



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

JEYNER CASTRO CARDONA

QUEBRA DA SIMETRIA QUIRAL E A MASSA DINÂMICA
DOS QUARKS

CAMPINAS

2020

JEYNER CASTRO CARDONA

QUEBRA DA SIMETRIA QUIRAL E A MASSA DINÂMICA DOS QUARKS

Tese apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

ORIENTADORA: ARLENE CRISTINA AGUILAR

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO
JEYNER CASTRO CARDONA, E ORIENTADA PELA
PROF^a. DR^a. ARLENE CRISTINA AGUILAR.

CAMPINAS

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

C279q Castro Cardona, Jeyner, 1985-
Quebra da simetria quiral e massa dinâmica dos quarks / Jeyner Castro Cardona. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Arlene Cristina Aguilar.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. QCD não perturbativa. I. Aguilar, Arlene Cristina, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Chiral symmetry breaking and dynamical quarks masses

Palavras-chave em inglês:

Non-perturbative QCD

Área de concentração: Física

Titulação: Doutor em Ciências

Banca examinadora:

Arlene Cristina Aguilar [Orientador]

Orlando Luís Goulart Peres

Donato Giorgio Torrieri

Orlando Olavo Aragão Aleixo e Neves de Oliveira

Bruno Omar El-Bennich

Data de defesa: 25-09-2020

Programa de Pós-Graduação: Física

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-5684-4454>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8228256552194180>

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **JEYNER CASTRO CARDONA - RA: 142415** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 25/09/2020

COMISSÃO JULGADORA:

- Profa. Dra. Arlene Cristina Aguilár – Orientadora – DRCC/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres – DRCC/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Donato Giorgio Torriere – DRCC/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Orlando Olavo Aragão Aleixo e Neves de Oliveira –
DF/Universidade de Coimbra
- Prof. Dr. Bruno Omar El Bennich – LFTC/Universidade Cruzeiro do Sul

OBS: Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade

CAMPINAS
2020

Dedicatória

Meus filhos, Mateo e Sofia, os AMO.

Agradecimentos

- Primeiramente dou graças a Deus por permitir-me viver e concluir mais uma etapa que não foi nada fácil.
- Agradeço enormemente à Prof. Dra. Arlene Cristina Aguiar por sua grande ajuda e contribuição acadêmica, orientação, paciência e dicas para conseguir a conclusão desta tese de doutorado.
- Agradeço ao Antônio Ferreira, meu colega de sala, a quem eu gostaria de dar um reconhecimento especial devido ao grande aporte e suporte computacional e teórico que deu durante o desenvolvimento de todo este estudo. Agradeço a Clara Figueiredo, pela leitura e correções na tese.
- Minha família pilar importante com suas palavras de ânimo e apoio. A minha mãe Ines Oliva, tia Rosita e meu irmão Estiven todos eles merecem meu carinho sincero. Agradeço a Beatriz a mãe do meus filhos Mateo e Sofia.
- Agradeço a todos os amigos que fiz aqui em Campinas e na Unicamp, com os que compartilhei momentos de celebrações e conversas sobre todo tipo de assunto. Entre todos eles queria destacar os conselhos que o Santiago Figueroa me deu e, agradecer a sua família por todo o apoio que sempre deu a mim e a minha família.
- Agradeço a Unicamp e ao corpo docente do Instituto de Física “Gleb Wataghin” - IFGW pela contribuição em minha formação acadêmica.
- O presente trabalho foi realizado com o financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - sob o numero de processo: 141981/2013-0 e também com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 com numero de processo: 1151164/2012.
- Por último gostaria de agradecer a Quest Inteligência, a empresa que me deu a oportunidade de trabalhar no Brasil e finalmente concluir a escrita da minha tese.

Resumo

A quebra dinâmica da simetria quiral e a sua posterior geração de massa para os quarks são fenômenos intrínsecos do setor infravermelho da QCD. Uma das ferramentas mais apropriadas para estudá-los é a equação de Schwinger-Dyson para o propagador do quark, também conhecida como equação de gap. Os ingredientes essenciais que entram na equação de gap são o propagador do glúon e o vértice completo quark-glúon. Este último carrega consigo informações cruciais sobre o setor não abeliano da teoria. Além disso, seus quatro fatores de forma longitudinais podem ser determinados exatamente através da identidade de Slavnov-Taylor que ele satisfaz. A expressão resultante consiste em uma extensão não abeliana do “vértice Ball-Chiu” envolvendo o propagador do quark, a função de vestimento do ghost e o kernel de espalhamento quark-ghost. Neste trabalho, calculamos o kernel de quark-ghost dentro da chamada aproximação de 1-loop vestido. Na sequência, usamos estes resultados para determinar os quatro fatores de forma longitudinais do vértice quark-glúon, cuja análise numérica revela características interessantes que os diferenciam de seus análogos abelianos. Ressaltamos que ambos conjuntos de fatores de forma são calculados em configurações cinemáticas gerais. Com o intuito de realizar um estudo detalhado do impacto que o vértice de quark-glúon tem na equação de gap, nós montamos e resolvemos um sistema acoplado composto por seis equações que determina os quatro fatores de forma do kernel e as duas funções que definem o propagador completo do quark. Nossos resultados indicam que o impacto numérico do kernel quark-ghost é considerável, levando um acréscimo de aproximadamente 20% nos valores gerados para as massas dos quarks na origem se comparado com o caso onde o kernel é mantido em nível de árvore.

Palavras Chaves: QCD não perturbativa; vértice completo do quark-glúon; kernel de espalhamento quark-ghost; Identidade de Slavnov-Taylor; equação de gap; massa dinâmica do quark.

Áreas do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra; Física; Física das Partículas Elementares e Campos.

Abstract

The dynamical chiral symmetry breaking and the subsequent quark mass generation are intrinsic phenomena in the QCD infrared sector. One of the most appropriate tools to study them is the Schwinger-Dyson equation for the quark propagator, also known as the gap equation. The essential ingredients, entering into the gap equation, are the gluon propagator and the full quark-gluon vertex. The latter entails crucial information about the non-abelian sector of the theory. In addition, its four longitudinal form factors may be determined exactly from the Slavnov-Taylor identity that it satisfies. The resulting expression constitutes the non-abelian extension of the “Ball-Chiu vertex”, which involves the quark propagator, the ghost dressing function and, the quark-ghost kernel. In this work, we compute the quark-ghost kernel in the so-called one-loop dressed approximation. Then, we use the previous results to determine the four longitudinal form factors of the quark-gluon vertex, whose numerical analysis reveals interesting features that deviate from its abelian counterpart. We emphasize here that both sets of form factors are computed in general euclidean kinematics. To carry out a detailed study about the impact that quark-gluon vertex impact has on the gap equation, we set up and solve the coupled system of six equations that determine the four form factors of the kernel and the two functions composing the nonperturbative quark propagator. Our main results indicate that the numerical impact of the quark-ghost kernel is considerable. In particular, when compared with the case where the kernel is kept at tree-level, the one-loop dressed approximation, employed here, increases by approximately 20% the value of the generated quark mass at the origin.

Palavras Chaves: nonperturbative QCD; quark-gluon vertex; quark-ghost kernel; Slavnov-Taylor identity; gap equation; dynamical quark mass.

Lista de Publicações durante o doutorado

Artigos:

1. A. C. Aguilar, J. C. Cardona, M. N. Ferreira e J. Papavassiliou,
“Quark gap equation with non-abelian Ball-Chiu vertex”,
Phys. Rev. D98 (1), 014002, 2018.
2. A. C. Aguilar, J. C. Cardona, M. N. Ferreira e J. Papavassiliou
“Non-Abelian Ball-Chiu vertex for arbitrary Euclidean momenta”,
Phys. Rev. D96 (1), 014029, 2017.

Proceedings:

1. J. C. Cardona e A. C. Aguilar,
“Dynamical chiral symmetry with an infrared finite gluon propagator”,
J. Phys. Conf. Ser. 706 (5), 052018, 2016.
2. A. C. Aguilar, D. Binosi, J. C. Cardona and J. Papavassiliou,
“Nonperturbative results on the quark-gluon vertex”,
PoS Confinement X (2012), 103.

Lista de Abreviações

Esta tabela contém os significados de várias abreviações que foram usadas ao longo desta tese. A página onde a abreviação foi utilizada pela primeira vez está na coluna da direita.

