

# Leques de Viscosidade e $\delta$ -Choques em Problemas de Riemann


Grey Ercole <sup>45</sup>

Novembro de 1996

**Leques de Viscosidade e  $\delta$ -Choques  
em Problemas de Riemann**

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Grey Ercole e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de novembro de 1996.

  
Prof. Dr. Milton da Costa, Lopes Filho

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
T/Unicamp	
Er 24L	
V.	Ex.
TOMBO BC/	29542
PROC.	281197
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	08/02/97
N.º CPD	C.M.00097194-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP

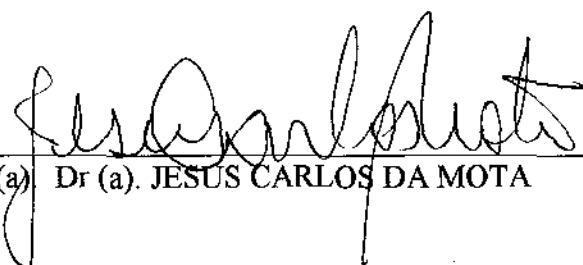
Er24L Ercole, Grey  
Leques de viscosidade e  $\delta$ -choques em problemas  
Riemann / Grey Ercole. -- Campinas, SP : [s.n.], 1996.

Orientador: Milton da Costa Lopes Filho.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica.

1. Lei da conservação (Física). 2. Equações  
diferenciais parciais. 3. Riemann-Hilbert, Problemas de.  
I. Lopes Filho, Milton da Costa. II. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 28 de novembro de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof (a) Dr (a). JESUS CARLOS DA MOTA



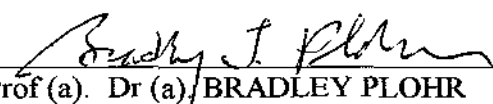
---

Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



---

Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES



---

Prof (a). Dr (a). BRADLEY PLOHR



---

Prof (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO

## **Agradecimentos**

A Deus, por estar comigo em todos os momentos, erguendo-me, caminhando comigo e mostrando-me a melhor direção.

A Flávia, minha querida esposa, pelo amor, compreensão e carinho com que suportou todas as dificuldades para me oferecer condições de iniciar, desenvolver e concluir este trabalho.

Aos meus filhos, Rafael e Lorena, pela alegria e motivação que me transmitiram.

A Diva, minha super-mãe, por sua fé e seu amor, sem os quais eu não chegaria até aqui.

Aos meus irmãos, Glênio e Gianna, pelo apoio.

A Milton Lopes, meu orientador, pela paciência, disposição e capacidade com que me conduziu neste trabalho.

A Helena Lopes e a Frederico Furtado, professores do IMECC, pela ajuda nos cursos e o constante incentivo.

Aos amigos Helder, João Carlos Medrado (estes também pelas sugestões e troca de idéias), Cláudia Medrado, Cláudio, Beth, Adonai, Claudião, Maurílio, Ryuichi, Paulo Antônio, Helvécio, Paulo Mondek e Satuf, pelo companheirismo e solidariedade.

Ao PICD/CAPES pelo apoio financeiro.

Aos colegas do DMat/UFMG, que me permitiram realizar o doutorado.

A Deus, novamente, pela minha vida e pela vida das pessoas acima.

## Resumo

Neste trabalho consideramos um problema de Riemann  $2 \times 2$  estritamente hiperbólico cujas curvas de Hugoniot por determinados estados à esquerda  $(u_l, v_l)$  apresentam assíntotas verticais. Este fato permite a existência de regiões do plano de fase constituídas de estados à direita  $(u_r, v_r)$  que não podem ser conectados a  $(u_l, v_l)$  por ondas clássicas. Para estes pares de estados consideramos  $\delta$ -choques (soluções distribucionais envolvendo deltas de Dirac) como soluções do problema de Riemann. Desta forma obtemos uma única solução global na classe das ondas compostas e  $\delta$ -choques satisfazendo uma condição de entropia. Recuperamos esta solução, inclusive o  $\delta$ -choque, como limite fraco de soluções auto-similares (*leques de viscosidade*) de problemas regularizados associados ao problema de Riemann.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Leques de Viscosidade</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Solução do Problema de Riemann</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Leques de Viscosidade Escalares</b>	<b>44</b>
4.1	Existência e Unicidade . . . . .	45
4.2	Estimativas . . . . .	48
4.3	Convergência . . . . .	51
4.3.1	O caso $u_l < u_r$ . . . . .	51
4.3.2	O caso $u_l > u_r$ . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Existência e Unicidade dos Leques de Viscosidade</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Convergência dos Leques de Viscosidade</b>	<b>75</b>
6.1	O caso $u_l > u_r$ . . . . .	75
6.2	O caso $u_l < u_r$ . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>98</b>

# 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho consideramos o problema de Riemann  $2 \times 2$  :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ v_t + [vg(u)]_x = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l) ; & x < 0, \\ (u_r, v_r) ; & x > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde as funções  $f = f(u)$  e  $g = g(u)$  são suaves e satisfazem:

$$f''(u), g'(u) > 0 ; u \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

$$f'(u) < g(u) ; u \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Escrevendo o sistema acima na forma quasilinear:

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad U = (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

onde:

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} f'(u) & 0 \\ vg'(u) & g(u) \end{bmatrix},$$

observamos que os autovalores (velocidades características) de  $A$  são as seguintes funções apenas da variável dependente  $u$  :  $\lambda_1 = f'(u)$  e  $\lambda_2 = g(u)$ . Portanto, de (1.3) segue que o sistema em (1.1) é estritamente hiperbólico (autovalores reais e distintos) com  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Também verificamos que:

$$R_1(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ \left( \frac{vg'(u)}{f'(u) - g(u)} \right) \end{bmatrix} \text{ e } R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

são autovetores à direita relativos aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. Além disso,

$$\nabla \lambda_1 \cdot R_1 = f'' > 0, \quad \nabla \lambda_2 \cdot R_2 \equiv 0.$$

Isto é, a família característica 1 é genuinamente não linear e a família característica 2 é linearmente degenerada.



Veremos no Capítulo 3 que o locus de Hugoniot por determinados estados à esquerda  $(u_l, v_l)$  possui assíntotas verticais. Nesse caso, existem regiões (faixas) separadas por essas assíntotas, que denominamos  $\delta$ -regiões, as quais não contêm nenhuma porção das curvas de choque ou de rarefação da família 1 passando por  $(u_l, v_l)$ . Elas contêm somente ramos super-compressivos do locus de Hugoniot. Portanto, um estado à direita  $(u_r, v_r)$  em uma  $\delta$ -região não pode ser conectado a  $(u_l, v_l)$  por uma onda simples da família 1. Por outro lado, como o locus de Hugoniot e a curva integral da família 2 passando por (qualquer estado à esquerda)  $(u_l, v_l)$  coincidem com a reta  $u = u_l$ , se torna impossível que um estado à direita  $(u_r, v_r)$  em uma  $\delta$ -região seja conectado a  $(u_l, v_l)$  por uma onda simples da família 2 ou por uma onda composta envolvendo um estado intermediário. Se  $(u_r, v_r)$  estiver sobre um ramo super-compressivo do locus de Hugoniot de  $(u_l, v_l)$ , então os dois estados poderão ser conectados por um choque super-compressivo. Assim, para os estados à direita  $(u_r, v_r)$  nas  $\delta$ -regiões (exceto os sobre um ramo super-compressivo do locus de Hugoniot de  $(u_l, v_l)$ ) o problema de Riemann (1.1) não pode ser resolvido da maneira clássica.

Em [12] Korchinski resolveu o problema de Riemann (1.1) com  $f = \frac{u^2}{2}$  e  $g = \frac{u}{2}$ , de maneira única, utilizando uma onda não convencional que ele justificou por um tratamento numérico. Em [21] foi considerado o caso em que  $f = u^2$  e  $g = u$ . Esse caso, exceto pela mudança de escala  $t \rightarrow 2t$ , é o mesmo estudado em [12]. Porém, a abordagem dada em [21] é bem diferente. Nesse último, um tratamento assintótico foi empregado. Especificamente, D. Tan, T. Zhang e Y. Zheng em [21], estudaram as seguintes regularizações de (1.1):

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = \epsilon u_{xx}, & ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v_t + (vu)_x = 0, \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < 0, \\ (u_r, v_r) & ; x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

e

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x = \epsilon t u_{xx}, & ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v_t + (vu)_x = 0, \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < 0, \\ (u_r, v_r) & ; x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.5)$$

Eles verificaram que as soluções de ambos os sistemas acima convergem fracamente para uma distribuição envolvendo uma delta de Dirac, que denominaram  $\delta$ -onda de choque, ou simplesmente,  $\delta$ -choque e que denotaram por  $S_\delta$ . Esta distribuição coincide com a solução utilizada por Korchinski. A partir deste resultado eles definiram rigorosamente os  $\delta$ -choques para o problema de Riemann (1.1) com  $f = f(u)$  e  $g = g(u)$  satisfazendo (1.2) e também deram um sentido ao produto de distribuições  $vg(u)$ , quando  $(u, v)$  é um  $\delta$ -choque, de modo a permitir que os  $\delta$ -choques sejam soluções fracas de (1.1).

Outro exemplo de um problema de Riemann  $2 \times 2$  estritamente hiperbólico que não pode ser resolvido globalmente do modo clássico foi estudado em [9, 10, 11]. Também nesse exemplo, a impossibilidade de se conectar estados se deve à topologia do locus de Hugoniot. Pois, os ramos dessa curva que satisfazem às desigualdades de Lax, juntamente com o ramo super-compressivo, formam uma componente conexa que é compacta. Em [9, 10] Keyfitz e Kranzer utilizaram como solução, uma onda exótica, que eles denominaram choque singular. Com essa onda eles conseguiram a existência global e a unicidade para o problema de Riemann. Eles conjecturaram que o choque singular é obtido por uma determinada regularização do problema de Riemann e apresentaram evidências numéricas, além de uma análise envolvendo expansões assintóticas das soluções do problema regularizado, que reforçaram a conjectura. Entretanto, Keyfitz e Kranzer não puderam validar esse tratamento assintótico devido a dificuldade de verificação da existência de soluções do problema regularizado. Em [11] Keyfitz e Kranzer identificaram os choques singulares como objetos de um espaço de medidas com peso e mostraram que eles podem ser obtidos como limites de vários tipos diferentes de aproximações. Porém, o sentido em que o choque singular pode ser considerado solução do problema de Riemann ainda é uma questão não respondida.

Em [13] Schaeffer, Schechter e Shearer estudaram os choques singulares presentes em um problema de Riemann  $2 \times 2$  com coincidência de autovalores sobre uma reta, que é derivado do problema analisado em [9, 10, 11]. Eles utilizaram o mesmo tipo de regularização de Keyfitz e Kranzer e, embora tenham provado resultados mais rigorosos sobre a coerência das expansões assintóticas, também não justificaram a conjectura de que os choques singulares são limites de soluções dos problemas regularizados.

No contexto do problema de Riemann  $n \times n$ :

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ U(x, 0) = U_0(x) = \begin{cases} U_l ; x < 0, \\ U_r ; x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.6)$$

a regularização utilizada por Keyfitz e Kranzer em [9, 10] é da forma:

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = \epsilon t U_{xx} ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \epsilon > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x) = \begin{cases} U_l ; x < 0, \\ U_r ; x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.7)$$

A idéia da utilização deste tipo de regularização para problemas de Riemann é motivada pelo fato de que (1.7) admite soluções auto-similares, isto é, da forma  $U(\frac{x}{t})$ . Soluções auto-similares são naturais em problemas de Riemann devido ao fato de que (1.6) é invariante por dilatação nas variáveis independentes  $((x, t) \rightarrow (ax, at)$  para  $a > 0$ ).

Verificamos facilmente que há uma equivalência natural  $(U_\epsilon(\frac{x}{t}) \longleftrightarrow U_\epsilon(\xi))$  entre as soluções suaves e auto-similares de (1.7) e as soluções suaves do seguinte problema de valor de fronteira, onde  $' = \frac{d}{d\xi}$ :

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{U} = \dot{F}(U) - \xi \dot{U} ; \xi \in \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = U_l, U(\infty) = U_r. \end{cases} \quad (1.8)$$

Em vista desta equivalência, denominamos *leques de viscosidade* às soluções destes dois problemas.

Notamos também que (1.8) é uma regularização do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \dot{F}(U) - \xi \dot{U} = 0 ; \xi \in \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = U_l, U(\infty) = U_r. \end{cases} \quad (1.9)$$

No Capítulo 2 (Prop. 2.3) mostramos que soluções fracas (Def. 2.2) e auto-similares do problema de Riemann (1.6) são obtidas à partir de soluções fracas (Def. 2.1) do problema de valor de fronteira (1.9). Portanto, podemos tentar encontrar soluções fracas do problema de Riemann (1.6) via leques de viscosidade, isto é, da forma  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U_\epsilon(\frac{x}{t})$  (limite fraco) onde as funções  $U_\epsilon(\xi)$  são soluções suaves de (1.8).

A nível de equação escalar, os leques de viscosidade foram utilizados em [8], [22] e, recentemente, em [15] Slemrod os comparou com as aproximações clássicas envolvendo o termo  $\epsilon u_{xx}$ , para a equação de Burgers  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ .

Uma teoria sobre a regularização do tipo (1.7) foi desenvolvida por Dafermos e DiPerna em [2, 3, 5]. Em [2] Dafermos provou dois resultados fundamentais válidos para sistemas  $n \times n$  que enunciamos no Capítulo 2 (Teor. 2.1 e Teor. 2.2). O primeiro é um teorema de existência de soluções suaves para o problema de valor de fronteira (1.8). A aplicabilidade deste teorema depende de uma estimativa a priori na norma do sup que deve ser satisfeita pelos leques de viscosidade e que, apesar de poder depender de  $\epsilon$ , é em geral, difícil de ser obtida. Esta foi a dificuldade encontrada por Keyfitz e Kranzer em [9, 10], para validar a análise assintótica feita por eles. O segundo é um teorema que dá condições suficientes para a obtenção de soluções fracas limitadas e de variação total limitada de (1.1), como limites fracos de leques de viscosidade. A demonstração deste resultado é baseada no Teorema de Helly e, portanto, sua aplicabilidade está condicionada a que os leques de viscosidade sejam uniformemente limitados e de variação total uniformemente limitada.

Dafermos e DiPerna também apresentaram algumas técnicas para obtenção de estimativas a priori que foram aplicadas a algumas classes de sistemas  $2 \times 2$ .

A partir da teoria iniciada por Dafermos e DiPerna, vários exemplos de problemas de Riemann foram estudados via leques de viscosidade. Como referências

podemos citar [16], [23] para sistemas  $2 \times 2$  estritamente hiperbólicos, [14], [6, 7] para um exemplo de um problema de Riemann que apresenta mudança de fase e [4, 24] para sistemas  $n \times n$ .

Em [24], Tzavaras demonstrou um teorema de existência local para o problema de Riemann (1.6) estritamente hiperbólico, a partir de estimativas uniformes da variação total dos leques de viscosidade, para estados iniciais próximos. Além disso, para a existência desses leques, Tzavaras provou que uma estimativa a priori na norma  $L^p$  é suficiente.

Em [18], D. Tan obteve o  $\delta$ -choque para o mesmo problema de Riemann estudado em [21], como limite fraco de leques de viscosidade. Para demonstrar este resultado, D. Tan não utilizou o Teorema de existência de Dafermos [2]. Ele observou que a solução da primeira equação em (1.8) é uma solução particular da segunda equação e utilizou a teoria clássica para equações diferenciais lineares de segunda ordem para encontrar uma base de soluções da segunda equação. Este fato é muito próprio deste exemplo.

Também em [18], o  $\delta$ -choque para o caso estritamente hiperbólico em que  $g = 2u + 1$  (mantendo  $f = u^2$ ) foi obtido através de regularizações dos tipos (1.4) e (1.5).

Neste trabalho assumimos a condição de hiperbolicidade estrita (1.3) e obtemos todas as soluções de (1.1), inclusive os  $\delta$ -choques, como limites fracos, quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , dos leques de viscosidade  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$ , onde  $(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))$  é solução de (1.8) que, neste caso é o seguinte problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = f'(u) - \xi \dot{u} \\ \epsilon \ddot{v} = \frac{d}{d\xi} [vg(u)] - \xi \dot{v} & ; \xi \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty) = u_l, \quad v(-\infty) = v_l, \\ u(+\infty) = u_r, \quad v(+\infty) = v_r. \end{cases} \quad (1.10)$$

No caso em que a solução do problema de Riemann (1.1) envolve uma onda de rarefação, a estimativa a priori que encontramos é uniforme em  $\epsilon$ . Além disso, a sequência dos leques de viscosidade é uniformemente limitada e de variação total uniformemente limitada. Portanto, podemos aplicar os dois teoremas de Dafermos [2] citados acima, para obtermos a existência dos leques de viscosidade e a convergência fraca destes para a solução do problema de Riemann (1.1) como em [2, 3], [7], [16].

No caso em que a solução do problema de Riemann (1.1) é um  $\delta$ -choque ou envolve uma onda de choque, provamos uma estimativa a priori para os leques de viscosidade que depende de  $\frac{1}{\epsilon}$  e que é suficiente para obtermos a existência desses leques, aplicando o Teorema de existência de Dafermos [2]. Com essas

estimativas também mostramos a convergência fraca dos leques de viscosidade. A demonstração deste fato segue um roteiro que consideramos uma alternativa, nos casos envolvendo ondas de choque, aos argumentos que utilizam o Teorema de Helly. Principalmente no caso em que as estimativas a priori dos leques de viscosidade não são independentes de  $\epsilon$  [14, 6]. Este roteiro é baseado nos teoremas 2.5 e 2.6, ambos demonstrados no Capítulo 2. O Teorema 2.6 é uma generalização dos argumentos que encontramos em [21] e mostra que os leques de viscosidade (na variável  $\xi$ ) podem convergir fracamente para uma combinação linear envolvendo deltas de Dirac e funções constantes por partes. O Teorema 2.5 [10] mostra uma relação, independente de  $\epsilon$ , entre os leques de viscosidade e essas funções.

Obtemos também a unicidade dos leques de viscosidade, um fato que nos permite reduzir a demonstração da convergência a poucos casos.

Este trabalho está organizado como se segue.

No Capítulo 2 estabelecemos alguns resultados gerais válidos para o problema de Riemann  $n \times n$  e que são utilizados nos capítulos posteriores. Entre esses resultados destacamos, além dos teoremas 2.5 e 2.6 acima mencionados, o Teorema 2.7 que justifica formalmente a definição da distribuição produto  $vg(u)$  dada no Capítulo 3, quando  $(u, v)$  é um  $\delta$ -choque.

No Capítulo 3, decrevemos a solução do problema de Riemann (1.1) e definimos, conforme em [21], o  $\delta$ -choque  $S_\delta$  e a distribuição produto  $vg(u)$  quando  $S_\delta = (u, v)$ , de modo que  $S_\delta$  seja solução fraca de (1.1). Além disso, obtemos a existência global para (1.1) na classe das ondas compostas e  $\delta$ -choques, e estabelecemos a condição de entropia sobre os  $\delta$ -choques de modo a obtermos também a unicidade nesta classe.

No Capítulo 4 mostramos a existência e a unicidade dos leques de viscosidade para o problema de Riemann escalar geral e a convergência desses leques para o problema de Riemann escalar com fluxo estritamente convexo. Apesar desses resultados (exceto, possivelmente, o de unicidade) serem conhecidos, eles foram incluídos neste texto para que este fique auto-contido, uma vez que a primeira equação em (1.1) é do tipo estudado nesse capítulo.

No Capítulo 5 provamos a existência e a unicidade dos leques de viscosidade para um sistema um pouco mais geral do que (1.1). A unicidade segue como consequência de um lema provado no Capítulo 4. Para verificarmos a existência demonstramos estimativas na norma do sup para os leques de viscosidade estudando a estrutura das soluções do sistema em (1.10) com relação aos máximos e mínimos. Demonstramos também uma estimativa em  $L^1_{loc}$  que é uma hipótese necessária para aplicarmos, no Capítulo 6, o Teorema 2.6 do Capítulo 2.

Finalmente, no Capítulo 6 estudamos a convergência dos leques de viscosidade  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$ . Provamos que estes convergem fracamente para a solução  $(u, v)$  do problema de Riemann (1.1), inclusive no caso de um  $\delta$ -choque. Além disso, verifi-

camos que  $v_\epsilon g(u_\epsilon)$  converge fracamente para a distribuição produto  $vg(u)$  definida no Capítulo 3, quando  $(u, v) = S_\delta$ .

## 2. LEQUES DE VISCOSIDADE

Neste capítulo vamos apresentar algumas propriedades dos leques de viscosidade associados ao problema de Riemann (1.6), isto é, das soluções do seguinte problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{U} = \dot{F}(U) - \xi \dot{U} ; \xi \in \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = U_l, \quad U(+\infty) = U_r, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $' = \frac{d}{d\xi}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma função suave e os *estados iniciais*  $U_l$  e  $U_r$  são vetores fixos de  $\mathbb{R}^n$ .

O primeiro resultado é um teorema de existência devido a Dafermos [2].

**Teorema 2.1.** *Suponhamos que exista uma constante positiva  $M$ , independente de  $\mu \in [0, 1]$  e de  $L > 0$ , tal que:*

$$\max_{|\xi| \leq L} \|U(\xi)\| \leq M, \quad (2.2)$$

para toda solução  $U$  do problema de valor de fronteira a dois parâmetros,

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{U} = \mu \dot{F}(U) - \xi \dot{U} ; \xi \in (-L, L), \\ U(-L) = \mu U_l, \\ U(L) = \mu U_r. \end{cases} \quad (2.3)$$

Então (2.1) possui uma solução suave  $U_\epsilon$  satisfazendo:

$$\|U_\epsilon\|_\infty = \sup_{-\infty < \xi < +\infty} \|U_\epsilon(\xi)\| \leq M.$$

A demonstração do Teorema 2.1 pode ser encontrada em [2]. Ela é uma aplicação de um teorema de ponto fixo de Schauder. Enfatizamos que a aplicabilidade deste teorema está condicionada à estimativa (4.1) para todas as soluções de (2.3) e não exige nada sobre a existência dessas soluções.

A seguir vamos enunciar outro teorema, também devido a Dafermos [2], que dá condições para que possamos obter soluções fracas do problema de Riemann (1.6) como limite fraco dos leques de viscosidade  $U_\epsilon(\frac{x}{t})$  associados a (1.6). Antes recordamos a definição de solução fraca para (1.6) e definimos o conceito de solução fraca para o problema de valor inicial (1.9).

**Definição 2.1.** Uma função limitada e mensurável  $U = U(\xi)$  é uma solução fraca de (1.9) se  $U(-\infty) = U_l$ ,  $U(\infty) = U_r$  e:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{[F(U) - \xi U] \dot{\varphi} - U \varphi\} d\xi = 0 ; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.4)$$

**Definição 2.2.** Uma função limitada e mensurável  $U = U(x, t)$  é uma solução fraca de (1.6) se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [F(U) \psi_x + U \psi_t] dx dt + \int_{-\infty}^\infty \psi(x, 0) U_0(x) dx = 0 ; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)). \quad (2.5)$$

**Teorema 2.2.** Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $U_\epsilon(\xi)$  uma solução de (2.1). Suponhamos que o conjunto  $\{U_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  seja uniformemente limitado e de variação total uniformemente limitada. Então existe uma subsequência de funções  $U_{\epsilon_n}$ , com  $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ , e uma função  $U = U(\xi)$  limitada e de variação total limitada, tal que  $U_{\epsilon_n}$  converge para  $U$ , pontualmente e fracamente. Além disso,  $U$  é uma solução fraca de (1.9) e  $U(\frac{x}{t})$  é uma solução fraca de (1.6).

A demonstração do Teorema 2.2 também pode ser encontrada em [2]. Ela é uma aplicação do Teorema de Helly. A última afirmação no enunciado deste teorema decorre da seguinte proposição que relaciona as soluções fracas do problema de valor de fronteira (1.9) e as soluções fracas do problema de Riemann (1.6).

**Proposição 2.3.** Seja  $U = U(\xi)$  uma função limitada e mensurável que é solução fraca de (1.9). Então  $U(\frac{x}{t})$  é uma solução fraca de (1.6).

**Demonstração:** Seja  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Como a função  $\varphi(\xi) = \psi(t\xi, t)$  é um elemento de  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , para cada  $t > 0$ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{[F(U(\xi)) - \xi U(\xi)] \dot{\varphi}(\xi) - U(\xi) \varphi(\xi)\} d\xi = 0. \quad (2.6)$$

Para cada  $\alpha > 0$ , seja

$$I_\alpha := \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[ U\left(\frac{x}{t}\right) \psi_t(x, t) + F\left(U\left(\frac{x}{t}\right)\right) \psi_x(x, t) \right] dx dt.$$

Como  $\dot{\varphi}(\xi) = t \psi_x(t\xi, t)$  e:

$$\begin{aligned} t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) &= t [\xi \psi_x(t\xi, t) + \psi_t(t\xi, t)] \\ &= \xi \dot{\varphi}(\xi) + t \psi_t(t\xi, t), \end{aligned}$$



temos, depois da mudança de variável  $\xi = \frac{x}{t}$ ,

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty [U(\xi)t\psi_t(t\xi, t) + tF(U(\xi))\psi_x(t\xi, t)] d\xi dt \\
&= \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty U(\xi) \left[ t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) - \xi \dot{\varphi}(\xi) \right] dt d\xi + \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty F(U(\xi)) \dot{\varphi}(\xi) d\xi dt \\
&= \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty [F(U(\xi)) - \xi U(\xi)] \dot{\varphi}(\xi) d\xi dt + \int_{-\infty}^\infty \int_\alpha^\infty U(\xi) t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) dt d\xi.
\end{aligned}$$

De (2.6) temos,

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \int_\alpha^\infty \int_{-\infty}^\infty U(\xi) \dot{\varphi}(\xi) d\xi dt + \int_{-\infty}^\infty \int_\alpha^\infty U(\xi) t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) dt d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_\alpha^\infty U(\xi) \psi(t\xi, t) dt d\xi + \int_{-\infty}^\infty \int_\alpha^\infty U(\xi) t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) dt d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty U(\xi) \int_\alpha^\infty \left[ \psi(t\xi, t) + t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) \right] dt d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty U(\xi) [t\psi(t\xi, t)]_\alpha^\infty d\xi = - \int_{-\infty}^\infty U(\xi) \psi(\alpha\xi, \alpha) \alpha d\xi.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $x = \alpha\xi$ , encontramos:

$$I_\alpha = - \int_{-\infty}^\infty U\left(\frac{x}{\alpha}\right) \psi(x, \alpha) dx.$$

Por último, fazendo  $\alpha \rightarrow 0^+$  em ambos os lados da igualdade acima e lembrando que  $U$  é uma função limitada,  $U(-\infty) = U_l$  e  $U(\infty) = U_r$ , concluimos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[ U\left(\frac{x}{t}\right) \psi_t(x, t) + F\left(U\left(\frac{x}{t}\right)\right) \psi_x(x, t) \right] dx dt &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty U\left(\frac{x}{\alpha}\right) \psi(x, \alpha) dx \\
&= - \int_{-\infty}^\infty U_0(x) \psi(x, 0) dx,
\end{aligned}$$

isto é,  $U\left(\frac{x}{t}\right)$  é uma solução fraca de (1.6). ■

**Observação 2.1.** A recíproca da proposição acima apresenta uma dificuldade em relação à verificação das condições de fronteira  $U(-\infty) = U_l$  e  $U(\infty) = U_r$ . Porém, afirmamos que ela é verdadeira se considerarmos a forma fraca (2.4) de solução do sistema em (1.9). Em outras palavras: se  $U\left(\frac{x}{t}\right)$  for uma solução fraca do problema de Riemann (1.6) então  $U = U(\xi)$  satisfaz (2.4).

Para verificarmos a afirmação contida na Observação 2.1 acima, tomemos  $\varphi, \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Fazendo a mudança de variável  $\xi = \frac{x}{t}$ , para cada  $t > 0$ , temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F(U) - \xi U] \dot{\varphi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{t} F(U(\frac{x}{t})) - \frac{x}{t^2} U(\frac{x}{t}) \right] \dot{\varphi}(\frac{x}{t}) dx.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por  $\rho$  e integrando, obtemos

$$\int_0^\infty \rho(t) \int_{-\infty}^{\infty} [F(U) - \xi U] \dot{\varphi} d\xi dt = \int_0^\infty \rho(t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{t} F(U(\frac{x}{t})) - \frac{x}{t^2} U(\frac{x}{t}) \right] \dot{\varphi}(\frac{x}{t}) dx dt. \quad (2.7)$$

Das identidades,

$$\begin{aligned} \partial_x \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) &= \frac{1}{t} \dot{\varphi}(\frac{x}{t}) \rho(t), \\ \partial_t \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) &= \rho'(t) \varphi(\frac{x}{t}) - \frac{x}{t^2} \dot{\varphi}(\frac{x}{t}) \rho(t), \end{aligned}$$

e de (2.7) segue que:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \rho(t) \int_{-\infty}^{\infty} [F(U) - \xi U] \dot{\varphi} d\xi dt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(U(\frac{x}{t})) \partial_x \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) + U(\frac{x}{t}) \partial_t \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) \right] dx dt \\ &\quad - \int_0^\infty \rho'(t) \int_{-\infty}^{\infty} U(\frac{x}{t}) \varphi(\frac{x}{t}) dx dt. \end{aligned}$$

Mas, como  $U(\frac{x}{t})$  é solução fraca de (1.6) e  $\varphi(\frac{x}{t}) \rho(t)$  é um elemento de  $C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , temos:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(U(\frac{x}{t})) \partial_x \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) + U(\frac{x}{t}) \partial_t \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) \right] dx dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x) \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \varphi(\frac{x}{t}) \rho(t) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \rho(t) \int_{-\infty}^{\infty} [F(U) - \xi U] \dot{\varphi} d\xi dt = - \int_0^\infty \rho'(t) \int_{-\infty}^{\infty} U(\frac{x}{t}) \varphi(\frac{x}{t}) dx dt.$$

Fazendo a mudança de variável  $x = \xi t$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \left( \int_0^\infty \rho(t) dt \right) \int_{-\infty}^{\infty} [F(U) - \xi U] \dot{\varphi} d\xi &= - \int_0^\infty t \rho'(t) \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) \varphi(\xi) d\xi dt \\ &= - \left( \int_0^\infty t \rho'(t) dt \right) \int_{-\infty}^{\infty} U \varphi d\xi \\ &= \left( \int_0^\infty \rho(t) dt \right) \int_{-\infty}^{\infty} U \varphi d\xi, \end{aligned}$$

isto é,

$$\left( \int_0^\infty \rho(t) dt \right) \int_{-\infty}^\infty \{ [F(U) - \xi U] \dot{\varphi} - U \varphi \} d\xi = 0.$$

Escolhendo  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\left( \int_0^\infty \rho(t) dt \right) \neq 0$ , concluímos que  $U(\xi)$  satisfaz à forma fraca (2.4).

A seguir vamos demonstrar [2, 24] duas estimativas para as derivadas dos leques de viscosidade. A primeira determina o tipo de decaimento no infinito dessas funções para cada  $\epsilon$  fixo e a segunda mostra como suas derivadas dependem de  $\epsilon$ , para  $\xi$  em intervalos limitados.

**Lema 2.4.** *Sejam  $U$  solução suave de (2.1),*

$$\alpha = \sup \{ \|dF(U(\xi))\| : \xi \in \mathbb{R} \},$$

e

$$\beta = \sup \{ \|F(U(\xi))\| : \xi \in \mathbb{R} \}.$$

Então:

$$\|\dot{U}(\xi)\| \leq \|\dot{U}(0)\| \exp \left( \frac{2\alpha|\xi| - \xi^2}{2\epsilon} \right) ; \xi \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

e

$$\|\dot{U}(\xi)\| \leq \frac{C}{\epsilon} [\beta + (1 + |\xi|) \|U\|_\infty] ; \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

onde  $C$  é uma constante positiva, independente de  $\epsilon$ .

**Demonstração:** Multiplicando (2.1) pelo fator integrante  $\exp \left( \frac{\xi^2}{2\epsilon} \right)$  obtemos

$$\frac{d}{d\xi} \left( \dot{U}(\xi) \exp \left( \frac{\xi^2}{2\epsilon} \right) \right) = \frac{1}{\epsilon} \dot{F}(U(\xi)) \exp \left( \frac{\xi^2}{2\epsilon} \right) ; \xi \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\dot{U}(\xi) \exp \left( \frac{\xi^2}{2\epsilon} \right) = \dot{U}(0) + \frac{1}{\epsilon} \int_0^\xi \dot{F}(U(\eta)) \exp \left( \frac{\eta^2}{2\epsilon} \right) d\eta ; \xi \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

e

$$\left\| \dot{U}(\xi) \exp \left( \frac{\xi^2}{2\epsilon} \right) \right\| \leq \|\dot{U}(0)\| + \frac{\alpha}{\epsilon} \left| \int_0^\xi \left\| \dot{U}(\eta) \exp \left( \frac{\eta^2}{2\epsilon} \right) \right\| d\eta \right|. \quad (2.11)$$

Agora, usando a desigualdade de Gronwall na forma integral obtemos (2.8).

