



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MAYARA DUARTE DE ARAUJO CALDAS

**SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES POR
PARTES (EM INFINITAS ZONAS):
ESTABILIDADE ESTRUTURAL E
ASSINTÓTICA**

CAMPINAS

2019

MAYARA DUARTE DE ARAUJO CALDAS

**SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES POR
PARTES (EM INFINITAS ZONAS):
ESTABILIDADE ESTRUTURAL E
ASSINTÓTICA**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: RICARDO MIRANDA MARTINS

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Mayara Duarte de Araujo Caldas e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins.

CAMPINAS
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C126s Caldas, Mayara Duarte de Araujo, 1995-
Sistemas dinâmicos lineares por partes (em infinitas zonas) : estabilidade estrutural e assintótica / Mayara Duarte de Araujo Caldas. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas lineares por partes. 2. Singularidades (Matemática). 3. Estabilidade estrutural. I. Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Linear dynamical systems piecewise (in infinite zones) : structural and asymptotic stability

Palavras-chave em inglês:

Piecewise linear systems

Singularities (Mathematics)

Structural stability

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestra em Matemática

Banca examinadora:

Ricardo Miranda Martins

Iris de Oliveira Zeli

Kamila da Silva Andrade

Data de defesa: 15-03-2019

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9112-0192>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0685513886290359>

**Dissertação de Mestrado defendida em 15 de março de 2019 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). IRIS DE OLIVEIRA ZELI

Prof(a). Dr(a). KAMILA DA SILVA ANDRADE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Aos meus pais Acácia e Francisco,
e à minha irmã Letícia.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela minha vida, pelo seu amor e por sempre estar ao meu lado me guiando.

Aos meus pais, Acácia e Francisco, agradeço de coração por todo amor, por me permitirem fazer parte de uma família excepcional, pelos ensinamentos ao longo da vida, por todo o cuidado até hoje, por me tornarem a pessoa que sou, por sempre me incentivarem e acreditarem no meu potencial. Sem eles, nada disso seria possível.

À minha irmã, Letícia, sou grata por me tornar a irmã mais velha de uma pessoa maravilhosa, por me permitir cuidar dela, mesmo sendo muitas vezes ela que cuida de mim, por me ensinar várias coisas, pelas artes feitas em casa e por fazer minha vida mais alegre.

Aos demais familiares, agradeço pelo amor e carinho, pelas boas risadas e conversas em volta da mesa, pelo apoio e incentivo ao longo desta jornada.

De forma especial, sou grata ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins, pela confiança depositada no meu trabalho, por todos os conhecimentos transferidos nesses anos, pela paciência e disposição em me ajudar no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a todos os professores, de todos os níveis, por me darem a base necessária para fazer um bom trabalho. Em especial ao Prof. Dr. Yuri Bozhkov, pelos ensinamentos no período em que fui PAD de Cálculo I das suas turmas.

Aos meus amigos da Unicamp e de fora dela, agradeço pela amizade, pelo carinho, pelas boas conversas, pelas risadas e por toda ajuda nesse caminho.

Reservo um agradecimento especial ao Alfredo Vitorino, por todo carinho, companheirismo, compreensão, incentivo e ajuda no decorrer desta jornada, por tornar o caminho mais leve e alegre.

A todos os funcionários da Unicamp, em especial do IMECC, pelo excelente trabalho e por sempre estarem dispostos a ajudar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e também da Fundação de Amparo e Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2016/21975-8.

Por fim, a todos aqueles que de alguma forma tornaram a concretização deste trabalho possível.

*Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível.
Charles Chaplin*

RESUMO

Neste trabalho estudamos sistemas dinâmicos suaves por partes, dando ênfase a uma classe de sistemas que são lineares em infinitas zonas do plano, com o objetivo de analisar a estabilidade assintótica de um ponto singular e a estabilidade estrutural de campos vetoriais dentro dessa classe.

No primeiro caso, consideramos as zonas como sendo quadrados abertos de área unitária e definimos em cada quadrado um campo linear homogêneo, definindo no plano um campo vetorial descontínuo. Para este campo, estabelecemos condições suficientes para que a origem seja globalmente assintoticamente estável.

No segundo caso, consideramos a divisão do plano em uma malha retangular não uniforme e definimos um campo vetorial polinomial que, quando restrito ao interior de cada zona, é linear e não-homogêneo. Para esta classe de campos descontínuos, estabelecemos condições suficientes para que o campo seja estruturalmente estável.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Suaves por Partes. Estabilidade Assintótica. Estabilidade Estrutural.

ABSTRACT

In this work we study piecewise smooth dynamical systems, in particular a class of planar systems with infinitely many zones, to obtain some results on the asymptotic stability of a singular point and the structural stability of vector fields in this class of dynamical systems.

In the first case, we consider the zones as open unitary squares and we define in each square a linear homogeneous vector field, giving rise to a discontinuous vector field. We establish sufficient conditions such that the origin is globally asymptotic stable, for this class of dynamical systems.

In the second case, we consider the plane divided into a non-uniform rectangular mesh and we define a polynomial vector field that is linear and non-homogeneous in each rectangle. We study the structural stability for this class of vector fields.

Keywords: Piecewise Smooth Differential Equations. Structural Stability. Asymptotic Stability.

SUMÁRIO

Introdução	13
1 Preliminares	15
1.1 Sistemas de Filippov	15
1.1.1 Órbitas e Singularidades	15
1.1.2 Separatrizes, Órbitas Periódicas e Ciclos	27
1.1.3 Equivalência Topológica	30
1.2 Estabilidade Estrutural em Sistemas de Filippov	33
1.3 Regularização Teixeira-Sotomayor	37
1.4 Estabilidade Segundo Lyapunov	39
1.5 O Teorema de Poincaré-Bendixson	41
1.6 Compactificação de Poincaré	42
2 Estabilidade Assintótica	48
2.1 Apresentação do Resultado Principal	48
2.2 A Extensão para $\mathbb{R}^2 \setminus S''$	50
2.3 A Extensão para \mathbb{R}^2	52
2.4 Exemplo das Extensões	55
2.5 Prova do Resultado Principal	62
3 Estabilidade Estrutural	68
3.1 Campos Vetoriais Lineares por Partes	68
3.2 Singularidades e Órbitas Periódicas no Infinito	71
3.3 Conceitos Complementares	79
3.4 Teorema de Estabilidade e Genericidade	82

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes é um assunto que tem recebido muita atenção nos últimos anos (veja por exemplo [13]). Enquanto os sistemas dinâmicos suaves (de classe C^k) já possuem uma teoria sólida desde a década de 60, incluindo resultados importantes sobre estabilidade estrutural (veja [14]), somente nas duas últimas décadas os sistemas dinâmicos suaves por partes foram estudados de um ponto de vista matemático.

Considerando as aplicações existentes, o estudo formal dos sistemas dinâmicos suaves por partes (ou descontínuos) começou com o caso dos sistemas planares lineares por partes, ou então no caso um pouco mais geral de sistemas planares polinomiais por partes, porém cuja descontinuidade estava sobre uma reta. Nesse sentido, os primeiros resultados sólidos sobre estabilidade estrutural e bifurcações podem ser encontrados em [7].

Paralelamente, alguns autores começaram a abordar situações mais gerais, como sistemas suaves por partes definidos em variedades, como podemos ver em [2], sistemas planares com duas linhas de descontinuidade ou sistemas tridimensionais descontínuos sobre um ou mais planos, conforme [10]. Além disso, muita ênfase foi dada ao estudo da existência de ciclos limite para tais sistemas, devido à forte relação com a teoria de controle, como visto em [1].

Nesta dissertação, estudamos dois casos relevantes de sistemas suaves por partes. No primeiro caso, estudamos uma classe de sistemas suaves por partes, que são lineares no interior de infinitos quadrados unitários no plano \mathbb{R}^2 . Temos o campo definido em \mathbb{R}^2 com exceção do conjunto dos pontos nas fronteiras dos quadrados, que denotamos por S , e estabelecemos condições para que a origem seja globalmente assintoticamente estável. No segundo caso, dividimos o plano em uma malha não uniforme (Γ, Δ) e definimos um campo vetorial polinomial que, restrito ao interior de cada zona da malha, é linear não-homogêneo. Denotamos por $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ o espaço de todos os campos desta forma e apresentamos condições para que um campo em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ seja estruturalmente estável.

O estudo de sistemas suaves por partes cuja região de descontinuidade é uma malha, seja finita ou infinita, introduz um complicador extra na teoria. A convenção de Filippov precisa ser aplicada várias vezes, e o procedimento de regularização (em particular a regularização de Sotomayor-Teixeira) não tem aplicação tão imediata.

Os principais resultados que demonstramos nesta dissertação são estão a seguir

Teorema A: *Seja X um campo vetorial descontínuo Hurwitz em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, isto é, todos os autovalores da matriz jacobiana $DF(x)$ têm parte real negativa em cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$, com $\delta(X) < 0$, onde $\delta(X)$ é o supremo da parte real dos autovalores das matrizes que definem o campo X no interior de cada quadrado de área unitária no plano. Então, a origem é globalmente assintoticamente estável para X .*

Teorema B: *Para o conjunto $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ dos campos vetoriais que satisfazem as condições apresentadas por Garcia e Sotomayor em [15] de (Γ, Δ) -singularidades, de (Γ, Δ) -órbitas periódicas e não possuem (Γ, Δ) -conexões de separatrizes, valem as seguintes afirmações:*

1. $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é aberto em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$,
2. $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é denso em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$,
3. Todo $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é estruturalmente estável.

O Teorema A se encontra em [11] e o Teorema B pode ser visto em [15] e na dissertação [8].

A estrutura desta dissertação é dada da seguinte forma. No Capítulo 1, exibimos as ferramentas necessárias para a demonstração dos teoremas acima. No Capítulo 2, descrevemos com detalhes um campo vetorial definido em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ e apresentamos algumas definições e resultados importantes para a demonstração do Teorema A. Já no Capítulo 3, descrevemos os campos vetoriais pertencentes a $\Xi_{\Gamma, \Delta}$, estudamos as singularidades, órbitas periódicas e conexões de separatrizes para estes campos, definimos quais são as condições mencionadas no Teorema B e apresentamos uma demonstração deste resultado.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo apresentar algumas noções e ferramentas que são importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Na primeira seção, estudamos Sistemas de Filippov, com base nas referências [5], [7] e [9]. O comportamento genérico local desses sistemas é abordado na segunda seção, na qual também estudamos a estabilidade estrutural destes sistemas. A terceira seção trata da regularização de campos vetoriais lineares por partes, desenvolvida por Teixeira e Sotomayor em [11] e [16]. Nas duas seções seguintes enunciamos o Teorema de Lyapunov e o Teorema de Poincaré-Bandixon, que podem ser vistos em [3] e [20]. Por fim, na última seção exibimos a Compactificação de Poincaré para a qual [6] e [19] são boas referências.

1.1 Sistemas de Filippov

Nesta seção, abordamos os conceitos básicos em Sistemas Dinâmicos por Partes, também conhecidos por Sistemas de Filippov. O estudo da dinâmica nesses sistemas não pode ser determinado propriamente pela teoria clássica de sistemas dinâmicos suaves, por conta da existência de uma variedade de descontinuidade. Dessa forma, os conceitos são adaptados com o intuito de manter as características importantes existentes em sistemas suaves.

Inicialmente, definimos trajetórias, órbitas e singularidades, exibindo alguns exemplos para uma melhor compreensão. Em seguida, trabalhamos com separatrizes, órbitas periódicas e ciclos. Por fim, definimos equivalência topológica para esse tipo de sistema.

1.1.1 Órbitas e Singularidades

Sejam X e Y campos vetoriais suaves definidos em um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ e, sem perda de generalidade, assuma que a origem pertença a U . Considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de uma função \mathcal{C}^r , com $r > 1$, (\mathcal{C}^r denota o conjunto das

funções continuamente diferenciáveis de ordem r), para o qual 0 é valor regular. Então, a curva $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$ é uma subvariedade de dimensão 1 e divide o aberto U em dois conjuntos abertos,

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U : f(x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{(x, y) \in U : f(x, y) < 0\}.$$

Um *Sistema Planar de Filippov* é um campo vetorial suave por partes definido da seguinte forma:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

denotado por $Z = (X, Y)$, a fim de identificar as componentes do campo. Além disso, assumiremos que X e Y são campos de classe \mathcal{C}^k com $k > 1$ em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, onde $\overline{\Sigma^\pm}$ denota o fecho de Σ^\pm .

Denotamos por \mathcal{Z}^k o espaço dos campos vetoriais desse tipo, que pode ser tomado como $\mathcal{Z}^k = \mathcal{X}^k \times \mathcal{X}^k$, onde, por abuso de notação, \mathcal{X}^k denota o conjunto dos campos vetoriais de classe \mathcal{C}^k definidos em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$. Consideramos \mathcal{Z}^k com a topologia produto \mathcal{C}^k .

Para estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y)$ em U , precisamos definir a trajetória local por um ponto $p \in U$, isto é, devemos definir o fluxo $\varphi_z(t, p)$ de (1.1.1). Se $p \in \Sigma^\pm$, então a trajetória por p é dada pelos campos X e Y de maneira usual. Porém, se $p \in \Sigma$, devemos ter mais cuidado ao definir a trajetória. A fim de estender a definição de trajetória para Σ , dividiremos a subvariedade de descontinuidade Σ no fecho de três regiões disjuntas, dependendo para onde o campo vetorial aponta:

1. Região de Costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$,
2. Região de Deslize: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$,
3. Região de Escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$,

onde $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$ e $Yf(p) = \langle Y(p), \nabla f(p) \rangle$ são as derivadas de Lie de f com respeito ao campo X em p e de f com respeito ao campo Y em p , respectivamente. Essas três regiões são abertos da topologia induzida em Σ e podem ter mais que uma componente conexa. A Figura 1.1 ilustra exemplos das três regiões.

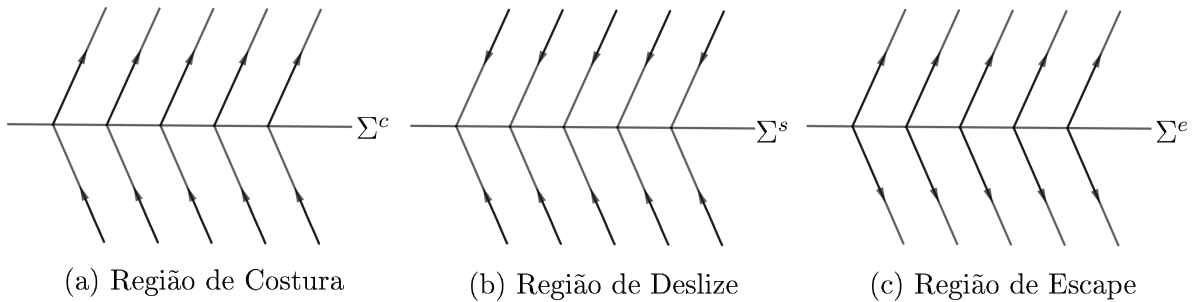


Figura 1.1: Exemplos das três regiões definidas na variedade de descontinuidade.

Pode-se observar que ao definir as regiões acima não estamos incluindo os *pontos de tangência*, ou seja, os pontos $p \in \Sigma$ para os quais $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$. Esses pontos estão nas fronteiras das regiões Σ^c , Σ^s e Σ^e , que serão denotadas por $\partial\Sigma^c$, $\partial\Sigma^s$ e $\partial\Sigma^e$, respectivamente.

Observe que, se $X(p) = 0$, então $Xf(p) = 0$, logo os pontos críticos de X em Σ também estão incluídos nos pontos de tangência. Agora, se $X(p) \neq 0$ e $Xf(p) = 0$, temos que a trajetória de X passando por p é, de fato, tangente à Σ .

Podemos distinguir os tipos de tangências entre um campo suave e uma variedade, dependendo do modo como se dá o contato entre a trajetória do campo e a variedade. A seguir, definimos dois tipos de tangências.

Definição 1.1.1. *Um campo vetorial suave X possui uma dobra ou tangência quadrática com $\Sigma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$ em um ponto $p \in \Sigma$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$, sendo $X^2f(p) = \langle X(p), \nabla Xf(p) \rangle$.*

Definição 1.1.2. *Um campo vetorial suave X possui uma cúspide ou tangência cúbica com $\Sigma = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$ em um ponto $p \in \Sigma$ se $Xf(p) = X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$, sendo $X^3f(p) = \langle X(p), \nabla X^2f(p) \rangle$.*

Vamos definir a trajetória passando por um ponto p em Σ^c , Σ^s e Σ^e . Se $p \in \Sigma^c$, os campos vetoriais X e Y apontam ambos para Σ^+ ou Σ^- e, portanto, é suficiente justapor as trajetórias de X e Y que passam por p . Agora se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, temos que os campos apontam para direções opostas, sendo assim, não podemos concatenar as trajetórias. Desse modo, a órbita local é dada pela convenção de Filippov. Definimos assim o *campo vetorial deslizante*

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)). \quad (1.1.2)$$

Observe que Z^s representa a combinação linear convexa de $X(p)$ e $Y(p)$ de modo que $Z^s(p)$ seja tangente à Σ , além disso, sua trajetórias estão contidas em Σ^s ou Σ^e . Sendo assim, a trajetória por p é a trajetória definida pelo campo vetorial deslizante em (1.1.2). A Figura 1.2 mostra um campo vetorial deslizante da forma Z^s .

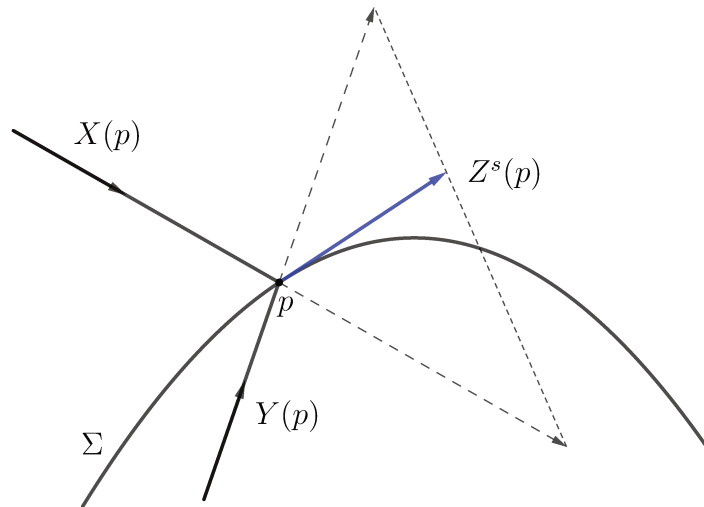


Figura 1.2: Campo Deslizante Z^s .

Observação 1.1.1. Recorde que o fluxo $\varphi_X(t, p)$ de um campo vetorial suave autônomo X definido em um conjunto aberto U satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p \end{cases} \quad (1.1.3)$$

e está definido para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde $I = I(p, X)$ é um intervalo que depende do ponto $p \in U$ e do campo X . Para facilitar a notação, deixaremos implícita a dependência do intervalo. Como estamos trabalhando com campos vetoriais autônomos, podemos escolher a origem no tempo $t = 0$.

Definição 1.1.3. A trajetória local (ou solução orbital) de um campo vetorial de Filippov da forma (1.1.1) por um ponto p é definida da seguinte forma:

1. Para $p \in \Sigma^+$ e $p \in \Sigma^-$, tais que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$, respectivamente, as trajetórias são dadas por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, respectivamente, para $t \in I \subset \mathbb{R}$.

2. Para $p \in \Sigma^c$, temos dois casos:

a) Se $X_f(p), Y_f(p) > 0$ e tomando a origem do tempo em p , a trajetória é definida por

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

b) Se $X_f(p), Y_f(p) < 0$ e tomando a origem do tempo em p , a trajetória é definida por

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

3. Para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) \neq 0$ definimos $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$, para $t \in I$, onde Z^s é o campo vetorial deslizante definido em (1.1.2).

4. Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que as definições de trajetórias para pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é esta trajetória estendida. Neste caso, chamaremos p um ponto de tangência regular.

5. Para os pontos p que não se enquadram nos itens acima, definimos $\varphi_Z(t, p) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Este é o caso dos pontos de tangência não regulares, chamados tangências singulares, os pontos críticos de X e Y em Σ^\pm e os pontos críticos do campo deslizante Z^s em $\partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$.

Definição 1.1.4. A órbita local de um ponto $p \in U$ é o conjunto

$$\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I\}.$$

Como estamos tratando de sistemas autônomos, utilizaremos os termos órbita e trajetória indistintamente, quando não houver perigo de confusão.

Observação 1.1.2. A convenção de Filippov preserva duas das principais propriedades dos sistemas dinâmicos suaves: cada ponto pertence a uma única órbita e o espaço de fase é decomposto como a união disjunta de todas as órbitas. Note que existe outra convenção sobre a estrutura das órbitas, veja [7].

Definição 1.1.5. Os pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ que satisfazem $Z^s(p) = 0$, isto é, os pontos críticos do campo vetorial deslizante, são chamados de pseudo-equilíbrios de Z ou equilíbrios singulares. Decorre da definição de Z^s que, neste caso, $X(p)$ e $Y(p)$ são linearmente dependentes.

Ainda mais, chamaremos de pseudonó estável qualquer ponto $p \in \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) < 0$, de pseudonó instável qualquer ponto $p \in \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) > 0$ e de pseudo-sela qualquer ponto $p \in \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) > 0$ ou $p \in \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) < 0$.

Definição 1.1.6. As singularidades do Sistema de Filippov (1.1.1) são:

1. $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$,
2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^s(p) = 0$,
3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$, isto é, os pontos p tais que $X_f(p) = 0$ ou $Y_f(p) = 0$ (tangências singulares ou regulares).

Qualquer outro ponto é chamado de ponto regular.

Em sistemas dinâmicos suaves, as singularidades, sendo zeros de campos vetoriais, correspondem a pontos críticos e, conseqüentemente, a trajetória passando por um desses pontos é somente o próprio ponto. Todavia, em sistemas de Filippov existem singularidades (tangências regulares) cuja órbita $\gamma(p) \neq \{p\}$. Por essa circunstância, classificaremos as singularidades como:

1. *Singularidade Distinguida:* pontos p tais que $\gamma(p) = \{p\}$. Elas fazem o papel dos pontos críticos nos sistemas dinâmicos suaves.
2. *Singularidade Não Distinguida:* pontos $p \in \Sigma$ que são pontos de tangência regulares e então, mesmo que eles não sejam pontos regulares, suas órbitas locais são homeomorfas a \mathbb{R} .

Definição 1.1.7. Uma singularidade distinguida é um ponto p tal que $\gamma(p) = \{p\}$ e pode ser classificada como:

1. um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, respectivamente, para $p \in \Sigma^\pm$;
2. um pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^s(p) = 0$, para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$;
3. um ponto de tangência singular, para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$.

As componentes X e Y do campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y)$ são definidas em vizinhanças abertas de $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Então, como em campos vetoriais suaves, X e Y podem possuir pontos críticos que não pertençam a $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Vamos nos referir a esses pontos críticos como *pontos críticos não admissíveis*, e aos pontos que são críticos do campo vetorial de Filippov nos referiremos por *pontos críticos admissíveis*. Analogamente, objetos invariantes (órbitas periódicas, variedades estáveis e instáveis) dos campos vetoriais X e Y que não pertencem a $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, também serão chamados de não admissíveis. A Figura 1.3 mostra um exemplo de ponto crítico não admissível.

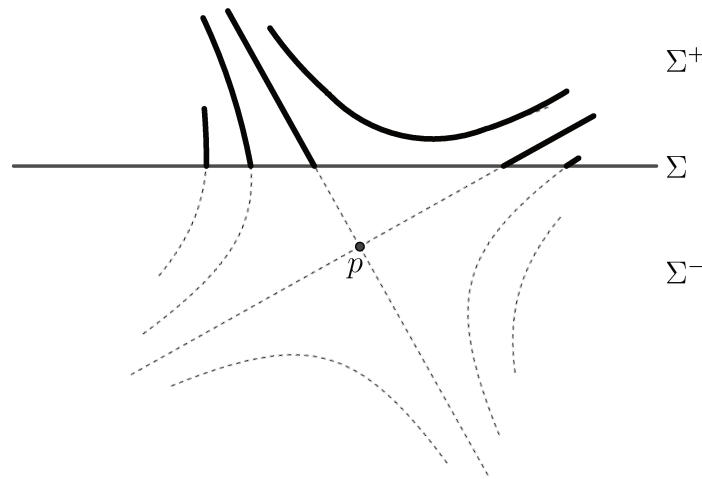


Figura 1.3: Exemplo de um ponto crítico não admissível de um Sistema de Filippov: $X(p) = 0$ com $p \in \Sigma^-$.

Mesmo que tenhamos escolhido a definição de órbita que nos garante unicidade, um ponto $p \in \Sigma$ pode pertencer ao fecho de muitas outras órbitas. Sendo assim, adotaremos a definição a seguir.

Definição 1.1.8. *Dada uma trajetória $\varphi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e um ponto $p \in \Sigma$, dizemos que p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$ e diremos que é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$.*

De acordo com a Definição 1.1.3, se $p \in \Sigma^c$ então p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer q pertencente à órbita $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap [0, \infty)\}$ e é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer q pertencente à órbita $\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap (-\infty, 0]\}$. Assim, a órbita por um ponto $p \in \Sigma^c$ é a união do ponto com suas órbitas de partida e chegada, isto é, $\{p\} \cup \gamma^+(p) \cup \gamma^-(p)$.

Exibimos agora alguns exemplos de pontos de tangência para ilustrar as definições dadas e as escolhas feitas nesta subseção. Considere $U = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$ para os exemplos a seguir.

Exemplo 1.1.1. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

Considere

$$Z_1(x, y) = \begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_1 f(x, 0) &= \langle X_1(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, x^2), (0, 1) \rangle = x^2, \\ X_1^2 f(x, 0) &= \langle X_1(x, 0), \nabla X_1 f(x, 0) \rangle = \langle (1, x^2), (2x, 0) \rangle = 2x, \\ X_1^3 f(x, 0) &= \langle X_1(x, 0), \nabla X_1^2 f(x, 0) \rangle = \langle (1, x^2), (2, 0) \rangle = 2. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$Y_1 f(x, 0) = \langle Y_1(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1.$$

Desse modo, obtemos que $X_1 f(x, 0) \cdot Y_1 f(x, 0) = x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Então, o único ponto de tangência de Z_1 é $p = (0, 0)$ que é um ponto de cúspide de X_1 com Σ . Além do mais, $X_1 f(x, 0) \cdot Y_1 f(x, 0) > 0$ se $x \neq 0$, logo, $\Sigma \setminus \{p\} = \Sigma^c$ e $p \in \partial \Sigma^c$. A Figura 1.4 mostra o retrato de fase do campo Z_1 .

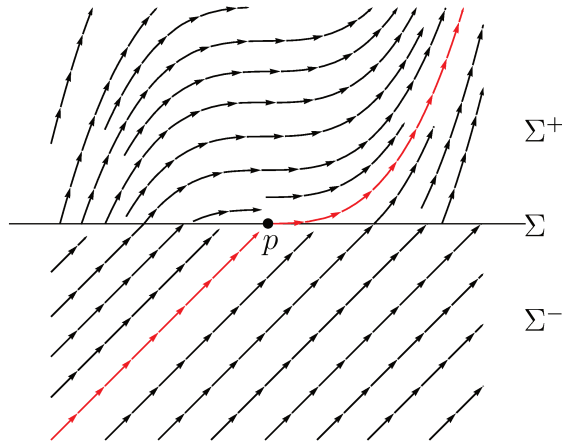


Figura 1.4: Retrato de fase do campo Z_1 .

Assim, de acordo com a Definição 1.1.3, a órbita passando por p é a união de suas órbitas de partida e chegada, como acontece com os pontos de Σ^c .

Exemplo 1.1.2. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere

$$Z_2(x, y) = \begin{cases} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7x \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_2 f(x, 0) &= \langle X_2(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x, \\ X_2^2 f(x, 0) &= \langle X_2(x, 0), \nabla X_2 f(x, 0) \rangle = \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = 2. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} Y_2 f(x, 0) &= \langle Y_2(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (2, 7x), (0, 1) \rangle = 7x, \\ Y_2^2 f(x, 0) &= \langle Y_2(x, 0), \nabla Y_2 f(x, 0) \rangle = \langle (2, 7x), (7, 0) \rangle = 14. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que $X_2 f(x, 0) \cdot Y_2 f(x, 0) = 14x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Então, o único ponto de tangência de Z_2 é $p = (0, 0)$ que é um ponto de dobra de X_2 e Y_2 . Além do mais, $X_2 f(x, 0) \cdot Y_2 f(x, 0) > 0$ se $x \neq 0$, logo, $\Sigma \setminus \{p\} = \Sigma^c$ e $p \in \partial\Sigma^c$. A Figura 1.5 mostra o retrato de fase do campo Z_2 .

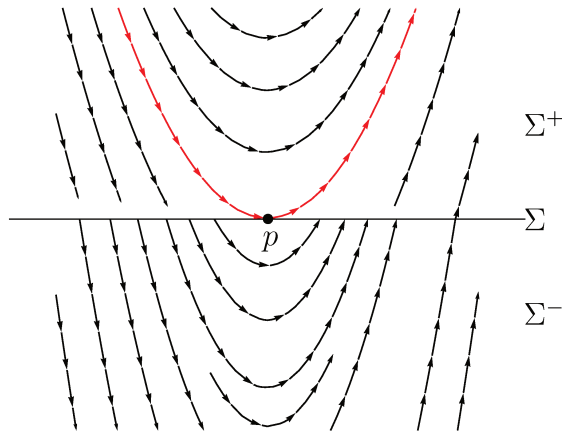


Figura 1.5: Retrato de fase do campo Z_2 .

Assim, de acordo com a Definição 1.1.3, a trajetória passando por p é dada por $\varphi_{Z_2}(t, p) = \varphi_{X_2}(t, p)$.