Abreviação	Significado	Página
QCD	Cromodinâmica Quântica	13
QED	Eletrodinâmica Quântica	14
IR	Infravermelho(a)	14
UV	Ultravioleta	14
ESD(s)	Equação(ões) de Schwinger-Dyson	15
QDSQ	Quebra dinâmica de simetria quirial	16
STI	Identidade de Slavnov-Taylor	18
1PI	One-particle irreducible	34
BC	Ball-Chiu	45
CP	Curtis-Pennington	47
MOM	Esquema de renormalização de subtração de momento	64
RGI	Invariante sob o grupo de renormalização	83

Sumário

1	Introdução	13
2	QCD: propriedades e simetrias	20
2.1	Lagrangiana da QCD	20
2.2	Liberdade assintótica	23
2.3	Simetria quiral da QCD	27
3	As Equações de Schwinger-Dyson	32
3.1	Características gerais das ESDs	32
3.2	ESD para a QED	33
3.3	Derivação da ESD do quark: método funcional	36
3.4	ESD para o propagador do quark	41
3.5	Modelos simplificados para o vértice quark-glúon	44
4	O vértice quark-glúon não perturbativo	48
4.1	A ESD do vértice quark-glúon	48
4.2	Construção do vértice de BC não abeliano	51
4.3	Aproximação de 1-loop vestido para o $H(q, p_2, -p_1)$	54
5	Determinação dos fatores de forma	58
5.1	Análise numérica	58
5.2	Ingredientes numéricos	59
5.3	Fatores de forma da amplitude de quark-ghost	62
5.4	Fatores de forma do vértice quark-glúon	64
5.5	Configurações cinemáticas especiais: gráficos 2-D	71
5.6	Comparação com trabalhos anteriores	76
6	QDSQ com vértice BC não abeliano	79
6.1	Sistema de equações acopladas	79
6.2	Renormalização e a dimensão anômala da massa	82

6.3	Análise numérica do sistema acoplado	85
7	Conclusões	95
	Apêndices	99
A	Conversão para o espaço euclidiano	99
B	Expansão de Taylor para \mathcal{K}	103
C	Dimensão anômala da massa	105
	Referências Bibliográficas	108

1

Introdução

Desde a sua criação, na década de 70, a teoria quântica de campos não abeliana e renormalizável que descreve as interações fortes vem sendo aprimorada teoricamente e testada experimentalmente com muito sucesso. Esta teoria conhecida como *Cromodinâmica Quântica* (QCD) é responsável por descrever as interações fortes que ocorrem entre os campos de quarks e glúons [1–3], que formam os hádrons: bárions e mésons. Os bárions (prótons, nêutrons, ...) são compostos por três quarks enquanto que os mésons (píons, káons, ...) são compostos por um par quark-antiquark.

A Lagrangiana da QCD é formulada em termos dos graus de liberdade fundamentais da teoria: os campos de quarks e glúons. Os quarks são partículas de spin $\frac{1}{2}$, com carga elétrica *e* fracionária [4,5]. Apesar de nunca terem sido observados como partículas livres, eles são objetos fundamentais, *i.e.*, sem estrutura, e participam de todas as quatro interações na natureza (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional) [6–8]. Até o momento, são conhecidos seis sabores ou tipos de quarks que receberam o nome de: up (*u*), down (*d*), strange (*s*), charm (*c*), bottom (*b*) e top (*t*). Os quarks *u*, *c* e *t* possuem cargas elétricas iguais à $Q = \frac{2}{3}e$, enquanto que os quarks *d*, *s* e *b* têm carga elétrica $Q = -\frac{1}{3}e$. Além da carga elétrica, os quarks possuem também a chamada carga de “cor” blue, red e green (azul, vermelho e verde). O grupo de simetria que descreve esta carga de cor é o grupo $SU(3)$ e os campos de quarks estão na representação fundamental deste grupo. Como as interações fortes não discriminam entre os sabores de quark, a QCD contém também uma simetria aproximada entre os sabores, que é quebrada pelas massas diferentes dos quarks. Esta simetria é conhecida como *simetria de sabor* e o grupo associado é o $SU(N_f)$, onde N_f é o número de sabores de quarks. No limite em que as massas dos quarks são consideradas nulas a QCD possui a *simetria quiral*, na qual a interação forte não distingue entre

se um quark é de mão esquerda ou de mão direita, esta simetria é descrita pelo grupo $SU(N_f) \rightarrow SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$. Como as massas dos quarks presentes na Lagrangiana da QCD não são nulas, devido à interação com o campo de Higgs, a *simetria quiral é explicitamente quebrada*.

Já os glúons são partículas bosônicas de spin 1, e possuem um papel similar aos fótons da eletrodinâmica quântica (QED), *i.e.*, eles são os mediadores das interações fortes entre os quarks. No entanto, os glúons, ao contrário dos fótons, são carregados com as cargas de cor. Devido a simetria do grupo $SU(3)$, sabemos que temos 8 (oito) glúons carregados que são os geradores do grupo $SU(3)$. Por serem carregados, os glúons auto-interagem, o que faz com que a QCD se torne uma teoria muito mais complicada que a QED. Por este motivo, a Lagrangiana da QCD apresenta uma estrutura matemática muito mais rica que a da QED. Uma das principais características da QCD é a chamada *liberdade assintótica* [9, 10], que está diretamente relacionada à auto-interação dos glúons.

A liberdade assintótica nos diz que o acoplamento entre quarks é “fraco” na região de altas energias (ou analogamente em distâncias curtas), ou seja, assintoticamente os quarks são “livres”. Por outro lado, na região de baixas energias (distâncias grandes) o acoplamento entre quarks é muito forte. Como consequência da liberdade assintótica, o estudo da QCD é dividido em duas regiões de energias: a infravermelha (IR) que corresponde ao regime de baixas energias e, a ultravioleta (UV) que engloba a região de altas energias.

Para o regime UV da QCD podemos aplicar as ferramentas perturbativas que foram desenvolvidas para o estudo de teorias com acoplamento “fraco” [11], como é o caso da QED. Nesta região, a QCD tem sido testada com grande sucesso através dos experimentos de espalhamento inelástico profundo [12], onde as energias utilizadas são altas e, portanto, o acoplamento entre quarks é pequeno.

Por outro lado, no regime IR as ferramentas perturbativas não podem ser mais aplicadas, já que as séries perturbativas não convergem, uma vez que o parâmetro de perturbação, que é a constante de acoplamento, não é mais pequeno.

Entretanto, entender a dinâmica da região IR é ainda um dos grandes desafios da física hadrônica na atualidade já que problemas fundamentais, como o confinamento e a geração de massas para os quarks, são fenômenos que ocorrem neste regime de energia. Portanto, se almejamos obter um entendimento completo de ambos fenômenos, indubitavelmente, temos que lançar mão de ferramentas não perturbativas. Dentre elas podemos destacar

dois métodos: o primeiro é a *QCD na rede* que foi proposta há mais de 40 anos por K. Wilson [13, 14]. Este método é uma versão discretizada da QCD [15–17], onde o espaço-tempo é substituído por um “grid” ou rede euclidiana de pontos quadrimensionais igualmente espaçados e conectados por linhas (“links”). Os campos de matéria (quarks) são definidos nos pontos da rede, enquanto que os campos de gauge (glúons) são definidos pelos links entre dois pontos da rede. O espaçamento funciona como regulador, já que remove as divergências (ou infinitos) que estão presente nas teorias de gauge. Já o segundo método são as chamadas *equações de Schwinger-Dyson* (ESDs). Este método consiste em uma torre infinita de equações integrais acopladas que descrevem a dinâmica das funções de Green da teoria. Portanto, podemos entendê-las como sendo um espécie de equações de Euler-Lagrange de uma dada teoria de campo. Usualmente, para trabalhar com as ESDs é necessário utilizar um esquema de truncamento (aproximação) que permita resolver o sistema de equações integrais acopladas que usualmente surge nesta abordagem [18, 19].

Podemos dizer que as funções de Green ocupam um papel central na compreensão do setor IR da QCD, pois elas são responsáveis por descrever a dinâmica dos blocos fundamentais da teoria: propagadores e vértices. Na última duas décadas, graças à combinação de uma variedade de métodos, grandes avanços têm sido alcançados no entendimento de vários aspectos do setor IR da QCD. Em especial, o sucesso obtido nestes últimos anos se deve principalmente à sinergia contínua entre as simulações da QCD na rede e as ESDs, que nos possibilitou uma profunda compreensão sobre o comportamento IR de algumas funções de Green mais básicas da QCD. Dentre elas podemos destacar os propagadores do glúon, do ghost e do quark, além de alguns vértices fundamentais da teoria, como os de quark-glúon e três-glúons, em configurações cinemáticas especiais [19–40].