Vamos agora verificar (2.9). Isolando  $\dot{U}$  em (2.10) e integrando no intervalo  $[0, \sqrt{2\epsilon}]$  obtemos:

$$\begin{aligned} U(\sqrt{2\epsilon}) - U(0) &= \dot{U}(0) \int_0^{\sqrt{2\epsilon}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\epsilon}\right) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\sqrt{2\epsilon}} \int_0^\xi \exp\left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{2\epsilon}\right) \dot{F}(U(\eta)) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\frac{\xi}{\sqrt{2\epsilon}} = \sigma$  nas integrais acima, encontramos

$$U(\sqrt{2\epsilon}) - U(0) = A\sqrt{2\epsilon}\dot{U}(0) + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \int_0^1 \int_0^{\sigma\sqrt{2\epsilon}} \exp\left(\frac{\eta^2}{2\epsilon} - \sigma^2\right) \dot{F}(U(\eta)) d\eta d\sigma,$$

onde  $0 < A = \int_0^1 \exp(-\sigma^2) d\sigma < 1$ . Como,

$$\frac{\|U(\sqrt{2\epsilon}) - U(0)\|}{A\sqrt{2\epsilon}} \leq \frac{\sqrt{2}\|U\|_\infty}{A\sqrt{\epsilon}},$$

temos:

$$\|\dot{U}(0)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{\|U\|_\infty}{A} + \frac{1}{A\epsilon} \left\| \int_0^1 I(\sigma) d\sigma \right\|, \quad (2.12)$$

onde:

$$I(\sigma) = \int_0^{\sigma\sqrt{2\epsilon}} \exp\left(\frac{\eta^2}{2\epsilon} - \sigma^2\right) \dot{F}(U(\eta)) d\eta.$$

Desenvolvendo por partes a integral  $I(\sigma)$  obtemos:

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \left[ \exp\left(\frac{\eta^2}{2\epsilon} - \sigma^2\right) F(U(\eta)) \right]_0^{\sigma\sqrt{2\epsilon}} - \int_0^{\sigma\sqrt{2\epsilon}} \frac{\eta}{\epsilon} \exp\left(\frac{\eta^2}{2\epsilon} - \sigma^2\right) F(U(\eta)) d\eta \\ &= F(U(\sigma\sqrt{2\epsilon})) - F(U(0)) \exp(-\sigma^2) - \int_0^{\sigma\sqrt{2\epsilon}} \frac{\eta}{\epsilon} \exp\left(\frac{\eta^2}{2\epsilon} - \sigma^2\right) F(U(\eta)) d\eta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 I(\sigma) d\sigma \right\| &\leq \beta \left( 1 + \int_0^1 \exp(-\sigma^2) d\sigma \right) + \beta \int_0^1 \int_0^{\sigma\sqrt{2\epsilon}} \frac{\eta}{\epsilon} \exp\left(\frac{\eta^2}{2\epsilon} - \sigma^2\right) d\eta d\sigma \\ &= \beta \left( 1 + \int_0^1 \exp(-\sigma^2) d\sigma \right) + \beta \int_0^1 [1 - \exp(-\sigma^2)] d\sigma = 2\beta, \end{aligned}$$

e de (2.12) temos:

$$\|\dot{U}(0)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{\|U\|_{\infty}}{A} + \frac{2\beta}{A\epsilon} \leq \frac{2}{A\epsilon} (\|U\|_{\infty} + \beta).$$

Agora, integrando (2.1) e observando que:

$$\int_0^{\xi} \eta \dot{U}(\eta) d\eta = -\xi U(\xi) + \int_0^{\xi} U(\eta) d\eta ; \xi \in \mathbb{R},$$

temos:

$$\dot{U}(\xi) = \dot{U}(0) + \frac{1}{\epsilon} \left[ F(U(\xi)) - F(U(0)) - \xi U(\xi) + \int_0^{\xi} U(\eta) d\eta \right] ; \xi \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\dot{U}(\xi)\| &\leq \|\dot{U}(0)\| + \frac{1}{\epsilon} [2\beta + 2|\xi| \|U\|_{\infty}] \\ &\leq \frac{2}{A\epsilon} (\|U\|_{\infty} + \beta) + \frac{2}{\epsilon} (\beta + |\xi| \|U\|_{\infty}) \\ &\leq \frac{2}{A\epsilon} [2\beta + (1 + |\xi|) \|U\|_{\infty}] \\ &\leq \frac{C}{\epsilon} [\beta + (1 + |\xi|) \|U\|_{\infty}] ; \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que é (2.9) com  $C = \frac{4}{A}$ .

■

**Observação 2.2.** Para cada intervalo fechado  $I = [a, b]$  existe uma constante  $K_I$  dependendo somente de  $I$ , tal que:

$$\|\dot{U}(\xi)\| \leq \frac{K_I}{\epsilon} (\beta + \|U\|_{\infty}) ; \xi \in I.$$

De fato, basta tomarmos  $K_I = C (1 + \max\{|b|, |a|\})$  em (2.9).

No próximo resultado utilizaremos (2.8) do lema acima para mostrar uma interessante relação [10], independente de  $\epsilon > 0$ , entre as soluções de (2.1) e as descontinuidades  $W_s$  do tipo,

$$W_s(\xi) = \begin{cases} U_l & ; \xi < s, \\ U_r & ; \xi > s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

**Teorema 2.5.** *Seja  $U$  solução de (2.1). Então para cada  $s \in \mathbb{R}$ ,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [U(\xi) - W_s(\xi)] d\xi = s [U_r - U_l] - [F(U_r) - F(U_l)], \quad (2.14)$$

onde  $W_s$  é a função vetorial (2.13).

**Demonstração:** Integrando (2.1) no intervalo  $[\alpha, \beta]$ , onde  $\alpha < s < \beta$  obtemos:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \xi \dot{U}(\xi) d\xi - [F(U(\beta)) - F(U(\alpha))] = -\epsilon (\dot{U}(\beta) - \dot{U}(\alpha)).$$

Desenvolvendo a integral acima, encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \xi \dot{U}(\xi) d\xi &= \int_{\alpha}^{\beta} (\xi - s) \dot{U}(\xi) d\xi + s \int_{\alpha}^{\beta} \dot{U}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (\xi - s) \dot{U}(\xi) d\xi + s [U(\beta) - U(\alpha)]. \end{aligned}$$

Assim,

$$s [U(\beta) - U(\alpha)] - [F(U(\beta)) - F(U(\alpha))] = \int_{\alpha}^{\beta} (s - \xi) \dot{U}(\xi) d\xi - \epsilon (\dot{U}(\beta) - \dot{U}(\alpha)).$$

Do Lema 2.4 temos  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \dot{U}(\beta) = 0 = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \dot{U}(\alpha)$  e portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (s - \xi) \dot{U}(\xi) d\xi = s [U_r - U_l] - [F(U_r) - F(U_l)].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} (s - \xi) \dot{U}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\alpha}^s [(s - \xi) (\dot{U}(\xi) - \dot{W}_s(\xi))] d\xi + \int_s^{\beta} [(s - \xi) (\dot{U}(\xi) - \dot{W}_s(\xi))] d\xi \\ &= [(s - \xi) (U(\xi) - W_s(\xi))]_{\alpha}^s + [(s - \xi) (U(\xi) - W_s(\xi))]_s^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} [U(\xi) - W_s(\xi)] d\xi \\ &= (s - \beta) (U(\beta) - U_r) - (s - \alpha) (U(\alpha) - U_l) + \int_{\alpha}^{\beta} [U(\xi) - W_s(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Agora, novamente pelo Lema 2.4 temos, levantando as indeterminações do tipo  $\pm\infty \cdot 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (s - \beta) (U(\beta) - U_r) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^2 \dot{U}(\beta) = 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (s - \alpha) (U(\alpha) - U_l) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \alpha^2 \dot{U}(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [U(\xi) - W_s(\xi)] d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - \xi) \dot{U}(\xi) d\xi = s [U_r - U_l] - [F(U_r) - F(U_l)],$$

que é (2.14). ■

A seguir demonstramos dois resultados de convergência. O primeiro deles, o Teorema 2.6, mostra que os leques de viscosidade  $U_\epsilon(\xi)$  podem convergir fracamente para uma distribuição  $D$  definida por:

$$D := V + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \delta_{\sigma_j}, \quad (2.15)$$

onde  $V$  é uma função vetorial constante por partes da forma:

$$V(\xi) = \begin{cases} U_l ; \xi < \sigma_1, \\ U_1 ; \sigma_1 < \xi < \sigma_2, \\ \vdots \\ U_k ; \sigma_k < \xi < \sigma_{k+1}, \\ U_r ; \sigma_{k+1} < \xi, \end{cases} \quad (2.16)$$

$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{k+1}$  são números reais,  $U_l = U_0, U_1, \dots, U_k, U_{k+1} = U_r$  são vetores em  $\mathbb{R}^n$  e, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ ,  $\delta_{\sigma_j}$  é a distribuição delta de Dirac centrada em  $\sigma_j$  e  $C_j$  é o vetor:

$$C_j = \sigma_j [U_j - U_{j-1}] - [F(U_j) - F(U_{j-1})]. \quad (2.17)$$

Como consequência  $U_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para a distribuição  $\bar{D}$  definida por:

$$\begin{aligned} \langle \bar{D}, \psi \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V\left(\frac{x}{t}\right) \psi(x, t) dx dt \\ &+ \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \int_0^\infty t \psi(\sigma_j t, t) dt ; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (2.18)$$

A demonstração Teorema 2.6 é baseada em argumentos encontrados em [21].

O segundo resultado, o Teorema 2.7, mostra que assumindo as hipóteses do Teorema 2.6 e acrescentando mais uma hipótese, obtemos a convergência fraca de  $F(U_\epsilon(\xi))$  para a distribuição  $F(D)$  definida por:

$$F(D) := F(V) + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \sigma_j \delta_{\sigma_j}. \quad (2.19)$$

Nesse caso,  $F(U_\epsilon(\frac{x}{t}))$  converge fracamente para a distribuição  $F(\bar{D})$  definida por:

$$\begin{aligned} \langle F(\bar{D}), \psi \rangle = & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(V(\frac{x}{t})) \psi(x, t) dx dt \\ & + \sum_{j=1}^{k+1} C_j \sigma_j \int_0^{+\infty} t \psi(\sigma_j t, t) dt ; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Teorema 2.6.** Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $U_\epsilon$  solução suave de (2.1). Suponhamos que:

- i)  $U_\epsilon$  convirja uniformemente para a função  $V$  definida em (2.16), em cada intervalo fechado que não contenha os pontos  $\sigma_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\}$ ;
- ii) A família  $\{U_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  seja uniformemente localmente limitada em  $L^1(\mathbb{R})$ , isto é, que para cada intervalo fechado  $I$ , exista uma constante positiva  $M$  (que pode depender de  $I$ ), tal que

$$\int_I \|U_\epsilon(\xi)\| d\xi \leq M ; \epsilon > 0.$$

Então:

$$U_\epsilon(\xi) \rightharpoonup D \quad (2.21)$$

e

$$U_\epsilon(\frac{x}{t}) \rightharpoonup \bar{D}. \quad (2.22)$$

**Demonstração:** Para provarmos (2.21) precisamos mostrar que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi = \sum_{j=1}^{k+1} C_j \phi(\sigma_j) ; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.23)$$

Vamos inicialmente verificar (2.23) para uma função teste  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\text{supp } \phi \subset [\sigma_j - \alpha, \sigma_j + \alpha]$ , onde  $j \in \{1, 2, \dots, k+1\}$  e  $\alpha > 0$  é tal que  $\sigma_i \notin [\sigma_j - \alpha, \sigma_j + \alpha]$  se  $i \neq j$ . Nesse caso, (2.23) se reduz a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi = C_j \phi(\sigma_j). \quad (2.24)$$

Seja então  $\phi$  como acima e suponhamos ainda que  $\phi$  seja constante em algum intervalo  $[\sigma_j - \beta, \sigma_j + \beta] \subset (\sigma_j - \alpha, \sigma_j + \alpha)$ . Multiplicando a equação em (2.1) por  $\phi$  e integrando por partes em  $(-\infty, \infty)$ , encontramos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_\epsilon \phi d\xi = I_1^\epsilon - I_2^\epsilon, \quad (2.25)$$



onde:

$$I_1^\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(U_\epsilon) - \xi U_\epsilon] \dot{\phi} d\xi$$

e

$$I_2^\epsilon = \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_\epsilon \dot{\phi} d\xi = -\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} U_\epsilon \ddot{\phi} d\xi.$$

Estimando  $\|I_2^\epsilon\|$  encontramos:

$$\|I_2^\epsilon\| \leq \epsilon \|\ddot{\phi}\|_\infty \left[ \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} \|U_\epsilon\| d\xi + \int_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} \|U_\epsilon\| d\xi \right],$$

uma vez que  $\ddot{\phi} \equiv 0$  em  $[\sigma_j - \beta, \sigma_j + \beta]$ . Portanto, da hipótese i) acima, segue que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_2^\epsilon = 0$ .

Por outro lado, novamente da hipótese i) segue que:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_1^\epsilon &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} [F(U_\epsilon) - \xi U_\epsilon] \dot{\phi} d\xi + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} [F(U_\epsilon) - \xi U_\epsilon] \dot{\phi} d\xi \\ &= \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} [F(U_{j-1}) - \xi U_{j-1}] \dot{\phi} d\xi + \int_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} [F(U_j) - \xi U_j] \dot{\phi} d\xi \\ &= \phi(\sigma_j) [F(U_{j-1}) - F(U_j)] - \left[ U_{j-1} \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} \xi \dot{\phi} d\xi + U_j \int_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} \xi \dot{\phi} d\xi \right] \\ &= \phi(\sigma_j) [F(U_{j-1}) - F(U_j)] - U_{j-1} \left[ \xi \phi|_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} - \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} \phi d\xi \right] \\ &\quad - U_j \left[ \xi \phi|_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} - \int_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} \phi d\xi \right] \\ &= \phi(\sigma_j) C_j + \beta \phi(\sigma_j) [U_j + U_{j-1}] + U_{j-1} \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j-\beta} \phi d\xi + U_j \int_{\sigma_j+\beta}^{\sigma_j+\alpha} \phi d\xi \\ &= \phi(\sigma_j) C_j + \int_{\sigma_j-\alpha}^{\sigma_j+\alpha} V \phi d\xi = \phi(\sigma_j) C_j + \int_{-\infty}^{+\infty} V \phi d\xi \end{aligned}$$

Logo, de (2.25) temos,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi = C_j \phi(\sigma_j).$$

Provamos (2.24) para toda função teste  $\phi$ , constante em uma vizinhança de  $\sigma_j$  e tal que o suporte não contenha os pontos  $\sigma_i$ ;  $i \neq j$ .

Suponhamos agora que  $\phi$  não seja constante em uma vizinhança de  $\sigma_j$ . Tomemos uma sequência de funções  $\phi_n \in C_0^\infty((\sigma_j - \alpha, \sigma_j + \alpha))$  que sejam constantes em uma

vizinhança de  $\sigma_j$  e tal que  $\phi_n$  convirja uniformemente para  $\phi$  em  $[\sigma_j - \alpha, \sigma_j + \alpha]$ . Então,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\| \\ & \leq \left\| \int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} (U_\epsilon - V) (\phi - \phi_n) d\xi \right\| + \left\| \int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} (U_\epsilon - V) \phi_n d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\| \\ & \leq \|\phi - \phi_n\|_\infty \int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} \|U_\epsilon - V\| d\xi + \left\| \int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} (U_\epsilon - V) \phi_n d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\| \end{aligned}$$

isto é,

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\| \leq A_{\epsilon, n} + B_{\epsilon, n}, \quad (2.26)$$

onde:

$$A_{\epsilon, n} = \|\phi - \phi_n\|_\infty \int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} \|U_\epsilon - V\| d\xi, \quad (2.27)$$

$$B_{\epsilon, n} = \left\| \int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} (U_\epsilon - V) \phi_n d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\|.$$

Da hipótese ii) temos:

$$\int_{\sigma_j - \alpha}^{\sigma_j + \alpha} \|U_\epsilon - V\| d\xi \leq L, \quad (2.28)$$

para alguma constante positiva  $L$ , independente de  $\epsilon > 0$ . Assim, de (2.26)-(2.28) segue que

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\| \leq L \|\phi - \phi_n\|_\infty + B_{\epsilon, n}. \quad (2.29)$$

Como as funções teste  $\phi_n$  são constantes em uma vizinhança de  $\sigma_j$  temos, da parte já provada:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} B_{\epsilon, n} &= \|C_j (\phi_n(\sigma_j) - \phi(\sigma_j))\| \\ &= \|C_j\| |\phi_n(\sigma_j) - \phi(\sigma_j)| \\ &\leq \|C_j\| \|\phi - \phi_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Logo, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , em (2.29), obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi - C_j \phi(\sigma_j) \right\| \leq (L + \|C_j\|) \|\phi - \phi_n\|_\infty.$$

Por último, fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , notando que o lado esquerdo da desigualdade acima não depende de  $n \in \mathbb{N}$ , encontramos,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi = C_j \phi(\sigma_j),$$

que é (2.24).

Completamos a prova de (2.23), observando que para uma função teste arbitrária  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , podemos tomar funções teste  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k+1}$  tais que,

$$\sigma_i \notin \text{supp } \phi_j \text{ se } i \neq j ; i, j \in \{1, 2, \dots, k+1\}$$

e

$$\sum_{i=1}^{i=k+1} \phi_i = \phi. \quad (2.30)$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \left( \sum_{i=1}^{i=k+1} \phi_i \right) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{i=k+1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi_i d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{i=k+1} C_i \phi_i(\sigma_i). \end{aligned}$$

Como  $\phi_i(\sigma_j) = 0$  se  $i \neq j$  temos:

$$\phi_i(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{j=k+1} \phi_j(\sigma_i) = \phi(\sigma_i) ; i \in \{1, 2, \dots, k+1\},$$

isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \phi d\xi = \sum_{i=1}^{i=k+1} C_i \phi_i(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{i=k+1} C_i \phi(\sigma_i),$$

que é (2.23).

Para completarmos a demonstração deste teorema, devemos verificar a convergência fraca (2.22). Seja  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  e sejam  $L, \alpha$  e  $T$  constantes positivas tais que  $\text{supp } \psi \subset [-L, L] \times [\alpha, T]$ . temos:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty U_\epsilon\left(\frac{x}{t}\right) \psi(x, t) dx dt = \int_\alpha^T t \int_I U_\epsilon(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi dt, \quad (2.31)$$

onde  $I = \left[-\frac{L}{\alpha}, \frac{L}{\alpha}\right]$ .

Como  $\psi(t, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  para cada  $t > 0$ , segue de (2.23) que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_I U_\epsilon(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi = \int_I V(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \psi(t\sigma_j, t); \quad t \in [\alpha, T]. \quad (2.32)$$

Notamos que, da hipótese ii) temos:

$$\left\| t \int_I U_\epsilon(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi \right\| \leq T \|\psi\|_\infty \int_I \|U_\epsilon(\xi)\| d\xi = K; \quad t \in [\alpha, T],$$

onde  $K$  é uma constante positiva que não depende de  $\epsilon$ . Portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\alpha^T t \int_I U_\epsilon(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi dt = \int_\alpha^T \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} t \int_{-\infty}^\infty U_\epsilon(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi dt. \quad (2.33)$$

Logo, de (2.31)-(2.33), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty U_\epsilon\left(\frac{x}{t}\right) \psi(x, t) dx dt &= \int_\alpha^T t \int_I V(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi dt \\ &\quad + \int_\alpha^T t \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \psi(t\sigma_j, t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V\left(\frac{x}{t}\right) \psi(x, t) dx dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \int_0^\infty t \psi(t\sigma_j, t) dt, \end{aligned}$$

que é (2.22). ■

**Teorema 2.7.** Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $U_\epsilon$  solução suave de (2.1). Suponhamos i) e ii) do Teorema 2.6 e ainda que:

iii) para cada  $\xi \in \mathbb{R} - \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\}$  a sequência  $\{\dot{U}_\epsilon(\xi)\}$  seja limitada.

Então:

$$F(U_\epsilon(\xi)) \rightharpoonup F(D) \quad (2.34)$$

e

$$F(U_\epsilon(\frac{x}{t})) \rightharpoonup F(\bar{D}), \quad (2.35)$$

onde  $F(D)$  e  $F(\bar{D})$  são, respectivamente, as distribuições definidas em (2.19) e (2.20).

**Demonstração:** Vamos inicialmente provar a convergência fraca (2.34). Fixemos  $j \in \{1, 2, \dots, k+1\}$  e tomemos  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  com  $\text{supp } \varphi \subset I = [a, b]$ ,  $\sigma_j \in I$  e  $\sigma_i \notin I$  se  $i \neq j$ .

Da equação em (2.1) temos, para cada  $\xi \in I$  :

$$\begin{aligned} F(U_\epsilon(\xi)) &= F(U_\epsilon(a)) + \epsilon \dot{U}_\epsilon(\xi) - \epsilon \dot{U}_\epsilon(a) + \int_a^\xi \eta \dot{U}_\epsilon(\eta) d\eta \\ &= [F(U_\epsilon(a)) - \epsilon \dot{U}_\epsilon(a) - a U_\epsilon(a)] + \epsilon \dot{U}_\epsilon(\xi) + \xi U_\epsilon(\xi) - \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Logo,

$$\int_a^b F(U_\epsilon(\xi)) \varphi(\xi) d\xi = I_\epsilon^1 + I_\epsilon^2 + I_\epsilon^3 - I_\epsilon^4, \quad (2.37)$$

onde:

$$I_\epsilon^1 = [F(U_\epsilon(a)) - \epsilon \dot{U}_\epsilon(a) - a U_\epsilon(a)] \int_a^b \varphi(\xi) d\xi,$$

$$I_\epsilon^2 = \epsilon \int_a^b \dot{U}_\epsilon(\xi) \varphi(\xi) d\xi = -\epsilon \int_a^b U_\epsilon(\xi) \dot{\varphi}(\xi) d\xi,$$

$$I_\epsilon^3 = \int_a^b \xi U_\epsilon(\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

e

$$I_\epsilon^4 = \int_a^b \varphi(\xi) \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta d\xi.$$

Da convergência pontual de  $U_\epsilon$  e da hipótese iii) temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^1 = [F(V(a)) - a V(a)] \int_a^b \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.38)$$

Da convergência fraca de  $\{U_\epsilon\}$  (Teor. 2.6) obtemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^2 = - \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \right) \left[ \int_a^b V(\xi) \dot{\varphi}(\xi) d\xi - C_j \dot{\varphi}(\sigma_j) \right] = 0 \quad (2.39)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^3 = \int_a^b V(\xi) \xi \varphi(\xi) d\xi + C_j \sigma_j \varphi(\sigma_j). \quad (2.40)$$

Vamos calcular  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^4$ . Notamos que da hipótese ii) segue que existe uma constante  $L > 0$ , independente de  $\epsilon$  tal que:

$$\left\| \varphi(\xi) \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta \right\| \leq \|\varphi\|_\infty \int_a^b \|U_\epsilon(\eta)\| d\eta \leq L ; \xi \in I.$$

Logo,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^4 = \int_a^b \varphi(\xi) \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta \right] d\xi.$$

Devemos então calcular:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta ; \text{ qtp } \xi \in [a, b].$$

Fixemos  $\xi \in [a, b]$ . Se  $a < \xi < \sigma_j$  então, da convergência uniforme de  $\{U_\epsilon\}$  no intervalo  $[a, \xi]$  segue que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta = \int_a^\xi V(\eta) d\eta ; \xi \in [a, \sigma_j).$$

Por outro lado, se  $\xi > \sigma_j$  sejam  $\alpha > 0$  e  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tais que  $a + \alpha < \sigma_j < \xi - \alpha$ ,  $\text{supp } \psi \subset (a, \xi)$  e  $\psi(\eta) = 1$  se  $\eta \in [a + \alpha, \xi - \alpha]$ . Então:

$$\begin{aligned} \int_a^\xi (U_\epsilon - V) d\eta &= \int_a^\xi (U_\epsilon - V) (1 - \psi) d\eta + \int_a^\xi (U_\epsilon - V) \psi d\eta \\ &= \left( \int_a^{a+\alpha} + \int_{\xi-\alpha}^\xi \right) (U_\epsilon - V) (1 - \psi) d\eta + \int_a^\xi (U_\epsilon - V) \psi d\eta. \end{aligned}$$

Da convergência uniforme de  $\{U_\epsilon\}$  no intervalo  $[a, a + \alpha]$  (hipótese ii)) segue que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\| \int_a^{a+\alpha} (U_\epsilon - V) (1 - \psi) d\eta \right\| \leq \|1 - \psi\|_\infty \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\| \int_a^{a+\alpha} (U_\epsilon - V) d\eta \right\| = 0.$$

Analogamente, da convergência uniforme de  $\{U_\epsilon\}$  no intervalo  $[\xi - \alpha, \xi]$ , temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\| \int_{\xi-\alpha}^\xi (U_\epsilon - V) (1 - \psi) d\eta \right\| = 0. \quad (2.41)$$

Portanto, de (2.21) temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^\xi [U_\epsilon - V] d\eta &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^\xi (U_\epsilon - V) \psi d\eta \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\epsilon - V) \psi d\eta = C_j \psi(\sigma_j) = C_j ; \xi \in (\sigma_j, b] \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^\xi U_\epsilon(\eta) d\eta = \int_a^\xi V(\eta) d\eta + \tilde{C}_j(\xi) ; \xi \in [a, \sigma_j) \cup (\sigma_j, b],$$

onde,

$$\tilde{C}_j(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi \in [a, \sigma_j) \\ C_j & ; \xi \in (\sigma_j, b] \end{cases}.$$

Finalmente podemos calcular  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^4$ . Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon^4 &= \int_a^b \varphi \left[ \int_a^\xi V d\eta \right] d\xi + \int_a^b \tilde{C}_j \varphi d\xi = \int_a^b \varphi \left[ \int_a^\xi V d\eta \right] d\xi + C_j \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi \\ &= \int_a^{\sigma_j} \varphi \left[ \int_a^\xi V d\eta \right] d\xi + \int_{\sigma_j}^b \varphi \left[ \int_a^\xi V d\eta \right] d\xi + C_j \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi \\ &= U_{j-1} \int_a^{\sigma_j} \varphi [\xi - a] d\xi + \int_{\sigma_j}^b \varphi \left[ (\sigma_j - a)U_{j-1} + \int_{\sigma_j}^\xi V d\eta \right] d\xi + C_j \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi \\ &= U_{j-1} \int_a^{\sigma_j} \varphi [\xi - a] d\xi + \int_{\sigma_j}^b \varphi [(\sigma_j - a)U_{j-1} + U_j(\xi - \sigma_j)] d\xi + C_j \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi \\ &= -aU_{j-1} \int_a^{\sigma_j} \varphi d\xi + [C_j - \sigma_j(U_j - U_{j-1})] \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi + \int_a^b V[\xi\varphi] d\xi \\ &= -aV(a) \int_a^{\sigma_j} \varphi d\xi - [F(V(b)) - F(V(a))] \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi + \int_a^b V[\xi\varphi] d\xi. \end{aligned}$$

Logo, de (2.37)-(2.40) obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b F(U_\epsilon) \varphi d\xi &= [F(V(a)) - aV(a)] \int_a^{\sigma_j} \varphi d\xi + \int_a^b V[\xi\varphi] d\xi + C_j \sigma_j \varphi(\sigma_j) \\ &\quad + aV(a) \int_a^{\sigma_j} \varphi d\xi + [F(V(b)) - F(V(a))] \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi - \int_a^b V[\xi\varphi] d\xi \\ &= F(V(a)) \int_a^{\sigma_j} \varphi d\xi + [F(V(b)) - F(V(a))] \int_{\sigma_j}^b \varphi d\xi + C_j \sigma_j \varphi(\sigma_j) \\ &= \int_a^b F(V) \varphi d\xi + C_j \sigma_j \varphi(\sigma_j), \end{aligned}$$

que é (2.34) para  $\varphi$  com suporte contido numa vizinhança de  $\sigma_j$ . Para completarmos a demonstração de (2.34), escrevemos uma função teste arbitrária  $\phi$  como em (2.30) e obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b F(U_\epsilon) \phi d\xi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b F(U_\epsilon) \left( \sum_{i=1}^{i=k+1} \phi_i \right) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{i=k+1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b F(U_\epsilon) \phi_i d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{i=k+1} \int_a^b F(V) \phi_i d\xi + \sum_{i=1}^{i=k+1} C_i \sigma_i \phi_i(\sigma_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b F(V) \left( \sum_{i=1}^{i=k+1} \phi_i \right) d\xi + \sum_{i=1}^{i=k+1} C_i \sigma_i \phi(\sigma_i) \\
&= \int_a^b F(V) \phi d\xi + \sum_{i=1}^{i=k+1} C_i \sigma_i \phi(\sigma_i),
\end{aligned}$$

que é (2.34) para uma função teste arbitrária  $\phi$ .

Vamos agora verificar (2.35). Seja  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  e sejam  $L$ ,  $\alpha$  e  $T$  constantes positivas tais que  $\text{supp } \psi \subset [-L, L] \times [\alpha, T]$ . Temos:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(U_\epsilon(\frac{x}{t})) \psi(x, t) dx dt = \int_\alpha^T t \int_I F(U_\epsilon(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi dt, \quad (2.42)$$

onde  $I = \left[ -\frac{L}{\alpha}, \frac{L}{\alpha} \right]$ .

Suponhamos por enquanto que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\alpha^T t \int_I F(U_\epsilon(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi dt = \int_\alpha^T \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} t \int_I F(U_\epsilon(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi dt. \quad (2.43)$$

Então, como  $\psi(t, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  para cada  $t \in [\alpha, T]$ , temos de (2.34):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_I F(U_\epsilon(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi = \int_I F(V(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \sigma_j \psi(t \sigma_j, t),$$

para cada  $t \in [\alpha, T]$ .

Portanto, de (2.42) e (2.43) temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(U_\epsilon(\frac{x}{t})) \psi(x, t) dx dt &= \int_\alpha^T t \int_I F(V(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi dt \\
&\quad + \int_\alpha^T t \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \sigma_j \psi(t \sigma_j, t) dt \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(V(\frac{x}{t})) \psi(x, t) dx dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \sigma_j \int_0^\infty t \psi(t \sigma_j, t) dt,
\end{aligned}$$

que é (2.35).

Devemos, para finalizar a demonstração, verificar (2.43). Para isto basta mostrarmos que

$$\left\| \int_I F(U_\epsilon(\xi)) \psi(\xi t, t) d\xi \right\| \leq K ; t \in [\alpha, T], \quad (2.44)$$



para alguma constante positiva  $K$ , independente de  $\epsilon$ .

De (2.36) com  $a = -\frac{L}{\alpha}$  temos, para  $\xi \in I$  :

$$F(U_\epsilon(\xi)) = K_\epsilon + \epsilon \dot{U}_\epsilon(\xi) + \xi U_\epsilon(\xi) - \int_{-\frac{L}{\alpha}}^{\xi} U_\epsilon(\eta) d\eta,$$

onde:

$$K_\epsilon = F(U_\epsilon(-\frac{L}{\alpha})) - \epsilon \dot{U}_\epsilon(-\frac{L}{\alpha}) + \frac{L}{\alpha} U_\epsilon(-\frac{L}{\alpha}).$$

Logo:

$$\begin{aligned} \int_I F(U_\epsilon(\xi)) \psi(t\xi, t) d\xi &= K_\epsilon \int_I \psi(t\xi, t) d\xi \\ &\quad + \int_I \left[ \epsilon \dot{U}_\epsilon(\xi) + \xi U_\epsilon(\xi) - \int_{-\frac{L}{\alpha}}^{\xi} U_\epsilon(\eta) d\eta \right] \psi(t\xi, t) d\xi \\ &= K_\epsilon \int_I \psi(t\xi, t) d\xi - \epsilon t \int_I U_\epsilon(\xi) \psi_x(t\xi, t) d\xi \\ &\quad + \int_I \left[ \xi U_\epsilon(\xi) + \int_{-\frac{L}{\alpha}}^{\xi} U_\epsilon(\eta) d\eta \right] \psi(t\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

Como (hipóteses i) e ii):

$$K_\epsilon \rightarrow \left[ F(V(-\frac{L}{\alpha})) + \frac{L}{\alpha} V(-\frac{L}{\alpha}) \right],$$

temos que  $\|K_\epsilon\| \leq C$ , para alguma constante positiva  $C$ , independente de  $\epsilon > 0$ .

