ou dilatação.

**Proposição 1** ([143]). Sejam  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  reticulados completos. Considere as funções  $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  e  $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ .

1. Se  $(\varepsilon, \delta)$  forma uma adjunção então  $\delta$  é uma dilatação e  $\varepsilon$  é uma erosão.
2. Para toda dilatação  $\delta$  existe uma única erosão  $\varepsilon$  tal que  $(\varepsilon, \delta)$  forma uma adjunção. A erosão adjunta é dada por

$$\varepsilon(y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \delta(x) \leq y\}, \quad (2.10)$$

para todo  $y \in \mathbb{M}$ .

3. Para toda erosão  $\varepsilon$  existe uma única dilatação  $\delta$  tal que  $(\varepsilon, \delta)$  é uma adjunção. A dilatação adjunta é dada por

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{M} : \varepsilon(y) \geq x\}, \quad (2.11)$$

para todo  $x \in \mathbb{L}$ .

Vale a pena notar que a composição de pares adjuntos de erosão e dilatação,  $(\varepsilon, \delta)$ , dão origem a aberturas e fechamentos. Desta maneira, as composições  $\varepsilon \circ \delta$  e  $\delta \circ \varepsilon$  representam um fechamento e uma abertura, respectivamente, os quais são importantes filtros da morfologia matemática [57].

No próximo capítulo vamos ver com mais detalhes abordagens específicas a morfologia matemática em reticulados completos, que são a morfologia matemática fuzzy e a morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy, que serão utilizadas no quinto capítulo como base teórica para a construção das memórias associativas morfológicas fuzzy e  $\mathbb{L}$ -fuzzy.

---

## CAPÍTULO 3

---

# MORFOLOGIA MATEMÁTICA

## $\mathbb{L}$ -FUZZY

Neste capítulo vamos inicialmente apresentar pertinentemente detalhes da teoria dos conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy e alguns casos particulares interessantes, como os conjuntos fuzzy clássicos e os conjuntos fuzzy intervalares. A partir da definição e caracterização de pares adjuntos de operadores fuzzy e da definição da estrutura algébrica apropriada faremos a introdução da morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalar, que servirão de base para as  $\mathbb{L}$ -FMAMs e particularmente as IV-FMAMs, que serão introduzidas no próximo capítulo.

### 3.1 Introdução a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e suas Extensões

*“Mais frequentemente do que não, as classes de objetos encontrados no mundo físico real não tem critérios precisamente definidos de pertinência”<sup>1</sup>. É com esta frase que Zadeh*

---

<sup>1</sup>Do original: “More often than not, the classes of objects encountered in the real physical world do not have precisely defined criteria of membership.”[169]

em seu trabalho *Fuzzy sets* [169], descreve a necessidade de um arranjo formal menos rígido do que a teoria clássica de conjuntos que conseguisse descrever e manipular classes ou conjuntos cujos elementos não tem uma descrição única ou precisa.

Esforços para suprir esta necessidade vem sendo feito desde o início do século XX [50, 164]. Com o amadurecimento das ideias foram aparecendo as mais diversas propostas como por exemplo a lógica tri-valorada de Jan Łukasiewicz [92, 93, 94], os “perfis de consistência” de Max Black [14], “ensemble flou” de Karl Menger [107], dentre outras [4, 11, 75].

Mesmo em meio a tantas propostas, a teoria dos conjuntos fuzzy de Zadeh conquistou um campo enorme de aplicações e estudos tanto na academia quanto na indústria por oferecer soluções de qualidade e de baixo custo para sistema de controle inteligentes, sistemas de ajuda de tomada de decisão, dentre outras [69, 78]. A proposta de Zadeh era a de utilizar a já bem desenvolvida Teoria das Funções para descrever um conjunto cujos elementos possuísem uma pertinência gradual, como indica a seguinte definição:

**Definição 10** (Conjunto fuzzy). *Um conjunto fuzzy  $\mathbf{a}$  é definido pela seguinte igualdade:  $\mathbf{a} = \{(x, \mu_{\mathbf{a}}(x)) | x \in X, \mu_{\mathbf{a}} : X \rightarrow [0, 1]\}$ .*

Para todo  $x \in X$ ,  $\mu_{\mathbf{a}}(x)$  indica o grau de pertinência de  $x$  no conjunto fuzzy  $\mathbf{a}$ . Por isso, esta função,  $\mu_{\mathbf{a}}$ , é chamada de *função de pertinência* de  $\mathbf{a}$ . Observe que a classe dos conjuntos fuzzy em  $X$ , denotada por  $\mathcal{F}(X)$ , é isomorfa a classe das funções  $[0, 1]^X$  por meio do seguinte isomorfismo de reticulados:

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{F}(X) &\rightarrow [0, 1]^X \\ \mathbf{a} &\mapsto \mu_{\mathbf{a}}(x) \end{aligned}$$

Por este isomorfismo temos que a classe dos conjuntos fuzzy em  $X$  forma um reticulado completo com ordenação como na Equação 2.4. Além disso, observe que podemos fazer a identificação de um conjunto fuzzy  $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(X)$  por sua função de pertinência  $\mu_{\mathbf{a}}$ . Sabendo disso e, para simplificar a notação, vamos utilizar daqui para frente o mesmo símbolo tanto para a definição do conjunto fuzzy quanto para sua função de pertinência, da seguinte maneira: dado um conjunto fuzzy  $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(X)$  sua função de pertinência será denotada por  $\mathbf{a}(x)$ , para todo  $x \in X$ .



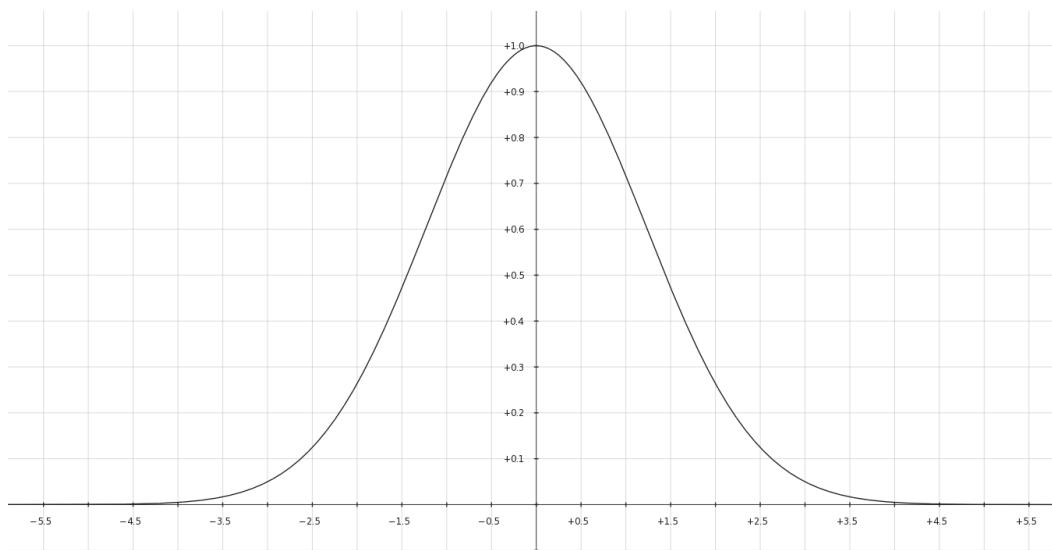


Figura 3.1: Função de pertinência do conjunto fuzzy “números próximos de 0”.

Um exemplo clássico de conjunto fuzzy é o conjunto dos números pequenos em módulo, i.e. próximos de zero. A subjetividade do termo “próximo” torna a definição de tal conjunto intratável em termos da teoria clássica de conjuntos. No entanto ele pode ser definido como um conjunto fuzzy como no exemplo abaixo.

**Exemplo 8.** O conjunto fuzzy dos números próximos de 0 pode ser modelado com uma função cujo valor da imagem de 0 seja a maior possível, i.e., 1, e diminuindo a medida que os números se afastam de zero. Um caso particular é apresentado na Figura 3.1.

Com o desenvolvimento de novas tecnologias, problemas mais complexos puderam ser tratados, como aqueles que lidam não somente com informações imprecisas, mas também contraditórias, problemas estes difíceis ou impossíveis de tratar apropriadamente com a teoria dos conjuntos fuzzy. Um exemplo mais evidente é caracterização de termos da linguagem natural cotidiana com ajuda de várias pessoas. Em particular, tentemos definir o predicado “agradável” para “temperatura” com ajuda de um grupo de pessoas para decidir a temperatura de um ambiente. Evidentemente não iremos obter uma única função de pertinência de temperatura agradável e sim várias funções próximas provavelmente mas não iguais, que definem as diferentes preferências pessoais para temperatura. O resultado obtido pode ser algo como o da Figura 3.2.

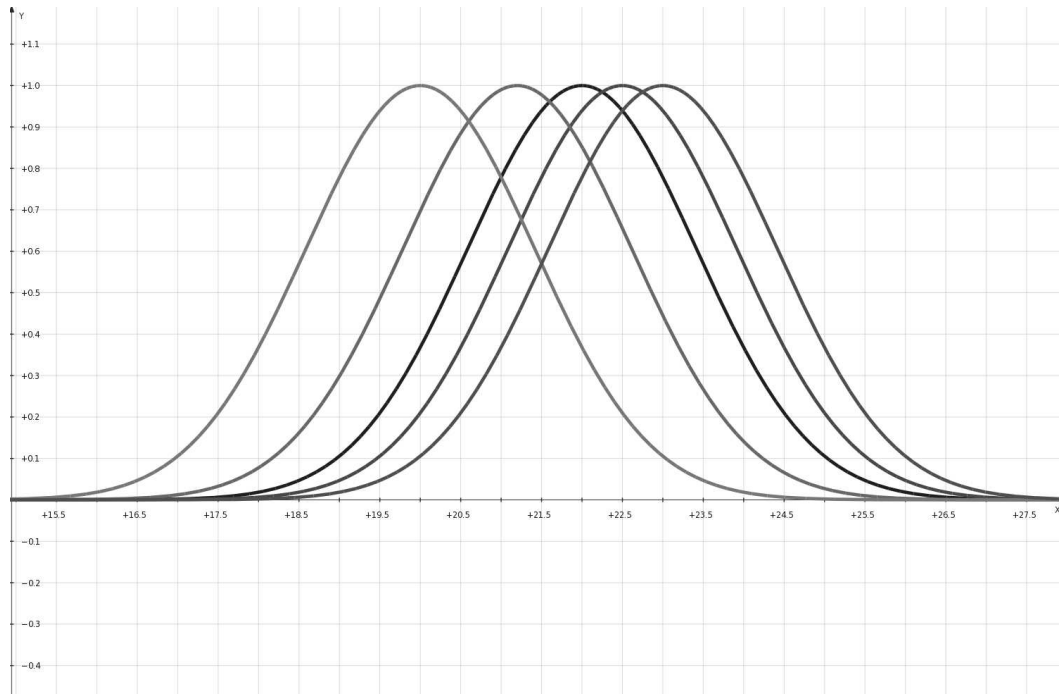


Figura 3.2: Definições de função de pertinência diferentes de “temperatura agradável” .

Dentre outros exemplos de problemas estão dados ruidosos e erros nos instrumentos de medição que não raramente apresentam informações divergentes. Por isso ao longo do tempo foram sendo propostas extensões da teoria fuzzy original de Zadeh de maneira a incluir um tratamento apropriado a estes tipos de dados. Dentre eles citamos os fuzzy multi-conjuntos [167], conjuntos fuzzy intuicionistas [5], conjuntos fuzzy intervalares [125], conjuntos fuzzy tipo-2 e tipo-2 intervalares [74, 106, 170] e em especial os conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy [41], que generalizam diversas propostas anteriores baseados na escolha de um reticulado completo, como iremos ver na próxima seção.

## 3.2 Teoria dos Conjuntos $\mathbb{L}$ -Fuzzy

Introduzida por Goguen em 1967 como uma extensão da teoria dos conjuntos fuzzy [41], a Teoria dos Conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy estende o conjunto imagem da função de pertinência de um conjunto fuzzy, do intervalo fechado  $[0, 1]$ , que é em si um reticulado completo com

a ordenação usual, para um reticulado completo qualquer  $\mathbb{L}$  [32], de acordo com a definição abaixo.

**Definição 11** (Conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy). *Define-se um conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathbf{a}$  em  $X$  como  $\mathbf{a} = \{(x, \mu_{\mathbf{a}}(x)) | x \in X, \mu_{\mathbf{a}} : X \rightarrow \mathbb{L}\}$ .*

A função  $\mu_{\mathbf{a}}$  é chamada de *função de pertinência* do conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathbf{a}$ . Além disso, da mesma maneira que identificamos a classe dos conjuntos fuzzy  $\mathcal{F}(X)$  com  $[0, 1]^X$  é possível identificarmos a classe dos conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy em  $X$ , denotada por  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ , com a classe das funções  $X \rightarrow \mathbb{L}$ ,  $\mathbb{L}^X$ , com o seguinte isomorfismo de reticulados:

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) &\rightarrow \mathbb{L}^X \\ \mathbf{a} &\mapsto \mu_{\mathbf{a}}(x) \end{aligned}$$

Observe que esse isomorfismo mostra a equivalência da definição de conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy acima com a definição dada por Goguen [41], que define um conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy por sua função de pertinência. Além disso, podemos introduzir a mesma notação dos conjuntos fuzzy e sua função de pertinência para os conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy, isto é, dado um conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathbf{a} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ , iremos a partir daqui denotar sua função de pertinência como  $\mathbf{a}(x)$ , para todo  $x \in X$ . Quanto a ordenação dos graus de pertinência podemos dizer que se  $\mathbf{a}(u) \leq_{\mathbb{L}} \mathbf{a}(v)$  para quaisquer elemento  $u, v \in U$  então  $v$  pertence ao conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathbf{a}$  com maior grau do que  $u$ . Pode ocorrer também que na ordem do reticulado considerado as pertinências sejam *incomparáveis*,  $\mathbf{a}(u) \parallel_{\mathbb{L}} \mathbf{a}(v)$ , isto é, nem  $\mathbf{a}(u) \leq_{\mathbb{L}} \mathbf{a}(v)$  nem  $\mathbf{a}(v) \leq_{\mathbb{L}} \mathbf{a}(u)$  são satisfeitos.

Os conectivos básicos da teoria  $\mathbb{L}$ -fuzzy, i.e., *conjunções, disjunções, implicações e negações* em  $\mathbb{L}$  são definidos abaixo. Observe que os conectivos fuzzy são automaticamente satisfeitos, assim como os conectivos crisp, pelas condições de fronteira.

**Definição 12** (Conectivos na teoria  $\mathbb{L}$ -fuzzy[34]). *Seja  $\mathbb{L}$  um reticulado completo com  $0_{\mathbb{L}}$  e  $1_{\mathbb{L}}$ , respectivamente, seu menor e maior elementos.*

- Uma **negação** em  $\mathbb{L}$  é um mapeamento  $\mathcal{N} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  decrescente que satisfaz  $\mathcal{N}(0_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$  e  $\mathcal{N}(1_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$ .  $\mathcal{N}$  é dita *involutiva* se  $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ .

- Uma **conjunção** em  $\mathbb{L}$  é um mapeamento  $\mathcal{C}:\mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{L}$  crescente que satisfaz  $\mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$  e  $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ . Em particular, uma conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy comutativa e associativa que satisfaz  $\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}) = x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$  é chamado de **norma triangular** ou **t-norma** em  $\mathbb{L}$ .
- Uma **disjunção** em  $\mathbb{L}$  é um mapeamento  $\mathcal{D}:\mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{L}$  crescente que satisfaz  $\mathcal{D}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{D}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{D}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$  e  $\mathcal{D}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ . Em particular, uma disjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy comutativa e associativa que satisfaz  $\mathcal{D}(x, 0_{\mathbb{L}}) = x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$  é chamado de **co-norma triangular** ou **s-norma** em  $\mathbb{L}$ .
- Um operador  $\mathcal{I}:\mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{L}$  que é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo é chamado de **implicação** em  $\mathbb{L}$ , ou implicação  $\mathbb{L}$ -fuzzy se satisfizer  $\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$  e  $\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ .

Daremos agora alguns exemplos relevantes de operadores fuzzy clássicos, que serão mais tarde usados para construir uma grande família de operadores especiais fuzzy intervalares.

**Exemplo 9.** Alguns exemplos de conjunções fuzzy:

$$C_M(x, y) = x \wedge y \text{ (Mínimo);} \quad (3.1)$$

$$C_P(x, y) = xy \text{ (Produto);} \quad (3.2)$$

$$C_L(x, y) = 0 \vee (x + y - 1) \text{ (Łukasiewicz);} \quad (3.3)$$

$$C_K(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ x, & x + y > 1 \end{cases} \text{ (Kleene);} \quad (3.4)$$

Uninorma “cross-ratio” com identidade  $e = 0.5$ :

$$C_F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) = (0, 1) \text{ ou } (1, 0) \\ \frac{xy}{(1-y)(1-x)+xy}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Note que os três primeiros exemplos de conjunções,  $C_M$ ,  $C_P$  e  $C_L$ , são também t-normas, isto é, verificam a igualdade  $C(x, 1) = x$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . Para distingui-las das conjunções que não são t-normas vamos utilizar a notação  $T_M$ ,  $T_P$  e  $T_L$ .

**Exemplo 10.** Algumas disjunções fuzzy:

$$D_M(x, y) = 1 \vee y \text{ (Máximo);} \quad (3.6)$$

$$D_L(x, y) = 1 \wedge (x + y) \text{ (Łukasiewicz);} \quad (3.7)$$

$$D_N(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & x + y \leq 1 \\ 1, & c.c. \end{cases} \text{ (máximo nilpotente).} \quad (3.8)$$

$$D_P(x, y) = x + y - xy \text{ (Soma probabilística);} \quad (3.9)$$

Observe que as disjunções  $D_M, D_L, D_N, D_P$  são também s-normas.

**Exemplo 11.** Alguns exemplos especiais de implicações fuzzy:

$$I_M(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases} \text{ (Gödel);} \quad (3.10)$$

$$I_P(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases} \text{ (Goguen);} \quad (3.11)$$

$$I_L(x, y) = 1 \wedge (y - x + 1) \text{ (Łukasiewicz);} \quad (3.12)$$

$$I_K(x, y) = (1 - x) \vee y \text{ (Kleene);} \quad (3.13)$$

(Implicação adjunta de  $C_F$ ):

$$I_F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (1, 1) \\ \frac{(1-x)y}{y(1-x)+x(1-y)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Análoga a noção de dualidade existente nos conjuntos fuzzy, uma associação especial entre conectivos em  $\mathbb{L}$  pode ser feita em termos de uma relação de dualidade através de uma negação em  $\mathbb{L}$  de acordo com a definição abaixo [143].

**Definição 13.** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma conjunção,  $\mathcal{D}$  uma disjunção,  $\mathcal{I}$  uma implicação e  $\mathcal{N}$  uma negação em  $\mathbb{L}$ .*

- Dizemos que  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são **operadores duais** com respeito a  $\mathcal{N}$  se, e somente se, para todo  $x, y \in \mathbb{L}$  vale:

$$\mathcal{C}(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{D}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y))). \quad (3.15)$$

- Dizemos que  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$  são **operadores duais** com respeito a  $\mathcal{N}$  se, e somente se,  $\mathcal{C}(z, \cdot)$  e  $\mathcal{I}(z, \cdot)$  são duais com respeito a  $\mathcal{N}$  para todo  $z \in \mathbb{L}$ , ou seja:

$$\mathcal{C}(z, x) = \mathcal{N}(\mathcal{I}(z, \mathcal{N}(y))). \quad (3.16)$$

- Dizemos que  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{D}$  são **operadores duais** com respeito a  $\mathcal{N}$  se, e somente se, para todo  $x, y \in \mathbb{L}$  vale:

$$\mathcal{I}(x, y) = \mathcal{D}(\mathcal{N}(x), y). \quad (3.17)$$

Outra noção de dualidade, já introduzida no Capítulo 2 sobre reticulados completos, é a *adjunção* e ela apresenta uma vantagem em relação a dualidade pela negação para a MM em reticulados completos, pois dado um par de operadores adjuntos  $(\varepsilon, \delta)$  existe a garantia de  $\varepsilon$  ser uma erosão algébrica, isto é, uma erosão no sentido da Equação 2.7 e  $\delta$  uma dilatação algébrica, segundo a Equação 2.8. A seguir, apresentaremos a definição de operadores adjuntos em  $\mathbb{L}$  [143].

