

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica

Dissertação de Mestrado

**Aproximações para os coeficientes de reflexão
e análise de AVO**

Autor: Alessandra Davolio

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

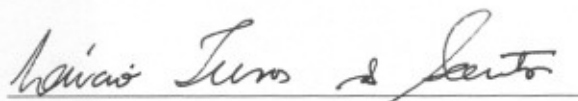
Campinas, SP

Julho 2006

Aproximações para os coeficientes de reflexão e análise de AVO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente defendida e corrigida por Alessandra Davolio e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 13 de julho de 2006.



Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Prof. Dr. Denis José Schiozer

Prof. Dr. Vera Lúcia da Rocha Lopes

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Davolio, Alessandra

D311a Aproximações para os coeficientes de reflexão e análise de AVO /
Alessandra Davolio -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Lúcio Tunes dos Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geofísica. 2. Taylor, Series de. 3. Ondas sísmicas. I. Santos,
Lúcio Tunes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Approximations to the reflection coefficients and AVO analysis

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Geophysics. 2. Series, Taylor's. 3. Seismic waves.

Área de concentração: Geofísica

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Denis José Schiozer (FEM-UNICAMP)
Profa. Dra. Vera Lúcia da Rocha Lopes (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 13/07/2006

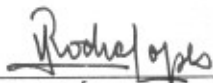
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de julho de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS



Prof. (a). Dr (a). VÉRA LÚCIA DA ROCHA LOPES



Prof. (a). Dr (a). DENIS JOSÉ SCHIOZER

Resumo

O estudo dos coeficientes de reflexão, de suas aproximações e consequentemente da análise de AVO (do inglês, *Amplitude Variation with Offset*) desenvolve um papel bastante importante na indústria do petróleo, por auxiliar na descrição litológica da região de interesse. Neste trabalho, inicialmente abordamos as principais idéias envolvidas na dedução das equações dos coeficientes de reflexão PP (ondas P incidente e P refletida) e PS (ondas P incidente e S refletida). Na sequência, são apresentadas diferentes aproximações para estas equações, seguidas de uma análise do comportamento das mesmas quando comparadas entre si e entre suas respectivas expressões exatas. Introduzimos uma nova aproximação para o coeficiente de reflexão PS similar à impedância de reflexão do coeficiente PP proposta recentemente. Finalizamos o trabalho discutindo o conceito de inversão de dados, avaliando a precisão dos indicadores apresentados, e fazendo um breve sumário da tradicional análise de AVO.

Palavras-chave: coeficientes de reflexão, inversão de dados, análise de AVO.

Abstract

The study of the reflection coefficients, their approximations and the AVO (Amplitude Variation with Offset) analysis plays an important role in the oil industry as they can help to describe the interest region lithology. The first part of this work deals with the main ideas of the deduction of the reflection coefficients PP (P incident and P reflected waves) and PS (P incident and S reflected waves). Then, different approximations for these equations are presented, followed by a discussion of their behavior when compared among them and with their exact expressions. We introduce a new approximation for the reflection coefficient PS similar to the reflection impedance of PP coefficient proposed recently. To conclude, some indicators and their accuracy are discussed and a brief summary about the traditional AVO analysis is presented.

Keywords: reflection coefficients, data inversion, AVO analysis.

À Isabela, minha principal fonte de energia durante este período. À pureza com que seus olhos, inocentemente, me transmitem tanta alegria!

Agradecimentos

Ao meu orientador Lúcio pelas diversas discussões, inclusive àquelas relacionadas à tese!! Também por me apoiar e incentivar na descoberta de novos assuntos.

Aos meus pais Ignez e Neudeci pelos sentimentos mais verdadeiros e únicos. Sou eternamente grata ao apoio que sempre me deram desde os tempos em que nem me conhecia por gente!

À Dri e ao Bi, pelo carinho de sempre e incalculáveis ajudas! Também por terem me dado um dos melhores presentes da minha vida, que costuma me chamar de “tia Lhe”! À esta última pessoa nem preciso agradecer...

Ao Ricardo, pela paciência e companheirismo. Pelos sentimentos tão puros que me ensinam a ver a vida com mais brilho (e paciência), sem complicações, nem porquês, simplesmente viver!

À TODOS meus amigos, estes seres divinos que deixam a vida MUITO mais fácil! Em especial, aos meus companheiros de jornada: ao Fer por todas as ajudas e pela amizade tão companheira, à Carol por toda paciência e doçura com que sempre dividiu sua admirável inteligência e à Gabi pela amizade de quantos anos mesmo?!

À minha tutora amiga, ou amiga tutora, Valéria, por tudo que me ensinou e pela generosidade com que sempre me atendeu e me ajudou.

Ao Daguinho e à Lila, GRANDES amigos e incentivadores de minhas loucuras!!

Aos grandes mestres e amigos: Edmundo, Chico, Cheti e Joni!

Ao Paulo Ruffino, pela amizade, e por ter me iniciado no mundo científico com tanta maestria!!

À Frava, uma das melhores pessoas que já conheci e que embora naum tenha colaborado diretamente com este trabalho me deixou resquícios que valerão por toda vida!

A todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xiii
Nomenclatura	xiv
1 Introdução	1
2 As equações de Zoeppritz	6
2.1 Equação da onda	6
2.2 Solução de onda plana	8
2.3 Condições de fronteira	10
2.4 Expressões para R_{PP} e R_{PS}	13
2.5 Exemplos numéricos	14
3 Aproximações para R_{PP} e R_{PS}	17
3.1 Aproximações baseadas em série de Taylor	17
3.1.1 Aproximação linear de contraste fraco	18
3.1.2 Aproximação de afastamento pequeno	21
3.1.3 Aproximação de contraste fraco e afastamento pequeno	22
3.1.4 Aproximação quadrática de contraste fraco	23
3.1.5 Aproximação pseudo-quadrática	24
3.2 Aproximações do tipo impedância	24

3.2.1	Refletividade	25
3.2.2	Impedância elástica	28
3.2.3	Impedância de reflexão	30
3.3	Comentários gerais	32
4	Experimentos numéricos	34
4.1	Coeficiente de reflexão PP	35
4.2	Coeficiente de reflexão PS	42
5	Inversão de dados e análise de AVO	46
5.1	Introdução à análise de AVO	47
5.2	Inversão usando aproximações do tipo impedância	47
5.3	Inversão: testes computacionais	49
5.4	Análise de AVO	54
5.4.1	Relação entre A e B	55
5.4.2	Classificação de gás	57
6	Conclusão	67
	Referências bibliográficas	69

Lista de Figuras

2.1	Dois pontos P e Q dentro de um sólido, sujeito à um campo de pressão, são deslocados para P' e Q' , respectivamente.	7
2.2	Onda plana P incidente e ondas P e S refletidas e transmitidas.	10
2.3	Curvas de R_{PP} e R_{PS} para os modelos de contrastes fraco (esquerda) e forte (direita) dados pela Tabela 2.1.	16
4.1	Curva exata e as aproximações do tipo Taylor para R_{PP} : Linear Contraste Fraco (Cont. Fraco), Afastamento pequeno (Afast. Peq), Contraste Fraco e Afastamento pequeno (Fraco+Peq.), Quadrática de contraste fraco (Quad.) e Pseudo Quadrática (Pseudo); considerando o modelo de contraste fraco da Tabela 4.1. Os gráficos embaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$	36
4.2	Curva exata e as aproximações do tipo Taylor: Linear Contraste Fraco (Cont. Fraco), Afastamento pequeno (Afast. Peq), Contraste Fraco e Afastamento pequeno (Fraco+Peq.), Quadrática de contraste fraco (Quad.) e Pseudo Quadrática (Pseudo); considerando o modelo de contraste médio da Tabela 4.1. Os gráficos embaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$	37

- 4.3 Componente real da curva exata e das aproximações do tipo Taylor: Linear Contraste Fraco (Cont. Fraco), Afastamento pequeno (Afast. Peq), Contraste Fraco e Afastamento pequeno (Fraco+Peq.), Quadrática de contraste fraco (Quad.) e Pseudo Quadrática (Pseudo); considerando o **modelo de contraste forte** da Tabela 4.1. Os gráficos embaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$ 38
- 4.4 Erro absoluto das mesmas aproximações do tipo Taylor exibidas na Figura 4.3; considerando o modelo de **contraste forte**. 38
- 4.5 Curva exata, aproximação de contraste fraco (Cont Fraco) e as aproximações do tipo impedância: elástica (IE) e de reflexão (IR), para R_{PP} ; considerando o **modelo de contraste fraco** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$ 39
- 4.6 Curva exata, aproximação de contraste fraco (Cont Fraco) e as aproximações do tipo impedância: elástica (IE) e de reflexão (IR), para R_{PP} ; considerando o **modelo de contraste médio** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$ 40
- 4.7 Componente real da curva exata, da aproximação de contraste fraco (Cont Fraco) e das aproximações do tipo impedância: elástica (IE) e de reflexão (IR), para R_{PP} ; considerando o **modelo de contraste forte** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$ 41
- 4.8 Erro absoluto das mesmas aproximações exibidas na Figura 4.7; considerando o modelo de **contraste forte**. 42
- 4.9 Curva exata, aproximações do tipo Taylor (Cont Fraco e Fraco+Peq) e as aproximações do tipo impedância (PSEI, SEI1, SEI2 e SRI); considerando o **modelo de contraste fraco** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$ 43

4.10	Curva exata, aproximações do tipo Taylor (Cont Fraco e Fraco+Peq) e as aproximações do tipo impedância (PSEI, SEI1, SEI2 e SRI); considerando o modelo de contraste médio da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$	44
4.11	Componente real da curva exata, das aproximações do tipo Taylor (Cont Fraco e Fraco+Peq) e das aproximações do tipo impedância (PSEI, SEI1, SEI2 e SRI); considerando o modelo de contraste forte da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$	45
4.12	Erro absoluto das mesmas aproximações exibidas na Figura 4.11; considerando o modelo de contraste forte	45
5.1	Comparação entre o intercepto (em cima) e o gradiente (embaixo), modelados (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 30° . Estes atributos provêm da aproximação de Shuey, fazendo a regressão linear de (5.1).	50
5.2	Comparação entre os parâmetros Λ_1 (em cima) e Λ_2 (embaixo) modelados (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 30° . Estes atributos provêm da aproximação de impedância elástica, fazendo a regressão linear de (5.5).	51
5.3	Comparação entre os parâmetros Γ_1 (em cima), Γ_2 (ao meio) e Γ_3 (embaixo) modelados (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 70° . Estes atributos provêm da aproximação de impedância de reflexão, fazendo o ajuste por quadrados mínimos não linear da equação (5.7).	52
5.4	Comparação entre os contrastes α_2/α_1 (em cima), ρ_2/ρ_1 (ao meio) e β_2/β_1 (embaixo) exatos (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 70° . A recuperação destes contrastes vem das equações (5.9) e (5.10).	53

5.5	Comparação entre as funções que definem o background: a reta gerada pela regressão linear dos pontos x provindos do modelo <i>shale/brine sand</i> (LSQR), a reta definida pela equação (5.13) (Back 1) e a reta definida pela equação (5.14) (Back 2).	56
5.6	Comportamento dos atributos de AVO (intercepto e gradiente) quando <i>gas sand</i> substitui <i>brine sand</i> ; considerando 25 conjuntos de <i>shale/brine sand</i> e <i>shale/gas sand</i>	57
5.7	Identificação das três classes (I,II e III) de <i>gas sand</i> , propostas por Rutherford and Williams (1989), e da classe IV, proposta por Castagna et al. (1998), no plano $A \times B$	59
5.8	Valores exatos (preto) dos atributos A e B e aproximados: Shuey (azul), EI (verde) e RI (vermelho), considerando 25 conjuntos de <i>shale/brine sand</i> (x) e <i>shale/gas sand</i> (o), sendo que em cima temos $\theta \leq 30^\circ$ e embaixo $\theta \leq 70^\circ$. As quatro classes de <i>gas sand</i> são identificadas seguindo as cores da Figura 5.7.	62
5.9	Comparação entre o deslocamento dos dados de <i>shale/brine sand</i> (x) por <i>shale/gas sand</i> (o) gerados pelas aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) e o deslocamento dos dados verdadeiros. Foram considerados ângulos de incidência de até 30°	63
5.10	Comparação entre o deslocamento dos dados de <i>shale/brine sand</i> (x) por <i>shale/gas sand</i> (o) gerados pelas aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) e o deslocamento dos dados verdadeiros. Foram considerados ângulos de incidência de até 70°	64
5.11	Comparação entre a classificação de <i>gas sand</i> (o) para os dados verdadeiros (preto) e os dados invertidos através das aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) considerando $\theta \leq 30^\circ$	65

5.12 Comparação entre a classificação de *gas sand* (o) para os dados verdadeiros (preto) e os dados invertidos através das aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) considerando $\theta \leq 70^\circ$ 66

Lista de Tabelas

2.1	Modelos de contrastes fraco e forte seguindo as unidades $[v] = \text{km/s}$ e $[\rho] = \text{g/cm}^3$.	15
3.1	Aproximações para R_{PP} e R_{PS} baseadas em séries de Taylor.	32
3.2	Aproximações do tipo impedância para R_{PP} e R_{PS} .	33
4.1	Modelos de contrastes fraco, médio e forte seguindo as unidades $[v] = \text{km/s}$ e $[\rho] = \text{g/cm}^3$.	35
5.1	Porcentagem de acertos, na classificação de gás, através das aproximações exibidas na Figura 5.11 e 5.12.	61

Nomenclatura

R_{PP}	-	coeficiente de reflexão considerando onda P incidente e onda P refletida
R_{PS}	-	coeficiente de reflexão considerando onda P incidente e onda S refletida
α_i	-	velocidade da onda P para o meio $i = 1, 2$
β_i	-	velocidade da onda S para o meio $i = 1, 2$
ρ_i	-	densidade do meio $i = 1, 2$
θ	-	ângulo de incidência
p	-	parâmetro de raio (Lei de Snell)
IE	-	aproximação Impedância Elástica para R_{PP}
IR	-	aproximação Impedância de Reflexão para R_{PP}
$PSEI$	-	aproximação do tipo impedância elástica para R_{PS} (do inglês, <i>PS converted waves Elastic Impedance</i>)
SEI	-	aproximação do tipo impedância elástica para R_{PS} (do inglês, <i>Shear Elastic Impedance</i>)
SRI	-	aproximação do tipo impedância de reflexão para R_{PS} (do inglês <i>Shear Reflection Impedance</i>)
AVO	-	variação da amplitude com relação ao afastamento entre fonte e receptor (do inglês, <i>Amplitude Variation with Offset</i>)

Capítulo 1

Introdução

Atualmente o método de prospecção mais utilizado na indústria do petróleo é o método sísmico de reflexão, pois fornece, a um custo relativamente baixo, alta definição das feições geológicas em subsuperfície propícias à acumulação de hidrocarbonetos.

O levantamento sísmico inicia-se com a geração de ondas elásticas, através de fontes artificiais. Estas ondas se propagam pelo interior da Terra, onde são refletidas e refratadas nas interfaces que separam rochas de diferentes constituições (meios), e retornam à superfície, onde são captadas por equipamentos de registro (receptores). A partir dos dados captados por estes aparelhos é feita a recuperação dos atributos sísmicos dos meios em questão.

Uma das ferramentas mais importantes de análise litológica sísmica é a análise de AVO (do inglês, *Amplitude Variation with Offset*) e sua fundamentação está nas aproximações para o coeficiente de reflexão.

As expressões para os coeficientes de reflexão e transmissão, considerando ondas planas incidentes numa fronteira entre dois meios elásticos, foram deduzidas por Zoeppritz (1919). Elas envolvem os parâmetros elásticos (densidade, velocidades das ondas P-pressão e S - cisalhamento) de ambos os meios e são de difícil manipulação. Nos trabalhos desenvolvidos por Yilmaz (1987) e Aki and Richards (1980) encontramos a dedução destas equações.

Vários estudos foram feitos a respeito das equações de Zoeppritz com o intuito de analisar como os parâmetros elásticos interferiam nas fórmulas. Devido às complicadas expressões,

a necessidade de se simplificar as mesmas tornou-se evidente. Surgiram então as primeiras aproximações, desenvolvidas por Bortfeld (1961), sob a hipótese de pequenas variações dos parâmetros elásticos entre os meios envolvidos.

De uma maneira similar, os autores Aki and Richards (1980) desenvolveram aproximações para os coeficientes de reflexão e transmissão, considerando todas as combinações possíveis entre ondas P e S incidentes, refletidas e transmitidas. No presente trabalho, apresentaremos tais expressões para os coeficientes de reflexão R_{PP} (onda P incidente e refletida) e R_{PS} (onda P incidente e S refletida). Ressaltamos que a aproximação para R_{PP} desenvolvida por estes autores está, ainda hoje, entre as mais importantes e usadas expressões.

As primeiras utilizações comerciais das amplitudes sísmicas como um indicador direto de hidrocarbonetos surgiram na década de 70 com a chamada *bright spot analysis*, a partir da qual verificava-se amplitudes anômalas (muito fortes) para alguns casos de presença de gás. Para entender como estas amplitudes fortes ocorriam, surgiu a técnica de amplitude versus afastamento (AVO). A aproximação de Shuey (1985) se tornou a base da análise de AVO por facilitar a interpretação destas variações. Tal expressão é obtida a partir da aproximação proposta por Aki and Richards (1980) para R_{PP} , considerando a hipótese adicional de afastamento pequeno entre a fonte e o receptor (e consequentemente ângulo de incidência pequeno).

O trabalho de Rutherford and Williams (1989) teve uma contribuição importante no estudo da análise de AVO. Os autores propuseram uma classificação de reflexões provindas de gás (mais precisamente do topo do reservatório), usadas até hoje, baseadas em certas características de AVO. Segundo eles, o coeficiente de reflexão normal é um dos fatores que mais influenciam no comportamento de AVO da reflexão de gás, e baseados nisso, propuseram três classes às quais possíveis reservatórios de gás podem pertencer.

Os autores Castagna and Smith (1994), também fortes colaboradores para a pesquisa na área de AVO, discutem neste trabalho como obter indicadores de gás combinando os termos da equação de Shuey (1985), conhecidos na literatura como intercepto (A) e gradiente (B).

Em Castagna et al. (1998) é sugerida uma quarta classe adicional às já apresentadas por Rutherford and Williams (1989). Neste trabalho os autores mostram também que a interpretação

de AVO pode ser facilitada ao observarmos os gráficos de $B \times A$. Além disso, eles verificaram a existência de uma reta conhecida como alinhamento de fundo, ou do inglês *background trend*, que relaciona o intercepto com o gradiente, e que desvios desta reta podem ser indicativos de hidrocarbonetos ou litologias com propriedades elásticas anômalas (Castagna et al. (1997)).

Até hoje diversos trabalhos foram publicados apresentando diferentes tipos de aproximações para os coeficientes de reflexão, com o intuito de aprimorar a análise de AVO e processos para a recuperação de atributos sísmicos. Em geral, as primeiras aproximações provêm de expansões em séries de Taylor. As expressões de Aki and Richards (1980), já citadas, foram obtidas expandindo-se os termos que envolvem os contrastes dos parâmetros elásticos em torno de zero.

Uma outra aproximação baseada em séries de Taylor foi proposta por Ursin and Dahl (1992), porém neste caso a expansão é feita nos termos que envolvem o ângulo de incidência, já que a hipótese suposta é de afastamento pequeno e não mais de contraste fraco.

Tajland (1993) propôs uma abordagem supondo ambas hipóteses já comentadas (contraste e afastamento pequenos), fazendo as duas respectivas expansões. A aproximação pseudo quadrática proposta por Wang (1999) é também obtida através de séries de Taylor, supondo contraste fraco, mas de uma maneira diferente das até então comentadas.

Mais recentemente alguns autores desenvolveram aproximações para os coeficientes de reflexão baseadas nas chamadas funções impedância. A principal idéia desta nova abordagem é obter expressões para o coeficiente de reflexão, para qualquer ângulo de incidência, similares à expressão de R_{PP} considerando incidência normal. Connolly (1999) foi quem propôs pela primeira vez este novo tipo de abordagem apresentando a aproximação Impedância Elástica (IE) para R_{PP} , que supõe duas hipóteses: os ângulos de incidência (θ) e transmissão são iguais e a razão entre as velocidades das ondas P e S é constante ($K = \beta/\alpha = \text{constante}$). Uma outra aproximação desta mesma natureza foi desenvolvida por Santos and Tygel (2004), denominada aproximação Impedância de Reflexão (IR). Neste caso, os autores apenas supuseram uma relação funcional entre a densidade e a velocidade da onda S, e fizeram uso da lei de Snell.

Tradicionalmente a análise de AVO, bem como processos de inversão de dados, são fei-

tos baseados no coeficiente de reflexão PP. No entanto, nos últimos anos a análise de AVO e inversão de dados usando R_{PS} vêm tomando um espaço considerável na literatura, uma vez que o uso deste tipo de dado tem se mostrado bastante eficiente no auxílio da discriminação de diferentes litologias.

Seguindo o conceito das aproximações do tipo impedância citadas anteriormente, Landro et al. (1999) apresentaram uma aproximação para R_{PS} denominada SEI, do inglês *Shear Elastic Impedance*, que além de supor as mesmas hipóteses da impedância elástica de Connolly, considera também θ pequeno. Uma extensão desta mesma aproximação está descrita no trabalho de Duffaut et al. (2000). Também partindo dos mesmos princípios da aproximação impedância elástica (K e θ constantes), sem hipóteses adicionais, Gonzalez et al. (2003) desenvolveram a função impedância PSEI, do inglês *PS converted waves Elastic Impedance*.

Um artigo bastante interessante e recentemente publicado que lida com o problema de inversão de dados foi desenvolvido por Veire and Landro (2006). Os autores apresentam um novo método de inversão de dados que se dá a partir de resolução de aproximações lineares para R_{PP} e R_{PS} simultaneamente, usando o algoritmo de quadrados mínimos.

Um estudo similar ao apresentado em Castagna et al. (1998), porém considerando o coeficiente de reflexão PS, é feito no trabalho de Ramos and Castagna (2001). Os autores propõem novas aproximações para R_{PS} a partir das quais é possível estabelecer parâmetros análogos ao intercepto e gradiente, bem como um *background trend* para dados PS.

Uma outra utilidade descoberta atualmente para análise de AVO é a identificação de fraturas. No trabalho Chen et al. (2005), os autores mostram como dados sísmicos podem auxiliar nesta tarefa.

No presente trabalho, inicialmente apresentamos os principais passos necessários para obter o sistema linear que define as equações de Zoeppritz (capítulo 2).

O capítulo 3 traz uma discussão sobre algumas aproximações para os coeficientes de reflexão PP e PS, divididas em duas categorias: expressões baseadas em séries de Taylor e aproximações do tipo impedância. Nesse capítulo propomos uma nova aproximação para R_{PS} (D'Avolio et al. (2006)) que segue os mesmos princípios da aproximação impedância de reflexão do

coeficiente PP desenvolvida por Santos and Tygel (2004).

Em seguida, no quarto capítulo apresentamos simulações numéricas das aproximações definidas, trazendo uma discussão de seus comportamentos.