Logo:

$$\left\| K_\epsilon \int_I \psi(t\xi, t) d\xi \right\| \leq 2C \frac{L}{\alpha} \|\psi\|_\infty ; t \in [\alpha, T].$$

Por outro lado, da hipótese ii) segue que existe constante positiva  $M$ , também independente de  $\epsilon$ , tal que

$$\int_I \|U_\epsilon(\xi)\| d\xi \leq M.$$

Assim, para cda  $t \in [\alpha, T]$  :

$$\epsilon t \left\| \int_I U_\epsilon(\xi) \psi_x(t\xi, t) d\xi \right\| \leq \epsilon T \|\psi_x\|_\infty \int_I \|U_\epsilon(\xi)\| d\xi \leq T \|\psi_x\|_\infty M,$$

$$\left\| \int_I \xi U_\epsilon(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi \right\| \leq \frac{L}{\alpha} \|\psi\|_\infty \int_I \|U_\epsilon(\xi)\| d\xi \leq \frac{L}{\alpha} \|\psi\|_\infty M$$

e

$$\left\| \int_I \int_{-\frac{L}{\alpha}}^{\xi} U_\epsilon(\eta) d\eta \psi(t\xi, t) d\xi \right\| \leq \frac{2L}{\alpha} \|\psi\|_\infty \int_I \|U_\epsilon(\xi)\| d\xi \leq \frac{2L}{\alpha} \|\psi\|_\infty M.$$

Portanto, temos (2.44) com

$$K = 2C \frac{L}{\alpha} \|\psi\|_{\infty} + M \left( T \|\psi_x\|_{\infty} + \frac{3L}{\alpha} \|\psi\|_{\infty} \right),$$

o que justifica (2.43). ■

Mostraremos a seguir que a distribuição  $D$  é solução de

$$\dot{F}(U) - \xi \dot{U} = 0 \quad (2.45)$$

desde que consideremos a distribuição  $F(D)$  em (2.19).

**Teorema 2.8.** *Sejam  $D$  e  $F(D)$  dados respectivamente por (2.15) e (2.19). Então*

$$\frac{d}{d\xi} F(D) - \xi \frac{d}{d\xi} D = 0. \quad (2.46)$$

**Demonstração:** Fixemos  $\sigma_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\}$ . Seja  $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  tal que  $\text{supp } \varphi \subset I = [a, b]$ ,  $\sigma_j \in I$  e  $\sigma_i \notin [a, b]$  se  $i \neq j$ .

Por definição temos:

$$\left\langle \frac{d}{d\xi} F(D) - \xi \frac{d}{d\xi} D, \varphi \right\rangle = \left\langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] \right\rangle - \langle F(D), \dot{\varphi} \rangle ; \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Calculando separadamente os termos a direita da igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] \right\rangle &= \int_a^b V \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] d\xi + C_j \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] \Big|_{\xi=\sigma_j} \\ &= U_{j-1} \int_a^{\sigma_j} \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] d\xi + U_j \int_{\sigma_j}^b \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] d\xi + C_j [\sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) + \varphi(\sigma_j)] \\ &= -\sigma_j \varphi(\sigma_j) [U_j - U_{j-1}] + C_j [\sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) + \varphi(\sigma_j)] \\ &= -\varphi(\sigma_j) [F(U_j) - F(U_{j-1})] + C_j \sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\langle F(D), \dot{\varphi} \rangle &= -\int_a^b F(V) \dot{\varphi} d\xi - C_j \sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) \\ &= -F(U_j) \int_{\sigma_j}^b \dot{\varphi} d\xi - F(U_{j-1}) \int_a^{\sigma_j} \dot{\varphi} d\xi - C_j \sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) \\ &= \varphi(\sigma_j) [F(U_j) - F(U_{j-1})] - C_j \sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j). \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] \right\rangle - \langle F(D), \dot{\varphi} \rangle = 0,$$

se  $\varphi$  for uma função teste com suporte contido em uma vizinhança de  $\sigma_j$ .

Se  $\phi$  for uma função arbitrária, então escrevemos novamente  $\phi$  como em (2.30) e obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \phi] \right\rangle - \langle F(D), \dot{\phi} \rangle &= \left\langle D, \frac{d}{d\xi} \left[ \xi \sum_{i=1}^{i=k+1} \phi_i \right] \right\rangle - \left\langle F(D), \frac{d}{d\xi} \sum_{i=1}^{i=k+1} \phi_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{i=k+1} \left\langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \phi_i] \right\rangle - \sum_{i=1}^{i=k+1} \langle F(D), \dot{\phi}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{i=k+1} \left[ \left\langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \phi_i] \right\rangle - \langle F(D), \dot{\phi}_i \rangle \right] = 0, \end{aligned}$$

que é (2.46). ■

A seguir vamos verificar que a distribuição  $\bar{D}$  é solução de

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0,$$

desde que definamos  $F(\bar{D})$  como em (2.20).

**Corolário 2.9.** *Sejam  $\bar{D}$  e  $F(\bar{D})$  as distribuições definidas respectivamente em (2.18) e (2.20). Então:*

$$\partial_t \bar{D} + \partial_x F(\bar{D}) = 0. \quad (2.47)$$

**Demonstração:** *Por definição, temos:*

$$\langle \partial_t \bar{D} + \partial_x F(\bar{D}), \psi \rangle = - \langle \bar{D}, \psi_t \rangle - \langle F(\bar{D}), \psi_x \rangle ; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+).$$

Assim, se  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , então:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \bar{D} + \partial_x F(\bar{D}), \psi \rangle &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V\left(\frac{x}{t}\right) \psi_t dx dt - \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \int_0^\infty t \psi_t(\sigma_j t, t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(V\left(\frac{x}{t}\right)\right) \psi_x dx dt - \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \sigma_j \int_0^\infty t \psi_x(\sigma_j t, t) dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[ V\left(\frac{x}{t}\right) \psi_t + F\left(V\left(\frac{x}{t}\right)\right) \psi_x \right] dx dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \int_0^\infty t [\psi_t(\sigma_j t, t) + \sigma_j \psi_x(\sigma_j t, t)] dt. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^\infty t [\psi_t(\sigma_j t, t) + \sigma_j \psi_x(\sigma_j t, t)] dt = \int_0^\infty t \frac{d}{dt} \psi(\sigma_j t, t) dt = - \int_0^\infty \psi(\sigma_j t, t) dt,$$

temos:

$$\langle \partial_t \bar{D} + \partial_x F(\bar{D}), \psi \rangle = -I + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \int_0^\infty \psi(\sigma_j t, t) dt, \quad (2.48)$$

onde,

$$I = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[ V\left(\frac{x}{t}\right) \psi_t(x, t) + F\left(V\left(\frac{x}{t}\right)\right) \psi_x(x, t) \right] dx dt.$$

Fazendo a mudança de variável  $x = \xi t$  obtemos (conforme demonstração da Prop. 2.3):

$$I = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [F(V(\xi)) - \xi V(\xi)] \dot{\varphi}(\xi) d\xi dt + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty V(\xi) t \frac{d}{dt} \psi(t\xi, t) dt d\xi,$$

onde  $\varphi(\xi) = \psi(\xi t, t)$  para cada  $t > 0$ .

Da identidade  $\langle F(D), \dot{\varphi} \rangle = \langle D, \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi] \rangle$  do Teorema 2.8, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty F(V) \dot{\varphi} d\xi + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) &= \int_{-\infty}^\infty V [\xi \dot{\varphi} + \varphi] d\xi \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j [\sigma_j \dot{\varphi}(\sigma_j) + \varphi(\sigma_j)], \end{aligned}$$

isto é:

$$\int_{-\infty}^\infty [F(V(\xi)) - \xi V(\xi)] \dot{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^\infty V(\xi) \psi(t\xi, t) d\xi + \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \psi(t\sigma_j, t).$$

Logo:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V(\xi) \psi(\xi t, t) d\xi dt + \int_0^\infty \sum_{j=1}^{j=k+1} C_j \psi(\sigma_j t, t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty V(\xi) t \frac{d}{dt} \psi(\xi t, t) dt d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty V(\xi) \int_0^\infty \frac{d}{dt} [t \psi(\xi t, t)] dt d\xi + \sum_{j=1}^{j=k+1} \int_0^\infty C_j \psi(\sigma_j t, t) dt \\ &= \sum_{j=1}^{j=k+1} \int_0^\infty C_j \psi(\sigma_j t, t) dt. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.48) obtemos (2.47). ■

### 3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RIEMANN

Neste capítulo vamos apresentar a solução fraca do *problema de Riemann*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ v_t + [vg(u)]_x = 0, \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l) ; x < 0, \\ (u_r, v_r) ; x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (3.1)$$

onde:

$$f \in C^2(\mathbb{R}) : f''(u) > 0 ; u \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$g \in C^1(\mathbb{R}) : g'(u) > 0 ; u \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

e

$$f'(u) < g(u) ; u \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Conforme mencionamos no Capítulo 1, o sistema em (3.1) é *estritamente hiperbólico* com autovalores (*velocidades características*)  $\lambda_1 = f'(u) < \lambda_2 = g(u)$ . Além disso,

$$R_1(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{vg'(u)}{f'(u) - g(u)} \end{bmatrix} \text{ e } R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

são autovetores à direita relativos às velocidades características  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente.

Portanto,  $\nabla \lambda_1 \cdot R_1 = f''(u) \neq 0$  e  $\nabla \lambda_2 \cdot R_2 \equiv 0$ , isto é, a *família característica 1 é genuinamente não linear* e a *família característica 2 é linearmente degenerada*.

A *curva integral da família i* por  $(u_l, v_l)$ , denotada por  $\mathcal{I}_i(u_l, v_l)$ , é a curva no *espaço de estados* (plano- $uv$ ) que passa por  $(u_l, v_l)$  e que, em cada ponto, tem o vetor tangente igual a  $R_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(u_l, v_l) &= \left\{ (u, v(u)) : \frac{dv}{du} = \frac{vg'(u)}{f'(u) - g(u)}, v(u_l) = v_l, u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (u, v) : v = v_l \exp \left( \int_{u_l}^u \left( \frac{g'(z)}{f'(z) - g(z)} \right) dz \right) ; u \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

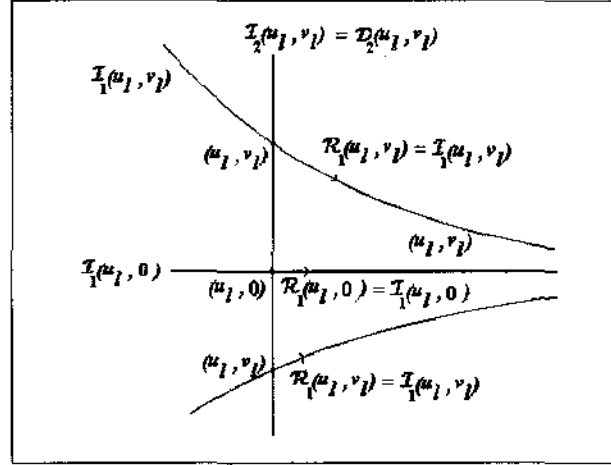


Figura 3.1: As curvas  $\mathcal{I}_1(u_l, v_l)$ ,  $\mathcal{I}_2(u_l, v_l)$ , e  $\mathcal{R}_1(u_l, v_l)$ .

e  $\mathcal{I}_2(u_l, v_l) = \{(u_l, v) : v \in \mathbb{R}\}$ . Notamos que  $\mathcal{I}_1(u_l, v_l)$  é simétrica em relação à reta  $v = 0$  e que esta reta é a curva integral da família 1, passando por  $(u_l, 0)$ .

A curva de rarefação da família  $i$  por  $(u_l, v_l)$ , denotada por  $\mathcal{R}_i(u_l, v_l)$ , é o ramo da curva  $\mathcal{I}_i(u_l, v_l)$  ao longo do qual  $\lambda_i$  é estritamente crescente. No presente caso, como o autovetor  $\lambda_2$  é constante ao longo da curva integral  $\mathcal{I}_2(u_l, v_l)$ , a curva de rarefação da família 2 não existe. A curva de rarefação da família 1 é dada por:

$$\mathcal{R}_1(u_l, v_l) = \{(u, v) \in \mathcal{I}_1(u_l, v_l) ; u \geq u_l\} \quad (3.6)$$

As curvas  $\mathcal{I}_1(u_l, v_l)$ ,  $\mathcal{I}_2(u_l, v_l)$ , e  $\mathcal{R}_1(u_l, v_l)$  estão esboçadas na Figura 3.1.

O locus de Hugoniot por  $(u_l, v_l)$ , denotado por  $\mathcal{H}(u_l, v_l)$  é o conjunto dos pontos  $(u, v)$  do espaço de estados satisfazendo ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} s(u - u_l) = f(u) - f(u_l) \\ s(v - v_l) = vg(u) - v_lg(u_l), \end{cases} \quad (3.7)$$

para algum  $s \in \mathbb{R}$ . Mostra-se [17], que  $\mathcal{H}(u_l, v_l)$  é constituída de duas curvas passando por  $(u_l, v_l)$ , sendo que neste ponto, uma delas, denotada por  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$ , tangencia a curva integral da família 1, e a outra, denotada por  $\mathcal{H}_2(u_l, v_l)$  tangencia a curva integral da família 2. Para cada ponto  $(u, v)$  de  $\mathcal{H}_i(u_l, v_l)$ , denotamos por  $s_i = s_i(u, v)$  o número real  $s$  tal que a tripla  $(s, u, v)$  satisfaz (3.7).

No caso do sistema em (3.1) temos:

$$\mathcal{H}_2(u_l, v_l) = \{(u_l, v) ; v \in \mathbb{R}\} = \mathcal{I}_2(u_l, v_l) ,$$

$$s_2 \equiv \lambda_2(u_l) = g(u_l),$$

$$s_1(u) = \frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} ; u \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{H}_1(u_l, v_l) = \left\{ (u, v(u)) ; v(u) = v_l \left( \frac{s_1(u) - g(u_l)}{s_1(u) - g(u)} \right) ; u \in I(u_l) \right\},$$

onde  $I(u_l)$  é o conjunto onde  $v = v(u)$  é definida. Se  $v_l = 0$ , então  $I(u_l) = (-\infty, \infty)$  e  $v \equiv 0$ . Se  $v_l \neq 0$  então:

$$I(u_l) = \{u \in \mathbb{R} : s_1(u) - g(u) \neq 0\}.$$

Notamos que  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  é simétrica em relação à reta  $v = 0$  e que esta reta é o locus de Hugoniot por  $(u_l, 0)$ .

Notamos também que:

$$\mathcal{H}_2(u_l, v_l) = \mathcal{I}_2(u_l, v_l),$$

isto é, a porção do locus de Hugoniot por  $(u_l, v_l)$  que tangencia a curva integral da família 2, na verdade coincide com ela. Este é um fato geral [17] que ocorre na família característica  $i$ , quando esta família é linearmente degenerada e o sistema é estritamente hiperbólico. Nessa situação  $s_i$  é constante ao longo de  $\mathcal{I}_i(u_l, v_l)$  e esta curva passa a ser denominada *curva de contato da família  $i$*  por  $(u_l, v_l)$  e denotada por  $\mathcal{D}_i(u_l, v_l)$ . Portanto, no caso do sistema (3.1),  $\mathcal{D}_2(u_l, v_l)$  também é a reta  $u = u_l ; u \in \mathbb{R}$  (Fig. 3.1).

A *curva de choque da família  $i$* , passando por  $(u_l, v_l)$ , denotada por  $\mathcal{S}_i(u_l, v_l)$ , é o ramo de  $\mathcal{H}_i(u_l, v_l)$  ao longo do qual valem as *condições de entropia (ou desigualdades) de Lax*:

$$\begin{cases} s_1(u) < \lambda_1(u_l), \\ \lambda_1(u) < s_1(u) < \lambda_2(u), \end{cases} \quad i = 1, \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \lambda_1(u_l) < s_2(u) < \lambda_2(u_l), \\ \lambda_2(u) < s_2(u), \end{cases} \quad i = 2. \quad (3.9)$$

Como  $s_2$  e  $\lambda_2$  são constantes e iguais a  $g(u_l)$  ao longo de  $\mathcal{H}_2(u_l, v_l)$ , as desigualdades (3.9) não são satisfeitas no caso  $i = 2$ , isto é, a curva de choque da família 2 não existe.

No caso  $i = 1$ , a condição de entropia (3.8) é:

$$\begin{cases} s_1(u) < f'(u_l) \\ f'(u) < s_1(u) < g(u), \end{cases} \quad (3.10)$$

que, em vista da convexidade de  $f$ , é equivalente a  $u < u_l$  e  $s_1(u) < g(u)$ . Assim,

$$\mathcal{S}_1(u_l, v_l) = \{(u, v) \in \mathcal{H}_1(u_l, v_l) : u \leq u_l, s_1(u) < g(u)\}. \quad (3.11)$$

Se  $u < u_l$ , temos:

$$s_1(u) = f'(\bar{u}) < g(\bar{u}) < g(u_l), \quad (3.12)$$

para algum  $\bar{u} \in (u, u_l)$ . Como,

$$s_1(u_l) = \lim_{u \rightarrow u_l} \frac{f'(u) - f'(u_l)}{u - u_l} = f'(u_l) < g(u_l),$$

temos  $s_1 - g < 0$  em uma vizinhança de  $u_l$ .

Concluimos que para algum  $\alpha > 0$ ,  $(u_l - \alpha, u_l) \subset I(u_l)$ . Seja  $u_l^*$  tal que:

$$u_l^* = \inf \{u < u_l : (u, u_l) \subset I(u_l)\}.$$

Então  $(u_l^*, u_l) \subset I(u_l)$ , e se  $(u, v) \in \mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  com  $u \in (u_l^*, u_l)$ , temos, de (3.12):

$$\left( \frac{s_1(u) - g(u_l)}{s_1(u) - g(u)} \right) > 0.$$

Se  $u_l^*$  é finito temos  $s_1(u_l^*) - g(u_l^*) = 0$  e se, além disso,  $v_l > 0$  (respec.  $v_l < 0$ ) então a componente  $v$  de  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  tende a  $+\infty$  (respec.  $-\infty$ ) quando  $u$  tende a  $u_l^*$  em  $(u_l^*, u_l)$ .

Das considerações acima, concluimos que se  $u_l^*$  é finito, então  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  tem uma assíntota sobre a reta  $u = u_l^*$  e o ramo de  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  que está contido na faixa  $(u_l^*, u_l) \times (-\infty, +\infty)$  é uma parte de  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$ . Porém, o(s) ramo(s) de  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  contido(s) a esquerda da reta  $u = u_l^*$  pode(m) ou não fazer parte de  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$ , dependendo do sinal da função  $s_1 - g$ . Por exemplo, se  $u_l^{**}$  é o primeiro zero de  $s_1 - g$  à esquerda de  $u_l^*$  e se  $s_1 - g < 0$  em  $(u_l^{**}, u_l^*)$  (Fig. 3.2), então  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  é parte de  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  na faixa  $(u_l^{**}, u_l^*) \times (-\infty, +\infty)$ , pois nesse caso, as desigualdades (3.10) são satisfeitas. Por outro lado, se  $s_1 - g > 0$  (Fig. 3.3) em  $(u_l^{**}, u_l^*)$ , a segunda condição de (3.10) falha, e o ramo de  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  não faz parte de  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  na faixa  $(u_l^{**}, u_l^*) \times (-\infty, +\infty)$ . Estas situações podem ocorrer repetidas vezes, dependendo do comportamento dos zeros da função  $s_1 - g$ . No caso do sistema estudado em [18]:  $f = u^2$ ,  $g = 2u + 1$ ,  $s_1 = u + u_l$  e  $s_1 - g = u_l - u - 1$ . Nesse caso,  $u_l^* = u_l - 1$  é o único zero de  $s_1 - g$  e  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  é o ramo de  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  contido na faixa  $(u_l - 1, u_l) \times (-\infty, +\infty)$ .

As figuras 3.2 e 3.3 podem ser um pouco diferentes com relação à forma das curvas. A intenção aqui é a de ilustrar o comportamento assintótico da curva de choque da família 1. Entretanto, temos a seguinte observação:

**Observação 3.1.** Se  $v_l > 0$  (respec.  $v_l < 0$ ) a curva  $\mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  se situa acima (respec. abaixo) da reta  $v = v_l$  nas regiões em que  $s_1 < g$ .



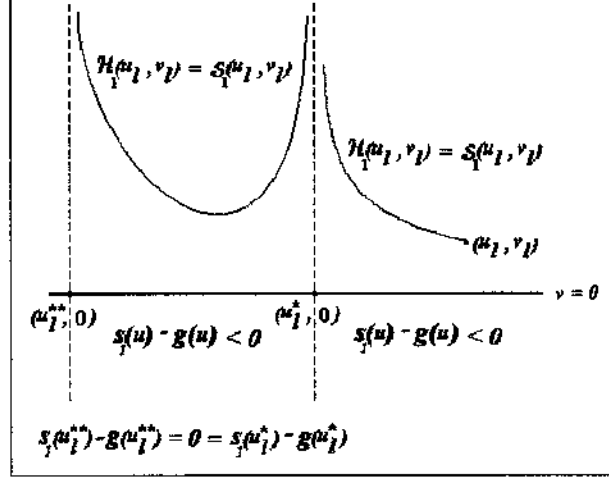


Figura 3.2:  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l) = \mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  em  $(u_l^*, u_l) \times (-\infty, +\infty) \cup (u_l^{**}, u_l^*) \times (-\infty, +\infty)$ .

De fato, se  $(u, v) \in \mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  e  $u \neq u_l$ , então  $u < u_l$  e da monotonicidade de  $g$  temos  $[g(u) - g(u_l)] < 0$ . A observação segue então de

$$[s_1(u) - g(u)](v - v_l) = v_l [g(u) - g(u_l)],$$

que obtemos somando e subtraindo  $v_l g(u)$  à segunda igualdade em (3.7).

Definimos  $\mathcal{C}_1(u_l, v_l)$ , a curva solução da família 1 por:

$$\mathcal{C}_1(u_l, v_l) = \mathcal{S}_1(u_l, v_l) \cup \mathcal{R}_1(u_l, v_l).$$

A curva solução da família 2, denotada por  $\mathcal{C}_2(u_l, v_l)$  é a reta  $u = u_l$ , isto é,

$$\mathcal{C}_2(u_l, v_l) = \{(u_l, v) : v \in \mathbb{R}\}.$$

Fixado  $(u_l, v_l)$  no espaço de estados, definimos a seguinte região  $\mathcal{R}(u_l, v_l)$  deste plano:

$$\mathcal{R}(u_l, v_l) = \{(u, v) : u \leq u_l, s_1(u) < g(u), v \in \mathbb{R}\} \cup ([u_l, +\infty) \times \mathbb{R})$$

Se  $(u_r, v_r) \in \mathcal{R}(u_l, v_l)$  então existe único  $v_m$  tal que

$$(u_r, v_r) \in \mathcal{C}_1(u_l, v_l) \cap \mathcal{C}_2(u_r, v_m), \quad (3.13)$$

isto é, todo estado  $(u_r, v_r)$  na região  $\mathcal{R}(u_l, v_l)$  está na interseção da curva  $\mathcal{C}_1(u_l, v_l)$  com a reta  $\mathcal{C}_2(u_r, v_m)$  para algum  $v_m$ , definindo o estado intermediário  $(u_r, v_m)$ .

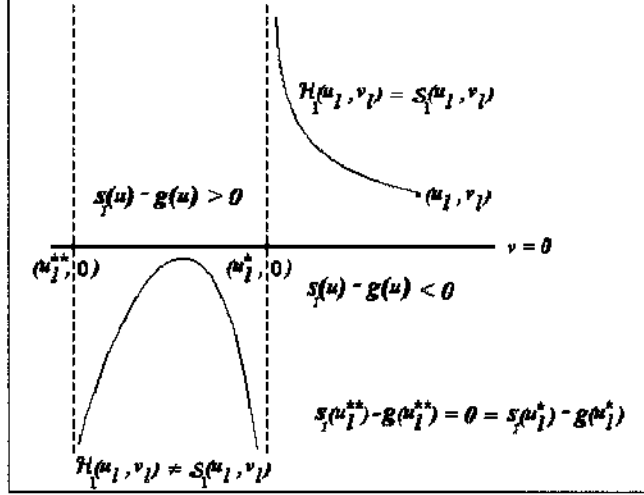


Figura 3.3:  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l) = \mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  em  $(u_l^*, u_l) \times (-\infty, +\infty)$  e  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l) \neq \mathcal{S}_1(u_l, v_l)$  em  $(u_l^{**}, u_l^*) \times (-\infty, +\infty)$ .

Este estado intermediário, é determinado de maneira única. Se  $u_r \geq u_l$ , então, denotando  $v_m$  por  $v_m^+$  temos

$$v_m = v_m^+ = v_l \exp \left( \int_{u_l}^{u_r} \left( \frac{g'(z)}{f'(z) - g(z)} \right) dz \right). \quad (3.14)$$

Se  $u_r \leq u_l$  e  $s_1(u_r) < g(u)$  então, denotando  $v_m$  por  $v_m^-$  temos

$$v_m = v_m^- = v_l \left( \frac{s_1(u_r) - g(u_l)}{s_1(u_r) - g(u_r)} \right). \quad (3.15)$$

Agora descrevemos a solução  $(u(x, t), v(x, t))$  de (3.1) para  $(u_r, v_r) \in \mathcal{R}(u_l, v_l)$ .

1. Se  $u_r \geq u_l$ , então:

$$(u(x, t), v(x, t)) = \begin{cases} (u_l, v_l) ; & x \leq \lambda_1(u_l)t, \\ ((f')^{-1}(\frac{x}{t}), \bar{v}(\frac{x}{t})) ; & \lambda_1(u_l)t \leq x \leq \lambda_1(u_r)t, \\ (u_r, v_m^+) ; & \lambda_1(u_r)t < x < \lambda_2(u_r)t, \\ (u_r, v_r) ; & \lambda_2(u_r)t < x, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde  $v_m^+$  é dado por (3.14) e  $\bar{v}$  é a função dada por

$$\bar{v}(\xi) = v_l \exp \left( \int_{u_l}^{\bar{u}(\xi)} \left( \frac{g'(z)}{f'(z) - g(z)} \right) dz \right) ; \quad \lambda_1(u_l) \leq \xi \leq \lambda_1(u_r).$$

2. Se  $u_r < u_l$  e  $s_1(u_r) < g(u_r)$ , então:

$$(u(x, t), v(x, t)) = \begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < s_1(u_r)t, \\ (u_r, v_m^-) & ; s_1(u_r)t < x < s_2(u_r)t, \\ (u_r, v_r) & ; x > s_2(u_r)t, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $v_m^-$  é dado por (3.15).

**Observação 3.2.** *Escrevendo as soluções acima na forma auto-similar e em termos das funções  $f$  e  $g$  obtemos:*

1. Se  $u_r \geq u_l$ , então  $(u(x, t), v(x, t)) = (\bar{u}(\frac{x}{t}), \bar{v}(\frac{x}{t}))$  onde:

$$\bar{u}(\xi) = \begin{cases} u_l & ; \xi \leq f'(u_l), \\ (f')^{-1}(\xi) & ; f'(u_l) \leq \xi \leq f'(u_r), \\ u_r & ; \xi \geq f'(u_r), \end{cases}$$

e

$$\bar{v}(\xi) = \begin{cases} v_l \exp \left( \int_{u_l}^{\bar{u}(\xi)} \left( \frac{g'(z)}{f'(z) - g(z)} \right) dz \right) & ; \xi < g(u_r), \\ v_r & ; \xi > g(u_r); \end{cases}$$

2. Se  $u_r < u_l$  e  $s_1(u_r) = s = \frac{f'(u_r) - f'(u_l)}{u_r - u_l} < g(u_r)$ , então

$(u(x, t), v(x, t)) = (u_s(\frac{x}{t}), \tilde{v}(\frac{x}{t}))$ , onde:

$$u_s(\xi) = \begin{cases} u_l & ; \xi < s, \\ u_r & ; \xi > s, \end{cases}$$

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} v_l & ; \xi < s, \\ v_m & ; s < \xi < g(u_r), \\ v_r & ; \xi > g(u_r), \end{cases}$$

e

$$v_m = v_l \left( \frac{s - g(u_l)}{s - g(u_r)} \right).$$

Nas figuras 3.4, 3.5 e 3.6 indicamos a solução no espaço de estados. Denotamos  $S_1(u_l, v_l)$  por  $S_1$ ,  $\mathcal{R}_1(u_l, v_l)$  por  $R_1$  e  $\mathcal{D}_2(u_l, v_l)$  por  $D_2$ .

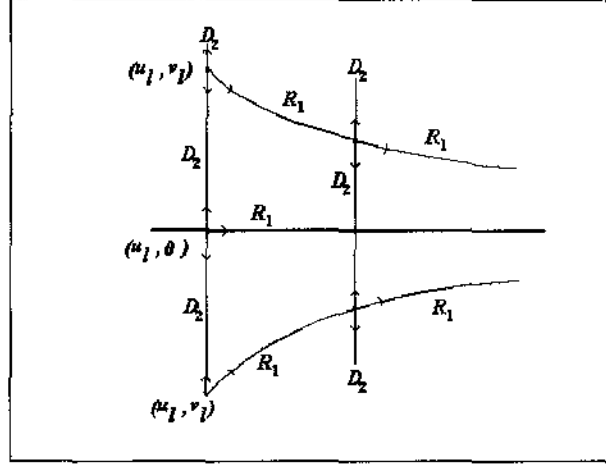


Figura 3.4: Solução do problema de Riemann para  $u_r \geq u_l$ .

As funções (3.16) e (3.17) são denominadas *ondas compostas*. Quando os estados intermediários coincidem com o estado a direita ou com o estado a esquerda, isto é, quando  $v_m^\pm = v_l$  ou  $v_m^\pm = v_r$ , então as ondas compostas também são denominadas ondas simples. Especificamente, as ondas simples são as seguintes:

- *onda de rarefação da família 1*, se  $v_m^+ = v_r$  em (3.16);
- *onda de choque da família 1* se  $v_m^- = v_l$  em (3.17);
- *descontinuidade de contato da família 2*, se  $v_m^+ = v_l$  em (3.16) ou se  $v_m^- = v_l$  em (3.17), pois de (3.14) segue que  $v_m^+ = v_l$  se, e somente se,  $u_l = u_r$  e de (3.15) segue que  $v_m^- = v_l$  se, e somente se,  $u_l = u_r$ . Além disso,  $s_2(u_r) = \lambda_2(u_r)$ .

Por construção, a solução apresentada acima é única, na classe das ondas compostas, uma vez que os estados intermediários são unicamente determinados.

Observamos que nas regiões em que  $u < u_l$  e  $g(u) \leq s_1(u)$ , as quais denominamos  $\delta$ -regiões, não podemos resolver o problema de Riemann por ondas compostas. De fato, as retas  $s_1(u) = g(u)$ , não encontram nenhuma das curvas das famílias 1 ou 2 por  $(u_l, v_l)$ . Além disso, se  $g(u_r) < s_1(u_r)$ , apesar de existir  $(u_r, v_m) \in \mathcal{H}_1(u_l, v_l) \cap \mathcal{D}_2(u_l, v_l)$ , não podemos superpor a descontinuidade

$$\begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < s_1(u_r)t, \\ (u_r, v_m) & ; x > s_1(u_r)t, \end{cases}$$

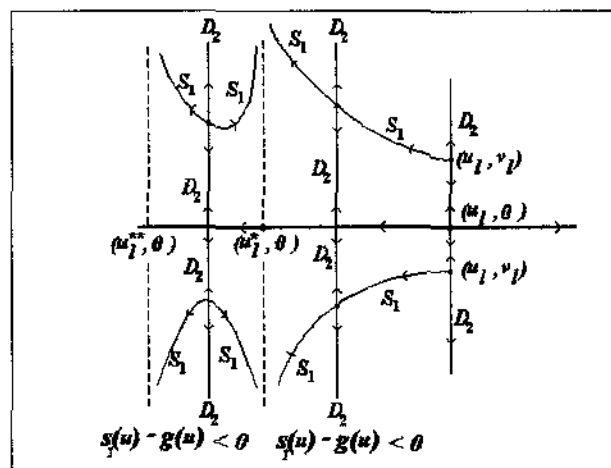


Figura 3.5: Solução do problema de Riemann em  $(u_l^{**}, u_l^*) \cup (u_l^*, u_l)$ , quando  $s_1 < g$  em  $(u_l^{**}, u_l^*)$ .

