



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação
Científica



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

O Índice de Conley para Campos de Vetores Descontínuos

por

Rogério Casagrande[†]

Orientadora: Prof^a Dr^a Ketty A. de Rezende

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

O Índice de Conley para Campos de Vetores Descontínuos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Rogério Casagrande** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de maio de 2008.


Prof^a Dr^a Ketty Abaroa de Resende

Banca examinadora:

Prof^a Dr^a Ketty Abaroa de Resende.

Prof^a Dr^a Maria Alice Bertolim.

Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi.

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **DOUTOR em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Casagrande, Rogério

C261i O índice de Conley para campos de vetores descontínuos /
Rogério Casagrande -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientadora : Ketty Abaroa de Rezende

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Campos vetoriais. 3. Topologia algébrica.
4. Teoria do índice de Conley. I. Rezende, Ketty Abaroa de. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The Conley index for discontinuous vector fields.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Discontinuous vector fields. 2. Dynamical systems.
3. Algebraic topology. 4. Conley index theory.

Área de concentração: Geometria e Topologia - Sistemas Dinâmicos

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

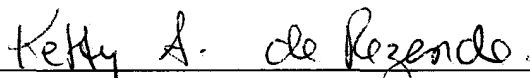
Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Maria Alice Bertolim (Regensburg University – Alemanha)
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi (UNESP – Rio Preto)
Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 23/04/2008

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de abril de 2008 e aprovada

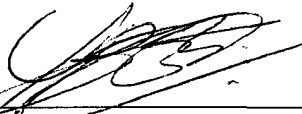
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



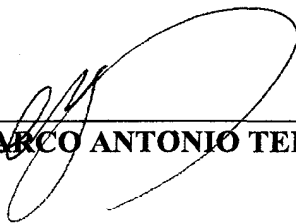
Prof(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE



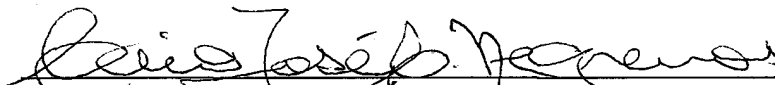
Prof(a). Dr(a). MARIA ALICE BERTOLIM



Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI



Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

*Aos meus pais,
Attilio Casagrande (in memoriam) e
Ivanilda C. Casagrande*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por esta conquista.

Agradeço a minha orientadora Ketty A. de Rezende pela confiança depositada, pelos ensinamentos e pelo excelente trabalho de orientação.

Ao Professor Marco Antonio, pelas sugestões fundamentais para a realização deste trabalho, pela disponibilidade e paciência.

Aos meus pais Atílio e Ivanilda, pela educação, amor e dedicação. Agradeço também meus irmãos e familiares pelo apoio e força. A todos da família, pela compreensão que em alguns momentos importantes, nem sempre pude estar presente.

À professora Maria Alice pelas conversas, sugestões e críticas. Agradeço à Mariana, minha “irmã acadêmica”, pelas conversas sobre o índice de Conley clássico.

Ao pessoal de Viçosa, em especial, aos presentes aqui desde o mestrado. Aos amigos da república e do IMECC. Também agradeço ao pessoal da minha cidade, Castelo-ES.

Aos professores do IMECC e do departamento de Matemática da UFV, onde fiz a graduação.

Aos funcionários do IMECC, pela atenção prestada. Em especial à Cidinha, Tânea e Ednaldo, pela ajuda com a parte burocrática. Um agradecimento especial também aos funcionários da Biblioteca.

À banca examinadora pelas sugestões que ajudaram a valorizar o trabalho.

À Capes pelo suporte financeiro.

RESUMO

O índice de Conley é um invariante topológico usado na análise do comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos. Inicialmente a teoria foi desenvolvida para fluxos contínuos em espaços de dimensão finita e posteriormente estendida para o caso discreto. Neste trabalho, apresentamos uma teoria do índice de Conley para uma classe de campos vetoriais descontínuos, com descontinuidade de primeira espécie. Campos vetoriais descontínuos são freqüentes em varias áreas da Ciência e Engenharia e podem ser expressos por sistemas suaves por partes em uma variedade n -dimensional compacta M . Considere uma estratificação de Whitney de M e seja Z um campo descontínuo em M , onde a região de descontinuidade, D , é o estrato de codimensão um. Mostramos a existência de um D -par índice (N, L) e sua invariância quanto ao tipo de homotopia do espaço N quocientado por L . Desta forma o D -índice de Conley fica bem definido e apresentamos alguns exemplos de seu cálculo. Utilizamos o D -índice de Conley para exibirmos condições suficientes para a existência de pontos de bifurcação em uma família a um parâmetro de campos descontínuos. Apresentamos uma teoria de continuação para D -grafos de Lyapunov associado à classe de campos descontínuos.

ABSTRACT

The Conley index is used as a topological invariant in the analysis of the qualitative behavior of dynamical systems. Initially the theory was developed for continuous flows in finite dimensional spaces and later extended to the infinite dimensional setting as well as to the discrete case. In this work, we present a Conley index theory for a class of discontinuous vector fields, with discontinuity of the first kind. Discontinuous vector fields are frequent in several areas of Science and Engineering and can be expressed as piecewise differentiable vector fields on an n -dimensional compact manifold, M . We consider a Whitney stratification of M and a discontinuous vector field Z on M , where the region of discontinuity, D , is the strata of codimension one. We show the existence of a D -index pair (N, L) and prove that the quotient space N/L depends on the pair chosen, thus defining the D -Conley index as the homotopy type of this quotient space. We present some examples of its calculation. We also use the D -Conley index to show sufficient conditions for the existence of bifurcation points in a one parameter family of discontinuous vector fields. We also present a theory of continuation for Lyapunov D -graphs associated to this class of discontinuous vector fields.

CONTEÚDO

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Índice de Conley Clássico	1
1.2 Sistemas Descontínuos	8
1.3 Estratificação	13
2 D-Índice	15
2.1 Campos Vetoriais Descontínuos \mathfrak{D} -multivaluados	15
2.1.1 Estratificação Σ -Simples de uma Variedade	15
2.1.2 Campo de Vetores Σ -coerente	16
2.2 Regularização Através da Função Distância	18
2.3 Conjuntos Isolantes de D	20
2.4 D -Par Índice	21
2.5 Definição do D -índice	24
2.6 O D -índice para campos descontínuos bidimensionais com tangência	29

3	Detectando Bifurcações Via D-Índice de Conley	31
3.1	Conjuntos Invariantes Isolados Primos	31
3.2	Teorema e Exemplos	35
4	Continuação de D-Grafos	42
4.1	Grafo de Lyapunov	43
4.2	D -Grafo de Lyapunov	45
4.3	Desigualdade de Poincaré-Hopf	47
5	Considerações Finais	52
5.1	Conclusão	52
5.2	Direções Futuras e Trabalhos Relacionados	54
5.2.1	Sistemas Híbridos	54
5.2.2	O Índice de Conley para Inclusões Diferenciáveis e Fluxos Multivaluados	57
A	Detalhamento das Demonstrações de Existência e Invariância de um Par Índice	58
A.1	Existência	58
A.2	Invariância	60
	Bibliografia	63

Introdução

Estamos considerando neste trabalho campos de vetores descontínuos em variedades diferenciáveis. Sistemas dinâmicos associados a tais campos tem origem em equações diferenciais onde falha a unicidade de soluções. O estudo sistemático desses sistemas tiveram um desenvolvimento mais acentuado com trabalhos de Koslova [Ko] e Filippov [Fi], que surgem de forma natural nas áreas de Física e Engenharia. Modelos matemáticos advindos de problemas da teoria do controle, de sistemas mecânicos e da teoria de oscilações não lineares constituem uma fonte de motivação para o desenvolvimento do estudo teórico de sistemas descontínuos, [AVK], [Ts].

Neste trabalho obtemos um invariante topológico de campos de vetores descontínuos onde as discontinuidades estão concentradas numa superfície (estrato) de codimensão um. Com este invariante obtemos resultados de bifurcação, bem como resultados de regularização do campo descontínuo. Melhor dizendo, desenvolvemos uma teoria do índice de Conley para a região de descontinuidade D .

O índice de Conley é uma ferramenta topológica que provê invariantes homológicos e homotópicos para conjuntos invariantes isolados. A teoria de Conley, como é atualmente designada devido a contribuição significativa de C. Conley, tem sido aplicada tanto para provar a existência de soluções bem como para provar a multiplicidade de soluções. A propriedade mais relevante do índice de Conley é sua invariância sob continuação, em particular sob pequenas perturbações.

Inicialmente a teoria de Conley foi desenvolvida para conjuntos invariantes isolados de campos de vetores em espaços compactos generalizando a teoria de Morse para pontos de equilíbrio não degenerados [Co]. Posteriormente esta teoria foi estendida por Rybakowski para semi fluxos em espaços não compacto [Ry] e por Benci (em espaços de dimensão infinita) [Be].

Dados, um fluxo $\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ em uma variedade diferenciável M e um conjunto compacto $\widehat{N} \subset M$, podemos associar a um conjunto invariante maximal

$$S = \text{inv}(\widehat{N}, \varphi) := \{x \in \widehat{N} : \varphi(\mathbb{R}, x) \subset \widehat{N}\}$$

um par de espaços compactos (N, L) , $L \subset N \subset \widehat{N}$, que chamamos de par índice. Definimos o índice de Conley de S , $h(S)$, como o tipo de homotopia do espaço N/L . Assim,

$$h(S) = [N/L, [L]].$$

Em muitas situações é desejável trabalhar com o índice homológico de Conley que denotamos por $CH_*(S)$ e seu rank por h_* .

Neste trabalho, desenvolvemos a teoria do índice de Conley para a região de descontinuidade, $D \subset M$, de um campo de vetores em M com o objetivo de utilizar este índice, tanto em resultados de bifurcação como em resultados de regularização.

Mais especificamente, seja Σ uma estratificação de Whitney de M de forma que $M = \bigcup \overline{V_i^n}$, onde $\overline{V_i^n} = C_i$ são os estratos n -dimensionais de Σ . Seja $Z = (X_1, X_2, \dots, X_r)$, $r \geq 2$, um campo vetorial multivaluado onde $Z|_{C_i} = X_i$ e X_i é transversal ao bordo de C_i . Supomos ainda que cada C_i é uma região atratora ou repulsora e X_i aponta somente para o interior ou exterior de C_i respectivamente. Dizemos que tais campos são Σ -coerentes e os denotamos por $\mathfrak{X}_\Sigma(M)$. Definimos a região D de descontinuidade do campo Z como o fecho do estrato $n - 1$ -dimensional.

Com a finalidade de desenvolver um índice para a região de descontinuidade, procedemos como em Conley [Co] definindo conjuntos que isolam D . Assim, apresentamos o conceito de uma D -vizinhança isolante \widehat{N} bem como de um D -par índice (N, L) , onde $L \subset N \subset \widehat{N}$ e definimos o D -índice de Conley, $\mathfrak{h}(D)$, como o tipo de homotopia do espaço quociente N/L .

Nosso resultado utiliza um método de regularização para campos de vetores descontínuos Z . Esta regularização é definida utilizando a função distância e produz um campo contínuo

\tilde{Z} com a propriedade que toda a região D se torna um conjunto invariante de um fluxo contínuo. Assim obtemos nosso resultado principal.

Dado $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ com região de descontinuidade D , uma D -vizinhança isolante N e uma regularização \tilde{Z} de Z , que preserva os conjuntos de entrada e saída de um D -par índice (N, L) em N . Seja \tilde{S} o conjunto maximal invariante de \tilde{Z} em N , então o D -índice de Conley $\mathfrak{h}(D)$ coincide com o índice de Conley de \tilde{S} , $h(\tilde{S})$.

Nosso trabalho está apresentado nesta tese da seguinte maneira.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos fundamentais da teoria do índice de Conley para o caso contínuo e indicamos alguns passos que mostram a existência e invariância de pares índice. Ainda nesse capítulo, apresentamos os principais conceitos da teoria de sistemas descontínuos e definimos estratificação de Whitney de uma variedade.

No Capítulo 2, definimos uma estratificação Σ -simples de M e os campos vetoriais multivaluados Σ -coerentes. Seguindo Conley, estabelecemos a existência de conjuntos especiais que isolam D com a finalidade definir o D -índice de Conley. Mostramos que o D -índice de Conley está bem definido através dos teoremas da existência e invariância de D -pares índice. Apresentamos o cálculo do D -índice para alguns exemplos.

Nos próximos capítulos apresentamos algumas aplicações, ainda que modestas, do D -índice de Conley tanto na teoria de bifurcação quanto na teoria de regularização de campo de vetores descontínuos. Pretendemos com isto mostrar a grande potencialidade de aplicações do D -índice de Conley nestas direções.

No Capítulo 3, utilizamos o D -índice de Conley para apresentarmos condições suficientes para a existência de pontos de bifurcação em uma família a um parâmetro de campos descontínuos.

No Capítulo 4 adaptamos a teoria dos grafos de Lyapunov para D -grafos, associando a D um vértice no D -grafo. Utilizando os D -grafos, apresentamos uma regularização do grafo a um do tipo Morse.

No Capítulo 5 apresentamos algumas direções futuras, como trabalhos com sistemas híbridos e casos com tangências [BPS]. Também fazemos uma comparação com o trabalho de Kunze sobre o índice para inclusões diferenciais [Ku].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo conceitos básicos da teoria do índice de Conley para campos contínuos, à qual passaremos a nos referir como teoria do índice de Conley clássico. Esse índice proposto por Conley em [Co] é um invariante topológico que generaliza o índice de Morse.

A fim de preparar o leitor para os próximos capítulos, apresentamos também aqui alguns conceitos referentes a campos vetoriais descontínuos, bem como o processo de regularização de tais sistemas definido em [ST] por Sotomayor e Teixeira.

1.1 Índice de Conley Clássico

Dados N, L espaços topológicos tais que L é um subespaço fechado de N , o par ordenado (N, L) é chamado *par topológico*.

Seja um par topológico (N, L) e consideremos a seguinte relação de equivalência,

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in L.$$

Através dessa relação de equivalência o conjunto L é transformado em um ponto, ao qual denotaremos por $[L]$ e que representa a classe de equivalência dos pontos de L pela relação de equivalência \sim .

Definimos o espaço pontuado,

$$(N/L, [L]) := ((N \setminus L) \cup [L], [L]).$$

Se o conjunto L for vazio, temos por convenção,

$$(N/L, [L]) := ((N \cup \{*\}), \{*\}).$$

Definimos a topologia em $(N/L, [L])$ da seguinte maneira. Um conjunto $U \subset N/L$ é aberto se,

- U é aberto em N e $U \cap L = \emptyset$, ou
- o conjunto $(U \cap (N \setminus L)) \cup L$ é aberto em N .

Considere agora uma variedade n -dimensional M e $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ um fluxo contínuo em M . Dizemos que $S \subset M$ é um *conjunto invariante* para o fluxo φ se $\varphi(\mathbb{R}, S) = S$.

Dado um conjunto compacto $N \subset M$, definimos o *conjunto maximal invariante* de N ,

$$\text{inv}(N, \varphi) := \{x \in N : \varphi(\mathbb{R}, x) \subset N\}.$$

Um conjunto compacto $N \subset M$ tal que $\text{inv}(N, \varphi) \subset \text{int}(N)$ é chamado *vizinhança isolante*. Um conjunto S contido em N tal que $S = \text{inv}(N)$, é chamado *conjunto maximal invariante isolado*.

Exemplo 1.1.1. A figura 1.1 mostra uma vizinhança isolante de uma sela hiperbólica no plano.

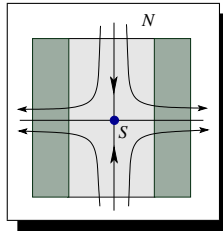


Figura 1.1: $S = \text{inv}(N)$

Um conceito fundamental na teoria do índice de Conley é o de par índice. Para defini-lo, precisamos da definição de invariância positiva.

Seja N um subconjunto compacto em M . Um subconjunto, K , de N é *positivamente invariante em N* se,

$$x \in K, t \geq 0, \varphi([0, t], x) \subset N, \text{ então } \varphi(t, x) \in K.$$

Seja S um conjunto invariante isolado de uma vizinhança \widehat{N} . Dizemos que o par topológico (N, L) , $L \subset N \subset \widehat{N}$, é um *par índice* para S se,

1. $S = \text{inv}(\overline{N \setminus L})$ e $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de S ;
2. L é positivamente invariante em N ;
3. L é um conjunto de saída para N ; isto é, dado $x \in N$ e $t_1 > 0$ tal que $\varphi(t_1, x) \notin N$ então existe $t_0 \in [0, t_1]$ tal que $\varphi([0, t_0], x) \subset N$ e $\varphi(t_0, x) \in L$.

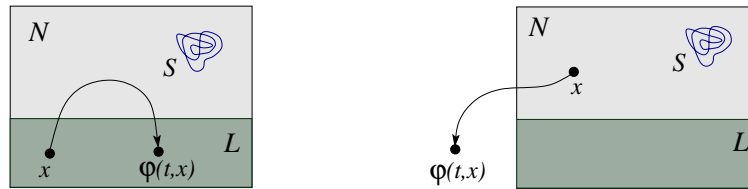


Figura 1.2: Órbitas inadmissíveis no par índice (N, L)

Na Figura 1.2, a esquerda ilustramos uma situação em que a condição 2 da definição de par índice não é satisfeita, a direita uma situação em que a condição 3 não é satisfeita.

Dado um conjunto maximal invariante $S = \text{inv}(\widehat{N})$, é necessário provar a existência de um par índice para S e a invariância de sua escolha, isto é, dados dois pares índice (N_1, L_1) e (N_2, L_2) para S , temos que os espaços quocientes N_1/L_1 e N_2/L_2 são topologicamente equivalentes.

Definição 1.1.2. Seja S um conjunto invariante isolado e (N, L) um par índice para S . Definimos o *índice homotópico de Conley de S* , $h(S)$, como o tipo de homotopia do espaço N/L . Assim,

$$h(S) = [N/L, [L]].$$

Exemplo 1.1.3. Nas Figuras 1.3, 1.4 e 1.5, apresentamos geometricamente o cálculo do índice homotópico de Conley de um ponto fixo atrator, um ponto de sela e um ponto fixo repulsor no plano.

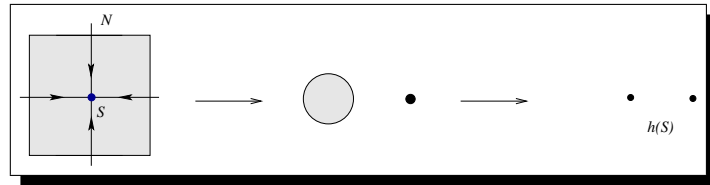


Figura 1.3: O conjunto de saída L é vazio e $h(S) = \Sigma^0$

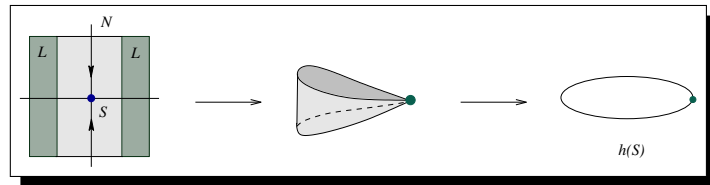


Figura 1.4: $h(S) = \Sigma^1$

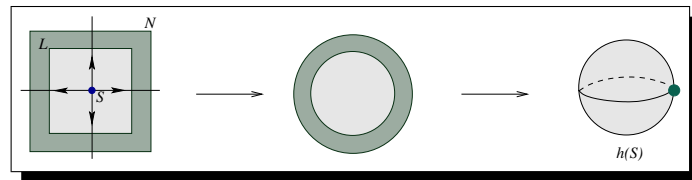


Figura 1.5: $h(S) = \Sigma^2$

Existe um resultado que generaliza esse exemplo e nos diz que o índice homotópico de Conley de um ponto fixo hiperbólico x_o com índice de Morse j é,

$$h(x_o) = \Sigma^j$$

Para finalizar essa seção sobre o índice de Conley clássico, apresentamos os teoremas que garantem tanto a existência de um par índice (N, L) para um conjunto invariante isolado S , quanto a invariância do tipo de homotopia do espaço N/L . A seguir comentamos as idéias gerais por traz das demonstrações de tais teoremas, porém para o leitor interessado na prova

completa, sugerimos ver [So].

A teoria de Conley clássica é desenvolvida para um *fluxo local*, isto é, um conjunto localmente compacto $F \subset M$, tal que para todo $x \in F$, existe uma vizinhança U de x em M e $\epsilon > 0$ tal que $\varphi([0, \epsilon), F \cap U) \subset F$.