No quinto capítulo abordamos o conceito de inversão de dados através das aproximações do tipo impedância para R_{PP} e fazemos uma breve discussão a respeito da tradicional análise de AVO. Como o principal objetivo do trabalho é estudar as aproximações para os coeficientes de reflexão, a análise de AVO não é apresentada em detalhes. Discutimos apenas como podemos identificar a presença de gás, bem como sua classificação, seguindo a metodologia proposta em Castagna et al. (1998) e verificamos como as aproximações do tipo impedância podem contribuir para a recuperação dos atributos de AVO.

Por fim, o capítulo 6 traz as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

As equações de Zoeppritz

As equações de Zoeppritz são o ponto de partida para o estudo da recuperação dos atributos sísmicos da região onde foi feito o levantamento. Estimados os atributos sísmicos, procura-se inferir a respeito da geologia e consequentemente da possível presença de petróleo na região.

Neste capítulo, apresentaremos os principais conceitos envolvidos na dedução das equações de Zoeppritz para o caso de uma onda P incidente. A dedução está dividida em três etapas: desacoplamento da equação da onda, busca de uma solução do tipo onda plana e imposição das condições de contorno necessárias. As principais idéias de cada passo são apresentadas até que se chegue a um sistema linear que defina as expressões para os coeficientes de reflexão e transmissão .

2.1 Equação da onda

Consideremos um ponto qualquer $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$, como ilustrado na Figura 2.1. Podemos escrever as coordenadas de um segundo ponto arbitrário como $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$. Supondo que estes dois pontos estejam dentro de um sólido (infinitesimal) sujeito à um campo de pressão, o mesmo é deformado de alguma maneira e as partículas nos pontos \mathbf{P} e \mathbf{Q} são deslocadas para as novas coordenadas \mathbf{P}' e \mathbf{Q}' . Ao definirmos um vetor deslocamento $\mathbf{u} \equiv u(x, t)$ para $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{u}$ e $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{u}$.

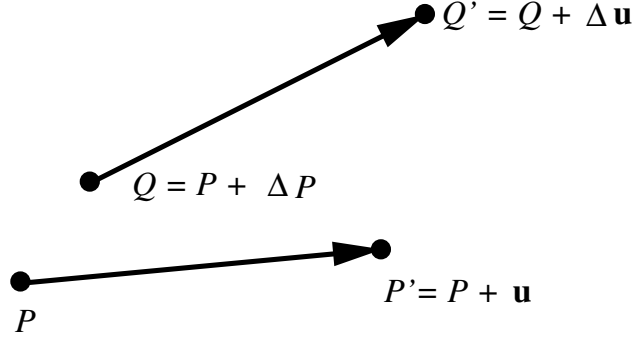


Figura 2.1: Dois pontos P e Q dentro de um sólido, sujeito à um campo de pressão, são deslocados para P' e Q' , respectivamente.

Estas são as hipóteses iniciais para a dedução da equação da onda com a qual vamos trabalhar. Porém, não é de nosso interesse a dedução de tal expressão. Apenas usamos a ilustração acima para termos uma idéia das variáveis que compõem a mesma.

Assim, usando a notação da Figura 2.1, a equação da onda escrita em função do vetor deslocamento \mathbf{u} , para meios elásticos, isotrópicos e homogêneos é dada por (Aki and Richards, 1980),

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.1)$$

onde λ e μ são os parâmetros de Lamé e ρ , a densidade do meio. Os operadores utilizados representam: ∇ = gradiente, $\nabla \cdot$ = divergente e $\nabla \times$ = rotacional.

Ressaltamos que os meios envolvidos no problema prático de prospecção de petróleo, em geral, não são isotrópicos nem homogêneos, mas existe um embasamento teórico para tal suposição. A justificativa vem do fato de que, para definirmos os coeficientes de reflexão (ou transmissão), as propriedades físicas são descritas numa pequena vizinhança do ponto de incidência da onda. Esta visão local permite assumirmos hipóteses menos complicadas, como a homogeneidade e a isotropia, sem perda de generalidade, já que o que queremos medir é de fato uma variação que acontece localmente (variação das amplitudes das ondas envolvidas na

vizinhança do ponto de reflexão).

Quando uma onda se propaga num meio elástico, como o solo, são geradas ondas P (pressão) e ondas S (cisalhamento). A primeira movimenta as partículas do meio na direção da propagação da onda, e a segunda na direção transversal à propagação. Como estamos interessados no estudo de ondas sísmicas, nosso próximo passo é identificar estes dois tipos de ondas a partir da equação (2.1). Através do teorema de Lamé, (em conjunto com o teorema de Helmholtz, como descrito em Aki and Richards (1980)), conseguimos desacoplar a equação (2.1) em duas equações, uma para cada tipo de onda, ou seja, verificamos a existência de dois potenciais, $\phi \equiv \phi(x, t)$ (escalar) e $\psi \equiv \psi(x, t)$ (vetorial), que satisfazem as seguintes relações (Elmore and Heald, 1969),

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \psi, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta \phi, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \beta^2 \Delta \psi, \quad (2.4)$$

onde α e β são as velocidades da onda P e S dadas por,

$$\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (2.5)$$

De acordo com a notação utilizada, o Laplaciano do potencial vetorial é definido como,

$$\Delta\psi = \Delta(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3). \quad (2.6)$$

Os vetores $\nabla\phi$ e $\nabla \times \psi$ são conhecidos como componentes do vetor deslocamento \mathbf{u} referentes a onda P e S, respectivamente. Detalhes da demonstração dos resultados acima estão descritos na Seção 4.1.1 da referência Aki and Richards (1980).

2.2 Solução de onda plana

Na prática, para investigar ondas a grandes distâncias de suas fontes, é bastante razoável assumir que a onda incidente seja plana. Obviamente, tal hipótese não funcionaria se a reflexão

e a transmissão acontecessem perto da fonte, mas este não é o nosso caso. Além disso, uma hipótese fundamental foi suposta e comentada na seção anterior: todas as propriedades físicas são descritas considerando uma pequena vizinhança perto do ponto de incidência da onda. Portanto, além do fato da distância entre a fonte e a interface ser grande, uma segunda justificativa para o uso de ondas planas é fundamentada neste conceito de localidade.

Ao resolver a equação da onda homogênea,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \phi, \quad (2.7)$$

pelo método da separação de variáveis, obtemos soluções do tipo,

$$\phi(\mathbf{x}, t; \mathbf{p}) = A(\mathbf{x}) \exp[i\omega(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - t)], \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ é o vetor vagarosidade com $|\mathbf{p}| = 1/\alpha$; e ω é a frequência. Claramente, esta solução define uma onda plana e, portanto, escreveremos os potenciais ϕ e ψ desta forma.

Vamos simplificar ainda mais nosso problema, assumindo que tudo se passa em um meio bidimensional (2D), com eixos x e z , sendo que o eixo z aponta para baixo. Tal meio é composto por duas camadas homogêneas separadas por uma interface plana como mostra a Figura 2.2. Assim, de acordo com a notação da Figura 2.2, as soluções ϕ e ψ para cada meio podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_0 \exp \left[iw \left(\frac{\sin \theta}{\alpha_1} x + \frac{\cos \theta}{\alpha_1} z - t \right) \right] \\ &+ A_1 \exp \left[iw \left(\frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} x - \frac{\cos \theta_1}{\alpha_1} z - t \right) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\psi_1 = \mathbf{B}_1 \exp \left[iw \left(\frac{\sin \varphi_1}{\beta_1} x - \frac{\cos \varphi_1}{\beta_1} z - t \right) \right], \quad (2.10)$$

$$\phi_2 = A_2 \exp \left[iw \left(\frac{\sin \theta_2}{\alpha_2} x + \frac{\cos \theta_2}{\alpha_2} z - t \right) \right] \mathbf{e} \quad (2.11)$$

$$\psi_2 = \mathbf{B}_2 \exp \left[iw \left(\frac{\sin \varphi_2}{\beta_2} x + \frac{\cos \varphi_2}{\beta_2} z - t \right) \right]. \quad (2.12)$$

Note que o campo vetorial ψ agora está escrito como uma função escalar. Na verdade, o campo vetorial que define a onda plana que estamos supondo pode ser escrito como $\psi =$

$(0, \psi, 0)$ o que reduz a equação (2.4) à uma equação escalar, nos permitindo assim escrever as soluções acima (para mais detalhes consulte Seção 5.1.1 em Aki and Richards (1980)).

As expressões para os coeficientes de reflexão que buscamos, são basicamente definidas pelas razões das amplitudes das ondas descritas em (2.9)–(2.12). A seguir, definiremos as condições de fronteira necessárias para computarmos estes valores.

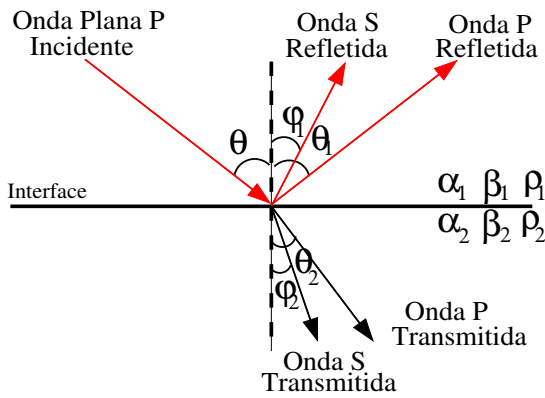


Figura 2.2: Onda plana P incidente e ondas P e S refletidas e transmitidas.

2.3 Condições de fronteira

Na interface ($z = 0$), precisamos impor duas condições de fronteira: continuidade no deslocamento e continuidade na tensão. Exigir continuidade no deslocamento, é o mesmo que escrever:

$$\mathbf{u}_1|_{z=0} = \mathbf{u}_2|_{z=0}. \quad (2.13)$$

Como havíamos desacoplado o vetor deslocamento \mathbf{u} em duas componentes, ondas S e P, vamos trabalhar com elas de forma separada. Vimos anteriormente que o deslocamento da onda P é dado por $\nabla\phi$. Para o caso especial de uma onda plana, como a que estamos considerando, a componente do vetor deslocamento \mathbf{u} na direção y vai a zero e $\phi = \phi(x, z, t)$. Portanto, o deslocamento da onda P é dado por $(\partial\phi/\partial x, 0, \partial\phi/\partial z)$.

Já para a onda S, são necessárias algumas considerações, detalhadas na Seção 5.1.1 em Aki and Richards (1980), a partir das quais concluímos, como já comentamos na Seção anterior, que o campo vetorial que define a onda plana que estamos supondo pode ser escrito como $\psi = (0, \psi, 0)$ e portanto o deslocamento é definido por $\nabla \times \psi = (-\partial\psi/\partial z, 0, \partial\psi/\partial x)$.

Assim, em $z = 0$ as equações a seguir devem ser satisfeitas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial z} &= \frac{\partial\phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \quad \text{e} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} &= \frac{\partial\phi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A continuidade no vetor tensão é escrita através de suas componentes: normal à interface (τ_{zz}) e tangencial à interface (τ_{zx}) definidas pelas equações ,

$$\tau_{zz} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2\rho\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right) \quad \text{e} \quad (2.15)$$

$$\tau_{zx} = \beta^2 \rho \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \quad (2.16)$$

Dessa forma em $z = 0$ exigimos que,

$$(\tau_{zz})_1 = (\tau_{zz})_2 \quad \text{e} \quad (\tau_{zx})_1 = (\tau_{zx})_2. \quad (2.17)$$

Além das condições de fronteira descritas acima precisamos ressaltar que há ainda mais uma restrição a ser satisfeita em $z = 0$. Observando as equações (2.9) – (2.12) notamos que as condições de fronteira são combinações lineares de termos do tipo,

$$\exp \left[i\omega \left(\frac{\sin \delta}{c} x - t \right) \right], \quad (2.18)$$

onde δ e c são , respectivamente, os ângulos (incidência, reflexão e transmissão) e as velocidades (ondas P e S) de ambos os meios. Como tais condições valem para todo x e t , estes fatores (2.18), que controlam a propagação horizontal do sistema de onda, devem ser iguais. Esta é a chamada lei de Snell, que nos dá a seguinte relação ,

$$p = \frac{\sin \theta}{\alpha_1} = \frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\beta_1} = \frac{\sin \theta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin \varphi_2}{\beta_2}. \quad (2.19)$$

Note que, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão da onda P ($\theta = \theta_1$) e além disso $p = p_x$, ou seja, p é a componente horizontal do vetor vazarosidade, também conhecido como **parâmetro de raio**. A partir deste ponto, toda vez que utilizarmos a variável p neste trabalho estaremos nos referenciando ao parâmetro de raio.

Finalmente, substituindo (2.9) - (2.12) nas equações (2.14) e (2.17) e usando (2.19), chegamos ao seguinte sistema linear (Yilmaz, 1987),

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \varphi_1 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cos \theta_2 & \frac{\alpha_1}{\beta_2} \sin \varphi_2 \\ -\sin \theta_1 & -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cos \varphi_1 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \theta_2 & -\frac{\alpha_1}{\beta_2} \cos \varphi_2 \\ -\cos 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_1 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos 2\varphi_2 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin 2\varphi_2 \\ \sin 2\theta_1 & \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \cos 2\varphi_1 & \frac{\rho_2 \beta_2^2 \alpha_1^2}{\rho_1 \beta_1^2 \alpha_2^2} \sin 2\theta_2 & -\frac{\rho_2 \alpha_1^2}{\rho_1 \beta_1^2} \cos 2\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1/A_0 \\ B_1/A_0 \\ A_2/A_0 \\ B_2/A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ \cos 2\varphi_1 \\ \sin 2\theta_1 \end{bmatrix}.$$

Com o auxílio do software Mathematica 4.0, resolvemos este sistema, conhecido como equações de Zoeppritz, e chegamos às expressões para,

- R_{PP} : coeficiente de reflexão considerando ondas P incidente e P refletida,
- R_{PS} : coeficiente de reflexão considerando ondas P incidente e S refletida,
- T_{PP} : coeficiente de transmissão considerando ondas P incidente e P transmitida,
- T_{PS} : coeficiente de transmissão considerando ondas P incidente e S transmitida,

Uma definição precipitada para os coeficientes de reflexão e transmissão seria considerarmos a razão entre as amplitudes das ondas envolvidas para cada situação, ou seja, teríamos as seguintes relações: $R_{PP} = A_1/A_0$, $R_{PS} = B_1/A_0$, $T_{PP} = A_2/A_0$ e $T_{PS} = B_2/A_0$. Mas, na verdade estas são razões entre as amplitudes somente para potenciais. Na prática, estamos interessados em razões de amplitudes de deslocamento (e, ocasionalmente de energia). Para uma onda P propagante, a amplitude de deslocamento é dada por $\omega A_i/\alpha$ e, similarmente para uma

onda S obtém-se $\omega B_i/\beta$, $i = 1, 2$. Portanto, o coeficiente de reflexão PP, correspondente ao deslocamento, ainda será dado por $R_{PP} = A_1/A_0$, mas as outras expressões serão definidas como: $R_{PS} = (B_1\alpha_1)/(A_0\beta_1)$, $T_{PP} = (A_2\alpha_1)/(A_0\alpha_2)$ e $T_{PS} = (B_2\alpha_1)/(A_0\beta_2)$. Ressaltamos também que, para seguir a convenção de sinal utilizada por Aki and Richards (1980), o coeficiente T_{PS} obtido através do sistema acima, deve ser multiplicado por -1 .

Como as expressões dos coeficientes são complicadas, nos limitaremos a explicitar apenas aquelas que nos interessam neste trabalho: R_{PP} e R_{PS} .

2.4 Expressões para R_{PP} e R_{PS}

As expressões dos coeficientes R_{PP} e R_{PS} que seguem, são obtidas após pacientes manipulações algébricas da solução do sistema linear descrito na seção anterior. Todas as considerações já foram feitas (multiplicação pelas razões das velocidades correspondentes) e as equações aqui apresentadas são exatamente as mesmas descritas por Aki and Richards (1980). Seguimos a mesma notação utilizada por Tajland (1993). Assim, temos então,

$$R_{PP} = \frac{A + B - C - D + E - F}{A + B + C + D + E + F}, \quad (2.20)$$

com

$$A = q^2 p^2 P_1 Q_1 P_2 Q_2, \quad B = \rho_1 \rho_2 \beta_1 \alpha_2 P_1 Q_2, \quad C = \rho_1 \rho_2 \alpha_1 \beta_2 Q_1 P_2,$$

e

$$D = \alpha_1 \beta_1 P_2 Q_2 Y^2, \quad E = \alpha_2 \beta_2 P_1 Q_1 X^2, \quad F = \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 p^2 Z^2,$$

onde

$$q = 2(\rho_2 \beta_2^2 - \rho_1 \beta_1^2), \quad X = \rho_2 - qp^2, \quad Y = \rho_1 + qp^2, \quad Z = \rho_2 - \rho_1 - qp^2,$$

e

$$P_1 = \sqrt{1 - \alpha_1^2 p^2}, \quad Q_1 = \sqrt{1 - \beta_1^2 p^2}, \quad P_2 = \sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}, \quad Q_2 = \sqrt{1 - \beta_2^2 p^2}.$$

Sendo p o parâmetro de raio proveniente da lei de Snell verifica-se que os parâmetros P_1, P_2, Q_1 e Q_2 , nada mais são que cossenos dos ângulos de reflexão e transmissão, respectivamente.

Quando a incidência é normal ($\theta = 0$) temos,

$$R_{PP} = \frac{\rho_2 \alpha_2 - \rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1} = \frac{AI_2 - AI_1}{AI_2 + AI_1}, \quad (2.21)$$

onde $AI_j = \rho_j \alpha_j$, $j = 1, 2$, é denominada impedância acústica. A expressão acima, que considera incidência normal, desempenha um papel fundamental na descrição da aproximação do tipo impedância que será apresentada no próximo capítulo.

No caso de meios acústicos, ou seja, meios onde não há propagação de onda-S ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) como os líquidos, por exemplo, a expressão do coeficiente de reflexão é dada por,

$$R_{PP} = \frac{AI_2 \sqrt{1 - \alpha_1^2 p^2} - AI_1 \sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}}{AI_2 \sqrt{1 - \alpha_1^2 p^2} + AI_1 \sqrt{1 - \alpha_2^2 p^2}} = \frac{AI_2 \cos \theta_1 - AI_1 \cos \theta_2}{AI_2 \cos \theta_1 + AI_1 \cos \theta_2}. \quad (2.22)$$

Usando a mesma notação de (2.20), R_{PS} é dado por,

$$R_{PS} = \frac{-(M + N)}{A + B + C + D + E + F}, \quad (2.23)$$

onde

$$M = 2\alpha_1 p q P_1 P_2 Q_2 Y \quad N = 2\alpha_1 p \alpha_2 \beta_2 P_1 X Z. \quad (2.24)$$

Claramente não faz sentido pensarmos no caso acústico para R_{PS} e se considerarmos incidência normal a expressão se anula.

2.5 Exemplos numéricos

Em geral, o comportamento das curvas dos coeficientes de reflexão variam bastante quando comparamos modelos com contrastes que assumem valores de diferentes ordens de grandeza. Os contrastes nos permite verificar se há uma variação muito grande dos parâmetros elásticos de um meio para outro e são quantificados pelas razões,

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha}, \quad \frac{\Delta \beta}{\beta} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (2.25)$$

onde α é a média aritmética e $\Delta\alpha$ a diferença entre α_1 e α_2 . O mesmo se aplica para β e ρ .

Vejamos o comportamento das curvas de R_{PP} e R_{PS} através de dois modelos (Contraste Fraco e Forte) compostos por duas camadas elásticas, homogêneas e isotrópicas. A Tabela 2.1 descreve os valores dos parâmetros elásticos de cada modelo.

Meio	Contraste Fraco			Contraste Forte		
	α	β	ρ	α	β	ρ
1	3.42	1.78	2.53	3.21	1.60	2.39
2	3.39	1.79	2.50	4.55	2.61	2.44
Contrastes	-0.01	0.01	-0.01	0.35	0.48	0.02

Tabela 2.1: Modelos de contrastes fraco e forte seguindo as unidades $[v] = \text{km/s}$ e $[\rho] = \text{g/cm}^3$.

A Figura 2.3 mostra as curvas de R_{PP} e R_{PS} dadas pelas equações (2.20) e (2.23), respectivamente, em função do ângulo de incidência. A grande diferença dos dois modelos é que para o caso de contraste forte verifica-se um “pico”, para $\theta \approx 45^\circ$. Isto acontece porque o coeficiente de reflexão passa a assumir valores complexos a partir deste ponto, e isso é devido ao fato do ângulo de transmissão da onda P (θ_2 na Figura 2.2) também se tornar complexo. Em outras palavras, pela Lei de Snell, temos,

$$\sin \theta_2 = \sin \theta \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (2.26)$$

Logo, se $\alpha_2 > \alpha_1$, a partir de um determinado ângulo, conhecido como ângulo crítico, teremos $\sin \theta_2 > 1$ e portanto θ_2 será complexo. Assim, o termo P_2 da equação (2.20) será complexo e consequentemente R_{PP} e R_{PS} também serão.

Para o modelo de contraste fraco que consideramos, a ausência de um ângulo crítico se deve ao fato de $\alpha_2/\alpha_1 < 1$. Na verdade, raramente aparecerá ângulo crítico num modelo de contraste fraco pois para este caso temos $\alpha_2/\alpha_1 \approx 1$ e portanto este tipo de evento acontecerá se $\alpha_2 > \alpha_1$ e para ângulos bastante grandes (próximos de 90°) os quais, num problema prático de prospecção de petróleo, são desconsiderados.

Note que seguindo a mesma idéia, os ângulos de reflexão e transmissão da onda S também podem vir a assumir valores complexos. Mas, em geral a velocidade da onda S é menor que a

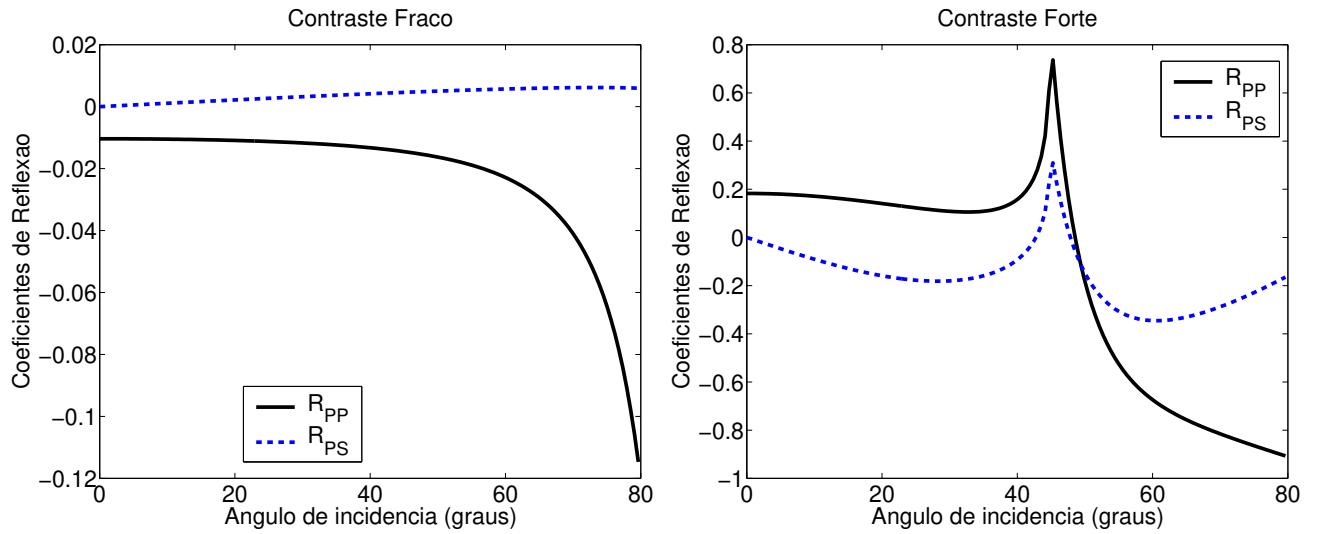


Figura 2.3: Curvas de R_{PP} e R_{PS} para os modelos de contrastes fraco (esquerda) e forte (direita) dados pela Tabela 2.1.

da onda P e portanto dificilmente acontecerá algo do tipo,

$$\sin \varphi_1 = \sin \theta \frac{\beta_1}{\alpha_1} > 1 \quad \text{ou} \quad \sin \varphi_2 = \sin \theta \frac{\beta_2}{\alpha_1} > 1.$$

Como veremos no próximo capítulo há uma certa dificuldade para definir aproximações para os coeficientes de reflexão que sejam adequadas inclusive nas proximidades do ângulo crítico, conhecida como região crítica.

