

# **Tese de Mestrado**

## **Conjectura $FP_m$ para Grupos Metabelianos em dimensões pequenas.**

**Daniel Cariello**

ra015757@ime.unicamp.br

**Prof. Dra. Dessislava Hristova Kohloukova**

desi@ime.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Departamento de Matemática  
Caixa Postal 6065  
CEP: 13081-970; Campinas, São Paulo

**Matemática**


Agosto 2006 - Agosto 2008

Esse trabalho contou com apoio financeiro da Fapesp.

# Conjectura $FP_m$ para Grupos Metabelianos em dimensões pequenas.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Daniel Cariello** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de setembro de 2008.



Prof.(a)Dr (a). : Dessislava Hristova  
Kochloukova  
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof.(a). Dr(a). Dessislava Hristova Kochloukova;
2. Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura;
3. Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE** em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP  
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Cariello, Daniel

C191c      Conjectura FPM para grupos metabelianos em dimensões  
pequenas / Daniel Cariello -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Dessislava Hristova Kochloukova

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos metabelianos. 2. Tipo FPM. 3. Álgebra homológica. I.  
Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.  
III. Título.

Título em inglês: The Fpm conjecture for metabelian groups in small dimensions.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Metabelian groups. 2. Type Fpm. 3. Homological algebra.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira (IME-USP)

Data da defesa: 29/08/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de agosto de 2008 e  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Professores  
Doutores



---

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA



---

Prof. (a). Dr (a). ADRIANO ADREGA DE MOURA



---

Prof. (a). Dr (a). VITOR DE OLIVEIRA FERREIRA

“E a cruz ao alto diz que o que me há na alma  
E faz a febre em mim de navegar  
Só encontrará de Deus na eterna calma  
O porto sempre por achar. ”  
(*Fernando Pessoa - Padrão* )

# Agradecimentos!

Agradeço sinceramente ao seu Sergio, a dona Angela e a Raquel. Reconheço em mim um pouco de cada um de vocês. Se não fosse pela paciência que aprendi com você, pai, eu não conseguiria insistir tanto em resolver os problemas aos quais me dedico. Mãe, muito obrigado pela sua generosidade, o que você ensinou me permitiu fazer bons amigos. Aprecio muito o seu senso de humor, minha irmã. Ele sempre me faz rir da maioria das coisas que me incomodam.

Outra pessoa a quem devo muito é a Fernandinha. Apesar de serem pequenos, nunca encontrei tamanha ternura em outros olhos. Você que aguenta minhas piadas sem graça, minhas reclamações e até minha presença meio alterada, se tornou uma pessoa muito importante na minha vida. Eu não consigo lembrar de nenhum momento específico engraçado com você, porque todos os dias a gente se mata de rir.

Muito obrigado Angela, Aya, 19, Wanderson, Derivaldo, Celso, Yu, Chris, Lonardo, Nataly, Janusz. Agradeço as suas amizades. Voem Águias, Voem!

Agradeço à Unicamp e ao Imecc por me acolherem. Apesar ter aprendido matemática resolvendo problemas e ter convicção de que as aulas só me atrapalham, agradeço aqueles professores que se dedicaram ao ensino. O único motivo que me prende ao estudo da matemática não é a sua beleza, a sua certeza ou a sua lógica, mas a possibilidade de participar disso tudo. Nunca tive ambição de ser mestre, nem doutor, mas nunca consegui substituir a satisfação de encontrar a solução de um problema após ficar meses pensando no mesmo e por isso continuo estudando matemática.

Agradeço a professora Dessislava pela orientação, pelo projeto e a Fapesp por ter concedido a bolsa.

# Resumo

Esse trabalho é sobre a conjectura  $FP_m$  para grupos metabelianos, para  $m = 2, 3$ . Estudamos a conjectura e o invariante homológico  $\Sigma^0(Q, M)$ . Uma das implicações da conjectura  $FP_2$  está demonstrada no capítulo 4, para o caso do grupo metabeliano ser extensão cindida. No último capítulo damos um idéia de como estender essa demonstração para demonstrar o mesmo resultado em dimensão 3.

**Palavras-Chave:** Grupos Metabelianos, Grupos do tipo  $FP_m$ , Álgebra Homológica.

# Abstract

This work is about the  $FP_m$ -conjecture for metabelian groups, when  $m = 2, 3$ . We study the conjecture and the homological invariant  $\Sigma^0(Q, M)$ . One of the implications of the  $FP_2$ -conjecture is proved in chapter 4, when the metabelian group is a split extension. In the last chapter, we expose some ideas to extend our proof to dimension 3.

**Key-words:** Metabelian Groups, Groups of type  $FP_m$ , Homological Algebra.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Propriedades Homológicas de Grupos</b>	<b>5</b>
1.1	Grupos Livres . . . . .	5
1.2	Módulos, Complexos e Resoluções . . . . .	7
1.3	Propriedade $FP_m$ . . . . .	12
1.4	Grupos do tipo $FP_m$ . . . . .	15
1.5	Apêndice do capítulo 1. . . . .	19
<b>2</b>	<b>Grupos Metabelianos</b>	<b>20</b>
2.1	Grupos Metabelianos . . . . .	20
2.2	Anéis e Módulos Noetherianos . . . . .	21
2.3	Os invariantes $\Sigma^m(Q; M)$ . . . . .	25
2.4	Exemplo de $\Sigma^0(Q, M)$ . . . . .	29
2.5	Conjectura $FP_m$ . . . . .	31
2.6	Redução ao caso $Q \simeq \mathbb{Z}^n$ . . . . .	32
2.7	Lema Geométrico . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Uma Resolução Livre</b>	<b>35</b>
3.1	A Resolução Parcial de $\mathbb{Z}$ . . . . .	35
3.2	Definição de $\partial_1$ . . . . .	37

<i>SUMÁRIO</i>	2
3.3 Derivada de Fox . . . . .	37
3.4 A Exatidão de F em Dimensão 1. . . . .	39
<b>4 A Conjectura <math>FP_2</math> para <math>G = M \rtimes Q</math></b>	<b>41</b>
4.1 Um Corolário do Lema Geométrico . . . . .	41
4.2 Uma demonstração para 2-manso $\Rightarrow FP_2$ . . . . .	44
4.3 Apêndice do Capítulo 4 . . . . .	48
<b>5 Sobre a Conjectura <math>FP_3</math></b>	<b>51</b>
5.1 Teoria de Bieri-Renz . . . . .	52
5.2 Definição de $\varphi_d(e_a e_b)$ para um caso particular . . . . .	53

# Introdução:

Freqüentemente aparecem contribuições de topologia algébrica à álgebra. Elas ocorrem principalmente através da álgebra homológica que tem um papel fundamental na teoria de homologia para espaços topológicos, como os CW-complexos.

As ferramentas fundamentais da álgebra homológica são os complexos, as resoluções de módulos, seqüências longa de homologia. Essa última é a ferramenta básica para o cálculo de homologia.

Através das resoluções do  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial  $\mathbb{Z}$  foi possível estender a teoria de homologia para um grupo  $G$ , mas para a definição não depender de uma resolução em particular foi importante considerar apenas resoluções projetivas.

A existência de resoluções projetivas parciais (finitas) para módulos se mostrou uma propriedade importante para caracterizá-los. Se um módulo  $M$  possui resolução projetiva de comprimento  $m$ , constituída de módulos finitamente gerados então dizemos que  $M$  tem tipo  $FP_m$ . Essa propriedade  $FP_m$  se estende a grupos, como será visto na seção 1.4.

A propriedade  $FP_m$  foi definida primeiro por R. Bieri e B. Eckmann na década de 70. Ela é uma versão homológica de uma propriedade homotópica anteriormente definida por C. Wall.

A conjectura  $FP_m$  sugere uma relação entre a propriedade  $FP_m$  para grupos metabelianos finitamente gerados, que são extensões de dois grupos abelianos, com o invariante homológico  $\Sigma^0$  definido na seção 2.3. O interessante sobre a conjectura é que o tipo de extensão não é importante. Portanto a conjectura sugere que a propriedade  $FP_m$  para um grupo  $G$ , tal que existe uma seqüência exata

$$1 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

com  $M$  e  $Q$  abelianos e  $G$  finitamente gerado, depende somente da estrutura de  $M$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo via conjugação por  $Q$ .

Esta dissertação de mestrado é um estudo da conjectura  $FP_m$  para grupos metabelianos

finitamente gerados, com enfoque na conjectura  $FP_2$  para extensões cindidas. A conjectura  $FP_2$  foi provada em [2] embora a conjectura  $FP_m$  foi sugerida apenas em [7]. Posteriormente alguns casos da conjectura foram provados. Por exemplo em [1], a conjectura  $FP_m$  foi demonstrada para um grupo  $G$  metabeliano de posto de Prüfer finito. Dizemos que um grupo tem posto de Prüfer finito se existe um número natural  $d$  tal que cada subgrupo finitamente gerado de  $G$  pode ser gerado com  $d$  geradores. No artigo [11] foi demonstrado para um grupo  $G$ , como o da sequência exata da página anterior, que se a extensão for cindida ou se existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $nM = 0$  então metade da conjectura vale:  $G$  tem tipo  $FP_m$  então  $M$  é  $m$ -manso (Ver página 32). Ainda mais se existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $nM = 0$  e a dimensão de Krull de  $M$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo é 1, então a outra direção da conjectura também vale:  $M$  é  $m$ -manso então  $G$  tem tipo  $FP_m$ .

A conjectura  $FP_3$  para extensão cindida foi demonstrada por R.Bieri e J.Harlander em [3]. Eles utilizaram métodos homotópicos. No último capítulo mostramos uma idéia de como construir uma demonstração homológica da conjectura  $FP_3$ , continuando no mesmo caminho da demonstração que apresentamos para a conjectura  $FP_2$ , para o caso cindido.

A seção sobre grupos está baseada no capítulo 1 do livro [9]. A parte que diz respeito a módulos e resoluções está baseada principalmente no livro [12]. As seções que falam sobre a propriedade  $FP_m$  e os resultados referentes a ela, foram baseados no livro [8]. O lema geométrico e o resultados sobre o invariante  $\Sigma^0(Q, M)$  foram retirados do artigo [2].

No capítulo 1 se encontram as definições sobre módulos e grupos  $FP_m$ . No capítulo 2 se encontram alguns resultados sobre o invariante  $\Sigma^0$  e a definição da conjectura. Nesse capítulo também se encontra demonstrado o lema geométrico, que tem papel fundamental na demonstração da conjectura  $FP_2$ . No capítulo 3 apresentamos um complexo exato de comprimento 3, que foi utilizado no capítulo 4 para demonstrar uma das implicações da conjectura  $FP_2$ , quando o grupo metabeliano é extensão cindida. Finalmente, no quinto capítulo foram apresentadas algumas idéias de como estender essa demonstração para a conjectura  $FP_3$ .

# Capítulo 1

## Propriedades Homológicas de Grupos

### 1.1 Grupos Livres

**Definição 1.1** *Seja  $A$  um conjunto,  $G$  um grupo e  $i : A \rightarrow G$  uma função. O par  $(G, i)$  é **livre em  $A$**  se para cada grupo  $H$  e função  $f : A \rightarrow H$  existe um único homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  tal que  $f = \varphi i$ .*

**Teorema 1.1** *Para todo conjunto  $A$  existe um grupo  $F(A)$  e uma função  $i : A \rightarrow F(A)$  tal que o par  $(F(A), i)$  é livre em  $A$ .*

Demonstração: Seja  $M(A)$  o conjunto de todas as seqüências finitas  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$  de elementos de  $A$ , para  $n \geq 0$  ( $n = 0$  corresponde a seqüência vazia). Defina a multiplicação em  $M(A)$  por

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})(a_{j_1}, \dots, a_{j_m}) = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, a_{j_1}, \dots, a_{j_m}).$$

Essa multiplicação é associativa e tem como unidade a seqüência vazia denotada por 1. Portanto  $M(A)$  é um monóide.

Seja  $\bar{A}$  um conjunto em bijeção com  $A$ , tal que  $A \cap \bar{A}$  é vazio. Essa bijeção manda  $a$  em  $\bar{a}$ , denotamos  $\bar{a}$  por  $a^{-1}$ . O conjunto  $M(A \cup \bar{A})$  é chamado de palavras de  $A$ . Seja  $w$  a palavra  $a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ , onde  $\epsilon_s = \pm 1$ . Dizemos que  $n$  é comprimento da palavra e  $a_{i_r}^{\epsilon_r}$  são as letras de  $w$ .

A palavra  $w$  é dita reduzida se para  $1 \leq r \leq n-1$  ou  $i_{r+1} \neq i_r$  ou  $i_{r+1} = i_r$ , mas  $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ . Por definição a palavra vazia é reduzida.

Se  $w$  não é reduzida escolha  $r$  tal que  $a_{i_r} = a_{i_{r+1}}$  e  $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$ . Seja  $w'$  a palavra obtida de  $w$  deletando o par  $a_{i_r}^{\epsilon_r}$  e  $a_{i_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}$ . Dizemos que  $w'$  foi obtida de  $w$  por uma redução elementar. Se  $w''$  é obtida de  $w$  por uma série de reduções elementares então dizemos que  $w''$  foi obtida de  $w$  por redução ( $w''$  pode ser  $w$ ).

Dizemos que  $w$  é equivalente a  $w'$  se e somente se  $w$  é idêntica a  $w'$  ou existe uma seqüência de palavras  $w_1, \dots, w_k$  tal que  $w_1 = w$  e  $w_k = w'$  e para todo  $j < k$  ou  $w_{j+1}$  vem de  $w_j$  por uma redução elementar ou o contrário. Isso é uma relação de equivalência em  $M(A \cup \bar{A})$ , denotamos a classe de  $w$  por  $[w]$  e conjunto das classes de equivalência por  $F(A)$ .

Se  $u$  é equivalente a  $u'$  e  $w$  a  $w'$  então  $uw$  é equivalente a  $u'w'$ . Assim temos que a multiplicação  $[u][v] = [uv]$ , em  $F(A)$ , está bem definida. É possível notar que ela é associativa e tem identidade  $[1]$ . Se  $w = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ , denotamos por  $w^{-1} = a_{i_n}^{-\epsilon_n} \dots a_{i_1}^{-\epsilon_1}$ . É fácil notar que  $ww^{-1}$  é equivalente a 1. Portanto todo elemento em  $F(A)$  tem inverso provando que  $F(A)$  é grupo.

Agora seja  $G$  um grupo e  $f : A \rightarrow G$  uma função. Podemos estender  $f$  a  $M(A \cup \bar{A})$  definindo  $f(a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}) = f(a_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(a_{i_n})^{\epsilon_n}$ . É claro que se  $w'$  vem de  $w$  por um redução elementar então eles têm a mesma imagem. Portanto se  $w$  é equivalente a  $w'$  então  $f(w) = f(w')$ . Essa função induz  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  definida por  $\varphi([w]) = f(w)$ . É obvio que  $\varphi$  é homomorfismo de grupos e que  $f(x) = \varphi i(x)$ , onde  $i : A \rightarrow F(A)$  é a função  $i(a) = [a]$ . Como  $i(A)$  gera  $F(A)$  então só pode existir um homomorfismo de  $F(A)$  em  $G$  com as imagens de  $i(A)$  definidas por  $i(a) \rightarrow f(a) = \varphi(i(a))$ . Portanto  $\varphi$  é único.  $\square$

**Definição 1.2** Dizemos que um grupo  $G$  é **livre** se existir um conjunto  $A$  tal que  $F(A) \simeq G$ .

**Definição 1.3** Seja  $G$  um grupo,  $A$  um conjunto e  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  um epimorfismo. Então  $\varphi(A)$  é chamado de conjunto de geradores de  $G$ . Denotamos apenas  $G = \langle \varphi(A) \rangle$ .

Se existir  $A$  finito e  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  um epimorfismo então dizemos que  $G$  é **finitamente gerado**.

**Definição 1.4** Seja  $S$  um subconjunto de um grupo  $H$ , denotamos por  $\langle S \rangle$  o menor subgrupo de  $H$  (com respeito à inclusão) que contém  $S$ .

Denotamos  $\langle S \rangle^H$  por fecho normal de  $\langle S \rangle$  em  $H$ , o menor subgrupo normal de  $H$  que contém  $\langle S \rangle$ .

**Definição 1.5** O grupo dos comutadores  $[G, G]$  é o subgrupo de  $G$  gerado por  $\{[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}\}$  onde  $g_1, g_2 \in G$ .

**Lema 1.1** Seja  $G$  um grupo gerado por um conjunto  $A$ . Então o subgrupo dos comutadores de  $G$  é gerado por  $\{[a_i, a_j]^g \mid a_i, a_j \in A, g \in G\}$ . Onde  $[a_i, a_j] = a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}$  e  $h^g = g^{-1} h g$ .

Demonstração: Sejam  $g_1, g_2 \in G$  então  $g_1 = a_1^{\epsilon_1} \dots a_s^{\epsilon_s}$ , onde  $a_i \in A$  e  $\epsilon_i = \pm 1$ . Defina  $g_1 = a_1^{\epsilon_1} g'_1$ . Obtemos

$$\begin{aligned} [g_1, g_2] &= g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = a_1^{\epsilon_1} g'_1 g_2 g_1'^{-1} a_1^{-\epsilon_1} g_2^{-1} = \\ &= (a_1^{\epsilon_1} g'_1 g_2 g_1'^{-1} g_2^{-1} a_1^{-\epsilon_1}) a_1^{\epsilon_1} g_2 a_1^{-\epsilon_1} g_2^{-1} = [g'_1, g_2] a_1^{\epsilon_1} [a_1^{\epsilon_1}, g_2]. \end{aligned}$$

Por indução no número de elementos de  $A$  que compõem  $g_1$  temos que  $[g'_1, g_2]$  é produto de elementos do tipo  $\{[a_j^{\epsilon_j}, g_2]^g \mid 1 \leq j \leq s, g \in G\}$ .

Agora

$$[a_j^{\epsilon_j}, g_2] = a_j^{\epsilon_j} g_2 a_j^{-\epsilon_j} g_2^{-1} = [g_2, a_j^{-\epsilon_j}] a_j^{-\epsilon_j}$$

Pelo mesmo raciocínio  $[g_2, a_j^{-\epsilon_j}]$  é produto de  $[b_i^{\rho_i}, a_j^{-\epsilon_j}]^g$ ,  $1 \leq i \leq \alpha$ , onde  $g_2 = b_1^{\rho_1} \dots b_\alpha^{\rho_\alpha}$ ,  $b_i \in A$  e  $\rho_i = \pm 1$ .

Com isso obtemos que  $[G, G] = \langle \{[a_i^{\epsilon_i}, a_j^{\epsilon_j}]^g \mid a_i, a_j \in A, \epsilon_i = \pm 1\} \rangle$ .