Exemplo 1.1.3. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere

$$Z_3(x, y) = \begin{cases} X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -x^2 \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

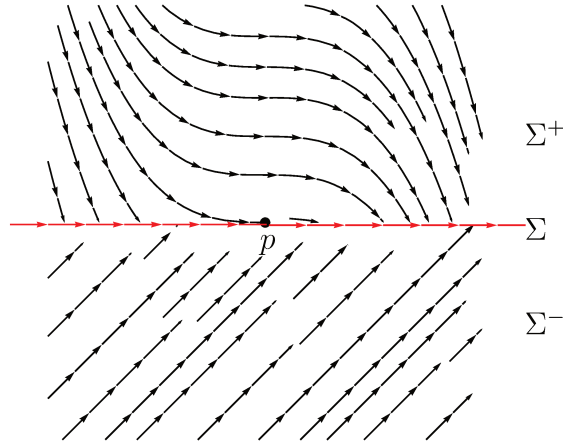
Temos que

$$\begin{aligned} X_3 f(x, 0) &= \langle X_3(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, -x^2), (0, 1) \rangle = -x^2, \\ X_3^2 f(x, 0) &= \langle X_3(x, 0), \nabla X_3 f(x, 0) \rangle = \langle (1, -x^2), (-2x, 0) \rangle = -2x, \\ X_3^3 f(x, 0) &= \langle X_3(x, 0), \nabla X_3^2 f(x, 0) \rangle = \langle (1, -x^2), (-2, 0) \rangle = -2. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$Y_3 f(x, 0) = \langle Y_3(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1.$$

Desse modo, obtemos que $X_3 f(x, 0) \cdot Y_3 f(x, 0) = -x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Então, o único ponto de tangência de Z_3 é $p = (0, 0)$ que é um ponto de cúspide de X_3 com Σ . Mas, se $x \neq 0$, obtemos que $X_3 f(x, 0) < 0$ e $Y_3 f(x, 0) > 0$, logo, $\Sigma \setminus \{p\} = \Sigma^s$ e $p \in \partial\Sigma^s$. A Figura 1.6 mostra o retrato de fase do campo Z_3 .

Figura 1.6: Retrato de fase do campo Z_3 .

Assim, de acordo com a Definição 1.1.3, a trajetória passando por p é dada pelo campo vetorial deslizante de Z_3 , que é dado por

$$Z_3^s(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}(1 \cdot (1, -x^2) + x^2 \cdot (1, 1)) = (1, 0).$$

Então, $\varphi_{Z_3}(t, p) = \varphi_{Z_3^s}(t, p) = (t, 0)$.

Exemplo 1.1.4. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere

$$Z_4(x, y) = \begin{cases} X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7x \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_4 f(x, 0) &= \langle X_4(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x, \\ X_4^2 f(x, 0) &= \langle X_4(x, 0), \nabla X_4 f(x, 0) \rangle = \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = 2. \end{aligned}$$

Mais ainda,

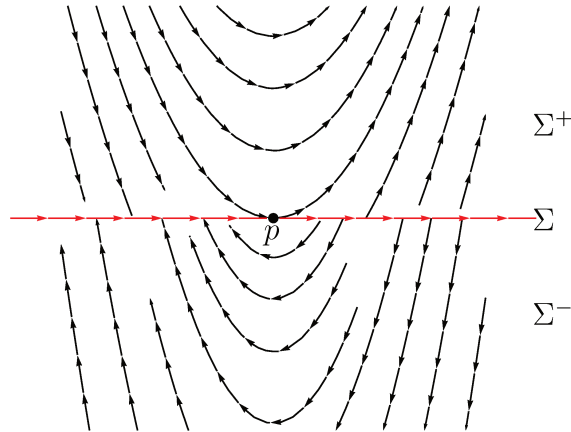
$$\begin{aligned} Y_4 f(x, 0) &= \langle Y_4(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (-2, -7x), (0, 1) \rangle = -7x, \\ Y_4^2 f(x, 0) &= \langle Y_4(x, 0), \nabla Y_4 f(x, 0) \rangle = \langle (-2, -7x), (-7, 0) \rangle = 14. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que $X_4 f(x, 0) \cdot Y_4 f(x, 0) = -14x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Então, o único ponto de tangência de Z_4 é $p = (0, 0)$ que é um ponto de dobra de X_4 e Y_4 . Além do mais, se $x > 0$ temos que $X_4 f(x, 0) > 0$ e $Y_4 f(x, 0) < 0$, enquanto, se $x < 0$ temos que $X_4 f(x, 0) < 0$ e $Y_4 f(x, 0) > 0$. Logo, $\Sigma^s = \{(x, 0) : x > 0\}$, $\Sigma^e = \{(x, 0) : x < 0\}$ e $p \in \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$. A Figura 1.7 mostra o retrato de fase do campo Z_4 .

Assim, de acordo com a Definição 1.1.3, a trajetória passando por p é dada pela trajetória do campo vetorial deslizante de Z_4 , que é dado por

$$Z_4^s(x, 0) = \frac{1}{-7x - 2x}(-7x \cdot (1, 2x) - 2x \cdot (-2, -7x)) = \left(\frac{1}{3}, 0\right).$$

Então, $\varphi_{Z_4}(t, p) = \varphi_{Z_4^s}(t, p) = \left(\frac{t}{3}, 0\right)$.


 Figura 1.7: Retrato de fase do campo Z_4 .

Os exemplos acima ilustram o fato de que pontos de tangência regulares, mesmo sendo singularidades, podem ser tomados como pontos regulares de Σ . Mostraremos a seguir alguns exemplos de tangência que são singularidades distinguidas, ou seja, suas órbitas são somente as próprias singularidades. O conjunto desses pontos pode ser classificado em três grupos.

O primeiro grupo dos pontos de tangência singular é formado por pontos em $\partial\Sigma^c$ que não são pontos de partida nem de chegada de nenhuma trajetória, de modo que as órbitas em torno desses pontos comportam-se como um foco clássico.

Exemplo 1.1.5. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere

$$Z_5(x, y) = \begin{cases} X_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -x + x^2 \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Temos que

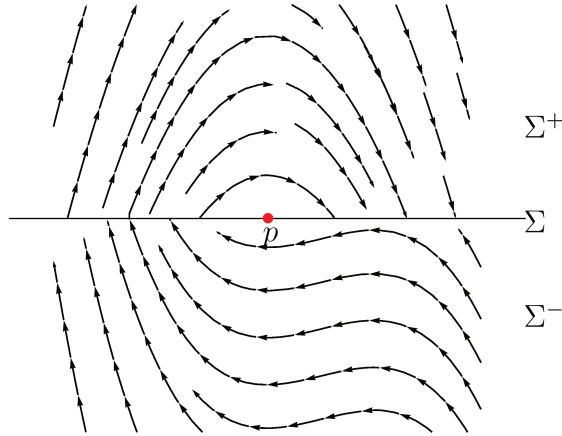
$$\begin{aligned} X_5 f(x, 0) &= \langle X_5(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, -2x), (0, 1) \rangle = -2x, \\ X_5^2 f(x, 0) &= \langle X_5(x, 0), \nabla X_5 f(x, 0) \rangle = \langle (1, -2x), (-2, 0) \rangle = 2. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} Y_5 f(x, 0) &= \langle Y_5(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (-1, -x + x^2), (0, 1) \rangle = -x + x^2, \\ Y_5^2 f(x, 0) &= \langle Y_5(x, 0), \nabla Y_5 f(x, 0) \rangle = \langle (-1, -x + x^2), (-1 + 2x, 0) \rangle = 1 - 2x. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que $p = (0, 0)$ é um ponto de dobra de X_5 e Y_5 . Além do mais, se $x \in (0, 1)$ temos que $X_5 f(x, 0) < 0$ e $Y_5 f(x, 0) < 0$, enquanto, se $x \in (-1, 0)$ temos que $X_5 f(x, 0) > 0$ e $Y_5 f(x, 0) > 0$. Logo, ao redor do ponto p temos uma região de costura. A Figura 1.8 mostra o retrato de fase do campo Z_5 .

As trajetórias de Z_5 espiralam em torno do ponto p , como ocorre em um foco para sistemas dinâmicos suaves.

Figura 1.8: Retrato de fase do campo Z_5 .

O próximo exemplo representa o segundo grupo, formado por pontos de tangência singulares que pertencem a $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$ ou a $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e$.

Exemplo 1.1.6. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere

$$Z_6^\pm(x, y) = \begin{cases} X_6^\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_6^\pm f(x, 0) &= \langle X_6^\pm(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (\pm 1, x), (0, 1) \rangle = x, \\ (X_6^\pm)^2 f(x, 0) &= \langle X_6^\pm(x, 0), \nabla X_6^\pm f(x, 0) \rangle = \langle (\pm 1, x), (1, 0) \rangle = \pm 1. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$Y_6 f(x, 0) = \langle Y_6(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1.$$

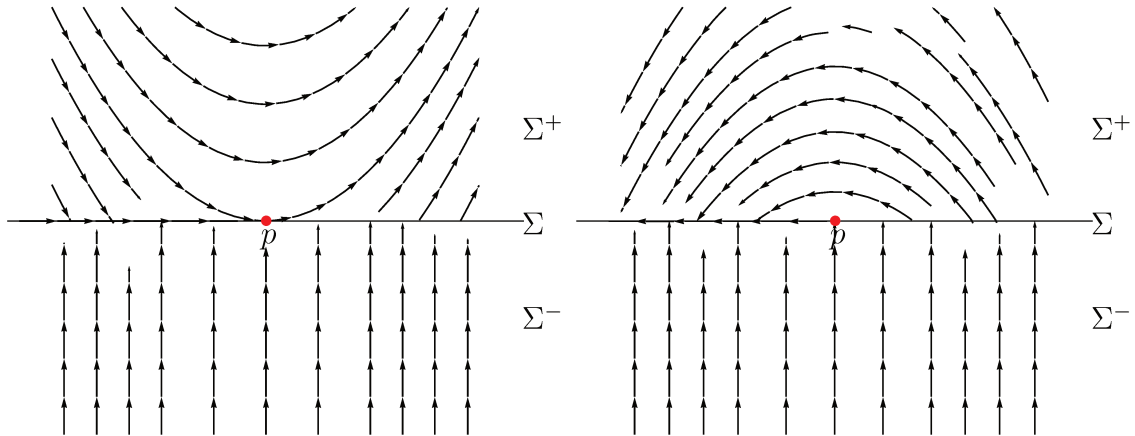
Desse modo, obtemos que $p = (0, 0)$ é um ponto de dobra de X_6^\pm em Σ . Além do mais, se $x > 0$ temos que $X_6^\pm f(x, 0) > 0$ e $Y_6 f(x, 0) > 0$, enquanto, se $x < 0$ temos que $X_6^\pm f(x, 0) < 0$ e $Y_6 f(x, 0) > 0$. Logo, $\Sigma^c = \{(x, 0) : x > 0\}$, $\Sigma^s = \{(x, 0) : x < 0\}$ e $p \in \partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$. A Figura 1.9 mostra os retratos de fase dos campos Z_6^+ e Z_6^- .

Assim, de acordo com a Definição 1.1.3, a trajetória passando por p é dada pelo campo vetorial deslizante de Z_6^\pm que é dado por

$$Z_6^s(x, 0) = \frac{1}{1-x} (1 \cdot (\pm 1, x) - x \cdot (0, 1)) = \left(\pm \frac{1}{1-x}, 0 \right).$$

Então, $\varphi_{Z_6^\pm}(t, p) = \varphi_{Z_4^s}(t, p) = \left(\frac{t}{3}, 0 \right)$.

Dessa maneira, para os pontos de Σ à esquerda de p suas órbitas são dadas pelo campo vetorial deslizante Z_6^s e para os pontos à direita de p as órbitas são dadas pelas órbitas de chegada e partida do ponto, que são as trajetórias de X_6^\pm e Y_6 , dado que esse ponto pertence a Σ^c . Portanto, a definição de órbitas em ambos os lados de p não coincidem, resultando que p é uma tangência singular para ambos os campos Z_6^+ e Z_6^- . Note que, invertendo a orientação do campo vetorial Y_6 , caímos no caso em que $p \in \partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$.


 Figura 1.9: Retratos de fase dos campos Z_6^+ e Z_6^- .

O terceiro grupo é formado por pontos de tangência singulares em $\partial\Sigma^c$ que são pontos de partida e de chegada de duas trajetórias diferentes de X e Y . Como diferentes trajetórias de X e Y partem (ou chegam) deste ponto, não temos unicidade de solução. Sendo assim, a única escolha que pode ser feita para manter a unicidade é considerar o próprio ponto como sua órbita.

Exemplo 1.1.7. Seja $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere

$$Z_7(x, y) = \begin{cases} X_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_7 f(x, 0) &= \langle X_7(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (1, x), (0, 1) \rangle = x, \\ X_7^2 f(x, 0) &= \langle X_7(x, 0), \nabla X_7 f(x, 0) \rangle = \langle (1, x), (1, 0) \rangle = 1. \end{aligned}$$

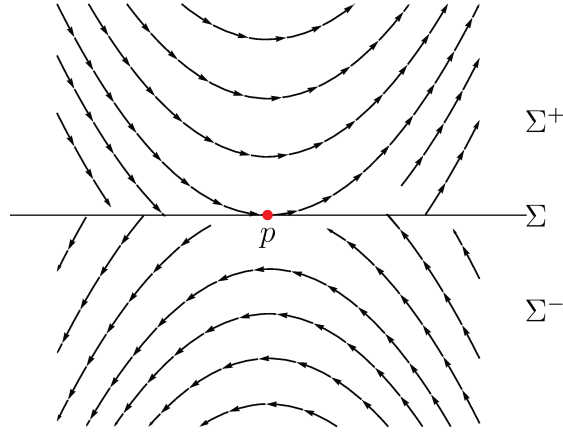
Mais ainda,

$$\begin{aligned} Y_7 f(x, 0) &= \langle Y_7(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (-1, x), (0, 1) \rangle = x, \\ Y_7^2 f(x, 0) &= \langle Y_7(x, 0), \nabla Y_7 f(x, 0) \rangle = \langle (-1, x), (1, 0) \rangle = -1. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que $X_7 f(x, 0) \cdot Y_7 f(x, 0) = x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Então, o único ponto de tangência de Z_2 é $p = (0, 0)$ que é um ponto de dobra visível de X_7 e Y_7 . Além do mais, $X_7 f(x, 0) \cdot Y_7 f(x, 0) > 0$ se $x \neq 0$, logo, $\Sigma \setminus \{p\} = \Sigma^c$ e $p \in \partial\Sigma^c$. A Figura 1.10 mostra o retrato de fase do campo Z_7 .

Assim, temos um par de órbitas para o qual p é um ponto de chegada, e outro par de órbitas para o qual p é um ponto de partida.

Até esse momento, definimos a trajetória local e a órbita local por um ponto. Desse modo, podemos estabelecer a definição de órbita maximal. Dependendo do ponto, esta pode ser uma órbita regular, uma órbita deslizante ou uma singularidade distinguida.

Figura 1.10: Retrato de fase do campo Z_7 .

Definição 1.1.9. Uma órbita regular maximal de Z é uma curva suave por partes γ tal que:

1. $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ é uma união de órbitas dos campos vetoriais suaves X e Y , respectivamente,
2. a intersecção $\gamma \cap \Sigma$ é composta apenas por pontos de costura e pontos de tangências regulares de $\partial\Sigma^c$,
3. γ é maximal com respeito a essas condições.

Observe que uma órbita regular nunca atinge Σ^s ou Σ^e .

Definição 1.1.10. Uma órbita deslizante (ou órbita singular) maximal de Z é uma curva suave $\gamma \subset \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$ que é uma órbita maximal do campo vetorial suave Z^s .

1.1.2 Separatrizes, Órbitas Periódicas e Ciclos

Nesta subsecção, generalizamos os conceitos de separatrizes e órbitas periódicas para Sistemas Planares de Filippov.

Definição 1.1.11. Seja $p \in U$ um ponto de sela, de X em $\overline{\Sigma^+}$ ou de Y em $\overline{\Sigma^-}$, ou uma singularidade distinguida em Σ . Desse modo, temos dois casos de separatrizes instáveis:

1. Se $p \in \Sigma^\pm$ é um ponto de sela para X em $\overline{\Sigma^+}$, então a separatriz instável de p é a variedade invariante instável, denotada por $W^u(p)$, dada por

$$W^u(p) = \{q \in U : \varphi_Z(t, q) \text{ está definido para } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p\}.$$

Analogamente, se p é um ponto de sela para Y em $\overline{\Sigma^-}$, podemos definir $W^u(p)$.

2. Se $p \in \Sigma$ é uma singularidade distinguida, então a separatriz instável é uma órbita regular que possui p como ponto de partida. Denotaremos essa separatriz por $W_\pm^u(p)$, onde o subscrito \pm significa que a órbita está contida em Σ^\pm .

Analogamente, definimos as separatrizes estáveis $W^s(p)$ e $W_\pm^s(p)$.

A Figura 1.11 mostra exemplos de separatrizes instáveis e estáveis. Podemos observar que, no primeiro caso, a trajetória sobre a separatriz alcança p em um tempo infinito, como acontece nos sistemas suaves. Já no segundo caso, a trajetória pode alcançar a singularidade p em tempo finito.

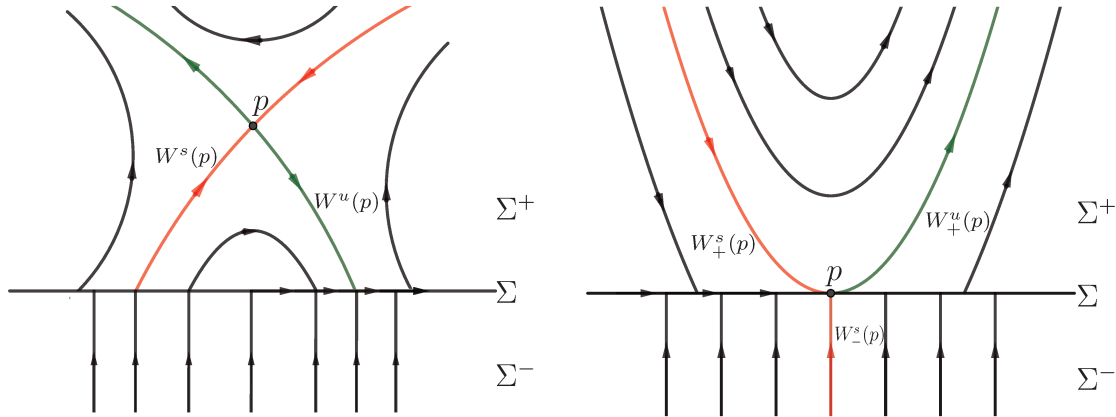


Figura 1.11: Exemplos de separatrizes instáveis e estáveis de uma sela regular (à esquerda) e de uma singularidade distinguida (à direita).

Definição 1.1.12. *Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável, dizemos que ela é uma conexão de separatrizes.*

A Figura 1.12 mostra um exemplo de conexão de separatrizes entre duas selas p e q , onde $p \in \Sigma^+$ e $q \in \Sigma^-$.

Em Sistemas de Filippov, além das órbitas periódicas de X em Σ^+ e de Y em Σ^- , existem outras órbitas que intersectam a variedade de descontinuidade e apresentam comportamentos semelhantes. As definições a seguir generalizam o conceito de órbita periódica para Sistemas de Filippov.

Definição 1.1.13. *Uma órbita periódica é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e satisfaz $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$ para algum $T > 0$.*

Definição 1.1.14. *Dizemos que γ é uma órbita periódica de costura se é uma órbita periódica regular e $\emptyset \neq \gamma \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$. Caso $\gamma \subset \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, dizemos que γ é uma órbita periódica padrão.*

Definição 1.1.15. *Dizemos que γ é um ciclo limite se é uma órbita periódica regular e existe uma vizinhança V de γ tal que $\gamma(q)$ não é órbita periódica regular, para todo $q \in V$, onde $\gamma(q)$ é a órbita que passa por q . Em outras palavras, γ é uma órbita periódica isolada.*

A Figura 1.12 ilustra um exemplo de ciclo limite do tipo costura.

Definição 1.1.16. *Uma órbita periódica deslizando é uma órbita periódica de Z^s .*

A órbita periódica deslizando aparece quando Σ é homeomorfa a $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e $\Sigma = \Sigma^s$ ou $\Sigma = \Sigma^e$. A Figura 1.13 ilustra um exemplo de sistema com variedade de descontinuidade $\Sigma = \Sigma^s$ homeomorfa a um círculo.

Devido as definições de trajetórias e trajetórias maximais, não podem existir órbitas periódicas que sejam combinadas por movimentos regulares e deslizando, ou seja, formadas por pontos de $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e por pontos de $\Sigma^s \cup \Sigma^e$, simultaneamente, pois uma órbita não pode interceptar tais conjuntos. Sendo assim, para lidar com movimentos periódicos que envolvam ao mesmo tempo movimentos regulares e deslizando, definimos os ciclos.

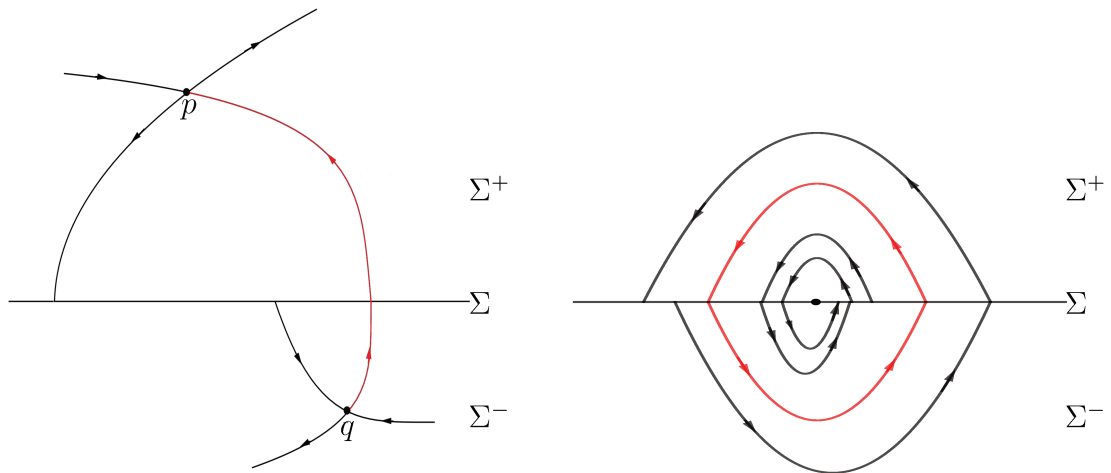


Figura 1.12: Exemplos de conexão de separatrizes (à esquerda) e de ciclo limite de costura (à direita).

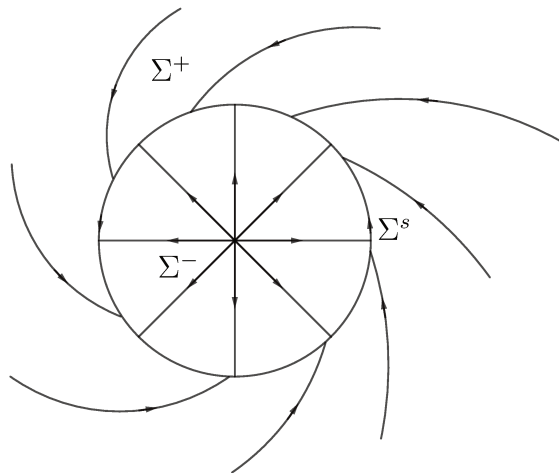


Figura 1.13: Exemplo onde a variedade de descontinuidade $\Sigma = \Sigma^s$ é homeomorfa a \mathbb{S}^1 .

Definição 1.1.17. Um ciclo é o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tal que γ_{2k} é um pedaço de órbita deslizante e γ_{2k+1} é uma órbita regular maximal e os pontos de partida e chegada de γ_{2k+1} pertencem a $\overline{\gamma_{2k}}$ e $\overline{\gamma_{2k+1}}$, respectivamente.

Definimos o período do ciclo como a soma dos tempos gastos em cada pedaço de órbita γ_i , $i = 1, \dots, n$.

Além dos ciclos e das órbitas periódicas, existe um outro objeto geométrico que é importante quando se estuda equivalências topológicas.

Definição 1.1.18. Definimos um pseudociclo como o fecho de um conjunto de órbitas regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tais que as extremidades, isto é, pontos de chegada e partida, de qualquer γ_i coincide com uma extremidade de γ_{i-1} e outra de γ_{i+1} (e também entre γ_1 e γ_n) formando uma curva homeomorfa a $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de modo que, em algum ponto, dois pontos de chegada ou partida coincidem.

A Figura 1.14 mostra exemplos de ciclo e de pseudociclo, que foram definidos acima.

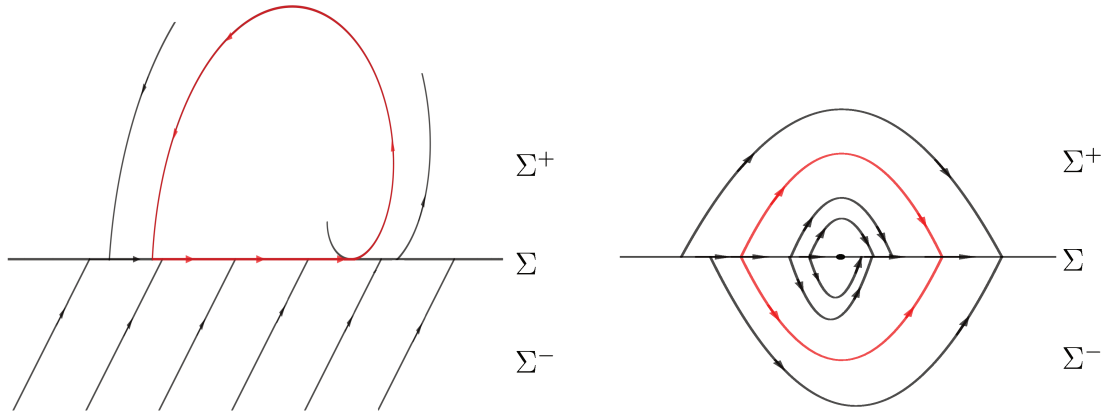


Figura 1.14: Exemplo de ciclo (à esquerda) e de pseudociclo (à direita).

Na próxima subseção, definimos equivalência topológica e Σ -equivalência, e mostramos que os objetos definidos até agora devem ser preservados por essas equivalências.

1.1.3 Equivalência Topológica

Exibimos agora duas noções de equivalência topológica para Sistemas de Filippov. Para estabelecê-las, consideramos dois campos vetoriais de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em conjuntos abertos U e \tilde{U} , possuindo curvas de descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente.

Definição 1.1.19. *Dois sistemas de Filippov $Z, \tilde{Z} \in \mathbb{Z}^r$ definidos em abertos U e \tilde{U} , com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são Σ -equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e Σ em $\tilde{\Sigma}$.*

Perceba que qualquer Σ -equivalência leva órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Além disso, como ela leva pontos de chegada em pontos de chegada e pontos de partida em pontos de partida, temos que $\overline{\Sigma^c}$, $\overline{\Sigma^s}$, e $\overline{\Sigma^e}$ são preservados e, portanto, leva órbitas deslizantes em órbitas deslizantes, e preserva separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

A definição de Σ -equivalência é natural, pois em algumas aplicações é importante preservar a variedade de descontinuidade. Porém, do ponto de vista topológico, não é necessário que $\overline{\Sigma^c}$ seja preservado para que Z e \tilde{Z} tenham um comportamento semelhante, pois o comportamento do fluxo em um ponto da região de costura e em um ponto regular em $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é o mesmo. Assim, consideramos o conceito de equivalência topológica para Sistemas de Filippov.

Definição 1.1.20. *Dois sistemas de Filippov $Z, \tilde{Z} \in \mathbb{Z}^r$ definidos em abertos U e \tilde{U} , com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .*

Das Definições 1.1.19 e 1.1.20, é óbvio que se dois Sistemas de Filippov são Σ -equivalentes, então são topologicamente equivalentes, mas a recíproca não é verdadeira.

Analogamente às Σ -equivalências, as equivalências topológicas preservam $\overline{\Sigma^s}$ e $\overline{\Sigma^e}$, conseqüentemente também preservam $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e, dessa forma, levam órbitas regulares em órbitas regulares, órbitas deslizantes em órbitas deslizantes e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Mais ainda, também preservam separatrizes, conexões entre separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

Observação 1.1.3. Recordemos que dois campos suaves X e \tilde{X} em \mathbb{R}^n , com seus respectivos fluxos $\varphi_X(t, p)$ e $\varphi_{\tilde{X}}(t, p)$, são \mathcal{C}^r -conjugados se existe um difeomorfismo $h \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$, tal que $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))$. Derivando a expressão com relação a t , em $t=0$, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} h(\varphi_X(t, p)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)) \right|_{t=0} \\ Dh(\varphi_X(t, p)) \left. \frac{d}{dt} \varphi_X(t, p) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)) \right|_{t=0} \\ Dh(p)X(p) &= \tilde{X}(h(p)). \end{aligned}$$

Assim, dado $q \in \mathbb{R}^n$, temos que $\tilde{X}(q) = Dh(h^{-1}(q))X(h^{-1}(q))$, e portanto $h_*X = \tilde{X}$, onde $h_*X(p) = Dh(h^{-1}(p))X(h^{-1}(p))$. Desse modo, concluímos que h é somente uma mudança de coordenadas.

Para campos descontínuos não utilizaremos uma versão análoga e sim conjugações aplicadas às componentes suaves X e Y do Sistema de Filippov $Z = (X, Y)$.