Teorema 1.1.4 (Existência de Par Índice). *Sejam $F \subset M$ um fluxo local, $N \subset M$ uma vizinhança isolante do conjunto invariante isolado $S \subset F$ e U uma vizinhança qualquer de S em M . Então existe um par índice (N_1, L_1) para S em F tal que N_1, L_1 são positivamente invariantes em N e $\overline{N_1 \setminus L_1} \subset U$.*

Os conjuntos N_1 e L_1 são construídos como conjuntos positivamente invariantes minimais. Dado $K \subset N$, um *conjunto positivamente invariante minimal* contendo K em N é definido por

$$P(K, N) = \{x \in N : \exists t \geq 0 \text{ com } \varphi([-t, 0], x) \subset N, \varphi(-t, x) \in K\}$$

Uma dificuldade nessa construção está no fato que $P(K, N)$ pode não ser fechado mesmo quando K é fechado, e ainda, seu fecho pode não ser positivamente invariante. Observe na Figura 1.6 que o conjunto $N^- = \{x \in N : \varphi([0, \epsilon), x) \not\subset N \forall \epsilon > 0\}$ não é fechado e seu fecho não é positivamente invariante.

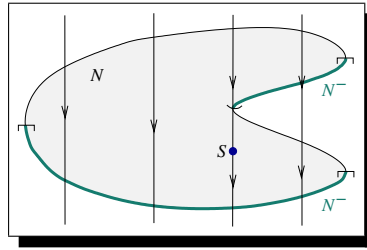


Figura 1.6: N^- não é fechado

Considere os conjuntos $inv^+(N) = \{x \in N : \varphi([0, \infty), x) \subset N\}$ e $inv^-(N) = \{x \in N : \varphi((-\infty, 0], x) \subset N\}$. Tais conjuntos são compactos e $S = Inv^+(N) \cap Inv^-(N)$. Usando argumentos de compacidade, prova-se a existência de vizinhanças U^+ de $Inv^+(N)$ e U^- de $Inv^-(N)$ tais que $cl(U^+ \cap U^-) \subset U \cap int(N)$. Define-se o conjunto

$$L_1 = P(N \setminus U^+, N).$$

Como $N \setminus U^+$ é compacto e $N \setminus U^+ \cap \text{inv}^-(N) = \emptyset$, então L_1 é compacto. Assim, L_1 é um compacto positivamente invariante em N e $L_1 \cap S = \emptyset$.

O conjunto N_1 é definido como $N'_1 \cup L_1$, onde N'_1 é uma vizinhança compacta de $\text{inv}^-(N)$ em N que é positivamente invariante e é construída da seguinte forma:

Primeiramente seja W uma vizinhança compacta em N tal que $\text{Inv}^-(N) \cap W = \emptyset$. Prova-se que dado um conjunto compacto, $K \subset N$, tal que $\text{Inv}^-(N) \subset P(K, N) \subset U \cap (N \setminus W)$, então $P(K, N)$ é compacto. Busca-se então construir um conjunto K com tal propriedade.

Dado x em $\text{inv}^-(N)$, pode-se construir vizinhanças U_x de x , tais que, $U_x \subset U \cap (N \setminus W)$ e permanecem em $U \cap (N \setminus W)$ por um certo tempo positivo. Como $\text{inv}^-(N)$ é compacto, a cobertura $\{U_x\}$ admite uma subcobertura finita $\{U_{x_j}\}$.

Define-se $K = \cup K_j$, onde $K_j = \overline{U_{x_j}} \cap N$. Seja então $N'_1 = P(K, N)$. Por construção, N'_1 está contido em $U \cap (N \setminus W)$, logo é compacto.

Portanto, $N_1 = N'_1 \cup L_1$ é um compacto positivamente invariante com L_1 como conjunto de saída e $\overline{N_1 \setminus L_1} \subset U$, ou seja, (N_1, L_1) é um par índice para S em F .

Para a prova do teorema da invariância, mostra-se que para qualquer conjunto isolado S em um fluxo local F , a coleção

$$I_0 = \{N_1/L_1 : (N_1, L_1) \text{ é um par índice para } S \text{ em } F\}$$

juntamente com I_m (uma certa classe de homotopia de aplicações induzidas de fluxos) é um sistema simples conexo. Um sistema *simples conexo* é uma subcategoria dos espaços pontuados e classes de homotopias de aplicações entre eles, com a propriedade que para quaisquer dois objetos existe um único morfismo entre eles (em cada direção).

Teorema 1.1.5. *Seja um fluxo local $F \subset M$ e seja S um conjunto invariante isolado em F . Então $h(S)$ independe da escolha do par índice e $I(S, X) = (I_0, I_m)$ é um sistema simples conexo.*

Para a demonstração desse teorema, primeiramente dados dois pares índice, (N_1, L_1) e $(\overline{N}_1, \overline{L}_1)$, faz-se necessário definir aplicações contínuas

$$f : N_1/L_1 \times [T, \infty) \longrightarrow \overline{N}_1/\overline{L}_1 \quad (1.1)$$

induzidas pelo fluxo φ , cuja a prova da continuidade é bastante trabalhosa.

Seja $I(S) = I(S, F) = (I_0, I_m)$ onde,

$$I_0 = \{N_1/L_1 : (N_1, L_1) \text{ é um par índice para } S \text{ em } F\}$$

$$I_m = \{[f^t] : N_1/L_1, \bar{N}_1/\bar{L}_1 \in I_0 \text{ e } f^t : N_1/L_1 \rightarrow \bar{N}_1/\bar{L}_1 \text{ são as aplicações induzidas pelo fluxo}\}$$

A aplicação 1.1 garante a existência de uma classe de homotopia de aplicações em I_m entre quaisquer dois espaços $N_1/L_1, \bar{N}_1/\bar{L}_1$ e ainda que $[Id_{N_1/L_1}] \in I_m$. A composição de quaisquer dois morfismos em I_m permanece em I_m e dados dois objetos em I_m , $[f]$ e $[f^*]$, tem-se f homotópica a f^* . Assim, $I(S, F)$ é um sistema simples conexo. Portanto os morfismos em I_m são equivalências de homotopia, isto é, dada $f^t : N_1/L_1 \rightarrow \bar{N}_1/\bar{L}_1$ e $g^t : \bar{N}_1/\bar{L}_1 \rightarrow N_1/L_1$ tem-se $f^t \circ g^t \sim Id_{\bar{N}_1/\bar{L}_1}$ e $g^t \circ f^t \sim Id_{N_1/L_1}$. Portanto $h(S)$ independe da escolha do par índice.

Concluimos a explanação acima observando ao leitor interessado que no apêndice encontra-se um melhor detalhamento das provas dos teoremas 1.1.4 e 1.1.5.

Umas das propriedades mais importantes do índice de Conley é a sua invariância sob continuação. Uma família parametrizada de fluxos em M é uma coleção de fluxos $\{\varphi_t^\lambda | \lambda \in I\}$ indexada por $I = [0, 1]$ tal que $\Phi_t(x, \lambda) = (\varphi_t^\lambda(x), \lambda)$ é um fluxo suave em $M \times I$. Seja S^0 um conjunto invariante para φ_t^0 e S^1 um conjunto invariante para φ_t^1 , dizemos que S^0 e S^1 estão relacionados por continuação se existe um conjunto invariante $\Xi \subset M \times I$ para Φ_t tal que $S^0 = \Xi \cap \{x, 0\}$ e $S^1 = \Xi \cap \{x, 1\}$. Temos ainda que se S^0 e S^1 estão relacionados por continuação, então $h(S^0) = h(S^1)$.

Em muitas situações é desejável trabalhar com o índice homológico de Conley de um conjunto invariante isolado S , que definimos como sendo a homologia “reduzida” do espaço N/L e denotamos por $CH_*(S)$, isto é,

$$CH_*(S) = H_*(N/L).$$

Ainda neste contexto, denotamos por h_* o rank de $CH_*(S)$.

Exemplo 1.1.6. Seja x um ponto crítico hiperbólico de índice de Morse n . Como x é isolado, admite um par índice da forma $(D^n \times D^s, S^{(n-1)} \times D^s)$ e $h(x) \simeq D^n/S^{n-1} \simeq S^n$. Assim,

$$CH_k(x) = H_k(D^n/S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1.2 Sistemas Descontínuos

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ , tendo zero como valor regular. Considere então

$$D = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}.$$

Assuma que D tenha uma única componente conexa, de tal maneira que $\mathbb{R}^n \setminus D$ tenha duas componentes conexas, dadas por $C^+ = f^{-1}(0, \infty)$ e $C^- = f^{-1}(-\infty, 0)$.

Seja χ^r , o *espaço dos campos de vetores* C^r em \mathbb{R}^n , ($r > 1$). Dados $X, Y \in \chi^r$ e f como acima, define-se os *campos de vetores descontínuos* $Z = (X, Y)$ da seguinte maneira,

$$Z(q) = \begin{cases} X(q), & \text{se } f(q) \geq 0 \\ Y(q), & \text{se } f(q) \leq 0. \end{cases}$$

Em D vemos que o campo Z é bivaluado. Denote por $\Omega^r(\mathbb{R}^n, r)$, o *espaço dos campos vetoriais descontínuos de classe* C^r , definidos em \mathbb{R}^n com auxílio da função f .

Uma função C^∞ , $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq -1 \\ 1, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

e $\varphi'(t) > 0$ se $t \in (-1, 1)$ é chamada de *função de transição*.

Uma *regularização a um parâmetro* de Z é uma aproximação do campo descontínuo por uma família a um parâmetro de campo vetoriais contínuos. Apresentamos agora uma regularização a um parâmetro desenvolvida por Sotomayor e Teixeira [ST].

Definição 1.2.1. Uma φ_ϵ *regularização de* $Z = (X, Y) \in \Omega$, é uma família a um parâmetro de campos de vetores Z_ϵ em χ^r , dada por

$$Z_\epsilon(q) = (1 - \varphi_\epsilon(f(q)))Y(q) + \varphi_\epsilon(f(q))X(q),$$

onde $\varphi_\epsilon(t) = \varphi(\frac{t}{\epsilon})$.

A seguir descreveremos a dinâmica nas regiões de descontinuidade e algumas regularizações dos campos descontínuos e as ilustramos em \mathbb{R}^2 .

Definição 1.2.2. Dado $Z = (X, Y) \in \Omega$, seguindo a terminologia em [ST], genericamente distingue-se as seguintes regiões em D :

- *Região de Costura (R.C)* : Constituída dos pontos $p \in D$ tal que

$$(Xf)(p)(Yf)(p) > 0,$$

onde $Xf = X \cdot \nabla f$.

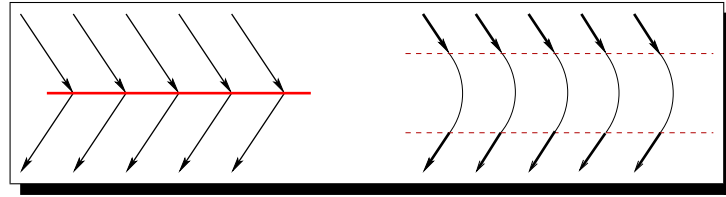


Figura 1.7: Região de costura e sua regularização

- *Região de Escape (R.E)*: Constituída dos pontos $p \in D$ tal que

$$(Xf)(p) > 0 \text{ e } (Yf)(p) < 0.$$

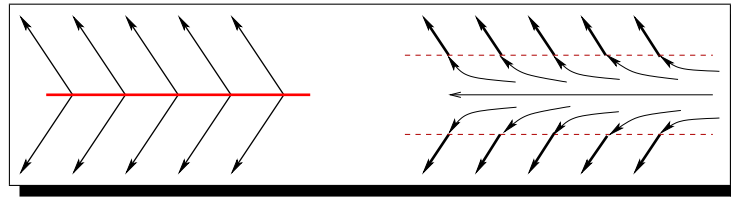


Figura 1.8: Região de escape e sua regularização

- *Região de Deslize (R.D)*: Constituída dos pontos $p \in D$ tal que

$$(Xf)(p) < 0 \text{ e } (Yf)(p) > 0.$$

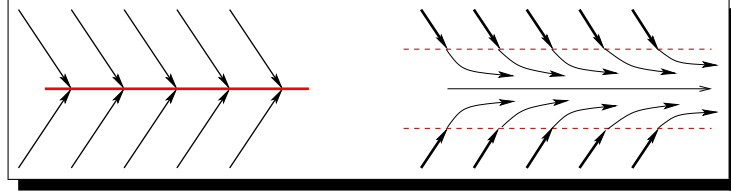


Figura 1.9: Região de deslize e sua regularização

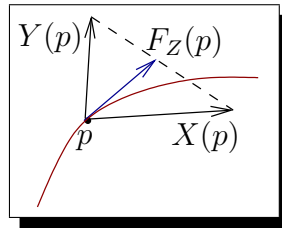
Passaremos a descrever algumas características particulares em campos vetoriais em \mathbb{R}^2 .

As regiões RE , RD e RC são conjuntos abertos e densos em D . Nessas regiões, uma solução $x : [a, b] \rightarrow M$ de $\dot{x} = Z(x)$ é interpretada no sentido de Filippov [Fi], isto é, como uma função absolutamente contínua que satisfaz $\dot{x} = Z(x)$.

Em RD , a solução de Z junto a pontos de D , seguem as órbitas do *campo de vetores deslizante* $F_Z(X, Y)$. Este vetor é tangente a D e está definido em $q \in D$ pelo vetor $F_Z(q) = m - q$, onde m é o ponto tal que o segmento ligando $(q + X(q))$ e $(q + Y(q))$ é tangente a D .

Analogamente, em RE , a solução Z junto a D , seguem as órbitas do campo de vetores $-F_Z(-X, -Y)$.

Em regiões de costura, uma solução passa de uma componente a outra através de D . Note que em regiões de deslize, as soluções permanecem em D por um tempo positivo.

Figura 1.10: Vetor tangente a D , $F_Z(p)$

Definição 1.2.3. Um ponto $p \in D$ é dito um *ponto D-regular* de Z se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $p \in RC$ ou,

2. $p \in R.E$ ou $R.D$, mas $\det[X, Y] \neq 0$ (isto diz que $X(p)$ e $Y(q)$ são linearmente independentes).

Definição 1.2.4. Um ponto $p \in D$ é dito uma *D-dobra* se é um ponto de contato quadrático de X com D (isto é, $Yf(p) \neq 0$, $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$), ou de Y com D (isto é, $Xf(p) \neq 0$, $Yf(p) = 0$ e $Y^2f(p) \neq 0$).

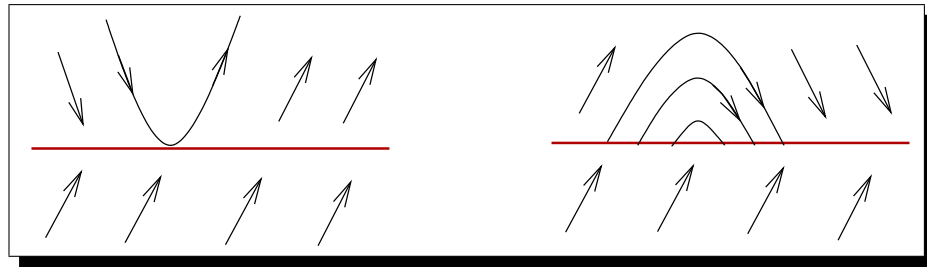


Figura 1.11: Exemplos de dobra

Definição 1.2.5. Um ponto $p \in D$ é dito um *ponto crítico de F_Z* se $Xf(p)Yf(p) < 0$, (isto é, $p \in R.E$ ou $R.D$) e $\det[X, Y] = 0$.

Se $d(\det[X, Y] |_D)(p) \neq 0$, p será dito *ponto crítico hiperbólico*.

Seja p um ponto crítico hiperbólico de F_Z .

- p é do *tipo sela* se $p \in R.D$ e p é um repulsor de F_Z , (isto é, $d(\det[X, Y] |_D)(p) > 0$), ou $p \in R.E$ e p é um atrator de F_Z , (isto é, $d(\det[X, Y] |_D)(p) < 0$).

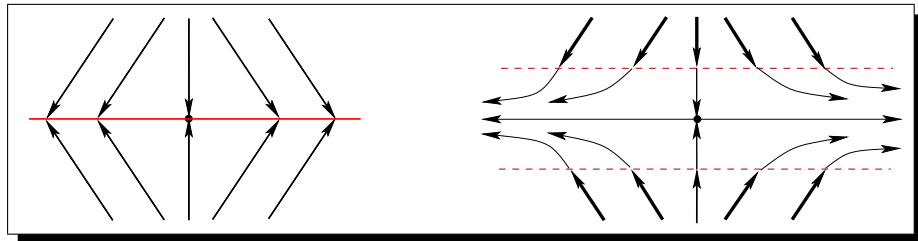


Figura 1.12: Ponto crítico hiperbólico do tipo sela de F_Z e sua regularização

- p é do tipo *nó* se $p \in R.D$ e p é um atrator de F_Z , (isto é, $d(\det[X, Y] |_D)(p) < 0$), ou $p \in R.E$ e p é um repulsor de F_Z , (isto é, $d(\det[X, Y] |_D)(p) > 0$).

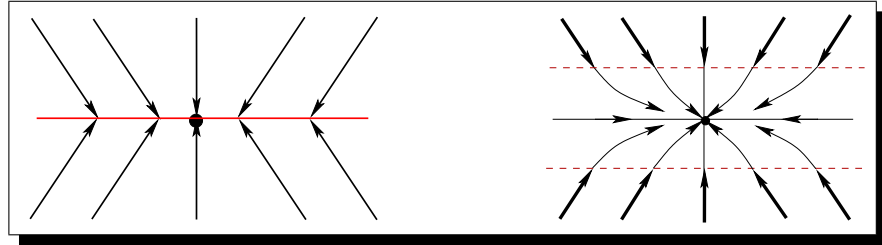


Figura 1.13: Ponto crítico hiperbólico do tipo nó de F_Z e sua regularização

Definição 1.2.6. Um ponto D é uma *D-singularidade elementar* de Z se,

- p é uma D -dobra de Z , ou
- p é um ponto crítico hiperbólico de F_Z .

Definição 1.2.7. Uma curva γ composta por arcos regulares de trajetórias de X em C^+ , e/ou de Y em C^- e/ou de F_Z em D é chamada uma *poli-trajetória* se,

- γ contém arcos de pelo menos dois entre os campos X, Y e F_Z ou é composta por um arco de F_Z ;
- a transição de arcos de trajetória de X para arcos de Y é feita em pontos de costura;
- a transição de arcos de trajetória de X ou de Y para arcos de F_Z é feita através de D -dobras ou de pontos regulares do arco de escape ou do arco de deslize, respeitando-se o sentido dos arcos de trajetória.

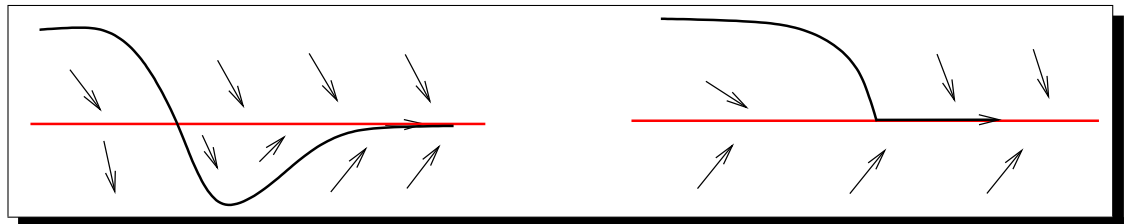


Figura 1.14: Exemplos de poli-trajetórias

1.3 Estratificação

A idéia básica na teoria de estratificação é a decomposição de uma variedade singular em uma coleção de variedades regulares, chamadas de estratos. Apresentamos agora a definição de estratificação bem como as condições de Whitney. Para o leitor interessado em mais detalhes, sugerimos ver [Te], [Bz].

Definição 1.3.1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Dizemos que M é um conjunto estratificado de \mathbb{R}^n , se existir uma família decrescente de subconjuntos fechados (em \mathbb{R}^n), $M = V^r \supset V^{r-1} \supset \dots \supset V^0$, tal que

- a) $V^i - V^{i-1}$ é uma variedade de classe C^2 , diferenciável imersa no \mathbb{R}^n ;
- b) Se $\dim(V^i) = \dim(V^i - V^{i-1})$, então $\dim(V^i) > \dim(V^{i-1})$.

A estratificação, Σ_1 , sobre o conjunto M fica caracterizada pela seqüência $M \supset V^{r-1} \supset \dots \supset V^0$.

