



NAZIME SALES FILHO

**ANÁLISE QUALITATIVA DE UM MODELO DE PROPAGAÇÃO DE
DENGUE PARA POPULAÇÕES ESPACIALMENTE HOMOGÊNEAS**

**CAMPINAS
2015**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

NAZIME SALES FILHO

ANÁLISE QUALITATIVA DE UM MODELO DE PROPAGAÇÃO DE DENGUE PARA POPULAÇÕES ESPACIALMENTE HOMOGÊNEAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO NAZIME SALES FILHO, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA .

Assinatura da Orientadora

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Sa32a Sales Filho, Nazime, 1986-
Análise qualitativa de um modelo de propagação de dengue para populações espacialmente homogêneas / Nazime Sales Filho. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dengue. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Análise do ponto de equilíbrio. 4. Pesquisa qualitativa. 5. Epidemiologia - Métodos estatísticos. I. Calsavara, Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Qualitative analysis of dengue propagation model to spatially homogeneous populations

Palavras-chave em inglês:

Dengue

Ordinary differential equations

Break-even analysis

Qualitative research

Epidemiology - Statistical methods

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Bianca Morelli Rodolfo Calsavara [Orientador]

Ma To Fu

Lucas Catão de Freitas Ferreira

Data de defesa: 24-02-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional


**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 24 de fevereiro de 2015
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA



Prof. (a). Dr (a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



Prof. (a). Dr (a). MA TO FU

Abstract

In this work it will be analyzed a mathematical model describing propagation of dengue disease. This model is given by a system of nonlinear ordinary differential equations, subjected to initial conditions, involving two populations: one of mosquitos and another of humans. The mosquitos population is divided in two subpopulations: the aquatic phase, including eggs, larvae and pupae, and the winged phase, that is divided in susceptible and infected mosquitos. The human population is divided in subpopulations of susceptible, infected and removed. In the cited model it is assumed that the mosquito and human populations achieved spatial homogeneity, i.e., there is no movement of these populations affecting the disease dissemination. The main interest of this work is to analyze qualitatively the populations behavior around the equilibrium points of the system. To this end, in addition to the use of analytical tools, numerical simulations were performed by using Maple software. In this way, it was possible to obtain information about dengue dissemination, under some hypotheses, even without obtaining explicit solution for the system.

Keywords: dengue dissemination, ordinary differential equations, equilibrium points, qualitative study.

Resumo

Neste trabalho será analisado um modelo matemático que descreve a propagação da dengue. Tal modelo é dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares sujeitas a condições iniciais, que descreve duas populações: a de mosquitos e a humana. A população de mosquitos é dividida em duas subpopulações: fase aquática, incluindo os ovos, larvas e pupas, e fase alada, que é subdividida em mosquitos suscetíveis e infectados. A população humana é dividida em subpopulações de suscetíveis, infectados e removidos. No modelo citado é assumido que a população de mosquito e a população humana atingiram homogeneidade espacial, isto é, não há movimentação destas populações influenciando na disseminação da doença. O principal interesse neste trabalho é analisar qualitativamente o comportamento das populações em torno dos pontos de equilíbrio do sistema. Para este fim, além do uso de ferramentas analíticas também foram realizadas simulações numéricas utilizando o software *Maple*. Dessa forma foi possível obter

informações sobre a disseminação da dengue, sob algumas hipóteses, mesmo sem obtermos solução explícita do sistema.

Palavras-chave: disseminação de dengue, equações diferenciais ordinárias, pontos de equilíbrio, estudo qualitativo.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
2 Preliminares	6
2.1 Sistema de equações diferenciais	6
2.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade	9
2.2.1 Estabilidade em sistema de equações diferenciais não lineares	17
3 Análise do Modelo	21
3.1 Pontos de equilíbrio do sistema	21
3.1.1 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio P_0	25
3.1.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio P_1	28
3.1.3 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio P_2	32
4 Resultados Numéricos e Simulações	34
4.1 Análise da propagação da dengue nas proximidades de P_2 em ambiente com a temperatura de 30°C	34
4.2 Análise da propagação da dengue nas proximidades de P_2 em ambiente com a temperatura de 20°C	43
4.3 Análise dos pontos P_0 e P_1 na temperatura de 30°C e de 20°C	51
5 Considerações Finais	54
Referências Bibliográficas	55
A Demonstrações	57
A.1 Seção A.1	57

*Àqueles que sempre me incentivaram,
em especial à Bárbara Müller.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela força para enfrentar os desafios.

Agradeço à Prof^a Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara pela orientação, dedicação, compreensão e paciência no desenvolvimento deste trabalho, muito obrigado.

Agradeço a todos os professores que ministraram as aulas neste programa de mestrado, em particular ao Prof^o Dr. Cristiano Torezzan que desde o início sempre nos incentivou.

Agradeço a minha querida mãe Nely S. Ramos Marim que de seu jeito me dava forças para seguir em frente.

Agradeço aos colegas da turma de mestrado, em particular ao Paulo Víctor C. França e Gracielle H. Silva pela convivência e ajuda quando precisei.

Agradeço as pessoas que me incentivaram e ajudaram como podiam, muito obrigado Ana Maria Georg, Tamara Müller, Jackson Pereira Junior, Paulo Sérgio Lopes da Silva, Márcio Urel Rodrigues, Diego Piasson, Richard de Souza Costa, Ada Furtado, Samantha Dias de Souza, Luiz de Almeida Rodrigues, Nilmar Bispo Santana, João Guilherme Portugal Vieira dentre muitos outros que contribuíram de forma direta ou indireta nesta formação, muito obrigado a todos.

Lista de Ilustrações

1.1	Esquema resumido de transmissão da doença da dengue entre mosquito <i>Aedes aegypti</i> e humano.	1
2.1	Autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:(a) campo de direções do sistema;(b) retrato de fase com algumas trajetórias.	10
2.2	Autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$:(a) campo de direções do sistema;(b) retrato de fase com algumas trajetórias.	11
2.3	Autovalores $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$: (a) campo de direções do sistema; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	11
2.4	(a) campo de direções do sistema, onde $\lambda < 0$ com dois autovetores independentes; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	12
2.5	(a) campo de direções do sistema, onde $\lambda > 0$ com dois autovetores independentes; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	13
2.6	(a) campo de direções do sistema, onde $\lambda < 0$ e $t \rightarrow +\infty$, com apenas um autovetor linearmente independente; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	13
2.7	(a) campo de direções do sistema, onde $\lambda > 0$ e $t \rightarrow +\infty$, com apenas um autovetor linearmente independente; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	14
2.8	(a) campo de direções do sistema com $\alpha < 0$; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	15
2.9	(a) campo de direções do sistema com $\alpha > 0$; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	15
2.10	(a) campo de direções do sistema com $\alpha = 0$; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.	16
4.1	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	36
4.2	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	37
4.3	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	38

4.4	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	39
4.5	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	40
4.6	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	40
4.7	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	41
4.8	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	42
4.9	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	45
4.10	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	45
4.11	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	46
4.12	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	47
4.13	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	48
4.14	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	48
4.15	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$	49
4.16	Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$	50

Lista de Tabelas

2.1	Propriedades de Estabilidade do sistema (2.2.1).	16
2.2	Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Linearizados e Sistemas Não Lineares no caso 2×2 . Ver Boyce e Diprima [2].	19
4.1	Parâmetros para o mosquito <i>Aedes aegypti</i> à temperatura de 30°C	34
4.2	Parâmetros relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 30°C . . .	35
4.3	Parâmetros adimensionais para o mosquito <i>Aedes aegypti</i> à temperatura de 30°C . . .	35
4.4	Parâmetros adimensionais relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 30°C	35
4.5	Parâmetros para o mosquito <i>Aedes aegypti</i> à temperatura de 20°C	43
4.6	Parâmetros relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 20°C . . .	43
4.7	Parâmetros adimensionais para o mosquito <i>Aedes aegypti</i> à temperatura de 20°C . . .	44
4.8	Parâmetros adimensionais relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 20°C	44
4.9	Valores de Q_0 e R_0 para as temperaturas de 30°C e 20°C	51

Capítulo 1

Introdução

A dengue é uma das doenças infecciosas mais frequentes no Brasil e um dos principais problemas de saúde pública de regiões tropicais e subtropicais, tendo os mosquitos *Aedes aegypti* como o principal vetor de proliferação da doença, de acordo com Costa *et al.* [4], Guilarde [11], Maidana e Yang [16]. O *Aedes aegypti* é um mosquito de hábitos domésticos, que pica durante o dia e tem preferência acentuada por sangue humano, e por esse fato a epidemia causada pela doença é de característica urbana, segundo Maidana e Yang [16] e Tauil [29].

O vírus é adquirido pela fêmea do mosquito *Aedes aegypti* quando esta se alimenta do sangue de um humano infectado. O vírus fica localizado nas glândulas salivares do mosquito, onde se prolifera e aí permanece, deixando o mesmo infectado durante toda a sua vida. Segundo Nunes [19], uma vez infectada a fêmea do mosquito transmite o vírus junto com a sua saliva ao picar um humano não infectado. Podemos descrever a transmissão da doença utilizando o seguinte diagrama:

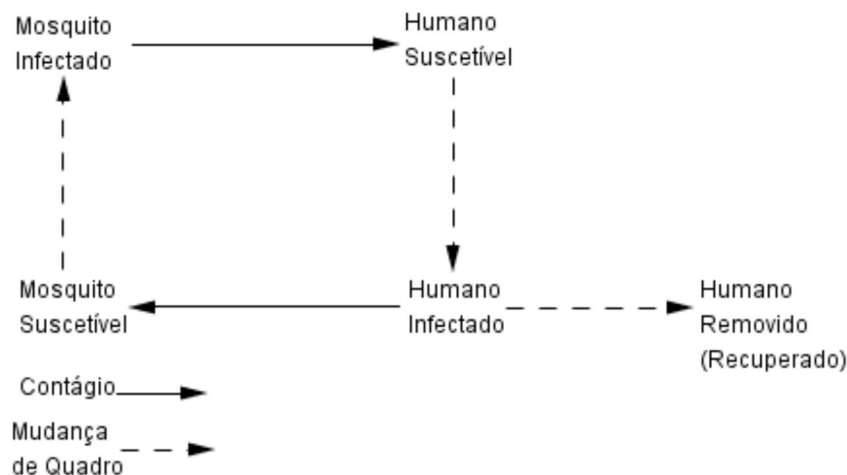


Figura 1.1: Esquema resumido de transmissão da doença da dengue entre mosquito *Aedes aegypti* e humano.

Em Maidana e Yang [16] é estudado um modelo de disseminação da doença da dengue numa

escala espacial urbana, no qual é analisada a ocorrência de infecção da dengue em uma região infestada por mosquitos. O modelo desconsidera os efeitos não locais, isto é, a disseminação da doença devido à movimentação de indivíduos humanos, mas leva em consideração a população humana local.

A população humana foi dividida em:

- Suscetíveis: indivíduos que podem contrair a doença;
- Infectados: indivíduos que podem transmitir a doença;
- Removidos: indivíduos que se recuperaram da doença e se tornaram imunes;

onde suas respectivas densidades espaciais no tempo t são denotadas por $\bar{H}(x, t)$, $\bar{I}(x, t)$ e $\bar{R}(x, t)$. A população humana total é dada por $\bar{N}(x, t) = \bar{H}(x, t) + \bar{I}(x, t) + \bar{R}(x, t)$. Nesta versão simplificada do modelo a população humana total $\bar{N}(x, t)$ será considerada constante, para isso a taxa de mortalidade $\bar{\mu}_H$ da população humana será igual a taxa de natalidade.

Em relação a população de mosquitos foram consideradas duas subpopulações:

- A fase alada: Aqui temos os mosquitos classificados como suscetíveis e infectados, cujas densidades são denotados respectivamente, por $\bar{M}_S(x, t)$ e $\bar{M}_I(x, t)$;
- A fase aquática: Aqui temos os ovos, larvas e pupas.

As densidades da fase alada e aquática são denotadas por $\bar{M}(x, t)$ e $\bar{A}(x, t)$, respectivamente. Temos que a densidade populacional de mosquitos é $\bar{M}(x, t) = \bar{M}_S(x, t) + \bar{M}_I(x, t)$.

A oviposição realizada pelos mosquitos é feita à taxa per capita dado por $r(1 - \bar{A}/k_2)$, onde r é a taxa de oviposição intrínseca e k_2 é a capacidade suporte da quantidade de locais disponíveis para reprodução. Na forma alada temos que a capacidade suporte é dado por k_1 e a taxa per capita de maturação da forma aquática para o alado é denotada por $\bar{\gamma}$. As taxas de mortalidade per capita dos mosquitos na forma alada e aquática são, respectivamente, $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$.

No modelo foi assumido o princípio de ação das massas para descrever a transmissão de infecção por dengue entre humanos e mosquitos. Este conceito, conforme Silva [25], é traduzido pela ideia de que uma epidemia propaga-se em uma população de forma proporcional ao produto da densidade de humanos suscetíveis de contrair a doença e da densidade das populações de mosquitos infectados, se eles estiverem homogeneamente distribuídos. Esse mesmo princípio é utilizado para a densidade de mosquitos suscetíveis e humanos infectados. A taxa em que os mosquitos suscetíveis são infectados quando eles picam os seres humanos infectados é medida pelo coeficiente de transmissão $\bar{\beta}_1$ e a taxa de transmissão entre humanos não infectados e mosquitos infectados é dado por $\bar{\beta}_2$.

Os coeficientes de transmissão $\bar{\beta}_1$ e $\bar{\beta}_2$ dependem da taxa média de picadas, b , da probabilidade média de transmissão de humano para vetor, β_V , da probabilidade média de transmissão do vetor

para humano, β_H e da concentração da população humana por unidade de área, \bar{N}_0 . Dessa forma, temos que $\bar{\beta}_1 = b\beta_V/\bar{N}_0$ e $\bar{\beta}_2 = b\beta_H/\bar{N}_0$.

Nesse modelo foi levado em consideração a infecção de apenas um sorotipo da dengue, dessa forma quando um humano é infectado ele fica imune a esse sorotipo e fica na classe de removidos. A transferência para a classe de removidos é feita a um ritmo $\bar{\sigma}$. Também foi considerado a movimentação dos mosquitos para a disseminação da doença, mas não a movimentação dos humanos. Assim, tanto a classe de mosquitos infectados como a de não infectados, estão sob difusão descrita pelo parâmetro \bar{D} e advecção dado por $\bar{\nu}$. O modelo que governa a evolução espacial e temporal da doença é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{M}_S}{\partial t} = \bar{D} \frac{\partial^2 \bar{M}_S}{\partial x^2} - \bar{\nu} \frac{\partial \bar{M}_S}{\partial x} + \bar{\gamma} \bar{A} \left(1 - \frac{\bar{M}}{k_1} \right) - \bar{\mu}_1 \bar{M}_S - \bar{\beta}_1 \bar{M}_S \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{M}_I}{\partial t} = \bar{D} \frac{\partial^2 \bar{M}_I}{\partial x^2} - \bar{\nu} \frac{\partial \bar{M}_I}{\partial x} - \bar{\mu}_1 \bar{M}_I + \bar{\beta}_1 \bar{M}_S \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = r \left(1 - \frac{\bar{A}}{k_2} \right) \bar{M} - \bar{\mu}_2 \bar{A} - \bar{\gamma} \bar{A} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{\mu}_H \bar{N} - \bar{\mu}_H \bar{H} - \bar{\beta}_2 \bar{H} \bar{M}_I \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} = \bar{\beta}_2 \bar{H} \bar{M}_I - \bar{\sigma} \bar{I} - \bar{\mu}_H \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = \bar{\sigma} \bar{I} - \bar{\mu}_H \bar{R} \end{array} \right. \quad (1.0.1)$$

Sujeito às condições de contorno

$$\bar{M}_S = 0, \bar{M}_I = 0 \quad em \quad \partial\Omega \times (0, T)$$

e às condições iniciais

$$\bar{M}_S = \bar{M}_{S0}, \bar{M}_I = \bar{M}_{I0}, \bar{A} = \bar{A}_0, \bar{H} = \bar{H}_0, \bar{I} = \bar{I}_0, \bar{R} = \bar{R}_0 \quad em \quad \Omega \times \{t = 0\}.$$

Neste trabalho vamos considerar o caso no qual a movimentação da população de mosquito e da humana não são consideradas, isto é, o caso de populações espacialmente homogêneas. Neste

caso, o sistema (1.0.1) se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\overline{M}_S}{dt} = \overline{\gamma}\overline{A} \left(1 - \frac{\overline{M}}{k_1}\right) - \overline{\mu}_1\overline{M}_S - \overline{\beta}_1\overline{M}_S\overline{I} \\ \frac{d\overline{M}_I}{dt} = -\overline{\mu}_1\overline{M}_I + \overline{\beta}_1\overline{M}_S\overline{I} \\ \frac{d\overline{A}}{dt} = r \left(1 - \frac{\overline{A}}{k_2}\right) \overline{M} - \overline{\mu}_2\overline{A} - \overline{\gamma}\overline{A} \\ \frac{d\overline{H}}{dt} = \overline{\mu}_H\overline{N} - \overline{\mu}_H\overline{H} - \overline{\beta}_2\overline{H}\overline{M}_I \\ \frac{d\overline{I}}{dt} = \overline{\beta}_2\overline{H}\overline{M}_I - \overline{\sigma}\overline{I} - \overline{\mu}_H\overline{I} \\ \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{\sigma}\overline{I} - \overline{\mu}_H\overline{R} \end{array} \right. \quad (1.0.2)$$

Sujeito às condições iniciais

$$\overline{M}_S = \overline{M}_{S0}, \overline{M}_I = \overline{M}_{I0}, \overline{A} = \overline{A}_0, \overline{H} = \overline{H}_0, \overline{I} = \overline{I}_0, \overline{R} = \overline{R}_0 \quad em \quad \Omega \times \{t = 0\}.$$

Observemos que somando-se as equações de \overline{H} , \overline{I} e \overline{R} , e sabendo que $\overline{N} = \overline{H} + \overline{I} + \overline{R}$, temos

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{I}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = 0,$$

logo, as equações são compatíveis com a hipótese de \overline{N} ser constante.