Apesar de todos estes progressos, uma das propriedades mais interessantes da QCD, o confinamento, ainda é pouco entendido [41]. Entretanto é esperado que alguns dos sinais de confinamento estejam também codificados de alguma maneira no comportamento das funções de Green básicas da QCD [42, 43].

De uma forma extremamente simplória, podemos descrever o confinamento através do comportamento da força a que dois quarks estão sujeitos. Ao contrário do que acontece com dois elétrons, a medida que aumentamos a separação entre dois quarks, a força entre eles cada vez fica maior. Ou seja, quanto mais tentamos separar estes quarks mais e mais energia é requerida, a ponto de se tornar energeticamente mais favorável criar um par

quark–anti-quark do vácuo do que efetivamente separar estes quarks iniciais. Por causa desta propriedade peculiar da teoria, os quarks estão fadados a sempre estarem confinados dentro dos hádrons, já que seria necessário uma energia infinita para separá-los.

Devido ao fato de que não podemos “observar” quarks livres, obviamente suas massas não podem ser medidas diretamente no laboratório, mas podemos inferir, por exemplo, as massas dos quarks indiretamente através de sua influência nas propriedades dos hádrons [44]. Assim, do espectro de massas dos hádrons, podemos estimar as massas dos *quarks constituintes*. Modelos não relativísticos sugerem que cada um dos três quarks que constituem o próton é “responsável” por carregar um terço da massa total de aproximadamente 1 GeV que o próton possui. Ou seja, em outras palavras cada quark teria uma massa constituinte de aproximadamente 350 MeV. Por outro lado, medidas experimentais estimam que as massas de corrente dos quarks¹ é da ordem de uns poucos MeV. Portanto, para dar conta desta enorme discrepância entre os valores de massas constituintes e de corrente, precisamos de um mecanismo muito eficiente que seja responsável por gerar quase 98% da massa do próton [46]. Este mecanismo recebe o nome de *quebra dinâmica da simetria quiral* (QDSQ) e seu entendimento é de suma importância para a QCD, pois nele reside a chave para entender uma boa parte da física hadrônica. Vale a pena mencionar que a descrição deste fenômeno é o foco central de muitas pesquisas na área [18–22, 47–51].

Em todo o espectro hadrônico o pión,² com uma massa de aproximadamente 140 MeV, é o estado ligado mais leve e o valor da sua massa é considerado uma consequência da QDSQ [18, 46]. Além da massa do pión, outra consequência interessante da QDSQ é o fato de que hádrons com paridade oposta não possuem a mesma massa, por exemplo; o méson vetorial ρ , com paridade positiva, enquanto que o méson pseudovetorial a_1 , com paridade negativa, apresentam uma diferença entre suas massas de $\Delta M \approx 500$ MeV [44].

A principal ferramenta para o estudo da QDSQ é a ESD que descreve o propagador do quark [18–22, 47–53]. Esta equação também é conhecida na literatura como *equação de gap*. Como veremos, com mais detalhes no Capítulo 3, os ingredientes essenciais que entram na equação de gap são o propagador do glúon e o vértice quark-glúon.

Hoje em dia, podemos dizer que a dinâmica não perturbativa do propagador do glúon

¹As massas de corrente dos quarks são aquelas que aparecem na Lagrangiana da QCD, cuja origem é atribuída ao mecanismo de Higgs [45].

²O pión é o bóson de Goldstone e suas propriedades físicas estão associadas à QDSQ [46].

está bem entendida tanto pela QCD na rede [28, 32, 33] como pelas ESDs no gauge de Landau [23, 24, 54–57]. Nesta série de trabalhos ficou estabelecido que no IR o glúon adquire uma massa dinâmica, que faz com que seu comportamento seja finito na origem (momentos nulos).

Por outro lado, obter uma descrição não perturbativa do vértice quark-glúon é uma tarefa bem mais árdua. Este vértice é uma função de Green de três pontos que tem um índice de Lorentz livre. Portanto, sua estrutura de Lorentz mais geral é composta por 12 (doze) tensores independentes que são acompanhados de seus correspondentes fatores de forma [58]. A determinação completa deste vértice envolve a obtenção do comportamento não perturbativo destes 12 fatores de forma.

Para termos uma ideia da complexidade desta tarefa, devemos lembrar que o vértice quark-glúon satisfaz sua própria ESD (veja Fig. 4.1). Esta equação, por sua vez, depende de outras funções de Green de dois, três, quatro e até cinco pontos que também satisfazem suas próprias ESDs (veja Figs. 4.1 e 4.2). Dentre as funções, que entram na ESD do vértice quark-glúon, podemos destacar: os propagadores dos quark, glúon e ghost, os vértices de três-glúons, quatro-glúons e glúon-ghost, além dos kernels de espalhamento quark-ghost e quark-glúon [24, 26, 51, 59, 60]. Portanto, obter uma solução para a ESD deste vértice é uma tarefa muito complicada de se realizar em sua integridade, pois requer o conhecimento não perturbativo de todas as funções de Green fundamentais da teoria.

Desta forma, abordagens mais modestas têm sido aplicadas e grandes avanços no entendimento da dinâmica IR do vértice quark-glúon têm sido alcançados paulatinamente, combinando resultados da QCD na rede [25, 34, 35, 61–66] e das ESDs em aproximações cinemáticas específicas [36, 51, 53, 67–70].

Em linhas gerais, a conclusão global destes estudos é que as chamadas aproximações “abelianas” para o vértice quark-glúon, *i.e.*, aproximações que desconsideram a auto-interação do glúon e fazem com que este vértice se assemelhem ao vértice fóton-elétron da QED, não fornecem bons resultados fenomenológicos para a QDSQ, gerando massas constituintes para os quarks muito pequenas [18–20], especialmente quando combinadas com um propagador do glúon finito [22, 53, 71].

A partir destes trabalhos, ficou evidente que o caráter não abeliano deste vértice é crucial para entender QDSQ. Portanto é necessário usar técnicas mais sofisticadas que capturam o caráter não abeliano do vértice quark-glúon.

Uma destas técnicas é denominada na literatura como *gauge technique* [72–75]. Esta técnica usa o princípio de invariância de gauge para construir um *Ansatz* para o vértice quark-glúon “resolvendo” a identidade de Slavnov-Taylor (STI) que este vértice satisfaz [22]. Através da STI, é possível derivar uma expressão formal, válida em todas as ordens, para os quatro fatores de forma longitudinais do vértice quark-glúon que podem ser expressos em termos do propagador do quark, da função dressing do ghost e da amplitude de espalhamento quark-ghost. Esta última, por sua vez, também pode ser decomposta em termos de quatro fatores de forma. Recentemente, a amplitude de espalhamento quark-ghost vem sendo estudada não perturbativamente em configurações cinemáticas especiais, dentro da chamada aproximação de 1-loop vestido, onde somente é considerada a troca de um único glúon entre o quark e ghost [26, 27, 38–40, 70].

Neste trabalho utilizamos a *gauge technique* para determinar o comportamento não perturbativo dos quatro fatores de forma longitudinais do vértice quark-glúon para uma configuração cinemática geral. Para isto, vamos primeiramente determinar todos os fatores de forma da amplitude de espalhamento quark-ghost, na aproximação de 1-loop vestido, em configurações cinemáticas gerais. Na sequência, com estes fatores de forma em mãos, também determinaremos as quatro componentes longitudinais do vértice quark-glúon, utilizando a expressão encontrada como solução da STI. Vale ressaltar que a primeira vez que estes resultados foram determinados através da *gauge technique*, em configurações gerais para ambos conjuntos de fatores de forma, foi em nosso trabalho [76]. Posteriormente, comparamos alguns de nossos limites cinemáticos com os resultados das ESDs e/ou da QCD na rede disponíveis na literatura [63, 64, 68, 69, 77].

Como aplicação final, estudaremos o impacto que a estrutura não perturbativa do vértice quark-glúon tem na QDSQ e na geração de massa para os quarks. Para isto, acoplamos a equação de gap às quatro equações que descrevem os fatores de forma do kernel de espalhamento e resolvemos um sistema de seis equações acopladas.

A tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, nós apresentamos uma breve introdução sobre a Lagrangiana da QCD, suas principais simetrias e propriedades. Já no Capítulo 3, utilizamos o gerador funcional para derivar formalmente a ESD do propagador do quark, que será a ferramenta principal para estudar o fenômeno de geração de massa para os quarks. Também aproveitamos este capítulo, para discutir o processo de renormalização da ESD do quark no gauge de Landau. No Capítulo 4, nós introduzimos

a definição e as principais características do vértice quark-glúon. Aplicando a gauge technique, nós mostramos como os quatro fatores de forma longitudinais podem ser derivados formalmente através da STI que este vértice satisfaz. Veremos que eles são expressos em termos do propagador do quark, da função dressing do ghost e do kernel de espalhamento quark-ghost. Neste capítulo também apresentamos a aproximação de 1-loop vestido que será utilizada para o cálculo do kernel de espalhamento quark-ghost e derivamos as expressões analíticas para os seus respectivos fatores de forma. Os Capítulos 5 e 6 contêm os principais resultados desta tese. Mais especificadamente, no Capítulo 5, considerando o propagador do quark como um input externo, obtemos as soluções numéricas para os fatores de forma do kernel de espalhamento quark-ghost e do vértice quark-glúon, tanto em configurações de momentos gerais como em limites especiais. Também comparamos nossos resultados para configurações cinemáticas especiais com os obtidos pela QCD na rede e com os resultados de estudos prévios que utilizaram as ESDs. No Capítulo 6, acoplamos a ESD do quark com as quatro equações que descrevem o kernel quark-ghost e analisamos detalhadamente qual é o impacto que o vértice quark-glúon, em especial o kernel de espalhamento quark-ghost, tem na geração de massa para os quarks. No Capítulo 7 apresentamos nossas discussões finais e conclusões. Por fim, no primeiro Apêndice descrevemos quais são as regras para realizar a conversão de nossas equações do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano; no segundo mostramos como podemos derivar as expressões analíticas para os fatores de forma do kernel de espalhamento quark-ghost para dois limites cinemáticos específicos e, no terceiro apresentamos a derivação da dimensão anômala da massa dinâmica do quark.

2

QCD: propriedades e simetrias

A definição de uma teoria quântica de campos começa com a construção de sua Lagrangiana \mathcal{L} ou, equivalentemente, de sua ação $\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}$, que deve incorporar as simetrias fundamentais que esta teoria possui. No caso da QCD, as simetrias relevantes que devem estar presentes na Lagrangiana são: a invariância de Poincaré, simetria local de cor, simetria quiral (aproximada) e simetrias de sabor. Mais especificadamente, os campos de matéria e de interação da Lagrangiana da QCD devem permanecer invariantes sob as transformações que representam estas simetrias. Neste capítulo, vamos apresentar a Lagrangiana da QCD, suas principais propriedades e simetrias. Daremos particular atenção à simetria quiral, que é um dos pontos centrais desta tese.

2.1 Lagrangiana da QCD

Nosso ponto de partida é a Lagrangiana da QCD que é expressa por [78]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_k^{n_f} \bar{q}_k [i\gamma^\mu D_\mu - m_k] q_k, \quad (2.1)$$

onde γ^μ são as matrizes gamma de Dirac e m_k a massa de corrente dos quarks. Já q_k representam os campos de um quark no espaço das cores denotado por

$$q_k = \begin{pmatrix} q_k^r \\ q_k^g \\ q_k^b \end{pmatrix},$$

onde r, g e b representam os índices das cargas de cor “red”, “green” e “blue”, respectivamente. Cada componente q_k^i é um espinor de Dirac. Já o subíndice k , que varia de

$k = 1, 2, \dots, n_f$, representa os sabores dos quarks. Os campos de quarks transformam-se na representação fundamental do grupo de simetria $SU(3)$. Além disso, D_μ é a derivada covariante de gauge definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a, \quad (2.2)$$

onde g é a constante de acoplamento da QCD, A_μ^a o campo de gauge e, $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) são as matrizes de Gell-Mann que são os geradores do grupo de simetria $SU(3)$. Essas matrizes satisfazem as seguintes relações de comutação e normalização

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad \text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad (2.3)$$

onde f^{abc} é a constante de estrutura do grupo de transformações. Finalmente, o tensor $G_{\mu\nu}^a$ é dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.4)$$

A característica mais peculiar de teorias de gauge *não abelianas*, como é o caso da QCD, está no fato que os bósons de gauge são carregados e interagem entre si. No caso da QCD, o bóson de gauge é o glúon, e a auto-interação entre eles fica evidente devido à presença na Lagrangiana (2.1) dos termos trilinear e quadrilinear em A_μ^a .

É também importante mencionar que a Eq. (2.1) é invariante sob as transformações de gauge global e local. Mais especificamente, sob transformações locais os campos de gauge e de quarks transformam-se como [79]

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x), \\ q(x) &\rightarrow U(x)q(x), \\ U(x) &= \exp \left[i\theta^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\theta^a(x)$ são os parâmetros de transformação dependentes do espaço-tempo do grupo de simetria local de cor $SU(3)$.

No caso das transformações globais os campos de quarks transformam-se como

$$q(x) \rightarrow e^{i\alpha} q(x), \quad (2.6)$$

onde α é uma fase global constante do grupo de simetria vetorial $U(1)_V$. Já os campos de gauge transformam-se

$$A_\mu(x) \rightarrow e^{i\alpha} A_\mu(x) e^{-i\alpha} = A_\mu(x). \quad (2.7)$$

Vale destacar que a Eq. (2.1) é a Lagrangiana *clássica* da QCD. A versão quantizada desta Lagrangiana pode ser obtida através do formalismo de integrais de caminho e o método usado por Faddeev-Popov [80]. No processo de quantização, os chamados campos de ghost, representados pela letra “ c ”, permanecem acoplados à teoria. Além disto, também surge um termo onde o parâmetro de fixação de gauge ξ aparece explicitamente. Desta forma a versão quantizada da Lagrangiana da QCD se torna

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}, \quad (2.8)$$

onde definimos que

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2, \quad (2.9)$$

já

$$\mathcal{L}_{\text{quark}} = \sum_k^{n_f} \bar{q}_k [i\gamma^\mu D_\mu - m_k] q_k, \quad (2.10)$$

e por fim

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -\bar{c}^a \delta^{ac} \partial^2 c^c - g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) A_\mu^b c^c. \quad (2.11)$$

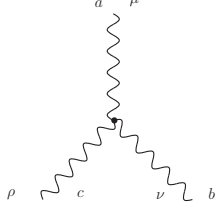
Seguindo os procedimentos padrões de teoria de campos, podemos derivar a partir da Lagrangiana (2.8) as *regras de Feynman*. Vamos começar com o primeiro termo da Eq. (2.9), que é chamado de termo de gauge, responsável por descrever a parte cinética do campo de glúon e suas auto-interações. Deste termo podemos obter os diagramas de Feynman para o propagador do glúon e os vértices de interação de 3-glúons e de 4-glúons representados na Fig. 2.1.

Já da $\mathcal{L}_{\text{quark}}$, dada pela Eq. (2.10), podemos derivar as regras de Feynman para o propagador do quark e o vértice de interação quark-glúon, mostrados na Fig. 2.2.

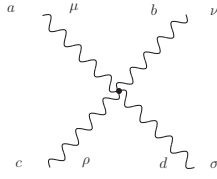
Por último da Eq. (2.11) podemos obter as regras de Feynman para o propagador do campo de ghost e o vértice de interação ghost-glúon, ilustradas na Fig. 2.3. Vale ressaltar que o subíndice 0, em todas as expressões, é para representar os propagadores e vértices



$$\Delta_{0\mu\nu}^{ab}(k) = -i \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (2.12)$$



$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu\nu\rho}^{abc} = & g f^{abc} [g_{\mu\nu}(k - p)_\rho + g_{\nu\rho}(p - q)_\mu \\ & + g_{\rho\nu}(q - k)_\nu], \end{aligned} \quad (2.13)$$

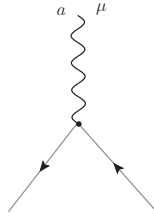


$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} = & -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Figura 2.1: Representação esquemática do propagador do glúon, do vértice de 3-glúons, e do vértice de 4-glúons associados ao termo de campo de gauge \mathcal{L}_{gauge} da Eq. (2.9).



$$S_0^{ab}(p) = \frac{i\delta^{ab}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.15)$$



$$\Gamma_{0\mu}^a = ig\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}. \quad (2.16)$$

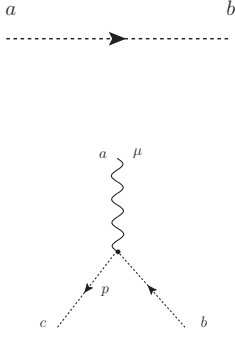
Figura 2.2: Representação esquemática do propagador do quark e vértice quark-glúon associados ao termo \mathcal{L}_{quark} da Eq. (2.10).

em nível de árvore.