Exemplo 1.3.2. Sejam $f(x, y, z) = z(x^2 - y^2) + x^4 + y^4$ e a variedade M definida por f , $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$. Temos as seguintes estratificações para M :

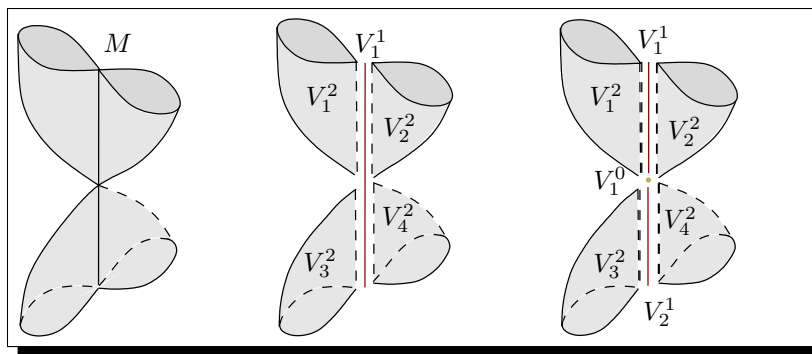


Figura 1.15: Estratificações de M

Uma variedade M pode ter diversas estratificações, porém queremos considerar estratificações onde os estratos satisfaçam certas condições de regularidade, isto é, condições que de certa forma controlam o comportamento dos estratos com fronteira comum. Isto é garantido com as condições de Whitney.

Uma estratificação $M = V^r \supset V^{r-1} \supset \dots \supset V^0$ satisfaz as condições de Whitney se para todo par de estratos, (V, W) , tais que W esteja no fecho de V , todo ponto p de W satisfaz:

- a) Dada qualquer seqüência $\{m_i\}$ de pontos de V tais que $m_i \rightarrow p$ e $T_{m_i}V$ convirja para algum plano $\tau \subset \mathbb{R}^n$, temos que $T_pW \subset \tau$.
- b) Sejam $\{m_i\}$ uma seqüência de pontos em V tais que $m_i \rightarrow p$ e $\{p_i\}$ uma seqüência de pontos em W também convergindo para p . Se $T_{m_i}V$ converge para algum plano $\tau \subset \mathbb{R}^n$, com $m_i \neq p_i$ para todo i e se as secantes $\overline{m_i p_i}$ convergem para alguma reta $\ell \in \mathbb{R}^n$, então temos $\ell \subset \tau$.

Uma estratificação, Σ_1 , que satisfaz as condições **a)** e **b)** é chamada de *estratificação de Whitney*.

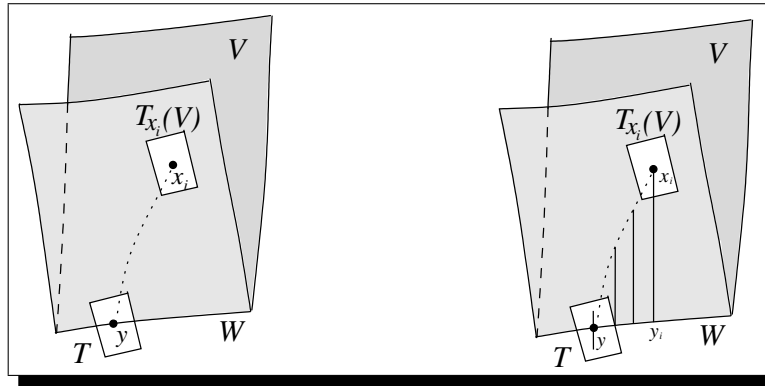


Figura 1.16: Condições (a) e (b) de Whitney

Considere uma estratificação Σ_1 e sejam V e W dois estratos de Σ_1 . Dizemos que V é *incidente* a W em Σ_1 se $V \subset \partial W$.

Definição 1.3.3. Uma *Vizinhança tubular* de um estrato V em M , denotada por $T(V)$, é um aberto em M que contém V e satisfaz:

- i) Se V e W são dois estratos de Σ e $T(V) \cap T(W) \neq \emptyset$, então ou V é incidente a W , ou W é incidente a V , ou $V = W$.
- ii) Sejam V e W dois estratos de Σ_1 tais que V é incidente a W , então $T(Y)$ é munido de uma retração $k_V : T(V) \rightarrow V$.

CAPÍTULO 2

D-Índice

2.1 Campos Vetoriais Descontínuos \mathfrak{D} -multivaluados

Nesta seção apresentamos uma classe de campos descontínuos para a qual desenvolveremos a teoria do D -índice de Conley. Precisamos para isso de uma estratificação especial Σ , que será definida em 2.1.1. Com essa estratificação definimos os campos vetoriais Σ -coerentes.

2.1.1 Estratificação Σ -Simples de uma Variedade

Sejam M uma variedade Riemanniana diferenciável n -dimensional, C^∞ e compacta e V^i uma C^k -subvariedade de M , $k > 1$. Seja Σ uma estratificação de Whitney de M , definida como uma reunião finita de subvariedades $V^n, V^{n-1}, V^{n-2}, \dots, V^{n-s}$, $0 < s \leq n$, onde $V^i = \bigsqcup_{t=1}^{m_i} V_t^i$ e¹ $V^i \subset \bigcup_{t=1}^{m_{i+1}} \overline{\partial V_t^{i+1}}$. Além disso,

$$\dim V^n = n$$

$$\dim V^{n-1} = n - 1$$

$$\vdots$$

$$\dim V^{n-s+1} = n - s + 1$$

$$\bigcup \overline{\partial V_t^n} = V^{n-1} \cup V^{n-2} \cup \dots \cup V^{n-s}$$

$$\bigcup \overline{\partial V_t^{n-1}} = V^{n-2} \cup V^{n-3} \cup \dots \cup V^{n-s}$$

$$\vdots$$

$$\bigcup \overline{\partial V_t^{n-s+1}} = V^{n-s}$$

¹ \sqcup -união disjunta

Essa estratificação será chamada *estratificação Σ -simples* e cada V_i^j de estrato j -dimensional. Veja Figura 2.1

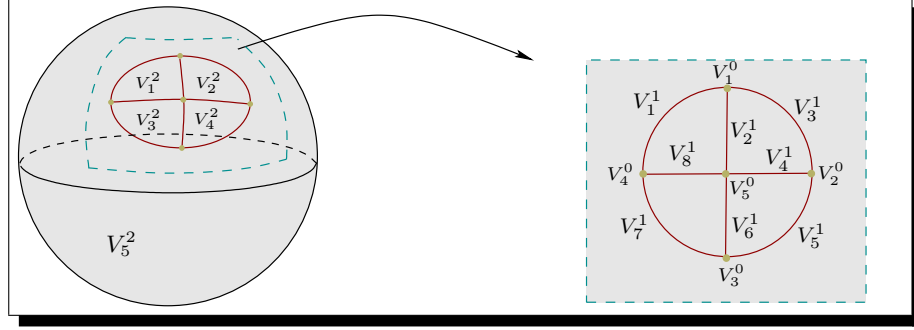


Figura 2.1: Uma estratificação Σ -simples de S^2

Seja Σ uma estratificação de M e V_i^n , $i = \{1, 2, \dots, r\}$ os estratos de dimensão n . Tomando $C_i = \overline{V_i^n}$, temos

$$M = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$$

e $C_i \cap C_j \subset \overline{V_i^{n-1}}$.

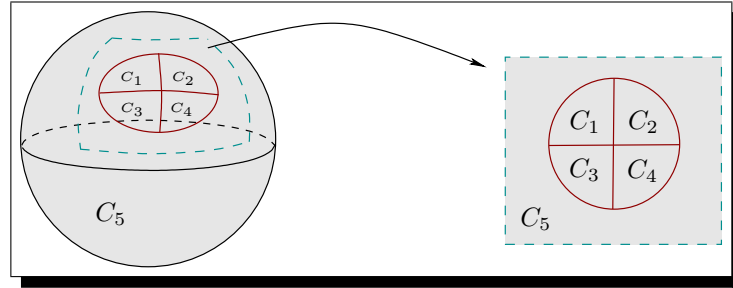


Figura 2.2: $S^2 = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_5$

Seja X_i um campo de vetores C^k em V_i^n , $k \geq 1$, que se estende continuamente a uma pequena vizinhança do fecho de cada componente de V_i^{n-1} contida em $\overline{V_i^n}$.

Apresentamos a seguir a classe de campos de vetores descontínuos para a qual provamos a existência do D -índice de Conley.

2.1.2 Campo de Vetores Σ -coerente

Definição 2.1.1. Fixada uma estratificação Σ sobre M , seja $\mathfrak{D} = \overline{V_i^{n-1}} \in \Sigma$. Um campo

vetorial $Z = (X_1, X_2, \dots, X_r)$, $r \geq 2$, tal que $Z|_{C_i} = X_i$ é chamado um *campo vetorial descontínuo \mathfrak{D} -multivaluado*.

Para cada estratificação Σ de M , denota-se por Ω_Σ o conjunto dos campos vetoriais descontínuos \mathfrak{D} -multivaluados. Vale também observar que a região \mathfrak{D} pode ser a união disjunta de várias componentes.

Definição 2.1.2. Um campo vetorial descontínuo \mathfrak{D} -multivaluado $Z \in \Omega_\Sigma$ é chamado Σ -coerente se, em cada componente C_i , o campo contínuo X_i é transversal ao bordo de C_i , isto é,

$$X_i \pitchfork \overline{V_j^{n-1}}.$$

Além disso, para todo ponto p pertencente a uma componente conexa de ∂C_i , ou $X_i(p)$ aponta para o interior de C_i (campo de vetores ingressante), ou para o exterior de C_i (campo de vetores egressante).

Uma conseqüência da definição é que dado $p \in \mathfrak{D}$ e p pertencente a s componentes C_i , o campo Z é *s-valorado* em p .

Usaremos a seguinte notação.

- $\mathfrak{X}_\Sigma(M) = \{Z \in \Omega_\Sigma : Z \text{ é um campo de vetores } \Sigma\text{-coerente} \}$
- $\mathfrak{X}(M) = \bigcup_{\Sigma} \mathfrak{X}_\Sigma(M)$

Dado um campo vetorial $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$, nosso objetivo é construir um índice para cada componente conexa disjunta do conjunto de descontinuidade $\mathfrak{D} \in \Sigma$. Para simplificar a notação, considere D uma componente conexa de \mathfrak{D} e C_1, C_2, \dots, C_ℓ as componentes C_{i_s} tais que

$$\partial \overline{C_i} \cap D \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \ell \leq r.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $\mathfrak{D} = D$, nas próximas seções.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ tendo zero como valor regular e que define implicitamente o estrato $V_{i,j}^{n-1} \subset D$, onde $V_{i,j}^{n-1} = f^{-1}(0)$ é comum a ambas as fronteiras de C_i e C_j . Seguindo a terminologia em [ST], distingui-se as seguintes regiões em D .

- *Região de Costura (R.C)* : $\{p \in D | (X_i f)(p)(X_j f)(p) > 0, \}$ onde $Xf = X \cdot \nabla f$;

- *Região de Escape (R.E)*: $\{p \in D | (X_i f)(p) > 0 \text{ e } (X_j f)(p) < 0\}$;
- *Região de Deslizamento (R.D)*: $\{p \in D | (X_i f)(p) < 0 \text{ e } (X_j f)(p) > 0\}$.

Em um ponto $p \in D$, onde o campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ é multivaluado, uma curva solução passando por p pode ser multiplamente definida, isto é, pode entrar em várias componentes ou permanecer em D . Veja Figura 2.3. Assim podemos ter vários fluxos φ associados ao campo de vetores Z . Porém no interior de cada componente C_i , o fluxo é contínuo e existe uma única curva solução passando por um dado ponto.

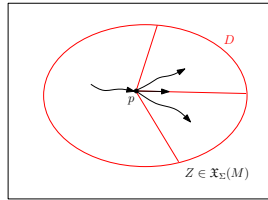


Figura 2.3: Solução multiplamente definida

Para um conjunto compacto $N \subset C_i$, define-se o conjunto invariante maximal de N por,

$$\text{inv}(N) = \text{inv}(N, \varphi_i) = \{x \in N \mid \varphi_i(\mathbb{R}, x) \subset N\}$$

onde φ_i é o fluxo associado ao campo X_i em C_i .

Como os campos de vetores estão em $\mathfrak{X}_\Sigma(M)$, segue que cada C_i possui um fluxo do tipo gradiente transversal à fronteira ∂C_i . Se ∂C_i é conexa, temos que $\text{inv}(C_i) \neq \emptyset$, porém se ∂C_i é desconexa, então $\text{inv}(C_i)$ pode ser vazio.

Observação 2.1.3. De acordo com as hipóteses dadas, X_i não possui pontos críticos em D , isto é, pontos $p \in D$ tais que $X_i(p) = 0$. Assim $\text{inv}(\overline{C_i}) \cap D = \emptyset$. No entanto, podem existir singularidades típicas genéricas contidas no conjunto de descontinuidade D de $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$, como apresentadas em 1.2.

2.2 Regularização Através da Função Distância

Apresentamos na Seção 1.2 um processo de regularização de campos vetoriais descontínuos. Por definição, uma família a um parâmetro de campos de vetores contínuos que se aproximam do campo descontínuo, quando o parâmetro tende a zero. Na atual seção, definimos

um campo de vetores regularizado usando uma função distância que será fundamental na obtenção de um D -par índice.

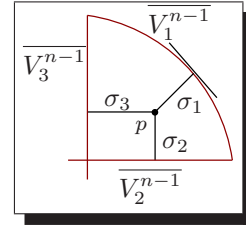
Seja $Z = (X_1, X_2, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$. Assim, sabe-se que $Z(p) = X_i(p)$ se $p \in C_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ainda $V^{n-1} = V_1^{n-1} \cup V_2^{n-1} \cup \dots \cup V_\ell^{n-1}$. Logo, se C_j é uma componente de M , segue que $\partial C_j = \overline{V_{i_1}^{n-1}} \cup \overline{V_{i_2}^{n-1}} \cup \dots \cup \overline{V_{i_s}^{n-1}}$.

Dado $p \in C_j$, seja

$$\sigma_i(p) = d(p, \overline{V_i^{n-1}}), \quad i \in \{i_1, i_2, \dots, i_s\}.$$

Seja então a função distância

$$\sigma(p) = \min\{\sigma_i(p) : i \in \{i_1, i_2, \dots, i_s\}\}.$$



Definamos agora o campo de vetores regularizado através da função distância por,

$$\tilde{Z}(p) = \sigma^2(p)Z(p).$$

Este campo de vetores \tilde{Z} determina um fluxo contínuo garantido pela compacidade das componentes. Ainda mais, \tilde{Z} restrito a qualquer vizinhança de D , respeita a direção do campo de vetores Z exceto nos pontos da região de descontinuidade D . Dessa maneira, durante o processo de regularização, nenhum novo conjunto invariante não vazio surge em $M - D$.

Se p pertence a D , segue que $\tilde{Z}(p) = 0$, ou seja, a região de descontinuidade D torna-se um conjunto de singularidades para o novo campo de vetores, \tilde{Z} . Assim, $\tilde{Z}(p) = 0$ se, e somente se, $p \in D$ ou $Z(p) = 0$.

Esse novo campo de vetores regularizado será utilizado para mostrar a invariância dos D -pares índice. Dinamicamente, esse novo campo de vetores \tilde{Z} não é de muito interesse, já que muitas informações são perdidas após a regularização.

Exemplo 2.2.1. Numa região de deslize, tem-se a definição do campo F_Z , que pode possuir uma dinâmica rica, porém na regularização pela função distância, essa região é de singularidade.

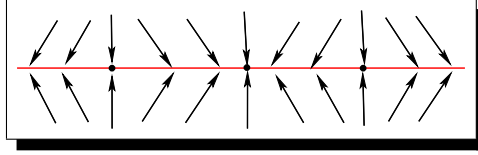


Figura 2.4: O campo deslizante F_Z contém pontos críticos hiperbólicos

2.3 Conjuntos Isolantes de D

Serão dadas agora definições de conjuntos especiais que isolam a região de descontinuidade D para cada $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$.

Definição 2.3.1. Um conjunto compacto $N \subset M$ tal que

- $D \subset \text{int}(N)$,
- $\text{inv}(\overline{N \cap C_i}, \varphi_i) = \emptyset$.

será denominado *D -vizinhança isolante*.

A motivação dessa definição é querermos que D seja tratado como um conjunto maximal invariante de alguma vizinhança. A segunda condição foi imposta com o objetivo de não haver conjuntos invariantes de Z em $N \setminus D$.

Um conjunto B tal que $D \subset \text{int}(B)$ e $\text{inv}(\overline{B \cap C_i}) = \emptyset$ é chamado um *D -bloco isolante* se para qualquer $p \in \partial B$ se verifica que $\varphi([-T, T], p) \not\subset B$ para todo $T > 0$ e o conjunto

$$B^- = \{x \in B : \varphi([0, T], x) \not\subset B, \forall T > 0\}$$

é fechado.

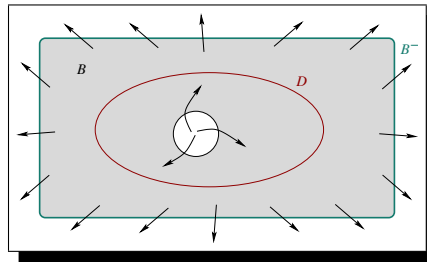


Figura 2.5: D -bloco isolante

Um D -bloco é uma D -vizinhança isolante especial.

2.4 D -Par Índice

A definição do índice de Conley depende diretamente da definição e existência de pares índice. Logo uma definição de par índice para a região D torna-se necessária já que se busca definir o índice para o campo descontínuo na região D .

Definição 2.4.1. Dado um campo vetorial $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$, seja D uma região de descontinuidade como definida anteriormente. Um par de espaços compactos (N, L) , onde $L \subset N$ é chamado um D -par índice associado a Z , se as seguintes condições são satisfeitas.

1. $\overline{N \setminus L}$ é uma D -vizinhança isolante.
2. L é positivamente invariante em N , isto é, dados $x \in L$ e um fluxo φ associado a Z tal que $\varphi([0, t], x) \subset N$ então $\varphi([0, t], x) \subset L$, onde $\varphi(t, x) := \varphi_i(t, x)$, para $\varphi([0, t], x) \subset C_i$.
3. L é um conjunto de saída para o fluxo em N ; isto é, dado $x \in N$ e $t_1 > 0$ tal que $\varphi(t_1, x) \notin N$ então existe $t_0 \in [0, t_1]$ tal que $\varphi([0, t_0], x) \subset N$ e $\varphi(t_0, x) \in L$.

Definição 2.4.2. Dado um D -par índice (N, L) associado ao campo $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$, dizemos que uma regularização \tilde{Z} de Z preserva os conjuntos de entrada e saída de (N, L) se as condições 2 e 3 da definição 2.4.1 são válidas para \tilde{Z} .

Teorema 2.4.3 (Existência). *Dada uma D -vizinhança \hat{N} , existe um D -par índice (N, L) em \hat{N} .*

Demonstração: Seja φ um fluxo associado a Z . Seja T uma vizinhança tubular em \hat{N} do estrato $V^{n-1} \in \Sigma$, tal que o fluxo é transversal ao bordo dessa vizinhança. Como $V^{n-1} \subseteq D = \overline{V^{n-1}}$, segue que $D \subset \text{int}(T)$. Por hipótese, o campo de vetores Z é transversal ao bordo de cada componente C_i . Mais ainda, o campo de vetores Z é ingressante ou egressante em cada componente por definição. Isso garante que estão bem definidos em T conjuntos de entrada e de saída.