Consideremos a mudança de variável

$$M_S = \frac{\overline{M}_S}{k_1}, \quad M_I = \frac{\overline{M}_I}{k_1}, \quad A = \frac{\overline{A}}{k_2}, \quad H = \frac{\overline{H}}{\overline{N}}, \quad I = \frac{\overline{I}}{\overline{N}}, \quad R = \frac{\overline{R}}{\overline{N}}.$$

Observando que $H + I + R = \frac{\overline{H}}{\overline{N}} + \frac{\overline{I}}{\overline{N}} + \frac{\overline{R}}{\overline{N}} = \frac{\overline{N}}{\overline{N}} = 1$, então $R = 1 - H - I$. Assim, a equação para R pode ser omitida e considerando os parâmetros adimensionais

$$k = \frac{k_1}{k_2}, \quad \gamma = \frac{\overline{\gamma}}{r}, \quad \mu_1 = \frac{\overline{\mu}_1}{r}, \quad \mu_2 = \frac{\overline{\mu}_2}{r}, \quad \beta_1 = \frac{\overline{\beta}_1\overline{N}}{r}, \quad \beta_2 = \frac{\overline{\beta}_2k_1}{r}, \quad \mu_H = \frac{\overline{\mu}_H}{r}, \quad \sigma = \frac{\overline{\sigma}}{r}, \quad (1.0.3)$$

o sistema se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_S}{dt} = \frac{\gamma}{k} A (1 - M) - \mu_1 M_S - \beta_1 M_S I \\ \frac{dM_I}{dt} = -\mu_1 M_I + \beta_1 M_S I \\ \frac{dA}{dt} = k (1 - A) M - \mu_2 A - \gamma A \\ \frac{dH}{dt} = \mu_H - \mu_H H - \beta_2 H M_I \\ \frac{dI}{dt} = \beta_2 H M_I - \sigma I - \mu_H I \end{array} \right. \quad (1.0.4)$$

Sujeito às condições iniciais

$$M_S = M_{S0}, \quad M_I = M_{I0}, \quad A = A_0, \quad H = H_0, \quad I = I_0 \quad em \quad \Omega \times \{t = 0\},$$

$$\text{onde } M_{S0} = \frac{\overline{M}_{S0}}{k_1}, \quad M_{I0} = \frac{\overline{M}_{I0}}{k_1}, \quad A_0 = \frac{\overline{A}_0}{k_2}, \quad H_0 = \frac{\overline{H}_0}{\overline{N}}, \quad I_0 = \frac{\overline{I}_0}{\overline{N}}.$$

O objetivo deste trabalho é encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (1.0.4) e analisar a estabilidade do sistema em torno desses pontos. Ou seja, encontrar os valores nos quais o número de indivíduos de cada população se torna constante (pontos de equilíbrio) e analisar a propagação da doença quando cada uma das populações está próxima a estes valores. Também realizaremos simulações numéricas com o uso do software *Maple* para que possamos observar o comportamento das populações de mosquitos e humanos para alguns casos. Nas simulações numéricas utilizaremos valores dos parâmetros obtidos de Maidana e Yang [16] para duas temperaturas de ambiente, que são de 30°C e 20°C.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos resultados envolvendo sistemas de equações diferenciais. Em particular, será feito estudo sobre comportamento qualitativo em torno de pontos críticos para sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes, e posteriormente para sistemas não lineares. No capítulo 3 é onde analisamos o modelo descrito pelo sistema (1.0.4) encontraremos os pontos de equilíbrio desse sistema e posteriormente será feita a análise de estabilidade do sistema em torno dos mesmos. No capítulo 4 apresentamos algumas simulações numéricas do sistema (1.0.4) para alguns casos específicos, com o objetivo de estudar qualitativamente soluções do sistema próximas do ponto de equilíbrio em nível endêmico. Finalmente no capítulo 5 faremos as considerações finais dos estudos que foram realizados nos capítulos 3 e 4.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Sistema de equações diferenciais

Sistemas de equações diferenciais ordinárias são utilizados para descrever problemas de várias áreas, por exemplo, biologia, física, engenharia, etc. Estes sistemas consistem em equações que envolvem duas ou mais variáveis dependentes e suas derivadas e uma variável independente. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n funções da variável t , então um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com n equações e n incógnitas é da forma:

$$\begin{cases} x'_1(t) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ x'_2(t) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Uma solução do sistema (2.1.1) é um conjunto de funções $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ que satisfaz simultaneamente todas as equações do mesmo.

Em muitos sistemas de equações diferenciais não é possível ou é muito difícil encontrar suas soluções de forma explícita. Porém, pode-se encontrar aproximações dessas soluções por métodos numéricos ou obter informações sobre o comportamento dessas soluções através de estudo qualitativo. Aqui estamos interessados no estudo qualitativo do sistema (1.0.4) e, para isso, veremos a seguir resultados que serão utilizados para realizar tal estudo.

No caso em que as funções $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, do sistema (2.1.1) são lineares dizemos que o sistema de equações diferenciais é *linear*. Em particular, um sistema linear de n

equações diferenciais de primeira ordem e n incógnitas é um sistema da forma

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x'_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

onde a_{ij} e f_i , $i, j = 1, 2, \dots, n$, são funções de t .

Definição 2.1.1. *Se no sistema (2.1.2) as funções $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, são identicamente nulas dizemos que o sistema é homogêneo.*

Um sistema linear homogêneo de primeira ordem com n equações e n incógnitas é da forma

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}, \quad (2.1.3)$$

onde a_{ij} são funções de t , para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Podemos reescrever o sistema (2.1.3) na forma matricial

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (2.1.4)$$

$$\text{onde } A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{ e } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Os próximos resultados serão enunciados diretamente para o caso particular de sistema de equações diferenciais lineares homogêneo de n equações e n incógnitas por ser do interesse deste trabalho.

Proposição 2.1.2. *Sejam a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, funções contínuas. O conjunto \mathcal{S} de todas as soluções do sistema (2.1.4) munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

Proposição 2.1.3. *Sejam a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, funções contínuas. Se o sistema de equações diferenciais (2.1.4) possui n equações e n incógnitas, então a dimensão do espaço vetorial \mathcal{S} , formado por todas suas soluções é igual a n .*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

A Proposição 2.1.3 estabelece que o espaço \mathcal{S} de todas as soluções do sistema (2.1.4) tem dimensão n . Assim para obter a solução geral do sistema precisamos encontrar n soluções linearmente independentes. No próximo resultado veremos que para verificar se n soluções X_1, X_2, \dots, X_n do sistema (2.1.4) são linearmente independentes, basta verificar se $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)$ são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n para algum t_0 no intervalo de existência de solução. Então, toda solução do sistema pode ser escrita como combinação linear destas funções, ou seja, a solução geral do sistema é $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$.

Proposição 2.1.4 (Teste de independência linear). *Se X_1, X_2, \dots, X_k são soluções do sistema (2.1.4), então X_1, X_2, \dots, X_k são linearmente independentes se, e somente se, $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_k(t_0)$ são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n para algum t_0 pertencente ao intervalo de existência de soluções do sistema.*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

Com o objetivo de fazer um estudo qualitativo de soluções de sistemas lineares homogêneos $n \times n$, consideremos o seguinte sistema

$$X'(t) = AX(t), \quad (2.1.5)$$

$$\text{onde } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{com } a_{ij} \text{ constantes para } i, j = 1, 2, \dots, n.,$$

$1 \leq i, j \leq n$, constantes.

Inicialmente, procuremos por n soluções linearmente independentes $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Para isso, lembremos que uma equação linear homogênea $x'(t) = ax(t)$ tem solução na forma $x(t) = e^{at}$. Então, vamos procurar por soluções não triviais do sistema (2.1.5) na forma $X(t) = e^{\lambda t}v$, onde λ é um escalar e v é um vetor de \mathbb{R}^n . Observemos que

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}v = \lambda e^{\lambda t}v \quad \text{e} \quad A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av.$$

Assim, $X(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução de (2.1.5) se, e somente se, $\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$, ou equivalentemente,

$$(A - \lambda I)v = 0,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n . Então, para encontrar soluções não nulas do sistema (2.1.5) precisamos encontrar as soluções não triviais do sistema linear homogêneo acima. Porém, este sistema admite solução não trivial se, e somente se,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Portanto, $X(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução não trivial do sistema se, e somente se, λ é um autovalor de A e v é um autovetor associado.

Veremos que os autovalores determinam o comportamento da solução geral do sistema (2.1.5) nas proximidades dos pontos de equilíbrio ou pontos críticos. Para sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes sempre podemos encontrar soluções de forma explícita, mas isso nem sempre é possível para sistemas não homogêneos ou não lineares. No caso em que temos um sistema de equações diferenciais não lineares podemos realizar o estudo qualitativo das soluções nas proximidades de seus pontos de equilíbrio fazendo a linearização do mesmo. Na próxima seção mostraremos como é feito o estudo qualitativo das soluções de sistemas pela análise dos autovalores associados a matriz de coeficientes A e também como podemos fazer esse estudo para um sistema de equações diferenciais não lineares utilizando sua linearização.

2.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade

Estamos interessados no estudo qualitativo sobre o comportamento das soluções de sistemas de equações diferenciais nas proximidades dos chamados *pontos de equilíbrio* ou *pontos críticos*.

Definição 2.2.1. *Um ponto de equilíbrio ou ponto crítico para o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (2.1.1), é um ponto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Em particular, para o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes (2.1.5), isto é, $X'(t) = AX(t)$, os pontos de equilíbrio do sistema são aqueles nos quais $AX(t) = 0$.

Podemos observar que qualquer sistema de equações diferenciais lineares homogêneo admite como ponto de equilíbrio a solução trivial $X(t) \equiv 0$. Inicialmente vamos estudar como as soluções do sistema (2.1.5) se comportam na vizinhança do ponto de equilíbrio $X(t) \equiv 0$. Neste caso, estamos interessados em classificar este ponto como estável, assintoticamente estável ou instável. Essa classificação pode ser feita utilizando os autovalores da matriz A de coeficientes do sistema.

Vamos analisar primeiramente o caso de estabilidade de um sistema de ordem 2. Para isso consideremos o sistema

$$X'(t) = AX(t), \tag{2.2.1}$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz de coeficientes constantes de ordem 2 e $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (2.2.2)$$

Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio (2.2.2). Observando que $p(\lambda)$ é um polinômio de segundo grau com coeficientes reais, temos quatro casos para os autovalores de A :

- (1) Autovalores reais, distintos e de mesmo sinal;
- (2) Autovalores reais de sinais opostos;
- (3) Autovalores reais repetidos;
- (4) Autovalores complexos.

Faremos a análise de estabilidade em cada caso acima descritos. Denotemos por λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz A e v_1 e v_2 autovetores associados à λ_1 e λ_2 , respectivamente.

Caso 1: Autovalores reais, distintos e de mesmo sinal

A solução geral do sistema (2.2.1) neste caso é $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$. Se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, temos que $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$ e $x_2(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ e o ponto de equilíbrio é chamado de *nó repulsor* (ver Figura 2.1). Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, então $x_1(t) \rightarrow 0$ e $x_2(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e o ponto de equilíbrio é chamado de *nó atrator* (ver Figura 2.2).

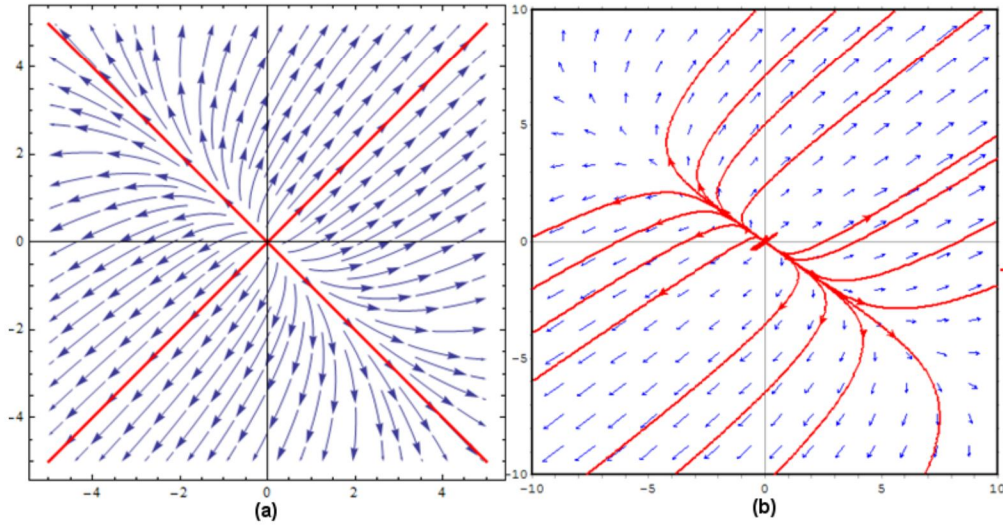


Figura 2.1: Autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:(a) campo de direções do sistema;(b) retrato de fase com algumas trajetórias.

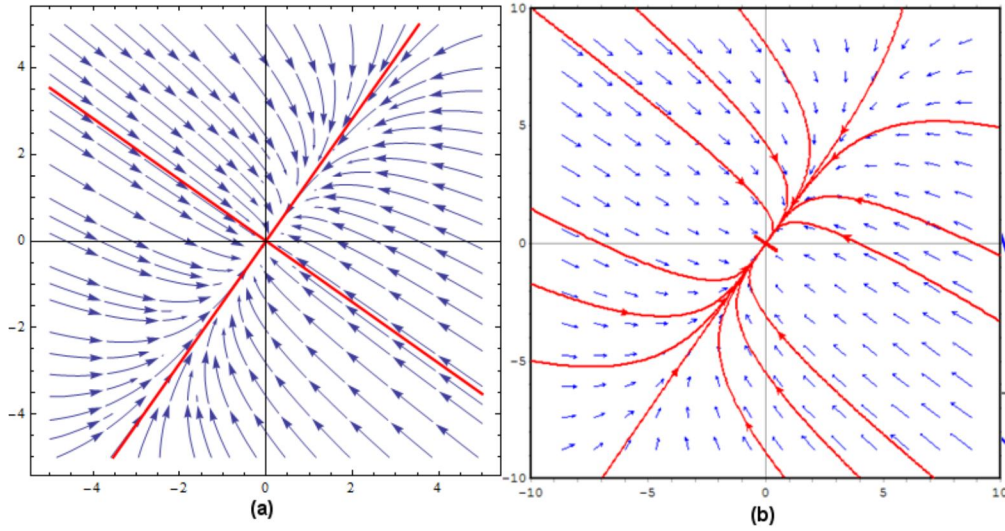


Figura 2.2: Autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: (a) campo de direções do sistema; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

Caso 2: Autovalores reais de sinais opostos

A solução geral do sistema (2.2.1) para este caso é $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$. Se $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, então $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$ e $x_2(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$. Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, então $x_1(t) \rightarrow 0$ e $x_2(t) \rightarrow \pm\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$. O ponto de equilíbrio nesse caso, é chamado de *ponto de sela*. Na Figura 2.3 temos um exemplo da representação geométrica de quando os autovalores têm sinais opostos.

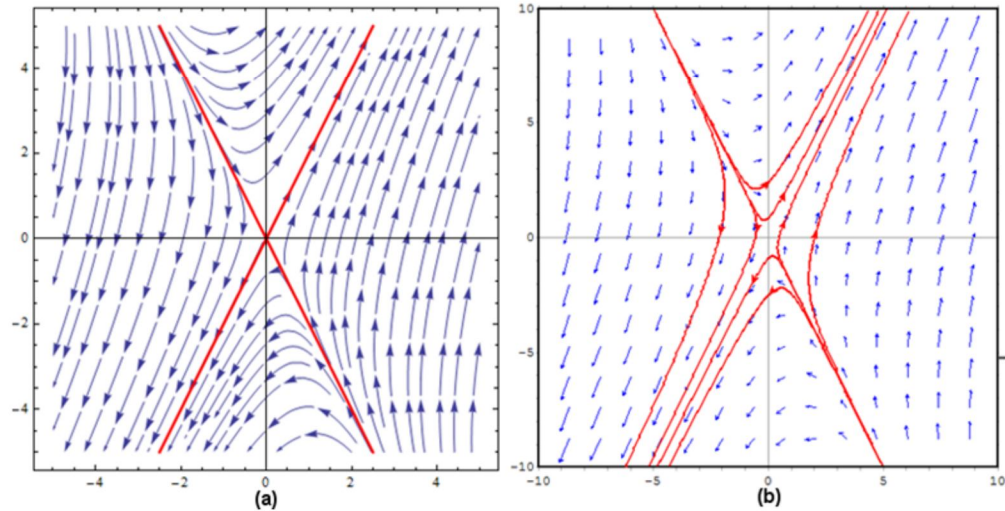


Figura 2.3: Autovalores $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$: (a) campo de direções do sistema; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

Caso 3: Autovalores reais repetidos

Seja $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$. Existem dois casos: se o autovalor λ possui dois autovetores linearmente independentes associados a ele ou somente um. A seguir vamos analisar os dois casos para o autovalor λ :

(i) Dois autovetores linearmente independentes associados a λ

Se o autovalor λ possuir dois autovetores linearmente independentes associado a ele, então a solução geral do sistema (2.2.1) é $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 v_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$. Se $\lambda < 0$, então todas as trajetórias tendem para origem quando $t \rightarrow +\infty$. Neste caso, o ponto de equilíbrio é chamado de *nó próprio estável* (ver Figura 2.4). Por outro lado, se $\lambda > 0$, então $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$ e $x_2(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Neste caso, o ponto de equilíbrio é chamado de *nó próprio instável* (ver Figura 2.5).

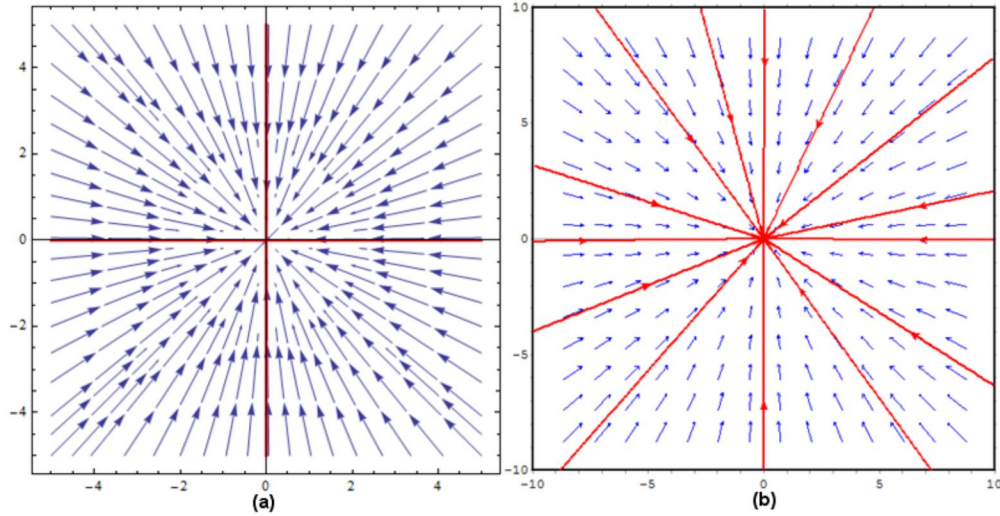


Figura 2.4: (a) campo de direções do sistema, onde $\lambda < 0$ com dois autovetores independentes; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

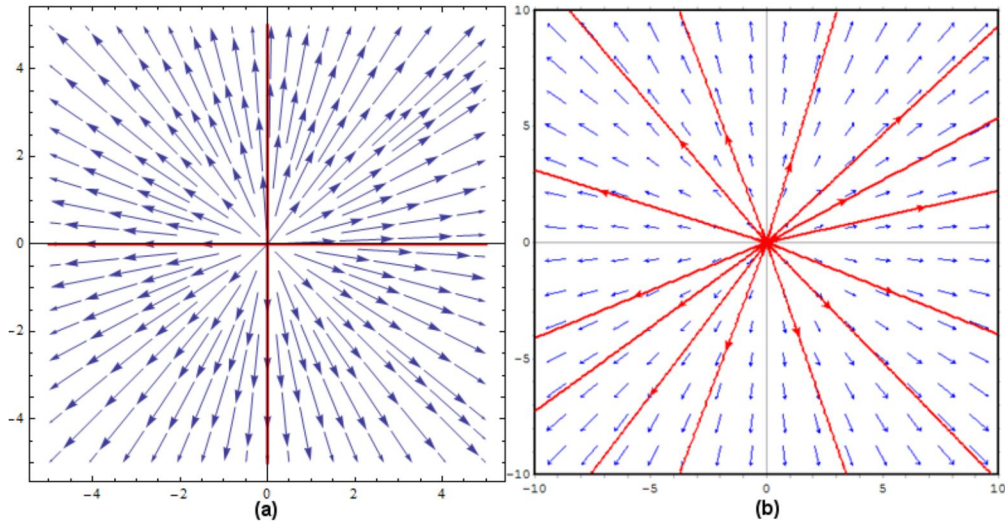


Figura 2.5: (a) campo de direções do sistema, onde $\lambda > 0$ com dois autovetores independentes; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

(ii) Somente um autovetor linearmente independente associado a λ

Se o autovalor λ possuir apenas um autovetor linearmente independente associado a ele, então a solução geral do sistema (2.2.1) é $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (v_1 t e^{\lambda t} + v_2 e^{\lambda t})$, onde v_1 é um autovetor e v_2 é um autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. O termo dominante da solução é $c_2 v_1 t e^{\lambda t}$. Assim, se $\lambda < 0$, então $X(t) \rightarrow \vec{0}$ quando $t \rightarrow +\infty$ e $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$, $x_2(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$. Neste caso, o ponto de equilíbrio é chamado de *nó impróprio estável* (ver Figura 2.6). Se $\lambda > 0$, então $x_1(t) \rightarrow \pm\infty$ e $x_2(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ e $X(t) \rightarrow \vec{0}$ quando $t \rightarrow -\infty$. Neste caso, o ponto de equilíbrio é chamado de *nó impróprio instável* (ver Figura 2.7).