Capítulo 3

Aproximações para R_{PP} e R_{PS}

Na prática, o uso das expressões dos coeficientes de reflexão é feito de forma inversa, ou seja, através dos dados de campo são obtidos os valores de R_{PP} , ou R_{PS} , e a partir deles procura-se estimar valores dos parâmetros elásticos, ou de relações entre eles que se comportem como indicadores de hidrocarbonetos. Como vimos no capítulo anterior, as equações destes coeficientes são de difícil manipulação. Assim, o primeiro passo para obter tais indicadores, é buscar aproximações que sejam definidas por expressões mais simples e a partir delas procurar estabelecer tais processos de inversão.

Neste capítulo veremos como obter as aproximações mais relevantes que estão divididas em duas categorias: aproximações baseadas em série de Taylor e aproximações do tipo impedância.

3.1 Aproximações baseadas em série de Taylor

Uma ferramenta muito utilizada, senão a mais utilizada, para aproximar expressões matemáticas complicadas é a série, ou expansão, de Taylor. Em geral, através dela conseguimos simplificar bastante funções complicadas, com erros aceitáveis. Diversas aproximações para o coeficiente de reflexão foram desenvolvidas através de séries de Taylor sob diferentes abordagens. Nesta seção apresentaremos algumas delas.

3.1.1 Aproximação linear de contraste fraco

Apresentaremos aqui os principais passos para obtermos uma das mais usadas aproximações para o coeficiente de reflexão, a aproximação de contraste fraco, desenvolvida por Aki and Richards (1980). Uma vez que tais procedimentos são exatamente os mesmos tanto para R_{PP} quanto para R_{PS} explicitaremos os cálculos para o coeficiente PP e a seguir faremos algumas considerações que nos permitirão perceber tais semelhanças e assim obter também a aproximação para o coeficiente PS.

A aproximação de contraste fraco é baseada na expansão de Taylor dos contrastes entre cada parâmetro elástico em torno de zero. Para isso, supomos que as diferenças (contrastes) $\alpha_2 - \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1$, $\rho_2 - \rho_1$ são pequenas.

Para que possamos fazer a expansão, reescrevemos os parâmetros elásticos em função de suas respectivas médias e diferenças como segue,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \Delta\alpha/2 & \text{e} & & \alpha_2 &= \alpha + \Delta\alpha/2, \\ \beta_1 &= \beta - \Delta\beta/2 & \text{e} & & \beta_2 &= \beta + \Delta\beta/2, \\ \rho_1 &= \rho - \Delta\rho/2 & \text{e} & & \rho_2 &= \rho + \Delta\rho/2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde, α é a média aritmética e $\Delta\alpha$ a diferença entre α_1 e α_2 . O mesmo se aplica para β e ρ .

Substituindo as expressões (3.1) na equação exata (2.20), e considerando $h = (\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\rho)$ e $\eta = (\alpha, \beta, \rho)$ podemos dizer que R_{PP} é uma função do tipo

$$R_{PP} \equiv R_{PP}(\eta, h) = R_{PP}(\alpha, \beta, \rho, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\rho), \quad (3.2)$$

cujas expansão de Taylor de primeira ordem em torno de $h = 0$ é dada por,

$$R_{PP}(\eta, h) \approx R_{PP}(\eta, 0) + \nabla R_{PP}(\eta, 0) \cdot h, \quad (3.3)$$

onde \cdot denota o produto escalar canônico em \mathbb{R}^3 . Uma vez que os termos A, B, \dots, F da equação (2.20) são agora funções de η e h calcular $R_{PP}(\eta, 0)$ é bastante simples. Na verdade, para $h = 0$ e $\beta \neq 0$

$$R_{PP}(\eta, 0) = 0, \quad (3.4)$$

como esperado.

Assim, como o primeiro termo da equação (3.3) é nulo, só nos resta calcular,

$$\nabla R_{PP}(\eta, 0) = \left(\frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\alpha}, \frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\beta}, \frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\rho} \right) \Big|_{h=0}. \quad (3.5)$$

Obviamente, obter todas estas derivadas é um processo muito complicado. Faremos então, algumas observações que facilitarão nosso trabalho. As manipulações algébricas serão exibidas apenas para o parâmetro α pois, o resultado é similar para os outros dois parâmetros.

Da definição de derivada escrevemos,

$$\frac{\partial R_{PP}}{\partial \Delta\alpha} \Big|_{h=0} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{R_{PP}(\eta, \Delta\alpha, 0, 0) - R_{PP}(\eta, 0, 0, 0)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{R_{PP}(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}{\Delta\alpha}. \quad (3.6)$$

Lembrando que $R_{PP}(\eta, \Delta\alpha, 0, 0) = \frac{f(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}{g(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}$ onde $f = A + B - C - D + E - F$ e $g = A + B + C + D + E + F$ com $f(\eta, 0, 0, 0) = 0$ e $g(\eta, 0, 0, 0) \neq 0$, temos que

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{R_{PP}(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}{\Delta\alpha g(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)} = \frac{1}{g(\eta, 0, 0, 0)} \frac{\partial f(\eta, 0, 0, 0)}{\partial \Delta\alpha}. \quad (3.7)$$

Portanto, o cálculo do gradiente (3.5) se resume a calcular o quociente (3.7) para cada parâmetro. Ainda mais, como o denominador é sempre o mesmo, $g(\eta, 0, 0, 0)$, só precisamos avaliar quatro valores,

$$g(\eta, 0, 0, 0), \frac{\partial f(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}{\partial \Delta\alpha} \Big|_{\Delta\alpha=0}, \frac{\partial f(\eta, 0, \Delta\beta, 0)}{\partial \Delta\beta} \Big|_{\Delta\beta=0} \text{ e } \frac{\partial f(\eta, 0, 0, \Delta\rho)}{\partial \Delta\rho} \Big|_{\Delta\rho=0}. \quad (3.8)$$

Após algumas manipulações algébricas chegamos a,

$$R_{PP} \approx \left[\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \sec^2 \theta \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{\Delta\beta}{\beta}. \quad (3.9)$$

A utilização da expressão acima, em alguns casos, é feita considerando o parâmetro de raio p , dado pela equação (2.19), ao invés do ângulo de incidência θ . Sob esta abordagem a expressão de contraste fraco (3.9) é reescrita como,

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2} [1 - 4\beta^2 p^2] \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \right] \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - [4\beta^2 p^2] \frac{\Delta\beta}{\beta}. \quad (3.10)$$

Vejamos agora, como estabelecer esta mesma aproximação para o coeficiente de reflexão PS. Os primeiros passos descritos pelas equações (3.1)-(3.2) valem para R_{PS} exatamente da mesma maneira. Buscaremos então a seguinte aproximação,

$$R_{PS}(\eta, h) \approx R_{PS}(\eta, 0) + \nabla R_{PS}(\eta, 0) \cdot h. \quad (3.11)$$

Lembramos agora que a expressão de R_{PS} é dada pela equação (2.23) e quando tomamos $h = 0$ os termos q e Z presentes no numerador desta expressão se anulam: consequentemente o numerador também se iguala a zero. Note que, os denominadores de ambos os coeficientes têm exatamente a mesma expressão e como já vimos anteriormente quando $h = 0$ ele não se anula. Portanto $R_{PS}(\eta, 0) = 0$ e novamente só nos resta calcular o gradiente de (3.11) para chegarmos à aproximação desejada.

Para calcular o gradiente de R_{PP} fizemos algumas observações que facilitaram o cálculo da primeira componente deste vetor e as outras duas, obviamente, seguiam de maneira análoga. Vamos fazer exatamente o mesmo aqui, lembrando apenas que $R_{PS}(\eta, \Delta\alpha, 0, 0) = \frac{s(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}{g(\eta, \Delta\alpha, 0, 0)}$, onde $s = -(M + N)$ e g é a mesma função considerada anteriormente. Assim os passos descritos pelas equações (3.5)-(3.7) procedem da mesma forma, considerando apenas a função s no lugar de g .

A primeira componente do vetor ∇R_{PS} se anula e, portanto, a aproximação será dada avaliando apenas os seguintes valores,

$$\left. \frac{\partial s(\eta, 0, \Delta\beta, 0)}{\partial \Delta\beta} \right|_{\Delta\beta=0} \text{ e } \left. \frac{\partial s(\eta, 0, 0, \Delta\rho)}{\partial \Delta\rho} \right|_{\Delta\rho=0}, \quad (3.12)$$

lembrando que já havíamos calculado $g(\eta, 0, 0, 0)$ anteriormente.

A expressão que define a aproximação de contraste fraco para o coeficiente de reflexão PS, já escrita em função do parâmetro de raio p , é dada por,

$$\begin{aligned} R_{PS} \approx & \frac{-p\alpha}{2\sqrt{1-\beta^2p^2}} \left[\left(1 - 2\beta^2p^2 + 2\beta^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta} \right) \frac{\Delta\rho}{\rho} \right. \\ & \left. - \left(4\beta^2p^2 - 4\beta^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta} \right) \frac{\Delta\beta}{\beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.1.2 Aproximação de afastamento pequeno

Uma outra maneira de aproximarmos a expressão para o coeficiente de reflexão PP é assumir que a distância entre a fonte e o receptor é pequena (Ursin and Dahl, 1992). Como consequência, θ , ou p , também podem ser considerados pequenos e assim podemos substituir o termo $(1 - v^2 p^2)^{1/2}$ pela sua respectiva aproximação de Taylor de segunda ordem,

$$(1 - v^2 p^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} v^2 p^2, \quad (3.14)$$

para $v = \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Expandindo esses termos na equação (2.20) observamos que a expressão para R_{PP} será aproximada por uma divisão de dois polinômios pares de grau 10 na variável p . Observe que os coeficientes da expansão de Taylor de um quociente de polinômios pares de grau n podem ser encontrados através da equação,

$$\frac{a_0 + a_2 p^2 + a_4 p^4 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_2 p^2 + b_4 p^4 + \dots + b_n p^n} = c_0 + c_2 p^2 + c_4 p^4 + \dots \quad (3.15)$$

a partir da qual as seguintes relações são estabelecidas,

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad (3.16)$$

$$c_2 = \frac{a_2 - c_0 b_2}{b_0}, \quad (3.17)$$

e assim por diante.

Seguindo esta idéia, chegamos à seguinte expressão para a aproximação de afastamento pequeno,

$$\begin{aligned} R_{PP} \approx & \frac{\rho_2 \alpha_2 - \rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1} + \left\{ \frac{\rho_1 \alpha_1 \rho_2 \alpha_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{(\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1)^2} \right. \\ & + \frac{2\alpha_1}{(\rho_2 \alpha_2 + \rho_1 \alpha_1)^2 (\rho_2 \beta_2 + \rho_1 \beta_1)} [4\rho_1 (\rho_2 \beta_2^2 + \rho_1 \beta_1^2)^2 \\ & - \rho_1 \alpha_2^2 \beta_1 \beta_2 (\rho_2 - \rho_1)^2 \\ & \left. - 4\rho_1 \rho_2 \alpha_2 (\rho_2 \beta_2^2 + \rho_1 \beta_1^2) (\beta_2 + \beta_1) \right\} p^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ressaltamos que não aumentamos a ordem da série de Taylor porque conforme avançamos na expansão, mais complicados vão ficando os coeficientes. Note que o coeficiente de p^2 já

apresenta uma expressão um pouco complicada. No problema prático de prospecção de petróleo, a utilização das expressões do coeficiente de reflexão é feita de forma inversa. Portanto, o uso de aproximações com expressões de difícil manipulação algébrica se faz praticamente inviável.

Ursin and Dahl (1992) estabeleceram uma aproximação para R_{PS} similar à apresentada acima. Porém, tal expressão é de difícil manipulação o que a faz desnecessária para o presente trabalho.

3.1.3 Aproximação de contraste fraco e afastamento pequeno

Podemos também aproximar as expressões dos coeficientes de reflexão, como propôs Tajland (1993), assumindo ambas as hipóteses anteriores (contraste fraco e afastamento pequeno). Para tanto, fazemos a expansão de Taylor para o parâmetro p nas expressões das aproximações de contraste fraco.

Para o coeficiente R_{PP} é necessário expandir apenas o segundo termo da equação (3.10) pois, os outros dois já estão na forma polinomial. Portanto, basta fazermos

$$\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \approx 1 + \alpha^2 p^2 + \alpha^4 p^4 \quad (3.19)$$

e chegamos assim à aproximação

$$R_{PP} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2 \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \right] \alpha^2 p^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \alpha^4 p^4. \quad (3.20)$$

Note que, neste caso, a expansão de Taylor pôde ser feita até a quarta ordem pois, a expressão obtida não é de difícil manipulação.

Para o coeficiente R_{PS} precisamos expandir todos os termos que possuem expressões do tipo $(1 - v^2 p^2)^{1/2}$ e $(1 - v^2 p^2)^{-1/2}$, onde $v = \alpha, \beta$, na equação de contraste fraco (3.13). Usando a aproximação de Taylor de segunda ordem,

$$(1 - v^2 p^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} v^2 p^2 \quad \text{e} \quad (1 - v^2 p^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} v^2 p^2, \quad (3.21)$$

e desconsiderando os termos de ordem maior que 3 a seguinte expressão é estabelecida,

$$R_{PS} \approx - \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta\mu}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \sin \theta + \frac{\beta}{\alpha} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta\mu}{\mu} - \frac{1}{4} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta\rho}{\rho} \right] \sin^3 \theta, \quad (3.22)$$

onde $\mu_i = \rho_i \beta_i^2$, $i = 1, 2$ e, além disso, $\Delta\mu/\mu = 2(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$.

3.1.4 Aproximação quadrática de contraste fraco

Como vimos até agora, nosso problema se concentra em encontrar expressões mais simples para o coeficiente de reflexão. Claro que, além disso, buscamos aproximações que apresentem pouco erro. É natural que a primeira tentativa de se melhorar uma aproximação baseada em séries de Taylor seja aumentar a ordem da expansão. No entanto, nem sempre isto é proveitoso devido a complicação nos cálculos e nas expressões resultantes. A aproximação de afastamento pequeno, como já comentamos, se comporta de tal modo e não podemos melhorá-la dessa forma.

Para o caso da aproximação linear de contraste fraco, conseguimos alguns argumentos matemáticos que possibilitaram simplificar o cálculo do gradiente de R_{PP} . O próximo passo seria calcularmos a Hessiana para obtermos uma aproximação quadrática, ou seja, seguindo a mesma notação da aproximação linear de contraste fraco faríamos,

$$R_{PP}(\eta, h) \approx R_{PP}(\eta, 0) + \nabla R_{PP}(\eta, 0) \cdot h + h \cdot \nabla^2 R_{PP}(\eta, 0)h. \quad (3.23)$$

De fato, obter todas as derivadas que compõem a matriz Hessiana $\nabla^2 R_{PP}(\eta, 0)$ é muito trabalhoso e por isso recorreremos às ferramentas computacionais para tal. Através do software Mathematica 4.0, encontramos a seguinte aproximação de segunda ordem nos contrastes elásticos,

$$\begin{aligned} R_{PP} \approx & \frac{1}{2}[1 - 4\beta^2 p^2] \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \right] \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - [4\beta^2 p^2] \frac{\Delta\beta}{\beta} \\ & + \left[\frac{8\beta^3 p^2 (1 - \alpha^2 p^2 - \beta^2 p^2)}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2 p^2} \sqrt{1 - \beta^2 p^2}} \right] \frac{\Delta\beta^2}{\beta^2} + \left[\frac{\beta p^2 (4\beta^2 - \alpha^2 - 4\beta^4 p^2)}{2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2 p^2} \sqrt{1 - \beta^2 p^2}} \right] \frac{\Delta\rho^2}{\rho^2} \\ & + \left[\frac{2\beta^2 p^2 (2 - \alpha^2 p^2 - 2\beta^2 p^2)}{\rho \alpha \sqrt{1 - \alpha^2 p^2} \sqrt{1 - \beta^2 p^2}} \right] \Delta\beta \Delta\rho \end{aligned} \quad (3.24)$$

O mesmo procedimento foi feito para o coeficiente R_{PS} mas, a fórmula encontrada é muito extensa e complicada. Devido à sua pouca utilidade optamos por não considerá-la neste trabalho.

3.1.5 Aproximação pseudo-quadrática

Wang (1999) propôs uma aproximação para R_{PP} também baseada em expansões de Taylor. O autor reescreveu o coeficiente de reflexão exato (2.20) como uma divisão de dois polinômios em p ,

$$R_{PP} = \frac{\bar{E} + \bar{F}p^2 + \bar{G}p^4 - \bar{D}p^6}{\bar{A} + \bar{B}p^2 + \bar{C}p^4 + \bar{D}p^6}. \quad (3.25)$$

Na verdade, os coeficientes $\bar{A}, \bar{B}, \dots, \bar{G}$ também são funções de p , mas de uma forma implícita, ou seja, estes termos dependem de $\sqrt{1 - \nu_i^2 p^2}$ onde $\nu_i = \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$.

A idéia principal da aproximação é expandir a equação (3.25) na variável p como se os coeficientes dos polinômios não dependessem de p . O nome **pseudo** vem justamente deste fato. Como o numerador já está na forma polinomial só é feita a seguinte aproximação,

$$\frac{1}{\bar{A} + \bar{B}p^2 + \bar{C}p^4 + \bar{D}p^6} \approx \frac{1}{\bar{A}} - \frac{\bar{B}}{\bar{A}^2}p^2. \quad (3.26)$$

Após certas manipulações, detalhadas em Wang (1999), a seguinte aproximação é estabelecida,

$$\begin{aligned} R_{PP} \approx & \left[\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{1}{2} \sec^2 \theta \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{\Delta \beta}{\beta} \\ & + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \cos \theta \sin^2 \theta \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} + 2 \frac{\Delta \beta}{\beta} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observe que a expressão acima é a mesma dada por (3.9) acrescida de um termo quadrático nos contrastes dos parâmetros elásticos.

3.2 Aproximações do tipo impedância

As aproximações do tipo impedância surgiram recentemente na literatura (Connolly, 1999; Santos and Tygel, 2004). Diferente das expressões já estudadas a base desta nova abordagem não está relacionada diretamente com as séries de Taylor. Através da função refletividade conseguimos definir uma equação diferencial parcial e para solucioná-la são usadas algumas hipóteses que definem diferentes soluções. Cada solução encontrada determina uma aproximação

para o coeficiente de reflexão. Seguiremos o mesmo esquema da seção anterior, apresentaremos as expressões primeiro para R_{PP} e a seguir faremos algumas considerações que permitem estabelecer as mesmas idéias para R_{PS} .

3.2.1 Refletividade

As aproximações do tipo impedância foram desenvolvidas primeiro para o coeficiente de reflexão PP e portanto os passos iniciais para obtê-las são baseados nas expressões deste coeficiente.

Como vimos na Seção 2.4 a expressão de R_{PP} considerando incidência normal é bastante simples. Além disso a mesma possui uma particularidade interessante, podemos escrevê-la utilizando apenas uma função que denominamos impedância acústica,

$$R_{PP} = \frac{AI_2 - AI_1}{AI_2 + AI_1}. \quad (3.28)$$

A idéia agora é justamente buscar uma representação para o coeficiente de reflexão R_{PP} para qualquer ângulo de incidência, equação de Zoeppritz (2.20), similar a expressão correspondente à incidência normal exibida acima. Em outras palavras, pretendemos definir uma função $I = I(\alpha, \beta, \rho, \theta)$, ou $I = I(\alpha, \beta, \rho, p)$, chamada função impedância, através da qual o coeficiente de reflexão seja aproximadamente dado por,

$$R_{PP} \approx \frac{I(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, \theta_2) - I(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1)}{I(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, \theta_2) + I(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1)} = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}. \quad (3.29)$$

Primeiramente lembramos que a expressão exata de R_{PP} , equação (2.20), pode ser escrita como uma razão entre duas funções, ou seja,

$$R_{PP} = \frac{P[\rho_i, \alpha_i, \beta_i, \theta_i]}{Q[\rho_i, \alpha_i, \beta_i, \theta_i]} \quad \text{ou} \quad R_{PP} = \frac{P[\rho_i, \alpha_i, \beta_i, p]}{Q[\rho_i, \alpha_i, \beta_i, p]}, \quad (3.30)$$

porém, como observado pela equação (2.20), P e Q não têm a forma simples que gostaríamos. Para obter a aproximação que buscamos, é necessário definir a chamada função refletividade, que será a base desta nova formulação.

Grosseiramente falando, a função refletividade é uma medida da variação do coeficiente de reflexão nas proximidades do ponto onde o raio atinge a interface. Para expressar esta variação

quantitativamente, consideramos os parâmetros elásticos (α, β, ρ) e θ como funções de uma única variável σ (pode ser visto como tempo ou profundidade) que parametriza o raio perto do ponto de incidência. Estamos introduzindo este novo parâmetro σ para que possamos trabalhar com o conceito de continuidade dos parâmetros elásticos através da interface. Tendo isto em mente, tomamos $\Delta\sigma$ um parâmetro de incremento suficientemente pequeno e reescrevemos os parâmetros elásticos como segue:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha(\sigma) & \beta_1 &= \beta(\sigma) & \rho_1 &= \rho(\sigma) & \theta_1 &= \theta(\sigma) \\ \alpha_2 &= \alpha(\sigma + \Delta\sigma) & \beta_2 &= \beta(\sigma + \Delta\sigma) & \rho_2 &= \rho(\sigma + \Delta\sigma) & \theta_2 &= \theta(\sigma + \Delta\sigma). \end{aligned}$$

Usando a lei de Snell, a qual garante que o parâmetro de raio p permanece constante através da interface, obtemos

$$p = \frac{\sin \theta(\sigma)}{\alpha(\sigma)} = \frac{\sin \theta(\sigma + \Delta\sigma)}{\alpha(\sigma + \Delta\sigma)} \quad (3.31)$$

o que define a seguinte relação ,

$$\sin \theta(\sigma) = \alpha(\sigma)p. \quad (3.32)$$

Assim, podemos rescrever (3.30) da seguinte forma,

$$R_{PP} \equiv R_{PP}(\sigma, \Delta\sigma) = \frac{P[\eta(\sigma), \eta(\sigma + \Delta\sigma)]}{Q[\eta(\sigma), \eta(\sigma + \Delta\sigma)]}, \quad (3.33)$$

onde $\eta(\sigma) = (\rho(\sigma), \alpha(\sigma), \beta(\sigma), \theta(\sigma))$.