**Definição 14.** *Seja  $\mathbb{L}$  um reticulado completo. Uma implicação  $\mathcal{I}$  e uma conjunção  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{L}$  formam uma adjunção se, e somente se,  $\mathcal{I}(z, \cdot)$  e  $\mathcal{C}(z, \cdot)$  formam uma adjunção para todo  $z \in \mathbb{L}$ . Nesse caso, temos que para todo  $x, y, z \in \mathbb{L}$ :*

$$\mathcal{C}(z, x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \mathcal{I}(z, y). \quad (3.18)$$

Considere agora a disjunção  $\mathcal{D}$  dual da implicação  $\mathcal{I}$  com relação a negação  $\mathcal{N}$  em  $\mathbb{L}$ . Dizemos que  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  formam uma adjunção se, e somente se,  $\mathcal{I}(z, \cdot)$  e  $\mathcal{D}(\mathcal{N}(z), \cdot)$  formam uma adjunção para todo  $z \in \mathbb{L}$ . Nesse caso, temos que para todo  $x, y, z \in \mathbb{L}$ :

$$\mathcal{C}(z, x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \mathcal{D}(\mathcal{N}(z), y). \quad (3.19)$$

Pela definição acima e pela Proposição 1 temos que se uma implicação  $\mathcal{I}$  e uma conjunção  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{L}$  são adjuntos então  $\mathcal{C}(z, \cdot)$  é uma dilatação e  $\mathcal{I}(z, \cdot)$  é uma erosão para todo  $z \in \mathbb{L}$ . Analogamente, temos que se uma implicação  $\mathcal{I}$  e uma conjunção  $\mathcal{D}$  em  $\mathbb{L}$  são adjuntos então  $\mathcal{C}(z, \cdot)$  é uma dilatação e  $\mathcal{D}(\mathcal{N}(z), \cdot)$  é uma erosão para todo  $z \in \mathbb{L}$ . Este fato é particularmente útil ao utilizarmos a Equação 2.10 para achar a erosão adjunta  $\mathcal{I}(z, \cdot)$  ou  $\mathcal{D}(\mathcal{N}(z), \cdot)$  de uma dilatação  $\mathcal{C}(z, \cdot)$  ou, de maneira análoga, para podermos achar a dilatação adjunta  $\mathcal{C}(z, \cdot)$  de uma dada erosão  $\mathcal{I}(z, \cdot)$  ou  $\mathcal{D}(\mathcal{N}(z), \cdot)$  a partir da Equação 2.11. Os dois seguintes teoremas nos garantem que os operadores adjuntos de uma erosão ou dilatação em  $\mathbb{L}$  são respectivamente dilatações e erosões em  $\mathbb{L}$ .

**Teorema 1** ([143]). *Sejam  $\mathcal{C}$  uma conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy e o operador  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}} : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}$  definido por:*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(z, y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \mathcal{C}(z, x) \leq y\} \quad \forall x, y \in \mathbb{L} \quad (3.20)$$

*As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- *A função  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  é decrescente no primeiro argumento, crescente no segundo e satisfaz a condição:*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}} \quad (3.21)$$

- *A função  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  representa uma implicação em  $\mathbb{L}$  se, e somente se,  $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, x) > 0_{\mathbb{L}}$  para todo  $x \in \mathbb{L} \setminus \{0_{\mathbb{L}}\}$ . Nesse caso, a implicação  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  é dito **R-implicação** de  $\mathcal{C}$ .*

**Teorema 2** ([143]). *Sejam  $\mathcal{I}$  uma implicação  $\mathbb{L}$ -fuzzy e o operador  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}} : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}$  definido por:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(z, x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{L} : \mathcal{I}(z, y) \leq x\} \quad \forall x, z \in \mathbb{L} \quad (3.22)$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- A função  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  é decrescente no primeiro argumento, crescente no segundo e satisfaz a condição:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}} \quad (3.23)$$

- A função  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  representa uma implicação em  $\mathbb{L}$  se, e somente se,  $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, y) < 1_{\mathbb{L}}$  para todo  $y \in \mathbb{L} \setminus \{0_{\mathbb{L}}\}$ . Nesse caso, a implicação  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  é dito **R-conjunção** de  $\mathcal{I}$ .

Condições para validade de aplicações sucessivas das Equações 3.20 e 3.22 são dadas no próximo teorema, revelando que um certo cuidado deve ser tomado na construção do operador adjunto.

**Teorema 3** ([143]). *Seja  $\mathcal{C}$  uma conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy que satisfaz  $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, x) > 0_{\mathbb{L}}$  para todo  $x \neq 0_{\mathbb{L}}$ . Se a R-implicação de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ , satisfizer  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1_{\mathbb{L}}, y) < 1_{\mathbb{L}}$  para todo  $y \neq 1_{\mathbb{L}}$  então a R-conjunção de  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  é limitada superiormente por  $\mathcal{C}$ .*

*Similarmente, seja  $\mathcal{I}$  uma implicação  $\mathbb{L}$ -fuzzy que satisfaz  $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, y) > 0_{\mathbb{L}}$  para todo  $y \neq 1_{\mathbb{L}}$ . Se a R-conjunção de  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ , satisfizer  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(1_{\mathbb{L}}, x) < 0_{\mathbb{L}}$  para todo  $x \neq 1_{\mathbb{L}}$  então a R-implicação de  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  é limitada inferiormente por  $\mathcal{I}$ .*

Como notado em [143] as igualdades  $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, y) < 1_{\mathbb{L}}$  para todo  $y \neq 1_{\mathbb{L}}$  são satisfeitas pela classe de implicações  $\mathbb{L}$ -fuzzy tais que  $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, y) = y$ . De maneira similar, as condições  $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, x) < 0_{\mathbb{L}}$ , para todo  $x \neq 1_{\mathbb{L}}$ , são satisfeitas por conjunções  $\mathbb{L}$ -fuzzy tais que  $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, x) = x$ , classe de conjunções esta que inclui as t-normas em  $\mathbb{L}$ .

De forma bem menos complicada, a construção de um operador dual em relação a uma negação em  $\mathbb{L}$  é dada pelo próximo teorema, o qual garante que o operador dual em relação a uma negação em  $\mathbb{L}$  de uma conjunção é uma implicação e vice-versa.



**Teorema 4** ([143]). *Seja  $\mathcal{N}$  uma negação em  $\mathbb{L}$ . Suponha que os operadores  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$  em  $\mathbb{L}$  estão relacionados em termos da Equação 3.16, isto é, eles são duais com respeito a negação  $\mathcal{N}$ . Dessa forma, temos que  $\mathcal{C}$  é uma conjunção em  $\mathbb{L}$  se, e somente se,  $\mathcal{I}$  é uma implicação em  $\mathbb{L}$ . O mesmo acontece para as Equações 3.15 e 3.17.*

Estes teoremas e definições que acabamos de ver serão utilizadas para apresentar a extensão  $\mathbb{L}$ -fuzzy da morfologia matemática. Para isso, revisaremos brevemente na próxima seção uma abordagem à morfologia matemática fuzzy baseada em medidas de inclusão e intersecção fuzzy e sua generalização  $\mathbb{L}$ -fuzzy, em particular  $\mathbb{L}$ -fuzzy, isso é, para conjuntos fuzzy intervalares.

### 3.3 Morfologia Matemática $\mathbb{L}$ -fuzzy

#### 3.3.1 Alguns Conceitos Relevantes da Morfologia Matemática Fuzzy

A morfologia matemática, ferramenta poderosa de análise e processamento de imagens, foi proposta inicialmente durante a década de 60 por Matheron e Serra [101, 102]. Esta proposta utiliza noções de inclusão e intersecção de conjuntos para compor seus operadores fundamentais, que são a erosão e a dilatação morfológicas [126]. Esta abordagem de conjuntos a morfologia matemática, chamada de morfologia matemática binária, é particularmente eficiente para imagens binárias, mas não funciona para imagens multiespectrais nem em tons de cinza, cujos pixels podem assumir mais de dois valores. Para suprir esta deficiência, diversas extensões foram propostas, sendo a mais importante para esta dissertação a *morfologia matemática fuzzy* (FMM) [16, 130], que além de estender a morfologia à imagens em tons de cinza generaliza seus operadores básicos com a noção de intersecção e inclusão fuzzy.

A FMM é determinada pela construção de erosões e dilatações fuzzy. Estes operadores são definidos da seguinte maneira: uma função  $\delta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , na qual  $\mathcal{F}(X)$  denota a classe de todos os conjuntos fuzzy sobre um universo  $X$ , é uma *dilatação fuzzy* se, e somente se, satisfizer a Equação 2.8, isto é,  $\delta_{\mathcal{F}}$  é uma dilatação fuzzy se, e somente se, ela for uma dilatação algébrica. Analogamente, uma função  $\varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  é dita uma *erosão fuzzy*

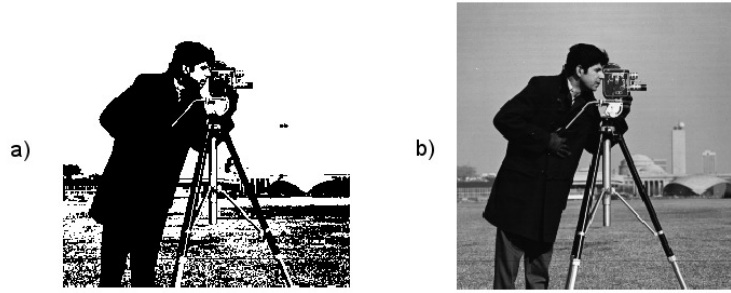


Figura 3.3: A Imagem 3.3a é uma imagem em preto e branco resultante da aplicação de uma função limiar nos pixels da Imagem 3.3b, que é um exemplo clássico de imagem em tons de cinza [110].

se, e somente se, ela for uma erosão algébrica no sentido da Equação 2.7.

De maneira intuitiva, os operadores da MM são construídos para extrair informações relevantes de uma imagem digital, a qual pode ser vista como uma função  $f : D_I \subset \mathcal{L}^n \rightarrow I \subset \mathcal{M}^m$ , com  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  reticulados. De acordo com esta definição, podemos tomar  $f : D_I \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow I \subset \{0, 1\}$  para obter uma imagem binária e  $f : D_I \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow I \subset [0, 1]$  para obter uma imagem em tons de cinza [136], como as das Figuras 3.3a e 3.3b. Pode-se além disso definir imagens com valores intervalares, definindo  $f : D_I \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow I \subset \mathbb{I}$ . Um exemplo de imagem intervalar é dado na Figura 3.4, na qual ela é representada pelos extremos de  $I \subset \mathbb{I}$ .

De uma imagem digital a MM extrai informações com o auxílio de uma imagem de prova, chamada de *elemento estruturante (SE)* [126], que é uma imagem construída especificamente para extrair a informação desejada de uma imagem em operação com algum dos operadores morfológicos.

Os operadores morfológicos, fundamentalmente a erosão, dilatação e suas composições, varrem cada ponto do domínio da imagem a ser testada e fazem alguma operação envolvendo o elemento estruturante transladado e a própria imagem, gerando assim uma nova imagem. No caso da erosão binária, o SE é transladado para cada ponto do domínio da imagem e verifica-se se ele é subconjunto ou não da imagem. Já na dilatação é feita uma união da imagem e do elemento estruturante dilatado. Exemplos de operações podem ser vistos nas

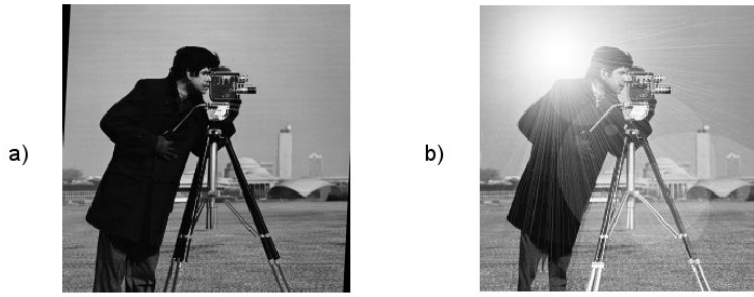


Figura 3.4: Exemplo de figura intervalar construída com diferentes iluminações e rotações da mesma figura em tons de cinza [110]. Em 3.4a vemos o limite inferior dessa imagem e em 3.4b o superior.

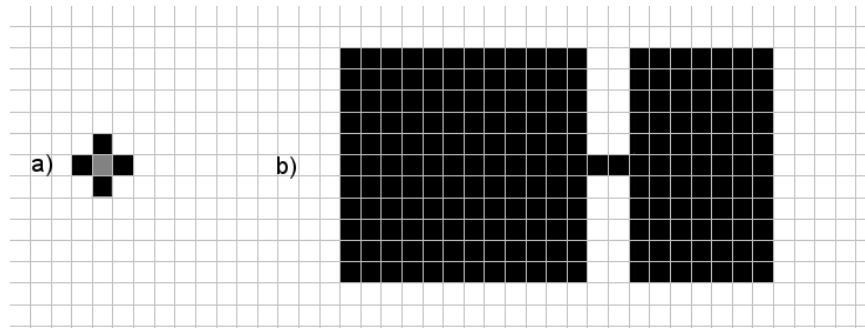


Figura 3.5: Na Figura 3.5a vemos um exemplo de elemento estruturante com o centro marcado em cinza na figura. Em 3.5b a imagem que será erodida e dilatada com o elemento estruturante dado em 3.5a.

Figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8.

Ambos operadores dependem de medidas de inclusão e intersecção, que são na MM binária os operadores usuais de união e intersecção de conjuntos, e o relaxamento desses conceitos clássicos dá origem a uma abordagem particular de morfologia matemática fuzzy [7, 77, 131, 133]. De maneira mais geral, pode-se definir medidas de inclusão e intersecção  $\mathbb{L}$ -fuzzy, medidas essas que são usadas na construção de uma abordagem à *morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy*, introduzida nos trabalhos de Sussner et al. [143, 142].

**Definição 15** (Medida de inclusão  $\mathbb{L}$ -fuzzy). *Uma medida de inclusão  $\mathbb{L}$ -fuzzy é definida*

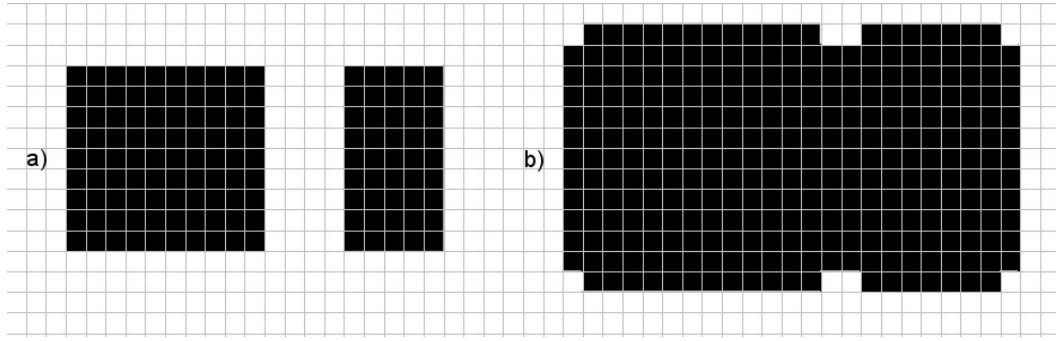


Figura 3.6: A imagem 3.6a é resultante da erosão da Imagem 3.5b pelo elemento estruturante 3.5a. Já em 3.6b vemos a imagem resultante da dilatação da Imagem 3.5b por 3.5a.

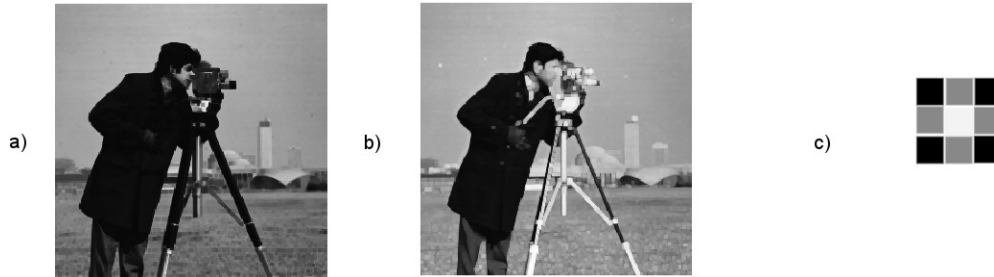


Figura 3.7: Vemos na Figura 3.7a a erosão e em 3.7b a dilatação fuzzy da Imagem 3.4b pelo elemento estruturante 3x3 cujos pixels estão representados em 3.7c. O centro desse elemento estruturante está no pixel branco. O pixel branco tem valor 1, os cinzas 0.5 e os pretos 0 [110].

como sendo uma função  $Inc_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathbb{L}$  que satisfaz as seguintes propriedades para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(X)$ , em que  $\mathcal{P}_{\mathbb{L}}(X) = \{\mathbf{a} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \mid \mathbf{a}(x) = 0_{\mathbb{L}} \text{ ou } \mathbf{a}(x) = 1_{\mathbb{L}} \forall x \in X\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \leq \mathbf{b} &\Rightarrow Inc_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1_{\mathbb{L}} \quad e \\ \mathbf{a} \not\leq \mathbf{b} &\Rightarrow Inc_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0_{\mathbb{L}}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Se  $\mathbb{L} = [0, 1]$  então podemos falar simplesmente em medida de inclusão fuzzy, denotada por  $Inc_{\mathcal{F}}$ .

**Definição 16** (Medida de intersecção  $\mathbb{L}$ -fuzzy). Uma **medida de intersecção  $\mathbb{L}$ -fuzzy** é definida como sendo uma função  $Sec_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathbb{L}$  que satisfaz as seguintes proprie-

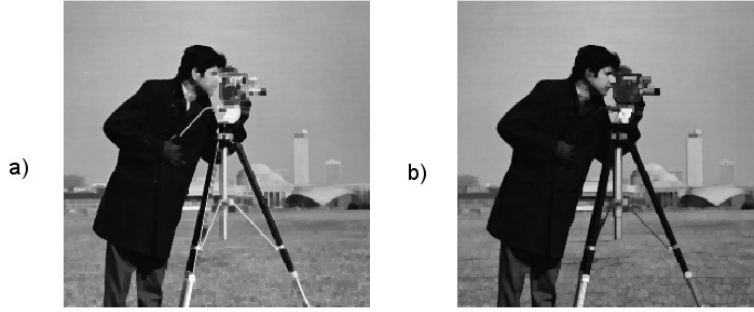


Figura 3.8: Vemos na Figura 3.8a o fechamento morfológico e em 3.8b a abertura morfológica da Imagem 3.4b pelo elemento estruturante da Figura 3.7c [110].

dades para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{P}_{\mathbb{L}}(X)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0_{\mathcal{F}_{\mathbb{L}}} &\Rightarrow Sec_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1_{\mathbb{L}} \quad e \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0_{\mathcal{F}_{\mathbb{L}}} &\Rightarrow Sec_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0_{\mathbb{L}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Caso  $\mathbb{L} = [0, 1]$  então temos então uma medida de intersecção fuzzy, denotada por  $Sec_{\mathcal{F}}$ .

Uma classe de medidas de inclusão e intersecção  $\mathbb{L}$ -fuzzy pode ser construída por implicações  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathcal{I}$  e conjunções  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathcal{C}$ , de acordo com as seguintes equações [143]:

$$Inc_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigwedge_{x \in X} \mathcal{I}(\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x)). \quad (3.26)$$

$$Sec_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigvee_{x \in X} \mathcal{C}(\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x)). \quad (3.27)$$

Na literatura da FMM, uma vasta gama de medidas de inclusão e intersecção fuzzy foram introduzidas por diversos pesquisadores [7, 77, 131, 132, 169], e dão origem a abordagens particulares a morfologia matemática fuzzy definindo os operadores de erosão e dilatação fuzzy como abaixo [109]. mas antes disso, vamos relembrar o conceito de translação de em elemento estruturante  $s$  por  $x$ ,  $s_x$ , definido pela seguinte equação:

$$\mathbf{s}_x(y) = \mathbf{s}(y - x) \quad \forall y \in X. \quad (3.28)$$

Denota-se também a reflexão de  $\mathbf{s}$  em torno da origem como  $\bar{\mathbf{s}}(y) = \mathbf{s}(-y) \quad \forall y \in X$ .

**Definição 17.** *Sejam  $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ . Define-se o operador  $\varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  como:*

$$\varepsilon_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \text{Inc}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}_x, \mathbf{a}). \quad (3.29)$$

*O operador  $\varepsilon_{\mathcal{F}}$  é uma erosão fuzzy se  $\text{Inc}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$  comuta com o ínfimo para todo  $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ . Nesse caso, o operador  $\varepsilon_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s})$  representa uma erosão para todo elemento estruturante  $\mathbf{s}$ .*

Analogamente, define-se  $\delta_{\mathcal{F}}$ :

**Definição 18.** *O operador  $\delta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  é definido como:*

$$\delta_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \text{Sec}_{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{s}}_x, \mathbf{a}). \quad (3.30)$$

*O operador  $\delta_{\mathcal{F}}$  é dito uma dilatação fuzzy se  $\text{Sec}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$  comuta com o supremo para todo  $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ . Desta forma,  $\delta_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s})$  é uma dilatação para todo elemento estruturante  $\mathbf{s}$ .*

### 3.3.2 Conceitos Básicos da Morfologia Matemática $\mathbb{L}$ -fuzzy

Analogamente as definições dos operadores básicos da morfologia matemática fuzzy na seção anterior, pode-se pelas definições de inclusão e de intersecção  $\mathbb{L}$ -fuzzy definir operadores de dilatação e erosão em  $\mathbb{L}$ , para com eles apresentar uma abordagem à morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy. Assim, em analogia às Equações 3.29 e 3.30, dada uma medida de inclusão ou intersecção  $\mathbb{L}$ -fuzzy, os operadores  $\varepsilon_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  e  $\delta_{\mathbb{L}} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  são definidos, para  $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ , como:

$$\varepsilon_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \text{Inc}_{\mathbb{L}}(\mathbf{s}_x, \mathbf{a}). \quad (3.31)$$

$$\delta_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \text{Sec}_{\mathbb{L}}(\bar{\mathbf{s}}_x, \mathbf{a}). \quad (3.32)$$

Em particular, das Equações 3.26 e 3.27, têm-se a expressão dos operadores  $\varepsilon_{\mathbb{L}}$  e  $\delta_{\mathbb{L}}$ :

$$\varepsilon_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \bigwedge_{y \in X} \mathcal{I}(\mathbf{s}_x(y), \mathbf{a}(y)) \quad \forall x \in X; \quad (3.33)$$

$$\delta_{\mathbb{L}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \bigvee_{y \in X} \mathcal{C}(\bar{\mathbf{s}}_x(y), \mathbf{a}(y)) \quad \forall x \in X; \quad (3.34)$$

Os dois seguintes teoremas mostram a relação especial de erosões e dilatações  $\mathbb{L}$ -fuzzy construídas pelas Equações 3.31, 3.33, 3.32 e 3.34.