Sem perda de generalidade, seja C_j uma componente onde o campo Z é ingressante. Seja L_j uma vizinhança compacta de $(\partial T \cap C_j)$ tal que $L_j \cap D = \emptyset$ e $X_j \pitchfork \partial L_j$ (tal L_j existe, pois, X_j é contínuo e transversal ao bordo de T). Se $N = T \cap \hat{N}$ e $L = \cup L_j$ (caso todas

componentes C_j sejam egressantes, tome $L = \emptyset$), então o par (N, L) é um D -par índice. De fato,

- $D \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$, pois por hipótese, $L_j \cap D = \emptyset$.
- Seja $x \in L$, com $\varphi([0, t], x) \subset N, t \geq 0$. Como $L = \cup L_j$, existe j_o tal que $x \in L_{j_o}$ e $\varphi|_{C_{j_o}} = \varphi_{j_o}$ para qualquer φ associada a Z . Pela forma como T foi construído e pelo fato do campo de vetores Z ser ingressante em C_{j_o} , segue que $\varphi_{j_o}([0, t], x) \subset L_{j_o}$, logo $\varphi([0, t], x) \subset L$.
- Sejam $x \in N \setminus D$ e $t_1 > 0$ tais que $\varphi(t_1, x) \notin N$. Já que $M^n = C_1, \dots, C_r$, existe ao menos um $i_o \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\varphi(t_1, x) \in C_{i_o} \setminus N$. Em C_{i_o} , $\varphi = \varphi_{i_o}$ e existe $\bar{x} \in (D \cap C_{i_o})$ e $t_1 > 0$ tais que $\varphi(t_1, x) = \varphi_{i_o}(\bar{t}_1, \bar{x})$. Como φ_{i_o} é contínuo e segue na direção interior da componente C_{i_o} , existe $\bar{t}_o \in [0, \bar{t}_1]$ tal que $\varphi_{i_o}([0, \bar{t}_o], \bar{x}) \subset N$ e $\varphi_{i_o}(\bar{t}_o, \bar{x}) \in L_{i_o}$. Segue então que existe $t_o \in [0, t_1]$ tal que $\varphi(t_o, x) = \varphi_{i_o}(\bar{t}_o, \bar{x})$. Assim $\varphi([0, t_o], x) \subset N$ e $\varphi(t_o, x) \in L$. Note que se $x \in D$ e existe $t_1 > 0$ tal que $\varphi(t_1, x) \notin N$, fazemos $x = \bar{x}$ e a prova segue.

Portanto, (N, L) assim construído é um D -par índice em \hat{N} . □

Proposição 2.4.4. *Seja $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ com \hat{N} uma D -vizinhança isolante e \tilde{Z} um campo de vetores regularizado através da função distância. Se $N \subset \hat{N}$ e (N, L) é um par índice para $S_D = \{p \in \hat{N} : \tilde{Z}(p) = 0\}$, então (N, L) é um D -par índice associado a Z .*

Demonstração: É necessário mostrar que são válidas as três condições da definição 2.4.1

- $D \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$, pois, como $\text{inv}(\hat{N}, \varphi) = \emptyset$ temos $S_D = D$ e $S_D \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$.
- Vamos mostrar agora que dado $x \in L$ e $t > 0$ tal que $\varphi([0, t], x) \subset N$, então $\varphi([0, t], x) \subset L$. Como (N, L) é um par índice para $\tilde{\varphi}$, temos que $x \in L$ e $\tilde{t} > 0$ tal que $\tilde{\varphi}([0, \tilde{t}], x) \subset L$. Como a regularização através da função distância não muda a direção do fluxo, então para $t > 0$ temos que $\varphi([0, t], x) \subset (C_j \cap N) \setminus D$ para algum j e assim existe um t^* tal que $\varphi([0, t], x) = \tilde{\varphi}([0, t^*], x)$. Assim, como $\tilde{\varphi}([0, t^*], x) \subset L$ temos que $\varphi([0, t], x) \subset L$.

- Dado $x \in N$ e $t_1 > 0$ tais que $\varphi(t_1, x) \notin N$, é preciso mostrar que existe $t_o \in [0, t_1]$ tal que $\varphi([0, t_o], x) \subset N$ e $\varphi(t_o, x) \in L$. Por hipótese vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi(t_1, x) \in C_{j_o}$. Suponha que $x \in C_{j_o}$. Então existe $\tilde{t}_1 > 0$ tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_1, x) = \varphi(t_1, x)$. Usando o fato que (N, L) é par índice para S_D , existe $\tilde{t}_o \in [0, \tilde{t}_1]$ tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_o, x) \in L$. Pela continuidade de φ em C_{j_o} , existe $t_o \in [0, t_1]$ tal que $\varphi(t_o, x) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}_o, x) \in L$. Suponha agora que $x \in C_{j_1} \neq C_{j_o}$. Então existe $t_2 \in (0, t_1)$ tal que $y = \varphi(t_2, x) \in C_{j_o} \cap N$. Usando os mesmos argumentos do caso anterior, encontra-se $t_3 \in [t_2, t_1]$ tal que $\varphi(t_3, y) \in L$, ou seja, existe $t_o = t_2 + t_3 \in [0, t_1]$ tal que $\varphi(t_o, x) \in L$. \square

Vale observar que o teorema de existência de D -par índice segue de maneira direta da proposição 2.4.4. Seja \hat{N} uma D -vizinhança isolante. Como \hat{N} também é vizinhança isolante para S_D com relação ao fluxo contínuo $\tilde{\varphi}$, segue do teorema de existência de par índice que existe um par índice (N, L) em \hat{N} para S_D . Pela proposição 2.4.4, (N, L) é um D -par índice referente ao fluxo φ . Portanto, dado uma D -vizinhança \hat{N} , é sempre possível encontrar um D -par índice contido em \hat{N} .

Vamos agora mostrar que o quociente N/L independe do D -par índice, (N, L) , utilizado.

Teorema 2.4.5 (Equivalência de D -par índice). *Sejam (N, L) e (\bar{N}, \bar{L}) dois D -pares índice associados a $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$. Então os quocientes N/L e \bar{N}/\bar{L} são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração: É necessário mostrar que o tipo de homotopia de N/L independe do D -par índice escolhido. Primeiramente vamos mostrar que se (N, L) é um D -par índice em relação ao campo descontínuo multivaluado $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$, então (N, L) é um par índice para $S_D = \{p \in N | \tilde{Z}(p) = 0\}$ em relação ao novo campo regularizado pela função distância \tilde{Z} .

De fato, dado um par índice (N, L) com relação ao campo Z , temos

- Como $S_D = D$ e $D \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$, segue que $\overline{N \setminus L}$ é vizinhança isolante para S_D em relação a \tilde{Z} .
- Sejam $x \in L$ e $\tilde{t} > 0$ tais que $\tilde{\varphi}([0, \tilde{t}], x) \subset N$. Considere $t > 0$ tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{t}, x) = \varphi(t, x)$, assim $\varphi([0, t], x) \subset N$ e $x \in L$. Como L é positivamente invariante com relação a φ ,

segue que $\varphi([0, t], x) \subset L$. Logo $\tilde{\varphi}([0, \tilde{t}], x) \subset L$. Ou seja, L também é positivamente invariante com relação a $\tilde{\varphi}$.

- Seja $x \in N$ e $\tilde{t}_1 > 0$ tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_1, x) \notin N$. Seja $t_1 > 0$ tal que $\varphi(t_1, x) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1, x)$. Como L é conjunto de saída referente ao fluxo φ , segue que existe $t_0 \in [0, t_1]$ tal que $\varphi([0, t_0], x) \subset N$ e $\varphi(t_0, x) \in L$. Considere \tilde{t}_0 tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0, x) = \varphi(t_0, x)$, então $\tilde{t}_0 \in [0, \tilde{t}_1]$, $\tilde{\varphi}([0, \tilde{t}_0], x) \subset N$ e $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0, x) = \varphi(t_0, x) \in L$. Logo L é conjunto de saída em relação ao fluxo $\tilde{\varphi}$.

Logo, segue que (N, L) é par índice para S_D em relação ao campo \tilde{Z} .

Assim dados dois D -pares índice (N, L) e (\bar{N}, \bar{L}) associados ao campo Z , provamos que (N, L) e (\bar{N}, \bar{L}) são pares índice para S_D . Pelo teorema clássico da invariância para fluxos contínuos segue que $N/L \simeq \bar{N}/\bar{L}$. Ou seja, a invariância é válida para D -pares índice. \square

2.5 Definição do D -índice

Definição 2.5.1. Sejam $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ com região de descontinuidade D e (N, L) um D -par índice associado a Z . O D -índice de Conley é definido como o tipo de homotopia do espaço N/L , e é denotado por,

$$\mathfrak{h}(D) = \mathfrak{h}(D, \varphi) \sim (N/L, [L]).$$

Pelos resultados das seções anteriores, temos que o quociente N/L independe do D -par índice escolhido, logo $\mathfrak{h}(D)$ está bem definido.

Teorema 2.5.2. Dado um campo de vetores descontínuo $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ em M , seja D sua região de descontinuidade e N uma D -vizinhança isolante qualquer. Suponha que \tilde{Z} é uma regularização que preserva os conjuntos de entrada e saída de um D -par índice (N_1, L_1) em N e \tilde{S} o conjunto invariante maximal em N . Então o D -índice de Conley $\mathfrak{h}(D)$ é o índice de Conley de \tilde{S} , $h(\tilde{S})$.

Demonstração: Por hipótese \tilde{Z} preserva os conjuntos de entrada e saída do D -par índice (N_1, L_1) . Se \tilde{S} é o conjunto maximal invariante de $\tilde{\varphi}$ (fluxo associado a \tilde{Z}) em N_1 , segue que (N_1, L_1) é um par índice para \tilde{S} . Assim, $\mathfrak{h}(D)$ e $h(\tilde{S})$ são por definição o tipo de homotopia do espaço quociente N_1/L_1 . Ou seja, $\mathfrak{h}(D) = h(\tilde{S})$. \square

Exemplo 2.5.3. Considere em $M = S^2$ a estratificação Σ apresentada na Figura 2.1. Suponha que o campo Z possua em C_1, C_2 e C_4 conjuntos invariantes atratores e em C_3 e C_5 conjuntos invariantes repulsores. Tome uma D -vizinhança N como mostra a Figura 2.6.

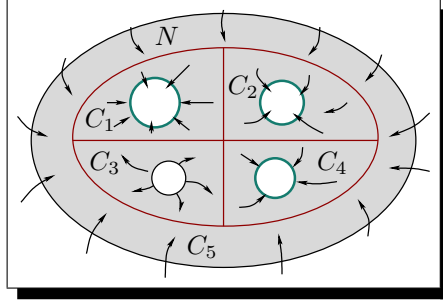


Figura 2.6: D -vizinhança N

Seja $L = \bigcup_{i=\{1,2,4\}} (\partial N \cap C_i)$. O par (N, L) assim definido é um D -par índice. Assim, $\mathfrak{h}(D) = [N/L]$ e $[N/L]$ é um bouquet de três folhas. Veja na Figura 2.7 uma apresentação geométrica do cálculo do D -índice de Conley.

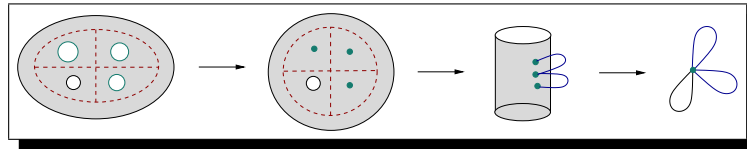


Figura 2.7: Cálculo do D -índice de Conley

Exemplo 2.5.4. [Campo na esfera]

Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera em \mathbb{R}^3 . Considere a estratificação Σ tal que $D = \{(x, y, z) \in S^2 : |x| = |y|\}$ é o fecho de um estrato 1-dimensional. Note que $S^2 \setminus D$ é formado por quatro regiões disjuntas, a saber,

- $S_1 = \{(x, y, z) \in S^2 : x > |y|\}$
- $S_2 = \{(x, y, z) \in S^2 : y > |x|\}$
- $S_3 = \{(x, y, z) \in S^2 : x < -|y|\}$
- $S_4 = \{(x, y, z) \in S^2 : y < -|x|\}$.

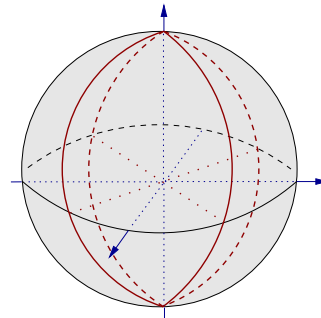


Figura 2.8:
Regiões
da esfera

As componentes S_1, S_2, S_3 e S_4 são os estratos 2-dimensionais e $\{(0, 0, 1)\}$ e $\{(0, 0, -1)\}$ são os estratos 0-dimensionais de Σ .

Suponha em S_1 o campo vetorial $X_1(x, y, z) = (-(y^2 + z^2), xy, xz)$. Note que o ponto $p_1 = (1, 0, 0)$ é o único ponto crítico em S_1 e é um repulsor.

Em S_2 , seja o campo vetorial $X_2(x, y, z) = (-xy, x^2 + z^2, -yz)$. O ponto $p_2 = (0, 1, 0)$ é o único ponto crítico em S_2 e é um atrator.

Na componente S_3 considere o campo vetorial $X_3(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$ e observe que o ponto $p_3 = (0, 0, -1)$ é o único ponto crítico em S_3 e é também um repulsor.

Em S_4 tome o campo vetorial $X_4(x, y, z) = (xy, -(x^2 + z^2), yz)$. O ponto $p_4 = (0, -1, 0)$ é o único ponto crítico em S_4 e é um atrator.

Agora, considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \bullet B_1 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\} & \bullet B_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 : y \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\} \\ \bullet B_3 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x \leq -\frac{2\sqrt{2}}{3}\} & \bullet B_4 &= \{(x, y, z) \in S^2 : y \leq -\frac{2\sqrt{2}}{3}\}, \end{aligned}$$

onde os valores numéricos são calculados para que p_i pertença ao interior do disco B_i em S^2 , $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

Assim esses conjuntos B_1, B_2, B_3 e B_4 são blocos isolantes para seus respectivos conjuntos invariantes maximais $\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}$ e satisfazem $B_i \cap D = \emptyset$, $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

Se $N = S^2 \setminus \{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4\}$, então N é uma D -vizinhança isolante. Com o objetivo de construir um D -par índice, considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \bullet L_1 &= \{(x, y, z) \in S^2 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\} & \bullet L_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\} \\ \bullet L_3 &= \{(x, y, z) \in S^2 : -\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\} & \bullet L_4 &= \{(x, y, z) \in S^2 : -\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\}. \end{aligned}$$

Como p_1 e p_3 são repulsores, segue que L_1 e L_3 são conjuntos de entrada de N e analogamente L_2 e L_4 são conjuntos de saída de N . Assim, se $L = L_2 \cup L_4$, então o par (N, L) é um D -par índice.

Como $\mathfrak{h}(D) = [N/L, [L]]$, temos $\mathfrak{h}(D)$ um “bouquet de dois círculos”.

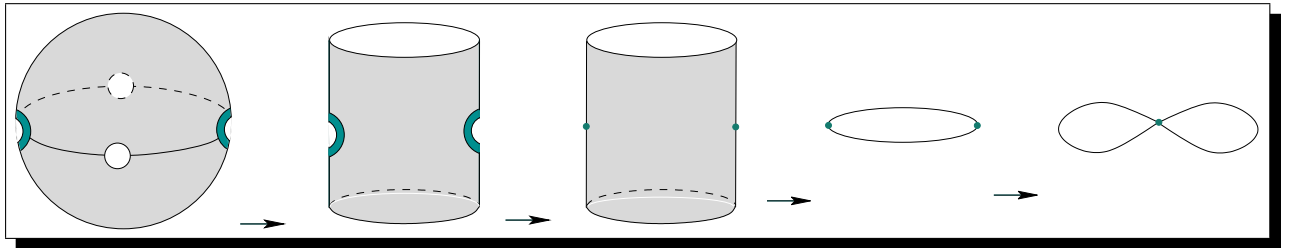


Figura 2.9: Cálculo geométrico do índice $\mathfrak{h}(D)$

Nota-se então que um campo regularizado associado a $Z(X_1, X_2, X_3, X_4)$ possui pelo

menos duas selas.

Exemplo 2.5.5. [Campo no Toro]

Considere uma estratificação, Σ , do toro 2-dimensional T^2 como mostrado na Figura 2.10 e um campo de vetores descontínuos $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(T^2)$ como na Figura 2.11.

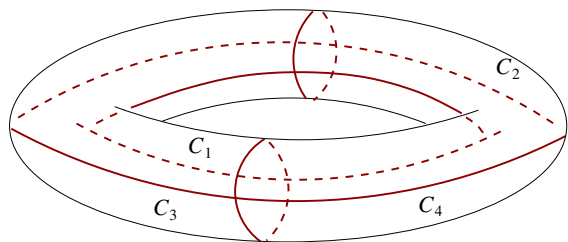


Figura 2.10: Estratificação Σ do toro T^2

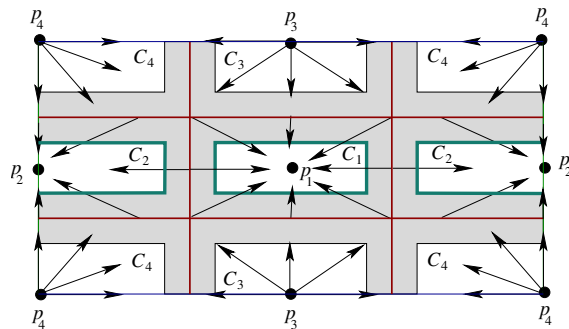


Figura 2.11: $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(T^2)$

Note que a região de descontinuidade consiste de quatro círculos de tal maneira que o toro fica dividido de quatro componentes conexas disjuntas conforme indicado na Figura(2.10). Nas componentes C_1 e C_2 , Z é ingressante. Enquanto nas componentes C_3 e C_4 , Z é egressante.

Seja N uma D -vizinhança isolante como mostrada na região sombreada da Figura 2.11. Note que, se $L_1 = \partial N \cap C_1$, $L_2 = \partial N \cap C_2$ e $L = L_1 \cup L_2$ então o par (N, L) é um D -par índice associado a Z . Assim o D -índice de Conley $\mathfrak{h}(D) = [N/L]$ consiste de um bouquet de quatro círculos.

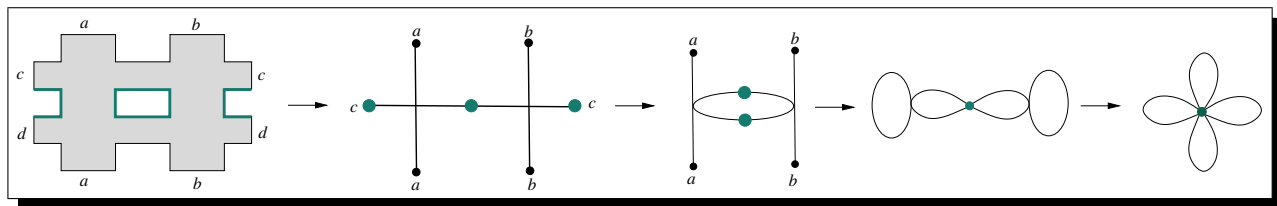


Figura 2.12: Cálculo do índice da região D

No próximo exemplo apresentamos uma região de descontinuidade desconexa.

Exemplo 2.5.6. Considere uma estratificação Σ de um toro e um campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(T)$ definido como na Figura 2.13. Note que a região de descontinuidade \mathfrak{D} é desconexa,

$\mathfrak{D} = D_1 \cup D_2$, e nas componentes C_i , $i = \{1, 2\}$ o campo de vetores X_i é egressante em D_1 e é ingressante em D_2 .

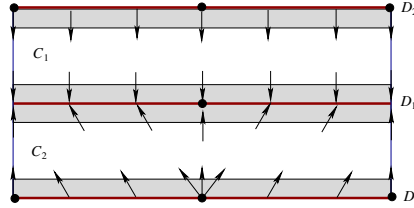


Figura 2.13: Região de descontinuidade desconexa

Em uma pequena vizinhança tubular N_1 de D_1 o campo Z é ingressante, enquanto em uma vizinhança tubular N_2 de D_2 o campo Z é egressante. As Figuras 2.14 e 2.15 mostram o cálculo geométrico do D_1 -índice de Conley e do D_2 -índice de Conley.

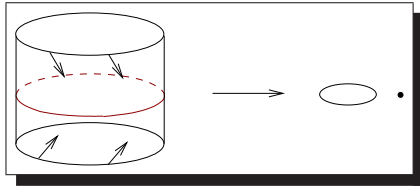


Figura 2.14: $h_0 = 1$ and $h_1 = 1$

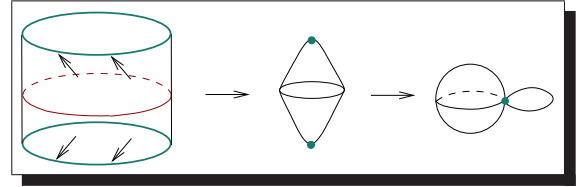


Figura 2.15: $h_1 = 1$ and $h_2 = 1$

Segue do cálculo acima que em uma vizinhança tubular N_1 de D_1 , uma regularização \tilde{Z} de Z

- possui uma sela e um poço em N_1 , ou
- possui uma órbita periódica atratora em N_1 .