Definimos a função refletividade pelo limite,

$$\mathcal{R}(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{R_{PP}(\sigma, \Delta\sigma)}{\Delta\sigma}. \quad (3.34)$$

Note que o cálculo do limite acima, pode ser feito sob as mesmas considerações utilizadas para o cálculo da aproximação linear de contraste fraco descrito na Subseção 3.1.1 pelas equações (3.5)–(3.7). Temos novamente um limite do tipo 0/0 e, portanto,

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{R_{PP}(\sigma, \Delta\sigma)}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{f(\sigma, \Delta\sigma)}{\Delta\sigma g(\sigma, \Delta\sigma)} = \frac{f'(\sigma, 0)}{g(\sigma, 0)}. \quad (3.35)$$

Ressaltamos que devido ao fato de estarmos reescrevendo os parâmetros elásticos em função de σ e não mais em função dos contrastes, temos agora $f, g : (\sigma, \Delta\sigma) \mapsto \mathbb{R}$, onde σ e $\Delta\sigma \in \mathbb{R}$, ao invés de $f, g : (\eta, h) \mapsto \mathbb{R}$, com η e $h \in \mathbb{R}^3$.

Logo, pela regra da cadeia, podemos escrever

$$f' = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta \sigma} \right|_{\Delta \sigma=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \Delta \sigma} \right|_{\Delta \sigma=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \Delta \sigma} \right|_{\Delta \sigma=0} \quad (3.36)$$

e o cálculo das derivadas acima se reduz exatamente aos mesmos procedimentos utilizados para calcular o gradiente na subseção 3.1.1. Além disso, o valor de $g(\sigma, 0)$ é idêntico ao valor de $g(\eta, 0, 0, 0)$ comentado anteriormente.

De acordo com as semelhanças comentadas entre a definição da função refletividade e a aproximação linear de contraste fraco, obtemos a seguinte expressão,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} [1 - 4\beta^2 p^2] \frac{\rho'}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \right] \frac{\alpha'}{\alpha} - [4\beta^2 p^2] \frac{\beta'}{\beta}, \quad (3.37)$$

onde ' denota as derivadas em relação a σ . Se aproximarmos as derivadas da equação acima por suas correspondentes discretas, isto é, $\alpha' \approx \Delta \alpha / \Delta \sigma$ e analogamente para β e ρ , obtemos a aproximação de contraste fraco (3.10) multiplicada por $\Delta \sigma$.

Por outro lado, através de uma substituição direta da equação (3.29) em (3.34) a seguinte relação é estabelecida,

$$\mathcal{R}(\sigma) = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta \sigma} \frac{I(\sigma + \Delta \sigma) - I(\sigma)}{I(\sigma + \Delta \sigma) + I(\sigma)} \right] = \frac{1}{2} \frac{I'(\sigma)}{I(\sigma)}, \quad (3.38)$$

que junto com a equação (3.37) fornece,

$$\frac{I'}{I} = [1 - 4\beta^2 p^2] \frac{\rho'}{\rho} + \left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \right] \frac{\alpha'}{\alpha} - [8\beta^2 p^2] \frac{\beta'}{\beta}. \quad (3.39)$$

As soluções da equação diferencial acima definirão as diferentes aproximações do tipo impedância. Vejamos agora como obter uma equação similar para o caso de R_{PS} .

De acordo com o que comentamos na Seção 2.4 não faz sentido pensarmos no caso acústico para R_{PS} e tampouco em incidência normal. Como consequência, as aproximações do tipo impedância para o coeficiente-PS é fundamentada no caso de incidência normal de R_{PP} , ou seja, buscamos uma função $J = J(\alpha, \beta, \rho, \theta)$, ou $J = J(\alpha, \beta, \rho, p)$ que satisfaça,

$$R_{PS} = \frac{J_2 - J_1}{J_2 + J_1}. \quad (3.40)$$

Assim, os procedimentos descritos pelas equações (3.28)–(3.38) são seguidos da mesma forma para R_{PS} e obtemos a seguinte equação diferencial,

$$\frac{J'}{J} = \frac{-p\alpha}{\sqrt{1-\beta^2 p^2}} \left[\left(1 - 2\beta^2 p^2 + 2\beta^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2 p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta^2 p^2}}{\beta} \right) \frac{\rho'}{\rho} - \left(4\beta^2 p^2 - 4\beta^2 \frac{\sqrt{1-\alpha^2 p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1-\beta^2 p^2}}{\beta} \right) \frac{\beta'}{\beta} \right]. \quad (3.41)$$

Algumas aproximações do tipo impedância para R_{PS} consideram a hipótese de afastamento pequeno, simplificando a expressão da função refletividade através da expansão de Taylor para o parâmetro p . Assim, procedendo analogamente à aproximação de contraste fraco e afastamento pequeno, equação (3.22), a seguinte equação diferencial é estabelecida,

$$\frac{J'}{J} = - \left[4K \sin \theta \left(1 - \frac{1}{2}(1+2K) \sin^2 \theta \right) \right] \frac{\beta'}{\beta} - \left[(1+2K) \sin \theta \left(1 - \frac{K + \frac{3}{2}K^2}{1+2K} \sin^2 \theta \right) \right] \frac{\rho'}{\rho} \quad (3.42)$$

onde $K = \beta/\alpha$.

3.2.2 Impedância elástica

A função de Impedância Elástica, $I = IE$, proposta por Connolly (1999) é obtida reescrevendo (3.39) em função do ângulo de incidência,

$$\frac{IE'}{IE} = [1 - 4K^2 \sin^2 \theta] \frac{\rho'}{\rho} + [\sec^2 \theta] \frac{\alpha'}{\alpha} - [8K^2 \sin^2 \theta] \frac{\beta'}{\beta}, \quad (3.43)$$

onde $K = \beta/\alpha$. Para resolver esta equação, Connolly assumiu K e θ constantes e obteve a seguinte solução geral da equação acima,

$$IE = \rho^{1-4K^2 \sin^2 \theta} \alpha^{\sec^2 \theta} \beta^{-8K^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.44)$$

Lembramos que supor K e θ constantes significa escrever,

$$IE_i = \rho_i^{1-4K^2 \sin^2 \theta} \alpha_i^{\sec^2 \theta} \beta_i^{-8K^2 \sin^2 \theta}, \quad i = 1, 2. \quad (3.45)$$

A aproximação de impedância elástica para R_{PS} que segue a mesma idéia de Connolly, foi desenvolvida por Gonzalez et al. (2003) e denominada *PSEI* (do inglês, *PS converted*

waves Elastic Impedance). O procedimento para definir esta aproximação é o mesmo seguido por Connolly, ou seja, reescrevemos a equação (3.41) em função de θ e considerando K e θ constantes, resolvemos a equação diferencial da mesma maneira. Assim sendo, a aproximação *PSEI* é dada por,

$$PSEI = \rho^{c_1} \beta^{b_1} \quad (3.46)$$

onde,

$$c_1 = \frac{K \sin \theta}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - \sin^2 \theta}} \left(2 \sin^2 \theta - \frac{1}{K^2} - 2 \cos \theta \sqrt{\frac{1}{K^2} - \sin^2 \theta} \right) \quad (3.47)$$

$$b_1 = \frac{4K \sin \theta}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - \sin^2 \theta}} \left(\sin^2 \theta - \cos \theta \sqrt{\frac{1}{K^2} - \sin^2 \theta} \right). \quad (3.48)$$

Há ainda duas aproximações do tipo impedância elástica para R_{PS} que consideram a hipótese adicional de afastamento pequeno ($p \approx 0$) e são definidas pela solução da equação (3.42). A primeira delas é conhecida como *SEI* (do inglês, *Shear Elastic Impedance*) e foi proposta por Landro et al. (1999). Os autores desconsideraram o termo $\sin^3 \theta$ da equação (3.42) e obtiveram a seguinte aproximação,

$$SEI = \rho^{c_2} \beta^{b_2} \quad (3.49)$$

onde,

$$c_2 = -(1 + 2K) \sin \theta \quad (3.50)$$

$$b_2 = -4K \sin \theta. \quad (3.51)$$

A segunda aproximação, definida em Duffaut et al. (2000), é apenas uma extensão da aproximação estabelecida acima e por isso permanece com o mesmo nome *SEI*. Considerando agora, o termo que envolve $\sin^3 \theta$ obtêm-se a seguinte expressão,

$$SEI = \rho^{c_3} \beta^{b_3} \quad (3.52)$$

onde,

$$c_3 = - \left[(1 + 2K) \sin \theta \left(1 - \frac{K + \frac{3}{2}K^2}{1 + 2K} \sin^2 \theta \right) \right] \quad (3.53)$$

$$b_3 = - \left[4K \sin \theta \left(1 - \frac{1}{2}(1 + 2K) \sin^2 \theta \right) \right]. \quad (3.54)$$

Lembramos novamente que todas as aproximações apresentadas nesta subseção supõem K e θ constantes.

3.2.3 Impedância de reflexão

Para obtermos a função de Impedância de Reflexão proposta por Santos and Tygel (2004), usamos o fato do parâmetro de raio p ser constante e supomos que a equação (3.39) admite uma solução do tipo $I(\sigma) = I(\rho(\sigma), \alpha(\sigma), \beta(\sigma), p)$. Ressaltamos que usar p constante é bastante diferente de considerar θ constante, como foi feito para definir a função de impedância elástica. A grande diferença é que usar p constante tem um forte embasamento físico definido pela Lei de Snell que, por outro lado, é violada ao usar θ constante.

Pela regra da cadeia temos

$$I' = \frac{\partial I}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial I}{\partial \alpha} \alpha' + \frac{\partial I}{\partial \beta} \beta'. \quad (3.55)$$

Substituindo (3.55) diretamente em (3.39) vemos que a última admite tal solução somente se as três equações diferenciais,

$$\frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \rho} = \frac{1 - 4\beta^2 p^2}{\rho}, \quad \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha(1 - \alpha^2 p^2)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial \beta} = -8\beta p^2 \quad (3.56)$$

forem satisfeitas simultaneamente. Integrando a equação para o parâmetro β obtemos,

$$I = G(\alpha, \rho) \exp\{-4\beta^2 p^2\} \quad (3.57)$$

onde $G(\alpha, \rho)$ é uma função a ser determinada. Substituindo esta expressão nas outras duas equações restantes estabelecemos as seguintes relações :

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{1 - 4\beta^2 p^2}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha(1 - \alpha^2 p^2)}. \quad (3.58)$$

Note que $G = G(\rho, \alpha)$ e, assim o lado esquerdo da primeira equação acima depende de ρ e α enquanto que o lado direito depende de β e ρ . Isto mostra que I não tem a forma que supomos.

Para superar esta situação, vamos supor uma dependência funcional entre β e ρ , i.e., $\beta = \beta(\rho)$. Agora as equações (3.58) fazem sentido e a equação diferencial com respeito a α fornece

a seguinte relação,

$$G = H(\rho) \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}}. \quad (3.59)$$

Finalmente substituindo (3.59) na equação para ρ temos

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{1 - 4\beta^2 p^2}{\rho}. \quad (3.60)$$

Portanto,

$$H = C_I \rho \exp \left(-4p^2 \int \frac{\beta^2}{\rho} d\rho \right) \quad (3.61)$$

sendo C_I uma constante. Reunindo todos os resultados obtidos até então, podemos escrever a solução desejada como,

$$I = C_I \frac{\rho \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}} \exp \left\{ -4p^2 \left[\beta^2 + \int \frac{\beta^2}{\rho} d\rho \right] \right\}. \quad (3.62)$$

Santos and Tygel (2004) sugeriram a seguinte relação,

$$\rho = b\beta^\gamma, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \frac{\rho'}{\rho} = \gamma \frac{\beta'}{\beta} \quad (3.63)$$

onde b e γ são constantes. Neste caso, a solução (3.62) se reduz a,

$$I = IR = C_{IR} \frac{\rho \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}} \cdot \begin{cases} \exp \{ -2[2 + \gamma]\beta^2 p^2 \}, & \beta' \neq 0 \\ (\rho/\rho_0)^{-4\beta^2 p^2}, & \beta' = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

onde ρ_0 e C_{IR} são constantes.

A fim de estabelecermos uma aproximação análoga à exibida acima para o coeficiente de reflexão PS seguiremos os mesmos procedimentos. Novamente estamos procurando uma solução do tipo $J(\sigma) = J(\rho(\sigma), \alpha(\sigma), \beta(\sigma), p)$ para a equação (3.41). Note que ambos termos da equação (3.41) dependem de α e para que as duas equações,

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \beta} = - \frac{-p\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 p^2}} \left(4\beta^2 p^2 - 4\beta^2 \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1 - \beta^2 p^2}}{\beta} \right) \frac{1}{\beta} \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \rho} = \frac{-p\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 p^2}} \left(1 - 2\beta^2 p^2 + 2\beta^2 \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}}{\alpha} \frac{\sqrt{1 - \beta^2 p^2}}{\beta} \right) \frac{1}{\rho} \quad (3.66)$$

sejam satisfeitas simultaneamente precisamos supor uma dependência funcional entre α , β e ρ .

Considerando a mesma dependência funcional entre β e ρ (3.63) e acrescentando que $K = \beta/\alpha$ faz sentido resolver a equação (3.41).

Feitas as integrações necessárias, a seguinte expressão para a aproximação que denominamos *SRI* (do inglês, *Shear Reflection Impedance*) é estabelecida (Davolio et al. (2006)),

$$SRI = \exp \left[\frac{2 \arcsin(\beta p)}{K} - (2 + \gamma) [\beta p (\sqrt{1 - \alpha^2 p^2} + \alpha p \sqrt{1 - \beta^2 p^2}) + K \arcsin(\alpha p)] \right]. \quad (3.67)$$

3.3 Comentários gerais

Nesta seção apresentaremos de uma forma resumida as aproximações que foram discutidas neste capítulo. Através da Tabela 3.1 podemos identificar as aproximações baseadas em série de Taylor.

Lembramos que as aproximações do tipo impedância são definidas pelas funções impedância (I ou J) a partir das quais podemos escrever os coeficientes de reflexão como,

$$R_{PP} \approx \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} \quad \text{e} \quad R_{PS} \approx \frac{J_2 - J_1}{J_2 + J_1}. \quad (3.68)$$

A Tabela 3.2 identifica as funções impedância descritas neste capítulo que definem este tipo de aproximação.

Aproximações	Equação	
	R_{PP}	R_{PS}
Linear Contraste Fraco	3.9	3.13
Afastamento Pequeno	3.18	-
Cont. Fraco + Afast. Peq.	3.20	3.22
Quadrática Contraste Fraco	3.24	-
Pseudo-Quadrática	3.27	-

Tabela 3.1: Aproximações para R_{PP} e R_{PS} baseadas em séries de Taylor.

	Aproximações	Função Impedância	Equação
R_{PP}	Impedância Elástica	IE	3.44
	Impedância de Reflexão	IR	3.64
R_{PS}	PS converted waves Elastic Impedance	PSEI	3.46
	Shear Elastic Impedance	SEI	3.49 e 3.52
	Shear Reflection Impedance	SRI	3.67

Tabela 3.2: Aproximações do tipo impedância para R_{PP} e R_{PS} .

Capítulo 4

Experimentos numéricos

Neste capítulo, apresentaremos alguns testes numéricos para discutirmos o comportamento das aproximações para os coeficientes de reflexão PP e PS, apresentadas no capítulo anterior.

De acordo com o que comentamos na Seção 2.5, para que possamos visualizar de uma maneira mais adequada os possíveis comportamentos das curvas (exata e aproximadas) dos coeficientes de reflexão, é interessante usarmos modelos com diferentes contrastes. Serão considerados três modelos, os quais denominamos modelo de contraste fraco, médio e forte. Cada modelo é definido por dois meios elásticos, isotrópicos e homogêneos, separados por uma interface plana, como ilustra a Figura 2.2. A Tabela 4.1 exibe os valores de cada parâmetro elástico, bem como seus respectivos contrastes. Através destes dados serão computados os valores para os coeficientes de reflexão e suas aproximações considerando ângulos de incidência entre 0° e 60° .

Pretendemos avaliar o comportamento das aproximações quando variamos os contrastes dos meios e os valores dos ângulos de incidência. Para isso apresentamos as curvas dos erros percentuais de cada aproximação e serão consideradas aceitáveis as aproximações que apresentarem erros inferiores a 20%.

Note que o termo contraste fraco é utilizado em dois casos distintos. Temos as aproximações de contraste fraco, baseadas na suposição desses valores serem pequenos, e temos o modelo de contraste fraco descrito na Tabela 4.1.

Meio	Contraste Fraco			Contraste Médio			Contraste Forte		
	α	β	ρ	α	β	ρ	α	β	ρ
1	3.42	1.78	2.53	3.35	1.72	2.36	3.21	1.60	2.39
2	3.39	1.79	2.50	3.05	1.46	2.30	4.55	2.61	2.44
Contraste	-0.01	0.01	-0.01	-0.09	-0.16	-0.03	0.35	0.48	0.02

Tabela 4.1: Modelos de contrastes fraco, médio e forte seguindo as unidades $[v] = \text{km/s}$ e $[\rho] = \text{g/cm}^3$.

4.1 Coeficiente de reflexão PP

As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam as aproximações do tipo Taylor, para R_{PP} , considerando os modelos de contraste fraco, médio e forte, respectivamente, em função do ângulo de incidência θ . Identificamos cada curva através da notação,

- **Exato:** Zoeppritz – equação (2.20),
- **Cont. Fraco:** Contraste Fraco – equação (3.9),
- **Afast. Peq.:** Afastamento Pequeno – equação (3.18),
- **Fraco + Peq:** Contraste Fraco e Afastamento Pequeno – equação (3.20),
- **Quad.:** Quadrática de Contraste Fraco – equação (3.24),
- **Pseudo:** Pseudo Quadrática – equação (3.27).

A primeira observação a ser feita é que, independentemente do modelo que estamos considerando, todas as aproximações apresentam erros maiores conforme aumentamos o ângulo de incidência.

Ao compararmos os resultados dos três modelos da Tabela 4.1 verificamos que o modelo de contraste fraco apresenta os menores erros. Claramente, para as aproximações que supõem contraste fraco este resultado já era esperado. Porém, observamos que mesmo a aproximação de afastamento pequeno, que não utiliza esta hipótese, apresenta resultados melhores para este

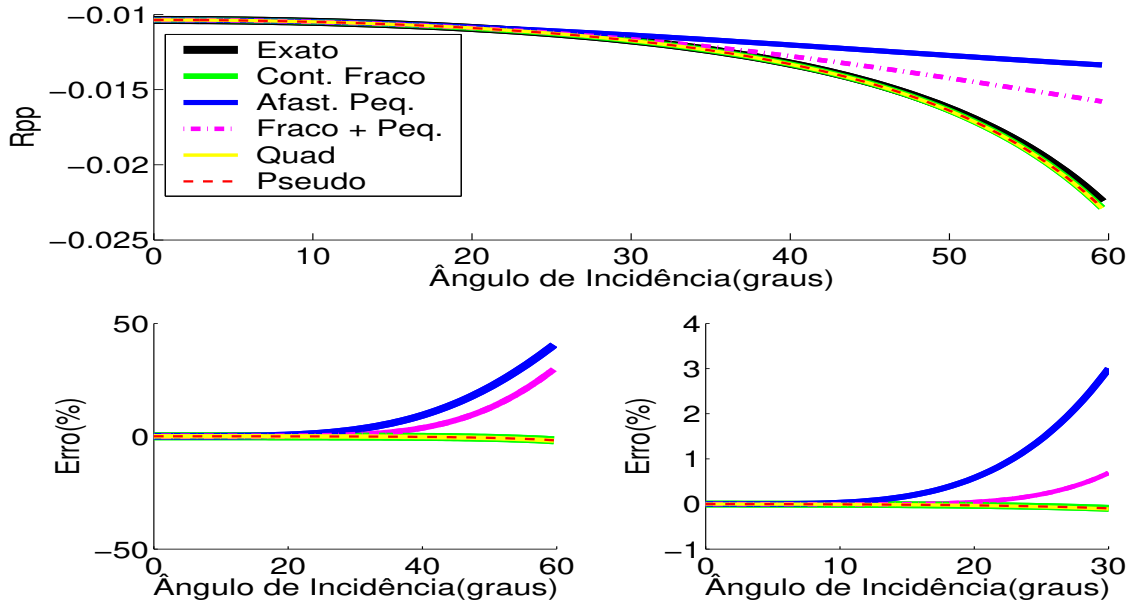


Figura 4.1: Curva exata e as aproximações do tipo Taylor para R_{PP} : Linear Contraste Fraco (Cont. Fraco), Afastamento pequeno (Afast. Peq.), Contraste Fraco e Afastamento pequeno (Fraco+Peq.), Quadrática de contraste fraco (Quad.) e Pseudo Quadrática (Pseudo); considerando o **modelo de contraste fraco** da Tabela 4.1. Os gráficos embaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

modelo. Portanto, mudanças muito drásticas nos meios envolvidos (contraste alto) e aquisições feitas com afastamento grande (o que consequentemente gera ângulos grandes) podem interferir negativamente nos resultados gerados por estas aproximações.

A limitação no afastamento, e consequentemente em θ , que supomos para definir as duas aproximações que envolvem afastamento pequeno, são facilmente identificadas quando observamos estas curvas para ângulos grandes ($\theta > 45^\circ$). Nota-se um desvio bastante considerável neste caso.

Outro fato importante é que o modelo da Figura 4.3 apresenta um ângulo crítico ($\theta \approx 45^\circ$) e através deste gráfico notamos a dificuldade das aproximações seguirem a curva exata nas proximidades deste ângulo (região crítica). Comentamos este tipo de comportamento na Seção 2.5 onde constatamos que o coeficiente de reflexão passa assumir valores complexos a partir deste ângulo. Ressaltamos que as curvas mostradas nestes gráficos representam apenas a

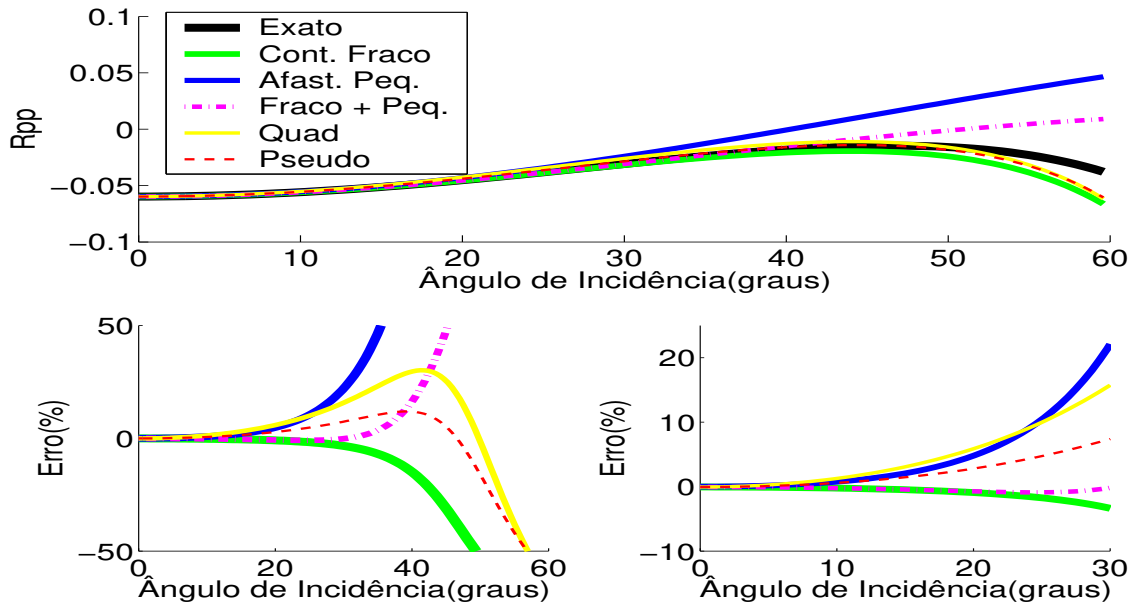


Figura 4.2: Curva exata e as aproximações do tipo Taylor: Linear Contraste Fraco (Cont. Fraco), Afastamento pequeno (Afast. Peq), Contraste Fraco e Afastamento pequeno (Fraco+Peq.), Quadrática de contraste fraco (Quad.) e Pseudo Quadrática (Pseudo); considerando o **modelo** de **contraste médio** da Tabela 4.1. Os gráficos embaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

parte real destes valores.