**Teorema 5** ([143]). *Seja  $\varepsilon_{\mathbb{L}}$  um operador induzido por uma medida de intersecção dada pelas Equações 3.31 e 3.33. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *Os operadores  $\varepsilon_{\mathbb{L}}(., \mathbf{s})$  são erosões para todo  $\mathbf{s} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ .*
- *Os operadores  $\text{Inc}_{\mathbb{L}}(\mathbf{s}, .)$  são erosões para todo  $\mathbf{s} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ .*
- *Os operadores  $\mathcal{I}(\mathbf{s}, .)$  são erosões para todo  $\mathbf{s} \in \mathbb{L}(X)$ .*

**Teorema 6** ([143]). *Seja  $\delta_{\mathbb{L}}$  um operador induzido por uma medida de inclusão dada pelas Equações 3.32 e 3.34. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *Os operadores  $\delta_{\mathbb{L}}(., \mathbf{s})$  são dilatações para todo  $\mathbf{s} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ .*
- *Os operadores  $\text{Sec}_{\mathbb{L}}(\mathbf{s}, .)$  são dilatações para todo  $\mathbf{s} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ .*
- *Os operadores  $\mathcal{C}(\mathbf{s}, .)$  são dilatações para todo  $\mathbf{s} \in \mathbb{L}(X)$ .*

Desta forma, temos um método transparente de construção de operadores da morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy sem se preocupar com maiores detalhes, isto é, basta escolhermos uma implicação ou conjunção em  $\mathbb{L}$  para construirmos com as Equações 3.33 e 3.34 erosões e dilatações em  $\mathbb{L}$ .

Estes operadores, a erosão e dilatação, geralmente aparecem na morfologia matemática em pares duais com respeito a uma adjunção ou uma negação. É importante notar que uma negação  $N$  em  $\mathbb{L}$  induz uma negação  $\mathcal{N}$  em  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  pela expressão  $[\mathcal{N}(\mathbf{a})](x) = N(\mathbf{a}(x))$ , na qual  $\mathbf{a} \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  e  $x \in X$ .

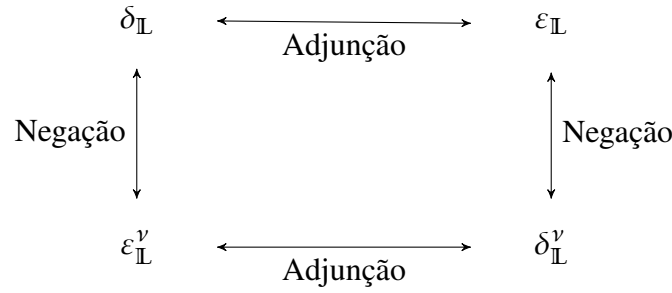


Figura 3.9: Relação entre erosões e dilatações com respeito a adjunção e negação de um reticulado.

**Definição 19.** Sejam  $\varepsilon_{\mathbb{L}}$  e  $\delta_{\mathbb{L}}$  funções  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}$ . O par  $(\varepsilon_{\mathbb{L}}, \delta_{\mathbb{L}})$  forma uma adjunção se, e somente se,  $(\varepsilon_{\mathbb{L}}(.,s), \delta_{\mathbb{L}}(.,\bar{s}))$  forma uma adjunção para todo elemento estruturante  $s \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ .

**Definição 20.** Sejam  $\varepsilon_{\mathbb{L}}$  e  $\delta_{\mathbb{L}}$  funções  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}} \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}$ .  $\varepsilon_{\mathbb{L}}$  e  $\delta_{\mathbb{L}}$  são duais com respeito à negação  $N$  em  $\mathbb{L}$  se, e somente se,  $\varepsilon_{\mathbb{L}}(.,s)$  e  $\delta_{\mathbb{L}}(.,\bar{s})$  são duais com respeito a negação  $N$  em  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  para todo  $s \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ .

Uma observação importante feita por Heijmans [57] é de que se o par  $(\varepsilon_{\mathbb{L}}, \delta_{\mathbb{L}})$  forma uma adjunção em  $\mathbb{L}$  então o par  $(\delta_{\mathbb{L}}^{\vee}, \varepsilon_{\mathbb{L}}^{\vee})$  também forma uma adjunção em  $\mathbb{L}$ . Desta forma, temos uma ligação única de operadores duais em respeito a adjunção e negação no reticulado, como na Figura 3.9.

De forma especial para operadores construídos com as Equações 3.31, 3.33, 3.32 e 3.34, o próximo teorema concerne as relações de adjunção e dualidade dessa classe e mostra a relação estreita que existe entre os operadores duais  $I$ ,  $C$  e os operadores construídos com essas equações.

**Teorema 7** ([143]). Sejam  $I$  e  $C$  uma implicação e uma conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy, respectivamente. O par  $(I, C)$  forma uma adjunção se, e somente se, o par correspondente  $(\varepsilon_{\mathbb{L}}, \delta_{\mathbb{L}})$  dado pelas Equações 3.33 e 3.34 forma uma adjunção. Analogamente,  $I$  e  $C$  são duais com respeito a negação  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $N$  se, e somente se, os correspondentes operadores  $\varepsilon_{\mathbb{L}}$  e  $\delta_{\mathbb{L}}$  são duais com respeito a  $N$ .



Estes resultados da morfologia matemática em  $\mathbb{L}$  podem ser aplicados para qualquer escolha de reticulado, o que dá ênfase a capacidade de generalização dessa abordagem. Por exemplo, podemos trabalhar com  $\mathbb{L} = \mathbb{I}$ . Esta escolha dá origem a morfologia matemática fuzzy intervalar, que é um caso especial de morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy que possui propriedades interessantes que serão vistas na próxima seção.

## 3.4 Operadores da Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar

### 3.4.1 Noções Básicas da Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intervalares

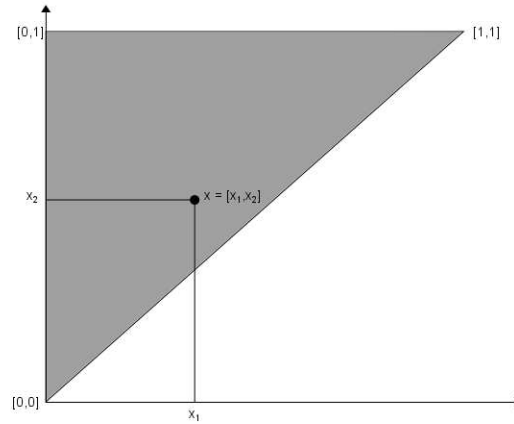
Nessa seção vamos apresentar formalmente a classe de conjuntos fuzzy intervalar sob o prisma dos conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy. Além disso, vamos apresentar operadores intervalares especiais e formas de construí-los utilizando a estrutura do reticulado e operadores fuzzy clássicos.

Para isso, relembremos inicialmente a estrutura do reticulado que apresentamos no Exemplo 3 do Capítulo 2, isto é, o conjunto de todos os intervalos fechados do intervalo  $[0, 1]$ , denotado por  $\mathbb{I}$ , e que consiste no conjunto  $\{[\underline{x}, \bar{x}] \mid (\underline{x}, \bar{x}) \in [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } \underline{x} \leq \bar{x}\}$  com a seguinte ordem parcial:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \leq_{\mathbb{I}} [\underline{y}, \bar{y}] \iff (\underline{x} \leq \underline{y} \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y}) \quad (3.35)$$

Uma representação gráfica de  $\mathbb{I}$  pode ser vista na Figura 3.10. No canto inferior vemos o menor elemento desse reticulado que é  $0_{\mathbb{I}} = [0, 0]$  e no canto superior direito o maior valor,  $1_{\mathbb{I}} = [1, 1]$ . A hipotenusa deste triângulo representa os elementos  $x = [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{I}$  tais que  $\underline{x} = \bar{x}$ , elementos estes que podem ser interpretados como não tendo indeterminação alguma, e o conjunto deles pode ser identificado com o intervalo  $[0, 1]$ , intervalo que representa a imagem da função de pertinência de conjuntos fuzzy clássicos. Tem-se então neste reticulado um meio elegante e compacto de trabalhar com a classe dos conjuntos fuzzy intervalares,  $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}$ .

Nesta classe, Deschrijver e Cornelis [32] introduziram um grupo de operadores inter-

Figura 3.10: O reticulado  $\mathbb{I}$ .

valores especiais que não possuem representação apenas por operadores fuzzy, como é o caso dos operadores *representáveis*. Os operadores representáveis são nada mais do que a aplicação simultânea de operadores fuzzy nos extremos de um intervalo para formar um operador fuzzy intervalar. O nome representável vem em oposição aos operadores *não-representáveis* que, como o próprio nome indica, não podem ser representados somente pela aplicação de operadores fuzzy nos extremos de um intervalo.

Dentro da classe dos operadores não-representáveis destaca-se uma classe especial, a dos operadores fuzzy intervalares *pseudo-representáveis*. Esta classe especial pode ser representada a partir de operações do reticulado  $\mathbb{I}$ , i.e.,  $\wedge_{\mathbb{I}}$  e  $\vee_{\mathbb{I}}$ , e operadores fuzzy clássicos, o que os torna especiais para aplicações, pois sua construção e propriedades depende de operadores fuzzy, já amplamente estudados na literatura.

Vamos a seguir apresentar alguns detalhes de ambas as classes, que formam uma classe maior, a dos operadores fuzzy intervalares baseados em operadores fuzzy clássicos.

### 3.4.2 Operadores Fuzzy Intervalares Baseados em Operadores Fuzzy

Nesta seção iremos apresentar formalmente os operadores representáveis e pseudo-representáveis  $\mathbb{I}$ -fuzzy, que são operadores fuzzy intervalares definidos a partir de operadores fuzzy. Para isso, iniciemos com o mais simples, a negação representável de acordo com a definição encontrada em Deschrijver, Cornelis e Kerre [34, 36].

**Definição 21** (Negação n-representável). *Uma negação  $\mathcal{N}$  em  $\mathbb{I}$  é dita **representável**, ou **n-representável**, se existem negações fuzzy  $N_1, N_2$  tais que  $N_1 \leq N_2$  e  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{N_1, N_2}$ , onde  $\mathcal{N}_{N_1, N_2}$  é dado por  $[N_1(\bar{x}), N_2(\underline{x})]$ . A negação  $\mathcal{N}$  é dita então representável com representantes  $N_1$  e  $N_2$ .*

Obviamente a condição  $N_1 \leq N_2$  é satisfeita quando  $N_1 = N_2$ . Portanto, a negação  $\mathcal{N}_N = [N(\bar{x}), N(\underline{x})]$ , é uma negação representável. Além disso, uma negação  $\mathcal{N}$  em  $\mathbb{I}$  é involutiva se, e somente se, existir uma negação involutiva  $N$  em  $[0, 1]$  tal que  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_N$  [32].

**Exemplo 12** (Negação representável involutiva). Dada a negação fuzzy involutiva padrão  $N(x) = 1 - x$ , pode-se construir a negação n-representável involutiva  $\mathcal{N}_N$  em  $\mathbb{I}$  de acordo com a Definição 21:

$$\mathcal{N}_N(x) = [1 - \bar{x}, 1 - \underline{x}] \quad (3.36)$$

**Exemplo 13** (Negação representável com dois representantes). Considere as negações  $N_1(x) = 1 - x$  e  $N_2(x) = 1 - x^2$ . É evidente que  $N_1 \leq N_2$  então a negação representável  $\mathcal{N}_{N_1, N_2}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{N_1, N_2}(x) &= [N_1(\bar{x}), N_2(\underline{x})] \\ &= [1 - x, 1 - x^2] \end{aligned}$$

Note que esta negação,  $\mathcal{N}_{N_1, N_2}$  não é involutiva, pois  $N_2$  não é uma negação involutiva:

$$N_2(N_2(x)) = 1 - (1 - x^2)^2 = 1 - (1 - 2x^2 + x^4) = 2x^2 - x^4 \neq x.$$

**Exemplo 14** (Negação não representável). Observe no entanto que nem toda negação em  $\mathbb{I}$  é n-representável. Tome por exemplo a negação dada por:

$$\mathcal{N}(x) = \begin{cases} 1_{\mathbb{I}} & \text{se } x = 0_{\mathbb{I}} \\ 0_{\mathbb{I}} & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.37)$$

**Proposição 2** ([36]). *Uma negação  $\mathcal{N}$  em  $\mathbb{I}$  é involutiva se, e somente se, existe uma negação involutiva  $N$  em  $([0, 1], \leq)$  tal que  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_N$ .*

Analogamente a classe das negações n-representáveis em  $\mathbb{I}$ , é possível construir uma classe de conjunções em  $\mathbb{I}$  com conjunções fuzzy de acordo com a seguinte definição [36, 143].

**Definição 22.** *Uma conjunção  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{I}$  é dita **representável**, ou **C-representável**, se para as conjunções fuzzy  $C_1$  e  $C_2$  tais que  $C_1(x, y) \leq C_2(c, y)$  vale a igualdade:*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{C_1, C_2}^r(x, y) := [C_1(\underline{x}, \underline{y}), C_2(\bar{x}, \bar{y})]. \quad (3.38)$$

Se ambas as conjunções  $C_1$  e  $C_2$  são t-normas então  $\mathcal{C}$  é dito **t-representável** com representantes  $C_1$  e  $C_2$ . Além disso, vamos denotar aqui o caso especial de  $\mathcal{C} = C_1 = C_2$  como  $\mathcal{C}_C^r = \mathcal{C}_{C, C}^r = \mathcal{C}_{C_1, C_2}^r$ . Vale a pena notar aqui que conjunções t-representáveis em  $\mathbb{I}$  são t-normas em  $\mathbb{I}$  [143]. Nesse caso, vamos denotar as t-normas em  $\mathbb{I}$  por  $\mathcal{T}$ .

Da mesma forma segue a definição de disjunções C-representáveis em  $\mathbb{I}$ :

**Definição 23.** *Uma disjunção  $\mathcal{D}$  em  $\mathbb{I}$  é dita **representável**, ou **C-representável**, se para as disjunções fuzzy  $D_1$  e  $D_2$  tais que  $D_1(x, y) \leq D_2(c, y)$  vale a igualdade:*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{D_1, D_2}^r(x, y) := [D_1(\underline{x}, \underline{y}), D_2(\bar{x}, \bar{y})]. \quad (3.39)$$

Se ambas as disjunções  $D_1$  e  $D_2$  são s-normas então  $\mathcal{D}$  é dito **t-representável** com representantes  $D_1$  e  $D_2$ . Além disso, a exemplo das conjunções, vamos denotar o caso especial de  $\mathcal{D} = D_1 = D_2$  como  $\mathcal{D}_C^r = \mathcal{D}_{D, D}^r = \mathcal{D}_{D_1, D_2}^r$ . Disjunções t-representáveis em  $\mathbb{I}$  são s-normas em  $\mathbb{I}$  [143], denotadas aqui por  $\mathcal{D}$ .

A condição para que conjunções e disjunções C-representáveis sejam conjunções e disjunções em  $\mathbb{I}$  segue do próximo teorema.

**Teorema 8** ([143]). A função  $\mathcal{C}_{C_1, C_2}^r$  definida na Equação 3.38 representa uma conjunção em  $\mathbb{I}$  se, e somente se,  $C_1(x, y) \leq C_2(x, y)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ . Além disso, a função  $\mathcal{D}_{D_1, D_2}^r$  definida na Equação 3.39 representa uma disjunção em  $\mathbb{I}$  se, e somente se,  $D_1(x, y) \leq D_2(x, y)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ .

**Exemplo 15.** Exemplos de operadores representáveis em  $\mathbb{I}$ , construídos a partir dos operadores fuzzy  $T_M, T_P, C_K$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{P, M}^r(x, y) &= [T_P(\underline{x}, \underline{y}), T_M(\bar{x}, \bar{y})] \\ &= [\underline{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_M^r(x, y) &= [T_M(\underline{x}, \underline{y}), T_M(\bar{x}, \bar{y})] \\ &= [\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}]\end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_{K, M}^r(x, y) = [C_K(\underline{x}, \underline{y}), T_M(\bar{x}, \bar{y})]$$

$$\mathcal{C}_K^r(x, y) = [C_K(\underline{x}, \underline{y}), C_K(\bar{x}, \bar{y})]$$

Os trabalhos de Cornelis e Deschrijver [33, 35] comprovam a existência de operadores fuzzy intervalares não representáveis, isto é, que não satisfazem o princípio de representação, e que são superiores aos representáveis no sentido de satisfazerem varias propriedades que os representáveis não satisfazem e, além disso, podem ser representados por operadores fuzzy e operações do reticulado como  $\wedge$  e  $\vee$ . Estes operadores formam a classe dos operadores *pseudo-representáveis*.

Esta classe, a dos pseudo-representáveis, é constituída pelos operadores *pessimistas* e *otimistas*. Os operadores otimistas são assim chamados por elevarem o limite inferior do intervalo representável, dando um tom otimista ao operador. Analogamente, define os operadores pessimistas abaixando o limite superior do intervalo, como nas definições abaixo.

**Definição 24.** Seja  $C$  uma conjunção fuzzy. A conjunção pessimista  $\mathcal{C}_C^p$  e a conjunção otimista  $\mathcal{C}_C^o$  com representante  $C$  são definidos como:

$$\mathcal{C}_C^p(x, y) = [C(\underline{x}, \underline{y}), C(\underline{x}, \bar{y}) \vee C(\bar{x}, \underline{y})], \quad (3.40)$$

$$\mathcal{C}_C^o(x, y) = [C(\underline{x}, \bar{y}) \wedge C(\bar{x}, \underline{y}), C(\bar{x}, \bar{y})]. \quad (3.41)$$

Da mesma maneira, as disjunções pessimista  $\mathcal{D}_D^p$  e otimista  $\mathcal{D}_D^o$  com representante  $D$  são definidas como:

$$\mathcal{D}_D^p(x, y) = [D(\underline{x}, \underline{y}), D(\underline{x}, \bar{y}) \vee D(\bar{x}, \underline{y})], \quad (3.42)$$

$$\mathcal{D}_D^o(x, y) = [D(\underline{x}, \bar{y}) \wedge D(\bar{x}, \underline{y}), D(\bar{x}, \bar{y})]. \quad (3.43)$$

Com as definições acima, pode-se construir uma grande classe de conjunções pseudo-representáveis, ou pseudo-C-representáveis. Analogamente, a família de implicações também tem seus operadores I-representáveis e pseudo-I-representáveis de acordo com as definições a seguir [36]:

**Definição 25.** *Sejam  $I_1$  e  $I_2$  implicações fuzzy tais que  $I_1(x, y) \leq I_2(x, y)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ . Uma implicação I-representável  $\mathcal{I}_{I_1, I_2}^r$  com representantes  $I_1$  e  $I_2$  é definida como:*

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{I_1, I_2}^r(x, y) := [I_1(\bar{x}, \underline{y}), I_2(\underline{x}, \bar{y})]. \quad (3.44)$$

O mesmo para implicações pseudo-I-representáveis:

**Definição 26.** *Sejam  $I$  uma implicação fuzzy. Uma implicação pessimista  $\mathcal{I}_I^p$  e uma implicação otimista  $\mathcal{I}_I^o$  são dados por:*

$$\mathcal{I}_I^p(x, y) = [I(\bar{x}, \underline{y}), I(\underline{x}, \underline{y}) \vee I(\bar{x}, \bar{y})], \quad (3.45)$$

$$\mathcal{I}_I^o(x, y) = [I(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I(\bar{x}, \bar{y}), I(\underline{x}, \bar{y})]. \quad (3.46)$$

Exemplos dessa classe especial de operadores podem ser construídos facilmente dados operadores fuzzy como os abaixo.

**Exemplo 16.** Alguns exemplos de operadores fuzzy intervalares pseudo-representáveis:

$$\begin{array}{ll}
 \mathcal{I}_M^p = [\bar{x} \wedge \underline{y}, (\underline{x} \wedge \underline{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})] & \text{Implicação pessimista com representante M;} \\
 \mathcal{I}_P^p = [\bar{x}, \underline{y}, (\underline{x}, \underline{y}) \vee (\bar{x}, \bar{y})] & \text{Implicação pessimista com representante P;} \\
 \mathcal{I}_M^o = [(\underline{x} \wedge \underline{y}) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}), \underline{x} \wedge \bar{y}] & \text{Implicação otimista com representante M;} \\
 \mathcal{I}_P^o = [(\underline{x}, \underline{y}) \wedge (\bar{x}, \bar{y}), \underline{x}, \bar{y}] & \text{Implicação otimista com representante P.}
 \end{array} \tag{3.47}$$

Até agora apresentamos as ferramentas básicas para construção de operadores fuzzy no reticulado  $\mathbb{I}$ . Com isso em mãos podemos apresentar uma abordagem particular a morfologia matemática intervalar, que é em si um caso particular da morfologia matemática  $\mathbb{I}$ -fuzzy, baseada na extensão apresentada anteriormente dos conceitos de medida de inclusão e intersecção fuzzy em  $\mathbb{I} = \mathbb{I}$ .

