



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ANDRÉS JULIÁN MORENO OSPINA

O OPERADOR DE FUETER E DEFORMAÇÕES DE SUBVARIETADES
ASSOCIATIVAS

CAMPINAS
2015

ANDRÉS JULIÁN MORENO OSPINA

O OPERADOR DE FUETER E DEFORMAÇÕES DE SUBVARIÉDADES
ASSOCIATIVAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Henrique Nogueira de Sá Earp

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉS JULIÁN MORENO OSPINA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP.

Assinatura do Orientador



CAMPINAS

2015

Agência de fomento: Capes
Nº processo: 0

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M815o Moreno Ospina, Andrés Julián, 1990-
O operador de Fueter e deformações de subvariedades associativas / Andrés Julián Moreno Ospina. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Henrique Nogueira de Sá Earp.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Conexões (Matemática). 2. Fibrados vetoriais. 3. Fueter, Operadores de. 4. Dirac, Operadores de. 5. Variedades diferenciáveis. I. Sá Earp, Henrique Nogueira de, 1981-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Fueter operator and deformation of associative submanifolds

Palavras-chave em inglês:

Connections (Mathematics)

Vector bundles

Fueter operators

Dirac operators

Differentiable manifolds

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Henrique Nogueira de Sá Earp [Orientador]

Rafael de Freitas Leão

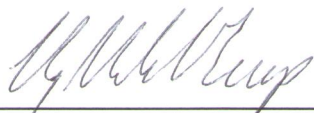
Simon George Chiossi

Data de defesa: 13-08-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 13 de agosto de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP



Prof.(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO



Prof.(a). Dr(a). SIMON GEORGE CHIOSSI

Para meu Pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Henrique Sá Earp, pela orientação e por ter me aberto as portas à temas tão interessantes da matemática.

Agradeço aos professores da banca, Prof. Dr. Rafael Leão e Prof Dr. Simon Chiossi, por me ajudar com as dúvidas e pelas valiosas observações que contribuíram no meu trabalho. Também estou profundamente agradecido ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica em geral, pois nestes últimos anos fizeram uma notável contribuição na minha formação matemática. Um sincero agradecimento ao meus colegas Luis Portilla, Alcides de Carvalho, Carlos Bassani, Bruno Suzuki, Leithold Alvarez e Akemi Miyamoto, sempre presentes de maneira incondicional no dia a dia.

Finalmente, a minha mãe e irmãos, dos quais recebo um imenso apoio e carinho apesar da distância.

Por fim, agradeço a CAPES por ter financiado este projeto.

RESUMO

Em 1982, Harvey e Lawson formularam a teoria da geometria calibrada. Esta trata de um tipo especial de subvariedade mínima de uma Riemanniana M , definida a partir de uma forma fechada em M chamada de calibração. Em particular, quando M é uma G_2 -variedade, isto é, uma variedade com holonomia contida no grupo excepcional G_2 , a calibração é uma 3-forma chamada de G_2 -estrutura e as subvariedades calibradas de M são chamadas de associativas.

Uma pergunta nesta teoria é: quando uma deformação de uma subvariedade associativa continua sendo calibrada? A chave está no estudo do operador de Fueter, que controla as deformações infinitesimais da subvariedade. O operador de Fueter é identificado com um operador de Dirac, portanto admite uma fórmula de Weitzenböck, ou seja, uma relação simples entre o operador de Dirac e o Laplaciano. O autor mostra que o fibrado normal de uma subvariedade associativa coincide com um fibrado de Dirac e como resultado calcula a fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter.

Palavras-chave: Fibrado principal, fibrado vetorial, operador de Dirac, G_2 -variedade, subvariedade associativa.

ABSTRACT

In 1982 Harvey and Lawson formulated the theory of calibrated geometry, concerning a special kind of minimal submanifold of a Riemannian manifold M , which is defined using a closed form on M called calibration. In particular, when M is a G_2 -manifold, that is, a Riemannian manifold with holonomy contained in the exceptional Lie group G_2 , the calibration is a 3-form called G_2 -structure and the calibrated submanifold of M is called associative.

One question in this theory is: when does a deformation of an associative submanifold remain calibrated? The key is in the study of the Fueter operator, which controls the infinitesimal deformation of the submanifold. The Fueter operator is identified with a Dirac operator, hence it admits a Weitzenböck formula, that is, a simple relationship between a Dirac operator and the Laplacian, up to curvature. The author proves that the normal bundle of an associative submanifold coincides with a Dirac bundle and, as an original contribution, calculates the Weitzenböck formula of the Fueter operator.

Keywords: Principal bundle, vector bundle, Dirac operator, G_2 -manifold, associative submanifold.

Sumário

1	Preliminares sobre Fibrados e Conexões	12
1.1	Fibrados Principais	12
1.2	Fibrados Vetoriais	18
1.3	Fibrado Associado	22
1.4	Fibrado de Clifford e Fibrado de Espinores	26
1.4.1	Fibrado de Clifford	26
1.4.2	Fibrado Spin	27
1.4.3	Estrutura Spin em espaços de dimensão 4	29
1.5	Conexão e Curvatura em Fibrado Principal	31
1.6	Conexões e curvatura em fibrados vetoriais	35
1.7	Conexão Spin	38
2	Geometria de G_2-variedades	42
2.1	Produto Vetorial	42
2.2	Os Octônios e o Grupo G_2	44
2.2.1	A construção de Cayley-Dickson	44
2.2.2	Grupo G_2	48
2.2.3	Calibrações em \mathbb{R}^7	53
2.3	G_2 -Variedades	55
2.4	Subvariedades associativas	59
3	Fórmula de Weitzenböck	64
3.1	Operador e Fibrado de Dirac	64
3.2	Fórmula de Weitzenböck Clássica	66
3.3	Estrutura Spin no fibrado normal de uma subvariedade associativa	69
3.4	Fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter	71
	Referências	75

Introdução

Em 1955, Marcel Berger deu uma completa classificação dos possíveis grupos de holonomia de uma variedade riemanniana, irredutível e simplesmente conexa. Um dos possíveis grupo é quando a dimensão da variedade é igual a 7. Neste caso, se diz que a variedade possui grupo de holonomia excepcional G_2 . Em 1987, a primeira métrica com este grupo de holonomia foi construída por Robert L. Bryant e exemplos concretos de métricas completas com holonomia G_2 foram encontrados por R. Bryant e Dietmar Salamon em 1989.

Por outro lado, a teoria da geometria calibrada, formulada por Harvey e Lawson em 1982, está fortemente conectada com a teoria de grupos de holonomia de variedades riemannianas. Cada variedade riemanniana com holonomia reduzida (ou seja, algum dos casos da lista de Berger), está equipada com uma ou várias calibrações. Este é o caso das G_2 variedades, as quais vem munidas de uma 3-forma e uma 4-forma diferencial, chamadas de calibração associada e calibração co-associada, respectivamente.

Subvariedades calibradas por estas 3 e 4-forma são chamadas de subvariedades associativas e co-associativas. Neste trabalho estamos interessados na deformação de subvariedades associativas. Para isso, no Capítulo 2 se expõem conceitos relacionados com os octônios e o grupo G_2 , em seguida são abordadas noções básicas sobre calibrações em \mathbb{R}^7 e mencionados alguns fatos sobre G_2 variedades e subvariedades associativas.

O objetivo principal é entender como é que são controladas as deformações das subvariedades associativas, por isso o protagonista desta dissertação é o *operador de Fueter*, o qual é definido no Capítulo 2, além de expor o papel que este desempenha na teoria da deformação.

Finalmente, é abordado no Capítulo 3 um tema pertencente a geometria Spin, que é a fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter F_P ,

$$F_P^2 := \nabla^* \nabla + \frac{1}{4}k + \bar{\rho}(F^-) \quad (0.0.1)$$

esta forma é uma relação entre dois operadores elípticos F_P^2 e $\nabla^* \nabla$ de ordem dois, onde $\nabla^* \nabla$ é o *laplaciano da conexão* definido na Seção 3.2, $\bar{\rho}$ é o morfismo de álgebra induzido pela representação de Clifford (3.4.3), e k é a curvatura escalar da subvariedade associativa P . Para isso, são mencionados no primeiro capítulo alguns conceitos expostos em [12]

sobre fibrados e conexões, em especial fibrado de espinores e conexão Spin. No Capítulo 3 é definido o operador de Dirac e fibrado de Dirac, em seguida é lembrada a fórmula de Weitzenböck para um fibrado de Dirac em geral, a ideia usada nessa conta é de muita utilidade e serve como paradigma para calcular 0.0.1.

Capítulo 1

Preliminares sobre Fibrados e Conexões

Este capítulo está destinado a lembrar conceitos básicos da teoria de fibrados e conexões, tais como fibrado principal, fibrado vetorial, 1-forma de conexão e curvatura. Em especial, os conceitos relacionados com a geometria Spin, fibrado de Clifford e fibrado Spin, pois este é o ambiente adequado para falar de operador de Dirac e fórmula de Weitzenböck, que é nosso objetivo no capítulo 3.

1.1 Fibrados Principais

Definição 1.1.1. *Seja G um grupo de Lie. A terna (P, M, π) é chamada um G -fibrado principal diferenciável (à direita) que consiste em*

- i) Uma ação de grupo à direita $\zeta : P \times G \rightarrow P$, $\zeta(p, g) = p \cdot g$, livre e diferenciável.*
- ii) Uma aplicação $\pi : P \rightarrow M$ diferenciável, sobrejetiva e invariante com respeito a ação de grupo i.e.*

$$\pi(p \cdot g) = \pi(p).$$

- iii) Existe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M , tal que cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é difeomorfo ao produto $U_\alpha \times G$. Em outras palavras, para cada α existe um difeomorfismo G -equivariante, tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & U_\alpha \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

O espaço P é chamado de *espaço total* do fibrado principal, π é chamada *projeção* e M de *espaço base*. Os pares (ψ_α, U_α) são chamadas *trivializações locais* e é comum escrevê-las como $\psi_\alpha := (\pi, g_\alpha)$, onde para cada $p \in P$ e $g \in G$, $g_\alpha(p \cdot g) = g_\alpha(p)g$. Por último, o grupo G é chamado *grupo estrutural* do fibrado principal.

Exemplo 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie e $P = M \times G$. Considere a projeção $\pi : P \rightarrow M$ e a ação de G em P dadas por*

$$\begin{aligned} P = M \times G &\rightarrow M & P \times G &\rightarrow P \\ p = (m, g) &\mapsto m & (p, h) = (m, g, h) &\mapsto (m, gh). \end{aligned}$$

O fibrado (P, M, π) é chamado fibrado trivial, com a identidade como trivialização global.

Exemplo 1.1.3. (Fibrado de bases ou de referenciais) *Seja M variedade diferenciável, denote por P o conjunto de elementos da forma $p = (m, \{v_1, \dots, v_n\})$, onde $m \in M$ e v_1, \dots, v_n é uma base de $T_m M$. Defina a aplicação projeção*

$$\begin{aligned} \pi : P &\rightarrow M \\ p &\mapsto m \end{aligned}$$

e a ação de grupo

$$\begin{aligned} \zeta : P \times \text{Gl}(\mathbb{R}, n) &\rightarrow P \\ (p, A) &\mapsto (m, \{w_1, \dots, w_n\}) \end{aligned}$$

onde $w_j = \sum_i a_j^i v_i$ com $A = (a_j^i)$. Veja que ζ é uma ação de grupo, pois para $I = (\delta_j^i)$ a matriz identidade $n \times n$, $p \cdot I = p$. Por outro lado, considere as matrizes $A = (a_j^i)$ e $B = (b_j^i)$, tais que $w_j = \sum_i a_j^i v_i$ e $u_k = \sum_j b_k^j w_j$ então $u_k = \sum_{ij} b_k^j a_j^i v_i = \sum_j (ab)_k^j v_i$, com isto temos $(p \cdot A) \cdot B = p \cdot (AB)$. Da definição de ζ segue que a projeção π é invariante pela ação de grupo, ou seja, $\pi(p \cdot A) = \pi(p)$.

Agora vamos descrever a estrutura de variedade de P e as trivializações do fibrado. Considere (U_α, ϕ_α) atlas de M , x_1, \dots, x_n o respectivo sistema de coordenadas locais e v_1, \dots, v_n um referencial em $T_m M$. Pode-se escrever este referencial em termos da base coordenada

$$v_j = \sum_i a_j^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Com isto defina a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \text{Gl}(\mathbb{R}, n) \\ (m, \{v_1, \dots, v_n\}) &\mapsto (m, A) \end{aligned}$$

onde $A = (a_j^i)$ é a matriz mudança de base. Observe que ψ_α é uma bijeção com inversa

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \text{Gl}(\mathbb{R}, n) &\rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \\ (m, A) &\mapsto (m, \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \cdot A) \end{aligned}$$

além disso obtemos que para todo $B \in \text{Gl}(\mathbb{R}, n)$, $\psi_\alpha(p \cdot B) = \psi_\alpha(p) \cdot B$ i.e. ψ_α é equivariante. E como $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \text{Gl}(\mathbb{R}, n)$ via ψ_α e $\text{Gl}(\mathbb{R}, n)$ pode ser considerado como um aberto de \mathbb{R}^{n^2} , daí

$$(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha \circ (\phi_\alpha \times \text{Id}_{\text{Gl}(\mathbb{R}, n)}))$$

define um atlas em P , a compatibilidade desta estrutura é herdada da compatibilidade de (ϕ_α, U_α) e do comportamento dos mapas ψ_α nas intersecções dos abertos $U_\alpha \cap U_\beta$. Finalmente, temos que π é diferenciável e (ψ_α, U_α) determina as trivializações locais para o fibrado (P, π, M) . Este exemplo vai ser usado mais adiante e P será denotado como $P_{\text{Gl}}(M)$ (segundo a notação de [12]) que indica o fibrado de referenciais de M com grupo estrutural $\text{Gl}(\mathbb{R}, n)$.

Proposição 1.1.4. *Se (P, M, π) é um G -fibrado principal então as fibras são exatamente as órbitas da ação a direita de G*

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = p \cdot G$$

Demonstração. A inclusão $p \cdot G \subset \pi^{-1}(\pi(p))$ segue da propriedade de invariância de π ($\pi(p \cdot g) = \pi(p)$). Para a outra inclusão, seja $q \in \pi^{-1}(\pi(p)) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ onde (ψ_α, U_α) é uma trivialização local, $\pi(p) = \pi(q)$. Considere $g = g_\alpha^{-1}(q)g_\alpha(p)$ então

$$\psi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p)) = (\pi(q), g_\alpha(q)g) = (\pi(q \cdot g), g_\alpha(q \cdot g)) = \psi_\alpha(q \cdot g)$$

Pela injetividade de ψ_α , temos $p = q \cdot g$ assim $q = p \cdot g^{-1} \in p \cdot G$. □

Em outras palavras, o resultado anterior está dizendo que a ação de grupo é transitiva nas fibras.

Considere $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ trivializações locais do fibrado $\pi : P \rightarrow M$, definidas ponto a ponto por

$$\psi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p)), \quad p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$$

se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ para $\alpha, \beta \in A$, defina as aplicações

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

chamada *função de transição*, como

$$g_\alpha(p) = g_{\alpha\beta}(\pi(p))g_\beta(p)$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Se consideramos outra trivialização (ψ_γ, U_γ) , as aplicações $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\beta\gamma}$ satisfazem a chamada condição de cociclo:

$$g_{\alpha\beta}(m)g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m)$$

para todo $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Uma implicação da definição são as relações $g_{\alpha\alpha} = 1$ e $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$. O seguinte resultado é fundamental no sentido de que as funções de transição carregam a informação suficiente para determinar um único fibrado principal, a menos de isomorfismo (vide [11]).

Proposição 1.1.5. *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura por abertos de M . Sejam $g_{\alpha\beta}$ as respectivas funções de transição satisfazendo as condições de cociclo. Então pode-se obter um G -fibrado principal tal que as funções de transição são exatamente $\{g_{\alpha\beta}\}$.*

Demonstração. Considere o espaço

$$P = \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha \times G / \sim,$$

onde $(\alpha, u, g) \sim (\beta, v, h)$ se, e somente se, $u = v$ e $g = g_{\alpha\beta}(u)h$; veja que pela condição de cociclo, \sim é uma relação de equivalência

(reflexividade). $(\alpha, u, g) \sim (\alpha, u, g)$, pois $g_{\alpha\alpha}(u) = 1$.

(simetria). $(\alpha, u, g) \sim (\beta, v, h) \Rightarrow (\beta, v, h) \sim (\alpha, u, g)$, pois $g_{\beta\alpha}(v) = g_{\alpha\beta}^{-1}(u)$.

(transitividade). $(\alpha, u, g) \sim (\beta, v, h)$ e $(\beta, v, h) \sim (\gamma, w, f) \Rightarrow (\alpha, u, g) \sim (\gamma, w, f)$, pois $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

Agora denote $\pi : P \rightarrow M$ por $\pi([\alpha, u, g]) = u$ e $\cdot : P \times G \rightarrow P$ dada por $[\alpha, u, g] \cdot h = [\alpha, u, gh]$. Note que π está bem definida, pois dados $p_1, p_2 \in P$, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ se, e somente se, $p_2 = p_1 \cdot h$ para algum $h \in G$. De fato, $p_1 = [(\alpha, u_1, g_1)]$ e $p_2 = [(\beta, u_2, g_2)]$, se $p_2 = p_1 \cdot h$ para algum $h \in G$ então $u_1 = u_2$, logo $\pi(p_1) = \pi(p_2)$. Para a recíproca, se $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, considere $h = g_1^{-1}g_{\alpha\beta}(u_2)g_2$ então

$$\begin{aligned} p_1 \cdot h &= [(\alpha, u_1, g_1)] \cdot h = [(\alpha, u_1, g_1 h)] \\ &= [(\beta, u_2, g_{\alpha\beta}(u_1)g_2)] \\ &= p_2. \end{aligned}$$

No caso da ação \cdot segue das propriedades de grupo que $p \cdot e = p$, onde e é a identidade de G e para todo $h_1, h_2 \in G$, $(p \cdot h_1) \cdot h_2 = p \cdot (h_1 h_2)$. Além disso, a boa definição de \cdot é garantida pois dado $h \in G$, uma classe de equivalência $[(\alpha, u, g)]$ é levada na classe de equivalência $[(\alpha, u, gh)]$, esta ação também é livre pois para todo $p \in P$, se $p \cdot h = p$ então $h = e$, já que $[(\alpha, u, gh)] = [(\alpha, u, g)]$, logo $gh = g$ e portanto $h = e$.

Observe que, para cada α , $U_\alpha \times G$ tem estrutura de variedade diferenciável, logo $\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times G$ também tem estrutura de variedade, dada pela união disjunta dos atlas de cada $U_\alpha \times G$. Com isto, considere a aplicação natural $\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times G \rightarrow P$ tal que cada (α, u, g) é levado em sua classe de equivalência, veja que esta aplicação restrita a $U_\alpha \times G$ é injetiva e sua imagem é $\pi^{-1}(U_\alpha)$, de fato como $g_{\alpha\alpha}(u) = 1$, se duas classes $[(\alpha, u, g)]$ e $[(\alpha, v, h)]$ são iguais, os representantes (α, u, g) e (α, v, h) são iguais também. Finalmente, a estrutura diferenciável em P é dada exigindo que $\pi^{-1}(U_\alpha)$ seja um aberto de P e a aplicação $\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times G \rightarrow P$ induza um difeomorfismo de $U_\alpha \times G$ sobre $\pi^{-1}(U_\alpha)$ definido

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times G \\ [(\alpha, u, g)] &\mapsto (u, g) \end{aligned}$$

pois cada ponto de P pertence a um $\pi^{-1}(U_\alpha)$ para algum $\alpha \in A$. □

Definição 1.1.6. *Uma seção local de (P, M, π) é uma aplicação diferenciável $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ tal que $\pi \circ \sigma_\alpha(m) = m$ para todo $m \in U_\alpha$. No caso em que $\sigma : M \rightarrow P$ satisfaz $\pi \circ \sigma(m) = m$, para todo $m \in M$, então σ é dita de seção global.*

Proposição 1.1.7. *Um G -fibrado principal é trivial se, e somente se, o fibrado admite uma seção global.*

Demonstração. Suponha que o fibrado $\pi : P \rightarrow M$ é trivial, logo (P, M, π) é isomorfo ao fibrado do exemplo 1.1.2, portanto admite trivialização global $\psi(p) = (\pi(p), g(p))$. Defina $\sigma : M \rightarrow P$ como $\sigma(m) = \psi^{-1}(m, e)$, onde $m = \pi(p)$ para algum $p \in P$, daí que $\pi \circ \sigma(m) = \pi(p) = m$.

Reciprocamente, seja $\sigma : M \rightarrow P$ seção global, considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : M \times G &\rightarrow P \\ (m, g) &\mapsto \sigma(m)g \end{aligned}$$

como σ e \cdot são diferenciáveis então f é também diferenciável. Note que f é equivariante

$$f((m, g) \cdot h) = f(m, gh) = \sigma(m)(gh) = (\sigma(m)g)h = f(m, g)h.$$

f é injetiva: para $(m_1, g_1), (m_2, g_2) \in M \times G$ tais que $\sigma(m_1)g_1 = \sigma(m_2)g_2$,

$$m_1 = \pi(\sigma(m_1)) = \pi(\sigma(m_1)g_1) = \pi(\sigma(m_2)g_2) = \pi(\sigma(m_2)) = m_2.$$

Além disso, como a ação de grupo é livre, temos que $g_1 = g_2$, logo $(m_1, g_1) = (m_2, g_2)$.

f é **sobrejetiva**: dado $p \in P$, temos $p, \sigma(\pi(p)) \in \pi^{-1}(\pi(p))$ logo existe $g \in G$ tal que $p = \sigma(\pi(p))g = f(\pi(p), g)$.

Logo

$$\begin{aligned}\psi &= f^{-1} : P \rightarrow M \times G \\ p &\mapsto (\pi(p), g)\end{aligned}$$

onde $p = \sigma(\pi(p))g$. Portanto ψ define uma trivialização global para (P, M, π) . \square

Definição 1.1.8. *Sejam (P_1, M_1, π_1) e (P_2, M_2, π_2) G -fibrados principais. Um morfismo $f : P_1 \rightarrow P_2$ entre G -fibrados principais é uma aplicação suave tal que $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ para todo $g \in G$.*

A aplicação $f : P_1 \rightarrow P_2$ induz uma aplicação $\tilde{f} : M_1 \rightarrow M_2$ suave, tal que $f \circ \pi_2 = \pi_1 \circ \tilde{f}$. Inicialmente, dado $U_\alpha \subset M_1$ aberto, considere

$$\tilde{f}(m_1) = \pi_2 \circ f \circ \sigma_\alpha(m_1), \quad \forall m_1 \in U_\alpha$$

onde σ_α é uma seção local de (P_1, M_1, π_1) . Para estender \tilde{f} a toda M_1 , observe que dado outro aberto $U_\beta \subset M_1$, tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m)g_{\alpha\beta}(m)$$

para todo $m \in U_\alpha \cap U_\beta$. De fato, como $\sigma_\alpha(m) = \psi_\alpha^{-1}(m, e)$, então $g_\alpha(\sigma_\alpha(m)) = e$, logo

$$\begin{aligned}\psi_\beta(\sigma_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}(m)) &= (\pi(\sigma_\alpha(m)), g_\beta(\sigma_\alpha(m))g_{\alpha\beta}(m)) \\ &= (m, g_\beta(\sigma_\alpha(m))g_\alpha(\sigma_\alpha(m))g_\beta(\sigma_\alpha(m))^{-1}) \\ &= (m, e) \\ &= \psi_\beta(\sigma_\beta(m))\end{aligned}$$

daí pela injetividade de ψ_β segue que $\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m)g_{\alpha\beta}(m)$. Segue também que \tilde{f} é diferenciável.