Na vizinhança tubular N_2 de D_2 , \tilde{Z}

- possui uma sela e uma fonte em N_2 , ou
- possui uma órbita periódica repulsora em N_2 .

2.6 O D -índice para campos descontínuos bidimensionais com tangência

Vamos considerar nesta seção campos vetoriais D -multivaluados com um tipo específico de tangência em D .

Seja M uma variedade bidimensional. Dado um campo $Z = (X_1, \dots, X_k)$ em $\Omega_\Sigma(M)$, seja $V_{i,j}$ um estrato unidimensional comum as componentes C_i e C_j . Dizemos que Z possui *tangência interna* em $p \in V_{i,j}$ com relação a C_i se p é um ponto de contato quadrático de X_i com $V_{i,j} \subset D$ e a órbita $\gamma(p)$ de X_i numa vizinhança de p em $\overline{V_{i,j}}$ satisfaz $\gamma(p) \cap \text{int}(C_i) \neq \emptyset$. Analogamente dizemos que Z possui *tangência externa* em $p \in V_{i,j}$ com relação a C_i se p é um ponto de contato quadrático de X_i com $V_{i,j} \subset D$ e a órbita $\gamma(p)$ de X_i numa vizinhança de p em $\overline{V_{i,j}}$ satisfaz $\gamma(p) \cap \text{int}(C_i) = \emptyset$. Veja Figura 2.16.



Figura 2.16: Dobra interna e dobra externa

Denotamos por $\Omega_\Sigma^+(M)$ o conjunto dos campos vetoriais multivaluados em $\Omega_\Sigma(M)$ que possuem tangência interna em D .

Sejam p e q dois pontos de tangência interna em relação a C_i . Dizemos que p e q são consecutivos se entre p e q existe um caminho contínuo por partes em $D \cap C_i$ tal que nenhum ponto nesse caminho é ponto de tangência interna em relação a C_i .

Vamos denotar por $\mathfrak{X}_\Sigma^+(M)$ o conjunto dos campos vetoriais $Z \in \Omega_\Sigma^+(M)$ que satisfazem as seguintes condições abaixo:

- i) entre dois pontos consecutivos de tangência interna em relação a C_i , ou Z é ingressante ou Z é egressante em C_i
- ii) se $p \in V^0 \cap C_i$ e se U_p é uma vizinhança de p em M , tal que $U_p \cap D$ não contém pontos de tangência interior relativa a C_j , então ou Z é ingressante em $C_j \cap D \cap U(p)$ ou Z é

egressante em $C_j \cap D \cap U(p)$.

Proposição 2.6.1. *Se $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma^+(M)$, então a teoria do D -índice de Conley pode ser aplicada para Z .*

Demonstração: Sejam N uma vizinhança tubular de D e p é ponto de tangência interna relativo a C_i . Vamos considerar novamente \tilde{Z} o campo regularizado através da função distância. Como p é ponto de tangência interna, existe um ponto \tilde{p} tal que $\tilde{X}_j(\tilde{p}) = \tilde{Z}|_{C_j}(\tilde{p})$ é tangente a ∂N . Sabemos que entre dois pontos de tangência o campo Z ou é ingressante ou é egressante. Logo, temos que o conjunto de saída é fechado, pois \tilde{p} pertence ao conjunto de saída. Assim, são válidos os teoremas de existência e invariância de pares índice, 1.1.4 e 1.1.5, para \tilde{Z} . Neste contexto, o D -índice de Conley está bem definido para $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma^+(M)$. \square

Exemplo 2.6.2. Considere o campo Z como na Figura 2.17.

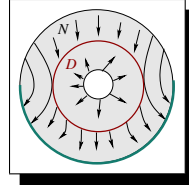


Figura 2.17: $\mathfrak{h}(D)$ = círculo pontuado

O círculo pontuado é também o índice de Conley de uma sela. Observe que a φ_ϵ -regularização desse campo nessa região possui um ponto crítico do tipo sela.

Exemplo 2.6.3. Se tivermos tangências externas como mostra a Figura 2.18,

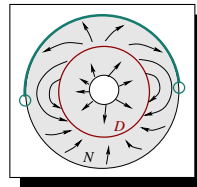


Figura 2.18: $\mathfrak{h}(D)$ = círculo pontuado

o conjunto de saída não é fechado e portanto, não é possível calcular o D -índice de Conley.

CAPÍTULO 3

Detectando Bifurcações Via D -Índice de Conley

Em [FX], utilizando o índice de Conley clássico, são apresentadas condições suficientes para existência de pontos de bifurcações de uma família a um parâmetro de fluxos em um espaço métrico compacto. Neste capítulo, utilizando o D -índice de Conley apresentamos condições de existência de pontos de bifurcações para certas classes de campos descontínuos.

3.1 Conjuntos Invariantes Isolados Primos

Nesta seção estabeleceremos conceitos básicos para enunciar o teorema 3.2.3 de bifurcação utilizando o D -índice de Conley e faremos uma breve explanação do resultado de bifurcação para fluxos encontrado em [FX].

Vamos considerar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e φ um fluxo em Ω .

Definição 3.1.1. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *conjunto invariante isolado primo* para o fluxo φ , se:

- S é um conjunto invariante isolado, em uma vizinhança isolante N , para φ ,

- para cada subconjunto próprio S' de S , $S' \neq \emptyset$, temos que S' não é conjunto invariante isolado, em $N' \subset N$, para φ .

Exemplo 3.1.2. A Figura 3.1 mostra o retrato de fase de um campo vetorial em \mathbb{R}^2 que ilustra a Definição 3.1.1. Temos que $\{P_1\}$ e $\{P_2\}$ são conjuntos invariantes isolados primos para o fluxo associado ao campo vetorial. A órbita de P_1 a P_2 juntamente com os pontos $\{P_1\}$ e $\{P_2\}$ é um conjunto invariante isolado para uma vizinhança isolante N , porém não é primo, pois $\{P_1\}$ é um conjunto invariante isolado em uma vizinhança isolante N' contida em N .

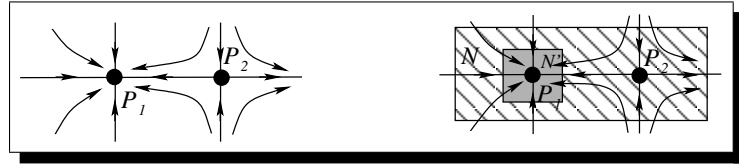


Figura 3.1: Conjuntos invariantes isolados primos: $\{P_1\}$ e $\{P_2\}$

Definição 3.1.3. Se o fluxo φ possui apenas um número finito de conjuntos invariantes isolados primos S_1, \dots, S_r , então o conjunto $T = \left(\bigcup_{i=1}^r S_i \right)$ é chamado de conjunto invariante isolado maximal extremo de φ .

Se o fluxo φ não possui conjunto invariante isolado primo ou possui infinitos conjuntos invariantes isolados primos, convencionase $T = \emptyset$.

Proposição 3.1.4. *Todos os conjuntos invariantes isolados primos de φ são dois a dois disjuntos.*

Demonstração: Sejam, S_1 e S_2 dois conjuntos invariantes isolados primos para φ e N_1 e N_2 vizinhanças isolantes para S_1 e S_2 respectivamente. Considere,

$$S = S_1 \cap S_2$$

$$N = cl(int(N_1) \cap int(N_2))$$

Observe que o conjunto N é o fecho de um conjunto aberto. Além disso,

$$N \subseteq cl(int(N_1) \cap int(N_2)) \subseteq cl(N_1) \cap cl(N_2) = N_1 \cap N_2.$$

Seja $x \in N$ tal que $\varphi(\mathbb{R}, x) \subseteq N$, logo $\varphi(\mathbb{R}, x) \subseteq N_i, i = 1, 2$. Segue então que $x \in S_i, i = 1, 2$, ou seja $x \in S$. Logo

$$C(N) = \{x \in N : \varphi(\mathbb{R}, x) \subseteq N\} \subseteq S.$$

Por outro lado,

$$\varphi(\mathbb{R}, S) = \varphi(\mathbb{R}, S_1) \cap \varphi(\mathbb{R}, S_2) = S_1 \cap S_2 = S.$$

Assim, $C(N) \supseteq S$. Portanto $C(N) = S$, isto é, S é um conjunto invariante maximal em N .

Como $S_i \subset \text{int}(N_i), i = 1, 2$, temos

$$S = S_1 \cap S_2 \subseteq \text{int}(N_1) \cap \text{int}(N_2) = \text{int}(\text{int}(N_1) \cap \text{int}(N_2)) \subseteq \text{int}(\text{cl}(\text{int}(N_1) \cap \text{int}(N_2))) = \text{int}(N).$$

Isso mostra que S é um conjunto invariante isolado. Por outro lado, S é um subconjunto próprio dos conjuntos invariantes isolados primos S_1, S_2 . Logo $S = \emptyset$, ou seja, S_1 e S_2 são disjuntos. \square

A Proposição 3.1.4 nos diz que T é um conjunto invariante isolado.

Pela Definição 3.1.3 temos que para todo fluxo φ , existe um único conjunto invariante isolado maximal extremo para φ .

Seja Λ um intervalo em \mathbb{R} e suponha que para cada $\lambda \in \Lambda$, φ_λ é um fluxo em Ω . Então $\{\varphi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma família a um parâmetro de fluxos em Ω , representada por φ_Λ .

Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $\text{Orb}(\varphi_\lambda)$ o conjunto das órbitas de φ_λ , isto é,

$$\text{Orb}(\varphi_\lambda) = \{\{\varphi_\lambda(\mathbb{R}, x)\} : x \in \Omega\}.$$

Seja T_λ o conjunto invariante isolado maximal extremo para φ_λ .

Definição 3.1.5. Sejam $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\varphi_\lambda, \varphi_\mu \in \varphi_\Lambda$. Dizemos que φ_λ e φ_μ são topologicamente equivalentes se existe um automorfismo α em Ω , D -invariante que leva $\text{Orb}(\varphi_\lambda)$ em $\text{Orb}(\varphi_\mu)$ e preserva o sentido das órbitas no tempo.

Notação: $\varphi_\lambda \approx \varphi_\mu$.

Definição 3.1.6. Seja $\lambda_0 \in \Lambda$. Dizemos que λ_0 é um ponto regular de φ_Λ se existe uma vizinhança $V(\lambda_0)$ em Λ tal que para cada $\lambda \in V(\lambda_0)$ temos $\varphi_\lambda \approx \varphi_{\lambda_0}$.

Definição 3.1.7. Chamamos $\lambda_0 \in \Lambda$ de ponto de bifurcação de φ_Λ se é não regular, isto é, se para cada vizinhança $V(\lambda_0)$ em Λ existe um parâmetro λ_1 tal que $\varphi_{\lambda_1} \not\approx \varphi_{\lambda_0}$. Equivalentemente, $\lambda_0 \in \Lambda$ é ponto de bifurcação de φ_Λ se para cada vizinhança $V(\lambda_0)$ em Λ existem parâmetros λ_1 e λ_2 tais que $\varphi_{\lambda_1} \not\approx \varphi_{\lambda_2}$.

Lema 3.1.8. *Seja α um homeomorfismo de Ω , $A \subseteq \Omega$. Então $\alpha(\partial A) = \partial\alpha(A)$, $\alpha(\overline{A}) = \overline{\alpha(A)}$, $\alpha(\text{int}(A)) = \text{int}(\alpha(A))$ e α conserva as relações de igualdade de conjuntos sob as operações \cup, \cap, \setminus .*

Lema 3.1.9. *Se φ_λ e φ_μ são equivalentes sob α , então $\alpha(T_\lambda) = T_\mu$.*

Demonstração: Vamos mostrar que α aplica cada conjunto invariante isolado primo S de φ_λ para um conjunto invariante isolado primo $\alpha(S)$ de φ_μ .

Como S é um conjunto invariante, S é uma união de órbitas de φ_λ . Pela Definição 3.1.5 e pelo Lema 3.1.8, $\alpha(S)$ é uma união de órbitas de φ_μ .

Seja N uma vizinhança isolante de S . Logo, N é o fecho de um conjunto aberto, S é o conjunto maximal invariante em N e $S \subseteq \text{int}(N)$. Assim pelo Lema 3.1.8, $\alpha(N)$ é o fecho de um conjunto aberto e $\alpha(S) \subseteq \text{int}(\alpha(N))$.

Suponha por contradição que $\alpha(S)$ não é conjunto maximal invariante em $\alpha(N)$, então existe uma órbita completa γ de φ_μ tal que $\gamma \in \alpha(N)$ e $\gamma \cap \alpha(S) = \emptyset$. Assim, $\alpha^{-1}(\gamma)$ é uma órbita completa de φ_λ , $\alpha^{-1}(\gamma) \subseteq N$ e $\alpha^{-1}(\gamma \cap \alpha(S)) = \emptyset$, isto é, $\alpha^{-1}(\gamma) \cap S = \emptyset$. Logo, S não é um conjunto invariante maximal em N , uma contradição. Portanto, $\alpha(N)$ é uma vizinhança isolante de $\alpha(S)$ e $\alpha(S)$ é um conjunto invariante isolado de φ_μ .

Da mesma forma α^{-1} leva cada conjunto invariante isolado de φ_μ para um conjunto invariante isolado de φ_λ . Assim, se S é um conjunto invariante isolado primo, então $\alpha(S)$ também o é.

Vamos considerar que existam r conjuntos invariantes isolados primos de φ_μ , $\alpha(S_1), \dots, \alpha(S_r)$. Assim temos,

$$T_\mu = \cup_{i=1}^r \alpha(S_i) = \alpha(\cup_{i=1}^r S_i) = \alpha(T_\lambda).$$

Quando $T_\lambda = \emptyset$, temos $T_\mu = \emptyset$ e portanto, $T_\mu = \alpha(T_\lambda)$. □

3.2 Teorema e Exemplos

Nesta seção apresentamos um resultado que exhibe condições suficientes para ocorrer uma bifurcação em uma família a um parâmetro de sistemas descontínuos. Trata-se de uma generalização do teorema contido em [FX] que exhibe condições suficientes para existência de ponto de bifurcação em uma família de fluxos em um espaço métrico compacto. Posteriormente apresentamos exemplos de famílias a um parâmetro em dimensão dois, ilustrando o conceito de bifurcação dado nesta seção. Nestes exemplos a condição da cardinalidade e/ou uma condição no D -índice de Conley são verificadas. Por outro lado, estas condições não são necessárias e apresentamos exemplos nessa direção.

Lema 3.2.1. *Suponha que φ_λ e φ_μ são equivalentes sob α e seja N_λ uma vizinhança isolante para o conjunto invariante maximal T_λ para φ_λ , então $\alpha(N_\lambda)$ é uma vizinhança isolante para T_μ .*

A demonstração é similar a do Lema 3.1.9.

Em [FX], prova-se que se dois fluxos φ_λ e φ_μ em φ_Λ são topologicamente equivalentes sob α e se (N_1, N_0) é um par índice para S , então $(\alpha(N_1), \alpha(N_0))$ é um par índice para $\alpha(S)$. No próximo Lema, verificamos que isso também é válido para a região de descontinuidade D .

Lema 3.2.2. *Sejam dois fluxos φ_λ e φ_μ em φ_Λ equivalentes sob uma equivalência topológica α e seja D_λ o conjunto de descontinuidade para φ_λ . Se (N_1, N_0) um D_λ -par índice, então $(\alpha(N_1), \alpha(N_0))$ é um D_μ -par índice.*

Demonstração: Seja (N_1, N_0) um par compacto em Ω , logo $(\alpha(N_1), \alpha(N_0))$ é um par compacto em Ω . Como $cl(N_1 \setminus N_0)$ é uma D_λ -vizinhança isolante, então $\alpha(cl(N_1 \setminus N_0)) = cl(\alpha(N_1) \setminus \alpha(N_0))$ é uma D_μ -vizinhança isolante.

Sejam, $y \in \alpha(N_0)$ e $s > 0$ tais que $\varphi_\mu([0, s], y) \subseteq \alpha(N_1)$, então $\alpha^{-1}(y) \in N_0$ e $\alpha^{-1}(\varphi_\mu([0, s], y)) \subseteq N_1$. Como α preserva sentido das órbitas, existe $s' > 0$ tal que,

$$\alpha^{-1}(\varphi_\mu([0, s], y)) = \varphi_\lambda([0, s'], \alpha^{-1}(y)),$$

e assim $\varphi_\lambda([0, s'], \alpha^{-1}(y)) \subseteq N_1$. Como (N_1, N_0) é D_λ -par índice, temos $\varphi_\lambda([0, s'], \alpha^{-1}(y)) \subseteq$

N_0 , o que implica $\alpha^{-1}(\varphi_\mu([0, s], y)) \subset N_0$ isto é, $\varphi_\mu([0, s], y) \subseteq \alpha(N_0)$. Logo, $\alpha(N_0)$ é positivamente invariante em relação a $\alpha(N_1)$.

Suponha agora $y \in \alpha(N_1)$ e $t > 0$ tal que $\varphi_\mu([0, t], y) \not\subset \alpha(N_1)$. Então $\alpha^{-1}(y) \in N_1$ e $\alpha^{-1}(\varphi_\mu([0, t], y)) \not\subset N_1$. Como,

$$\alpha^{-1}(\varphi_\mu([0, t], y)) = \varphi_\lambda([0, \tau], \alpha^{-1}(y)) \quad \tau > 0$$

temos $\varphi_\lambda([0, \tau], \alpha^{-1}(y)) \not\subset N_1$. Por hipótese (N_1, N_0) é D_λ -par índice, logo existe $s \in [0, \tau]$ tal que $\varphi_\lambda([0, s], \alpha^{-1}(y)) \subseteq N_1$ e $\varphi_\lambda(s, \alpha^{-1}(y)) \in N_0$. Existe então, $s'' \geq 0$ tal que

$$\alpha(\varphi_\lambda([0, s], \alpha^{-1}(y))) = \varphi_\mu([0, s''], y),$$

assim $\varphi_\mu([0, s''], y) \subseteq \alpha(N_1)$ e $\varphi_\mu(s'', y) \in \alpha(N_0)$. Assim, $(\alpha(N_1), \alpha(N_0))$ é um D_μ -par índice.

□

Considere agora os conjuntos,

$$\mathfrak{S}_\lambda = \{S, \text{ onde } S \text{ é um conjunto invariante isolado primo para } \varphi_\lambda\}$$

$$\mathcal{I}_\lambda = \{ \mathfrak{S}_\lambda, D ; \text{ onde } D \text{ a região de descontinuidade} \}$$

e seja

$$h(\mathcal{I}_\lambda) = \{h(\mathfrak{S}_\lambda), h(D) : \mathfrak{S}_\lambda, D \in \mathcal{I}_\lambda\}.$$

Caso um sistema não possua conjuntos invariantes isolados primos, temos que $\mathfrak{S}_\lambda = \emptyset$ e $h(\mathfrak{S}_\lambda) = h(\emptyset)$. Esse é o caso, por exemplo, quando o sistema possui um centro como único ponto crítico.

Teorema 3.2.3. *Se para cada vizinhança U de $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda' \in U$ tal que*

$$\text{card}(\mathcal{I}_{\lambda'}) \neq \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_0})$$

ou,

$$h(\mathcal{I}_{\lambda'}) \neq h(\mathcal{I}_{\lambda_0})$$

então λ_0 é um ponto de bifurcação para φ_Λ .

Demonstração: Suponha que λ_0 não é um ponto de bifurcação, então existe uma vizinhança U de λ_0 tal que para cada $\lambda \in U$, existe um homeomorfismo α_λ em Ω tal que $\varphi_\lambda \approx \varphi_{\lambda_0}$.

Da prova do Lema 3.1.9 e de α_λ ser D -invariante temos $\alpha_\lambda(\mathcal{I}_\lambda) = \mathcal{I}_{\lambda_0}$. Temos então uma bijeção entre \mathcal{I}_λ e \mathcal{I}_{λ_0} . Assim temos,

$$\text{card}(\mathcal{I}_\lambda) = \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_0}), \lambda \in U \quad (3.1)$$

Sejam $D \in \mathfrak{S}_\lambda$, (N_1, N_0) um D -par índice e

$$\tilde{N}_1 = \alpha_\lambda(N_1), \tilde{N}_0 = \alpha_\lambda(N_0).$$

Então pelo Lema 3.2.2, $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_0)$ é um $D_{\alpha(\lambda)}$ -par índice. Como D -pares índice são compactos, N_0 e \tilde{N}_0 são subconjuntos fechados em N_1 e \tilde{N}_1 respectivamente. Logo (N_1, N_0) e $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_0)$ são pares topológicos. Sejam

$$\Phi = \alpha|_{N_1} \quad \text{e} \quad \Psi = \alpha^{-1}|_{\tilde{N}_1}$$

então $\Phi : (N_1, N_0) \rightarrow (\tilde{N}_1, \tilde{N}_0)$ e $\Psi : (\tilde{N}_1, \tilde{N}_0) \rightarrow (N_1, N_0)$ são aplicações entre dois pares topológicos.