### 3.5 Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar

Todas as classes de operadores apresentadas na seção anterior podem ser aplicadas nas Equações 3.33 e 3.34 para gerar operadores fuzzy intervalares  $\varepsilon_{\mathbb{I}}$  e  $\delta_{\mathbb{I}}$ . Estes operadores no reticulado  $\mathbb{I}$  servem de base para uma abordagem particular de morfologia matemática fuzzy intervalar [110, 143].

É válido notar que nessa abordagem, o par de operadores  $(\varepsilon_{\mathbb{I}}, \delta_{\mathbb{I}})$  forma uma adjunção e por isso, a composição destes operadores gera aberturas e fechamentos que podem ser usados em uma variedade de filtros morfológicos intervalares. Se esta adjunção vale, isto é, se  $\varepsilon_{\mathbb{I}}$  e  $\delta_{\mathbb{I}}$  são adjuntos, então  $\varepsilon_{\mathbb{I}}(., s)$  e  $\delta_{\mathbb{I}}(., s)$  são necessariamente erosão e dilatação para todo elemento estruturante  $s$  em  $\mathbb{I}$ .

A construção destes operadores da MM intervalar baseada em conectivos fuzzy intervalares é extremamente simplificada ao tomar as classes representáveis e pseudo-representáveis que, segundo o próximo teorema representam operadores erosivos e dilativos no segundo argumento, que aparecem naturalmente de conectivos fuzzy com as mesmas propriedades.

**Teorema 9** ([143]). *Se  $C_1$ ,  $C_2$  e  $I_1$ ,  $I_2$  são respectivamente conjunções e implicações fuzzy tais que  $C_1(x, y) \leq C_2(x, y)$  e  $I_1(x, y) \leq I_2(x, y)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ , então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- *As conjunção intervalares  $\mathcal{C}_{C_1, C_2}^r$  e  $\mathcal{C}_{C_1}^p$  representam dilatações no segundo componente para todo primeiro componente fixo  $z \in \mathbb{I}$  se, e somente se, as conjunções  $C_1$  e  $C_2$  representam dilatações no segundo componente para todo primeiro componente fixo  $z \in [0, 1]$ ,*
- *As implicações intervalares  $\mathcal{I}_{I_1, I_2}^r$  e  $\mathcal{I}_{I_1}^p$  representam erosões no segundo componente para todo primeiro componente fixo  $z \in \mathbb{I}$  se, e somente se, as implicações  $I_1$  e  $I_2$  representam erosões no segundo componente para todo primeiro componente fixo  $z \in [0, 1]$ .*

É importante notar que conjunções otimistas  $\mathcal{C}_C^o$  geralmente não são dilatações, mesmo que  $C(z, \cdot)$  sejam dilatações para todo elemento estruturante  $s \in \mathbb{I}$ . Uma exceção é a t-norma otimista  $\mathcal{T}_M^o$  pois  $\mathcal{T}_M^o = \mathcal{T}_M^r$ . De modo semelhante, as implicações pessimistas  $\mathcal{I}_I^p$  não geram geralmente erosões para um elemento estruturante fixo  $z \in \mathbb{I}$ , mesmo que  $I(z, \cdot)$  seja uma erosão para todo  $z \in [0, 1]$ .

**Exemplo 17.** Observe que a conjunção otimista  $\mathcal{T}_P^o$  não representa uma dilatação. Para mostrar isso, basta mostrarmos que para algum  $z \in \mathbb{I}$  fixo e  $x, y \in \mathbb{I}$ :

$$\mathcal{T}_P^o(z, x \vee y) \neq \mathcal{T}_P^o(z, x) \vee \mathcal{T}_P^o(z, y)$$

Tome por exemplo  $z = [0.3, 1]$ ,  $x = [0, 0.5]$  e  $y = [0.3, 0.4]$ . Então,  $x \vee y = [0, 0.5] \vee [0.3, 0.4] = [0.3, 0.5]$  e:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P^o(z, x \vee y) &= \mathcal{T}_P^o([0.3, 1], [0.3, 0.5]) \\ &= [T_P(0.3, 0.5) \wedge T_P(1, 0.3), T_P(1, 0.5)] \\ &= [0.15 \wedge 0.3, 0.5] = [0.15, 0.5] \end{aligned}$$



Além disso:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_P^o(z, x) &= \mathcal{T}_P^o([0.3, 1], [0, 0.5]) \\ &= [T_P(0.3, 0.5) \wedge T_P(1, 0), T_P(1, 0.5)] \\ &= [0.15 \wedge 0, 0.5] = [0, 0.5]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_P^o(z, y) &= \mathcal{T}_P^o([0.3, 1], [0.3, 0.4]) \\ &= [T_P(0.3, 0.4) \wedge T_P(1, 0.3), T_P(1, 0.4)] \\ &= [0.12 \wedge 0.3, 0.4] = [0.12, 0.4]\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{T}_P^o(z, x \vee y) = [0.15, 0.5] \neq \mathcal{T}_P^o(z, x) \wedge \mathcal{T}_P^o(z, y) = [0, 0.5] \vee [0.12, 0.4] = [0, 0.5].$$

**Exemplo 18.** Considere a imagem intervalar dada na Figura 3.4, o elemento estruturante fuzzy B dado abaixo e os operadores morfológicos intervalares erosão e dilatação baseados na t-norma pessimista  $\mathcal{T}_L^p$  e em sua R-implicação otimista  $\mathcal{I}_L^o$ , denotados por  $\varepsilon_{\mathcal{T}_L^p}$  e  $\delta_{\mathcal{I}_L^o}$  respectivamente.

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

A erosão  $\varepsilon_{\mathcal{T}_L^p}$  dessa imagem com o elemento estruturante B resulta na imagem intervalar da Figura 3.11. Já dilatação  $\delta_{\mathcal{I}_L^o}$  da imagem por B gera a imagem da Figura 3.12.

Tendo visto as condições necessárias para escolhermos pertinentemente um operador fuzzy intervalar vamos na próxima seção apresentar alguns métodos de construção do operador dual ao escolhido de tal maneira que o par primal e dual sejam erosão e dilatação fuzzy intervalares.



Figura 3.11: Resultado da erosão intervalar da Figura 3.4 pelo elemento estruturante B. Em a) vemos o limite inferior dessa imagem, em b) o superior e em c) o comprimento do intervalo [110].



Figura 3.12: Resultado da erosão intervalar da Figura 3.4 pelo elemento estruturante B. Em a) vemos o limite inferior dessa imagem e em b) o superior. Já em c) representamos o comprimento do intervalo [110].

### 3.5.1 Construção de Operadores Baseada em Adjunção

Sob certas condições vistas no Teorema 1 pode-se derivar de uma dada conjunção fuzzy intervalar  $\mathcal{C}$  sua R-implicação  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  e analogamente, de uma implicação fuzzy intervalar  $\mathcal{I}$  sua R-conjunção  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ , nos termos do Teorema 2. O teorema abaixo nos permite, a partir de um par de operadores fuzzy  $(I, C)$  adjuntos, formar pares adjuntos de operadores fuzzy intervalares pseudo-representáveis [110, 143].

**Teorema 10.** *Se  $C$  é uma conjunção fuzzy tal que  $C(1, x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  então a R-implicação da conjunção pessimista  $\mathcal{C}_C^p$  é dada pela implicação otimista  $\mathcal{I}_I^o$ , onde  $I$  é a*

*R-implicação de C. Neste caso, temos também que  $\mathcal{I}_I^o$  e  $\mathcal{C}_C^p$  são adjuntos se, e somente se,  $I$  e  $C$  são adjuntos.*

*Por outro lado, se  $I$  é uma implicação fuzzy tal que  $I(1, x) < 1$  para todo  $x \neq 1$  então a R-conjunção da implicação otimista  $\mathcal{I}_I^o$  é dada pela conjunção pessimista  $\mathcal{C}_C^p$  onde  $C$  é a R-conjunção de  $I$ . Nesse caso, temos também que  $\mathcal{I}_I^o$  e  $\mathcal{C}_C^p$  são adjuntos se, e somente se,  $I$  e  $C$  são adjuntos.*

**Exemplo 19.** [143] Os seguintes pares de operadores pseudo-representáveis são adjunções:  $(\mathcal{I}_M^o, \mathcal{C}_M^p), (\mathcal{I}_P^o, \mathcal{C}_P^p), (\mathcal{I}_L^o, \mathcal{C}_L^p), (\mathcal{I}_K^o, \mathcal{C}_K^p)$

De maneira análoga para operadores fuzzy intervalares representáveis, as condições e expressões para construção de R-implicações e R-conjunções segue no próximo teorema.

**Teorema 11** ([143]). *Se  $C$  e  $C'$  são conjunções fuzzy tais que  $C(x, y) \leq C'(x, y)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$  e  $C'(1, x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  então a R-implicação da conjunção representável  $\mathcal{C}_{C,C'}^r$  é dada pela seguinte expressão, na qual  $I$  é a R-implicação de  $C$  e  $I'$  é a R-implicação de  $C'$ :*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}_{C,C'}^r}(x, y) = [I(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I'(\bar{x}, \bar{y}), I'(\bar{x}, \bar{y})] \quad (3.48)$$

*Nesse caso,  $\mathcal{C}_{C,C'}^r$  e sua R-implicação são adjuntos se, e somente se os pares  $(I, C)$  e  $(I', C')$  formam adjunções. Similarmente, se  $I$  e  $I'$  são implicações fuzzy tais que  $I(x, y) \leq I'(x, y)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$  e  $I(1, x) < 1$  para todo  $x \neq 1$  então a R-conjunção da implicação representável  $\mathcal{I}_{I,I'}^r$  é dada pela seguinte expressão, onde  $C$  é a R-conjunção de  $I$  e  $C'$  é a R-implicação de  $I'$ :*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}_{I,I'}^r}(x, y) = [C(\bar{x}, \underline{y}), C(\bar{x}, \underline{y}) \wedge C'(\underline{x}, \bar{y})]. \quad (3.49)$$

*Nesse caso,  $\mathcal{I}_{I,I'}^r$  e sua R-conjunção são adjuntos se, e somente se, os pares  $(I, C)$  e  $(I', C')$  formam adjunções.*

**Exemplo 20.** Considere a conjunção fuzzy mínimo  $T_M$  e a sua implicação adjunta  $I_M$  de Gödel. A implicação adjunta da conjunção representável  $\mathcal{T}_M^r$  é dada, segundo o Teorema 11, por:

$$\mathcal{I}_{T_M^r}(x, y) = [I_M(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I_M(\bar{x}, \bar{y}), I_M(\bar{x}, \bar{y})].$$

E este intervalo é dado pela seguinte expressão:

$$[I_M(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I_M(\bar{x}, \bar{y}), I_M(\bar{x}, \bar{y})] = \begin{cases} [1 \wedge 1, 1] = 1_{\mathbb{I}} & \text{para } x \leq y \\ [\underline{y} \wedge \bar{y}, \bar{y}] = y & \text{para } x > y \\ [1 \wedge \bar{y}, \bar{y}] = [\bar{y}, \bar{y}] & \text{para } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ e } \bar{x} > \bar{y} \\ [\underline{y} \wedge 1, 1] = [\underline{y}, 1] & \text{para } \underline{x} > \underline{y} \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y} \end{cases}$$

Desta forma, a implicação adjunta  $\mathcal{I}_{T_M^r}(x, y)$  é equivalente a implicação intuicionista  $\mathcal{I}_S$  dada por Atanassov e Gargarov [6].

**Exemplo 21.** Os seguintes pares de operadores representáveis formam adjunções:  $(\mathcal{I}_M^r, \mathcal{C}_M^r)$ ,  $(\mathcal{I}_P^r, \mathcal{C}_P^r)$ ,  $(\mathcal{I}_W^r, \mathcal{C}_W^r)$ ,  $(\mathcal{I}_K^r, \mathcal{C}_K^r)$

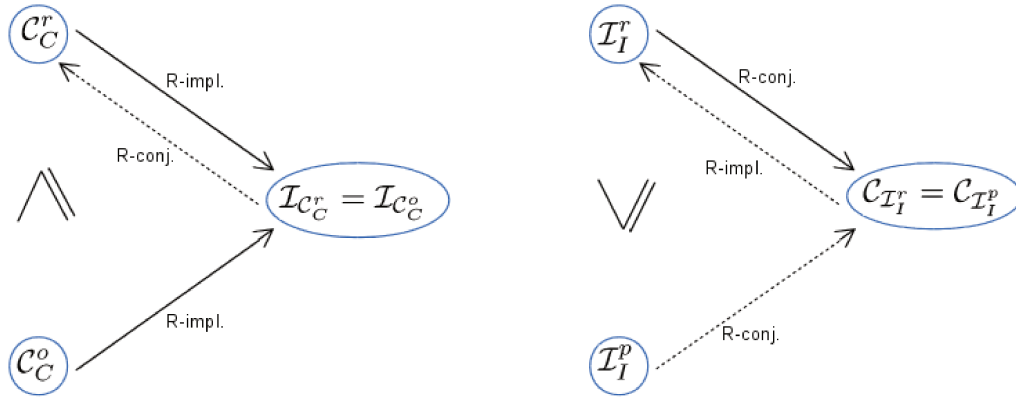


Figura 3.13: Relações entre conectivos representáveis e pseudo-representáveis em  $\mathbb{I}$  e suas R-implicações e R-conjunções.

Com os Teoremas 11 e 3 obtemos uma relação especial entre conjunções representáveis e otimistas por meio de R-implicações e R-conjunções, o mesmo para implicações representáveis e pessimistas. Em suma, o Teorema 11 relaciona as conjunções otimistas e representáveis que formam dilatações com suas R-implicações enquanto o Teorema 3 define

uma comparação de ordem entre eles. O mesmo se pode dizer das implicações intervalares pessimista e representáveis que formam erosões e suas R-conjunções. Uma ilustração destas observações é dada na Figura 3.13.

Com a base teórica necessária apresentada, faremos no próximo capítulo uma revisão das memórias associativas fuzzy e a introdução das memórias associativas  $\mathbb{L}$ -fuzzy e em especial, das memórias associativas fuzzy intervalares.



---

## CAPÍTULO 4

---

# MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS $\mathbb{L}$ -FUZZY E FUZZY INTERVALAR

Como visto na introdução, as memórias associativas são modelos matemáticos que têm como função guardar associações de padrões. Estes modelos têm cada um suas características básicas e diferem entre si pelo tipo de dado que são capazes de armazenar, capacidade de armazenamento, tolerância a ruídos e técnica de aprendizagem que utilizam, diferenças estas responsáveis pelos mais diversos modelos de memórias associativas como, dentre outros, as FAMs e FMAMs.

Neste capítulo vamos introduzir as memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy, uma generalização para qualquer reticulado das FMAMs que por sua vez são generalizações de diversos modelos de memórias associativas fuzzy existentes na literatura, que incluem as FAMs de Kosko, Junbo et al. e de Liu [9, 70, 81, 85, 91]. Iremos tratar aqui especialmente dos detalhes matemáticos, uma vez que já introduzimos historicamente as memórias associativas. Inicialmente o modelo matemático de uma memória associativa fuzzy será apresentado

para logo após introduzirmos o modelo proposto nessa dissertação, que é o de *memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy*.

## 4.1 Introdução às Memórias Associativas Morfológicas Fuzzy

As *memórias associativas*, AMs, são sistemas que armazenam pares de padrões de entrada e saída  $(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi)$ , em que  $\mathbf{p}^\xi \in \mathcal{X}$ ,  $\mathbf{q}^\xi \in \mathcal{Y}$  e  $\xi \in \mathcal{K}$  [51] enumeráveis e  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  são universos de discurso arbitrários. Formalmente, o problema de síntese de uma AM se traduz na busca de um mapeamento  $\mathcal{W} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que, idealmente, possui as seguintes propriedades:

$$\mathcal{W}(\mathbf{p}^\xi) = \mathbf{q}^\xi \text{ para todo } \xi \in \mathcal{K}; \quad (4.1)$$

$$\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{p}}^\xi) = \mathbf{q}^\xi \text{ para } \tilde{\mathbf{p}}^\xi \approx \mathbf{p}^\xi. \quad (4.2)$$

Cada par de entrada e saída  $(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi)$  a ser armazenado na memória é chamado de *memória fundamental*, sendo que para a *entrada*  $\mathbf{p}^\xi$  deve-se obter o *padrão recordado*  $\mathbf{q}^\xi$ . Ao conjunto desses padrões de entrada e saída  $\{(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi) : \xi \in \mathcal{K}\}$  é dado o nome de *conjunto de memórias fundamentais*. Baseados no tipo de memórias armazenadas, uma AM pode ser classificada como *autoassociativa* ou *heteroassociativa*. Quando as memórias fundamentais são da forma  $\{(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{p}^\xi) : \xi \in \mathcal{K}\}$ , a AM é classificada como autoassociativa. Caso contrário, isto é, quando  $\mathbf{p}^\xi$  é diferente de  $\mathbf{q}^\xi$ , ela é classificada como heteroassociativa [53].

O mapeamento  $\mathcal{W} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  que define uma memória associativa deve ser tal que armazene todo o conjunto de memórias fundamentais e que tenha ainda alguma tolerância a ruído. Dessa maneira, mesmo que uma versão ruidosa ou corrompida  $\tilde{\mathbf{p}}^\xi$  da memória fundamental  $\mathbf{p}^\xi$  seja apresentada, a mesma saída correspondente a versão não corrompida é devolvida, isto é,  $\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{p}}^\xi) = \mathcal{W}(\mathbf{p}^\xi) = \mathbf{q}^\xi$ .

No entanto, muitos modelos de memórias associativas não conseguem atender na prática à estas propriedades. Por exemplo, um modelo de memória associativa  $\mathcal{W}$  pode conseguir apenas guardar versões próximas das memórias fundamentais desejadas, isto é,  $\mathcal{F}(\mathbf{p}^\xi) \approx \mathbf{q}^\xi$ , como por exemplos as Memórias Associativas Lineares (LAMs) com armazenamento por



correlação, que não obtém recordação perfeita de uma memória a menos que o conjunto de memórias fundamentais seja ortogonal [51]. A segunda propriedade, a de ser tolerante a ruídos, é ainda mais difícil de atender, pois nela está embutida o conceito de proximidade entre a memória e sua versão corrompida, conceito esse subjetivo e diferente para cada aplicação.

É ainda possível citar outro problema que pode aparecer durante a síntese de uma memória associativa, que é o de aparecimento de *memórias espúrias*, isso é, uma AM pode armazenar associações que não fazem parte do conjunto de memórias fundamentais, como por exemplo as já citadas LAMs, cujas associações armazenadas são basicamente todas espúrias caso o conjunto de memórias fundamentais não seja ortogonal. Este problema é ainda mais grave do que os anteriores pois diminui as chances de uma recordação perfeita dentro das memórias fundamentais e diminui a tolerância a ruídos do modelo. Outros problemas práticos advêm da capacidade do modelo de guardar um número limitado de memórias fundamentais, capacidade esta que pode ser pequena demais para algumas aplicações. Por outro lado, modelos como uma MAM autoassociativa em tons de cinza tem uma capacidade de armazenamento de  $L^n$  pares de memórias, em que  $n$  é o tamanho dos padrões a serem armazenados e  $L$  é a quantidade de tons de cinza considerados.

Os primeiros modelos de MAMs, *memórias associativas morfológicas*, foram introduzidas nos anos 90 por Ritter e Sussner [119] e são representados por redes neurais morfológicas, isto é, redes neurais cujos neurônios efetuam operações da morfologia matemática [120]. No caso autoassociativo, as MAMs apresentam convergência em um passo e capacidade absoluta ótima [145]. Além disso estes modelos se relacionam com a classe das *memórias associativas morfológicas fuzzy*, as quais utilizam a morfologia matemática fuzzy como sua base formal [148, 154]. Valle e Sussner [154] mostraram que na classe das memórias associativas morfológicas fuzzy se incluem a FAM de Junbo [70], as FAMs generalizadas de Chung e Lee [25], a FAM max-min de Liu [91], as memórias associativas lógicas fuzzy bidirecionais de Belohlávek [9] e as memórias associativas fuzzy implicativas (IFAMs) [147, 156].

Estes modelos de memórias associativas morfológicas fuzzy podem ser descritas em termos de *produtos matriciais fuzzy*, que são a combinação de operadores fuzzy como t-normas e implicações com operações de máximo e mínimo usuais. Estes produtos são casos

particulares de uma classe mais geral de produtos matriciais fuzzy introduzidos por Pedrycz na década de 90 [114] e que descrevem o *neurônio-OU*, uma composição entre uma s-norma e uma t-norma.