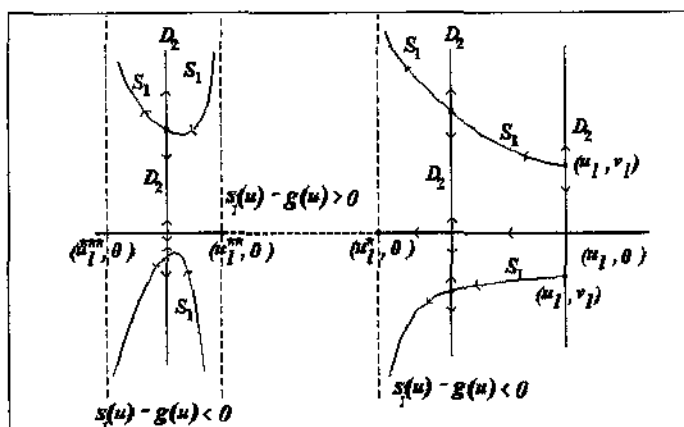


Figura 3.6: Solução do problema de Riemann em  $(u_l^{***}, u_l^{**}) \cup (u_l^*, u_l)$ , quando  $s_1 < g$  em  $(u_l^{***}, u_l^{**})$ . (Aqui  $u_l^{***}$  é um outro possível zero de  $s_1 - g$  à esquerda de  $u_l^{**}$ .)

à descontinuidade de contato (lembrando que  $s_2 = \lambda_2 = g(u_r)$ ):

$$\begin{cases} (u_r, v_m) & ; x < g(u_r)t, \\ (u_r, v_r) & ; x > g(u_r)t, \end{cases}$$

uma vez que na região  $\{(x, t) ; g(u_r)t < x < s_1(u_r)t\}$  do plano- $xt$  temos que definir a solução por  $v_l$  e também por  $v_r$ . Entretanto, se  $(u_r, v_r)$  está sobre o ramo do locus de Hugoniot  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$ , com  $u_r < u_l$  e  $s_1(u_r) > g(u_r)$ , então a descontinuidade

$$\begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < s_1(u_r)t, \\ (u_r, v_r) & ; x > s_1(u_r)t, \end{cases} \quad (3.18)$$

é uma solução fraca do problema de Riemann, apesar de não satisfazer as desigualdades em (3.8). Este tipo de descontinuidade, denominada choque super-compressivo, tem sido utilizada na solução de alguns problemas de Riemann. Neste caso, os estados iniciais e a velocidade de choque satisfazem às desigualdades:

$$\lambda_i(u_r) \leq s_1 \leq \lambda_i(u_l) ; i = 1, 2.$$

Concluimos, das considerações acima, que não podemos resolver o problema de Riemann (3.1) utilizando ondas clássicas, para  $(u_r, v_r)$  em um  $\delta$ -região, exceto se  $(u_r, v_r) \in \mathcal{H}_1(u_l, v_l)$ , caso em que podemos utilizar um choque super-compressivo.

Mostraremos no Capítulo 6 que as ondas compostas são limites fracos (no sentido de distribuições) dos leques de viscosidade  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  associados ao problema de Riemann (3.1), isto é, das soluções do seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \epsilon t u_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v_t + [vg(u)]_x = \epsilon t v_{xx}, & \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < 0, \\ (u_r, v_r) & ; x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.19)$$

Além disso, veremos também que se  $u_r < u_l$  e  $g(u_r) \leq s_1(u_r)$ , isto é, se  $(u_r, v_l)$  está contido em uma  $\delta$ -região, então as soluções de (3.19) também convergem fracamente para uma distribuição  $S_\delta = (u_s, v_\delta)$  definida por:

$$\begin{aligned} \langle u_s, \phi \rangle &:= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_s\left(\frac{x}{t}\right) \phi dx dt \\ \langle v_\delta, \phi \rangle &:= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_s\left(\frac{x}{t}\right) \phi dx dt + c \int_0^{+\infty} t \phi(st, t) dt \end{aligned} \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+), \quad (3.20)$$

onde:

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}, \quad (3.21)$$

$$c = s [v_r - v_l] - [v_r g(u_r) - v_l g(u_l)], \quad (3.22)$$

$$u_s(\xi) = \begin{cases} u_l & ; \xi < s, \\ u_r & ; \xi > s, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$v_s(\xi) = \begin{cases} v_l & ; \xi < s, \\ v_r & ; \xi > s. \end{cases} \quad (3.24)$$

Observamos que a distribuição  $u_s$  é uma distribuição regular, ou seja, é dada por uma função em  $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , e a distribuição  $v_s$  é a soma de uma distribuição regular  $v_s$  com uma distribuição singular que é a delta de Dirac com peso  $ct$ , com suporte sobre a reta  $x = st$ . Vamos denominar a distribuição  $S_\delta = (u_s, v_s)$ , de acordo com [22], por  $\delta$ -onda de choque, ou simplesmente  $\delta$ -choque. A velocidade do  $\delta$ -choque é  $s$ , dada por (3.21).

Notamos que no caso em que  $(u_r, v_r)$  está sobre um ramo de  $\mathcal{H}_1(u_l, v_l)$  com  $u_r < u_l$  e  $g(u_r) < s_1(u_r)$ , a constante  $c$  em (3.22) é nula, isto é, o choque super-compressivo (3.18) coincide com o  $\delta$ -choque.

O fato da distribuição  $S_\delta$  também ser obtida (assim como as ondas compostas) como limite fraco dos leques de viscosidade associados ao problema de Riemann (3.1) deixa aberta a possibilidade desta distribuição ser uma solução fraca de (3.1). Uma dificuldade nesse sentido é a definição da distribuição produto  $v_\delta g(u_s)$ . Para uma função suave  $a = a(x, t)$ , o produto  $v_\delta a$  é naturalmente definido por:

$$\begin{aligned} \langle v_\delta a, \phi \rangle &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_s a(x, t) \phi(x, t) dx dt + c \int_0^{+\infty} t a(st, t) \phi(st, t) dt \\ &= \langle v_\delta, a \phi \rangle ; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Veremos a seguir que  $v_\delta g(u_s)$  pode ser definido como acima de modo que  $S_\delta = (u_s, v_\delta)$  seja uma solução fraca de (3.1). Para isto devemos definir também o valor de  $g(u_s)$  sobre a reta de descontinuidade  $x = st$ , o que é equivalente a definir a função  $u_s = u_s(\xi)$  em  $\xi = s$ .

**Proposição 3.1.** *Seja  $S_\delta = (u_s, v_\delta)$  um  $\delta$ -choque definido por (3.20)-(3.24). Definamos a função  $u_s(\frac{st}{t})$  sobre a reta  $x = st$  por:*

$$u_s(\frac{st}{t}) = g^{-1}(s) ; t > 0 \quad (3.25)$$

e a distribuição produto  $v_\delta g(u_s)$  por:

$$\begin{aligned} &\langle v_\delta g(u_s), \phi \rangle \\ &:= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_s g(u_s(\frac{x}{t})) \phi dx dt + c \int_0^{+\infty} t g(u_s(\frac{st}{t})) \phi(st, t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_s g(u_s(\frac{x}{t})) \phi dx dt + cs \int_0^{+\infty} t \phi(st, t) dt ; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Então  $S_\delta$  é uma solução fraca (no sentido das distribuições) do sistema em (3.1).

**Demonstração:** Escrevendo a distribuição  $S_\delta$  na forma vetorial:

$$\langle S_\delta, \phi \rangle = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V\left(\frac{x}{t}\right) \phi(x, t) dx dt + C \int_0^\infty t \phi(st, t) dt ; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+),$$

verificamos que  $S_\delta$  coincide com a distribuição  $\tilde{D}$  definida em (2.18) (Cap. 2) com  $k = 0$ ,  $\sigma_1 = s$ ,  $C = C_1 = (0, c)$  e

$$V = (u_s, v_s).$$

Portanto, do Corolário 2.9 do Capítulo 2 segue que:

$$\partial_t S_\delta + \partial_x F(S_\delta) = 0, \quad (3.27)$$

onde  $F(S_\delta)$  é a distribuição definida por:

$$\begin{aligned} \langle F(S_\delta), \phi \rangle = & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F\left(V\left(\frac{x}{t}\right)\right) \phi(x, t) dx dt \\ & + C \int_0^\infty t s \phi(st, t) dt ; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Como  $C = (0, c)$ , a primeira componente de  $F(S_\delta)$  é a função  $f(u_s(\frac{x}{t}))$  vista como distribuição regular e a segunda componente é a distribuição produto  $v_\delta g(u)$  definida em (3.26). Portanto, (3.27):

$$\begin{cases} \partial_t u_s + \partial_x f(u_s) = 0, \\ \partial_t v_\delta + \partial_x (v_\delta g(u)) = 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

isto é,  $S_\delta = (u_s, v_\delta)$  é solução do sistema em (3.1), no sentido das distribuições. ■

**Observação 3.3.** Na teoria desenvolvida por F. Bouchut e F. James [1] para uma equação de transporte com coeficiente descontínuo, da forma:

$$w_t + a(x, t) w_x = 0, \quad (3.29)$$

o coeficiente  $a(x, t)$  deve ser definido de maneira apropriada sobre o conjunto de pontos de descontinuidade. Derivando formalmente (3.29) com respeito a variável  $x$  e tomando  $v = w_x$ , obtemos a seguinte equação:

$$v_t + [a(x, t) v]_x = 0, \quad (3.30)$$



## 4. LEQUES DE VISCOSIDADE ESCALARES

Neste capítulo vamos considerar o problema de Riemann para uma lei de conservação escalar,

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l ; x < 0, \\ u_r ; x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

onde a função de fluxo  $f = f(u)$  é uma função suave e satisfaz a condição de convexidade estrita,

$$f''(u) > 0 ; u \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Vamos mostrar que as soluções fracas de (4.1) são obtidas como limite, quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , dos leques de viscosidade  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$  onde, conforme o Capítulo 1,  $u_\epsilon$  é solução suave do seguinte problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \dot{f}(u) - \xi \dot{u} ; \xi \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty) = u_l, \\ u(+\infty) = u_r. \end{cases} \quad (4.3)$$

Sabemos, da teoria sobre sistemas de leis de conservação [17], que as soluções fracas de (4.1)-(4.2) se dividem em dois casos:  $u_l > u_r$  e  $u_l < u_r$ . (Se  $u_l = u_r = u_0$ , a solução é  $u(x, t) \equiv u_0$ .) Se  $u_l > u_r$  a solução fraca de (4.1) é a *onda de choque*  $u_s(\frac{x}{t})$ , onde:

$$u_s(\xi) = \begin{cases} u_l ; \xi < s, \\ u_r ; \xi > s, \end{cases} \quad (4.4)$$

e

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \quad (4.5)$$

é a *velocidade de choque*. Se  $u_l < u_r$  a solução é a *onda de rarefação*  $\bar{u}(\frac{x}{t})$  onde:

$$\bar{u}(\xi) = \begin{cases} u_l ; \xi \leq f'(u_l), \\ (f')^{-1}(\xi) ; f'(u_l) \leq \xi \leq f'(u_r), \\ u_r ; \xi \geq f'(u_r), \end{cases} \quad \xi = \frac{x}{t}. \quad (4.6)$$

Organizamos este capítulo como se segue.

Na Seção 4.1 vamos verificar que, para cada  $\epsilon > 0$ , existe um único leque de viscosidade  $u_\epsilon$  associado ao problema de Riemann escalar (4.1) sem assumir a condição de convexidade (4.2). Assumiremos  $f \in C^2(\mathbb{R})$  apenas.

Na Seção 4.2 vamos mostrar algumas estimativas sobre as derivadas dos leques de viscosidade que nos ajudarão a verificar os resultados de convergência da Seção 4.3. Adiantamos que os resultados das seções 4.1 e 4.2 não exigem a condição de convexidade (4.2) para a função  $f$ .

Na Seção 4.3 vamos supor que  $f$  satisfaz (4.2) e vamos verificar que  $u_\epsilon$  converge fracamente para a solução do problema de Riemann (4.1).

Os resultados deste capítulo, exceto o de unicidade, sobre o qual não encontramos uma referência, são fatos já conhecidos que demonstramos somente para que o texto fique auto-contido.

## 4.1. Existência e Unicidade

Nesta seção vamos estabelecer a existência e unicidade de soluções para (4.3) com a função de fluxo bem geral, isto é, assumiremos apenas que  $f \in C^2(\mathbb{R})$ .

Obteremos a existência de soluções utilizando, para o caso escalar, o Teorema 2.1 do Capítulo 2. Para isto devemos verificar que existe uma constante positiva  $M$ , independente de  $L > 0$  e de  $\mu \in [0, 1]$ , tal que,

$$\max_{\xi \in [-L, L]} \|u(\xi)\| \leq M \quad (4.7)$$

para toda solução suave  $u$  do seguinte problema de valor de fronteira a dois parâmetros:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \mu f(u) - \xi \dot{u} ; \xi \in (-L, L), \\ u(-L) = \mu u_l, \\ u(L) = \mu u_r. \end{cases} \quad (4.8)$$

No caso escalar podemos facilmente estabelecer a estimativa a priori (4.7). Inclusive podemos tomar  $M$  também independente de  $\epsilon > 0$  (o que será fundamental para demonstrarmos a convergência na próxima seção). Este fato é consequência da seguinte proposição.

**Proposição 4.1.** *Seja  $u$  solução suave de:*

$$\epsilon \ddot{u} = \dot{f}(u) - \xi \dot{u} \quad (4.9)$$

*em algum intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Então  $u$  é constante ou estritamente monótona.*

**Demonstração:** Observamos que (4.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{u} - \frac{1}{\epsilon} (f'(u) - \xi) \dot{u} = 0.$$

Seja  $\xi_0 \in I$ . Multiplicando a expressão acima pelo fator integrante:

$$E(\xi) = \exp \left( -\frac{1}{\epsilon} \int_{\xi_0}^{\xi} (f'(u(\eta)) - \eta) d\eta \right) > 0,$$

obtemos  $\frac{d}{d\xi} (\dot{u}(\xi) E(\xi)) = 0$ .

Portanto,  $\dot{u}(\xi) = \dot{u}(\xi_0) E(\xi)^{-1}$ , o que conclui a demonstração. ■

Vamos agora verificar a existência dos leques de viscosidade.

**Proposição 4.2.** *Para cada  $\epsilon > 0$ ,  $u_l, u_r \in \mathbb{R}$ , o problema de valor de fronteira (4.3) possui uma solução suave  $u_\epsilon$ . Além disso,*

$$\|u\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |u(\xi)| \leq \max \{|u_l|, |u_r|\}. \quad (4.10)$$

**Demonstração:** Seja  $u$  solução de (4.8) para  $L > 0$  e  $\mu \in [0, 1]$ . Da monotonicidade de  $u$  (Prop. 4.1) segue que:

$$\max_{\xi \in [-L, L]} |u(\xi)| \leq \max \{|u_l|, |u_r|\},$$

que é (4.7) com  $M = \max \{|u_l|, |u_r|\}$ , constante positiva que independe de  $L$  e de  $\mu$ . Aplicando o Teorema 2.1 do Capítulo 2, concluímos a existência de uma função suave  $u_\epsilon$ , solução de (4.3) satisfazendo (4.10), o que encerra a demonstração. ■

Agora vamos verificar a unicidade de soluções de (4.3). Notamos que se  $u_1$  e  $u_2$  forem soluções de (4.3) e se  $u = u_2 - u_1$ , então:

$$\begin{aligned} f(u_2(\xi)) - f(u_1(\xi)) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(u_2(\xi)\theta + (1-\theta)u_1(\xi)) d\theta \\ &= u(\xi) \int_0^1 f'(u_2(\xi)\theta + (1-\theta)u_1(\xi)) d\theta. \end{aligned}$$

Assim, tomando  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por:

$$h(\xi) = \int_0^1 f'(u_2(\xi)\theta + (1-\theta)u_1(\xi))d\theta ; \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.11)$$

temos que  $u$  satisfaz:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \frac{d}{d\xi} [hu] - \xi \dot{u} ; \xi \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty) = 0 = u(+\infty). \end{cases} \quad (4.12)$$

Das considerações acima e do Lema 4.3, que demonstraremos a seguir, obtemos a unicidade. Utilizaremos este Lema novamente no Capítulo 5 para verificar a unicidade dos leques de viscosidade associados ao problema de Riemann tratado lá..

**Lema 4.3.** *Sejam  $v = v(\xi)$  e  $\varphi = \varphi(\xi)$  funções suaves e limitadas satisfazendo:*

$$\epsilon \ddot{v} = \frac{d}{d\xi} [v\varphi + \psi(v)] - \xi \dot{v} ; \xi \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

onde  $\psi = \psi(v)$  é uma função suave. Suponhamos que  $v(\alpha) = v(\beta) = 0$ , onde  $a \leq \alpha < \beta \leq b$  e que:

$$\lim_{\xi \rightarrow \alpha^-} [\xi v(\xi)] = \lim_{\xi \rightarrow \beta^+} [\xi v(\xi)] = 0. \quad (4.14)$$

Então  $v \equiv 0$  em  $(a, b)$ .

**Demonstração:** Para verificarmos o Lema, basta (em vista dos resultados clássicos de unicidade para o problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias) mostrarmos que  $v$  é nula no intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $v$  não é identicamente nula em  $(\alpha, \beta)$ . Sem perda de generalidade podemos admitir que  $\alpha$  e  $\beta$  são zeros consecutivos de  $v$  (incluindo os possíveis casos  $\alpha = -\infty$  e/ou  $\beta = +\infty$ ). Se  $v(\xi) > 0$  para  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , então:

$$\dot{v}(\alpha) \geq 0 \geq \dot{v}(\beta) \text{ e } \int_{\alpha}^{\beta} v d\xi > 0.$$

Mas, integrando (4.13) obtemos a contradição:

$$\begin{aligned} 0 \geq \epsilon [\dot{v}(\beta) - \dot{v}(\alpha)] &= [v\varphi + \psi(v)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \xi \dot{v} d\xi \\ &= [v\varphi + \psi(v)]_{\alpha}^{\beta} - [\xi v]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} v d\xi > 0. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $v(\xi) < 0$  para  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , então  $\dot{v}(\alpha) \leq 0 \leq \dot{v}(\beta)$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} v d\xi < 0$  e:

$$0 \leq \epsilon [\dot{v}(\beta) - \dot{v}(\alpha)] = \int_{\alpha}^{\beta} v d\xi < 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, devemos ter  $v \equiv 0$  em  $(\alpha, \beta)$  e, consequentemente, em  $(a, b)$ . ■

**Proposição 4.4.** *Sejam  $u_1$  e  $u_2$  duas soluções suaves de (4.3). Então  $u_1 = u_2$ .*

**Demonstração:** Seja  $u = u_2 - u_1$ . Em vista de (4.12), vamos aplicar o Lema 4.3 com  $\alpha = -\infty$ ,  $\beta = +\infty$ ,  $v = u$ ,  $\varphi = h$  e  $\psi \equiv 0$ , onde  $h$  é dado por (4.11).

Como  $u(-\infty) = u(+\infty) = 0$  e as funções  $u$  e  $h$  são limitadas, para aplicarmos o referido Lema, falta verificarmos (4.14) para  $u$ . Mas isto decorre do seguinte fato:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi^m \dot{u}_i(\xi) = 0 ; i \in \{1, 2\} , m \in \mathbb{N}.$$

Este fato é uma propriedade geral dos leques de viscosidade associados ao problema de Riemann para sistemas de leis de conservação, que demonstramos no Capítulo 2 (Lema 2.4). Ele segue também de (4.22) e (4.21) abaixo. Portanto, como os limites  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi u(\xi)$  são indeterminações do tipo  $\pm\infty \cdot 0$  temos:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi u(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} [-\xi^2 \dot{u}(\xi)] = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} [-\xi^2 \dot{u}_2(\xi)] - \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} [-\xi^2 \dot{u}_1(\xi)] = 0,$$

ou seja,  $u$  também satisfaz (4.14). Agora, pelo Lema 4.3 segue que  $u \equiv 0$  em  $(-\infty, +\infty)$ , encerrando a demonstração. ■

Na próxima seção provaremos algumas estimativas sobre as derivadas dos leques de viscosidade associados ao problema de Riemann (4.1). Essas estimativas serão utilizadas na Seção 4.3.

## 4.2. Estimativas

Nesta seção vamos supor que  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e que  $u_l \neq u_r$ . Vamos denotar por  $I[u_l, u_r]$  o intervalo fechado de extremos  $u_l$  e  $u_r$ .

**Lema 4.5.** *Seja  $u_\epsilon$  solução de (4.3). Sejam  $a_\epsilon$  e  $b_\epsilon$  tais que:*

$$f'(u_\epsilon(\xi)) \geq a_\epsilon ; \xi \leq a_\epsilon \tag{4.15}$$

e

$$f'(u_\epsilon(\xi)) \leq b_\epsilon ; \xi \geq b_\epsilon. \tag{4.16}$$

(Por exemplo  $a_\epsilon = \min \{f'(u) ; u \in I[u_l, u_r]\}$  e  $b_\epsilon = \max \{f'(u) ; u \in I[u_l, u_r]\}$ .)

Então,

$$|\dot{u}_\epsilon(\xi)| \leq |\dot{u}_\epsilon(a_\epsilon)| \exp \left( -\frac{(\xi - a_\epsilon)^2}{2\epsilon} \right) ; \xi \leq a_\epsilon \quad (4.17)$$

e

$$|\dot{u}_\epsilon(\xi)| \leq |\dot{u}_\epsilon(b_\epsilon)| \exp \left( -\frac{(\xi - b_\epsilon)^2}{2\epsilon} \right) ; \xi \geq b_\epsilon. \quad (4.18)$$

**Demonstração:** Se  $\xi \geq b_\epsilon$  então,

$$\begin{aligned} |\dot{u}_\epsilon(\xi)| &= |\dot{u}_\epsilon(b_\epsilon)| \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{b_\epsilon}^{\xi} (f'(u(\eta)) - \eta) d\eta \right) \\ &\leq |\dot{u}_\epsilon(b_\epsilon)| \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{b_\epsilon}^{\xi} (b_\epsilon - \eta) d\eta \right) \\ &\leq |\dot{u}_\epsilon(b_\epsilon)| \exp \left( \frac{(2b_\epsilon(\xi - b_\epsilon) - (\xi^2 - b_\epsilon^2))}{2\epsilon} \right) \\ &= |\dot{u}_\epsilon(b_\epsilon)| \exp \left( -\frac{(\xi - b_\epsilon)^2}{2\epsilon} \right), \end{aligned}$$

o que prova (4.18).

De modo análogo, provamos (4.17). ■

**Proposição 4.6.** *Sejam:*

$$a = \min \{f'(u) ; u \in I[u_l, u_r]\} \text{ e } b = \max \{f'(u) ; u \in I[u_l, u_r]\}. \quad (4.19)$$

Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $u_\epsilon$  a única solução de (4.3). Então, para cada  $\alpha > 0$ :

1.  $\dot{u}_\epsilon$  converge uniformemente para a função nula em  $(-\infty, a - \alpha] \cup [b + \alpha, \infty)$ ;
2.  $u_\epsilon$  converge uniformemente para  $u_l$  em  $(-\infty, a - \alpha]$  e para  $u_r$  em  $[b + \alpha, \infty)$ .

**Demonstração:** Como  $u_\epsilon$  é monótona, temos  $\|u_\epsilon\|_\infty \leq M = \max \{|u_l|, |u_r|\}$  e:

$$\sup \{|f(u_\epsilon(\xi))| : \xi \in \mathbb{R}\} \leq \max \{|f(u)| : |u| \leq M\}.$$

Portanto, da Observação 2.2 do Capítulo 2 (que é consequência do Lema 2.4 do mesmo capítulo), segue que existe uma constante positiva  $K$ , que depende somente de  $a$  e  $b$ , tal que:

$$|\dot{u}(\xi)| \leq \frac{K}{\epsilon} ; \xi \in [a, b]. \quad (4.20)$$

Da monotonicidade (Prop. 4.1) de  $u_\epsilon$  temos que:

$$a \leq f'(u_\epsilon(\xi)) \leq b ; \xi \in \mathbb{R}.$$

Fazendo  $a_\epsilon = a$  e  $b_\epsilon = b$  no Lema 4.5, obtemos:

$$|\dot{u}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{K}{\epsilon} \exp\left(-\frac{(\xi - a)^2}{2\epsilon}\right) ; \xi \leq a, \quad (4.21)$$

e

$$|\dot{u}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{K}{\epsilon} \exp\left(-\frac{(\xi - b)^2}{2\epsilon}\right) ; \xi \geq b. \quad (4.22)$$

Portanto, se  $\xi \in (-\infty, a - \alpha] \cup [b + \alpha, +\infty)$  então,

$$|\dot{u}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{K}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\epsilon}\right).$$

Como  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\epsilon}\right) = 0$ , temos que  $\dot{u}_\epsilon \rightarrow 0$ , uniformemente em  $(-\infty, a - \alpha] \cup [b + \alpha, +\infty)$ , o que prova a Afirmação 1.

Provemos a Afirmação 2. Se  $b + \alpha \leq \xi < \eta$ , então:

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(\xi) - u_\epsilon(\eta)| &= \left| \int_\xi^\eta \dot{u}_\epsilon(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \frac{K}{\epsilon} \int_\xi^\eta \exp\left(-\frac{(\tau - b)^2}{2\epsilon}\right) d\tau \\ &= \frac{\sqrt{2\epsilon}K}{\epsilon} \int_{\frac{\xi-b}{\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\eta-b}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-z^2) dz \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} K \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{(\eta-b)}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-z^2) dz. \end{aligned}$$

Fazendo  $\eta \rightarrow \infty$  obtemos:

$$|u_\epsilon(\xi) - u_r| \leq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} K \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2\epsilon}}}^{+\infty} \exp(-z^2) dz ; \xi \in [b + \alpha, +\infty).$$

Como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2\epsilon}}}^{+\infty} \exp(-z^2) dz &= \frac{2}{\alpha} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \int_\rho^{+\infty} \exp(-z^2) dz \\ &= \frac{2}{\alpha} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^2 \exp(-\rho^2) = 0, \end{aligned}$$

temos que  $u_\epsilon$  converge uniformemente para  $u_r$  em  $[b + \alpha, +\infty)$ .

De modo análogo, provamos que:

$$|u_\epsilon(\xi) - u_l| \leq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} K \int_{\frac{a}{\sqrt{2\epsilon}}}^{+\infty} \exp(-z^2) dz ; \xi \in (-\infty, a - \alpha],$$

o que mostra a convergência uniforme de  $u_\epsilon$  para  $u_l$  em  $(-\infty, a - \alpha]$ . ■

Na próxima seção vamos verificar a convergência fraca dos leques de viscosidade.

### 4.3. Convergência

Nesta seção vamos assumir que  $f$  satisfaz (4.2) e vamos mostrar que as soluções  $u_\epsilon$  de (4.3) convergem para a onda de rarefação  $\bar{u}(\frac{x}{t})$ , onde  $\bar{u}$  é a função em (4.6), se  $u_l < u_r$  e para a onda de choque  $u_s(\frac{x}{t})$ , onde  $u_s$  é a função em (4.4), se  $u_l > u_r$ . Notamos que se  $u_l = u_r = u_0$  então essa convergência é trivial, pois a solução de (4.1) é  $u(x, t) \equiv u_0$  e a solução de (4.3) é  $u_\epsilon(\xi) \equiv u_0$ .

Vamos analisar separadamente os casos  $u_l < u_r$  e  $u_l > u_r$ .

#### 4.3.1. O caso $u_l < u_r$

Nesse caso, mostraremos que os leques de viscosidade convergem uniformemente e, portanto, também fracamente (no sentido das distribuições), para a onda de rarefação  $\bar{u}(\frac{x}{t})$ , onde  $\bar{u}$  é a função em (4.6). Para isto precisamos da seguinte proposição.

**Proposição 4.7.** *Para cada  $\epsilon > 0$  seja  $u_\epsilon$  a única solução de (4.3) com  $u_l < u_r$  e  $f$  satisfazendo (4.2). Então,*

$$0 < \dot{u}_\epsilon(\xi) \leq c ; \xi \in \mathbb{R},$$

onde  $c = \max_{u \in [u_l, u_r]} \frac{1}{f''(u)}$ , constante positiva e independente de  $\epsilon > 0$ .

**Demonstração:** Da Proposição 4.1 temos que  $u_\epsilon$  é estritamente crescente, isto é,  $\dot{u}_\epsilon > 0$ . Portanto, como  $\dot{u}_\epsilon$  se anula em  $\pm\infty$  e é contínua,  $\dot{u}_\epsilon$  assume um valor máximo em algum  $\xi_0 \in (-\infty, +\infty)$ . Assim,  $\ddot{u}_\epsilon(\xi_0) = 0$  e

$$\begin{aligned} 0 &\geq \epsilon \frac{d^3 u}{d\xi^3}(\xi_0) = [f'(u_\epsilon(\xi_0)) - \xi_0] \ddot{u}_\epsilon(\xi_0) + [f''(u_\epsilon(\xi_0)) \dot{u}_\epsilon(\xi_0) - 1] \dot{u}_\epsilon(\xi_0) \\ &= [f''(u_\epsilon(\xi_0)) \dot{u}_\epsilon(\xi_0) - 1] \dot{u}_\epsilon(\xi_0), \end{aligned}$$



isto é,  $f''(u_\epsilon(\xi_0))\dot{u}_\epsilon(\xi_0) < 1$  e:

$$0 < \dot{u}_\epsilon(\xi) \leq \dot{u}_\epsilon(\xi_0) \leq \frac{1}{f''(u_\epsilon(\xi_0))} \leq c ; \xi \in \mathbb{R}.$$

■

Agora, em vista da limitação uniforme das famílias  $\{\dot{u}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  e  $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  utilizaremos o Teorema de Arzelá-Áscoli para obtermos a convergência uniforme de  $u_\epsilon$ . Antes, precisamos de um resultado de unicidade devido a Oleinik, [17, Cap. 15 par. B], o qual enunciamos a seguir.

**Teorema 4.8.** *Sejam  $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , soluções fracas do problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x) ; x \in \mathbb{R}, t = 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

onde  $u_0$  é uma função limitada e mensurável e  $f$  satisfaz (4.2). Suponhamos que exista uma constante positiva  $E$ , independente de  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$\frac{u_i(x + \alpha, t) - u_i(x, t)}{\alpha} < \frac{E}{t} ; \alpha > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}. \quad (4.24)$$

Então  $u_1 = u_2$  qtp  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

**Observação 4.1.** De acordo com o Teorema 4.8 acima, se  $u = u(\xi)$  for uma solução fraca de:

$$\begin{cases} 0 = f(u) - \xi u ; \xi \in \mathbb{R}, \\ u(-\infty) = u_l, \\ u(+\infty) = u_r, \end{cases} \quad (4.25)$$

com  $f$  satisfazendo (4.2), tal que:

$$\frac{u(\xi + \alpha) - u(\xi)}{\alpha} < E ; \alpha > 0, \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.26)$$

para alguma constante positiva  $E$  independente de  $\alpha$  e de  $\xi$ , então  $u$  coincide, em quase todo ponto  $\xi \in \mathbb{R}$ , com a função  $\bar{u}$  dada em (4.6). De fato, nesse caso fazendo  $u(x, t) := u(\frac{x}{t})$  então:

$$\frac{u(x + \alpha, t) - u(x, t)}{\alpha} = \frac{u(\frac{x}{t} + \frac{\alpha}{t}) - u(\frac{x}{t})}{t \frac{\alpha}{t}} \leq \frac{E}{t},$$

isto é,  $u(x, t) = u(\frac{x}{t})$  é uma solução fraca de (4.1) satisfazendo (4.24), o mesmo acontecendo com a onda de rarefação  $\bar{u}(\frac{x}{t})$ .

Finalmente estamos em condições de provar a convergência de  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$  para a onda de rarefação  $\bar{u}(\frac{x}{t})$ .

**Teorema 4.9.** *Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $u_\epsilon = u_\epsilon(\xi)$  a única solução de (4.3) com  $u_l < u_r$  e  $f$  satisfazendo (4.2). Então  $u_\epsilon(\xi)$  (respec.  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$ ) converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  (respec. em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ) para  $\bar{u}(\xi)$  (respec.  $\bar{u}(\frac{x}{t})$ ) onde  $\bar{u}(\xi)$  é a função definida em (4.6).*

**Demonstração:** Da Proposição 4.7 concluímos que  $\{\dot{u}_\epsilon\}$  é uniformemente limitada. Portanto, a  $\{u_\epsilon\}$  é equicontínua. Como  $\{u_\epsilon\}$  também é uniformemente limitada (Prop. 4.1), podemos utilizar o Teorema de Arzelá-Áscoli para garantirmos a existência de uma subsequência  $\{u_{\epsilon_n}\} \subset \{u_\epsilon\}$ , com  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , tal que  $u_{\epsilon_n}$  converge uniformemente em  $[a-1, b+1]$  para uma função  $\tilde{u}$ , onde  $a = f'(u_l)$  e  $b = f'(u_r)$ . Mas, da Afirmação 2 da Proposição 4.6, também temos a convergência uniforme de  $u_{\epsilon_n}$  para  $u_l$  em  $(-\infty, a-1]$  e para  $u_r$  em  $[b+1, \infty)$ . Portanto,  $u_{\epsilon_n}$  converge uniformemente em  $(-\infty, +\infty)$  para uma função contínua  $\tilde{u}$ .