Proposição 1.1.1. *Consideremos qualquer difeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que conjuga simultaneamente por um lado X em $\Sigma^+ \subset U$ e \tilde{X} em $\tilde{\Sigma}^+ \subset \tilde{U}$ e por outro lado Y em $\Sigma^- \subset U$ e \tilde{Y} em $\tilde{\Sigma}^- \subset \tilde{U}$. Então, h conjuga os campos vectoriais deslizantes Z^s e \tilde{Z}^s e, portanto, h é uma equivalência topológica entre $Z = (X, Y)$ e $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$.*

Demonstração. Temos que h conjuga os campos separadamente em Σ^+ e Σ^- , então pela observação anterior

$$\begin{aligned} h_*X(\tilde{p}) &= \tilde{X}(\tilde{p}), \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^+, \\ h_*Y(\tilde{p}) &= \tilde{Y}(\tilde{p}), \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}^-. \end{aligned}$$

Como h é bijetiva, temos que $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$, já que h mapeia Σ^+ em $\tilde{\Sigma}^+$ e $\tilde{\Sigma}^-$ em Σ^- . Então sendo $\Sigma = \{p \in U : f(p) = 0\}$, temos que $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{p} \in \tilde{U} : f \circ h^{-1}(\tilde{p}) = 0\}$.

Lembremos que, se $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em um aberto V de \mathbb{R}^n , então $h_*g = g \circ h^{-1}$.

Queremos mostrar que h conjuga os campos deslizantes Z^s e \tilde{Z}^s , ou seja, $\tilde{Z}^s = h_*Z^s$. Para isso, vamos inicialmente mostrar que $h_*Xf(\tilde{p}) = h_*Xh_*f(\tilde{p}) = \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})$,

onde $\tilde{f} = f \circ h^{-1}$. Temos que

$$\begin{aligned}
h_*Xf(\tilde{p}) &= Xf(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&= \langle X(h^{-1}(\tilde{p})), \nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \rangle \\
&= \langle I_n \cdot X(h^{-1}(\tilde{p})), \nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \rangle \\
&= \langle (Dh^{-1}(\tilde{p}) \cdot Dh(h^{-1}(\tilde{p}))) \cdot X(h^{-1}(\tilde{p})), \nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \rangle \\
&= \langle Dh^{-1}(\tilde{p}) \cdot (Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \cdot X(h^{-1}(\tilde{p}))), \nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \rangle \\
&= \langle Dh^{-1}(\tilde{p}) \cdot h_*X(\tilde{p}), \nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), (Dh^{-1}(\tilde{p}))^{tr} \cdot \nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), ((\nabla f(h^{-1}(\tilde{p})))^{tr} \cdot Dh^{-1}(\tilde{p}))^{tr} \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), (D(f \circ h^{-1})(\tilde{p}))^{tr} \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), \nabla(f \circ h^{-1})(\tilde{p}) \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), \nabla(h_*f)(\tilde{p}) \rangle \\
&= h_*Xh_*f(\tilde{p}) \\
&= \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

Analogamente, $h_*Yf(\tilde{p}) = \tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})$. Com isso, basta agora mostrar que $\tilde{Z}^s(\tilde{p}) = h_*Z^s(\tilde{p})$, $\forall \tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$. Temos que

$$\begin{aligned}
h_*Z^s(\tilde{p}) &= Dh(h^{-1}(\tilde{p}))Z^s(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&= Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \frac{1}{Yf(h^{-1}(\tilde{p})) - Xf(h^{-1}(\tilde{p}))} (Yf(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&\quad - Xf(h^{-1}(\tilde{p}))Y(h^{-1}(\tilde{p}))) \\
&= Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \frac{1}{h_*Yf(\tilde{p}) - h_*Xf(\tilde{p})} (h_*Yf(\tilde{p})X(h^{-1}(\tilde{p})) - h_*Xf(\tilde{p})Y(h^{-1}(\tilde{p}))) \\
&= Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} (\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})X(h^{-1}(\tilde{p})) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})Y(h^{-1}(\tilde{p}))) \\
&= \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} (\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})Dh(h^{-1}(\tilde{p}))Y(h^{-1}(\tilde{p}))) \\
&= \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} (\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})h_*X(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})h_*Y(\tilde{p})) \\
&= \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} (\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})\tilde{X}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})\tilde{Y}(\tilde{p})) \\
&= \tilde{Z}^s(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

Portanto, h conjuga os campos deslizantes, levando as trajetórias de Z^s em trajetórias de \tilde{Z}^s . \square

Observação 1.1.4. Todas as equivalências topológicas definidas usando a proposição acima preservam Σ e, portanto, são também Σ -equivalências. Assim, para construir equivalências topológicas que não preservam Σ , é necessário utilizar outras técnicas.

Observação 1.1.5. Repare que, se retirarmos a hipótese de diferenciabilidade da Proposição 1.1.1, isto é, se considerarmos h somente um homeomorfismo, a proposição não é

verdadeira. Vejamos um contra-exemplo. Considere os campos

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & y > 0, \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad Z(x, y) = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0, \end{cases}$$

com os retratos de fase ilustrados na Figura 1.15.

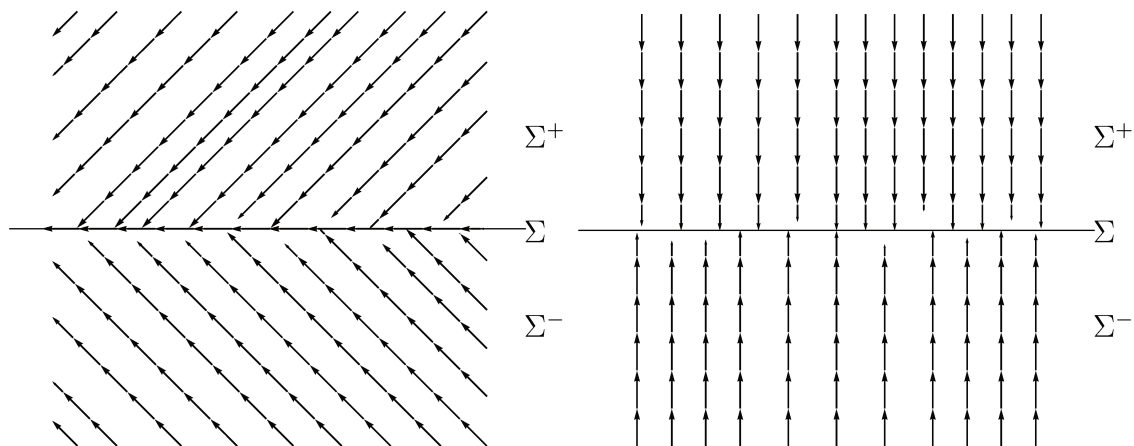


Figura 1.15: Retratos de fase dos campos Z e \tilde{Z} .

Nesse caso, $\Sigma = \Sigma^s = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$ e o homeomorfismo h é dado por

$$h(x, y) = \begin{cases} (x - y, y), & \text{se } y > 0, \\ (x, y), & \text{se } y = 0, \\ (x + y, y), & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Podemos observar que h é \mathcal{C}^0 , mas não é \mathcal{C}^1 , e que conjuga X com \tilde{X} para $y > 0$ e Y com \tilde{Y} para $y < 0$. Porém, não é uma equivalência topológica entre Z e \tilde{Z} , pois os campos deslizantes são dados por $Z^s = (-1, 0)$ e $\tilde{Z}^s = (0, 0)$, e portanto não podem ser topologicamente equivalentes.

1.2 Estabilidade Estrutural em Sistemas de Filippov

Nesta seção, estudamos o comportamento genérico local dos sistemas planares de Filippov. Caracterizamos os sistemas planares de Filippov que são localmente estruturalmente estáveis, para isso classificamos os pontos regulares e singularidades “genéricas” de um campo vetorial $Z \in \mathcal{Z}^k$ e, em cada caso, apresentamos uma forma normal \mathcal{C}^0 e estabelecemos o homeomorfismo que fornece a Σ -equivalência topológica entre um sistema “genérico” e sua forma normal.

Vamos inicialmente considerar os pontos regulares, ou seja, os pontos que não são singularidades, que pertencem às órbitas regulares ou deslizantes. Temos que em torno dos pontos regulares em Σ^\pm basta aplicar o Teorema do Fluxo Tubular, desse

modo, basta estudar o comportamento dos pontos na variedade de descontinuidade. A seguir, enunciaremos proposições que fornecem formas normais para os pontos regulares pertencentes à $\Sigma^c \cup \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

Notação 1.2.1. Consideramos dois campos vetoriais suaves X e Y . Denotamos por $X(p) \parallel Y(p)$ o fato de X e Y serem paralelos no ponto p e por $X(p) \nparallel Y(p)$ o fato de X e Y não serem paralelos no ponto p .

Proposição 1.2.1. *Seja $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$ com curva de descontinuidade Σ tal que $(0, 0) \in \Sigma^c$. Então, em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Z é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, & y > 0, \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, & y < 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança \tilde{U} de $(0, 0)$ e é topologicamente equivalente à forma normal contínua

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $\alpha = \text{sgn}(Xf(0, 0))$.

Demonstração. Consideremos $\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_{\tilde{X}}$ e $\varphi_{\tilde{Y}}$, os fluxos dos campos X, Y, \tilde{X} e \tilde{Y} , respectivamente. Como a origem pertence à Σ^c e $\tilde{\Sigma}^c$, temos que os campos Z e \tilde{Z} são transversais à $\Sigma \cap U$ e $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{U}$, respectivamente.

Assim, dado $p \in \Sigma^+ \cap U$, pelo Teorema da Função Implícita existe um único $t = t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ e a aplicação $p \mapsto t(p)$ é contínua. Analogamente para $p \in \Sigma^- \cap U$. Então, construímos a Σ -equivalência como segue:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)), & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap U, \\ p, & \text{se } p \in \Sigma \cap U, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \varphi_Y(t(p), p)), & \text{se } p \in \Sigma^- \cap U. \end{cases}$$

Claramente, h é contínua, pois as aplicações envolvidas são contínuas e coincidem em Σ , além disso, satisfaz $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$. \square

Proposição 1.2.2. *Seja $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$ com curva de descontinuidade Σ tal que $(0, 0) \in \Sigma^s$ e $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$. Então, em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Z é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, & y > 0, \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança \tilde{U} de $(0, 0)$, onde $\alpha = \text{sgn}(\pi_1(Z^s(0, 0)))$.

Demonstração. Consideremos $\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_{\tilde{X}}$ e $\varphi_{\tilde{Y}}$, os fluxos dos campos X, Y, \tilde{X} e \tilde{Y} , respectivamente. Como a origem pertence à Σ^s e $\tilde{\Sigma}^s$, temos que os campos Z e \tilde{Z} são transversais à $\Sigma \cap U$ e $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{U}$, respectivamente.

Por hipótese $X(0,0) \nparallel Y(0,0)$, então a origem é ponto regular do campo deslizando Z^s , ou seja, $Z^s(0,0) \neq (0,0)$. Além disso, note que $\tilde{Z}^s(x,y) = (\alpha, 0)$, em particular $\tilde{Z}^s(0,0) = (\text{sgn}(\pi_1(Z^s(0,0))), 0) \neq (0,0)$. Assim, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

Agora, tomando $p \in \Sigma^+ \cap U$, segue pelo Teorema da Função Implícita que existe um único $t = t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ e a aplicação $p \mapsto t(p)$ é contínua. Analogamente para $p \in \Sigma^- \cap U$. Então, construímos a Σ -equivalência da seguinte maneira:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^+ \cap U, \\ \tilde{h}(p), & \text{se } p \in \Sigma \cap U, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^- \cap U. \end{cases}$$

Pelo modo como foi construída, h é contínua e $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$. \square

Proposição 1.2.3. *Seja $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$ com curva de descontinuidade Σ tal que $(0,0) \in \Sigma^e$ e $X(0,0) \nparallel Y(0,0)$. Então, em uma vizinhança U de $(0,0)$, Z é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, & y > 0, \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, & y < 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança \tilde{U} de $(0,0)$, onde $\alpha = \text{sgn}(\pi_1(Z^s(0,0)))$.

Demonstração. A demonstração é feita de maneira similar a da Proposição 1.2.3. \square

Vamos agora estudar as singularidades genéricas. Os primeiros tipos de singularidades são os pontos críticos genéricos hiperbólicos de X e Y em Σ^+ e Σ^- , respectivamente. Assim, em torno desses pontos podemos aplicar o Teorema de Hartman-Grobman. Dessa forma, basta considerar o comportamento dos pontos na curva de descontinuidade.

Definição 1.2.1. *Um ponto tipo Dobra-Regular de $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$ é um ponto $p \in \Sigma$ tal que $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) \neq 0$ e $Yf(p) \neq 0$ ou tal que $Yf(p) = 0$, $Y^2f(p) \neq 0$ e $Xf(p) \neq 0$. Ainda mais,*

1. *No primeiro caso, dizemos que a Dobra-Regular é visível se $X^2f(p) > 0$ e invisível se $X^2f(p) < 0$. Além disso, se $p \in \partial\Sigma^s$ teremos uma dobra de deslize e se $p \in \Sigma^e$ a chamaremos de dobra de escape.*
2. *No segundo caso, ela é visível se $Y^2f(p) < 0$ e invisível se $Y^2f(p) > 0$, e pode-se definir analogamente dobras de deslize e de escape.*

Para os sistemas planares de Filippov, as singularidades genéricas em Σ são pontos de dobras-regulares e pontos críticos hiperbólicos do campo vetorial deslizando,

isto é, pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tais que $X(p) \parallel Y(p)$ e também $Z^s(p) = 0$ com $(Z^p)'(p) \neq 0$, que a propósito são singularidades distinguidas.

A proposição a seguir trata das formas normais dos pontos de dobras-regulares.

Proposição 1.2.4. *Seja $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$ definido numa vizinhança U de $(0, 0)$ para a qual $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra-regular. Então, Z é Σ -equivalente em uma vizinhança V de $(0, 0)$ à sua forma normal*

$$Z_{abc}(x, y) = \begin{cases} X_a b = \begin{pmatrix} b \\ bax \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_c = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, & y < 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(X^2 f(0, 0))$, $b = \text{sgn}(\pi(X(0, 0)))$ e $c = \text{sgn}(Y f(0, 0))$.

Demonstração. Veja as referências [7] e [9]. □

A próxima proposição lida com a forma normal dos pontos críticos hiperbólicos que podem acontecer em Σ^s ou Σ^e .

Proposição 1.2.5. *Se $(0, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é um ponto crítico hiperbólico do campo deslizando Z^s de $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$ definido numa vizinhança U de $(0, 0)$, então Z é Σ -equivalente em uma vizinhança V de $(0, 0)$ à sua forma normal*

$$Z_{ab}(x, y) = \begin{cases} X_a = \begin{pmatrix} ax \\ b \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y_b = \begin{pmatrix} ax \\ -b \end{pmatrix}, & y < 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}((Z^s)'(0, 0))$ e $b = \text{sgn}(X f(0, 0))$.

Demonstração. Primeiramente observe que, $Z_{ab}^s(x, y) = (ax, 0)$, então a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizando Z_{ab}^s e sua estabilidade depende do valor de a . Além disso, por hipótese a origem é um ponto crítico hiperbólico do campo deslizando Z^s . Portanto, pelo teorema de Hartman-Grobman, existe um homeomorfismo \tilde{h} que conjuga os campos deslizantes Z^s e Z_{ab}^s .

Como os campos Z e Z_{ab} são transversais a Σ e Σ_{ab} , respectivamente, em uma vizinhança da origem, temos que para cada $p \in \Sigma^+$, existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t(p), p) \in \Sigma$. Analogamente para $p \in \Sigma^-$. Então, construímos a Σ -equivalência como segue:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^+, \\ \tilde{h}(p), & \text{se } p \in \Sigma, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^-. \end{cases}$$

Claramente, h é uma aplicação contínua e satisfaz $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$. □

Uma vez que já caracterizamos os pontos regulares e singularidades “genéricas” de um campo $Z = (X, Y) \in \mathcal{Z}^k$, vamos enunciar o teorema que permite identificar se um determinado campo é estruturalmente estável.

Teorema 1.2.6. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathcal{Z}^k$ definido em uma vizinhança da origem e a curva de descontinuidade $\Sigma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Se $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou uma singularidade genérica, então Z_0 é localmente estruturalmente estável e localmente Σ -estruturalmente estável.*

Demonstração. Veja as referências [7] e [9]. □

1.3 Regularização Teixeira-Sotomayor

A ideia principal do processo de regularização por Teixeira e Sotomayor [16], [11] é aproximar um Sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ por uma família a um parâmetro de campos vetoriais suaves $Z_\varepsilon(x, y)$ de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon(x, y) = Z(x, y).$$

Considere o Sistema de Filippov (1.1.1). Com a função descrita a seguir, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$g(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s > 0, \\ 0, & \text{se } s < 0, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

podemos reescrever o sistema da forma

$$Z(x, y) = [1 - g(f(x, y))]Y(x, y) + g(f(x, y))X(x, y).$$

Definição 1.3.1. *Uma função contínua $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função de transição se $\varphi(t) = 0$ para todo $t \leq -1$, $\varphi(t) = 1$ para todo $t \geq 1$ e $\varphi'(t) > 0$ se $t \in (-1, 1)$.*

Definição 1.3.2. *Dada uma função de transição $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a φ_ε -regularização de $Z = (X, Y)$ é a família a um parâmetro de campos vetoriais Z_ε , com $\varepsilon \in (0, 1]$, dada por*

$$Z_\varepsilon(x, y) = [1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y))]Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y),$$

onde

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Observe que um Sistema de Filippov possui uma regularização trivial, onde a função de transição é dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 1, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{se } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{se } t \leq -1, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

e que, por sua vez, tem $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(t) = g(t)$.

Exemplo 1.3.1. Sejam $U = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$, então, $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Considere o sistema de Filippov

$$Z(x, y) = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, & y > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} -x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}, & y < 0. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Temos que

$$\begin{aligned} Xf(x, 0) &= \langle X(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (0, x), (0, 1) \rangle = x, \\ Yf(x, 0) &= \langle Y(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle = \langle (-x + 1, 1), (0, 1) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que $Xf(x, 0) \cdot Yf(x, 0) = x = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Além do mais, se $x > 0$ temos que $Xf(x, 0) > 0$, enquanto, se $x < 0$ temos que $Xf(x, 0) < 0$. Logo, $\Sigma^c = \{(x, 0) : x > 0\}$ e $\Sigma^s = \{(x, 0) : x < 0\}$. Assim, o campo deslizante de Z é dado por

$$Z^s(x, 0) = \frac{1}{1-x}(1 \cdot (0, x) - x \cdot (-x + 1, 1)) = \frac{1}{1-x}(x^2 - x, 0) = (-x, 0).$$

A Figura 1.16 ilustra o retrato de fase do campo Z antes da regularização.

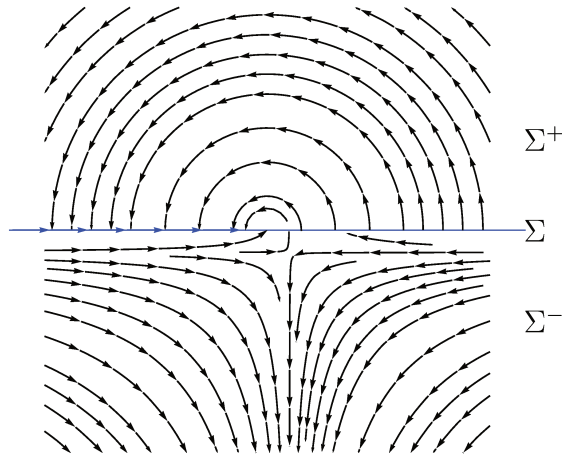


Figura 1.16: Retrato de fase do campo Z .

Considerando a regularização do campo $Z(x, y)$ utilizando a função de transição (1.3.2), temos que

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x, y) &= [1 - \varphi_\varepsilon(f(x, y))]Y(x, y) + \varphi_\varepsilon(f(x, y))X(x, y) \\ &= [1 - \varphi_\varepsilon(y)](-x + 1, y + 1) + \varphi_\varepsilon(y)(-y, x) \\ &= (-x + 1 + \varphi_\varepsilon(y)(x - y - 1), y + 1 + \varphi_\varepsilon(y)(x - y + 1)). \end{aligned}$$

A Figura 1.17 representa o retrato do campo Z após a regularização utilizando a função de transição trivial.

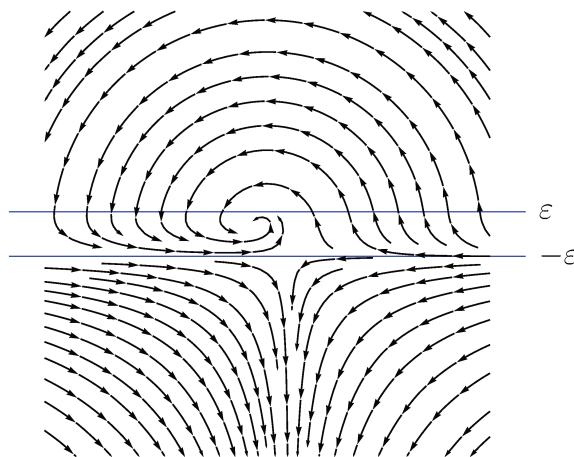


Figura 1.17: Retrato de fase do campo Z_ϵ .

1.4 Estabilidade Segundo Lyapunov

Seja X um campo vetorial definido em um subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 , onde todas as soluções de $x' = X(x)$ têm intervalo maximal $I = \mathbb{R}$.

Definição 1.4.1. *Seja x_0 um ponto singular para o campo vetorial X . Dizemos que x_0 é um ponto singular estável se, para qualquer vizinhança V de x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq V$ e $\varphi(t, x) \in V$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$.*

Definição 1.4.2. *Seja x_0 um ponto singular para o campo vetorial X . Dizemos que x_0 é um ponto singular assintoticamente estável se, para qualquer vizinhança V de x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq V$, $\varphi(t, x) \in V$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$, para qualquer $x \in W$.*

A Figura 1.18 ilustra exemplos de campos vetoriais que satisfazem ou não as definições acima. No primeiro exemplo, temos o retrato de fase de uma sela, onde o ponto singular não é estável, já no segundo temos o retrato de fase de um centro, no qual o ponto singular é estável, mas não é assintoticamente estável, por fim, no terceiro temos o retrato de fase de um nó, onde o ponto singular é assintoticamente estável.

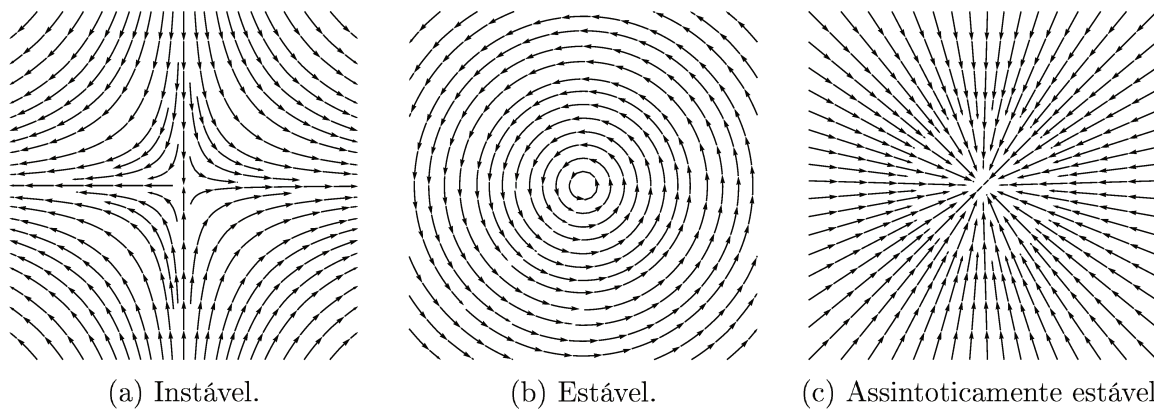


Figura 1.18: Exemplos de campos vetoriais instável, estável e assintoticamente estável.

Definição 1.4.3. Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 um ponto singular de X e $\mathcal{L} : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 que é diferenciável em $W \setminus \{x_0\}$. Dizemos que \mathcal{L} é uma função de Lyapunov para X em x_0 se

1. $\mathcal{L}(x_0) = 0$, com $\mathcal{L}(x) > 0$ para cada $x \in W \setminus \{x_0\}$ e
2. $\mathcal{L} \circ x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-crescente para qualquer solução $x : I \rightarrow U$ de $x' = X(x)$ tal que $x(t) \in W$ para cada $t \in I$.

Agora, dizemos que \mathcal{L} é uma função de Lyapunov estrita para X em x_0 se

1. $\mathcal{L}(x_0) = 0$, com $\mathcal{L}(x) > 0$ para cada $x \in W \setminus \{x_0\}$ e
2. $(\mathcal{L} \circ x)'(t) < 0$ para qualquer solução $x : I \rightarrow E$ de $x' = X(x)$ tal que $x(t) \in W \setminus \{0\}$ para cada $t \in I$.

Teorema 1.4.1 (Lyapunov). Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^1 no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e x_0 um ponto singular de X . Se existe uma função de Lyapunov para X em x_0 , então x_0 é um ponto singular estável de X . Além disso, se existe uma função de Lyapunov estrita para X em x_0 , então x_0 é um ponto singular assintoticamente estável de X .

Demonstração. Veja as referências [3] e [20]. □

Exemplo 1.4.1. Considere $X(x, y, z) = ((\varepsilon x + 2y)(z + 1), (-x + \varepsilon y)(z + 1), -z^3)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, um campo vetorial não-linear.

Temos que $x_0 = (0, 0, 0)$ é um ponto singular de X e a parte linear em x_0 é dada por

$$dX(x_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda[\lambda^2 - \varepsilon\lambda + (\varepsilon^2 + 2)]$. Desse modo, os autovalores de $dX(x_0)$ são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \varepsilon + \sqrt{2}i$ e $\lambda_3 = \varepsilon - \sqrt{2}i$.

A partir disto, obtemos que para $\varepsilon > 0$, x_0 é instável, pois os autovalores λ_2 e λ_3 possuem parte real positiva. Porém, quando $\varepsilon \leq 0$, não podemos dizer nada sobre a estabilidade do campo vetorial X , pois $\lambda_1 = 0$.

Sendo assim, tome $\mathcal{L}(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, com $a, b, c > 0$. Nesse caso, $\mathcal{L}(x_0) = 0$ e $\mathcal{L}(x, y, z) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(x, y, z) &= \langle \nabla \mathcal{L}(x, y, z), X(x, y, z) \rangle \\ &= \langle (2ax, 2by, 2cz), ((\varepsilon x + 2y)(z + 1), (-x + \varepsilon y)(z + 1), -z^3) \rangle \\ &= \varepsilon(ax^2 + by^2)(z + 1) + (2a - b)(z + 1)xy - cz^4. \end{aligned}$$

Tomando $a = 1, b = 2$ e $c = 1$, temos

$$\dot{\mathcal{L}}(x, y, z) = \varepsilon(x^2 + 2y^2)(z + 1) - z^4.$$

Para $\varepsilon = 0$, $\dot{\mathcal{L}}(x, y, z) = -z^4 \leq 0$, logo x_0 é estável. Já para $\varepsilon < 0$ e $z > -1$, temos $\dot{\mathcal{L}}(x, y, z) < 0, \forall (x, y, z) \neq x_0$, assim x_0 é assintoticamente estável.

1.5 O Teorema de Poincaré-Bendixson

Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja $\varphi(t, p)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , considerando o intervalo maximal sendo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$.

Definição 1.5.1. Se $\omega_+(p) = +\infty$ definimos o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in U : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$ definimos o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in U : \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados respectivamente de conjunto ω -limite de p e conjunto α -limite de p .

Teorema 1.5.1 (Poincaré - Bendixson). *Seja X um campo vetorial de classe \mathcal{C}^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dado $p \in U$ assumamos que $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$ esteja contida num compacto $K \subset U$. Suponha que X possui no máximo uma quantidade finita de singularidades em $\omega(p)$. Então,*

1. Se $\omega(p)$ não contém pontos singulares, então $\omega(p)$ é órbita periódica de X .
2. Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$.
3. Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um único ponto singular.

Demonstração. Veja a referência [20]. □

Exemplo 1.5.1. Considere o campo vetorial $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$X(x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2)).$$

Vamos mostrar que esse campo possui ao menos uma órbita periódica. Para isso, vamos estudar o comportamento de X sobre as curvas $S_c = k_c^{-1}(0)$, sendo $k_c(x, y) = x^2 + y^2 - c$, $c > 0$.

Inicialmente, vamos determinar as singularidades do campo X , ou seja, encontrar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $X(x, y) = (0, 0)$. Temos que $y + x(1 - x^2 - y^2) = 0$ se, e somente se, $y = 0$ e $x = 0$, ou $y = 0$ e $x = \pm 1$, e $-x + y(1 - x^2 - y^2) = 0$ se, e somente se, $y = 0$ e $x = 0$, ou $x = 0$ e $y = \pm 1$. Então, $(0, 0)$ é a única singularidade de X .

Seja $(x, y) \in S_c$, temos que

$$\begin{aligned} \langle X(x, y), \nabla k_c(x, y) \rangle &= \langle (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2)), (2x, 2y) \rangle \\ &= \langle (y + x(1 - c), -x + y(1 - c)), (2x, 2y) \rangle \\ &= 2xy + 2x^2(1 - c) - 2xy + 2y^2(1 - c) \\ &= 2x^2(1 - c) + 2y^2(1 - c). \end{aligned}$$

Considere as curvas S_{c_1} e S_{c_2} , onde $c_1 < 1$ e $c_2 > 1$. Se $(x, y) \in S_{c_1}$, temos que $\langle X(x, y), \nabla k_{c_1}(x, y) \rangle > 0$, pois $c_1 < 1$, o que implica $1 - c_1 > 0$. Logo, o campo X aponta para fora do conjunto delimitado por S_{c_1} . Agora, se $(x, y) \in S_{c_2}$, obtemos que $\langle X(x, y), \nabla k_{c_2}(x, y) \rangle < 0$, pois $c_2 > 1$, o que implica $1 - c_2 < 0$. Logo, o campo X aponta para dentro do conjunto delimitado por S_{c_2} .