Note que para este tipo de modelo, o coeficiente de reflexão assume o valor zero, logo, o erro percentual acaba sendo uma ferramenta inadequada para medir a eficiência das aproximações. Isto pode ser visualizado no gráfico do erro considerando $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$, onde o comportamento das curvas acaba sendo inconclusivo por apresentarem valores tendendo ao infinito. Para que possamos analisar melhor os resultados, apresentamos na Figura 4.4 as curvas do erro absoluto destas aproximações. Como o coeficiente de reflexão, em geral, assume valores próximos de zero, um erro absoluto menor que 0.1 pode representar, por exemplo, um erro de 50%, como é o caso da aproximação quadrática para $\theta \approx 30^\circ$, portanto temos que ser cuidadosos ao analisar as curvas do erro absoluto.

Observando os gráficos dos erros percentual e absoluto verificamos que, de fato, para $\theta = 45^\circ$ todas aproximações apresentam um desvio da curva real bastante grande e que embora este

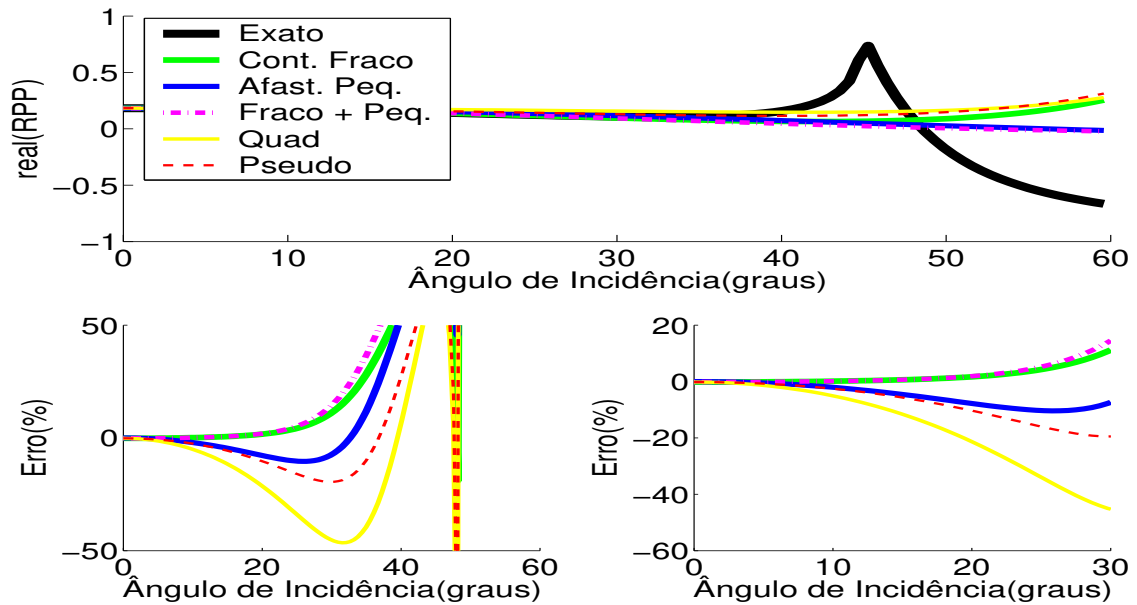


Figura 4.3: Componente real da curva exata e das aproximações do tipo Taylor: Linear Contraste Fraco (Cont. Fraco), Afastamento pequeno (Afast. Peq), Contraste Fraco e Afastamento pequeno (Fraco+Peq.), Quadrática de contraste fraco (Quad.) e Pseudo Quadrática (Pseudo); considerando o **modelo** de **contraste forte** da Tabela 4.1. Os gráficos embaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

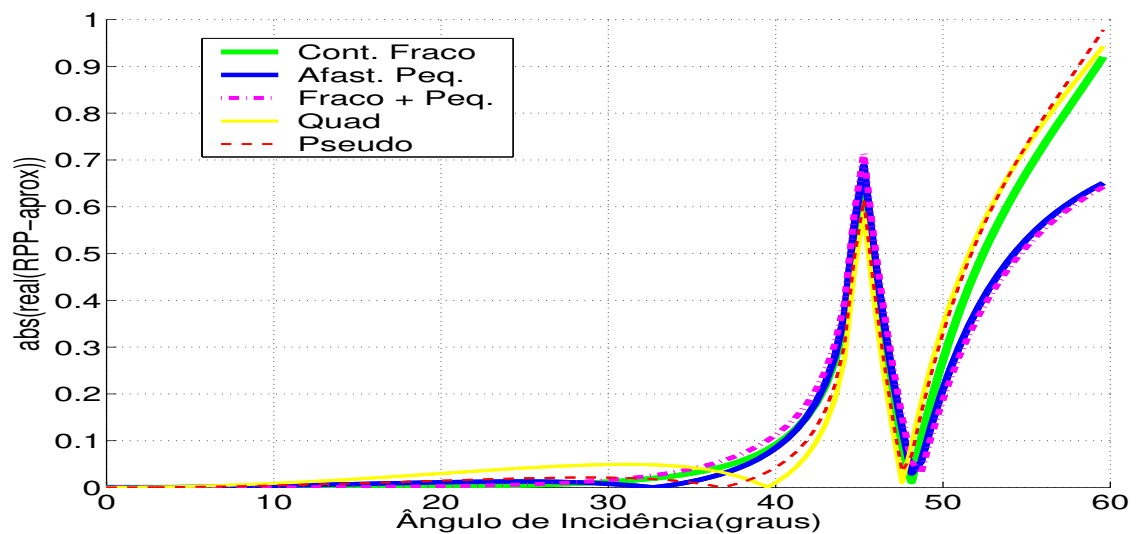


Figura 4.4: Erro absoluto das mesmas aproximações do tipo Taylor exibidas na Figura 4.3; considerando o modelo de **contraste forte**.

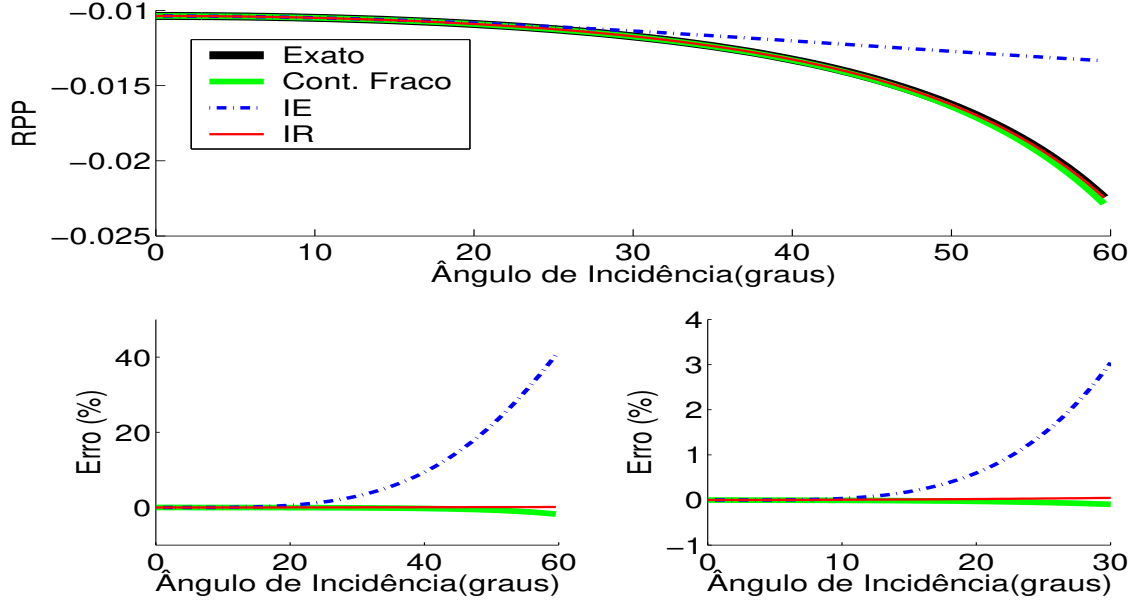


Figura 4.5: Curva exata, aproximação de contraste fraco (Cont Fraco) e as aproximações do tipo impedância: elástica (IE) e de reflexão (IR), para R_{PP} ; considerando o **modelo** de **contraste fraco** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

desvio diminua até chegar em zero (ponto onde as aproximações cortam a curva exata), a partir de $\theta \approx 48^\circ$ os mesmos voltam a aumentar e tomam valores inaceitáveis. Note que a partir de $\theta \approx 48^\circ$ as curvas não se encontram entre -50% e 50% . Portanto, concluímos que para o modelo de contraste forte estas aproximações de fato são ruins na região crítica e para ângulos maiores que o crítico.

Comparando os resultados obtidos graficamente, pelas aproximações baseadas em séries de Taylor, para os três modelos, podemos dizer que a aproximação de contraste fraco é a que melhor aproxima a curva exata do coeficiente de reflexão PP. Além disso, sua expressão é de fácil manipulação e por isso ainda hoje esta é uma das mais usadas aproximações para R_{PP} . Sendo assim, vamos utilizá-la para comparar o comportamento das aproximações do tipo impedância para R_{PP} .

As Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 ilustram a curva exata (2.20), a aproximação de contraste fraco (3.9) e as curvas das aproximações: impedância elástica (3.44) e impedância de reflexão (3.64);

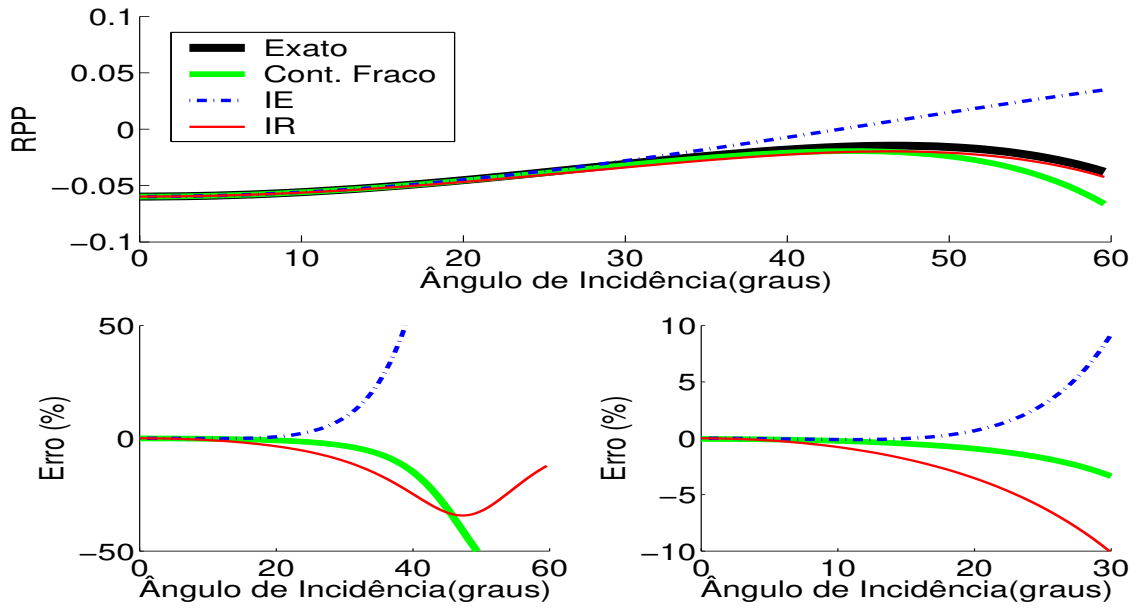


Figura 4.6: Curva exata, aproximação de contraste fraco (Cont Fraco) e as aproximações do tipo impedância: elástica (IE) e de reflexão (IR), para R_{PP} ; considerando o **modelo de contraste médio** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

considerando os modelos de contraste fraco, médio e forte, respectivamente.

Note que a aproximação de impedância elástica, que supõe θ constante, não é muito boa para ângulos grandes pois, mesmo para o modelo de contraste fraco, que em geral gera bons resultados, esta apresenta um certo distanciamento da curva exata para $\theta > 30^\circ$. De um modo geral, o erro apresentado por esta aproximação para os três modelos, considerando ângulos grandes, apresenta valores muito altos.

Para o modelo de contraste fraco as curvas da aproximação de contraste fraco e impedância de reflexão são praticamente idênticas. Já para os outros dois modelos verifica-se que a impedância de reflexão apresenta melhores resultados em relação às outras aproximações quando são considerados ângulos grandes.

O fato mais interessante observado na Figura 4.7 é que a impedância de reflexão acompanha a curva exata inclusive na região crítica. Mais uma vez lembramos que para este modelo o erro percentual apresenta valores não muito confiáveis. Analisando também a Figura 4.8 verificamos

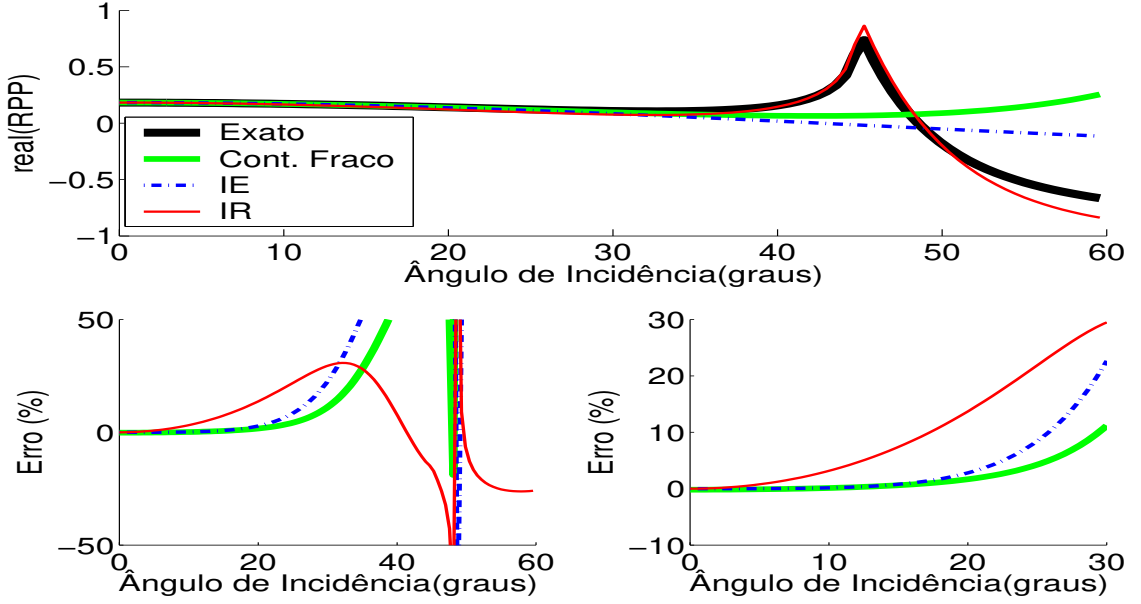


Figura 4.7: Componente real da curva exata, da aproximação de contraste fraco (Cont Fraco) e das aproximações do tipo impedância: elástica (IE) e de reflexão (IR), para R_{PP} ; considerando o **modelo de contraste forte** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

que de fato a impedância de reflexão apresenta erros bem menores na região crítica, e que embora estes erros voltem a assumir valores crescentes para $\theta > 50^\circ$, os mesmos permanecem bem menores quando comparados com os erros das outras duas aproximações. Este tipo de comportamento também pode ser visualizado no gráfico do erro percentual. Veja que para $\theta > 48^\circ$ apenas a curva do erro percentual de IR está entre -50% e 50% .

Na prática este resultado pode ser bastante interessante, visto que se temos uma aproximação que seja boa para ângulos grandes teremos uma quantidade maior de dados de campo que podem ser considerados.

Uma possível justificativa para a grande diferença entre o comportamento das duas aproximações do tipo impedância vem das hipóteses assumidas para cada uma delas. Enquanto a impedância elástica assume θ e β/α constantes a impedância de reflexão assume p constante e uma dependência funcional ente β e ρ . Assumir θ constante não tem fundamento físico enquanto que ao assumirmos p constante estamos invocando a lei de Snell. Este fato pode explicar

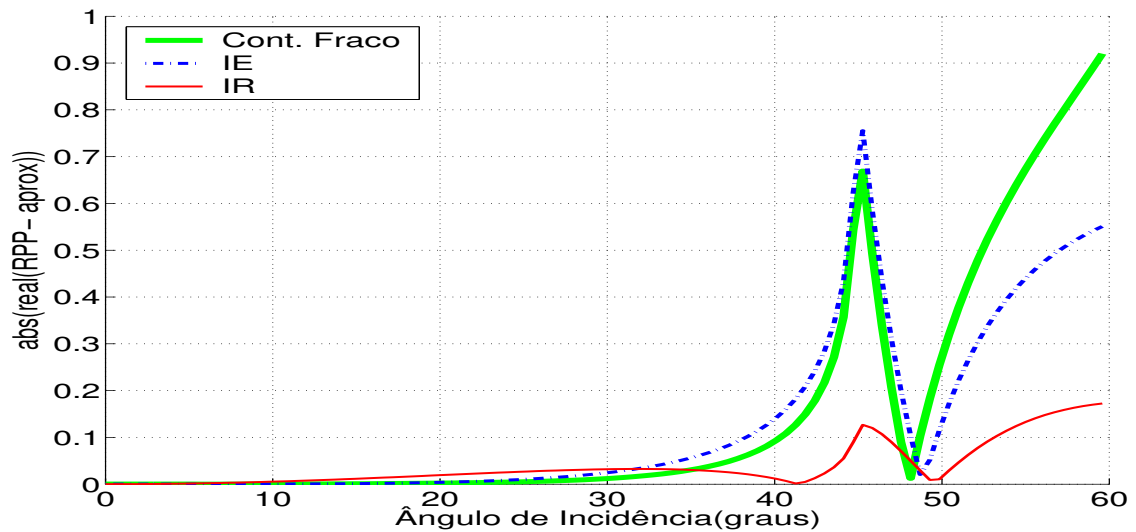


Figura 4.8: Erro absoluto das mesmas aproximações exibidas na Figura 4.7; considerando o modelo de **contraste forte**.

inclusive o bom comportamento da impedância de reflexão na região crítica.

4.2 Coeficiente de reflexão PS

Considerando ainda os mesmos modelos da Tabela 4.1 foram geradas as curvas das aproximações apresentadas no capítulo anterior para o coeficiente de reflexão PS.

As Figuras 4.9, 4.10 e 4.11 exibem os modelos de contraste fraco, médio e forte, respectivamente, sendo que para cada modelo são apresentadas as seguintes curvas,

- **Exato**: Zoeppritz (2.23),
- **Cont. Fraco**: Contraste Fraco – equação (3.13),
- **Fraco + Peq**: Contraste Fraco e Afastamento Pequeno – equação (3.22),
- **PSEI**: *PS converted waves Elastic Impedance* – equação (3.46),
- **SEI1**: *Shear Elastic Impedance* – equação (3.49),
- **SEI2**: *Shear Elastic Impedance* – equação (3.52),

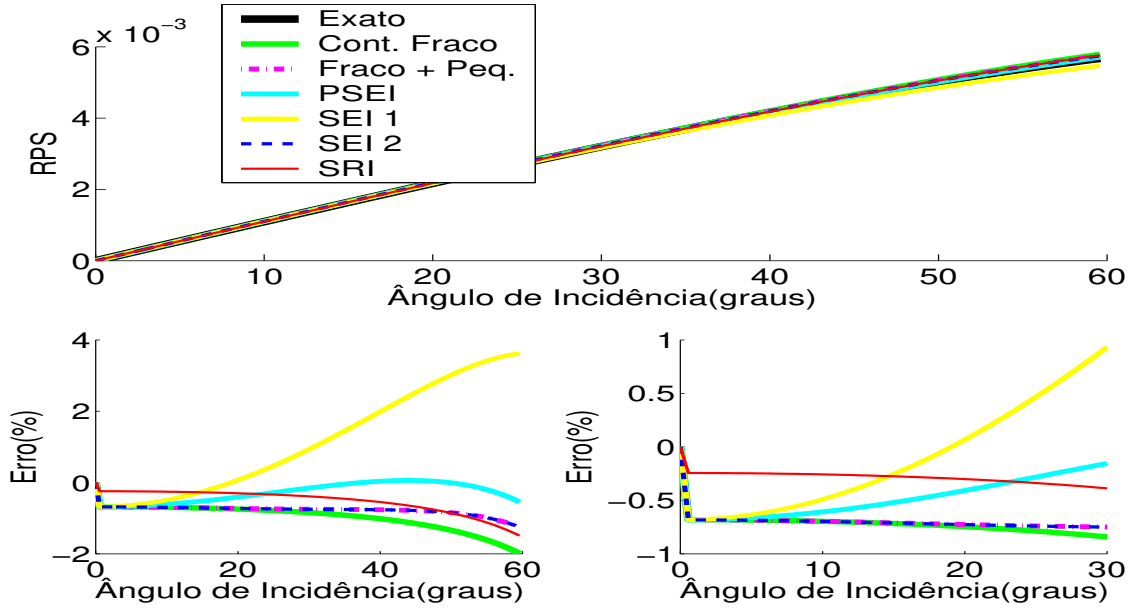


Figura 4.9: Curva exata, aproximações do tipo Taylor (Cont Fraco e Fraco+Peq) e as aproximações do tipo impedância (PSEI, SEI1, SEI2 e SRI); considerando o **modelo** de **contraste fraco** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

- **SRI**: *Shear Reflection Impedance* – equação (3.67).

Ao observarmos o modelo de contraste fraco, Figura 4.9, concluímos que, para este caso, todas as aproximações exibidas são praticamente indistinguíveis e apresentam resultados muito próximos da curva exata. Inclusive para $\theta > 30^\circ$ os erros são bastante pequenos.