Já o produto *max-C* toma a s-norma como a operação de máximo e substitui a t-norma por uma conjunção fuzzy qualquer. De maneira similar adaptou-se do *neurônio-E* e o produto *min-I*, como na definição abaixo [153]. Além disso, estes produtos matriciais definem neurônios *max-C* e *min-I*, a maneira dos neurônios OU e E de Pedrycz.

**Definição 27.** *Sejam  $C, I$  respectivamente uma conjunção e uma implicação fuzzy. Define-se o produto max-C de  $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k] \in [0, 1]^{m \times k}$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k] \in [0, 1]^{k \times n}$ , denotado por  $E = X \circ Y$ , da seguinte maneira:*

$$e_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k C(x_i^\xi, y_\xi^j), \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

De maneira similar o produto *min-I* denotado por  $G = X \otimes Y$  é dado, para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , por:

$$g_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k I(y_\xi^j, x_i^\xi); \quad (4.4)$$

Antes de introduzir as  $\mathbb{L}$ -FMAMs, vamos apresentar as FMAMs e seus modelos max-C FMAMs, que são memórias associativas morfológicas fuzzy baseadas nos produtos max-C dados pela Equação 4.3.

#### 4.1.1 Max-C FMAMs

Vamos apresentar nesta seção as max-C FMAMs, que formam uma classe de memórias associativas baseadas em neurônios morfológicos do tipo max-C, isto é, construídos a partir do produto max-C dado pela Equação 4.3 [154]. Para isso considere inicialmente  $P = [\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k] \in [0, 1]^{n \times k}$  e  $Q = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k] \in [0, 1]^{m \times k}$  matrizes cujas colunas formam pares  $(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi)$  de memórias fundamentais e considere também a matriz  $W \in [0, 1]^{m \times n}$ , que representa a matriz de pesos sinápticos de uma AM. Define-se então uma max-C FAM  $\mathcal{W}$  como

um operador  $\mathcal{W} : [0, 1]^{n \times k} \rightarrow [0, 1]^{m \times k}$  dado pelo produto a seguir:

$$\mathcal{W}(P) = \delta_W(P) = W \circ P \quad (4.5)$$

Caso  $Q = \delta_W(P)$  então a FAM definida por este produto relembra perfeitamente o conjunto de memórias fundamentais. Note que escolhas particulares de conjunções fuzzy produzem diferentes produtos matriciais fuzzy e, conseqüentemente, diferentes FAMs. Exemplos de neurônios max-C incluem o *max-min*, *max-produto* e, o mais geral, *max-t* [85], nos quais  $t$  é uma t-norma. Além disso, pode-se obter a GFAM de Łukasiewicz [25] como caso particular de uma FAM tomando como  $t$  a t-norma de Łukasiewicz. Se o operador  $\mathcal{W}$  corresponder a uma dilatação algébrica então o modelo é dito *morfológico* e esta memória é dita uma *memória associativa morfológica fuzzy*, uma FMAM.

Observe que se o operador  $\delta_W$  define uma dilatação então existe uma única erosão  $\varepsilon$  que forma uma adjunção com  $\delta_W$  e que produz uma matriz em  $[0, 1]^{m \times n}$  para cada entrada  $Q \in [0, 1]^{m \times k}$ . Baseado nesse conceito de adjunção, define-se a matriz de pesos da max-C FMAM pelo produto [154]:

$$W = \varepsilon_P(Q) = Q \circledast P^t. \quad (4.6)$$

Este esquema de síntese da matriz  $W$  é chamado de *aprendizado por adjunção*, pois utiliza-se dos conceitos de operadores adjuntos para realizar as etapas de aprendizagem e recuperação [154].

É importante notar que os modelos de FMAMs apresentados até agora derivam de conceitos da morfologia matemática fuzzy vistos no Capítulo 3. A partir dessa observação e tendo introduzido os conceitos relevantes da morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy no Capítulo 3, vamos propor agora um modelo de memória associativa baseado na MM  $\mathbb{L}$ -fuzzy. De maneira especial e, como caso particular, vamos utilizar a morfologia matemática fuzzy intervalar para propor um modelo de FMAMs intervalares. Nestes modelos, o conceito de aprendizagem por adjunção será estendido aproveitando-se de relações de adjunção de operadores  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalares.

## 4.2 Memórias Associativas Morfológicas $\mathbb{L}$ -Fuzzy

O objetivo desta seção é introduzir a classe das *memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy* ( $\mathbb{L}$ -FMAMs) e, como caso particular, as *memórias associativas fuzzy intervalar morfológicas* (IV-FMAMs), que aparece ao tomarmos a classe de todos os operadores fuzzy sobre o reticulado  $\mathbb{L}$ , isto é,  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}$ .

Vamos inicialmente definir os produtos matriciais  $\mathbb{L}$ -fuzzy de maneira similar aos produtos matriciais fuzzy das Equações 4.3 e 4.4, segundo a definição abaixo:

**Definição 28.** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{I}$  respectivamente uma conjunção e uma implicação em  $\mathbb{L}$ . Definimos o produto max- $\mathcal{C}$  de  $X \in \mathbb{L}^{n \times k}$  e  $Y \in \mathbb{L}^{m \times k}$ , denotado por  $E = X \circ Y$ , da seguinte maneira:*

$$e_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k \mathcal{C}(x_i^\xi, y_\xi^j), \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

*De maneira similar o produto min- $\mathcal{I}$  denotado por  $G = X \otimes Y$  é dado, para todo  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ , por:*

$$g_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k \mathcal{I}(y_\xi^j, x_i^\xi). \quad (4.8)$$

Estes produtos matriciais serão usados para construir as memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy, em particular, o produto dado pela Equação 4.7 para definir a classe das max- $\mathcal{C}$   $\mathbb{L}$ -FMAMs.

### 4.2.1 Max- $\mathcal{C}$ $\mathbb{L}$ -FMAMs

Considere  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  universos arbitrários e  $\{(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi) : \xi \in \mathcal{K}\} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(\mathcal{Y})$  um conjunto de pares de associações, chamado de *conjunto de memórias fundamentais*. Definimos uma *memória associativa  $\mathbb{L}$ -fuzzy*,  $\mathbb{L}$ -FMAM, como uma função  $\mathcal{W} : \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(\mathcal{Y})$  que guarda e é capaz de recordar o conjunto de memórias fundamentais. Como uma memória associativa, a  $\mathbb{L}$ -FMAM deve satisfazer as condições gerais de uma memória associativa dada pelas Equações 4.1 e 4.2. Em particular:

$$\mathcal{W}(\mathbf{p}^\xi) = \mathbf{q}^\xi \text{ para todo } \xi \in \mathcal{K}; \quad (4.9)$$

$$\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{p}}^\xi) = \mathbf{q}^\xi \text{ para } \tilde{\mathbf{p}}^\xi \approx \mathbf{p}^\xi. \quad (4.10)$$

Como iremos utilizar a  $\mathbb{L}$ -FMAM em sistemas de inferência baseadas em regras fuzzy, podemos reescrever mais adequadamente as duas condições acima como:

$$\mathbf{p}^\xi \approx \tilde{\mathbf{p}}^\xi \Rightarrow \mathcal{W}(\tilde{\mathbf{p}}^\xi) \approx \mathbf{q}^\xi \quad (4.11)$$

Para simplificar as definições, vamos considerar apenas o caso finito e enumerável. Considere então as matrizes  $P = [\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k] \in \mathbb{L}^{n \times k}$  e  $Q = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k] \in \mathbb{L}^{m \times k}$ , conjunto de memórias fundamentais formado pelas colunas dessas matrizes  $\{(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi) \mid \xi = 1, 2, 3, \dots, k\}$ . Uma max- $\mathcal{C}$   $\mathbb{L}$ -FAM é descrita pelo operador  $\mathcal{W}_{\mathbb{L}} : \mathbb{L}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{L}^{m \times k}$  dado pela seguinte equação, para todo  $P \in \mathbb{L}^{n \times k}$  e  $Q \in \mathbb{L}^{m \times k}$ :

$$\mathcal{W}_{\mathbb{L}}(P) = \delta_W(P) = W \circ_{\mathcal{C}} P, \quad (4.12)$$

para alguma matriz  $W \in \mathbb{L}^{m \times n}$ .

Note que se existir uma matriz  $W \in \mathbb{L}^{m \times n}$  tal que vale a igualdade  $Q = \delta_W(P)$  então a max- $\mathcal{C}$   $\mathbb{L}$ -FAM  $\mathcal{W}_{\mathbb{L}}$  construída com essa matriz recupera todo o conjunto de memórias fundamentais. Além disso, se o operador  $\delta_W$  representar uma dilatação algébrica, então o modelo  $\mathcal{W}_{\mathbb{L}}$  é dito morfológico, e representa uma *memória associativa morfológica  $\mathbb{L}$ -fuzzy*, max- $\mathcal{C}$   $\mathbb{L}$ -FMAM.

Consideremos agora o problema de determinar a matriz de pesos  $W$  de uma max- $\mathcal{C}$   $\mathbb{L}$ -FMAM para que consigamos os objetivos explicitados na Equação 4.11. Idealmente, queremos que esta memória guarde todo o conjunto fundamental de memórias, isto é,  $W \circ_{\mathcal{C}} P = Q$ . Como a conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathcal{C}$  é crescente, então o produto  $\circ_{\mathcal{C}}$  é também crescente. Assim, se existir uma matriz  $A \in \mathbb{L}^{m \times n}$  tal que  $A \circ_{\mathcal{C}} P = Q$  então  $A$  está contido no conjunto  $\mathcal{L} = \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} : V \circ_{\mathcal{C}} P \leq Q\}$ . Caso  $W = \vee \mathcal{L}$  temos também que  $Q = A \circ_{\mathcal{C}} P \leq W \circ_{\mathcal{C}} P \leq Q$ , já que  $\mathcal{C}$  representa uma dilatação no primeiro argumento, o que implica que  $W \circ_{\mathcal{C}} P = Q$ . Em todo caso, temos que  $A \circ_{\mathcal{C}} P \leq W \circ_{\mathcal{C}} P \leq Q$  para todo  $A \in \mathcal{L}$ . Em resumo podemos dizer

que  $W \circ_C P$  resulta na melhor aproximação de  $Q$  por baixo em termos do produto  $\circ_C$  de uma matriz em  $\mathbb{L}^{m \times n}$  por  $P$ , como resumido no seguinte lema:

**Lema 1.** *Sejam as matrizes  $P = [\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k] \in \mathbb{L}^{n \times k}$  e  $Q = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k] \in \mathbb{L}^{m \times k}$ ,  $\mathcal{L} = \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} : V \circ_C P \leq Q\}$  e  $W = \vee \mathcal{L}$ , para uma conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathcal{C}$ . Se existir uma matriz  $A$  tal que  $A \circ_C \mathbf{p}^\xi = \mathbf{q}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ , então  $W \circ_C \mathbf{p}^\xi = \mathbf{q}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ . Além disso, toda matriz  $V \in \mathcal{L}$  satisfaz a seguinte desigualdade pra todo  $\xi = 1, \dots, k$ :*

$$V \circ_C \mathbf{p}^\xi \leq W \circ_C \mathbf{p}^\xi \leq \mathbf{q}^\xi. \quad (4.13)$$

O lema acima sugere a escolha de  $W = \vee \mathcal{L}$  como a matriz de pesos de uma  $\mathbb{L}$ -FMAM. Vamos mostrar com o seguinte teorema que o cálculo de tal matriz é relativamente simples se a conjunção  $\mathcal{C}$  for comutativa e dilativa, isto é, que representa uma dilatação em ambos os argumentos.

**Teorema 12.** *Sejam as matrizes  $P = [\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k] \in \mathbb{L}^{n \times k}$  e  $Q = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k] \in \mathbb{L}^{m \times k}$ . Considere uma conjunção  $\mathbb{L}$  fuzzy comutativa e dilativa  $\mathcal{C}$  e o conjunto  $\mathcal{L}_C = \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} : V \circ_C P \leq Q\}$ . A matriz  $W = \vee \mathcal{L}_C \in \mathbb{L}^{m \times n}$  é igual a  $Q \circ_{\mathcal{I}} P^t$ , em que  $\mathcal{I}$  é a implicação adjunta de  $\mathcal{C}$ .*

$$W = Q \circ_{\mathcal{I}} P^t \quad (4.14)$$

*Demonstração.* Basta mostrarmos que  $W = Q \circ_{\mathcal{I}} P^t$ . Para isso considere  $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  e  $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Visto que por hipótese a conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $\mathcal{C}$  é comutativa e  $(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  um par de operadores adjuntos, valem as seguintes igualdades:

$$W = \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid V \circ_C P \leq Q\} \quad (4.15)$$

$$= \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid \bigvee_{\xi=1}^k \mathcal{C}(v_{ij}, p_i^\xi) \leq q_j^\xi \ \forall i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{M}\} \quad (4.16)$$

$$= \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid \mathcal{C}(v_{ij}, p_i^\xi) \leq q_j^\xi \ \forall i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{M}, \xi \in \mathcal{K}\} \quad (4.17)$$

$$= \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid \mathcal{C}(p_i^\xi, v_{ij}) \leq q_j^\xi \ \forall i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{M}, \xi \in \mathcal{K}\} \quad (4.18)$$

$$= \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid v_{ij} \leq \mathcal{I}(p_i^\xi, q_j^\xi) \ \forall i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{M}, \xi \in \mathcal{K}\} \quad (4.19)$$

$$= \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid v_{ij} \leq \bigwedge_{\xi=1}^k \mathcal{I}(p_i^\xi, q_j^\xi) \ \forall i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{M}\} \quad (4.20)$$

$$= \bigvee \{V \in \mathbb{L}^{m \times n} \mid V \leq Q \otimes_{\mathcal{I}} P^t\} \quad (4.21)$$

$$= Q \otimes_{\mathcal{I}} P^t. \quad (4.22)$$

□

Este esquema de cálculo da matriz de pesos de uma  $\mathbb{L}$ -FMAM  $\mathcal{W}$  é chamado de *aprendizado por adjunção em  $\mathbb{L}$*  e é uma extensão do aprendizado por adjunção das FMAMs.

O seguinte corolário é consequência direta do Lema 1 e garante que uma max- $\mathcal{C}$  FMAM autoassociativa armazene e recupere perfeitamente o conjunto das memórias fundamentais se existir uma matriz  $Id \in \mathbb{L}^{n \times n}$  tal que  $Id \circ_C P = P$  para todo  $P \in \mathbb{L}^{n \times k}$ . Nesse caso, a max- $\mathcal{C}$   $\mathbb{L}$ -FMAM é dita possuir uma *identidade a esquerda*  $Id$ .

**Corolário 1.** *Considere a matriz  $P \in \mathbb{L}^{n \times k}$ . Se o produto max- $\mathcal{C}$  possuir uma identidade a esquerda  $Id \in \mathbb{L}^{n \times n}$  então a matriz  $W = P \otimes_{\mathcal{I}} P^t$  é de tal maneira que  $W \circ_C P = P$ .*

Note que um produto max- $\mathcal{C}$  possui uma identidade a esquerda se a sua conjunção  $\mathcal{C}$  possuir identidade a esquerda, isto é, se existir  $I_{\mathbb{L}} \in \mathbb{L}$  tal que  $\mathcal{C}(I_{\mathbb{L}}, x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ . Em particular, uma t-norma  $\mathcal{T}$  qualquer em  $\mathbb{L}$  satisfaz esta condição, isto é,  $\mathcal{T}(1_{\mathbb{L}}, x) = x$ . Assim, pode-se armazenar quantos padrões se desejar em uma max- $\mathcal{T}$   $\mathbb{L}$ -FMAM usando o esquema de recordação dado pelo Teorema 12.

Vimos até agora como são descritas as  $\mathbb{L}$ -FMAMs, generalizamos o método de aprendizado por adjunção em  $\mathbb{L}$ . Estes conceitos gerais podem ser empregados em um contexto mais restrito e de maior aproveitamento prático, contextos estes que aparecem ao tomarmos casos particulares de reticulados completos, como o reticulado completo  $\mathbb{I}$  que vimos no Capítulo 3. Vamos então, tomando o caso particular  $\mathbb{L} = \mathbb{I}$ , apresentar a seguir as memórias associativas morfológicas fuzzy intervalar,  $\mathbb{I}$ -FMAMs, ou IV-FMAMs.

### 4.2.2 IV-FMAMs

Vimos até agora como construir e trabalhar com uma  $\mathbb{L}$ -FMAM pela extensão dos produtos matriciais fuzzy dados nas Equações 4.7 a 4.8 e pela extensão do aprendizado por adjunção para  $\mathbb{L}$ . Desta maneira e, em conjunto com as propriedades de dualidade da morfologia matemática em reticulados completos, pudemos desenvolver a base de trabalho das memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy, assim introduzindo as bases teóricas para diversos modelos de  $\mathbb{L}$ -FMAMs ao considerar casos particulares de reticulados completos  $\mathbb{L}$ , como por exemplo o reticulado  $\mathbb{I}$ , que iremos utilizar para introduzir as memórias associativas morfológicas fuzzy intervalar.

É importante notar, antes de iniciarmos os estudos das IV-FMAMs em si, é que reticulados completos emergem não somente da consideração do conjunto de valores em si, mas também de sua ordenação. Assim, ordens diferentes daquela encontrada no reticulado completo  $\mathbb{I}$  podem ser consideradas, como a ordem lexicográfica, que da origem a um outro reticulado cujos elementos são subintervalos de  $[0,1]$ . Nesta seção, iremos focar no reticulado  $\mathbb{I}$  com a ordenação dada pela Equação 3.35 para dar origem as *memórias associativas morfológicas fuzzy intervalar*.

Iniciemos pela definição de uma max- $\mathcal{C}$  IV-FMAM. Considere para isso as matrizes  $P = [\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k] \in \mathbb{I}^{n \times k}$  e  $Q = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k] \in \mathbb{I}^{m \times k}$ , conjunto de memórias fundamentais formado por essas matrizes  $\{(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi) | \xi = 1, 2, 3, \dots, k\}$  e  $W \in \mathbb{I}^{m \times n}$ , e a max- $\mathcal{C}$  IV-FMAM, que é dada pela seguinte equação, para todo  $P \in \mathbb{I}^{n \times k}$  e  $Q \in \mathbb{I}^{m \times k}$ :



$$\mathcal{W}_{\mathbb{I}}(P) = W \circ_C P. \quad (4.23)$$

Note que se existir uma matriz  $W \in \mathbb{I}^{m \times n}$  tal que vale a igualdade  $Q = \mathcal{W}_{\mathbb{I}}(P)$  então a max- $\mathcal{C}$  IV-FMAM  $\mathcal{W}_{\mathbb{I}}$  com essa matriz recupera todo o conjunto de memórias fundamentais. A construção da matriz de pesos dessa IV-FMAM é feita pelo método de aprendizado por adjunção dado no Teorema 12:

$$W_{\mathbb{I}} = Q \otimes_{\mathcal{I}} P^t \quad (4.24)$$

Além disso, ao utilizar este método de aprendizagem, o Lema 1 nos garante que a matriz de pesos  $W$  de uma IV-FMAM é a melhor aproximação inferior de  $Q$  em termos do produto dado pela Equação 4.23.

Relembremos aqui que a classe de operadores fuzzy intervalar engloba os operadores representáveis, pseudo-representáveis e não-representáveis, sendo que a classe dos operadores pseudo-representáveis é constituída pelos operadores pessimistas e otimistas. Vamos utilizar aqui estas classes de operadores fuzzy intervalar para dar origem a diferentes classes de IV-FMAMs, as quais serão classificadas de acordo com o operador fuzzy intervalar que a da origem. Além disso, a partir daqui iremos utilizar a notação de intervalos do Capítulo 3, por exemplo, se  $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^{m \times n}$  então ele pode ser representado por  $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$ , com  $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in [0, 1]^{m \times n}$ .

Iniciemos então a introdução das IV-FMAMs baseadas em operadores fuzzy intervalares representáveis. Para isso considere uma conjunção comutativa e dilativa representável  $\mathcal{C}_{C,C'}^r$  com representantes  $C$  e  $C'$  tais e  $C \leq C'$ , as matrizes  $P = [\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^k] \in \mathbb{I}^{n \times k}$  e  $Q = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k] \in \mathbb{I}^{m \times k}$ , o conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{p}^\xi, \mathbf{q}^\xi) | \xi = 1, 2, 3, \dots, k\}$  e a memória associativa fuzzy intervalar representável dada pelo operador  $\mathcal{W}_{\mathbb{I}}^r : \mathbb{I}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{I}^{m \times k}$ , que por sua vez é dado pela Equação 4.23. Em particular, temos que:

$$\mathcal{W}_{\mathbb{I}}^r(P) = W \circ_{\mathcal{C}_{C,C'}^r} P = [\underline{W} \circ_C \underline{P}, \overline{W} \circ_{C'} \overline{P}] \quad (4.25)$$

Vimos no Capítulo 3 que a implicação adjunta da conjunção  $\mathcal{C}_{C,C'}^r$  é dada, para todo  $x, y \in \mathbb{I}$  por:

$$\mathcal{I}_{C,C'}^r(x, y) = [I(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I'(\overline{x}, \overline{y}), I'(\overline{x}, \overline{y})], \quad (4.26)$$

para os pares adjuntos  $(C, I)$  e  $(C', I')$ . A matriz da IV-FMAM, segundo a Equação 4.24, é então dada para todo  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ , por:

$$[W]_{ij} = [Q \oplus_{\mathcal{I}_{C,C'}^r} P^t]_{ij} \quad (4.27)$$

$$= \bigwedge_{\xi=1}^k \mathcal{I}_{C,C'}^r(q_i^\xi, p_j^\xi) \quad (4.28)$$

$$= \bigwedge_{\xi=1}^k [I(\underline{q_i^\xi}, \underline{p_j^\xi}) \wedge I'(\overline{q_i^\xi}, \overline{p_j^\xi}), I'(\overline{q_i^\xi}, \overline{p_j^\xi})] \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

Estudamos também no Capítulo 3 os operadores pseudo-representáveis, que são classificados como otimistas e pessimistas. Lembremos aqui que as conjunções otimistas em geral não representam uma dilatação, isto é, mesmo que  $C(w, .)$  seja uma dilatação para todo  $w \in [0, 1]$  não é garantido que o operador otimista  $\mathcal{C}_C^o(u, .)$  seja uma dilatação para todo  $u \in \mathbb{I}$ . Vamos nos restringir portanto às conjunções pessimistas.