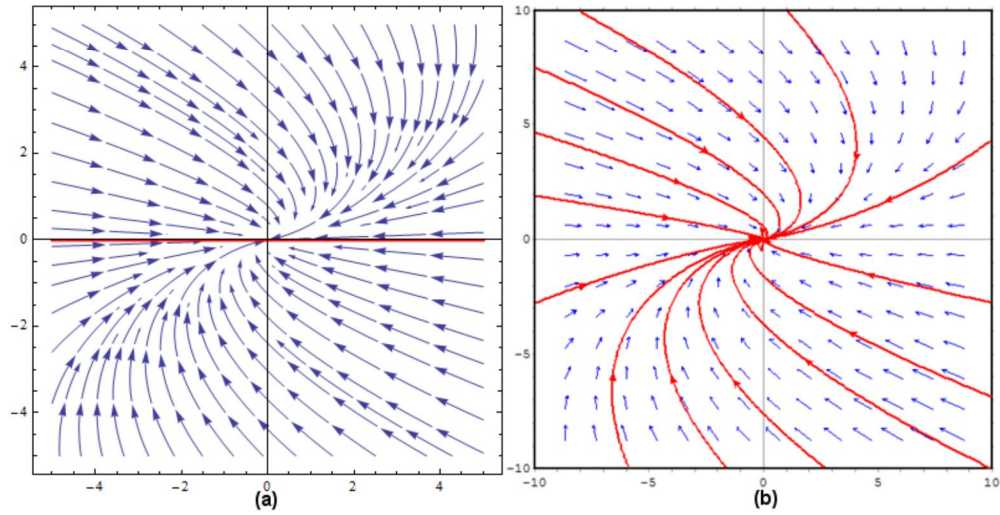


Figura 2.6: (a) campo de direções do sistema, onde $\lambda < 0$ e $t \rightarrow +\infty$, com apenas um autovetor linearmente independente; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

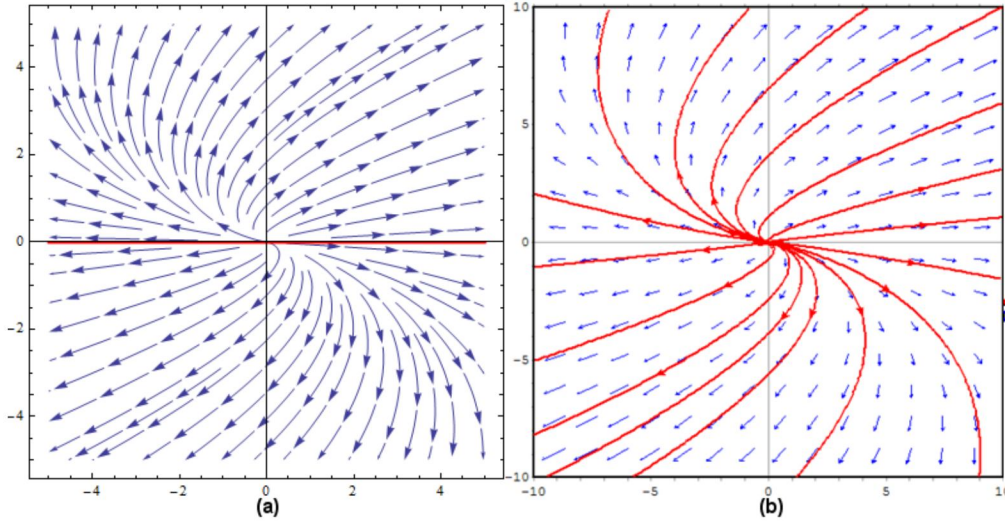


Figura 2.7: (a) campo de direções do sistema, onde $\lambda > 0$ e $t \rightarrow +\infty$, com apenas um autovetor linearmente independente; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

Caso 4: Autovalores complexos

Se A é uma matriz real, então o polinômio característico $p(\lambda)$ terá coeficientes reais. Logo, se λ_1 é uma raiz complexa de $p(\lambda)$, então a raiz λ_2 é o complexo conjugado. Portanto, os autovalores complexos aparecem em pares $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Além disso, os autovetores associados v_1 e v_2 também são complexos conjugados, conseqüentemente as soluções $X_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ e $X_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$ serão complexas conjugadas. Para encontrarmos soluções reais do sistema (2.2.1) devemos obter a parte real e imaginária de $X_1(t)$ ou de $X_2(t)$.

Fazendo $v_1 = K_1 + iK_2$, temos

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (K_1 + iK_2)e^{(\alpha + i\beta)t} \\ &= (K_1 + iK_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}(K_1\cos\beta t - K_2\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(K_1\sin\beta t + K_2\cos\beta t). \end{aligned}$$

Escrevendo $X_1(t) = U_1(t) + iU_2(t)$, temos que

$$\begin{aligned} U_1(t) &= e^{\alpha t}(K_1\cos\beta t - K_2\sin\beta t) \\ U_2(t) &= e^{\alpha t}(K_1\sin\beta t + K_2\cos\beta t) \end{aligned}$$

são soluções reais do sistema (2.2.1).

As soluções $U_1(t)$ e $U_2(t)$ são linearmente independentes, logo pela Proposição 2.1.3, tomando constantes arbitrárias c_1 e c_2 , a solução geral do sistema (2.2.1) é

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t}(K_1\cos\beta t - K_2\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(K_1\sin\beta t + K_2\cos\beta t)$$

e o ponto de equilíbrio é chamado de *espiral*. A orientação das trajetórias depende do sinal de α . Se $\alpha < 0$ as trajetórias tendem para origem, mas se $\alpha > 0$, então as trajetórias se afastam da origem. Na Figura 2.8 temos a representação geométrica, no caso em que $\alpha < 0$ e na Figura 2.9 o caso em que $\alpha > 0$.

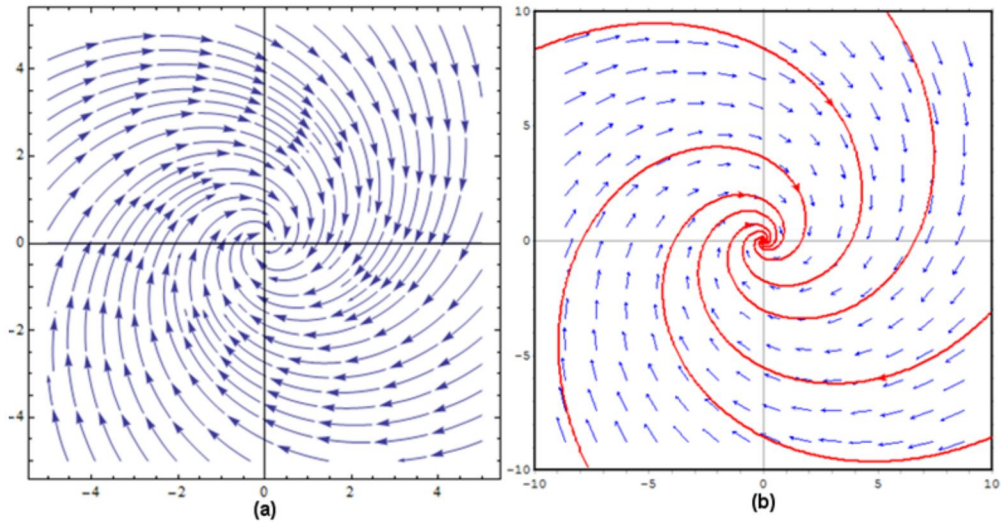


Figura 2.8: (a) campo de direções do sistema com $\alpha < 0$; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

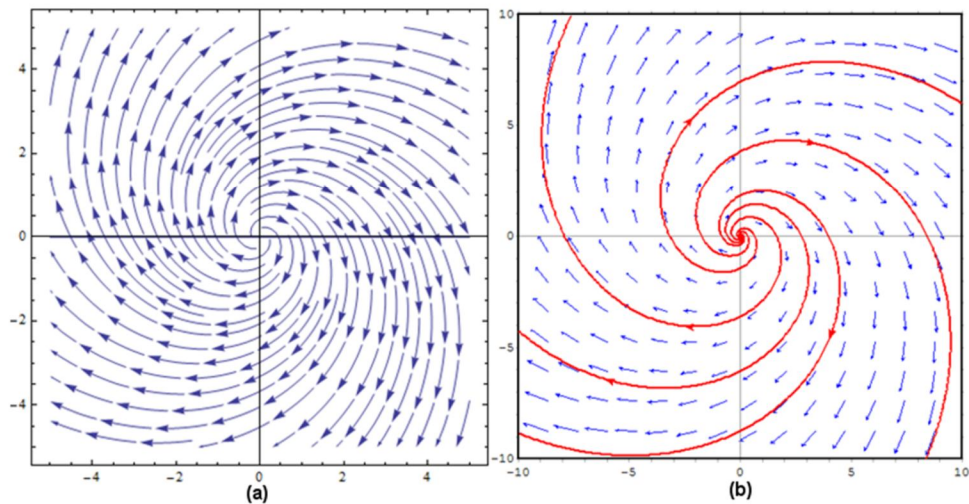


Figura 2.9: (a) campo de direções do sistema com $\alpha > 0$; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

No caso em que $\alpha = 0$ a solução do sistema (2.2.1) é

$$X(t) = c_1(K_1 \cos \beta t - K_2 \sin \beta t) + c_2(K_1 \sin \beta t + K_2 \cos \beta t),$$

as trajetórias são curvas fechadas em torno da origem e o ponto de equilíbrio é chamado de *centro*. Um exemplo de representação geométrica desse caso é mostrado na Figura 2.10, onde as trajetórias são circunferências concêntricas.

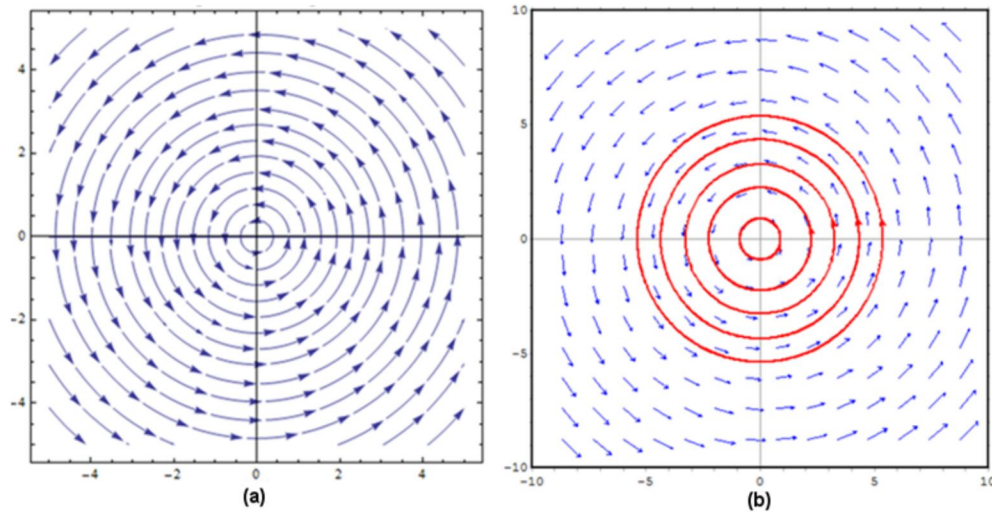


Figura 2.10: (a) campo de direções do sistema com $\alpha = 0$; (b) retrato de fase com algumas trajetórias.

De acordo com cada caso, temos o seguinte resumo sobre as informações do sistema (2.2.1) na Tabela 2.1.

Autovalores	Tipo do Ponto de Equilíbrio	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó	Assintoticamente Estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente Estável
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	Ponto Espiral	De acordo com o sinal de α abaixo:
$\alpha > 0$	—	Instável
$\alpha < 0$	—	Assintoticamente Estável
$\lambda = \pm i\beta$	Centro	Estável

Tabela 2.1: Propriedades de Estabilidade do sistema (2.2.1).

De acordo com Boyce e DiPrima [2], uma análise semelhante pode ser feita para um sistema de dimensão n . A análise de estabilidade de cada caso nos sistemas de dimensão mais alta são, essencialmente, combinações do que foi visto para o sistema (2.2.1). No caso geral temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. *Qualquer solução do sistema $X'(t) = AX(t)$ é:*

- (i) *assintoticamente estável se todos os autovalores tiverem parte real negativa;*
- (ii) *estável se todos os autovalores tiverem parte real negativa ou nula e os autovalores da parte real nula tiverem multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica;*
- (iii) *instável se pelo menos um dos autovalores tiver parte real positiva ou se existir algum autovalor com parte real nula com multiplicidade algébrica superior à multiplicidade geométrica.*

Demonstração. Ver Braun [3]. □

O Teorema 2.2.1 nos possibilita realizar a análise de estabilidade do sistema (2.1.5) em torno do ponto de equilíbrio quando este ponto é a origem do sistema de coordenadas. No caso em que um sistema de equações diferenciais homogêneo com coeficientes constantes de n equações e n incógnitas têm ponto de equilíbrio não trivial, ou seja, $\bar{X}(t) \neq (0, 0, \dots, 0)$, para podermos utilizar o Teorema 2.2.1 fazemos uma mudança de variável de modo que o ponto de equilíbrio do sistema na nova variável se localize na origem do novo sistema de coordenadas. Suponhamos que o sistema (2.1.5) tenha ponto de equilíbrio em $\bar{X}(t) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Fazendo a mudança de variáveis

$$Y(t) = X(t) - \bar{X}(t)$$

obtemos o seguinte sistema

$$Y'(t) = AY(t).$$

Na variável $Y(t)$ o ponto de equilíbrio $\bar{X}(t)$ se torna $\bar{Y}(t) = 0$.

2.2.1 Estabilidade em sistema de equações diferenciais não lineares

Consideremos o sistema de equações diferenciais não lineares

$$X' = F(X). \tag{2.2.3}$$

Para estudarmos a estabilidade do sistema (2.2.3), é utilizada uma linearização do mesmo. Inicialmente fazemos a mudança de variável $Y = X - \bar{X}$ para que tenhamos a origem do sistema de coordenadas como ponto de equilíbrio. Após a mudança de variável o sistema é linearizado utilizando a expansão da série de Taylor de primeira ordem em torno da origem. Assim, poderemos utilizar o Teorema 2.2.1 para obter informações qualitativas sobre o comportamento das soluções do sistema (2.2.3) em torno do ponto de equilíbrio \bar{X} .

Logo, suponhamos que o sistema (2.2.3) possua pontos de equilíbrio $\bar{X} \neq 0$, fazendo a mudança de variável $Y = X - \bar{X}$, onde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, obtemos o seguinte sistema não linear na nova variável:

$$Y' = F(Y) \quad (2.2.4)$$

Escrevendo as funções $F_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ do sistema (2.2.4) por expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio $\bar{Y} \equiv 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) &\approx \left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right]_{\bar{Y}=0} y_1 + \left[\frac{\partial F_1}{\partial y_2} \right]_{\bar{Y}=0} y_2 + \dots + \left[\frac{\partial F_1}{\partial y_n} \right]_{\bar{Y}=0} y_n \\ F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) &\approx \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1} \right]_{\bar{Y}=0} y_1 + \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right]_{\bar{Y}=0} y_2 + \dots + \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_n} \right]_{\bar{Y}=0} y_n \\ &\vdots \\ F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) &\approx \left[\frac{\partial F_n}{\partial y_1} \right]_{\bar{Y}=0} y_1 + \left[\frac{\partial F_n}{\partial y_2} \right]_{\bar{Y}=0} y_2 + \dots + \left[\frac{\partial F_n}{\partial y_n} \right]_{\bar{Y}=0} y_n \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial, temos

$$Y'(t) = AY(t), \quad (2.2.5)$$

onde $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$ e $A = J(\bar{Y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{Y}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(\bar{Y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(\bar{Y}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\bar{Y}) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\bar{Y}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(\bar{Y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(\bar{Y}) & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(\bar{Y}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(\bar{Y}) \end{bmatrix}$ representa a matriz jacobiana do sistema, calculado no ponto $\bar{Y} \equiv 0$.

Deste modo o sistema (2.2.5) nos possibilita analisar o comportamento das soluções do sistema (2.2.3) em torno de seus pontos de equilíbrio. A classificação dos pontos de equilíbrio do sistema não linear é feita utilizando o sistema linearizado e usando os mesmos critérios utilizados para um sistema linear.

É importante salientar que a solução geral do sistema (2.2.3) não é a mesma que a solução geral do sistema (2.2.5). Existe apenas uma semelhança qualitativa no comportamento de ambas as soluções na vizinhança do ponto de equilíbrio. Portanto, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são autovalores associados à matriz de coeficientes do sistema (2.2.5), temos que a análise de estabilidade de soluções dos sistemas (2.2.3) e (2.2.5) são equivalentes em torno do ponto de equilíbrio.

A Tabela 2.2 nos dá a descrição sobre a estabilidade de um sistema linearizado e o sistema não linear correspondente no caso de sistemas 2×2 .

Sistema Linearizado			Sistema Não Linear	
Autovalores	Tipo do Ponto	Estabilidade	Tipo do Ponto	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável	Nó	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó	Assintoticamente Estável	Nó	Assintoticamente Estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de Sela	Instável	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável	Nó ou Ponto Espiral	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente Estável	Nó ou Ponto Espiral	Assintoticamente Estável
<hr/>				
$\lambda = \alpha \pm i\beta$				
$\alpha > 0$	Ponto Espiral	Instável	Ponto Espiral	Instável
$\alpha < 0$	Ponto Espiral	Assintoticamente Estável	Ponto Espiral	Assintoticamente Estável
<hr/>				
$\lambda = \pm i\beta$	Centro	Estável	Centro ou Ponto de Sela	Indeterminado

Tabela 2.2: Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Linearizados e Sistemas Não Lineares no caso 2×2 . Ver Boyce e DiPrima [2].