Mas note que

$$[a_i^{-1}, a_j^{-1}] = [a_i, a_j]^{a_j a_i}, [a_i^{-1}, a_j] = [a_j, a_i]^{a_i}, [a_j, a_i^{-1}] = [a_i, a_j]^{a_i}.$$

Isso prova que  $[G, G] = \langle \{[a_i, a_j]^g \mid a_i, a_j \in A, g \in G\} \rangle$ .  $\square$

**Definição 1.6** Seja  $A$  é um conjunto finito e  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  um epimorfismo. Se o Núcleo de  $\varphi = \langle S \rangle^{F(A)}$ , com  $S$  finito, dizemos  $G$  é **finitamente apresentável**.

## 1.2 Módulos, Complexos e Resoluções

**Definição 1.7** Se  $R$  é um anel associativo com unidade então um  $R$ -módulo à direita  $M$  é um grupo abeliano aditivo para o qual existe uma função  $M \times R \rightarrow M$ , denotada por  $(m, r) = mr$ , que satisfaz

1.  $(m + m')r = mr + m'r;$
2.  $m(r + r') = mr + mr';$
3.  $m(rr') = (mr)r';$
4.  $m1 = m;$

onde  $m, m' \in M$  e  $1, r, r' \in R$ .

Uma função  $f : M \rightarrow N$  entre  $R$ -módulos à direita  $M, N$  é um homomorfismo ou um mapa se  $f(m + m') = f(m) + f(m')$  e  $f(mr) = f(m)r$ .

Observação: As definições apresentadas a seguir consideram sempre os módulos como módulos à direita, em geral isso não é importante. Elas podem ser definidas com módulos à esquerda.

**Definição 1.8** *Sejam  $P', P, P''$   $R$ -módulos à direita e*

$$P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} P''$$

*mapas entre  $R$ -módulos. Dizemos que o par de mapas  $f, g$  é exato em  $P$  se a imagem de  $f$  é igual ao núcleo de  $g$ . A seqüência de mapas (pode ser infinita)*

$$\dots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \rightarrow \dots$$

*é exata em dimensão  $n$  se o par  $f_n, f_{n+1}$  é exato. Dizemos que a seqüência é exata se ela for exata em qualquer dimensão.*

*Se a seqüência não for exata, mas a imagem de  $f_{n+1}$  estiver contida no núcleo de  $f_n$  para todo  $n$ , dizemos que essa seqüência é um complexo de  $R$ -módulos.*

**Definição 1.9** *Seja  $\{A_j \mid j \in J\}$  uma família de  $R$ -módulos à direita. Dizemos que o produto direto  $\prod A_j$  dos  $A_j$  é o módulo formado pelo produto cartesiano dos  $A_j$ , com as operações*

$$\begin{aligned} (a_j) + (b_j) &= (a_j + b_j), \\ (a_j)r &= (a_jr). \end{aligned}$$

**Definição 1.10** *Dizemos que a soma direta  $\bigoplus_j A_j$  dos  $A_j$  é o submódulo de  $\prod A_j$  que consiste de todos os  $(a_j)$  que possuem um número finito de coordenadas não nulas.*



**Teorema 1.2** *Sejam  $A$  e  $\{A_j \mid j \in J\}$   $R$ -módulos à direita. Então  $A \simeq \bigoplus_j A_j$  se e somente se existem mapas  $\lambda_j : A_j \rightarrow A$  tais que dado um  $R$ -módulo  $X$  e qualquer família de mapas  $f_j : A_j \rightarrow X$  existe um único mapa  $\varphi : A \rightarrow X$  tal que  $\varphi\lambda_j = f_j$  para todo  $j \in J$ .*

Demonstração: Se  $A = \bigoplus_j A_j$  então sejam  $p_j : A \rightarrow A_j$  as projeções canônicas e  $\lambda_j : A_j \rightarrow A$  as inclusões canônicas. Defina  $\varphi : A \rightarrow X$  por  $\varphi(a) = \sum f_j p_j a$ , como só existe um número finito de coordenadas não nulas de  $a$ , essa fórmula está bem definida. Agora

$$\varphi\lambda_j a_j = \sum_k f_k p_k \lambda_j a_j = f_j a_j.$$

Se existir  $\psi : A \rightarrow X$  que também satisfaz  $\psi\lambda_j = f_j$ , para todo  $j$ , então  $\psi(a) = \sum \psi\lambda_j p_j a = \sum f_j p_j a = \varphi a$ . Portanto  $\varphi$  é único.

Reciprocamente, suponha que exista  $\lambda_j : A_j \rightarrow A$  para  $(j \in J)$  e que para qualquer  $R$ -módulo  $X$  e família de mapas  $f_j : A_j \rightarrow X$  exista um único  $\varphi : A \rightarrow X$  tal que  $\varphi\lambda_j = f_j$ . Então considere  $X = \bigoplus_j A_j$  e as inclusões  $f_j : A_j \rightarrow \bigoplus_j A_j$ . Portanto existe um  $\varphi : A \rightarrow \bigoplus_j A_j$  tal que  $\varphi\lambda_j = f_j$ .

$$\begin{array}{ccc} & A_j & \\ \lambda_j \swarrow & & \searrow f_j \\ A & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Sabemos que a propriedade do parágrafo anterior também vale para  $\bigoplus_j A_j$  no lugar do  $A$ ,  $f_j$  no lugar de  $\lambda_j$  e  $A$  no lugar de  $X$ . Portanto para a família  $\lambda_j : A_j \rightarrow A$  existe  $\psi : \bigoplus_j A_j \rightarrow A$  tal que  $\psi f_j = \lambda_j$ .

$$\begin{array}{ccc} & A_j & \\ \lambda_j \swarrow & & \searrow f_j \\ A & \xleftarrow{\psi} & \bigoplus_j A_j \end{array}$$

Então temos que  $\psi\varphi\lambda_j = \lambda_j$  para cada  $j \in J$ , pela unicidade  $\psi\varphi : A \rightarrow A$  é único que satisfaz isso, mas a identidade também satisfaz. Concluimos que  $\psi\varphi = id_A$ . De maneira análoga prova-se que  $\varphi\psi = id_{\bigoplus_j A_j}$ .  $\square$

**Definição 1.11** *Dizemos que um  $R$ -módulo à direita  $P$  é livre se for soma direta de cópias de  $R$ . Se  $P = \bigoplus_{i \in I} a_i R$  tal que  $a_i R \simeq R$  então chamamos o conjunto  $\{a_i \mid i \in I\}$  de **base de  $P$** .*

**Definição 1.12** Um  $R$ -módulo  $M$  é dito **finitamente gerado** se existe  $n > 0$  e um mapa sobrejetor  $R^n \rightarrow M$ .

**Teorema 1.3** Seja  $X = \{a_i \mid i \in I\}$  uma base do  $R$ -módulo livre  $A$ . Dado qualquer  $R$ -módulo  $B$  e uma função  $f : X \rightarrow B$ , existe um único mapa  $\tilde{f} : A \rightarrow B$  que estende  $f$ .

Demonstração: Para um  $i \in I$  defina  $f_i : a_i R \rightarrow B$  por  $f_i(a_i r) = f_i(a_i)r$ . Como  $A = \bigoplus_i a_i R$ , pelo teorema 1.2, existe um único  $\tilde{f} : A \rightarrow B$  com  $\tilde{f}a_i = f_i a_i = f a_i$ .  $\square$

**Teorema 1.4** Qualquer módulo  $M$  é quociente de um módulo livre.

Demonstração: Seja  $S$  o conjunto dos elementos do módulo  $M$  e seja  $A$  o módulo livre com base  $S$ . Defina  $f : S \rightarrow M$  por  $f(m) = m$ . Pelo teorema 1.3, existe um mapa  $\tilde{f} : A \rightarrow M$  que estende  $f$ . O mapa  $\tilde{f}$  é sobrejetor pois  $f$  é sobrejetor.  $\square$

**Teorema 1.5** Sejam  $B, C$   $R$ -módulos e  $F$  um  $R$ -módulo livre. Sejam  $\alpha : F \rightarrow C$ ,  $\beta : B \rightarrow C$  mapas entre  $R$ -módulos. Então se  $\beta$  é sobrejetor existe um mapa  $\gamma : F \rightarrow B$  tal que  $\beta\gamma = \alpha$ .

Demonstração: Seja  $X = \{x_i \mid i \in I\}$  uma base de  $F$ . Como  $\beta$  é sobrejetor, para cada  $\alpha(x_i)$  existe  $b_i$  tal que  $\alpha(x_i) = \beta(b_i)$ . Seja  $\varphi : X \rightarrow B$  tal que  $\varphi(x_i) = b_i$ , para todo  $i \in I$ . Pelo teorema 1.3 existe um mapa  $\gamma : F \rightarrow B$  com  $\gamma(x_i) = \varphi(x_i)$ , para todo  $i$ . Para perceber que  $\alpha = \beta\gamma$ , é suficiente notar isso na base  $X$ , mas  $\beta\gamma(x_i) = \beta\varphi(x_i) = \beta(b_i) = \alpha(x_i)$ .  $\square$

**Definição 1.13** Dizemos que um  $R$ -módulo à direita  $P$  é projetivo, se para quaisquer mapas entre  $R$ -módulos,  $B \xrightarrow{\beta} C$  sobrejetor e  $P \xrightarrow{\alpha} C$ , existir o homomorfismo  $P \xrightarrow{\gamma} B$  tal que  $\beta\gamma = \alpha$ .

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \gamma & \downarrow \alpha & \\ B & \xrightarrow{\beta} C & \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Exemplo:** Todo módulo livre é projetivo, pelo teorema 1.5.

**Teorema 1.6** Se  $P$  é projetivo e  $\beta : B \rightarrow P$  é um epimorfismo então  $B = \text{Ker}(\beta) \oplus P'$ , com  $P' \simeq P$ .

Demonstração: Considere a  $id_P : P \rightarrow P$ . Como  $P$  é projetivo existe  $\gamma : P \rightarrow B$  tal que  $\beta\gamma = id_P$ . Então  $\gamma$  é injetor, portanto  $P' = Im(\gamma) \simeq P$ . Agora para  $b \in B$ ,

$$b = b - \gamma\beta b + \gamma\beta b.$$

Mas  $b - \gamma\beta b \in Ker(\beta)$  e  $\gamma\beta b \in Im(\gamma)$ .

Para provar que  $B \simeq Ker(\beta) \oplus P'$  é suficiente provar que  $0 = P' \cap Ker(\beta)$ . Se  $w \in Ker(\beta) \cap P'$  então  $w = \gamma w'$ , mas  $0 = \beta w = \beta\gamma w' = w'$ . Portanto  $w = 0$ .  $\square$

**Corolário 1.1** *Seja  $0 \rightarrow K' \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow 0$  uma seqüência exata com  $P$  projetivo então  $Q \simeq P \oplus K'$ .*

Demonstração.  $K' = Ker(Q \rightarrow P)$ . Agora use o teorema 1.6.  $\square$

**Teorema 1.7** *Um módulo  $P$  é projetivo se e somente se existe um módulo  $Q$  tal que  $P \oplus Q = F$  é livre.*

Demonstração: Pelo teorema 1.4, existe um módulo livre  $F$  e um epimorfismo  $p : F \rightarrow P$ . Se  $P$  é projetivo então pelo teorema 1.6,  $F = Ker(p) \oplus P'$ , com  $P' \simeq P$ . Seja  $Q = Ker(p)$ .

Reciprocamente, seja  $F = P \oplus Q$  com  $F$  livre,  $i : P \rightarrow F$  a inclusão e  $p : F \rightarrow P$  a projeção. Note que  $pi = id_P$ .

Considere os mapas  $f : P \rightarrow C$  e  $\beta : B \rightarrow C$ , com  $\beta$  sobrejetor. Pelo teorema 1.5, para a composição  $fp : F \rightarrow C$ , existe um mapa  $\gamma : F \rightarrow B$  tal que  $fp = \beta\gamma$ , portanto  $\beta\gamma i = fpi = f id_P = f$ . O mapa  $\gamma i : P \rightarrow B$  é o mapa requerido. Isso prova que  $P$  é projetivo.  $\square$

**Definição 1.14** *Uma resolução projetiva de comprimento  $n$  de um  $R$ -módulo à direita  $M$  é uma seqüência exata*

$$P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

onde cada  $P_i$  é um  $R$ -módulo à direita projetivo.

### 1.3 Propriedade $FP_m$

**Teorema 1.8** *As seguintes condições sobre um  $R$ -módulo  $M$  são equivalentes:*

1. *Existe uma seqüência exata  $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$  com  $m$  e  $n$  inteiros.*
2. *Existe uma seqüência exata  $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  onde os  $P_i$  são módulos projetivos finitamente gerados.*
3.  *$M$  é finitamente gerado e para qualquer sobrejeção  $\epsilon : P \rightarrow M$  com  $P$  finitamente gerado e projetivo, o núcleo de  $\epsilon$  é finitamente gerado.*

A demonstração desse teorema é baseada no lema de Schanuel.

**Lema 1.2** (*Lema de Schanuel*) *Sejam  $0 \rightarrow K \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$  e  $0 \rightarrow K' \rightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M \rightarrow 0$  seqüências exatas de  $R$ -módulos com  $P$  e  $P'$  projetivos. Então  $P \oplus K' \simeq P' \oplus K$ .*

Demonstração: Seja  $Q$  o submódulo de  $P \oplus P'$  que consiste dos pares  $(x, x')$  tais que  $\pi(x) = \pi'(x')$  ( $Q$  é chamado de pullback dos mapas  $\pi$  e  $\pi'$ ). Agora considere as seqüências exatas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K &\xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p'} P' \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow K' &\xrightarrow{i'} Q \xrightarrow{p} P \rightarrow 0 \end{aligned}$$

onde  $i(k) = (k, 0)$ ,  $i'(k') = (0, k')$  e  $p(x, x') = x$ ,  $p'(x, x') = x'$ .

Pelo corolário 1.1 temos que  $P' \oplus K \simeq Q \simeq P \oplus K'$ .  $\square$

Demonstração do teorema 1.8: É claro que  $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ . Para provar  $2 \Rightarrow 3$ , note que  $M$  é finitamente gerado pois  $P_0$  é finitamente gerado. Aplique o lema de Schanuel nas seqüências

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}(\epsilon) \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ e} \\ 0 \rightarrow \text{Ker}(P_0 \rightarrow M) \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e obtenha  $P \oplus \text{Ker}(P_0 \rightarrow M) \simeq P_0 \oplus \text{Ker}(\epsilon)$ . O lado esquerdo é finitamente gerado por hipótese, isso mostra que  $P_0 \oplus \text{Ker}(\epsilon)$  é finitamente gerado então  $\text{Ker}(\epsilon)$  também é

finitamente gerado.  $\square$

Dizemos que um módulo  $M$  é finitamente apresentável se ele satisfaz a condição 1 do teorema acima. Uma generalização do conceito de ser finitamente apresentável é a seguinte.

**Definição 1.15** Dizemos que um  $R$ -módulo  $M$  é do **tipo**  $FP_m$  se existe uma resolução projetiva de comprimento  $m$  de  $R$ -módulos

$$P_m \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

tal que  $P_i$  é finitamente gerado para  $i \leq m$

Uma generalização do teorema 1.8 é o seguinte teorema.

**Teorema 1.9** Para um  $R$ -módulo  $M$  e um inteiro  $n \geq 0$  as seguintes condições são equivalentes:

1. Existe uma resolução parcial  $F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  onde cada  $F_i$  é livre e finitamente gerado.
2.  $M$  é do tipo  $FP_n$ .
3.  $M$  é finitamente gerado e para cada resolução projetiva de comprimento finito  $P_k \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  com  $k < n$ , o núcleo  $P_k \rightarrow P_{k-1}$  é finitamente gerado.

Para demonstrar a generalização do teorema 1.8 necessitamos de uma generalização do lema de Schanuel.

**Lema 1.3** Sejam

$$\begin{aligned} P_n &\rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ e} \\ P'_n &\rightarrow P'_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P'_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

seqüências exatas com  $P_i$  e  $P'_i$  projetivos para  $i \leq n-1$ . Então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus \dots \simeq P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus \dots.$$

*Conseqüentemente se  $P_i$  e  $P'_i$  são finitamente gerados para  $i \leq n-1$  então  $P_n$  é finitamente gerado se e somente se  $P'_n$  é finitamente gerado.*

Demonstração: A demonstração é por indução. Sejam  $K = \text{Ker}(P_{n-2} \rightarrow P_{n-3})$  e  $K' = \text{Ker}(P'_{n-2} \rightarrow P'_{n-3})$ . Por hipótese de indução temos

$$K \oplus Q \simeq K' \oplus Q',$$

onde

$$Q = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$$

e

$$Q' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots$$

Por outro lado temos as seqüências exatas

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \oplus Q \rightarrow K \oplus Q \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P'_n \rightarrow P'_{n-1} \oplus Q' \rightarrow K' \oplus Q' \rightarrow 0.$$

Através do teorema 1.7 é fácil ver que a soma direta de projetivos é projetivo. Portanto  $P_{n-1} \oplus Q$  e  $P'_{n-1} \oplus Q'$  são projetivos. Aplicando o lema de Schanuel temos que

$$P'_n \oplus P_{n-1} \oplus Q \simeq P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q',$$

que é o isomorfismo desejado.  $\square$

Demonstração do teorema 1.9:  $1 \Rightarrow 2$  é trivial, pois cada módulo livre é projetivo. Para  $2 \Rightarrow 3$ : Se  $M$  é do tipo  $FP_n$  então para qualquer  $k < n$  existe uma resolução parcial projetiva  $P_k \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  com  $\text{Ker}(P_k \rightarrow P_{k-1})$  finitamente gerado. Pelo lema 1.3 qualquer outra resolução projetiva  $P'_k \rightarrow \cdots \rightarrow P'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  de mesmo comprimento tem o  $\text{Ker}(P'_k \rightarrow P'_{k-1})$  finitamente gerado, provando 3. Para  $3 \Rightarrow 1$ , observe que se 3 é verdade então podemos construir a resolução que aparece em 1, construindo módulo por módulo utilizando sempre 3, no caso específico quando os  $P_1, \dots, P_k$  são livres.  $\square$

Existem módulos que são  $FP_n$  para todo  $n > 0$ . O próximo teorema fala sobre condições equivalentes a essa. Ele é análogo aos teoremas anteriores.

**Teorema 1.10** *Para um  $R$ -módulo  $M$  as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma resolução infinita  $\dots \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  onde cada  $F_i$  é livre e tem base finita.*
2. *Existe uma resolução projetiva infinita  $\dots \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  onde cada  $P_i$  é finitamente gerado.*
3.  *$M$  é do tipo  $FP_n$ , para todo  $n > 0$ .*

*Observação:* Nas resoluções acima permitimos  $F_i = 0$  ou  $P_i = 0$ .