2.2 Liberdade assintótica

Uma das características mais emblemáticas da QCD é a *liberdade assintótica*, que nos diz que a magnitude da interação mais forte da natureza torna-se *pequena* à medida que aumentamos a energia.

A derivação matemática deste comportamento da constante de acoplamento foi feita por Gross, Wilczek [9] e Politzer [10] que ganharam o prêmio nobel por esta descoberta



$$D_0^{ab}(p) = \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}, \quad (2.17)$$

$$G_{0\mu}^{abc} = -gf^{abc}p_\mu. \quad (2.18)$$

Figura 2.3: Representação esquemática do propagador do campo de ghost e vértice ghost-glúon associados ao termo \mathcal{L}_{ghost} da Eq. (2.11).

em 2004.

Para explicar a liberdade assintótica, primeiro relembramos que na QED, a força no vácuo entre dois elétrons com cargas elétricas “ e ” é descrita pela lei de Coulomb,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{r^2} \hat{r}. \quad (2.19)$$

Já se este dois elétrons estão imersos em um meio com constante dielétrica $\epsilon > 1$ (blindagem da carga), a força será

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r^2} \hat{r}, \quad (2.20)$$

que pode ser re-expressa na mesma forma que a Eq. (2.19) se introduzirmos a carga efetiva $\tilde{e}_i = e_i/\sqrt{\epsilon}$. Assim, o efeito do meio pode ser interpretado como uma mudança no valor da carga.

Em teoria quântica de campos, o vácuo ao contrário do que se entende comumente, não é um grande vazio. Na verdade o vácuo quântico está cheio de pares de partículas e anti-partículas que estão sendo criadas e destruídas constantemente. Quando um fóton atravessa esse vácuo, ele cria virtualmente pares de elétron-pósitron, que vão polarizando o vácuo. Por causa disto, o módulo da interação entre elétrons no vácuo será

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{e_{eff}^2}{r^2} = \frac{\alpha_{em}(r)}{r^2}, \quad (2.21)$$

onde α_{em} é a constante de estrutura fina efetiva, que é dependente da distância ou do momento transferido $q \sim 1/r$. Quando $r \rightarrow \infty$ ou equivalentemente, $q \rightarrow 0$, a magnitude da interação é $\alpha_{em}(q=0) = 1/137.035$ [5].

A dependência da constante de estrutura fina com a distância (ou momento) é determinada pela evolução da equação do grupo de renormalização que é dada por

$$\mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \beta(\alpha(\mu)), \quad (2.22)$$

onde μ é uma escala de momento. A função β , que aparece no lado direito da Eq. (2.22), pode ser calculada a partir da teoria de perturbação, já que α_{em} é pequeno. Em particular, pode ser mostrado que em ordem de 1-loop $\beta = 2\alpha_{em}^2/3\pi > 0$. Assim, a solução da Eq. (2.22) é da forma

$$\alpha_{em}(\mu) = \frac{\alpha_{em}(\mu_0)}{1 - \frac{\alpha_{em}(\mu_0)}{3\pi} \ln(\mu^2/\mu_0^2)}. \quad (2.23)$$

Já que $\beta > 0$, a magnitude da interação na QED será incrementada com a escala de energia: $\alpha_{em}(\mu^2) > \alpha_{em}(\mu_0^2)$ se $\mu^2 > \mu_0^2$. Também, note que a magnitude da interação entre os elétrons será fraca, quando a distância entre eles for grande. Por esta razão, QED pode ser estudada com o uso da teoria de perturbação.

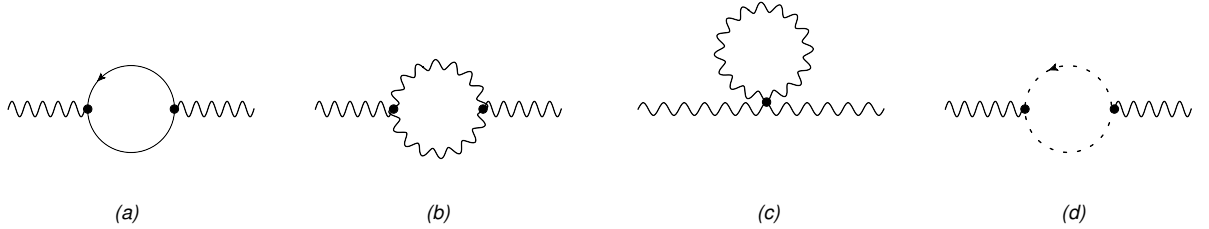


Figura 2.4: A polarização quântica do vácuo que muda efetivamente a magnitude da constante de acoplamento da interação. O diagrama (a) é compartilhado tanto pela QED como pela QCD e é responsável pelo efeito de blindagem. Os diagramas (b) e (c) surgem da interação trilinear e quadrilinear entre os glúons na QCD e têm um efeito de anti-blindagem, o que faz que o acoplamento seja mais “fraco” em distâncias curtas. O diagrama (d) garante a transversalidade dos campos de glúons.

Na QCD, a mesma equação diferencial para a constante de acoplamento forte, $\alpha_s = g^2/4\pi$, é obtida. Porém, a função β nesse caso se torna [5]

$$\beta(\alpha_s) = -\beta_0\alpha_s^2 - \beta_1\alpha_s^3 + \dots \quad (2.24)$$

onde

$$\beta_0 = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{8\pi^2} \left(51 - \frac{19}{3}n_f \right), \quad (2.25)$$

aqui o segundo termo em β_0 representa a contribuição do efeito do par quark-antiquark ilustrado no diagrama (a) da Fig. 2.4. Entretanto, o primeiro termo, 11, vem da contribuição não linear da interação entre glúons apresentada nos diagramas (b) e (c) da Fig. 2.4 (ausente na QED). Desta maneira, à auto interação gluônica tem um efeito de anti-blindagem. Da equação do grupo de renormalização a constante de acoplamento da QCD é

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad (2.26)$$

onde introduzimos uma nova escala de momentos Λ_{QCD} definida como

$$\Lambda_{\text{QCD}}^2 = \mu^2 \exp \left[-\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)\beta_0} \right]. \quad (2.27)$$

A partir da Eq. (2.26) podemos ver claramente a manifestação do fenômeno da liberdade assintótica, pois $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ quando $Q^2 \rightarrow \infty$ desde que $n_f \leq 16$. É importante notar que se tivéssemos na QCD mais de 16 sabores de quarks, a teoria deixaria de ser assintoticamente livre, por causa da troca de sinal que ocorre em β_0 .

Na Fig. 2.5 mostramos o comportamento perturbativo da constante de acoplamento $\alpha_s(Q)$ como função do momento (energia) Q publicado no Particle Data Group [44]. Da Fig. 2.5 podemos observar as diferentes estimativas do valor da constante de acoplamento $\alpha_s(Q)$ extraídas a partir de vários dados experimentais cujos processos são descritos em diferentes ordens de teoria de perturbação. Nos próximos capítulos para evitar notação sobrecarregada vamos escrever α_s sem argumentos.

O parâmetro Λ_{QCD} introduzido na Eq. (2.26) é habitualmente conhecido como a escala da QCD. Observe que quando fazemos $Q^2 = \Lambda_{\text{QCD}}^2$ na Eq. (2.26), temos um polo na constante de acoplamento. Este ponto característico recebe o nome de *polo de Landau*, e ele nos mostra que para valores de $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$, não é adequado o uso de métodos perturbativos para estudar a dinâmica da QCD, porque a constante de acoplamento, que é o parâmetro de perturbação da teoria, deixa de ser pequena. Portanto, para valores de $Q^2 \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}^2$ estamos no regime não perturbativo da QCD e é necessário o uso de ferramentas mais sofisticadas para estudar a dinâmica da QCD para baixas energias. No próximo capítulo introduziremos as ESDs que são uma das ferramentas apropriadas para tratar este regime não perturbativo da QCD.