Considerando o conjunto K delimitado pelas curvas S_{c_1} e S_{c_2} , temos que K é compacto e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ têm-se $\gamma_{(x,y)}^+ \subset K$. Além disso, $\omega((x, y)) \subset K$, então, $\omega((x, y))$ não possui singularidade. Portanto, pelo Teorema de Poincaré - Bandixson $\omega((x, y))$ é uma órbita periódica de X . A Figura 1.19 ilustra o retrato de fase do campo vetorial X , onde destacamos em vermelho a órbita periódica.

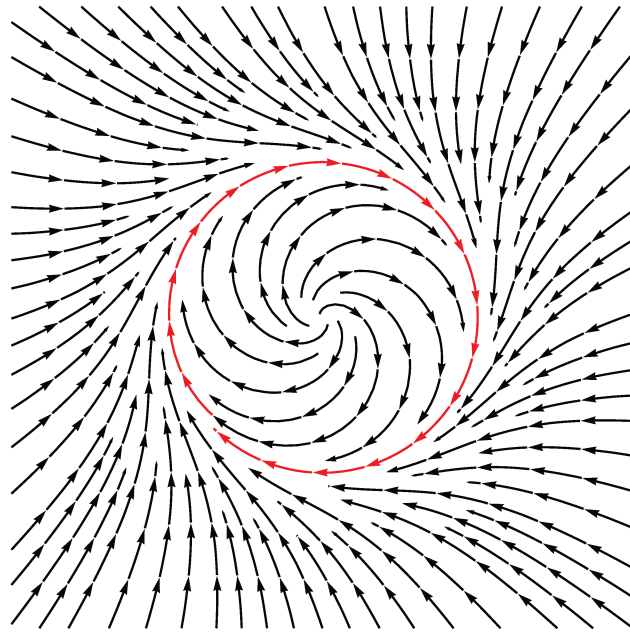


Figura 1.19: Retrato de fase do campo vetorial X .

1.6 Compactificação de Poincaré

Seja $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$, isto é, um campo vetorial de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, em \mathbb{R}^2 , tal que $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$, sendo P e Q polinômios nas variáveis x_1 e x_2 , onde o grau de P e Q é menor ou igual a $d = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Vamos inicialmente definir alguns conjuntos em \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

$$\mathbb{S}^1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\},$$

$$\mathbb{H}^+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\},$$

$$\mathbb{H}^- = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\},$$

$$\mathcal{N} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 1\}.$$

Note que, \mathbb{S}^2 é a esfera unitária, na qual \mathbb{S}^1 é o equador. O conjunto \mathcal{N} é o plano tangente a \mathbb{S}^2 no ponto $(0, 0, 1)$, que chamamos de polo norte. Os conjuntos \mathbb{H}^+ e \mathbb{H}^- são chamados de hemisfério norte e hemisfério sul, respectivamente.

Seja r uma reta passando pela origem $(0, 0, 0)$ e por um ponto $p \in \mathcal{N}$, assim, r intersecta \mathbb{S}^2 em dois pontos distintos $p^+ \in \mathbb{H}^+$ e $p^- \in \mathbb{H}^-$. Com isso, obtemos dois difeomorfismos sobrejetores $f^+ : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{H}^+$ e $f^- : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{H}^-$, dados por

$$f^+(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

$$f^-(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_1}{\Delta(x)}, -\frac{x_2}{\Delta(x)}, -\frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$. Observe que, as aplicações f^+ e f^- são as projeções centrais do plano \mathcal{N} sobre \mathbb{H}^+ e \mathbb{H}^- . A Figura 1.20 ilustra os conjuntos em \mathbb{R}^3 e a reta r .

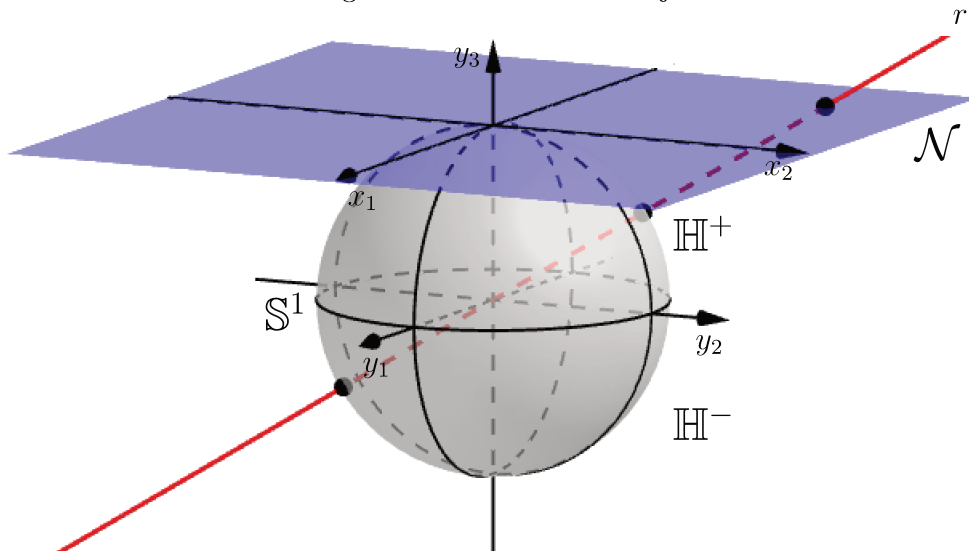


Figura 1.20: Ilustração das projeções centrais.

Vamos agora determinar a aplicação inversa de f^+ . Se $(y_1, y_2, y_3) = f^+(x_1, x_2)$, então $x_1 = \Delta(x)y_1$, $x_2 = \Delta(x)y_2$ e $y_3 = \frac{1}{\Delta(x)}$, logo $x_1 = \frac{y_1}{y_3}$ e $x_2 = \frac{y_2}{y_3}$. Portanto,

$$f^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right).$$

De maneira similar, obtemos que a aplicação inversa de f^- é igual a da aplicação f^+ obtida anteriormente.

Note que f^+ e f^- induzem em $\mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$ um campo vetorial $f_*^\pm X$ dado por

$$f_*^\pm X(y) = \begin{cases} f_*^+ X(y) = df^+((f^+)^{-1}(y))X((f^+)^{-1}(y)) & \text{se } y \in \mathbb{H}^+, \\ f_*^- X(y) = df^-((f^-)^{-1}(y))X((f^-)^{-1}(y)) & \text{se } y \in \mathbb{H}^-. \end{cases}$$

Mas, $f_*^\pm X$ não está definido em \mathbb{S}^1 , contudo a seguir faremos uma reparametrização do tempo induzindo um campo em \mathbb{S}^1 .

Proposição 1.6.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. O campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1 = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$ definido anteriormente, pode ser estendido analiticamente para toda a esfera após a multiplicação pelo fator y_3^{d-1} , e de tal forma que o equador seja invariante.*

Demonstração. Sejam $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, onde

$$U_k = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\},$$

$$V_k = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

e as aplicações são dadas por

$$\begin{cases} \phi_k(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_k}(y_m, y_n), \quad \forall (y_1, y_2, y_3) \in U_k; \quad m < n, \quad m, n \neq k, \\ \psi_k(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_k}(y_m, y_n), \quad \forall (y_1, y_2, y_3) \in V_k; \quad m < n, \quad m, n \neq k. \end{cases}$$

Observe que $U_3 = \mathbb{H}^+$ e $V_3 = \mathbb{H}^-$.

Seja $(y_1, y_2, y_3) \in U_1 \cap \mathbb{H}^+$. Vamos inicialmente determinar a inversa de ϕ_1 . Se $(z_1, z_2) = \phi_1(y_1, y_2, y_3)$, então $y_2 = z_1 y_1$, $y_3 = z_2 y_1$ e $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, logo $y_1^2(1 + z_1^2 + z_2^2) = 1$, isso implica $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2}}$. Portanto,

$$\phi_1^{-1}(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2}}, \frac{z_1}{\sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2}} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \phi_{1*}(f_*^+ X)(z_1, z_2) &= d\phi_1(\phi_1^{-1}(z_1, z_2))f_*^+ X(\phi_1^{-1}(z_1, z_2)) \\ &= d\phi_1(\phi_1^{-1}(z_1, z_2))df^+((f^+)^{-1} \circ \phi_1^{-1}(z_1, z_2))X((f^+)^{-1} \circ \phi_1^{-1}(z_1, z_2)) \\ &= d(\phi_1 \circ f^+)((\phi_1 \circ f^+)^{-1}(z_1, z_2))X((\phi_1 \circ f^+)^{-1}(z_1, z_2)) \\ &= (\phi_1 \circ f^+)_* X(z_1, z_2), \end{aligned}$$

Além disso,

$$\phi_1 \circ f^+(x_1, x_2) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right),$$

o que implica

$$d(\phi_1 \circ f^+)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos obter a aplicação inversa de $\phi_1 \circ f^+$. Se $(z_1, z_2) = \phi_1 \circ f^+(x_1, x_2)$, então $x_2 = x_1 z_1$ e $x_1 = \frac{1}{z_2}$, assim $x_2 = \frac{z_1}{z_2}$. Logo, $(\phi_1 \circ f^+)^{-1}(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right)$.

Dessa forma, a expressão de $f_*^\pm X$ em $U_1 \cap \mathbb{H}^+$ é dada por

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)_* X(z_1, z_2) &= d(\phi_1 \circ f^+)((\phi_1 \circ f^+)^{-1}(z_1, z_2))X((\phi_1 \circ f^+)^{-1}(z_1, z_2)) \\ &= d(\phi_1 \circ f^+) \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) X \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -z_1 z_2 & z_2 \\ -z_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) \\ Q\left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \left(z_2 Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) - z_1 z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2^2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right). \end{aligned}$$

De maneira análoga, encontramos a mesma expressão para $f_*^\pm X$ em $U_1 \cap \mathbb{H}^-$.

Portanto, induzimos um campo vetorial em U_1 que é definido e diferenciável em todos os pontos exceto em \mathbb{S}^1 quando $d > 1$. Entretanto, se multiplicarmos a expressão anterior por um fator y_3^{d-1} obtemos um novo campo vetorial que agora é diferenciável em todo U_1 . A expressão desse campo é dada por

$$y_3^{d-1} \left(z_2 Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) - z_1 z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2^2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right). \quad (1.6.1)$$

Como visto anteriormente, $y_3 = z_2 y_1$ e $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}}$, então $y_3^2 = \frac{z_2^2}{\Delta(z)^2}$, onde $\Delta(z) = \sqrt{1+z_1^2+z_2^2}$. Além disso, como estamos em U_1 , temos que $y_1 > 0$, então y_3 possui o mesmo sinal que z_2 , logo $y_3 = \frac{z_2}{\Delta(z)}$. Portanto, a expressão (1.6.1) pode ser escrita como

$$\frac{z_2^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left(Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) - z_1 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right). \quad (1.6.2)$$

De maneira semelhante, obtemos a seguinte expressão em U_2

$$\frac{z_2^d}{\Delta(z)^{d-1}} \left(P \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - z_1 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right), \quad (1.6.3)$$

e a seguinte expressão em U_3

$$\frac{1}{\Delta(z)^{d-1}} (P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2)). \quad (1.6.4)$$

Para o caso em que $(y_1, y_2, y_3) \in V_1$, obtemos a mesma expressão (1.6.2) exceto pelo fato que em V_1 temos $y_1 < 0$, então y_3 e z_2 possuem sinais diferentes. Logo, $y_3 = -\frac{z_2}{\Delta(z)}$ e (1.6.2) deve ser multiplicado por $(-1)^{d-1}$ para obter o campo vetorial em V_1 . De modo análogo, devemos multiplicar por $(-1)^{d-1}$ as expressões (1.6.3) e (1.6.4) para obter os campos vetoriais em V_2 e V_3 , respectivamente.

Dessa forma, concluímos que podemos estender o campo vetorial $f^\pm X$ para toda a esfera \mathbb{S}^2 . Para finalizar, vamos mostrar que \mathbb{S}^1 é invariante pelo campo estendido.

Seja $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^1$. Logo $y_3 = 0$, sendo assim, como $z_2 = \frac{y_3}{y_i}$, $i = 1, 2$, obtemos que $z_2 = 0$. Então, a expressão do campo vetorial em (y_1, y_2, y_3) dada por (1.6.2), ou uma expressão similar, possui a segunda componente igual a zero. Portanto, \mathbb{S}^1 é invariante. \square

Denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o campo vetorial que estende $f_*^\pm X$ para toda a esfera \mathbb{S}^2 , e definimos ele como sendo a compactificação de Poincaré de X na esfera \mathbb{S}^2 . Além disso, denotamos por \mathbb{D} a projeção do hemisfério norte \mathbb{H}^+ no plano $y_3 = 0$, o qual chamamos de disco de Poincaré.

Com a notação desenvolvida até agora, chamaremos de *singularidades finitas* as singularidades de $\mathcal{P}(X)$, que não pertencem a \mathbb{S}^1 , e as singularidades que pertencem a \mathbb{S}^1 serão chamadas de *singularidades infinitas*.

Da mesma maneira, uma *órbita periódica* será *finita* se estiver localizada em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, já uma *órbita periódica* localizada em \mathbb{S}^1 será chamada de *órbita periódica infinita* ou no *infinito*.

Exemplo 1.6.1. Considere o campo vetorial $X(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$. Podemos observar que este campo possui uma única singularidade, a origem, que é do tipo sela.

Vamos determinar a expressão de $\mathcal{P}(X)$ em $U_i, V_i, i = 1, 2$, para identificar as singularidades no infinito. Desse modo, observe que o grau do campo vetorial X é ímpar, assim, $U_i = V_i, i = 1, 2, 3$. Logo, basta analisar $U_i, i = 1, 2$.

A partir da expressão (1.6.2) obtemos a seguinte expressão em U_1 ,

$$X_{U_1}(z_1, z_2) = (2z_1, z_2).$$

Com isso, a origem é uma singularidade do tipo nó instável. Note que X_{U_1} é o campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ em U_1 projetado no plano $y_1 = 0$. Desse modo, na esfera, temos que o ponto $(1, 0, 0)$ é uma singularidade do tipo nó instável em $\mathcal{P}(X)$. Além disso, o ponto $(-1, 0, 0)$ em V_1 também é uma singularidade do tipo nó instável em $\mathcal{P}(X)$.

Agora, pela expressão (1.6.3) temos que a expressão em U_2 é dada por

$$X_{U_2}(z_1, z_2) = (-2z_1, -z_2).$$

Assim, obtemos que a origem é uma singularidade do tipo nó estável. Observe que X_{U_2} é o campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ em U_2 projetado no plano $y_2 = 0$. Dessa forma, na esfera, temos que o ponto $(0, 1, 0)$ é uma singularidade do tipo nó estável em $\mathcal{P}(X)$. Além disso, o ponto $(0, -1, 0)$ em V_2 também é uma singularidade do tipo nó estável em $\mathcal{P}(X)$.

A partir desse estudo, sabemos o comportamento de $\mathcal{P}(X)$ em \mathbb{S}^1 . Basta agora analisarmos $\mathcal{P}(X)$ em U_3 . Pela expressão (1.6.4) temos a seguinte expressão em U_3 ,

$$X_{U_3}(z_1, z_2) = (-z_1, z_2).$$

Podemos observar que X_{U_3} nada mais é do que o campo vetorial X restrito a $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Assim, temos que a origem é uma singularidade tipo sela. Então, $(0, 0, 1)$ em U_3 e $(0, 0, -1)$ em V_3 são singularidades do tipo sela em $\mathcal{P}(X)$.

A Figura 1.21 ilustra o retrato de fase dos campos vetoriais analisados acima.

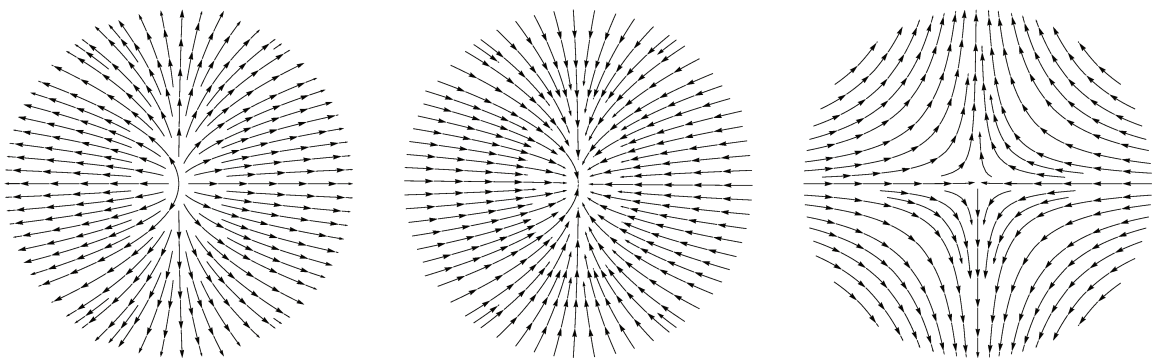


Figura 1.21: Retrato de fase dos campos vetoriais X_{U_1}, X_{U_2} e X_{U_3} .

Após analisar o comportamento do campo vetorial X na esfera, encontramos quatro singularidades infinitas, $S_1 = (1, 0, 0)$, $S_2 = (-1, 0, 0)$, $S_3 = (0, 1, 0)$ e $S_4 = (0, -1, 0)$, e duas singularidades finitas, $S_5 = (0, 0, 1)$ e $S_6 = (0, 0, -1)$. Consequentemente, conseguimos entender o comportamento das órbitas ao redor delas. Com isso, obtemos o retrato de fase do campo vetorial X no disco de Poincaré e o retrato de fase da compactificação de Poincaré $\mathcal{P}(X)$ que estão ilustrados na Figura 1.22.

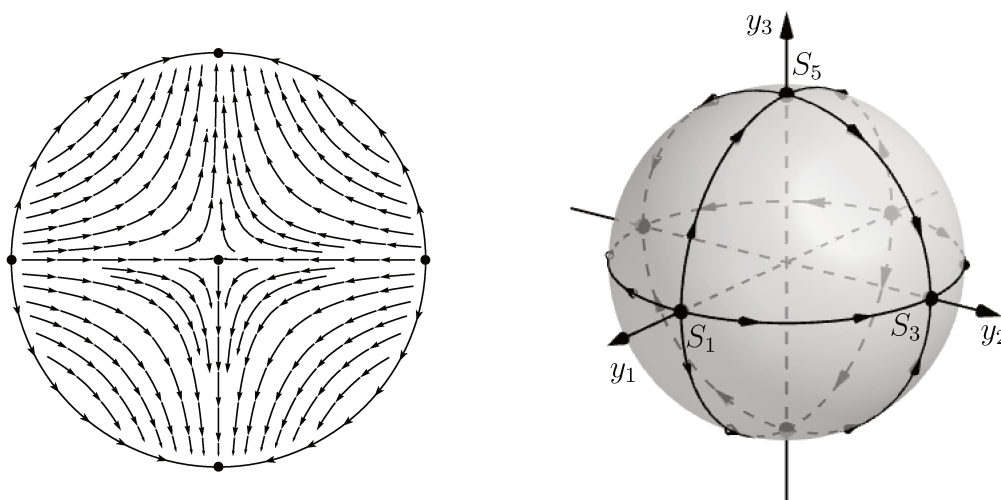


Figura 1.22: Retrato de fase de X no disco de Poincaré e o retrato de fase de $\mathcal{P}(X)$.

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a estabilidade assintótica de uma singularidade em um campo vetorial pertencente a uma classe de campos característica em \mathbb{R}^2 , mais especificamente, mostraremos que a origem $(0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável para o referido campo.

Dividimos o plano \mathbb{R}^2 em uma malha com infinitos quadrados de área unitária e definimos o campo vetorial que, restrito ao interior de cada quadrado, é dado por um campo vetorial linear próprio. Para demonstrar o resultado principal, será necessário estender o campo nas linhas da malha, utilizando a convenção de Filippov e, posteriormente, nos pontos de interseção, onde utilizamos uma regularização do campo. Nos baseamos principalmente no artigo [12].

2.1 Apresentação do Resultado Principal

Nesta seção, apresentamos um resultado proposto por Marcus e Yamabe em 1960, exibimos os campos vetoriais com os quais trabalhamos e enunciamos o resultado principal deste capítulo, que fornece condições suficientes para que a origem seja globalmente assintoticamente estável para esses campos.

Definição 2.1.1. *Uma matriz é dita Hurwitz se todos os seus autovalores têm parte real negativa.*

Definição 2.1.2. *Um sistema diferencial $x'(t) = F(x(t))$ onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é C^1 , é Hurwitz se sua matriz jacobiana $DF(x)$ é Hurwitz em cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$.*

Teorema 2.1.1 (Marcus e Yamabe). *Seja $x' = F(x)$ um sistema diferencial, com F de classe C^1 . Se o sistema é Hurwitz e a origem é um ponto singular, então a origem é uma solução globalmente assintoticamente estável.*

Uma demonstração pode ser vista em [4], por exemplo. Este Teorema é importante para a conclusão do resultado principal, que trata de uma classe de campos vetoriais descontínuos, descrita em seguida.

Vamos considerar os seguintes conjuntos:

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{n}{2} \text{ ou } x_2 = \frac{n}{2}, \text{ para } n \in \mathbb{Z} \text{ ímpar} \right\},$$

$$S'' = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{m}{2} \text{ e } x_2 = \frac{n}{2}, \text{ para } m, n \in \mathbb{Z} \text{ ímpares} \right\},$$

$$S' = S \setminus S''.$$

A Figura 2.1 ilustra os conjuntos, onde S é a malha tracejada, S'' são os pontos em vermelho e S' é a malha tracejada sem os pontos vermelhos.

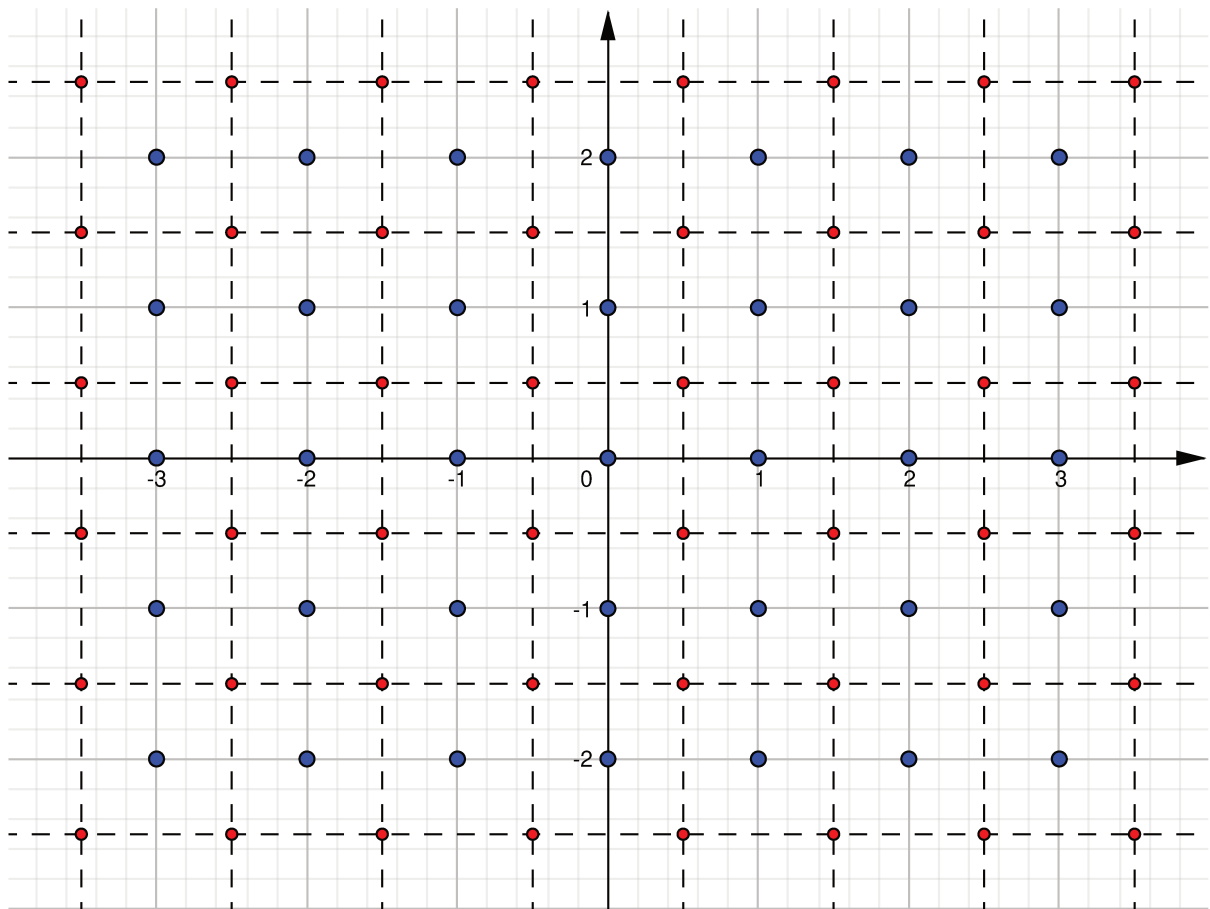


Figura 2.1: Representação dos conjuntos S , S'' e S' .

Cada componente conexa $S_{i,j}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus S$ é um quadrado aberto de área unitária centrado em um ponto (i, j) de coordenadas inteiras.

Seja $X_{i,j}$ uma matriz 2×2 para cada $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Desse modo, associamos a matriz $X_{i,j}$ a um campo vetorial linear em $S_{i,j}$, que por abuso de notação ainda será chamado de $X_{i,j}$. Vamos definir um campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, como $X|_{S_{i,j}} = X_{i,j}, \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$, onde as matrizes $X_{i,j}$ são da forma

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

com $a, b, c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$, para todo $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$.

Observe que as matrizes $X_{i,j}$ são Hurwitz. De fato, considerando

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

temos que o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - (-a - b)\lambda + ab$, assim $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = -b$ são os autovalores. Então, $Re(\lambda_1) < 0$ e $Re(\lambda_2) < 0$, pois $a, b > 0$. Isto implica que a singularidade do campo associado à matriz é um nó estável. Agora, considerando

$$\begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix}$$

temos que o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 2c\lambda + c^2 + d^2$, assim $\lambda_1 = -c + id$ e $\lambda_2 = -c - id$ são os autovalores. Então, $Re(\lambda_1) < 0$ e $Re(\lambda_2) < 0$, pois $c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$. Isto implica que a singularidade do campo associado à matriz é um foco estável.

Dizemos que um campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ é Hurwitz se os autovalores das matrizes $X_{i,j}$ têm parte real negativa para todo $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Além disso, quando X é Hurwitz, definimos $\delta(X)$ como o supremo da parte real dos autovalores de todas as matrizes $X_{i,j}$. Desse modo temos que $\delta(X) \leq 0$.

A origem de \mathbb{R}^2 sempre é uma singularidade do campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R} \setminus S$, pois como $X|_{S_{i,j}} = X_{i,j}$ para todo $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, temos que $X(0, 0) = X_{0,0}(0, 0) = (0, 0)$, logo $(0, 0)$ é um ponto singular. Agora, dizemos que a origem de \mathbb{R}^2 é uma solução global assintoticamente estável de X se o ω -limite de qualquer solução de X for a origem. De fato, pois $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x) = 0$ se, e somente se, $\varphi(t, x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

A seguir, enunciamos o resultado principal deste capítulo, que fornece um desdobramento do Teorema de Marcus e Yamabe para nossa classe de campos vetoriais descontínuos.

Teorema 2.1.2. *Seja X um campo vetorial descontínuo Hurwitz em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ com $\delta(X) < 0$. Então, a origem é globalmente assintoticamente estável para X .*

Para a demonstração desse resultado será necessário estender o campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ para o \mathbb{R}^2 . Inicialmente, fazemos a extensão para $\mathbb{R}^2 \setminus S''$ e depois completamos ela para todo o plano.

2.2 A Extensão para $\mathbb{R}^2 \setminus S''$

Seja X um campo vetorial descontínuo em $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Podemos observar que cada ponto $x \in S'$ pertence exatamente a dois quadrados fechados $S_{i,j}$ e, conseqüentemente, existem dois campos vetoriais $X_{i,j}$ definidos em x . Desse modo, utilizaremos a Convenção de Filippov (veja a Seção 1.1) para definir a trajetória passando por x .

Sendo assim, quando formos caracterizar as regiões pelos pontos $(i - \frac{1}{2}, x_2) \in S'$, temos que a variedade de descontinuidade é $\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = i - \frac{1}{2}\}$, ou seja, $\Sigma = f_i^{-1}(0)$, onde $f_i(x_1, x_2) = x_1 - i + \frac{1}{2}$. Agora, quando formos caracterizar as regiões pelos pontos $(x_1, j - \frac{1}{2}) \in S'$, temos que a variedade de descontinuidade é $\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = j - \frac{1}{2}\}$, ou seja, $\Sigma = g_j^{-1}(0)$, onde $g_j(x_1, x_2) = x_2 - j + \frac{1}{2}$.

Então, dado um campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, de acordo com Filippov, distinguimos as regiões em S' da seguinte forma:

1. Região de Costura (Σ^c): caracterizada pelos pontos $(i - \frac{1}{2}, x_2) \in S'$ onde $X_{i-1,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) \cdot X_{i,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) > 0$, ou pelos pontos $(x_1, j - \frac{1}{2}) \in S'$ onde $X_{i,j-1}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) \cdot X_{i,j}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) > 0$.
2. Região de Deslize (Σ^s): caracterizada pelos pontos $(i - \frac{1}{2}, x_2) \in S'$ onde $X_{i-1,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) > 0$ e $X_{i,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) < 0$, ou pelos pontos $(x_1, j - \frac{1}{2}) \in S'$ onde $X_{i,j-1}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) > 0$ e $X_{i,j}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) < 0$.
3. Região de Escape (Σ^e): caracterizada pelos pontos $(i - \frac{1}{2}, x_2) \in S'$ onde $X_{i-1,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) < 0$ e $X_{i,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) > 0$, ou pelos pontos $(x_1, j - \frac{1}{2}) \in S'$ onde $X_{i,j-1}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) < 0$ e $X_{i,j}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) > 0$.