Demonstração:  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$  é trivial. Para  $3 \Rightarrow 1$ : Se 3 é verdade então podemos usar a condição 3, do teorema 1.9, para construir módulo por módulo da resolução que aparece em 1.  $\square$

## 1.4 Grupos do tipo $FP_m$

O conceito  $FP_m$  se estende a grupos da seguinte maneira.

**Definição 1.16** *Um grupo  $G$  tem tipo  $FP_m$  se  $\mathbb{Z}$  é do tipo  $FP_m$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo, onde  $\mathbb{Z}G$  é a álgebra de grupo integral de  $G$ .*

Podemos ver  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo, definindo uma ação de  $G$  sobre  $\mathbb{Z}$  de modo trivial, isto é,  $mg = m$ . Portanto a multiplicação de um elemento arbitrário de  $\mathbb{Z}G$  por  $m \in \mathbb{Z}$  fica  $m(\sum_{g \in G} z_g g) = m(\sum z_g)$ .

**Exemplo:** Todo grupo é  $FP_0$ . Basta considerar a sobrejeção  $\epsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$   $\epsilon(\sum_{g \in G} z_g g) = \sum z_g$ . Denotamos seu núcleo por  $\text{Aug}\mathbb{Z}G$ .

**Teorema 1.11**  *$G$  tem tipo  $FP_1$  se e somente se  $G$  é finitamente gerado.*

Demonstração: Observe que o núcleo do mapa  $\epsilon$  é gerado como  $\mathbb{Z}$ -módulo por  $\{g - 1, g \in G\}$ , pois se  $\epsilon(\sum_{g \in G} z_g g) = \sum z_g = 0$  então

$$\sum_{g \in G} z_g g = \sum_{g \in G} z_g g - \sum_{g \in G} z_g = \sum_{g \in G} z_g (g - 1).$$

Se  $G$  é gerado por  $g_1, \dots, g_k$  então o núcleo de  $\epsilon$  é gerado como  $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita por  $\{g_1 - 1, \dots, g_k - 1\}$ .

Por exemplo se  $g = g_1 g_2^{-1}$  então

$$g - 1 = g_1 g_2^{-1} - g_1 + g_1 - 1 = (g_2^{-1} - 1)g_1 + g_1 - 1 = (g_2 - 1)(-g_1 g_2^{-1}) + g_1 - 1.$$

Para  $g$  arbitrário, escrevemos  $g = g_{i_1}^{\epsilon_1} \dots g_{i_k}^{\epsilon_k}$  com  $\epsilon_i = \pm 1$  e usamos indução em  $k$ .

Portanto a seqüência  $\bigoplus_{i=1}^k e_i \mathbb{Z}G \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , tal que  $\phi(e_i) = g_i - 1$ , é exata. Provando que  $\mathbb{Z}$  é  $FP_1$ .

Reciprocamente se  $G$  for  $FP_1$  então  $\mathbb{Z}$  é  $FP_1$ . Pela condição 3 do teorema 1.8, o núcleo de  $\epsilon$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Já vimos que  $\{g - 1, g \in G\}$  gera o núcleo como  $\mathbb{Z}$ -módulo, conseqüentemente também como  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Se  $\{s_1, \dots, s_m\}$  também gera o núcleo, podemos escrever cada  $s_i$  em função de um número finito de elementos de  $\{g - 1, g \in G\}$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}G$ . Portanto existem  $g_1, \dots, g_k$ , tais que  $g_1 - 1, \dots, g_k - 1$  geram  $\text{Ker}(\epsilon)$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Seja  $S$  o subgrupo de  $G$  gerado por  $\{g_1, \dots, g_k\}$ .

Considere a seqüência exata  $0 \rightarrow \text{Aug} \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Sabe-se que  $\mathbb{Z}G$  é  $\mathbb{Z}S$ -módulo livre portanto plano (Ver apêndice do capítulo 4). Portanto existe a seguinte seqüência exata:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S} \text{Aug} \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Mas

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(G/S),$$

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S} \text{Aug} \mathbb{Z}S \simeq \mathbb{Z}G \text{Aug} \mathbb{Z}S = \text{Aug} \mathbb{Z}G.$$

Onde  $\mathbb{Z}(G/S)$  é o  $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base as classes laterais de  $S$  em  $G$ .

Isso mostra que a seqüência  $0 \rightarrow \text{Aug} \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}(G/S) \rightarrow 0$  é uma seqüência exata. Portanto  $G = S$ .  $\square$

**Teorema 1.12** *Se  $G$  é um grupo finitamente apresentável então  $G$  tem tipo  $FP_2$ .*

Para demonstrar o teorema 1.12 precisamos da seqüência exata do seguinte teorema.

**Teorema 1.13** *Seja  $G$  um grupo tal que  $G = F(A)/R$ , onde  $A$  é um conjunto,  $F(A)$  é o grupo livre gerado por  $A$  e  $R$  um subgrupo normal de  $F(A)$ . Então existe uma seqüência exata de  $\mathbb{Z}G$ -módulos*



$$0 \rightarrow R_{ab} \xrightarrow{d} \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Ge_a \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

onde  $R_{ab} = R/[R, R]$ ,  $\partial(e_a) = \bar{a} - 1$  e  $\bar{a}$  é a imagem de  $a$  em  $G$ .

Demonstração: Seguimos a demonstração do livro de K. Brown [8]. Suponhamos que o leitor já conheça a base de recobrimentos de  $CW$  complexos.

Seja  $Y$  um buquê de círculos indexados por  $A$  e  $v$  o vértice que corresponde á interseção desses círculos. Observamos que o grupo fundamental  $\pi_1(Y) \simeq F(A)$ . Seja  $\tilde{Y}$  um espaço de recobrimento regular conexo de  $Y$  tal que  $\pi_1(\tilde{Y}) = R$ . Identifica-se  $G = F(A)/R$  com o grupo de transformações de recobrimento, conforme está explicado no apêndice no final desse capítulo (Veja seção 1.5). A ação de  $G$  sobre o complexo celular  $C_*\tilde{Y}$  nos fornece a resolução parcial de  $\mathbb{Z}G$ -módulos livres

$$\bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Ge_a \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

correspondente a  $C_1\tilde{Y} \rightarrow C_0\tilde{Y} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ .

Para qualquer  $f \in F(A) = \pi_1(Y)$ , consideramos  $f$  uma concatenação de caminhos cujas imagens são os círculos que formam  $Y$ . Denotamos por  $\tilde{f}$  o levantamento de  $f$  a  $\tilde{Y}$  que começa num vértice  $\tilde{v}$ , previamente escolhido, cuja imagem em  $Y$  é o vértice  $v$ .

Pelo teorema de Hopf sabemos que  $H_1(\tilde{Y}) \simeq (\pi_1(\tilde{Y}))_{ab} \simeq R_{ab}$ . Esse isomorfismo é induzido pelo mapa  $\tilde{d} : R \rightarrow H_1(\tilde{Y})$ , definido da seguinte maneira:

Seja  $\tilde{r}$  o caminho fechado em  $\tilde{Y}$  que é o levantamento do caminho em  $Y$  correspondente a  $r \in R$ . Então  $\tilde{r} \in H_1(\tilde{Y})$ , define-se  $\tilde{d}(r) = \tilde{r}$ .

Sejam  $f \in F(A)$ ,  $r \in R$  e  $\bar{f}$  a classe de  $f$  em  $G$ . O levantamento de  $frf^{-1}$  é a concatenação de  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{f}\tilde{r}$ ,  $\tilde{f}^{-1}$ , onde  $\tilde{f}\tilde{r}$  é o elemento  $\tilde{r}$  sob ação de  $\bar{f}$ . Em  $H_1(\tilde{Y})$  temos que  $\tilde{d}(frf^{-1}) = \tilde{f} + \tilde{f}\tilde{r} + \tilde{f}^{-1} = \tilde{f}\tilde{r} = \bar{f}\tilde{d}(r)$ . Se definirmos a ação à esquerda de  $F(A)$  em  $R$  pela conjugação ( $f * r = frf^{-1}$ ), obtemos uma ação de  $G$  em  $R_{ab}$  e portanto  $R_{ab}$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda. Esse  $\tilde{d}$  induz um mapa  $d : R_{ab} \rightarrow H_1(\tilde{Y})$  que preserva ação de  $G$ , portanto temos que  $d$  é um isomorfismo de  $\mathbb{Z}G$ -módulos.

Agora  $H_1(\tilde{Y})$  é o núcleo de  $\partial$ , portanto

$$0 \rightarrow R_{ab} \xrightarrow{d} \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Ge_a \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é exata.  $\square$

Demonstração do teorema 1.12: Seja  $G = F(A)/R$ , onde  $R = \langle S \rangle^{F(A)}$  para  $S$  e  $A$  conjuntos finitos.

Seja

$$0 \rightarrow R_{ab} \xrightarrow{d} \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Ge_a \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

a seqüência exata do teorema 1.13, para o  $G$  acima. Como já foi observado na demonstração do teorema 1.13, a ação de  $F(A)$  à esquerda de  $R$  via conjugação ( $f * \lambda = f\lambda f^{-1}$ ) induz uma ação de  $F(A)/R = G$  em  $R_{ab}$ , tornando  $R_{ab}$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda. Como  $R = \langle S \rangle^{F(A)}$  então  $R$  é gerado como grupo por  $\{fsf^{-1} \mid f \in F, s \in S\}$ , assim  $R_{ab}$  é gerado como grupo por  $\{\bar{f} * s[R, R] \mid \bar{f} \in G, s \in S\}$ . Portanto  $R_{ab}$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G$ -módulo por  $\{s[R, R] \mid s \in S\}$ .

Seja  $f : \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}Ge_s \rightarrow R_{ab}$  o epimorfismo tal que  $f(e_s) = s[R, R]$ .

Portanto

$$\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}Ge_s \xrightarrow{d \circ f} \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Ge_a \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata de  $\mathbb{Z}G$ -módulos à esquerda finitamente gerados e livres. Posso considerá-los como módulos à direita definindo a ação de  $g$  em  $w$  por  $wg = g^{-1}w$ . É óbvio que seqüência continua exata. Provando que  $G$  é  $FP_2$ .  $\square$

O próximo teorema será muito útil na seção (2.5).

**Teorema 1.14** *Se  $H \subseteq G$  um subgrupo de índice finito então  $G$  é do tipo  $FP_n$  ( $0 \leq n \leq \infty$ ) se e somente se  $H$  é do tipo  $FP_n$ .*

Demonstração: Qualquer resolução projetiva finita de  $\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{Z}G$ -módulos finitamente gerados também é uma resolução projetiva finita de  $\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{Z}H$ -módulos. Os módulos também são finitamente gerados como  $\mathbb{Z}H$ -módulos pois o índice de  $H$  em  $G$  é finito.

Para a outra implicação, suponha  $H$  do tipo  $FP_n$ . Seja  $P$  uma resolução projetiva de  $\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{Z}G$ -módulos finitamente gerados, cujo comprimento é  $k < n$ . Ela existe pois todo grupo é  $FP_0$ . Agora considerando  $P$  uma resolução de  $\mathbb{Z}H$ -módulos, podemos usar a condição 3 do teorema 1.9 e concluir que o  $\text{Ker}(P_k \rightarrow P_{k-1})$  é finitamente gerado sobre  $\mathbb{Z}H$ . Mas isso implica que o  $\text{Ker}(P_k \rightarrow P_{k-1})$  é finitamente gerado sobre  $\mathbb{Z}G$ , portanto a condição 3 do teorema 1.9 é satisfeita para  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo, provando que  $G$  é  $FP_n$ .  $\square$

## 1.5 Apêndice do capítulo 1.

A leitura desse apêndice só é necessária para a demonstração do teorema 1.13. Aqui é explicado como  $G$  age sobre o complexo celular  $C_*(\tilde{Y})$ .

Seja  $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$  uma aplicação de recobrimento entre espaços conexos e localmente conexos por caminho então denota-se por transformação de Deck de  $p$  um homeomorfismo  $m : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  tal que  $pm = p$ . O grupo  $G$  das transformações de Deck age livremente sobre  $\tilde{Y}$ .

Se o recobrimento  $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$  for regular, isto é, satisfaz as condições equivalentes abaixo então  $G \simeq \pi_1(Y)/\pi_1(\tilde{Y})$ .

**Exemplo:** Para o buquê de círculos  $Y$ , da demonstração do teorema 1.13, e seu recobrimento  $\tilde{Y}$  temos que  $G \simeq F(A)/R$ .

Essa ação de  $G$  no CW-complexo  $\tilde{Y}$  induz uma ação no complexo celular  $C_*(\tilde{Y})$ , o que nos permite considerá-lo um complexo de  $\mathbb{Z}G$ -módulos. Como a ação de  $G$  permuta as células de  $\tilde{Y}$  livremente (isto é,  $g\sigma \neq \sigma$  para todo  $\sigma$ , se  $g \neq 1$ ),  $C_n(\tilde{Y})$  tem uma base como  $\mathbb{Z}$ -módulo que é permutada livremente por  $G$ , tornando-o um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre.

**Definição 1.17**  $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$  é um recobrimento regular se satisfaz as seguintes condições equivalentes.

1.  $G$  age transitivamente em  $p^{-1}(y)$  para todo  $y \in Y$ .
2. A imagem de  $\pi_1(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_1(Y)$  é normal em  $\pi_1(Y)$  para alguma (e portanto para qualquer) escolha de ponto base.
3. Para qualquer caminho fechado  $w \in Y$ , se um levantamento de  $w$  para  $\tilde{Y}$  é fechado então todos os possíveis levantamentos de  $w$  são fechados.

# Capítulo 2

## Grupos Metabelianos

Neste capítulo se encontra a maioria das definições e resultados utilizados neste trabalho.

### 2.1 Grupos Metabelianos

**Definição 2.1** Dizemos que  $G$  é um grupo metabeliano se existe uma seqüência exata de grupos

$$1 \rightarrow M \rightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

com  $M$  e  $Q$  abelianos.

O isomorfismo de  $M$  com sua imagem em  $G$  nos permite considerar o mapa  $M \rightarrow G$  como sendo a inclusão, isto é,  $M$  é subgrupo normal de  $G$ . Além disso definimos uma ação à direita do grupo  $Q$  no grupo  $M$  via conjugação ( $mq$  é  $g^{-1}mg$  onde  $\pi(g) = q$ ), isso nos dá que  $M$  é um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo.

Quando pensamos na estrutura de  $M$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo, pensamos na sua operação como sendo a soma e a operação de  $Q$  como sendo o produto, portanto a multiplicação de um elemento arbitrário de  $\mathbb{Z}Q$  por  $m \in M$  é feita da seguinte maneira  $m \cdot (\sum_{q \in Q} z_q q) = \sum_{q \in Q} z_q mq$ , onde  $z_q \in \mathbb{Z}$  e  $q \in Q$ .

**Lema 2.1** Em (2.1),  $G$  é finitamente gerado como grupo se e somente se  $M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo e  $Q$  é finitamente gerado como grupo.

Demonstração : Seja  $M$  finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo com geradores  $m_1, \dots, m_n$  e  $Q$  finitamente gerado com geradores  $q_1, \dots, q_k$ . Sejam  $g_1, \dots, g_k$  elementos de  $G$  tais que  $\pi(g_i) = q_i$ . Então os elementos  $m_1, \dots, m_n, g_1, \dots, g_k$  geram  $G$ .

Se  $G$  for finitamente gerado, seja  $S = \{g_1, \dots, g_k\}$  um conjunto de geradores de  $G$ . Seja  $[G, G]$  o subgrupo dos comutadores de  $G$ . Sabemos que  $[G, G]$  é normal e  $G/[G, G]$  é abeliano.  $M/[G, G]$  é subgrupo de  $G/[G, G]$  que é abeliano e finitamente gerado, portanto  $M/[G, G]$  também é finitamente gerado como grupo. Se provarmos que  $[G, G]$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo então  $M$  será finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo, pois  $M/[G, G]$  já é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo ( $M/[G, G]$  é  $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente gerado).

Mas pelo lema 1.1

$$[G, G] = \langle \{[g_i, g_j]^g \mid g \in G, 1 \leq i \leq j \leq k\} \rangle.$$

A ação de  $q$  à direita de  $m$  por definição é  $mq = g^{-1}mg$ , onde  $\pi(g) = q$ . Então

$$[G, G] = \langle \{[g_i, g_j]^g \mid g_i, g_j \in S, g \in G\} \rangle = \langle \{[g_i, g_j]q \mid g_i, g_j \in S, q \in Q\} \rangle.$$

Como  $\{[g_i, g_j] \mid g_i, g_j \in S\}$  é um conjunto finito temos que  $[G, G]$  é finitamente gerado por  $\{[g_i, g_j] \mid g_i, g_j \in S\}$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo.  $\square$

Daqui para frente o grupo  $G$  será um grupo finitamente gerado e a sequência (2.1) será cindida, portanto  $G$  será o produto semidireto de  $M$  e  $Q$  e vale o resultado do lema (2.1). Já foi discutido como  $M$  é um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo, mas  $G$  tendo essa forma nos possibilita conceber  $M$  também como um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Se  $g \in G$  então  $g = nq$  com  $n \in M, q \in Q$ . Para todo  $m \in M$  definimos  $mg = m(nq) = (mn)q$ , como já temos definido a ação de  $q$  em elementos de  $M$ , essa ação fica bem definida. Note que para todo  $\mathbb{Z}M$ -módulo livre, essa multiplicação nos permite vê-lo como um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Além disso, se a ação de  $Q$  também for livre sobre uma base desse módulo, permutando-as livremente, então o módulo também será um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre.

## 2.2 Anéis e Módulos Noetherianos

Quando trabalhamos com a propriedade  $FP_m$  estamos sempre preocupados com a questão dos módulos serem ou não finitamente gerados, em alguns casos precisamos saber se um submódulo também é finitamente gerado. Sabemos que em geral nem sempre isso é verdade, mas sabemos que isso ocorre se o anel for Noetheriano e um módulo com respeito a esse anel for finitamente gerado.

**Definição 2.2** Dizemos que um anel  $R$  é Noetheriano à direita se todo ideal à direita é finitamente gerado. Se  $R$  for comutativo dizemos apenas que é Noetheriano.

**Exemplos:**

Todo anel de ideal principal é Noetheriano, portanto  $\mathbb{Z}$  é Noetheriano.

Todo quociente de um anel Noetheriano à direita por um ideal, também é um anel Noetheriano à direita.