Considere então o par de conjunção e implicação fuzzy adjuntos  $(C, I)$  e a conjunção fuzzy intervalar comutativa e dilatativa pessimista  $\mathcal{C}_C^p$ . Uma IV-FMAM pessimista  $\mathcal{W}_{\mathbb{I}}^p$ , construída com a conjunção pessimista  $\mathcal{C}_C^p$  é dada por:

$$\mathcal{W}_{\mathbb{I}}^p(P) = W \circ_{\mathcal{C}_C^p} P \quad (4.31)$$

Pelo Teorema 10, a implicação adjunta ao operador pessimista  $\mathcal{C}_C^p$  é dada pela implicação otimista  $\mathcal{I}_I^o$ , em que  $I$  é a implicação fuzzy adjunta a conjunção  $C$ . Assim, pelo Teorema 12, podemos construir a matriz de pesos da IV-FMAM pessimista, para todo  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ , como:

$$[W]_{ij} = [Q \otimes_{\mathcal{I}_I^o} P^t]_{ij} \quad (4.32)$$

$$= \bigwedge_{\xi=1}^k \mathcal{I}_I^o(q_i^\xi, p_j^\xi) \quad (4.33)$$

$$= \bigwedge_{\xi=1}^k [I(\underline{q_i^\xi}, \underline{p_j^\xi}) \wedge I(\overline{q_i^\xi}, \overline{p_j^\xi}), I(\underline{q_i^\xi}, \overline{p_j^\xi})], \quad (4.34)$$

Para finalizar a classe de IV-FMAMs, devemos notar que os operadores fuzzy intervalares não são restritos aos operadores representáveis e pseudo-representáveis, mas existem também os operadores não-representáveis, que não podem ser escritos somente com operadores fuzzy clássicos e operadores de reticulado. Infelizmente não existe uma maneira prática de trabalhar com estes operadores e nem uma representação geral para eles.

No entanto, sempre podemos recorrer ao Teorema 12 para construirmos a matriz de pesos de uma IV-FMAM não-representável se tivermos em mãos um par de conjunção e implicação não-representáveis adjuntos.

Por fim, visto a teoria das  $\mathbb{L}$ -FMAMs e IV-FMAMs nesse capítulo vamos, no próximo, apresentar uma aplicação prática dessas memórias, em particular, das IV-FMAMs, em um problema de previsão de série temporal, mais especificamente, na previsão da vazão do reservatório que alimenta a barragem da hidrelétrica de Furnas, de maneira a aproveitar o formato intervalar de representação das IV-FMAMs para modelar a incerteza inerente da medida da vazão na série histórica.



---

## CAPÍTULO 5

---

# PREVISÃO DE VAZÕES DE FURNAS

### 5.1 Sobre Furnas

A Usina Hidrelétrica de Furnas, cuja capacidade de geração de energia atual é de 1.216 MW (8x152 MW), é uma das mais importantes hidrelétricas do Brasil, tanto por sua capacidade geradora quanto por sua localização estratégica, entre Belo Horizonte, Rio de Janeiro e São Paulo, três dos principais centros socioeconômicos do país. Na década de 50, década esta na qual a construção de Furnas se iniciou, uma eminente crise energética assolava esta região. Para tentar sanar esta crise, com o Decreto Federal nº 41.066 de fevereiro de 1957, foi criada a Central Elétrica de Furnas - empresa responsável por construir e manter este complexo hidrelétrico - que hoje é subsidiária da Eletrobras e conta com serviços de usinas hidrelétricas e termelétricas, linhas de transmissão, subestações, parques eólicos e telecomunicações <sup>1</sup>. A construção ficou pronta em 1963, ano em que seu reservatório foi enchido, trazendo não apenas benefícios mas também deixando para trás muito da história das pessoas e de municípios que estavam nas áreas a serem alagadas.

A barragem de Furnas encontra-se no curso do Rio Grande entre os municípios de São

---

<sup>1</sup> <http://www.furnas.com.br/frmSEAreasAtuacao.aspx>

José da Barra e São João Batista do Glória, em Minas Gerais. Seu reservatório banha 34 municípios deste estado e conta com uma área de  $1.440\text{km}^2$  - área cuja grandeza rendeu ao reservatório a alcunha de *Mar de Minas* - e é composto por dois braços, um a leste e outro ao sul da barragem, totalizando um perímetro de  $3.500\text{km}^2$ .

Este extenso perímetro permitiu ao municípios atingidos pelo alagamento, que antes contavam com uma atividade econômica puramente agrária, expandir suas atividades, contando hoje com diversos empreendimentos turísticos os quais exploram o potencial de suas belas paisagens como praias, desfiladeiros e cânions, como os da cidade de Capitólio, dentre outras belas paisagens da região<sup>2</sup>.

Apesar de trazer grande desenvolvimento para a região, o reservatório de Furnas e seus afluentes tem passado períodos de estiagem e vem seguidamente alcançando seus níveis mais baixos aceitáveis como no final de 2012, ano esse no qual o nível do reservatório ficou 12% abaixo do nível esperado e no limite do aceitável, deixando imagens curiosas como o aparecimento das ruínas da cidade de Guapé, alagada em 1963, e incalculáveis prejuízos para produtores de peixes e profissionais de turismo na região, sem contar com prejuízos para a própria geração de energia de Furnas, de hidrelétricas que ficam em seu curso efluente e para indústrias e serviços que dependem dessa energia.

Em vista destes períodos climáticos extremos, é de vital importância o monitoramento e previsão do volume e vazão que o Reservatório de Furnas pode fornecer, de maneira que medidas preventivas possam ser tomadas em caso de secas prolongadas, chuvas além do limite dentre outras adversidades climáticas, para que os danos causados possam ser minimizados, evitando um colapso das atividades dependentes da energia ali gerada e prejuízos para cidades ao redor do reservatório e seus moradores.

Diante de tal cenário e dispondo da série histórica da vazão do lago de Furnas do ano de 1931 até 2005, vamos propor um previsor para esta vazão baseado nas memórias associativas intervalares introduzidas no capítulo anterior, cujos detalhes serão o foco da próxima seção.

---

<sup>2</sup>Para maiores informações visite o site da Associação dos Municípios do Lago de Furnas - ALAGO - em <http://www.alago.org.br/>

## 5.2 O Previsor Baseado nas IV-FAMs

O problema de previsão da vazão mensal do Reservatório de Furnas já foi proposto e estudado em trabalhos anteriores [38, 95, 96, 97, 99]. Uma das abordagens mais interessantes foi aquela a qual propõe um *sistema baseado em regras fuzzy* [141, 144, 155], implementado utilizando a capacidade das memórias associativas fuzzy de guardar regras do tipo SE-ENTÃO [85, 115]. Como uma extensão dessa abordagem, vamos propor nessa seção a aplicação das memórias associativas morfológicas fuzzy intervalares em um sistema de inferência híbrido neuro-fuzzy como o representado na Figura 5.1, na tentativa de modelar melhor os erros inerentes a medição e fuzzificação dos dados, e comparar com modelos propostos na literatura para este problema.

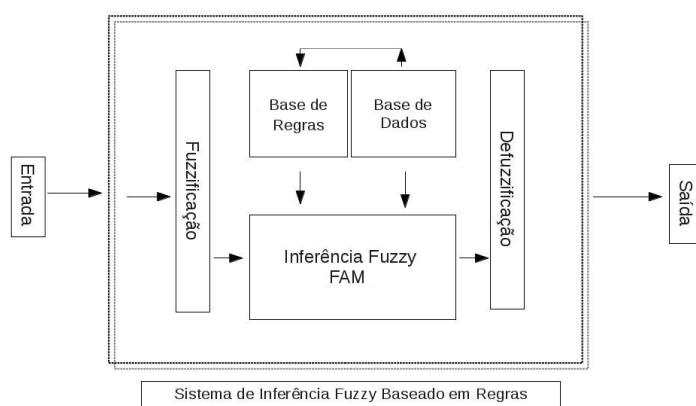


Figura 5.1: Esquemática de um sistema de inferência neuro-fuzzy. As regras do sistema são armazenadas em uma memória associativa.

Iniciemos então a descrição do modelo com uma primeira observação, a de que existe uma certa sazonalidade característica da vazão do Reservatório de Furnas que nos faz empregar 12 modelos mensais de previsão, um para cada mês do ano [99]. Os dados originais correspondem à vazão média mensal em  $m^3/s$ , que utilizamos desde 1931 até 2005, dividindo os dados de 1931 até 1996 como dados de treinamento e validação do sistema e de 1996 até 2005 para testes.

Sejam então  $s_\xi$ , para  $\xi = 1, \dots, q - 1$  amostras sazonais dessa série histórica. O objetivo do previsor é de estimar o valor  $s_q$  a partir de um subconjunto  $\{s_1, s_2, \dots, s_{q-1}\}$  da série. Normalizamos os dados mensais subtraindo-os de sua média e dividindo-os pelo desvio padrão dos dados treinados para cada mês. Seguindo então o mesmo procedimento ao daquele utilizado anteriormente em conjunto com as FMAMs convencionais, utilizaremos apenas 3 valores passados,  $s_{\gamma-3}, s_{\gamma-2}, s_{\gamma-1}$ , para prever a vazão  $s_\gamma$  do mês seguinte. A fuzzificação dos dados é feita utilizando a técnica de clusterização *fuzzy c-means* intervalar [65], uma das várias técnicas de clusterização fuzzy intervalares e tipo-2 completo que estão aparecendo recentemente na literatura devido a avanços e bons resultados de sistemas fuzzy tipo-2 e intervalares, cuja simplicidade e baixa demanda computacional são comparáveis a de sistemas fuzzy clássicos [44, 171].

Como entrada para o método de clusterização utilizamos pares  $(\mathbf{p}^\gamma, s_\gamma)$  em que  $\mathbf{p}^\gamma = [s_{\gamma-3}, s_{\gamma-2}, s_{\gamma-1}]$ , o número de clusters a ser considerado  $c$  e parâmetro de fuzzificação  $m = [m_1, m_2]$  escolhido aqui por um processo de validação, que dará a forma intervalar aos conjuntos obtidos pela fuzzificação dos dados. Da saída da clusterização, obtemos os centros dos clusters  $\mathbf{c}_x^\xi \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{c}_y^\xi \in \mathbb{R}$  e com eles seus respectivos desvios padrões  $\sigma_x^\xi \in \mathbb{R}^3$  e  $\sigma_y \in \mathbb{R}$ , componente a componente.

Dessas saídas,  $\mathbf{c}_x^\xi$ ,  $\sigma_x^\xi$ ,  $\mathbf{c}_y^\xi$ , e  $\sigma_y$  são utilizadas para computar as entradas  $x_j^\xi = [\underline{x}_j^\xi, \overline{x}_j^\xi]$  e  $y_i^\xi = [\underline{y}_i^\xi, \overline{y}_i^\xi]$  dos conjuntos fuzzy intervalares gaussianos finitos  $\mathbf{x}^\xi$  e  $\mathbf{y}^\xi$  via discretização em um intervalo limitado das Equações 5.1 e 5.2. Os consequentes  $\mathbf{y}^\xi$  são conjuntos fuzzy intervalares no universo de discurso  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , onde  $n = 500$  e  $v_i$  são igualmente espaçados no intervalo  $[-a, a]$ , para  $a > 1$  - para efeito de implementação utilizamos  $a = 5$ , que gera um intervalo suficientemente grande de maneira a evitar perdas numéricas significativas de valores da função gaussiana continua que estamos discretizando. Os antecedentes  $\mathbf{x}^\xi$  estão contidos em  $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}(\mathcal{U})$ , onde  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^m\}$  consiste de  $m = 500^3$  pontos igualmente espaçados no intervalo  $[-5, 5]^3$ . Os conjuntos fuzzy intervalares  $\mathbf{x}^\xi \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}}(\mathcal{U})$  e  $\mathbf{y}^\xi \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}}(\mathcal{V})$  podem ser calculados segundo as equações abaixo, para  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ :



$$x_j^\xi = \left[ -\exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{(\mathbf{u}^j)_l - (\mathbf{c}_x^\xi)_l}{(\sigma_x)_l} \right)^{\frac{2}{m_2-1}} \right], -\exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{(\mathbf{y}^j)_l - (\mathbf{c}_x^\xi)_l}{(\sigma_x)_l} \right)^{\frac{2}{m_1-1}} \right] \right]. \quad (5.1)$$

$$y_i^\xi = \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \left( \frac{v_i - \mathbf{c}_y^\xi}{\sigma_y} \right)^{\frac{2}{m_2-1}} \right), \exp \left( \frac{1}{2} \left( \frac{v_i - \mathbf{c}_y^\xi}{\sigma_y} \right)^{\frac{2}{m_1-1}} \right) \right] \quad (5.2)$$

Note que  $\mathbf{x}^\xi$  e  $\mathbf{y}^\xi$  representam gaussianas *fuzzy intervalares* [105]. Relembremos que um conjunto intervalar pode ser visto como um caso particular de conjunto fuzzy tipo-2 [106]. Sob este prisma, a Figura 5.2 nos mostra a forma da função de pertinência de um conjunto fuzzy intervalar gaussiano visto como um caso particular de conjunto fuzzy tipo-2. Vemos ali em cinza a *pegada de incerteza* (FOU), assim como as *função de pertinência superior e inferior* (LMF e UMF) [105]. Este tipo de representação (tipo-2) intervalar é especialmente útil para modelar dados com erros instrumentais, que não apresentam uma preferência à uma certa medida exata, ao contrário do que ocorre com modelos dados por diversos especialistas. Neste caso, uma certa preferência ao conhecimento de um especialista mais experiente pode ocorrer e, por isso, a representação fuzzy (tipo-2) intervalar não é a mais indicada e sim a fuzzy tipo-2 completo.

Em princípio, os pares  $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$  que correspondem aos dados de treinamento podem ser usados para computar a matriz de pesos  $W \in \mathbb{I}^{m \times n}$  pela Equação 4.24. No entanto, uma construção explícita de  $W$  não é necessária porque nós apenas apresentamos os padrões de entrada  $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}}(\mathcal{U})$  na forma  $\mathbf{x} = [0, \dots, 0, e, 0, \dots, 0]^T$  a memória  $\mathcal{W}$ . Aqui, o símbolo  $e$  denota a identidade à direita da conjunção fuzzy intervalar  $\mathcal{C}$  que determina o produto  $\text{Sup-}\mathcal{C}$  no cálculo do padrão de saída  $\mathbf{y} = \mathcal{W}(\mathbf{x}) = W \circ \mathbf{x}$ . Se  $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{\mathbb{I}}(\mathcal{U}) = \mathbb{I}^m$  é tal que  $x_j = e_{\mathbb{I}} = [e, e] \in \mathbb{I}$  e  $x_k = 0_{\mathbb{I}} = [0, 0] \in \mathbb{I}$  para todo  $k \neq j$  então as seguintes equações resultam na saída  $\mathbf{y}$  de  $\mathcal{W}$ , na qual o símbolo  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  se refere o operador fuzzy intervalar adjunto a conjunção intervalar  $\mathcal{C}$ :

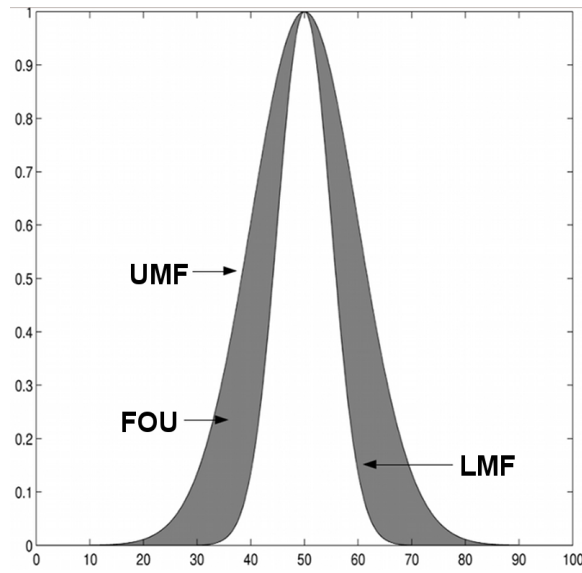


Figura 5.2: Função de pertinência de um conjunto fuzzy intervalar visto como caso particular de conjunto fuzzy tipo-2.

$$\begin{aligned}
 y_i &= (\mathcal{W} \circ_C \mathbf{x})_i = \bigvee_{j=1}^n \mathcal{C}(w_{ij}, x_j) \\
 &= w_{ij} \\
 &= \bigwedge_{\xi=1}^k \mathcal{I}_C(x_j^\xi, y_i^\xi) \quad \forall i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dado o padrão  $\mathbf{p} = [s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}]$  de valores de vazão, determinamos o elemento  $\mathbf{u}^j$  de  $\mathcal{U}$  que minimiza a distância a  $\mathbf{p}$  e gera  $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^m$  com  $e$  como sua única entrada não-nula. Uma aplicação da memória  $\mathcal{W}$  a  $\mathbf{x}$  resulta em uma saída  $\mathbf{y} \in \mathbb{I}^m = \mathcal{F}_{\mathbb{I}}(\mathcal{V})$  a qual leva ao valor da predição de vazão depois de uma redução de tipo seguida por uma defuzzificação. Por razões de complexidade computacional, iremos usar o método de redução de tipo de *Nie-Tan* [112], uma aproximação de alto desempenho ao método de defuzzificação exaustiva de Karnik-Mendel [74, 165]. Este método consiste em um procedimento de redução de tipo dada pela média da LMF e da UMF em cada ponto do domínio da função de pertinência, seguido pela defuzzificação do tipo “centroide”, resultando em um número real. Outros métodos

aproximados de defuzzificação (tipo-2) podem ser encontrados na literatura, mas a medida que o grau de discretização fica mais fino, os valores finais desses métodos convergem para o do método exaustivo[45].

A performance do sistema neuro-fuzzy baseado nas IV-FMAM depende da escolha de parâmetros como o número de clusters  $c$  e do parâmetro de fuzzificação  $\mathbf{m}$ , como entradas do algoritmo de clusterização IV-FCM e da escolha da conjunção intervalar como parâmetro do IV-FMAM. Nesse caso utilizamos um número fixo de clusters  $c = 5$ . O parâmetro de fuzzificação  $\mathbf{m}$  e a conjunção IV-fuzzy foram escolhidas pela técnica de validação *leave-one-out cross-validation* [13] - que consiste em dividir o conjunto de dados em  $n$  conjuntos mutualmente exclusivos de mesmo tamanho, cujo subconjunto gerado por  $n-1$  dados é usado para treinamento e 1 para teste; este teste é repetido  $n$  vezes e a média dos erros gerados é utilizada para escolher os melhores parâmetros do modelo - para os dados do ano 1931 até 1996. Especificamente, consideramos cinco opções diferentes de  $\mathbf{m}$  correspondentes a  $[2.0 - \alpha, 2.0 - \alpha]$  para  $\alpha = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$  e para as conjunções representáveis  $\mathcal{C}_M^r, \mathcal{C}_P^r, \mathcal{C}_L^r, \mathcal{C}_K^r$ , e  $\mathcal{C}_F^r$ , pseudo-representáveis  $\mathcal{C}_M^p, \mathcal{C}_P^p, \mathcal{C}_L^p, \mathcal{C}_K^p$ , e  $\mathcal{C}_F^p$  (e suas R-implicações).