Um dos objetivos deste trabalho é analisar a estabilidade do sistema não linear (1.0.4). Pelo Teorema 2.2.1 para que um sistema de equações diferenciais seja estável é necessário que a parte real das raízes do polinômio característico, associado a matriz de coeficientes, seja negativa. No entanto, podemos nos deparar com polinômios que tornam a tarefa de encontrar suas raízes muito trabalhosa e de dificuldade elevada. Mas, para muitas situações em que precisamos fazer uma análise qualitativa do sistema não é necessário que se encontre os valores das raízes explicitamente, precisamos apenas saber sobre o sinal de sua parte real. Assim, são utilizados alguns critérios que possa nos dar informações sobre esses sinais, um deles é o *Critério de Routh-Hurwitz*, que pode ser encontrado nos trabalhos de Souza [27], Dimitrov e Lucas [5], Lee [13], Marquesone [17], Meinsma [18], Santana [23], Soares [26], Piovesan [21] dentre outros. Temos o seguinte resultado sobre esse critério:

Proposição 2.2.2. *Seja o polinômio $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Uma condição necessária e suficiente para que todas as raízes do polinômio tenham parte real negativa é que $a_n > 0$ e os seguintes determinantes sejam positivos*

$$D_1 = \det[a_1],$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$D_k = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & \dots & a_k \end{bmatrix},$$

$k = 1, 2, \dots, n$, onde $a_k = 0$ para $k > n$.

Demonstração. Ver Dimitrov e Lucas [5]. □

Portanto, dado um polinômio $p(\lambda)$ de coeficientes reais, para verificarmos se a parte real de suas raízes são negativas, podemos utilizar o critério descrito pela Proposição 2.2.2.

Capítulo 3

Análise do Modelo

Neste capítulo serão encontrados os pontos de equilíbrio do sistema (1.0.4) e posteriormente será feita a análise de estabilidade do sistema em torno dos mesmos.

3.1 Pontos de equilíbrio do sistema

Para analisarmos o modelo descrito pelo sistema (1.0.4) temos que determinar uma região de interesse biológico, onde o modelo está bem definido matematicamente e biologicamente. No caso deste trabalho a região de interesse biológico para análise do modelo é um subconjunto de \mathbb{R}^5 positivamente invariante em relação ao sistema (1.0.4), pois as funções devem ser positivas porque representam populações, $M \leq 1$ devido à capacidade suporte da população de mosquitos na fase alada e $A \leq 1$ devido à capacidade suporte da quantidade de locais disponíveis para reprodução. Assim, a região de interesse é dada por

$$\Omega = \left\{ (M_S, M_I, A, H, I) \in \mathbb{R}^5 \mid M_S, M_I, A, H, I \geq 0, M = M_S + M_I \leq 1 \text{ e } A \leq 1 \right\}$$

Os pontos de equilíbrio para o modelo (1.0.4) serão encontrados resolvendo as equações do sistema abaixo. Para isso, vamos considerar dois casos: no primeiro não temos a presença de humanos infectados, isto é, $I = 0$ e no segundo temos a presença de humanos infectados, ou seja, $I \neq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{k} A (1 - M) - \mu_1 M_S - \beta_1 M_S I = 0 \\ -\mu_1 M_I + \beta_1 M_S I = 0 \\ k (1 - A) M - \mu_2 A - \gamma A = 0 \\ \mu_H - \mu_H H - \beta_2 H M_I = 0 \\ \beta_2 H M_I - \sigma I - \mu_H I = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Caso 1: $I = 0$

Se $I = 0$, pela equação $(3.1.1)_2$, isto é, $-\mu_1 M_I + \beta_1 M_S I = 0$, temos que

$$M_I = 0,$$

o que implica em $M = M_S$, pois $M = M_S + M_I$.

Substituindo $M_I = 0$ na equação $(3.1.1)_4$ obtemos

$$\mu_H - \mu_H H = 0,$$

de onde $H = 1$.

Como $I = 0$, $M_I = 0$, $M = M_S$ e $H = 1$ o sistema $(3.1.1)$ se torna:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{k} A (1 - M_S) - \mu_1 M_S = 0 \\ k (1 - A) M_S - \mu_2 A - \gamma A = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Podemos observar que o sistema $(3.1.2)$ depende das variáveis M_S e A . Se $M_S = 0$, então $(3.1.2)_2$ se torna

$$-\mu_2 A - \gamma A = 0,$$

de onde $A = 0$.

Com isso, temos que um ponto de equilíbrio do sistema $(3.1.1)$ é $P_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Esse ponto de equilíbrio representa uma área livre de mosquitos e com a população humana totalmente suscetível.

No entanto, se $M_S \neq 0$ da equação $(3.1.2)_2$, temos

$$A = \frac{k M_S}{k M_S + \mu_2 + \gamma}. \quad (3.1.3)$$

Substituindo $(3.1.3)$ na equação $(3.1.2)_1$, obtemos

$$\gamma M_S (1 - M_S) = \mu_1 M_S (k M_S + \mu_2 + \gamma).$$

Como $M_S \neq 0$, então

$$M_S = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + \mu_1 k}. \quad (3.1.4)$$

Finalmente substituindo (3.1.4) em (3.1.3), temos

$$A = \frac{k [\gamma - \mu_1(\gamma + \mu_2)]}{\gamma (k + \gamma + \mu_2)}.$$

Tomando o parâmetro ecológico Q_0 (ver Maidana e Yang [16]) dado por

$$Q_0 = \frac{\gamma}{\mu_1(\gamma + \mu_2)}, \quad (3.1.5)$$

podemos escrever

$$M_S = \frac{\gamma(1 - Q_0^{-1})}{\gamma + \mu_1 k} := m^* \quad (3.1.6)$$

e

$$A = \frac{k(1 - Q_0^{-1})}{k + \gamma + \mu_2} := a^*. \quad (3.1.7)$$

Assim, o segundo ponto de equilíbrio do sistema (3.1.1) é representado por $P_1 = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$, onde m^* e a^* são dados por (3.1.6) e (3.1.7), respectivamente. Esse ponto de equilíbrio representa uma região onde coexistem mosquitos e humanos, mas está livre da doença.

Caso 2: $I \neq 0$

Observemos que se $H = 0$ pela equação (3.1.1)₄ teríamos $\mu_H = 0$, o que é uma contradição, pois $\mu_H > 0$. Assim, $H \neq 0$ e da mesma equação segue

$$\mu_H - \mu_H H - \beta_2 H M_I = 0,$$

logo

$$M_I = \frac{\mu_H(1 - H)}{\beta_2 H}. \quad (3.1.8)$$

Analisando o segundo membro de (3.1.8), se $H = 1$ então teremos $M_I = 0$. Para esses valores de H e M_I , recaímos em casos anteriormente calculados. Quando $I = 0$ encontraríamos novamente o ponto de equilíbrio P_0 , caso $M_S = 0$, ou P_1 , caso $M_S \neq 0$. Portanto, $H \neq 1$, que implica em $M_I \neq 0$. Assim, substituindo (3.1.8) na equação (3.1.1)₅, como $I \neq 0$, obtemos

$$\mu_H(1 - H) - \sigma I - \mu_H I = 0,$$

de onde

$$H = 1 - \frac{(\sigma + \mu_H) I}{\mu_H}. \quad (3.1.9)$$

Para encontrarmos os valores para M_S e A , utilizaremos as equações (3.1.1)₁, (3.1.1)₂ e (3.1.1)₃. Somando-se as duas primeiras equações, obtemos o seguinte sistema para M e A :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{k} A (1 - M) - \mu_1 M = 0 \\ k (1 - A) M - \mu_2 A - \gamma A = 0 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

O sistema (3.1.10) é equivalente ao sistema (3.1.2), logo sua solução é

$$\begin{aligned} A &= a^*, \\ M &= m^*, \end{aligned}$$

onde a^* e m^* são dados por (3.1.7) e (3.1.6), respectivamente. Como $M = M_S + M_I$ segue que $M_S = m^* - M_I$.

A variável I pode ser calculada pela equação (3.1.1)₂. Substituindo $M_S = m^* - M_I$ na equação, temos

$$-\mu_1 M_I + \beta_1 (m^* - M_I) I = 0. \quad (3.1.11)$$

Multiplicando (3.1.11) por $\beta_2 H$, obtemos

$$-\mu_1 \beta_2 H M_I + \beta_1 (\beta_2 H m^* - \beta_2 H M_I) I = 0. \quad (3.1.12)$$

De (3.1.8) temos a igualdade $\beta_2 H M_I = \mu_H (1 - H)$, substituindo em (3.1.12) segue

$$-\mu_1 \mu_H (1 - H) + \beta_1 (\beta_2 H m^* - \mu_H (1 - H)) I = 0. \quad (3.1.13)$$

De (3.1.9) obtemos a igualdade $\mu_H(1 - H) = (\sigma + \mu_H)I$, substituindo em (3.1.13) temos

$$-\mu_1(\sigma + \mu_H)I + \beta_1(\beta_2 H m^* - (\sigma + \mu_H)I)I = 0. \quad (3.1.14)$$

Isolando a variável I da equação (3.1.14), temos que

$$I = \mu_1 \mu_H \left(\frac{\beta_1 \beta_2 m^*}{\mu_1(\sigma + \mu_H)} - 1 \right) \frac{1}{\beta_1 \beta_2 m^* + \beta_1 \mu_H}.$$

Tomando o número de reprodutividade basal R_0 (ver Maidana e Yang [16]) dado por

$$R_0 = \frac{\beta_1 \beta_2 m^*}{\mu_1(\mu_H + \sigma)}, \quad (3.1.15)$$

temos que

$$I = \frac{\mu_1 \mu_H (R_0 - 1)}{\beta_1 \mu_H + \beta_1 \beta_2 m^*}.$$

Assim, obtemos o ponto de equilíbrio do sistema (3.1.1) quando a doença se encontra em nível endêmico, ou seja, existe a doença na região. Esse ponto de equilíbrio é dado por

$$P_2 = (M_S^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*), \quad (3.1.16)$$

onde

$$\begin{aligned} M_S^* &= m^* - M_I^*, & M_I^* &= \frac{\mu_H(1 - H^*)}{\beta_2 H^*}, & A^* &= a^*, \\ H^* &= 1 - \frac{(\mu_H + \sigma)I^*}{\mu_H}, & I^* &= \frac{\mu_1 \mu_H (R_0 - 1)}{\beta_1 \mu_H + \beta_1 \beta_2 m^*} \end{aligned}$$

com m^* e a^* dados por (3.1.6) e (3.1.7), respectivamente.

3.1.1 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio P_0

Para analisar a estabilidade do sistema (1.0.4) em torno do ponto de equilíbrio $P_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$, façamos a seguinte mudança de variável

$$\widehat{H} = H - 1.$$

Neste novo sistema de coordenadas o ponto de equilíbrio P_0 é dado por $\widehat{P}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ e o sistema (1.0.4) se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_S}{dt} = \frac{\gamma}{k} A (1 - M) - \mu_1 M_S - \beta_1 M_S I \\ \frac{dM_I}{dt} = -\mu_1 M_I + \beta_1 M_S I \\ \frac{dA}{dt} = k (1 - A) M - \mu_2 A - \gamma A \\ \frac{d\widehat{H}}{dt} = \mu_H - \mu_H (\widehat{H} + 1) - \beta_2 (\widehat{H} + 1) M_I \\ \frac{dI}{dt} = \beta_2 (\widehat{H} + 1) M_I - \sigma I - \mu_H I \end{array} \right. \quad (3.1.17)$$

Para obter a linearização do sistema (3.1.17) será utilizado a matriz jacobiana no ponto \widehat{P}_0

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial M_S} & \frac{\partial F_1}{\partial M_I} & \frac{\partial F_1}{\partial A} & \frac{\partial F_1}{\partial \widehat{H}} & \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \frac{\partial F_2}{\partial M_S} & \frac{\partial F_2}{\partial M_I} & \frac{\partial F_2}{\partial A} & \frac{\partial F_2}{\partial \widehat{H}} & \frac{\partial F_2}{\partial I} \\ \frac{\partial F_3}{\partial M_S} & \frac{\partial F_3}{\partial M_I} & \frac{\partial F_3}{\partial A} & \frac{\partial F_3}{\partial \widehat{H}} & \frac{\partial F_3}{\partial I} \\ \frac{\partial F_4}{\partial M_S} & \frac{\partial F_4}{\partial M_I} & \frac{\partial F_4}{\partial A} & \frac{\partial F_4}{\partial \widehat{H}} & \frac{\partial F_4}{\partial I} \\ \frac{\partial F_5}{\partial M_S} & \frac{\partial F_5}{\partial M_I} & \frac{\partial F_5}{\partial A} & \frac{\partial F_5}{\partial \widehat{H}} & \frac{\partial F_5}{\partial I} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\gamma}{k} A (1 - M) - \mu_1 M_S - \beta_1 M_S I, \\ F_2 &= -\mu_1 M_I + \beta_1 M_S I, \\ F_3 &= k (1 - A) M - \mu_2 A - \gamma A, \\ F_4 &= \mu_H - \mu_H (\widehat{H} + 1) - \beta_2 (\widehat{H} + 1) M_I, \\ F_5 &= \beta_2 (\widehat{H} + 1) M_I - \sigma I - \mu_H I. \end{aligned}$$

Para o sistema (3.1.17), temos que a matriz jacobiana calculada no ponto \widehat{P}_0 é

$$J(\widehat{P}_0) = \begin{bmatrix} -\mu_1 & 0 & \frac{\gamma}{k} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ k & k & -\mu_2 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & -\mu_H & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & -\sigma - \mu_H \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

O polinômio característico de (3.1.18) é dado por $p(\lambda) = \det(J - \lambda I_5)$, onde I_5 é a matriz identidade de ordem 5. Assim, temos o seguinte polinômio característico

$$p(\lambda) = -(\mu_1 + \lambda)(\mu_H + \lambda)(\sigma + \mu_H + \lambda)[(\mu_1 + \lambda)(\mu_2 + \gamma + \lambda) - \gamma].$$

Portanto, $p(\lambda) = 0$ se

$$\begin{aligned} -(\mu_1 + \lambda) &= 0 &\Rightarrow \lambda_1 &= -\mu_1 \\ \mu_H + \lambda &= 0 &\Rightarrow \lambda_2 &= -\mu_H \\ \sigma + \mu_H + \lambda &= 0 &\Rightarrow \lambda_3 &= -(\sigma + \mu_H) \end{aligned}$$

ou

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (3.1.19)$$

onde $b = \mu_1 + \mu_2 + \gamma$ e $c = \mu_1\mu_2 + \mu_1\gamma - \gamma = \mu_1(\gamma + \mu_2)(1 - Q_0)$, sendo Q_0 definido por (3.1.5).

Como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, pois os parâmetros μ_1, μ_H, σ são positivos, a análise da estabilidade do sistema (3.1.17) em torno do ponto de equilíbrio \widehat{P}_0 , depende somente do sinal da parte real das raízes de (3.1.19). Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *O ponto de equilíbrio $P_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$ é localmente assintoticamente estável se, e somente se, $Q_0 < 1$, onde Q_0 é definido por (3.1.5).*

Demonstração. Seja $q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, com $a = 1$, $b = \mu_1 + \mu_2 + \gamma$ e $c = \mu_1(\gamma + \mu_2)(1 - Q_0)$. Para o polinômio $q(\lambda)$ possuir raízes com parte real negativa, pela Proposição 2.2.2:

(i) Os coeficientes do polinômio $q(\lambda)$ devem ser positivos;

(ii) Devemos ter $D_1 = \det[b] > 0$ e $D_2 = \det \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & c \end{bmatrix} > 0$.

Para (i), observemos que $a, b > 0$. Para ter $c > 0$ precisamos que

$$\begin{aligned}\mu_1(\gamma + \mu_2)(1 - Q_0) &> 0 \Leftrightarrow \\ (1 - Q_0) &> 0 \Leftrightarrow Q_0 < 1.\end{aligned}$$

Portanto, o item (i) é satisfeito se, e somente se, $Q_0 < 1$.

Para (ii) observamos que o determinante $D_1 > 0$, pois $b > 0$. O determinante D_2 será positivo se

$$bc > 0.$$

Como $b > 0$, devemos ter

$$\begin{aligned}c &> 0 \Leftrightarrow \\ \mu_1(\gamma + \mu_2)(1 - Q_0) &> 0 \Leftrightarrow \\ (1 - Q_0) &> 0 \Leftrightarrow Q_0 < 1.\end{aligned}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável se, e somente se, $Q_0 < 1$.

□

3.1.2 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio P_1

Para analisar a estabilidade do sistema (1.0.4) em torno do ponto de equilíbrio $P_1 = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$, façamos a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned}\widehat{M}_S &= M_S - m^*, \\ \widehat{A} &= A - a^*, \\ \widehat{H} &= H - 1,\end{aligned}$$

sendo m^* e a^* definidos por (3.1.6) e (3.1.7), respectivamente.

Dessa forma, no novo sistema de coordenadas o ponto de equilíbrio P_1 é dado por $\widehat{P}_1 = (0, 0, 0, 0, 0)$ e o sistema (1.0.4) se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\widehat{M}_S}{dt} = \frac{\gamma}{k}(\widehat{A} + a^*)(1 - \widehat{M}_S - M_I - m^*) - \mu_1(\widehat{M}_S + m^*) - \beta_1(\widehat{M}_S + m^*)I \\ \frac{dM_I}{dt} = -\mu_1 M_I + \beta_1(\widehat{M}_S + m^*)I \\ \frac{d\widehat{A}}{dt} = k(1 - \widehat{A} - a^*)(\widehat{M}_S + M_I + m^*) - \mu_2(\widehat{A} + a^*) - \gamma(\widehat{A} + a^*) \\ \frac{d\widehat{H}}{dt} = \mu_H - \mu_H(\widehat{H} + 1) - \beta_2(\widehat{H} + 1)M_I \\ \frac{dI}{dt} = \beta_2(\widehat{H} + 1)M_I - \sigma I - \mu_H I \end{array} \right. \quad (3.1.20)$$

Calculando a matriz jacobiana no ponto \widehat{P}_1 , temos

$$J(\widehat{P}_1) = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma a^*}{k} - \mu_1 & -\frac{\gamma a^*}{k} & \frac{\gamma}{k}(1 - m^*) & 0 & -\beta_1 m^* \\ 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & \beta_1 m^* \\ k(1 - a^*) & k(1 - a^*) & -km^* - \mu_2 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & -\mu_H & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & -\sigma - \mu_H \end{bmatrix} \quad (3.1.21)$$

O polinômio característico de (3.1.21) é dado por:

$$p(\lambda) = (\lambda + \mu_H)p_1(\lambda)p_2(\lambda), \quad (3.1.22)$$

sendo

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c \quad \text{e} \quad p_2(\lambda) = \lambda^2 + e\lambda + f,$$

com

$$\begin{cases} b = km^* + \frac{\gamma a^*}{k} + \gamma + \mu_1 + \mu_2 = \frac{\gamma + k\mu_1}{\gamma + k + \mu_2} + \frac{\gamma^2 + k\gamma + \gamma\mu_2}{\gamma + k\mu_1}, \\ c = km^*\mu_1 + \gamma m^* + \frac{\gamma^2 a^*}{k} + \frac{\gamma a^* \mu_2}{k} + \gamma a^* + \gamma\mu_1 + \mu_1\mu_2 - \gamma = \mu_1(\gamma + \mu_2)(Q_0 - 1), \\ e = \mu_1 + \mu_H + \sigma, \\ f = \mu_1(\sigma + \mu_H) - \beta_1\beta_2 m^* = \mu_1(\sigma + \mu_H)(1 - R_0). \end{cases} \quad (3.1.23)$$

Temos que um autovalor de (3.1.22) é $\lambda = -\mu_H$, que é negativo, pois $\mu_H > 0$. Assim, a análise de estabilidade em torno do ponto \widehat{P}_1 vai depender do sinal da parte real das raízes de $p_1(\lambda)$ e $p_2(\lambda)$. Logo, segue o seguinte teorema:

Teorema 3.1.2. *O ponto de equilíbrio $P_1 = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$ é localmente assintoticamente estável se, e somente se, $Q_0 > 1$ e $R_0 < 1$, onde Q_0 e R_0 são definidos por (3.1.5) e (3.1.15), respectivamente.*

Demonstração. Consideremos os polinômios:

$$q_1(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad \text{e} \quad q_2(\lambda) = d\lambda^2 + e\lambda + f,$$

onde $a = 1$, $d = 1$ e b , c , e , f são dados por (3.1.23).