Vamos verificar que  $\tilde{u}$  é solução fraca de (4.25).

Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Multiplicando (4.3) por  $\varphi$  e integrando por partes obtemos:

$$\epsilon_n \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi} \dot{u}_{\epsilon_n} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi u_{\epsilon_n} - f(u_{\epsilon_n})] \dot{\varphi} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\epsilon_n} \varphi d\xi.$$

Da convergência uniforme segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi u_{\epsilon_n} - f(u_{\epsilon_n})] \dot{\varphi} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\epsilon_n} \varphi d\xi \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi \tilde{u} - f(\tilde{u})] \dot{\varphi} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \varphi d\xi$$

e da limitação uniforme das derivadas  $\dot{u}_{\epsilon_n}$  segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \epsilon_n \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi} \dot{u}_{\epsilon_n} d\xi \right| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{\varphi}| d\xi = 0.$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\xi \tilde{u} - f(\tilde{u})] \dot{\varphi} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \varphi d\xi = 0,$$

isto é,  $\tilde{u}$  é uma solução fraca de (4.25).

Agora, em vista da Observação 4.1, para concluirmos a demonstração, basta verificarmos (4.26) para  $\tilde{u}$ . Mas isto é imediato, pois, fazendo  $n \rightarrow \infty$  na expressão:

$$\frac{u_{\epsilon_n}(\xi + \alpha) - u_{\epsilon_n}(\xi)}{\alpha} = \dot{u}_{\epsilon_n}(\xi + \alpha_n) < c; \quad \alpha > 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

(onde  $0 < \alpha_n < \alpha$ ) obtemos (4.26) para  $\tilde{u}$  com  $E = c$ .

Por último, notamos que os argumentos acima não dependem da subsequência convergente de  $\{u_\epsilon\}$  no espaço  $C(\mathbb{R})$  munido da norma da convergência uniforme. Isto é, toda subfamília de  $\{u_\epsilon\}$  possui uma subsequência uniformemente convergente e, além disso, se  $u_{\epsilon_n}$  é uma subsequência de  $\{u_\epsilon\}$  que converge uniformemente para uma função  $u$ , então  $u$  é a função dada em (4.6). Assim, concluímos que a própria sequência  $\{u_\epsilon\}$  converge uniformemente (e também fracamente) para (4.6). A convergência uniforme  $u_\epsilon(\frac{x}{t}) \rightarrow \bar{u}(\frac{x}{t})$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  segue imediatamente. ■

Agora vamos tratar o caso  $u_l > u_r$ .

#### 4.3.2. O caso $u_l > u_r$

Nesse caso, mostraremos que os leques de viscosidade  $u_\epsilon$  convergem para a função  $u_s$  dada em (4.4), uniformemente em cada intervalo fechado que não contém o ponto  $s$  dado por (4.5) e fracamente em  $(-\infty, +\infty)$ . Como consequência,  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para a onda de choque  $u_s(\frac{x}{t})$ .

Notamos que, nesse caso, segue da Proposição 4.1 que os leques de viscosidade são estritamente decrescentes, o mesmo acontecendo com  $f'(u_\epsilon(\xi))$  (pois  $f'' > 0$ ). Portanto, para cada  $\epsilon > 0$ , existe um único  $\xi_\epsilon$  tal que:

$$f'(u_\epsilon(\xi_\epsilon)) = \xi_\epsilon. \quad (4.27)$$

Este fato é consequência do seguinte resultado simples que observamos a seguir, e que utilizaremos novamente no Capítulo 6.

**Observação 4.2.** *Toda função contínua e decrescente  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui um único ponto fixo.*

Para verificarmos esta observação basta mostrarmos que a função  $p(\xi) - \xi$  se anula em algum ponto. Suponhamos que

$$p(\xi) - \xi > 0 ; \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Então  $p(0) > 0$  e, como  $p$  é decrescente,  $p(p(0)) \leq p(0)$ , o que contraria (4.28) em  $\xi = p(0)$ . Analogamente verificamos que não podemos ter  $p(\xi) - \xi < 0$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Logo, existe  $\xi_0$  tal que  $p(\xi_0) = \xi_0$ , isto é,  $\xi_0$  é um ponto fixo de  $p$  e é o único, devido a monotonicidade de  $p$ .

**Lema 4.10.** *Para cada  $\epsilon > 0$  seja  $u_\epsilon$  a única solução de (4.3) com  $u_l > u_r$  e  $f \in C^2(\mathbb{R})$  satisfazendo (4.2). Então, existe constante positiva  $M$ , que depende somente de  $u_l$  e de  $u_r$  tal que:*

$$|\dot{u}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{M}{\epsilon} \exp \left( -\frac{(\xi - \xi_\epsilon)^2}{2\epsilon} \right) ; \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.29)$$

**Demonstração:** Notamos da definição de  $\xi_\epsilon$  em (4.27) que:

$$a \leq \xi_\epsilon \leq b, \quad (4.30)$$

onde  $a$  e  $b$  são dados por (4.19).

Em vista de (4.30) e de (4.20) temos  $|\dot{u}_\epsilon(\xi_\epsilon)| \leq \frac{M}{\epsilon}$ , onde  $M$  é uma constante positiva que não depende de  $\epsilon > 0$ . De (4.17) e (4.18) do Lema 4.5, com  $a_\epsilon = b_\epsilon = \xi_\epsilon$  obtemos (4.29). ■

**Teorema 4.11.** *Para cada  $\epsilon > 0$  sejam  $u_\epsilon$  a única solução de (4.3) com  $u_l > u_r$  e  $f \in C^2(\mathbb{R})$  satisfazendo (4.2). Então,  $u_\epsilon$  converge para  $u_s$  em (4.4), uniformemente nos intervalos fechados que não contém o ponto  $s$  e fracamente em  $(-\infty, +\infty)$ . Além disso,  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para a onda de choque  $u_s(\frac{x}{t})$ .*

**Demonstração:** De (4.30) segue que o conjunto  $\{\xi_\epsilon\}$  é limitado. Portanto, existe subsequência  $\xi_{\epsilon_n}$ , com  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , que converge para algum  $\bar{s} \in \mathbb{R}$ . Vamos verificar que a subsequência  $u_{\epsilon_n}$  correspondente, converge uniformemente para a função:

$$u_{\bar{s}}(\xi) = \begin{cases} u_l; & \xi \leq \bar{s}, \\ u_r; & \xi \geq \bar{s}, \end{cases}$$

em  $(-\infty, \bar{s} - \alpha] \cup [\bar{s} + \alpha, +\infty)$ , para cada  $\alpha > 0$ , e fracamente em  $(-\infty, \infty)$ .

Sejam  $\eta < \xi < \bar{s}$ . Então,

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(\xi) - u_\epsilon(\eta)| &\leq \int_\eta^\xi |\dot{u}_\epsilon(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M}{\epsilon} \int_\eta^\xi \exp\left(-\frac{(\tau - \xi_\epsilon)^2}{2\epsilon}\right) d\tau \\ &= \frac{M\sqrt{2\epsilon}}{\epsilon} \int_{\frac{\eta - \xi_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\xi - \xi_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-z^2) dz \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\frac{\eta - \xi_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\xi - \xi_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-z^2) dz; \quad \eta < \xi < \bar{s}, \end{aligned}$$

onde  $K = M\sqrt{2}$ . Portanto, fazendo  $\eta \rightarrow -\infty$  obtemos:

$$|u_\epsilon(\xi) - u_l| \leq \frac{K}{\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\frac{\xi - \xi_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-z^2) dz; \quad \xi < \bar{s}.$$

Para  $\alpha > 0$  dado, seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_0$ , então  $\xi_{\epsilon_n} \in (\bar{s} - \frac{\alpha}{2}, \bar{s} + \frac{\alpha}{2})$ . Assim, se  $\xi < \bar{s} - \alpha$ , temos:

$$\xi - \xi_{\epsilon_n} \leq -\frac{\alpha}{2}; \quad n > n_0$$

e

$$|u_{\epsilon_n}(\xi) - u_l| \leq \frac{K}{\sqrt{\epsilon_n}} \int_{-\infty}^{-\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon_n}}} \exp(-z^2) dz ; n > n_0.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{\epsilon_n}} \int_{-\infty}^{-\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon_n}}} \exp(-z^2) dz = 0,$$

temos que  $u_{\epsilon_n}$  converge uniformemente para  $u_l$  em  $(-\infty, \bar{s} - \alpha]$ .

Analogamente mostramos que  $u_{\epsilon_n}$  converge uniformemente para  $u_r$  em  $[\bar{s} + \alpha, +\infty)$ .

Como as funções  $u_\epsilon$  são estritamente decrescentes, temos que, para cada intervalo fechado  $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ , a família  $\{u_\epsilon\}$  é uniformemente limitada em  $L^1(I)$  por  $(\beta - \alpha)(u_l - u_r)$ . Deste fato e da convergência uniforme acima, segue do Teorema 2.6 do Capítulo 2 que  $u_{\epsilon_n}$  converge fracamente para a distribuição  $\bar{u} + \bar{c}\delta_{\bar{s}}$ , onde:

$$\bar{c} = \bar{s}[u_r - u_l] - [f(u_r) - f(u_l)]$$

e  $\delta_{\bar{s}}$  é a distribuição delta de Dirac centrada em  $\bar{s}$ . Além disso, o Teorema 2.6 também temos que  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para uma distribuição que coincide com a função  $u_{\bar{s}}(\frac{x}{t})$  se  $\bar{c} = 0$ .

Vamos verificar que  $\bar{c} = 0$ . Integrando a equação em (4.3) no intervalo  $(\bar{s} - \beta, \bar{s} + \beta)$ , onde  $\beta > 0$ , encontramos

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{u}_{\epsilon_n}|_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} &= f(u_{\epsilon_n})|_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} - \int_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} \xi \dot{u}_{\epsilon_n} d\xi \\ &= [f(u_{\epsilon_n}) - \xi u_{\epsilon_n}]_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} + \int_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} u_{\epsilon_n} d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  temos de (4.29) e da convergência uniforme de  $u_{\epsilon_n}$  em  $(-\infty, \bar{s} - \beta] \cup [\bar{s} + \beta, +\infty)$  que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} u_{\epsilon_n} d\xi &= (\bar{s} + \beta)u_r - (\bar{s} - \beta)u_l - [f(u_r) - f(u_l)] \\ &= \bar{c} + \beta(u_r + u_l). \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\{u_{\epsilon_n}\}_{\epsilon_n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} u_{\epsilon_n} d\xi = \int_{\bar{s}-\beta}^{\bar{s}+\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\epsilon_n} d\xi = \beta(u_l + u_r).$$

Portanto,  $\bar{c} = 0$ ,  $\bar{s} = s$ ,  $u_{\bar{s}} = u_s$  em (4.4),  $u_{\epsilon_n}(\xi)$  converge fracamente  $u_s(\xi)$  e  $u_{\epsilon_n}(\frac{x}{t})$  converge fracamente  $u_s(\frac{x}{t})$ .

Observamos que a sequência inteira  $\{\xi_\epsilon\}$  converge para  $s$ . Pois  $\{\xi_\epsilon\}$  é limitada e provamos acima que todas as subsequências convergentes de  $\{\xi_\epsilon\}$  possuem o mesmo limite  $s$ . Logo, o mesmo roteiro de demonstração pode ser aplicado para verificarmos as convergências de  $u_\epsilon(\xi)$  e  $u_\epsilon(\frac{x}{t})$ . ■

## 5. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DOS LEQUES DE VISCOSIDADE

Neste capítulo vamos mostrar a existência e a unicidade dos leques de viscosidade associados ao problema de Riemann (3.1), isto é, das soluções suaves e auto-similares  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  de (3.19) onde, para cada  $\epsilon > 0$ ,  $(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))$  é a solução de:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \dot{f}(u) - \xi \dot{u} \\ \epsilon \ddot{v} = \frac{d}{d\xi} [vg(u)] - \xi \dot{v} \\ u(-\infty) = u_l, \quad v(-\infty) = v_l, \\ u(+\infty) = u_r, \quad v(+\infty) = v_r. \end{cases} \quad (5.1)$$

Os resultados deste capítulo são mais abrangentes do que precisamos, pois vamos considerar o seguinte problema de valor de fronteira, do qual (5.1) é um caso particular:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \dot{f}(u) - \xi \dot{u} \\ \epsilon \ddot{v} = \frac{d}{d\xi} [vg(u, v) + h(v)] - \xi \dot{v} \\ u(-\infty) = u_l, \quad v(-\infty) = v_l, \\ u(+\infty) = u_r, \quad v(+\infty) = v_r. \end{cases} \quad (5.2)$$

Assumiremos que  $f(u)$ ,  $h(v)$  e  $g(u, v)$  são funções suaves com

$$g_u(u, v) > 0 ; \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.3)$$

Se  $u_l > u_r$  assumiremos também que para cada intervalo fechado  $I \subset \mathbb{R}$ , o conjunto:

$$g_u(I, \mathbb{R}) = \{g_u(u, v) ; u \in I, v \in \mathbb{R}\} \quad (5.4)$$

é limitado.

Observamos que (5.1) é um caso particular de (5.2) com  $g = g(u)$ ,  $g' > 0$  e  $h \equiv 0$ . Nesse caso, (5.3) e (5.4) são automaticamente satisfeitas.

Para verificarmos a existência de soluções para (5.2) utilizaremos um teorema devido a Dafermos [2], enunciado no Capítulo 2 (Teor. 2.1). De acordo

com esse teorema, o problema de valor de fronteira (5.2) possui alguma (não necessariamente única) solução suave  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$ , se existir uma constante positiva  $M$ , independente de  $\mu \in [0, 1]$  e de  $L > 0$ , tal que:

$$\max_{|\xi| \leq L} \|(u(\xi), v(\xi))\| \leq M, \quad (5.5)$$

para toda solução  $(u(\xi), v(\xi))$  do problema de valor de fronteira a dois parâmetros:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \mu \dot{f}(u) - \xi \dot{u} \\ \epsilon \ddot{v} = \mu \frac{d}{d\xi} [vg(u, v) + h(v)] - \xi \dot{v} \\ (u(-L), v(-L)) = \mu (u_l, v_l), \\ (u(L), v(L)) = \mu (u_r, v_r). \end{cases} \quad (5.6)$$

Nesse caso, a solução existente satisfaz a mesma estimativa, isto é,

$$\sup_{-\infty < \xi < \infty} \|(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))\| \leq M. \quad (5.7)$$

**Observação 5.1.** No Capítulo 4 (Prop. 4.2 e Prop. 4.4) verificamos a existência e unicidade de  $u$ , solução da primeira equação em (5.2), bem como a estimativa a priori:

$$\max_{|\xi| \leq L} \|u(\xi)\| \leq \max \{|u_l|, |u_r|\}, \quad (5.8)$$

para toda solução da primeira equação em (5.6).

**Observação 5.2.** Se  $u_l = u_r = u_0$  então  $u$  é constante e igual a  $u_0$  (Prop. 4.1, Cap.4). Logo, fazendo  $\varphi(v) = vg(u_0, v) + h(v)$ , temos que  $v$  é a solução de:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{v} = \dot{\varphi}(v) - \xi \dot{v}, \\ v(-\infty) = v_l, \\ v(+\infty) = v_r, \end{cases} \quad (5.9)$$

que também é um problema de valor inicial do tipo estudado no Capítulo 4. Portanto, os mesmos resultados (Prop. 4.2 e Prop. 4.4) podem ser aplicados à (5.9) para assegurarmos a existência e a unicidade de  $v$ .

Das observações acima, concluímos que para obtermos a existência de soluções de (5.2) utilizando o teorema de Dafermos, basta verificarmos somente a estimativa a priori

$$\max_{|\xi| \leq L} \|v(\xi)\| \leq M \quad (5.10)$$

para a componente  $v(\xi)$  de qualquer solução de (5.6) com  $u_l \neq u_r$ , onde  $M$  é uma constante positiva independente de  $\mu$  e de  $L$ .

No caso  $u_l < u_r$  vamos verificar (5.10) com uma constante  $M$  que é também independente de  $\epsilon > 0$ . Além disso, não necessitaremos da propriedade (5.4). Estes resultados estão contidos no Teorema 5.3. Veremos também (Corolário 5.4a) que a família  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon)\}$  de soluções de (5.2) dadas pelo Teorema 5.3 possui variação total uniformemente limitada. Esse resultado, combinado com a estimativa (5.10) uniforme em  $\epsilon$ , é suficiente, em vista do Teorema 2.2 do Capítulo 2, para obtermos uma solução fraca de (5.2) com  $\epsilon = 0$ , como limite de uma subsequência de  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon)\}$  (Corolário 5.4b-c).

No caso  $u_l > u_r$  precisaremos de (5.4) para garantirmos (5.10) com uma constante que depende de  $\frac{1}{\epsilon}$  (Teorema 5.6).

A seguir vamos verificar a unicidade dos leques de viscosidade no caso  $u_l \neq u_r$ .

**Proposição 5.1.** *Sejam  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$  soluções suaves de (5.2). Então  $u_2 = u_1$  e  $v_2 = v_1$ .*

**Demonstração:** Da Proposição 4.4 do Capítulo 4 segue que  $u_2 = u_1 = u$ . Assim, se  $v = v_2 - v_1$  e  $r = r(\xi, \theta)$  é a função definida por:

$$r(\xi, \theta) = v_2(\xi)\theta + (1 - \theta)v_1(\xi) ; (\xi, \theta) \in (-\infty, \infty) \times [0, 1],$$

então,  $r_\theta(\xi, \theta) = v(\xi) ; (\xi, \theta) \in (-\infty, \infty) \times [0, 1]$ , e:

$$\begin{aligned} [vg(u, v) + h(v)]_{v=v_1}^{v=v_2} &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} [rg(u, r) + h(r)] d\theta \\ &= v \int_0^1 [rg_v(u, r) + g(u, r) + h'(r)] d\theta = v\varphi, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \int_0^1 [r(\xi, \theta)g_v(u(\xi), r(\xi, \theta)) + g(u(\xi), r(\xi, \theta)) \\ &\quad + h'(r(\xi, \theta))] d\theta ; \xi \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Logo,  $v$ ,  $\varphi$  e  $\psi = h$  satisfazem (4.13) do Capítulo 4, com  $\alpha = -\infty$  e  $\beta = +\infty$ . Além disso,  $v(-\infty) = v(+\infty) = 0$  e as funções  $v$  e  $\varphi$  são limitadas (pois  $\|r(\xi, \cdot)\|_\infty \leq \|v_2\|_\infty + \|v_1\|_\infty$ ). Portanto, para utilizarmos o Lema 4.3 do Capítulo 4 devemos verificar que:

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \eta v(\eta) = 0.$$

Do Lema 2.4 do Capítulo 2 segue que:

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \eta^m \dot{v}_i(\eta) = 0 ; m \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\}.$$



Portanto, como  $\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \eta v(\eta)$  é uma indeterminação do tipo  $\pm\infty \cdot 0$ , temos:

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \eta v(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} (\mp \eta^2) \dot{v}(\eta) = \pm \left[ \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} (\eta^2) \dot{v}_2(\eta) - \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} (\eta^2) \dot{v}_1(\eta) \right] = 0.$$

Logo, aplicando o Lema 4.3 do Capítulo 4 obtemos  $v \equiv 0$  em  $(-\infty, +\infty)$ , isto é,  $v_2 = v_1$ . ■

Para provarmos (5.10), vamos determinar a estrutura da componente  $v$  das soluções do sistema:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \mu f(u) - \xi \dot{u}, \\ \epsilon \ddot{v} = \mu \frac{d}{d\xi} [vg(u, v) + h(v)] - \xi \dot{v}, \end{cases} \quad \mu \in [0, 1], \quad (5.11)$$

com relação a máximos e mínimos (Figuras 5.1-5.9).

**Proposição 5.2.** *Seja  $(u(\xi), v(\xi))$  ;  $\xi \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ , solução suave de (5.11). Afirmamos que:*

1. *Se  $v(\alpha) = v(\beta) = 0$ , onde  $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$  e  $u(\alpha), u(\beta)$  finitos, então,*

$$v(\xi) = 0 ; \xi \in (a, b);$$

2. *Se  $u(a) < u(b)$ , então todo ponto crítico  $\xi_0$  de  $v$ , no intervalo  $(a, b)$ , é ponto de máximo (respec. mínimo) se, e somente se,  $v(\xi_0) < 0$  (respec.  $v(\xi_0) > 0$ ). Além disso,*

$$|v(\xi)| \leq \max \{|v(a)|, |v(b)|\} ; \xi \in (a, b); \quad (5.12)$$

3. *Se  $u(a) > u(b)$ , então todo ponto crítico  $\xi_0$  de  $v$ , no intervalo  $(a, b)$ , é ponto de máximo (respec. mínimo) se, e somente se,  $v(\xi_0) > 0$  (respec.  $v(\xi_0) < 0$ ).*

**Demonstração:** A Afirmação 1 é novamente uma aplicação direta do Lema 4.3 do Capítulo 4, pois  $v$ ,  $\varphi = \mu g(u, v)$ ,  $\psi = \mu h$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem (4.13) do Capítulo 4, sendo que  $v$  e  $\varphi$  são limitadas e, ainda, se  $\alpha = -\infty$  e/ou  $\beta = +\infty$ , então  $\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \eta v(\eta) = 0$ , conforme Lema 2.4 do Capítulo 2.

Vamos agora verificar as afirmações 2 e 3. Se  $\xi_0$  for um ponto crítico de  $v$  em  $(a, b)$  então,

$$\epsilon \ddot{v}(\xi_0) = \mu v(\xi_0) g_u(u(\xi_0), v(\xi_0)) \dot{u}(\xi_0). \quad (5.13)$$

Segue de (5.3) e da Proposição 4.1 do Capítulo 4 que se  $u(a) < u(b)$ , então  $g_u(u(\xi_0), v(\xi_0)) \dot{u}(\xi_0) > 0$ . Logo, de (5.13) temos que  $\xi_0$  é ponto de mínimo (respec. máximo) local se, e somente se,  $v(\xi_0)$  for positivo (respec. negativo). Portanto,  $v$

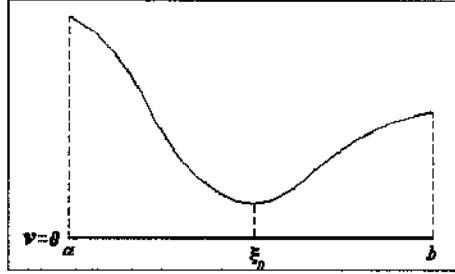


Figura 5.1:  $u(a) < u(b)$  ;  $v(a), v(b) \geq 0$  : um ponto de mínimo.

é monótona ou possui, no máximo, um extremo local. Se  $v$  for monótona, então temos facilmente (5.12). Se  $\xi_0$  é ponto de mínimo, então:

$$0 < v(\xi_0) \leq v(\xi) ; \xi \in (a, b) \quad (5.14)$$

e

$$|v(\xi)| = v(\xi) \leq \max_{-L \leq \xi \leq L} v(\xi) = \max \{v(a), v(b)\} ; \xi \in (a, b),$$

que é (5.12). Se  $\xi_0$  for ponto de máximo, então:

$$v(\xi) \leq v(\xi_0) < 0 ; \xi \in (a, b) \quad (5.15)$$

e

$$|v(\xi)| = -v(\xi) \leq \max_{-L \leq \xi \leq L} \{-v(\xi)\} = \max \{v(a), v(b)\} ; \xi \in (a, b),$$

que também é (5.12). De (5.14) e de (5.15) segue que se  $v$  se anular em algum ponto  $c$  tal que  $a \leq c \leq b$  então  $v$  não possui extremo local, isto é,  $v$  é monótona. Concluimos a prova da Afirmação 2.

Se  $u(a) > u(b)$  então  $\dot{u} < 0$  (Prop. 4.1, Cap. 4) e de (5.3) e (5.13) segue que se  $\xi_0$  for ponto crítico de  $v$  em  $(a, b)$  então:

$$g_u(u(\xi_0), v(\xi_0))\dot{u}(\xi_0) < 0.$$

Portanto,  $\xi_0$  é ponto de máximo (respec. mínimo) se, e somente se,  $v(\xi_0) > 0$  (respec.  $v(\xi_0) < 0$ ). ■

**Observação 5.3.** Na Afirmação 3 da Proposição acima, se  $v$  não for monótona, então  $v$  não pode assumir três ou mais extremos locais, pois nesse caso,  $v$  se anula pelo menos duas vezes, o que implica, conforme a Afirmação 1, que  $v$  é identicamente nula. Por outro lado, se  $v$  assumir dois extremos locais,  $\xi_1$  e  $\xi_2$  então  $v(\xi_1) < 0 < v(\xi_2)$  ou  $v(\xi_1) > 0 > v(\xi_2)$ . Em qualquer caso,  $v$  se anula em um ponto  $\bar{\xi}$  entre  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Da Afirmação 1, segue que  $\bar{\xi}$  é o único zero de  $v$ .

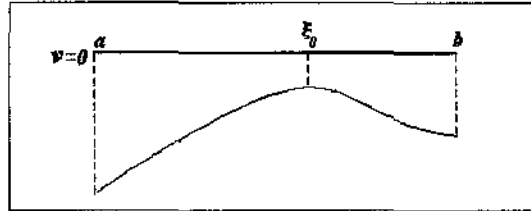


Figura 5.2:  $u(a) < u(b)$  ;  $v(a), v(b) \leq 0$  : um ponto de máximo.

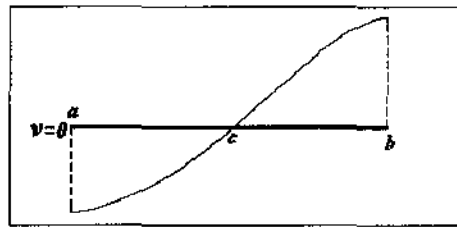


Figura 5.3:  $u(a) < u(b)$  ;  $v(a)v(b) < 0$  :  $v$  monótona.

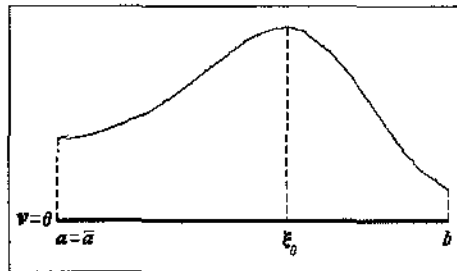


Figura 5.4:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(a), v(b) \geq 0$  : um ponto de máximo.

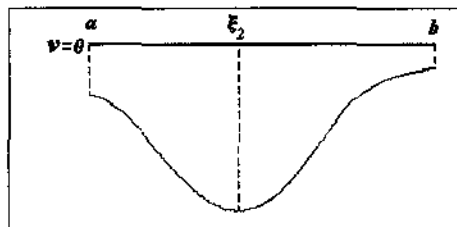


Figura 5.5:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(a), v(b) \leq 0$  : um ponto de mínimo.

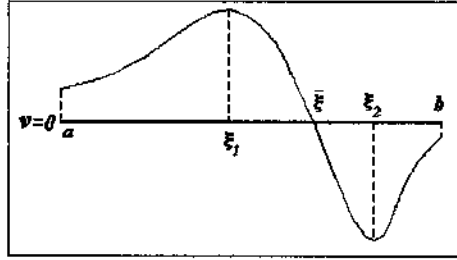


Figura 5.6:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(b) < 0 < v(a)$  : um ponto de máximo e um ponto de mínimo.

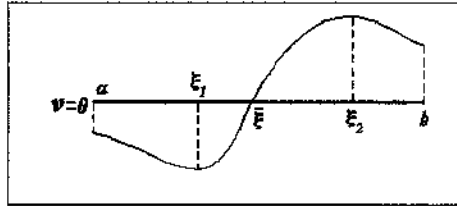


Figura 5.7:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(a) < 0 < v(b)$  : um ponto de mínimo e um ponto de máximo.

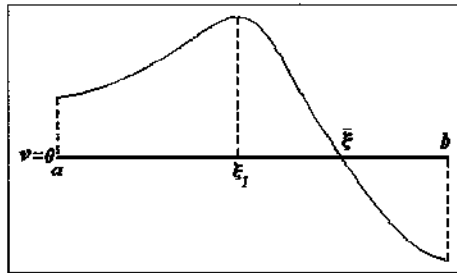


Figura 5.8:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(b) < 0 < v(a)$  : um ponto de máximo.

**Observação 5.4.** Na demonstração da Afirmação 1 não fizemos uso das propriedades (5.3) e (5.4) de  $g$ . Portanto, a afirmação é verdadeira para  $g$  apenas suave. Também, nas afirmações 2 e 3, não necessitamos da propriedade (5.4) de  $g$ . Logo, essas afirmações são verdadeiras para  $g$  suave satisfazendo (5.3). Como veremos a seguir, o Teorema 5.3 e o seu corolário decorrem da Afirmação 2 acima e assim, não exigem a propriedade (5.4) para a função suave  $g$ .

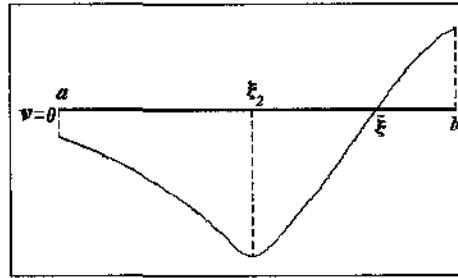


Figura 5.9:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(a) < 0 < v(b)$  : um ponto de mínimo.

Em vista de (5.12) e da Proposição 5.1 temos o seguinte teorema de existência e unicidade para o caso  $u_l < u_r$ .

**Teorema 5.3.** Para cada  $\epsilon, v_l, v_r, u_l, u_r \in \mathbb{R}$ , com  $\epsilon > 0$  e  $u_l < u_r$ , o problema de valor de fronteira (5.2) com  $f = f(u)$ ,  $h = h(v)$  e  $g = g(u, v)$  suaves,  $g$  satisfazendo (5.3), possui uma única solução suave  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  tal que:

$$\sup_{-\infty < \xi < +\infty} \|(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))\| \leq M, \quad (5.16)$$

onde,

$$M = \max \{|u_l|, |u_r|, |v_l|, |v_r|\},$$

constante que é independente de  $\epsilon > 0$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $(u, v)$  seja solução de (5.6). De (5.12) da Proposição 5.2 (com  $a = -L$ ,  $b = L$ ,  $u(a) = \mu u_l < \mu u_r = u(b)$ ,  $v(a) = \mu v_l$  e  $v(b) = \mu v_r$ ), temos:

$$\sup_{-L < \xi < L} |v(\xi)| \leq \max \{|\mu v_l|, |\mu v_r|\} \leq \max \{|v_l|, |v_r|\} \leq M,$$

que é (5.10) e que prova a existência e a estimativa (5.16). A unicidade é a Proposição 5.1. ■

O corolário seguinte é uma importante consequência do Teorema 5.3, da Afirmação 2 da Proposição 5.2 no caso  $u_l < u_r$  e da Observação 5.2 no caso  $u_l = u_r$ .

**Corolário 5.4.** *Seja  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon)\}$  a família de soluções do problema de valor de fronteira (5.2) com  $u_l \leq u_r$ . Então:*

- a)  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon)\}$  é uniformemente limitada e de variação total uniformemente limitada;
- b) existe uma função  $v$  limitada e de variação total limitada e ainda uma subsequência  $\{(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n})\} \subset \{(u_\epsilon, v_\epsilon)\}$ , tais que  $(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n}) \rightarrow (\bar{u}, v)$ , pontualmente e no sentido das distribuições, onde  $\bar{u}$  é dada em (4.6) do Capítulo 4 ( $\bar{u}(\frac{x}{t})$  é a onda de rarefação escalar);
- c)  $(\bar{u}, v)$  é solução fraca de (5.2) com  $\epsilon = 0$  e  $(\bar{u}(\frac{x}{t}), v(\frac{x}{t}))$  é solução fraca do problema de Riemann:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ v_t + [vg(u, v) + h(v)]_x = 0, & ; (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} (u_l, v_l) & ; x < 0, \\ (u_r, v_r) & ; x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (5.17)$$

**Demonstração:** Verifiquemos inicialmente o item a). O caso  $u_l = u_r$  é imediato, pois nesse caso  $u_\epsilon$  (=constante) e  $v_\epsilon$  são monótonas (Observação 5.2). No caso  $u_l < u_r$ , a limitação uniforme é (5.16) do Teorema 5.3. A família  $\{u_\epsilon\}$  é de variação total uniformemente limitada porque  $VT(u_\epsilon) = |u_r - u_l|$ , uma vez que  $u_\epsilon$  é monótona para todo  $\epsilon > 0$ . Para verificarmos que a família  $\{v_\epsilon\}$  é de variação total uniformemente limitada, basta observarmos que se  $v_\epsilon$  for monótona, então  $VT(v_\epsilon) = |v_r - v_l|$ , e que da Afirmação 2 da Proposição 5.2, se  $v_\epsilon$  assumir um mínimo (respec. máximo) local em  $\xi_0$ , então  $v_\epsilon$  é monótona decrescente (respec. crescente) em  $(-\infty, \xi_0]$  e monótona crescente (respec. decrescente) em  $[\xi_0, \infty)$ . Logo, de (5.14) (respec. (5.15)) temos:

$$\begin{aligned} VT(v_\epsilon) &\leq |v_\epsilon(\xi_0) - v_\epsilon(-\infty)| + |v_\epsilon(\infty) - v_\epsilon(\xi_0)| \\ &\leq |v_l| + |v_r|. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso temos  $VT(v_\epsilon) \leq K$ , onde  $K$  é independente de  $\epsilon > 0$ .