Para o modelo de contraste médio, Figura 4.10, observamos um desvio das aproximações PSEI e SEI1 com relação a curva exata, mostrando que estas aproximações podem não ser muito adequadas quando temos modelos com contrastes dessa ordem de grandeza (ou de ordem maior). Nesta mesma figura, note que o comportamento das aproximações Fraco+Peq e SEI2 é bastante similar, concordando com as hipóteses iniciais que geram estas aproximações, na 4.1.1 também verificamos este comportamento.

Infelizmente a aproximação SRI, que estamos propondo, gerou resultados pouco satisfatórios. Note que para os modelos de contraste médio e forte, esta aproximação apresenta erros grandes nas proximidades de $\theta = 0$, principalmente para o modelo de contraste forte.

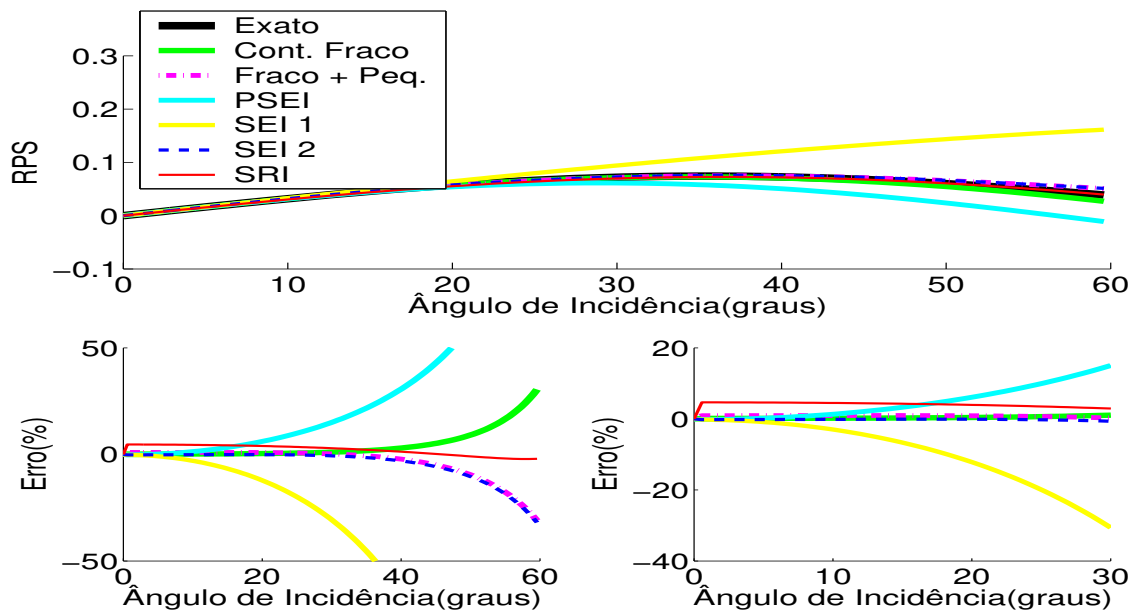


Figura 4.10: Curva exata, aproximações do tipo Taylor (Cont Fraco e Fraco+Peq) e as aproximações do tipo impedância (PSEI, SEI1, SEI2 e SRI); considerando o **modelo de contraste médio** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

Este tipo de comportamento é totalmente indesejável já que, podemos verificar graficamente que as aproximações que estudamos apresentam erros menores para ângulos pequenos, o que faz a aproximação SRI ser a pior delas neste aspecto. Apesar deste comportamento inaceitável nas proximidades da origem, há um fato importante a ser destacado: para ângulos maiores, os erros de SRI apresentam os menores valores. Isto pode ser verificado com clareza no modelo de contraste médio. Com relação ao modelo de contraste forte, ao observarmos simultaneamente os erros percentual (Figura 4.11) e absoluto (Figura 4.12), verificamos que embora a aproximação SRI apresente erros maiores que 50% para $\theta > 40^\circ$, esta apresenta os menores valores (veja o erro absoluto) na região crítica. No entanto, apesar da aproximação SRI apresentar os menores erros nesta região, estes valores ainda são muito altos, tornando-a ineficiente.

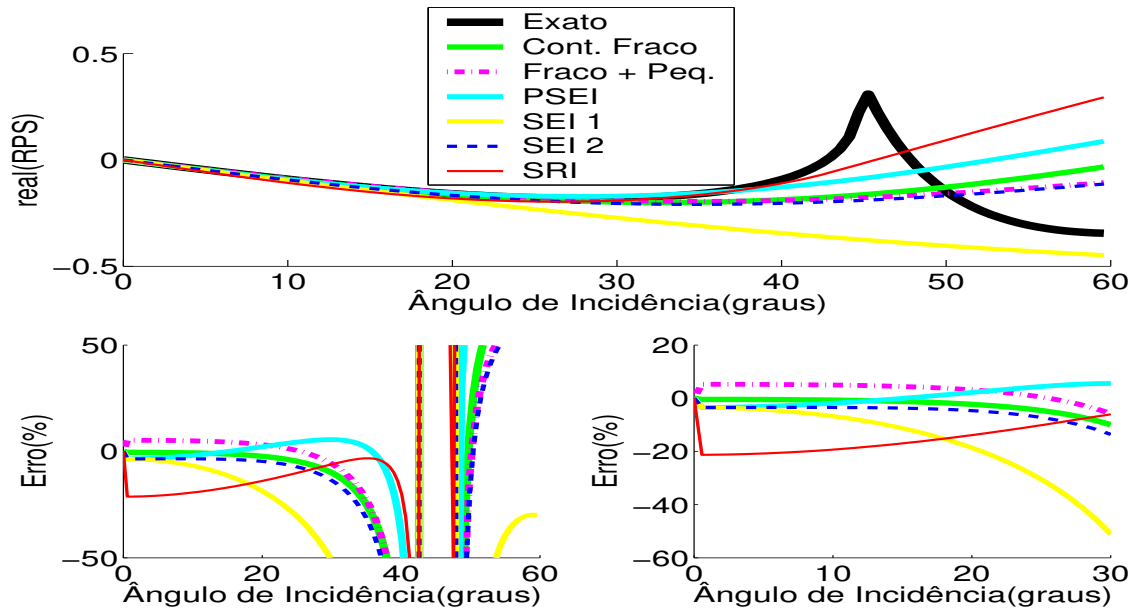


Figura 4.11: Componente real da curva exata, das aproximações do tipo Taylor (Cont Fraco e Fraco+Peq) e das aproximações do tipo impedância (PSEI, SEI1, SEI2 e SRI); considerando o **modelo de contraste forte** da Tabela 4.1. Os gráficos debaixo exibem os erros percentuais considerando $\theta \leq 60^\circ$ e $\theta \leq 30^\circ$.

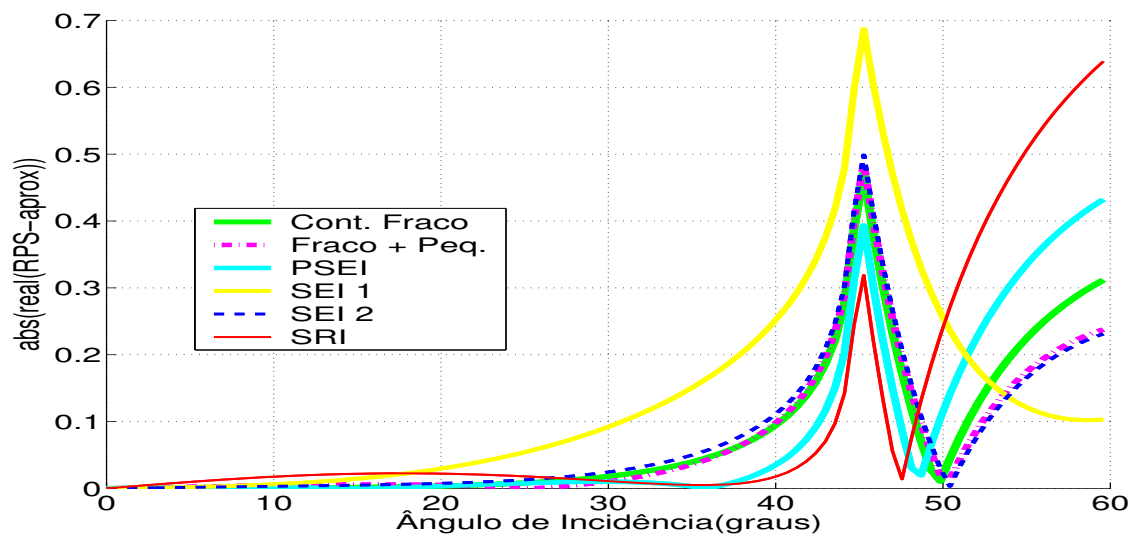


Figura 4.12: Erro absoluto das mesmas aproximações exibidas na Figura 4.11; considerando o **modelo de contraste forte**.

Capítulo 5

Inversão de dados e análise de AVO

O principal objetivo do estudo do coeficiente de reflexão se concentra na busca de indicadores de hidrocarbonetos. Infelizmente não existe ainda uma ferramenta de análise de dados sísmicos que garanta com precisão a existência, ou não, de óleo. Porém, existem algumas técnicas que permitem inferir algo a respeito. Neste capítulo discutiremos duas técnicas que têm este objetivo: inversão de dados e análise de AVO.

A inversão de dados é um processo que estima os valores dos parâmetros elásticos (ou combinações entre eles) dos meios envolvidos a partir dos valores do coeficiente de reflexão e dos ângulos de incidência já obtidos através dos dados de campo. Uma vez conhecidos os parâmetros elásticos dos meios é possível inferir sobre as características geológicas da região em questão.

A análise de AVO também é dada por um processo de inversão, no entanto neste caso não se busca valores para os parâmetros elásticos. Basicamente é feito um estudo da relação entre o intercepto e o gradiente, que definiremos a seguir. Estes parâmetros possuem comportamentos particulares quando há presença de hidrocarbonetos que podem ser identificados graficamente.

5.1 Introdução à análise de AVO

A análise de AVO, do inglês “*Amplitude Variation with Offset*”, como o próprio nome diz, é o estudo da variação do coeficiente de reflexão (amplitude) com o afastamento (ou ângulo de incidência). A importância de tal estudo reside no fato dele revelar possíveis indicadores de hidrocarbonetos.

A fundamentação da análise de AVO tradicional está na aproximação para o coeficiente de reflexão PP proposta por Shuey (1985). Esta expressão é a mesma apresentada na Subseção 3.1.3 e é definida pela equação (3.20), desconsiderando o termo de quarta ordem em p . Reescrevendo-a em função do ângulo de incidência θ temos,

$$\begin{aligned} R_{PP} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2 \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \right] \sin^2 \theta \\ &= A + B \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Os parâmetros A e B são conhecidos na literatura como **Intercepto** e **Gradiente**, respectivamente. O coeficiente A também é conhecido como coeficiente de incidência normal da onda-P, pois ele é dado pela linearização da expressão para incidência normal, equação (2.21).

Desde que o coeficiente de reflexão e os ângulos de incidência tenham sido estimados a partir dos dados sísmicos, o processo de inversão baseado na expressão de Shuey se dá através de um procedimento muito simples de ajuste de curva usando a técnica de quadrados mínimos. Ou seja, sob posse dos valores das amplitudes (coeficiente de reflexão), ajustamos a curva de $R_{PP} \times \sin^2 \theta$ a uma reta e assim estimamos os coeficientes A e B da equação (5.1). A partir destes valores é feita uma análise dos gráficos de $B \times A$. Existem alguns comportamentos característicos quando há presença de gás, por exemplo, que podem ser visualizados com esta representação. Estes são os procedimentos da análise de AVO tradicional.

5.2 Inversão usando aproximações do tipo impedância

As aproximações do tipo impedância para R_{PP} apresentadas no Capítulo 3 também podem ser usadas como ferramenta para análise de AVO. Veremos nesta seção que através delas po-

demos obter tanto os coeficientes A e B da equação (5.1), como estabelecer novos indicadores dos parâmetros elásticos.

Uma vez definidas as funções de impedância elástica EI (3.44) e impedância de reflexão RI (3.64), podemos escrever o coeficiente de reflexão PP como,

$$R_{PP} = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} \quad (5.2)$$

onde $I = EI$ ou RI .

A fim de estabelecermos um processo de inversão baseado na expressão acima, vamos definir uma nova quantidade F como sendo a razão entre as impedâncias: $F = I_2/I_1$. Consequentemente temos,

$$R_{PP} = \frac{F - 1}{F + 1} \quad (5.3)$$

e portanto

$$F = \frac{1 + R_{PP}}{1 - R_{PP}}. \quad (5.4)$$

Assim, uma vez obtidos os valores de R_{PP} , facilmente computamos F .

Um procedimento para inversão dos dados, análogo ao apresentado para a equação de Shuey, pode ser estabelecido para a aproximação do tipo impedância elástica Connolly (1999). Usando a função de impedância (EI) e considerando $\sec^2 \theta \approx 1 + \sin^2 \theta$, estabelecemos a seguinte relação ,

$$\begin{aligned} \ln F &= \ln \left[\frac{EI_2}{EI_1} \right] = \ln \left[\frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1} \right] + \ln \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\rho_2 \beta_2^2}{\rho_1 \beta_1^2} \right)^{-4K} \right] \sin^2 \theta \\ &= \Lambda_1 + \Lambda_2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Logo, através do método de quadrados mínimos linear podemos encontrar os parâmetros Λ_1 e Λ_2 que melhor ajustam $\ln F$ a $\sin^2 \theta$, procedendo de modo similar ao processo estabelecido pela equação de Shuey. Através destas relações também conseguimos recuperar os atributos A e B (5.1) da seguinte forma,

$$A = \frac{\exp \{ \Lambda_1 \} - 1}{\exp \{ \Lambda_1 \} + 1} \quad \text{e} \quad B = \frac{\exp \{ \Lambda_2 \} - 1}{\exp \{ \Lambda_2 \} + 1}. \quad (5.6)$$

Considerando agora a função de impedância de reflexão (3.64) (Santos and Tygel, 2004) e assumindo $\beta_1 \neq \beta_2$ temos,

$$\begin{aligned} F &= \frac{RI_2}{RI_1} = \frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \sin^2 \theta}} \exp\{-2[2 + \gamma]\left[\frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{\alpha_1^2}\right] \sin^2 \theta\} \\ &= \Gamma_1 \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \Gamma_2^2 \sin^2 \theta}} \exp\{\Gamma_3 \sin^2 \theta\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Note que neste caso o ajuste da curva dever ser feito através da técnica de quadrados mínimos não linear para assim obter os parâmetros Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 . O intercepto e o gradiente podem ser recuperados pelas relações,

$$A = \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1 + 1} \quad \text{e} \quad B = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2 + 1} + \frac{\Gamma_3}{2}. \quad (5.8)$$

Claramente, vemos uma vantagem dos parâmetros obtidos pela inversão através da função de impedância de reflexão, já que estes proporcionam relações mais explícitas dos contrastes elásticos que as relações obtidas pelos outros dois casos (Shuey e Impedância Elástica). Note que usando apenas os coeficientes Γ_1 e Γ_2 definimos dois indicadores para os contrastes da velocidade da onda P e da densidade,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \Gamma_2 \quad \text{e} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \quad (5.9)$$

além disso, supondo que conseguimos estimar γ da equação (3.63) obtemos,

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\right)^{1/\gamma}. \quad (5.10)$$

5.3 Inversão: testes computacionais

No trabalho de Castagna and Smith (1994) os autores descrevem 25 modelos para cada uma das formações: *shale*, *brine* e *gas sand*. Estes valores, que representam uma amostra de dados universal, foram obtidos a partir de dados de poço, e medições de laboratório e são fortemente baseados no Golfo do México e na costa do Golfo.

Nesta seção, usaremos alguns desses dados para verificarmos a eficiência dos processos de inversão baseados nas três aproximações: Shuey (5.1), Impedância Elástica (5.5) e Impedância

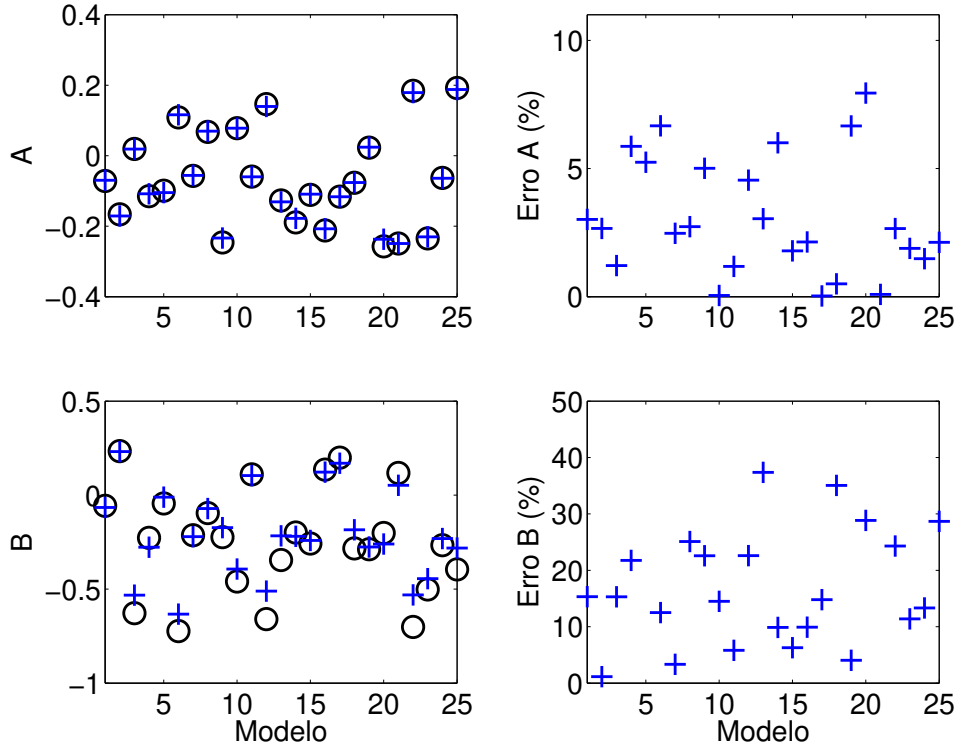


Figura 5.1: Comparação entre o intercepto (em acima) e o gradiente (embaixo), modelados (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 30° . Estes atributos provêm da aproximação de Shuey, fazendo a regressão linear de (5.1).

de Reflexão (5.7). Foram considerados 25 modelos compostos por duas camadas: *shale* sobre *gas sand*. Os gráficos foram gerados de acordo com o esquema:

- os valores de R_{PP} são calculados através da equação exata, sendo que utilizamos ângulos até 30° para as aproximações de Shuey e impedância elástica e ângulos até 70° para a impedância de reflexão;
- um ruído branco de 30% foi adicionado aos valores já computados para R_{PP} ;
- para cada modelo foram aplicados os três processos de inversão através do método de quadrados mínimos linear (Shuey e EI) e não linear (RI).

As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 exibem uma comparação entre os valores modelados (o) e invertidos (+) para os processos de inversão dados pelas aproximações de Shuey da equação (5.1), do tipo

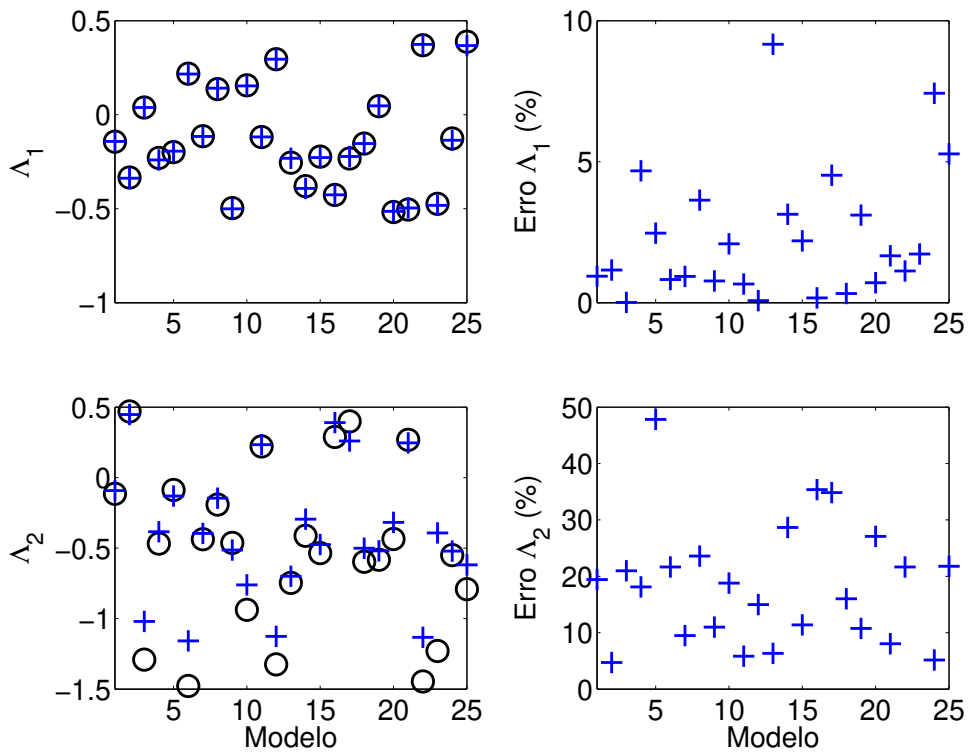


Figura 5.2: Comparação entre os parâmetros Λ_1 (em cima) e Λ_2 (embaixo) modelados (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 30° . Estes atributos provêm da aproximação de impedância elástica, fazendo a regressão linear de (5.5).

impedância elástica (5.5) e impedância de reflexão (5.7), respectivamente. Os erros percentuais para cada parâmetro invertido estão apresentados do lado direito das figuras.

Mesmo com um ruído de 30%, os valores obtidos para o intercepto (A), através da regressão linear usando a equação de Shuey, apresentam bons resultados uma vez que os erros são, em geral, menores que 5%. Já o gradiente (B) apresenta erros maiores, em geral, até 30%, como podemos observar na Figura 5.1. Na literatura existem estudos que visam estabilizar o comportamento do gradiente para se obter uma análise de AVO mais segura (Whitcombe et al., 2004).