**Teorema 2.1** *O anel  $R$  é Noetheriano à direita se e somente se todo submódulo de um  $R$ -módulo à direita  $M$  finitamente gerado também é finitamente gerado.*

Demonstração: Suponha primeiro que  $R$  é Noetheriano à direita. Seja  $M$  gerado por  $\{x_1, \dots, x_n\}$  e  $S$  é um submódulo de  $M$ . Prova-se que  $S$  é finitamente gerado por indução em  $n$ . Se  $n = 1$  então  $M \simeq R/I$ , onde  $I = \text{Ker}(R \xrightarrow{f} M)$ , com  $f(r) = x_1 r$ . Portanto  $S \simeq J/I$ , para algum ideal à direita  $J$  contendo  $I$ .  $J$  é finitamente gerado pois  $R$  é Noetheriano portanto  $S \simeq J/I$  também é finitamente gerado.

Suponha  $n > 1$ . Se  $M' = x_n R$  então a seqüência exata

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M/M' \rightarrow 0$$

possui  $M/M'$  gerado por  $n - 1$  elementos como  $R$ -módulo. Existe uma outra seqüência exata

$$0 \rightarrow S \cap M' \rightarrow S \rightarrow S/(S \cap M') \rightarrow 0.$$

Agora  $S \cap M'$  é finitamente gerado pelo caso  $n = 1$ , enquanto  $S/(S \cap M') \simeq (S + M')/M' \subset M/M'$  é finitamente gerado por indução. Isso implica que  $S$  é finitamente gerado.

Para a outra implicação do teorema, observe que os submódulos à direita de  $R$  são os ideais à direita, portanto  $R$  é Noetheriano.  $\square$

**Definição 2.3** *Dizemos que um  $R$ -módulo à direita  $M$  é Noetheriano se  $M$  é finitamente gerado e  $R$  é Noetheriano à direita.*

**Teorema 2.2** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à direita. Então  $M$  é Noetheriano se e somente se cada cadeia crescente de submódulos de  $M$*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

*estabiliza, isto é, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $M_j = M_{j+1}$ , para todo  $k \leq j$ .*

Demonstração: Se  $M$  é Noetheriano temos que  $M' = \cup_j M_j$  é submódulo de  $M$  e portanto finitamente gerado. Seja  $M' = m_1R + \dots + m_nR$ . Existe  $M_k$  tal que  $\{m_1, \dots, m_n\} \subset M_k$ . Assim  $M_j \subseteq M' \subseteq M_k \subseteq M_j$ , para todo  $j \geq k$ .

Reciprocamente, se  $S$  é um submódulo de  $M$  que não é finitamente gerado. Escolha  $s_1 \in S$  e defina  $M_1 = s_1R$ . Assuma por indução que já foram escolhidos  $s_1, \dots, s_n$ , com  $M_i = s_1R + \dots + s_iR$ , tais que  $M_i \neq M_{i+1}$ .

Como  $S$  não é finitamente gerado existe  $s_{n+1} \notin M_n$ . Defina  $M_{n+1} = M_n + s_{n+1}R$ , portanto  $M_{n+1} \neq M_n$ . A cadeia crescente de submódulos construída por essa indução não estabiliza, concluindo a demonstração.  $\square$

**Corolário 2.1**  *$R$  é um anel Noetheriano à direita (esquerda) se e somente se toda cadeia crescente de ideais à direita (esquerda) estabiliza.*

Demonstração: Os submódulos de  $R$ , como módulo à direita, são os ideais à direita.  $\square$

**Teorema 2.3** (Hilbert) *Se o anel  $R$  for comutativo e Noetheriano então o anel de polinômios  $R[x]$  também é Noetheriano. Por indução  $R[x_1, \dots, x_n]$  também é Noetheriano.*

Demonstração: Seja  $J$  ideal de  $R[x]$ . Defina  $I_m$  como

$$I_m = \{r \in R \mid \exists f(x) = rx^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j \in J, r \neq 0\} \cup \{0\}.$$

$I_m$  é um ideal pois se  $r_1, r_2 \in I_m$  então existem

$$\begin{aligned} f_1 &= r_1 x^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j \in J \text{ e} \\ f_2 &= r_2 x^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j x^j \in J. \end{aligned}$$

Assim  $f_1 - f_2 = (r_1 - r_2)x^m + \sum_{j=0}^{m-1} d_j x^j$ , portanto  $r_1 - r_2 \in I_m$ .

Para todo  $r \in R$ ,  $rf_1 \in J$ , se  $f_1 \in J$  então  $rr_1 \in I_m$ , se  $rr_1 \neq 0$ . Se  $rr_1 = 0$  então  $rr_1$  também pertence a  $I_m$ . Provando que  $I_m$  é um ideal.

É fácil notar que  $I_m \subset I_{m+1}$ . Pelo corolário 2.1 essa cadeia de ideais estabiliza,  $I_j = I_k$  para todo  $k \leq j$ . Portanto seja

$$I_0 = Rr_{0,1} + \dots + Rr_{0,j_0}, \dots, I_k = Rr_{k,1} + \dots + Rr_{k,j_k}.$$

Para cada  $r_{i,j}$  ( $0 \leq i \leq k$  e  $1 \leq j \leq j_i$ ) existe  $f_{i,j}(x) = r_{i,j}x^i + \sum_{s < i} b_s x^s \in J$ .

O objetivo é provar que  $S = \{f_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq j_i\}$  gera  $J$ .

Seja  $f(x) \in J$ . Se  $f(x)$  é um polinômio constante então  $f(x) \in I_0$ . Então  $f(x) \in Rf_{0,1} + \dots + Rf_{i_0,j_0}$ .

Agora suponha

$$f(x) = ax^m + \sum_{s < m} b_s x^s, \quad a \neq 0 \text{ e } m > 0.$$

Se  $m \leq k$  então  $a = a_1 r_{m,1} + \dots + a_{j_m} r_{m,j_m}$ .

O polinômio  $g(x) = f(x) - a_1 f_{m,1} - \dots - a_{j_m} f_{m,j_m} \in J$  e tem grau menor ou igual a  $m - 1$ . Por indução no grau do polinômio,  $g(x)$  pertence ao ideal gerado por  $S$ . Isso implica que  $f(x)$  pertence ao ideal gerado por  $S$ .

Se  $m > k$  então  $I_m = I_k$ . Portanto  $a = a_1 r_{k,1} + \dots + a_{j_k} r_{k,j_k}$ .

O polinômio  $g(x) = f(x) - a_1 f_{k,1} x^{m-k} - \dots - a_{j_k} f_{k,j_k} x^{m-k} \in J$  e tem grau  $m - 1$ , por indução  $g$  pertence ao ideal gerado por  $S$ . Isso implica que  $f(x)$  pertence ao ideal gerado por  $S$ .

Assim todo polinômio de  $J$  pertence ao ideal gerado por  $S$ , mas esse ideal está contido em  $J$ .  $\square$

**Corolário 2.2** *Se  $Q$  é um grupo abeliano e finitamente gerado, então  $\mathbb{Z}Q$  é Noetheriano.*

*Demonstração:* Se  $Q$  é finitamente gerado então sejam  $q_1, \dots, q_k$  seus geradores como grupo. Seja  $\mathbb{Z}[X \cup Y] = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k]$  o anel de polinômios de  $2k$  variáveis comutativas. Considere o seguinte homomorfismo de anéis  $\mathbb{Z}[X \cup Y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}Q$  onde  $\alpha(x_i) = q_i$  e  $\alpha(y_i) = q_i^{-1}$ . Pelo teorema 2.3 e como  $\mathbb{Z}$  é Noetheriano temos  $\mathbb{Z}[X \cup Y]$  Noetheriano. Observe que  $\alpha$  é sobrejetor, portanto  $\mathbb{Z}[X \cup Y]$  quocientado pelo núcleo de  $\alpha$  é isomorfo ao  $\mathbb{Z}Q$ , como todo quociente de um anel Noetheriano é Noetheriano temos que  $\mathbb{Z}Q$  é Noetheriano.  $\square$

**Observação:** Se  $Q$  é um grupo abeliano finitamente gerado então  $\mathbb{Z}Q$  é anel Noetheriano pelo corolário 2.2. Se  $M$  é  $\mathbb{Z}Q$ -módulo finitamente gerado (Noetheriano) então  $M$  é  $FP_n$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo para todo  $n$ .



### 2.3 Os invariantes $\Sigma^m(Q; M)$ .

Seja  $Q$  um grupo finitamente gerado. Denotamos por  $\text{Hom}(Q, (\mathbb{R}, +))$  todos os homomorfismos de grupos de  $Q$  em  $\mathbb{R}$ . Sejam  $\chi_1$  e  $\chi_2 \in \text{Hom}(Q, (\mathbb{R}, +))$  não nulos, dizemos que eles são equivalentes se existe  $\lambda$  real positivo tal que  $\chi_1 = \lambda\chi_2$ . As classes de equivalência desses homomorfismos (também chamados de caracteres) não nulos é chamada esfera de caracteres  $S(Q)$ .

Ela recebe esse nome pelo seguinte motivo.

**Lema 2.2** *Se  $Q_{ab} \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T$ , onde  $T$  é a parte de torção de  $Q_{ab} = Q/[Q, Q]$ , então  $S(Q)$  é homeomorfo a  $S^{n-1}$ . Portanto  $S(Q)$  é compacto.*

Demonstração: Como  $Q_{ab} \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T$ , onde  $T$  é o grupo de torção, então temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Q, \mathbb{R}) &\simeq \text{Hom}(Q_{ab}, \mathbb{R}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}^n \oplus T, \mathbb{R}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \oplus \text{Hom}(T, \mathbb{R}) = \\ &\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \oplus 0 \simeq \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Defina uma topologia em  $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$  induzida pela topologia canônica do  $\mathbb{R}^n$  através desse isomorfismo de grupos. Excluindo o homomorfismo nulo de  $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$  e seu correspondente 0 no  $\mathbb{R}^n$  e quocientando pela relação de equivalência temos  $S(Q)$  homeomorfo a  $S^{n-1}$ .  $\square$

Seja  $\chi \in \text{Hom}(Q, (\mathbb{R}, +))$  define-se  $Q_\chi = \{q \in Q \mid \chi(q) \geq 0\}$ .  $\mathbb{Z}Q_\chi$  é um subanel de  $\mathbb{Z}Q$ , pois  $Q_\chi$  é monóide e portanto se  $M$  for um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo então também será um  $\mathbb{Z}Q_\chi$ -módulo.

**Definição 2.4** *Sejam  $Q$  um grupo finitamente gerado e  $M$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo à direita finitamente gerado. Então o  $m$ -ésimo invariante homológico é*

$$\Sigma^m(Q; M) = \{[\chi] \in S(Q) \mid M \text{ é do tipo } FP_m \text{ como } \mathbb{Z}Q_\chi\text{-módulo}\}.$$

A propriedade  $FP_0$  é equivalente a ser finitamente gerado, portanto

$$\Sigma^0(Q; M) = \{[\chi] \in S(Q) \mid M \text{ é finitamente gerado como } \mathbb{Z}Q_\chi\text{-módulo}\}.$$

**Observação:** Essa definição é para qualquer  $Q$  finitamente gerado, no nosso caso  $Q$  é abeliano. Daqui em diante sempre que o invariante for mencionado será com  $Q$  abeliano.

Seria interessante se  $\mathbb{Z}Q_\chi$  fosse Noetheriano pois isso implicaria que para um  $M$  do tipo  $FP_0$  sobre  $\mathbb{Z}Q_\chi$  então  $M$  é  $FP_m$  sobre  $\mathbb{Z}Q_\chi$  para todo  $m \geq 0$ . Assim  $\Sigma^m(Q; M)$  não seria vazio para todo  $m \geq 0$ .

**Teorema 2.4** *Se  $Q$  é um grupo abeliano e finitamente gerado então  $\mathbb{Z}Q_\chi$  é um anel Noetheriano se e somente se  $Im(\chi)$  é isomorfa a  $\mathbb{Z}$ , isto é,  $\chi$  é um caracter discreto.*

Demonstração: Se a  $Im(\chi) \simeq \mathbb{Z}$  então existe  $x \in Q_\chi$  tal que

$$\chi(x) = \min\{\chi(y) \mid \chi(y) > 0\}.$$

Seja  $Q_0 = Ker(\chi)$ . Então para  $w \in \mathbb{Z}Q_\chi$ ,  $w = \sum z_i q_i$  com  $\chi(q_i) \geq 0$ , mas  $\chi(q_i) = n_i \chi(x)$  para algum  $n_i \in \mathbb{N}$ . Portanto  $w = \sum z_i (q_i x^{-n_i}) x^{n_i}$ , com  $q_i x^{-n_i} \in Q_0$ . Assim todo  $w$  pode ser escrito como soma de potências de  $x$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}Q_0$ .

Obtemos assim uma sobrejeção do anel de polinômios  $\mathbb{Z}Q_0[x]$  em  $\mathbb{Z}Q_\chi$ . Pelo corolário 2.2, como  $Q_0$  é comutativo e finitamente gerado temos  $\mathbb{Z}Q_0$  Noetheriano, portanto  $\mathbb{Z}Q_0[x]$  também é Noetheriano implicando  $\mathbb{Z}Q_\chi$  Noetheriano.

Reciprocamente, suponha  $\mathbb{Z}Q_\chi$  Noetheriano. Se não existir  $x \in Q_\chi$  tal que

$$\chi(x) = \min\{\chi(y) \mid \chi(y) > 0\}$$

então existe uma seqüência  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , com  $q_i \in Q_\chi$  tal que  $\chi(q_i) > \chi(q_{i+1}) > 0$ .

Defina  $I_k = \mathbb{Z}Q_\chi q_1 + \dots + \mathbb{Z}Q_\chi q_k$ . Observe que  $I_k$  é um  $\mathbb{Z}Q_\chi$ -submódulo de  $\mathbb{Z}Q_\chi$ , portanto são ideais de  $\mathbb{Z}Q_\chi$ . Afirimo que essa cadeia de ideais não estabiliza, pois se isso ocorresse existiria  $q_j \in I_{j-1}$ .

Isso implica que

$$q_j = \sum z q q_i, \\ \text{com } z \in \mathbb{Z}, q \in Q_\chi \text{ e } 1 \leq i \leq j-1.$$

Mas  $\mathbb{Z}Q_\chi$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base  $Q_\chi$ . Então  $q_j$  deve ser igual a algum dos  $q q_i$  que aparecem na igualdade  $q_j = \sum z q q_i$ . Então

$$\chi(q_j) = \chi(q q_i) = \chi(q) + \chi(q_i) \geq \chi(q_i),$$

contrariando  $\chi(q_j) < \chi(q_i)$ , para  $1 \leq i \leq j-1$ .

Portanto existe  $x \in Q_\chi$  tal que  $\chi(x) = \min\{\chi(y) \mid \chi(y) > 0\}$ , mas isso é equivalente a  $\text{Im}\chi \simeq \mathbb{Z}$ .  $\square$

Existe um critério envolvendo o conjunto dos centralizadores de um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo  $M$ ,

$$C(M) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q \mid m\lambda = m, \forall m \in M\},$$

para garantir que um  $[\chi] \in \Sigma^0(Q; M)$ . O critério está apresentado no teorema abaixo.

**Definição 2.5** Se  $w = \sum z_q q \in \mathbb{Z}Q$  definimos o **suporte de  $w$**  como  $\text{sup}(w) = \{q \mid z_q \neq 0\}$ .

Podemos estender  $\chi \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$  a uma aplicação de  $\mathbb{Z}Q$  a  $\mathbb{R}$  definindo

$$\chi(w) = \min\{\chi(q), q \in \text{sup}(w)\}.$$

**Teorema 2.5** Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo finitamente gerado. Então  $[\chi] \in \Sigma^0(Q, M)$  se e somente se existe  $\lambda \in C(M)$  tal que  $\chi(\lambda) > 0$ .

Demonstração: Seja  $\lambda \in C(M)$  com  $\chi(\lambda) > 0$ . Dado  $0 \neq \mu \in \mathbb{Z}Q$  podemos escolher um número inteiro  $m > 0$  tal que

$$m\chi(\lambda) \geq -\chi(\mu).$$

Então  $\chi(\lambda^n \mu) \geq \chi(\mu) + n\chi(\lambda) \geq 0$  e dessa maneira  $\lambda^n \mu \in \mathbb{Z}Q_\chi$ . Isso implica que  $m\mu = m\lambda^n \mu \in m\mathbb{Z}Q_\chi$  para todo  $m \in M$ , isto é,  $m\mathbb{Z}Q_\chi = m\mathbb{Z}Q$ . Como  $M = m_1\mathbb{Z}Q + \dots + m_k\mathbb{Z}Q$ , então  $M = m_1\mathbb{Z}Q_\chi + \dots + m_k\mathbb{Z}Q_\chi$ .

Para implicação contrária seja  $R_M = \{m_1, \dots, m_k\}$  um conjunto de geradores para  $M$  como  $\mathbb{Z}Q_\chi$ -módulo. Pegue  $q \in Q$  tal que  $\chi(q) > 0$ . Então temos um sistema de  $k$  equações lineares

$$m_i q^{-1} = \sum_j m_j \lambda_{ij}, \text{ onde } \lambda_{ij} \in \mathbb{Z}Q_\chi,$$

ou

$$\sum_j m_j (\delta_{ij} - \lambda_{ij} q) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Como consequência temos que o determinante  $\det(\delta_{ij} - \lambda_{ij}q)$  anula todos os elementos de  $M$ . Mas

$$\det(\delta_{ij} - \lambda_{ij}q) = 1 - \mu q, \text{ com } \mu \in \mathbb{Z}Q_\chi,$$

e  $\chi(\mu q) \geq \chi(q) + \chi(\mu) > 0$  então  $\lambda = \mu q$  é o elemento desejado de  $C(M)$ .  $\square$

**Exemplo:** Se  $M$  é  $\mathbb{Z}Q$ -módulo livre então  $C(M)$  é vazio. Portanto  $\Sigma^0(Q, M)$  é vazio.

**Teorema 2.6** *Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo finitamente gerado então*

1.  $\Sigma^0(Q, M)$  é aberto em  $S(Q)$ ,
2.  $\Sigma^0(Q, M) = \Sigma^0(Q, \mathbb{Z}Q/Ann(M))$ , onde  $Ann(M) \triangleleft \mathbb{Z}Q$  é o ideal anulador de  $M$ ,  $Ann(M) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q \mid m\lambda = 0, \text{ para todo } m \in M\}$ .
3. Se  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  é sequência exata de  $\mathbb{Z}Q$ -módulos,

$$\Sigma^0(Q, M) = \Sigma^0(Q, M') \cap \Sigma^0(Q, M'').$$

Demonstração:

Se  $Q \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T$ , onde  $T$  é a torção de  $Q$  então seja  $\pi : Q/T \rightarrow \mathbb{Z}^n$  um isomorfismo.