Temos,

$$\Phi \circ \Psi = 1_{\tilde{N}_1} \sim 1_{\tilde{N}_1} \quad \text{e} \quad \Psi \circ \Phi = 1_{N_1} \sim 1_{N_1}$$

então

$$(N_1, N_0) \sim (\tilde{N}_1, \tilde{N}_0) \quad \text{e} \quad N_1/N_0 \sim \tilde{N}_1/\tilde{N}_0.$$

Assim,

$$[N_1/N_0] = [\tilde{N}_1/\tilde{N}_0] \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}(D_\lambda) = \mathfrak{h}(D_{\alpha(\lambda)}), \lambda \in U.$$

Usando argumentos similares, temos que $h(S) = h(\alpha_\lambda(S))$, $S \in \mathfrak{S}_\lambda$, $\lambda \in U$. Assim

$$h(\mathcal{I}_\lambda) = h(\mathcal{I}_{\lambda_0}), \lambda \in U. \quad (3.2)$$

Temos que (3.1) e (3.2) contradizem a hipótese do teorema. Portanto λ_0 é um ponto de bifurcação. \square

Exemplo 3.2.4. Vamos considerar $M = T^2$ e \mathcal{D} como sendo o bordo de um anel meridional (vizinhança de um S^1 não homotópica a zero) em T^2 . Logo, \mathcal{D} separa o toro T^2 em duas regiões R_1 e R_2 . Seja Z_μ o campo descontínuo localmente definido:

$$Z_\mu = \begin{cases} X_\mu, & \text{se } (x, y) \in R_1 \\ Y_\mu, & \text{se } (x, y) \in R_2 \end{cases} \quad \text{onde,}$$

$$X_\mu = \begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{e} \quad Y_\mu = \begin{cases} \dot{x} = \mu(x - k) - (x - k)^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Note que o campo Y_μ é uma pequena translação do campo X_μ .

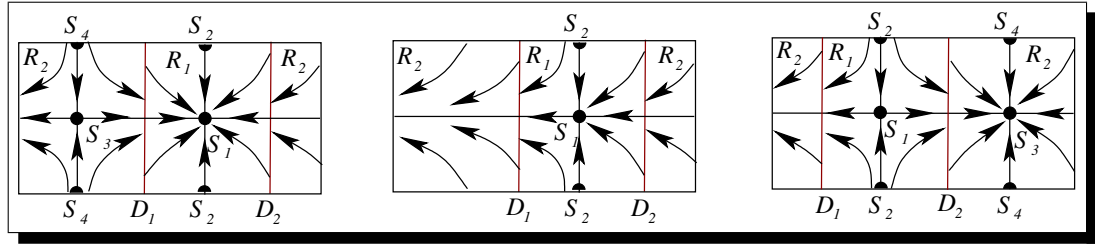


Figura 3.2: Retrato de fase para $\mu < 0$, $\mu = 0$ e $\mu > 0$ respectivamente

Para $\mu = 0$ temos $\mathcal{I}_0 = \{S_1, S_2, D_1, D_2\}$ e para $\mu \neq 0$ temos $\mathcal{I}_\mu = \{S_1, S_2, S_3, S_4, D_1, D_2\}$.

Logo para qualquer vizinhança de $\mu = 0$ temos $\text{card}(\mathcal{I}_\mu) \neq \text{card}(\mathcal{I}_0)$, ou seja, $\mu = 0$ é um ponto de bifurcação para Z_μ .

Observamos que mesmo havendo uma mudança no comportamento do fluxo próximo à D_1 e D_2 , o D_i -índice de Conley, $\mathfrak{h}(D_i)$, não se altera.

Corolário 3.2.5. *Se para cada vizinhança U contendo $\lambda_0 \in \Lambda$, existem $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ em U tais que*

$$\text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_1}) \neq \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_2}) \quad \text{ou} \quad h(\mathcal{I}_{\lambda_1}) \neq h(\mathcal{I}_{\lambda_2}),$$

então λ_0 é ponto de bifurcação de φ_Λ .

Demonstração: Suponha por absurdo que λ_0 não é ponto de bifurcação de φ_Λ . Por definição existe uma vizinhança V contendo λ_0 tal que para cada $\lambda \in V$, existe um homeomorfismo α_λ em Ω tal que $\varphi_\lambda \approx \varphi_{\lambda_0}$.

Pela demonstração do Teorema 3.2.3 segue que, $\text{card}(\mathcal{I}_\lambda) = \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_0})$ e $h(\mathcal{I}_\lambda) = h(\mathcal{I}_{\lambda_0})$ $\lambda \in V$. Logo, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in V$ temos

$$\text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_1}) = \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_0}) \quad \text{e} \quad \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_2}) = \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_0}) \implies \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_1}) = \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_2}) \quad (3.3)$$

$$h(\mathcal{I}_{\lambda_1}) = h(\mathcal{I}_{\lambda_0}) \quad \text{e} \quad h(\mathcal{I}_{\lambda_2}) = h(\mathcal{I}_{\lambda_0}) \implies h(\mathcal{I}_{\lambda_1}) = h(\mathcal{I}_{\lambda_2}) \quad (3.4)$$

Como (3.3) e (3.4) contradizem a hipótese do corolário, temos que λ_0 é ponto de bifurcação. \square

Observação 3.2.6. Ressaltamos que as condições do Teorema 3.2.3 não são necessárias, isto é, pode existir um ponto de bifurcação $\lambda_o \in \Lambda$ tal que para qualquer vizinhança V de λ_o em Λ , temos $\text{card}(\mathcal{I}_\lambda) = \text{card}(\mathcal{I}_{\lambda_o})$ e $h(\mathcal{I}_\lambda) = h(\mathcal{I}_{\lambda_o})$, $\lambda \in V$.

No caso contínuo verifica-se esse fato no seguinte exemplo.

Seja

$$X_\lambda = \begin{cases} \dot{x} = x^2 - x \\ \dot{y} = y(0,5 - x) + \lambda x \end{cases}$$

podemos ver que $\lambda_o = 0$ é ponto de bifurcação, porém

$$\text{card}(\mathfrak{S}_\lambda) = 2 \text{ e } h(\mathfrak{S}_\lambda) = h(\mathfrak{S}_{\lambda_o}), \forall \lambda \in \Lambda.$$

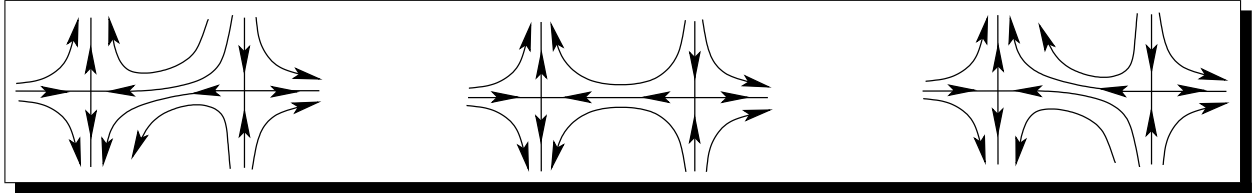


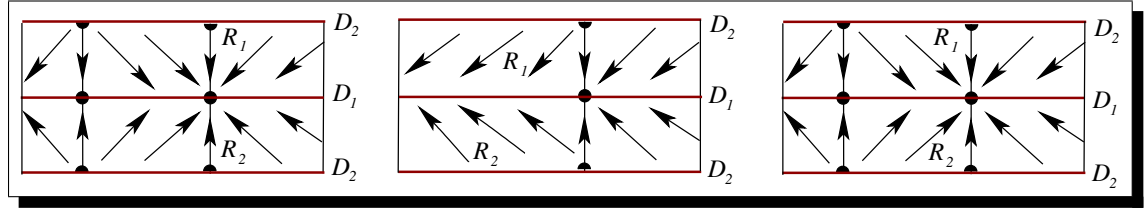
Figura 3.3: $\text{card}(\mathfrak{S}_\lambda) = \text{card}(\mathfrak{S}_{\lambda_o})$ e $h(\mathfrak{S}_\lambda) = h(\mathfrak{S}_{\lambda_o})$, $\forall \lambda \in \Lambda$

O mesmo ocorre no caso de campos descontínuos. Seja $M = T^2$ e \mathcal{D} o bordo de um anel longitudinal em T^2 . Assim \mathcal{D} é a união de dois círculos em T^2 , dispostos de tal maneira que “dividem” o toro T^2 em duas regiões R_1 e R_2 como mostra a Figura 3.4. Seja Z_λ o campo descontínuo localmente definido em T^2 :

$$Z_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \text{se } (x, y) \in R_1 \\ Y_\lambda, & \text{se } (x, y) \in R_2 \end{cases} \quad \text{onde,}$$

$$X_\lambda = \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - x^2 \\ \dot{y} = -(y + k) \end{cases} \quad \text{e} \quad Y_\lambda = \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - x^2 \\ \dot{y} = -(y - k) \end{cases}$$

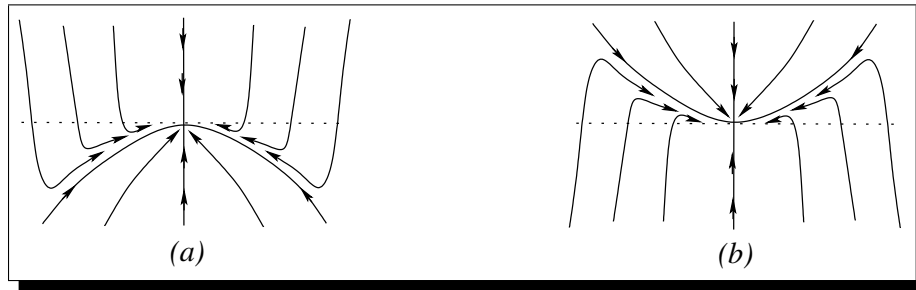
k uma constante positiva.

Figura 3.4: $\lambda_o = 0$ é ponto de bifurcação

Podemos ver pela Figura 3.4 que $\lambda_o = 0$ é um ponto de bifurcação para o fluxo, mas para qualquer valor de $\lambda \in \Lambda$, temos $\mathcal{I}_\lambda = \{D_1, D_2\}$ e ainda, para qualquer D_i -vizinhança isolante, $i = \{1, 2\}$, os conjuntos de entrada e saída não se alteram com a variação de λ , ou seja, $h(\mathcal{I}_\lambda) = h(\mathcal{I}_{\lambda_o})$, $\lambda \in \Lambda$.

Exemplo 3.2.7. Nesse exemplo queremos realçar uma bifurcação onde também há mudança no D -índice. Primeiramente considere os campos vetoriais

$$X = \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -3y - x^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -3y + x^2 \end{cases}$$

Figura 3.5: (a) Campo X ; (b) Campo Y

O campo vetorial descontínuo Z_λ é construído da seguinte maneira,

$$Z_\lambda = \begin{cases} X_\lambda, & \text{se } y \geq 0 \\ Y_\lambda, & \text{se } y \leq 0 \end{cases} \quad \text{onde,}$$

$$X_\lambda = \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -3y - x^2 + \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad Y_\lambda = \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -3y + x^2 - \lambda \end{cases}$$

A Figura 3.6 mostra o retrato de fase de Z_λ para (a) $\lambda = 0$ e (b) $\lambda > 0$. Podemos perceber que $\text{card}(\mathcal{I}_{\lambda>0}) \neq \text{card}(\mathcal{S}_{\lambda_0=0})$. Além disso há mudança no D -índice de Conley.

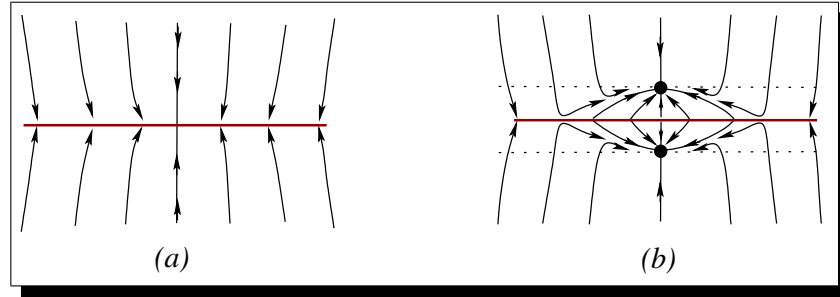


Figura 3.6: $\mathfrak{h}(D_{\lambda_0}) \neq \mathfrak{h}(D_\lambda)$

Observamos nesse exemplo que pelo menos dois campos descontínuos da família a um parâmetro Z_λ podem não pertencer ao conjunto dos campos vetoriais descontínuos Σ -coerentes. Porém conjecturamos que o Teorema 3.2.3 seja válido, mesmo que tenhamos $Z_\lambda \notin \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ para um número finito de valores do parâmetro λ .

CAPÍTULO 4

Continuação de D -Grafos

Nos trabalhos [BMR1], [BMR2] e [BMR3] foi apresentada uma teoria de continuação de grafos de Lyapunov na qual são exibidas condições necessárias e suficientes, para que um grafo abstrato de Lyapunov, que pode representar um fluxo contínuo com dinâmica não trivial, seja continuado a um grafo abstrato do tipo Morse que representa um fluxo Morse.

Num grafo abstrato de Lyapunov, um vértice com suas arestas incidentes representa um bloco isolante N de Λ . As arestas ingressantes e egressantes representam $\partial N^+ \times I$ e $\partial N^- \times I$ respectivamente, onde I é um intervalo aberto limitado. As desigualdades de Poincaré-Hopf relacionam os números de Betti com os quais as arestas são rotuladas, isto é, os números de Betti de ∂N^- e ∂N^+ , com os ranks dos índices homológicos de Conley (h_0, \dots, h_n) de Λ . O seguinte teorema encontra-se em [BMR3].

Teorema 4.0.8 (Continuação). *Seja $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ um grafo abstrato de Lyapunov. Este grafo admite continuação a um grafo do tipo Morse com cycle rank maior ou igual a κ se e somente se satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf (4.1)–(4.2) em cada vértice, onde $\kappa \leq \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}$.*

Nosso objetivo nesta seção é utilizar o D -índice de Conley para apresentar uma teoria de continuação para grafos de Lyapunov associados à classe de campos descontínuos referidos aqui. Uma das motivações principais de estudar a continuação dos D -grafos é relacioná-la

a regularização dos campos de vetores descontínuos correspondentes.

4.1 Grafo de Lyapunov

Seja \mathcal{R} um conjunto recorrente por cadeia. Considere \mathcal{R} uma união finita de conjuntos isolados \mathcal{R}_i . Dado um fluxo contínuo $\varphi : M \rightarrow M$, existe uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ associada a esse fluxo que é decrescente ao longo das órbitas fora do conjunto recorrente por cadeia \mathcal{R} , isto é, se $x \notin \mathcal{R}$ então

$$f(\varphi_t(x)) < f(\varphi_s(x)), \quad \text{para } t > s,$$

e constante nas componentes de \mathcal{R} . Tal função é denominada função de Lyapunov.

A função de Lyapunov, f , associada ao fluxo φ_t pode ser utilizada na construção de pares índice. Dado que $c = f(\mathcal{R}_i)$, então para $\epsilon > 0$, a componente de $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ contendo \mathcal{R}_i é uma vizinhança isolante para \mathcal{R}_i , e $(N, N^-) = (f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]), f^{-1}(c - \epsilon))$ é um par índice.

Uma função de Lyapunov associada ao fluxo φ_t determina um grafo de Lyapunov L da seguinte maneira. Dada a relação de equivalência em M : $x \sim y$ se e somente se, x e y pertencem a mesma componente conexa de um conjunto de nível de f , seja

$$L = M / \sim_f .$$

Defina um grafo abstrato de Lyapunov como um grafo orientado, finito, conexo e sem ciclos orientados com vértices e arestas rotulados.

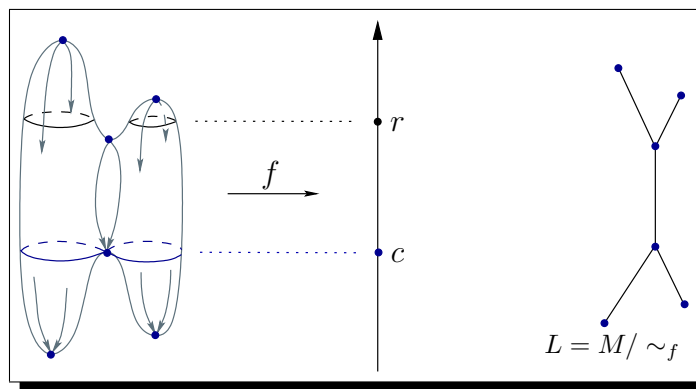


Figura 4.1: Função de Lyapunov e grafo

Apresentamos a seguir a definição de *grafo abstrato de Lyapunov L do tipo Morse* associado a um fluxo contínuo.

Um *grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse em dimensão n* é um grafo abstrato de Lyapunov que satisfaz as seguintes condições:

- Todo vértice é rotulado com $h_j = 1$ para algum $j = 0, \dots, n$.
- O número de arestas ingressantes, e^+ , e o número de arestas egressantes, e^- , de um vértice deve satisfazer,
 - se $h_j = 1$ para $j \neq 0, 1, n-1, n$ então $e^+ = 1$ e $e^- = 1$;
 - se $h_1 = 1$ então $e^+ = 1$ e $0 < e^- \leq 2$; se $h_{n-1} = 1$ então $e^- = 1$ e $0 < e^+ \leq 2$;
 - se $h_0 = 1$ então $e^- = 0$ e $e^+ = 1$; se $h_n = 1$ então $e^+ = 0$ e $e^- = 1$;
- Todo vértice rotulado com $h_\ell = 1$ deve ser:
 - ℓ -desconectante, (ℓ -d), quando aumenta o ℓ -ésimo número de Betti de N^+ , ou seja, o rótulo β_ℓ sobre a aresta ingressante.
 - $(\ell - 1)$ -conectante, $((\ell - 1)$ -c), quando diminui o $(\ell - 1)$ -ésimo número de Betti de N^+ , ou seja, o rótulo $\beta_{\ell-1}$ sobre a aresta ingressante.

Além disso, se $n = 2\ell = 0 \bmod 4$ e $h_\ell = 1$ então v é β -invariante, (β -i), isto é, todos os números de Betti permanecem constantes.

A Figura 4.2 ilustra essas condições.

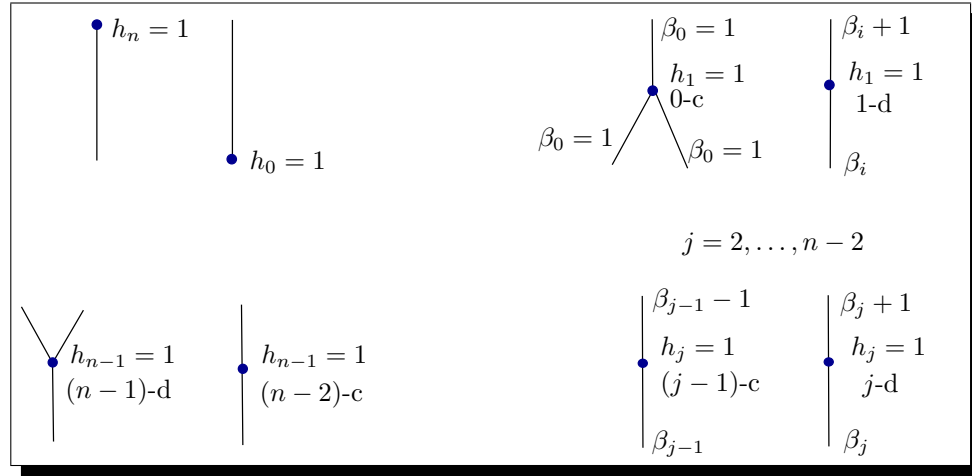


Figura 4.2: Grafo de Lyapunov do tipo Morse

Seja v um vértice em um grafo de Lyapunov abstrato rotulado com $\{h_0(v), \dots, h_n(v)\}$. Uma *explosão* de v ocorre quando o vértice pode ser substituído por um grafo de Lyapunov abstrato I do tipo Morse, respeitando as orientações e rótulos das arestas ingressantes e egressantes de v . As arestas ingressantes (egressantes) de v , necessariamente incidem em vértices de I como arestas ingressantes (egressantes) e todos os rótulos nas arestas respeitam as restrições dos vértices do tipo Morse. Mais ainda,

$$h_\lambda(v) = \sum_{j=1}^k h_\lambda(v_j), \quad \forall \lambda,$$

onde k é o número de vértices v_j de I .