Um comportamento análogo pode ser verificado na Figura 5.2 que mostra os parâmetros invertidos provindos da aproximação de impedância elástica. Neste caso, novamente, o coe-

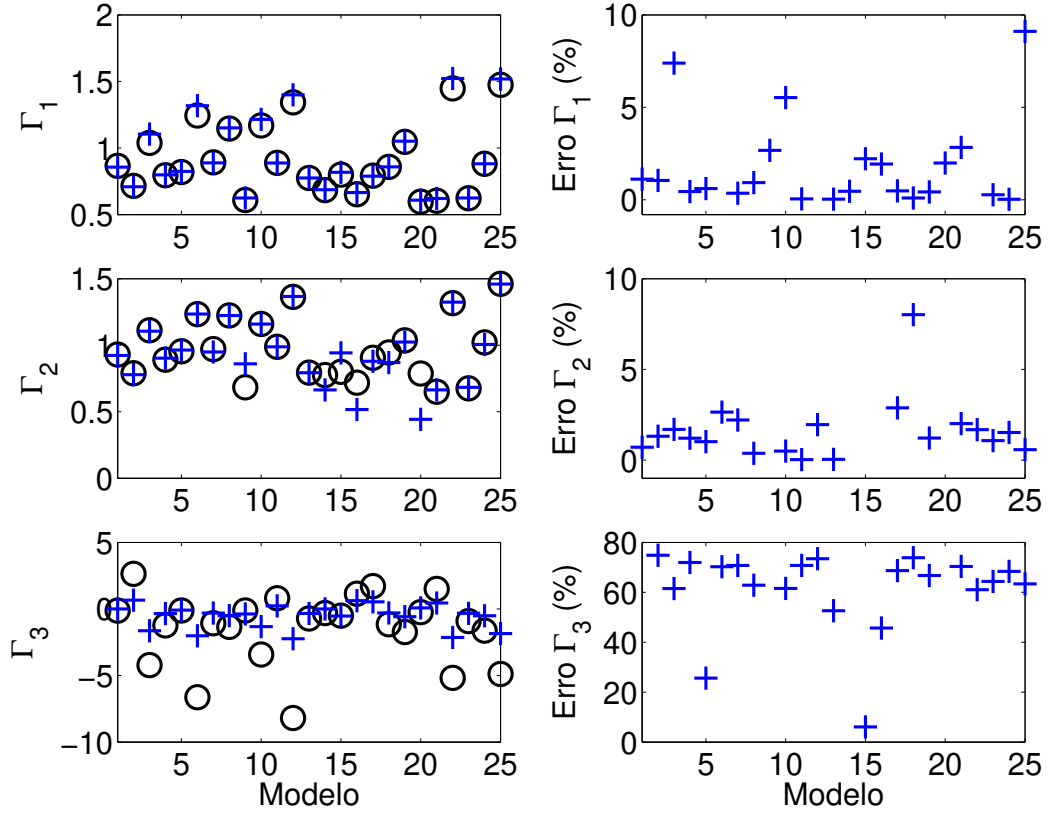


Figura 5.3: Comparação entre os parâmetros Γ_1 (em acima), Γ_2 (ao meio) e Γ_3 (embaixo) modelados (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 70° . Estes atributos provêm da aproximação de impedância de reflexão, fazendo o ajuste por quadrados mínimos não linear da equação (5.7).

ficiente linear (Λ_1) da reta ajustada apresenta erros menores quando comparados aos valores encontrados para o coeficiente angular (Λ_2).

A aproximação impedância de reflexão gerou resultados bastante satisfatórios. Lembramos que, para este caso, além do ruído de 30% estamos considerando também ângulos grandes (até 70°). Neste caso foram obtidos os três parâmetros fazendo um ajuste de quadrados mínimos não linear. Através da Figura 5.3 notamos que os dois primeiros atributos Γ_1 e Γ_2 foram recuperados com erros bastante pequenos, com valores concentrados em até 5%. Os resultados para o terceiro atributo (Γ_3) não foram tão satisfatórios, pois a faixa de erros apresentada é muito alta, tornando inviável a recuperação do mesmo.

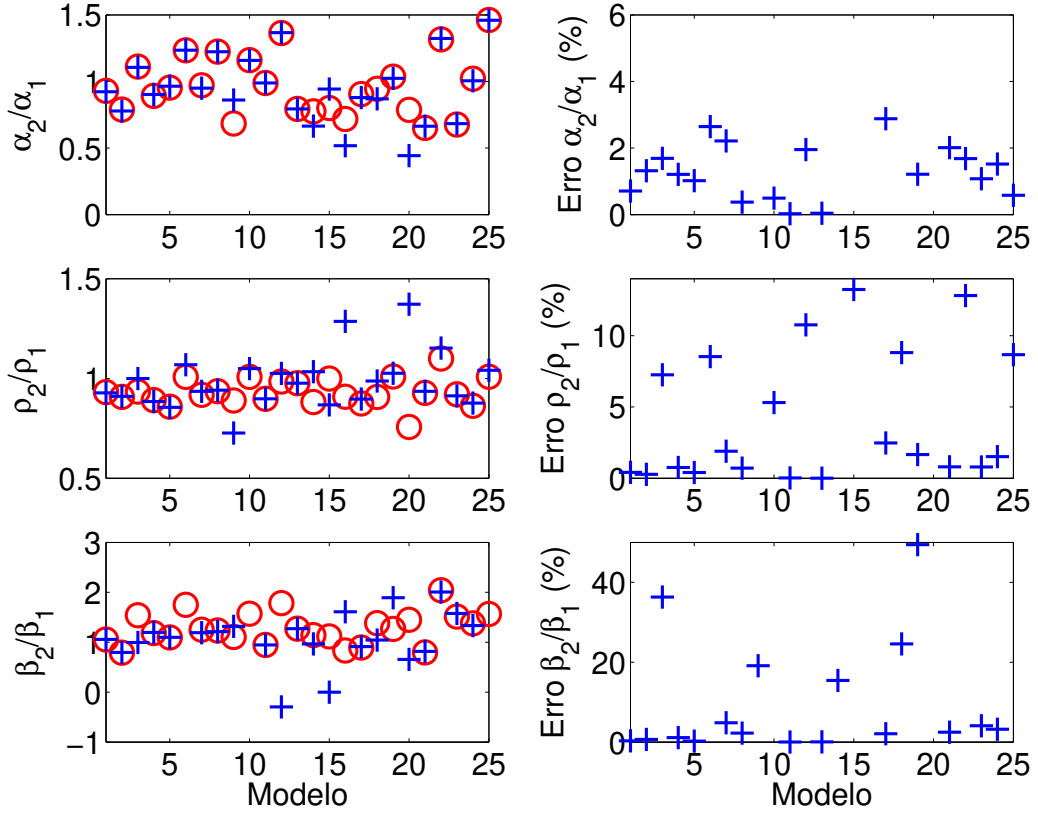


Figura 5.4: Comparação entre os contrastes α_2/α_1 (em cima), ρ_2/ρ_1 (ao meio) e β_2/β_1 (embaixo) exatos (o) e invertidos (+), para 25 modelos (shale/gas sand) considerando ângulos de incidência até 70° . A recuperação destes contrastes vem das equações (5.9) e (5.10).

De acordo com o que comentamos anteriormente, a impedância de reflexão nos permite definir indicadores dos contrastes dos parâmetros elásticos através das equações (5.9) e (5.10). Um fato interessante que devemos notar é que os dois parâmetros Γ_1 e Γ_2 , que apresentaram resultados muito bons quando invertidos, são responsáveis pela recuperação dos contrastes da onda P e da densidade.

A fim de analisarmos a validade de tais indicadores, vejamos a Figura 5.4 que mostra a comparação dos valores exatos dos contrastes α_2/α_1 , ρ_2/ρ_1 e β_2/β_1 , com os valores obtidos através dos parâmetros invertidos, considerando um ruído de 30% e os mesmos 25 modelos utilizados anteriormente. Os resultados mostrados nesta figura concordam com a Figura 5.3, uma vez que os erros para os contrastes da velocidade da onda P e da densidade são pequenos, como para

Γ_1 e Γ_2 e, por outro lado, os erros da velocidade da onda S são praticamente inaceitáveis como para Γ_3 .

Outro fato importante de se observar é que seguindo as hipóteses admitidas para cada aproximação, utilizamos ângulos pequenos para a aproximação de Shuey e impedância elástica e ângulos grandes para impedância de reflexão. Com os resultados verificados graficamente notamos uma vantagem particular da aproximação impedância de reflexão que é a eficiência para recuperar atributos mesmo quando são considerados ângulos grandes. Na prática este comportamento pode ser bastante interessante, pois assim temos mais liberdade para usarmos um número maior de dados, já que não estamos restritos a condição de afastamento pequeno.

Ressaltamos também que, a implementação computacional para recuperar estes parâmetros via quadrados mínimos não linear, é feita hoje em dia de uma forma bastante simples através de softwares matemáticos. Neste trabalho utilizamos o software Matlab 6.5 que já possui uma rotina pré implementada para executar o procedimento de quadrados mínimos não linear com apenas uma linha de comando.

5.4 Análise de AVO

A análise tradicional de AVO, como já comentamos, se resume em computar os valores do intercepto e do gradiente a partir de um ajuste linear de R_{PP} por $\sin^2 \theta$. Segundo Castagna et al. (1998), uma maneira de facilitar a interpretação destes atributos é analisando o gráfico de $B \times A$. Após algumas considerações petrofísicas como, por exemplo, supor uma relação linear entre as velocidades da onda P e S, verifica-se que os dados provindos de *brine* e *shale* seguem uma reta no plano $A \times B$ conhecida na literatura como *background trend*. Desvios desta reta podem ser uma indicativa de hidrocarbonetos ou litologias com propriedades elásticas anômalas. O desvio mais interessante do *background* resulta da substituição de *brine* no espaço poroso por hidrocarbonetos, particularmente gás, para o qual o efeito é mais pronunciado.

5.4.1 Relação entre A e B

Para definirmos uma relação entre o intercepto e o gradiente (*background trend*) é necessário fazer algumas considerações petrofísicas que sejam razoáveis quando temos um *background* consistindo de *brine* e *shale* (Castagna and Smith, 1994).

A primeira delas é conhecida como relação de Gardner (Gardner et al., 1974) dada por,

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx g \frac{\Delta\beta}{\beta}. \quad (5.11)$$

Outra hipótese razoável para este tipo de formação é supormos uma relação linear entre as velocidades das ondas P e S,

$$\alpha = m\beta + c. \quad (5.12)$$

Combinando as equações (5.1), (5.11) e (5.12) temos uma equação geral para o *background* no plano $A \times B$,

$$B = \frac{1}{1+g} \left[1 - 4 \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{2}{m} + g \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] A. \quad (5.13)$$

Gardner et al. (1974) mostraram que g é aproximadamente $1/4$ para a maioria das rochas sedimentárias. Combinando esta hipótese com as equações (5.1) e (5.12), uma segunda relação para o *background* é estabelecida,

$$B = \frac{4}{5} \left[1 - \frac{1}{(m\alpha)^2} (\alpha - c)(9\alpha - c) \right] A. \quad (5.14)$$

Como estamos interessados no estudo teórico da análise de AVO, usaremos as expressões (5.13) e (5.14), que são expressões mais gerais; em Castagna et al. (1998) há a descrição de outras relações mais restritas com hipóteses adicionais que podem ser mais interessantes na aplicação prática. Note que todas as incógnitas que aparecem no coeficiente que multiplica A , nestas expressões, devem ser estimadas para se definir o *background*. Lembre-se que na prática temos apenas os valores de A e B . Como nosso estudo é teórico, usaremos os modelos de Castagna and Smith (1994) para gerar estas curvas. Portanto conhecemos a priori todos os valores dos parâmetros elásticos, e as estimativas dos parâmetros g , m e c são facilmente geradas.

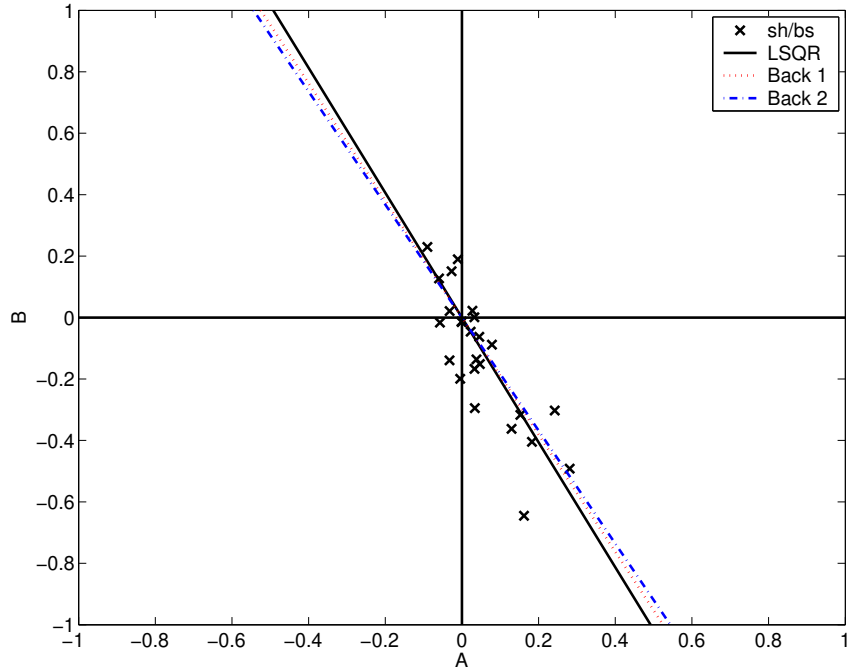


Figura 5.5: Comparação entre as funções que definem o background: a reta gerada pela regressão linear dos pontos x provindos do modelo *shale/brine sand* (LSQR), a reta definida pela equação (5.13) (Back 1) e a reta definida pela equação (5.14) (Back 2).

De acordo com o que foi comentado anteriormente, estamos interessados em estudar meios que envolvam a substituição de *brine* por *gas*. Assim, utilizaremos dois modelos para os testes computacionais, sendo que cada um será composto por dois meios: no primeiro será considerado *shale* sobre *brine sand* e no segundo *shale* sobre *gas*. Para esta simulação teórica temos controle sobre a identificação do meio correspondente aos dados e portanto podemos obter a reta para o *background* verdadeiro. Para isso basta fazer o ajuste linear de $A \times B$, considerando os dados do modelo *shale/brine sand*. Agora podemos comparar as retas (5.13) e (5.14) e verificar o quão distantes estão do *background* real. Claro que na prática esta reta do “*background* verdadeiro” não pode ser gerada, pois não sabemos quais são os respectivos meios dos dados obtidos em campo. Aliás é justamente esta informação que buscamos.

A Figura 5.5 exibe as três retas acima mencionadas: a regressão linear (LSQR) de $A \times B$ considerando *shale/brine sand*, as equações (5.13)- back 1 e (5.14)- back 2. Os valores de g, m e c foram estimados através de médias. Observamos que não há uma diferença muito

grande entre as três retas. Portanto, supor uma relação linear (5.12) entre α e β , ou considerar $g = 1/4$, são hipóteses válidas. Embora não haja tanta diferença entre as retas, a partir deste ponto, neste trabalho consideraremos apenas a reta que representa o *background* verdadeiro, pois assim faremos uma análise mais fiel aos dados.

5.4.2 Classificação de gás

Assumindo que não há nenhum efeito geológico ou químico associado, a presença de gás saturado torna os valores de A e B mais negativos do que para o caso *brine sand* saturado. Este fato é ilustrado na Figura 5.6, onde são exibidos 25 conjuntos de dados (Castagna and Smith (1994)) representando *shale/brine sand* e *shale/gas*. Os números indicam o modelo e as retas representam a substituição de *brine* por gás. Podemos verificar que em geral, o *gas sand* realmente tende a ficar abaixo e à esquerda do *brine sand*.

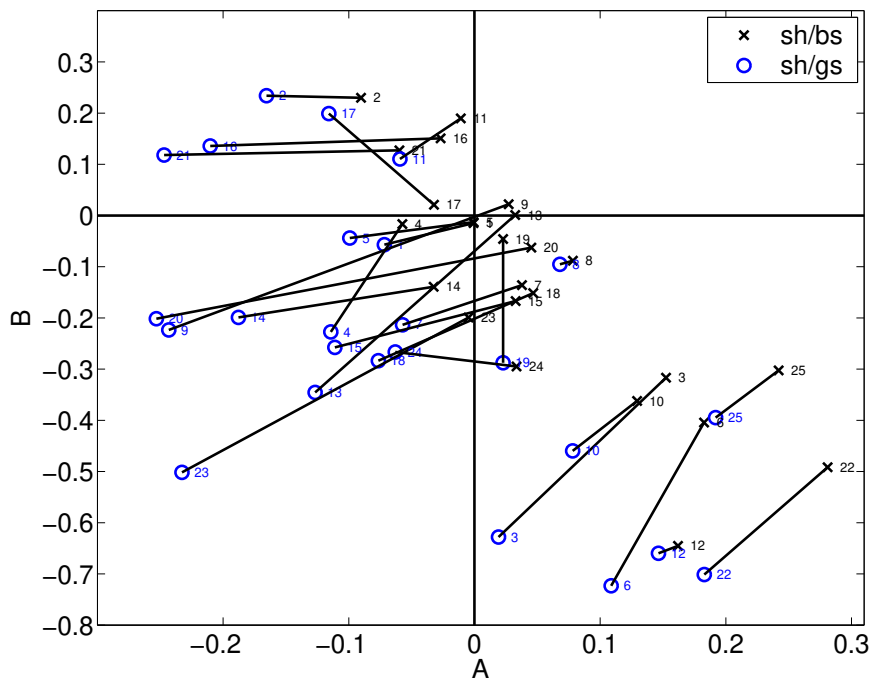


Figura 5.6: Comportamento dos atributos de AVO (intercepto e gradiente) quando *gas sand* substitui *brine sand*; considerando 25 conjuntos de *shale/brine sand* e *shale/gas sand*.

Rutherford and Williams (1989) propuseram uma classificação de reflexões provindas de *gas sand* baseada apenas no valor do coeficiente de reflexão considerando incidência normal. Lembramos que o coeficiente de reflexão normal (2.21) pode ser escrito como a razão entre o contraste e a soma da função impedância nos dois meios. Por isso a denominação dada pelos autores para as três classes propostas envolvem o termo alta (ou baixa) impedância que representa contraste grande (ou pequeno). Assim, as classes são identificadas da seguinte forma,

- Classe I : alta impedância relativa ao meio acima da interface (*shale*);
- Classe II : impedância próxima ao meio acima da interface (*shale*);
- Classe III : baixa impedância relativa ao meio acima da interface (*shale*).

Castagna et al. (1998) propuseram uma classe adicional às três já discutidas por Rutherford and Williams (1989). Neste trabalho os autores discutem o fato de se considerar, além do estudo das amplitudes já comentado, a variação dos valores do coeficiente de reflexão, para *gas sand*, em relação ao ângulo de incidência. Fazendo uma rápida análise desta variação pode-se pensar, erroneamente, que o coeficiente de reflexão apresenta valores cada vez mais negativos à medida que cresce o ângulo de incidência, já que isso de fato ocorre para modelos pertencentes às classes I e II e em alguns casos para a classe III. Castagna et al. (1998) mostraram que pode existir um caso em que o coeficiente de reflexão apresente baixa impedância (classe III) mas seus valores se tornam mais positivos com o aumento do ângulo de incidência. É justamente este comportamento anômalo que identifica a classe IV então proposta.

A Figura 5.7 identifica as três classes proposta por Rutherford and Williams (1989) e a quarta classe proposta por Castagna et al. (1998) no plano $A \times B$. Como já comentamos, formações de *brine* e *shales* tendem a seguir a curva de *background trend* também mostrada nesta Figura.

O objetivo deste trabalho se concentra em estudar as aproximações para o coeficiente de reflexão. Assim, não estamos interessados num estudo mais detalhado da análise de AVO. Vejamos agora como as aproximações apresentadas no começo do capítulo (Shuey, impedância

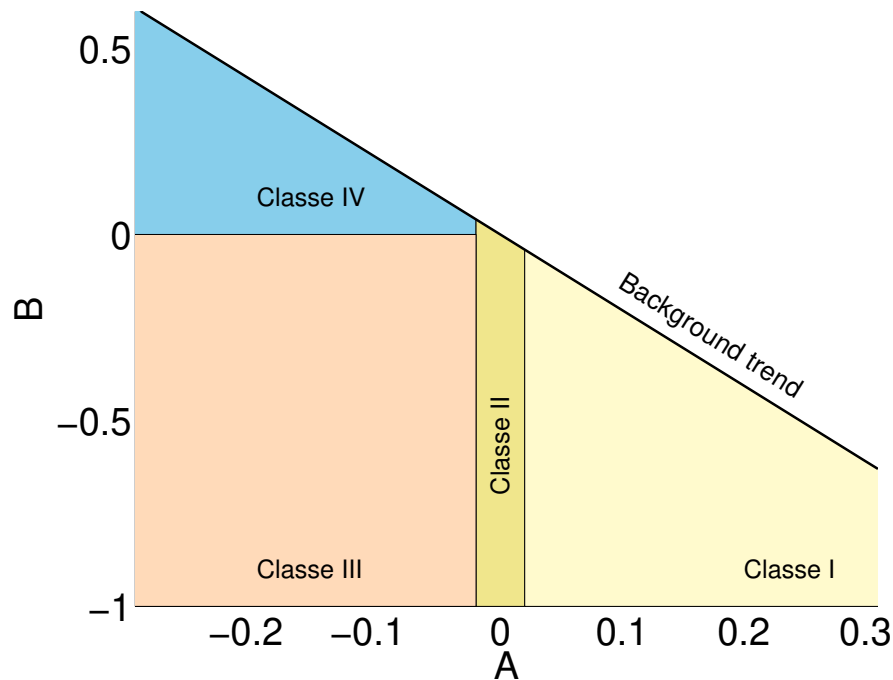


Figura 5.7: Identificação das três classes (I,II e III) de *gas sand*, propostas por Rutherford and Williams (1989), e da classe IV, proposta por Castagna et al. (1998), no plano $A \times B$.

elástica e impedância de reflexão) se comportam quando os atributos A e B , recuperados através das mesmas, são apresentados no plano $A \times B$.

Lembramos que os modelos utilizados para os testes numéricos da análise de AVO incluem dados provindos de reflexões de gás, já que estes possuem comportamentos mais evidentes quando fazemos este tipo de análise. Seria natural pensarmos em modelos que envolvam óleo, mas estes seriam de pouca utilidade para a ferramenta em questão por não possuírem um comportamento muito evidenciado neste caso.

Para computarmos os valores de A e B , foram seguidos procedimentos similares aos descritos na Subseção 5.3, ou seja, foram considerados 25 modelos (Castagna and Smith, 1994) para o caso *shale/gas sand* e *shale/brine*, foi adicionado um ruído de 30% e então aplicadas as técnicas de quadrados mínimos linear e não linear. Nesta simulação primeiro os dados foram gerados (para as três aproximações) considerando $\theta \leq 30^\circ$ e em seguida os mesmos foram recalculados considerando $\theta \leq 70^\circ$. Embora já saibamos a priori que as aproximações de Shuey e impedância elástica não são válidas para ângulos maiores que 30° , mostraremos ainda assim tais

resultados com o intuito de compará-los aos obtidos pela aproximação impedância de reflexão.

A Figura 5.8 mostra os valores do intercepto e do gradiente exatos (preto) e os valores obtidos através das três aproximações: Shuey (azul), impedância elástica (verde) e impedância de reflexão (vermelho). Os modelos *shale/brine sand* e *shale/gas sand* são identificados pelos símbolos “x” e “o”, respectivamente. O gráfico superior mostra os resultados considerando $\theta \leq 30^\circ$ e abaixo estão os resultados para $\theta \leq 70^\circ$. As quatro classes de *gas sand* também estão ilustradas seguindo o esquema da Figura 5.7. Embora o gráfico não seja muito explícito, podemos observar a “nuvem” de resultados e novamente constatar o fato de ângulos menores gerarem melhores resultados.

Através das Figuras 5.9 e 5.10 observamos a comparação entre o deslocamento dos dados de *shale/brine* por *shale/gas* verdadeiros (preto) e aqueles gerados por cada aproximação (em cores). A Figura 5.9 apresenta os atributos obtidos pelas aproximações: Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) considerando $\theta \leq 30^\circ$. A Figura 5.10 segue o mesmo esquema, porém utilizando $\theta \leq 70^\circ$. Nota-se na Figura 5.9 uma concordância bastante alta entre o deslocamento dos dados gerados pelas três aproximações e o deslocamento dos dados verdadeiros. Já para os gráficos nos quais foram considerados $\theta \leq 70^\circ$, Figura 5.10, não podemos afirmar o mesmo. Observe que, neste caso, a impedância de reflexão identifica melhor os eventos presentes na classe IV do que as outras duas aproximações.