Dados dois fibrados com grupos estruturais diferentes, a definição anterior pode ser adaptada pedindo que $h : G_1 \rightarrow G_2$ seja um homomorfismo de grupos de Lie satisfazendo

$$f(p \cdot g) = f(p) \cdot h(g).$$

1.2 Fibrados Vetoriais

Definição 1.2.1. *Seja \mathbb{K} corpo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Um \mathbb{K} -fibrado vetorial (E, M, π) de posto n consiste numa variedade diferenciável E munida de uma aplicação suave $\pi : E \rightarrow M$ sobre M variedade diferenciável, que satisfaz as seguintes condições:*

- i) Para cada $m \in M$, $\pi^{-1}(m)$ tem estrutura de \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão n .*
- ii) Trivialização local. Para cada $m \in M$, existe vizinhança aberta U_α de m e um difeomorfismo $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ tal que para cada $x \in U_\alpha$, a restrição de ψ_α a $\pi^{-1}(x)$ denotada por $\psi_{m,\alpha} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{K}^n$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

Quando \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , o fibrado vetorial (E, M, π) é chamado *fibrado vetorial real* ou *complexo*, respectivamente.

Assim como em fibrados principais, E , π e M são chamados de espaço total, projeção e espaço base, respectivamente. Ademais $\pi^{-1}(m)$ é chamada fibra sobre m e é denotada por E_m . Ao longo deste trabalho será considerado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ salvo menção explícita em contrário.

Definição 1.2.2. *Sejam $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : F \rightarrow N$ dois fibrados vetoriais de posto n . Um mapa de fibrados de E para F é uma aplicação suave $f : E \rightarrow F$ tal que o diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\tilde{f}} & N \end{array}$$

e para cada $m \in M$ a aplicação $f : E_m \rightarrow F_{\tilde{f}(m)}$ é linear. Além disso, se $M = N$ e f é uma bijeção, tal que a inversa também é um mapa entre fibrados então f é chamado um isomorfismo entre fibrados e neste caso dizemos que os fibrados E e F são isomorfos.

Exemplo 1.2.3. *Considere $E = M \times \mathbb{R}^n$ e a aplicação $\pi : E \rightarrow M$ como $\pi(x, v) = x$. A identidade é uma trivialização em $M \times \mathbb{R}^n$, a qual satisfaz as propriedades da definição 1.2.1, este fibrado é chamado de fibrado trivial. De fato, um fibrado é trivial se é isomorfo a um fibrado deste tipo.*

Exemplo 1.2.4. *Seja M^n variedade diferenciável, considere o conjunto de todos os espaços tangentes em cada um dos pontos de M*

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M.$$

Defina a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ levando $(m, v) \in TM$ em $\pi(m, v) = m$. Primeiro veja que TM tem estrutura de variedade diferenciável. Seja \mathcal{U} um atlas diferenciável em M e

(φ, U) carta pertencente a \mathcal{U} . Segue $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e, para qualquer $v \in T_m U$, temos

$$d\varphi_m(v) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Defina a aplicação $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ como

$$\tilde{\varphi}(m, v) = (\varphi(m), d\varphi_m(v)).$$

Note que $\tilde{\varphi}$ é uma bijeção contínua. Agora, para definir a estrutura diferenciável em TM , declaramos que $\pi^{-1}(U)$ é um aberto e $\tilde{\varphi}$ um difeomorfismo. De fato $\tilde{\varphi}^{-1} := (\varphi^{-1}, d(\varphi^{-1}))$, logo temos que $A \subset TM$ é um aberto se, e somente se, $\tilde{\varphi}(A \cap \pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^{2n}$ é aberto. Assim

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{(\tilde{\varphi}, \pi^{-1}(U)); (\varphi, U) \in \mathcal{U}\}$$

é um atlas para TM , a compatibilidade pode ser verificada a partir da compatibilidade em \mathcal{U} . Assim, (TM, M, π) define um fibrado vetorial chamado fibrado tangente, cujas trivializações vem dadas pelas cartas $\tilde{\varphi}$.

Como podem-se aplicar diferentes operações lineares para gerar um novo espaço vetorial a partir de um espaço vetorial inicial, algo similar pode ser feito fibra a fibra a um conjunto dado de fibrados vetoriais para obter novos fibrados. Para nosso interesse só vamos mencionar a construção do fibrado quociente, pois com ele vamos definir o fibrado normal de uma subvariedade no exemplo 1.2.8.

Definição 1.2.5. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto n . Um fibrado vetorial $\pi : E' \rightarrow M$ de posto $k \leq n$ é chamado um subfibrado vetorial se E' é uma subvariedade mergulhada de E tal que para cada $m \in M$, a fibra $E'_m = (E' \cap E_m)$ é um subespaço vetorial da fibra E_m de E .*

No caso de $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ subvariedade mergulhada, o fibrado tangente TM é um subfibrado do fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$. Neste caso as fibras possuem a mesma dimensão. Seja (ψ_α, U_α) trivialização de $\pi : E \rightarrow M$, a imagem de $E' \cap \pi^{-1}(U_\alpha)$ por ψ_α é um subfibrado de posto k de $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Tome $\psi_\alpha(E'_m) = V \subset \mathbb{R}^n$ com $m \in U_\alpha$ que é um subespaço linear e, identificando $V \cong \mathbb{R}^k$, considere $p_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ a projeção ortogonal. Então existe uma vizinhança aberta $U'_\alpha \subset U_\alpha$ contendo m tal que

$$\psi'_\alpha := (\text{Id}_{U'_\alpha} \oplus p_{\mathbb{R}^k}) \circ \psi_\alpha : E' \cap \pi^{-1}(U'_\alpha) \rightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

é uma trivialização para $\pi : E' \rightarrow M$.

Considere $E' \subset E$ um subfibrado de posto $k \leq n$ e o espaço formado para todo $m \in M$

pelos quocientes E_m/E'_m . Denotando

$$E/E' = \bigcup_{m \in M} E_m/E'_m.$$

onde para $[e_1] \in E/E'$,

$$[e_1] = \{e_2 \in E_m; e_1 - e_2 \in E'_m\}.$$

Seja $\tilde{\pi} : E/E' \rightarrow M$ a projeção natural sobre o índice do conjunto, ou seja, $\tilde{\pi}(e_1) = m$. Por construção $\tilde{\pi}^{-1}(m)$ são espaços vetoriais. Dada uma família $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}$ de trivializações locais de E , é possível induzir difeomorfismos ψ'_α a partir da restrição de ψ_α ao E' . Para cada ψ_α , defina

$$\tilde{\psi}_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k$$

definida como $\tilde{\psi}_\alpha([e]) = (m, [\psi_{m,\alpha}(e)])$. Observe que $\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\alpha^{-1}$ é suave, para isso escolha $\widetilde{\mathbb{R}^k}$ um complemento de \mathbb{R}^k em \mathbb{R}^n e denote por $\lambda : \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear tal que para cada classe associa seu único representante em $\widetilde{\mathbb{R}^k}$ e $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k$ a projeção natural.

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k & \xrightarrow{\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\alpha^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k \\ \downarrow \mathbf{1} \oplus \lambda & & \uparrow \mathbf{1} \oplus p \\ (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Logo, a suavidade de $\tilde{\psi}_\beta \circ \tilde{\psi}_\alpha^{-1}$ é obtida pela suavidade de $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$. Assim, $\{(\tilde{\psi}_\alpha, U_\alpha)\}$ define uma estrutura diferenciável em E/E' .

Definição 1.2.6. *Considere $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto n e $E' \subset E$ um subfibrado de posto $k \leq n$. O fibrado quociente é definido como*

$$E/E' = \bigcup_{m \in M} E_m/E'_m.$$

Observação 1.2.7. *Lembre que o espaço quociente V/V' (onde V e V' são espaço vetoriais) é definido como o conjunto de classes de equivalência definidas pela relação $u \sim v$ quando $u - v \in V'$. V/V' é um espaço com dimensão $\dim(V) - \dim(V')$. Ademais, quando V vem munido de produto interno, existe uma identificação de $(V')^\perp$, o complemento ortogonal V' , com o espaço quociente V/V' . Logo E/E' é um fibrado de posto $n - k$ e a projeção E/E' sobre M é induzida pela projeção de E sobre M .*

Exemplo 1.2.8. *(Fibrado normal) Seja $M \subset \overline{M}$ subvariedade mergulhada (pode-se trabalhar também com subvariedade imersa, observando simplesmente que esta é localmente*

mergulhada), TM é subfibrado de $T\overline{M}$, logo o fibrado quociente é o fibrado normal

$$NM = (TM)^\perp = T\overline{M}/TM.$$

A ideia do fibrado normal como fibrado quociente é um tanto abstrata e dificulta um enfoque geométrico, não obstante como toda variedade diferenciável admite métrica riemanniana podemos obter um esboço mais intuitivo do que acontece.

Definição 1.2.9. *Uma métrica g em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é um tensor simétrico em E , tal que para $m \in M$*

$$g_m := \langle \cdot, \cdot \rangle : E_m \times E_m \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida.

Com $M \hookrightarrow \overline{M}$, a métrica em M pode ser considerada como a restrição da métrica em \overline{M} ou num sentido mais estrito o pull-back da métrica em \overline{M} , para cada $m \in M$, o espaço $T_m\overline{M}$ se quebra

$$T_m\overline{M} = T_mM \oplus (T_mM)^\perp$$

onde $(T_mM)^\perp = \{v \in T_m\overline{M}; \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in T_mM\}$, logo $NM = TM^\perp = \cup_{m \in M} (T_mM)^\perp$ onde $(T_mM)^\perp \cong T_m\overline{M}/T_mM$. De agora em diante vamos escrever NM em vez de $(TM)^\perp$ e cada fibra será denotada por N_mM . Sejam U_α e U_β dois abertos com trivializações ψ_α e ψ_β , se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

e pode-se escrever como $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$ para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $v \in \mathbb{R}^n$, onde $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ é chamada função de transição. Dada outra trivialização ψ_γ , para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, tem-se $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\beta\gamma}$ satisfazem a condição de cociclo $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$.

Similar ao que foi feito com fibrados principais, uma família de funções satisfazendo a condição de cociclo fornece um único fibrado vetorial (a menos de isomorfismo) cujas funções de transição coincidem com as funções de partida. A ideia é similar à proposição 1.1.5.

Definição 1.2.10. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto n . Uma seção é uma aplicação suave $\sigma : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_M$ (i.e. $\sigma(m) \in E_m$). Sempre existe uma seção σ tal que para cada $m \in M$, $\sigma(m) = 0 \in E_m$, chamada seção nula ou seção zero. O conjunto de seções de E é denotado por $\Gamma(E)$.*

Note que o espaço das seções tem estrutura de $C^\infty(M)$ -módulo, se $\sigma \in \Gamma(E)$ e

$f \in C^\infty(M)$ então $f\sigma$ também pertence a $\Gamma(E)$ no sentido que $f\sigma(m) = f(m)\sigma(m) \in E_m$ para cada $m \in M$.

Definição 1.2.11. *Dado um fibrado vetorial de posto n , um conjunto de aplicações suaves $\sigma_i : U \rightarrow E$, $i = 1, \dots, n$ tal que para cada $m \in U$, $\sigma_1(m), \dots, \sigma_n(m)$ forma uma base para E_m é chamado referencial local de E .*

Um referencial local $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ define um homeomorfismo entre $\pi^{-1}(U_\alpha)$ e $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Considere um ponto $(m, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ que é levado ao ponto $\sum r_i(m)\sigma_i(m)$, onde $r_i(m)$ são as coordenadas de v na base $\{\sigma_1(m), \dots, \sigma_n(m)\}$. Reciprocamente, dada uma trivialização $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para \mathbb{R}^n defina um referencial para E como $\sigma(m) = \psi_\alpha^{-1}(m, v_i)$, logo $(m, v_i) = \psi_\alpha(\sigma_i(m)) = (\pi(\sigma_i(m)), \phi_i(\sigma_i(m)))$ daí que $\pi \circ \sigma_i(m) = m$ e $\phi_i(\sigma_i(m)) = v_i \in \mathbb{R}^n$, como $\phi_i = \psi|_{E_m}$ é um isomorfismo, este leva base em base e portanto $\sigma_i(m) \in E_m$.

Exemplo 1.2.12. (Campos vetoriais) *As seções locais ao fibrado tangente de uma variedade são os campos de vetores $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. No caso do Exemplo 1.2.8, as seções são campos de vetores normais à subvariedade $\Gamma(NM) = \mathfrak{X}(M)^\perp$, neste caso um campo de vetores em M é sempre a restrição de algum campo de vetores numa vizinhança de \overline{M} , assim o conjunto de todos os campos de vetores ao longo de M é denotado por $\mathfrak{X}(\overline{M})|_M$ e como qualquer função em M é a restrição de alguma função em \overline{M} então $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ e $\mathfrak{X}(M)^\perp = \Gamma(NM)$ são submódulos de $\mathfrak{X}(\overline{M})|_M$.*

1.3 Fibrado Associado

Seja G um grupo de Lie e $\pi : P \rightarrow M$ um fibrado principal com grupo estrutural G . Considere V um espaço vetorial e $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$ uma representação do grupo G no espaço V , o próximo objetivo é a partir desta informação construir um fibrado com espaço base M e fibra V . Considere o mapa

$$\begin{aligned} \cdot : G \times (P \times V) &\rightarrow P \times V \\ (g, p, v) &\mapsto (pg^{-1}, \rho(g)v) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

\cdot define uma ação de grupo à esquerda

- i) $e \cdot (p, v) = (pe, \rho(e)v) = (p, v)$, pois ρ é homomorfismo de grupo.
- ii) $h \cdot (g \cdot (p, v)) = h \cdot (pg^{-1}, \rho(g)v) = (pg^{-1}h^{-1}, \rho(h)\rho(g)v) = (p(hg)^{-1}, \rho(hg)v) = (hg) \cdot (p, v)$.

Além disso, como G age livremente sobre P , então G também age livremente sobre $(P \times V)$. Logo obtemos

$$\begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{f} & P \times_{\rho} V \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{\rho} \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

onde $P \times_{\rho} V = (P \times V)/G$ é o espaço de órbitas da ação (1.3.1) e as aplicações f e π_{ρ} são definidas por

$$\begin{aligned} \pi_{\rho} : P \times_{\rho} V &\rightarrow M & f : P \times V &\rightarrow P \times_{\rho} V \\ [(p, v)] &\mapsto \pi(p) & (p, v) &\mapsto [(p, v)]. \end{aligned}$$

Primeiro, observe que π_{ρ} está bem definida, pois π é G -invariante $\pi(p \cdot g^{-1}) = \pi(p)$. Segundo, considere $\psi_{\alpha} : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times G$ trivialização de P e, para cada $p \in \pi^{-1}(U_{\alpha})$ pela proposição 1.1.4 existe $h : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow G$ tal que $p \cdot h(p) = \sigma_{\alpha}(\pi(p))$, logo $\psi_{\alpha}(p \cdot h(p)) = (\pi(p), g_{\alpha}(p)h(p))$ e como $\sigma_{\alpha}(\pi(p)) = \psi_{\alpha}^{-1}(p, e)$ temos $h(p)^{-1} = g_{\alpha}(p)$. Portanto, $p = \sigma_{\alpha}(\pi(p))g_{\alpha}(p)$.

Daí $[(p, v)] = [(\sigma_{\alpha}(\pi(p))g_{\alpha}(p), v)] = [(\sigma_{\alpha}(\pi(p)), \rho(g_{\alpha}(p))v)]$ e defina

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha} : \pi_{\rho}^{-1}(U_{\alpha}) &\rightarrow U_{\alpha} \times V \\ [(p, v)] &\mapsto (\pi(p), \rho(g_{\alpha}(p))v). \end{aligned}$$

Note que $\tilde{\psi}_{\alpha}$ está bem definida, pois se $(q, w) \sim (p, v)$, ou seja, $q = pg^{-1}$ e $w = \rho(g)v$, logo

$$\tilde{\psi}_{\alpha}([q, w]) = (\pi(q), \rho(g_{\alpha}(q))w) = (\pi(p), \rho(g_{\alpha}(p))\rho(g^{-1}g)v) = (\pi(p), \rho(g_{\alpha}(p))v) = \tilde{\psi}_{\alpha}([p, v]).$$

Defina $\tilde{\psi}_{\alpha}^{-1}(m, v) = [\sigma_{\alpha}(m), v]$ e veja que $\tilde{\psi}_{\alpha}$ é uma bijeção

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}^{-1} \circ \tilde{\psi}_{\alpha}([p, v]) &= \tilde{\psi}_{\alpha}^{-1}(\pi(p), \rho(g_{\alpha}(p))v) \\ &= [\sigma_{\alpha}(\pi(p)), \rho(g_{\alpha}(p))v] \\ &= [\sigma_{\alpha}(\pi(p))g_{\alpha}(p)g_{\alpha}(p)^{-1}, \rho(g_{\alpha}(p))v] \\ &= [pg_{\alpha}(p)^{-1}, \rho(g_{\alpha}(p))v] = [p, v] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha} \circ \tilde{\psi}_{\alpha}^{-1}(m, v) &= \tilde{\psi}_{\alpha}([\sigma_{\alpha}(m), v]) \\ &= (\pi(\sigma_{\alpha}(m)), \rho(g_{\alpha}(\sigma_{\alpha}(m)))v) \\ &= (m, \rho(e)v) = (m, v) \end{aligned}$$

logo, $\tilde{\psi}_\alpha$ é uma bijeção. Por último, considere a aplicação $\tilde{g}_\alpha : \pi_\rho^{-1}(U_\alpha) \rightarrow V$ definida por $\tilde{g}_\alpha([p, v]) = \rho(g_\alpha(p))v$, considerando $\tilde{g}_\alpha^{-1} : v \in V \mapsto [\sigma_\alpha(\pi(p)), v] \in \pi_\rho^{-1}(\pi_\rho(p))$ temos que $\tilde{g}_\alpha^{-1} \circ \tilde{g}_\alpha = \text{Id}_{\pi_\rho^{-1}(\pi_\rho(p))}$ e $\tilde{g}_\alpha \circ \tilde{g}_\alpha^{-1} = \text{Id}_V$, portanto $\tilde{\psi}_\alpha$ restrita às fibras é um isomorfismo. Observe que cada $p \in P$ pode ser considerado como um mapa

$$\begin{aligned} p : V &\rightarrow E_m \\ v &\mapsto [(p, v)] \end{aligned}$$

onde $\pi(p) = m$ e $E = P \times_\rho V$. Veja que $[(p, v)] = [(pg^{-1}, \rho(g)v)]$, onde pg^{-1} denota o referencial rodado ao longo da fibra e $\rho(g)v$ as coordenadas do novo referencial. Com respeito às funções de transição, note que se P tem funções de transição

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

então as funções de transição de $P \times_\rho V$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \rho \circ g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(V).$$

De fato, considere $\tilde{\psi}_\alpha$ e $\tilde{\psi}_\beta$ duas trivializações e $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ as seções de P , temos que $\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m)g_{\alpha\beta}(m)$ para cada $m \in U_\alpha \cap U_\beta$, logo

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi}_\alpha \circ \tilde{\psi}_\beta^{-1})(m, v) &= \tilde{\psi}_\alpha([\sigma_\beta(m), v]) \\ &= \tilde{\psi}_\alpha([\sigma_\alpha(m)g_{\alpha\beta}(m), v]) \\ &= \tilde{\psi}_\alpha([\sigma_\alpha(m), \rho(g_{\alpha\beta}(m))v]) \\ &= (m, \rho(g_{\alpha\beta}(m))v). \end{aligned}$$

Veja que dado $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, $\rho \circ g_{\alpha\beta}(m)\rho \circ g_{\beta\gamma}(m) = \rho \circ (g_{\alpha\beta}(m)g_{\beta\gamma}(m)) = \rho \circ g_{\alpha\gamma}(m)$ satisfaz a propriedade de cociclo.

Finalmente observe que tomando trivializações ψ_α e $\tilde{\psi}_\alpha$ obtemos difeomorfismos entre abertos de P e $P \times_\rho V$ com $U_\alpha \times G$ e $U_\alpha \times V$, respectivamente. Assim, com cartas de M (diminuindo U_α se for preciso) e com a estrutura diferenciável de G e V pode-se definir a estrutura diferencial para $P \times_\rho V$.