Um grafo de Lyapunov abstrato admite uma continuação para um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse se cada vértice pode ser explodido. Na Seção 4.3 apresentamos as desigualdades de Poincaré-Hopf que são as condições necessárias e suficientes para que isso ocorra.

4.2 D -Grafo de Lyapunov

No contexto desse trabalho faz-se necessário definir uma função de Lyapunov para campos descontínuos $Z = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$. Como cada X_i é um campo contínuo, admite uma função de Lyapunov $f_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que Z é Σ -coerente, logo em cada componente

C_i , temos que $\text{inv}(C_i) = A_i$ é um atrator ou $\text{inv}(C_i) = R_i$ é um repulsor. Sejam $A = \bigcup_{i \in I_A} A_i$ e $R = \bigcup_{i \in I_R} R_i$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $f_i(R_i) = r_i > 0$, $f_i : C_i \rightarrow (0, r_i]$, $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{i_R}$ e $f_i(A_i) = a_i < 0$, $f_i : C_i \rightarrow [a_i, 0)$, $a_1 < a_2 < \dots < a_{i_A} < 0$, onde $i_R + i_A = r$, o número de componentes C_ℓ de M .

Seja $f = (f_1, \dots, f_r) : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(D) = 0$ e $f|_{C_\ell} = f_\ell$. Definimos tal função como uma *D-função de Lyapunov*.

Uma *D-função de Lyapunov* associada a Z determina um *D-grafo de Lyapunov*, L_D , pela seguinte relação de equivalência em M : $x \sim y$ se e somente se, x e y pertencem a mesma componente conexa de um conjunto de nível de f , ou x e y pertencem a D . $L_D = M / \sim_f$.

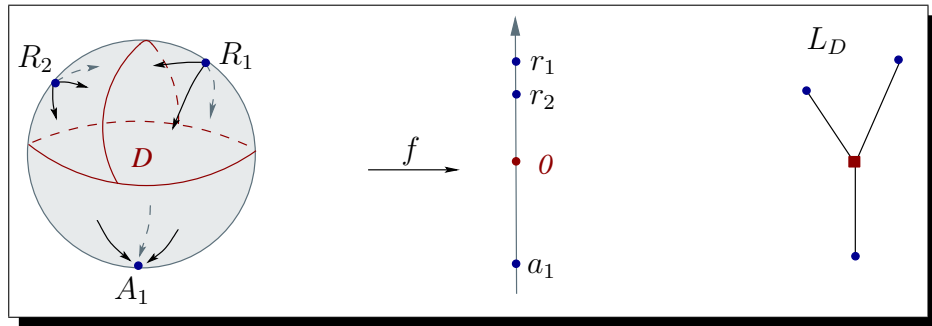


Figura 4.3: *D-função de Lyapunov e D-grafo*

Assim cada vértice v_i de grau de entrada ou grau de saída zero representa o conjunto $S_i = R_i$ ou $S_i = A_i$ respectivamente, podendo ser rotulado com invariantes dinâmicos $(h_j(v_i) = \dim CH_j(S_i), j = 0, 1, \dots, n)$. Cada aresta representa um conjunto de nível cartesiano um intervalo aberto e limitado, podendo ser rotulado com invariantes topológicos do conjunto de nível, por exemplo, os números de Betti β_k .

Assumindo D conexo, o vértice do tipo sela associado a D é rotulado com uma lista de inteiros não negativos $\{\mathfrak{h}_0, \dots, \mathfrak{h}_n\}$, onde $\mathfrak{h}_j = \dim CH_j(D)$ as dimensões do D -índice de Conley.

4.3 Desigualdade de Poincaré-Hopf

Em [BMR1] consideramos as desigualdades de Poincaré-Hopf (4.1)–(4.2), no caso $\kappa = 0$ para um conjunto invariante isolado Λ com bloco isolante N , com conjunto de entrada para o fluxo N^+ e de conjunto de saída para o fluxo N^- . A j -ésima aresta ingressante (egressante) rotulada com $(\beta_j^i)^+, i = 0, \dots, n$ ($(\beta_j^i)^-, i = 0, \dots, n$) e $j = 0, \dots, e^+$ ($j = 0, \dots, e^-$), onde $B_i^\pm = \sum_j (\beta_j^i)^\pm$.

As desigualdades 4.1 foram obtidas em [BMR1] e [BMR2] pela análise de uma sequência longa exata de pares índice (N, N^-) e (N, N^+) , para Λ e para Λ' o conjunto isolado invariante do fluxo e do fluxo reverso respectivamente, e utilizando a dualidade do índice de Conley, $H_i(N, N^+) = H_{n-i}(N, N^-)$. Denotando, $\text{rank } H_i(N, N^-) = h_i$, $\text{rank } H_i(N, N^+) = h_{n-i}$, $\text{rank } H_0(N^-) = e^-$, $\text{rank } H_0(N^+) = e^+$, $\text{rank } H_0(N) = 1$ e $\text{rank}(H_i(N^\pm)) = B_i^\pm$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h_j \geq -(B_{j-1}^+ - B_{j-1}^-) + (B_{j-2}^+ - B_{j-2}^-) + \dots \\ \quad \pm(B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-) \\ \quad -(h_{n-(j-1)} - h_{j-1}) + (h_{n-(j-2)} - h_{j-2}) + \dots \\ \quad \pm(h_{n-1} - h_1) \pm [(h_n - h_0) + (e^+ - e^-)] \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} h_{n-j} \geq -[-(B_{j-1}^+ - B_{j-1}^-) + (B_{j-2}^+ - B_{j-2}^-) + \dots \\ \quad \pm(B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-) \\ \quad -(h_{n-(j-1)} - h_{j-1}) + (h_{n-(j-2)} - h_{j-2}) + \dots \\ \quad \pm(h_{n-1} - h_1) \pm [(h_n - h_0) + (e^+ - e^-)] \end{array} \right. \\ \\ \vdots \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} h_2 \geq -(B_1^+ - B_1^-) - (h_{n-1} - h_1) + (h_n - h_0) + (e^+ - e^-) \\ h_{n-2} \geq -[-(B_1^+ - B_1^-) - (h_{n-1} - h_1) + (h_n - h_0) + (e^+ - e^-)] \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1 \geq h_0 - 1 + e^- \\ h_{n-1} \geq h_n - 1 + e^+ \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

No caso $n = 2i + 1$ a igualdade de Poincaré-Hopf deve ser considerada:

$$\mathcal{B}^+ - \mathcal{B}^- = e^- - e^+ + \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j h_j \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^+ &= \frac{(-1)^i}{2} B_i^+ \pm B_{i-1}^+ \pm \dots - B_1^+ \\ \mathcal{B}^- &= \frac{(-1)^i}{2} B_i^- \pm B_{i-1}^- \pm \dots - B_1^- \end{aligned}$$

Fazendo uso do D -índice de Conley provamos que as desigualdades de Poincaré-Hopf são válidas para campos de vetores descontínuos em $\mathfrak{X}_\Sigma(M)$.

Teorema 4.3.1. *Dado um campo descontínuo $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$ com descontinuidade em D , seja S_i o conjunto invariante maximal de $(C_i \setminus D)$ e sejam $h_j^i = \dim CH_j(S_i)$ e $\mathfrak{h}_j = \dim CH_j(D)$ as dimensões do índice homológico de Conley de S_i e D respectivamente. Então valem as inequações de Poincaré-Hopf (4.1) e*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_j \geq -(B_{j-1}^+ - B_{j-1}^-) + (B_{j-2}^+ - B_{j-2}^-) + \dots \\ \quad \pm (B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-) \\ -(\mathfrak{h}_{n-(j-1)} - \mathfrak{h}_{j-1}) + (\mathfrak{h}_{n-(j-2)} - \mathfrak{h}_{j-2}) + \dots \\ \quad \pm (\mathfrak{h}_{n-1} - \mathfrak{h}_1) \pm [(\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_0) + (e^+ - e^-)] \end{array} \right. \\ \\ \mathfrak{h}_{n-j} \geq - [-(B_{j-1}^+ - B_{j-1}^-) + (B_{j-2}^+ - B_{j-2}^-) + \dots \\ \quad \pm (B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-) \\ -(\mathfrak{h}_{n-(j-1)} - \mathfrak{h}_{j-1}) + (\mathfrak{h}_{n-(j-2)} - \mathfrak{h}_{j-2}) + \dots \\ \quad \pm (\mathfrak{h}_{n-1} - \mathfrak{h}_1) \pm [(\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_0) + (e^+ - e^-)]] \\ \vdots \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_2 \geq -(B_1^+ - B_1^-) - (\mathfrak{h}_{n-1} - \mathfrak{h}_1) + (\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_0) + (e^+ - e^-) \\ \mathfrak{h}_{n-2} \geq - [-(B_1^+ - B_1^-) - (\mathfrak{h}_{n-1} - \mathfrak{h}_1) + (\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_0) + (e^+ - e^-)] \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_1 \geq \mathfrak{h}_0 - 1 + e^- \\ \mathfrak{h}_{n-1} \geq \mathfrak{h}_n - 1 + e^+. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Mais ainda,

$$\chi(M) = H_n - H_{n-1} \dots \pm H_0$$

$$\text{onde, } H_j = \sum_{i=1}^{\#C_i} h_j^i + \mathfrak{h}_j.$$

Demonstração: Consideremos \tilde{Z} a regularização através da função distância de Z . O conjunto cadeia recorrente de \tilde{Z} é $\mathcal{R} = \cup \mathcal{R}_j$. Seja $\mathcal{R}_{i_o} = D$. Pelo Teorema 2.5.2 temos $h_j^{i_o} = h_j(\mathcal{R}_{i_o}) = \dim CH_j(\mathcal{R}_{i_o}) = \dim CH_j(D) = \mathfrak{h}_j$. Assim, se $(N_{i_o}, N_{i_o}^-)$ e $(N_{i_o}, N_{i_o}^+)$ são pares índice para \mathcal{R}_{i_o} e para \mathcal{R}'_{i_o} , conjuntos isolados invariantes do fluxo e do fluxo reverso respectivamente associados a \tilde{Z} temos, $\dim CH_j(N_{i_o}, N_{i_o}^-) = h_j^{i_o} = \mathfrak{h}_j$, $\dim CH_j(N_{i_o}, N_{i_o}^+) = h_{n-j}^{i_o} = \mathfrak{h}_{n-j}$, $\dim CH_0(N_{i_o}^-) = e^-$, $\dim CH_0(N_{i_o}^+) = e^+$, $\dim CH_0(N_{i_o}) = 1$ e $\dim(H_j(N_{i_o}^\pm)) = B_j^\pm$. Como são válidas as desigualdades (4.1) para o conjunto invariante $\mathcal{R}_{i_o} = D$ temos 4.3 fazendo as devidas substituições.

Mais ainda, segue dos resultados de [Co] que para campos de vetores contínuos $\chi(M) = H_n - H_{n-1} \pm \dots \pm H_0$ onde $H_j = \sum_{\mathcal{R}_i \in \mathcal{R}} h_j(\mathcal{R}_i)$. Logo,

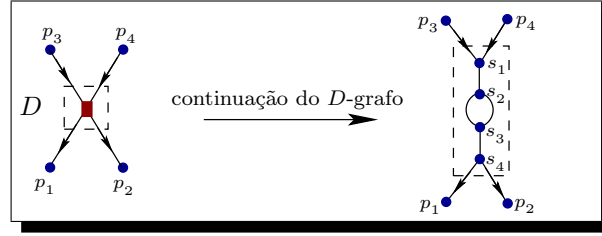
$$H_j = \sum_{\mathcal{R}_i \in \mathcal{R}} h_j(\mathcal{R}_i) = \sum_{\mathcal{R}_i \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_{i_o}} h_j(\mathcal{R}_i) + h_j(D) = \sum_{i=1}^{\#C_i} h_j^i + \mathfrak{h}_j.$$

□

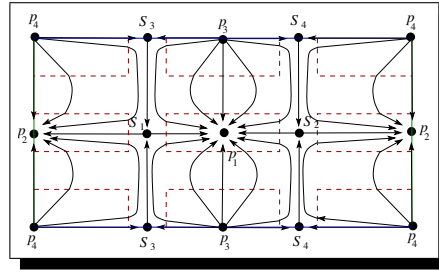
Corolário 4.3.2. *Todo D -grafo de Lyapunov pode ser continuado a um grafo do tipo Morse se, e somente se, cada vértice satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf, (4.1) e (4.3).*

Apresentamos a seguir alguns exemplos de continuação de D -grafos de Lyapunov.

Exemplo 4.3.3. Seja Σ a estratificação do toro 2-dimensional T^2 apresentada Figura 2.10 e $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(T^2)$ o campo de vetores descontínuos mostrado na Figura 2.11. Consideremos agora o D -grafo de Lyapunov associado a Z em T^2 . Usando a teoria de continuação para D -grafos de Lyapunov desenvolvida aqui, obtemos um grafo de Lyapunov associado a um campo de vetores regularizado \tilde{Z} de Z em T^2 . Veja Figura 4.4.

Figura 4.4: D -Grafo de Lyapunov de Z e grafo de Lyapunov continuado

A Figura 4.5 mostra uma possível regularização do campo de vetores descontínuo definido no toro. É interessante observar que a regularização do campo de vetores Z coincide com a continuação do D -grafo.

Figura 4.5: Campo de Vetores Regularizado \hat{Z}

Exemplo 4.3.4. Neste exemplo, seja Σ uma estratificação de $M = S^3$ tal que $\overline{V^2} = D =$ toro T^2 . As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram D -grafos abstratos associados a um campo $Z \in \mathfrak{X}_\Sigma(M)$, onde D é a região de costura, deslize ou escape e suas respectivas continuações. Obtemos os grafos do tipo Morse resultantes em cada caso que podem corresponder a uma regularização de Z .

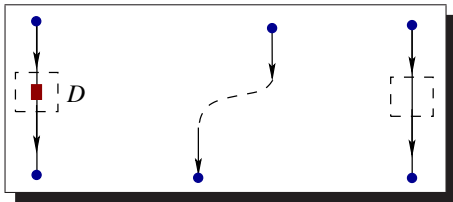


Figura 4.6: Região de Costura e continuação

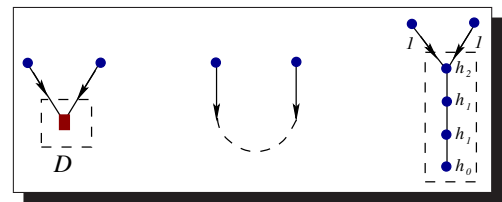


Figura 4.7: Região de Deslize e continuação

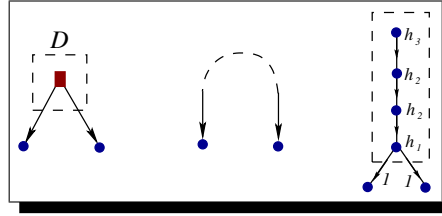


Figura 4.8: Região de Escape e continuação

A importância da noção de continuação na teoria de Conley reside na simplificação dos cálculos do índice de um conjunto invariante mais complicado a um mais simples, já que ambos possuem o mesmo índice.

No nosso contexto não é possível estabelecer uma homotopia entre um campo descontínuo com um campo contínuo e desta forma não é possível falar em continuação dos campos de vetores descontínuos. Por outro lado, pelos resultados de Reineck [Re] o campo regularizado \tilde{Z} possui uma continuação a um campo gradiente Z_{grad} . Com os resultados dessa seção fica em aberto a seguinte questão. É sempre possível encontrar uma regularização tal que o campo regularizado \tilde{Z} seja gradiente?

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

5.1 Conclusão

Ressaltamos que este trabalho representa uma primeira fase no desenvolvimento da teoria de um invariante topológico para uma região de descontinuidade proveniente de uma classe de campos vetoriais descontínuos. Esperamos que haja muitas aplicações do D -índice de Conley, tanto na teoria de bifurcação quanto num estudo qualitativo da teoria de regularização de campos descontínuos.

Percebemos que algumas hipóteses feitas no decorrer da tese são restritivas. Por exemplo, no Capítulo 2, desenvolvemos uma teoria para a definição do D -índice de Conley, porém na definição de campos Σ -coerentes, $\mathfrak{X}_\Sigma(M)$, exigimos que em cada componente C_i , o campo X_i fosse somente ingressante ou somente egressante. Essa hipótese exclui os campos com conjunto invariante maximal em C_i do tipo sela.

Por outro lado, a exclusão de campos que apresentam pontos de tangência em D é outra restrição que podemos contornar apenas parcialmente. Na Seção 2.6, vimos para o caso em que M é bidimensional, que tangências internas podem ser admitidas. Observe na Figura 5.1 um campo vetorial multivaluado que possui tangência interna e externa em relação a ambas as componentes. Temos que os pontos p e q pertencentes a D -vizinhança N e indicados na mesma figura não pertencem ao conjunto de saída de N , N^- , e assim temos que N^- não é

fechado. Logo não podemos calcular o D -índice de Conley.

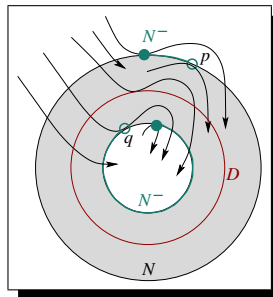


Figura 5.1: Tangência interna e externa

Seria importante contornar esse problema, pois, muitos campos descontínuos planares apresentam tal comportamento.

Também não menos importante é a abordagem sobre tangências em variedade de dimensão maior que dois, porém, ainda não temos resultados nesse sentido. As dificuldades em dimensão mais alta residem na complexidade dos conjuntos de tangência contidos no estrato de codimensão um que compõe D .

No Capítulo 3 apresentamos, como aplicação do D -índice de Conley, condições necessárias para existência de pontos de bifurcação em uma família a um parâmetro de campos Σ -coerentes, Z_λ . A condição que exige que todos os campos vetoriais da família a um parâmetro Z_λ pertençam ao conjunto dos campos vetoriais descontínuos Σ coerentes, (3.2.3), é um tanto restritiva. Seria interessante generalizar o Teorema 3.2.3 para uma família a um parâmetro de campos de vetores que satisfaçam as condições que definem $\mathfrak{X}_\Sigma(M)$ a menos de um número finito de valores do parâmetro λ .

Observemos que o campo vetorial ilustrado na Figura 5.1 é uma pequena perturbação do campo vetorial descontínuo que apresentamos na Fig 5.2. Sendo possível calcular o D -índice de Conley para estes campos com tangência externa, temos neste exemplo o caso em que $\text{card}(\mathcal{I}_\lambda) = \text{card}(\mathfrak{S}_{\lambda_o})$, isto é, o número de singularidades fora de D é o mesmo para todo λ e $h(\mathfrak{S}_\lambda) = h(\mathfrak{S}_{\lambda_o})$. Porém não é possível com nossas técnicas calcular $\mathfrak{h}(D_\lambda)$, $\lambda > 0$.

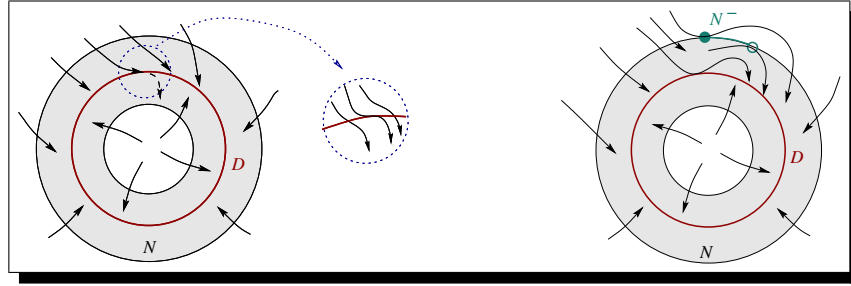


Figura 5.2: Pertubação de um ponto de dobra

5.2 Direções Futuras e Trabalhos Relacionados

Apresentamos aqui outras linhas que estão relacionadas com esse trabalho. Uma trata de sistemas híbridos [BPS]. A outra é um aprofundamento nas relações com um trabalho de Kunze [Ku] que trata do índice de Conley para inclusões diferenciais.