Todo  $\chi \in Hom(Q, \mathbb{R})$  pode ser escrito como  $\chi(y) = \langle v_\chi, \pi(y) \rangle$ , para algum  $v_\chi \in \mathbb{R}^n$  ( $\langle x, y \rangle$  representa o produto interno de  $x$  por  $y$  no  $\mathbb{R}^n$ ). Se  $[\chi]$  e  $[\chi']$  estiverem próximos em  $S(Q)$  então o ângulo entre  $v_\chi$  e  $v_{\chi'}$  é pequeno. Portanto se  $\chi(q_i) > 0$  então  $\chi'(q_i) > 0$ . Isso implica que se  $\chi(\lambda) > 0$  então  $\chi'(\lambda) > 0$ . Obtemos que o conjunto  $\{[\chi], \chi(\lambda) > 0\}$  é aberto em  $S(Q)$ .

Uma consequência imediata do teorema 2.5 é que

$$\Sigma^0(Q, M) = \bigcup_{\lambda \in C(M)} \{[\chi], \chi(\lambda) > 0\},$$

o que prova o item 1.

Para o item 2, observe que o  $\Sigma^0(Q, M)$  depende somente do centralizador de  $M$ , isto é,  $C(M)$ . Mas como  $C(M) - 1 = Ann(M)$ , temos que o invariante depende somente do ideal anulador de  $M$ , portanto quaisquer dois  $\mathbb{Z}Q$ -módulos finitamente gerados com o mesmo ideal anulador  $I$  tem o mesmo invariante, o que prova o item 2.

É claro pela definição que

$$\Sigma^0(Q, M) \subseteq \Sigma^0(Q, M'') \text{ e} \\ \Sigma^0(Q, M') \cap \Sigma^0(Q, M'') \subseteq \Sigma^0(Q, M).$$

Agora como  $C(M) \subseteq C(M')$  temos que  $\Sigma^0(Q, M) \subseteq \Sigma^0(Q, M')$ , mas essas três inclusões provam o item 3.  $\square$

## 2.4 Exemplo de $\Sigma^0(Q, M)$

Nessa seção calcula-se um exemplo  $\Sigma^0(Q, M)$ , utilizando um teorema que relaciona o complementar desse invariante com o conjunto  $\Delta_S^v(Q)$ , definido abaixo, que está relacionado com valorizações.

**Definição 2.6** *Seja  $B$  um anel comutativo. Uma valorização real de  $B$*

$$v : B \rightarrow \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

*é uma função que satisfaz*

$$\begin{aligned} v(b_1 b_2) &= v(b_1) + v(b_2), \\ v(b_1 + b_2) &\geq \min\{v(b_1), v(b_2)\}, \\ v(1) &= 0, \quad v(0) = \infty. \end{aligned}$$

**Definição 2.7** *Seja  $M$  é um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo finitamente gerado. Seja  $S = \mathbb{Z}Q/\text{Ann}(M)$  e  $\tilde{\mathbb{Z}}$  a imagem de  $\mathbb{Z}$  em  $S$  (Observamos que  $\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/(\text{Ann}(M) \cap \mathbb{Z})$ ).*

*Dada uma valorização real de  $\mathbb{Z}$*

$$v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_\infty,$$

*define-se  $\Delta_S^v(Q)$  como o subconjunto de  $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ , onde cada  $\chi \in \Delta_S^v(Q)$  satisfaz a seguinte propriedade:*

*Existe uma valorização  $w : S \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  tal que a composição  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \tilde{\mathbb{Z}} \xrightarrow{w} \mathbb{R}_\infty$  é igual a  $v$  e a composição  $Q \hookrightarrow \mathbb{Z}Q \xrightarrow{i} S \xrightarrow{w} \mathbb{R}_\infty$  é igual a  $\chi$ , onde  $\pi$  e  $i$  são projeções canônicas.*

**Teorema 2.7**  $\Sigma^0(Q, M)^c = \{[\chi] \in S(Q) \mid \chi \in \bigcup_v \Delta_S^v(Q)\},$

*onde  $\Sigma^0(Q, M)^c = S(Q) \setminus \Sigma^0(Q, M)$ .*

Demonstração: A demonstração desse resultado utiliza a teoria de valorizações. (Veja artigo [5]).

Para o cálculo do exemplo, precisamos do seguinte lema.

**Lema 2.3** *Seja  $v : B \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  uma valorização real do anel  $B$ . Se  $v(b_1) \neq v(b_2)$  então  $v(b_1 + b_2) = \min\{v(b_1), v(b_2)\}$*

Demonstração: Como  $0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = 2v(-1)$  então  $v(-1) = 0$ . Temos que  $v(-b_1) = v(-1 \cdot b_1) = v(-1) + v(b_1) = v(b_1)$ .

Suponha  $v(b_2) < v(b_1)$ , note que

$$\begin{aligned} v(b_2) &= v(b_2 + b_1 - b_1) \geq \min\{v(b_2 + b_1), v(-b_1)\}, \\ \text{mas } v(b_2 + b_1) &\geq \min\{v(b_1), v(b_2)\} = v(b_2) \text{ e} \\ v(-b_1) &= v(b_1) > v(b_2). \end{aligned}$$

Como  $v(b_2)$  não pode ser maior que ele mesmo obtemos  $v(b_2) = v(b_2 + b_1)$ .  $\square$

**Exemplo:** Seja  $Q$  o grupo abeliano livre gerado por 2 elementos, isto é,  $Q = \langle x, y \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$  e  $M = \mathbb{Z}Q/\mathbb{Z}Q(x + y + 1)$ .

Pelo teorema 2.7 sabemos que  $[\chi] \notin \Sigma^0(Q, M)$  se e somente se  $\chi \in \Delta_S^v(Q)$  para alguma valorização  $v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ . Isto significa que existe alguma valorização  $w : S \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  tal que restrita a  $\mathbb{Z}$  é igual a  $v$  e restrita a  $Q$  é igual a  $\chi$ .

Para calcular os  $[\chi] \notin \Sigma^0(Q, M)$ , basta saber quais são as possíveis imagens das valorizações  $w : S \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  em  $\{x, y\}$ . Pois para cada  $[\chi] \notin \Sigma^0(Q, M)$  existe uma valorização  $w : S \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  que restrita a  $Q$  é igual a  $\chi$  e para definir qualquer  $\chi : Q \rightarrow \mathbb{R}$  basta definir  $\chi(x)$  e  $\chi(y)$ .

Inicialmente observe que em  $S$ ,  $x + y + 1 = 0$ , portanto  $w(x + y + 1) = \infty$ .

Se  $w(x), w(y)$  e 1 são diferentes entre si então pelo lema 2.3 temos

$$\infty = w(0) = w(x + y + 1) = \min\{w(x), w(y), w(1)\},$$

portanto  $\infty = w(x) = w(y) = w(1) = 0$ .

Essa contradição nos dá as seguintes possibilidades para as valorizações:

1.  $w(x) = w(y)$ ,
2.  $w(y) = w(1) = 0$ ,
3.  $w(x) = w(1) = 0$ .

Vamos avaliar os casos separadamente.

Caso 1: Se  $w(x) = w(y) > w(1) = 0$  então  $w(x + y) \geq w(x) > w(1)$ , portanto  $w(x + y) \neq w(1)$ . Pelo lema 2.3 temos que

$$\infty = w(x + y + 1) = \text{mínimo} \{w(x + y), w(1)\} = w(1) = 0.$$

Portanto se  $w(x) = w(y)$  então  $w(x) = w(y) \leq w(1) = 0$ .

Caso 2: Para o caso de  $w(y) = 0$  temos que  $w(y + 1) \geq 0$ .  
Se  $w(x) < 0$  então pelo lema 2.3

$$\infty = w(x + (y + 1)) = w(x) < 0.$$

Portanto se  $w(y) = 0$  então  $w(x) \geq 0$ .

Caso 3: Trocando  $x$  por  $y$  no caso 2 obtemos o mesmo resultado. Se  $w(x) = 0$  então  $w(y) \geq 0$

Então para os  $[\chi] \notin \Sigma^0(Q, M)$  temos somente as seguintes possibilidades:

$$\chi(x) = \chi(y) < 0 \text{ ou } \chi(y) = 0 \text{ e } \chi(x) > 0 \text{ ou } \chi(x) = 0 \text{ e } \chi(y) > 0.$$

Isso nos fornece apenas 3 pontos em  $S(Q)$  que não pertencem a  $\Sigma^0(Q, M)$ .

## 2.5 Conjectura $FP_m$

**Definição 2.8** *Seja  $Q$  um grupo abeliano finitamente gerado e  $M$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo finitamente gerado.  $M$  é chamado de **m-manso**, como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo, se para quaisquer  $[\chi_1], \dots, [\chi_m] \in S(Q) \setminus \Sigma^0(Q; M)$  temos  $\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_m \neq 0$ .*

**Conjectura  $FP_m$**  *Seja  $1 \rightarrow M \rightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$  uma seqüência exata de grupos com  $M, Q$  abelianos e  $G$  finitamente gerado. Então  $G$  tem tipo  $FP_m$  se e somente se  $M$  é  $m$ -manso como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo.*

A definição da conjectura é para qualquer  $G$  metabeliano. Nos próximos capítulos se encontra demonstrado que se  $M$  é 2-manso então  $G$  é  $FP_2$ , para o caso de  $G = M \rtimes Q$ , isto é, quando a seqüência acima é cindida. No último capítulo é dada uma idéia da demonstração do fato:  $M$  é 3-manso então  $G$  é  $FP_3$ , para  $G = M \rtimes Q$  e discutimos as dificuldades encontradas.

Daqui para frente assumimos que  $M$  é 2-manso. Observamos que o  $\mathbb{Z}Q$ -módulo  $M$  da seção 2.4 é 2-manso, mas não é 3-manso.

## 2.6 Redução ao caso $Q \simeq \mathbb{Z}^n$

Como todo grupo abeliano finitamente gerado,  $Q \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T$  onde  $T$  é o seu subgrupo de torção. Como  $Q$  é finitamente gerado então  $T$  é finito.

**Lema 2.4** *O índice do grupo  $M \rtimes \mathbb{Z}^n$  em  $M \rtimes (\mathbb{Z}^n \oplus T) = M \rtimes Q = G$  é finito.*

Demonstração:

Observe que  $M \rtimes \mathbb{Z}^n$  é normal em  $M \rtimes (\mathbb{Z}^n \oplus T)$ , pois  $[G, G] \subset M \subset M \rtimes \mathbb{Z}^n$  e todo subgrupo de  $G$  que contém  $[G, G]$  é normal. O quociente de  $M \rtimes (\mathbb{Z}^n \oplus T)$  por  $M \rtimes \mathbb{Z}^n$  é isomorfo  $T$ , mas  $T$  é finito.  $\square$

Com o teorema 1.14 e com o lema 2.4 concluímos que é suficiente considerar o caso  $G = M \rtimes \mathbb{Z}^n$ , isto é,  $Q = \mathbb{Z}^n$ , para demonstrar que  $G$  tem tipo  $FP_2$  se  $M$  for 2-manso.

## 2.7 Lema Geométrico

Considere uma coleção finita  $H$  de subconjuntos finitos  $L \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que um elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  pode ser levado a

$$B_\rho = \{x, |x| < \rho, x \in \mathbb{R}^n\}$$

por  $H$  se  $x \in B_\rho$  ou existe  $L \in H$  tal que  $x + L = \{x + y, y \in L\} \subseteq B_\rho$ .

**Lema 2.5 (Lema geométrico):** *Se para todo  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$  existir  $L \in H$  tal que o produto interno  $\langle x, y \rangle > 0$  para todo  $y \in L$ , então existe um raio  $\rho_0$  e uma função*



$e : \{\rho \in \mathbb{R}, \rho > \rho_0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  com a propriedade que cada elemento de  $B_{\rho+e(\rho)}$  pode ser levado a  $B_\rho$  por  $H$ .

Demonstração: Definem-se dois números auxiliares  $C$  e  $D$  da seguinte maneira. Seja  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  a esfera unitária e considere a função  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(u) = \max_{L \in H} \min_{y \in L} \{\langle u, y \rangle\}, \text{ para } u \in S^{n-1}.$$

A função  $f$  é contínua e  $H$  satisfaz a hipótese do lema então temos que  $f(u) > 0$  para todo  $u \in S^{n-1}$ . Como  $S^{n-1}$  é compacto temos que

$$C = \inf\{f(u) \mid u \in S^{n-1}\} > 0.$$

O segundo número  $D$  é definido por

$$D = \max_{L \in H} \max_{y \in L} \{|y|\},$$

onde  $|y|$  denota a norma euclidiana. Logo  $L \subset \overline{B_D}$  para todo  $L \in H$ , onde  $\overline{B_\rho}$  denota o fecho de  $B_\rho$ . Afirimo que o lema é valido para a seguinte escolha explícita de  $\rho_0$  e  $e(\rho)$ :

$$\rho_0 = D^2/2C, \quad e(\rho) = C - (D^2/2\rho).$$

Note que  $e$  é uma função positiva e crescente definida em  $\{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho > \rho_0\}$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|x| \geq \rho_0$ . Por definição de  $C$  existe  $L = L_x \in H$  tal que

$$\begin{aligned} \min_{y \in L_x} \{\langle -x/|x|, y \rangle\} &\geq C, \\ \text{ou} \\ \max_{y \in L_x} \{\langle x/|x|, y \rangle\} &\leq -C. \end{aligned}$$

Portanto nós temos que para todo  $y \in L_x$ ,

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x/|x|, y \rangle|x| + |y|^2 \leq |x|^2 - 2C|x| + D^2 \leq |x|^2.$$

Além disso temos que  $|x + y| - |x| = \frac{|x+y|^2 - |x|^2}{|x+y| + |x|} \leq \frac{-2C|x| + D^2}{2|x|} = -e(|x|).$

Se em particular  $x$  e  $\rho$  são tais que  $\rho_0 < \rho \leq |x| < \rho + e(\rho)$  obtemos

$$|x + y| < (\rho + e(\rho)) - e(|x|) \leq \rho, \text{ para todo } y \in L_x.$$

Então  $x + L_x \subseteq B_\rho$ . Isso mostra que  $x$  pode ser levado a  $B_\rho$  por  $H$ .  $\square$

Com o lema geométrico podemos provar o seguinte resultado.

**Teorema 2.8** *Se  $Q$  é um grupo abeliano finitamente gerado e  $M$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo finitamente gerado então  $\Sigma^0(Q, M) = S(Q)$  se e somente se  $M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}$ -módulo.*

Demonstração: Seja  $T$  o subgrupo de torção de  $Q$  e  $\pi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  um homomorfismo que induz um isomorfismo  $Q/T \simeq \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Para cada  $\rho \in \mathbb{R}^+$  seja  $X_\rho = \pi^{-1}(B_\rho)$  a pré-imagem da bola aberta  $B_\rho$ . Então  $\{X_\rho \mid \rho \in \mathbb{R}^+\}$  é uma cadeia crescente de subconjuntos cuja união é  $Q$ . Note que se  $k$  é um inteiro positivo temos

$$X_{\sqrt{k}} = X_\rho, \text{ para } \sqrt{k-1} < \rho \leq \sqrt{k}.$$

Se  $S(Q) = \Sigma^0(Q, M)$  então os conjuntos  $\{[\chi] \mid \chi(\lambda) > 0\}$ , para  $\lambda \in C(M)$ , formam uma cobertura aberta do compacto  $S(Q)$ . Portanto existe um subconjunto finito  $R \subset C(M)$  tal que

$$S(Q) = \bigcup_{\lambda \in R} \{[\chi], \chi(\lambda) > 0\}.$$

Isso junto com o fato que os homomorfismos de  $Q$  em  $\mathbb{R}$  podem ser interpretados como produto escalar nos dá que o conjunto  $H = \{\sup(\lambda) \mid \lambda \in R\}$  satisfaz a hipótese do lema geométrico. Portanto para esse  $H$  existe  $\rho_0$  e uma função  $e : \{\rho > \rho_0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  com a seguinte propriedade. Para cada  $\rho > \rho_0$  e  $q \in X_{\rho+e(\rho)}$  existe  $\lambda \in R$  tal que  $\lambda q \in \mathbb{Z}X_\rho$ . Como  $\lambda$  centraliza  $M$  isto implica que  $mq = m\lambda q \in m\mathbb{Z}X_\rho$  para todo  $m \in M$ . Variando  $q \in X_{\rho+e(\rho)}$  temos

$$m\mathbb{Z}X_{\rho+e(\rho)} = m\mathbb{Z}X_\rho,$$

para cada  $\rho > \rho_0$  e  $m \in M$ . Aplicamos isso para  $\rho = \sqrt{k} > \rho_0$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , podemos concluir que  $m\mathbb{Z}Q = m\mathbb{Z}X_\rho$ , para cada  $\rho > \rho_0$ . Como  $X_\rho$  é finito e  $M$  é finitamente gerado sobre  $\mathbb{Z}Q$  segue que  $M$  é finitamente gerado sobre  $\mathbb{Z}$ . Para a outra implicação observe que se  $M = m_1\mathbb{Z} + \dots + m_s\mathbb{Z}$  então  $M = m_1\mathbb{Z}Q_\chi + \dots + m_s\mathbb{Z}Q_\chi$  para cada  $[\chi] \in S(Q)$ .

# Capítulo 3

## Uma Resolução Livre

### 3.1 A Resolução Parcial de $\mathbb{Z}$ .

Objetivo dessa seção é apresentar o complexo  $F$  que é uma resolução parcial de  $\mathbb{Z}$  de comprimento 3 constituída de  $\mathbb{Z}G$ -módulos. Ele será utilizado na demonstração de uma das implicações da conjectura  $FP_2$  para  $G = M \rtimes Q$ .

Seja  $G = M \rtimes Q$  um grupo finitamente gerado com  $M$  e  $Q$  abelianos. Consideramos  $M$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo à direita com a ação de  $Q$  via conjugação, como foi explicado na seção 2.1. Consideramos  $Q \simeq \mathbb{Z}^n$  (Essa redução já foi explicada na seção 2.6).

Pelo lema 2.1,  $M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo e  $Q$  é finitamente gerado como grupo. Pelo corolário 2.2,  $\mathbb{Z}Q$  é anel Noetheriano. Concluimos que  $M$  é um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo Noetheriano. Isso garante que  $M$  é  $FP_n$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo, para todo  $n \geq 0$ . Portanto existe uma seqüência exata de  $\mathbb{Z}Q$ -módulos

$$\mathbb{Z}C \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}B \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}A \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

onde  $C, B, A$  são uniões finitas e disjuntas de  $Q$ -órbitas livres, i.e.,  $\mathbb{Z}A, \mathbb{Z}B, \mathbb{Z}C$  são  $\mathbb{Z}Q$ -módulos livres de posto finito.

Essa seqüência está relacionada com a resolução  $F$ .