Exemplo 1.3.1. *Seja G grupo de Lie e $P \rightarrow M$ um G -fibrado principal, considere a representação adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$, onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie associada a G . O fibrado associado $\mathfrak{g}_P = \text{Ad}(P) = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ é chamado fibrado adjunto de P . Este é um exemplo bastante importante na teoria de calibre, especificamente quando se trabalha com o espaço de conexões, pois seções do fibrado adjunto são identificadas com elementos do grupo de transformações de calibre. (vide [7])*

Exemplo 1.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável e $P = P_{\text{Gl}}(M)$ o fibrado de refe-*

renciais associado. Seja $\rho_n : \text{Gl}(\mathbb{R}, n) \rightarrow \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ a representação regular $\rho_n(g)v = gv$,

$$\begin{aligned} TM &= P \times_{\rho_n} \mathbb{R}^n \\ T^*M &= P \times_{\rho_n^*} (\mathbb{R}^n)^* \\ \Lambda^k TM &= P \times_{\Lambda^k \rho_n} \Lambda^k \mathbb{R}^n \\ \Lambda^k T^*M &= P \times_{\Lambda^k \rho_n^*} (\Lambda^k \mathbb{R}^n)^* \\ \bigotimes_s^r TM &= P \times_{\bigotimes_s^r \rho_n} \left(\bigotimes_s^r \mathbb{R}^n \right). \end{aligned}$$

Aqui $\rho_n^*(g) = (\rho_n(g^{-1}))^t$, $\Lambda^k \rho_n$, $\Lambda^k \rho_n^*$ e $\bigotimes_s^r \rho_n$ são as representações dual, produto exterior e produto tensorial induzidas por ρ_n . Para ilustrar vamos estudar o caso $T^*M = P \times_{\rho_n^*} (\mathbb{R}^n)^*$, análogo ao exemplo 1.2.4, $T^*M = \cup_{m \in M} (T_m M)^*$, assim $(m, k) \in T^*M$ onde $k : T_m M \rightarrow \mathbb{R}$. Em coordenadas locais (U, x_1, \dots, x_n) de M ,

$$k = \sum_{i=1}^n k_i dx_i \quad dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_i^j$$

Por outro lado, se $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, então tomando $\{e^j\}_{j=1}^n$ a base dual da base canônica de \mathbb{R}^n , i.e, $e^j(e_i) = \delta_i^j$, logo para $(m, \{v_1, \dots, v_n\}) \in P$ com $v_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $A = (a_i^j)$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} F : P \times_{\rho_n^*} (\mathbb{R}^n)^* &\rightarrow T^*M \\ [(m, \{v_1, \dots, v_n\}), f] &\mapsto (m, A^t f), \end{aligned}$$

vamos provar que F está bem definida; de fato, seja $a \sim b$ (onde $a = (m, \{v_1, \dots, v_n\}, f)$ e $b = (m, \{w_1, \dots, w_n\}, h)$) com $w_i = \sum_{j=1}^n b_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ se, e somente se, $(m, \{w_1, \dots, w_n\}) = (m, \{v_1, \dots, v_n\}) \cdot C^{-1}$ e $h = \rho_n^*(C)f = (C^{-1})^t f$. Agora chame de A a matriz mudança de base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e B a matriz de mudança de base de $\{w_1, \dots, w_n\}$, logo $C = BA^{-1}$,

$$F([(x, \{w_1, \dots, w_n\}), h]) = (x, B^t h) = (x, B^t (B^{-1})^t A^t f) = F([(x, \{v_1, \dots, v_n\}), f])$$

F assim definida é uma bijeção, portanto F é um isomorfismo entre fibrados.

Proposição 1.3.3. *Seja (M^n, g) variedade Riemanniana. O fibrado tangente TM admite uma redução do grupo estrutural pra $O(n)$.*

Demonstração. Sejam $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ trivialização local de TM , $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canônica de \mathbb{R}^n e $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ referencial local de $TM|_U$ tal que $f(\sigma_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt a $\sigma_1(m), \dots, \sigma_n(m)$, para cada $m \in U$ obtemos seções w_1, \dots, w_n de $TM|_U$ tais que $w_1(m), \dots, w_n(m)$ são uma base ortonormal para $T_m M$

(com respeito à métrica riemanniana), para cada $m \in U_\alpha$

$$\begin{aligned} \varphi' : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n a_i w_i(x) &\mapsto (x, a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

logo temos um mapa que leva uma base ortonormal com respeito a g para cada $x \in U$ sobre uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . Aplicamos este processo para cada trivialização do fibrado e obtemos novas trivializações tais que as funções de transição $\varphi'_\alpha \circ (\varphi'_\beta)^{-1}(x) = (x, g_{\alpha\beta}(v))$ levam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n em outra base ortonormal, i.e, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow O(n)$. \square

Se (M^n, g) é variedade riemanniana orientável, a orientação de M permite escolher trivializações $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tais que a aplicação $x \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto \det(g_{\alpha\beta}(x))$ é positiva. Assim podemos obter funções de transição de TM com determinante positivo e usando a proposição anterior, como o processo de ortonormalização preserva o sinal do determinante, então no caso de (M, g) orientável temos que o fibrado tangente tem grupo estrutural $SO(n)$.

Se no exemplo 1.3.2 são consideradas M variedade riemanniana orientável, $P = P_{SO}(M)$ um $SO(n)$ -fibrado de referenciais positivamente orientado e $\rho_n : SO(\mathbb{R}, n) \rightarrow SO(\mathbb{R}^n)$ a representação regular então

$$\begin{aligned} TM &= P \times_{\rho_n} \mathbb{R}^n \\ \Lambda^k TM &= P \times_{\Lambda^k \rho_n} \Lambda^k \mathbb{R}^n \\ \bigotimes_s^r TM &= P \times_{\bigotimes_s^r \rho_n} \left(\bigotimes_s^r \mathbb{R}^n \right). \end{aligned}$$

Como para cada $A \in SO(\mathbb{R}, n)$, $A^t = A^{-1}$ então $\rho_n = \rho_n^*$, o que induz o isomorfismo $TM \cong T^*M$ dado usualmente pela métrica riemanniana.

1.4 Fibrado de Clifford e Fibrado de Espinores

1.4.1 Fibrado de Clifford

Seja $\pi : E \rightarrow M$ fibrado vetorial onde (M^n, g) é uma variedade orientável, considere $T(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r E$, o fibrado de álgebras tensoriais de E e $I(E)$ o fibrado de ideais; ou seja, para cada $m \in M$ a fibra sobre este ponto é um ideal bilateral $I(E_m)$ em $\bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r E_m$ gerado por elementos da forma $v \otimes v + \|v\|^2 1$ para $v \in E_m$. Usando o quociente de fibrados redefinimos o seguinte fibrado vetorial

$$\text{Cl}(E) = T(E)/I(E)$$

com isto as fibras de $\text{Cl}(E)$ são álgebras de Clifford

$$\text{Cl}(E_m) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r E_m / I(E_m)$$

onde a forma quadrática associada é aquela induzida pela métrica em cada ponto.

A construção de $\text{Cl}(E)$ foi feita de maneira funtorial, similar aos mencionados no exemplo 1.3.2, então isto sugere que exista uma representação de $\text{SO}(\mathbb{R}, n)$ em $\text{Cl}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{Cl}(E)$ é um fibrado associado a $P_{\text{SO}}(E)$. Cada transformação ortogonal A de \mathbb{R}^n induz uma transformação ortogonal em $\text{Cl}(\mathbb{R}^n)$ levando a álgebra tensorial em si mesma e preservando o ideal,

$$\text{cl}(\rho_n) : \text{SO}(\mathbb{R}, n) \rightarrow \text{Aut}(\text{Cl}(\mathbb{R}^n)) \quad (1.4.1)$$

definida como $\text{cl}(\rho_n)(A)(v_1 v_2 \cdots v_k) = (Av_1)(Av_2) \cdots (Av_k)$, onde $v_i v_i = \|v_i\|^2 1$.

Definição 1.4.1. *Seja $E \rightarrow M$ fibrado vetorial de posto n com (M, g) variedade riemanniana orientável. O fibrado de Clifford $\text{Cl}(E)$ definido como o fibrado associado a representação (1.4.1) é*

$$\text{Cl}(E) = P_{\text{SO}}(E) \times_{\text{cl}(\rho_n)} \text{Cl}(\mathbb{R}^n).$$

Outra forma de ver o fibrado de Clifford $\text{Cl}(E)$ é por meio das fibras $\text{Cl}(E_m)$

$$\text{Cl}(E) = \bigsqcup_{m \in M} \text{Cl}(E_m, g_m),$$

onde g_m é a métrica restrita a E_m .

1.4.2 Fibrado Spin

Dado um fibrado vetorial orientável $E \rightarrow M$, note que a escolha de uma orientação é equivalente a escolha de um $P_{\text{SO}}(E)$ fibrado, que por sua vez é um subfibrado de $P_{\text{O}}(E)$. Tendo reduzido o grupo estrutural de E num grupo 0-conexo ($\pi_0(\text{SO}) = 0$ i.e. conexo por caminhos), vale perguntar se é possível fazer o grupo estrutural de E um grupo 1-conexo¹. A resposta a isto é dada pela estrutura Spin. O recobrimento duplo de $\text{SO}(n)$ é $\text{Spin}(n)$ e para o caso em que $3 \leq n$, $\text{Spin}(n)$ é o recobrimento universal de $\text{SO}(n)$, denotado por $\xi_0 : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ homomorfismo de grupos (algumas vezes denotado como $\widetilde{\text{Ad}}$) com $\ker \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ (vide Capítulo 2, teorema 2.9 de [12]).

Definição 1.4.2. *Seja E fibrado vetorial riemanniano orientável. Uma estrutura Spin em E é um par $(P_{\text{Spin}}(E), \xi)$ onde $P_{\text{Spin}}(E)$ é um fibrado principal com grupo estrutural $\text{Spin}(n)$ e $\xi : P_{\text{Spin}}(E) \rightarrow P_{\text{SO}}(E)$ um morfismo entre fibrados principais, ou seja, $\xi(p \cdot g) =$*

¹Um espaço topológico X é chamado n -conexo se é não vazio, conexo por caminhos e $\pi_i(X) = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

$\xi(p)\xi_0(g)$ para todo $p \in P_{\text{Spin}}(E)$ e $g \in \text{Spin}(n)$ com $\xi_0 : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$. Onde ξ restrita as fibras coincide com ξ_0 .

Em resumo, o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} P_{\text{Spin}}(E) & \xrightarrow{\xi} & P_{\text{SO}}(E) \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

A ação de $\text{Spin}(n)$ em $P_{\text{Spin}}(E)$ e a ação de $\text{SO}(n)$ em $P_{\text{SO}}(E)$ se relacionam por meio do diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\xi_0} & \text{SO}(n) \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 & & & & \\ & \searrow & P_{\text{Spin}}(E) & \xrightarrow{\xi} & P_{\text{SO}}(E) \\ & & \searrow \pi' & & \swarrow \pi \\ & & & & M \end{array}$$

As estruturas Spin nem sempre existem e não precisam ser únicas. O seguinte teorema mostra qual é a obstrução para a existência de uma estrutura Spin (Capítulo II, Teorema 1.7, [12]).

Teorema 1.4.3. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial orientável. Então existe estrutura Spin em E se, e somente se, a segunda classe de Stiefel-Whitney $w_2(E)$, é zero. Além disso, se $w_2(E) = 0$, então as diferentes estruturas Spin em E estão em correspondência biunívoca com os elementos de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$.*

Definição 1.4.4. *Uma variedade Spin é uma variedade riemanniana orientável dotada de uma estrutura Spin no seu fibrado tangente.*

Similar ao anterior, M é uma variedade Spin se, e somente se, a segunda classe de Stiefel-Whitney é nula. (Capítulo II, Teorema 2.1, [12])

Definição 1.4.5. *Seja E fibrado vetorial riemanniano orientável com estrutura Spin $(P_{\text{Spin}}(E), \xi)$. O fibrado de espinores real é*

$$S(E) = P_{\text{Spin}}(E) \times_{\mu} N$$

onde N é um $\text{Cl}(\mathbb{R}^n)$ -módulo à esquerda e $\mu : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(N)$ é a representação de $\text{Spin}(n)$ em N dada pela multiplicação à esquerda de elementos de $\text{Spin}(n) \subset \text{Cl}^0(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.4.6. *$S(E)$ é um fibrado de módulos sobre o fibrado de álgebras $\text{Cl}(E)$.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\text{Spin}}(E) \times \text{Cl}(\mathbb{R}^n) \times N & \longrightarrow & P_{\text{Spin}}(E) \times N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P_{\text{Spin}}(E) \times \text{Cl}(\mathbb{R}^n) \times N & \longrightarrow & P_{\text{Spin}}(E) \times N.
 \end{array}$$

Dado ponto a ponto por

$$\begin{array}{ccc}
 (p, \varphi, n) & \longrightarrow & (p, \varphi n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (pg^{-1}, \text{Ad}_g \varphi, \rho_n(g)n) & \longrightarrow & (pg^{-1}, \rho_n(g)\varphi n).
 \end{array}$$

Veja que, como o diagrama comuta, isto induz um mapa $\lambda : \text{Cl}(E) \times S(E) \rightarrow S(E)$ tal que para cada $m \in M$, $\lambda_m : \text{Cl}(E_m) \times S(E_m) \rightarrow S(E_m)$ satisfaz as propriedades de módulo. λ_m está bem definida, pois $\text{Ad}_g \varphi \mu(g)n = g\varphi g^{-1}gn = g\varphi n = \mu(g)\varphi n$. \square

Em particular, temos que as seções do fibrado de espinores é um módulo sobre as seções do fibrado de Clifford. Esta operação de módulo determina um homomorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(\text{Cl}(E)) & \xrightarrow{\Phi} & \text{End}(\Gamma(S(E))) \\
 \uparrow j & \nearrow \Phi & \\
 \Gamma(E) & &
 \end{array}$$

satisfazendo

$$\Phi(\sigma)^2 = -|\sigma|^2 \mathbf{1}, \quad \sigma \in \Gamma(E)$$

chamado ação de Clifford.

1.4.3 Estrutura Spin em espaços de dimensão 4

Um resultado geral sobre geometria Spin que pode ser encontrado no Capítulo 3 de [6] e que vai ser de muita utilidade no capítulo 3 do presente do trabalho é o seguinte: dado um espaço vetorial real V de dimensão 4, tem-se

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong S^+ \otimes S^-$$

onde (Φ, S) é a estrutura Spin em V , com $S = S^+ \oplus S^-$.

O grupo Spin de dimensão 4 é simplesmente o produto direto de duas cópias do grupo especial unitário (Capítulo 4, Lema 4.6, [17])

$$\text{Spin}(4) = \text{SU}(2)^+ \times \text{SU}(2)^-.$$

Sejam S^+ e S^- duas cópias de \mathbb{C}^2 com a métrica hermitiana padrão $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma forma simplética $\lambda \in \Lambda_{\mathbb{C}}^2(S^{\pm})^*$ compatível com a métrica. Isto define um mapa $J : S^{\pm} \rightarrow S^{\pm}$ pela relação

$$\langle x, Jy \rangle = \lambda(x, y).$$

Agora considere o espaço das aplicações lineares de S^+ para S^- tais que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} S^+ & \xrightarrow{f} & S^- \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ S^+ & \xrightarrow{f} & S^- \end{array}$$

denotado por $\text{Hom}_J(S^+, S^-)$, este é um espaço vetorial de dimensão real 4 e que por sua vez é a parte real do espaço vetorial complexo $\text{Hom}(S^+, S^-)$. Com isto, uma estrutura Spin em V é um par de espaços vetoriais complexos S^+ , S^- e um isomorfismo $\gamma : V \rightarrow \text{Hom}_J(S^+, S^-)$ compatível com a métrica. Em termos da base canônica γ é da forma

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que γ preserva a orientação de V , pois $\text{SU}(2)^+ \times \text{SU}(2)^-$ é conexo e como a forma λ identifica S^+ com $(S^+)^*$ o que permite identificar V como a parte real de $S^+ \otimes S^-$.

Dado $v \in V$ e $\gamma(v)^* : S^- \rightarrow S^+$ o adjunto de $\gamma(v) : S^+ \rightarrow S^-$, então dados $v, v' \in V$ ortonormais, $\gamma(v)^* \gamma(v')$ define um endomorfismo de S^+ satisfazendo

$$\gamma(v)^* \gamma(v) = 1 \quad \gamma(v)^* \gamma(v') + \gamma^*(v') \gamma(v) = 0,$$

logo existe uma ação natural ρ de $\Lambda^2(V)$ sobre S^+ definida como $\rho(v \wedge v')s = -\lambda(v)^* \lambda(v')s$. Como $\Lambda^2(V) = \Lambda_+^2(V) \oplus \Lambda_-^2(V)$, onde $\Lambda_+^2(V)$ e $\Lambda_-^2(V)$ são as formas autoduais e antiautoduais

$$\Lambda_+^2(V) := \{\omega \in \Lambda^2(V) \mid *\omega = \omega\}$$

$$\Lambda_-^2(V) := \{\omega \in \Lambda^2(V) \mid *\omega = -\omega\}.$$

Veja que $\Lambda_-^2(V)$ age trivialmente sobre S^+ , de fato, considere

$$\{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2\}$$

base de $\Lambda_-^2(V)$, a imagem de cada elemento da base de $\Lambda_-^2(V)$ por ρ é zero

$$\begin{aligned} \rho(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) &= -\gamma(e_1)^*\gamma(e_2) + \gamma(e_3)^*\gamma(e_4) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) &= -\gamma(e_1)^*\gamma(e_4) + \gamma(e_2)^*\gamma(e_3) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2) &= -\gamma(e_1)^*\gamma(e_3) + \gamma(e_4)^*\gamma(e_2) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Portanto $\Lambda_+^2(V) \rightarrow \mathfrak{su}(S^+)$ e $\Lambda_-^2(V) \rightarrow \mathfrak{su}(S^-)$ são isomorfismos.

1.5 Conexão e Curvatura em Fibrado Principal

Nesta seção vai ser discutido o conceito de conexão em fibrado principal, no sentido de distribuição horizontal e como 1-forma, e a relação entre as duas definições. Também é apresentado o conceito de curvatura e alguns resultados importantes. Se o leitor já souber a respeito, pode passar de imediato para a seguinte seção.

Seja $P \rightarrow M$ fibrado principal, com grupo estrutural G , onde G é um grupo de Lie e sua álgebra de Lie denotada por $T_e G = \mathfrak{g}$. Como G age livremente sobre P , então para cada $V \in \mathfrak{g}$ e $p \in P$ considere a curva

$$\gamma : t \in I \mapsto p \cdot \exp(tV) \in P,$$

logo $\tilde{V}_p = \gamma'(0) \in T_p P$. Desta forma cada $V \in \mathfrak{g}$ determina um campo de vetores em P , ou seja, temos um mapa $V \in \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{V} \in \mathfrak{X}(P)$.

Considere a aplicação $R_p : G \rightarrow P$ definida por $R_p(g) = p \cdot g$

$$(dR_p)_e : \mathfrak{g} \rightarrow T_p P$$

$$V \mapsto (dR_p)_e(V) = \tilde{V}_p.$$

Observe que para cada $p \in P$, $\tilde{V}_p \in \ker(d\pi_p)$

$$d\pi_p(\tilde{V}_p) = \frac{d}{dt}(\pi(p \cdot \exp(tV)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\pi(p))|_{t=0} = 0,$$

geometricamente \tilde{V}_p é visto como um vetor tangente a fibra em p , $\mathcal{V}_p = \ker(d\pi_p)$ é definido como o espaço dos vetores tangente a fibra em p , chamado *espaço vertical* em p . Uma conexão é uma escolha de campos invariantes horizontais.

Definição 1.5.1. *Uma conexão no fibrado principal P é uma escolha \mathcal{H} de n -planos tangentes em P , tais que para cada $p \in P$*

i) $T_p P = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p$.

ii) \mathcal{H}_p são G invariantes, i.e. $dR_g(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{p \cdot g}$.

Como $\mathcal{V}_p = \ker(d\pi_p)$, o mapa $d\pi_p : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)} M$ é um isomorfismo linear. E observe que o primeiro item da definição determina uma projeção linear $T_p P \rightarrow \mathcal{V}_p$.

Conexões podem ser caracterizadas como projeções em espaços verticais, pois $\mathfrak{g} \cong \mathcal{V}_p$ (vide capítulo 8 página 311, [19]), satisfazendo certo tipo de invariância pela ação de G em P . Isto é definido mediante o conceito *1-forma de conexão*.

Definição 1.5.2. *Uma 1-forma de conexão é uma 1-forma diferencial de P com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, satisfazendo:*

i) $\omega(H) \equiv 0$ e $\omega(\tilde{V}) \equiv V$.

ii) $(R_g)^*(\omega) = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$.

Quanto a ii), note que $dR_g(\tilde{V}) = \widetilde{\text{Ad}_{g^{-1}} V}$; de fato

$$\begin{aligned} dR_g(\tilde{V}) &= \frac{d}{dt}(R_g(p \cdot \exp(tV)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(pg \cdot g^{-1} \exp(tV)g)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(pg \cdot \exp(t \text{Ad}_{g^{-1}} V))|_{t=0} \\ &= \widetilde{\text{Ad}_{g^{-1}} V}. \end{aligned}$$

Com isto, $(R_g)^*\omega(\tilde{V}) = \omega(dR_g(\tilde{V})) = \omega(\widetilde{\text{Ad}_{g^{-1}} V}) = \text{Ad}_{g^{-1}} V = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega(\tilde{V})$.

Fixando a notação, para cada $v \in T_p P$ temos

$$v = v^H + v^V$$

onde v^H é a parte horizontal de v e v^V a parte vertical, com tudo isto a conexão \mathcal{H} fornece um mapa linear $TP \rightarrow TP$ tal que para cada $p \in P$, $v \in T_pP$ é projetado na parte horizontal $v^H \in T_pP$.

Definição 1.5.3. Dada ω 1-forma de conexão vem associada uma 2-forma em P com valores em \mathfrak{g} chamada curvatura

$$\Omega(u, v) = d\omega(u^H, v^H). \quad (1.5.1)$$

Em geral, sejam M variedade diferenciável e V um espaço vetorial de dimensão finita, uma k -forma ω em M com valores em V , dada uma base v_1, \dots, v_m de V , $\omega \in \Omega^k(M, V)$ é escrita como

$$\omega := \sum_{i=1}^m \omega_i v_i$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_m$ são k -formas usuais. São definidas as operações

- i) Para $\omega \in \Omega^k(M, V)$, o diferencial de ω , $d\omega \in \Omega^{k+1}(M, V)$

$$d\omega := \sum_{i=1}^m d\omega_i v_i.$$

- ii) Definindo o colchete de Lie em $V \times V \rightarrow V$ em V , para $\omega \in \Omega^k(M, V)$ e $\eta \in \Omega^l(M, V)$ temos $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M, V)$ definida como

$$[\omega, \eta] := \sum_{i,j} \omega_i \wedge \eta_j [v_i, v_j]$$

daí temos

$$[\omega, \eta] = (-1)^{kl+1} [\eta, \omega].$$

No caso $\omega \in \Omega^1(M, V)$, temos

$$[\omega, \omega](X, Y) = \frac{1}{2} \{ [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] \} = [\omega(X), \omega(Y)].$$

E usando a identidade de Jacobi do colchete de Lie em V , tem-se

$$[[\omega, \omega], \omega] = 0$$

para qualquer $\omega \in \Omega^1(M, V)$.

Escolhendo uma base B_1, \dots, B_m em \mathfrak{g} . A 1-forma de conexão ω é escrita

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i B_i$$

onde $\omega_1, \dots, \omega_m$ são 1-formas diferenciais em P . Similarmente para a curvatura Ω

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \Omega_i B_i$$

onde $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ são 2-formas diferenciais em P . Veja que a curvatura satisfaz a seguintes propriedades:

Proposição 1.5.4. *i)* $\Omega(v^V, \cdot) \equiv 0$.

ii) $R_g^* \Omega = \text{Ad}_{g^{-1}}(\Omega)$.

iii) (*Equação Estrutural*) $\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$.

iv) (*Identidade de Bianchi*) $\frac{1}{2}d\Omega = [\Omega, \omega]$.