Provemos agora os itens b) e c). Do item a) e do Teorema 2.2 do Capítulo 2, segue que existem funções  $u$  e  $v$ , limitadas e de variação total limitadas, e uma subsequência  $\{(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n})\} \subset \{(u_\epsilon, v_\epsilon)\}$ , tais que  $(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n}) \rightarrow (u, v)$ , pontualmente

e fracamente. Além disso,  $u$  e  $v$  satisfazem ao item c) deste corolário. Porém, do Teorema 4.9 do Capítulo 4, segue que  $u_{\epsilon_n}$  converge uniformemente para a função contínua  $\bar{u}$  dada em (4.6). Portanto, por unicidade de limites (pontuais, por exemplo) segue que  $u = \bar{u}$ . ■

Para completarmos os resultados de existência de soluções para (5.2), precisamos ainda verificar, no caso  $u_l > u_r$ , que a componente  $v$  de toda solução de (5.6) satisfaz (5.10). Este é o conteúdo da próxima proposição.

**Proposição 5.5.** *Sejam  $(u(\xi), v(\xi))$  ;  $\xi \in [a, b]$ , solução suave de (5.11) com  $u(a) > u(b)$ ,*

$$c = \max \{|v(a)|, |v(b)|\}$$

e

$$k = [u(a) - u(b)] \sup \{g_u(u, v) ; u \in [u(b), u(a)] , v \in \mathbb{R}\}.$$

Então,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |v(\eta)| d\eta \leq c \left(1 + \frac{k}{\beta - \alpha}\right) ; a \leq \alpha < \beta \leq b \quad (5.18)$$

e

$$\max_{\xi \in [a, b]} |v| \leq c \left(1 + \frac{k}{\epsilon}\right) \exp k. \quad (5.19)$$

**Demonstração:** Se  $v$  for monótona em  $(a, b)$  então (5.18) e (5.19) são trivialmente satisfeitas.

Suponhamos que  $v$  não seja monótona em  $(a, b)$ . Vamos verificar a proposição inicialmente para o caso  $v(a), v(b) \geq 0$ . Nesse caso, se  $v(a) = v(b) = 0$  então, da Afirmção 1 da Proposição 5.2, temos que  $v$  é nula em  $(a, b)$  e não há o que verificarmos. Vamos assumir então que um dos dois valores,  $v(a)$  ou  $v(b)$  seja positivo (Fig.5.10-5.11). Assim, da Afirmção 3 da Proposição 5.2 e da Observação 5.3 segue que  $v > 0$  em  $(a, b)$ , assume um máximo em algum  $\xi_0 \in (a, b)$ , é estritamente crescente no intervalo  $(a, \xi_0]$  e é estritamente decrescente no intervalo  $[\xi_0, b)$ .

Sejam  $a \leq \bar{a} < \xi_0 < \bar{b} \leq b$  tais que (Fig.5.10-5.11):

$$0 < v(\bar{a}) = v(\bar{b}) = c < v(\eta) ; \eta \in (\bar{a}, \bar{b}). \quad (5.20)$$

Observamos que:

i) Se  $v(a) \geq v(b) \geq 0$ , então  $\bar{a} = a$  e  $\bar{b} \leq b$  (Fig. 5.10);

ii) Se  $0 \leq v(a) \leq v(b)$ , então  $a \leq \bar{a}$  e  $\bar{b} = b$  (Fig. 5.11);

iii) Em ambos os casos acima,

$$\int_{\alpha}^{\beta} [v(\eta) - c] d\eta \leq \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} [v(\eta) - c] d\eta ; a \leq \alpha < \beta \leq b. \quad (5.21)$$

Para cada  $\xi \in [\bar{a}, \xi_0)$ , seja  $\xi' \in (\xi_0, \bar{b}]$  único tal que (Fig.5.10-5.11):

$$0 < v(\xi) = v(\xi') < v(\eta) ; \eta \in (\xi, \xi'). \quad (5.22)$$

Integrando a segunda equação em (5.11) no intervalo  $[\xi, \xi']$  obtemos:

$$\epsilon \dot{v}(\xi') - \epsilon \dot{v}(\xi) = \mu [v(\eta)g(u(\eta), v(\eta)) + h(v(\eta))]_{\eta=\xi}^{\eta=\xi'} - \int_{\xi}^{\xi'} \eta \dot{v}(\eta) d\eta.$$

Desenvolvendo por partes a integral no segundo membro acima, lembrando que  $v(\xi) = v(\xi')$  temos:

$$\int_{\xi}^{\xi'} \eta \dot{v}(\eta) d\eta = v(\xi) (\xi' - \xi) - \int_{\xi}^{\xi'} v(\eta) d\eta = - \int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta$$

e

$$\epsilon \dot{v}(\xi') - \epsilon \dot{v}(\xi) = \mu v(\xi) [g(u(\xi'), v(\xi)) - g(u(\xi), v(\xi))] + \int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta. \quad (5.23)$$

Como

$$\epsilon \dot{v}(\xi') \leq 0 \leq \epsilon \dot{v}(\xi), \quad (5.24)$$

temos,

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta &\leq \mu v(\xi) [g(u(\xi), v(\xi)) - g(u(\xi'), v(\xi))] \\ &\leq v(\xi) g_u(\bar{u}(\xi), v(\xi)) [u(\xi) - u(\xi')], \end{aligned}$$

onde  $u(b) < u(\xi') < \bar{u}(\xi) < u(\xi) < u(a)$ . Portanto,

$$\int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta \leq kv(\xi).$$

Agora, fazendo  $\xi = \bar{a}$ , temos  $\xi' = \bar{b}$  e (porque  $v(\bar{a}) = v(\bar{b}) = c$ ):

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} [v(\eta) - c] d\eta \leq kc. \quad (5.25)$$

De (5.21) e de (5.25) temos  $\int_{\alpha}^{\beta} [v(\eta) - c] d\eta \leq kc$ . Assim,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |v(\eta)| d\eta \leq c + \frac{kc}{\beta - \alpha} = c \left( 1 + \frac{k}{\beta - \alpha} \right),$$



que é (5.18).

Agora vamos verificar (5.19). De (5.23) e de (5.24) obtemos:

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{v}(\xi) &= \epsilon \dot{v}(\xi') - \mu v(\xi) [g(u(\xi'), v(\xi)) - g(u(\xi), v(\xi))] - \int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta \\ &\leq \mu v(\xi) [g(u(\xi), v(\xi)) - g(u(\xi'), v(\xi))] - \int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta \\ &\leq kv(\xi) - \int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta ; \xi \in (\bar{a}, \xi_0). \end{aligned}$$

Mas, de (5.22) segue que  $\int_{\xi}^{\xi'} [v(\eta) - v(\xi)] d\eta > 0$ . Portanto,

$$\dot{v}(\xi) - \frac{k}{\epsilon} v(\xi) < 0 ; \xi \in [\bar{a}, \xi_0]. \quad (5.26)$$

Agora, multiplicando (5.26) por  $\exp\left(-\frac{k}{\epsilon}\xi\right)$  obtemos

$$\frac{d}{d\xi} \left[ v(\xi) \exp\left(-\frac{k}{\epsilon}\xi\right) \right] < 0 ; \xi \in [\bar{a}, \xi_0],$$

isto é,

$$v(\xi_0) < v(\xi) \exp\left(\frac{k}{\epsilon}(\xi_0 - \xi)\right) ; \xi \in [\bar{a}, \xi_0]. \quad (5.27)$$

Se  $\xi_0 - \bar{a} \leq \epsilon$  então, de (5.27) com  $\xi = \bar{a}$  e de (5.20) temos:

$$v(\xi_0) < c \exp\left(\frac{k}{\epsilon}(\xi_0 - \bar{a})\right) \leq c \exp k.$$

Caso contrário, se  $\xi_0 - \bar{a} > \epsilon$ , seja  $\hat{\xi} \in (\bar{a}, \xi_0)$  tal que  $\xi_0 - \hat{\xi} = \epsilon$ . Então, novamente de (5.27), agora com  $\xi = \hat{\xi}$  temos:

$$v(\xi_0) < v(\hat{\xi}) \exp\left(\frac{k}{\epsilon}(\xi_0 - \hat{\xi})\right) = v(\hat{\xi}) \exp k. \quad (5.28)$$

Mas, de (5.18) segue que:

$$\frac{1}{\xi_0 - \hat{\xi}} \int_{\hat{\xi}}^{\xi_0} v(\eta) d\eta \leq c \left(1 + \frac{k}{\xi_0 - \hat{\xi}}\right) = c \left(1 + \frac{k}{\epsilon}\right).$$

Finalmente, lembrando que  $v$  é estritamente crescente no intervalo  $[\hat{\xi}, \xi_0)$  temos:

$$v(\hat{\xi}) < \frac{1}{\xi_0 - \hat{\xi}} \int_{\hat{\xi}}^{\xi_0} v(\eta) d\eta \leq c \left(1 + \frac{k}{\epsilon}\right)$$

e de (5.28) obtemos:

$$v(\xi_0) \leq c \left(1 + \frac{k}{\epsilon}\right) \exp k.$$

Portanto, em qualquer caso ( $\xi_0 - \bar{a} \leq \epsilon$  ou  $\xi_0 - \bar{a} > \epsilon$ ), temos:

$$\max_{\xi \in [a, b]} |v(\xi)| = |v(\xi_0)| \leq c \left(1 + \frac{k}{\epsilon}\right) \exp k.$$

que é (5.19).

Concluimos a proposição para o caso em que  $v(a)$  e  $v(b)$  são ambos não negativos. Mas isto é suficiente para concluirmos também a proposição para o caso em que  $v(a)$  e  $v(b)$  são ambos não positivos (Fig. 5.12-5.13), pois por uma simples verificação temos que se  $(u, v)$  for solução do sistema (5.11) e se  $w = -v$ , então  $(u, w)$  também é solução de (5.11) com  $g = g(u, -w)$  e  $h = -h(-w)$ .

Se  $v(a)v(b) < 0$  e  $v$  não for monótona (Fig. 5.6-5.9), então existe um zero de  $v$  em  $[a, b]$ , que da Afirmação 1 da Proposição 5.2, é único. Isto é, existe único  $a \leq \bar{\xi} \leq b$  tal que  $v(\bar{\xi}) = 0$ . Se  $a \leq \alpha < \beta \leq \bar{\xi} \leq b$  então, aplicando (5.18) ao intervalo  $[a, \bar{\xi}]$  (caso já provado acima) temos

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |v(\eta)| d\eta \leq |v(a)| \left(1 + \frac{k_1}{\beta - \alpha}\right) \leq c \left(1 + \frac{k}{\beta - \alpha}\right),$$

onde,

$$k_1 = [u(a) - u(\bar{\xi})] \sup \{g_u(u, v) ; u \in [u(\bar{\xi}), u(a)] , v \in \mathbb{R}\} \leq k.$$

Analogamente, se  $a \leq \bar{\xi} \leq \alpha < \beta \leq b$  então,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |v(\eta)| d\eta \leq |v(b)| \left(1 + \frac{k_2}{\beta - \alpha}\right) \leq c \left(1 + \frac{k}{\beta - \alpha}\right),$$

onde,

$$k_2 = [u(\bar{\xi}) - u(b)] \sup \{g_u(u, v) ; u \in [u(b), u(\bar{\xi})] , v \in \mathbb{R}\} \leq k.$$

Por último, se  $a \leq \alpha < \bar{\xi} < \beta \leq b$  então, aplicando (5.18) aos intervalos  $[\alpha, \bar{\xi}]$  e  $[\bar{\xi}, \beta]$  obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |v(\eta)| d\eta &= \int_{\alpha}^{\bar{\xi}} |v(\eta)| d\eta + \int_{\bar{\xi}}^{\beta} |v(\eta)| d\eta \\ &\leq |v(a)| (\bar{\xi} - \alpha + k_1) + |v(b)| (\beta - \bar{\xi} + k_2) \\ &\leq c(\beta - \alpha + k), \end{aligned}$$

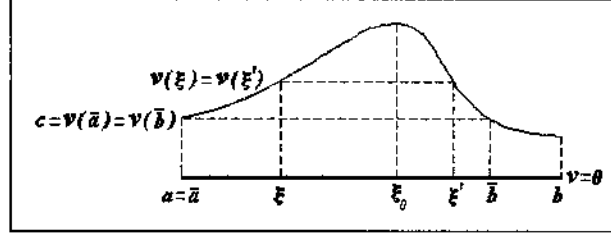


Figura 5.10:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(a) \geq v(b) \geq 0$  :  $\bar{a} = a$ ,  $\bar{b} \leq b$ .

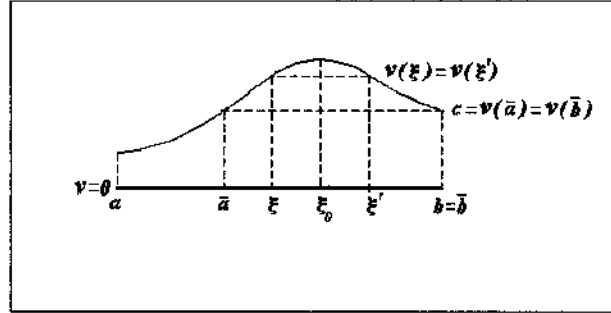


Figura 5.11:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(b) \geq v(a) \geq 0$  :  $a \leq \bar{a}$ ,  $\bar{b} = b$ .

que é (5.18) para este caso.

Ainda no caso  $v(a)v(b) \leq 0$ , temos (aplicando (5.19) aos intervalos  $[\alpha, \bar{\xi}]$  e  $[\bar{\xi}, \beta]$  e observando que  $[g(u(a)) - g(u(\bar{\xi}))]$  ,  $[g(u(\bar{\xi})) - g(u(b))]$   $\leq k$  ):

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in [a, b]} |v(\xi)| &= \max \left\{ \max_{\xi \in [a, \bar{\xi}]} |v(\xi)| , \max_{\xi \in [\bar{\xi}, b]} |v(\xi)| \right\} \\ &\leq \max \left\{ |v(a)| \left( 1 + \frac{k}{\epsilon} \right) \exp k , |v(b)| \left( 1 + \frac{k}{\epsilon} \right) \exp k \right\} \\ &\leq c \left( 1 + \frac{k}{\epsilon} \right) \exp k, \end{aligned}$$

que é (5.19) para este caso. ■

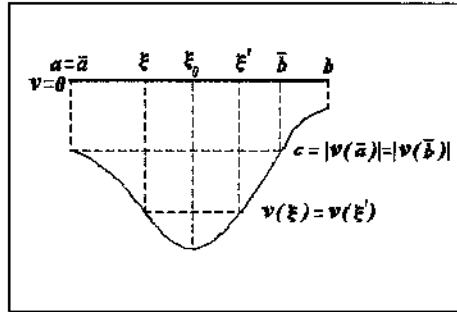


Figura 5.12:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(a) \leq v(b) \leq 0$ .

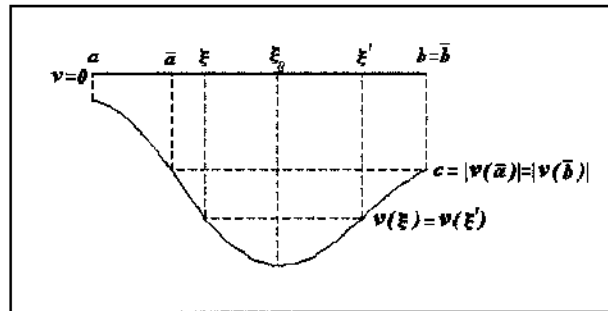


Figura 5.13:  $u(a) > u(b)$  ;  $v(b) \leq v(a) \leq 0$ .

Agora estamos em condições de provar o teorema de existência e unicidade para o problema de valor de fronteira (5.2) com  $u_l > u_r$ .

**Teorema 5.6.** *Para cada  $\epsilon, v_l, v_r, u_l, u_r \in \mathbb{R}$ , com  $\epsilon > 0$  e  $u_l > u_r$ , o problema de valor de fronteira (5.2) com  $f = f(u)$ ,  $g = g(u, v)$  e  $h = h(v)$  suaves,  $g$  satisfazendo (5.3) e (5.4), possui uma única solução suave  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  tal que  $u_\epsilon$  é limitada uniformemente em  $\epsilon$ :*

$$\|v_\epsilon\|_\infty \leq \frac{M}{\epsilon} ; \epsilon > 0, \quad (5.29)$$

onde  $M$  é independente de  $\epsilon$ .

**Demonstração:** A unicidade é a Proposição 5.1. Para provarmos a existência e a estimativa (5.29) devemos verificar (5.10) para uma constante  $\frac{M}{\epsilon}$ , com  $M$  independente de  $\mu \in [0, 1]$  e de  $L > 0$ .

Seja  $(u(\xi), v(\xi))$  solução de (5.6). Observamos inicialmente que

$$\max \{|v(-L)|, |v(L)|\} = \max \{|\mu v_l|, |\mu v_r|\} \leq \bar{v},$$

onde  $\bar{v} = \max \{|v_l|, |v_r|\}$ , e que de (5.4):

$$[u(-L) - u(L)] \sup \{g_u(u, v) ; u \in [u(L), u(-L)], v \in \mathbb{R}\} \leq C,$$

onde,

$$C = [u_l - u_r] \max \{g_u(z, v) ; |z| \leq \bar{u}\} \quad (5.30)$$

e  $\bar{u} = \max \{|u_l|, |u_r|\}$ . Portanto, de (5.19) temos:

$$|v(\xi)| \leq \bar{v} \left(1 + \frac{C}{\epsilon}\right) \exp C \leq \frac{M}{\epsilon} ; \xi \in [-L, L],$$

onde  $M = \bar{v} (1 + C) \exp C$ , constante que independe de  $\mu \in [0, 1]$ , de  $L > 0$  e de  $\epsilon$ . ■

O último resultado deste capítulo é uma estimativa em  $L^1_{loc}$  independente de  $\epsilon$ , que é consequência de (5.18) da Proposição 5.5 e que será muito útil no Capítulo 6.

**Proposição 5.7.** *Para cada  $\epsilon > 0$  seja  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  a única solução do problema de valor de fronteira (5.2) com  $u_l > u_r$  dada pelo Teorema 5.6. Então  $v_\epsilon$  é localmente uniformemente limitada em  $L^1$ , isto é, para cada intervalo fechado  $[\alpha, \beta]$ , existe uma constante positiva  $K$ , que pode depender de  $\alpha$  e  $\beta$ , mas é independente de  $\epsilon$ , tal que:*

$$\int_\alpha^\beta |v_\epsilon(\eta)| d\eta \leq K.$$

**Demonstração:** Para cada  $L > 0$  tal que  $[\alpha, \beta] \subset [-L, L]$  e  $u_\epsilon(-L) > u_\epsilon(L)$ , temos (utilizando (5.18) da Proposição 5.5 com  $\mu = 1$ ,  $a = -L$ ,  $b = L$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |v_\epsilon(\eta)| d\eta &\leq \max \{|v_\epsilon(-L)|, |v_\epsilon(L)|\} (\beta - \alpha + k_\epsilon(L)) \\ &\leq \max \{|v_\epsilon(-L)|, |v_\epsilon(L)|\} (\beta - \alpha + C) := K_\epsilon(L), \end{aligned}$$

onde:

$$k_\epsilon(L) = [u_\epsilon(-L) - u_\epsilon(L)] \sup \{g_u(u, v) ; u \in [u_\epsilon(L), u_\epsilon(-L)] , v \in \mathbb{R}\}$$

e  $C$  é a constante dada em (5.30).

Como:

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} K_\epsilon(L) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \max \{|v_\epsilon(-L)|, |v_\epsilon(L)|\} (\beta - \alpha + C) \\ &= \max \{|v_\epsilon(-\infty)|, |v_\epsilon(\infty)|\} (\beta - \alpha + C) \\ &= \max \{|v_l|, |v_r|\} (\beta - \alpha + C) := K < \infty, \end{aligned}$$

temos:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |v_\epsilon(\eta)| d\eta \leq K ; \epsilon > 0.$$

■

Finalizamos este capítulo com duas observações:

**Observação 5.5.** Não fizemos nenhuma hipótese de hiperbolicidade estrita à função de fluxo:

$$F(u, v) = (f(u), vg(u, v) + h(v)) .$$

Portanto, os resultados deste capítulo não exigem nenhuma relação entre as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ .

**Observação 5.6.** No Capítulo 6 vamos estudar a convergência das soluções de (5.2) para o caso em que  $g = g(u)$  e  $h \equiv 0$ . Neste caso, a segunda equação do sistema em (5.2) é linear em  $v$ , como pode ser facilmente verificado. Este fato, aliado aos resultados de existência e unicidade para as soluções do problema de valor de fronteira (5.2) permitem decompor qualquer solução de (5.2) em uma combinação linear de outras duas soluções, cada uma das quais não negativas na segunda componente. Mais especificamente, se  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  é solução suave do sistema:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = \dot{f}(u) - \xi \dot{u}, \\ \epsilon \ddot{v} = \frac{d}{d\xi}(vg(u)) - \xi \dot{v}, \end{cases} \quad (5.31)$$

com,

$$u_\epsilon(-\infty) = u_l, \quad u_\epsilon(+\infty) = u_r, \quad v_\epsilon(-\infty) = v_l, \quad v_\epsilon(+\infty) = v_r,$$

então  $(u_\epsilon, v_\epsilon) = (u_\epsilon, v_\epsilon^1 + v_\epsilon^2)$ , onde  $(u_\epsilon, v_\epsilon^1)$  e  $(u_\epsilon, v_\epsilon^2)$  são as soluções de (5.31) tais que:

$$\begin{aligned} (u_\epsilon(-\infty), v_\epsilon^1(-\infty)) &= (u_l, 0) \quad , \quad (u_\epsilon(+\infty), v_\epsilon^1(+\infty)) = (u_r, v_r), \\ (u_\epsilon(-\infty), v_\epsilon^2(-\infty)) &= (u_l, v_l) \quad , \quad (u_\epsilon(+\infty), v_\epsilon^2(+\infty)) = (u_r, 0). \end{aligned}$$

Também, se  $v_r < 0$  então  $v_\epsilon^1 = -\tilde{v}_\epsilon^1$ , onde  $(u_\epsilon, \tilde{v}_\epsilon^1)$  é a solução de (5.31) com:

$$(u_\epsilon(-\infty), \tilde{v}_\epsilon^1(-\infty)) = (u_l, 0) \quad , \quad (u_\epsilon(+\infty), \tilde{v}_\epsilon^1(+\infty)) = (u_r, -v_r).$$

Analogamente, se  $v_l < 0$ , então  $v_\epsilon^2 = -\tilde{v}_\epsilon^2$ , onde  $(u_\epsilon, \tilde{v}_\epsilon^2)$  é a solução de (5.31) com:

$$(u_\epsilon(-\infty), \tilde{v}_\epsilon^2(-\infty)) = (u_l, -v_l) \quad , \quad (u_\epsilon(+\infty), \tilde{v}_\epsilon^2(+\infty)) = (u_r, 0).$$

Da Proposição 5.2 segue que se  $v_l \neq 0$  (respec.  $v_r \neq 0$ ) então uma das duas funções  $v_\epsilon^1$  ou  $\tilde{v}_\epsilon^1$  (respec.  $v_\epsilon^2$  ou  $\tilde{v}_\epsilon^2$ ) é não negativa.

## 6. CONVERGÊNCIA DOS LEQUES DE VISCOSIDADE

Neste capítulo vamos estudar a convergência, quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , dos leques de viscosidade  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  associados ao problema de Riemann (3.1). Lembramos que para cada  $\epsilon > 0$ ,  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  é a única solução do problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} \epsilon \ddot{u} = f(u) - \xi \dot{u}, \\ \epsilon \ddot{v} = \frac{d}{d\xi} [vg(u)] - \xi \dot{v}, \\ u(-\infty) = u_l, \quad u(+\infty) = u_r, \\ v(-\infty) = v_l, \quad v(+\infty) = v_r, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções suaves tais que:

$$f''(u) > 0, \quad g'(u) > 0, \quad f'(u) < g(u); \quad u \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Verificamos a existência e a unicidade dos leques de viscosidade  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$ , para cada  $\epsilon > 0$ , nos capítulos 4 e 5.

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  converge fracamente para a solução do problema de Riemann (3.1), apresentada no Capítulo 3, incluindo o  $\delta$ -choque.

Na Seção 6.1 estudaremos o caso  $u_l > u_r$  e na Seção 6.2 o caso  $u_l < u_r$ .

### 6.1. O caso $u_l > u_r$

Dividiremos este caso em dois outros casos distintos dependendo de  $g(u_r)$  e de  $s$ , onde:

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}. \quad (6.3)$$

Se  $s < g(u_r)$  mostraremos que  $(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))$  converge fracamente para  $(u_s(\xi), v(\xi))$  onde:

$$u_s(\xi) = \begin{cases} u_l; & \xi < s, \\ u_r; & \xi > s, \end{cases} \quad (6.4)$$



$$v(\xi) = \begin{cases} v_l ; \xi < s, \\ v_m ; s < \xi < g(u_r), \\ v_r ; \xi > g(u_r) \end{cases}$$

e

$$s[v_m - v_l] = [v_m g(u_r) - v_l g(u_l)].$$

Ou seja, mostraremos que  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  converge fracamente para  $(u_s(\frac{x}{t}), v(\frac{x}{t}))$ , que é a solução do problema de Riemann (3.1) para o caso  $s < g(u_r)$ , formada por uma onda de choque da família 1 seguida de uma descontinuidade de contato da família 2.

As estimativas a priori que obtivemos no Capítulo 5 para os leques de viscosidade são dependentes de  $\frac{1}{\epsilon}$ . Portanto, não podemos utilizar argumentos baseados no Teorema de Helly. Os argumentos que utilizamos para demonstrar a convergência fraca são apoiados nos teoremas 2.5 e 2.6 do Capítulo 2.

Se  $g(u_r) \leq s$ , utilizaremos o Teorema 2.6 do Capítulo 2 para obtermos as convergências fracas  $(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi)) \rightharpoonup (u_s(\xi), v_s(\xi) + c\delta_s)$  e  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t})) \rightharpoonup S_\delta = (u_s(\frac{x}{t}), v_\delta)$ , onde  $\delta_s$  é a distribuição delta de Dirac centrada em  $\xi = s$ ,

$$c = s[v_r - v_l] - [v_r g(u_r) - v_l g(u_l)], \quad (6.5)$$

$$v_s(\xi) = \begin{cases} v_l ; \xi < s, \\ v_r ; \xi > s \end{cases} \quad (6.6)$$

e  $v_\delta$  é a distribuição definida no Capítulo 3 por:

$$\langle v_\delta, \psi \rangle = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v_s(\frac{x}{t}) \psi(x, t) dx dt + c \int_0^\infty t \psi(st, t) dt ; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \quad (6.7)$$

A distribuição  $S_\delta$  é o  $\delta$ -choque, solução do problema de Riemann (3.1) para o caso  $g(u_r) \leq s$ .

Mostraremos também que a sequência  $v_\epsilon(\frac{x}{t})g(u_\epsilon(\frac{x}{t}))$  converge fracamente para o produto de distribuições  $v_\delta g(u_s)$  definido no Capítulo 3 por:

$$\begin{aligned} \langle v_\delta g(u_s), \varphi \rangle &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_s(\frac{x}{t}) g(u_s(\frac{x}{t})) \varphi(x, t) dx dt \\ &+ cs \int_0^{+\infty} t \varphi(st, t) dt ; C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Como veremos, este fato é consequência do Teorema 2.7 do Capítulo 2.

No Capítulo 4 verificamos que  $u_\epsilon$  é estritamente decrescente e:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon = u_s. \quad (6.9)$$

A convergência em (6.9) é fraca em  $(-\infty, +\infty)$  e uniforme em  $(-\infty, s - \alpha] \cup [s + \alpha, +\infty)$ , para cada  $\alpha > 0$ .

A seguir vamos verificar algumas estimativas que nos ajudarão a provar a convergência de  $v_\epsilon$ . Notamos  $g(u_\epsilon(\xi))$  é estritamente decrescente (pois  $g$  é estritamente crescente e  $u_\epsilon$  é estritamente decrescente). Portanto, conforme Observação 4.2 do Capítulo 4, existe um único  $\eta_\epsilon$  satisfazendo:

$$g(u_\epsilon(\eta_\epsilon)) = \eta_\epsilon ; \epsilon > 0. \quad (6.10)$$

Lembramos ainda (Cap. 4) que  $\xi_\epsilon \rightarrow s$ , onde  $\xi_\epsilon$  é único tal que:

$$f'(u_\epsilon(\xi_\epsilon)) = \xi_\epsilon ; \epsilon > 0. \quad (6.11)$$

O Lema seguinte mostra que  $\eta_\epsilon$  converge para o máximo entre os valores  $s$  e  $g(u_r)$ .

**Lema 6.1.** *Sejam  $\xi_\epsilon$  e  $\eta_\epsilon$  dados, respectivamente, por (6.11) e (6.10). Então,*

$$\xi_\epsilon < \eta_\epsilon ; \epsilon > 0 \quad (6.12)$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \eta_\epsilon = \max\{s, g(u_r)\}. \quad (6.13)$$

**Demonstração:** Notamos que  $\eta_\epsilon \in [g(u_r), g(u_l)]$ , isto é, a sequência  $\{\eta_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$  é limitada. Portanto, tomando uma subsequência se necessário, temos que  $\eta_\epsilon \rightarrow \eta_0$ , para algum  $\eta_0 \in \mathbb{R}$ .

Se  $\xi_\epsilon \geq \eta_\epsilon$  então, como  $g(u_\epsilon(\xi))$  é estritamente decrescente, temos:

$$f'(u_\epsilon(\xi_\epsilon)) = \xi_\epsilon \geq \eta_\epsilon = g(u_\epsilon(\eta_\epsilon)) \geq g(u_\epsilon(\xi_\epsilon)),$$

o que é uma contradição com (6.2). Portanto, devemos ter (6.12) e:

$$s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \xi_\epsilon \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \eta_\epsilon = \eta_0.$$

Se  $s < \eta_0$ , seja  $\alpha > 0$ , tal que  $s + \alpha < \eta_0$ . Seja  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\eta_\epsilon \in [s + \alpha, +\infty)$  para todo  $\epsilon < \epsilon_0$ . Sabemos (Teor. 4.11, Cap. 4), que  $u_\epsilon$  converge uniformemente para  $u_r$  no intervalo  $[s + \alpha, \infty)$ . Portanto, temos  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_\epsilon(\eta_\epsilon) = u_r$  e, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  na desigualdade  $\xi_\epsilon < \eta_\epsilon = g(u_\epsilon(\eta_\epsilon))$ , temos  $s < \eta_0 = g(u_r)$ .