**Teorema 3.1** *Existe uma resolução  $F$  de  $\mathbb{Z}G$ -módulos*

$$F_3 \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}M \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

com  $F_3, F_2, F_1$  livres e definidos por

$$F_3 = \bigoplus_{a_1, a_2, a_3 \in A} e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3} \mathbb{Z}M \oplus \bigoplus_{a \in A, b \in B} e_a e_b \mathbb{Z}M \oplus \bigoplus_{c \in C} e_c \mathbb{Z}M$$

$$F_2 = \bigoplus_{a_1, a_2 \in A} e_{a_1} e_{a_2} \mathbb{Z}M \oplus \bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M$$

$$F_1 = \bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M.$$

Além disso esse complexo em dimensão  $\geq 1$  possui um produto anticomutativo e as derivadas satisfazem a regra de Leibniz  $\partial(n.m) = \partial(n)m + (-1)^{\dim(n)}n\partial(m)$ .

Nesse capítulo demonstra-se que o complexo é exato até dimensão 1. O teorema 3.1 é uma versão particular do resultado principal da referência [10]. Esse fato é utilizado na demonstração da conjectura  $FP_2$ . No último capítulo apresentamos uma idéia da demonstração da conjectura  $FP_3$  utilizando esse complexo.

**Definição 3.1** Chamamos de **base de  $F$**  o conjunto

$$\{e_{a_1}, e_{b_1}, e_{a_1}e_{a_2}, e_{a_1}e_{b_1}, e_{a_1}e_{a_2}e_{a_3}, e_c \mid a_1, a_2, a_3 \in A, b_1 \in B, c \in C\}.$$

A justaposição de elementos da base significa produto desses elementos, com isso obtemos que

$$\begin{aligned} e_{a_1}e_{a_2} &= (-1)^{\dim a_1 \cdot \dim a_2} e_{a_2}e_{a_1} = -e_{a_2}e_{a_1} \\ e_a e_b &= (-1)^{\dim a \cdot \dim b} e_b e_a = e_b e_a. \end{aligned}$$

**Observação 1:** Definimos a ação de  $Q$  em  $e_a \lambda$  como  $(e_a \lambda)q = e_{aq}(\lambda q)$ , com  $\lambda \in \mathbb{Z}M$ . Para  $e_b \lambda$ ,  $e_c \lambda$  é análogo. Para definir a ação de  $Q$  em um produto, distribuimos a ação em cada elemento do produto. Essa ação é livre sobre a base de  $F$  portanto os módulos  $F_i$  são  $\mathbb{Z}G$ -módulos livres.

**Observação 2:** Como as derivadas devem satisfazer a regra de Leibniz só é necessário definir  $\partial_1(e_a), \partial_2(e_b), \partial_3(e_c)$ . Essas derivadas preservarão a ação de  $Q$  então esse é um complexo de  $\mathbb{Z}G$ -módulos.

### 3.2 Definição de $\partial_1$

Considere o mapa  $\mathbb{Z}A \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$  da seqüência exata (3.1).

Note que  $\mathbb{Z}A \simeq F(A)/[F(A), F(A)]$ . Recordamos que  $F(A)$  denota o grupo livre com base  $A$  e  $F(A)/[F(A), F(A)]$  é o grupo livre abeliano com base  $A$ .

Defina o homomorfismo de grupos  $\delta : F(A) \rightarrow M$  como  $\delta = d_0\pi$ , onde  $\pi$  é a projeção canônica de  $F(A)$  em  $\mathbb{Z}A$ . Seja  $R = \text{Ker}(\delta)$  então  $F(A)/R \simeq M$ .

No nosso caso  $M$  é comutativo então  $\mathbb{Z}M$  é comutativo. Podemos considerar  $C_*\tilde{Y}$  do teorema 1.13 como  $\mathbb{Z}M$ -módulos à direita com a multiplicação  $e_a m = m e_a$ . A seqüência exata do mesmo teorema nos fornece até dimensão 1, o complexo  $F$ .

Assim a nossa definição para  $\partial_1$  do teorema 3.1 é  $\partial_1(e_a) = \delta(a) - 1_M$ . Por simplicidade denotaremos  $\delta(a) = \bar{a}$ .

Além disso o teorema 1.13 nos diz qual é o núcleo de  $\partial_1$ . Portanto já temos  $F$  exato em dimensão 0. Para definí-lo em dimensão 2 e provar sua exatidão em dimensão 1, precisamos de uma descrição algébrica do mapa  $d$  do teorema 1.13. Ela é dada pela derivada de Fox.

### 3.3 Derivada de Fox

**Definição 3.2** *Seja  $F$  um grupo e  $Q$  um  $\mathbb{Z}F$ -módulo. Denotamos por **derivada** de  $F$  para  $Q$  uma função  $d : F \rightarrow Q$  tal que  $d(fg) = d(f) + fd(g)$ , para todo  $f, g \in F$ .*

*Se  $F = F(A)$  e  $Q$  é livre com base  $\{d(a) \mid a \in A\}$  então o coeficiente de  $d(f)$  com respeito a  $d(a)$  é denotado por  $\partial f / \partial a$ , portanto  $d(f) = \sum_a (\partial f / \partial a) d(a)$ . Nesse caso  $d(f)$  é chamado de Derivada (Livre) de Fox.*

**Lema 3.1**  *$\partial / \partial a : F \rightarrow \mathbb{Z}F$  é uma derivada que satisfaz  $\partial b / \partial a = \delta_{a,b}$ , para  $b \in A$ . Essa propriedade caracteriza  $\partial / \partial a$  completamente.*

Demonstração: Como  $d(fg) = d(f) + fd(g)$  e  $Q$  é livre com base  $\{d(a) \mid a \in A\}$ , temos que  $\partial(fg) / \partial a = \partial f / \partial a + f(\partial g / \partial a)$ . Agora  $d(a) = 1 \cdot d(a)$ , portanto  $\partial a / \partial a = 1$  e  $\partial b / \partial a = 0$ , para  $a \neq b \in A$ .  $\square$

**Exemplo 1:** Como  $d(1) = 0$  temos

$$0 = d(a^{-1}a) = d(a^{-1}) + a^{-1}d(a) \Rightarrow d(a^{-1}) = -a^{-1}da$$

Portanto

$$\partial(a^{-1})/\partial a = -a^{-1} \text{ e } \partial(a^{-1})/\partial b = 0, \text{ se } a \neq b \in A.$$

**Exemplo 2:** Sejam  $a, b \in A$  então

$$\begin{aligned} \partial(aba^{-1}b^{-1})/\partial a &= 1 - aba^{-1}, \\ \partial(aba^{-1}b^{-1})/\partial b &= a - aba^{-1}b^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } d(aba^{-1}b^{-1}) = (1 - aba^{-1})da + (a - aba^{-1}b^{-1})db.$$

**Lema 3.2** *Se  $F = F(A)$  então qualquer derivação  $d : F \rightarrow Q$  pode ser descrita por  $d(f) = \sum_{a \in A} (\partial f / \partial a) da$ .*

Demonstração: Para qualquer derivação  $d : F \rightarrow Q$ , sua imagem está contida no submódulo de  $Q$  gerado por  $\{d(a) \mid a \in A\}$ . Se  $d(a) = 0$  para todo  $a \in A$  então a derivação é nula. Portanto se duas derivações  $d_1$  e  $d_2$  satisfazem  $d_1(a) = d_2(a)$  para todo  $a \in A$  então a derivação  $d_1 - d_2$  é nula, implicando que  $d_1 = d_2$ .

Seja  $M$  o submódulo de  $Q$  gerado por  $\{d(a) \mid a \in A\}$  e  $Q'$  o  $\mathbb{Z}F$ -módulo livre com base  $\{d(a) \mid a \in A\}$ .

Seja  $\pi : Q' \rightarrow M$  a projeção canônica. Defina  $d_1 : F \rightarrow Q'$  como a derivada (livre) de Fox, com  $d_1(a) = d(a)$ . Como  $\pi d_1(a) = d(a)$  para todo  $a \in A$  e  $\pi d_1 : F \rightarrow M \subset Q$  também é uma derivação, temos que  $\pi d_1$  e  $d$  são iguais.  $\square$

### Descrição Algébrica do mapa $d$ do teorema 1.13:

Na demonstração do teorema 1.13 vimos que  $d : R_{ab} \rightarrow \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Me_a$  é induzido pela restrição do mapa  $\tilde{d} : F(A) \rightarrow \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Me_a$  ( $\tilde{d}(f) = \tilde{f}$  = levantamento do caminho  $f$ ) ao  $R \subset F(A)$ .

Por definição  $\tilde{d}$  é um derivação de  $F$  em  $\bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}Me_a$ . Como  $d(a) = e_a$ , pelo lema 3.2, temos que

$$d([r]) = \tilde{d}(r) = \sum_a (\overline{\partial r / \partial a}) e_a,$$

onde  $\partial r / \partial a \in \mathbb{Z}F$ ,  $F = F(A)$ ,  $[r]$  é a classe de  $r \in R$  em  $R_{ab}$  e  $\overline{\partial r / \partial a}$  é a imagem de  $\partial r / \partial a$  pelo homomorfismo  $\mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}M$  induzido pelo homomorfismo  $\delta : F \rightarrow M$ .

Como foi observado na seção 3.2, podemos considerar  $\bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}M e_a$  como um  $\mathbb{Z}M$ -módulo a direita. Então

$$d([r]) = \sum_a (\overline{\partial r / \partial a}) e_a = \sum_a e_a (\overline{\partial r / \partial a})$$

Obtemos assim um mapa, que também será denotado por  $d$ ,

$$d : R_{ab} \rightarrow \bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M, \quad d([r]) = \sum_{a \in A} e_a (\overline{\partial r / \partial a}).$$

### 3.4 A Exatidão de F em Dimensão 1.

O objetivo agora é definir  $\partial_2$  de tal forma que sua imagem seja igual a imagem de  $R_{ab}$  em  $\bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M$ , provando assim que o complexo F é exato em dimensão 1.

Como nosso  $M$  é comutativo o subgrupo normal  $R$  de  $F(A)$  contém o subgrupo dos comutadores. Então  $aba^{-1}b^{-1} \in R$  para todo  $a, b \in A$ .

O exemplo 2, na seção da Derivada de Fox, nós diz que

$$\partial(aba^{-1}b^{-1})/\partial a = (1 - aba^{-1}) \text{ e } \partial(aba^{-1}b^{-1})/\partial b = (a - aba^{-1}b^{-1})$$

Então a imagem de  $[aba^{-1}b^{-1}]$  em  $\bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M$  pelo mapa  $d$  é

$$d([aba^{-1}b^{-1}]) = e_a(1 - \bar{b}) - e_b(1 - \bar{a}).$$

**Definição 3.3**  $\partial_2(e_{a_1}e_{a_2}) = d([a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}]) = e_{a_1}(1 - \bar{a}_2) - e_{a_2}(1 - \bar{a}_1)$

*Portanto*

$$\partial_2(e_{a_1}e_{a_2}) = \partial_1(e_{a_1})e_{a_2} + (-1)^{\dim(e_{a_1})}e_{a_1}\partial_1(e_{a_2}).$$

Como  $R = \pi^{-1}(\text{Ker}(d_0))$  e o  $\text{Ker}(d_0) = \text{Im}(d_1)$ , pois a sequência 3.1 é exata, então  $R = \pi^{-1}(\text{Im}(d_1))$ .

**Definição 3.4** Para cada  $b \in B$  escolha um  $r_b \in R$  tal que  $\pi(r_b) = d_1(b)$ , definimos

$$\partial_2(e_b) = d([r_b]).$$

Para terminar essa seção só precisamos provar que  $\partial_2$ , com essas definições na base, tem a mesma imagem de  $d : R_{ab} \rightarrow \bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M$ .

**Lema 3.3** *A imagem de  $\partial_2$  é igual a imagem de  $d : R_{ab} \rightarrow \bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M$ . Portanto o complexo  $F$  é exato em dimensão 1.*

Demonstração: Pelo lema 1.1, o subgrupo de comutadores de  $F = F(A)$  é gerado por  $\{fa_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} f^{-1} \mid a_i, a_j \in A, f \in F\}$ . Portanto a imagem de  $[F, F]/[R, R] \subset R_{ab}$  por  $d$  é o submódulo de  $\bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M$  gerado por  $\{d([a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}]) \mid a_i, a_j \in A\}$ . Mas  $\partial_2(\bigoplus_{a_1, a_2 \in A} e_{a_1} e_{a_2} \mathbb{Z}M)$  é exatamente esse submódulo.

Por outro lado  $R = \pi^{-1}(Im(d_1)) = \langle \{r_b, b \in B\} \cup [F, F] \rangle$ . Então  $d(R_{ab})$  é o submódulo gerado por  $d([r_b])$ , para todo  $b \in B$  e  $d([F, F]/[R, R])$ . Mas esse submódulo é exatamente a imagem de  $\partial_2$ .  $\square$



## Capítulo 4

### A Conjectura $FP_2$ para $G = M \rtimes Q$

Observamos que  $F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow \text{Aug}\mathbb{Z}M \rightarrow 0$  é uma resolução livre parcial do  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$ .

Dentre os módulos de  $F$ , não são finitamente gerados os seguintes módulos:

$$\bigoplus_{a_1, a_2 \in A} e_{a_1} e_{a_2} \mathbb{Z}M, \quad \bigoplus_{a \in A, b \in B} e_a e_b \mathbb{Z}M, \quad \bigoplus_{a_1, a_2, a_3 \in A} e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3} \mathbb{Z}M.$$

O objetivo desse capítulo é mostrar como a condição 2-mansão garante a existência de um submódulo de  $\bigoplus_{a_1, a_2 \in A} e_{a_1} e_{a_2} \mathbb{Z}M$ , finitamente gerado que pode substituí-lo no complexo e ainda assim obtemos uma resolução parcial do  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$ , provando que  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  é  $FP_1$ . No apêndice desse capítulo mostramos que  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  é  $FP_1$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo se e somente se  $\text{Aug}\mathbb{Z}G$  é  $FP_1$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo mas isso é equivalente a  $\mathbb{Z}$  ser  $FP_2$ , provando assim a conjectura  $FP_2$  no caso cindido.

#### 4.1 Um Corolário do Lema Geométrico

Recordamos que  $A$  é uma união disjunta de um número finito de  $Q$ -órbitas livres. Seja  $R_a = \{a_1, \dots, a_k\}$  um conjunto de representantes das  $Q$ -órbitas de  $A$  e  $\pi : Q \rightarrow \mathbb{Z}^n$  um isomorfismo.

**Definição 4.1** Se  $a = a_s q$  com  $a_s \in R_a$  e  $q \in Q$  definimos o **suporte de  $a$**  como  $\text{sup}(a) = \{q\}$ . Se  $\sum n_a a \in \mathbb{Z}A \setminus \{0\}$ , define-se  $\text{sup}(\sum n_a a) = \bigcup_{n_a \neq 0} \text{sup}(a)$ .

**Lema 4.1** *Se  $M$  é 2-manso então é possível modificar a seqüência 3.1 de tal maneira que ela satisfaça o seguinte condição:*

*Existe  $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$  e uma função crescente  $e(\rho) : \{\rho \mid \rho > \rho_0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que se  $\pi(q) \in B_{\rho+e(\rho)}$ , para  $\rho > \rho_0$ , então para todo  $a_s \in R_a$  existe  $b \in B$  tal que*

$$d_1(b) = a_s q - \sum_j n_j a'_j, \text{ com } a'_j \in A \text{ e } \pi(\sup(\sum n_j a'_j)) \in B_\rho,$$

*ou existe  $b$  tal que*

$$d_1(b) = a_s q^{-1} - \sum_k n_k a'_k, \text{ com } a'_k \in A \text{ e } \pi(\sup(\sum n_k a'_k)) \in B_\rho,$$

*onde  $d_1$  é o mapa que aparece na seqüência (3.1).*

Demonstração do lema 4.1:

Para nós  $M$  é um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo à direita, define-se  $M^*$  como sendo o grupo  $M$  com a seguinte ação a esquerda de  $Q$ ,  $qm = mq^{-1}$ . Essa ação à esquerda será usada somente nessa demonstração. Isso torna  $M^*$  um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo à esquerda. Como grupo eles são iguais, mas como  $\mathbb{Z}Q$ -módulos não. Note que  $C(M^*) = \{\lambda \in \mathbb{Z}Q \mid \lambda m = m, \forall m \in M\}$ .

Se  $M$  é 2-manso então

$$S(Q) = \Sigma^0(Q, M) \cup -\Sigma^0(Q, M),$$

mas  $\Sigma^0(Q, M^*) = -\Sigma^0(Q, M)$  então

$$S(Q) = \Sigma^0(Q, M) \cup \Sigma^0(Q, M^*).$$

Obtemos que para todo  $[\chi] \in S(Q)$  existe  $\lambda \in C(M)$  ou  $C(M^*)$  tal que  $\chi(\lambda) > 0$ . Podemos escrever

$$S(Q) = \bigcup_{\lambda \in C(M)} \{[\chi] \mid \chi(\lambda) > 0\} \cup \bigcup_{\tilde{\lambda} \in C(M^*)} \{[\chi] \mid \chi(\tilde{\lambda}) > 0\}.$$

Como  $S(Q)$  é compacto temos

$$S(Q) = \bigcup_{i=1}^k \{[\chi] \mid \chi(\lambda_i) > 0\} \cup \bigcup_{j=1}^m \{[\chi] \mid \chi(\tilde{\lambda}_j) > 0\}.$$

Seja

$$R = \{\lambda_i, \tilde{\lambda}_j \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m\}.$$

Para todo  $a \in A$  temos que  $a - a\lambda_i$  e  $a - \tilde{\lambda}_j a$  pertencem ao núcleo do mapa  $d_0$  da seqüência (3.1). Se  $a = a_s q$  então

$$a - a\lambda_i = (a_s - a_s\lambda_i)q \text{ e } a - \tilde{\lambda}_j a = (a_s - \tilde{\lambda}_j a_s)q.$$

Posso acrescentar um número finito de  $Q$ -órbitas livres e disjuntas a  $B$ , com representantes  $b_{i,s}$  e  $b_{j,s}$  e definir

$$d_1(b_{i,s}) = a_s - a_s\lambda_i \text{ e } d_1(b_{j,s}) = a_s - \tilde{\lambda}_j a_s.$$

Desse modo  $\mathbb{Z}B$  continua sendo um  $\mathbb{Z}Q$ -módulo livre e finitamente gerado. Se modificarmos  $C$  apropriadamente continuamos com a seqüência (3.1) exata, mas agora para cada  $a - a\lambda_i$  e  $a - \tilde{\lambda}_j a$  existem  $b, b' \in B$  tais que  $d_1(b) = a - a\lambda_i$  e  $d_1(b') = a - \tilde{\lambda}_j a$ .

Agora para terminar a demonstração vamos usar o lema geométrico.

Considere o conjunto  $H$  que possui como elementos os conjuntos  $\pi(\sup(\lambda_i))$  e  $\pi(\sup(\tilde{\lambda}_j))$ ,  $\lambda_i, \tilde{\lambda}_j \in R$ .