Demonstração. *i)* Segue da definição de Ω .

ii)

$$\begin{aligned} R_g^* \Omega(u, v) &= \Omega(dR_g(u), dR_g(v)) = d\omega(dR_g(u)^H, dR_g(v)^H) \\ &= d\omega(dR_g(u^H), dR_g(v^H)) = R_g^* d\omega(u^H, v^H) \\ &= d(R_g^* \omega)(u^H, v^H) = d(\text{Ad}_{g^{-1}} \omega)(u^H, v^H) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}} d\omega(u^H, v^H) = \text{Ad}_{g^{-1}} \Omega(u, v). \end{aligned}$$

iii) Dados $u, v \in T_p P$, como $u = u^H + u^V$ e $v = v^H + v^V$, temos

$$\Omega(u, v) = \Omega(u^H, v^H) + \Omega(u^H, v^V) + \Omega(u^V, v^H) + \Omega(u^V, v^V).$$

Pelo item *i)*, $\Omega(u^H, v^V) = \Omega(u^V, v^H) = \Omega(u^V, v^V) = 0$. Por outro lado veja que

$$- d\omega(u^V, v^V) + [\omega, \omega](u^V, v^V) = 0.$$

$$- d\omega(u^V, v^H) + [\omega, \omega](u^V, v^H) = 0.$$

$$- d\omega(u^H, v^V) + [\omega, \omega](u^H, v^V) = 0.$$

De fato, para u^V e v^V existem $X, Y \in \mathfrak{g}$, tais que $u^V = \widetilde{X}$ e $v^V = \widetilde{Y}$.

$$\begin{aligned} d\omega(u^V, v^V) + [\omega, \omega](u^V, v^V) &= d\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + [\omega(\widetilde{X}), \omega(\widetilde{Y})] \\ &= \frac{1}{2} \{ \widetilde{X}(Y) - \widetilde{Y}(X) - \omega([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) + [X, Y] \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\omega(u^V, v^H) + [\omega, \omega](u^V, v^H) &= d\omega(\widetilde{X}, v^H) + [\omega(\widetilde{X}), \omega(v^H)] \\
 &= \frac{1}{2} \{ \widetilde{X}\omega(v^H) - v^H\omega(\widetilde{X}) - \omega([\widetilde{X}, v^H]) \} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o fato de que $[\widetilde{X}, v^H]$ é horizontal. De fato, o fluxo associado a \widetilde{X} é dado por $p \cdot \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(p) = \xi_t(p)$

$$[\widetilde{X}, v^H](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ (\xi_{-t})_*(v_{(\xi_t(p))}^H) - v_{(p)}^H \}.$$

Como v^H é G -invariante, temos $v_{(\xi_t(p))}^H = v_{p \cdot \exp(tX)}^H = (R_{\exp(tX)})_*(v_{(p)}^H) = (\xi_t)_*(v_{(p)}^H) \in \mathcal{H}_{\xi_t(p)}$, logo $(\xi_{-t})_*(v_{(\xi_t(p))}^H) \in \mathcal{H}_p$ e portanto $(\xi_{-t})_*(v_{(\xi_t(p))}^H) - v_{(p)}^H$ está em \mathcal{H}_p onde segue que $[\widetilde{X}, v^H]$ é horizontal.

Com isso, para quaisquer $u, v \in TP$

$$\Omega(u, v) = d\omega(u^H, v^H) = (d\omega + [\omega, \omega])(u, v).$$

iv) Usando a equação estrutural

$$\begin{aligned}
 d\Omega &= d[\omega, \omega] \\
 &= [d\omega, \omega] - [\omega, d\omega] \\
 &= 2[d\omega, \omega] \\
 &= -2[[\omega, \omega], \omega] + 2[\Omega, \omega] \\
 &= 2[\Omega, \omega].
 \end{aligned}$$

□

Note que Ω restrita ao espaço horizontal é fechada.

1.6 Conexões e curvatura em fibrados vetoriais

Seja $E \rightarrow M$ um fibrado vetorial suave. Uma conexão em E é um operador $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ satisfazendo

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + df \otimes \sigma \tag{1.6.1}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$.

A partir de um fibrado principal podemos fornecer um fibrado vetorial e vice-versa. Agora queremos saber como esta passagem relaciona as respectivas conexões. A prova desse

resultado é bastante técnica e portanto vai ser omitida, mas ela pode ser encontrada no Capitulo II, proposição 4.4 de [12].

Proposição 1.6.1. *Seja E fibrado vetorial sobre uma variedade riemanniana orientável M e ω uma 1-forma de conexão em $P_{\text{SO}}(E)$. Então ω determina uma única conexão em E*

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^n A_i^j \otimes e_j \quad (1.6.2)$$

onde $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ é um referencial local de E , i.e., ε é uma seção local de $P_{\text{SO}}(E)$ e $A = \varepsilon^* \omega$. Além de satisfazer a regra

$$V \langle \sigma, \sigma' \rangle = \langle \nabla_V \sigma, \sigma' \rangle + \langle \sigma, \nabla_V \sigma' \rangle \quad (1.6.3)$$

para todo $V \in TM$ e $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica em E . Reciprocamente, qualquer conexão em E satisfazendo a equação (1.6.3) fornece uma única 1-forma de conexão determinada pela equação (1.6.2).

A conexão com a propriedade (1.6.3) é chamada *riemanniana*.

Considerando $E = P_{\text{SO}}(E) \times_{\rho} V$ (com ρ representação injetiva), seja $B = (d\rho)_1 A \in \Omega^1(M, E)$ onde $(d\rho)_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ e $A = \varepsilon^* \omega$ com ε seção de $P_{\text{SO}}(E)$. A 1-forma B induz uma derivada exterior covariante

$$d_B : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, E)$$

definida por $d_B \alpha := d\alpha + B \wedge \alpha$, antes de ver que d_B satisfaz a respectiva regra de Leibniz, vamos definir alguns fatos. Seja

$$\Omega(M, E) = \bigoplus \Omega^k(M, E),$$

esta álgebra possui uma estrutura de módulo (à esquerda) sobre a álgebra graduada $\Omega(M)$, dada pelo produto exterior

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M, E) \rightarrow \Omega^{k+l}(M, E)$$

definida por $\alpha \wedge (\beta \otimes \sigma) = (\alpha \wedge \beta) \otimes \sigma$ onde $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \otimes \sigma \in \Omega^l(M, E) \cong \Omega^l(M) \otimes \Gamma(E)$. Podemos generalizar o diferencial exterior para formas com valores no fibrado vetorial E , de modo que $\nabla = d_{\nabla}$ em $\Gamma(E) = \Omega^0(M, E)$, considerando a seguinte cadeia

$$\Omega^0(M, E) \xrightarrow{d_{\nabla}} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{d_{\nabla}} \dots \xrightarrow{d_{\nabla}} \Omega^k(M, E) \xrightarrow{d_{\nabla}} \dots$$

onde d_{∇} satisfaz a regra de Leibniz.

$$d_{\nabla}(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_{\nabla} \beta$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^l(M, E)$.

$$\begin{aligned} d_B(\alpha \wedge \beta) &= d(\alpha \wedge \beta) + B \wedge \alpha \wedge \beta \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta + (-1)^k \alpha \wedge B \wedge \beta \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_B \beta \end{aligned}$$

onde d_B em $\Omega^0(M, E) \cong \Gamma(E)$ é definida como ∇ , para $\sigma \in \Gamma(E)$ e $V \in TM$

$$\nabla_V \sigma = (d_B \sigma)(V) = d\sigma(V) + (B \wedge \sigma)(V) = V(\sigma) + B(V)\sigma.$$

A curvatura associada com a conexão ∇ é definida como $F^\nabla = d_\nabla \circ d_\nabla$. A seguinte proposição é uma implicação da proposição 1.6.1.

Proposição 1.6.2. *Sejam ω , ε e ∇ como na proposição anterior*

$$F^\nabla e_i = \sum_{j=1}^n \tilde{F}_i^j \otimes e_j \quad (1.6.4)$$

onde $\tilde{F} = \varepsilon^* \Omega$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F^\nabla e_i &= d_\nabla \circ d_\nabla e_i = \sum_j d_\nabla(A_i^j \times e_j) = \sum_j dA_i^j \otimes e_j - A_i^j \wedge \nabla e_j \\ &= \sum_j dA_i^j \otimes e_j - \sum_{jk} A_i^j \wedge A_j^k \otimes e_k = \sum_k (dA_i^k + [A, A]_i^k) \otimes e_k \\ &= \sum_k (d\varepsilon^* \omega + [\varepsilon^* \omega, \varepsilon^* \omega])_i^k \otimes e_k = \sum_k \{\varepsilon^*(d\omega + [\omega, \omega])\}_i^k \otimes e_k \\ &= \sum_k (\varepsilon^* \Omega)_i^k \otimes e_k = \sum_k \tilde{F}_i^k \otimes e_k. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.6.3. *Seja F^∇ a curvatura associada a ∇ , pela equação (1.6.4) dados $V, W \in TM$, $F_{V,W}^\nabla e_i = \sum_{j=1}^n \tilde{F}_i^j(V, W) e_j$, então tem-se*

$$F_{V,W}^\nabla e_i = (\nabla_V \nabla_W - \nabla_W \nabla_V - \nabla_{[V,W]}) e_i. \quad (1.6.5)$$

Demonstração. Para um dos termos temos

$$\begin{aligned} \nabla_V \nabla_W e_i &= \nabla_V \left(\sum_j A_i^j(W) e_j \right) \\ &= \sum_j (V A_i^j(W)) e_j + A_i^j(W) \nabla_V e_j \\ &= \sum_j (V A_i^j(W)) e_j + \sum_{jk} A_i^j(W) A_j^k(V) e_k. \end{aligned}$$

Logo juntando todos os termos

$$\begin{aligned}
(\nabla_V \nabla_W - \nabla_W \nabla_V - \nabla_{[V,W]})e_i &= \sum_j \{VA_i^j(W) - WA_i^j(V) - A_i^j([V,W])\}e_j + \\
&\quad \sum_{jk} \{A_i^k(W)A_k^j(V) - A_i^k(V)A_k^j(W)\}e_j \\
&= \sum_j \{dA_i^j(V,W) + \sum_{jk} A_k^j \wedge A_i^k(V,W)\}e_j \\
&= \sum_j \tilde{F}_i^j(V,W)e_j = F_{V,W}^\nabla e_i.
\end{aligned}$$

□

A expressão $\langle F_{V,W}^\nabla \sigma, \sigma' \rangle$ é *tensorial*, pois pela equação (1.6.5), $F_{V,W}^\nabla = -F_{W,V}^\nabla$ e além disso como ∇ é compatível com a métrica (1.6.3), então temos $\langle F_{V,W}^\nabla \sigma, \sigma' \rangle = -\langle \sigma, F_{V,W}^\nabla \sigma' \rangle$. Logo $\langle F_{V,W}^\nabla \sigma, \sigma' \rangle$ só depende do valor de V, W, σ e σ' no ponto m . Portanto, fixados $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ em $m \in M$

$$F_{V,W}^\nabla : E_m \rightarrow E_m \quad (1.6.6)$$

define um endomorfismo antissimétrico chamado *transformação de curvatura*.

1.7 Conexão Spin

Sejam $P \rightarrow M$ um fibrado principal com grupo estrutural G e $\rho_n : G \rightarrow \text{SO}(n)$ representação de grupo. Se ω é uma 1-forma de conexão em P , é natural perguntar pela relação de ω com a conexão no fibrado associado $E = P \times_\rho \mathbb{R}^n$ dotado de estrutura riemanniana. Uma conexão em P induz uma conexão em $P(E) = P \times_\rho \text{SO}(n)$, pois é só estender ω trivialmente ($\text{SO}(n)$ admite conexão plana) e levá-la para $P \times_\rho \text{SO}(n)$ por $(\rho_n)_* := (d\rho)_1$, isto é possível considerando a aplicação

$$\begin{aligned}
\iota : P &\rightarrow P(E) \\
p &\mapsto [(p, \text{Id}_{\text{SO}(n)})].
\end{aligned}$$

Se ρ_n é uma representação fiel então ι é um mergulho. De fato, dados $p, q \in P$ tais que $\iota(p) = \iota(q)$, temos $q = p \cdot g^{-1}$ e $\text{Id}_{\text{SO}(n)} = \rho_n(g) \text{Id}_{\text{SO}(n)}$, como ρ_n é fiel segue que $g = e$ logo $p = q$. Agora, considere $\iota = \pi \circ j$ onde $j : p \in P \rightarrow (p, \text{Id}_{\text{SO}(n)}) \in P \times \text{SO}(n)$ e

$$\pi : (p, \text{Id}_{\text{SO}(n)}) \in P \times \text{SO}(n) \rightarrow [(p, \text{Id}_{\text{SO}(n)})] \in P \times_\rho \text{SO}(n),$$

note que $\iota_* = \pi_* \circ j_*$, mas j_* é injetiva, portanto ι_* é injetiva. Note também que ι é G -equivariante,

$$\iota(p \cdot g) = [(p \cdot g, \rho(gg^{-1}) \text{Id}_{\text{SO}(n)})] = [(p \cdot g, \rho(g^{-1}) \text{Id}_{\text{SO}(n)})] \rho(g) = [(p, \text{Id}_{\text{SO}(n)})] \rho(g) = \iota(p) \rho(g).$$

Proposição 1.7.1. *Sejam ω e Ω 1-forma de conexão e 2-forma de curvatura, respectivamente e sejam ω_ρ e Ω_ρ a conexão e curvatura induzidas em $P(E_\rho)$. Considerando $P \subset P(E_\rho)$ como subvariedade mergulhada temos*

$$\omega_\rho|_P = (\rho_n)_* \omega \quad \Omega_\rho|_P = (\rho_n)_* \Omega$$

onde $(\rho_n)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ é o homomorfismo de álgebras associado a $\rho_n : G \rightarrow \text{SO}(n)$.

Demonstração. Seja $\tilde{V} \in TP$, pela definição de ω temos que $\omega_\rho(\tilde{V}) = 0$ se \tilde{V} é horizontal e $\omega_\rho(\tilde{V}) = \rho_* V$ se \tilde{V} é vertical. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{\rho(g)})^* \omega_\rho &= (\mathbf{R}_{\rho(g)})^* \rho_* \omega = (\mathbf{R}_{\rho(g)})^* (\rho^{-1})^* \omega = (\rho^{-1} \circ \mathbf{R}_{\rho(g)})^* \omega \\ &= (\mathbf{R}_g \circ \rho^{-1})^* \omega = (\rho^{-1})^* (\mathbf{R}_g)^* \omega = (\rho^{-1})^* \text{Ad}_{g^{-1}} \omega \\ &= \rho_* (d(\mathbf{L}_{g^{-1}} \circ \mathbf{R}_g) \omega) = d(\rho \circ \mathbf{L}_{g^{-1}} \circ \mathbf{R}_g) \omega = d(\mathbf{L}_{\rho(g^{-1})} \circ \mathbf{R}_{\rho(g)} \circ \rho) \omega \\ &= \text{Ad}_{\rho(g)^{-1}} \rho_* \omega = \text{Ad}_{\rho(g)^{-1}} \omega_\rho. \end{aligned}$$

No caso da curvatura, usando a equação estrutural temos

$$\begin{aligned} \Omega_\rho &= d\omega_\rho + [\omega_\rho, \omega_\rho] = d(\rho_* \omega) + [\rho_* \omega, \rho_* \omega] \\ &= (\rho^{-1})^* (d\omega + [\omega, \omega]) = \rho_* \Omega. \end{aligned}$$

□

De volta no contexto de fibrado de Clifford

$$\text{cl}(\rho_n) : \text{SO}(n) \rightarrow \text{Aut}(\text{Cl}(\mathbb{R}^n)),$$

dada uma conexão em $P_{\text{SO}}(E)$, ela induz uma conexão em $\text{Cl}(E)$ via

$$\text{cl}(\rho_n)_* : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \text{Der}(\text{Cl}(\mathbb{R}^n)). \quad (1.7.1)$$

Para cada $A \in \mathfrak{so}(n)$, (1.7.1) satisfaz $\text{cl}(\rho_n)_* A(u \cdot w) = (\text{cl}(\rho_n)_* A)u \cdot w + u \cdot (\text{cl}(\rho_n)_* A)w$ para todo $u, w \in \text{Cl}(\mathbb{R}^n)$, assim pelas Proposições 1.6.1 e 1.7.1 temos

$$\nabla(\varepsilon \cdot \sigma) = (\nabla \varepsilon) \cdot \sigma + \varepsilon \cdot (\nabla \sigma) \quad (1.7.2)$$

para todo $\varepsilon, \sigma \in \Gamma(\text{Cl}(E))$ onde ∇ é conexão no fibrado de Clifford $\text{Cl}(E)$.

Até agora observe que a definição de fibrado de Clifford não precisa da existência de

estrutura Spin. Mas para nossos propósitos, suponha que E admite estrutura Spin, a conexão em $P_{\text{SO}}(E)$ levanta via $\xi : P_{\text{Spin}}(E) \rightarrow P_{\text{SO}}(E)$ a uma conexão em $P_{\text{Spin}}(E)$. Logo pela Proposição 1.6.1, isto induz uma conexão no fibrado associado $S(E)$, assim pela proposição anterior e pela Proposição 1.4.6 faz sentido perguntar como ∇^S (conexão em $S(E)$) age sobre a estrutura de módulo de $S(E)$.

Proposição 1.7.2. *Seja ∇^S conexão em $S(E)$. Para todo $\varepsilon \in \Gamma(\text{Cl}(E))$ e para todo $\sigma \in \Gamma(S(E))$*

$$\nabla^S(\varepsilon \cdot \sigma) = (\nabla\varepsilon) \cdot \sigma + \varepsilon \cdot (\nabla^S\sigma). \quad (1.7.3)$$

Demonstração. Pela proposição 1.4.6, μ preserva o produto de módulo, ou seja,

$$\mu(g)(u \cdot n) = [\text{cl}(\rho_n)(g)u] \cdot [\mu(g)n]$$

para todo $g \in \text{Spin}(n)$, $u \in \text{Cl}(\mathbb{R}^n)$ e $n \in N$. Logo

$$\mu_* : \mathfrak{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(N)$$

e para cada $A \in \mathfrak{spin}(n) = \mathfrak{so}(n)$, $[\mu_*A](u \cdot n) = [(\text{cl}(\rho_n)_*A)u] \cdot n + u \cdot [(\mu_*A)n]$ e o resto segue das proposições 1.6.1 e 1.7.1. \square

A curvatura associada com a conexão ∇^S vai ser denotada por F^S , um resultado bastante prático é o seguinte.

Proposição 1.7.3. *Para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ o operador*

$$F_{V,W}^S : S(E_m) \rightarrow S(E_m)$$

satisfaz para quaisquer $\varepsilon \in \Gamma(\text{Cl}(E))$ e $\sigma \in \Gamma(S(E))$

$$F_{V,W}^S(\varepsilon \cdot \sigma)_m = (F_{V,W}^\nabla \varepsilon_m) \cdot \sigma_m + \varepsilon_m \cdot F_{V,W}^S \sigma_m \quad (1.7.4)$$

para quaisquer $\varepsilon \in \Gamma(\text{Cl}(E))$ e $\sigma \in \Gamma(S(E))$.

Demonstração. O resultado segue de aplicar as equações (1.6.5) e (1.7.3). \square

Pode-se realizar uma construção explícita da conexão e a curvatura em $S(E)$, mencionamos aqui os resultados, o leitor pode ver as provas no Capítulo II, teorema 4.14 e 4.15 de [12], respectivamente.

Proposição 1.7.4. *Seja ω uma 1-forma de conexão em $P_{\text{SO}}(E)$ e $S(E)$ o fibrado de espinores associado. Então a conexão ∇^S é dada localmente*

$$\nabla^S \sigma_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i < j} A_i^j \otimes e_i e_j \cdot \sigma_\alpha \quad (1.7.5)$$

onde $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ é uma seção local de $P_{\text{SO}}(E)$, $A = \varepsilon^*\omega$ e $\vartheta = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ é uma seção local de $P_{\text{SO}}(S(E))$ determinada por ε .

Proposição 1.7.5. *Seja Ω uma 2-forma de curvatura em $P_{\text{SO}}(E)$ e $S(E)$ o fibrado de espinores associado. Então a curvatura F^S é dada localmente*

$$F^S \sigma = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \tilde{F}_i^j \otimes e_i e_j \cdot \sigma \quad (1.7.6)$$

onde $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ é uma seção local de $P_{\text{SO}}(E)$, $\tilde{F} = \varepsilon^*\Omega$ e $\omega \in \Gamma(S(E))$.

Em particular, para quaisquer $V, W \in \Gamma(TM)$ e $m \in M$ a transformação de curvatura

$$F_{V,W}^S : S(E_m) \rightarrow S(E_m)$$

é dada por

$$F_{V,W}^S \sigma = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \langle F_{V,W}^\nabla(e_i), e_j \rangle e_i e_j \sigma \quad (1.7.7)$$

onde F^∇ é a curvatura em $TM \rightarrow M$.

Capítulo 2

Geometria de G_2 -variedades

O grupo G_2 é um grupo de Lie excepcional (os outros casos são F_4 , E_6 , E_7 e E_8 , que foram classificados em 1890 por Wilhelm Killing), e em 1914, Élie Cartan observou que o G_2 era formado pelo grupo de automorfismos dos octônios \mathbb{O} . Por sua vez, os octônios são uma álgebra de divisão com unidade e de dimensão 8, descobertos por John Graves em 1843 e que guardam certa semelhança com os quatérnios, porém, os octônios não são associativos. A relação que motiva esta perspectiva do grupo G_2 como grupo de automorfismos de \mathbb{O} é a seguinte: Os octônios podem ser gerados a partir de três elementos e_1, e_2 e e_3 , tais que cada um deles ao quadrado é -1 e anticomutam entre si, logo, um automorfismo leva uma tripla deste tipo em uma outra tripla e'_1, e'_2 e e'_3 com estas mesmas propriedades. Do ponto de vista geométrico e_1 é levado em qualquer ponto e'_1 da esfera S^6 de octônios imaginários, e_2 é levado em qualquer ponto e'_2 da esfera S^5 (que é a restrição de S^6 ao equador) de octônios imaginários e finalmente, e_3 é levado a qualquer ponto e'_3 sobre a esfera S^3 de octônios imaginários (pois e'_3 é ortogonal a e_1, e_2 e e_1e_2 que geram \mathbb{H}), de onde se obtém que

$$\dim G_2 = \dim S^6 + \dim S^5 + \dim S^3 = 14.$$

2.1 Produto Vetorial

Estudar produtos vetoriais em espaços com produto interno, é importante dado que particularmente este produto unicamente existe em dimensões 0, 1, 3 e 7 (uma dimensão a menos de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e \mathbb{O}), isto permite definir calibrações em \mathbb{R}^7 , pois estas estruturas são relevantes no entendimento das G_2 -estruturas em variedades de dimensão 7.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno.