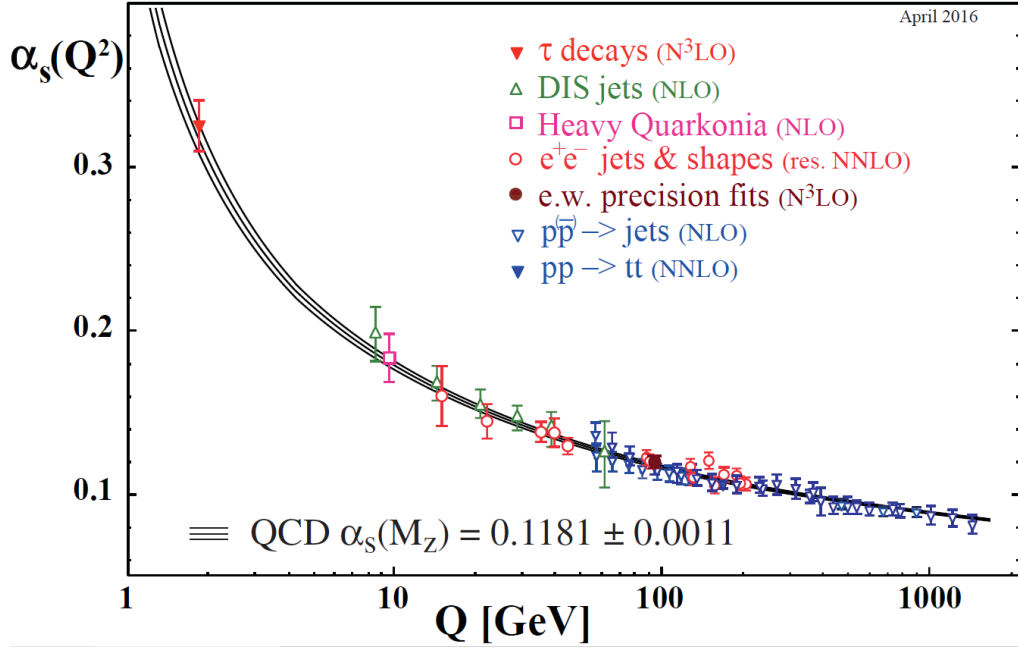


Figura 2.5: Representação gráfica da constante de acoplamento perturbativa $\alpha_s(Q)$ como função da energia comparado com valores de $\alpha_s(Q)$ extraídos de diferentes processos [44].

2.3 Simetria quiral da QCD

Como vimos na Sec. 2.1, a Lagrangiana da QCD possui simetria de cor e permanece invariante por transformações locais do grupo $SU(3)$. Além da simetria de cor, a Lagrangiana da QCD possui uma outra simetria aproximada: a simetria quiral.

A simetria quiral é uma simetria da QCD que se manifesta no limite de massa nula dos quarks. Como as massas de corrente dos quarks up e down são muito pequenas, uma boa aproximação é considerá-las nulas. Desta forma, a simetria quiral pode ser considerada uma simetria aproximada da QCD. Nesta seção introduzimos a simetria quiral e apresentamos a quebra da simetria quiral como o mecanismo responsável por gerar a massa dos quarks constituintes.

2.3.1 Definição da simetria quiral

Para definir a quiralidade de um campo, primeiramente vamos supor que temos um quark com massa nula. No que diz respeito à orientação do seu spin, podemos dizer que o spin deste quark pode estar: (i) orientado no mesmo sentido do movimento ou (ii) no sentido oposto. No primeiro caso, dizemos que o quark é de mão direita e tem quiralidade positiva, já no segundo, o quark será de mão esquerda e terá quiralidade negativa. Como

sabido, partículas sem massa viajam à velocidade da luz c , deste modo a quiralidade dos campos de quarks serão independentes do referencial de Lorentz.

A quiralidade de um campo pode ser selecionada através matriz de Dirac γ_5 . Então podemos então definir o operador de projeção

$$P_{\pm} = \frac{(1 \pm \gamma_5)}{2}, \quad (2.28)$$

para projetar os campos de quarks de mão esquerda e direita

$$\begin{aligned} q_R &= P_+ q, & \bar{q}_R &= \bar{q} P_-, \\ q_L &= P_- q, & \bar{q}_L &= \bar{q} P_+, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde o campo de quark pode ser escrito como a combinação linear dos campos quirais

$$q = \begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde q_R e q_L são as componentes de mão direita e esquerda do campo de Dirac, respectivamente.

Considerando que a massa dos quarks é nula e utilizando na Lagrangiana (2.1) a decomposição do campo de quark em termos dos campos quirais dada pela Eq. (2.30), obtemos que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + i\bar{q}_L \gamma^\mu D_\mu q_L + i\bar{q}_R \gamma^\mu D_\mu q_R, \quad (2.31)$$

onde usamos que $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$, $(\gamma_5)^2 = \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} é a matriz identidade 4×4 , e

$$\bar{q} \gamma^\mu q = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L + \bar{q}_R \gamma^\mu q_R. \quad (2.32)$$

Fica evidente a partir da Eq. (2.31) que os campos quirais q_L e q_R não se acoplam entre si. Portanto, a Lagrangiana da Eq. (2.31) não somente permanece invariante sob a transformação de fase global do tipo dado pela Eq. (2.6), que pertence ao grupo vetorial $U(1)_V$, como também é invariante sob transformações quirais de fase global

$$q(x) \longrightarrow e^{i\beta\gamma_5} q(x); \quad (2.33)$$

que pertencem ao grupo axial $U(1)_A$, com β sendo uma constante de fase real.

Como os autovalores da matriz γ_5 sobre os campos quirais são dados como

$$\gamma_5 q_L = -q_L, \quad \gamma_5 q_R = q_R, \quad (2.34)$$

as transformações quirais dos campos são:

$$q_L(x) \longrightarrow e^{i\beta\gamma_5} q_L(x) = e^{-i\beta} q_L, \quad q_R(x) \longrightarrow e^{i\beta\gamma_5} q_R(x) = e^{i\beta} q_R, \quad (2.35)$$

onde, devido à mudança no sinal na fase, os campos transformam-se com quiralidade oposta.

Entretanto, se os campos de quarks são massivos, temos o seguinte termo de massa aparecendo na Lagrangiana (2.1)

$$m\bar{q}q = m(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L), \quad (2.36)$$

que misturam os termos de mão direita e esquerda. Portanto os termos de massa acoplam os campos quirais, e não são invariantes sob as transformações descritas pelas Eqs. (2.35). Deste modo, a Lagrangiana com o termo de massa não é mais invariante sob as transformações quirais, e neste caso, dizemos que a simetria quiral é explicitamente quebrada.

2.3.2 A geração de massa na QCD

Prótons e nêutrons formam grande parte da matéria visível que conhecemos no Universo. Entender uma propriedade fundamental como a massa destas partículas é obviamente um ponto chave para compreender o mundo que nos rodeia. Mas, para desvendar esta propriedade crucial da matéria, temos que estudar a dinâmica do setor IR da QCD e o mecanismo que é responsável por gerar a massa para as partículas.

O próton é o único hádron estável sob as interações fortes e fraca, e tem um tempo de meia-vida estimado na ordem de 10^{33} anos [44]. Ele tem spin $1/2$, carga elétrica positiva “ e ” e uma massa de repouso $M_p = 938.3$ MeV. Por outro lado, o nêutron livre não é estável, pois decai por decaimento beta. O nêutron tem spin $1/2$, carga elétrica nula e uma massa de repouso $M_n = 939.6$ MeV. A diferença de massa entre o próton e o nêutron é muito pequena, $\Delta M = M_n - M_p \sim 1.3$ MeV, onde se evidencia que é uma boa aproximação tratá-los como dois estados de uma partícula só, com número de isospin diferentes, que

chamamos de núcleon [81].

Os prótons e nêutrons são estados ligados formados por três quarks. Os prótons são formados por dois quarks u e um quark d e os nêutrons formados por dois quarks d e um quark u . Portanto, com estas combinações de quarks para o próton (uud) e nêutron (ddu) somos capazes de reproduzir os seus números quânticos de spin, bariônico, carga elétrica e carga de cor.

Vale destacar que existe um problema com respeito às massas destes estados ligados e seus constituintes. Para evidenciar isto, lembramos que se somarmos, de uma forma ingênua, a massa de corrente dos quarks constituintes do próton (uud), que são de uns poucos MeV ($m_u = 1.7 - 3.1$ MeV e $m_d = 4.1 - 5.7$ MeV) [44], chegaríamos a uma estimativa para a massa de repouso do próton da ordem de 12 MeV, o que corresponderia a somente 2% da massa real do próton.

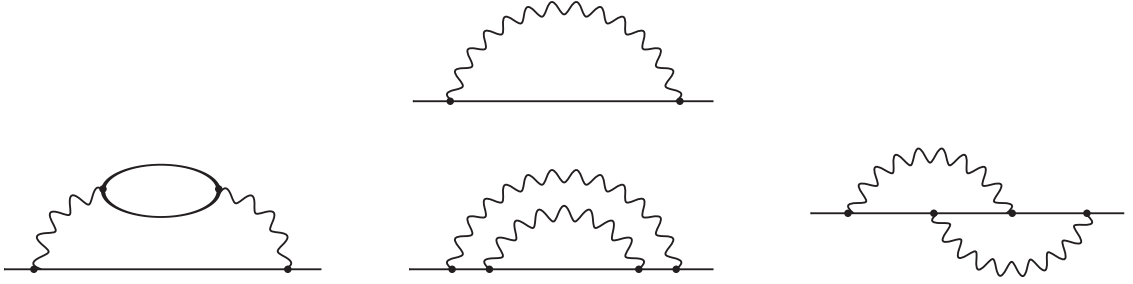


Figura 2.6: Correções para a massa do quark em um e dois loops.