Conforme visto na Subseção 1.1.1, para os pontos na região de deslize ou na região de escape definimos o campo vetorial deslizante Z^s da seguinte forma: Se $x = (i - \frac{1}{2}, x_2)$, então $Z^s(x) = Z^s(X_{i-1,j}, X_{i,j})(x)$ denota o vetor no setor gerado por $X_{i-1,j}(x)$ e $X_{i,j}(x)$ tangente à S' . Assim,

$$Z^s(X_{i-1,j}, X_{i,j})(x) = \frac{X_{i-1,j}f_i(x)X_{i,j}(x) - X_{i,j}f_i(x)X_{i-1,j}(x)}{X_{i-1,j}f_i(x) - X_{i,j}f_i(x)}. \quad (2.2.1)$$

Agora, se $x = (x_1, j - \frac{1}{2})$, então $Z^s(x) = Z^s(X_{i,j-1}, X_{i,j})(x)$ denota o vetor no setor gerado por $X_{i,j-1}(x)$ e $X_{i,j}(x)$ tangente à S' . Assim,

$$Z^s(X_{i,j-1}, X_{i,j})(x) = \frac{X_{i,j-1}g_j(x)X_{i,j}(x) - X_{i,j}g_j(x)X_{i,j-1}(x)}{X_{i,j-1}g_j(x) - X_{i,j}g_j(x)}. \quad (2.2.2)$$

Notemos que $x = (i - \frac{1}{2}, x_2) \in S'$ é um ponto singular de $Z^s(X_{i-1,j}, X_{i,j})$ se, e somente se, $X_{i-1,j}$ e $X_{i,j}$ são linearmente dependentes. De fato, temos por definição que o campo vetorial deslizante é dado por (2.2.1). Como estamos tratando de um campo vetorial na região de deslize ou de escape, temos que $X_{i,j}f_i(x) \cdot X_{i-1,j}f_i(x) < 0$, então $X_{i,j}f_i(x) - X_{i-1,j}f_i(x) \neq 0$.

Vamos considerar $X_{i-1,j}(x) = (X_{i-1,j}^1(x), X_{i-1,j}^2(x))$ e $X_{i,j}(x) = (X_{i,j}^1(x), X_{i,j}^2(x))$. Sabemos que $f_i(x) = x_1 - i + \frac{1}{2}$, então $\nabla f_i(x) = (1, 0)$. Assim,

$$X_{i,j}f_i(x) = \langle X_{i,j}(x), \nabla f_i(x) \rangle = \langle (X_{i,j}^1(x), X_{i,j}^2(x)), (1, 0) \rangle = X_{i,j}^1(x)$$

e

$$X_{i-1,j}f_i(x) = \langle X_{i-1,j}(x), \nabla f_i(x) \rangle = \langle (X_{i-1,j}^1(x), X_{i-1,j}^2(x)), (1, 0) \rangle = X_{i-1,j}^1(x).$$

Observe que

$$\begin{aligned} & X_{i,j}f_i(x)X_{i-1,j}(x) - X_{i-1,j}f_i(x)X_{i,j}(x) = \\ & = X_{i,j}^1(x)(X_{i-1,j}^1(x), X_{i-1,j}^2(x)) - X_{i-1,j}^1(x)(X_{i,j}^1(x), X_{i,j}^2(x)) = \\ & = (X_{i,j}^1(x)X_{i-1,j}^1(x) - X_{i-1,j}^1(x)X_{i,j}^1(x), X_{i,j}^1(x)X_{i-1,j}^2(x) - X_{i-1,j}^1(x)X_{i,j}^2(x)) = \\ & = (0, X_{i,j}^1(x)X_{i-1,j}^2(x) - X_{i-1,j}^1(x)X_{i,j}^2(x)) \end{aligned}$$

e temos

$$X_{i,j}^1(x)X_{i-1,j}^2(x) - X_{i-1,j}^1(x)X_{i,j}^2(x) = - \begin{vmatrix} X_{i-1,j}^1(x) & X_{i-1,j}^2(x) \\ X_{i,j}^1(x) & X_{i,j}^2(x) \end{vmatrix}.$$

Assim, $Z^s(X_{i-1,j}, X_{i,j})(x) = 0$ se, e só se, $\det[X_{i-1,j}, X_{i,j}] = 0$ se, e só se, $X_{i-1,j}$ e $X_{i,j}$ forem linearmente dependentes.

De modo similar, mostramos que $x = (x_1, j - \frac{1}{2}) \in S'$ é um ponto singular de $Z^s(X_{i,j-1}, X_{i,j})$ se, e somente se, $X_{i,j-1}$ e $X_{i,j}$ são linearmente dependentes.

Pela Definição 1.1.6, temos que um ponto $x = (i - \frac{1}{2}, x_2) \in S'$ é um ponto S' -regular de X se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $X_{i-1,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) \cdot X_{i,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) > 0$, ou seja, x está na região de costura;
2. $X_{i-1,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) \cdot X_{i,j}f_i(i - \frac{1}{2}, x_2) < 0$ e o produto vetorial $X_{i-1,j}(i - \frac{1}{2}, x_2) \wedge X_{i,j}(i - \frac{1}{2}, x_2) \neq 0$, ou seja, x pertence a região de deslize ou de escape e não é um ponto singular de $Z^s(X_{i-1,j}, X_{i,j})$.

Agora, um ponto $x = (x_1, j - \frac{1}{2}) \in S'$ é um ponto S' -regular de X se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $X_{i,j-1}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) \cdot X_{i,j}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) > 0$, ou seja, x está na região de costura;
2. $X_{i,j-1}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) \cdot X_{i,j}g_j(x_1, j - \frac{1}{2}) < 0$ e o produto vetorial $X_{i,j-1}(x_1, j - \frac{1}{2}) \wedge X_{i,j}(x_1, j - \frac{1}{2}) \neq 0$, ou seja, x pertence a região de deslize ou de escape e não é um ponto singular de $Z^s(X_{i,j-1}, X_{i,j})$.

Os pontos de S' que não são S' -regulares são chamados de pontos S' -singulares. Desse modo, dado um campo descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, temos que uma solução $x(t)$ de X em $\mathbb{R}^2 \setminus S''$ é:

1. um segmento aberto orientado de S' contido na região de escape ou de deslize, solução do campo vetorial Z^s ,
2. ou um ponto S' -singular,
3. ou uma curva definida em $\mathbb{R}^2 \setminus S''$ tangente a X em cada ponto de $\mathbb{R}^2 \setminus S$ e tal que seus pontos em S' estão na região de costura.

Portanto, o campo vetorial descontínuo X está definido em $\mathbb{R}^2 \setminus S''$. A seguir, vamos defini-lo em S'' .

2.3 A Extensão para \mathbb{R}^2

Para definir um campo vetorial descontínuo X em S'' vamos usar a ideia de regularização de campos vetoriais descontínuos tratada na Seção 1.3.

Dado um número positivo ε , uma função de transição linear por partes é uma função $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\varepsilon, \\ \frac{t+\varepsilon}{2\varepsilon} & \text{se } t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ 1 & \text{se } t \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Para um campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, vamos definir uma regularização, que será um campo vetorial Y_ε em \mathbb{R}^2 . Para isso, definimos a regularização em cada parte da malha. Para cada $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, considere os seguintes conjuntos:

$$Q_{i,j} = \left\{ (x_1, x_2) : i - \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq i + \frac{1}{2} - \varepsilon, j - \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq j + \frac{1}{2} - \varepsilon \right\},$$

$$V_{i,j} = \left\{ (x_1, x_2) : i - \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq i - \frac{1}{2} + \varepsilon, j - \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq j + \frac{1}{2} - \varepsilon \right\},$$

$$H_{i,j} = \left\{ (x_1, x_2) : i - \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq i + \frac{1}{2} - \varepsilon, j - \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq j - \frac{1}{2} + \varepsilon \right\},$$

$$R_{i,j} = \left\{ (x_1, x_2) : i - \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq i - \frac{1}{2} + \varepsilon, j - \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq j - \frac{1}{2} + \varepsilon \right\},$$

que estão ilustrados na Figura 2.2.

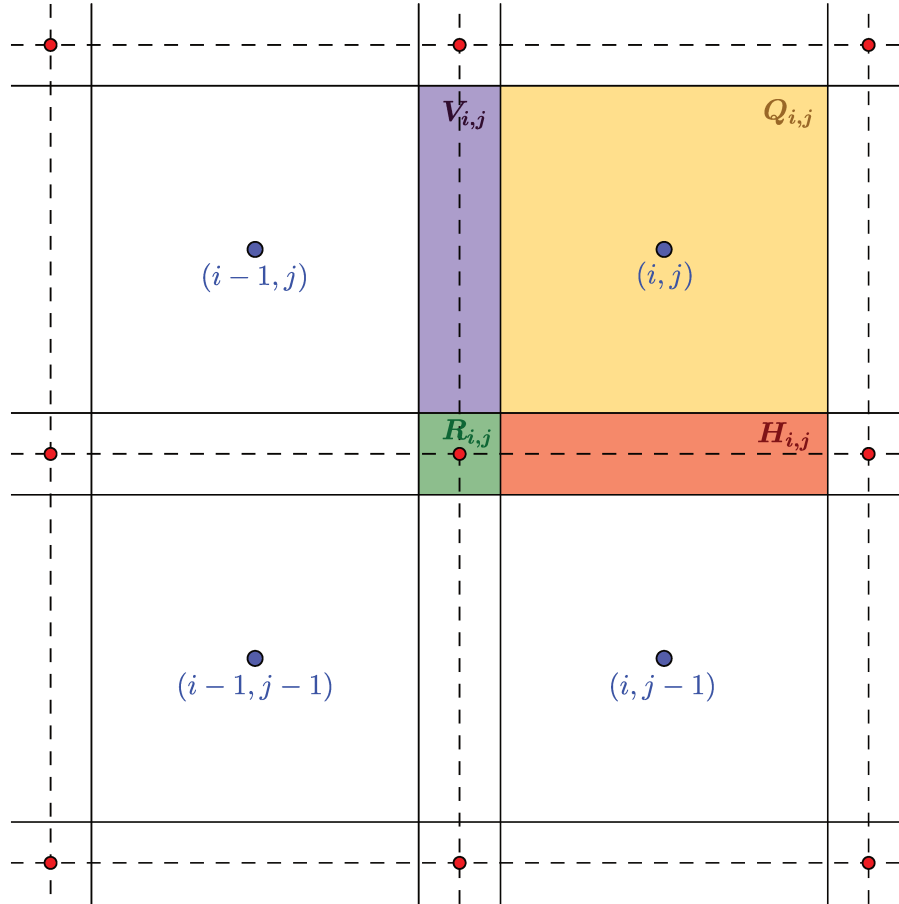


Figura 2.2: Ilustração dos conjuntos $Q_{i,j}$, $V_{i,j}$, $H_{i,j}$ e $R_{i,j}$.

Assim, a regularização Y_ε é definida da seguinte forma:

1. $Y_\varepsilon = X_{i,j}$ no quadrado fechado $Q_{i,j}$.
2. $Y_\varepsilon(x) = (1 - \varphi_\varepsilon(x_1 - i + \frac{1}{2})) X_{i-1,j}(x) + \varphi_\varepsilon(x_1 - i + \frac{1}{2}) X_{i,j}(x)$ se x pertence ao retângulo $V_{i,j}$.
3. $Y_\varepsilon(x) = (1 - \varphi_\varepsilon(x_2 - j + \frac{1}{2})) X_{i,j-1}(x) + \varphi_\varepsilon(x_2 - j + \frac{1}{2}) X_{i,j}(x)$ se x pertence ao retângulo $H_{i,j}$.

Até aqui, o campo vetorial Y_ε já está definido nas fronteiras dos quadrados $R_{i,j}^\varepsilon = R_{i,j}$. Agora, precisamos defini-lo no interior dos quadrados e, conseqüentemente, Y_ε estará definido em todo \mathbb{R}^2 .

4. Se $x = (x_1, x_2) \in R_{i,j}$, definimos

$$Y_\varepsilon(x) = \left(1 - \varphi_\varepsilon\left(x_2 - j + \frac{1}{2}\right)\right) Y_\varepsilon\left(x_1, j - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \varphi_\varepsilon\left(x_2 - j + \frac{1}{2}\right) Y_\varepsilon\left(x_1, j - \frac{1}{2} + \varepsilon\right).$$

Note que para definir a regularização no interior do quadrado, fazemos uma combinação dos valores da regularização definidos no item 2. As coordenadas do primeiro termo são de um ponto pertencente à aresta inferior do quadrado, que faz parte da fronteira do retângulo abaixo dele, e as coordenadas do segundo termo são de um ponto pertencente à aresta superior do quadrado, que faz parte da fronteira do retângulo acima dele. Ou seja, combinamos valores da regularização em um ponto do retângulo $V_{i,j}$ e um ponto do retângulo $V_{i,j-1}$, nos quais Y_ε já estava definido.

Da definição do campo vetorial Y_ε em \mathbb{R}^2 , segue que Y_ε é contínuo em todo \mathbb{R}^2 . Podemos notar que Y_ε em cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito da forma $Y_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(x) \cdot x$, onde

$$A_\varepsilon(x) = a_{i-1,j-1}(x)X_{i-1,j-1} + a_{i-1,j}(x)X_{i-1,j} + a_{i,j-1}(x)X_{i,j-1} + a_{i,j}(x)X_{i,j} \quad (2.3.1)$$

para algum $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, com $a_{i-1,j-1}(x) + a_{i-1,j}(x) + a_{i,j-1}(x) + a_{i,j}(x) = 1$, e cada $a_{l,k} \geq 0$ com $(l, k) \in G$, onde $G = \{(i-1, j-1), (i-1, j), (i, j-1), (i, j)\}$. Note que $A_\varepsilon(x)$ é uma matriz cujos elementos, em geral, dependem de x .

Atentamos principalmente no processo de regularização em torno dos cantos $p_{ij} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, onde $\bar{x}_1 = i - \frac{1}{2}$ e $\bar{x}_2 = j - \frac{1}{2}$. Para cada ε , o campo vetorial regularizado $Y_\varepsilon(x)$ está definido em $R_{i,j}^\varepsilon$. Além disso, p_{ij} sempre é o centro de $R_{i,j}$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{i,j}^\varepsilon = p_{ij}$. Assim, faz sentido considerar a solução órbita de Y_ε passando por p_{ij} .

Proposição 2.3.1. *O campo vetorial Y_ε é localmente Lipschitz em \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Pela construção do campo vetorial Y_ε , dado um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ podemos sempre escolher uma vizinhança U de x_0 e um par $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tal que a expressão de $Y_\varepsilon(x)$ para todo $x \in U$ é dada por $Y_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(x)x$, com (i, j) fixo.

Vamos definir

$$M = \max_{(l,k) \in G} \|X_{l,k}\|.$$

Portanto, para todo $x, y \in U$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\| Y_\varepsilon(x) - Y_\varepsilon(y) \| &= \| A_\varepsilon(x)x - A_\varepsilon(y)y \| \\
&= \left\| \sum_{(l,k) \in G} a_{l,k}(x)X_{l,k}x - \sum_{(l,k) \in S} a_{l,k}(y)X_{l,k}y \right\| \\
&\leq \sum_{(l,k) \in G} \| a_{l,k}(x)X_{l,k}x - a_{l,k}(y)X_{l,k}y \| \\
&= \sum_{(l,k) \in G} \| X_{l,k}(a_{l,k}(x)x - a_{l,k}(y)y) \| \\
&\leq \sum_{(l,k) \in G} \| X_{l,k} \| \| a_{l,k}(x)x - a_{l,k}(y)y \| \\
&\leq M \sum_{(l,k) \in G} \| a_{l,k}(x)x - a_{l,k}(y)y \| .
\end{aligned}$$

Como $0 \leq a_{l,k}(x), a_{l,k}(y) \leq 1$, é certo que

$$\| a_{l,k}(x)x - a_{l,k}(y)y \| \leq \| x - y \| .$$

Assim, das desigualdades acima, temos que

$$\| Y_\varepsilon(x) - Y_\varepsilon(y) \| \leq 4M \| x - y \| .$$

Tomando $L = 4M$, obtemos que Y_ε é localmente Lipschitz. \square

Assim, temos a existência e unicidade das soluções do campo vetorial Y_ε através de cada ponto de \mathbb{R}^2 , e também a dependência contínua em condições e parâmetros iniciais.

Por resultados obtidos em [16], temos que a função $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do campo vetorial descontínuo X se, e somente se, existe uma sequência de soluções $x_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ do campo vetorial regularizado Y_ε uniformemente convergente para $x(t)$ quando $\varepsilon \searrow 0$. Com isso, podemos definir a solução de um campo vetorial descontínuo X nos pontos de S'' . Seja $x_0 \in S''$ e seja $x_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ a solução de Y_ε tal que $x_\varepsilon(0) = x_0$. Então, tomamos a sequência de soluções $x_\varepsilon(t)$ e o limite quando $\varepsilon \searrow 0$. Esse limite, denotado por $x(t)$, é por definição a solução de X tal que $x(t) = x_0$.

Portanto, o campo vetorial descontínuo X está definido em \mathbb{R}^2 . Na próxima seção, exibimos um exemplo para uma melhor compreensão das extensões feitas.

2.4 Exemplo das Extensões

Acolhendo as notações dos conjuntos da Seção 2.1, considere os campos vetoriais lineares associados às seguintes matrizes:

$$X_{-1,1} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -5 \end{pmatrix}, \quad X_{0,1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad X_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$X_{-1,0} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & 2 \\ -2 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad X_{0,0} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}, \quad X_{1,0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix},$$

$$X_{-1,-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad X_{0,-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_{1,-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Observe que, estamos nos restringindo apenas aos nove quadrados centrais da malha da Figura 2.1, por simplicidade. Seja X um campo vetorial descontínuo em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, dado por $X|_{S_{i,j}} = X_{i,j}$, para $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. O retrato de fase desse campo é representado na Figura 2.3.

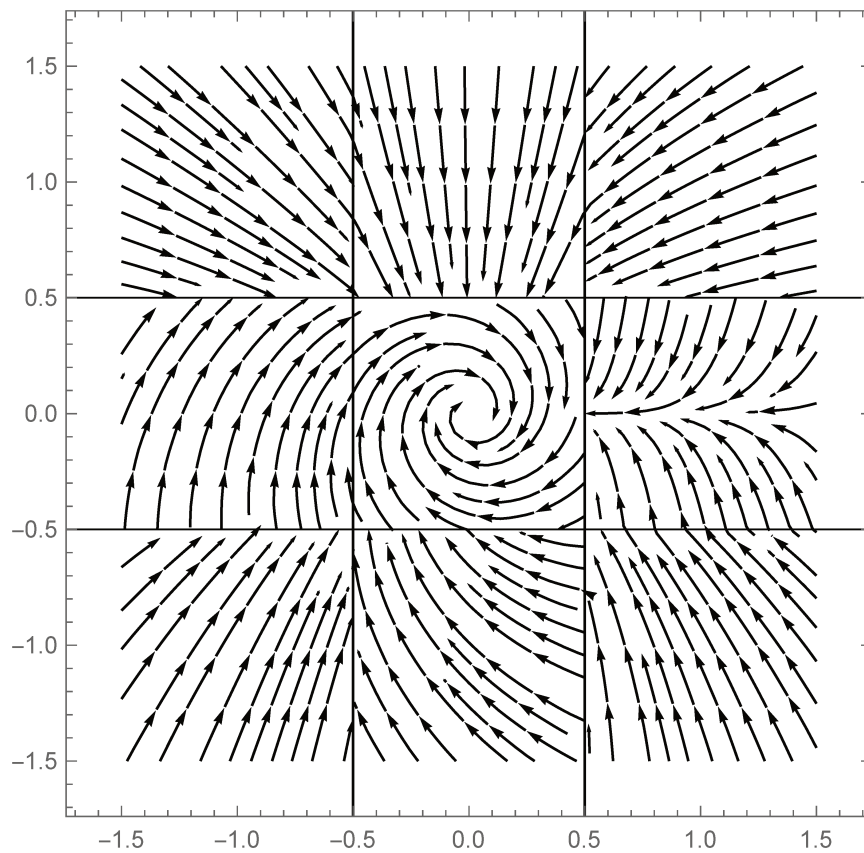


Figura 2.3: Retrato de fase do campo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$.

Primeiro, vamos estender o campo X para $\mathbb{R}^2 \setminus S''$, utilizando a convenção de Filippov. Considerando a variedade $x_2 = \frac{1}{2}$, dada pela função $g_1(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{2}$, entre os campos $X_{1,1}$ e $X_{1,0}$, temos

$$X_{1,1}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-x_1, -\frac{1}{4} \right), (0, 1) \right\rangle = -\frac{1}{4},$$

$$X_{1,0}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-x_1, -\frac{9}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = -\frac{9}{2}.$$

Então, $X_{1,1}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) X_{1,0}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{1}{4} \right) \left(-\frac{9}{2} \right) = \frac{9}{8} > 0$. Logo, temos uma região de costura nesse caso.

Entre os campos $X_{0,1}$ e $X_{0,0}$, temos

$$X_{0,1}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-4x_1, -\frac{5}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = -\frac{5}{2},$$

$$X_{0,0}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-2x_1 + \frac{7}{2}, -7x_1 - 1 \right), (0, 1) \right\rangle = -7x_1 - 1.$$

Então, $X_{0,1}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) X_{0,0}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = (-7x_1 - 1) \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{35}{2}x_1 + \frac{5}{2}$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_1 = -\frac{1}{7}$, assim, $\left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{2} \right)$ é o ponto de tangência. Daí, temos uma região de costura se $x_1 > -\frac{1}{7}$ e uma região de deslize se $x_1 < -\frac{1}{7}$.

Entre os campos $X_{-1,1}$ e $X_{-1,0}$, temos

$$X_{-1,1}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-5x_1 + \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{2},$$

$$X_{-1,0}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-\frac{5}{6}x_1 + 1, -2x_1 - \frac{5}{12} \right), (0, 1) \right\rangle = -2x_1 - \frac{5}{12}.$$

Então, $X_{-1,1}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) X_{-1,0}g_1 \left(x_1, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{2} \right) \left(-2x_1 - \frac{5}{12} \right)$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_1 = -\frac{15}{4}$ ou $x_1 = -\frac{5}{24}$, porém não temos pontos de tangência pois $-\frac{3}{2} < x_1 < -\frac{1}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $x_1 < -\frac{15}{4}$ ou $x_1 > -\frac{5}{24}$, porém não temos uma região de costura pois $-\frac{3}{2} < x_1 < -\frac{1}{2}$. A expressão é menor do que zero quando $-\frac{15}{4} < x_1 < -\frac{5}{24}$, onde temos uma região de deslize.

Considerando agora a variedade $x_2 = -\frac{1}{2}$, dada pela função $g_0(x_1, x_2) = x_2 + \frac{1}{2}$, entre os campos $X_{1,0}$ e $X_{1,-1}$, temos

$$X_{1,0}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-x_1, \frac{9}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = \frac{9}{2},$$

$$X_{1,-1}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-3x_1 + \frac{1}{2}, x_1 + \frac{3}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = x_1 + \frac{3}{2}.$$

Então, $X_{1,0}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) X_{1,-1}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \frac{9}{2} \left(x_1 + \frac{3}{2} \right)$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_1 = -\frac{3}{2}$, porém não temos pontos de tangência, pois $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{3}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $x_1 > -\frac{3}{2}$, onde temos uma região de costura. A expressão é menor do que zero quando $x_1 < -\frac{3}{2}$, porém não temos uma região de deslize, pois $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{3}{2}$.

Entre os campos $X_{0,0}$ e $X_{0,-1}$, temos

$$X_{0,0}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-2x_1 - \frac{7}{2}, -7x_1 + 1 \right), (0, 1) \right\rangle = -7x_1 + 1,$$

$$X_{0,-1}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-x_1 - \frac{1}{2}, -x_1 + \frac{1}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = -x_1 + \frac{1}{2}.$$

Então, $X_{0,0}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) X_{0,-1}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = (-7x_1 + 1) \left(-x_1 + \frac{1}{2} \right)$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_1 = \frac{1}{7}$ ou $x_1 = \frac{1}{2}$, assim, $\left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{2} \right)$ é o ponto de tangência, pois $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $x_1 < \frac{1}{7}$ ou $x_1 > \frac{1}{2}$, e é menor do que zero quando $\frac{1}{7} < x_1 < \frac{1}{2}$. Logo, temos uma região de costura quando $x_1 < \frac{1}{7}$ e uma região de deslize quando $x_1 > \frac{1}{7}$, pois $-\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}$.

Entre os campos $X_{-1,0}$ e $X_{-1,-1}$, temos

$$X_{-1,0}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-\frac{5}{6}x_1 - 1, -2x_1 + \frac{5}{12} \right), (0, 1) \right\rangle = -2x_1 + \frac{5}{12},$$

$$X_{-1,-1}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = \left\langle \left(-5x_1, \frac{9}{2} \right), (0, 1) \right\rangle = \frac{9}{2}.$$

Então, $X_{-1,0}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) X_{-1,-1}g_0 \left(x_1, -\frac{1}{2} \right) = (-2x_1 + \frac{5}{12}) \frac{9}{2}$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_1 = \frac{5}{24}$, porém não temos pontos de tangência pois $-\frac{3}{2} < x_1 < -\frac{1}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $x_1 < \frac{5}{24}$ e é menor do que zero quando $x_1 > \frac{5}{24}$. Logo, temos uma região de costura nesse caso, pois $-\frac{3}{2} < x_1 < -\frac{1}{2}$.

Considerando agora a variedade $x_1 = \frac{1}{2}$, dada pela função $f_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{2}$, entre os campos $X_{1,1}$ e $X_{0,1}$, temos

$$X_{1,1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}x_2 \right), (1, 0) \right\rangle = -\frac{1}{2},$$

$$X_{0,1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \langle (-2, -5x_2), (1, 0) \rangle = -2.$$

Então, $X_{1,1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) X_{0,1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = (-\frac{1}{2})(-2) = 1 > 0$. Logo, temos uma região de costura nesse caso.

Entre os campos $X_{1,0}$ e $X_{0,0}$, temos

$$X_{1,0}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, -9x_2 \right), (1, 0) \right\rangle = -\frac{1}{2},$$

$$X_{0,0}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \left\langle \left(-1 + 7x_2, -\frac{7}{2} - 2x_2 \right), (1, 0) \right\rangle = -1 + 7x_2.$$

Então, $X_{1,0}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) X_{0,0}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = (-1 + 7x_2) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}x_2$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_2 = \frac{1}{7}$, assim, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{7})$ é o ponto de tangência. A expressão é maior do que zero quando $x_2 < \frac{1}{7}$, onde temos uma região de costura, e é menor do que zero quando $x_2 > \frac{1}{7}$, onde temos uma região de deslize.

Entre os campos $X_{1,-1}$ e $X_{0,-1}$, temos

$$X_{1,-1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \left\langle \left(-\frac{3}{2} - x_2, \frac{1}{2} - 3x_2 \right), (1, 0) \right\rangle = -\frac{3}{2} - x_2,$$

$$X_{0,-1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \left\langle \left(-\frac{1}{2} + x_2, -\frac{1}{2} - x_2 \right), (1, 0) \right\rangle = -\frac{1}{2} + x_2.$$

Então, $X_{1,-1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) X_{0,-1}f_1 \left(\frac{1}{2}, x_2 \right) = \left(-\frac{3}{2} - x_2\right) \left(-\frac{1}{2} + x_2\right)$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_2 = -\frac{3}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$, porém não temos pontos de tangência pois $-\frac{3}{2} < x_2 < \frac{1}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $-\frac{3}{2} < x_2 < \frac{1}{2}$, e é menor do que zero quando $x_2 < -\frac{3}{2}$ ou $x_2 > \frac{1}{2}$. Como $-\frac{3}{2} < x_2 < -\frac{1}{2}$, temos uma região de costura nesse caso.

Considerando agora a variedade $x_1 = -\frac{1}{2}$, dada pela função $f_0(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}$, entre os campos $X_{0,1}$ e $X_{-1,1}$, temos

$$X_{0,1}f_0 \left(-\frac{1}{2}, x_2 \right) = \langle (2, -5x_2), (1, 0) \rangle = 2,$$

$$X_{-1,1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \left\langle \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{3}x_2, \frac{1}{3} - 5x_2\right), (1, 0) \right\rangle = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}x_2.$$

Então, $X_{0,1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) X_{-1,1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = 2\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{3}x_2\right)$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_2 = -\frac{15}{4}$, porém não temos pontos de tangência pois $\frac{1}{2} < x_2 < \frac{3}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $x_2 > -\frac{15}{4}$ e é menor do que zero quando $x_2 < -\frac{15}{4}$. Como $\frac{1}{2} < x_2 < \frac{3}{2}$, temos apenas uma região de costura nesse caso.

Entre os campos $X_{0,0}$ e $X_{-1,0}$, temos

$$X_{0,0}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \left\langle \left(1 + 7x_2, \frac{7}{2} - 2x_2\right), (1, 0) \right\rangle = 1 + 7x_2,$$

$$X_{-1,0}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \left\langle \left(\frac{5}{12} + 2x_2, 1 - \frac{5}{6}x_2\right), (1, 0) \right\rangle = \frac{5}{12} + 2x_2.$$

Então, $X_{0,0}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) X_{-1,0}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = (1 + 7x_2)\left(\frac{5}{12} + 2x_2\right)$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_2 = -\frac{5}{24}$ ou $x_2 = -\frac{1}{7}$, assim, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{24}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}\right)$ são os pontos de tangência. A expressão é maior do que zero quando $x_2 < -\frac{5}{24}$ ou $x_2 > -\frac{1}{7}$, onde temos uma região de costura, e é menor do que zero quando $-\frac{5}{24} < x_2 < -\frac{1}{7}$, onde temos uma região de deslizamento.