Definição 2.1.1. *Uma aplicação bilinear antissimétrica*

$$V \times V \rightarrow V : (u, v) \mapsto u \times v \tag{2.1.1}$$

é dita um produto vetorial se, para todo $u, v \in V$, satisfaz

$$\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0 \quad |u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2. \quad (2.1.2)$$

Lema 2.1.2. Se \times é um produto vetorial, então a aplicação $\phi_0 : V^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\phi_0(u, v, w) := \langle u \times v, w \rangle \quad (2.1.3)$$

é uma 3-forma alternada (i.e $\phi_0 \in \Lambda^3(V)^*$).

Demonstração. Por (2.1.2) tem-se que $\phi_0(u, u, v) = \phi_0(u, v, v) = \phi_0(u, v, u) = 0$. Além disso como $u \times v = -v \times u$, dados $u, v, w \in V$, temos que $\phi_0(u, v, w) = -\phi_0(v, u, w)$. Por último, veja que $0 = \langle v \times (u + w), u + w \rangle = \langle v \times w, u \rangle + \langle v \times u, w \rangle = \langle v \times w, u \rangle - \langle u \times v, w \rangle$, o que significa que $\phi_0(u, v, w) = \phi_0(v, w, u)$, portanto $\phi_0 \in \Lambda^3(V)^*$. \square

Lema 2.1.3. Considere um produto vetorial como em (2.1.1), então as seguintes proposições são equivalentes.

- i) Se u e v são ortonormais então $|u \times v| = 1$.
- ii) Se $|u| = 1$ e w é ortogonal a u então $u \times (u \times w) = -w$.
- iii) Para todo $u, w \in V$, tem-se $u \times (u \times w) = \langle u, w \rangle u - |u|^2 w$.
- iv) Para todo $u, v, w \in V$, tem-se

$$u \times (v \times w) + v \times (u \times w) = \langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u - 2\langle u, v \rangle w. \quad (2.1.4)$$

Demonstração. **i) \Rightarrow ii)** Fixe $u \in V$ com $|u| = 1$ e considere a aplicação linear $A_u : V \rightarrow V$ definida por $A_u(v) = u \times v$, como $\langle u \times v, w \rangle = \langle v, u \times w \rangle$, então temos que A_u é um operador adjunto antissimétrico. Logo, dado $w \in \langle u \rangle^\perp$,

$$\langle A_u^2(w), w \rangle = -\langle u \times w, A_u(w) \rangle = -|u \times w|^2 = -|u|^2|w|^2 + \langle u, w \rangle^2 = -\langle w, w \rangle$$

portanto $u \times (u \times w) = -w$.

ii) \Rightarrow iii) Dados $u, w \in V$ considere $A_u : V \rightarrow V$ definida por $A_u(v) = u \times v$, logo $\langle A_u^2(w), w \rangle = -|u|^2|w|^2 + \langle u, w \rangle^2 = \langle -|u|^2 w + \langle u, w \rangle w, w \rangle$. Portanto $A_u^2(w) = -|u|^2 w + \langle u, w \rangle w$.

iii) \Rightarrow iv) Dados $u, v, w \in V$ pelo item iii) e considerando u como $u + v$

$$\begin{aligned} (u + v) \times ((u + v) \times w) &= \langle u + v, w \rangle (u + v) - \langle u + v, u + v \rangle w \\ u \times (v \times w) + v \times (u \times w) &= \langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u - 2\langle u, v \rangle w. \end{aligned}$$

iv) \Rightarrow i) Sejam $u, v \in V$ ortonormais e aplicando o item *iv)* considerando $w = v$ então a equação (2.1.4) fica $w \times (u \times w) = u$. Daí que

$$|u \times w|^2 = \langle u \times w, u \times w \rangle = \langle u, w \times (u \times w) \rangle = |u|^2 = 1.$$

□

2.2 Os Octônios e o Grupo G_2

2.2.1 A construção de Cayley-Dickson

Por álgebra normada nos referimos a uma \mathbb{R} -álgebra A de dimensão finita com unidade 1 e munida de produto interno tal que a norma associada $|\cdot|$ satisfaz

$$|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in A.$$

Fixando a notação

$$\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Span}(1)_{\mathbb{R}} \quad \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Re}(A)^{\perp},$$

para cada $x \in A$ existe uma única decomposição ortogonal $x = x_0 \oplus x_1$, com $x_0 \in \operatorname{Re}(A)$ e $x_1 \in \operatorname{Im}(A)$. A operação de conjugação é definida por

$$\bar{x} = x_0 - x_1,$$

assim $x_0 = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ e $x_1 = \frac{1}{2}(x - \bar{x})$

Definição 2.2.1. *Seja A uma \mathbb{R} -álgebra e defina o produto e a conjugação em $A \oplus A$ por*

$$\begin{aligned} (a, b)(c, d) &= (ac - b\bar{d}, ad + \bar{c}d) \\ \overline{(a, b)} &= (\bar{a}, -b). \end{aligned}$$

A nova álgebra $B = A \oplus A$ obtida de A é chamada álgebra de Cayley-Dickson.

Com a definição anterior as 3 primeiras álgebras de Cayley-Dickson obtidas são isomorfas a

\mathbb{R} - álgebra	Cayley - Dickson álgebra	Base canônica
$A_0 = \mathbb{R}$	$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$1, i$
$A_1 = \mathbb{C}$	$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$1, i, j, k$
$A_2 = \mathbb{H}$	$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$1, i, j, k, e, ie, je, ke$

daí, com essa base $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$, $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ e $\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}e$. Para gerar \mathbb{C} precisa de um elemento (já que $i^4 = 1$), para gerar \mathbb{H} precisa de dois elementos (por que $i^4 = j^4 = 1$ e $ij = k$), para gerar \mathbb{O} de três elementos. Uma álgebra A é *alternativa* se a subálgebra gerada por dois elementos é associativa.

Definição 2.2.2. *Seja A álgebra. A aplicação trilinear*

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : A^3 \rightarrow A \tag{2.2.1}$$

definida como $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ é chamada associador.

Os seguintes são alguns fatos relevantes sobre álgebras de Cayley-Dickson (vide Apêndice A de [8]).

Lema 2.2.3. *Seja $B = A \oplus A$ obtida de A via construção de Cayley-Dickson então*

- i) B é comutativa se, e somente se, $A = \mathbb{R}$.*
- ii) B é associativa se, e somente se, A é comutativa.*
- iii) B é alternativa se, e somente se, A é associativa.*

Em resumo temos

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \hookrightarrow & A_1 & \hookrightarrow & A_2 & \hookrightarrow & A_3 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\bar{a}=a} & \mathbb{C} & \xrightarrow{[a,b]=0} & \mathbb{H} & \xrightarrow{[a,b,c]=0} & \mathbb{O} \end{array}$$

Teorema 2.2.4 (Hurwitz). *As únicas álgebras normadas (a menos de isomorfismo) sobre \mathbb{R} são $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e \mathbb{O} .*

Pelo teorema de Hurwitz, todas as álgebras normadas (a menos de isomorfismo) são subálgebras de \mathbb{O} , daí que é usual enunciar alguns resultados que são válidos para todas as álgebras normadas como resultados de \mathbb{O} , como por exemplo o produto vetorial a definir em 2.2.6.

Em nosso trabalho estamos interessados nos octônios, que como vimos é uma álgebra normada de dimensão 8, não associativa (mas sim alternativa) e com unidade. Denotando

os elementos da base por $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ o produto está definido

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	e_7	-1	e_1	e_2	$-e_3$
e_5	e_5	e_4	e_7	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	$-e_2$
e_6	e_6	$-e_7$	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	e_1
e_7	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	-1

(2.2.2)

Com a notação fixada anteriormente, para cada $x \in \mathbb{O}$

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i \quad x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, 7$$

e o conjugado de x em termos da base

$$\bar{x} = x_0 - \sum_{i=1}^7 x_i e_i,$$

onde $Re(x) = x_0$ é a parte real e $Im(x) = \sum_{i=1}^7 x_i e_i$ a parte imaginária.

Definimos o produto interno nos octônios como

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^7 x_i y_i$$

e conseqüentemente a norma de x como $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, note que $|\bar{x}| = |x|$.

Para $x \in \mathbb{O}$, se $x \neq 0$ o inverso de x é denotado por $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$ e vale que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Lema 2.2.5. *Para quaisquer $x, y, z, w \in \mathbb{O}$, tem-se as seguintes relações*

- i) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ e $\langle zx, zy \rangle = \langle z, z \rangle \langle x, y \rangle$.
- ii) $\langle xy, z \rangle = \langle y, \bar{x}z \rangle$ e $\langle yx, z \rangle = \langle y, z\bar{x} \rangle$.
- iii) $x\bar{x} = |x|^2$ e $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{x}y + \bar{y}x)$.
- iv) $2\langle x, y \rangle z = x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) = (z\bar{y})x + (z\bar{x})y$.
- v) *Se x e y são ortogonais e z arbitrário*

$$x\bar{y} = -y\bar{x} \qquad x(\bar{y}z) = -y(\bar{x}z) \qquad (z\bar{y})x = -(z\bar{x})y.$$

Demonstração. *i)* $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ vale porque a soma em \mathbb{O} é feita componente a componente e para $\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, segue do fato que os octônios são uma álgebra normada (i.e $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{O}$). Provemos que $\langle zx, zy \rangle = \langle z, z \rangle \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} |zx + zy|^2 &= |z|^2 |x + y|^2 \\ \langle zx, zx \rangle + 2\langle zx, zy \rangle + \langle zy, zy \rangle &= \langle z, z \rangle \langle x, x \rangle + 2\langle z, z \rangle \langle x, y \rangle + \langle z, z \rangle \langle y, y \rangle. \\ \langle zx, zy \rangle &= \langle z, z \rangle \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

ii) Se $x \in \mathbb{R}$ a igualdade é imediata. Suponha que $x \in \text{Im}(\mathbb{O})$, então $\bar{x} = -x$ e $\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle xy, z \rangle + \langle y, xz \rangle &= \langle (x+1)y, (x+1)z \rangle - \langle xy, xz \rangle - \langle y, z \rangle \\ &= |x+1|^2 \langle y, z \rangle - (\langle x, x \rangle \langle y, z \rangle + \langle y, z \rangle) \\ &= (|x|^2 + 1) \langle y, z \rangle - (|x|^2 + 1) \langle y, z \rangle = 0. \end{aligned}$$

iii) Usando *ii)* com $y = \bar{x}$ tem-se $\langle x\bar{x}, z \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x}z \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \langle 1, z \rangle = |\bar{x}|^2 \langle 1, z \rangle = |x|^2 \langle 1, z \rangle = \langle |x|^2, z \rangle$ logo $x\bar{x} = |x|^2$.

Finalmente, considerando $z = x + y$

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y) \overline{(x + y)} \\ |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 &= |x|^2 + x\bar{y} + y\bar{x} + |y|^2 \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}). \end{aligned}$$

iv) Como \mathbb{O} é uma álgebra alternativa, então a subálgebra gerada por $x + y$ e z é associativa daí

$$\begin{aligned} |x + y|^2 z &= \{(x + y) \overline{(x + y)}\} z = (x + y) \{(\bar{x} + \bar{y})z\} \\ (|x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2) z &= (x + y)(\bar{x}z + \bar{y}z) = x(\bar{x}z) + x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) + y(\bar{y}z) \\ 2\langle x, y \rangle &= x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z). \end{aligned}$$

v) Segue-se do item *iii)* e *iv)*.

□

Definição 2.2.6. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{O}$*

i) O produto vetorial é definido por $x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)$.

ii) O produto vetorial triplo é definido por $x \times y \times z = \frac{1}{2}(x(\bar{y}z) - z(\bar{y}x))$.

Lema 2.2.7. Para todo $x, y \in \mathbb{O}$

$$x \times y = \text{Im}(\bar{y}x.)$$

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{O}$

$$\begin{aligned} x \times y &= \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) = \bar{y}x - \frac{1}{2}(\bar{y}x + \bar{x}y) \\ &= \bar{y}x - \langle x, y \rangle = \bar{y}x - \langle \bar{y}x, 1 \rangle = \bar{y}x - \text{Re}(\bar{y}x) = \text{Im}(\bar{y}x). \end{aligned}$$

□

Lema 2.2.8. *i)* $x \times y \times z$ é uma aplicação trilinear alternada em \mathbb{O} .

ii) $|x \times y \times z| = |x \wedge y \wedge z|$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{O}$.

Demonstração. *i)* Como \mathbb{O} é uma álgebra alternativa, então para quaisquer dois elementos a subálgebra gerada é associativa

$$\begin{aligned} x \times y \times y &= \frac{1}{2}(x|y|^2 - y(\bar{y}x)) = 0 \\ x \times x \times y &= \frac{1}{2}(x(\bar{x}y) - y|x|^2) = 0, \end{aligned}$$

com isso temos $x \times (y + z) \times (y + z) = 0$, daí como o produto em \mathbb{O} é distributivo com respeito a soma temos $x \times y \times z = -x \times z \times y$.

ii) Podemos supor que x, y e z são ortogonais, pois se não fosse assim seria possível escrever eles como combinação de elementos em comum e pela linearidade e o item anterior teria a igualdade. Se x, y e z são ortogonais usando o item *v)* da proposição 2.2.5 temos $z(\bar{y}x) = -y(\bar{z}x) = y(\bar{x}z) = -x(\bar{y}z)$

$$|x \times y \times z| = |x(\bar{y}z)| = |x||y||z| = |x \wedge y \wedge z|.$$

□

2.2.2 Grupo G_2

Definição 2.2.9. O grupo G_2 é definido como o grupo de automorfismos de \mathbb{O}

$$G_2 := \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) := \{\alpha : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O} \mid \alpha \text{ é isomorfismo e } \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\}.$$

Os automorfismos preservam a soma direta $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \text{Im}(\mathbb{O})$ e agem trivialmente em \mathbb{R} i.e, $\alpha|_{\mathbb{R}} = \text{Re}(\text{Id}_{\mathbb{O}})$ (a parte real da aplicação identidade). De fato

$$\alpha(1)\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1) \Rightarrow \alpha(1) = 1.$$

No caso de $\text{Im}(\mathbb{O})$, dado e_i com $i \neq 0$ veja que $\overline{\alpha(e_i)} = \alpha(\bar{e}_i) = -\alpha(e_i)$

$$\alpha(e_i)\alpha(e_i) = \alpha(e_i \cdot e_i) = \alpha(-1) = -\alpha(1) = -1 \Rightarrow \overline{\alpha(e_i)} = -\alpha(e_i).$$

Isto mostra que dado $x \in \text{Im}(\mathbb{O})$ então $\alpha(x) \in \text{Im}(\mathbb{O})$, assim os automorfismos de \mathbb{O} podem ser vistos como automorfismos de $\text{Im}(\mathbb{O})$, além disso, como $\text{Im}(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$ temos que G_2 pode ser identificado como subgrupo de $\text{Gl}(7, \mathbb{R})$.

Lema 2.2.10. *Para $\alpha \in G_2$ tem-se*

$$\langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathbb{O}.$$

Demonstração. Sejam $\alpha \in G_2$ e $x, y \in \mathbb{O}$, já vimos que $\overline{\alpha(x)} = \alpha(\bar{x})$, logo usando a propriedade *iii*) do lema 2.2.5

$$\begin{aligned} \langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\alpha(x)\overline{\alpha(y)} + \alpha(y)\overline{\alpha(x)}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha(x)\alpha(\bar{y}) + \alpha(y)\alpha(\bar{x})) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})\right) \\ &= \alpha(\langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

□

Como $\text{Im}(\mathbb{O})$ satisfaz os axiomas de espaço vetorial, pode-se escolher uma isometria $\text{Im}(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$ e pelo lema 2.2.7 pode-se definir o produto vetorial em \mathbb{R}^7 como

$$x \times y = \text{Im}(xy). \quad (2.2.3)$$

Note que análogo aos quatérnios, o produto vetorial fica inteiramente definido pela multiplicação e o produto interno em $\text{Im}(\mathbb{O})$ (os quais são os herdados de \mathbb{O}). De fato, para $x, y \in \text{Im}(\mathbb{O})$ pelo lema 2.2.5 $\langle x, y \rangle = \langle x\bar{y}, 1 \rangle = -\langle xy, 1 \rangle$, onde $\text{Re}(xy) = \langle xy, 1 \rangle$. Assim $x \times y = \text{Im}(xy) = xy - \text{Re}(xy) = xy + \langle x, y \rangle$.

Reciprocamente, para $x, y \in \mathbb{O}$, veja que o produto em \mathbb{O} pode ser obtido a partir do produto vetorial e do produto interno definido em \mathbb{R}^7 , para isso, defina $x = x_0 + x_1$ e $y = y_0 + y_1$, onde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in \text{Im}(\mathbb{O})$

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1)(y_0 + y_1) = x_0y_0 + x_0y_1 + y_0x_1 + x_1y_1 \\ &= x_0y_0 - \langle x_1, y_1 \rangle + x_0y_1 + y_0x_1 + x_1 \times y_1. \end{aligned}$$

Proposição 2.2.11. *A aplicação $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ definida por (2.2.3) define um produto vetorial em \mathbb{R}^7 .*

Demonstração. Segue da linearidade do produto interno e da multiplicação em \mathbb{O} , que a aplicação $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ definida por (2.2.3) é bilinear. Veja que ela também é antissimétrica e satisfaz as propriedades (2.1.2). De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}^7 \cong \text{Im}(\mathbb{O})$

$$\begin{aligned} x \times y + y \times x &= \text{Im}(xy) + \text{Im}(yx) \\ &= xy + \langle x, y \rangle + yx + \langle y, x \rangle \\ &= -(x\bar{y} + y\bar{x}) + 2\langle x, y \rangle \\ &= -2\langle x, y \rangle + 2\langle x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, lembre que $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle 1$ e $\langle 1, x \rangle = \langle 1, y \rangle = 0$, daí que

$$\begin{aligned} \langle x \times y, x \rangle &= \langle xy, x \rangle + \langle x, y \rangle \langle 1, x \rangle \\ &= \langle x, x \rangle \langle y, 1 \rangle + \langle x, y \rangle \langle 1, x \rangle = 0. \end{aligned}$$

E por último

$$\begin{aligned} |x \times y|^2 &= |xy + \langle x, y \rangle|^2 \\ &= |xy|^2 + \langle x, y \rangle^2 + 2\langle x, y \rangle \langle xy, 1 \rangle \\ &= |x|^2 |y|^2 + \langle x, y \rangle^2 + 2\langle x, y \rangle \langle y, \bar{x} \rangle \\ &= |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2. \end{aligned}$$

□

Pelo lema 2.2.10 e a equação (2.2.3), o grupo G_2 pode ser definido como o subgrupo de $\text{Gl}(7, \mathbb{R})$ que preservam o produto interno ($\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle$) e o produto vetorial ($gu \times gv = g(u \times v)$); de fato, estendendo g de tal forma que g preserva $\text{Re}(\mathbb{O}) \oplus \text{Im}(\mathbb{O})$ (i.e. $g(1) = 1$ e $g(\bar{u}) = \overline{g(u)}$), temos para $u, v \in \mathbb{R}^7 \cong \text{Im}(\mathbb{O})$

$$\begin{aligned} g(uv) &= g(\text{Re}(uv) + \text{Im}(uv)) = g(\langle uv, 1 \rangle) + g(u \times v) \\ &= -\langle u, v \rangle + g(u) \times g(v) = -\langle g(u), g(v) \rangle + \text{Im}(g(u)g(v)) \\ &= \langle g(u)g(v), 1 \rangle + \text{Im}(g(u)g(v)) = \text{Re}(g(u)g(v)) + \text{Im}(g(u)g(v)) = g(u)g(v) \end{aligned}$$

A seguinte definição é dada em [10] e é a definição que nós vamos fixar para nosso trabalho.

Definição 2.2.12. *Sejam (x_1, \dots, x_7) coordenadas em \mathbb{R}^7 . Denote dx_{ijk} como o produto exterior $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ e considere a 3-forma em \mathbb{R}^7 ϕ_0 definida em coordenadas*

$$\phi_0 = dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}. \quad (2.2.4)$$

O grupo G_2 é definido como o estabilizador de ϕ_0 em $\text{Gl}(7, \mathbb{R})$

$$G_2 = \{g \in \text{Gl}(7, \mathbb{R}) \mid g^* \phi_0 = \phi_0\}.$$

Observe que a 3-forma da definição anterior coincide com a 3-forma (2.1.3) definida no começo do capítulo, pois dado $u, v, w \in \mathbb{R}^7$ e usando o produto de (2.2.5) tem-se

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 + u_4v_5 - u_5v_4 + u_6v_7 - u_7v_6 \\ u_3v_1 - u_1v_3 + u_4v_6 - u_5v_7 - u_6v_4 + u_7v_5 \\ u_1v_2 - u_2v_1 - u_4v_7 - u_5v_6 + u_6v_5 + u_7v_4 \\ u_3v_7 - u_1v_5 - u_2v_6 + u_5v_1 + u_6v_2 - u_7v_3 \\ u_1v_4 + u_2v_7 + u_3v_7 - u_4v_1 - u_6v_3 - u_7v_2 \\ u_2v_4 - u_1v_7 - u_3v_5 - u_4v_2 + u_5v_3 + u_7v_1 \\ u_1v_6 - u_2v_5 - u_3v_4 + u_4v_3 + u_5v_2 + u_6v_1 \end{pmatrix}$$

e como $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$ temos

$$\langle u \times v, w \rangle = (dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356})(u, v, w).$$

A definição anterior motiva no sentido que a métrica pode ser recuperada a partir da 3-forma, por exemplo no caso euclidiano dada a 3-forma (2.2.4), considere $B_{\phi_0}(u, v) = u \lrcorner \phi_0 \wedge v \lrcorner \phi_0 \wedge \phi_0$ com $u, v \in \mathbb{R}^7$, temos que B_{ϕ_0} é uma forma bilinear simétrica (porque o produto exterior de duas duas formas comutam) com valores em $\Lambda^7(\mathbb{R}^7)^*$, agora considerando $u = \sum_1^7 u_i e_i$ e $v = \sum_1^7 v_i e_i$ tais que $dx_i(e_j) = \delta_i^j$ então temos

$$\begin{aligned} u \lrcorner \phi_0 &= u_1(dx_{23} + dx_{45} + dx_{67}) - u_2(dx_{13} - dx_{46} + dx_{57}) \\ &+ u_3(dx_{12} - dx_{47} - dx_{56}) - u_4(dx_{15} + dx_{26} - dx_{37}) \\ &+ u_5(dx_{14} + dx_{27} + dx_{36}) - u_6(dx_{17} - dx_{24} + dx_{35}) \\ &- u_7(dx_{16} - dx_{25} - dx_{34}), \end{aligned}$$

para $v \lrcorner \phi_0$ se obtém uma expressão análoga, daí

$$B_{\phi_0}(u, v) = -6(u_1v_1 + \dots + u_7v_7)dx_{12\dots7} = -6\langle u, v \rangle \text{vol}_{\phi_0}. \quad (2.2.5)$$

A seguinte proposição indica que G_2 preserva o volume e a orientação.