Poderíamos nos questionar se correções perturbativas, em ordens maiores, seriam capazes de dar conta desta discrepância. Na Fig. 2.6 mostramos os diagramas que contribuem para a correção de massa do quark em um e dois loops. Calculando a função de massa em teoria de perturbação a partir dos diagramas mostrados na Fig. 2.6 obtemos, em segunda ordem, que a massa é dada por [82]

$$\mathcal{M}(p) = m \left[1 + c_1 \alpha_s \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + c_2 \alpha_s^2 \ln^2 \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \dots \right], \quad (2.37)$$

onde α_s é a constante de acoplamento definida em alguma escala de momento μ na região perturbativa. Note que devido à liberdade assintótica, o valor de α_s será pequeno. Portanto, estas correções serão muito pequenas e não serão capazes de “aumentar” a massa do quark u de $1.7 - 3.1$ MeV para $300 - 350$ MeV. Mais importante ainda é notar que para cada ordem em teoria de perturbação, a massa do quark corrigida é proporcional a

massa de corrente m , independentemente do momento. Ou seja, se a massa de corrente m é nula (limite quiral), a massa $\mathcal{M}(p)$ também será. Isto nos diz que para gerar uma massa de constituinte da ordem de 300 – 350 MeV nós precisamos estudar o problema além da abordagem da teoria de perturbação, ou seja através de técnicas não perturbativas, pois a vasta maioria da massa do próton deve ser gerada exclusivamente pelas propriedades dinâmicas da QCD. Como veremos a seguir o mecanismo responsável por gerar toda esta massa é a QDSQ.

2.3.3 Quebra da simetria quiral

Sabemos que o mecanismo de Higgs é responsável por gerar a massa para todas partículas elementares [45]. Entretanto é importante frisar que o bóson de Higgs gera somente as massas de corrente, que são aquelas que aparecem na Lagrangiana. Como mencionado na seção anterior, somente 2% da massa visível é devido à massa de corrente dos quarks, os outros 98% restantes são gerados pela dinâmica IR da interação forte.

A QDSQ é um fenômeno tipicamente não perturbativo e seu principal sinal é o surgimento de uma massa dinâmica (massa que depende do momento) para os quarks. Por meio da QDSQ, pode-se explicar a origem dinâmica das massas dos hádrons, além disso, também pode-se entender o porquê do pión possuir a menor massa dentre todos os mésons [18]. O motivo está relacionado ao fato do pión ser o bóson de Goldstone da QCD. Sabemos que o teorema de Goldstone prediz à aparição de bósons sem massa quando uma simetria contínua é quebrada [79, 80]. Se tivéssemos um mundo onde os quarks u e d tivessem massa de corrente de fato nula, a simetria quiral seria uma simetria exata da Lagrangiana e o pión seria o bóson de Goldstone sem massa da QCD. Entretanto, na natureza os quarks u e d possuem uma massa de corrente, que é pequena (mas não nula), fato esse que faz com que a simetria quiral seja somente uma simetria aproximada da Lagrangiana. Desse modo, o pión é o bóson da QCD e sua pequena massa de ~ 140 MeV está relacionada com o fato de que a simetria quiral não é uma simetria exata e sim aproximada.

Vale destacar que o fenômeno da geração de uma massa dinâmica para os quarks por meio do mecanismo da QDSQ é mais pronunciado em quarks leves. Para o caso de quarks pesados, como por exemplo o quark t , a massa de corrente deste quark predomina sobre a massa dinâmica [19, 83].

3

As Equações de Schwinger-Dyson

Neste capítulo apresentaremos uma introdução a uma das principais ferramentas não perturbativas para descrever o setor IR da QCD: as ESDs. Primeiramente faremos a derivação formal da ESD para o propagador do quark a partir do gerador funcional. Em seguida, discutiremos como esta equação pode ser utilizada para estudo da QDSQ e sua subsequente geração de massa para os quarks. Também mostraremos os detalhes sobre o processo de renormalização desta equação. Por fim, derivaremos um sistema de equações acopladas utilizando duas versões aproximadas para o vértice quark-glúon.

3.1 Características gerais das ESDs

Historicamente as ESDs foram derivadas pela primeira vez nos trabalhos de F. J. Dyson [84] e J. S. Schwinger [85]. Podemos dizer que as ESDs são as equações de movimento das funções de Green e, sua função é descrever a dinâmica de um campo, ou seja, através dela podemos saber como os campos de uma dada teoria se propagam e interagem. Portanto, as ESDs são nada mais do que as equações de Euler-Lagrange de uma teoria de campos.

Os blocos principais das ESDs são as funções de Green (propagadores, vértices, etc.) da teoria, que descrevem como um(a) campo/partícula propaga-se e interage. Os propagadores são funções de dois pontos e os vértices são funções de n -pontos onde $n > 2$ ¹.

As ESDs acoplam todas as funções de Green de n -pontos da teoria. Se fôssemos capazes de resolver este sistema infinito de equações integrais não lineares, teríamos a solução completa da teoria. Portanto as ESDs podem ser usadas tanto para descrever as regiões perturbativas como as não perturbativas. Embora as ESDs exibam seu verdadeiro poder

¹As funções de Green também são chamadas funções de correlação ou funções de n -pontos.

quando são aplicadas em teorias com acoplamento forte como a QCD, onde métodos não perturbativos são necessários para explicar o confinamento e a QDSQ, que são fenômenos intrinsecamente não perturbativos. As principais vantagens das ESDs são as seguintes:

- Elas são um método contínuo, portanto diferentes escalas de energia são acessíveis com facilidade. Assim as regiões IR e UV podem ser estudadas de uma forma simultânea.
- São equações exatas.
- O limite quiral, obtido quando a massa de corrente é nula, pode ser estudado sem complicações adicionais.

Estas características tornam as ESDs uma das melhores ferramentas para estudar a QCD. Porém, existe uma grande dificuldade: como foi mencionado anteriormente, as ESDs formam uma torre infinita de equações integrais acopladas. Portanto é imprescindível que um esquema de truncamento auto-consistente seja implementado neste sistema de equações. Atualmente, conhecemos vários exemplos de esquemas de truncamento que levam a resultados fisicamente bem sucedidos [18, 19, 82].

3.2 ESD para a QED

Antes de nos enveredar na derivação formal da ESD aplicada à QCD, vamos apresentar uma explicação mais didática, baseada na expansão diagramática da ESD dentro do contexto da QED, que possui uma estrutura muito mais simples que a QCD [82].

Primeiramente vamos considerar a ESD para o propagador do elétron. O primeiro passo é interpretar esta equação como sendo a soma de todas as contribuições para o propagador do elétron. Estas contribuições englobam os diferentes diagramas que aparecem em todas ordens em teoria de perturbação. No lado direito da Fig. 3.1 representamos alguns destes diagramas que contribuem para esta expansão. Note que no lado esquerdo, representamos o propagador completo do elétron com um círculo em branco. Este círculo indica que todas as ordens da expansão perturbativa estão contidas neste objeto, portanto ele é chamado de *propagador completo*, pois está *vestido* por todas as correções que esta quantidade possa ter. Obviamente, a expansão que aparece do lado direito da Fig. 3.1 contém um número infinito de diagramas de Feynman que precisam ser somados. Para efetuar esta soma de uma forma mais fácil, podemos separar estes diagramas da Fig. 3.1