Para o cálculo dos erros apresentados na próxima seção utilizamos as seguintes equações:

- Erro absoluto médio (EAM):

$$EAM = \frac{1}{N} \sum_{\xi} |s_{\xi} - \widetilde{s}_{\xi}| \quad (5.4)$$

- Raiz do erro quadrático médio (REQM):

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\xi} (s_{\xi} - \widetilde{s}_{\xi})^2} \quad (5.5)$$

- Erro relativo médio (ERM):

$$ERM = \frac{100}{N} \sum_{\xi} \left( \frac{s_{\xi} - \widetilde{s}_{\xi}}{(s_{\xi} + \widetilde{s}_{\xi})/2} \right) \quad (5.6)$$

- Coeficiente de correlação  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\sum_{\xi} (s_{\xi} - \bar{s}_{\xi})(s_{\xi} - \bar{\bar{s}}_{\xi})}{\sqrt{\sum_{\xi} (s_{\xi} - \bar{s}_{\xi})^2} \sqrt{\sum_{\xi} (s_{\xi} - \bar{\bar{s}}_{\xi})^2}} \quad (5.7)$$

### 5.2.1 Resultados Computacionais

Observe na Tabela 5.1 os menores erros de validação obtidos pelos modelos baseados nas max- $\mathcal{C}$  IV-FMAMs construídas a partir das conjunções fuzzy intervalares anteriormente citadas. Dessas IV-FMAMs, as que melhores se saíram foram a max- $\mathcal{C}_F^r$  IV-FMAM com o parâmetro de fuzzificação  $\mathbf{m} = [1.9, 2.1]$ , a max- $\mathcal{C}_P^r$  IV-FMAM com  $\mathbf{m} = [1.9, 2.1]$ , a max- $\mathcal{C}_F^p$  IV-FMAM com  $\mathbf{m} = [1.9, 2.1]$  e a max- $\mathcal{C}_P^p$  IV-FMAM com  $\mathbf{m} = [1.8, 2.2]$ . São estes os modelos que iremos comparar com os outros métodos disponíveis na literatura.

IV-FMAM	$m_1$	$m_2$	EQM $\times 10^5$	EAM	ERM
$\mathcal{C}_M^p$	1.8	2.2	0.36	226.48	24.36
$\mathcal{C}_P^p$	1.8	2.2	0.34	223.65	23.10
$\mathcal{C}_L^p$	2.0	2.0	0.57	239.33	24.95
$\mathcal{C}_K^p$	2.0	2.0	0.63	245.80	26.31
$\mathcal{C}_F^p$	1.9	2.1	<b>0.32</b>	224.12	<b>22.72</b>
$\mathcal{C}_M^r$	1.8	2.2	0.37	227.95	24.86
$\mathcal{C}_L^r$	2.0	2.0	0.57	239.33	24.95
$\mathcal{C}_P^r$	1.9	2.1	0.35	<b>222.86</b>	23.54
$\mathcal{C}_K^r$	1.8	2.2	0.65	246.07	26.22
$\mathcal{C}_F^r$	1.9	2.1	<b>0.32</b>	<b>223.34</b>	<b>22.80</b>

Tabela 5.1: Erros produzidos na validação cruzada leave-one-out de 1931 até 1995.

Na Tabela 5.2 listamos os erros apresentados por diversos modelos encontrados na literatura [95], especificamente um sistema fuzzy adaptativo híbrido online (A-FSM) e sua versão offline (C-FSM) [96], o sistema de inferência fuzzy adaptativo baseado em rede (ANFIS)

de Jang, o modelo periódico auto-regressivo (PAR) [19] e um modelo baseado na  $\max-C_L$  FMAM, além dos modelos baseados nas IV-FMAMs introduzidos aqui que melhor se saíram durante a validação prévia.

Método	REQM ( $m^3/s$ )	EAM ( $m^3/s$ )	ERM(%)	$\rho$
$\max-C_P^r$ IV-FMAM	280.15	173.90	19.02	0.87
$\max-C_F^r$ IV-FMAM	<b>276.96</b>	<b>165.78</b>	<b>18.58</b>	<b>0.87</b>
$\max-C_P^p$ IV-FMAM	283.57	173.01	19.73	0.87
$\max-C_F^p$ IV-FMAM	279.16	166.59	18.71	0.87
$\max-C_L$ FMAM	278.08	167.33	18.8	0.87
PAR	266.13	<b>154.44</b>	<b>18.08</b>	0.88
ANFIS	262.21	166.31	20.12	0.88
C-FSM	<b>260.82</b>	163.48	20.19	<b>0.89</b>
A-FSM	278.42	167.77	19.08	0.87

Tabela 5.2: Erros produzidos pelos modelos de predição.

Já na Tabela 5.3 mostramos os resultados obtidos pela versão intervalar do sistema de inferência fuzzy de Mamdani com parâmetro de fuzzificação  $\mathbf{m}$  variando como nos modelos baseados nas IV-FMAMs [106, 166].

$m_1$	$m_2$	REQM ( $m^3/s$ )	EAM ( $m^3/s$ )	ERM(%)	$\rho$
1.5	2.5	310.68	214.71	25.01	0.84
1.6	2.4	289.69	199.74	24.10	0.86
1.7	2.3	<b>288.62</b>	<b>194.67</b>	<b>23.36</b>	<b>0.86</b>
1.8	2.2	299.16	215.82	26.71	0.85
1.9	2.1	300.88	215.24	26.59	0.85
2.0	2.0	311.81	221.57	27.75	0.84

Tabela 5.3: Resultados produzidos pelo IT2 FLS de Mamdani nos dados de teste.

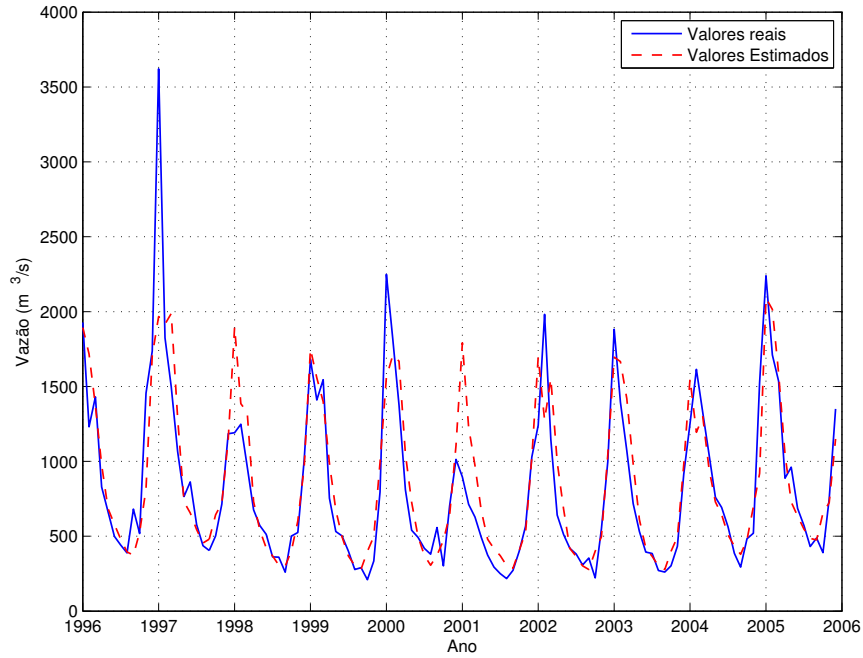


Figura 5.3: Previsão da vazão do lago de 1996 até 2005 utilizando a  $\max-C_F^r$  IV-FMAM .

Nas Figuras 5.3 e 5.4 mostramos, respectivamente, os gráficos dos valores reais (linha azul contínua) e dos valores preditos (linha vermelha segmentada) dos modelos de predição baseados na  $\max-C_F^r$  IV-FMAM e na sua contraparte pseudo-representável, a  $\max-C_F^p$  IV-FMAM, entre os anos de 1996 a 2005. Na Figura 5.5, juntamos os gráficos das predições feitas pelo modelo intervalar de Mamdani e a  $\max-C_F^p$  IV-FMAM.

Observe na Tabela 5.2 que, dentre os modelos baseados em memórias associativas morfológicas fuzzy, o modelo baseado na  $\max-C_F^r$  IV-FMAMs obteve resultados ligeiramente superiores em relação aos demais, seguido pelos modelos  $\max-C_F^p$  IV-FMAM e  $\max-C_L$  FMAM, que se mostraram também competitivos em comparação com os demais modelos da literatura. É válido notar, ao compararmos os erros produzidos por modelos baseados nas FMAMs e IV-FMAMs com os produzidos pelos demais métodos, que o REQM dos últimos são, com exceção do A-FSM, menores, mesmo que o erro absoluto médio e o erro relativo médio sejam muito parecidos. Isso se deve ao comportamento da função de raiz do erro quadrático médio, que tende a exagerar erros de grande magnitude em comparação a erros menores.

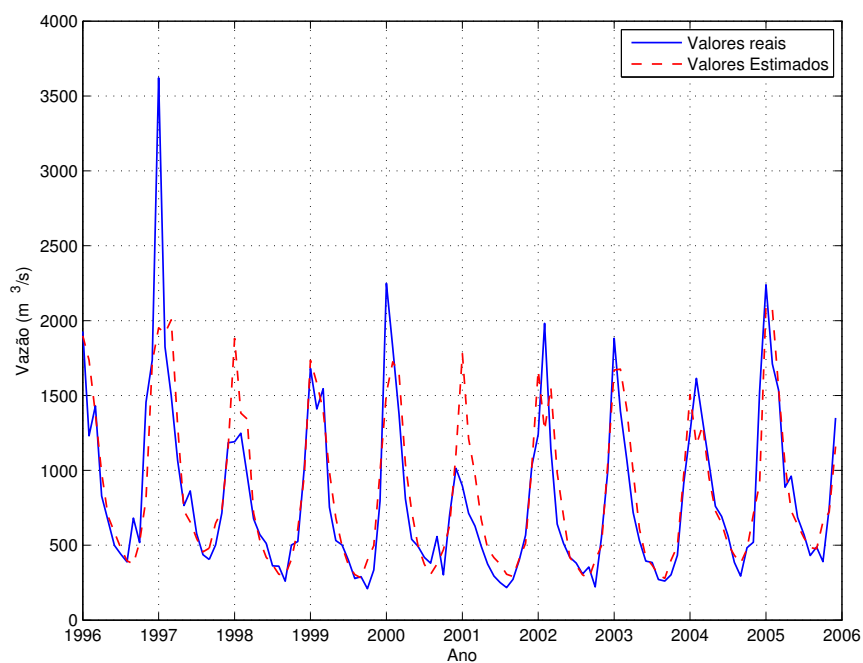


Figura 5.4: Previsão da vazão do lago de 1996 até 2005 utilizando a  $\max\text{-}C_F^p$  IV-FMAM .

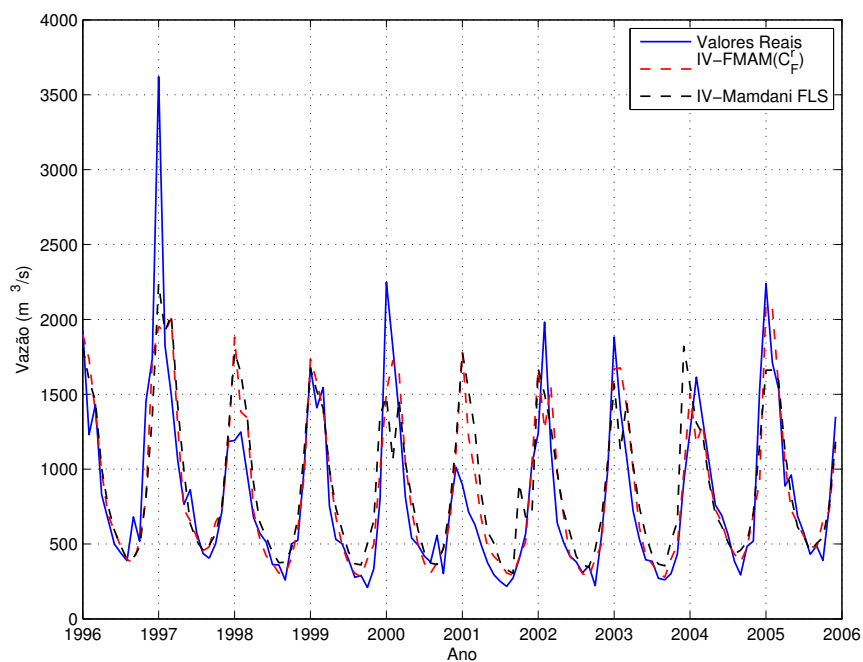


Figura 5.5: Previsão da vazão do lago de 1996 até 2005 utilizando a IV-FMAM baseada no operador  $C_F^r$  (em vermelho) e a IT2-FLS de Mamdani (em preto).

Em suma, os modelos  $\max\text{-}\mathcal{C}_F^r$  IV-FMAMs,  $\max\text{-}\mathcal{C}_F^p$  IV-FMAM e  $\max\text{-}\mathcal{C}_L$  FMAM obtiveram erros EAM e ERM competitivos com os outros métodos da literatura, algumas vezes até superando-os. No entanto, uma análise do REQM nos mostra que os modelos baseados em memórias associativas aqui testados produziram erros de maior magnitude em escala ligeiramente maior que os demais modelos, mas mostraram uma qualidade de previsão tão boa quanto dos outros métodos, como nos mostram os erros EAM, ERM e o coeficiente de correlação  $\rho$ .

Por fim, ao olharmos para a Tabela 5.3, vemos que os erros gerados pelo sistema de inferência fuzzy intervalar de Mamdani geraram erros superiores a aqueles gerados pelos demais métodos, mesmo escolhendo o melhor parâmetro de fuzzificação, neste caso,  $\mathbf{m} = [1.7, 2.3]$ . Uma comparação visual entre o sistema de inferência fuzzy intervalar de Mamdani e a  $\max\text{-}\mathcal{C}_F^r$  IV-FMAM é dada na Figura 5.5.



---

## CAPÍTULO 6

---

### CONCLUSÃO

Introduzimos nessa dissertação as memórias associativas morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy, uma classe de memórias associativas fuzzy especiais cujos neurônios realizam uma operação morfológica  $\mathbb{L}$ -fuzzy [143]. Pela generalidade de sua construção em qualquer reticulado completo, essas memórias associativas generalizam outros modelos anteriores da literatura, além de abrir caminho para a construção de uma teoria unificada de memórias associativas morfológicas e morfológicas  $\mathbb{L}$ -fuzzy.

Como caso particular de memória associativa  $\mathbb{L}$ -fuzzy introduzimos a classe das memórias associativas fuzzy intervalares morfológicas (IV-FMAMs) baseada nos operadores fuzzy intervalares representáveis e pseudo-representáveis, que são por sua vez construídos a partir de operadores fuzzy clássicos e operações básicas do reticulado considerado. Como aplicação, utilizamos estas memórias associativas fuzzy intervalares morfológicas em um sistema neuro-fuzzy híbrido em um problema de previsão de série temporal, mostrando a possibilidade de melhorar o desempenho de um sistema fuzzy clássico baseado em regras e sistemas neuro-fuzzy que utilizam redes neurais baseadas na teoria clássica de conjuntos fuzzy. Além disso, mostramos, ao comparar os resultados obtidos com outros métodos da literatura, que o proposto sistema neuro-fuzzy baseado nas IV-FMAMs pode ser competitivo

com estes métodos.

Precisamente, no capítulo primeiro introduzimos o leitor no contexto das redes neurais artificiais, em especial das memórias associativas, da teoria dos conjuntos fuzzy e da morfologia matemática, tudo sob o paradigma do *soft computing* e da criação de sistemas inteligentes que envolvem, dentre outras, as áreas apresentadas. No capítulo segundo apresentamos o que representa como o mais aceito *framework* para o desenvolvimento teórico da morfologia matemática, isto é, o *framework* de reticulados completos. Nesse capítulo apresentamos os operadores básicos da morfologia matemática definidos em reticulados completos para que no capítulo terceiro, pudéssemos apresentar a extensão da morfologia matemática fuzzy para a classe de conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy,  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}$ , assim como para a classe de conjuntos fuzzy intervalares,  $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}$ , com as identificações de  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \cong \mathbb{L}^X$  e  $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}(X) \cong \mathbb{I}^X$ . O caso fuzzy intervalar nos chamou a atenção por se tratar de uma classe de operadores não-representáveis cuja construção é baseada em operadores fuzzy clássicos que, além da simplicidade de construção, apresentam boas propriedades e desempenho em aplicações [110].

No capítulo quarto, aproveitando toda a construção da morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalar, introduzimos as memórias associativas fuzzy  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalar e estendemos o método de aprendizagem por adjunção para  $\mathbb{L}$  utilizando o conceito de adjunção em um reticulado completo. No capítulo quinto, como aplicação das memórias recém-introduzidas, propusemos um sistema de inferência neuro-fuzzy híbrido baseado nessas memórias na resolução de um problema de predição temporal, mais especificamente, na previsão da vazão do lago da hidrelétrica de Furnas.

Como continuação desse trabalho, apontamos aqui que um estudo mais aprofundado das propriedades das  $\mathbb{L}$ -FMAMs e  $\mathbb{I}$ -FMAMs será feito em um futuro próximo, tanto no âmbito teórico, quanto no prático. Especificamente, buscamos formalização dessas memórias em função de equações relacionais  $\mathbb{L}$ -fuzzy e fuzzy intervalar [86, 88, 89, 161, 162]. Além disso, iremos estudar com detalhamento sistemas fuzzy tipo 2 particulares e, se possível, utilizar técnicas de otimização para encontrar soluções ótimas para esses sistemas. Quanto a estudos de problemas práticos, iremos propôr o uso das  $\mathbb{L}$ -FMAMs em aplicações da computação em reticulados e computação com palavras, por exemplo. Adicionalmente, iremos lidar

com o problema de custo computacional e escala que sistemas baseados em memórias associativas fuzzy tipo 2 trariam consigo. Em última instancia, esperamos que este trabalho sirva como passo inicial para o desenvolvimento de memórias associativas fuzzy tipo-2 gerais.



---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ABBOD, M. F., VON KEYSERLINGK, D. G., LINKENS, D. A., AND MAHFOUF, M. Survey of utilisation of fuzzy technology in Medicine and Healthcare. *Fuzzy Sets and Systems* 120, 2 (June 2001), 331–349.
- [2] ANDERSON, J. A. A Simple Neural Network Generating an Interactive Memory. *Mathematical Biosciences* 14 (1972), 197–220.
- [3] ANDERSON, J. A., SILVERSTEIN, J. W., RITZ, S. A., AND JONES, R. S. Distinctive Features, Categorical Perception, and Probability learning: Some Applications of a Neural Model. *Psychology Review* 84 (July 1977), 413–415.
- [4] ANDREOLLI, G. La logica del finito e del concreto. *Giornale di matematiche*, LXX-XIV (1956), 19–48.
- [5] ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets. Tech. rep., Bulgarian Academy of Science, Central Techn. Library, 1983.
- [6] ATANASSOV, K. T., AND GARGOV, G. Elements of Intuitionistic Fuzzy Logic. *Fuzzy Sets and Systems* 95, 1 (1998), 39–52.

- [7] BANDLER, W., AND KOHOUT, L. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems* 4, 1 (July 1980), 13–30.
- [8] BARBARA, J.-G. The physiological construction of the neurone concept (1891-1952). *Comptes rendus biologies* 329, 5-6 (2006), 437–49.
- [9] BELOHLÁVEK, R. Fuzzy logical bidirectional associative memory. *Information Sciences* 128, 1-2 (2000), 91–103.
- [10] BEZDEK, J. C. Fuzzy Kohonen clustering networks. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (1992), pp. 1035–1043.
- [11] BIRKHOFF, G. Mathematics and Psychology. *SIAM Review* 10 (1969).
- [12] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3rd ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [13] BISHOP, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [14] BLACK, M. Vagueness. *Philosophy of Science* 4 (1949), 23–58.
- [15] BLOCH, I. Mathematical morphology on bipolar fuzzy sets: general algebraic framework. *International Journal of Approximate Reasoning* 53, 7 (Oct. 2012), 1031–1060.
- [16] BLOCH, I., AND MAITRE, H. Fuzzy mathematical morphology. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 10 (1992), 55–84.
- [17] BLOCH, I., AND MAITRE, H. Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study. *Pattern Recognition* 28, 9 (1995), 1341–1387.
- [18] BOOLE, G. *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. 1854.

- [19] BOX, G. E. P., JENKINS, G. M., AND REINSEL, G. C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3 ed. Prentice Hall, 1994.
- [20] BRAGA-NETO, U., AND GOUTSIAS, J. Supremal multiscale signal analysis. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 36, 1 (2004), 94–120.
- [21] BUCKLEY, J., AND HAYASHI, Y. Fuzzy neural networks: A survey. *Fuzzy Sets and Systems* 66 (1994), 1–13.
- [22] BUCKLEY, J. J., AND YOICHI, H. Neural nets for fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems* 71, 3 (May 1995), 265–276.
- [23] CHEN, S.-M. Evaluating weapon systems using fuzzy arithmetic operations. *Fuzzy Sets and Systems* 77, 3 (Feb. 1996), 265–276.
- [24] CHOUDHURY, J. P., SARKAR, B., AND MUKHERJEE, S. K. Forecasting of Engineering Manpower Through Fuzzy Associative Memory Neural Network with ARIMA: a Comparative Study. *Neurocomputing* 47 (2002), 241–257.
- [25] CHUNG, F., AND LEE, T. On Fuzzy Associative Memory with Multiple-Rule Storage Capacity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4, 3 (Aug. 1996), 375–384.
- [26] DAVIDSON, J. L., AND RITTER, G. X. A Theory of Morphological Neural Networks. In *Digital Optical Computing II* (July 1990), vol. 1215 of *Proceedings of SPIE*, pp. 378–388.
- [27] DE BAETS, B. Fuzzy Morphology: A Logical Approach. In *Uncertainty Analysis in Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, B. M. Ayyub and M. M. Gupta, Eds. Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997, pp. 53–67.
- [28] DE BAETS, B., KERRE, E., AND GUPTA, M. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology, part 1: basic concepts. *International Journal of General Systems* 23 (1994), 155–171.