Proposição 2.2.13. $G_2 \subset \text{SO}(7)$.

Demonstração. Pelo lema 2.2.10 temos que $G_2 \subset \text{O}(7)$, falta provar que $\det(g) = 1$ para

todo $g \in G_2$. Sejam $w_1, \dots, w_7 \in \mathbb{R}^7$, avaliando em (2.2.5)

$$\begin{aligned} \langle gu, gv \rangle \text{vol}_{\phi_0}(w_1, \dots, w_7) &= gu \lrcorner \phi_0 \wedge gv \lrcorner \phi_0 \wedge \phi_0(w_1, \dots, w_7) \\ &= u \lrcorner \phi_0 \wedge v \lrcorner \phi_0 \wedge \phi_0(g^{-1}w_1, \dots, g^{-1}w_7) \\ &= \langle u, v \rangle \text{vol}_{\phi_0}(g^{-1}w_1, \dots, g^{-1}w_7) \\ &= \det(g)^{-1} \langle u, v \rangle \text{vol}_{\phi_0}(w_1, \dots, w_7), \end{aligned}$$

logo $\langle gu, gv \rangle = \det(g)^{-1} \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^7$, consequentemente

$$\begin{aligned} \det(g) &= \det(\det(g) \langle e_i, e_j \rangle) = \det(\langle g^{-1}e_i, g^{-1}e_j \rangle) \\ &= \det(\langle e_i, e_j \rangle) = 1. \end{aligned}$$

□

A seguinte proposição resume propriedades relevantes de G_2 (vide Capítulo 2, teorema 1 de [3]).

Proposição 2.2.14. *O grupo $G_2 \subset \text{SO}(7)$ é um grupo de Lie, compacto, conexo, simplesmente conexo e de dimensão 14. Além disso, G_2 age irreduzivelmente sobre \mathbb{R}^7 e transitivamente sobre S^6 .*

Agora considere o operador de Hodge $*$: $\Lambda^3(\mathbb{R}^7) \rightarrow \Lambda^4(\mathbb{R}^7)$, este define uma 4-forma ψ_0 dada pelo dual de Hodge $*\phi_0$

$$\psi_0 = -dx_{1247} - dx_{1256} - dx_{1346} + dx_{1357} + dx_{2345} + dx_{2367} + dx_{4567} \quad (2.2.6)$$

que por sua vez pode ser obtida a partir da métrica e do associador

$$\langle x, [u, v, w] \rangle = -2\psi_0(x, u, v, w) \quad \forall u, v, w, x \in \mathbb{R}^7. \quad (2.2.7)$$

Calculando o associador em termos da base dx_{ijk} para $i, j, k = 1, \dots, 7$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\cdot, \cdot, \cdot] &= (dx_{357} - dx_{346} - dx_{256} - dx_{247})e_1 \\ &\quad + (dx_{367} + dx_{345} + dx_{156} + dx_{147})e_2 \\ &\quad + (dx_{146} - dx_{157} - dx_{245} - dx_{267})e_3 \\ &\quad + (dx_{235} - dx_{136} + dx_{567} - dx_{127})e_4 \\ &\quad + (dx_{137} - dx_{467} - dx_{234} - dx_{126})e_5 \\ &\quad + (dx_{457} + dx_{237} + dx_{134} + dx_{125})e_6 \\ &\quad + (dx_{124} - dx_{135} - dx_{236} - dx_{456})e_7. \end{aligned}$$

Em resumo

$$[\cdot, \cdot, \cdot] = -2 \sum_{i=1}^7 (e_i \lrcorner \psi) \otimes e_i. \quad (2.2.8)$$

Lema 2.2.15. *Para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^7$*

$$\phi_0(u, v, w)^2 + \frac{1}{4} |[u, v, w]|^2 = |u \wedge v \wedge w|^2. \quad (2.2.9)$$

Demonstração. Observe que pelo lema 2.2.8, temos que $|u \times v \times w|^2 = |u \wedge v \wedge w|^2$ e vamos provar que $\operatorname{Re}(u \times v \times w) = -\phi_0(u, v, w)$ e $\operatorname{Im}(u \times v \times w) = -\frac{1}{2}[u, v, w]$, para isso veja que como o produto vetorial triplo é antissimétrico basta considerar u, v, w sendo ortogonais, ou seja, $u, v, w \in \operatorname{Im}(\mathbb{O})$ daí

$$\operatorname{Re}(u \times v \times w) = -\operatorname{Re}(u(vw)) = -\langle u, v \times w \rangle = -\phi_0(v, w, u) = -\phi_0(u, v, w).$$

Por outro lado, $\operatorname{Im}(u \times v \times w) = -\frac{1}{2}(u(vw) - w(vu)) = -\frac{1}{2}(u(vw) + w(uv)) = -\frac{1}{2}(u(vw) - (uv)w) = -\frac{1}{2}[u, v, w]$. \square

Definição 2.2.16. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 7. $\varphi \in \Lambda^3 V$ é dita G_2 -estrutura (ou G_2 -forma), se existe um isomorfismo $V \cong \mathbb{R}^7$ identificando φ com ϕ_0 .*

Exemplo 2.2.17. *Sejam $V = \langle e_1 \rangle \oplus \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^7$ e (ω_0, Ω_0) a $SU(3)$ -estrutura de \mathbb{C}^3 , defina a G_2 -estrutura em V como $\varphi_0 = \operatorname{Re} \Omega_0 + dx_1 \wedge \omega_0$, onde*

$$\Omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$$

$$\omega_0 = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + dz_3 \wedge d\bar{z}_3).$$

Com $z_1 = x_2 + ix_3$, $z_2 = x_4 + ix_5$ e $z_3 = x_6 + ix_7$, então

$$\operatorname{Re} \Omega_0 = dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}$$

$$\omega_0 = dx_{23} + dx_{45} + dx_{67}.$$

Logo $\varphi_0 = dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{347} - dx_{356}$.

2.2.3 Calibrações em \mathbb{R}^7

Definição 2.2.18. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Uma k -forma $\alpha \in \Lambda^k V$ é dita uma calibração se para todo k -plano orientado π em V , tem-se $\alpha|_{\pi} \leq \operatorname{vol}_{\pi}$. Os k -planos para os quais $\alpha|_{\pi} = \operatorname{vol}_{\pi}$ são chamados de k -planos calibrados.*

O seguinte resultado diz que ϕ_0 e $*\phi_0$ são calibrações de \mathbb{R}^7 .

Lema 2.2.19. *i) Se u, v, w são uma tripla de vetores ortonormais em \mathbb{R}^7 , então*

$$\phi_0(u, v, w) = 1 \quad \text{se, e só se, } w = u \times v.$$

ii) Para quaisquer $x, u, v, w \in \mathbb{R}^7$ ortonormais, temos

$$|\psi_0(x, u, v, w)| \leq 1$$

Além disso, $\psi_0(x, u, v, w) = 1$ se, e somente se, $x = -\frac{1}{2}[u, v, w]$.

Demonstração. *i)* Em geral para quaisquer u, v, w ortonormais, pela equação (2.1.2) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\phi_0(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle \leq |u \times v||w| = 1.$$

Agora suponha que $\phi_0(u, v, w) = 1$, então como ϕ_0 é uma calibração temos $w = \lambda u \times v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, mas ϕ_0 é linear, logo $\lambda = 1$ e portanto $w = u \times v$. Reciprocamente, suponha que $w = u \times v$ então $\phi_0(u, v, w) = \langle u \times v, u \times v \rangle = |u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle = 1$.

ii) Sejam $x, u, v, w \in \mathbb{R}^7$ vetores ortonormais, então pelo lema 2.2.15

$$|\psi_0(x, u, v, w)| = |\langle x, \frac{1}{2}[u, v, w] \rangle| \leq |x| |\frac{1}{2}[u, v, w]| \leq |x||u||v||w| = 1.$$

Por outro lado, veja que $\psi_0(x, u, v, w) = 1$ se, e somente se, $x = \frac{\lambda}{2}[u, v, w]$, mas $|\frac{1}{2}[u, v, w]| = 1$, logo $|\lambda| = 1$ e daí $x = \pm \frac{1}{2}[u, v, w]$, mas pela linearidade de ψ_0 ,

$$\psi_0(x, u, v, w) = 1 \quad \text{se, somente se, } x = -\frac{1}{2}[u, v, w].$$

□

Exemplo 2.2.20. *i) Para $V = \mathbb{C}^3$, $\omega_0 = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + dz_3 \wedge d\bar{z}_3)$ é uma calibração de V*

$$\omega_0 = dx_{23} + dx_{45} + dx_{67} = e_1 \lrcorner \phi_0$$

pois é contração de ϕ_0 que é uma calibração.

ii) Dado $\pi \subset \mathbb{C}^3$ um plano de dimensão real 2. Considere $\langle e_1 \rangle \oplus \pi \subset \mathbb{R}^7$, então

$$\begin{aligned} \varphi_0|_{\langle e_1 \rangle \oplus \pi} &= \text{Re } \Omega_0|_{\langle e_1 \rangle \oplus \pi} + dx_1 \wedge \omega_0|_{\langle e_1 \rangle \oplus \pi} \\ &= \omega_0|_{\pi} \end{aligned}$$

logo $\langle e_1 \rangle \oplus \pi$ é calibrado por φ_0 se e somente se π é calibrado por ω_0 .

Definição 2.2.21. Um 3-plano orientado em \mathbb{R}^7 calibrado por ϕ_0 é chamado de plano associativo.

Proposição 2.2.22. *i) Um 3-plano π é associativo se, e somente se, o associador restrito a π é zero.*

ii) Qualquer 2-plano está contido num único 3-plano associativo.

Demonstração. *i)* Para quaisquer $u, v, w \in \pi$ temos que

$$\phi_0(u, v, w)^2 + \frac{1}{4}|[u, v, w]|^2 = |u \wedge v \wedge w|^2,$$

logo temos que $\phi_0|_\pi = \text{vol}|_\pi$ se, e somente se, $[u, v, w] = 0$ para todo $u, v, w \in \pi$.

ii) Considere um 2-plano com base ortonormal u e v , logo $\text{Span}_{\mathbb{R}}(u, v, u \times v)$ é um 3-plano associativo que contém $\text{Span}_{\mathbb{R}}(u, v)$. Agora, suponha que existe π , plano associativo contendo $\text{Span}_{\mathbb{R}}(u, v)$ e escolha u, v, w base ortonormal de π , logo pelo lema 2.2.19 como $\phi_0(u, v, w) = 1$ então $w = u \times v$.

□

2.3 G_2 -Variedades

Seja M uma variedade orientável de dimensão 7. Fixada uma orientação em M , para cada $m \in M$ defina $\Lambda_+^3 T_m M$ como o subconjunto das 3-formas $\varphi_m \in \Lambda^3 T_m M$ para as quais existe um isomorfismo orientável entre $T_m M$ e \mathbb{R}^7 identificando φ_m com ϕ_0 . Dizemos que uma 3-forma φ em M é *positiva* se $\varphi_m \in \Lambda_+^3 T_m M$ para todo $m \in M$.

Definição 2.3.1. *Seja M variedade diferenciável orientável de dimensão 7, φ uma 3-forma diferenciável em M , abusando da notação g vai denotar a métrica associada a φ . Chamamos de G_2 -estrutura ao par (φ, g) tal que para cada $m \in M$, (φ_m, g_m) satisfaz a definição 2.2.16.*

Observe que como g é identificada com $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ via o isomorfismo $f_m : T_m M \rightarrow \mathbb{R}^7$ então temos que para cada $m \in M$, g_m é uma forma bilinear simétrica e positiva definida, pois g_0 também satisfaz estas propriedades e f_m é um isomorfismo. Além disso g_m é suave, já que dado um sistema de coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_7))$ centrado em m tem-se $g_{ij} = g_m(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \langle f_m(\frac{\partial}{\partial x_i}), f_m(\frac{\partial}{\partial x_j}) \rangle$ logo como f_m é linear então g_{ij} é suave em m para $i, j = 1, \dots, 7$ e observe que a definição de g_m não depende da escolha de coordenadas¹. Usando o teorema de Levi-Civita obtemos o seguinte resultado.

¹Outra forma de definir a métrica g é via G -estruturas; ou seja, usar que $G_2 \subset \text{Gl}(7)$ e redução do fibrado (vide Proposição 2.6.5, [10]).

Proposição 2.3.2. *Uma G_2 -estrutura φ induz uma métrica riemanniana g_φ em M , e portanto também induz uma conexão de Levi-Civita, i.e. uma conexão simétrica e compatível com a métrica riemanniana.*

Dada uma G_2 -estrutura (φ, g) e ∇ a conexão de Levi-Civita de g . $\nabla\varphi$ é chamada a torção de (φ, g) , e dizemos que (φ, g) é livre de torção se $\nabla\varphi = 0$.

Observação 2.3.3. *Em [10] é definido o conceito de G -estrutura:*

Definição 2.3.4. *Seja M uma variedade de dimensão n e $P_{\text{Gl}}(M)$ o fibrado de bases de M com fibra atípica $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Seja G subgrupo de Lie de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ então uma G -estrutura em M é um subfibrado principal Q de $P_{\text{Gl}}(M)$ com fibra G .*

No caso de $G = G_2$ as definições 2.3.1 e 2.3.4 estão relacionadas da seguinte maneira: dado $\pi : P = P_{\text{Gl}}(M) \rightarrow M$ fibrado de bases, observe que para cada $m \in M$, $\pi^{-1}(m)$ é o conjunto de isomorfismos entre $T_m M$ e \mathbb{R}^7 . Seja φ uma 3-forma positiva em M e $Q \subset P$ como

$$Q = \{f \in P \mid \forall m \in M, f_m \in \pi^{-1}(m) \text{ e } f_m^* \phi_0 = \varphi_m\},$$

então $\bar{\pi} : Q \rightarrow M$ é um subfibrado principal com fibra G_2 (onde $\bar{\pi} = \pi|_Q$); de fato, existe uma ação de grupo de G_2 sobre Q

$$\cdot : Q \times G_2 \rightarrow Q$$

definida para cada $m \in M$ como $(f \cdot g)_m = g^{-1} \circ f_m$; veja que a aplicação está bem definida pois para cada $m \in M$, $(f \cdot g)_m$ identifica ϕ_0 com φ_m , de fato $[(f \cdot g)_m]^* \phi_0 = (g^{-1} \circ f_m)^* \phi_0 = f_m^* \circ (g^{-1})^* \phi_0 = f_m^* \phi_0 = \varphi_m$. Por último veja que \cdot é ação de grupo:

- Seja $e \in G_2$ a identidade, então temos que $f \cdot e = f$ para todo $f \in Q$, pois para todo $m \in M$ $(f \cdot e)_m = e \circ f_m = f_m$.
- $\forall h, g \in G_2$ e $\forall m \in M$ $[(f \cdot g) \cdot h]_m = h^{-1} \circ (g^{-1} \circ f_m) = (gh)^{-1} \circ f_m = [f \cdot (gh)]_m$.

Logo $\bar{\pi}^{-1}(\bar{\pi}(f)) = \{f \cdot g \mid g \in G_2\} = f \cdot G_2$ e para ver que Q tem estrutura de variedade a ideia é similar com a usada no exemplo 1.1.3. Reciprocamente, se Q é uma G_2 -estrutura no sentido da definição 2.3.4 então, como ϕ_0, ψ_0 e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ são invariantes pela ação de G_2 , os elementos de Q podem ser usados para definir φ 3-forma, $*\varphi$ 4-forma e g_φ métrica em M , correspondentes com ϕ_0, ψ_0 e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivamente. E para que φ seja uma G_2 -estrutura (positiva) é necessário e suficiente que Q seja um subfibrado orientado. Ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre φ 3-forma positiva e G_2 -estruturas orientadas.

Em seguida, vamos definir brevemente o que é o grupo de holonomia de uma variedade riemanniana M . Seja M uma variedade riemanniana conexa e ∇ a conexão afim (em nosso caso, conexão de Levi-Civita), considere a curva diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ e V um campo de vetores ao longo de γ , V é chamado *paralelo* (ao longo de γ) se $\nabla_{\gamma'(t)}V(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, a partir desta equação diferencial ordinária de primeira ordem se obtém o seguinte resultado: Se v é um vetor tangente a M no ponto $\gamma(0)$, então existe um único campo de vetores $V(t)$ paralelo ao longo de γ , tal que $V(0) = v$, $V(t)$ é chamado de transporte paralelo de v ao longo de γ (vide Capítulo 2, proposição 2.6 [5]).

Definição 2.3.5. *Sejam M uma variedade riemanniana, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ curva diferenciável tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, onde $x, y \in M$. Dado $v \in T_xM$ defina o mapa linear $P_\gamma : T_xM \rightarrow T_yM$, com $P_\gamma(v) = V(1)$, este mapa é chamado transporte paralelo ao longo de γ .*

O transporte paralelo possui algumas propriedades importantes. Primeiro veja que P_γ é linear: considere $v, w \in T_{\gamma(0)}M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e V e W campos paralelos a γ tais que $V(0) = v$ e $W(0) = w$

$$\nabla_{\gamma'(t)}(V + W)(t) = \nabla_{\gamma'(t)}V(t) + \nabla_{\gamma'(t)}\lambda W(t) = 0$$

$$\nabla_{\gamma'(t)}(\lambda V)(t) = \lambda \nabla_{\gamma'(t)}V(t) = 0$$

assim $V + W$ e λV são campos paralelos a γ logo

$$P_\gamma(v + \lambda w) = (V + \lambda W)(1) = V(1) + \lambda W(1) = P_\gamma(v) + \lambda P_\gamma(w).$$

Por outro lado, considere $x, y, z \in M$ e α e β curvas diferenciáveis em M com $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(0) = y$ e $\beta(1) = z$, defina as curvas α^{-1} e $\beta\alpha$ como

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$$

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

α^{-1} e $\beta\alpha$ são curvas diferenciáveis (no caso de $\alpha\beta$ pode ser diferenciável por partes) tais que $\alpha^{-1}(0) = y$, $\alpha^{-1}(1) = \beta\alpha(0) = x$ e $\beta\alpha(1) = z$. Suponha $v \in T_xM$ e $P_\alpha(v) = w \in T_yM$. Então existe um único campo paralelo V com $V(0) = v$ e $V(1) = w$. Defina $V^{-1}(t) = V(1 - t)$ então $V^{-1}(0) = w$, $V^{-1}(1) = v$ e $\nabla_{(\alpha^{-1})'(t)}V^{-1}(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, logo $P_{\alpha^{-1}}(w) = v$, onde $P_{\alpha^{-1}}$ é o transporte paralelo ao longo de α^{-1} , logo $P_{\alpha^{-1}}$ é o inverso de P_α . E analogamente, se $P_\beta(w) = u \in T_zM$, existe um único campo paralelo W com

$W(0) = w$ e $W(1) = u$. Defina

$$U(t) = \begin{cases} V(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ W(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Então $U(0) = v$, $U(1) = u$ e $\nabla_{(\beta\alpha)'(t)}U(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ pois,

$$\nabla_{(\beta\alpha)'(t)}U(t) = \begin{cases} \nabla_{\alpha'(2t)}V(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \nabla_{\beta'(2t-1)}W(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

logo $P_{\beta\alpha}(v) = u$ onde $P_{\beta\alpha}$ é o transporte paralelo ao longo de $\beta\alpha$, daí que $P_{\beta\alpha} = P_\beta \circ P_\alpha$.

Definição 2.3.6. *Seja M variedade riemanniana e fixe $x \in M$. Um laço baseado em x é uma curva diferenciável (por partes) $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Se γ é um laço baseado em x então o transporte paralelo $P_\gamma : T_x M \rightarrow T_x M$ é um mapa invertível, i.e. $P_\gamma \in \text{Gl}(T_x M)$. Defina o grupo de holonomia $\text{Hol}_x(\nabla)$ de ∇ baseado em x como*

$$\text{Hol}_x(\nabla) := \{P_\gamma : \gamma \text{ é um laço baseado em } x\} \subset \text{Gl}(T_x M).$$

Supondo M conexa, considere $x, y \in M$ e sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ curva diferenciável por partes, com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ e α um laço baseado em x , então $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ é um laço baseado em y e $P_{\gamma\alpha\gamma^{-1}} = P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_\gamma^{-1}$ onde $P_\gamma^{-1} = P_{\gamma^{-1}}$. Daí, se $P_\alpha \in \text{Hol}_x(\nabla)$ então $P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_\gamma^{-1} \in \text{Hol}_y(\nabla)$. Logo temos a identidade

$$P_\gamma \text{Hol}_x(\nabla) P_\gamma^{-1} = \text{Hol}_y(\nabla),$$

isto mostra que no caso conexo o grupo de holonomia é independente do ponto base x , assim o grupo de holonomia é um invariante global da conexão (Capítulo 2, proposição 2.2.3, [10]). Agora, como ∇ é a conexão induzida pela métrica riemanniana g então $\text{Hol}(g) = \text{Hol}(\nabla)$ e identificando $T_x M \cong \mathbb{R}^n$, vamos denotar como $\text{Hol}(g) \subset \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, a menos de conjugação.

Quando M não é simplesmente conexa, é considerado o *grupo de holonomia restrito* $\text{Hol}_x^0(\nabla)$ (a componente conexa da identidade), definido como

$$\text{Hol}^0(g) := \{P_\gamma; \gamma \text{ é um laço nulo-homotópico baseado em } x\},$$

analogamente $\text{Hol}_x^0(\nabla)$ é um subgrupo de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ a menos de conjugação, que é independente do ponto base e $\text{Hol}^0(g) = \text{Hol}^0(\nabla)$.

Se (M^7, g) é uma variedade riemanniana, então o grupo de holonomia $\text{Hol}(g)$ é um subgrupo de G_2 se, e somente se, existe uma G_2 -estrutura livre de torção tal que $g = g_\varphi$ (vide Capítulo 11, lema 11.5, [18]).

Definição 2.3.7. Uma G_2 -variedade é uma variedade M^7 munida de uma G_2 -estrutura (φ, g_φ) livre de torção. Se $\text{Hol}(g_\varphi) = G_2$ diremos que (M, φ) possui holonomia G_2 .

Exemplo 2.3.8. $(\mathbb{R}^7, \phi_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma G_2 -variedade.

Exemplo 2.3.9. Seja (X^3, ω, Ω) uma variedade de Calabi-Yau, isto é, uma variedade Kähler (variedade complexa com métrica hermitiana g e uma 2-forma hermitiana fechada ω), compacta, de dimensão $n \geq 2$, com holonomia $\text{SU}(n)$, onde ω é a 2-forma de Kähler e Ω a 3-forma de volume holomorfa. X^3 tem holonomia $\text{SU}(3)$ que por sua vez é isomorfo ao estabilizador de e_1 em G_2

$$\text{Stab}_{G_2}(e_1) = \{\alpha \in G_2; \alpha e_1 = e_1\}.$$

Como S^1 é paralelizável, então $X^3 \times S^1$ também tem holonomia $\text{SU}(3)$, pois $\text{Hol}(g_{X^3 \times S^1}) = \text{Hol}(g_{X^3}) \oplus \text{Hol}(g_{S^1})$ onde a métrica em $X^3 \times S^1$ é a métrica produto, então existe uma G_2 -estrutura em $X^3 \times S^1$, ou seja, uma 3-forma φ positiva, tal que $f^*\phi_0 = \varphi$, onde $f \in Q$ (Q subfibrado orientado do fibrado de referenciais $P_{G_1}(X^3 \times S^1)$) e

$$\varphi = \text{Re } \Omega + \omega \wedge dt$$

define a G_2 -estrutura de $X^3 \times S^1$.