5.2.1 Sistemas Híbridos

Em [BPS], Pugh e outros abordam a estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos governada por campos de vetores C^∞ por partes. A região de descontinuidade no artigo acima citado acontece em um 1-complexo finito mergulhado em uma superfície M^2 . A definição dada no presente trabalho pode ser também utilizada no sentido do artigo, onde K é visto como o fecho do estrato 1-dimensional. Daremos agora algumas definições do artigo e um exemplo do cálculo do D -índice de Conley neste contexto exibido em [BPS]. Nossa motivação para trabalhar nessa área futuramente é que são consideradas em [BPS] regiões em M^2 contendo conjuntos invariantes isolados maximais do tipo sela.

Consideremos M^2 uma superfície compacta suave, orientada e sem bordo e $K \subset M^2$ um 1-complexo finito, mergulhado suavemente em M^2 e tal que o ângulo formado entre suas arestas reunidas em um vértice é não-nulo.

As componentes conexas de $M^2 \setminus K$ são denotadas por V_1, \dots, V_k e K separa M^2 localmente.

Um campo de vetores C^r por partes Z em M^2 , $1 \leq r \leq \infty$ é uma família $\{X_i\}$, onde X_i

é um campo de vetores C^r definido no fecho da i -ésima componente conexa \overline{V}_i de $M^2 \setminus K$, $i = 1, \dots, k$. Esses campos vetoriais X_i são chamados ramos de Z .

Para um ponto q pertencente ao 1-complexo K temos as seguintes possibilidades,

- q é um *vértice* de K ;
- q é um *ponto de tangência*, isto é: o ponto q não é um vértice de K e ao menos um dos dois ramos de Z é tangente a K em q . Ainda, pode se incluir a possibilidade que um ramo se anule em q .
- q é um *ponto de travessia* (costura), neste caso, q não é um vértice e os dois ramos de Z são transversais a K em q , além disso ambos apontam para o mesmo lado de K ;
- q é um ponto de oposição (deslize), neste caso, q não é um vértice e os dois ramos de Z são transversais a K em q , porém apontam para lados opostos de K .

Para um ponto de oposição (deslize), q , define-se o campo de vetores deslizante como sendo a combinação estritamente convexa tangente a K no ponto q ,

$$Z^*(q) = \lambda X_i(q) + (1 - \lambda) X_j(q).$$

Se $Z^*(q) \neq 0$, o ponto q é chamado ponto deslizante. Se $Z^*(q) = 0$, q é denominado equilíbrio singular.

O campo deslizante está definido em um subconjunto aberto relativo de K , não incluindo vértices de K e pontos de K onde um ramo de Z é tangente a K .

Em [BPS], uma órbita regular de Z é definida como uma curva suave por partes $\gamma \subset M$ tal que $\gamma \cap V_i$ é uma trajetória de X_i , além disso $\gamma \cap K$ consiste de pontos de travessia e γ é maximal em relação a essas duas condições. Uma órbita singular de Z é definida como curva suave $\gamma \subset K$ tal que γ é uma órbita de Z^* ou uma singularidade de Z , isto é, um equilíbrio singular, um ponto de tangência ou um vértice de K .

Seja M^2 uma superfície compacta suave e sem bordo, T uma triangulação suave de M^2 e $D = K$ o 1-esqueleto de T . Temos então $M^2 = \cup \overline{V}_i$, onde \overline{V}_i é o fecho do complexo 2-dimensional V_i . Considere então o conjunto,

$$\mathcal{H}_T(M) = \{Z = (X_1, \dots, X_n) : X_i|_{V_i} \in C^\infty\}.$$

Suponha que (X, D) satisfaça as seguintes propriedades:

1. X_i é transversal a todas as arestas que são bordo de V_i (V_i complexo 2-dimensional).
2. Ou X_i aponta todo para o interior do 2-esqueleto V_i em pontos das arestas que são bordo de $\overline{V_i}$, ou X_i aponta todo para o exterior do 2-esqueleto V_i em pontos das arestas que são bordo de $\overline{V_i}$.

O conjunto de tais campos de vetores é denotado por $\mathfrak{X}_{\mathcal{H}}(M^2)$.

Para um campo em $\mathfrak{X}_{\mathcal{H}}(M^2)$, vale o Teorema 2.5.2 da teoria do D -índice de Conley.

Exemplo 5.2.1. Agora sejam T uma triangulação de S^2 e K um 1-esqueleto de T , veja Figura 5.3.

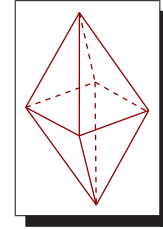


Figura 5.3: Triangulação da esfera S^2

Considere um campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}_{\Sigma}(M)$ tal que a região de descontinuidade $D = K$ e em C_1, C_3, C_5 e C_7 o campo de vetores $X_i, i = \{1, 3, 5, 7\}$ é ingressante e em C_2, C_4, C_6 e C_8 o campo de vetores $X_i, i = \{2, 4, 6, 8\}$ é egressante.

Considere N uma D -vizinhança tal que Z é transversal à ∂N . Nas componentes onde o campo Z é ingressante, seja $L_i = \partial N \cap C_i$. Assim o par (N, L) , onde $L = \bigcup_{i=1,3,5,7} L_i$, é um D -par índice. E portanto, $\mathfrak{h}(D) = [N/L]$ é um bouquet de seis círculos.

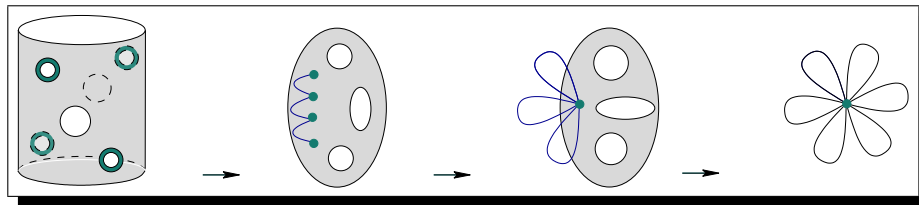


Figura 5.4: $\mathfrak{h}(D)$

5.2.2 O Índice de Conley para Inclusões Diferenciáveis e Fluxos Multivaluados

Concluimos observando que em [Mr] e [Ku] é apresentado um índice de Conley para fluxos multivaluados bem como para inclusão diferencial. Porém a abordagem adotada nestes trabalhos é mais analítica e difere da nossa abordagem mais geométrica. Além disso, buscamos um invariante topológico para a região de descontinuidade D , o que não ocorre nos trabalhos citados.

APÊNDICE A

Detalhamento das Demonstrações de Existência e Invariância de um Par Índice

A.1 Existência

Apresentamos a seguir alguns passos da construção desse par índice.

Teorema A.1.1 (Existência de Par Índice). *Sejam $F \subset M$ um fluxo local, $N \subset M$ uma vizinhança isolante do conjunto invariante isolado $S \subset F$ e U uma vizinhança qualquer de S em M . Então existe um par índice (N_1, L_1) para S em F tal que N_1, L_1 são positivamente invariantes em N e $\overline{N_1 \setminus L_1} \subset U$.*

Considere os conjuntos,

$$\begin{aligned} M^+ &= inv^+(N) = \{x \in N : \varphi([0, \infty), x) \subset N\} \\ M^- &= inv^-(N) = \{x \in N : \varphi((-\infty, 0], x) \subset N\}. \end{aligned}$$

A seguinte afirmação nos dá condições sobre K para que $P(N, K)$ seja compacto e garante a existência de uma vizinhança compacta N'_1 de $inv^-(N)$ positivamente invariante em N .

Afirmção A.1.2. Seja $F \subset M$ um fluxo local e seja $N \subset F$ uma vizinhança isolante do conjunto invariante isolado $S \subset F$. Então

- i) se $K \subset N$ é compacto e $K \cap \text{inv}^+(N) = \emptyset$, então $P(K, N)$ é compacto.
- ii) Para toda vizinhança aberta U de $\text{inv}^-(N)$ em M , existe uma vizinhança compacta N'_1 de $\text{inv}^-(N)$ em N tal que $N'_1 \subset N$ e N'_1 é positivamente invariante em N .

Seja W uma vizinhança compacta em N tal que $\text{inv}^-(N) \cap W = \emptyset$. A construção de N'_1 segue os seguintes passos.

1. Se $K \subset N$ é compacto e $\text{inv}^-(N) \subset P(K, N) \subset U \cup (N \setminus W)$, então o conjunto $P(K, N)$ é compacto.
2. Existe um tempo positivo t^* , tal que se $\varphi([-t^*, 0], x) \subset \overline{N \setminus W}$ então $x \in U \cap (N \setminus W)$.
3. Considere os conjuntos,

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \text{inv}^-(N) : \varphi([0, t^*], x) \subset N\} \\ B &= \{x \in \text{inv}^-(N) : \varphi([0, t^*], x) \not\subset N\}. \end{aligned}$$

Sejam $x \in A$ e $0 \leq \mu \leq t^*$. Então

$$\varphi([-t^*, 0], \varphi(x, \mu)) \subset \varphi([\mu - t^*, \mu], x) \subset \varphi((-\infty, t^*], x) \subset \overline{N \setminus W}$$

Por (2) temos $\varphi(\mu, x) \in U \cap (N \setminus W) \subset U \cap (M \setminus W)$. Logo existe uma vizinhança aberta U_x de x em M tal que $\varphi([0, t^*], U_x) \subset U \cap (M \setminus W)$.

Seja $x \in B$. Existe $t_x < t^*$ tal que $\varphi([0, t_x], x) \subset N$ e $\varphi(t_x, x) \notin N$. Para todo $0 \leq \mu \leq t_x < t^*$ temos

$$\varphi([-t^*, 0], \varphi(x, \mu)) \subset \overline{N \setminus W}$$

Por (2) temos $\varphi(\mu, x) \in U \cap (M \setminus W)$. Logo existe uma vizinhança aberta U_x de x em M tal que $\varphi([0, t_x], U_x) \subset U \cap (M \setminus W)$ e $\varphi(t_x, U_x) \cap N = \emptyset$.

Assim $\{U_x\}_{x \in \text{inv}^-(N)}$ forma uma cobertura de $\text{inv}^-(N)$. Como $\text{inv}^-(N)$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_{x_j}\}_{j=\{1, \dots, s\}}$ cobrindo $\text{inv}^-(N)$.

Seja $K = \cup K_j$, onde $K_j = \overline{U_{x_j}} \cap N$. Defina então $N'_1 = P(K, N)$.

$$4. N'_1 \subset U \cap (N \setminus W).$$

O conjunto N'_1 , assim construído, é uma vizinhança de $inv^-(N)$ em N que é positivamente invariante em N e $N'_1 = P(K, N) \subset U \cap (N \setminus W)$. Portanto, usando (1) temos que N'_1 é compacto.

Temos que $inv^+(N)$ e $inv^-(N)$ são compactos e ainda $S = inv^+(N) \cap inv^-(N)$.

Existe uma vizinhança aberta U^+ de $Inv^+(N)$ em N e U^- de $Inv^-(N)$ em N tal que

$$cl(U^+ \cap U^-) \subset U \cap int(N)$$

Considere então,

$$L_1 = P(N \setminus U^+, N)$$

$$N_1 = N'_1 \cup N_o$$

O par (N_1, L_1) assim definido é um par índice, mostrando a existência de um par índice como enunciado no teorema.

A.2 Invariância

Para a prova do teorema da invariância, mostra-se que para qualquer conjunto isolado S em um fluxo local F , a coleção

$$\{N_1/L_1 : (N_1, L_1) \text{ é um par índice para } S \text{ em } F\}$$

juntamente com uma certa classe de homotopia de aplicações induzidas de fluxos é um sistema simples conexo. Um sistema *simples conexo* é uma subcategoria dos espaços pontuados e classes de homotopias de aplicações entre eles, com a propriedade que para quaisquer dois objetos existe um único morfismo entre eles (em cada direção). Mais precisamente, uma coleção I_0 de espaços pontuados juntamente com uma coleção I_m de classes de homotopia de aplicações entre eles, tais que

- $hom(X, \overline{X})$ é não vazio e consiste de um único elemento para cada par ordenado X, \overline{X} ;
- Se $[f] \in hom(X, \overline{X})$ e $[g] \in hom(\overline{X}, \overline{\overline{X}})$, então $[g \circ f] \in hom(X, \overline{\overline{X}})$;
- $hom(X, X) = \{[Id_X]\} \forall X \in I_0$.

Segue abaixo três afirmações que basicamente mostram essa propriedade.

Afirmação A.2.1. Considere N uma vizinhança isolante de S e U uma vizinhança de S em F . Então existe $t > 0$ tal que se $\varphi([-t, t], x) \subset N$ então $x \in U$.

Sejam (N_1, L_1) e (\bar{N}_1, \bar{L}_1) dois pares índice para S . Então existe $T \geq 0$ tal que $\forall t \geq T$ temos

$$\varphi([-t, t], x) \subset N_1 \setminus L_1 \Rightarrow x \in \bar{N}_1 \setminus \bar{L}_1 \quad (\text{A.1})$$

$$\varphi([-t, t], x) \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{L}_1 \Rightarrow x \in N_1 \setminus L_1. \quad (\text{A.2})$$

Vamos agora definir uma aplicação induzida do fluxo φ de N_1/L_1 em $\bar{N}_1 \setminus \bar{L}_1$ para quaisquer dois pares índice (N_1, L_1) e (\bar{N}_1, \bar{L}_1) .

Afirmação A.2.2. Sejam (N_1, L_1) e (\bar{N}_1, \bar{L}_1) pares índice para o conjunto isolado S e $T \geq 0$ tais que valham A.1 e A.2. Defina a aplicação,

$$f : N_1/N_0 \times [T, \infty) \longrightarrow \bar{N}_1/\bar{N}_0$$

dada por,

$$f([x, t]) = f^t([x]) = \begin{cases} [\varphi(3t, x)] & , \text{ se } \varphi([0, 2t], x) \subset N_1 \setminus N_0 \\ & \text{ou } \varphi([t, 3t], x) \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0 \\ [\bar{N}_0] & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Para $x \in N_1$ e $t \geq T$ temos que f assim definida é contínua.

Afirmação A.2.3. Sejam (N_1, N_0) , (\bar{N}_1, \bar{N}_0) e $(\bar{\bar{N}}_1, \bar{\bar{N}}_0)$ pares índice para S . Tome $\bar{T} \geq 0$ satisfazendo A.1 e A.2 e suponha que as implicações:

I) Se $\varphi([-t, t], x) \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0$ então $x \in \bar{\bar{N}}_1 \setminus \bar{\bar{N}}_0$;

II) Se $\varphi([-t, t], x) \subset \bar{\bar{N}}_1 \setminus \bar{\bar{N}}_0$ então $x \in \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0$;

se verifiquem para $t \geq \bar{T}$.

Seja agora

$$\bar{f} : \bar{N}_1/\bar{N}_0 \times [T, \infty) \longrightarrow \bar{\bar{N}}_1/\bar{\bar{N}}_0$$

dada por,

$$\bar{f}([x, t]) = \begin{cases} [\varphi(3t, x)] & , \text{ se } \varphi([0, 2t], x) \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0 \\ & \text{ou } \varphi([t, 3t], x) \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0 \\ [\bar{N}_0] & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então a seguinte equação é válida para $t \geq \max\{T, \bar{T}\}$ e $x \in N_1$

$$\bar{f}(f([x, t]), t) = \begin{cases} [\varphi(6t, x)] & , \text{ se } \varphi([0, 4t], x) \subset N_1 \setminus N_0 \\ & \text{ou } \varphi([2t, 6t], x) \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0 \\ [\bar{N}_0] & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam $F \subset \Gamma$ um fluxo local, S um conjunto invariante isolado e (N, L) um par índice para S . Considere $I(S) = I(S, F) = (I_0, I_m)$ onde,

$$I_0 = \{N_1/L_1 : (N_1, L_1) \text{ é um par índice para } S \text{ em } F\}$$

$$I_m = \{[f^t] : N_1/L_1, \bar{N}_1/\bar{L}_1 \in I_0 \text{ e } f^t : N_1/L_1 \rightarrow \bar{N}_1/\bar{L}_1 \text{ definida na Afirmação A.2.2}\}$$

A Afirmação A.2.2 garante a existência de uma classe de homotopia de aplicações em I_m entre quaisquer dois espaços $N_1/L_1, \bar{N}_1/\bar{L}_1$ e ainda que $[Id_{N_1/L_1}] \in I_m$. A Afirmação A.2.3 mostra que a composição de quaisquer dois morfismos em I_m permanece em I_m . Juntamente com o fato que $hom(N_1/L_1, \bar{N}_1/\bar{L}_1)$ consiste de um único elemento, temos que $I(S, F)$ é um sistema simples conexo.

Como $I(S, F)$ é um sistema simples conexo, segue que morfismos em I_m são equivalências de homotopia, isto é, dada $f^t : N_1/L_1 \rightarrow \bar{N}_1/\bar{L}_1$ e $g^t : \bar{N}_1/\bar{L}_1 \rightarrow N_1/L_1$ temos que $f^t \circ g^t \sim Id_{\bar{N}_1/\bar{L}_1}$ e $g^t \circ f^t \sim Id_{N_1/L_1}$. Portanto $h(S)$ independe da escolha do par índice.

BIBLIOGRAFIA

- [AVK] Andronov, A.A., Vitt, A.A., Khaikin, S.E., *Theory of Oscillators*, Dover, New York, (1966).
- [Be] Benci, V., *A New Approach to The Morse-Conley Theory and Some Applications* Ann. Mat. Pura Appl., 158 (1991), no. 4 pp. 231–305.
- [BMR1] Bertolim, M.A., Mello, M.P., De Rezende, K.A., *Lyapunov Graph Continuation*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 23 (2003), pp. 1–58.
- [BMR2] Bertolim, M.A., Mello, M.P., De Rezende, K.A., *Poincaré-Hopf Inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc., 357 (2005), no.10, pp. 4091–4129.
- [BMR3] Bertolim, M.A., Mello, M.P., De Rezende, K.A., *Poincaré-Hopf and Morse Inequalities for Lyapunov Graphs*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 25 (2005), pp. 1–39.
- [Bz] Bezerra, V.M.R., *Teoria de Estratificação e Condições de Regularidade*, Dissertação de mestrado, ICMC-USP São Carlos, (2007).
- [BPS] Broucke, M.E., Pugh, C.C, Simić, S.N., *Structural Stability of Piecewise Smooth Systems*, Computational and Applied Mathematics 20 (2001), no.1-2, pp. 51–89.
- [Co] Conley, C., *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Lecture Notes 38 A.M.S. Providence, R.I. (1978).

- [Fi] Fillipov, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Right Hand Sides*, Kluwer, (1988).
- [FR] Franks, J., Richeson, D., *Shift Equivalence and the Conley Index*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 7, pp. 3305–3322.
- [FX] Fu, X.C., Xu, K.H., *The Conley Index and Bifurcation Points*, Nonlinear Analysis 19 (1992), no.12, pp. 1137–1142.
- [Ko] Koslova, V.S., *Roughness of a Discontinuous System*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika, 5 (1984), pp. 16–20.
- [Ku] Kunze, M., *Non-smooth Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, 1744 Springer, (2000).
- [LT] Llibre, J., Teixeira, M.A., *Global Asymptotic Stability for a Class of Discontinuous Vector Fields in R^2* , Dynamical Systems, 22 (2007) no.2, pp.133–146.
- [SM] Machado, A.F., Sotomayor, J., *Structurally Stable Discontinuous Vector fields in The Plane*, Qualitative Theory of Dynamical System 3 (2002), pp. 227–250.
- [Mr] Mrozek, M., *A Cohomological Index of Conley Type for Multi-Valued Admissible Flows*, J. Differential Equations 84 (1990), no. 1, 15–51.
- [Re] Reineck, J.F., *Continuation to Gradient Flows*, Duke Mathematical Journal 64 (1991), no.2, pp. 261–269.
- [Ry] Rybakowski, K.P., *On the Index for Infinite-Dimensional Semiflows*, Trans. Amer. Math. Soc., 269 (1982), pp. 351–382.
- [So] Salaman, D., *Connected Simple Systems and the Conley Index of Isolated Invariant Sets*, Transactions of the American Mathematical Society, 291 (1985), pp. 1–41.
- [ST] Sotomayor, J., Teixeira, M.A., *Regularization of Discontinuous vector fields*, International Conference on Differential Equations, pp. 207–233, Lisboa, (1995).
- [Sz] Szymczak, A., *The Conley Index for Discrete Semidynamical Systems*, Topology Appl. 66 (1995), no. 3, pp. 215–240.

-
- [Te] Teixeira, M.A., *Sobre Conjuntos Estratificados*, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia USP São Carlos, (1971).
- [Ts] Tsypkin, Ya.Z., *Relay control systems*, Cambridge University Press, (1984).