Para que os polinômios $q_1(\lambda)$ e $q_2(\lambda)$ tenham raízes com parte real negativa, pela Proposição 2.2.2:

- (1) Para o polinômio $q_1(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$
 - (i) Os coeficientes de $q_1(\lambda)$ devem ser positivos;
 - (ii) Devemos ter $D_1 = \det[b] > 0$ e $D_2 = \det \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & c \end{bmatrix} > 0$.

(i) Observemos que $a, b > 0$. Para ter $c > 0$ precisamos que

$$\begin{aligned} \mu_1(\gamma + \mu_2)(Q_0 - 1) &> 0 \Leftrightarrow \\ (Q_0 - 1) &> 0 \Leftrightarrow Q_0 > 1. \end{aligned}$$

Portanto, o item (i) é satisfeito se, e somente se, $Q_0 > 1$.

(ii) Observamos que o determinante $D_1 > 0$, pois $b > 0$. O determinante D_2 será positivo se

$$bc > 0.$$

Como $b > 0$, devemos ter

$$\begin{aligned} c > 0 &\Leftrightarrow \\ \mu_1 (\gamma + \mu_2) (Q_0 - 1) > 0 &\Leftrightarrow \\ (Q_0 - 1) > 0 &\Leftrightarrow Q_0 > 1. \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio $q_1(\lambda)$ terá raízes com parte real negativa se, e somente se, $Q_0 > 1$.

(2) Para o polinômio $q_2(\lambda) = d\lambda^2 + e\lambda + f$

(i) Os coeficientes de $q_2(\lambda)$ devem ser positivos;

(ii) Devemos ter $E_1 = \det[e] > 0$ e $E_2 = \det \begin{bmatrix} e & d \\ 0 & f \end{bmatrix} > 0$.

(i) Observemos que $d, e > 0$. Para ter $f > 0$ precisamos que

$$\begin{aligned} \mu_1 (\sigma + \mu_H) (1 - R_0) > 0 &\Leftrightarrow \\ (1 - R_0) > 0 &\Leftrightarrow R_0 < 1. \end{aligned}$$

Portanto, o item (i) é satisfeito se, e somente se, $R_0 < 1$.

(ii) Observamos que o determinante $E_1 > 0$, pois $e > 0$. O determinante E_2 será positivo se

$$ef > 0.$$

Como $e > 0$, devemos ter

$$\begin{aligned} f > 0 &\Leftrightarrow \\ \mu_1 (\sigma + \mu_H) (1 - R_0) > 0 &\Leftrightarrow \\ (1 - R_0) > 0 &\Leftrightarrow R_0 < 1. \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio $q_2(\lambda)$ terá raízes com parte real negativa se, e somente se, $R_0 < 1$.

De (1) e (2), concluimos que $P_1 = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$ é localmente assintoticamente estável se, e somente se, $Q_0 > 1$ e $R_0 < 1$. □

3.1.3 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio P_2

Para o ponto de equilíbrio $P_2 = (M_S^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$ temos as seguintes mudanças de variável

$$\widehat{M}_S = M_S - M_S^*, \quad \widehat{M}_I = M_I - M_I^*, \quad \widehat{A} = A - A^*,$$

$$\widehat{H} = H - H^*, \quad \widehat{I} = I - I^*.$$

No novo sistema de coordenadas o ponto de equilíbrio P_2 é escrito como $\widehat{P}_2 = (0, 0, 0, 0, 0)$ e com essa mudança de variável o sistema (1.0.4) se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\widehat{M}_S}{dt} = \frac{\gamma}{k}(\widehat{A} + A^*)(1 - \widehat{M}_S - M_S^* - \widehat{M}_I - M_I^*) - \mu_1(\widehat{M}_S + M_S^*) - \beta_1(\widehat{M}_S + M_S^*)(\widehat{I} + I^*) \\ \frac{d\widehat{M}_I}{dt} = -\mu_1(\widehat{M}_I + M_I^*) + \beta_1(\widehat{M}_S + M_S^*)(\widehat{I} + I^*) \\ \frac{d\widehat{A}}{dt} = k(1 - \widehat{A} - A^*)(\widehat{M}_S + M_S^* + \widehat{M}_I + M_I^*) - \mu_2(\widehat{A} + A^*) - \gamma(\widehat{A} + A^*) \\ \frac{d\widehat{H}}{dt} = \mu_H - \mu_H(\widehat{H} + H^*) - \beta_2(\widehat{H} + H^*)(\widehat{M}_I + M_I^*) \\ \frac{d\widehat{I}}{dt} = \beta_2(\widehat{H} + H^*)(\widehat{M}_I + M_I^*) - \sigma(\widehat{I} + I^*) - \mu_H(\widehat{I} + I^*) \end{array} \right.$$

A matriz jacobiana calculada no ponto \widehat{P}_2 é

$$J(\widehat{P}_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma A^*}{k} - \mu_1 - \beta_1 I^* & -\frac{\gamma A^*}{k} & \frac{\gamma}{k}(1 - M_S^* - M_I^*) & 0 & -\beta_1 M_S^* \\ \beta_1 I^* & -\mu_1 & 0 & 0 & \beta_1 M_S^* \\ k(1 - A^*) & k(1 - A^*) & -k(M_S^* + M_I^*) - \mu_2 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 H^* & 0 & -\mu_H - \beta_2 M_I^* & 0 \\ 0 & \beta_2 H^* & 0 & \beta_2 M_I^* & -\sigma - \mu_H \end{bmatrix} \quad (3.1.24)$$

O polinômio característico da matriz jacobiano acima é de grau 5, e neste caso o estudo dos sinais da parte real dos autovalores analiticamente é de dificuldade elevada. Assim, devido a essa complexidade a análise de estabilidade do sistema (1.0.4) em torno do ponto de equilíbrio endêmico $P_2 = (M_S^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$ será feita em alguns casos específicos utilizando simulações numéricas. Também vamos calcular os autovalores para casos particulares nos quais se conhece os coeficientes da matriz. Este estudo será feito no próximo capítulo.

Capítulo 4

Resultados Numéricos e Simulações

Neste capítulo apresentaremos algumas simulações numéricas do sistema (1.0.4), com o objetivo de estudar qualitativamente soluções do sistema próximas do ponto de equilíbrio $P_2 = (M_S^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$ dado por (3.1.16), isto é, no nível endêmico em algumas situações. Para aproximar numericamente as soluções do sistema foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, disponível nos pacotes de métodos numéricos do software *Maple*. As simulações foram divididas em dois casos: ambientes com temperaturas de 30°C e de 20°C. Os parâmetros utilizados para resolver o sistema (1.0.4) foram obtidos de Maidana e Yang [16]. Foram utilizados valores iniciais que nos permitisse realizar análises de algumas situações envolvendo as populações.

4.1 Análise da propagação da dengue nas proximidades de P_2 em ambiente com a temperatura de 30°C

Nas tabelas a seguir serão apresentados os parâmetros obtidos de Maidana e Yang [16], correspondentes à uma temperatura de 30°C. Na Tabela 4.1 são apresentados os parâmetros entomológicos do *Aedes aegypti* e na Tabela 4.2 são apresentados os parâmetros relativo a transmissão da doença da dengue.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Período de maturação da forma aquática para o alado	$\bar{\gamma}^{-1}$	5 dias
Taxa de oviposição	\bar{r}	10 dias ⁻¹
Capacidade da forma alada	k_1	25 indivíduos/km ²
Capacidade da forma aquática	k_2	100 indivíduos/km ²
Taxa de mortalidade da forma alada	$\bar{\mu}_1^{-1}$	35 dias
Taxa de mortalidade da forma aquática	$\bar{\mu}_2^{-1}$	18 dias

Tabela 4.1: Parâmetros para o mosquito *Aedes aegypti* à temperatura de 30°C.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Taxa de transmissão humano infectado - mosquito suscetível	$\bar{\beta}_1$	$0.0033 \text{ km}^2/\text{dia}$
Taxa de transmissão humano suscetível - mosquito infectado	$\bar{\beta}_2$	$0.0025 \text{ km}^2/\text{dia}$
Expectativa de vida em humanos em período infeccioso	$\bar{\mu}_H^{-1}$	60 anos
Período de infecção	$\bar{\sigma}^{-1}$	7 dias

Tabela 4.2: Parâmetros relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 30°C.

Para as simulações numéricas realizadas foram utilizados valores adimensionais, calculados pelas igualdades (1.0.3) e com referência nas Tabelas 4.1 e 4.2. A população humana total \bar{N} foi considerada como em Maidana e Yang [16] que é $\bar{N} = 150 \text{ indivíduos}/\text{km}^2$, relativo à densidade populacional do estado de São Paulo. Assim, obtemos os seguintes parâmetros adimensionais, com relação aos mosquitos e à transmissão da doença, representados nas Tabelas 4.3 e 4.4, respectivamente:

Parâmetro	Símbolo	Valor
Período de maturação da forma aquática para o alado	γ	0.02
Capacidade de suporte	k	0.25
Taxa de mortalidade da forma alada	μ_1	0.002857
Taxa de mortalidade da forma aquática	μ_2	0.005555

Tabela 4.3: Parâmetros adimensionais para o mosquito *Aedes aegypti* à temperatura de 30°C.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Taxa de transmissão humano infectado - mosquito suscetível	β_1	0.0495
Taxa de transmissão humano suscetível - mosquito infectado	β_2	0.00625
Expectativa de vida em humanos em período infeccioso	μ_H	0.462962×10^{-5}
Período de infecção	σ	0.0142857

Tabela 4.4: Parâmetros adimensionais relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 30°C.

As simulações numéricas serão feitas para avaliarmos o comportamento das populações de humanos e mosquitos em torno do ponto de equilíbrio endêmico $P_2 = (M_S^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$ dado por (3.1.16). Ao calcularmos o ponto de equilíbrio com os parâmetros das Tabelas 4.3 e 4.4 encontramos $P_2 = (0.961994, 0.004632, 0.903947, 0.137845, 0.000279)$. Estamos interessados em verificar se em longo prazo as populações de humanos e mosquitos se aproximam desse ponto.

Inicialmente, faremos a simulação numérica para o sistema (1.0.4) corresponde ao caso em que temos uma população de mosquitos infectados em uma população humana totalmente suscetível e uma pequena população de mosquitos ainda na fase aquática. Para esse caso as condições iniciais

tomadas são $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$. Utilizando os valores das Tabelas 4.3 e 4.4, temos as seguintes situações gráficas do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

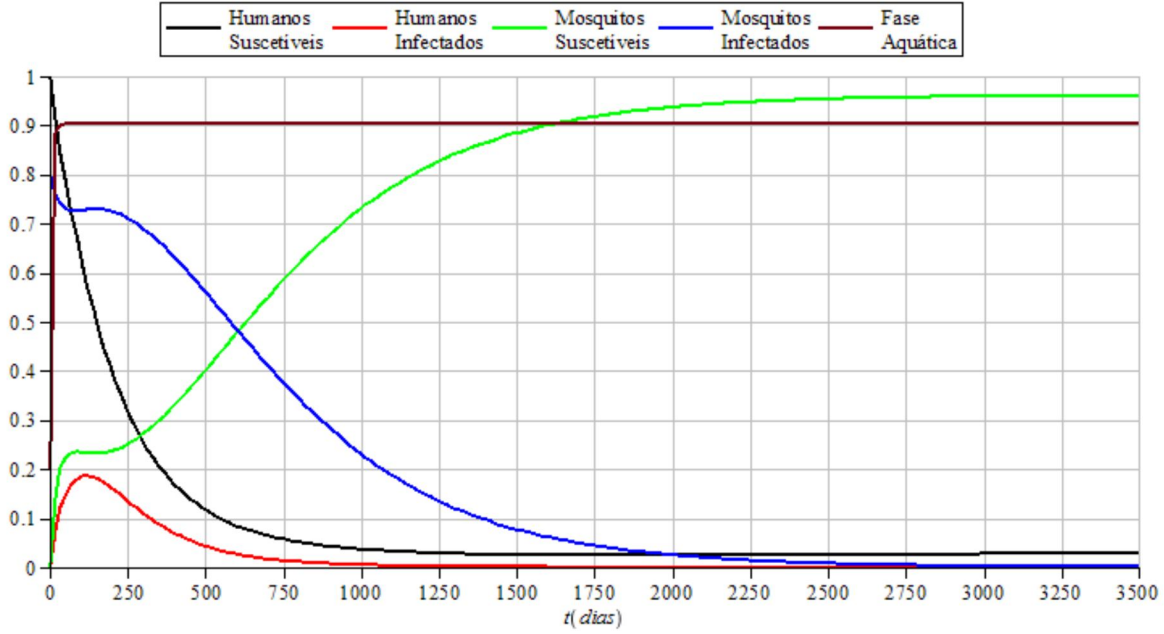


Figura 4.1: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

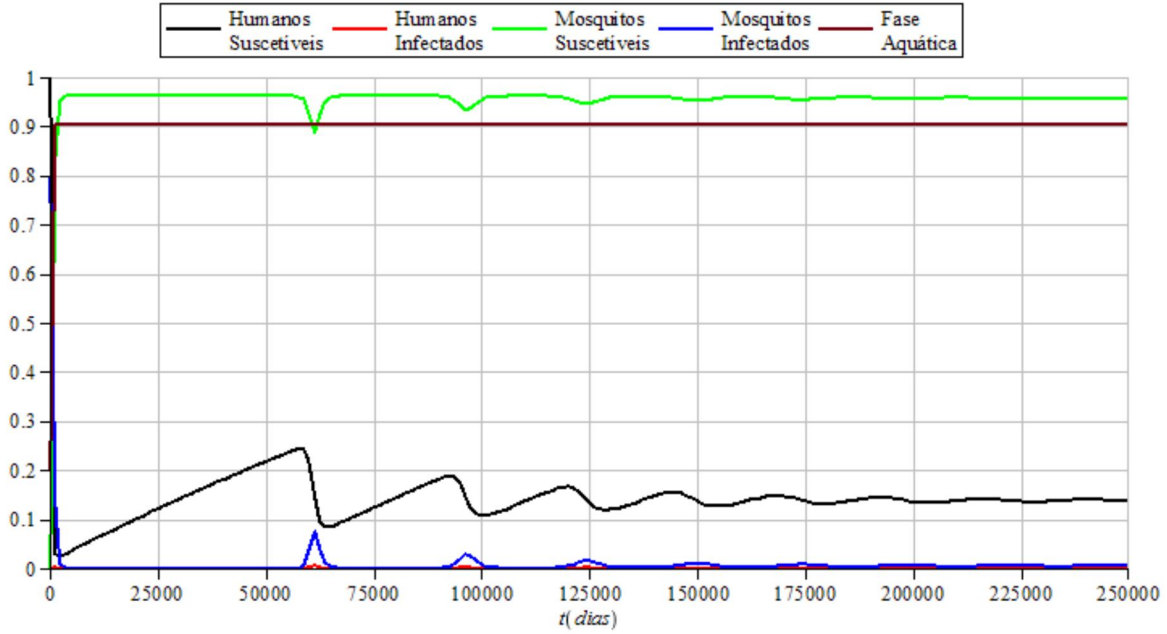


Figura 4.2: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Observando a Figura 4.1, temos que a população humana suscetível decresce rapidamente quando temos uma grande população de mosquitos infectados. Em consequência disso, temos uma propagação rápida da doença, onde a população humana infectada cresce rapidamente atingindo um maior número de infectados no intervalo de tempo $t \in [0, 250]$ e após esse intervalo começa a decrescer. Verifica-se também que o surgimento de mosquitos suscetíveis deve ter ocorrido pelo amadurecimento dos mosquitos que se encontravam na fase aquática e passaram para fase alada. Com o passar do tempo as populações começam a dar indícios de estabilidade, porém, a população humana suscetível parece se estabilizar em um valor diferente do que foi calculado em P_2 . Como a população humana leva mais tempo para estabilizar, aumentamos o tempo de simulação a fim de verificar sua estabilidade, mostrado na Figura 4.2, e observa-se que as populações de humanos e mosquitos apresentam comportamentos oscilatórios com o decorrer do tempo, mas tendem a se estabilizar em torno do ponto endêmico P_2 . Podemos concluir intuitivamente que os valores se aproximam de P_2 , logo, o ponto de equilíbrio endêmico para essa simulação parece ser assintoticamente estável.