2.4 Subvariedades associativas

Ao longo da seção (M, φ) é uma G_2 -variedade. Lembramos da definição 2.2.18 que uma k -forma φ em M é chamada uma *calibração*, se φ é fechada e, para cada $m \in M$ e para cada σ k -plano orientado contido em $T_m M$, tem-se $\varphi|_\sigma \leq \text{vol}_\sigma$. Uma subvariedade orientada $i : P \hookrightarrow M$ é chamada *calibrada* se para cada $p \in P$ e $\sigma_p = i_*(T_p P)$, tem-se $\varphi|_{\sigma_p} = \text{vol}_{\sigma_p}$. As subvariedades calibradas de dimensão 3 são chamadas de *associativas*. Todas as subvariedades calibradas são subvariedades mínimas. No capítulo 3, proposição 3.7.2 de [10] (ou em [8]) é provado que subvariedades calibradas compactas minimizam volume dentro de sua classe de homologia, no caso de variedades não compactas, elas minimizam volume localmente.

Exemplo 2.4.1. Do exemplo 2.3.9, subvariedades da forma $C \times S^1$ onde $C \subset X$ é uma curva holomorfa, são exemplos de subvariedades associativas de $X \times S^1$. Para isso, veja que a forma de Kähler ω é uma calibração e as subvariedades calibradas são curvas holomorfas, em geral, como

$$\frac{\omega^k}{k!} = \text{vol}_g$$

$\frac{\omega^k}{k!}$ é uma calibração e as subvariedade calibradas são subvariedades de dimensão k .

Para cada $p \in C \times S^1$, $T_p(C \times S^1) = \pi \oplus \langle v \rangle$, onde $\pi \subset \mathbb{C}^3$ é um 2-plano de dimensão real (plano tangente a C) e v um gerador do espaço tangente a S^1 . E como $\varphi|_{T_p(C \times S^1)} = \omega|_\pi$, então $T_p(C \times S^1)$ é calibrado por φ se, e somente se, π é calibrado por ω .

Lema 2.4.2. *O fibrado normal NP de uma subvariedade associativa P é trivial.*

Demonstração. Como o posto do fibrado normal NP é maior que a dimensão de P , então NP admite uma seção global não nula v , pois $NP \cong E \oplus L$ onde E é um fibrado vetorial de posto 3 sobre P e L um fibrado de posto 1 trivial (vide Capítulo 9, Teorema 1.2, [9]). Por outro lado, como P tem dimensão 3 e é orientável então pelo Teorema de Thurston, o fibrado tangente TP admite um referencial global e_1, e_2, e_3 , daí usando o produto vetorial definido em TM , pelo lema 2.2.19 temos que $e_i \times v \in \Gamma(NP)$ para $i = 1, 2, 3$ portanto $v, e_1 \times v, e_2 \times v, e_3 \times v$ são um referencial global de NP . \square

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita induzida pela métrica g em M (proposição 2.3.2). Para cada $p \in P$, $T_pM = T_pP \oplus N_pP$ com as respectivas projeções $T_pM \rightarrow N_pP$, $T_pM \rightarrow T_pP$ e, ∇^\perp e ∇^T as conexões em NP e TP respectivamente.

Seja $\text{Cl}(P)$ o fibrado de Clifford associado ao fibrado tangente TP , pelo lema 2.2.19 $i)$, NP é um fibrado de $\text{Cl}(P)$ -módulos à esquerda, isto fornece uma aplicação

$$\gamma : TP \rightarrow \text{End}(NP)$$

definida por $\gamma(e_i)n := -(e_i \times n)$ para $i = 1, 2, 3$. De fato, para $e_i \in TP$ com $i = 1, 2, 3$ e $n, \tilde{n} \in NP$, ponto a ponto temos

- i) γ está bem definida, pois suponha que $\gamma(e_i)n \in TP$ para $e_i \in TP$ e $n \in NP$, então podemos supor que $\gamma(e_i)n = e_j$ para $i \neq j$, logo ponto a ponto temos $\varphi(e_j, e_i, n) = \varphi(n, e_i, e_j) = 1$, daí pelo lema 2.2.19, $n = e_j \times e_i$, mas $e_i \times e_j = \epsilon_{ijk}e_k$ para $i \neq j \neq k \neq i$, onde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação par de } (1,2,3). \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1,2,3). \end{cases}$$

Logo $n \in TP$, absurdo, portanto $\gamma(e_i)n \in NP$.

- ii) $\gamma(e_i)(n + \tilde{n}) = -e_i \times (n + \tilde{n}) = -(e_i \times n) - (e_i \times \tilde{n}) = \gamma(e_i)n + \gamma(e_i)\tilde{n}$.
- iii) $\gamma(e_i + e_j)n = -(e_i + e_j) \times n = -(e_i \times n) - (e_j \times n) = \gamma(e_i)n + \gamma(e_j)n$.
- iv) Se $i \neq j$, $\gamma(e_i)\gamma(e_j)n = -\gamma(e_i)(e_j \times n) = e_i \times (e_j \times n) = -e_i \times (n \times e_j) = n \times (e_i \times e_j) = -(e_i \times e_j) \times n = \gamma(e_i \times e_j)n$.
- v) $\gamma(e_i)\gamma(e_i)n = e_i \times (e_i \times n) = -\langle e_i, e_i \rangle n$.

i) e ii) seguem da linearidade do produto vetorial, iii) segue de aplicar a antissimetria do produto vetorial e a identidade (2.1.4) e iv) segue também da identidade (2.1.4).

Definição 2.4.3. O operador de Fueter $F_P : \Gamma(NP) \rightarrow \Gamma(NP)$ associado a P é definido como

$$F_P(n) := \sum_{i=1}^3 \gamma(e_i) \nabla_i^\perp n.$$

A importância do operador de Fueter radica em que ele controla as deformações infinitesimais da subvariedade associativa, especificamente, dado um campo de vetores normal n a P , a condição para a deformação (infinitesimal) de P vem dada pela condição $n \in \ker F_P$ (vide Seção 5, Teorema 5.2, [13]), $\ker F_P$ é chamado *espaço de deformação infinitesimal*.

Dada a G_2 -estrutura φ em M , é possível obter uma 3-forma $\chi \in \Omega^3(M, TM)$, identificada ponto a ponto com o associador 2.2.1, modelada pela equação 2.2.7:

$$g_\varphi(u, \chi(v, w, z)) = 2\psi(u, v, w, z) \quad \forall u, v, w, z \in TM$$

onde $\psi = *\varphi$. A proposição 2.2.22 implica o seguinte resultado.

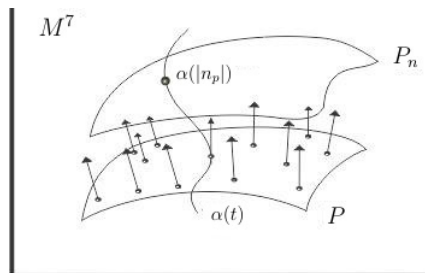
Proposição 2.4.4. $P \subset M$ é associativa se, e somente se, $F(P, \varphi) := \chi|_P \subset \Gamma(NP)$ é nulo.

$\chi|_P$ é entendido como a avaliação de seções de $\Lambda^3 TP$ sobre P e veja que de fato $\chi|_P$ são seções de NP , pois χ é identificada com o associador e pelo lema 2.2.19, $\chi(u, w, z)$ é ortogonal a $u, w, z \in T_p P$ para cada $p \in P$.

Como em [15], seção 5, uma deformação (infinitesimal) da subvariedade P pode ser parametrizada como segue. Seja U uma vizinhança suficientemente pequena da seção nula em $\Gamma(NP)$ e $n \in U$, considere $r_n : P \rightarrow M$ definida por $r_n(p) := \exp_p(n_p)$ onde

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{U} \subset TM &\rightarrow M \\ (q, v) &\mapsto \exp_q(v) \end{aligned}$$

é a aplicação exponencial em M , observe que r_n é suave, assim deformações de P são obtidas como $P_n = r_n(P)$ para algum $n \in U$.



Agora uma pergunta imediata é: P_n é associativa? Dado $n \in \Gamma(NP)$, $F(n) := F(P_n, \varphi)$ define seções de NP_n , como P_n vem parametrizada pela aplicação exponencial

$$F(n) := \exp_n^* \chi(\omega) \quad (2.4.1)$$

onde ω é uma seção global não nula de $\Omega^3(TP)$ definida $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Assim pela proposição 2.4.4, P_n é associativa se, e só se, $F(n)$ é nulo.

O seguinte resultado está no Capítulo 5, teorema 5.2 de [13], determina uma correspondência biunívoca entre o conjunto de campos normais (numa vizinhança do 0) que determinam o conjunto de subvariedades associativas obtidas por deformação de P e os espinores harmônicos de NP .

Proposição 2.4.5. *Seja F como em (2.4.1), definida em uma vizinhança pequena da seção nula, então $(F_*)(0)$ coincide com o operador de Fueter associado a P .*

Demonstração. Pela proposição 2.4.4, $F^{-1}(0)$ representa o conjunto de subvariedades associativas obtidas como perturbação de P , para cada $n \in \Gamma(NP)$, em termos do referencial $n = n_4 e_4 + n_5 e_5 + n_6 e_6 + n_7 e_7$ onde $n_i : P \rightarrow \mathbb{R}$ suave $i = 4, 5, 6, 7$, logo

$$\begin{aligned} F_*(0)(n) &= \frac{\partial}{\partial t} F(tn)|_{t=0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\exp_{tn})^*(\chi) - \chi}{t} \\ &= \mathcal{L}_n(\chi)|_{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} \\ &= (\iota(n)(d\chi) + d(\iota(n)\chi))|_{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}. \end{aligned}$$

Mas χ é o pullback do associador, que por sua vez é uma 3-forma fechada, logo χ também é fechada então calculando o termo restante temos

$$\begin{aligned} d(\iota(n)\chi)|_{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3} &= \left[\left(\frac{\partial n_5}{\partial x_1} + \frac{\partial n_6}{\partial x_2} - \frac{\partial n_7}{\partial x_3} \right) e_4 \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial n_4}{\partial x_1} + \frac{\partial n_6}{\partial x_3} + \frac{\partial n_7}{\partial x_2} \right) e_5 \\ &\quad - \left(\frac{\partial n_4}{\partial x_2} - \frac{\partial n_5}{\partial x_3} - \frac{\partial n_7}{\partial x_1} \right) e_6 \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial n_4}{\partial x_3} + \frac{\partial n_5}{\partial x_2} - \frac{\partial n_6}{\partial x_1} \right) e_7 \right] \otimes \omega_{123} \end{aligned}$$

onde $\omega_{123} = f^*(dx_{123})$. Por outro lado, usando o produto definido por (2.2.5) calculamos

$F_P(n)$ em termos do referencial e_i , $i = 4, 5, 6, 7$

$$\begin{aligned}\gamma(e_1)\nabla_1^\perp n &= -\frac{\partial n_4}{\partial x_1}e_5 + \frac{\partial n_5}{\partial x_1}e_4 - \frac{\partial n_6}{\partial x_1}e_7 + \frac{\partial n_7}{\partial x_1}e_6, \\ \gamma(e_2)\nabla_2^\perp n &= -\frac{\partial n_4}{\partial x_2}e_6 + \frac{\partial n_5}{\partial x_2}e_7 + \frac{\partial n_6}{\partial x_2}e_4 - \frac{\partial n_7}{\partial x_2}e_5, \\ \gamma(e_3)\nabla_3^\perp n &= \frac{\partial n_4}{\partial x_3}e_7 + \frac{\partial n_5}{\partial x_3}e_6 - \frac{\partial n_6}{\partial x_3}e_5 + \frac{\partial n_7}{\partial x_3}e_4.\end{aligned}$$

Portanto F_P coincide com $(F_*)(0)$ □

Definição 2.4.6. *Seja $P \subset M$ subvariedade associativa. P é dita isolada se $F^{-1}(0) = \{0\}$, i.e. se não existem outras subvariedades associativas atingidas como deformação infinitesimal de P .*

Usando o teorema da aplicação implícita (entre variedades de Banach², se obtém estrutura de variedade para $F^{-1}(0)$, a qual é modelada sobre $\ker(DF(0))$, assim pelo teorema anterior, se $\ker F_P$ é nulo, então P é uma variedade isolada.

Em seguida vamos mostrar que NP pode ser identificado com um fibrado de Dirac, o que por sua vez implica que F_P pode ser identificado com um operador tipo Dirac. Logo, vamos concluir encontrando a fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter.

²Inicialmente uma variedade topológica modelada sobre um espaço de Banach, vide Teorema 3.6 [1].

Capítulo 3

Fórmula de Weitzenböck

As duas primeiras seções deste capítulo são destinadas a lembrar alguns conceitos de [12], sobre operadores de Dirac e a fórmula de Weitzenböck para um fibrado de espinores qualquer. Nas duas seções restantes mostramos que o fibrado normal de uma subvariedade associativa é identificado com um fibrado de espinores, o que implica que o operador de Fueter coincide com um operador de Dirac e em virtude desta identificação finalizamos o trabalho calculando a fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter.

3.1 Operador e Fibrado de Dirac

Definição 3.1.1. *Sejam M variedade riemanniana orientável e S um fibrado de $\text{Cl}(M)$ -módulos à esquerda sobre M . Suponha que S admite estrutura riemanniana e portanto conexão de Levi-Civita ∇ . Definimos o operador de Dirac $D : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$ como*

$$D\sigma = \sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} \sigma \quad (3.1.1)$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial local ortonormal de TM , ∇ a conexão em S e \cdot o produto de Clifford que fornece a estrutura de $\text{Cl}(M)$ -módulo. D^2 é chamado laplaciano de Dirac.

Em geral, seja $D : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$ um operador diferencial de ordem r . Dados $m \in M$ e $\xi \in T_m^*M$, o símbolo principal de D é definido como $\sigma_\xi(D) : S_m \rightarrow S_m$, dado em coordenadas locais por

$$\sigma_\xi(D) = i^r \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha(m) \xi^{|\alpha|}.$$

onde

$$D = \sum_{|\alpha| \leq r} A_\alpha(m) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{|\alpha|}} \quad \xi = \sum_{k=1}^n \xi_k dx_k$$

Dizemos que D é um operador elíptico se $\sigma_\xi(D)$ é um isomorfismo para todo $\xi \neq 0$.

Proposição 3.1.2. *O operador de Dirac D e o laplaciano de Dirac são operadores elípticos.*

Demonstração. Fixe $m \in M$ e uma base ortonormal e_1, \dots, e_n de $T_m M$. Escolha um sistema de coordenadas locais $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ tais que $\varphi(m) = 0$ e $\varphi(e_j) = (\partial_j)_0$ para $j = 1, \dots, n$ e como $T_m^* M \cong T_m M$, tem-se $\varphi(e_j) = (dx_j)_0$.

Seja U_j trivialização local de S contendo $m \in M$, então localmente $\nabla_{e_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_0 + \text{termos de ordem zero}$. Logo em 0, temos $D = \sum e_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_0 + \text{termos de ordem zero}$ e daí para qualquer vetor cotangente $\xi = \sum \xi_j (dx_j)_0$ aplicando a definição de símbolo principal $\sigma_\xi(D)(m) = i \sum_{j=1}^n e_j \xi_j = i\xi$. Para D^2 note que $\sigma_\xi(D^2) = \sigma_\xi(D) \circ \sigma_\xi(D) = -\xi \cdot \xi = \|\xi\|^2$. Portanto, D e D^2 são elípticos. \square

Definição 3.1.3. *Um fibrado de Dirac sobre uma variedade riemanniana M é um fibrado de $\text{Cl}(M)$ -módulos à esquerda satisfazendo:*

- 1) *Para cada $m \in M$, $\langle v\sigma_1, v\sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in S_m$ e $v \in T_m M$ com $v^2 = -1$.*
- 2) *Para todo $\varepsilon \in \Gamma(\text{Cl}(M))$ e $\sigma \in \Gamma(S)$*

$$\nabla(\varepsilon \cdot \sigma) = (\nabla\varepsilon) \cdot \sigma + \varepsilon \cdot (\nabla\sigma).$$

Proposição 3.1.4. *O operador de Dirac em qualquer fibrado de Dirac é essencialmente autoadjunto, i.e,*

$$(D\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, D\sigma_2)$$

para toda σ_1, σ_2 seções de S com suporte compacto. Onde (\cdot, \cdot) é o produto L^2 induzido pela métrica riemanniana

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \int_M \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.$$

Demonstração. Fixe $m \in M$ e escolha um referencial geodésico e_1, \dots, e_n em uma vizinhança U de m , i.e, um referencial ortonormal em U tal que $(\nabla_{e_i} e_j)(m) = 0$ em m . Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(S)$, temos

$$\begin{aligned} \langle D\sigma_1, \sigma_2 \rangle_m &= \sum_{j=1}^n \langle e_j \cdot \nabla_{e_j} \sigma_1, \sigma_2 \rangle_m \\ &= - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j} \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2 \rangle_m \\ &= - \sum_{j=1}^n \{ e_j \langle \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1, (\nabla_{e_j} e_j) \cdot \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1, e_j \cdot \nabla_{e_j} \sigma_2 \rangle \}_m \\ &= - \sum_{j=1}^n (e_j \langle \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2 \rangle)_m + \langle \sigma_1, D\sigma_2 \rangle_m \\ &= \text{div}(V)_m + \langle \sigma_1, D\sigma_2 \rangle_m, \end{aligned}$$

onde V é um campo vetorial definido pelo condição $\langle V, W \rangle = -\langle \sigma_1, W \cdot \sigma_2 \rangle$ para todo campo vetorial tangente W . Para justificar a última linha da igualdade, definindo $\text{div}(V)$ em coordenadas locais, veja

$$\begin{aligned} \text{div}(V)_m &:= \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j} V, e_j \rangle_m \\ &= \sum_{j=1}^n \{e_j \langle V, e_j \rangle - \langle V, \nabla_{e_j} e_j \rangle\}_m \\ &= - \sum_{j=1}^n \{e_j \langle \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2 \rangle\}_m. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\int_M \langle D\sigma_1, \sigma_2 \rangle = \int_M \langle \sigma_1, D\sigma_2 \rangle.$$

□

3.2 Fórmula de Weitzenböck Clássica

Começaremos fazendo algumas considerações gerais para fixar notação. Seja $\pi : E \rightarrow M$ fibrado vetorial com conexão riemanniana ∇ . Dados V, W campos de vetores em M definimos

$$\nabla_{V,W}^2 : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad (3.2.1)$$

como $\nabla_{V,W}^2 \sigma = \nabla_V \nabla_W \sigma - \nabla_{\nabla_V W} \sigma$.

Lema 3.2.1. *O operador (3.2.1) é tensorial nas variáveis V e W .*

Demonstração. Sejam $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, para cada $m \in M$

$$\begin{aligned} \nabla_{fV, gW}^2 \sigma &= \nabla_{fV} \nabla_{gW} \sigma - \nabla_{\nabla_{fV}(gW)} \sigma \\ &= f \nabla_V (g \nabla_W \sigma) - \nabla_{f \nabla_V (gW)} \sigma \\ &= f [(Vg) \nabla_W \sigma + g \nabla_V \nabla_W \sigma] - f \nabla_{[(Vg)W + g \nabla_V W]} \sigma \\ &= f(Vg) \nabla_W \sigma + fg \nabla_V \nabla_W \sigma - f(Vg) \nabla_W \sigma - fg \nabla_{\nabla_V W} \sigma = fg \nabla_{V,W}^2 \sigma. \end{aligned}$$

□

Considere $\sigma \in \Gamma(E)$, logo pelo lema anterior $\nabla_{\cdot, \cdot}^2 \sigma$ é uma forma bilinear em TM com valores nas seções de E .

Definição 3.2.2. *Definimos o laplaciano da conexão*

$$\begin{aligned} \nabla^* \nabla : \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ \sigma &\mapsto -\text{tr}(\nabla_{\cdot, \cdot}^2 \sigma). \end{aligned}$$

Em coordenadas locais

$$\nabla^* \nabla \sigma = - \sum_{j=1}^n \nabla_{e_j, e_j}^2 \sigma. \quad (3.2.2)$$

Proposição 3.2.3. *O operador $\nabla^* \nabla$ é um operador elíptico.*

Demonstração. Seguindo a ideia da prova da Proposição 3.1.2, fixe $m \in M$ e e_1, \dots, e_n um referencial geodésico em m , localmente

$$\nabla^* \nabla = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \text{termos de ordem zero}, \quad (3.2.3)$$

logo para qualquer vetor cotangente $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$ diferente de zero, temos $\sigma_\xi(\nabla^* \nabla) = i^2 \sum_{j=1}^n -\xi_j^2 = \|\xi\|^2$. \square

Proposição 3.2.4. *O laplaciano da conexão $\nabla^* \nabla$ é um operador diferencial positivo e essencialmente autoadjunto. Em particular*

$$(\nabla^* \nabla \sigma_1, \sigma_2) = (\nabla \sigma_1, \nabla \sigma_2) \quad (3.2.4)$$

onde $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ com suporte compacto.

Demonstração. Seguindo a ideia da prova da proposição 3.1.4, fixe $m \in M$ e um referencial geodésico e_1, \dots, e_n em uma vizinhança de m , sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ com suporte compacto

$$\begin{aligned} \langle \nabla^* \nabla \sigma_1, \sigma_2 \rangle &= - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \sigma_1 - \nabla_{\nabla_{e_j} e_j} \sigma_2 \rangle \\ &= - \sum_{j=1}^n \{ e_j \langle \nabla_{e_j} \sigma_1, \sigma_2 \rangle - \langle \nabla_{e_j} \sigma_1, \nabla_{e_j} \sigma_2 \rangle \} \\ &= - \operatorname{div}(V) + \langle \nabla \sigma_1, \nabla \sigma_2 \rangle, \end{aligned}$$

logo integrando sobre M , temos $(\nabla^* \nabla \sigma_1, \sigma_2) = (\nabla \sigma_1, \nabla \sigma_2)$. \square

Note que se M é compacta então $\nabla^* \nabla \sigma = 0$ se, e somente se, $\nabla \sigma = 0$, i.e. se, o somente se, σ é uma seção globalmente paralela.