Entre os campos $X_{0,-1}$ e $X_{-1,-1}$, temos

$$X_{0,-1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \left\langle \left(\frac{1}{2} + x_2, \frac{1}{2} - x_2\right), (1, 0) \right\rangle = \frac{1}{2} + x_2,$$

$$X_{-1,-1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \left\langle \left(\frac{5}{2}, -9x_2\right), (1, 0) \right\rangle = \frac{5}{2}.$$

Então, $X_{0,-1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) X_{-1,-1}f_0\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) = \left(\frac{1}{2} + x_2\right)\frac{5}{2}$. Essa expressão é igual a zero se, e somente se, $x_2 = -\frac{1}{2}$, porém não temos pontos de tangência pois $-\frac{3}{2} < x_2 < \frac{1}{2}$. A expressão é maior do que zero quando $x_2 > -\frac{1}{2}$, porém não temos uma região de costura, pois $-\frac{3}{2} < x_2 < -\frac{1}{2}$, e é menor do que zero quando $x_2 < -\frac{1}{2}$, onde temos uma região de deslizamento.

Dessa forma, conhecemos o comportamento do campo X nas linhas que dividem os campos $X_{i,j}$, para $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. A Figura 2.4 ilustra o campo em $\mathbb{R}^2 \setminus S''$.

Agora, vamos definir o campo X em S'' . Para isso, obtemos uma regularização Y_ε em \mathbb{R}^2 do campo, dada por

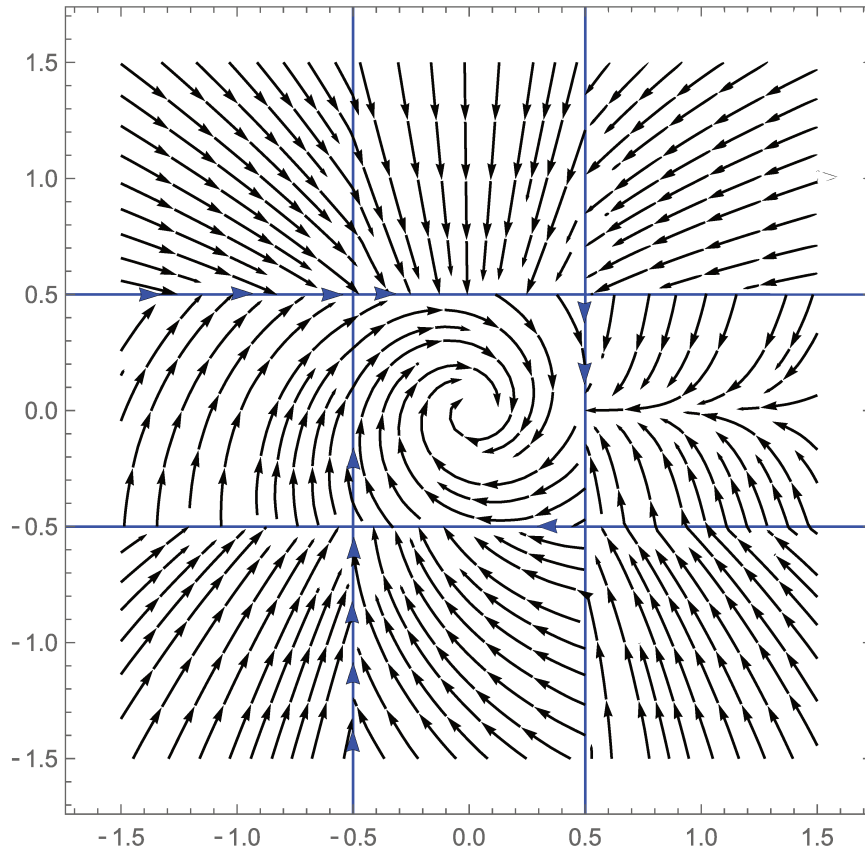
$$Y_\varepsilon = X_{i,j},$$

no quadrado fechado $\{(x_1, x_2) : i - \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq i + \frac{1}{2} - \varepsilon, j - \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq j + \frac{1}{2} - \varepsilon\}$, para $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Para a variedade $x_2 = \frac{1}{2}$, temos

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{1,0}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{1,1}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{0,0}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{0,1}(x_1, x_2),$$


 Figura 2.4: Retrato de fase do campo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S''$.

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{-1,0}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{-1,1}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{3}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$.

Para a variedade $x_2 = -\frac{1}{2}$, temos

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{1,-1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{1,0}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{3}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{0,-1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{0,0}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{-1,-1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{-1,0}(x_1, x_2).$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{3}{2} + \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon\}$.

Para a variedade $x_1 = \frac{1}{2}$, temos

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{0,1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{1,1}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{3}{2} - \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{0,0}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{1,0}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon, -\frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} - \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{0,-1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{1,-1}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon, -\frac{3}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} - \varepsilon\}$.

Para a variedade $x_1 = -\frac{1}{2}$, temos

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{-1,1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{0,1}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{3}{2} - \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{-1,0}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{0,0}(x_1, x_2),$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, -\frac{1}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} - \varepsilon\}$;

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) X_{-1,-1}(x_1, x_2) + \varphi\left(\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) X_{0,-1}(x_1, x_2).$$

no retângulo $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, -\frac{3}{2} + \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} - \varepsilon\}$.

Agora, para o interior dos quadrados $R_{i,j}$, $i, j \in \{0, 1\}$, considerando a variedade $x_2 = 1/2$, temos

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) Y_\varepsilon\left(x_1, \frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) Y_\varepsilon\left(x_1, \frac{1}{2} + \varepsilon\right),$$

no quadrado $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$,

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) Y_\varepsilon\left(x_1, \frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \varphi\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) Y_\varepsilon\left(x_1, \frac{1}{2} + \varepsilon\right),$$

no quadrado $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$.

E considerando a variedade $x_2 = -1/2$, temos

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) Y_\varepsilon\left(x_1, -\frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) Y_\varepsilon\left(x_1, -\frac{1}{2} + \varepsilon\right),$$

no quadrado $\{(x_1, x_2) : \frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq \frac{1}{2} + \varepsilon, -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon\}$,

$$Y_\varepsilon(x_1, x_2) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right)\right) Y_\varepsilon\left(x_1, -\frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \varphi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2}}{\varepsilon}\right) Y_\varepsilon\left(x_1, -\frac{1}{2} + \varepsilon\right),$$

no quadrado $\{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_1 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, -\frac{1}{2} - \varepsilon \leq x_2 \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon\}$.

Com isso, determinamos a regularização Y_ε , que nos permite definir o campo X em S'' . A Figura 2.5 mostra o retrato de fase do campo em todo \mathbb{R}^2 .

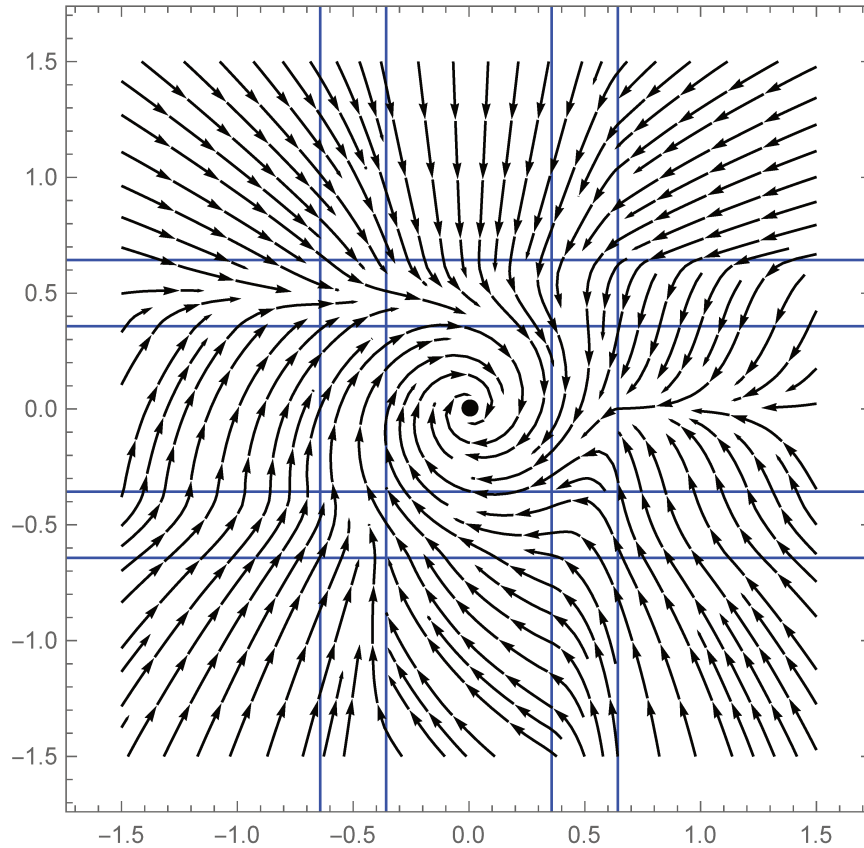


Figura 2.5: Retrato de fase do campo X em \mathbb{R}^2 .

2.5 Prova do Resultado Principal

Nesta seção, vamos demonstrar nosso resultado principal enunciado na Seção 2.1. Para isso, utilizamos as extensões do campo vetorial X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ desenvolvidas nas seções anteriores.

Definição 2.5.1. *Seja M uma matriz 2×2 Hurwitz, definimos $\delta(M)$ como o máximo das partes reais dos dois autovalores de M .*

Na Seção 2.3 vimos que o campo vetorial Y_ϵ pode ser dado pela expressão (2.3.1). Dessa forma, pelo lema a seguir, temos que Y_ϵ é Hurwitz.

Lema 2.5.1. *Assuma que A e B são matrizes Hurwitz da forma (2.1.1). Então,*

- (a) *para todo $s \in [0, 1]$ a matriz $sA + (1 - s)B$ é Hurwitz, e*
- (b) $\delta(sA + (1 - s)B) \leq \max\{\delta(A), \delta(B)\}$.

Demonstração. Vamos separar a demonstração em três casos.

Caso 1: As matrizes A e B são da forma:

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix}$$

com $a, c > 0$ e $b, d \in \mathbb{R}$. Os autovalores de A são $-a \pm bi$ e os autovalores de B são $-c \pm di$. Com isso,

$$\begin{aligned} sA + (1-s)B &= s \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -sa - (1-s)c & sb + (1-s)d \\ -sb - (1-s)d & -sa - (1-s)c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, os autovalores de $sA + (1-s)B$ são $-(sa + (1-s)c) \pm (sb + (1-s)d)i$.

Temos que $\delta(A) = -a$, $\delta(B) = -c$ e $\delta(sA + (1-s)B) = -sa - (1-s)c$, então $sA + (1-s)B$ é Hurwitz. Além disso, $\delta(sA + (1-s)B) \leq \max\{\delta(A), \delta(B)\}$. Portanto, o resultado vale para esse caso.

Caso 2: As matrizes A e B são da forma

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

com $a, b, c, d > 0$. Os autovalores de A são $-a$ e $-b$ e os autovalores de B são $-c$ e $-d$. Com isso,

$$\begin{aligned} sA + (1-s)B &= s \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -sa - (1-s)c & 0 \\ 0 & -sb - (1-s)d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, os autovalores de $sA + (1-s)B$ são $-sa - (1-s)c$ e $-sb - (1-s)d$.

Temos que $\delta(A) = \max\{-a, -b\}$, $\delta(B) = \max\{-c, -d\}$ e $\delta(sA + (1-s)B) = \max\{-sa - (1-s)c, -sb - (1-s)d\}$, então $sA + (1-s)B$ é Hurwitz. Além disso, $\delta(sA + (1-s)B) \leq \max\{\delta(A), \delta(B)\}$. Portanto, o resultado vale para esse caso.

Caso 3: As matrizes A e B são da forma

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix}$$

com $a, b, c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$. Os autovalores de A são $-a$ e $-b$ e os autovalores de B são $-c \pm di$. Com isso,

$$\begin{aligned} sA + (1-s)B &= s \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -sa - (1-s)c & (1-s)d \\ -(1-s)d & -sb - (1-s)c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vamos determinar os autovalores de $sA + (1-s)B$. Temos que seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}[sA + (1-s)B]\lambda + \det[sA + (1-s)B] \\ &= \lambda^2 - (-s(a+b) - 2(1-s)c)\lambda + (-sa - (1-s)c)(-sb - (1-s)c) \\ &= \lambda^2 + (s(a+b) + 2(1-s)c)\lambda + (-sa - (1-s)c)(-sb - (1-s)c) + (1-s)^2 d^2. \end{aligned}$$

Assim, seus autovalores são

$$\lambda_{\pm} = \frac{-s(a+b) - 2(1-s)c \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde $\Delta = (s(a+b) + 2(1-s)c)^2 - 4[(-sa - (1-s)c)(-sb - (1-s)c) + (1-s)^2d^2]$. Observemos que

$$\begin{aligned} (s(a+b) + 2(1-s)c)^2 &= s^2(a+b)^2 + 4s(a+b)(1-s)c + 4(1-s)^2c^2 \\ &= s^2a^2 + 2s^2ab + s^2b^2 + 4s(a+b)(1-s)c + 4(1-s)^2c^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -4(-sa - (1-s)c)(-sb - (1-s)c) &= -4[s^2ab + sa(1-s)c + sb(1-s)c + (1-s)^2c^2] \\ &= -4s^2ab - 4s(a+b)(1-s)c - 4(1-s)^2c^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\Delta = s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2.$$

Temos que $\delta(A) = \max\{-a, -b\}$ e $\delta(B) = -c$. Então, $\max\{\delta(A), \delta(B)\} = \max\{-a, -b, -c\}$.

Vamos mostrar que a parte real de λ_{\pm} é menor que $\max\{-a, -b, -c\}$. Se $\Delta \leq 0$, temos que a parte real é $\frac{1}{2}(-s(a+b) - 2(1-s)c)$. Desse modo, valem (a) e (b). Sendo assim, vamos assumir que $\Delta > 0$ e, conseqüentemente, λ_{\pm} são reais. Consideramos $\max\{-a, -b, -c\} = -a$, as outras duas possibilidades podem ser estudadas de maneira análoga.

Mostraremos que $\lambda_{\pm} \leq -a$, o que é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{-s(a+b) - 2(1-s)c \pm \sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2}}{2} &\leq -a \\ \Leftrightarrow -s(a+b) - 2(1-s)c \pm \sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2} &\leq -2a \\ \Leftrightarrow -s(a+b) - 2(1-s)c \pm \sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2} + 2a &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2a - 2c - (a+b-2c)s \pm \sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2} &\leq 0. \end{aligned}$$

Temos que $2a - 2c < 0$, pois $-a = \max\{-a, -b, -c\}$ e $a, b, c > 0$. Vamos analisar a reta $y(s) = 2a - 2c - (a+b-2c)s$. Sabemos que $s \in [0, 1]$, assim, se $s = 0$ temos $y(0) = 2a - 2c < 0$, agora se $s = 1$ temos $y(1) = 2a - 2c - (a+b-2c) = a - b < 0$, pois $-a = \max\{-a, -b, -c\}$. Desse modo, $-s(a+b) - 2(1-s)c + 2a < 0$. Com isso,

$$\begin{aligned} -s(a+b) - 2(1-s)c + 2a \pm \sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow |-s(a+b) - 2(1-s)c + 2a| &\geq |\sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2}| \\ \Leftrightarrow (-s(a+b) - 2(1-s)c + 2a)^2 &\geq (\pm\sqrt{s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2})^2 \\ \Leftrightarrow (-s(a+b) - 2(1-s)c + 2a)^2 &\geq s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2 \\ \Leftrightarrow (-s(a+b) - 2(1-s)c + 2a)^2 - (s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
& (-s(a+b) - 2(1-s)c + 2a)^2 - (s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2) \\
&= (2(a - (1-s)c) - s(a+b))^2 - (s^2(a-b)^2 - 4(1-s)^2d^2) \\
&= 4[a^2 - 2a(1-s)c + (1-s)^2c^2 - sa(a+b) + sc(1-s)(a+b) + (1-s)^2d^2 + s^2ab] \\
&= 4[(1-s)(-2ac + (1-s)c^2 + sc(a+b) + (1-s)d^2) + a^2 - sa(a+b) + s^2ab] \\
&= 4[(1-s)(-2ac + (1-s)c^2 + sc(a+b) + (1-s)d^2) + a^2(1-s) - sab(1-s)] \\
&= 4(1-s)[-2ac + (1-s)c^2 + sc(a+b) + (1-s)d^2 - d^2 + a^2 - sab] \\
&= 4(1-s)[(a-c)^2 + d^2 - s(c^2 - ca - cb + d^2 + ab)] \\
&= 4(1-s)[(a-c)^2 + d^2 - s((a-c)(b-c) + d^2)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pm} \leq -a &\Leftrightarrow 4(1-s)[(a-c)^2 + d^2 - s((a-c)(b-c) + d^2)] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a-c)^2 + d^2 - s((a-c)(b-c) + d^2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Por fim, se $s = 0$, temos $(a-c)^2 + d^2 > 0$, agora se $s = 1$ temos $(a-c)^2 + d^2 - ((a-c)(b-c) + d^2) = (a-c)((a-c) - (b-c)) = (a-c)(a-b) > 0$, pois $-a = \max\{-a, -b, -c\}$. Então, temos que vale a última desigualdade. Portanto, o resultado vale para esse caso, finalizando assim a demonstração. \square

O próximo lema mostra que, para matrizes Hurwitz arbitrárias, o item (a) do Lema 2.5.1 nem sempre é verdadeiro.

Lema 2.5.2. *Considere as seguintes matrizes Hurwitz*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, a matriz $sA + (1-s)B$ não é Hurwitz para $s = \frac{1}{2}$.

Demonstração. O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 1$, assim, os autovalores de A são

$$\frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, o polinômio característico de B é $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, assim, os autovalores de A são

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Desse modo, temos que A e B são Hurwitz.

Vamos agora encontrar os autovalores de $sA + (1-s)B$. Temos que

$$sA + (1-s)B = s \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-5s & -3+2s \\ 1 & 1-s \end{pmatrix}.$$

Então, o polinômio característico de $sA + (1-s)B$ é

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \lambda^2 - (-2 - 5s + 1 - s)\lambda + [(-2 - 5s)(1 - s) - (-3 + 2s)] \\
&= \lambda^2 - (-1 - 6s)\lambda + [-2 + 2s - 5s + 5s^2 + 3 - 2s] \\
&= \lambda^2 + (1 + 6s)\lambda + (1 - 5s + 5s^2).
\end{aligned}$$

Assim, os autovalores são

$$\frac{-(1+6s) \pm \sqrt{(1+6s)^2 - 4(1-5s+5s^2)}}{2} = \frac{-(1+6s) \pm \sqrt{-3+32s+16s^2}}{2}.$$

Desse modo, para $s = \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{-[1+6(\frac{1}{2})] \pm \sqrt{-3+32(\frac{1}{2})+16(\frac{1}{2})^2}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{17}}{2},$$

onde $\frac{-4+\sqrt{17}}{2} < 0 < \frac{-4-\sqrt{17}}{2}$, pois $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5$. Portanto, $sA + (1-s)B$ não é Hurwitz quando $s = \frac{1}{2}$. \square

Então, pelo Lema 2.5.2, para nossa classe de campos vetoriais descontínuos X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$, as matrizes $X_{i,j}$ não podem ser Hurwitz arbitrárias. Se isso ocorre, o campo vetorial Y_ε pode não ser Hurwitz. Pelo Lema 2.4.1, temos que Y_ε é Hurwitz em \mathbb{R}^2 , e

$$\delta(Y_\varepsilon) =: \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \delta(A_\varepsilon(x)) \leq \delta(X) = \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \delta(X_{i,j}). \quad (2.5.1)$$

Para provar o Teorema 2.1.2 queremos utilizar o Teorema de Marcus e Yamabe, então é necessário uma regularização \mathcal{C}^1 conveniente do campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$. A seguir, vamos exibir uma regularização \mathcal{C}^∞ para o campo vetorial descontínuo X em \mathbb{R}^2 .

Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, uma função de transição \mathcal{C}^∞ é uma função $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\varepsilon, \\ 1 & \text{se } t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

e $\psi'_\varepsilon(t) > 0$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Considere os conjuntos $Q_{i,j}$, $V_{i,j}$, $H_{i,j}$ e $R_{i,j}$ definidos na Seção 2.3. Uma regularização \mathcal{C}^∞ de um campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ será um campo vetorial \overline{Z}_ε em \mathbb{R}^2 definido como segue. Para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ temos que

1. $Z_\varepsilon = X_{i,j}$ no quadrado fechado $Q_{i,j}$.
2. $Z_\varepsilon(x) = (1 - \psi_\varepsilon(x_1 - i + \frac{1}{2})) X_{i-1,j}(x) + \psi_\varepsilon(x_1 - i + \frac{1}{2}) X_{i,j}(x)$ se x pertence ao retângulo $V_{i,j}$.
3. $Z_\varepsilon(x) = (1 - \psi_\varepsilon(x_2 - j + \frac{1}{2})) X_{i,j-1}(x) + \psi_\varepsilon(x_2 - j + \frac{1}{2}) X_{i,j}(x)$ se x pertence ao retângulo $H_{i,j}$.

Até aqui, o campo vetorial Z_ε já está definido nas fronteiras dos quadrados $R_{i,j}$. Agora, precisamos defini-lo no interior dos quadrados e, conseqüentemente, Z_ε estará definido em todo \mathbb{R}^2 .

(iv) Se $x = (x_1, x_2) \in R_{i,j}$, definimos

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(x) = & \left(1 - \psi\left(\frac{x_2 - j + \frac{1}{2} + \varepsilon}{2\varepsilon}\right)\right) Z_\varepsilon\left(x_1, j - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) \\ & + \psi\left(\frac{x_2 - j + \frac{1}{2} + \varepsilon}{2\varepsilon}\right) Z_\varepsilon\left(x_1, j - \frac{1}{2} + \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Do modo como foi definido o campo Z_ε em \mathbb{R}^2 , temos que Z_ε é \mathcal{C}^∞ em \mathbb{R}^2 exceto, talvez, nos quadrados $R_{i,j}$. Porém, sempre podemos considerar uma perturbação \overline{Z}_ε suficientemente pequena de Z_ε restrita aos quadrados $R_{i,j}$ tal que \overline{Z}_ε é \mathcal{C}^∞ em todo \mathbb{R}^2 .

Escolhendo ψ_ε e \overline{Z}_ε convenientemente, e tomando em conta (2.5.1), temos que $\delta(\overline{Z}_\varepsilon) < \frac{\delta(X)}{2} < 0$, com isso \overline{Z}_ε é Hurwitz. Além disso, temos que $\|Y_\varepsilon(x) - \overline{Z}_\varepsilon(x)\| < \varepsilon^2$, obtendo que \overline{Z}_ε é localmente Lipschitz.

Finalizamos esta seção exibindo a demonstração do Teorema 2.1.2 que encaixou o estudo deste capítulo.

Demonstração. Seja X um campo vetorial descontínuo Hurwitz em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ com $\delta(X) < 0$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja Y_ε uma regularização localmente Lipschitz de X em \mathbb{R}^2 , construída na Seção 2.3. Sabemos que Y_ε é Hurwitz em \mathbb{R}^2 , e pela expressão (2.5.1) temos que $\delta(Y_\varepsilon) \leq \delta(X) < 0$.

O campo vetorial regularizado Y_ε não é globalmente \mathcal{C}^1 , pois a função de transição utilizada para descrever Y_ε é apenas \mathcal{C}^0 . Porém, podemos aproximá-lo por um campo vetorial \mathcal{C}^∞ , \overline{Z}_ε , em \mathbb{R}^2 tal que $\delta(\overline{Z}_\varepsilon) < \frac{\delta(X)}{2} < 0$. Com isso, temos que \overline{Z}_ε é Hurwitz em \mathbb{R}^2 . Como a origem é um ponto singular de X , pela construção de Y_ε e de \overline{Z}_ε , a origem também é um ponto singular para esses campos vetoriais.

Como \overline{Z}_ε é \mathcal{C}^∞ , Hurwitz em \mathbb{R}^2 e a origem é um ponto singular, temos pelo Teorema de Markus e Yamabe que a origem é globalmente assintoticamente estável para \overline{Z}_ε . Afirmamos que a origem é também globalmente assintoticamente estável para Y_ε . De fato, tome um ponto arbitrário $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. A solução de \overline{Z}_ε que passa por x precisa de um tempo finito T para atingir a bola centrada na origem de raio $\frac{1}{2}$. Pela dependência contínua das condições iniciais e dos parâmetros, se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, a solução de Y_ε que passa por x , depois de um tempo T está contida na bola B centrada na origem e de raio $1 - \varepsilon$. Como $Y_\varepsilon|_B = X_{0,0}$ e $X_{0,0}$ possui um nó ou foco linear estável na origem, temos que a órbita de Y_ε passando por x possui seu ω -limite na origem. Logo, a origem é globalmente assintoticamente estável para Y_ε .

Por fim, como as soluções de Y_ε tendem às soluções de X quando $\varepsilon \searrow 0$, segue que a origem é globalmente assintoticamente estável para X , provando assim o teorema. \square

CAPÍTULO 3

ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Neste capítulo, apresentamos condições suficientes para que um campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^2 pertencente a uma classe de campos vetoriais lineares por partes seja estruturalmente estável, isto é, um campo que mantém suas propriedades mesmo com pequenas perturbações.

Dividimos o plano em uma malha retangular não uniforme e queremos estudar as singularidades, órbitas periódicas e conexões de separatrizes do campo vetorial. Nossa dificuldade é entendê-las no infinito, onde as regiões da malha não são compactas. Para isso, vamos usar a Compactificação de Poincaré. O estudo dessas trajetórias é importante para analisarmos a estabilidade estrutural do campo. Nos baseamos nos trabalhos desenvolvidos em [8] e [15].

3.1 Campos Vetoriais Lineares por Partes

No plano \mathbb{R}^2 com as coordenadas (x, y) , considere o campo vetorial

$$X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y},$$

cujas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^n c_1^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |y - \delta_j|, \\ Q(x, y) &= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^n c_2^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |y - \delta_j|. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Denotamos por $\Gamma = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n\}$ e $\Delta = \{\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m\}$ as sequências ordenadas de números reais que definem as retas $x = \gamma_i$ e $y = \delta_j$, nas quais o campo pode não ser suave.

No plano, essas retas definem uma malha que será denotada por (Γ, Δ) . Os pontos da forma (γ_i, δ_j) , com $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$ serão chamados de pontos

de esquina da malha. O conjunto formado por todos os pontos de esquina da malha será denotado por $\Gamma \times \Delta$.

Estabelecidos os conjuntos Γ e Δ , denotaremos por $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ o espaço de todos os campos vetoriais definidos como em (3.1.1), fixada a malha (Γ, Δ) .

Observe que $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão $6 + 2(n + m)$. De fato, podemos organizar cada campo vetorial de $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ em um vetor $a \in \mathbb{R}^2$, uma matriz $b \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, uma matriz $c \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ e uma matriz $d \in \mathbb{R}^{2 \times m}$:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \cdots & c_2^n \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \cdots & d_1^m \\ d_2^1 & d_2^2 & \cdots & d_2^m \end{pmatrix}.$$

Do modo como foi denotado o espaço vetorial $\Xi_{\Gamma, \Delta}$, podemos considerá-lo como um espaço métrico com a norma Euclidiana herdada de $\mathbb{R}^{6+2(n+m)}$, pois $\Xi_{\Gamma, \Delta} \simeq \mathbb{R}^{6+2(n+m)}$. Temos que a malha vazia, $n = m = 0$, e a malha definida por uma reta, horizontal ou vertical, também devem ser consideradas. Nesses casos, os espaços dos parâmetros são, respectivamente, \mathbb{R}^6 e \mathbb{R}^8 .

Perceba que X é um campo linear por partes, no sentido de que, restrito a cada uma das $(n + 1) \times (m + 1)$ células $\Gamma_i \times \Delta_j$ da malha (Γ, Δ) , ele é afim, denotado por $X_{i,j}$, ou seja,

$$X_{i,j}(x, y) = X(x, y) \Big|_{\Gamma_i \times \Delta_j} = A_{ij}(x \ y)^T + b_{ij},$$

com $A_{ij} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $b_{ij} \in \mathbb{R}$. Aqui, $\Gamma_i = [\gamma_i, \gamma_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $\Gamma_0 = [-\infty, \gamma_1]$ e $\Gamma_n = [\gamma_n, \infty]$. Analogamente, $\Delta_j = [\delta_j, \delta_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $\Delta_0 = [-\infty, \delta_1]$ e $\Delta_m = [\delta_m, \infty]$.