Para todo  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  obtemos o caracter  $\chi(y) = \langle v, \pi(y) \rangle \in \text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ . Como  $[\chi] \in S(Q)$  então existe  $\lambda_i \in R$  tal que  $\langle v, \pi(q) \rangle > 0$ ,  $\forall q \in \sup(\lambda_i)$  (equivalente a  $\chi(\lambda_i) > 0$ ) ou existe  $\tilde{\lambda}_j \in R$  tal que  $\langle v, \pi(q) \rangle > 0$ ,  $\forall q \in \sup(\tilde{\lambda}_j)$  (equivalente a  $\chi(\tilde{\lambda}_j) > 0$ ). Portanto esse  $H$  satisfaz a hipótese do lema geométrico. Seja  $\rho_0$  e  $e(\rho)$  aqueles obtidos do lema geométrico com esse  $H$ .

Se  $\pi(q) \in B_{\rho+e(\rho)} \setminus B_\rho$  então existe  $L$  em  $H$  tal que  $\pi(q) + L \subset B_\rho$ .

Se  $L = \pi(\sup(\lambda_i))$ , seja  $\lambda_i = \sum_j n_{ij} q_{ij}$ .  
Se  $a = a_s q$  então

$$a - a_s q \lambda_i = a - \sum_j n_{ij} a_s q q_{ij}.$$

Sabemos que  $\pi(q) + \pi(q_{ij}) = \pi(qq_{ij}) \in B_\rho$  e que existe  $b$  tal que

$$d_1(b) = a_s q - \sum_j n_{ij} a_s q q_{ij},$$

defina  $a_s q q_{ij} = a'_j$  e temos o resultado.

Se  $L = \pi(\sup(\tilde{\lambda}_j))$ , seja  $\tilde{\lambda}_j = \sum_k n_{jk} q_{jk}$ . Se  $a = a_s q^{-1}$  então

$$a - \tilde{\lambda}_j a_s q^{-1} = a - \sum_k n_{jk} a_s q^{-1} q_{jk}^{-1}.$$

Temos que  $\pi(q) + \pi(q_{jk}) = \pi(q q_{jk}) \in B_\rho$  portanto  $\pi(q^{-1} q_{jk}^{-1}) = -\pi(q q_{jk}) \in B_\rho$ . Existe b tal que

$$d_1(b) = a - \sum_k n_{jk} a_s q^{-1} q_{jk}^{-1},$$

defina  $a_s q^{-1} q_{jk}^{-1} = a'_k$  e temos o resultado.  $\square$

## 4.2 Uma demonstração para 2-mansó $\Rightarrow FP_2$ .

**Definição 4.2** Se  $w = \sum_n x_n \lambda_n \neq 0$ , onde  $x_n \in \{e_{a_1}, e_{b_1}, e_{a_1} e_{a_2}, e_{a_1} e_{b_1}, e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3}, e_c \mid a_1, a_2, a_3 \in A, b_1 \in B, c \in C\}$  e  $\lambda_n \in \mathbb{Z}M$  então definimos o **suporte de  $w$**  como

$$\sup(w) = \cup_{\lambda_n \neq 0} \sup(x_n).$$

A definição do suporte dos elementos da base se encontra abaixo:

$\sup(e_a) = \sup(a)$ , onde  $\sup(a)$  está descrito na definição 4.1,

$\sup(e_b) = \sup(\partial_2(e_b))$ ,

$\sup(e_{a_1} e_{a_2}) = \sup(e_{a_1}) \cup \sup(e_{a_2})$ ,

$\sup(e_a e_b) = \sup(e_a) \cup \sup(e_b)$ ,

$\sup(e_c) = \sup(\partial_3(e_c))$ ,

$\sup(e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3}) = \sup(e_{a_1}) \cup \sup(e_{a_2}) \cup \sup(e_{a_3})$ .

Assim o  $\sup(w)$  é um subconjunto finito de  $Q$ .

Fixamos um isomorfismo  $\pi : Q \rightarrow \mathbb{Z}^n$ .

**Definição 4.3** Se  $w \in F_n$  definimos o diâmetro do suporte de  $w$  ( $\text{diam}\sup(w)$ ) como sendo o diâmetro da menor bola fechada que contém  $\pi(\sup(w))$ .

Observe que  $\text{sup}(wq) = \text{sup}(w)q$ , para  $q \in Q$ , portanto

$$\pi(\text{sup}(wq)) = \pi(\text{sup}(w)) + \pi(q).$$

Concluimos que  $\text{diam sup}(w) = \text{diam sup}(wq)$ .

**Definição 4.4** *Seja  $F_n^d$  o submódulo gerado pelos elementos da base de  $F_n$  cujo diâmetro do seus suportes é menor do que  $d$ .*

Como  $\text{diam sup}(e_a) = 0$  temos que  $\bigoplus_{a \in A} e_a \mathbb{Z}M = F_1^d$  para todo  $d$ . Se  $d$  for suficientemente grande então  $\bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M \subset F_2^d$ , pois

$$B = \bigcup_{i=1}^k b_i Q$$

e assim  $\text{diam sup}(e_b) \leq \max\{\text{diam sup}(e_{b_1}), \dots, \text{diam sup}(e_{b_k})\}$ .

**Lema 4.2** *Para todo  $d \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M \subset F_2^d$  temos que  $F_2^d$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G$ -módulo.*

Demonstração: Já temos que  $\bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M$  é finitamente gerado.

Agora preciso provar que só existe um número finito de órbitas de  $Q$  no conjunto  $\{e_{a_1}e_{a_2} \mid a_1, a_2 \in A\} \cap F_2^d$ .

Se  $e_{a_1}e_{a_2} \in F_2^d$  então  $\text{diam sup}(e_{a_1}e_{a_2}) < d$ . Seja  $a_1 = a_s q$  e  $a_2 = a_r q'$ , com  $a_s, a_r \in R_a$ . Observe que  $e_{a_1}e_{a_2} = (e_{a_s}e_{a_2 q^{-1}})q$ .

Então  $e_{a_1}e_{a_2} \in F_2^d$  se e somente se  $e_{a_s}e_{a_2 q^{-1}} \in F_2^d$ , mas isso ocorre se

$$\text{diam sup}(e_{a_s}e_{a_2 q^{-1}}) = \text{diam } \{1, q'q^{-1}\} = |\pi(q'q^{-1}) - \pi(1)| = |\pi(q'q^{-1})| < d.$$

Como  $\text{Im}(\pi) = \mathbb{Z}$ , só existe um número finito de  $q \in Q$  tal que  $|\pi(q)| < d$ .

Com isso obtemos que se  $e_{a_1}e_{a_2} \in F_2^d$  então  $e_{a_1}e_{a_2}$  pertence a órbita de  $e_{a_s}e_{a_r}\tilde{q}$ , para algum  $a_s \in R_a$ ,  $a_r \in R_a$  e  $\tilde{q}$  tal que  $|\pi(\tilde{q})| < d$ . Mas só existe um número finito de  $e_{a_s}e_{a_r}\tilde{q}$  com essas propriedades. Portanto só existe um número finito de órbitas de  $Q$  no conjunto  $\{e_{a_1}e_{a_2} \mid a_1, a_2 \in A\} \cap F_2^d$ .  $\square$

A demonstração para ( $M$  é 2-manso  $\Rightarrow G$  é  $FP_2$ ) decorre do seguinte teorema.

**Teorema 4.1** *Seja  $M$  do tipo 2-mansso. Então existe  $K > 0$  e uma função crescente  $e : \{d \mid d > K\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para cada  $d > K$  existe um  $\mathbb{Z}G$ -homomorfismo  $\varphi_d : F_2^{d+e(d)} \rightarrow F_2^d$  tal que  $\partial_2 \varphi_d = \partial_2$  e  $\varphi_d$  restrito a  $F_2^d$  é identidade.*

Demonstração de 2-mansso  $\Rightarrow FP_2$  usando teorema 4.1:

Seja  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Se  $\sqrt{k_0} > \max\{\text{diam } \text{sup}(e_{b_1}), \dots, \text{diam } \text{sup}(e_{b_k})\}$  então

$$\bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M \subset F_2^{\sqrt{k_0}}.$$

Como  $e(d)$  é uma função crescente positiva então existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sqrt{k_1 - 1} < \sqrt{k_0} + e(\sqrt{k_0}) \leq \sqrt{k_1}.$$

Agora observe que o  $\text{sup}(e_{a_1}e_{a_2}) = \text{sup}(e_{a_1}) \cup \text{sup}(e_{a_2})$  então o

$$\text{diam } \text{sup}(e_{a_1}e_{a_2}) = |\pi(\text{sup}(e_{a_1})) - \pi(\text{sup}(e_{a_2}))| \in \sqrt{\mathbb{N}}.$$

Portanto todos os  $e_{a_1}e_{a_2}$  que satisfazem  $\sqrt{k_1 - 1} \leq \text{diam } \text{sup}(e_{a_1}e_{a_2}) < \sqrt{k_1}$ , na verdade possuem  $\text{diam } \text{sup}(e_{a_1}e_{a_2}) = \sqrt{k_1 - 1}$ . Como também sabemos que

$$\bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M \subset F_2^{\sqrt{k_0}} \subset F_2^{\sqrt{k_1}},$$

obtemos  $F_2^{\sqrt{k_0}+e(\sqrt{k_0})} = F_2^{\sqrt{k_1}}$ .

Posso construir uma seqüência crescente de  $k_n \in \mathbb{N}$  tais que

$$F_2^{\sqrt{k_i}+e(\sqrt{k_i})} = F_2^{\sqrt{k_{i+1}}}.$$

Seja  $\sqrt{k_0} > K$ . Composto os mapas  $\varphi_i = \varphi_{\sqrt{k_i}}$ , para  $0 \leq i \leq n-1$ ,

$$F_2^{\sqrt{k_{i+1}}} \xrightarrow{\varphi_i} F_2^{\sqrt{k_i}},$$

que o teorema 4.1 nos fornece, obtemos para cada  $n > 0$  um mapa

$$F_2^{\sqrt{k_n}} \xrightarrow{\Phi_n} F_2^{\sqrt{k_0}}, \text{ com } \Phi_n = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}.$$

Recordamos que  $\varphi_i$  é identidade sobre  $F_2^{\sqrt{k_i}}$ . Assim  $\Phi_{n+j}$  é identidade sobre  $F_2^{\sqrt{k_n}}$  para  $j \geq 1$ .

O limite desses mapas nos dá  $F_2 \xrightarrow{\Phi} F_2^{\sqrt{k_0}}$  que restrito a  $F_2^{\sqrt{k_0}}$  é a identidade e  $\partial_2 \Phi = \partial_2$ . Portanto  $\partial_2(F_2^{\sqrt{k_0}}) \supset \partial_2 \Phi(F_2) = \partial_2(F_2)$ .

Portanto a sequência  $F_2^{\sqrt{k_0}} \rightarrow F_1 \rightarrow \text{Aug} \mathbb{Z}M \rightarrow 0$  é exata e tem os módulos finitamente gerados, provando que  $\text{Aug} \mathbb{Z}M$  é  $FP_1$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo e portanto o  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial  $\mathbb{Z}$  é  $FP_2$ .  $\square$

Demonstração do teorema 4.1:

Seja  $K$  maior que o  $\max\{\text{diam sup}(e_{b_1}), \dots, \text{diam sup}(e_{b_k})\}$  e o  $\rho_0$  utilizado no lema 4.1 e seja  $e(d)$  a mesma função do lema 4.1. Assim podemos usar esse lema e  $\bigoplus_{b \in B} e_b \mathbb{Z}M \subset F_2^d$ , para  $d > K$ .

Como  $\varphi_d$  restrito a  $F_2^d$  é identidade já temos  $\varphi_d(e_b) = e_b$ , preciso definir  $\varphi_d(e_{a_1}e_{a_2})$  para  $e_{a_1}e_{a_2} \in F_2^{d+e(d)} \setminus F_2^d$ .

Seja  $e_{a_1} = e_{a_s q_1}$  e  $e_{a_2} = e_{a_r q_2}$ , com  $a_r, a_s \in R_a$ . Temos que

$$\varphi_d(e_{a_s q_1} e_{a_r q_2}) = \varphi_d(e_{a_s q_1 q_2^{-1}} e_{a_r}) q_2 = \varphi_d(e_{a_s} e_{a_r q_2 q_1^{-1}}) q_1.$$

Portanto basta definir  $\varphi_d(e_{a_s q} e_{a_r})$  ou  $\varphi_d(e_{a_s} e_{a_r q^{-1}})$  para  $\pi(q) \in B_{d+e(d)} \setminus B_d$ , pois  $\text{sup}(e_{a_1} e_{a_2}) = \{q_1, q_2\}$ , o  $\text{diam sup}(e_{a_1} e_{a_2})$  é a distância entre  $\pi(q_1 q_2^{-1}) \in B_{d+e(d)} \setminus B_d$  e a origem.

Pelo lema 4.1 existe  $b$  tal que  $d_1(b) = a_s q - \sum_i n_i a_i$  com  $\pi(a_i) \in B_d$  ou existe  $b$  tal que  $d_1(b) = a_r q^{-1} - \sum_i n_i a_i$  com  $\pi(a_i) \in B_d$ .

Como  $\partial(e_b)$  depende da escolha de um  $r_b \in F(A)$ , para os  $b$  mencionados acima escolho  $r_b = a_s q \prod a_i^{-n_i}$  e  $r_b = a_r q^{-1} \prod a_i^{-n_i}$ .

Portanto para  $\pi(q) \in B_{d+e(d)} \setminus B_d$  ou existe  $b$  tal que

$$\begin{aligned} \partial(e_b) &= d([r_b]) = e_{a_s q} + \sum e_{a_i} \lambda_i, \text{ com } e_{a_i} \in F_2^d \\ &\text{ou} \\ \partial(e_b) &= e_{a_r q^{-1}} + \sum e_{a_i} \lambda_i \text{ com } e_{a_i} \in F_2^d. \end{aligned}$$

Para o primeiro caso temos

$$\varphi_d(e_{a_s q} e_{a_r}) = \varphi_d((e_{a_s q} - \partial e_b) e_{a_r} + \partial(e_b) e_{a_r}).$$

Como  $(e_{a_s q} - \partial e_b) e_{a_r} \in F_2^d$  e  $\varphi_d$  é identidade em  $F_2^d$ ,

$$\varphi_d((e_{a_s q} - \partial e_b) e_{a_r}) = (e_{a_s q} - \partial e_b) e_{a_r}.$$

Meu objetivo é construir  $\varphi_d$  tal que  $\partial(F_2^{d+e(d)}) \subset \partial(F_2^d)$  e como desejamos que

$$\partial \varphi_d(\partial(e_b e_a)) = \partial^2(e_b e_a) = 0,$$

posso definir  $\varphi_d(\partial(e_b e_a)) = 0$ .

Portanto  $\varphi_d(\partial(e_b) e_a + e_b(\bar{a} - 1)) = 0$ , mas  $e_b(\bar{a} - 1) \in F_2^d$  e assim obtemos  $\varphi_d(\partial(e_b) e_{a_r}) = e_b(1 - \bar{a}_r)$ .

Para o primeiro caso a fórmula fica

$$\varphi_d(e_{a_s q} e_{a_r}) = (e_{a_s q} - \partial e_b) e_{a_r} + e_b(1 - \bar{a}_r).$$

Analogamente para o segundo caso temos

$$\varphi_d(e_{a_s} e_{a_r q^{-1}}) = e_{a_s}(e_{a_r q^{-1}} - \partial(e_b)) + e_b(\bar{a}_s - 1).$$

O que termina a demonstração.  $\square$

## 4.3 Apêndice do Capítulo 4

**Definição 4.5** Dizemos que um  $R$ -módulo módulo à esquerda  $N$  é plano se para qualquer seqüência exata de  $R$ -módulos à direita.

$$\dots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \rightarrow \dots$$

a seqüência



$$\dots \rightarrow P_{n+1} \otimes_R N \xrightarrow{f_{n+1} \otimes id_N} P_n \otimes_R N \xrightarrow{f_n \otimes id_N} P_{n-1} \otimes_R N \rightarrow \dots$$

também é exata.

**Exemplos:**  $R$  é um  $R$ -módulo plano. Todo  $R$ -módulo livre é plano.

**Teorema 4.2** *Se  $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow A_2 \rightarrow 0$  é uma seqüência exata de  $R$ -módulos à direita então*

1. *Se  $A_1$  e  $A_2$  são  $FP_n$  então  $A$  tem tipo  $FP_n$ ,*
2. *Se  $A$  e  $A_2$  são  $FP_{n+1}$  então  $A_1$  tem tipo  $FP_n$ .*
3. *Se  $A$  e  $A_1$  são  $FP_n$  então  $A_2$  tem tipo  $FP_n$ .*

Demonstração: Veja a referência [6].

**Teorema 4.3** *Se  $G$  é um grupo finitamente gerado tal que  $G = M \rtimes Q$  então o ideal aumentado  $Aug\mathbb{Z}M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G$ -módulo se e somente se  $Aug\mathbb{Z}G$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G$ -módulo onde a ação de  $\mathbb{Z}G$  sobre  $Aug\mathbb{Z}M$  é definida do seguinte modo:  $M$  age via multiplicação e  $Q$  age via conjugação.*

Demonstração: Como  $G = M \rtimes Q$  então existe uma cópia de  $Q$  dentro de  $G$ . O quociente de  $Aug\mathbb{Z}G$  pelo seu submódulo à direita gerado por  $Aug\mathbb{Z}Q$  é isomorfo ao  $Aug\mathbb{Z}M$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo. Mas nesse quociente a ação de  $M$  continua sendo o produto e a de  $Q$  continua sendo a conjugação, portanto esse é um isomorfismo de  $\mathbb{Z}G$ -módulos. Agora  $Aug\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathbb{Z}G$  é isomorfo a esse submódulo de  $Aug\mathbb{Z}G$ . Portanto existe a seqüência exata de  $\mathbb{Z}G$ -módulos:

$$0 \rightarrow Aug\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathbb{Z}G \rightarrow Aug\mathbb{Z}G \rightarrow Aug\mathbb{Z}M \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Pelo corolário 2.2 sabemos que  $\mathbb{Z}Q$  é Noetheriano.  $\mathbb{Z}$  é  $FP_0$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo então  $\mathbb{Z}$  é  $FP_n$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo para todo  $n > 0$ , assim como o próprio  $\mathbb{Z}Q$ .

Agora segue da seqüência exata  $0 \rightarrow Aug\mathbb{Z}Q \rightarrow \mathbb{Z}Q \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  e do resultado 2 do teorema 4.2 que  $Aug\mathbb{Z}Q$  é  $FP_n$  para todo  $n > 0$ .

Como  $\mathbb{Z}G$  é  $\mathbb{Z}Q$ -módulo livre então para qualquer resolução projetiva  $F$  de um módulo  $A$ , por  $\mathbb{Z}Q$ -módulos, temos que  $F \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathbb{Z}G$  é resolução projetiva do  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $A \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathbb{Z}G$ .