Na segunda simulação numérica para o sistema (1.0.4) consideramos como condição inicial uma pequena quantidade de humanos infectados em relação aos humanos suscetíveis. Para os mosquitos foram consideradas presença inicial de populações de suscetíveis e fase aquática e inicialmente não consideramos a presença de mosquitos infectados. Assim, utilizamos as seguintes condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$. Os valores dos parâmetros

são os das Tabelas 4.3 e 4.4. Logo, temos as seguintes situações gráficas do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

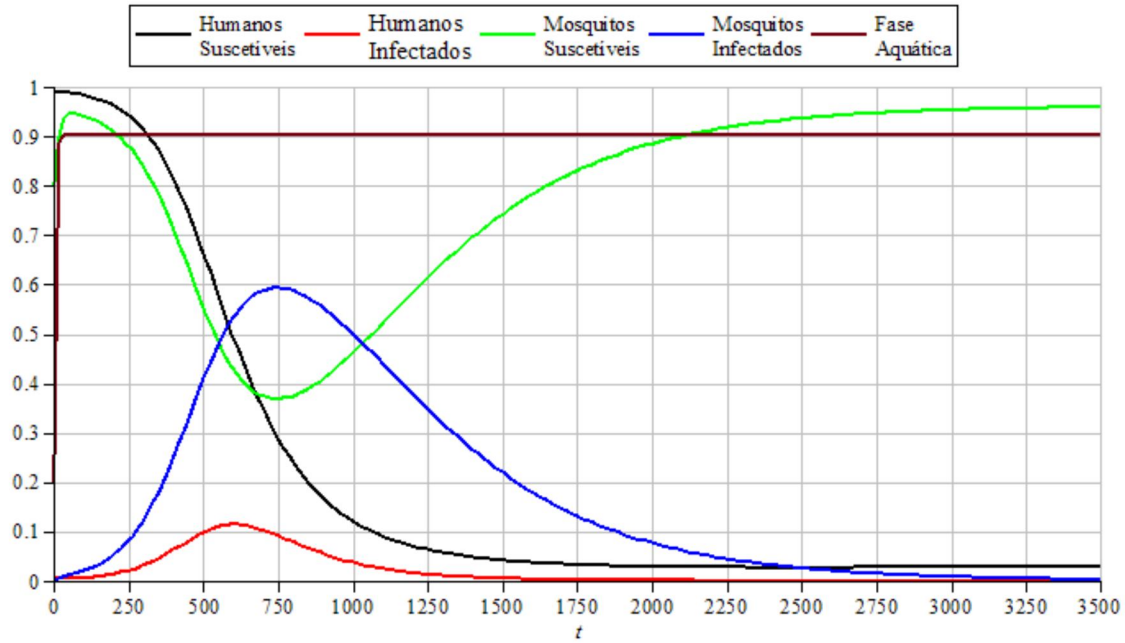


Figura 4.3: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

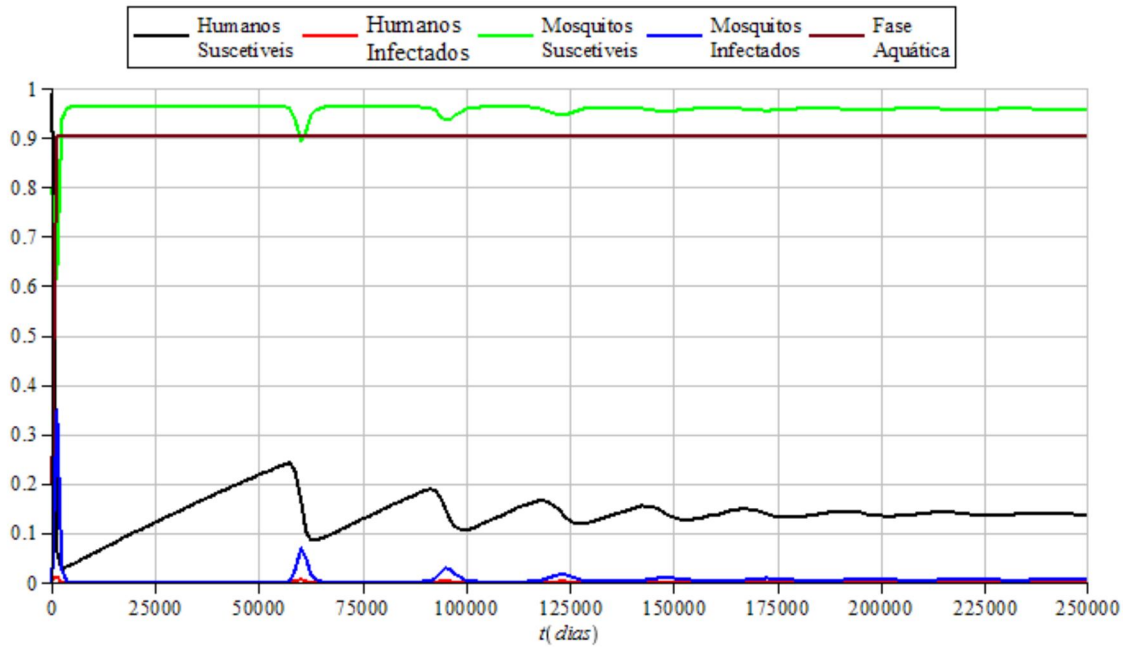


Figura 4.4: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Na Figura 4.3 notamos que inicialmente, mesmo não tendo mosquitos infectados, o possível encontro da população de mosquitos suscetíveis com a pequena quantidade de humanos infectados, faz com que os mosquitos contraiam o vírus, tornando-se infectados. Com o aumento do número de mosquitos infectados temos um aumento no número de humanos infectados, ambos atingindo um maior valor no intervalo $t \in [500, 1000]$ e o número de mosquitos suscetíveis diminui, atingindo menor valor no mesmo intervalo de tempo. Decorrente dessa situação, o número de humanos suscetíveis vai diminuindo com o tempo por estarem contraindo a doença. Novamente as populações apresentam indícios de estabilidade, porém, a população de humanos suscetíveis parece não se estabilizar para o valor $H = 0.137845$. Aumentando o tempo da simulação, observamos na Figura 4.4 que as populações mais uma vez apresentam oscilações com o decorrer do tempo, mas podemos perceber intuitivamente que vão se aproximando dos valores de P_2 . Assim, o ponto de equilíbrio endêmico para essa simulação é aparentemente assintoticamente estável.

Para próxima simulação numérica para o sistema (1.0.4), aumentamos a condição inicial para humanos infectados e consideramos os mesmos valores da simulação anterior para a população de mosquitos. Portanto, para esse caso as condições iniciais são $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$. Novamente utilizando os valores das Tabelas 4.3 e 4.4, temos as seguintes situações gráficas do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

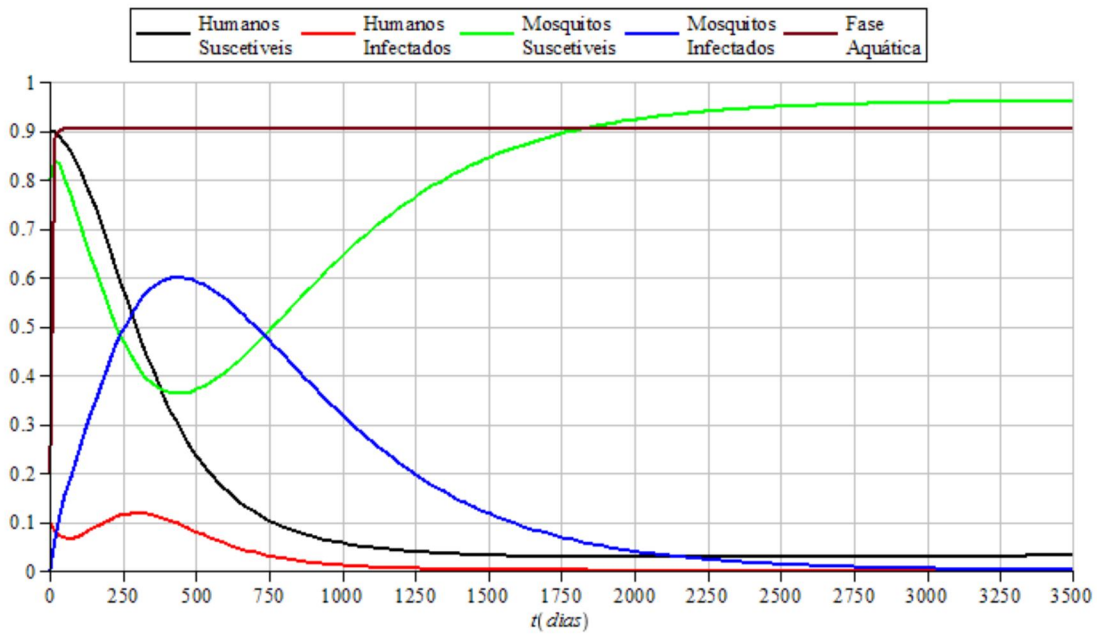


Figura 4.5: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

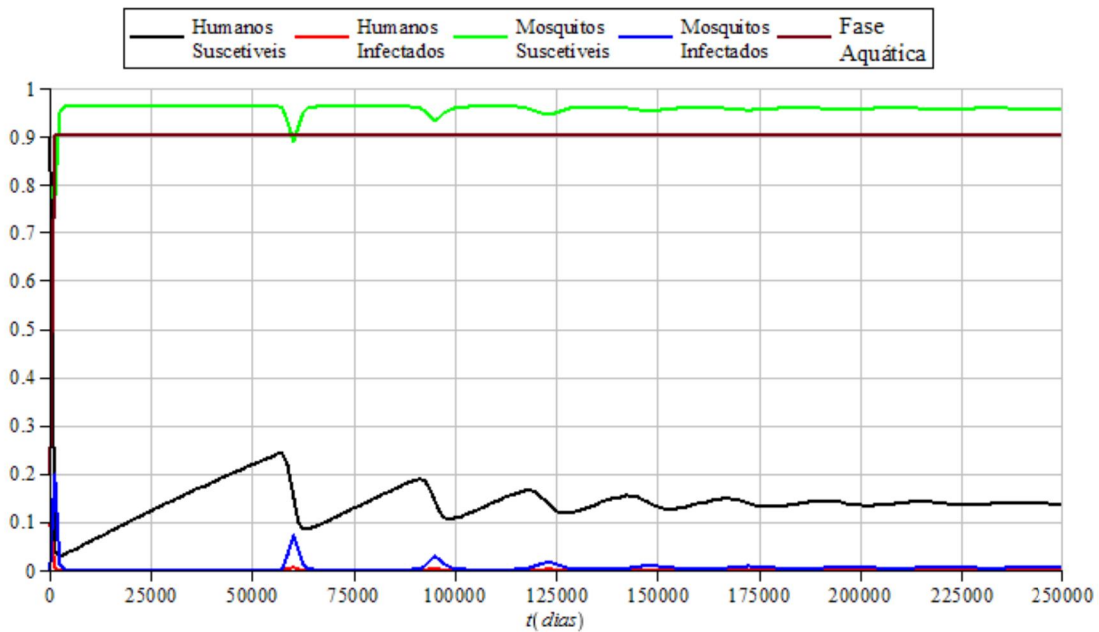


Figura 4.6: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Na Figura 4.5 percebemos que aumentando o número de humanos infectados as populações tendem a se estabilizarem mais rápido se comparado ao caso anterior. Podemos ver na Figura 4.6 que todas as populações se aproximam dos valores de P_2 . Portanto, intuitivamente podemos dizer que o ponto de equilíbrio P_2 aparenta ser assintoticamente estável.

Para a última simulação numérica, consideramos que há inicialmente a presença de todas as populações, isto é, mosquitos suscetíveis, mosquitos infetados, fase aquática, humanos suscetíveis e humanos infectados. Nesse caso com os valores das Tabelas 4.3 e 4.4 e condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$, temos a seguinte situação gráfica do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

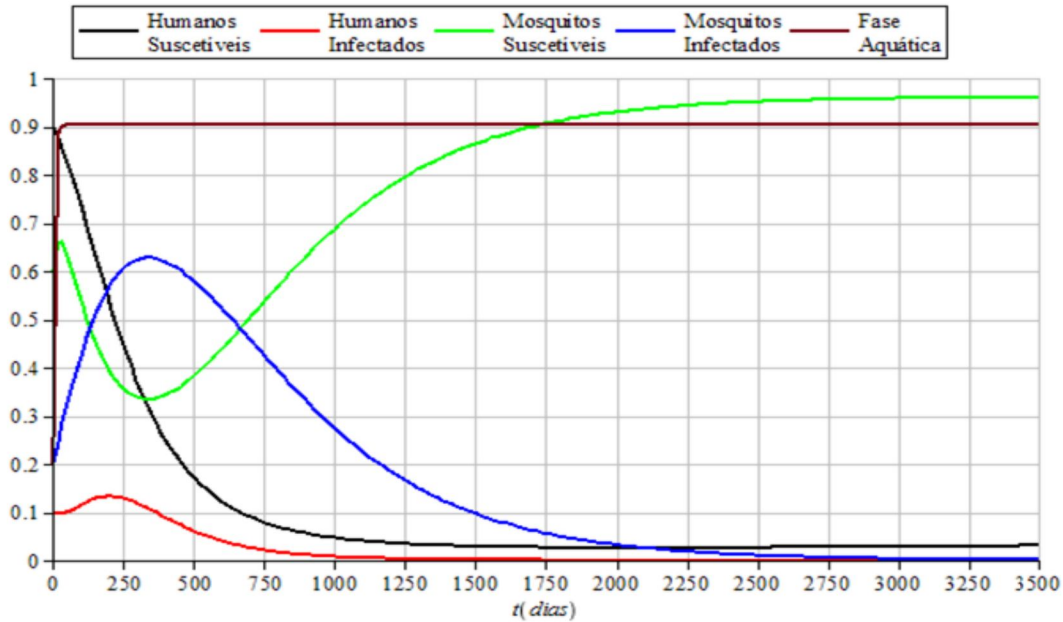


Figura 4.7: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

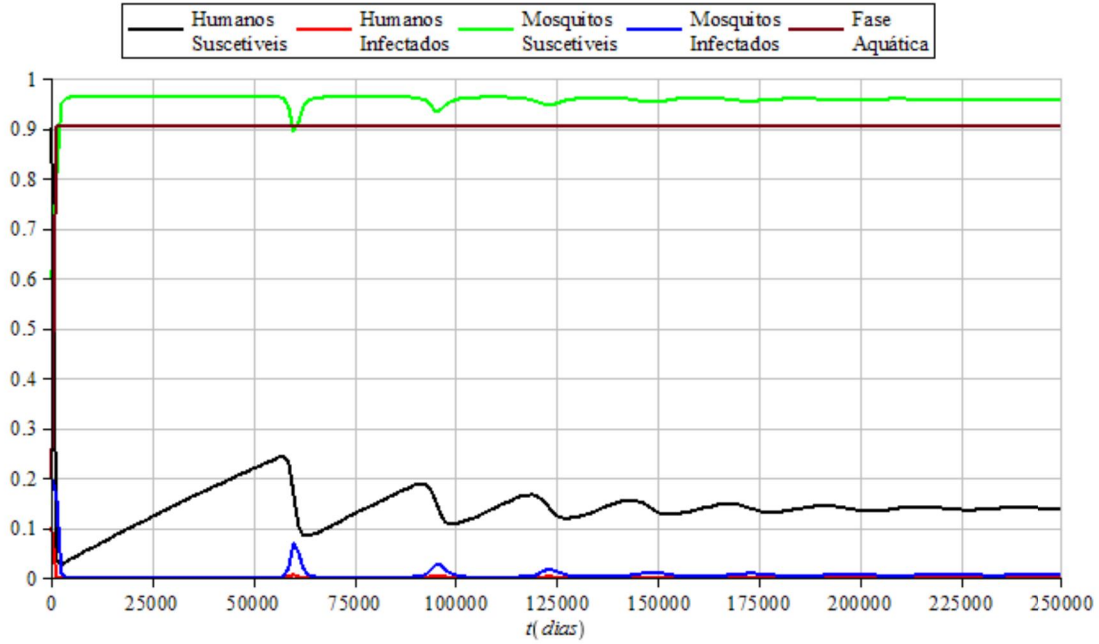


Figura 4.8: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 30°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Através da Figura 4.7 foi possível perceber que com a presença inicial de todas as populações rapidamente temos a propagação da doença. Nesta mesma figura podemos ver que as populações de mosquitos e humanos infectados já apresentam indícios de estabilidade nas proximidades dos valores calculados em P_2 e para a população de humanos suscetíveis esse comportamento é visto na Figura 4.8. Assim, intuitivamente concluímos que o ponto de equilíbrio P_2 parece ser assintoticamente estável.

Ainda que possamos perceber pelas simulações numéricas que o sistema (1.0.4) tende a se estabilizar em torno do ponto de equilíbrio P_2 , vamos calcular computacionalmente os autovalores associados a matriz jacobiana (3.1.24) utilizando os parâmetros das Tabelas 4.3 e 4.4. Assim, temos que a matriz jacobiana (3.1.24) é

$$J(\widehat{P}_2) = \begin{bmatrix} -0.0751866 & -0.0723158 & 0.0030404 & 0 & -0.0473893 \\ 0.0000138 & -0.002857 & 0 & 0 & 0.0473893 \\ 0.024013 & 0.024013 & -0.2660535 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0008615 & 0 & -0.0000335 & 0 \\ 0 & 0.0008615 & 0 & 0.0000289 & -0.0142903 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Os autovalores associados a matriz (4.1.1) são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.2664352 \\ \lambda_2 &= -0.0747910 \\ \lambda_3 &= -0.0000205 + 0.0002622i \\ \lambda_4 &= -0.0000205 - 0.0002622i \\ \lambda_5 &= -0.0171535\end{aligned}$$

Observemos que todos os autovalores acima possuem a parte real negativa. Portanto, de acordo com o Teorema 2.2.1 podemos concluir que para os parâmetros das Tabelas 4.3 e 4.4 o sistema (1.0.4) é assintoticamente estável em torno do ponto de equilíbrio

$$P_2 = (0.961994, 0.004632, 0.903947, 0.137845, 0.000279).$$

4.2 Análise da propagação da dengue nas proximidades de P_2 em ambiente com a temperatura de 20°C

Nas tabelas a seguir serão apresentados os parâmetros obtidos de Maidana e Yang [16] correspondente à temperatura de 20°C. Na Tabela 4.5 são apresentados os parâmetros entomológicos do *Aedes aegypti* e na Tabela 4.6 são apresentados os parâmetros relativo a transmissão da doença da dengue.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Período de maturação da forma aquática para o alado	$\bar{\gamma}^{-1}$	13.51 <i>dias</i>
Taxa de oviposição	\bar{r}	3.97 <i>dias</i> ⁻¹
Capacidade da forma alada	k_1	25 <i>indivíduos/km</i> ²
Capacidade da forma aquática	k_2	100 <i>indivíduos/km</i> ²
Taxa de mortalidade da forma alada	$\bar{\mu}_1^{-1}$	27 <i>dias</i>
Taxa de mortalidade da forma aquática	$\bar{\mu}_2^{-1}$	34.5 <i>dias</i>

Tabela 4.5: Parâmetros para o mosquito *Aedes aegypti* à temperatura de 20°C.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Taxa de transmissão humano infectado - mosquito suscetível	$\bar{\beta}_1$	0.0021 <i>km</i> ² / <i>dia</i>
Taxa de transmissão humano suscetível - mosquito infectado	$\bar{\beta}_2$	0.0015 <i>km</i> ² / <i>dia</i>
Expectativa de vida em humanos em período infeccioso	$\bar{\mu}_H^{-1}$	60 <i>anos</i>
Período de infecção	$\bar{\sigma}^{-1}$	7 <i>dias</i>

Tabela 4.6: Parâmetros relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 20°C.

Da mesma forma como na Seção 4.1 para as simulações numéricas realizadas, foram utilizados valores adimensionais calculados pelas igualdades (1.0.3), mas com referência nas Tabelas 4.5 e 4.6. Assim, obtemos os seguintes parâmetros adimensionais, com relação aos mosquitos e à transmissão da doença, representados nas Tabelas 4.7 e 4.8, respectivamente:

Parâmetro	Símbolo	Valor
Período de maturação da forma aquática para o alado	γ	0.018645
Capacidade de suporte	k	0.25
Taxa de mortalidade da forma alada	μ_1	0.0093292
Taxa de mortalidade da forma aquática	μ_2	0.0073011

Tabela 4.7: Parâmetros adimensionais para o mosquito *Aedes aegypti* à temperatura de 20°C.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Taxa de transmissão humano infectado - mosquito suscetível	β_1	0.079345
Taxa de transmissão humano suscetível - mosquito infectado	β_2	0.009446
Expectativa de vida em humanos em período infeccioso	μ_H	0.462962×10^{-5}
Período de infecção	σ	0.0142857

Tabela 4.8: Parâmetros adimensionais relativos a transmissão da doença da dengue à temperatura de 20°C.

Ao calcularmos o ponto de equilíbrio com os parâmetros das Tabelas 4.7 e 4.8 encontramos $P_2 = (0.875357, 0.001921, 0.894212, 0.203204, 0.000258)$. Com as simulações numéricas queremos verificar se em longo prazo as populações de humanos e mosquitos se aproximam desse ponto.