Mostramos acima que:

$$s < \eta_0 \Rightarrow \eta_0 = g(u_r). \quad (6.14)$$

A implicação (6.14) é suficiente para concluirmos que:

$$\eta_0 = \max\{s, g(u_r)\}. \quad (6.15)$$

De fato, se  $s < g(u_r)$  então, como  $g(u_\epsilon)$  é estritamente decrescente temos:

$$s < g(u_r) < g(u_\epsilon(\eta_\epsilon)) = \eta_\epsilon ; \epsilon > 0.$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , obtemos  $s < g(u_r) \leq \eta_0$ . De (6.14) segue que  $\eta_0 = g(u_r)$ . Por outro lado, se  $g(u_r) \leq s$ , então obrigatoriamente  $\eta_0 = s$ , pois caso contrário, se  $s < \eta_0$ , então de (6.14) temos a seguinte contradição:

$$s < \eta_0 = g(u_r) \leq s.$$

Concluimos (6.15) para qualquer limite  $\eta_0$  de subsequência de  $\eta_\epsilon$ . Como  $\{\eta_\epsilon\}$  é uma sequência limitada, obtemos (6.13) sem a necessidade de tomarmos subsequências. ■

**Observação 6.1.** Denotaremos por  $s_r$  o limite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \eta_\epsilon$  em todo o restante deste capítulo. Assim, em vista do lema anterior temos:

$$s_r = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \eta_\epsilon = \max\{s, g(u_r)\}. \quad (6.16)$$

No Capítulo 5, além da existência e da unicidade de  $v_\epsilon$  provamos também a seguinte estimativa:

$$\|v_\epsilon\|_\infty \leq \frac{M}{\epsilon} ; \epsilon > 0, \quad (6.17)$$

onde  $M$  é uma constante positiva que não depende de  $\epsilon$ . A seguir vamos obter algumas estimativas para as derivadas  $\dot{v}_\epsilon$ . Notamos que:

$$g(u_\epsilon(\xi)) \in [g(u_r), g(u_l)]. \quad (6.18)$$

**Proposição 6.2.** Existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\epsilon$ , tal que:

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C}{\epsilon^2} ; \xi \in [g(u_r), g(u_l)] , \epsilon > 0. \quad (6.19)$$

Em particular, como  $\eta_\epsilon = g(u_\epsilon(\eta_\epsilon)) \in [g(u_r), g(u_l)]$ , temos:

$$|\dot{v}_\epsilon(\eta_\epsilon)| \leq \frac{C}{\epsilon^2} ; \epsilon > 0. \quad (6.20)$$

**Demonstração:** De (6.17) e da limitação uniforme de  $\{u_\epsilon\}$  segue que existe uma constante positiva  $K$ , independente de  $\epsilon$  tal que:

$$\sup \{ \|(f(u_\epsilon(\xi)), v_\epsilon(\xi)g(u_\epsilon(\xi)))\| : \xi \in \mathbb{R} \} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

e

$$\|(u_\epsilon, v_\epsilon)\|_\infty = \sup \{ \|(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))\| : \xi \in \mathbb{R} \} \leq \frac{K}{\epsilon}.$$

Portanto, (6.19) segue diretamente da Observação 2.1 do Capítulo 2. ■

**Proposição 6.3.** *Existe constante positiva  $C$ , independente de  $\epsilon$ , tal que :*

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C}{\epsilon^3} E_\epsilon(\xi) [1 + |\xi - \eta_\epsilon|] ; \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.21)$$

onde  $E_\epsilon = E_\epsilon(\xi)$  é a seguinte função:

$$E_\epsilon(\xi) = \max \left\{ \exp \left( -\frac{1}{2\epsilon} (\xi - \eta_\epsilon)^2 \right), \exp \left( -\frac{1}{2\epsilon} (\xi - \xi_\epsilon)^2 \right) ; \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Demonstração:** Integrando a segunda equação em (6.1) obtemos:

$$\dot{v}_\epsilon(\xi) = a_\epsilon(\xi) + b_\epsilon(\xi) ; \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.22)$$

onde:

$$a_\epsilon(\xi) = \dot{v}_\epsilon(\eta_\epsilon) \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta \right) ; \xi \in \mathbb{R}$$

e

$$b_\epsilon(\xi) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} v_\epsilon(\tau) \dot{g}(u_\epsilon(\tau)) \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta \right) d\tau ; \xi \in \mathbb{R}.$$

Vamos inicialmente verificar que:

$$\exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta \right) \leq \exp \left( -\frac{1}{2\epsilon} (\xi - \eta_\epsilon)^2 \right) \leq E_\epsilon(\xi) ; \xi \in \mathbb{R} \quad (6.23)$$

De fato, se  $\eta_\epsilon < \xi$ , então,

$$g(u_\epsilon(\eta)) - \eta \leq g(u_\epsilon(\eta_\epsilon)) - \eta = \eta_\epsilon - \eta ; \eta_\epsilon \leq \eta \leq \xi$$

e se  $\eta_\epsilon > \xi$ , então,

$$\eta - g(u_\epsilon(\eta)) \leq \eta - g(u_\epsilon(\eta_\epsilon)) = \eta - \eta_\epsilon ; \xi \leq \eta \leq \eta_\epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta \right) &\leq \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} (\eta_\epsilon - \eta) d\eta \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2\epsilon} (\xi - \eta_\epsilon)^2 \right) ; \eta_\epsilon < \xi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta \right) &= \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\xi}^{\eta_\epsilon} [\eta - g(u_\epsilon(\eta))] d\eta \right) \\ &\leq \exp \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{\xi}^{\eta_\epsilon} (\eta - \eta_\epsilon) d\eta \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2\epsilon} (\eta_\epsilon - \xi)^2 \right) ; \eta_\epsilon > \xi. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos (6.23).

Agora, de (6.23) e (6.20) segue que:

$$|a_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C_1}{\epsilon^2} E_\epsilon(\xi) ; \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.24)$$

onde  $C_1$  é uma constante positiva, independente de  $\epsilon > 0$ .

Por outro lado, do Lema 4.10 do Capítulo 4, temos:

$$|\dot{u}_\epsilon(\tau)| \leq \frac{M_1}{\epsilon} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\tau - \xi_\epsilon)^2\right) ; \tau \in \mathbb{R},$$

onde  $M_1$  é uma constante positiva que não depende de  $\epsilon$ . Assim, de (6.17) e tomando  $K = \left(\sup_{u_r \leq u \leq u_l} |g'(u)|\right)$ , temos:

$$\begin{aligned} |b_\epsilon(\xi)| &\leq \frac{K \|v_\epsilon\|_\infty}{\epsilon} \left| \int_{\eta_\epsilon}^\xi |\dot{u}_\epsilon(\tau)| \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_\tau^\xi [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta\right) d\tau \right| \\ &\leq \frac{M_1 K M}{\epsilon^3} \left| \int_{\eta_\epsilon}^\xi \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\tau - \xi_\epsilon)^2\right) \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_\tau^\xi [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta\right) d\tau \right| \\ &= \frac{C_2}{\epsilon^3} \left| \int_{\eta_\epsilon}^\xi F_\epsilon(\xi, \tau) d\tau \right| ; \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $C_2 = M_1 K M$  é uma constante positiva que independe de  $\epsilon$  e:

$$0 < F_\epsilon(\xi, \tau) = \exp\left[\left(\frac{1}{\epsilon} \int_\tau^\xi [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta\right) - \frac{1}{2\epsilon}(\tau - \xi_\epsilon)^2\right] ; \tau, \xi \in \mathbb{R}$$

Logo,

$$|b_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C_2}{\epsilon^3} |\xi - \eta_\epsilon| \max\{F_\epsilon(\xi, \tau) ; \tau \in I[\xi, \eta_\epsilon]\}, \quad (6.25)$$

onde  $I[\xi, \eta_\epsilon]$  é o intervalo fechado de extremos  $\eta_\epsilon$  e  $\xi$ .

Agora, fixado  $\xi$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} F_\epsilon(\xi, \tau) &= \frac{1}{\epsilon} F_\epsilon(\xi, \tau) [-(g(u_\epsilon(\tau)) - \tau) - (\tau - \xi_\epsilon)] \\ &= \frac{1}{\epsilon} F_\epsilon(\xi, \tau) (\xi_\epsilon - g(u_\epsilon(\tau))) ; \tau \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\epsilon \frac{d^2}{d\tau^2} F_\epsilon(\xi, \tau) = (\xi_\epsilon - g(u_\epsilon(\tau))) \frac{d}{d\tau} F_\epsilon(\xi, \tau) - \dot{g}(u_\epsilon(\tau)) F_\epsilon(\xi, \tau) ; \tau \in \mathbb{R}$$

Portanto, se  $\tau_0$  é um ponto crítico de  $F(\xi, \cdot)$  então,

$$\frac{d^2}{d\tau^2} F_\epsilon(\xi, \tau) = -\frac{1}{\epsilon} \dot{g}(u_\epsilon(\tau_0)) F_\epsilon(\xi, \tau_0) > 0,$$

isto é,  $F(\xi, \cdot)$  não possui máximo local.

Concluimos que:

$$\max\{F_\epsilon(\xi, \tau) ; \tau \in I[\xi, \eta_\epsilon]\} = \max\{F_\epsilon(\xi, \eta_\epsilon), F_\epsilon(\xi, \xi)\}.$$

Mas,

$$F_\epsilon(\xi, \xi) = \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\xi - \xi_\epsilon)^2\right) \leq E_\epsilon(\xi) ; \xi \in \mathbb{R},$$

e de (6.23),

$$\begin{aligned} F_\epsilon(\xi, \eta_\epsilon) &= \exp\left[\left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta\right) - \frac{1}{2\epsilon}(\eta_\epsilon - \xi_\epsilon)^2\right] \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\eta_\epsilon}^{\xi} [g(u_\epsilon(\eta)) - \eta] d\eta\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\xi - \eta_\epsilon)^2\right) \leq E_\epsilon(\xi) ; \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, de (6.25) temos:

$$|b_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C_2}{\epsilon^3} |\xi - \eta_\epsilon| E_\epsilon(\xi) ; \xi \in \mathbb{R} \quad (6.26)$$

Agora, juntando (6.22), (6.24) e (6.26) obtemos:

$$\begin{aligned} |\dot{v}_\epsilon(\xi)| &\leq |a_\epsilon(\xi)| + |b_\epsilon(\xi)| \\ &\leq \frac{C_1}{\epsilon^2} E_\epsilon(\xi) + \frac{C_2}{\epsilon^3} |\xi - \eta_\epsilon| E_\epsilon(\xi) \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^3} E_\epsilon(\xi) (1 + |\xi - \eta_\epsilon|) ; \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que é (6.21), com  $C = \max\{C_1, C_2\}$ . ■

**Corolário 6.4.** *Existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\epsilon$ , tal que:*

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C}{\epsilon^3} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\xi_\epsilon - \xi)^2\right) [1 + (\xi_\epsilon - \xi)] ; \xi \leq \xi_\epsilon, \quad (6.27)$$

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C}{\epsilon^3} E_\epsilon(\xi) ; \xi_\epsilon \leq \xi \leq \eta_\epsilon, \quad (6.28)$$

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C}{\epsilon^3} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\xi - \eta_\epsilon)^2\right) [1 + (\xi - \eta_\epsilon)] ; \eta_\epsilon \leq \xi. \quad (6.29)$$

**Demonstração:** Observamos, da definição de  $E_\epsilon$  e de (6.12) que:

$$E_\epsilon(\xi) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\xi_\epsilon - \xi)^2\right) & ; \xi \leq \xi_\epsilon, \\ \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}(\xi - \eta_\epsilon)^2\right) & ; \eta_\epsilon \leq \xi. \end{cases} \quad (6.30)$$

Também,

$$|\xi - \eta_\epsilon| \leq |\eta_\epsilon - \xi_\epsilon| = (\eta_\epsilon - \xi_\epsilon) \leq g(u_l) - f'(u_r) := \tilde{C} ; \xi_\epsilon \leq \xi \leq \eta_\epsilon, \quad (6.31)$$

e

$$|\xi - \eta_\epsilon| \leq |\eta_\epsilon - \xi_\epsilon| + |\xi_\epsilon - \xi| \leq \tilde{C} + |\xi_\epsilon - \xi| \leq C(1 + |\xi_\epsilon - \xi|) ; \xi \in \mathbb{R}, \quad (6.32)$$

para alguma constante  $C$ . Portanto, da Proposição 6.3 anterior, de (6.30)-(6.32) obtemos, (6.27)-(6.29). ■

**Corolário 6.5.** *Seja  $s_r$  dado por (6.16). Afirmamos que:*

1.  $\dot{v}_\epsilon(\xi) \rightarrow 0$ , pontualmente em  $\mathbb{R} - \{s, s_r\}$  e uniformemente em  $[s - L, s - \alpha] \cup [s_r + \alpha, L + s_r]$ , para cada  $0 < \alpha < L$ ;
2. se  $s < g(u_r) = s_r$  então  $\dot{v}_\epsilon(\xi) \rightarrow 0$  pontualmente em  $(s, s_r)$  e uniformemente em  $[s + \alpha, s_r - \alpha]$ , para cada  $\alpha > 0$  tal que  $2\alpha < s_r - s$ .

**Demonstração:** Para  $\alpha > 0$  dado, seja  $\epsilon_0 > 0$  tal que:

$$\xi_\epsilon \in \left(s - \frac{\alpha}{2}, s + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \eta_\epsilon \in \left(s_r - \frac{\alpha}{2}, s_r + \frac{\alpha}{2}\right) ; \epsilon < \epsilon_0.$$

Assim, para  $0 < \alpha < L$ , segue que:

a) se  $\xi \in [s - L, s - \alpha]$ , então:

$$\frac{\alpha}{2} \leq \xi_\epsilon - \xi \leq L + \frac{\alpha}{2} \text{ e } [1 + (\xi_\epsilon - \xi)] \leq 1 + L + \alpha ; \epsilon < \epsilon_0;$$

b) se  $\xi \in [s_r + \alpha, s_r + L]$ , então:

$$\frac{\alpha}{2} \leq \xi - \eta_\epsilon \leq L + \frac{\alpha}{2} \text{ e } [1 + (\xi - \eta_\epsilon)] \leq 1 + L + \alpha ; \epsilon < \epsilon_0.$$

Para  $2\alpha < s_r - s$ , segue que:

c) se  $\xi \in [s + \alpha, s_r - \alpha]$ , então:

$$\frac{\alpha}{2} \leq (\xi - \xi_\epsilon), (\eta_\epsilon - \xi) ; \epsilon < \epsilon_0.$$

Do Corolário 6.4 e dos itens a) e b) acima temos:

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C(1+L+\alpha)}{\epsilon^3} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \epsilon < \epsilon_0,$$

se  $\xi \in [s - L, s - \alpha] \cup [s_r + \alpha, s_r + L]$ , o que prova a Afirmação 1.

Do Corolário 6.4 e do item c) acima obtemos:

$$|\dot{v}_\epsilon(\xi)| \leq \frac{C}{\epsilon^3} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \epsilon < \epsilon_0,$$

se  $\xi \in [s + \alpha, s_r - \alpha]$ , o que prova a Afirmação 2. ■

**Corolário 6.6.** *Suponhamos que  $s < g(u_r)$ . Seja  $I$  um intervalo fechado contido em  $(s, g(u_r))$ . Então a sequência  $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  é uniformemente limitada em  $I$ .*

**Demonstração:** Como  $s < g(u_r)$ , temos  $s < g(u_r) = s_r$ . Em vista da Observação 5.6 do Capítulo 5 vamos admitir que  $v_\epsilon \geq 0$ . Seja  $I$  um intervalo fechado contido em  $(s, s_r)$  e  $\alpha > 0$  tal que  $I \subset I_\alpha = [s + \alpha, s_r - \alpha] \subset (s, s_r)$ .

Suponhamos que a sequência  $\{v_\epsilon\}$  não seja uniformemente limitada em  $I_\alpha$ . Então, como  $v_\epsilon \geq 0$ , existem subsequências  $\epsilon_n \rightarrow 0$  e  $\{\xi_n\} \subset I_\alpha$  tais que  $v_{\epsilon_n}(\xi_n) \rightarrow \infty$ . Da Proposição 5.7 do Capítulo 5 segue que existe uma constante positiva  $K$ , (independente de  $\epsilon > 0$ ), tal que:

$$\int_{I_\alpha} |v_\epsilon(\eta)| d\eta = \int_{I_\alpha} v_\epsilon(\eta) d\eta \leq K ; \epsilon > 0. \quad (6.33)$$

Por outro lado, do Corolário 6.5 segue que  $\dot{v}_\epsilon$  converge uniformemente em  $I_\alpha$  para a função nula. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_\alpha} [v_{\epsilon_n}(\eta) - v_{\epsilon_n}(\xi_n)] d\eta \right| &\leq \int_{I_\alpha} |v_{\epsilon_n}(\eta) - v_{\epsilon_n}(\xi_n)| d\eta \\ &\leq \left[ \sup_{\xi \in I_\alpha} |\dot{v}_{\epsilon_n}(\xi)| \right] \int_{I_\alpha} |\eta - \xi_n| d\eta \\ &\leq \left[ \sup_{\xi \in I_\alpha} |\dot{v}_{\epsilon_n}(\xi)| \right] (s_r - s)^2, \end{aligned}$$



ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{I_\alpha} [v_{\epsilon_n}(\eta) - v_{\epsilon_n}(\xi_n)] d\eta \right| = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_\alpha} v_{\epsilon_n}(\eta) d\eta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_\alpha} [v_{\epsilon_n}(\eta) - v_{\epsilon_n}(\xi_n)] d\eta + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_\alpha} v_{\epsilon_n}(\xi_n) d\eta \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} v_{\epsilon_n}(\xi_n) \int_{I_\alpha} d\eta = (s_r - s - 2\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} v_{\epsilon_n}(\xi_n) = \infty \end{aligned}$$

o que é uma contradição com (6.33). ■

**Corolário 6.7.** *Afirmamos que:*

1.  $v_\epsilon \rightarrow v_l$ , uniformemente no intervalo  $(-\infty, s - \alpha]$ , para cada  $\alpha > 0$ ;
2.  $v_\epsilon \rightarrow v_r$ , uniformemente no intervalo  $[s_r + \alpha, \infty)$ , para cada  $\alpha > 0$ ;
3. se  $s < s_r = g(u_r)$  existe uma subsequência  $\{v_{\epsilon_n}\} \subset \{v_\epsilon\}$  e um valor constante  $v_m$  tais que  $v_{\epsilon_n}$  converge uniformemente em cada intervalo fechado que não contém os pontos  $s$  e  $s_r$  para a função:

$$\bar{v}(\xi) = \begin{cases} v_l ; & \xi < s, \\ v_m ; & s < \xi < s_r, \\ v_r ; & \xi > s_r. \end{cases}$$

**Demonstração:** Seja  $\epsilon_0 > 0$  tal que:

$$\xi_\epsilon \in \left(s - \frac{\alpha}{2}, s + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \eta_\epsilon \in \left(s_r - \frac{\alpha}{2}, s_r + \frac{\alpha}{2}\right) ; \quad \epsilon < \epsilon_0.$$

Se  $\eta < \xi \leq s - \alpha$ , segue de (6.27) que:

$$|v_\epsilon(\xi) - v_\epsilon(\eta)| \leq \int_\eta^\xi |\dot{v}_\epsilon(\theta)| d\theta \leq C \left[ I_\epsilon^1(\xi, \eta) + I_\epsilon^2(\xi, \eta) \right] ; \quad \epsilon < \epsilon_0, \quad (6.34)$$

onde,

$$I_\epsilon^1(\xi, \eta) = \frac{1}{\epsilon^3} \int_\eta^\xi \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi_\epsilon - \theta)^2\right) d\theta,$$

$$I_\epsilon^2(\xi, \eta) = \frac{1}{\epsilon^3} \int_\eta^\xi (\xi_\epsilon - \theta) \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi_\epsilon - \theta)^2\right) d\theta$$

e  $C$  é uma constante independente de  $\epsilon$ ,  $\xi$  e  $\eta$ .

Fazendo a mudança de variável  $\sigma = \frac{\xi_\epsilon - \theta}{\sqrt{2\epsilon}}$  na integral  $I_\epsilon^1(\xi, \eta)$  obtemos:

$$I_\epsilon^1(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\epsilon^3} \int_{\frac{\xi_\epsilon - \xi}{\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\xi_\epsilon - \eta}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-\sigma^2) d\sigma \leq \frac{\sqrt{2}}{\epsilon^2 \sqrt{\epsilon}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\xi_\epsilon - \eta}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-\sigma^2) d\sigma,$$

ou seja,

$$I_\epsilon^1(\xi, -\infty) \leq \frac{\sqrt{2}}{\epsilon^2 \sqrt{\epsilon}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I_\epsilon^2(\xi, \eta) &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_\eta^\xi \frac{d}{d\theta} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi_\epsilon - \theta)^2\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \left[ \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi_\epsilon - \xi)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi_\epsilon - \eta)^2\right) \right] \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi_\epsilon - \xi)^2\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \xi \leq s - \alpha. \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\eta \rightarrow -\infty$  em (6.34) temos, para  $\xi \in (-\infty, s - \alpha]$ ,

$$|v_\epsilon(\xi) - v_l| \leq \frac{\sqrt{2}}{\epsilon^2 \sqrt{\epsilon}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma + \frac{1}{\epsilon^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \epsilon < \epsilon_0,$$

o que prova a Afirmação 1, uma vez que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^2 \sqrt{\epsilon}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma = 0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right). \quad (6.35)$$

Analogamente, se  $s_r + \alpha < \xi < \eta$  segue de (6.29) que:

$$|v_\epsilon(\eta) - v_\epsilon(\xi)| \leq \int_\xi^\eta |\dot{v}_\epsilon(\theta)| d\theta \leq C [I_\epsilon^1(\xi, \eta) + I_\epsilon^2(\xi, \eta)] ; \epsilon < \epsilon_0, \quad (6.36)$$

onde,

$$\begin{aligned} I_\epsilon^1(\xi, \eta) &= \frac{1}{\epsilon^3} \int_\xi^\eta \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\theta - \eta_\epsilon)^2\right) d\theta, \\ I_\epsilon^2(\xi, \eta) &= \frac{1}{\epsilon^3} \int_\xi^\eta (\theta - \eta_\epsilon) \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\theta - \eta_\epsilon)^2\right) d\theta \end{aligned}$$

e  $C$  é uma constante que independente de  $\epsilon$ ,  $\xi$  e  $\eta$ .

Verificamos que:

$$I_\epsilon^1(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\epsilon^3} \int_{\frac{\xi - \eta_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\eta - \eta_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-\sigma^2) d\sigma \leq \frac{\sqrt{2}}{\epsilon \sqrt{\epsilon}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon}}}^{\frac{\eta - \eta_\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}} \exp(-\sigma^2) d\sigma$$

e

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^2(\xi, \eta) &= -\frac{1}{\epsilon} \int_\xi^\eta \frac{d}{d\theta} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\theta - \eta_\epsilon)^2\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left[ \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi - \eta_\epsilon)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\eta - \eta_\epsilon)^2\right) \right] \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} (\xi - \eta_\epsilon)^2\right) \leq \frac{1}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \xi \geq s_r + \alpha.
\end{aligned}$$

Fazendo  $\eta \rightarrow \infty$  em (6.36), encontramos, para  $\xi \in [s_r + \alpha, \infty)$  :

$$|v_r - v_\epsilon(\xi)| \leq \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\epsilon^3} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{2\epsilon}}}^\infty \exp(-\sigma^2) d\theta + \frac{C}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \epsilon < \epsilon_0$$

e a Afirmação 2 também segue de (6.35).

Se  $s < s_r = g(u_r)$ , segue do Corolário 6.6 que  $\{v_\epsilon\}$  é uniformemente limitada em  $I_\alpha = [s + \alpha, s_r - \alpha]$ . Portanto, fixando  $\xi_0 \in I_\alpha$ , existem subsequências  $\epsilon_n \rightarrow 0$  e  $\{v_{\epsilon_n}\} \subset \{v_\epsilon\}$ , tais que  $v_{\epsilon_n}(\xi_0) \rightarrow v_m$  para algum valor  $v_m$ .

Por outro lado, se  $s + \alpha \leq \xi < \eta \leq s_r - \alpha$ , então de (6.28) segue que :

$$\begin{aligned}
|v_\epsilon(\eta) - v_\epsilon(\xi)| &\leq \int_\xi^\eta |\dot{v}_\epsilon(\theta)| d\theta \leq C \frac{(s_r - s)^2}{\epsilon^3} \int_\xi^\eta E_\epsilon(\theta) d\theta \\
&\leq C \frac{(s_r - s)^2}{\epsilon^3} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) ; \epsilon < \epsilon_0,
\end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante positiva , independente de  $\epsilon$ ,  $\xi$  e  $\eta$ . Logo,

$$\begin{aligned}
|v_{\epsilon_n}(\eta) - v_m| &\leq |v_{\epsilon_n}(\eta) - v_{\epsilon_n}(\xi_0)| + |v_{\epsilon_n}(\xi_0) - v_m| \\
&\leq C \frac{(s_r - s)^2}{\epsilon_n^3} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon_n}\right) + |v_{\epsilon_n}(\xi_0) - v_m|.
\end{aligned}$$

Como  $v_{\epsilon_n}(\xi_0) \rightarrow v_m$  e  $\frac{1}{\epsilon^3} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\epsilon}\right) \rightarrow 0$ , concluímos que  $v_{\epsilon_n} \rightarrow v_m$  uniformemente em  $[s + \alpha, s_r - \alpha]$ . Assim, da Afirmação 1 e da Afirmação 2 segue a Afirmação 3. ■

A seguir vamos demonstrar a convergência de  $v_\epsilon$  para o caso  $g(u_r) \leq s$ . Daqui em diante  $\delta_s$  e  $\delta_{s_r}$  são as distribuições delta de Dirac centradas, respectivamente, em  $s$  e  $s_r$ .

**Teorema 6.8.** *Se  $g(u_r) \leq s$ , então  $v_\epsilon(\xi)$  converge fracamente para a distribuição  $v_s + c\delta_s$  e  $v_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para a distribuição  $v_\delta$ , onde  $v_s$ ,  $c$  e  $v_\delta$  são dados, respectivamente, por (6.6), (6.5) e (6.7).*

**Demonstração:** Como  $g(u_r) \leq s$ , segue de (6.13) que  $s_r = s$ . Portanto, do Capítulo 4 (Teor. 4.11) e do Corolário 6.7 temos que  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  converge uniformemente para a função  $(u_s, v_s)$ , em intervalos fechados que não contém o ponto  $s = s_r$ . Além disso, da monotonicidade de  $u_\epsilon$  e da Proposição 5.7 do Capítulo 5, segue que:

$$\int_I \|(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))\| d\xi \leq M, \quad (6.37)$$

para cada intervalo fechado  $I$ , onde  $M$  é uma constante positiva que pode depender de  $I$ , mas não depende de  $\epsilon$ .

Logo, aplicando o Teorema 2.6 do Capítulo 2, com a função vetorial  $V = (u_s, v_s)$ , concluímos que  $v_\epsilon(\xi)$  converge fracamente para  $v_s + c\delta_s$  e que  $v_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para  $v_\delta$ . ■

Agora vamos tratar a convergência fraca de  $v_\epsilon$  para o caso  $s < g(u_r)$ . Utilizaremos novamente o Teorema 2.6 do Capítulo 2, junto com o Corolário 6.7 acima para obtermos o limite fraco da sequência  $v_\epsilon(\xi)$  inicialmente da forma  $\tilde{v}(\xi) + \tilde{c}\delta_s$  onde  $\tilde{v}$  é uma função constante por partes e  $\tilde{c}$  é uma constante real. Em seguida vamos mostrar que este limite fraco possui parte singular nula, ou seja, que  $\tilde{c} = 0$ .

**Teorema 6.9.** *Se  $s < g(u_r)$ , existe uma subsequência  $\{v_{\epsilon_n}\} \subset \{v_\epsilon\}$  com  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , e ainda uma constante  $v_m$ , tais que  $v_{\epsilon_n}(\xi)$  converge fracamente para a distribuição  $\tilde{v}(\xi) + \tilde{c}\delta_s$ , onde:*

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} v_l ; \xi < s, \\ v_m ; s < \xi < s_r, \\ v_r ; \xi > s_r, \end{cases} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= s(v_m - v_l) - [v_m s_r - v_l g(u_l)] \\ &= v_m(s - s_r) - v_l(s - g(u_l)). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Além disso,  $v_{\epsilon_n}(\xi)$  converge uniformemente para  $\tilde{v}(\xi)$  em cada intervalo fechado que não contém os pontos  $s$  e  $s_r$ .

**Demonstração:** Do Corolário 6.7 temos que existe uma subsequência  $\{v_{\epsilon_n}\} \subset \{v_\epsilon\}$  com  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , e uma constante  $v_m$ , tais que  $v_{\epsilon_n}(\xi)$  converge para  $\tilde{v}(\xi)$  em (6.38), uniformemente em cada intervalo fechado que não contém os pontos  $s$  e

$s_r$ . Além disso, da Proposição 5.7 do Capítulo 5, segue que a sequência  $\{(u_{\epsilon_n}, v_{\epsilon_n})\}$  também satisfaz (6.37). Portanto, aplicando o Teorema 2.6 do Capítulo 2, com a função vetorial  $V = V(\xi)$  dada por:

$$V(\xi) = \begin{cases} (u_l, v_l) ; \xi < s, \\ (u_r, v_m) ; s < \xi < s_r, \\ (u_r, v_r) ; \xi > s_r, \end{cases}$$

segue que  $v_{\epsilon_n}$  converge fracamente para a distribuição  $\tilde{v} + c_1\delta_s + c_2\delta_{s_r}$ , onde:

$$c_1 = s(v_m - v_l) - [v_ms_r - v_lg(u_l)]$$

e

$$c_2 = s_r(v_r - v_m) - [v_rg(u_r) - v_mg(u_r)].$$

Como  $g(u_r) = s_r$ , temos  $c_2 = 0$ , o que prova o teorema. ■

**Observação 6.2.** É também consequência do Teorema 2.6 do Capítulo 2 que  $v_{\epsilon_n}(\frac{x}{t})$  converge fracamente para uma distribuição que coincide com a função  $\tilde{v}(\frac{x}{t})$  se  $\tilde{c} = 0$ .

A seguir vamos mostrar que o teorema acima vale para a sequência inteira  $\{v_\epsilon\}$ , e que a constante  $\tilde{c}$  dada em (6.39) é obrigatoriamente zero. Vamos dividir a prova deste fato em dois casos, que serão tratados nos teoremas seguintes. O próximo teorema trata do caso em que o estado  $(u_r, v_r)$  está sobre um dos ramos da curva de choque da família 1 (Cap. 3) passando por  $(u_l, v_l)$ .

**Teorema 6.10.** Suponhamos que  $s < g(u_r)$  e que:

$$s(v_r - v_l) = v_rg(u_r) - v_lg(u_l). \quad (6.40)$$

Então  $v_\epsilon(\xi)$  converge fracamente para a função  $v_s(\xi)$  dada em (6.6) e  $v_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para a função  $v_s(\frac{x}{t})$ .

**Demonstração:** Se  $v_l = 0$  então, de (6.40) temos  $v_r = 0$ . Portanto,  $v_\epsilon \equiv 0$  (Prop. 5.2, Cap.5) e a conclusão do teorema é trivial.

Da linearidade do sistema em (6.1) com relação a segunda variável dependente  $v$ , é suficiente (trocando  $v_l$  por  $-v_l$ , se necessário) provarmos o teorema para o caso  $v_l > 0$ . Portanto, no decorrer desta demonstração vamos assumir que  $v_l > 0$ . Nesse caso,  $v_r > v_l > 0$  (Obs. 3.1, Cap. 3). Logo,  $v_\epsilon \geq 0$  (Prop. 5.2, cap. 5).

Reescrevendo (6.40), lembrando que  $s_r = g(u_r)$ , temos:

$$v_r(s - s_r) = v_l(s - g(u_l)). \quad (6.41)$$

Do Teorema 6.9 segue que existem subsequências  $\epsilon_n \rightarrow 0$  e  $\{v_{\epsilon_n}\} \subset \{v_\epsilon\}$  e ainda uma constante  $\tilde{v}_m$ , (que, em princípio, depende da subsequência  $\{v_{\epsilon_n}\}$  mas que, na verdade, mostraremos ser obrigatoriamente igual a  $v_r$ ) tais que  $v_{\epsilon_n}(\xi)$  converge fracamente para a distribuição  $\tilde{v}(\xi) + \tilde{c}\delta_s$ , onde  $\tilde{v}$  é a função:

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} v_l ; & \xi < s, \\ \tilde{v}_m ; & s < \xi < s_r, \\ v_r ; & \xi > s_r, \end{cases}$$

e  $\tilde{c} = \tilde{v}_m(s - s_r) - v_l(s - g(u_l))$ . Em vista de (6.41):

$$\tilde{c} = (\tilde{v}_m - v_r)(s - s_r). \quad (6.42)$$

De (6.42) e da Observação 6.2 é suficiente verificarmos que  $\tilde{c} = 0$  para concluirmos a demonstração do teorema. Para isto basta mostrarmos (passando ainda a uma outra subsequência, se necessário) que  $\{v_{\epsilon_n}\}$  é uniformemente limitada em um intervalo fechado contendo  $s$  como ponto interior. De fato, se existir  $\beta > 0$  tal que,

$$0 \leq v_{\epsilon_n}(\xi) < K ; \quad \xi \in [s - \beta, s + \beta] ; \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.43)$$

então, integrando a segunda equação em (6.1) obtemos:

$$\epsilon_n \dot{v}_{\epsilon_n}|_{s-\beta}^{s+\beta} = [(g(u_{\epsilon_n}) - \xi) v_{\epsilon_n}]_{s-\beta}^{s+\beta} + \int_{s-\beta}^{s+\beta} v_{\epsilon_n} d\eta ; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na expressão acima, utilizando as convergências de  $\dot{v}_{\epsilon_n}$  (Corolário 6.5) de  $v_{\epsilon_n}$  (Corolário 6.7) e ainda (6.42), encontramos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s-\beta}^{s+\beta} v_{\epsilon_n} d\eta = \tilde{c} + \beta(\tilde{v}_m + v_l). \quad (6.44)$$

Por outro lado, da limitação uniforme (6.43) segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s-\beta}^{s+\beta} v_{\epsilon_n} d\eta = \int_{s-\beta}^{s+\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{\epsilon_n} d\eta = \beta(\tilde{v}_m + v_l).$$

Logo, de (6.44) temos  $\tilde{c} = 0$  e  $\tilde{v}_m = v_r$ .