Seja S um fibrado de Dirac sobre M , definamos $\mathcal{R} \in \Gamma(S^* \otimes S)$ por

$$\mathcal{R} \sigma = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n e_j \cdot e_k \cdot F_{e_j, e_k}^\nabla \sigma \quad (3.2.5)$$

onde e_1, \dots, e_n é um referencial ortonormal, F_{e_j, e_k}^∇ é uma seção do fibrado $\operatorname{Hom}(S, S)$ e \cdot o produto de $\operatorname{Cl}(M)$ -módulo.

Proposição 3.2.5. *Seja S fibrado de Dirac, D^2 e $\nabla^*\nabla$ o laplaciano de Dirac e o laplaciano da conexão respectivamente, então*

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \mathcal{R}. \quad (3.2.6)$$

Demonstração. Seja $m \in M$ e e_1, \dots, e_n um referencial geodésico definido em $m \in U \subset M$ aberto, para cada $\sigma \in \Gamma(S)$, em m tem-se

$$\begin{aligned} D^2\sigma &= D \circ D\sigma = \sum_{ij=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}(e_j \cdot \nabla_{e_j}\sigma) \\ &= \sum_{ij=1}^n e_i \cdot \{ \nabla_{e_i}e_j \cdot \nabla_{e_j}\sigma + e_j \cdot \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\sigma \} \end{aligned}$$

observe que $(\nabla_{e_i}e_j)_m = 0$, logo $e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{\nabla_{e_i}e_j}\sigma = 0$ em m , para todo $i, j = 1, \dots, n$. Logo, temos

$$\begin{aligned} D^2\sigma &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i,e_j}^2\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(e_i \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i,e_i}^2\sigma)}_{(1)} + \sum_{i \neq j}^n \underbrace{(e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i,e_j}^2\sigma)}_{(2)}. \end{aligned}$$

No referencial escolhido temos que em m , $[e_i, e_j] = \nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i = 0$ e pelo produto de Clifford $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\langle e_i, e_j \rangle 1$

$$(1) = - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i}\sigma = \nabla^*\nabla\sigma.$$

$$\begin{aligned} (2) &= \sum_{i \neq j}^n e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i,e_j}^2\sigma \\ &= \sum_{i < j}^n e_i \cdot e_j \cdot \{ \nabla_{e_i,e_j}^2 - \nabla_{e_j,e_i}^2 \} \sigma \\ &= \sum_{i < j}^n e_i \cdot e_j \cdot F_{e_i,e_j}^\nabla \sigma \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n e_i \cdot e_j \cdot F_{e_i,e_j}^\nabla \sigma = \mathcal{R}\sigma. \end{aligned}$$

A última linha tem-se do fato de que o tensor de curvatura é antissimétrico, assim $F_{e_i,e_i}^\nabla \sigma = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. \square

Uma motivação para a fórmula de Weitzenböck é a seguinte: considere S^n a esfera unitária. S^n é uma variedade Spin, pois é orientável e a segunda classe de Stiefel-

Whitney é nula (vide Capítulo 4 [14]). Logo o operador de Dirac

$$D : \Gamma(S(TS^n)) \rightarrow \Gamma(S(TS^n))$$

admite uma fórmula de Weitzenböck. Em particular, esta fórmula tem a seguinte forma

$$D^2 := \nabla^* \nabla + \frac{1}{4}k$$

onde k é a curvatura escalar de S^n . Seja σ uma autoseção de D , ou seja $D\sigma = \lambda\sigma$ onde λ é o autovalor associado a $\sigma \neq 0$, então usando o fato de que D é um operador essencialmente autoadjunto e pela fórmula de Weitzenböck

$$\begin{aligned} (D^2\sigma, \sigma) &= (\nabla^* \nabla \sigma, \sigma) + \left(\frac{1}{4}k\sigma, \sigma\right) \\ \|D\sigma\|_{L^2}^2 &= \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}k\|\sigma\|_{L^2}^2 \\ |\lambda|^2\|\sigma\|_{L^2}^2 &\geq \frac{1}{4}k\|\sigma\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ou seja, $|\lambda|^2 \geq \frac{1}{4}k$. Em certos casos é possível aplicar a fórmula de Weitzenböck para achar estimativas inferiores para os autovalores do operador de Dirac.

3.3 Estrutura Spin no fibrado normal de uma subvariedade associativa

(M, φ) denota uma G_2 -variedade e $P \subset M$ subvariedade associativa.

Proposição 3.3.1. *Como P é associativa existe uma identificação $TP \cong \Lambda_+^2 NP$ onde $\Lambda_+^2 NP$ são as formas autoduais.*

Demonstração. Seja e_1, e_2, e_3 referencial global de TP (vide lemma 2.4.2), φ a G_2 -estrutura associada então $e_1 \lrcorner \varphi, e_2 \lrcorner \varphi$ e $e_3 \lrcorner \varphi$ restritas a NP formam uma base de $\Lambda_+^2 NP$. De fato, para cada $p \in P$ $f_m^* \phi_0 = \varphi_m$ temos

$$\begin{aligned} (e_1)_p \lrcorner \phi_0 &= dx_{23} + dx_{45} + dx_{67}, \\ (e_2)_p \lrcorner \phi_0 &= -dx_{13} + dx_{46} - dx_{57}, \\ (e_3)_p \lrcorner \phi_0 &= dx_{12} - dx_{47} - dx_{56}, \end{aligned}$$

mas $dx_{ij}|_{N_p P} = 0$ para cada $p \in P$ e $i < j$ com $i, j = 1, 2, 3$, logo obtemos

$$e_1 \lrcorner \varphi = \omega_{45} + \omega_{67},$$

$$e_2 \lrcorner \varphi = \omega_{46} + \omega_{75},$$

$$e_3 \lrcorner \varphi = \omega_{47} + \omega_{56},$$

que é um referencial para $\Lambda_+^2 NP$. □

Como P tem dimensão 3 e é orientável (pelo Teorema de Thurston), então P admite Spin(3)-estrutura, logo existe um mapa linear

$$\Upsilon : TP \rightarrow \text{End}(S^+)$$

tal que $\Upsilon(v)^* + \Upsilon(v) = 0$ e $\Upsilon(v)^* \Upsilon(v) = |v|^2 \mathbf{1}$. Pela proposição 3.3.1 temos definido o mapa

$$\rho_+ : \Lambda_+^2 NP \rightarrow \text{End}(S^+),$$

além disso temos que $\Lambda_-^2 NP$ age trivialmente em $\text{End}(S^+)$ (vide capítulo 1, subseção 1.4.3), o que permite levantar a SO(4)-estrutura para uma Spin(4)-estrutura, tal que a estrutura Spin em P é associada pela projeção $\text{Spin}(4) \cong \text{Spin}(3) \times \text{Spin}(3)$ em um dos fatores. Logo $NP \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é o produto tensorial de dois fibrados associados com as representações de Spin(4), ou seja

$$NP \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-. \quad (3.3.1)$$

Em particular, NP é isomorfo com a parte real de $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$. Em resumo, por um lado o fibrado de espinores $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$ fornece um fibrado de Dirac com ação de Clifford $\Lambda = \Upsilon \otimes \mathbf{1}_{S^-}$ e conexão ∇ definida

$$\nabla(\sigma \otimes \varepsilon) = \nabla^+ \sigma \otimes \varepsilon + \sigma \otimes \nabla^- \varepsilon.$$

Por outro lado, do capítulo anterior NP vem munido de uma ação de Clifford $\gamma : TP \rightarrow \text{End}(NP)$ e de uma conexão riemanniana ∇^\perp . Pelo isomorfismo (3.3.1), podemos identificar a conexão Spin com a conexão induzida em NP e verificar que as ações de Clifford são as mesmas.

Cada seção $\sigma \otimes \varepsilon$ de $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$, induz uma seção $\nu = \sigma^* \otimes \varepsilon$ de $\text{Hom}(S^+, S^-) \cong (S^+)^* \otimes_{\mathbb{C}} S^-$ tal que $\nu(\sigma) = \sigma^*(\sigma) \otimes \varepsilon = \varepsilon$, logo

$$\begin{aligned} \nabla \nu &= \nabla(\sigma^* \otimes \varepsilon) \\ &= (\nabla^+)^* \sigma^* \otimes \varepsilon + \sigma^* \otimes \nabla^- \varepsilon, \end{aligned}$$

onde $\nabla\nu$ é seção de $\text{Hom}(S^+, S^-)$, então para cada σ seção de S^+

$$\begin{aligned} (\nabla\nu)(\sigma) &= (\nabla^+)^*\sigma^*(\sigma) \otimes \varepsilon + \sigma^*(\sigma) \otimes \nabla^-\varepsilon \\ &= [d\sigma^*(\sigma) - \sigma^*(\nabla^+\sigma)] \otimes \varepsilon + \sigma^*(\sigma) \otimes \nabla^-\varepsilon \\ &= -\nu(\nabla^+\sigma) + \nabla^-(\nu(\sigma)). \end{aligned}$$

Por outro lado, a conexão Spin é compatível com a conexão de Levi-Civita, ou seja

$$\nabla^-(\Gamma(n)\sigma) = \Gamma(\nabla^\perp n)\sigma + \Gamma(n)\nabla^+\sigma \quad (3.3.2)$$

onde $\Gamma : NP \rightarrow \text{Hom}_J(S^+, S^-)$ é o isomorfismo induzido em (3.3.1), então para n seção de NP e σ seção de S^+

$$\Gamma(\nabla^\perp n) = -\Gamma(n)\nabla^+\sigma + \nabla^-(\Gamma(n)\sigma), \quad (3.3.3)$$

portanto ∇^\perp coincide com a conexão Spin ∇ via o isomorfismo Γ .

Por último, com respeito as ações de Clifford temos

$$\begin{array}{ccccc} TP & \xrightarrow{\Upsilon} & \text{End}(S^+) & \xleftarrow{\otimes \mathbb{1}_{S^-}} & \text{End}(S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-) \\ & & \downarrow \gamma & \nearrow \cong & \\ & & \text{End}(NP \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) & & \end{array}$$

e pelo lema de Schur γ e Υ são as mesmas. Com isto temos que $(NP, \gamma, \nabla^\perp)$ fornece um fibrado de Dirac, logo o operador de Fueter pode ser identificado com um operador tipo Dirac.

Corolário 3.3.2. *Sejam $P \subset M$ associativa e F_P o operador de Fueter. F_P é um operador elíptico e essencialmente autoadjunto.*

3.4 Fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter

Proposição 3.4.1. *Sejam $P \subset M$ subvariedade associativa e $F_P : \Gamma(NP) \rightarrow \Gamma(NP)$ o operador de Fueter associado a P então*

$$F_P^2 := \nabla^*\nabla + \mathcal{R} \quad (3.4.1)$$

onde $\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \gamma(e_i)\gamma(e_j)F_{ij}^{\nabla^\perp}$.

Demonstração. Sejam e_1, e_2 e e_3 referencial ortonormal de TP e $n \in \Gamma(NP)$, então no ponto $p \in P$ temos

$$\begin{aligned} F_P^2(n) &= \sum_{i,j=1}^3 \gamma(e_i) \nabla_i^\perp (\gamma(e_j) \nabla_j^\perp n) \\ &= \sum_{i,j} \gamma(e_i) (\gamma(\nabla_i^T e_j) \nabla_j^\perp n + \gamma(e_j) \nabla_i^\perp \nabla_j^\perp n) \\ &= \sum_{i,j} \underbrace{\gamma(e_i) \gamma(\nabla_i^T e_j) \nabla_j^\perp n}_{(1)} + \underbrace{\gamma(e_i) \gamma(e_j) \nabla_i^\perp \nabla_j^\perp n}_{(2)} \end{aligned}$$

onde ∇^T é a conexão de Levi-Civita em P , logo em termos do referencial $\nabla_i^T e_j = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k e_k$ onde $\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_i^T e_j, e_k \rangle$ são os símbolos de Christoffel, daí

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{ijk} \gamma(e_i) \gamma(\Gamma_{ij}^k e_k) \nabla_j^\perp n \\ &= \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \gamma(e_i) \gamma(e_k) \nabla_j^\perp n \\ &= \sum_{ij} \Gamma_{ij}^i \gamma(e_i) \gamma(e_i) \nabla_j^\perp n + \sum_{j;i \neq k} \Gamma_{ij}^k \gamma(e_i) \gamma(e_k) \nabla_j^\perp n \\ &= - \sum_{ij} \Gamma_{ii}^j \gamma(e_i) \gamma(e_i) \nabla_j^\perp n - \sum_{j;i \neq k} \Gamma_{ik}^j \gamma(e_i) \gamma(e_k) \nabla_j^\perp n \quad \langle \nabla_i^T e_j, e_k \rangle + \langle e_j, \nabla_i^T e_k \rangle = 0 \\ &= \sum_{ij} \Gamma_{ii}^j \nabla_j^\perp n - \sum_{j;i < k} \Gamma_{[i,k]}^j \gamma(e_i) \gamma(e_k) \nabla_j^\perp n \quad \Gamma_{[i,k]}^j = \langle [e_i, e_k], e_j \rangle \\ &= \sum_i \nabla_i^\perp \sum_j \Gamma_{ii}^j e_j n - \sum_{i < k} \gamma(e_i) \gamma(e_k) \nabla_i^\perp \sum_j \Gamma_{[i,k]}^j e_j n \\ &= \sum_i \nabla_{\frac{\perp}{\nabla_i^T} e_i} n - \sum_{i < k} \gamma(e_i) \gamma(e_k) \nabla_{[e_i, e_k]}^\perp n \\ (2) &= \sum_i \gamma(e_i) \gamma(e_i) \nabla_i^\perp \nabla_i^\perp n + \sum_{i \neq j} \gamma(e_i) \gamma(e_j) \nabla_i^\perp \nabla_j^\perp n \\ &= \sum_i \gamma(e_i) \gamma(e_i) \nabla_i^\perp \nabla_i^\perp n + \sum_{i \neq j} \gamma(e_i) \gamma(e_j) \nabla_i^\perp \nabla_j^\perp n \\ &= - \sum_i \nabla_i^\perp \nabla_i^\perp n + \sum_{i < j} \gamma(e_i) \gamma(e_j) (\nabla_i^\perp \nabla_j^\perp - \nabla_j^\perp \nabla_i^\perp) n. \end{aligned}$$

Por último, juntando (1) e (2) tem-se

$$\begin{aligned} (1) + (2) &= - \sum_i (\nabla_i^\perp \nabla_i^\perp - \nabla_{\frac{\perp}{\nabla_i^T} e_i}^\perp) n + \sum_{i < k} \gamma(e_i) \gamma(e_k) (\nabla_i^\perp \nabla_k^\perp - \nabla_k^\perp \nabla_i^\perp - \nabla_{[e_i, e_k]}^\perp) n \\ &= \nabla^* \nabla n + \sum_{i < k} \gamma(e_i) \gamma(e_k) F_{ik}^{\nabla^\perp} n = \nabla^* \nabla n + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \gamma(e_i) \gamma(e_k) F_{ik}^{\nabla^\perp} n. \end{aligned}$$

□

Lema 3.4.2. *Sejam P subvariedade associativa e F_P o operador de Fueter, então o operador \mathcal{R} da equação (3.4.1) é dado pela fórmula*

$$\mathcal{R} := \frac{1}{4}k + \bar{\rho}(F^-) \quad (3.4.2)$$

onde $\bar{\rho} = \rho \otimes \mathbb{1}_{S^-}$.

Demonstração. Como ∇ em coincide com a conexão induzida por ∇^\perp vamos calcular F^∇ em vez de calcular F^{∇^\perp} . Agora como $\nabla = \nabla^+ \otimes \mathbb{1}_{S^-} + \mathbb{1}_{S^+} \otimes \nabla^-$, então $F^\nabla = F^+ \otimes \mathbb{1}_{S^-} + \mathbb{1}_{S^+} \otimes F^-$, onde F^+ é a curvatura induzida por ∇^+ e F^- a curvatura induzida por ∇^- . Com isto para $\sigma \otimes \varepsilon$ seção de $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\sigma \otimes \varepsilon) &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\Upsilon \otimes \mathbb{1}_{S^-})(e_i)(\Upsilon \otimes \mathbb{1}_{S^-})(e_j) F_{ij}^\nabla(\sigma \otimes \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\Upsilon \otimes \mathbb{1}_{S^-})(e_i)(\Upsilon \otimes \mathbb{1}_{S^-})(e_j) (F_{ij}^+ \sigma \otimes \varepsilon + \sigma \otimes F_{ij}^- \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{ij} (\Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)F_{ij}^+ \sigma) \otimes \varepsilon}_{(a)} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{ij} (\Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)\sigma) \otimes F_{ij}^- \varepsilon}_{(b)}. \end{aligned}$$

Denote por $R_{ijk}^l = \langle F_{ij}^\nabla(e_k), e_l \rangle$, onde F^∇ é a curvatura correspondente à conexão ∇ em $TP \rightarrow P$. Para o primeiro termo

$$\begin{aligned} (a) &= \frac{1}{8} \sum_{ijkl} R_{ijk}^l \Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)\Upsilon(e_k)\Upsilon(e_l)\sigma \\ &= \frac{1}{8} \sum_l \left(\sum_{ij, (i=k)} R_{iji}^l \Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)\Upsilon(e_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{ij, (j=k)} R_{ijj}^l \Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)\Upsilon(e_j) \right. \quad \text{antissimetria de } R_{ijk}^l \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} (R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l) \Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)\Upsilon(e_k) \right) \Upsilon(e_l)\sigma \quad \text{e de } \Upsilon(e_i)\Upsilon(e_j)\Upsilon(e_k) \\ &= \frac{1}{8} \sum_l \left(\sum_{ij} R_{iji}^l \Upsilon(e_j) - \sum_{ij} R_{ijj}^l \Upsilon(e_i) \right) \Upsilon(e_l)\sigma \quad \text{lei de Bianchi} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ijl} R_{iji}^l \Upsilon(e_j)\Upsilon(e_l)\sigma \\ &= \frac{1}{8} \sum_{ijl} R_{iji}^l (\Upsilon(e_j)\Upsilon(e_l) + \Upsilon(e_l)\Upsilon(e_j))\sigma \quad R_{iji}^l = R_{ili}^j \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ijl} R_{iji}^l \delta_j^l \sigma = \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{iji}^j \sigma = \frac{1}{4} K \sigma \quad \Upsilon(e_j)\Upsilon(e_l) + \Upsilon(e_l)\Upsilon(e_j) = 2\delta_j^l \end{aligned}$$

Com respeito ao termo restante, observe que Υ (como também γ) induz um mapa

$$\rho : \Lambda^2 TP \rightarrow \text{End}(S^+)$$

definido

$$\rho\left(\sum_{ij} \eta_{ij} e_i \wedge e_j\right) = \sum_{ij} \eta_{ij} \Upsilon(e_i) \Upsilon(e_j)$$

com isso considere a extensão

$$\bar{\rho} : \Lambda^2 TP \rightarrow \text{End}(S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-) \quad (3.4.3)$$

definida por

$$\bar{\rho}\left(\sum_{ij} \eta_{ij} e_i \wedge e_j\right) = \sum_{ij} \eta_{ij} (\Upsilon(e_i) \Upsilon(e_j) \otimes \mathbb{1}_{S^-})$$

ou seja, $\bar{\rho} = \rho_+ \otimes \mathbb{1}_{S^-}$, com isso

$$\begin{aligned} (b) &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\Upsilon(e_i) \Upsilon(e_j) \otimes F_{ij}^{S^-})(\sigma \otimes \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\Upsilon(e_i) \Upsilon(e_j) \otimes F_{ij}^- \mathbb{1}_{S^-})(\sigma \otimes \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\rho}\left(\sum_{ij} F_{ij}^- e_i \wedge e_j\right)(\sigma \otimes \varepsilon) \\ &= \bar{\rho}(F^-)(\sigma \otimes \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Juntando a proposição 3.4.1 e o lema 3.4.3 obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.4.3 (Fórmula de Weitzenböck para o operador de Fueter). *Sejam P subvariedade associativa e F_P o operador de Fueter, então a fórmula de Weitzenböck para F_P é*

$$F_P^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} k + \bar{\rho}(F^-). \quad (3.4.4)$$

Onde k é a curvatura escalar de P , F^- é a curvatura associada ao fibrado S^- de 3.3.1, e $\bar{\rho}$ é a extensão $\rho_+ \otimes \mathbb{1}_{S^-}$.

Referências

- [1] Jinpeng An e Karl-Hermann Neeb. “An implicit function theorem for Banach spaces and some applications”. Em: *Mathematische Zeitschrift* 262.3 (2009), pp. 627–643.
- [2] John Baez. “The octonions”. Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 39.2 (2002), pp. 145–205.
- [3] Robert L Bryant. “Metrics with exceptional holonomy”. Em: *Annals of mathematics* (1987), pp. 525–576.
- [4] Robert L Bryant, Simon Salamon et al. “On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy”. Em: *Duke Math. J* 58.3 (1989), pp. 829–850.
- [5] Manfredo Perdigao do Carmo Valero. *Riemannian geometry*. 1992.
- [6] Simon Kirwan Donaldson e Peter B Kronheimer. *The geometry of four-manifolds*. Oxford University Press, 1990.
- [7] Robert Friedman e John W Morgan. *Gauge theory and the topology of four-manifolds*. American Mathematical Soc., 1998.
- [8] Reese Harvey e H Blaine Lawson. “Calibrated geometries”. Em: *Acta Mathematica* 148.1 (1982), pp. 47–157.
- [9] Dale Husemoller. *Fibre bundles*. Springer, 1966.
- [10] Dominic D Joyce. *Compact manifolds with special holonomy*. Vol. 1. Oxford university press Oxford, 2000.
- [11] Shoshichi Kobayashi e Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Vol. 1. 2. New York, 1963.
- [12] H Blaine Lawson e Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*. Vol. 1. Oxford Univ Press, 1989.
- [13] Robert C McLean. “Deformations of calibrated submanifolds”. Em: *Commun. Analy. Geom.* Citeseer. 1996.
- [14] John Willard Milnor e James D Stasheff. *Characteristic classes*. 76. Princeton university press, 1974.
- [15] Corti. Haskins. Nordström. e Pacini. “ G_2 -manifolds and associative submanifolds via semi-Fano 3-folds (2012)”. Em: *available at arxiv* 1207 (), p. v2.

- [16] Henrique N Sa Earp. “Instantons on G_2 -manifolds”. Tese de doutorado. Imperial College London, 2009.
- [17] Dietmar Salamon. *Spin Geometry and Sieberg-Witten Invariants*. ETH, 2000.
- [18] Simon Salamon. *Riemannian geometry and holonomy groups*. Longman Scientific e Technical, 1989.
- [19] Michael Spivak. “A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 2”. Em: *I (Boston, Mass., 1970)* (1970).
- [20] Clifford Henry Taubes. *Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature*. Vol. 23. Oxford University Press, 2011.
- [21] Thomas Walpuski. “ G_2 -instantons, associative submanifolds and Fueter sections”. Em: *arXiv preprint arXiv:1205.5350* (2012).