A primeira simulação numérica para o sistema (1.0.4) corresponde ao caso em que a população humana é totalmente suscetível e na população de mosquitos temos inicialmente somente mosquitos infectados e mosquitos ainda na fase aquática. Logo, as condições iniciais são $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$, $I(0) = 0$ e com os parâmetros das Tabelas 4.7 e 4.8 as representações gráficas correspondente ao comportamento das populações de humanos e mosquitos é:

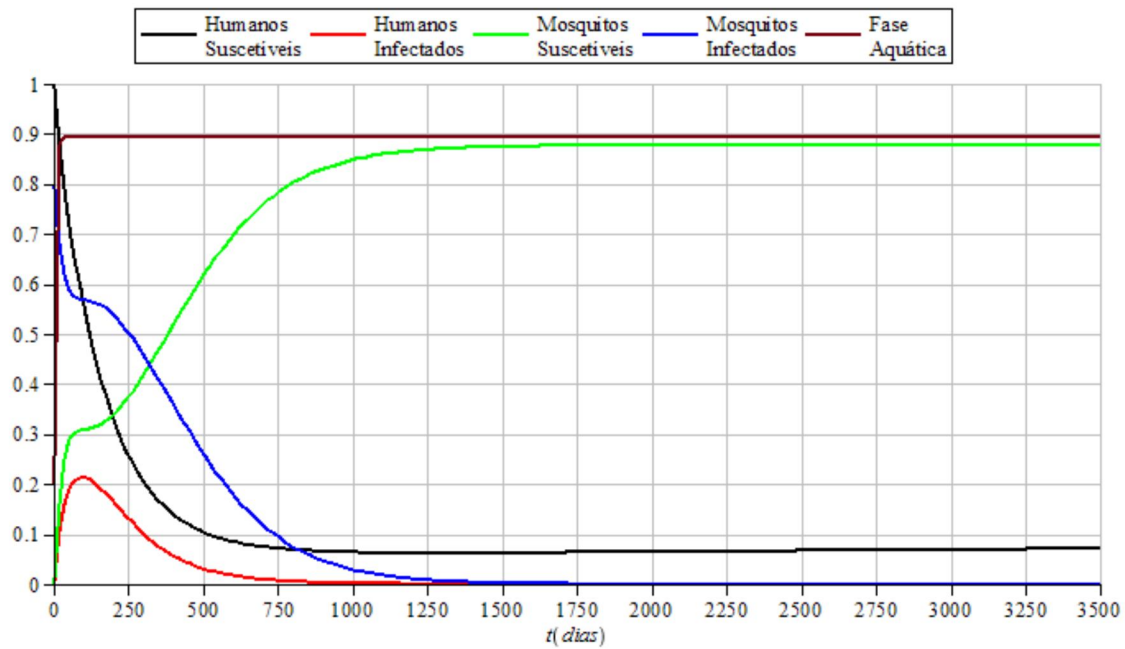


Figura 4.9: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

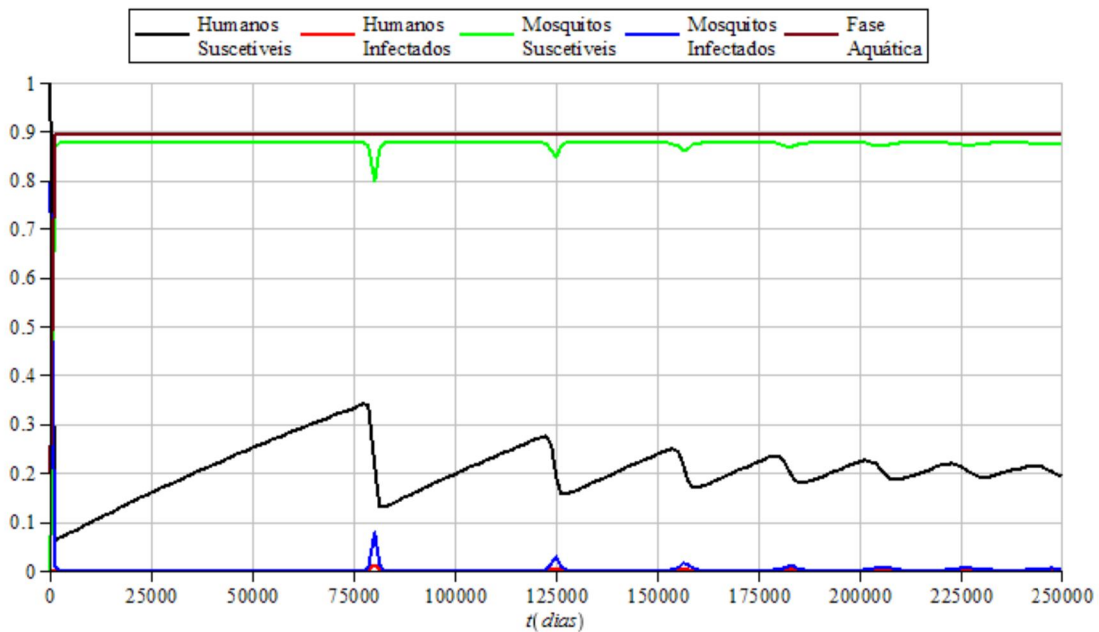


Figura 4.10: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0$, $M_I(0) = 0.8$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 1$ e $I(0) = 0$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Podemos observar na Figura 4.9 uma redução rápida na população de mosquitos infectados, por outro lado observa-se um crescimento nas populações de humanos infectados e mosquitos suscetíveis. A população de humanos infectados atinge um valor máximo no intervalo de tempo $t \in [0, 250]$ e depois começa a decrescer. Com exceção das populações de mosquitos suscetíveis e fase aquática que só apresentam crescimento no decorrer do tempo, as outras populações envolvidas apresentam decréscimo. Percebe-se que as populações de mosquitos e humanos infectados apresentam uma tendência a se estabilizarem em torno de valores calculados em P_2 e na Figura 4.10 podemos ver que a população de humanos suscetíveis se aproximam do valor calculado em P_2 . Assim, o ponto de equilíbrio P_2 parece ser assintoticamente estável.

Para segunda simulação numérica consideramos inicialmente a existência de uma pequena quantidade de humanos infectados em relação aos humanos suscetíveis. Também consideramos a população de mosquitos suscetíveis e na fase aquática, mas sem a presença de mosquitos infectados. Logo, com as seguintes condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ e os parâmetros das Tabelas 4.7 e 4.8 temos as seguintes representações gráficas do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

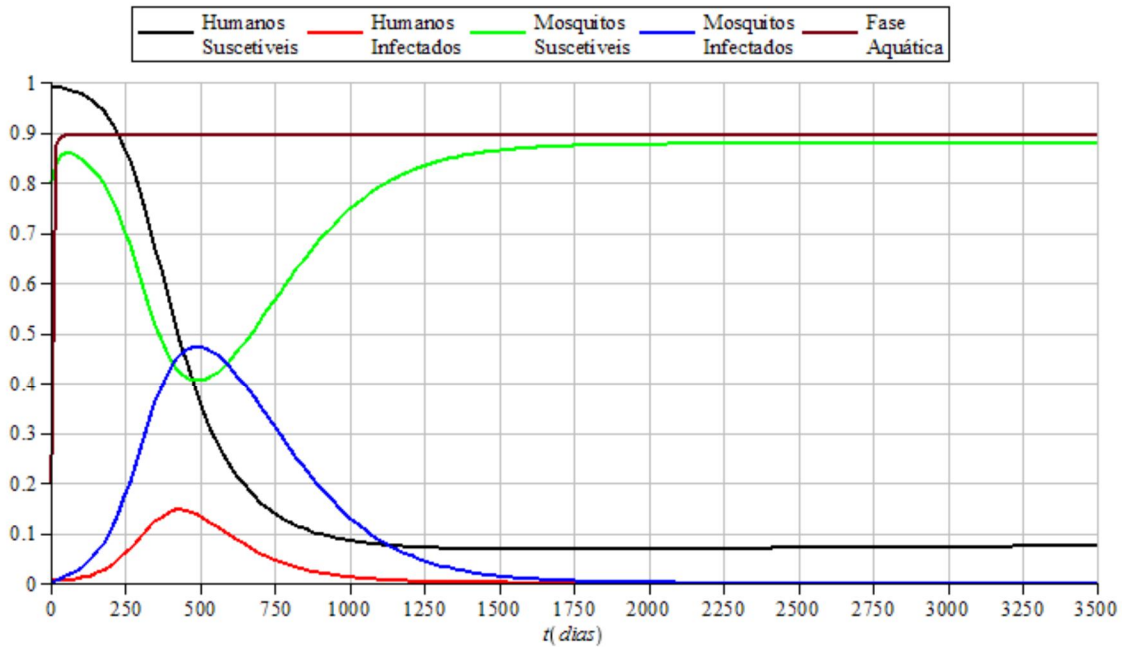


Figura 4.11: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

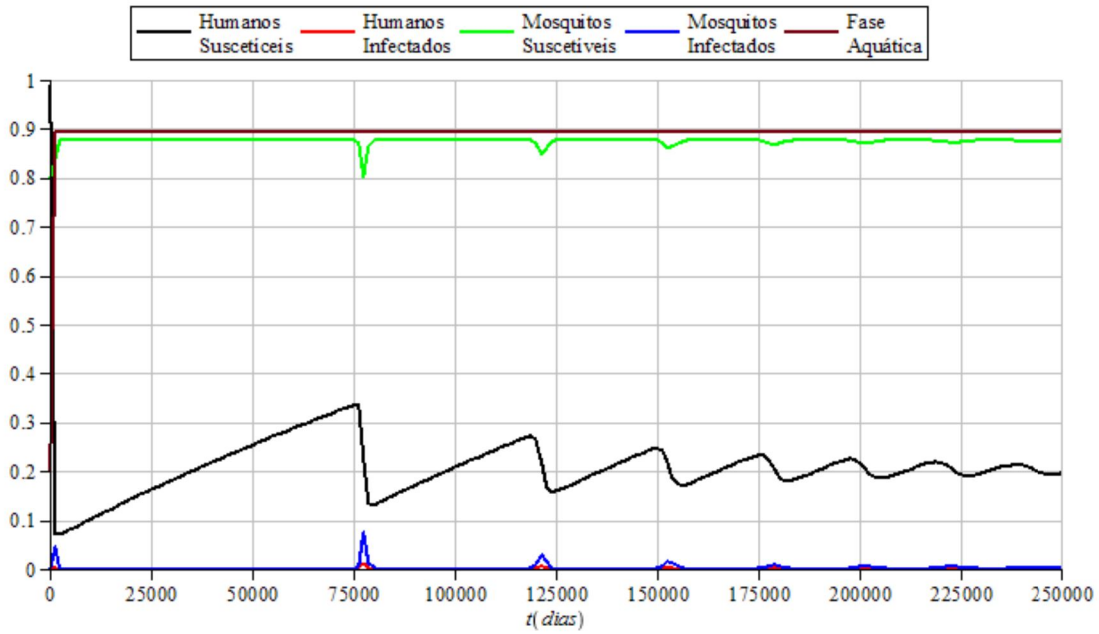


Figura 4.12: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.99$ e $I(0) = 0.006$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Na Figura 4.11 podemos ver que a população humana suscetível contrai a doença tornando-se humanos infectados de forma mais lenta que no caso anterior. No intervalo de tempo $t \in [250, 500]$ as populações de humanos e mosquitos infectados apresentam maior valor e no mesmo intervalo a população de mosquitos suscetíveis apresenta menor valor. Na Figura 4.12 podemos ver novamente que as populações apresentam indícios de estabilidade com o decorrer do tempo, se aproximando dos valores calculados para P_2 . Portanto, intuitivamente percebemos que o ponto de equilíbrio P_2 aparenta ser assintoticamente estável.

Na terceira simulação numérica permanecemos com as condições iniciais da simulação anterior para as populações de mosquitos. Com relação a população de humanos aumentamos a quantidade de infectados e reduzimos a quantidade de suscetíveis. Assim, as condições iniciais são $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$, $I(0) = 0.1$ e com os parâmetros das Tabelas 4.7 e 4.8 temos as seguintes representações gráficas do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

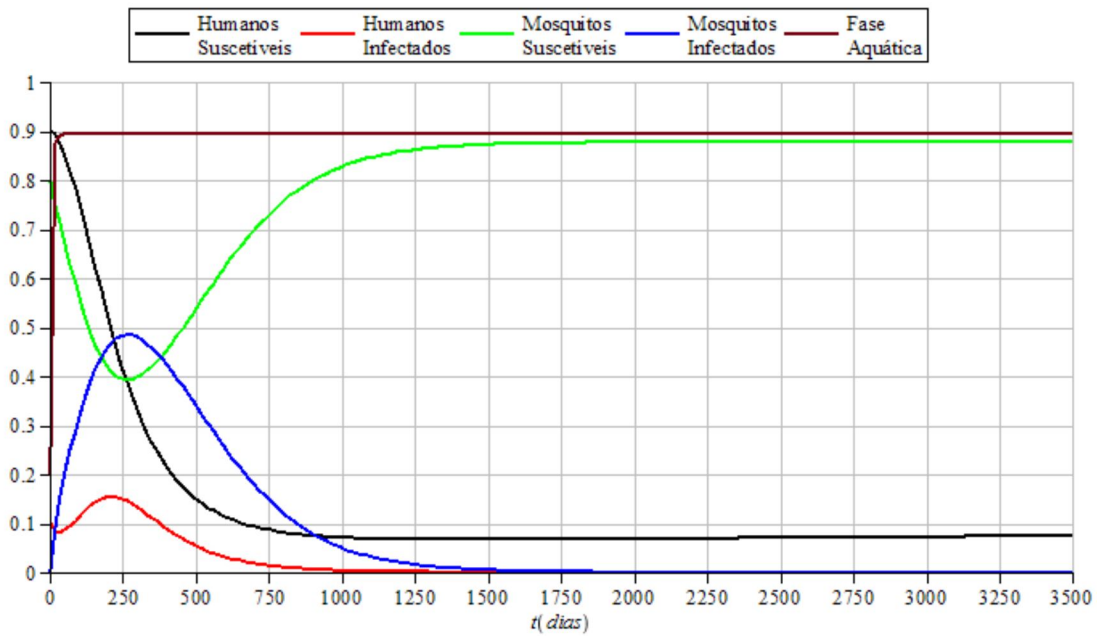


Figura 4.13: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

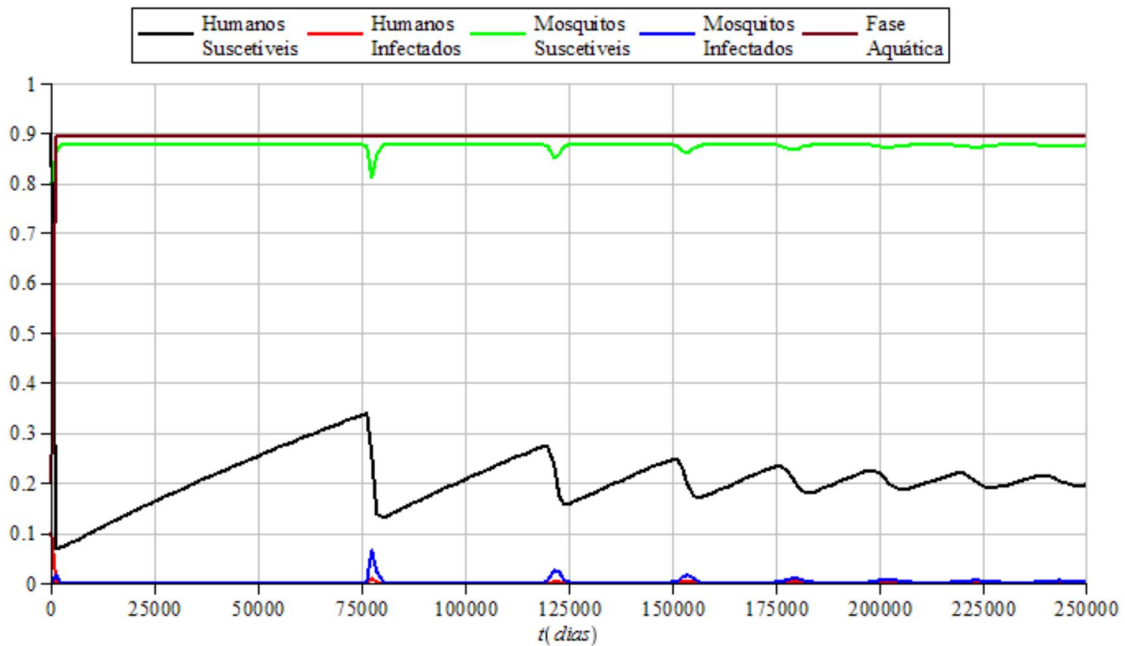


Figura 4.14: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.8$, $M_I(0) = 0$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Observamos na Figura 4.13 que com o acréscimo na quantidade de humanos infectados, as populações tendem a se estabilizarem mais rapidamente que no caso anterior. Na Figura 4.14 podemos ver que aparentemente as mesmas se aproximam dos valores de P_2 . Assim, podemos dizer intuitivamente que P_2 parece ser assintoticamente estável.

Na última simulação numérica foi considerado inicialmente a presença de todas as populações, isto é, mosquitos suscetíveis, mosquitos infectados, fase aquática, humanos suscetíveis e humanos infectados. Logo, com as condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$, $I(0) = 0.1$ e os parâmetros das Tabelas 4.3 e 4.4, temos a seguinte situação gráfica do comportamento das populações de humanos e mosquitos:

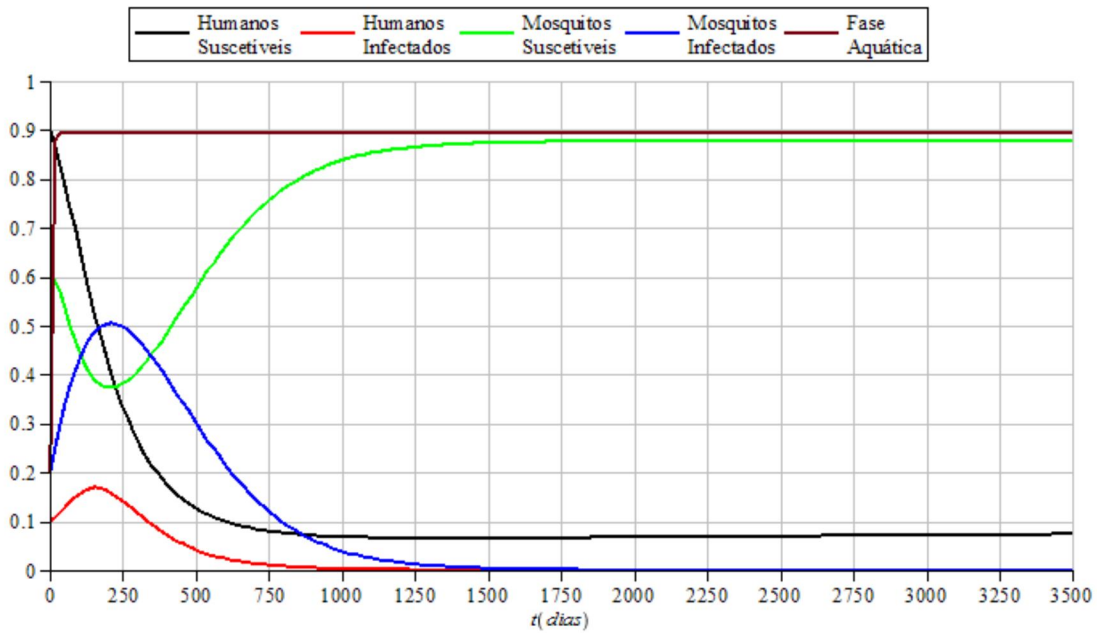


Figura 4.15: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 3500]$.