Por exemplo, se $(x, y) \in \Gamma_{kx} \times \Delta_{ky}$, temos $\gamma_1 < \cdots < \gamma_{kx} \leq x \leq \gamma_{kx+1} < \cdots < \gamma_n$ e $\delta_1 < \cdots < \delta_{ky} \leq y \leq \delta_{ky+1} < \cdots < \delta_m$. Substituindo na expressão do campo X dado por (3.1.1), obtemos

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^{kx} c_1^i |x - \gamma_i| + \sum_{i=kx+1}^n c_1^i |x - \gamma_i| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{ky} d_1^j |y - \delta_j| + \sum_{j=ky+1}^m d_1^j |y - \delta_j| \\ &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^{kx} c_1^i (x - \gamma_i) - \sum_{i=kx+1}^n c_1^i (x - \gamma_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{ky} d_1^j (y - \delta_j) - \sum_{j=ky+1}^m d_1^j (y - \delta_j) \\ &= \left[a_1 - \sum_{i=1}^{kx} c_1^i \gamma_i + \sum_{i=kx+1}^n c_1^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{ky} d_1^j \delta_j + \sum_{j=ky+1}^m d_1^j \delta_j \right] \\ &\quad + \left[b_{11} + \sum_{i=1}^{kx} c_1^i - \sum_{i=kx+1}^n c_1^i \right] x + \left[b_{12} + \sum_{j=1}^{ky} d_1^j - \sum_{j=ky+1}^m d_1^j \right] y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x, y) &= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^{kx} c_2^i |x - \gamma_i| + \sum_{i=kx+1}^n c_2^i |x - \gamma_i| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{ky} d_2^j |y - \delta_j| + \sum_{j=ky+1}^m d_2^j |y - \delta_j| \\
&= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^{kx} c_2^i (x - \gamma_i) - \sum_{i=kx+1}^n c_2^i (x - \gamma_i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{ky} d_2^j (y - \delta_j) - \sum_{j=ky+1}^m d_2^j (y - \delta_j) \\
&= \left[a_2 - \sum_{i=1}^{kx} c_2^i \gamma_i + \sum_{i=kx+1}^n c_2^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{ky} d_2^j \delta_j + \sum_{j=ky+1}^m d_2^j \delta_j \right] \\
&\quad + \left[b_{21} + \sum_{i=1}^{kx} c_2^i - \sum_{i=kx+1}^n c_2^i \right] x + \left[b_{22} + \sum_{j=1}^{ky} d_2^j - \sum_{j=ky+1}^m d_2^j \right] y.
\end{aligned}$$

Então, $X_{kx,ky} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$, onde

$$C_{11} = b_{11} + \sum_{i=1}^{kx} c_1^i - \sum_{i=kx+1}^n c_1^i,$$

$$C_{12} = b_{12} + \sum_{j=1}^{ky} d_1^j - \sum_{j=ky+1}^m d_1^j,$$

$$C_{21} = b_{21} + \sum_{i=1}^{kx} c_2^i - \sum_{i=kx+1}^n c_2^i,$$

$$C_{22} = b_{22} + \sum_{j=1}^{ky} d_2^j - \sum_{j=ky+1}^m d_2^j,$$

$$D_1 = a_1 - \sum_{i=1}^{kx} c_1^i \gamma_i + \sum_{i=kx+1}^n c_1^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{ky} d_1^j \delta_j + \sum_{j=ky+1}^m d_1^j \delta_j,$$

$$D_2 = a_2 - \sum_{i=1}^{kx} c_2^i \gamma_i + \sum_{i=kx+1}^n c_2^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{ky} d_2^j \delta_j + \sum_{j=ky+1}^m d_2^j \delta_j.$$

Note que $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$ é um campo vetorial Lipschitziano em \mathbb{R}^2 . De fato, em cada célula $\Gamma_i \times \Delta_j$ o campo é afim, logo podemos considerar como constante de Lipschitz para X o valor

$$L = \max\{\|A_{ij}\|, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

onde estamos considerando a norma das aplicações lineares de \mathbb{R}^2 .

Portanto, para todo $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$ existe um único fluxo Lipschitz bem definido e completo. Isso significa que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a curva integral $X_t(x, y)$ do campo X passando por (x, y) está definida para cada $t \in \mathbb{R}$.

Para o objetivo deste capítulo é importante estudarmos o retrato de fase do campo vetorial X , principalmente o seu comportamento em torno das singularidades, órbitas periódicas, conexões de separatrizes e órbitas tendendo ao infinito.

No caso das órbitas tendendo ao infinito, estamos em células não compactas da malha. Sendo assim, para entendermos o comportamento dessas órbitas devemos utilizar a Compactificação de Poincaré (veja a Seção 1.6), denotada por $\mathcal{P}(X)$, que lida com a dinâmica do campo vetorial X nas células não compactas, compactificando a malha em uma decomposição celular de \mathbb{S}^2 , mapeando as células não compactas em polígonos esféricos (na maioria das vezes triângulos) com alguns vértices e arestas no equador \mathbb{S}^1 .

3.2 Singularidades e Órbitas Periódicas no Infinito

Nesta seção, introduzimos um outro sistema de coordenadas para facilitar os cálculos ao analisar o comportamento do campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ no infinito e, a partir disso, estudamos as singularidades e órbitas periódicas no infinito.

Considere a aplicação $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}_+^2 \setminus (0, 0, 1)$ dada por

$$S(\theta, \rho) = \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \rho)}{\sqrt{\rho^2 + 1}}.$$

Note que S é um recobrimento universal de $\mathbb{S}_+^2 \setminus (0, 0, 1)$. Com isso, podemos reescrever o campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ em coordenadas (θ, ρ) .

Lema 3.2.1. *Nas coordenadas (θ, ρ) , o campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ tem a seguinte expressão:*

$$(A_1 + \rho A_0) \frac{\partial}{\partial \theta} - \rho(R_1 + \rho R_0) \frac{\partial}{\partial \rho},$$

onde

$$A_0(\theta) = a_2 \cos \theta - a_1 \sin \theta, \quad R_0(\theta) = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} A_1(\theta, \rho) = & -\sin \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta - \rho \delta_j|) \\ & + \cos \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta - \rho \delta_j|), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} R_1(\theta, \rho) = & \cos \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta - \rho \delta_j|) \\ & + \sin \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta - \rho \delta_j|). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Demonstração. Considere a aplicação $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Phi(\theta, \rho) = (\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\sin \theta}{\rho})$, onde $x = \frac{\cos \theta}{\rho}$ e $y = \frac{\sin \theta}{\rho}$. Temos que

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Com isso, $\Phi^{-1}(x, y) = \left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right), \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$.

Vamos determinar $d\Phi^{-1}(\Phi(\theta, \rho))$. Inicialmente observamos que

$$d\Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} & \frac{1}{x\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} \\ -x\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}} & -y\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$d\Phi^{-1}(\Phi(\rho, \theta)) = \begin{pmatrix} -\rho \text{sen } \theta & \rho \text{cos } \theta \\ -\rho^2 \text{cos } \theta & -\rho^2 \text{sen } \theta \end{pmatrix}.$$

A partir dessas informações, podemos obter o campo $\Phi_*^{-1}X(\rho, \theta) = d\Phi^{-1}(\Phi(\rho, \theta))X(\Phi(\rho, \theta))$, de fato,

$$\begin{aligned} \Phi_*^{-1}X(\rho, \theta) &= \begin{pmatrix} -\rho \text{sen } \theta & \rho \text{cos } \theta \\ -\rho^2 \text{cos } \theta & -\rho^2 \text{sen } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) \\ Q\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\rho \text{sen } \theta P\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) + \rho \text{cos } \theta Q\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) \\ -\rho^2 \text{cos } \theta P\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) - \rho^2 \text{sen } \theta Q\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, estamos escrevendo o campo $\mathcal{P}(X)$ nas coordenadas θ e ρ . Assim, temos

$$\begin{cases} \theta' = -\rho \text{sen } \theta P\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) + \rho \text{cos } \theta Q\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right), \\ \rho' = -\rho^2 \text{cos } \theta P\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right) - \rho^2 \text{sen } \theta Q\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right). \end{cases}$$

Substituindo $P\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right)$ e $Q\left(\frac{\text{cos } \theta}{\rho}, \frac{\text{sen } \theta}{\rho}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \theta' &= \rho \left[-\text{sen } \theta \left(a_1 + b_{11} \frac{\text{cos } \theta}{\rho} + b_{12} \frac{\text{sen } \theta}{\rho} + \sum_{i=1}^n c_1^i \left| \frac{\text{cos } \theta}{\rho} - \gamma_i \right| + \sum_{j=1}^m d_1^j \left| \frac{\text{sen } \theta}{\rho} - \delta_j \right| \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{cos } \theta \left(a_2 + b_{21} \frac{\text{cos } \theta}{\rho} + b_{22} \frac{\text{sen } \theta}{\rho} + \sum_{i=1}^n c_2^i \left| \frac{\text{cos } \theta}{\rho} - \gamma_i \right| + \sum_{j=1}^m d_2^j \left| \frac{\text{sen } \theta}{\rho} - \delta_j \right| \right) \right] \\ &= \rho(a_2 \text{cos } \theta - a_1 \text{sen } \theta) - \text{sen } \theta \left[b_{11} \text{cos } \theta + b_{12} \text{sen } \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\text{cos } \theta - \rho\gamma_i| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m d_1^i |\text{sen } \theta - \rho\delta_j| \right] + \text{cos } \theta \left[b_{21} \text{cos } \theta + b_{22} \text{sen } \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\text{cos } \theta - \rho\gamma_i| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m d_2^i |\text{sen } \theta - \rho\delta_j| \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho' &= \rho^2 \left[-\cos \theta \left(a_1 + b_{11} \frac{\cos \theta}{\rho} + b_{12} \frac{\sin \theta}{\rho} + \sum_{i=1}^n c_1^i \left| \frac{\cos \theta}{\rho} - \gamma_i \right| + \sum_{j=1}^m d_1^j \left| \frac{\sin \theta}{\rho} - \delta_j \right| \right) \right. \\
&\quad \left. - \sin \theta \left(a_2 + b_{21} \frac{\cos \theta}{\rho} + b_{22} \frac{\sin \theta}{\rho} + \sum_{i=1}^n c_2^i \left| \frac{\cos \theta}{\rho} - \gamma_i \right| + \sum_{j=1}^m d_2^j \left| \frac{\sin \theta}{\rho} - \delta_j \right| \right) \right] \\
&= -\rho^2 (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) - \rho \cos \theta \left[b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta - \rho \delta_j| \right] - \rho \sin \theta \left[b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta - \rho \delta_j| \right].
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. \square

Note que, nessas coordenadas, estudar as condições para que o campo vetorial se anule em algum ponto no infinito se tornou mais eficaz, pois o equador é exibido nas coordenadas (θ, ρ) pelos pontos com $\rho = 0$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Desse modo, um ponto $p_0 \in \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2$ é uma singularidade do campo vetorial $\mathcal{P}(X)$ se existir θ_0 tal que $A_1(\theta_0, 0) = 0$.

Lema 3.2.2. *As singularidades de $\mathcal{P}(X)$ ao longo do equador \mathbb{S}^1 são dadas por zeros da componente angular $A_1(\theta, 0)$, como segue:*

No quadrante k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, elas são soluções reais da equação $A_{1,k}(\theta) = 0$ no intervalo $[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}]$, onde

$$\begin{aligned}
A_{1,1}(\theta) &= [b_{21} + c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} + d_1] \sin^2 \theta, \\
A_{1,2}(\theta) &= [b_{21} - c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 + c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} + d_1] \sin^2 \theta, \\
A_{1,3}(\theta) &= [b_{21} - c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} - d_2 + c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} - d_1] \sin^2 \theta, \\
A_{1,4}(\theta) &= [b_{21} + c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} - d_2 - c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} - d_1] \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Aqui,

$$c_1 = \sum_{i=1}^n c_1^i, \quad c_2 = \sum_{i=1}^n c_2^i, \quad d_1 = \sum_{j=1}^m d_1^j, \quad d_2 = \sum_{j=1}^m d_2^j. \tag{3.2.4}$$

Demonstração. Vamos avaliar a componente angular A_1 de $\mathcal{P}(X)$ em $(\theta, 0)$. Temos

$$\begin{aligned}
A_1(\theta, 0) &= -\sin \theta \left(b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta| \right) \\
&\quad + \cos \theta \left(b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta| \right).
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão (3.2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
A_1(\theta, 0) &= -\sin \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + c_1 |\cos \theta| + d_1 |\sin \theta|) \\
&\quad + \cos \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + c_2 |\cos \theta| + d_2 |\sin \theta|).
\end{aligned}$$

Então, quando $k = 1$ temos $\cos \theta \geq 0$ e $\sin \theta \geq 0$ e, desse modo,

$$A_{1,1}(\theta) = [b_{21} + c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} + d_1] \sin^2 \theta.$$

Quando $k = 2$ obtemos $\cos \theta \leq 0$ e $\sin \theta \geq 0$ e, assim,

$$A_{1,2}(\theta) = [b_{21} - c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 + c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} + d_1] \sin^2 \theta.$$

Quando $k = 3$ temos $\cos \theta \leq 0$ e $\sin \theta \leq 0$ e, dessa forma,

$$A_{1,3}(\theta) = [b_{21} - c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} - d_2 + c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} - d_1] \sin^2 \theta.$$

Quando $k = 4$ obtemos $\cos \theta \geq 0$ e $\sin \theta \leq 0$ e, dessa maneira,

$$A_{1,4}(\theta) = [b_{21} + c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} - d_2 - c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} - d_1] \sin^2 \theta.$$

Com isso, finalizamos a demonstração do resultado. \square

Corolário 3.2.3. *Uma singularidade no infinito está na direção do eixo x se, e somente se,*

$$\left(b_{21} + \sum_{i=1}^n c_2^i \right) \left(-b_{21} + \sum_{i=1}^n c_2^i \right) = 0.$$

E uma singularidade no infinito está na direção do eixo y se, e somente se,

$$\left(b_{12} + \sum_{j=1}^m d_1^j \right) \left(-b_{12} + \sum_{j=1}^m d_1^j \right) = 0.$$

Demonstração. Sabemos que a componente angular A_1 de $\mathcal{P}(X)$ avaliada em $(\theta, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} A_1(\theta, 0) = & -\sin \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta|) \\ & + \cos \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta|). \end{aligned}$$

Quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ estamos na direção x . Avaliando $A_1(\theta, 0)$ nesses valores, obtemos

$$A_1(0, 0) = b_{21} + \sum_{i=1}^n c_2^i \quad \text{e} \quad A_1(\pi, 0) = - \left(-b_{21} + \sum_{i=1}^n c_2^i \right).$$

Dessa maneira, uma singularidade no infinito está na direção do eixo x se, e somente se,

$$\left(b_{21} + \sum_{i=1}^n c_2^i \right) \left(-b_{21} + \sum_{i=1}^n c_2^i \right) = 0.$$

Agora, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ estamos na direção y . Avaliando $A_1(\theta, 0)$ nesses valores, obtemos

$$A_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = b_{12} + \sum_{j=1}^m d_1^j \quad \text{e} \quad A_1\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = - \left(-b_{12} + \sum_{j=1}^m d_1^j \right).$$

Sendo assim, uma singularidade no infinito está na direção do eixo y se, e somente se,

$$\left(b_{12} + \sum_{j=1}^m d_1^j \right) \left(-b_{12} + \sum_{j=1}^m d_1^j \right) = 0.$$

□

Lema 3.2.4. *A função R_1 da componente radial de $\mathcal{P}(X)$ avaliada no equador $\rho = 0$ é dada como segue:*

No quadrante k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, ela é dada pela função $R_{1,k}(\theta)$, onde

$$\begin{aligned} R_{1,1}(\theta) &= [b_{11} + c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} + d_1 + c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} + d_2] \sin^2 \theta, \\ R_{1,2}(\theta) &= [b_{11} - c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} + d_1 - c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} + d_2] \sin^2 \theta, \\ R_{1,3}(\theta) &= [b_{11} - c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} - d_1 - c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} - d_2] \sin^2 \theta, \\ R_{1,4}(\theta) &= [b_{11} + c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} - d_1 + c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} - d_2] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Assuma a notação definida na expressão (3.2.4).

Demonstração. Vamos determinar a componente radial R_1 de $\mathcal{P}(X)$ em $(\theta, 0)$. Temos

$$\begin{aligned} R_1(\theta, 0) &= \cos \theta \left(b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta| \right) \\ &\quad + \sin \theta \left(b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta| \right). \end{aligned}$$

Utilizando a expressão (3.2.4), obtemos

$$\begin{aligned} R_1(\theta, 0) &= \cos \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + c_1 |\cos \theta| + d_1 |\sin \theta|) \\ &\quad + \sin \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + c_2 |\cos \theta| + d_2 |\sin \theta|). \end{aligned}$$

Então, quando $k = 1$ temos $\cos \theta \geq 0$ e $\sin \theta \geq 0$ e, desse modo,

$$R_{1,1}(\theta) = [b_{11} + c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} + d_1 + c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} + d_2] \sin^2 \theta.$$

Quando $k = 2$ obtemos $\cos \theta \leq 0$ e $\sin \theta \geq 0$ e, assim,

$$R_{1,2}(\theta) = [b_{11} - c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} + d_1 - c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} + d_2] \sin^2 \theta.$$

Quando $k = 3$ temos $\cos \theta \leq 0$ e $\sin \theta \leq 0$ e, dessa forma,

$$R_{1,3}(\theta) = [b_{11} - c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} - d_1 - c_2] \sin \theta \cos \theta + [b_{22} - d_2] \sin^2 \theta.$$

Quando $k = 4$ obtemos $\cos \theta \geq 0$ e $\sin \theta \leq 0$ e, dessa maneira,

$$R_{1,4}(\theta) = [b_{11} + c_1] \cos^2 \theta + [b_{12} + b_{21} - d_1 + c_2] \sin \theta \cos \theta - [b_{22} - d_2] \sin^2 \theta.$$

Assim, finalizamos a demonstração do resultado. □

A partir das notações apresentadas até agora, podemos obter uma expressão para a derivada do mapa de Poincaré de uma órbita no infinito.

Proposição 3.2.5. *Suponha que o equador é uma órbita periódica de $\mathcal{P}(X)$. Então, o mapa de Poincaré π associado à ela é analítico e $\pi'(0) = r_1 r_2 r_3 r_4$, onde*

$$r_l = \exp \left[\int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} -\frac{R_{1,l}(\theta)}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right], \quad \theta_l = \frac{\pi}{2}l, \quad l = 1, \dots, 4.$$

Demonstração. Nas coordenadas (θ, ρ) o equador é dado por $\rho = 0$. Como, por hipótese, o equador é uma órbita periódica do campo vetorial $\mathcal{P}(X)$, então não existem singularidades no infinito, isto é, $A_1(\theta, 0) \neq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$. Além disso, a malha (Γ, Δ) nas coordenadas (θ, ρ) gera curvas que são as pré-imagens das linhas $x = \gamma_i$ e $y = \delta_j$, onde essas curvas são dadas pelas equações $\rho\gamma_i = \cos \theta$ e $\rho\delta_j = \sin \theta$, respectivamente.

As curvas mencionadas anteriormente atravessam o eixo θ transversalmente. Assim, podemos considerar pequenos arcos dessas curvas como seções transversais do sistema em uma vizinhança do eixo θ .

As curvas $\rho\gamma_i = \cos \theta$ fazem um ângulo de coeficiente angular igual a $-\frac{1}{\gamma_i}$ em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{\gamma_i}$ em $\theta = \frac{3\pi}{2}$ com o eixo θ , e as curvas $\rho\delta_j = \sin \theta$ fazem um ângulo de coeficiente angular igual a $\frac{1}{\delta_j}$ em $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$ e $-\frac{1}{\delta_j}$ em $\theta = \pi$ com o eixo θ .

Iremos denotar as seções transversais que estão em $\rho\gamma_i = \cos \theta$ por $\Sigma_i^{\frac{\pi}{2}}$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\Sigma_i^{\frac{3\pi}{2}}$ quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$, e as seções transversais que estão em $\rho\delta_j = \sin \theta$ por Σ_j^0 quando $\theta = 0$, Σ_j^π quando $\theta = \pi$ e $\Sigma_j^{2\pi}$ quando $\theta = 2\pi$.

Em cada célula definida pelas curvas descritas anteriormente, o campo vetorial é diferenciável. Com isso, podemos definir um mapa de transição entre os lados das células.

O mapa de Poincaré pode ser definido como a composição dos mapas de transição T_k entre seções transversais consecutivas do campo vetorial, isto é,

$$\pi : \Sigma_j^0 \rightarrow \Sigma_j^{2\pi},$$

onde

$$\pi(p) = T_{2(n+m)} \circ \dots \circ T_2 \circ T_1(p).$$

Logo, aplicando a regra da cadeia obtemos que a derivada do mapa de Poincaré acima é dada por

$$\pi'(0) = \prod_{l=1}^{2(n+m)} T'_k(0).$$

Além disso, como em cada célula o campo vetorial é analítico, temos que os mapas de transição T_k são analíticos e, portanto, do modo como foi definido, π é analítico.

Como o equador é uma órbita periódica, temos que nas coordenadas (θ, ρ) a solução do sistema é escrito como $\varphi(t) = (\theta(t), 0)$, onde vale que $\theta' = A_1(\theta(t), 0)$. De fato, pois $\varphi'(t) = (\theta'(t), 0)$ e, como φ é solução de $\mathcal{P}(X)$, temos $\varphi'(t) = \mathcal{P}(X)(\varphi(t)) = \mathcal{P}(X)(\theta(t), 0) = (A_1(\theta(t), 0), 0)$.

Considere duas seções transversais Σ_1 e Σ_2 que não se intersectam e que cortam o eixo θ transversalmente, respectivamente em $(\theta_1, 0)$ e $(\theta_2, 0)$, com ângulos α_1 e α_2 , onde $\theta_2 > \theta_1$, $t_1 > t_2$, $\theta(t_1) = \theta_1$ e $\theta(t_2) = \theta_2$. Então, $\sigma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma_1(t) = (\theta_1, 0) + t(\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$ é uma parametrização de Σ_1 e $\sigma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma_2(t) = (\theta_2, 0) + t(\cos \alpha_2, \sin \alpha_2)$ é uma parametrização de Σ_2 .

Consequentemente, a derivada do mapa de transição T (veja Proposição 2.3 da referência [8]) entre Σ_1 e Σ_2 é dada por

$$\begin{aligned} T'(0) &= \frac{\det \left(\mathcal{P}(X)(\theta_1, 0) \Big| \sigma'_1(t_1) \right)}{\det \left(\mathcal{P}(X)(\theta_2, 0) \Big| \sigma'_2(t_2) \right)} \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{div} \mathcal{P}(X)(\theta(t), 0)) dt \right] \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} A_1(\theta_1, 0) & \cos \alpha_1 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A_1(\theta_2, 0) & \cos \alpha_2 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha_2 \end{pmatrix}} \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial A_1(\theta(t), 0)}{\partial \theta} - R_1(\theta(t), 0) \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Como $A_1(\theta, 0) \neq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$, então $\theta'(t) = A_1(\theta(t), 0) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Fazendo a mudança de variáveis $\theta = \theta(t)$ temos que $d\theta = \theta'(t)dt = A_1(\theta(t), 0)dt$. Assim,

$$\begin{aligned} T'(0) &= \frac{A_1(\theta_1, 0) \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1(\theta_2, 0) \operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\partial A_1(\theta(t), 0)}{\partial \theta} - \frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} \right) d\theta \right] \\ &= \frac{A_1(\theta_1, 0) \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1(\theta_2, 0) \operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\partial \ln(A_1(\theta, 0))}{\partial \theta} - \frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} \right) d\theta \right] \\ &= \frac{A_1(\theta_1, 0) \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1(\theta_2, 0) \operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left[\ln \left(\frac{A_1(\theta_2, 0)}{A_1(\theta_1, 0)} \right) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} d\theta \right]. \end{aligned}$$

Então,

$$T'(0) = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} d\theta \right].$$

Note que, quando Σ_1 e Σ_2 se intersectam em $(\theta_0, 0)$ com o eixo θ transversalmente com ângulos α_1 e α_2 , respectivamente, obtemos pela expressão acima que a derivada do mapa de transição é

$$T'(0) = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2}.$$

Portanto, a conclusão segue da simetria na definição do mapa de Poincaré, ou seja, a primeira derivada dos mapas de transição em pontos antipodais é recíproca. \square

As proposições a seguir indicam como dois tipos de perturbações afetam os pontos no infinito do campo vetorial $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$.

Proposição 3.2.6. *Suponha que o equador é uma órbita periódica de $\mathcal{P}(X)$. Considere a família a um parâmetro $X_\nu = X + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$. Então, o equador é uma órbita periódica hiperbólica de $\mathcal{P}(X_\nu)$ para todo $\nu \neq 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. Vamos inicialmente analisar a família de campos a um parâmetro $X_\nu = X + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$ em função de θ e ρ . Temos

$$X_\nu = X + \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) = (P(x, y), Q(x, y)) + \nu(x, y) = (P(x, y) + \nu x, Q(x, y) + \nu y).$$

Pelo Lema 3.2.1, obtemos X_ν nas coordenadas θ e ρ . De fato,

$$\begin{aligned}\theta' &= -\rho \operatorname{sen} \theta \left(P \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) + \nu \frac{\cos \theta}{\rho} \right) + \rho \cos \theta \left(Q \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) + \nu \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) \\ &= -\rho \operatorname{sen} \theta P \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) + \rho \cos \theta Q \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho' &= -\rho^2 \cos \theta \left(P \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) + \nu \frac{\cos \theta}{\rho} \right) - \rho^2 \operatorname{sen} \theta \left(Q \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) + \nu \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) \\ &= -\rho^2 \cos \theta P \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) - \rho^2 \operatorname{sen} \theta Q \left(\frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} \right) - \rho \nu.\end{aligned}$$

Com isso, obtemos que $A_1^\nu(\theta, \rho) = A_1(\theta, \rho)$ e $R_1^\nu(\theta, \rho) = \nu + R_1(\theta, \rho)$.

Utilizando a expressão encontrada na Proposição 3.2.5, temos

$$\pi'_\nu(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} -\frac{R_{1,l}^\nu(\theta)}{A_{1,l}^\nu(\theta)} d\theta \right]$$

e, pelas relações acima,

$$\pi'_\nu(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} -\frac{\nu + R_{1,l}(\theta)}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right].$$

Derivando essa expressão com relação a ν , obtemos

$$\frac{d}{d\nu} \pi'_\nu(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} -\frac{\nu + R_{1,l}(\theta)}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right] \left(-\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} \frac{1}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right),$$

isto é,

$$\frac{d}{d\nu} \pi'_\nu(0) \Big|_{\nu=0} = \pi'(0) \left(-\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} \frac{1}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right).$$

Por hipótese, o equador é uma órbita periódica. Então $A_1(\theta, 0) \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, com isso, $A_{1,l}(\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3, 4$. Como A_1 é uma função contínua, então todas as funções $A_{1,l}$ possuem o mesmo sinal. Logo

$$-\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} \frac{1}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \neq 0$$

e, portanto, $\frac{d}{d\nu} \pi'_\nu(0) \neq 0$.

Dessa forma, o mapa de Poincaré $\pi'_\nu(0)$ é crescente ou decrescente com relação a ν , assim podemos escolher valores de ν suficientemente pequenos para que $\pi'_\nu(0) \neq 1$. Isto implica que o equador é uma órbita periódica hiperbólica de $\mathcal{P}(X_\nu)$. \square

Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial em \mathbb{R}^2 . Definimos o campo $R_\omega(X)$ dado pela rotação do campo X por um ângulo ω como sendo $R_\omega(x) = (P_\omega, Q_\omega)$ com

$$\begin{pmatrix} P_\omega \\ Q_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \operatorname{sen} \omega \\ -\operatorname{sen} \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.2.7. *Seja $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$, e considere X_ω o campo vetorial X rotacionado por ω . Então, valem as seguintes relações:*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega 1}(\theta) \\ R_{\omega 1}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(\theta) \\ R_1(\theta) \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Seja $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$, então $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^n c_1^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |y - \delta_j|, \\ Q(x, y) &= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^n c_2^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |y - \delta_j|. \end{aligned}$$

Temos

$$X_\omega(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Desse modo, o campo vetorial $X_\omega(x, y) = (P_\omega(x, y), Q_\omega(x, y))$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} P_\omega(x, y) &= (a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega) + (b_{11} \cos \omega + b_{21} \sin \omega)x + (b_{12} \cos \omega + b_{22} \sin \omega)y + \\ &\quad \sum_{i=1}^n (c_1^i \cos \omega + c_2^i \sin \omega) |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m (d_1^j \cos \omega + d_2^j \sin \omega) |y - \delta_j|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\omega(x, y) &= (-a_1 \sin \omega + a_2 \cos \omega) + (-b_{11} \sin \omega + b_{21} \cos \omega)x + (-b_{12} \sin \omega + b_{22} \cos \omega)y + \\ &\quad \sum_{i=1}^n (-c_1^i \sin \omega + c_2^i \cos \omega) |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m (-d_1^j \sin \omega + d_2^j \cos \omega) |y - \delta_j|. \end{aligned}$$

Portanto, usando as equações (3.2.1) e (3.2.2) do Lema 3.2.1, e substituindo pelos termos equivalentes de P_ω e Q_ω , temos que as relações são satisfeitas. \square

3.3 Conceitos Complementares

Nesta seção, definimos estabilidade estrutural em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ e exibimos definições que são condições suficientes para que um campo vetorial $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$ seja estruturalmente estável.

Definição 3.3.1. *Um elemento $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$ é dito (Γ, Δ) -estruturalmente estável se existe uma vizinhança \mathcal{V} de X em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{V}$ existe um homeomorfismo h_Y de \mathbb{S}^2 mapeando as órbitas orientadas de $\mathcal{P}(Y)$ naquelas de $\mathcal{P}(X)$, preservando o equador e as células compactas da malha (Γ, Δ) .*

A classe de campos vetoriais estruturalmente estáveis será denotada por $\mathcal{S}_{\Gamma, \Delta}$.

Observação 3.3.1. Recordemos que uma singularidade é *simples* se no ponto de singularidade o campo vetorial é suave e o determinante da matriz jacobiana no ponto é não nulo, se além disso as partes reais de seus autovalores forem todas não nulas dizemos que a singularidade é *hiperbólica*. Se o determinante do Jacobiano nesse ponto for negativo, dizemos que o ponto é uma *sela*, agora se o determinante for positivo, dizemos que o ponto é uma *anti-sela*.

Definição 3.3.2. Dizemos que um campo $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$ satisfaz as condições de (Γ, Δ) -singularidade se

1. todas as suas singularidades no infinito são hiperbólicas e disjuntas das direções dos eixos x e y ,
2. (respectivamente 2') todas as suas singularidades finitas são hiperbólicas (respectivamente simples) e disjuntas das linhas $\Gamma \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \Delta$,
3. todas as suas tangências com as linhas $\Gamma \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \Delta$ são quadráticas e disjuntas das esquinas $\Gamma \times \Delta$ da malha.

O conjunto dos campos vetoriais satisfazendo as três condições será denotado por $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1)$. Quando apenas uma (digamos a primeira) ou mais condições (digamos a primeira e a terceira) são satisfeitas, escrevemos $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1)$ ou $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 3)$, e assim por diante.

Definição 3.3.3. Dizemos que um campo vetorial X satisfaz as condições de (Γ, Δ) -órbitas periódicas se

1. todas as suas órbitas periódicas finitas são hiperbólicas e disjuntas das esquinas $\Gamma \times \Delta$ e das tangências associadas à malha,
2. a órbita periódica infinita no infinito é hiperbólica.