- [29] DEDEKIND, R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler. In *Gesammelte Werke*. 1897, pp. 103–148.
- [30] DENECKE, K., ERNÉ, M., AND WISMATH, S. *Galois Connections and Applications*. Springer, 2004.
- [31] DENG, T. Q., AND HEIJMANS, H. J. A. M. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16, 2 (2002), 155–171.
- [32] DESCHRIJVER, G., AND CORNELIS, C. Representability in interval-valued fuzzy set theory. *International Journal of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems* 15, 3 (2007), 345–361.
- [33] DESCHRIJVER, G., CORNELIS, C., AND KERRE, E. E. Intuitionistic Fuzzy Connectives Revisited. In *Proceedings of 9th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems* (2002), pp. 1839–1844.
- [34] DESCHRIJVER, G., CORNELIS, C., AND KERRE, E. E. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t-Norms and t-Conorms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 12, 1 (2004), 45–61.
- [35] DESCHRIJVER, G., AND KERRE, E. Classes of intuitionistic fuzzy t-norms satisfying the residuation principle. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 11, 6 (2003), 691–709.
- [36] DESCHRIJVER, G., AND KERRE, E. E. On the Position of Intuitionistic Fuzzy Set Theory in the Framework of Theories Modelling Imprecision. *Information Sciences* 177 (2007), 1860–1866.
- [37] FAUSETT, L. *Fundamentals of Neural Networks: Algorithms, Architectures, and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.



- [38] FIGUEIREDO, M., BALLINI, R., ANDRADE, M., AND GOMIDE, F. Learning algorithms for a class of neurofuzzy network and application. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* 34, 3 (2004), 293–301.
- [39] GABOR, D. Associative holographic memories. *IBM Journal of Research and Development* (1969).
- [40] GARCIA-LOPEZ, P., GARCIA-MARIN, V., AND FREIRE, M. The histological slides and drawings of cajal. *Frontiers in neuroanatomy* 4, March (Jan. 2010), 9.
- [41] GOGUEN, J. L-fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18, 1 (Apr. 1967), 145–174.
- [42] GOLDEN, R. M. The Brain-State-in-a-Box Neural Model is a Gradient Descent Algorithm. *Journal of Mathematical Psychology* 30 (1986), 73–80.
- [43] GOLDEN, R. M. Stability and Optimization Analysis of the Generalized Brain-State-in-a-Box Neural Network Model. *Journal of Mathematical Psychology* 30 (1993), 73–80.
- [44] GOLSEFID, S. M. M., ZARANDI, M. H. F., AND BASTANI, S. Fuzzy type-2 c-ellipses clustering. In *Proceedings of the IFSA-NAFIPS Joint Congress 2013* (Edmonton, CA, 2013), pp. 1221–1226.
- [45] GREENFIELD, S., AND CHICLANA, F. Type-reduction of the discretised interval type-2 fuzzy set: What happens as discretisation becomes finer? *IEEE Symposium on Advances in Type-2 Fuzzy Logic Systems (T2FUZZ), 2011* (Apr. 2011), 102–109.
- [46] GUZMÁN, E., POGREBNYAK, O., YAÑEZ, C., AND MORENO, J. A. Image Compression Algorithm Based on Morphological Associative Memories. In *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications*. Springer Berlin / Heidelberg, 2006, pp. 519–528.

- [47] HARALICK, R. M., SHAPIRO, L., AND LEE, J. Morphological Edge Detection. *IEEE Journal of Robotics and Automation* RA-3, 1 (Apr. 1987), 142–157.
- [48] HARALICK, R. M., AND SHAPIRO, L. G. *Computer and Robot Vision*, vol. I. Addison-Wesley, New York, 1992.
- [49] HARALICK, R. M., STERNBERG, S. R., AND ZHUANG, X. Image Analysis Using Mathematical Morphology: Part I. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 9, 4 (July 1987), 532–550.
- [50] HARTSHORNE, C., AND WEISS, P. *Collected Papers of Charles Sanders Pierce*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1931.
- [51] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U. K., 1993.
- [52] HASSOUN, M. H. Dynamic Associative Neural Memories. In *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*, M. H. Hassoun, Ed. Oxford University Press, Oxford, U. K., 1993.
- [53] HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [54] HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [55] HEBB, D. O. *The Organization of Behavior*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [56] HECHT-NIELSEN, R. *Neurocomputing*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [57] HEIJMANS, H. J. A. M. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [58] HERSH, H. M., AND CARAMAZZA, A. A Fuzzy set approach to modifiers and vagueness in natural language. *Journal of Experimental Psychology: General* 3, 105 (1976), 254–276.

- 
- [59] HOFFMAN, A. G. *Paradigms of Artificial Intelligence*. Springer-Verlag, 1998.
- [60] HONG, J., AND PSALTIS, D. Storage capacity of holographic associative memories. *Optics letters* 11, 12 (Dec. 1986), 812–4.
- [61] HONG, T.-P., LIN, K.-Y., AND WANG, S.-L. Fuzzy data mining for interesting generalized association rules. *Fuzzy Sets and Systems* 138, 2 (Sept. 2003), 255–269.
- [62] HOPFIELD, J. J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79 (Apr. 1982), 2554–2558.
- [63] HOPFIELD, J. J., AND TANK, D. W. Computing with neural circuits: A model. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 233 (Aug. 1986), 625–633.
- [64] HUI, S., AND ZAK, S. H. . Dynamical Analysis of the Brain-State-in-a-Box (BSB) Neural Models. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3, 1 (Jan. 1992), 86–94.
- [65] HWANG, C., AND RHEE, F. C.-H. Uncertain Fuzzy Clustering : Interval Type-2 Fuzzy Approach to C -Means. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* 15, 1 (2007), 107–120.
- [66] JAMZAD, M., AND KERMANI, Z. Z. Secure Steganography Using Gabor Filter and Neural Networks. In *Transactions on Data Hiding and Multimedia Security III* (2008), pp. 33–49.
- [67] JANG, J., AND SUN, C. Neuro-fuzzy modeling and control. *Proceedings of the IEEE* 83, 3 (1995), 378–406.
- [68] JANG, J.-S. R., SUN, C.-T., AND MIZUTANI, E. *Neuro-fuzzy and soft computing: a computational approach to learning and machine intelligence*. Prentice Hall, 1997.
- [69] JANTZEN, J. *Foundations of Fuzzy Control*. Wiley, 2007.

- [70] JUNBO, F., FAN, J., AND YAN, S. A learning rule for fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks* (June 1994), vol. 7, pp. 4273–4277.
- [71] KABURLASOS, V. G. Fuzzy Lattice Reasoning (FLR) Extensions to Lattice-Valued Logic. *2012 16th Panhellenic Conference on Informatics* (Oct. 2012), 445–448.
- [72] KABURLASOS, V. G., ATHANASIADIS, I. N., AND MITKAS, P. A. Fuzzy lattice reasoning (FLR) classifier and its application for ambient ozone estimation. *International Journal of Approximate Reasoning* 45, 1 (May 2007), 152–188.
- [73] KANTER, I., AND SOMPOLINSKY, H. Associative Recall of Memory without Errors. *Physical Review* 35 (1987), 380–392.
- [74] KARNIK, N., AND MENDEL, J. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 7, 6 (1999), 643–658.
- [75] KEMENY, J. G. Analyticity versus fuzziness. *Synthese* 15 (1963), 57–80.
- [76] KIM, C. Segmenting a Low-Depth-of-Field Image Using Morphological Filters and Region Merging. *IEEE Transactions on Image Processing* 14, 10 (2005), 1503–1511.
- [77] KITAINIK, L. *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [78] KLAWONN, F., AND KRUSE, R. Constructing a fuzzy controller from data. *Fuzzy Sets and Systems* 85, 2 (Jan. 1997), 177–193.
- [79] KOHONEN, T. Correlation Matrix Memory. *IEEE Transactions on Computers* C-21 (1972), 353–359.
- [80] KOHONEN, T. *Associative Memory – A System Theoric Approach*. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

- 
- [81] KONG, S., AND KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3, 2 (1992), 211–223.
- [82] KOSKO, B. Adaptive Bidirectional Associative Memories. *Applied Optics* 26, 23 (Dec. 1987), 4947–4960.
- [83] KOSKO, B. Bidirectional Associative Memories. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 18 (1988), 49–60.
- [84] KOSKO, B. Fuzzy associative memories. In *Neural Networks and Fuzzy systems*. Prentice Hall, 1990.
- [85] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1992.
- [86] LI, D.-C., XIE, Y.-J., AND GENG, S.-L. Complete solution sets of  $\inf \rightarrow$  interval-valued fuzzy relation equations. *Information Sciences* 219, January, 2013 (Jan. 2013), 111–123.
- [87] LI, E. Y. Artificial neural networks and their business applications. 303–313.
- [88] LI, G., AND FANG, S.-C. Solving interval-valued fuzzy relation equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6, 2 (May 1998), 321–324.
- [89] LI, P., AND FANG, S.-C. A note on solution sets of interval-valued fuzzy relational equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 8, 1 (Feb. 2009), 115–121.
- [90] LIU, H. K., XIONG, S., AND FANG, Z. A granular computing classification algorithm based on fuzzy lattices. *Computers & Mathematics with Applications* 1, 61 (2011), 137–147.
- [91] LIU, P. The Fuzzy Associative Memory of Max-Min Fuzzy Neural Networks with Threshold. *Fuzzy Sets and Systems* 107 (1999), 147–157.

- 
- [92] LUKASIEWICZ, J. O zasadzie wyłączonego środka. *Przegląd Filozoficzny* (1910), 372–373.
- [93] LUKASIEWICZ, J. *Zasady Sprzeczności u Arystotelesa*. Studia Krytyczne, 1910.
- [94] LUKASIEWICZ, J. Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic. In *Selected Works*. Borkowski, ed., 1930, pp. 170–171.
- [95] LUNA, I., SOARES, S., AND BALLINI, R. A Constructive-Fuzzy System Modeling for Time Series Forecasting. *2007 International Joint Conference on Neural Networks* (Aug. 2007), 2908–2913.
- [96] LUNA, I., SOARES, S., AND BALLINI, R. An adaptive hybrid model for monthly streamflow forecasting. In *IEEE International Fuzzy Systems Conference, 2007*. (2007), pp. 1–6.
- [97] LUNA, I., SOARES, S., MAGALHÃES, M. H., AND BALLINI, R. Streamflow forecasting using neural networks and fuzzy clustering techniques. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks* (2005), pp. 1–6.
- [98] MAASS, W., AND BISHOP, C. M. *Pulsed neural networks*. MIT Press, 2001.
- [99] MAGALHAES, M., BALLINI, R., GONCALVES, R., AND GOMIDE, F. Predictive fuzzy clustering model for natural streamflow forecasting. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems 3* (2004), 1349–1354.
- [100] MARAGOS, P. Lattice Image Processing: A Unification of Morphological and Fuzzy Algebraic Systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22, 2-3 (May 2005), 333–353.
- [101] MATHERON, G. *Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux*. Masson, Paris, 1967.
- [102] MATHERON, G. *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York, 1975.

- [103] MATHERON, G., AND SERRA, J. The birth of mathematical morphology. *Proceedings of the 6th Intl. Symp. Mathematical Morphology* (2002), 1–16.
- [104] MCCULLOCH, W. S., AND PITTS, W. A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics* 5 (1943), 115–133.
- [105] MENDEL, J. Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8, 5 (2000), 535–550.
- [106] MENDEL, J. M. Type-2 Fuzzy Sets and Systems: An Overview. *IEEE Computational Intelligence Magazine* 2, 2 (May 2007), 20–29.
- [107] Menger, M. K. Ensembles flous et fonctions aléatoires. In *Selecta Mathematica*. Springer Vienna, 2003, pp. 445–447.
- [108] MINKOWSKI, H. *Gesammelte Abhandlungen*. Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1911.
- [109] NACHTEGAEL, M., AND KERRE, E. E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems* 124, 1 (2001), 73–85.
- [110] NACHTEGAEL, M., SUSSNER, P., MÉLANGE, T., AND KERRE, E. E. On the role of complete lattices in mathematical morphology: From tool to uncertainty model. *Information Sciences* 181, 10 (2011), 1971–1988.
- [111] NAKANO, K. Associatron: A Model of Associative Memory. *IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics SMC-2* (1972), 380–388.
- [112] NIE, M., AND TAN, W. W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems. In *FUZZ-IEEE 2008* (Hong Kong, 2008), pp. 1425–1432.
- [113] OKAJIMA, K., TANAKA, S., AND FUJIWARA, S. A Heteroassociative Memory with Feedback Connection. In *Proceedings of the IEEE First International Conference on Neural Networks* (San Diego, 1987), vol. II, pp. 711–718.

- [114] PEDRYCZ, W. Fuzzy Neural Networks and Neurocomputations. *Fuzzy Sets and Systems* 56, 1 (1993), 1–28.
- [115] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing*. 2007.
- [116] PERSONNAZ, L., GUYON, I., AND DREYFUS, G. Information storage and retrieval in spin glass like neural networks. *Journal of Physics Letter* 46 (1985), L359—L365.
- [117] PESSOA, L. F. C., AND MARAGOS, P. Neural networks with hybrid morphological/rank/linear nodes: a unifying framework with applications to handwritten character recognition. *Pattern Recognition* 33 (2000), 945–960.
- [118] PITAS, I., AND VENETSANOPOULOS, A. N. Morphological Shape Decomposition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12, 1 (1990), 38–45.
- [119] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An Introduction to Morphological Neural Networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.
- [120] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [121] RITTER, G. X., AND URCID, G. A lattice matrix method for hyperspectral image unmixing. *Information Sciences* 10, 181 (2011), 1787–1803.
- [122] RONSE, C. Why Mathematical Morphology Needs Complete Lattices. *Signal Processing* 21, 2 (Oct. 1990), 129–154.
- [123] RUMELHART, D. E., HINTON, G. E., AND WILLIAMS, R. J. *Learning internal representation by error propagation*. Parallel Distributed Processing. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [124] SABOURIN, M., AND MITICHE, A. Optical character recognition by a neural network. *Neural Networks* 5, 5 (Sept. 1992), 843–852.



- [125] SAMBUC, R. *Fonctions  $\Phi$ -floues. Application l'aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne*. Ph. d. thesis, Univ. Marseille, France, 1975.
- [126] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [127] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [128] SHARIF HEGER, A., HOLBERT, K. E., AND MUNEER ISHAQUE, A. Fuzzy associative memories for instrument fault detection. *Annals of Nuclear Energy* 23, 9 (June 1996), 739–756.
- [129] SHI, Y., AND EBERHART, R. Fuzzy adaptive particle swarm optimization. In *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation* (2001), pp. 101–106.
- [130] SINHA, D., AND DOUGHERTY, E. R. Fuzzy mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation* 3, 3 (Sept. 1992), 286–302.
- [131] SINHA, D., AND DOUGHERTY, E. R. Fuzzification of set inclusion: theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems* 55, 1 (Apr. 1993), 15–42.
- [132] SINHA, D., AND DOUGHERTY, E. R. A General Axiomatic Theory of Intrinsically Fuzzy Mathematical Morphologies. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3, 4 (Nov. 1995), 389–403.
- [133] SINHA, D., SINHA, P., DOUGHERTY, E. R., AND BATMAN, S. Design and analysis of fuzzy morphological algorithms for image processing. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 5, 4 (Nov. 1997), 570–583.
- [134] SMITH, J. C. A Neural Network - Could It Work for You? *Financial Executive* 6, 3 (1990), 26–30.
- [135] SOBANIA, A., AND EVANS, J. P. O. Morphological corner detector using paired triangular structuring elements. *Pattern Recognition* 38, 7 (2005), 1087–1098.

- [136] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*, 2 ed. ed. Springer Verlag, 2003.
- [137] STEINBRUCH, K. Die Lernmatrix. *Kybernetick 1* (1961), 36–45.
- [138] STERNBERG, S. R. Grayscale Morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing 35* (1986), 333–355.
- [139] SUSSNER, P. Generalizing Operations of Binary Autoassociative Morphological Memories using Fuzzy Set Theory. *Journal of Mathematical Imaging and Vision 9*, 2 (Sept. 2003), 81–93.
- [140] SUSSNER, P., AND ESMI, E. L. Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm. *Information Sciences 181*, 10 (2011), 1929–1950.
- [141] SUSSNER, P., MIYASAKI, R., AND VALLE, M. E. An Introduction to Parameterized IFAM Models with Applications in Prediction. In *Proceedings of IFSA-EUSFLAT 2009* (Lisbon, Portugal, 2009), pp. 1757–1762.
- [142] SUSSNER, P., NACHTEGAEL, M., AND MÉLANGE, T. L -Fuzzy Mathematical Morphology: An Extension of Interval-Valued and Intuitionistic Fuzzy Mathematical Morphology. *The 28th North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference (NAFIPS 2009)*, 28 (2009), 6.
- [143] SUSSNER, P., NACHTEGAEL, M., MÉLANGE, T., DESCHRIJVER, G., ESMI, E. A., AND KERRE, E. Interval-Valued and Intuitionistic Fuzzy Mathematical Morphologies as Special Cases of L-Fuzzy Mathematical Morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision 43*, 1 (Apr. 2012), 50–71.
- [144] SUSSNER, P., AND VALLE, M. Fuzzy Associative Memories and Their Relationship to Mathematical Morphology. In *Handbook of Granular Computing*, W. Pedrycz, A. Skowron, and V. Kreinovich, Eds. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2008, ch. 33.

- [145] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Gray-scale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17 (2006), 559–570.
- [146] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale Morphological Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [147] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative Fuzzy Associative Memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.
- [148] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of Patterns Using Morphological and Certain Fuzzy Morphological Associative Memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006).
- [149] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (2008), 139–159.
- [150] TANK, D. W., AND HOPFIELD, J. J. Collective Computation in Neuronlike Circuits. *Scientific American* 257, 6 (Dec. 1987), 104–114.
- [151] TAYLOR, W. K. Electrical Simulation of Some Nervous System Functional Activities. *Information Theory* 3 (1956), 314–328.
- [152] USHIDA, H., IMURA, A., YAMAGUCHI, T., AND TAKAGI, T. Human-motion recognition by means of fuzzy associative inference. *IEEE Conference Fuzzy Systems, 1994.* 2 (1994), 813–818.
- [153] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Fuzzy Associative Memories from the Perspective of Mathematical Morphology. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (London, United Kingdom, July 2007), pp. 829–834.
- [154] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 7 (Apr. 2008), 747–768.

- [155] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Storage and recall capabilities of fuzzy morphological associative memories with adjunction-based learning. *Neural Networks* 24, 1 (2011), 75–90.
- [156] VALLE, M. E., SUSSNER, P., AND GOMIDE, F. Introduction to Implicative Fuzzy Associative Memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks* (Budapest, Hungary, July 2004), pp. 925–931.
- [157] VAN HEERDEN, P. J. A New Optical Method of Storing and Retrieving Information. *Appl. Opt.* 2 (1963), 387–392.
- [158] VAN HEERDEN, P. J. Theory of Optical Information Storage in Solids. *Appl. Opt.* 2 (1963), 393–400.
- [159] VILLE, D. V. D., NACHTEGAEL, M., DER WEKEN, D. V., KERRE, E. E., PHILIPS, W., AND LEMAHIEU, I. Noise reduction by fuzzy image filtering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 11, 4 (2003), 429–436.
- [160] VUORIMAA, P. Fuzzy self-organizing map. *Fuzzy Sets and Systems* 66, 2 (1994), 223–231.
- [161] WANG, S., FANG, S., AND NUTTLE, H. Solution sets of interval-valued fuzzy relational equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 1, 2 (2003), 41–60.
- [162] WANG, S., FANG, S., AND NUTTLE, H. Solution sets of interval-valued min-s-norm fuzzy relational equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1976 (2005), 331–349.
- [163] WESTLAKE, P. R. The possibilities of neural holographic processes within the brain. *Kybernetik* 7, 4 (Sept. 1970), 129–53.
- [164] WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Investigations*. Macmillan Co., New York, 1953.

- 
- [165] WU, D. An overview of alternative type-reduction approaches for reducing the computational cost of interval type-2 fuzzy logic controllers. In *2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems* (June 2012), pp. 1–8.
- [166] WU, H., AND MENDEL, J. Uncertainty bounds and their use in the design of interval type-2 fuzzy logic systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10, 5 (Oct. 2002), 622–639.
- [167] YAGER, R. R. On the Theory of Bags. *International Journal of General Systems*, 13 (1986), 23–37.
- [168] YAMAGUCHI, T., GOTO, K., TAKAGI, T., DOYA, K., AND MITA, T. Intelligent control of a flying vehicle using fuzzy associative memory system. *IEEE Conference on Fuzzy Systems, 1992.* (1992), 1139–1149.
- [169] ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338–353.
- [170] ZADEH, L. A. The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning - I. *Information Sciences* 8 (1975), 199–249.
- [171] ZARANDI, M., GOLSEFID, S. M. M., AND BASTANI, S. Dual centers Fuzzy Type-2 Clustering. In *Proceedings of the IFSA-NAFIPS Joint Congress 2013* (Edmonton, Ca, 2013), no. 7, pp. 1215–1220.