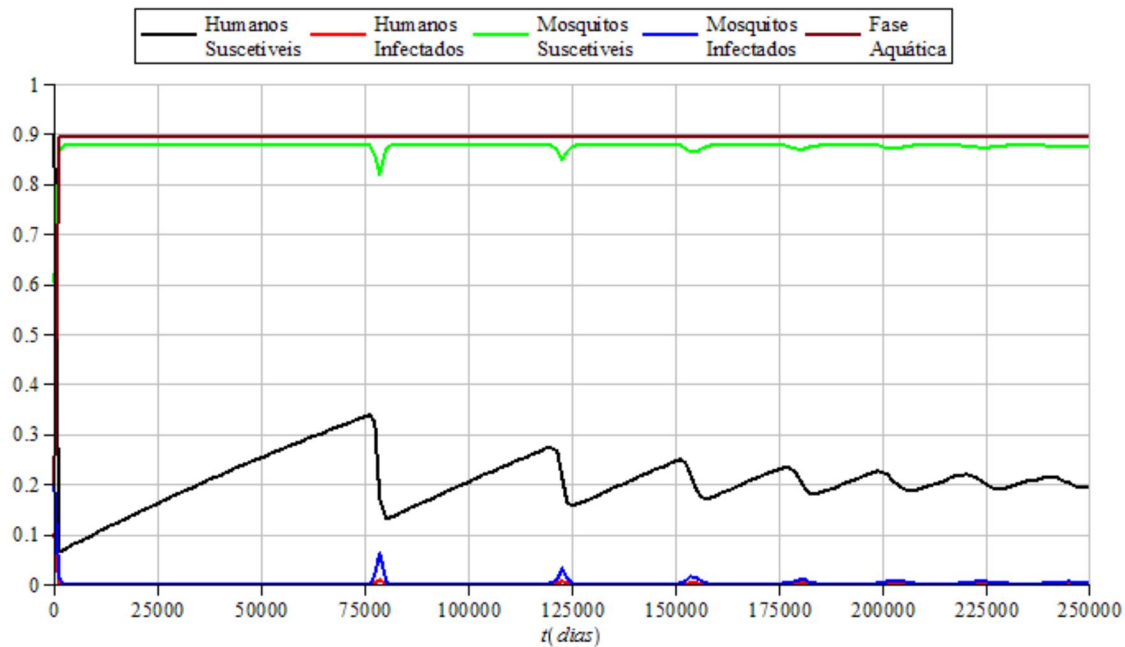


Figura 4.16: Comportamento das populações de humanos e mosquitos à temperatura de 20°C com condições iniciais $M_S(0) = 0.6$, $M_I(0) = 0.2$, $A(0) = 0.2$, $H(0) = 0.9$ e $I(0) = 0.1$ no intervalo de tempo $[0, 250000]$.

Na Figura 4.15 observamos que a disseminação da doença acontece mais rapidamente quando temos inicialmente a presença de todas as populações. A população de humanos infectados e de mosquitos infectados atingem valor máximo no intervalo de tempo $t \in [0, 250]$, no mesmo intervalo de tempo temos um valor mínimo para a população de mosquitos suscetíveis. Na Figura 4.16 percebe-se que aparentemente as populações vão se aproximando dos valores de P_2 e, com isso, podemos intuitivamente concluir que o ponto de equilíbrio P_2 é assintoticamente estável.

Podemos perceber pelas simulações numéricas que o sistema (1.0.4) aparentemente tende a se estabilizar em torno do ponto de equilíbrio P_2 . Entretanto, vamos calcular computacionalmente os autovalores associados a matriz jacobiana (3.1.24) para que tenhamos mais argumentos e possamos realizar algumas conclusões. Dessa forma, utilizando os parâmetros das Tabelas 4.7 e 4.8, temos

que a matriz jacobiana (3.1.24) é

$$J(\widehat{P}_2) = \begin{bmatrix} -0.07604 & -0.06669 & 0.0091525 & 0 & -0.0694552 \\ 0.0000204 & -0.0093292 & 0 & 0 & 0.0694552 \\ 0.0264469 & 0.0264469 & -0.2452658 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0019194 & 0 & -0.0000227 & 0 \\ 0 & 0.0019194 & 0 & 0.0000181 & -0.0142903 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Os autovalores associados a matriz (4.2.1) são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.2466841 \\ \lambda_2 &= -0.0746012 \\ \lambda_3 &= -0.0000154 + 0.000319i \\ \lambda_4 &= -0.0000154 - 0.000319i \\ \lambda_5 &= -0.0236316 \end{aligned}$$

Pode-se verificar que todos os autovalores acima possuem a parte real negativa. Assim, de acordo com o Teorema 2.2.1, podemos concluir que para os parâmetros das Tabelas 4.7 e 4.8 o sistema (1.0.4) é assintoticamente estável em torno do ponto de equilíbrio

$$P_2 = (0.875357, 0.001921, 0.894212, 0.203204, 0.000258).$$

4.3 Análise dos pontos P_0 e P_1 na temperatura de 30°C e de 20°C

Nas seções anteriores vimos que o ponto P_2 é assintoticamente estável para ambientes a temperaturas de 30°C e 20°C nas condições de Maidana e Yang [16]. Vamos aqui analisar os pontos P_0 e P_1 nas mesmas condições.

Na Tabela 4.9 temos os valores do parâmetro ecológico Q_0 e da reprodutibilidade basal R_0 para as temperaturas de 30°C e 20°C.

Parâmetros	30°C	20°C
Q_0	273.93	77.03
R_0	7.29	4.93

Tabela 4.9: Valores de Q_0 e R_0 para as temperaturas de 30°C e 20°C.

Da Tabela 4.9 e do Teorema 3.1.1 temos que o ponto de equilíbrio P_0 não é assintoticamente estável. Portanto, o ponto P_0 pode ser estável ou instável. Podemos fazer essa verificação calculando computacionalmente os autovalores associados a matriz jacobiana (3.1.18) para os parâmetros nas temperaturas de 30°C e 20°C e utilizar o Teorema 2.2.1 para classificar o tipo de estabilidade.

Os autovalores associados a matriz (3.1.18) para temperatura de 30°C são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.12767 \\ \lambda_2 &= -0.15608 \\ \lambda_3 &= -0.00000462962 \\ \lambda_4 &= -0.0028567 \\ \lambda_5 &= -0.0142903\end{aligned}$$

Podemos verificar que existe um autovalor acima com a parte real positiva. Assim, de acordo com o Teorema 2.2.1, concluímos que para os parâmetros na temperatura de 30°C o ponto de equilíbrio P_0 é instável.

Os autovalores associados a matriz (3.1.18) para temperatura de 20°C são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.1191615 \\ \lambda_2 &= -0.154436 \\ \lambda_3 &= -0.00000462962 \\ \lambda_4 &= -0.0093292 \\ \lambda_5 &= -0.0142903\end{aligned}$$

Como no caso anterior existe um autovalor acima com a parte real positiva. Assim, de acordo com o Teorema 2.2.1, concluímos que para os parâmetros na temperatura de 20°C o ponto de equilíbrio P_0 é instável.

Verifica-se da mesma forma pela Tabela 4.9 e pelo Teorema 3.1.2 que o ponto de equilíbrio P_1 não é assintoticamente estável. Assim, o ponto P_1 pode ser estável ou instável. Podemos fazer essa verificação pelo cálculo computacional dos autovalores associados a matriz jacobiana (3.1.21) para os parâmetros nas temperaturas de 30°C e 20°C e utilizar o Teorema 2.2.1 para classificar o tipo de estabilidade.

Os autovalores associados a matriz (3.1.21) para temperatura de 30°C são

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0.0747911 \\
\lambda_2 &= -0.2664353 \\
\lambda_3 &= -0.0267477 \\
\lambda_4 &= 0.00960042 \\
\lambda_5 &= -0.00000462962
\end{aligned}$$

Verifica-se que existe um autovalor acima com a parte real positiva. Assim, de acordo com o Teorema 2.2.1, concluímos que para os parâmetros na temperatura de 30°C o ponto de equilíbrio P_1 é instável.

Os autovalores associados a matriz (3.1.21) para temperatura de 20°C são

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0.0746012 \\
\lambda_2 &= -0.2466841 \\
\lambda_3 &= -0.03757151 \\
\lambda_4 &= 0.01395198 \\
\lambda_5 &= -0.00000462962
\end{aligned}$$

Observamos que existe um autovalor acima com a parte real positiva. Assim, de acordo com o Teorema 2.2.1, concluímos que para os parâmetros na temperatura de 20°C o ponto de equilíbrio P_1 é instável.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho foi analisado um modelo matemático de disseminação da doença da dengue proposto por Maidana e Yang [16], no qual a movimentação da população de mosquitos e humanos não foram consideradas. Para realizar esta análise foram encontrados os pontos de equilíbrio do sistema que descreve o comportamento das populações. São eles: $P_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $P_1 = (m^*, 0, a^*, 1, 0)$ e $P_2 = (M_S^*, M_I^*, A^*, H^*, I^*)$.

O ponto P_0 representa uma região livres de mosquitos e da doença, logo a população humana é totalmente suscetível. Para esse ponto verificamos por meio do Teorema 3.1.1 que o mesmo é localmente assintoticamente estável se, e somente se, o parâmetro ecológico Q_0 definido por (3.1.5) assumir valores menores que 1, ou seja, $Q_0 < 1$. Além disso, temos que esse ponto é instável para as temperaturas de 30°C e 20°C.

O ponto P_1 representa uma região que coexistem as populações de mosquitos e humanos, mas não há presença da doença. Verificamos pelo Teorema (3.1.2) que a estabilidade do sistema (1.0.4) em torno desse ponto depende do parâmetro ecológico Q_0 definido por (3.1.5) e do número de reprodução basal R_0 definido por (3.1.15). Concluímos que P_1 é localmente assintoticamente estável se, e somente se, $Q_0 > 1$ e $R_0 < 1$ e para as temperaturas de 30°C e 20°C temos que o mesmo é instável.

O ponto P_2 representa uma região em nível endêmico, ou seja, há presença da doença. Foram realizadas simulações numéricas para observarmos o comportamento das populações em torno desse ponto para algumas situações iniciais. As simulações foram realizadas considerando ambientes de temperaturas de 30°C e de 20°C. Para essas temperaturas obtivemos que P_2 é assintoticamente estável nas condições das tabelas do artigo de Maidana e Yang [16], onde também podemos concluir que as temperaturas de 30°C e 20°C são favoráveis para o ciclo de vida do mosquito *Aedes aegypti* e consequentemente para a disseminação da doença.

Referências Bibliográficas

- [1] T. M. Apostol. *Calculus*. 2^a ed. Vol. 2. Editorial Reverte, 1996.
- [2] W. E. Boyce e R. C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [3] M. Braun. *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] A. G. da Costa et al. “Dengue: aspectos epidemiológicos e o primeiro surto ocorrido na região do Médio Solimões, Coari, Estado do Amazonas, no período de 2008 a 2009”. Em: *Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical* 44 (2011), pp. 471–474.
- [5] D. K. Dimitrov e F. R. Lucas. *Problema de Routh-Hurwitz*. 2008. URL: http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/xxxi_cnmac/PDF/154.pdf.
- [6] L. Esteva e C. Vargas. “Analysis of a dengue disease transmission model”. Em: *Mathematical Biosciences*. 150 (1998), pp. 131–151.
- [7] L. Esteva e C. Vargas. “Coexistence of different serotypes of dengue virus”. Em: *J. Math. Biol.* 46 (2003), pp. 31–47.
- [8] C. P. Ferreira e H. M. Yang. “Estudo dinâmico da população de mosquitos *Aedes Aegypti*”. Em: *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* 2 (2003), pp. 187–196.
- [9] D. G. de Figueiredo e A. F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [10] M. P. Gerhardt. “Modelo de transmissão da dengue com competição larval uniforme”. Diss. de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.
- [11] A. O. Guilarde. “Fatores prognósticos clínico-epidemiológicos de Febre Hemorrágica do Dengue no município de Goiânia”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Goiás, 2007.
- [12] J. K. Hale. *Theory of functional-differential equations*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [13] S. H. Lee. “Famílias de Polinômios Estáveis: Teoremas de Routh-Hurwitz e Kharitonov”. Diss. de mestrado. Universidade de São Paulo, 2008.
- [14] E. L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [15] N. A. Maidana e H. M. Yang. “A Spatial Model to Describe the Dengue Propagation”. Em: *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* 8.1 (2007), pp. 83–92.

- [16] N. A. Maidana e H. M. Yang. “Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves”. Em: *Mathematical Biosciences* 215 (2008), pp. 64–77.
- [17] E. E. Marquesone. “Modelo Matemático para o Estudo de Doenças de Transmissão Indireta via Tabanus Tanamus (Mutuca)”. Diss. de mestrado. Universidade Federal do ABC, 2011.
- [18] G. Meinsma. “Elementary proof of the Routh–Hurwitz test”. Em: *Systems Control Lett.* 215 (1995), 237–242.
- [19] J. da S. Nunes. “Dengue: Etiologia, patogênese e suas implicações a nível global”. Diss. de mestrado. Universidade da Beira Interior, 2011.
- [20] L. Perko. *Differential equations and dynamical system*. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2000.
- [21] L. R. Piovesan. “Modelagem SEIR discreto espacialmente estruturado para dispersão da dengue”. Diss. de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- [22] L. C. A. Pires. “Estudos de modelos epidemiológicos determinísticos básicos que incluem transmissão vertical”. Diss. de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.
- [23] N. B. Santana. “Influência das Medidas Educacionais no Controle de Epidemias via Modelo Matemático SIER”. Diss. de mestrado. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2012.
- [24] R. J. Santos. *Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias*. 2010. URL: <http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/existunic.pdf>.
- [25] S. O. da Silva. “Modelagem de propagação da dengue com o uso de equações diferenciais e modelos tipo SEIR”. Diss. de mestrado. Universidade Federal de Lavras, 2012.
- [26] A. L. O. Soares. “Modelagem Alternativa para Sistemas Epidemiológicos”. Diss. de mestrado. Universidade Federal do ABC, 2010.
- [27] G. R. de Souza. “Critério de Hurwitz e estabilidade de equilíbrios”. Diss. de mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- [28] L. T. Takahashi. “Modelos Matemáticos de Epidemiologia com Vetores: Simulação da Propagação Urbana e Geográfica da Dengue”. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- [29] P. L. Tauil. “Urbanização e ecologia do dengue”. Em: *Cad. Saúde Pública, Rio de Janeiro* 17 (2001), pp. 99–102.
- [30] H. M. Yang. “Epidemiologia da Transmissão da Dengue”. Em: *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* 4 (2003), pp. 387–396.
- [31] H. M. Yang et al. “Dinâmica da transmissão da dengue com dados entomológicos temperatura–dependentes”. Em: *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* 1 (2007), pp. 159–168.
- [32] H. M. Yang et al. “Assessing the effects of temperature on the population of *Aedes aegypti*, the vector of dengue”. Em: *Epidemiol. Infect.* 137 (2009), 1188–1202.

Apêndice A

Demonstrações

A.1 Seção A.1

Nesta seção serão demonstrados as Proposições 2.1.2, 2.1.3 e 2.1.4.

Para provar as Proposições 2.1.3 e 2.1.4 será utilizado o caso particular do Teorema de Existência e Unicidade enunciado abaixo.

Teorema A.1.1. (*Teorema de Existência e Unicidade*) Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

Suponha que $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ sejam funções contínuas num intervalo $I = [\alpha, \beta]$ contendo t_0 . Então, o problema (A.1.1) possui única solução definida no intervalo I .

Demonstração do Teorema A.1.1. Ver demonstração em Apostol [1]. □

Demonstração da Proposição 2.1.2. Seja o sistema de equações lineares homogêneo

$$X' = AX, \quad (\text{A.1.2})$$

onde \mathcal{S} é o conjunto de todas as suas soluções.

Precisamos mostrar que

- (i) $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
- (ii) Se $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então $aX_1 + bX_2 \in \mathcal{S}$.

Observemos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pois o sistema (A.1.2) sempre admite a solução trivial $X \equiv \vec{0}$. Logo, o item (i) é satisfeito.

Para mostrar o item (ii), observemos que se $X = aX_1 + bX_2$, então

$$X' = aX_1' + bX_2'.$$

Como X_1 e X_2 são soluções do sistema (A.1.2), segue que

$$X' = a(AX_1) + b(AX_2) = A(aX_1 + bX_2) = AX.$$

Portanto, o item (ii) é satisfeito. Logo, temos que o conjunto \mathcal{S} de todas as soluções do sistema (A.1.2) é um espaço vetorial. □

Demonstração da Proposição 2.1.3. Queremos mostrar que uma base de \mathcal{S} contém n elementos. Para cada $j = 1, 2, \dots, n$, seja ϕ_j a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(0) = e_j \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

onde e_1, e_2, \dots, e_n são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n . Observemos que pelo Teorema de existência e unicidade A.1.1, temos que a solução $\phi_j(t)$ de (A.1.3) existe e é única para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Para verificar que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ são linearmente independentes em \mathcal{S} , consideremos c_1, c_2, \dots, c_n constantes tais que

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_n\phi_n = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

onde 0 é o vetor nulo em \mathcal{S} . Precisamos mostrar que a única solução da equação (A.1.4) é a solução trivial, isto é, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Avaliando ambos os membros da equação em $t = 0$, temos

$$c_1\phi_1(0) + c_2\phi_2(0) + \dots + c_n\phi_n(0) = 0,$$

ou seja,

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n = 0.$$

Sabemos que e_1, e_2, \dots, e_n são linearmente independentes, pois constituem a base canônica de \mathbb{R}^n , assim $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Portanto, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ são vetores linearmente independentes em \mathcal{S} .

Agora devemos mostrar que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ geram \mathcal{S} . Para isso, temos que mostrar que qualquer vetor $Y(t)$ em \mathcal{S} , isto é, qualquer solução $Y(t)$ de $X'(t) = A(t)X(t)$, pode ser escrito como combinação linear de $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$. Tomemos Y em \mathcal{S} arbitrário, e seja

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} := Y(0).$$

Definindo a função

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t)$$

temos que $\phi(t)$ satisfaz $X'(t) = A(t)X(t)$ uma vez que é combinação linear de soluções do sistema linear homogêneo (A.1.3). Além disso,

$$\phi(0) = c_1\phi_1(0) + c_2\phi_2(0) + \dots + c_n\phi_n(0) = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n = Y(0)$$

Observamos que $Y(t)$ e $\phi(t)$ satisfazem $X'(t) = A(t)X(t)$ e que $Y(t)$ e $\phi(t)$ assumem o mesmo valor em $t = 0$. Logo, pelo Teorema da existência e unicidade A.1.1, temos que

$$Y(t) \equiv \phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t)$$

Assim $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ geram \mathcal{S} , e portanto, $\dim \mathcal{S} = n$. □

Demonstração da Proposição 2.1.4. Sejam X_1, X_2, \dots, X_k soluções do sistema (2.1.4).

Primeiramente mostremos que se $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_k(t_0)$ para algum t_0 são linearmente independentes, então X_1, X_2, \dots, X_k são soluções linearmente independentes do sistema (2.1.4).

Para isso, suponhamos que X_1, X_2, \dots, X_k são soluções linearmente dependentes do sistema. Então, existem constantes c_1, c_2, \dots, c_k , não todas nulas, tal que

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k = 0,$$

para todo t no intervalo de existência de solução do sistema (2.1.4).

Como a última igualdade vale para todo t , em particular vale para $t = t_0$, isto é,

$$c_1X_1(t_0) + c_2X_2(t_0) + \dots + c_kX_k(t_0) = 0,$$

o que contradiz o fato de $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_k(t_0)$ serem linearmente independentes. Portanto, X_1, X_2, \dots, X_k são soluções linearmente independentes.

A implicação contrária é trivial, isto é, X_1, X_2, \dots, X_k são soluções linearmente independentes do sistema (2.1.4), então $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_k(t_0)$ serão linearmente independentes. □