Observamos que  $\mathbb{Z}G$  é  $\mathbb{Z}Q$ -módulo livre portanto plano. Concluimos que se  $A$  é  $FP_m$  como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo então  $A \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathbb{Z}G$  é  $FP_m$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Aplicando isso para  $A = Aug\mathbb{Z}Q$  temos  $Aug\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}Q} \mathbb{Z}G$  é  $FP_n$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo para todo  $n > 0$ . Essa informação e o teorema 4.2 aplicado na seqüência 4.1, nós dá que  $Aug\mathbb{Z}G$  é  $FP_m$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo se e só se  $Aug\mathbb{Z}M$  é  $FP_m$  como  $\mathbb{Z}G$ -módulo.

# Capítulo 5

## Sobre a Conjectura $FP_3$

Para demonstrar que 2-mansó  $\Rightarrow FP_2$ , para  $G = M \rtimes Q$ , utilizamos a resolução parcial  $F$ . Provamos que a existência dos mapas  $\varphi_d : F_2^{d+e(d)} \rightarrow F_2^d$  (construídos no teorema 4.1), implica na existência de um submódulo de  $F_2$  finitamente gerado,  $F_2^{\sqrt{k_0}}$ , tal que  $\partial(F_2) = \partial(F_2^{\sqrt{k_0}})$  quando  $M$  é 2-mansó. Provando que a seqüência

$$F_2^{\sqrt{k_0}} \rightarrow F_1 \rightarrow \text{Aug}\mathbb{Z}M \rightarrow 0$$

é exata.

Uma idéia para demonstrar, 3-mansó  $\Rightarrow FP_3$ , é continuar definindo  $\varphi_d : F_3^{d+e(d)} \rightarrow F_3^d$  para  $d \geq \sqrt{k_0}$ , de tal forma que ele satisfaça  $\partial_3(\varphi_d(x)) = \varphi_d(\partial_3(x))$  e  $\varphi_d$  restrito a  $F_3^d$  é identidade, para  $M$  com a propriedade 3-mansó. Utilizando novamente os mapas  $\Phi_n = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}$  e o limite  $\Phi$ , como na demonstração da conjectura  $FP_2$ , vamos obter um complexo exato

$$F_3^{\sqrt{k_0}} \rightarrow F_2^{\sqrt{k_0}} \rightarrow F_1^{\sqrt{k_0}} \rightarrow \text{Aug}\mathbb{Z}M \rightarrow 0$$

que é uma resolução parcial livre do  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$ .

Na definição de  $\varphi_d(e_{a_1}e_{a_2})$  para  $e_{a_1}e_{a_2} \in F_2^{d+e(d)} \setminus F_2^d$  utilizamos elementos  $e_b$ . Para encontrá-los utilizamos o lema 4.1. Mas isso só foi possível com ajuda do lema geométrico.

Para definir  $\varphi_d(e_a e_b)$  para  $e_a e_b \in F_3^{d+e(d)} \setminus F_3^d$  precisaremos dos elementos  $e_c$  e de uma teoria que faça o papel do lema geométrico em dimensão 3. Essa teoria corresponderia aos resultados desenvolvidos em [4].

Na próxima seção descrevemos alguns resultados do artigo [4].

## 5.1 Teoria de Bieri-Renz

**Definição 5.1** *Seja  $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$  e  $A$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Dizemos que um mapa  $v : A \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  é uma valorização que estende  $\chi$  se satisfaz as seguintes condições para todo  $a, b \in A$  e  $g \in G$ :*

$$v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\},$$

$$v(ga) = \chi(g) + v(a),$$

$$v(-a) = v(a),$$

$$v(0) = \infty.$$

Seja  $F$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base  $X$ . Dado um mapa arbitrário  $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos estender  $v$  à uma valorização  $v : F \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  que estende  $\chi$ , definindo

$$v(0) = \infty,$$

$$v(gx) = \chi(g) + v(x),$$

$$v(f) = \min\{v(y) \mid n_y \neq 0\}, \text{ se } f = \sum n_y y \neq 0,$$

onde  $g \in G$ ,  $x \in X$ ,  $n_y \in \mathbb{Z}$  e  $f = \sum n_y y$  é a única expansão de  $0 \neq f$  em termos da base  $GX$  de  $F$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo.

Abaixo estendemos a noção de valorizações de um módulo livre a uma resolução livre  $F$  de um  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $A$ :

$$F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Sempre assumimos que a resolução é admissível, isto é, satisfaz a seguinte condição:

Para cada  $i \geq 0$  o  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre  $F_i$  da resolução  $F$  possui uma base  $X_i \subset F_i$  e  $\partial_i(x) \neq 0$  para cada  $x \in X_i$ .

Se considerarmos a resolução  $F$  como o  $\mathbb{Z}G$ -módulo  $\bigoplus_{i \geq 0} F_i$  com base  $X = \bigcup_{i \geq 0} X_i$ , denotamos por  $F^{(m)}$  o  $m$ -esqueleto  $\bigoplus_{i=0}^m F_i$  que é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base  $X^{(m)} = \bigcup_{i=0}^m X_i$ .

A resolução  $F$  possui a seguinte valorização. Para cada  $i \geq 0$  denota-se por  $v_i : F_i \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  a valorização definida abaixo da definição 5.1, onde os valores de  $v_i$  em  $X_i$  são escolhidos indutivamente seguindo a seguinte regra:

$$v_i(x) = 0, \text{ se } i = 0 \text{ e } v_i(x) = v_{i-1}(\partial_i(x)), \text{ se } i > 0.$$

Podemos definir o valor de  $v$  em um elemento arbitrário tomando o mínimo dos valores de  $v$  nas componentes homogêneas.

Estamos em condição de enunciar o teorema que faria o papel do lema geométrico em dimensão 3.

**Teorema 5.1** *Seja  $F$  uma resolução livre e admissível de  $A$  com  $m$ -esqueleto  $F^{(m)}$  finitamente gerado. Então  $[\chi] \in \Sigma^m(G, A)$  se e somente se existe um endomorfismo de cadeias  $\psi : F \rightarrow F$ , que levanta a identidade de  $A$ , tal que  $v(\psi(x)) > v(x)$  para cada  $x \in X^{(m)}$ , onde  $v$  é a valorização que estende  $\chi$ .*

Demonstração: Ver artigo [4].

## 5.2 Definição de $\varphi_d(e_a e_b)$ para um caso particular

Nessa seção vamos mostrar como definir  $\varphi_d(e_a e_b)$  para um caso particular de  $e_a e_b$ , mas antes precisamos do seguinte lema.

**Lema 5.1**  $\Sigma^0(Q, M) = \Sigma^0(G, \text{Aug}\mathbb{Z}M) \cap S(G, M)$ ,  
onde  $S(G, M) = \{[\chi] \in S(G) \mid \chi(M) = 0\}$ .

Demonstração: Essa igualdade só faz sentido quando identificamos  $S(Q) \simeq S(G, M)$ .

Agora  $[\chi] \in \Sigma^0(Q, M)$  se e somente se  $M$  for finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q_\chi$ -módulo. Considerando esse  $[\chi]$  em  $S(G, M)$ , obtemos  $G_\chi = M \rtimes Q_\chi$ . Se  $m_1, \dots, m_k$  geram  $M$  como  $\mathbb{Z}Q_\chi$ -módulo então  $\{m_1^q, \dots, m_k^q \mid q \in Q_\chi\}$  gera  $M$  como grupo então  $\{m_1^q - 1, \dots, m_k^q - 1 \mid q \in Q_\chi\}$  gera  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  como  $\mathbb{Z}M$ -módulo. Lembrando que  $G_\chi = M \rtimes Q_\chi$  então temos que  $\{m_1 - 1, \dots, m_k - 1\}$  gera  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  como  $\mathbb{Z}G_\chi$ -módulo.

Reciprocamente, seja  $[\chi] \in \Sigma^0(G, \text{Aug}\mathbb{Z}M) \cap S(G, M)$ . Então existe a seguinte seqüência exata de  $\mathbb{Z}G$ -módulos

$$0 \rightarrow \text{Aug}\mathbb{Z}M^2 \rightarrow \text{Aug}\mathbb{Z}M \xrightarrow{g} M \rightarrow 0,$$

onde  $g(m - 1) = m$ . A ação de  $M$  no  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  é via multiplicação, a ação de  $M$  em  $M$  é a trivial. Essa ação é o que torna a seqüência exata. A ação de  $Q$  em todos os módulos é via conjugação.

Se  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G_\chi$ -módulo então  $M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}G_\chi$ -módulo, mas como a ação de  $M$  em  $M$  é a trivial e  $G_\chi = M \rtimes Q_\chi$ , temos que  $M$  é finitamente gerado como  $\mathbb{Z}Q_\chi$ -módulo.  $\square$

Considere agora um elemento  $e_a e_b$  que satisfaz as seguintes condições:

1.  $\sup(e_a) = 1$ ,  $\partial(e_b) = \sum_j e_{a_j} \lambda_j$  e existe um único  $e_{a_i}$  nessa representação de  $\partial(e_b)$ , tal que  $d \leq \text{diam } \sup(e_a e_{a_i}) < d + e(d)$ .  
Seja  $q = \sup(e_{a_i})$  e  $a_i = a_s q$ .
2.  $[\chi] \in \Sigma^0(Q, M) \setminus -\Sigma^0(Q, M)$ , onde  $\chi(x) = \langle \pi(q), \pi(x) \rangle$
3.  $[\chi(x)] \in \Sigma^1(G, \text{Aug}\mathbb{Z}M) \cap S(G, M) \subset \Sigma^0(G, \text{Aug}\mathbb{Z}M) \cap S(G, M) = \Sigma^0(Q, M)$ .

A condição 1 nos garante que  $e_a e_b \in F_3^{d+e(d)} \setminus F_3^d$  e que  $\text{diam } \sup(e_a e_{a_i}) = |\pi(1) - \pi(q)| = |\pi(q)|$  com  $d \leq |\pi(q)| < d + e(d)$ .

Como consideramos  $M$  3-manso como  $\mathbb{Z}Q$ -módulo então  $M$  também é 2-manso. O lema 4.1 nos dá duas possibilidades não excludentes:

Existe  $b' \in B$  tal que  $d_1(b') = a_s q - \sum n_i a'_i$ , com  $a'_i \in A$  e  $\pi(\sup(a'_i)) \in B_d$ , ou existe  $b' \in B$  tal que  $d_1(b') = a_s q^{-1} - \sum n_j a'_j$ , com  $a'_j \in A$  e  $\pi(\sup(a'_j)) \in B_d$ .

Entretanto na demonstração desse lema é possível perceber que se a condição 2 é satisfeita então a única possibilidade é a primeira. Portanto  $r_{b'} = a_s q \prod a_i'^{-n_i} \in F(A)$  e  $\partial(e_{b'}) = d([r_{b'}]) = e_{a_i} + \text{elementos em } F_2^d$ .

O que obtivemos com a condição 2 foi que existe  $e_{b'}$  tal que  $\partial(e_{b'}) = d([r_{b'}]) = e_{a_i} + \text{elementos em } F_2^d$ .

Agora queremos que

$$\partial \varphi_d(e_a e_b) = \varphi_d(\partial(e_a e_b)) = \varphi_d(e_b(\bar{a} - 1) - e_a(\partial e_b - e_{a_i} \lambda_i) - e_a e_{a_i} \lambda_i)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \varphi_d(e_b(\bar{a} - 1)) &= e_b(\bar{a} - 1), \\ \varphi_d(e_a(\partial e_b - e_{a_i} \lambda_i)) &= e_a(\partial e_b - e_{a_i} \lambda_i), \\ \varphi_d(e_a e_{a_i}) &= e_{b'}(\bar{a} - 1) - e_a(\partial(e_{b'}) - e_{a_i}), \end{aligned}$$

pois  $e_b(\bar{a} - 1) \in F_2^d$  e  $e_a(\partial e_b - e_{a_i} \lambda_i) \in F_2^d$ . A última afirmativa vem da definição de  $\varphi_d$  descrita na demonstração do teorema 4.1.

Obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_d(\partial(e_a e_b)) &= e_b(\bar{a} - 1) - e_a(\partial e_b - e_{a_i} \lambda_i) - e_{b'}(\bar{a} - 1) \lambda_i + e_a(\partial(e_{b'}) - e_{a_i} \lambda_i) \\ &= (e_b - e_{b'} \lambda_i)(\bar{a} - 1) - e_a(\partial(e_b - e_{b'} \lambda_i)).\end{aligned}$$

Para utilizar a condição 3 preciso do seguinte lema.

**Lema 5.2** *Se  $[\chi] \in \Sigma^1(G, \text{Aug}\mathbb{Z}M) \cap S(G, M) \subset \Sigma^0(G, \text{Aug}\mathbb{Z}M) \cap S(G, M) = \Sigma^0(Q, M)$  então existe  $w \in \bigoplus_c e_c \mathbb{Z}M$  tal que  $\partial(w) = e_b - e_{b'} \lambda_i + \lambda$ , com  $\lambda \in F_2^d$ .*

Portanto se  $[\chi]$  satisfaz a hipótese do lema então  $(e_b - e_{b'} \lambda_i)(\bar{a} - 1) = (\partial(w) - \lambda)(\bar{a} - 1)$ .

Agora  $0 = \partial\partial(w) = \partial(e_b - e_{b'} \lambda_i) + \partial(\lambda)$  e assim  $-\partial(\lambda) = \partial(e_b - e_{b'} \lambda_i)$ .

Finalmente

$$\begin{aligned}\partial\varphi_d(e_a e_b) &= (e_b - e_{b'} \lambda_i)(\bar{a} - 1) - e_a(\partial(e_b - e_{b'} \lambda_i)) \\ &= (\partial(w) - \lambda)(\bar{a} - 1) + e_a \partial(\lambda) = \partial(w(\bar{a} - 1) - e_a \lambda).\end{aligned}$$

Definimos então

$$\varphi_d(e_a e_b) = w(\bar{a} - 1) - e_a \lambda.$$

Isso está bem definido pois para  $d$  suficientemente grande temos  $w \in \bigoplus_c e_c \mathbb{Z}M \subset F_3^d$  e já temos  $e_a \lambda \in F_3^d$ .

Demonstração do lema 5.2: No nosso caso temos uma resolução livre finitamente gerada do  $\text{Aug}\mathbb{Z}M$  até dimensão 1.

$$\partial_3^{-1}(F_2^{\sqrt{k_0}}) \rightarrow F_2^{\sqrt{k_0}} \rightarrow F_1 \rightarrow \text{Aug}\mathbb{Z}M \rightarrow 0$$

Pelo teorema 5.1, existe um endomorfismo de cadeias  $\psi$  que estende a  $\text{Id}_{\text{Aug}\mathbb{Z}M}$ . Como a resolução é projetiva esse endomorfismo  $\psi$  é homotópico ao endomorfismo identidade. Seja  $\sigma$  essa homotopia. Adicionamos elementos  $e_c$  ao nosso complexo de tal forma que para cada  $b$  existe  $c$  tal que  $\partial_3 \sigma_2(e_b) = \partial_3(e_c)$ . Logo existem  $e_c$  e  $e_{c'}$  tais que.

$$\partial_3 \sigma_2(e_b - e_{b'} \lambda_i) = \partial_3(e_c - e_{c'} \lambda_i).$$

Então

$$(e_b - e_{b'} \lambda_i) - \psi_2(e_b - e_{b'} \lambda_i) = \partial_3 \sigma_2(e_b - e_{b'} \lambda_i) + \sigma_1 \partial_2(e_b - e_{b'} \lambda_i).$$

Seja  $-\lambda = \sigma_1 \partial_2(e_b - e_{b'} \lambda_i) + \psi_2(e_b - e_{b'} \lambda_i) \in F_2^{\sqrt{k_0}} \subset F_2^d$ , quando  $d > \sqrt{k_0}$ .

Dessa maneira obtemos  $(e_b - e_{b'} \lambda_i) = \partial_3(e_c - e_{c'} \lambda_i) - \lambda$ .

Defina  $w = e_c - e_{c'} \lambda_i$ . Isso termina a demonstração.  $\square$

As dificuldades que aparecem agora se resumem a como definir  $\varphi_d$  para  $e_a e_b$  e  $e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3}$  gerais. Acreditamos que é possível dividir em alguns casos especiais, sendo um deles o caso acima, e utilizá-los na demonstração.



## Conclusão:

O objetivo inicial do trabalho era dar uma demonstração algébrica de uma das implicações da conjectura  $FP_3$  para o caso cindido. Várias dificuldades técnicas foram encontradas no caminho. Inicialmente tentamos definir  $\varphi_d : F_3^{d+e(d)} \rightarrow F_3^d$  para alguns casos particulares. Entretanto os casos que apareceram foram em maior número do que o esperado. Acreditamos que ainda é possível escrevê-los e generalizar o resultado para dimensão 4, mas precisamos voltar e pensar sobre como evitar ou lidar com certos tipos de problemas técnicos que apareceram no final da demonstração.

O estudo aqui apresentado teve enfoque no caso cindido da conjectura  $FP_2$  e nos resultados que envolvem o invariante  $\Sigma^0(Q, M)$  e propomos um caminho a seguir para demonstrar o caso cindido da conjectura  $FP_3$  de jeito homológico.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Aberg, Bieri-Strebel valuations(of finite rank), Proc. London Math. Soc. (3)52 (1986), no 2, 269-304.
- [2] R. Bieri, R. Strebel, Valuations and finitely presented metabelian groups, Proc. London Math. Soc (3)41 (1980), 439-464.
- [3] R. Bieri, J. Harlander, On the  $FP_3$  conjecture for metabelian groups, J. London Math. Soc., 64(2001), no. 3, 595-610.
- [4] R. Bieri, B. Renz, Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups, Comment. Math. Helvetici, 63(1988), 464-497.
- [5] R. Bieri, J.R.J Groves The geometry of the set of characters induced by valuations, J. Reine Angew. Math. 347(1984), 168-195.
- [6] R. Bieri, Homological Dimensions of Discrete Groups, Queen Mary College Mathematics Notes, University of London 1976
- [7] R. Bieri, J. Groves, Metabelian Groups of type  $FP_\infty$  are virtually of type  $FP_m$ . Proc. London Math. Soc.(3) 45(1982), no.2, 365-384
- [8] K.S.Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag 1982.
- [9] D.E.Cohen, Combinatorial Group Theory: A Topological Approach, Cambridge University Press 1989.
- [10] D.H. Kochloukova, J. Harlander Building Resolutions, J. of Algebra 269 (2003), 632-651.
- [11] D.H. Kochloukova, The  $FP_m$  conjecture for a class of metabelian groups, J. Algebra 184 (1996), no 3, 1175-1204.
- [12] J.J Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Academic Press 1979