O conjunto dos campos vetoriais satisfazendo essas duas condições será denotado por $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(2)$. Quando apenas uma das condições é satisfeita, escrevemos $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 1)$, ou $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)$.

Definição 3.3.4. Uma (Γ, Δ) -conexão de separatriz de X é uma órbita finita de $\mathcal{P}(X)$ que liga

1. dois pontos de sela que podem coincidir. Nesse caso, dizemos que temos uma conexão sela-sela, ou sela-laço no caso de coincidência;
2. um ponto de sela e uma tangência. Nesse caso dizemos que temos uma conexão sela-tangência;
3. um ponto de sela e uma esquina da malha. Nesse caso, dizemos que temos uma conexão sela-esquina;
4. duas esquinas da malha que podem coincidir. Nesse caso, dizemos que temos uma conexão esquina-esquina, ou esquina-laço no caso de coincidência (que é o mesmo que uma órbita periódica através de uma esquina);
5. duas tangências que podem coincidir. Nesse caso, dizemos que temos uma conexão tangência-tangência, ou tangência-laço no caso de coincidência (que é o mesmo que uma órbita periódica através de uma tangência);
6. uma tangência e uma esquina da malha. Nesse caso, dizemos que temos uma conexão tangência-esquina.

A Figura 3.1 ilustra exemplos de (Γ, Δ) -conexões de separatrizes listados na definição acima.

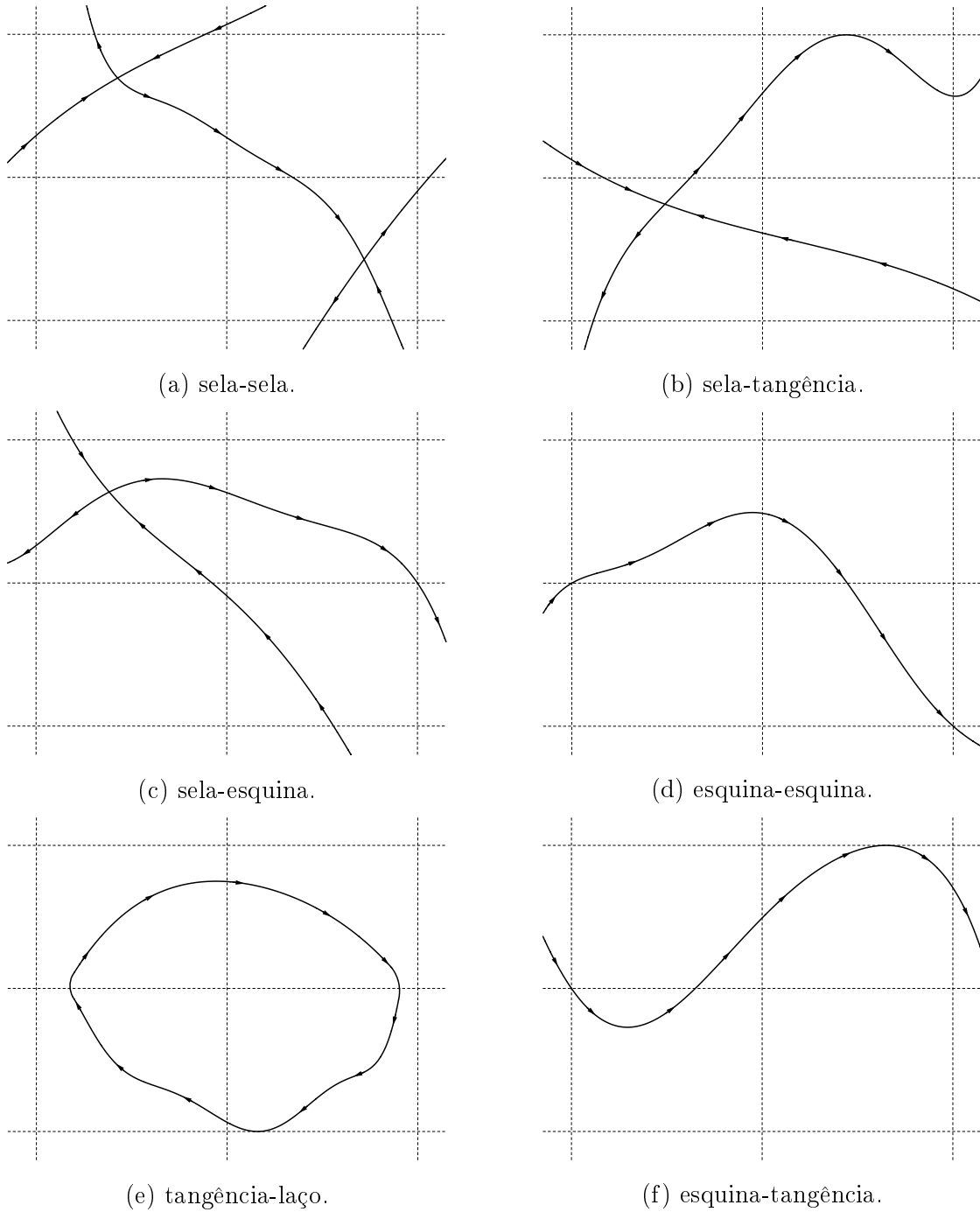


Figura 3.1: Exemplos de (Γ, Δ) -conexões de separatrizes.

O conjunto dos campos vetoriais que não possuem (Γ, Δ) -conexões de separatrizes será denotado por $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(3)$.

Observação 3.3.2. Note que as conexões de sela no infinito não são consideradas conexões de separatrizes, isso ocorre devido à invariância no equador, o que implica na persistência dessas conexões por pequenas perturbações.

3.4 Teorema de Estabilidade e Genericidade

Nesta seção, mostramos que um campo vetorial X pertencente ao conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta} = \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(3)$ é estruturalmente estável em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$. Para isso, provamos que $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é aberto e denso em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$.

A seguir, apresentamos duas proposições que serão úteis na demonstração do Teorema 3.4.3, o qual nos auxiliará na prova da densidade.

Proposição 3.4.1. *Para qualquer $X \in \Xi_{\Gamma,\Delta}$, a família de quatro parâmetros $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ definida por*

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(x, y) = X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

intersecta o conjunto $\Xi_{\Gamma,\Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1; 1, 2', 3) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2; 2)$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^4 .

Demonstração. Vamos examinar como os parâmetros α_1 , α_2 , ν e β agem no retrato de fase de um campo vetorial $X \in \Xi_{\Gamma,\Delta}$ alterando suas singularidades, tangências e órbitas periódicas no infinito. Para isso, vamos dividir a demonstração em quatro passos, mas antes fazemos algumas observações.

Considere o campo vetorial

$$X_{\nu, \beta}(x, y) = X(x, y) + \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Tal expressão, em coordenadas (θ, ρ) , é dada por

$$(A_1^{\nu, \beta} + \rho A_0^{\nu, \beta}) \frac{\partial}{\partial \theta} - \rho (R_1^{\nu, \beta} + \rho R_0^{\nu, \beta}) \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (3.4.1)$$

Assim, usando as equações (3.2.1) e (3.2.2) do Lema 3.2.1, e substituindo pelos termos equivalentes de $P_{\nu, \beta}$ e $Q_{\nu, \beta}$, obtemos

$$\begin{aligned} A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0) &= \beta + A_1(\theta, 0), \\ R_1^{\nu, \beta}(\theta, 0) &= \nu + R_1(\theta, 0). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Além disso, para os campos vetoriais $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ e $X_{\nu, \beta}$, vale

$$\begin{aligned} A_1^{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(\theta, 0) &= A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0), \\ R_1^{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(\theta, 0) &= R_1^{\nu, \beta}(\theta, 0). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Essas observações são necessárias para os passos 1 e 4 da demonstração.

Passo 1: Vamos primeiramente analisar as singularidades no infinito. Para isso, vamos estudar o campo vetorial $X_{\nu, \beta}$ utilizando sua expressão dada por (3.4.1).

As singularidades no infinito de $X_{\nu, \beta}$ são os pontos da forma $(\theta, 0)$ em que

$$A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0) = 0.$$

Suponha que $(\theta_0, 0)$ é uma singularidade no infinito com $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}z$, $z \in \mathbb{Z}$. Calculando o Jacobiano do campo vetorial $X_{\nu,\beta}$ nesse ponto, obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} A_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) & \frac{\partial}{\partial \rho} A_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) + A_0^{\nu,\beta}(\theta_0) \\ 0 & -R_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima é triangular superior, os seus autovalores são os elementos da diagonal principal, assim, para a singularidade no infinito $(\theta_0, 0)$ ser hiperbólica, devemos ter

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) \right) R_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) \neq 0.$$

Pelas igualdades obtidas em (3.4.2), temos

$$\begin{aligned} A_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = 0 &\Leftrightarrow \beta = -A_1(\theta, 0), \\ R_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = 0 &\Leftrightarrow \nu = -R_1(\theta, 0). \end{aligned}$$

Com isso, no espaço tridimensional (ν, β, θ) , a superfície formada pelas singularidades no infinito de $X_{\nu,\beta}$ é dada por

$$S(\nu, \theta) = (\nu, -A_1(\theta, 0), \theta).$$

Nela está contida a curva

$$C(\theta) = (-R_1(\theta, 0), -A_1(\theta, 0), \theta)$$

formada pelas singularidades não hiperbólicas no infinito nas quais $R_1^{\nu,\beta}(\theta, 0)$ se anula.

As funções $A_1(\theta, 0)$ e $R_1(\theta, 0)$ são contínuas e, restritas a cada intervalo da forma $[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}]$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, são quadráticas com suas expressões dadas em (3.2.3) e (3.2.5). Logo, os pontos onde $\frac{\partial}{\partial \theta} A_1^{\nu,\theta}(\theta, 0) = 0$ correspondem aos pontos críticos das funções $A_{1,k}(\theta)$ em cada intervalo $((k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2})$. Note que a função

$$A_{1,1}(\theta) = [b_{21} + c_2] \cos^2 \theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} + d_1] \sin^2 \theta$$

possui, no máximo, um ponto crítico, isto é, $A'_{1,1}(\theta) = 0$. De fato, temos

$$\begin{aligned} A'_{1,1}(\theta) &= [b_{21} + c_2] \cos(2\theta) + [b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1] \sin \theta \cos \theta - [b_{12} + d_1] \sin(2\theta) \\ &= [b_{21} + c_2] \cos(2\theta) + \left(\frac{[b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1]}{2} - [b_{12} + d_1] \right) \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Então, $A'_{1,1}(\theta) = 0$ se, e somente se,

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2(b_{21} + c_2)}{2(b_{12} + d_1) - (b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1)}.$$

Como $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos que $\tan(2\theta)$ possui apenas um ponto crítico, isso implica que $A_{1,1}(\theta)$ possui no máximo um ponto crítico. De modo análogo, obtemos que $A_{1,k}$ para $k \in \{2, 3, 4\}$, possui no máximo um ponto crítico em $((k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2})$. Portanto, a função $A_1(\theta, 0)$ tem no máximo quatro valores críticos no conjunto $(0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$.

Como também queremos evitar que as singularidades no infinito estejam situadas nos eixos x e y , precisamos desconsiderar os valores $\beta = A_1(\theta, 0)$ quando $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$.

Logo, os valores de (ν, β) para os quais temos uma singularidade não hiperbólica no infinito ou na direção dos eixos x e y , definem nove curvas na superfície S . Projetando essas curvas no plano (ν, β) encontramos no máximo oito retas paralelas ao eixo ν e uma curva que é a projeção de C . Denotamos por c_1, c_2, \dots, c_9 essas retas e a projeção da curva C .

Portanto, pelas igualdades obtidas em (3.4.3), temos que os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tais quais $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1)$ estão contidos na união finita dos conjuntos $\{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 : (\nu, \beta) \in c_k\}, k \in 1, 2, \dots, 9$, os quais são conjuntos de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^4 .

Passo 2: Vamos agora analisar as singularidades finitas, para isso consideremos uma célula $\Gamma_i \times \Delta_j$ da malha (Γ, Δ) . Nesta célula, o campo vetorial é escrito como

$$X_{i,j}(x, y) = X(x, y) \Big|_{\Gamma_i \times \Delta_j} = A_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_{ij}.$$

Vamos escrever

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{pmatrix} b_1^{ij} \\ b_2^{ij} \end{pmatrix}.$$

Com isso, na célula $\Gamma_i \times \Delta_j$, o campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij} + \nu & a_{12}^{ij} - \beta \\ a_{21}^{ij} + \beta & a_{22}^{ij} + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{ij} + \alpha_1 \\ b_2^{ij} + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Para o campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possuir singularidades não simples na célula $\Gamma_i \times \Delta_j$, deve ocorrer

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} + \nu & a_{12}^{ij} - \beta \\ a_{21}^{ij} + \beta & a_{22}^{ij} + \nu \end{pmatrix} = 0,$$

isto é,

$$f_{ij}(\nu, \beta) = \nu^2 + \beta^2 + \text{tr}(A_{ij})\nu + (a_{21}^{ij} - a_{12}^{ij})\beta + \det A_{ij} = 0. \quad (3.4.4)$$

Sendo assim, os valores de $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ para os quais o campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui pelo menos uma singularidade não simples em $\Gamma_i \times \Delta_j$ estão contidos no conjunto $\{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) : f_{ij}(\nu, \beta) = 0\}$, o qual é um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^4 .

Agora, observamos o caso em que o campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui singularidades na fronteira da célula $\Gamma_i \times \Delta_j$. Fazemos o estudo supondo que a célula é finita, e o outro caso é similar.

Considere (γ_i, δ_j) e (γ_i, δ_{j+1}) pontos de esquina da malha contidos em $\Gamma_i \times \Delta_j$. Para termos uma singularidade no segmento de reta delimitado por esses pontos, devemos ter

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij} + \nu & a_{12}^{ij} - \beta \\ a_{21}^{ij} + \beta & a_{22}^{ij} + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_j + t(\gamma_{j+1} - \delta_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{ij} + \alpha_1 \\ b_2^{ij} + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para $t \in [0, 1]$. Dessa forma, se efetuarmos

$$\begin{aligned} \alpha_1(\nu, \beta, t) &= -(b_1^{ij} + (a_{11}^{ij} + \nu)\gamma_i + (a_{12}^{ij} - \beta)[\delta_j + t(\delta_{j+1} - \delta_j)]), \\ \alpha_2(\nu, \beta, t) &= -(b_2^{ij} + (a_{21}^{ij} + \beta)\gamma_i + (a_{22}^{ij} + \nu)[\delta_j + t(\delta_{j+1} - \delta_j)]), \end{aligned}$$

temos que os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ para os quais o campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui pelo menos uma singularidade no segmento de reta delimitado por (γ_i, δ_j) e (γ_i, δ_{j+1}) , estão contidos na superfície

$$Z(\nu, \beta, t) = (\alpha_1(\nu, \beta, t), \alpha_2(\nu, \beta, t), \nu, \beta),$$

a qual é um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^4 . De maneira análoga, fazemos isso para os outros lados da célula.

Portanto, repetindo o processo desenvolvido neste passo 2 para as outras células, percebemos que os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 2')$ estão contidos em um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^4 .

Passo 3: Para fazermos a análise das tangências do campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ com a malha, nos restringimos às tangências horizontais, pois as verticais geram um resultado similar.

Fixe uma linha horizontal $y = \delta_j$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, e a partir dela considere a função $f_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_j(x, y) = y - \delta_j$. Temos que uma tangência horizontal ocorre quando

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} f_j(x, \delta_j) = \langle X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(x, \delta_j), \nabla f_j(x, \delta_j) \rangle = 0,$$

ou seja, quando a segunda componente do campo vetorial $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ se anula em um ponto da forma (x, δ_j) . Sendo assim,

$$\alpha_2 + \nu \delta_j + \beta x + Q(x, \delta_j) = 0.$$

Desse modo, para cada x_0 fixado, os valores de $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tais que $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui pelo menos uma tangência horizontal em (x_0, δ_j) estão contidos no hiperplano H_{x_0} dado por

$$\alpha_2 + \nu \delta_j + \beta x_0 + Q(x_0, \delta_j) = 0.$$

Logo, para que as tangências com as esquinas da malha (Γ, Δ) não ocorram, temos que desconsiderar os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ contidos nos hiperplanos H_{γ_i} , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Agora para obtermos tangências quadráticas, considerando $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in H_x$, deve ocorrer

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}^2 f_j(x, \delta_j) \neq 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}^2 f_j(x, \delta_j) &= \langle X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(x, \delta_j), \nabla X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} f_j(x, \delta_j) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1 + \nu \gamma_i - \beta y + P(\gamma_i, y), 0), (\beta + Q_x(x, \delta_j), 0) \rangle \\ &= (\alpha_1 + \nu \gamma_i - \beta y + P(\gamma_i, y))(\beta + Q_x(x, \delta_j)) \neq 0. \end{aligned}$$

Desconsiderando o caso em que o ponto de tangência (x, δ_j) é uma singularidade na malha (Γ, Δ) , temos que $\alpha_1 + \nu \gamma_i - \beta y + P(\gamma_i, y) \neq 0$ e, logo, para a tangência ser quadrática deve ocorrer $Q_x(x, \delta_j) \neq -\beta$.

Note que $Q(x, \delta_k)$ é uma função linear em cada segmento Γ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo, $Q_x(x, \delta_j)$ assume no máximo $n + 1$ valores. Considere v_1, v_2, \dots, v_{n+1} como sendo os valores que $Q_x(x, \delta_j)$ pode assumir. Dessa forma, se desconsiderarmos os pontos nas

retas $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, v_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, v_{n+1}\}$, garantimos que o campo $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui somente tangências quadráticas com a reta da malha $y = \delta_j$.

Fazendo esse processo para todas as retas horizontais e verticais, encontramos que os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tais que $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 3)$ está contido em um conjunto de medida nula em \mathbb{R}^4 , pois ele é a união finita de retas e hiperplanos.

Passo 4: Para finalizar, vamos analisar a órbita no infinito. Um campo vetorial $X_{\nu, \beta}$ possui uma órbita periódica no infinito se $A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0) \neq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Consideremos M e m o máximo e o mínimo, respectivamente, da função $-A_1(\theta, 0)$ restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$. Temos que, para todo $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \notin [m, M]$, a função $A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0)$ não se anula em $[0, 2\pi]$, isso ocorre por conta da primeira igualdade de (3.4.2), logo o campo vetorial $X_{\nu, \beta}$ possui uma órbita periódica no infinito.

Dado $(\nu, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\beta \notin [m, M]$, temos pela Proposição 3.2.5 que o mapa de Poincaré associado à órbita periódica no infinito do campo vetorial $X_{\nu, \beta}$ é

$$\pi'_{\nu, \beta}(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} -\frac{R_{1,l}^{\nu, \beta}(\theta)}{A_{1,l}^{\nu, \beta}(\theta)} d\theta \right] = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} -\frac{\nu + R_{1,l}(\theta)}{\beta + A_{1,l}(\theta)} d\theta \right].$$

Dessa forma, pela Proposição 3.2.6 obtemos que $\frac{\partial}{\partial \nu} \pi'_{\nu, \beta}(0) \neq 0$. Fixado β , a função $\pi'_{\nu, \beta}(0)$ é crescente ou decrescente quando variamos ν , assim existe no máximo um valor para ν de modo que a órbita periódica no infinito não seja hiperbólica. Utilizando o teorema da função implícita para $\pi'_{\nu, \beta}(0) = 1$, constatamos que os pontos (ν, β) onde $X_{\nu, \beta}$ possui uma órbita periódica não hiperbólica no infinito estão contidos em uma curva regular da forma $(\nu(\beta), \beta)$, com $\beta \notin [m, M]$.

Assim, pelas igualdades obtidas em (3.4.3), os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ para os quais $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)$ estão no conjunto $\{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 : \nu = \nu(\beta)\}$, o qual é um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^4 .

Portanto, para finalizarmos a demonstração basta unirmos todos os conjuntos de medida de Lebesgue nula obtidos em cada passo. \square

Proposição 3.4.2. *Para qualquer $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 2', 3) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)$, a família de rotação*

$$X_\omega(x, y) = R_\omega X(x, y)$$

intersecta o conjunto $\Xi_{\Gamma, \Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R} .

Demonstração. A demonstração é feita de maneira similar a da Proposição 3.4.1. Para mais detalhes veja as referências [8] e [15]. \square

Teorema 3.4.3. *Para qualquer $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$, a família de cinco parâmetros $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega}(x, y)$ definida por*

$$R_\omega \left[X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right],$$

encontra o conjunto bifurcação $\Xi'_{\Gamma, \Delta} = \Xi_{\Gamma, \Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Demonstração. Seja $X \in \Xi_{\Gamma, \Delta}$ e considere o conjunto

$$\mathcal{U}(X) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^5 : R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) \in \Xi'_{\Gamma, \Delta}\}.$$

Devemos provar que $m_5(\mathcal{U}(X)) = 0$, onde m_5 denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^5 . Note que o conjunto $\mathcal{U}(X)$ é fechado. De fato, se tomarmos a função contínua

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^{6+2(n+m)} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega) &\longmapsto R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}), \end{aligned}$$

temos que $\mathcal{U}(X) = F^{-1}(\Xi'_{\Gamma, \Delta})$. Como $\Xi'_{\Gamma, \Delta}$ é fechado em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$, pois $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é aberto em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$ (veja o segundo item do Teorema 3.4.5), obtemos que $\mathcal{U}(X)$ é fechado em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$. Desse modo, $\mathcal{U}(X)$ é Lebesgue mensurável. Então,

$$m_5(\mathcal{U}(X)) = \int_{\mathbb{R}^5} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X)) dm_5,$$

em que $\mathcal{X}(A)$ denota a função característica do conjunto A . Aplicando o Teorema de Fubini (veja a referência [17]) para a função $\mathcal{X}(\mathcal{U}(X))$, obtemos

$$m_5(\mathcal{U}(X)) = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4,$$

onde m_1 e m_4 são, respectivamente, a medida de Lebesgue de \mathbb{R} e \mathbb{R}^4 , e

$$\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) = \{\omega \in \mathbb{R} : R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) \in \Xi'_{\Gamma, \Delta}\}.$$

Se considerarmos o conjunto

$$\mathcal{V}(X) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 : X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \in \Xi_{\Gamma, \Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 2', 3) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)\},$$

então $m_5(\mathcal{U}(X))$ é igual a

$$\int_{\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{V}(X)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4 + \int_{\mathcal{V}(X)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4.$$

Aplicando agora o Teorema de Fubini na segunda integral, obtemos $m_5(\mathcal{U}(X))$ igual a

$$\int_{\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{V}(X)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4 + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \omega)) dm_4 \right) dm_1,$$

onde

$$\mathcal{U}(X; \omega) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 : R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) \in \Xi'_{\Gamma, \Delta}\}.$$

Pela Proposição 3.4.2, a primeira integral se anula, e pela Proposição 3.4.1, a segunda integral se anula. Portanto, temos que $m_5(\mathcal{U}(X)) = 0$, concluindo assim a demonstração. \square

Teorema 3.4.4. *O conjunto $\Sigma_{\Gamma, \Delta} = \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(3)$ tem medida de Lebesgue total, em particular $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é denso em $\Xi_{\Gamma, \Delta}$.*

Demonstração. Vamos inicialmente mostrar que $\Xi'_{\Gamma,\Delta}$ possui medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^{6+2(n+m)}$, ou seja, $m_N(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) = 0$, onde m_N denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{6+2(n+m)}$. Consideramos a função contínua

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{6+2(n+m)} \times \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^{6+2(n+m)} \\ (X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) &\longmapsto R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}), \end{aligned}$$

e a partir dela definimos a função

$$G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) = \mathcal{X}(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) \circ F(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)).$$

Pelo Teorema 3.4.3, temos

$$\int_{\mathbb{R}^{6+2(n+m)}} \left(\int_{\mathbb{R}^5} G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) dm_5 \right) dm_N = 0.$$

Aplicando o Teorema de Fubini para a função G , obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^5} \left(\int_{\mathbb{R}^{6+2(n+m)}} G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) dm_N \right) dm_5 = 0.$$

Então, a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^5 , temos

$$\int_{\mathbb{R}^{6+2(n+m)}} G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) dm_N = 0. \quad (3.4.5)$$

Fixe $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^5$ de tal modo que a expressão anterior seja satisfeita. Note que, dado $Y \in \Xi'_{\Gamma,\Delta}$ têm-se

$$G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) = 1 \Leftrightarrow R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) = Y \Leftrightarrow X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} = R_{(-\omega)}(Y). \quad (3.4.6)$$

Como

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(x, y) = X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

obtemos que a expressão (3.4.6) equivale a

$$X(x, y) = R_{(-\omega)}(Y)(x, y) - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} - \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.4.7)$$

Seja X_0 o campo vetorial em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$ dado pela expressão

$$X_0(x, y) = -\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} - \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Logo, a expressão (3.4.7) pode ser escrita como

$$X = R_{(-\omega)}(Y) + X_0.$$

Desse modo, para o ponto $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)$ fixado, $G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega))$ é a função característica do conjunto $R_{(-\omega)}(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) + X_0$, onde estamos considerando $R_{(-\omega)}$ uma transformação linear em $\mathbb{R}^{6+2(n+m)}$.

Pela conclusão acima e utilizando (3.4.5), temos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{6+2(n+m)}} \mathcal{X}(R_{(-\omega)}(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) + X_0) dm_N = m_N(R_{(-\omega)}(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) + X_0).$$

Como a medida de Lebesgue é invariante por translação, obtemos

$$m_N(R_{(-\omega)}(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) + X_0) = |\det R_{(-\omega)}| m_n(\Xi'_{\Gamma,\Delta}).$$

Como $|\det R_{(-\omega)}| \neq 0$, temos que $m_N(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) = 0$.

Portanto, como $\Xi'_{\Gamma,\Delta} = \Xi_{\Gamma,\Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e $m_N(\Xi'_{\Gamma,\Delta}) = 0$, obtemos que $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ tem medida de Lebesgue total e, em particular, é denso em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$. De fato, se $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ não fosse denso em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$, existiriam $X \in \Xi_{\Gamma,\Delta}$ e $\delta > 0$ tais que $B_\delta(X) \subset \Xi'_{\Gamma,\Delta}$. Porém, isso geraria uma contradição com o fato de $\Xi'_{\Gamma,\Delta}$ possuir medida de Lebesgue nula. \square

Para finalizar esta seção, apresentamos o resultado principal deste capítulo sobre estabilidade estrutural.

Teorema 3.4.5. *Para o conjunto*

$$\Sigma_{\Gamma,\Delta} = \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(3)$$

valem as seguintes afirmações:

1. $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é aberto em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$,
2. $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é denso em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$,
3. $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ está contido no conjunto $\mathcal{S}_{\Gamma,\Delta}$.

Demonstração. A prova do primeiro item pode ser vista com detalhes nas referências [8] e [15]. Já a demonstração do segundo item segue do Teorema 3.4.4.

Para provar o terceiro item, devemos mostrar que todo $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é estruturalmente estável. Isso segue dos itens anteriores, pois como o conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é aberto e denso em $\Xi_{\Gamma,\Delta}$ tem-se que seus elementos são estruturalmente estáveis. \square

Para finalizar, um exemplo para a teoria desenvolvida neste capítulo pode ser visto no livro do Utkin [18] (Capítulo 3, página 29).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Antosiewicz, H. A.; Lefschetz, S. *Stability of nonlinear control systems*. Mathematics of Computation, 20:632, 1965.
- [2] Broucke, M. E.; Pugh, C. C.; Simić, S. N. *Structural stability of piecewise smooth systems*. Computational & Applied Mathematics, 20:51–89, 2001.
- [3] Doering, C. I.; Lopes, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005.
- [4] Feßler, R. *A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization*. 62:45–74, 1995.
- [5] Gomide, O. M. L. *Ciclos Limite em Sistemas Dinâmicos Suaves e Não-Suaves*. Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, 2015.
- [6] Grama, L.; Miranda, R. M. *The Ricci flow of left-invariant metrics on full flag manifold $SU(3)/T$ from a dynamical systems point of view*. Bulletin des sciences mathematiques, 133:463–469, 2009.
- [7] Guardia, M.; Seara, T. M.; Teixeira, M. A. *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems*. Journal of Differential Equations, 250:1967–2023, 2011.
- [8] Jacóia, B. P. *Estabilidade estrutural dos campos vetoriais seccionalmente lineares no plano*. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de São Paulo, 2013.
- [9] Larrosa, J. F. *Sistemas Planares de Filippov e Bifurcações Genéricas de Baixa Codimensão*. Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, 2012.
- [10] Llibre, J.; Ponce, E.; Ros, J. *Algebraic determination of limit cycles in a family of three-dimensional piecewise linear differential systems*. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal, 74:6712–6727, 2011.
- [11] Llibre, J.; Teixeira, M. A. *Regularization of discontinuous vector fields in dimension three*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 3:235–241, 1997.

-
- [12] Llibre, J.; Teixeria, M. A. *Global asymptotic stability for a class of discontinuous vector fields in \mathbb{R}^2* . Dynamical Systems, 22:133–146, 2007.
- [13] Makarenkov, O.; Lamb, J. S. W. *Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: a survey*. Physica D. Nonlinear Phenomena, 241:1826–1844, 2012.
- [14] Peixoto, M. C.; Peixoto, M. M. *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, 31:135–160, 1959.
- [15] Sotomayor, J.; Garcia, R. *Structural stability of piecewise-linear vector fields*. Journal of Differential Equations, 192:553–565, 2003.
- [16] Sotomayor, J.; Teixeira, M. A. *Regularization of discontinuous vector fields*. International Conference on Differential Equations, Lisboa, 1996.
- [17] Spivak, M. *Calculus on Manifolds*. Benjamin Cummings, 1965.
- [18] Utkin, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [19] Velasco, E. A. G. *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*. Transactions of the American Mathematical Society, 143:201–222, 1969.
- [20] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.