Vejamos agora a eficiência das aproximações na identificação das classes de gás. Novamente separamos os resultados em duas Figuras: a Figura 5.11 apresenta os dados gerados sob a hipótese de $\theta \leq 30^\circ$ e a Figura 5.12 com a restrição $\theta \leq 70^\circ$.

Os resultados mostrados na Figura 5.11 são bastante satisfatórios. Todas as aproximações conseguem recuperar os valores do intercepto e do gradiente com desvios tão pequenos que permitem a identificação correta de cada classe para quase todos os modelos.

Observando a Figura 5.12 mais uma vez confirmamos a idéia de que a aproximação impedância de reflexão gera os melhores resultados para ângulos grandes. Verificamos que, em geral, esta aproximação consegue recuperar os atributos de modo satisfatório para quase todas as classes. A classe IV é um caso que deixa bastante evidente sua eficiência. É claro que a impe-

dância de reflexão também tem suas limitações. Notamos, por exemplo, que a classe I apresenta alguns modelos que não foram corretamente obtidos. Para termos uma idéia quantitativa destes resultados, na tabela 5.1 são exibidas as porcentagens de acertos na classificação de gás, de cada aproximação considerando $\theta < 30^\circ$ e $\theta < 70^\circ$. Observamos, por exemplo, que para $\theta < 30^\circ$ todas as aproximações erraram a classificação de apenas 4% dos 25 modelos considerados.

	Shuey	IE	IR
$\theta < 30^\circ$	96%	96%	96%
$\theta < 70^\circ$	80%	76%	84%

Tabela 5.1: Porcentagem de acertos, na classificação de gás, através das aproximações exibidas na Figura 5.11 e 5.12.

Sendo assim, concluimos que a identificação das classes de gás é feita com sucesso sob a restrição de ângulos pequenos para as três aproximações. Além disso, ao utilizarmos dados considerando ângulos de incidência maiores, a melhor ferramenta para recuperação do intercepto e do gradiente é a impedância de reflexão, especialmente para a classe IV. Por último, gostaríamos de ressaltar que na prática obviamente não temos apenas 25 modelos, tampouco os casos são analisados de maneira particular identificando qual classe cada um pertence. O que se faz é uma análise da tendência de uma nuvem de dados. Portanto, uma aproximação que consiga recuperar os atributos, sem precisão muito aguçada, já é suficiente. As aproximações que discutimos, usando os 25 modelos de Castagna and Smith (1994), apresentaram esta característica, naturalmente considerando as restrições já comentadas.

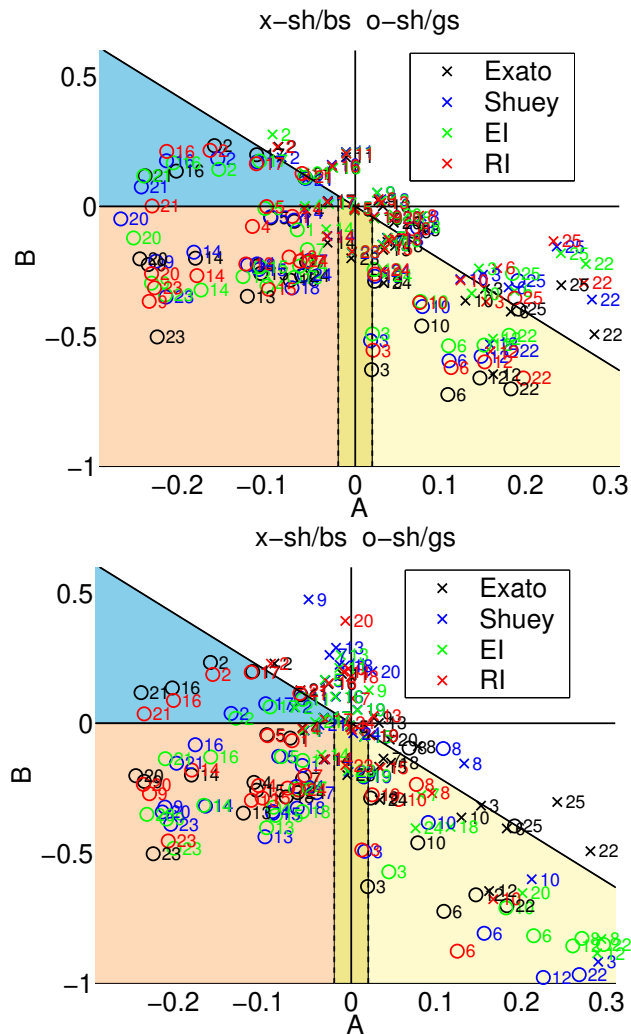


Figura 5.8: Valores exatos (preto) dos atributos A e B e aproximados: Shuey (azul), EI (verde) e RI (vermelho), considerando 25 conjuntos de *shale/brine sand* (x) e *shale/gas sand* (o), sendo que em cima temos $\theta \leq 30^\circ$ e embaixo $\theta \leq 70^\circ$. As quatro classes de *gas sand* são identificadas seguindo as cores da Figura 5.7.

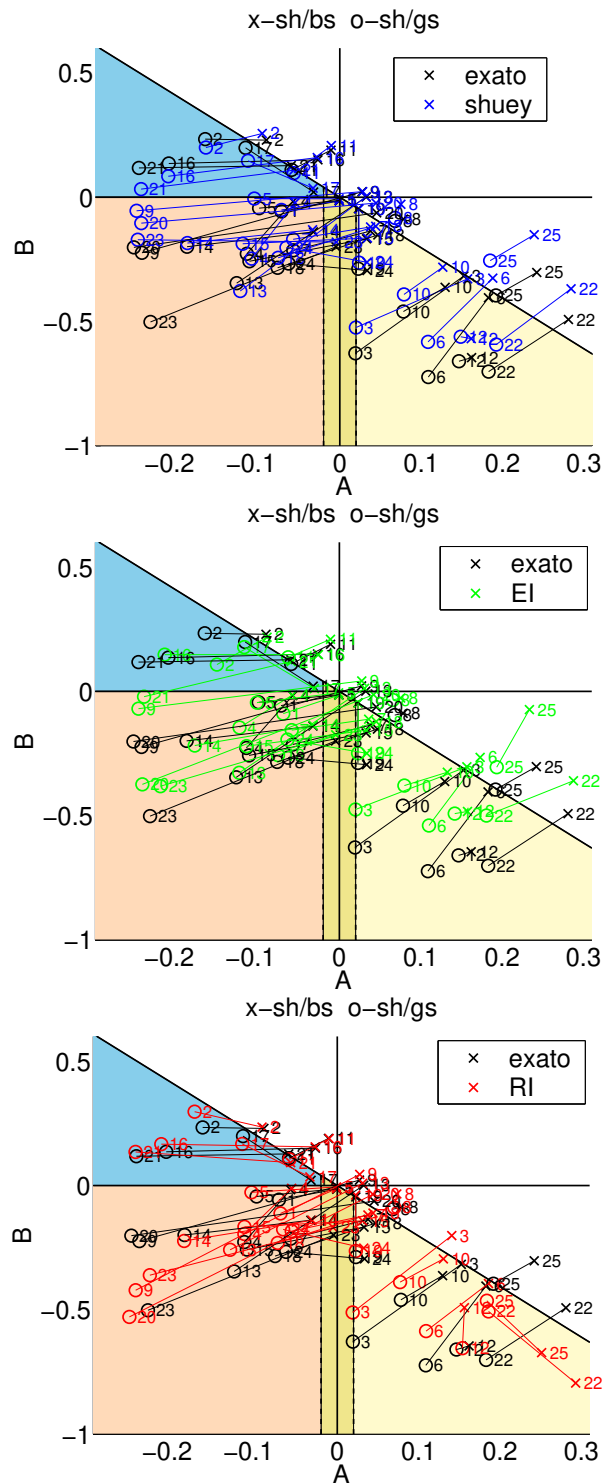


Figura 5.9: Comparação entre o deslocamento dos dados de *shale/brine sand* (x) por *shale/gas sand* (o) gerados pelas aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) e o deslocamento dos dados verdadeiros. Foram considerados ângulos de incidência de até 30° .

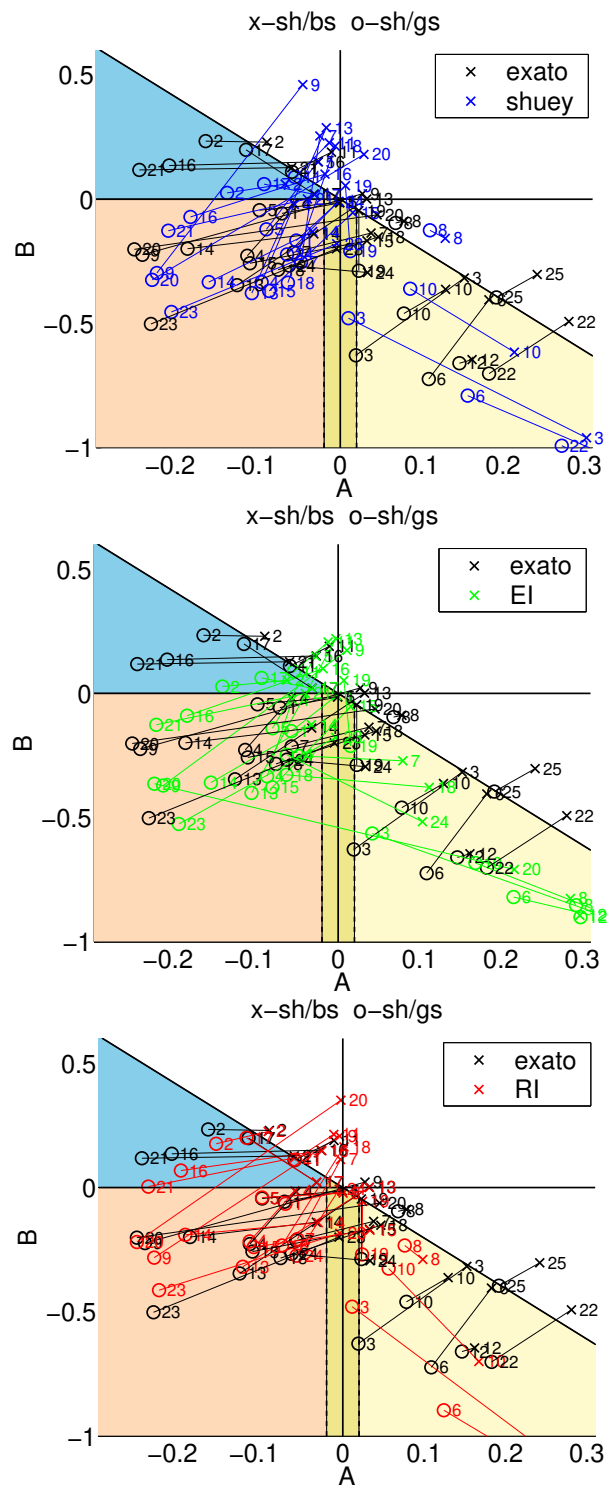


Figura 5.10: Comparação entre o deslocamento dos dados de *shale/brine sand* (x) por *shale/gas sand* (o) gerados pelas aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) e o deslocamento dos dados verdadeiros. Foram considerados ângulos de incidência de até 70° .

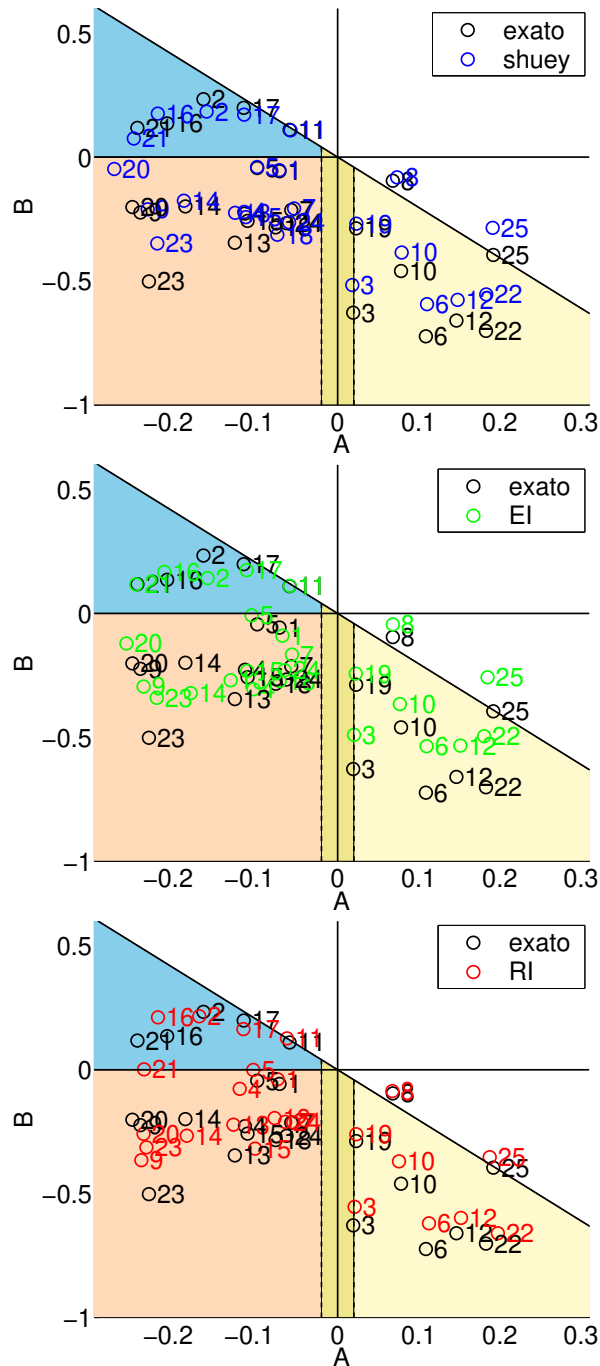


Figura 5.11: Comparação entre a classificação de *gas sand* (o) para os dados verdadeiros (preto) e os dados invertidos através das aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) considerando $\theta \leq 30^\circ$.

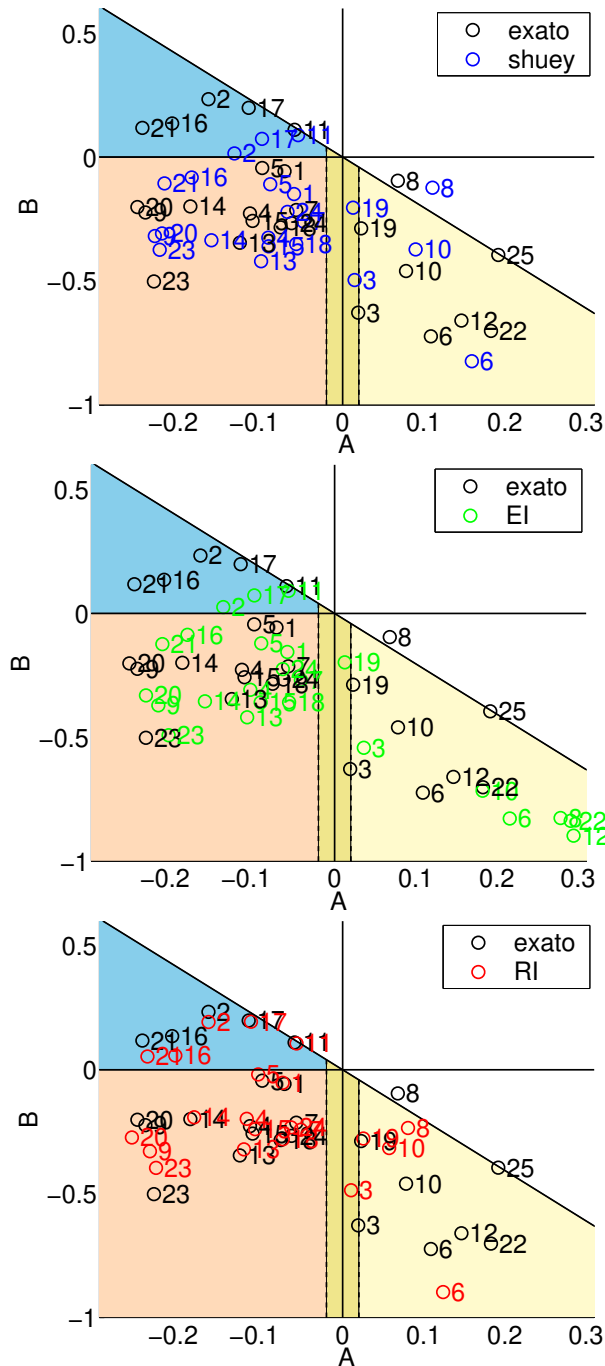


Figura 5.12: Comparação entre a classificação de *gas sand* (o) para os dados verdadeiros (preto) e os dados invertidos através das aproximações de Shuey (em cima), impedância elástica (ao meio) e impedância de reflexão (embaixo) considerando $\theta \leq 70^\circ$.

Capítulo 6

Conclusão

No presente trabalho apresentamos um estudo amplo a respeito dos coeficientes de reflexão PP e PS. Embora nosso foco tenha sido as aproximações para R_{PP} e R_{PS} , o escopo do trabalho é um pouco mais geral. Abordamos as principais idéias necessárias para o entendimento de como as amplitudes sísmicas podem contribuir na identificação de hidrocarbonetos. As discussões englobam desde a origem das expressões para os coeficientes (dedução das equações), bem como aproximações para as mesmas, até uma discussão final sobre inversão de dados e análise de AVO.

As aproximações para os coeficientes R_{PP} e R_{PS} estão divididas em duas categorias: as baseadas em série de Taylor e as do tipo impedância. Para cada aproximação descrita discutimos as hipóteses supostas em cada caso e consequentemente a eficiência das mesmas.

Verificou-se que a aproximação impedância de reflexão para R_{PP} (Santos and Tygel (2004)) gera resultados bastante encorajadores especialmente para ângulos maiores (inclusive nas regiões críticas). Motivados pelos bons resultados gerados por esta aproximação, propusemos uma nova aproximação para o coeficiente PS, denominada *Shear Reflection Impedance* - SRI, que segue os mesmos princípios. Os resultados não foram tão satisfatórios, uma vez que esta nova aproximação gerou erros grandes para ângulos de incidência pequenos. No entanto, apesar da mesma ter apresentado erros inaceitáveis também na região crítica do modelo de contraste forte, esses erros possuem os menores valores quando comparados com as outras aproximações. Na ver-

dade, para ângulos grandes, SRI foi a aproximação que apresentou os menores erros para todos os modelos. Isto nos leva a pensar que novos estudos podem ser feitos no intuito de melhorá-la (na origem e na região crítica) e buscar resultados pelo menos similares aos obtidos pela impedância de reflexão para R_{PP} . Novas relações entre os parâmetros elásticos podem ser testadas, porém mantendo o fato de p ser constante.

Na discussão apresentada sobre inversão de dados mostramos a eficiência com que as aproximações impedância elástica e impedância de reflexão, para o coeficiente PP, recuperam parâmetros elásticos (ou relações entre eles) dos meios envolvidos e atributos de AVO (intercepto A e gradiente B). Apresentamos também, indicadores para os contrastes da onda P e da densidade definidos a partir da aproximação impedância de reflexão para R_{PP} . Os teste numéricos para estes indicadores geraram resultados bastantes satisfatórios. A especulação de possíveis indicadores, provindos da aproximação SRI que propusemos, está em aberto e poderia ser efetuada em trabalhos futuros.

O trabalho é finalizado com uma breve apresentação da análise de AVO tradicional, seguida de um estudo da representação gráfica proposta por Castagna et al. (1998).

Referências Bibliográficas

- Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology, Theory and Methods: Volume 1*. W. H. Freeman and Company.
- Bortfeld, R. (1961). Approximation to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves. *Geophysical Prospecting*, 9:485–502.
- Castagna, J. P. and Smith, G. C. (1994). Comparison of avo indicators: A modeling study. *Geophysics*, 59:1849–1855.
- Castagna, J. P., Swant, H. W., and Foster, D. J. (1997). Principles of avo crossplotting. *The Leading Edge*.
- Castagna, J. P., Swant, H. W., and Foster, D. J. (1998). Framework for avo gradient and intercept interpretation. *Geophysics*, 63:948–956.
- Chen, H., Brown, R. L., and Castagna, J. P. (2005). Avo for one- and two-fracture set models. *Geophysics*, 70(2):C1–C5.
- Connolly (1999). Elastic impedance. *Leading Edge*, 18:438–452.
- Davolio, A., Grosfeld, V., and Santos, L. T. (2006). Impedance-type approximation of the pp and ps reflection coefficients and prediction of elastic parameters. *WIT Annual Report*, 9:199–208.
- Duffaut, K., Landro, M., and Rogno, H. (2000). Shear-wave elastic impedance. *Leading Edge*, 19:1222–1229.
- Elmore, W. C. and Heald, M. A. (1969). *Physics of Waves*. Dover Publications.
- Gardner, G. H., Gardner, L. W., and Gregory, A. R. (1974). Formation velocity and density-the diagnostic basis for stratigraphic traps. *Geophysics*, 39:770–780.

- Gonzalez, E. F., Mukerji, T., Mavko, G., and Michelena, R. J. (2003). Near and far offset p-tos elastic impedance for discriminating water from commercial gas. *The Leading Edge*, 22:1012–1015.
- Landro, M., Duffaut, K., and Rogno, H. (1999). Well calibration of seabed seismic data. In *69th SEG International Annual Meeting*. SEG.
- Ramos, A. C. and Castagna, J. P. (2001). Useful approximations for converted-wave avo. *Geophysics*, 66(6):1721–1734.
- Rutherford, S. R. and Williams, R. H. (1989). Amplitude-versus-offset variations in gas sands. *Geophysics*, 54(6):680–688.
- Santos, L. T. and Tygel, M. (2004). Impedance-type approximations of the P-P elastic reflection coefficient: Modeling an AVO inversion. *Geophysics*, 69:592–598.
- Shuey, R. T. (1985). A simplification of the Zoeppritz equations. *Geophysics*, 50:609–614.
- Tajland, E. (1993). Analysis of the elastic reflection matrix. *Tese de Doutorado*.
- Ursin, B. and Dahl, T. (1992). Seismic reflection amplitudes. *Geophysical Prospecting*, 40:483–512.
- Veire, H. H. and Landro, M. (2006). Simultaneous inversion of pp and ps seismic data. *Geophysics*, 71(3):R1–R10.
- Wang, Y. (1999). Approximations to the zoeppritz equations and their use in avo analysis. *Geophysics*, 64:1920–1927.
- Whitcombe, D. N., Dyce, M., Mckenzie, R. J. S., and Hoeber, H. (2004). Stabilizing the avo gradient. In *Expanded Resume, SEG*. SEG Int Exposition and 74th Annual Meeting.
- Yilmaz, O. (1987). *Seismic Data Processing*. SEG (Doherty, S.M., Ed.).
- Zoeppritz, K. (1919). On the reflection and propagation of seismic waves. In *Göttinger Nachrichten*, pages 66–84. Erdbebenwellen VIIIB.