Falta verificarmos que existe uma subsequência de  $\{v_{\epsilon_n}\}$  que é uniformemente limitada em um intervalo fechado contendo  $s$  como ponto interior. Se  $\{v_{\epsilon_n}\}$  possuir uma subsequência de funções estritamente crescentes, então não há o que verificarmos, pois nesse caso  $v_l \leq v_{\epsilon_n} \leq v_r$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Suponhamos que as funções de  $\{v_{\epsilon_n}\}$  sejam todas (se necessário tomamos uma subsequência) não estritamente crescentes. Nesse caso, se  $v_\epsilon \in \{v_{\epsilon_n}\}$ , segue da Proposição 5.2 do Capítulo 5, que  $v_\epsilon$  possui um único ponto crítico  $\tau_\epsilon$  que é ponto

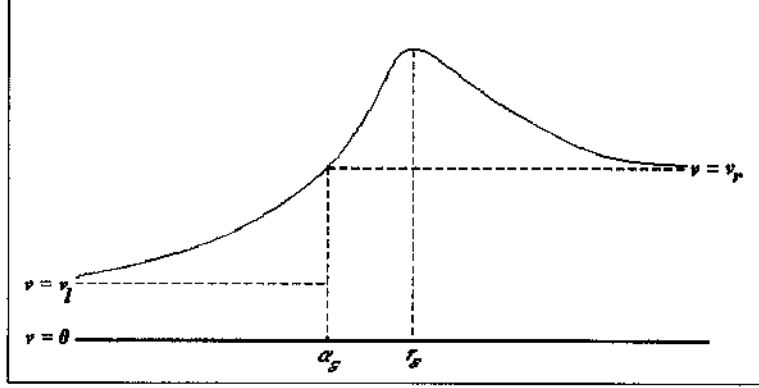


Figura 6.1:  $v_\epsilon$  não estritamente monótona com  $v_r(s_r - s) = v_l(g(u_l) - s)$  ;  $0 < v_l < v_r$ .

de máximo (Fig. 6.1). Seja  $\alpha_\epsilon$  único tal que  $v_\epsilon(\alpha_\epsilon) = v_r$  (Fig.6.1). Então  $\alpha_\epsilon \leq \tau_\epsilon$  e

$$\int_{-\infty}^{\alpha_\epsilon} [v_\epsilon(\eta) - v_l] d\eta + \int_{\alpha_\epsilon}^{+\infty} [v_\epsilon(\eta) - v_r] d\eta > 0.$$

Por outro lado, do Teorema 2.5 do Capítulo 2 temos,

$$\int_{-\infty}^{\alpha_\epsilon} [v_\epsilon(\eta) - v_l] d\eta + \int_{\alpha_\epsilon}^{+\infty} [v_\epsilon(\eta) - v_r] d\eta = \alpha_\epsilon (v_r - v_l) - (v_r s_r - v_l g(u_l)).$$

Portanto,  $\alpha_\epsilon (v_r - v_l) > v_r s_r - v_l g(u_l) = s (v_r - v_l)$ , isto é,  $s < \alpha_\epsilon$ . Como  $\alpha_\epsilon \leq \tau_\epsilon$ , temos,

$$v_l < v_\epsilon(\xi) < v_\epsilon(\alpha_\epsilon) = v_r ; \xi \in (-\infty, \alpha_\epsilon). \quad (6.45)$$

Se  $\alpha_{\epsilon_n} \not\rightarrow s$ , então conseguimos verificar (a menos de uma subsequência) que  $\{v_{\epsilon_n}\}$  é uniformemente limitada em um intervalo fechado contendo  $s$  como ponto interior. De fato, se  $\alpha_{\epsilon_n} \not\rightarrow s$ , então (a menos de uma subsequência) existe uma constante positiva  $L$  tal que  $s + L < \alpha_{\epsilon_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo de (6.45) segue que:

$$v_l < v_{\epsilon_n}(\xi) < v_{\epsilon_n}(\alpha_{\epsilon_n}) = v_r ; \xi \in (-\infty, s + L] ; n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para completarmos a prova de que  $\tilde{c} = 0$ , devemos assumir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{\epsilon_n} = s. \quad (6.46)$$

Nesse caso vamos verificar diretamente um resultado bem mais forte do que precisamos, que é a convergência forte em  $L^1(\mathbb{R})$  da sequência  $\{v_{\epsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  para a

função  $v_s$ . De fato, do Teorema 2.5 do Capítulo 2, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [v_{\epsilon_n}(\eta) - v_s] d\eta = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |v_{\epsilon_n} - v_s| d\eta &= \int_{-\infty}^s |v_{\epsilon_n} - v_l| d\eta + \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} |v_{\epsilon_n} - v_r| d\eta + \int_{\alpha_{\epsilon_n}}^{+\infty} |v_{\epsilon_n} - v_r| d\eta \\ &= \int_{-\infty}^s [v_{\epsilon_n} - v_l] d\eta + \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} [v_r - v_{\epsilon_n}] d\eta + \int_{\alpha_{\epsilon_n}}^{+\infty} [v_{\epsilon_n} - v_r] d\eta \\ &= \int_{-\infty}^s [v_{\epsilon_n} - v_s] d\eta + \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} [v_{\epsilon_n} - v_s] d\eta + \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} [v_r - v_{\epsilon_n}] d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [v_{\epsilon_n} - v_s] d\eta - \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} [v_{\epsilon_n} - v_s] d\eta + \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} [v_r - v_{\epsilon_n}] d\eta \\ &= 0 + 2 \int_s^{\alpha_{\epsilon_n}} [v_r - v_{\epsilon_n}] d\eta \leq 2 (v_r - v_l) (\alpha_{\epsilon_n} - s) \end{aligned}$$

e, em vista de (6.46) temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |v_{\epsilon_n} - v_s| d\eta = 0.$$

Concluimos que  $v_{\epsilon_n}$  converge (fortemente) para  $v_s$  em  $L^1(\mathbb{R})$  e portanto, também converge fracamente para  $v_s$ . Por outro lado, como já tínhamos a convergência fraca de  $v_{\epsilon_n}$  para  $\tilde{v} + \tilde{c}\delta_s$ , temos que  $\tilde{c} = 0$  e  $\tilde{v} = v_s$ . Vamos verificar esta última afirmação. Seja  $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$  tal que  $\text{supp } \varphi \subset (s, s_r)$ ,  $\varphi(s) = 1$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) d\eta = 0$ .

Temos, por um lado,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [v_s(\eta) - \tilde{v}(\eta)] \varphi(\eta) d\eta &= \int_s^{s_r} [v_s(\eta) - \tilde{v}(\eta)] \varphi(\eta) d\eta \\ &= (v_r - \tilde{v}_m) \int_s^{s_r} \varphi(\eta) d\eta \\ &= (v_r - \tilde{v}_m) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) d\eta = 0 \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} [v_s(\eta) - \tilde{v}(\eta)] \varphi(\eta) d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [v_s(\eta) - v_{\epsilon_n}(\eta)] \varphi(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} [v_{\epsilon_n}(\eta) - \tilde{v}(\eta)] \varphi(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [v_{\epsilon_n}(\eta) - v_s(\eta)] \varphi(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [v_{\epsilon_n}(\eta) - \tilde{v}(\eta)] \varphi(\eta) d\eta$$



e, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$0 = \tilde{c}\varphi(s),$$

isto é,  $\tilde{c} = 0$ , como queríamos.

Provamos o teorema para uma subsequência de  $\{v_\epsilon\}$ . Como os argumentos utilizados nesta demonstração podem ser aplicados a qualquer subsequência de  $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ , concluímos o teorema efetivamente para a sequência inteira  $\{v_\epsilon\}$ . ■

O próximo teorema trata do caso  $s < g(u_r)$  com  $v_l = 0$  e  $v_r \neq 0$ . Juntaremos este caso com o tratado no último teorema para abordarmos todas as possibilidades quando  $s < g(u_r)$ .

**Teorema 6.11.** *Suponhamos que  $s < g(u_r)$  e  $v_l = 0 \neq v_r$ . Então  $v_\epsilon(\xi)$  converge fracamente para  $v(\xi)$  e  $v_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para  $v(\frac{x}{t})$ , onde:*

$$v(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi < g(u_r), \\ v_r & ; \xi > g(u_r). \end{cases} \quad (6.47)$$

**Demonstração:** Da linearidade do sistema em (6.1), com relação a segunda variável dependente  $v$ , é suficiente (trocando  $v_r$  por  $-v_r$ , se necessário) provarmos o teorema para o caso  $v_r > 0$ .

Do Teorema 6.9 temos que existem subsequências  $\epsilon_n \rightarrow 0$  e  $\{v_{\epsilon_n}\} \subset \{v_\epsilon\}$  e ainda uma constante  $\tilde{v}_m$ , tais que  $v_{\epsilon_n}$  converge fracamente para a distribuição  $\tilde{v} + \tilde{c}\delta_s$ , onde  $\tilde{v}$  é a função:

$$\tilde{v}(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi < s, \\ \tilde{v}_m & ; s < \xi < s_r, \\ v_r & ; \xi > s_r, \end{cases}$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{v}_m(s - s_r).$$

Para concluirmos as convergências fracas  $v_{\epsilon_n}(\xi) \rightharpoonup \tilde{v}(\xi)$  e  $v_{\epsilon_n}(\frac{x}{t}) \rightharpoonup \tilde{v}(\frac{x}{t})$  (esta última segue da Observação 6.2), devemos mostrar que  $\tilde{c} = 0$ . Para isto, seguindo a demonstração do Teorema 6.10, basta verificarmos que  $\{v_{\epsilon_n}\}$  é uniformemente limitada em um intervalo fechado contendo  $s$  como ponto interior. Seja  $v_\epsilon \in \{v_{\epsilon_n}\}$ . Se  $v_\epsilon$  for estritamente crescente, então  $0 \leq v_\epsilon < v_r$ . Caso contrário, existe (Prop. 5.2, Cap.2)  $\tau_\epsilon \in \mathbb{R}$  (Fig. 6.2) tal que  $v_\epsilon$  é estritamente crescente em  $(-\infty, \tau_\epsilon)$ , atinge o valor máximo em  $\tau_\epsilon$  e é estritamente decrescente em  $(\tau_\epsilon, \infty)$ . Nesse caso (Fig. 6.2) seja  $\alpha_\epsilon$  tal que  $v_\epsilon(\alpha_\epsilon) = v_r$ .

Claramente temos  $\alpha_\epsilon \leq \tau_\epsilon$  e:

$$0 < \int_{-\infty}^{\alpha_\epsilon} v_\epsilon(\eta) d\eta + \int_{\alpha_\epsilon}^{+\infty} [v_\epsilon(\eta) - v_r] d\eta. \quad (6.48)$$

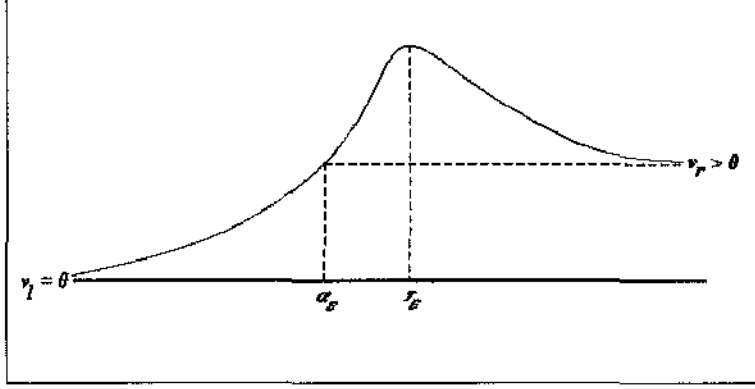


Figura 6.2:  $v_l = 0 < v_r$

Por outro lado, do Teorema 2.5 do Capítulo 2 temos, lembrando que  $v_l = 0$  e que  $g(u_r) = s_r$ ,

$$\int_{-\infty}^{\alpha_\epsilon} v_\epsilon(\eta) d\eta + \int_{\alpha_\epsilon}^{+\infty} [v_\epsilon(\eta) - v_r] d\eta = \alpha_\epsilon v_r - v_r g(u_r) = v_r(\alpha_\epsilon - s_r) ; \xi \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $s_r < \alpha_\epsilon$ . Como  $\alpha_\epsilon \leq \tau_\epsilon$  temos:

$$0 < v_\epsilon(\xi) < v_\epsilon(s_r) < v_\epsilon(\alpha_\epsilon) = v_r ; \xi < s_r.$$

Concluimos que se  $v_\epsilon \in \{v_{\epsilon_n}\}$ , então  $0 < v_\epsilon < v_r$  em  $(-\infty, s_r]$ , isto é, a sequência  $\{v_{\epsilon_n}\}$  é uniformemente limitada em  $(-\infty, s_r]$ , o que é suficiente para garantirmos que  $\tilde{v}_m = \tilde{c} = 0$ . De fato, repetindo o argumento já usado na demonstração do último teorema, tomamos  $\beta > 0$  suficientemente pequeno (tal que  $s + \beta < s_r$ ) e integramos a segunda equação em (6.1) no intervalo  $[s - \beta, s + \beta]$ , para obtermos:

$$\epsilon_n \dot{v}_{\epsilon_n}|_{s-\beta}^{s+\beta} = [v_{\epsilon_n}(g(u_{\epsilon_n}) - \xi)]_{s-\beta}^{s+\beta} + \int_{s-\beta}^{s+\beta} v_{\epsilon_n} d\eta ; n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos por um lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s-\beta}^{s+\beta} v_{\epsilon_n} d\eta = -\tilde{v}_m(s_r - s) + \beta \tilde{v}_m \quad (6.49)$$

e, por outro lado, como  $\{v_\epsilon\}$  é uniformemente limitada no intervalo  $[s - \beta, s + \beta]$ , obtemos :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s-\beta}^{s+\beta} v_{\epsilon_n} d\eta = \int_{s-\beta}^{s+\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{\epsilon_n} d\eta = \beta \tilde{v}_m.$$

Portanto,

$$\tilde{v}_m(s - s_r) = 0,$$

isto é,  $\tilde{v}_m = 0$ , uma vez que  $s < s_r$ .

Concluimos que  $\tilde{v}_m = \tilde{c} = 0$ . Logo,  $\tilde{v} = v$  dada em (6.47),  $v_{\epsilon_n}(\xi)$  converge fracamente para  $v(\xi)$  e  $v_{\epsilon_n}(\frac{x}{t})$  converge fracamente para  $v(\frac{x}{t})$ . Também concluimos que o mesmo fato ocorre com a sequência inteira  $\{v_\epsilon\}$ . Pois o limite de qualquer subsequência fracamente convergente de  $\{v_\epsilon\}$  é sempre  $v$ . ■

Agora, juntando os dois últimos teoremas, podemos concluir a convergência de  $v_\epsilon$  no caso  $s < g(u_r)$ .

**Teorema 6.12.** *Se  $s < g(u_r)$ , então  $v_\epsilon(\xi)$  converge fracamente para  $v(\xi)$  e  $v_\epsilon(\frac{x}{t})$  converge fracamente para  $v(\frac{x}{t})$ , onde:*

$$v(\xi) = \begin{cases} v_l & ; \xi < s \\ v_m & ; s < \xi < g(u_r), \\ v_r & ; \xi > g(u_r), \end{cases} \quad (6.50)$$

e  $v_m$  é único tal que:

$$s(v_m - v_l) = v_m g(u_r) - v_l g(u_l). \quad (6.51)$$

**Demonstração:** Sejam  $v_\epsilon^1$  e  $v_\epsilon^2$  tais que  $(u_\epsilon, v_\epsilon^1)$  e  $(u_\epsilon, v_\epsilon^2)$  são as soluções de (6.1) com:

$$v_\epsilon^1(-\infty) = 0, \quad v_\epsilon^1(+\infty) = v_r - v_m$$

e

$$v_\epsilon^2(-\infty) = v_l, \quad v_\epsilon^2(+\infty) = v_m,$$

Então, por unicidade dos leques de viscosidade, segue que:

$$v_\epsilon = v_\epsilon^2 + v_\epsilon^1, \quad (6.52)$$

uma vez que  $(u_\epsilon, v_\epsilon^2 + v_\epsilon^1)$  também é solução de (6.1). Agora, dos dois casos já estudados acima (Teor. 6.10 e Teor. 6.11), temos que  $v_\epsilon^1$  corresponde ao segundo e  $v_\epsilon^2$  corresponde ao primeiro. Logo  $v_\epsilon^1(\xi)$  (respec.  $v_\epsilon^1(\frac{x}{t})$ ) converge fracamente para  $v_1(\xi)$  (respec.  $v_1(\frac{x}{t})$ ) e  $v_\epsilon^2(\xi)$  (respec.  $v_\epsilon^2(\frac{x}{t})$ ) converge fracamente para  $v_2(\xi)$  (respec.  $v_2(\frac{x}{t})$ ) onde:

$$v_1(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi < g(u_r), \\ v_r - v_m & ; \xi > g(u_r), \end{cases}$$

e

$$v_2(\xi) = \begin{cases} v_l & ; \xi < s, \\ v_m & ; \xi > s. \end{cases}$$

Portanto, de (6.52) segue que  $v_\epsilon$  converge fracamente para  $v_2 + v_1$ . Como  $v_2 + v_1 = v$  dada por (6.50), concluímos a demonstração. ■

A seguir vamos enunciar os resultados de convergência fraca provados acima, num único resultado que é o teorema principal desta seção.

**Teorema 6.13.** *Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $(u_\epsilon(\xi), v_\epsilon(\xi))$  o único leque de viscosidade associado ao problema de Riemann (3.1), com  $u_l > u_r$ . Sejam  $s$ ,  $u_s$  e  $v_s$  dados, respectivamente por (6.3), (6.4) e (6.6). Afirmamos que:*

1. *se  $g(u_r) \leq s$ , então os leques de viscosidade  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  convergem fracamente para  $S_\delta = (u_s(\frac{x}{t}), v_\delta)$ ;*
2. *se  $s < g(u_r)$ , então os leques de viscosidade  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  convergem fracamente para  $(u_s(\frac{x}{t}), v(\frac{x}{t}))$ , onde  $v = v(\xi)$  é a dada por (6.50) com  $v_m$  dado por (6.51).*

Vamos terminar esta seção recorrendo ao Teorema 2.7 do Capítulo 2 para verificarmos que  $v_\delta g(u_s)$  (Cap.3) é o limite fraco da sequência  $v_\epsilon g(u_\epsilon)$ . Consideramos este fato como uma justificativa formal para a definição da distribuição produto  $v_\delta g(u_s)$  feita em [22] e utilizada neste trabalho.

**Proposição 6.14.** *Se  $g(u_r) \leq s$ , então  $v_\epsilon(\xi)g(u_\epsilon(\xi))$  converge fracamente para  $v_s(\xi) + cs\delta_s$  e  $v_\epsilon(\frac{x}{t})g(u_\epsilon(\frac{x}{t}))$  converge fracamente para a distribuição produto  $v_\delta g(u_s)$  dada em (6.8).*

**Demonstração:** Basta aplicarmos o Teorema 2.7 do Capítulo 2 com  $U_\epsilon = (u_\epsilon, v_\epsilon)$  e  $V = (u_s, v_s)$ . Para isto devemos verificar as hipóteses i), ii) e iii) desse teorema. A hipótese i) é garantida pelo Teorema 4.11 do Capítulo 4 combinado com o Corolário 6.7. De (6.37) temos ii) e do Corolário 6.5 acima temos iii). ■

## 6.2. O caso $u_l < u_r$

No Capítulo 5 (Corolário 5.4) mostramos que nesse caso existe uma subsequência de leques de viscosidade que converge fracamente para uma função limitada e de variação total limitada  $v$ , tal que  $(\bar{u}(\frac{x}{t}), v(\frac{x}{t}))$  é solução fraca do problema de Riemann (3.1), onde  $\bar{u}$  é a seguinte função contínua:

$$\bar{u}(\xi) = \begin{cases} u_l ; \xi \leq f'(u_l), \\ (f')^{-1}(\xi) ; f'(u_l) \leq \xi \leq f'(u_r), \\ u_r ; \xi \geq f'(u_r). \end{cases} \quad (6.53)$$

A seguir vamos verificar que necessariamente  $(\bar{u}(\frac{x}{t}), v(\frac{x}{t}))$  é a solução do problema de Riemann apresentada no Capítulo 3.

**Teorema 6.15.** *Suponhamos que  $v(\xi)$  seja uma função limitada e mensurável tal que  $(\bar{u}(\xi), v(\xi))$  é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} f(u) - \xi u = 0, \\ \frac{d}{d\xi} [vg(u)] - \xi v = 0, \\ u(-\infty) = u_l, \quad u(+\infty) = u_r, \\ v(-\infty) = v_l, \quad v(+\infty) = v_r, \end{cases} \quad (6.54)$$

onde  $\bar{u}$  é a função dada em (6.53). Então  $v(\xi) = \bar{v}(\xi)$  qtp  $\xi \in \mathbb{R}$ , onde:

$$\bar{v}(\xi) = \begin{cases} v_l \exp \int_{u_l}^{\bar{u}(\xi)} \frac{g'(z) dz}{f'(z) - g(z)} ; \xi < g(u_r), \\ v_r ; \xi > g(u_r). \end{cases} \quad (6.55)$$

**Demonstração:** Da Observação 2.1 do Capítulo 2, segue que  $(\bar{u}(\xi), \bar{v}(\xi))$  é uma solução fraca do sistema em (6.54), isto é, satisfaz (2.4) do Capítulo 2, uma vez  $(\bar{u}(\frac{x}{t}), \bar{v}(\frac{x}{t}))$  é a solução fraca do problema de Riemann (3.1) apresentada no Capítulo 3 (Obs. 3.2). Portanto, da linearidade em relação à variável dependente  $v$  do sistema em (6.54) e da Definição 2.1 do Capítulo 2, temos que  $w = v - \bar{v}$  satisfaz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w [h\dot{\varphi} - \varphi] d\xi = 0 ; \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}), \quad (6.56)$$

onde:

$$h(\xi) = g(\bar{u}(\xi)) - \xi ; \xi \in \mathbb{R}.$$

Notamos que da continuidade de  $\bar{u}$  segue que  $h$  é uma função contínua e que da condição de hiperbolicidade estrita  $g > f'$ , segue que  $h$  se anula somente em  $\xi_0 = g(u_r)$ . De fato, temos:

$$h(\xi) = \begin{cases} g(u_l) - \xi > f'(u_l) - \xi \geq 0 ; \xi \in (-\infty, f'(u_l)], \\ g(\bar{u}(\xi)) - f'(\bar{u}(\xi)) > 0 ; \xi \in [f'(u_l), f'(u_r)], \\ g(u_r) - \xi > 0 ; \xi \in [f'(u_r), g(u_r)), \\ g(u_r) - \xi < 0 ; \xi \in (g(u_r), \infty). \end{cases}$$

Fixemos  $\psi \in C_0^1((-\infty, g(u_r)))$ . Seja  $\varphi$  a seguinte função:

$$\varphi(\xi) = -\psi(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} \psi(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^{\xi} \frac{d\eta}{h(\eta)} \right) d\tau ; \xi \in (-\infty, g(u_r)). \quad (6.57)$$

Podemos verificar facilmente que  $\varphi$  satisfaz:

$$h\dot{\varphi} - \varphi = \psi. \quad (6.58)$$

Mais ainda, como  $\psi \in C_0^1((-\infty, g(u_r)))$  e  $\frac{1}{h} \in C((-\infty, g(u_r)))$  temos que  $\varphi \in C_0^1((-\infty, g(u_r)))$ . A verificação de que o suporte de  $\varphi$  é compacto segue da expressão de  $\varphi$  em (6.57) e da equação (6.58), pois se  $\text{supp } \psi \subset [a, b] \subset (-\infty, g(u_r))$ , então:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \xi \in (-\infty, a) \\ c & ; \xi \in (b, g(u_r)) \end{cases}$$

onde:

$$c = \int_a^b \dot{\psi}(\tau) \exp\left(\int_\tau^b \frac{d\eta}{h(\eta)}\right) d\tau.$$

Portanto,  $\dot{\varphi} \equiv 0$  em  $(b, g(u_r))$  e de (6.58) segue que  $c = 0$ .

Logo, de (6.56) e de (6.58):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w\psi d\xi = 0 ; \psi \in C_0^1((-\infty, g(u_r))).$$

Como  $\psi$  é uma função arbitrária em  $C_0^1((-\infty, g(u_r)))$ , temos  $w = 0$  qtp  $\xi \in (-\infty, g(u_r))$ .

Analogamente, provamos que  $w = 0$  qtp  $\xi \in (g(u_r), \infty)$ . Portanto,

$$v(\xi) = \bar{v}(\xi) \text{ qtp } \xi \in \mathbb{R}.$$

■

Como consequência do Teorema 6.15 e do Corolário 5.4 do Capítulo 5, temos imediatamente o seguinte resultado de convergência.

**Teorema 6.16.** *Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $(u_\epsilon, v_\epsilon)$  a única solução de (6.1) com  $u_l \leq u_r$ . Então  $(u_\epsilon(\frac{x}{t}), v_\epsilon(\frac{x}{t}))$  converge fracamente para  $(\bar{u}(\frac{x}{t}), \bar{v}(\frac{x}{t}))$  onde  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  são as funções dadas por (6.53) e (6.55), respectivamente.*

## 7. CONCLUSÕES

Verificamos, através do exemplo estudado neste trabalho, que é possível obter soluções de problemas de Riemann para sistemas de leis de conservação pelo método dos limites de leques de viscosidade, utilizando estimativas a priori dependentes de  $\epsilon$ . Também mostramos que este método pode servir como condição de entropia, pois conseguimos obter todas as soluções do problema de Riemann (3.1), inclusive os  $\delta$ -choques super-compresivos e os choques de Lax, como limites de leques de viscosidade.

Várias questões podem surgir motivadas pelos nossos resultados. Por exemplo a possibilidade da presença de  $\delta$ -choques e da convergência dos leques de viscosidade para estas soluções, no caso de sistemas acoplados ou dos sistemas do Capítulo 5. Estes últimos, apesar de ainda serem desacoplados, possuem a segunda equação não linear em  $v$  (diferentemente do sistema tratado nos capítulos 3 e 6). Passos importantes em relação a estes sistemas já foram dados neste trabalho: existência, unicidade e estimativas a priori para os leques de viscosidade. Além disso, estes resultados não exigem propriedades especiais para as funções  $f$  e  $h$ . Assim, estes sistemas podem ter alguma interpretação em termos de modelos físicos, por exemplo, se a primeira equação for a equação de Buckley-Leverett.

Com relação a sistemas desacoplados, o exemplo mais próximo em que não temos a existência global de soluções fracas, no sentido clássico, é o estudado por Keyfitz e Kranzer [9, 10, 11]. As técnicas utilizadas no nosso trabalho e os resultados assintóticos em [9, 10] que relacionam leques de viscosidade e choques singulares poderiam ser combinados, neste exemplo, na tentativa de obtermos resultados definitivos sobre a conjectura de Keyfitz e Kranzer de que os choques singulares são obtidos como limites dos leques de viscosidade.

Outra questão é a verificação de que os nossos resultados estão de acordo com a teoria de Bouchut e James [1], quando consideramos a segunda equação do sistema em (3.1) como uma equação de transporte com coeficiente descontínuo, na forma conservativa.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] **F. Bouchut e F. James**, *Équations de transport unidimensionnelles à coefficients discontinus*, C.R. Acad. Paris, t. 320, Série I, 1097-1102 (1995).
- [2] **C. M. Dafermos**, Solution of the Riemann problem for class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method, Arch. Rat. Mech. Anal. 52, 1-9 (1973).
- [3] **C. M. Dafermos**, Structure of solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal. 53, 203-217 (1974).
- [4] **C. M. Dafermos**, *Admissible wave fans in nonlinear hyperbolic systems*, Arch. Rational Mech. Anal. 106, 243-260 (1989).
- [5] **C. M. Dafermos e R. J. DiPerna**, The Riemann problem for certain classes of hyperbolic systems of conservation laws, J. Diff. Eq. 20, 90-114 (1976).
- [6] **H. T. Fan**, A limiting viscosity approach to the Riemann problem for materials exhibiting change of phase II, Arch. Rat. Mech. Anal. 116, 317-338 (1992).
- [7] **H. T. Fan**, One-phase Riemann problem and wave interactions in systems of conservation laws of mixed type, SIAM J. Math. Anal. 24, 840-865 (1993).
- [8] **A. S. Kalasnikov**, *Construction of generalized solutions of quasi-linear equations of first order without convexity conditions as limits of solutions of parabolic equations with a small parameter*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 127, 27-30 (1959).
- [9] **B. L. Keyfitz e H. C. Kranzer**, *A viscosity approximation to a system of conservation laws with no classical Riemann solution*, Nonlinear Hyperbolic Problems, Lecture Notes in Math., 1402, Springer-Verlag, Berlin/New York, 185-197 (1989).



- [10] **B. L. Keyfitz e H. C. Kranzer**, *A strictly hyperbolic system of conservation laws admitting singular shocks*, in *Nonlinear Evolution Equations that Change Type*, IMA 27, 107-125 (1990).
- [11] **B. L. Keyfitz e H. C. Kranzer**, *Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shocks solutions*, *J. Diff. Eq.* 118 (2), 420-451 (1995).
- [12] **D. J. Korchinski**, *Solution of a Riemann problem for a  $2 \times 2$  system of conservation laws possessing no classical weak solution*, PhD. Thesis, Adelphy University, Garden City, New York (1977).
- [13] **D. G. Schaeffer, S. Schecter e M. Shearer**, *Nonstrictly hyperbolic conservation laws with a parabolic line*, *J. Diff. Eq.* 103, 94-126 (1993).
- [14] **M. Slemrod**, *A limiting viscosity approach to the Riemann problem for materials exhibiting change of phase*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 105, 327-365 (1989).
- [15] **M. Slemrod**, *A comparison of two viscous regularizations of the Riemann problem for Burges' equation*, *SIAM J. Math. Anal.* 26 (6), 1415-1424 (1995).
- [16] **M. Slemrod e A. E. Tzavaras**, *A limiting viscosity approach for the Riemann problem in isentropic gas dynamics*, *Indiana Univ. Math. J.* 38, 1047-1074 (1989).
- [17] **J. Smoller**, *Shock waves and reactions diffusion equations*, Springer-Verlag, Berlin/New York (1983).
- [18] **D. Tan**, *Riemann problem for hyperbolic systems of conservation laws with no classical wave solutions*, *Quart. Appl. Math.* vol. LI (4), 765-776 (1993).
- [19] **D. Tan e T. Zhang**, *Two-dimensional Riemann problem for a hyperbolic system on nonlinear conservation laws I. Four-j cases*, *J. Diff. Eq.* 111 (2), 203-254 (1994).
- [20] **D. Tan e T. Zhang**, *Two-dimensional Riemann problem for a hyperbolic system on nonlinear conservation laws II. Initial data involving some rarefaction waves*, *J. Diff. Eq.* 111 (2), 255-282 (1994).
- [21] **D. Tan, T. Zhang e Y. Zheng**, *Delta-Shock waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conservation laws*, *J. Diff. Eq.* 112, 1-32 (1994).

- [22] **V. A. Tupciev**, *On the method of introducing viscosity in the study of problems involving the decay of a discontinuity*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 211, 55-58 (1973); tradução em Inglês: Soviet Math. Dokl. 14, 978-982 (1973).
- [23] **A. E. Tzavaras**, *Elastic as limit of viscoelastic response, in a context of self-similar viscous limits*, J. Diff. Eq. (to appear).
- [24] **A. E. Tzavaras**, *Wave interactions and variation estimatives for self-similar viscous limits in systems of conservation laws*, CMS Technical Summary Report #95-08, Center for the Mathematical Sciences, University of Wisconsin-Madison (1995).