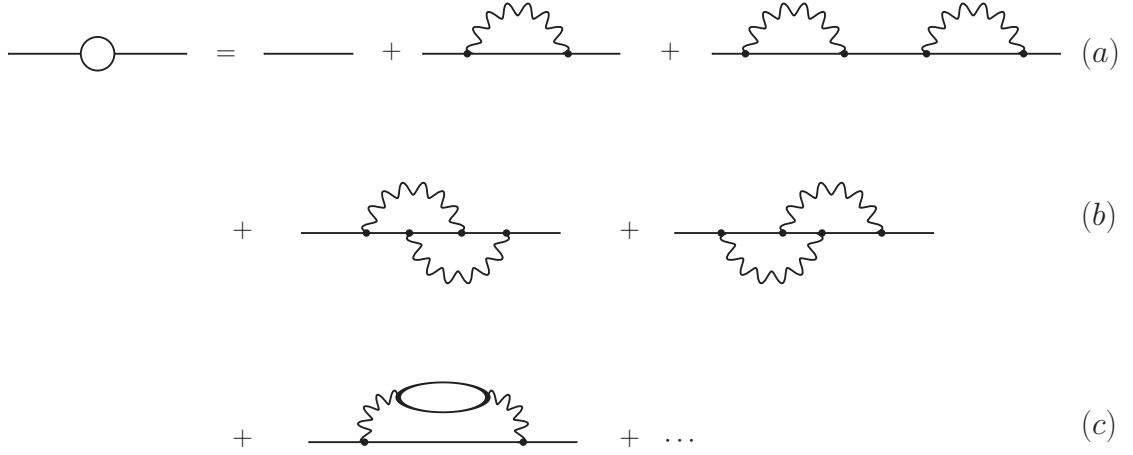


Figura 3.1: Diagramas de Feynman que devem ser somados para determinar o comportamento do propagador do quark perturbativamente. Entre estes diagramas temos (a) as correções ao propagador do elétron, (b) as correções ao vértice elétron-fóton e (c) as correções do propagador do fóton.

em três categorias: (i) diagramas que representam as correções radiativas possíveis para o propagador do elétron [representados na linha (a) da Fig. 3.1]; (ii) diagramas que representam as correções ao vértice elétron-fóton [linha (b) da Fig. 3.1] e (iii) os diagramas representando as correções radiativas do propagador do fóton [linha (c) da Fig. 3.1]. É conveniente definir uma quantidade que é usualmente chamada de *auto-energia*, $\Sigma(p)$, que está representada na Fig. 3.2 e é chamado de diagrama one-particle irreducible (1PI)².

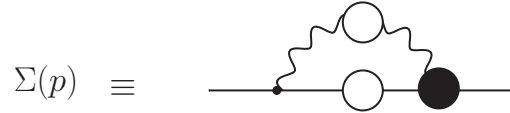


Figura 3.2: Auto-energia do propagador do elétron, $\Sigma(p)$. Os círculos em branco e preto representam os propagadores e vértices completos, respectivamente. Estes propagadores e vértices “vestidos” contêm as contribuições em todas as ordens em teoria de perturbação.

Utilizando a definição de auto-energia, $\Sigma(p)$, representada na Fig. 3.2, é fácil ver que o propagador completo do elétron, $S(p)$ ilustrado na Fig. 3.3 pode ser escrito como a soma

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots \quad (3.1)$$

onde $S_0(p)$ é o propagador do elétron em nível de árvore, que possui estrutura similar ao

²Diagramas 1PI são diagramas que não se separam em duas partes se nós cortarmos uma linha interna. Os diagramas das linhas (b) e (c) da Fig. 3.1 são 1PI, enquanto que o último diagrama da linha (a) não é 1PI.

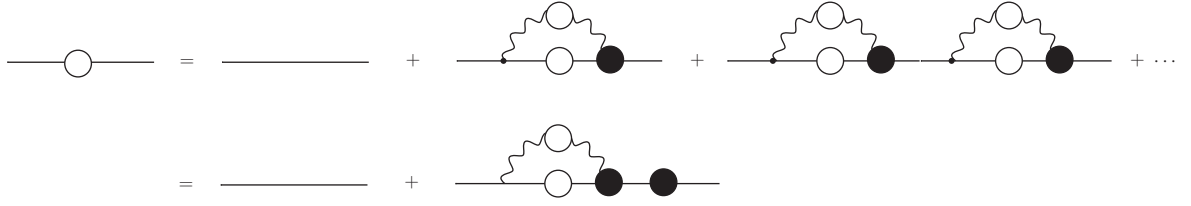


Figura 3.3: O propagador completo do elétron dado pela soma de todas as auto-energias.

propagador do quark dado pela Eq. (2.15), exceto pela ausência dos índices de cor.

Note que a Eq. (3.1) nada mais é do que uma série geométrica, que pode ser somada e expressa por

$$S(p) = \frac{S_0(p)}{1 - \Sigma(p)S_0(p)}, \quad (3.2)$$

ou equivalentemente

$$S(p) = S_0(p) + \frac{S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)}{1 - \Sigma(p)S_0(p)}. \quad (3.3)$$

Substituindo a Eq. (3.2) na (3.3) obtemos

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S(p), \quad (3.4)$$

que está representada diagramaticamente na Fig. 3.3

Se nós multiplicarmos a Eq. (3.4) por $S_0^{-1}(p)$ pela esquerda e $S^{-1}(p)$ pela direita, nós chegamos que o inverso do propagador do elétron é dado por

$$S(p)^{-1} = S_0^{-1}(p) - \Sigma(p). \quad (3.5)$$

A Eq. (3.5) é a ESD do propagador do elétron que está representada na linha (a) da Fig. 3.4. Note que a ESD do elétron depende do propagador completo do fóton e o vértice completo elétron-fóton, que são funções de Green de dois e três pontos, respectivamente. Cada uma destas funções satisfaz sua própria ESD que pode ser derivada de um forma análoga. Por completeza, mostramos na Fig. 3.4, a ESD para o fóton (linha b) e a ESD para o vértice elétron-fóton (linha c). Fica evidente que as equações da Fig. 3.4 formam um sistema de equações integrais acopladas contendo infinitas equações. Note a presença do kernel de espalhamento de quatro férmions na ESD para o vértice elétron-fóton. Este kernel de espalhamento é uma função de Green de 4 pontos, que por sua vez também satisfaz sua própria ESD que contém funções de Green de maior ordem e, assim sucessivamente.

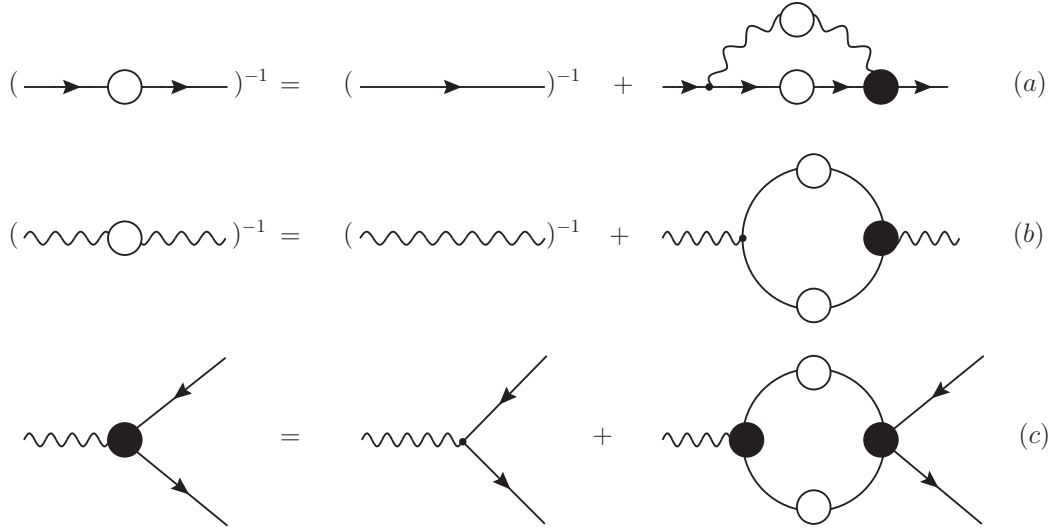


Figura 3.4: ESD da QED. (a) ESD do propagador do elétron, (b) ESD do propagador do fóton e (c) ESD do vértice elétron-fóton.

Após apresentar esta versão, mais intuitiva, da derivação da ESD para a QED através da re-soma de diagramas de Feynman, estamos prontos para desenvolver agora a derivação formal da ESD para o quark através do gerador funcional da QCD.

3.3 Derivação da ESD do quark: método funcional

Vamos começar com a derivação da ESD do propagador do quark. Esta equação é uma das menos complexas de ser derivada através do gerador funcional da QCD ³, pois apresenta uma estrutura tensorial de Lorentz mais simples em comparação com as ESDs do propagador do glúon e a do vértice quark-glúon. Durante esta seção, toda a derivação da ESD para o propagador do quark será feita no espaço de Minkowski.

O primeiro passo é definir o gerador funcional como

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J] := \int \mathcal{D}_\mu e^{iS_{\text{QCD}} + iS_{\text{fontes}}}, \quad (3.6)$$

onde $\mathcal{D}_\mu = \{\mathcal{D}_q \mathcal{D}_{\bar{q}} \mathcal{D}_c \mathcal{D}_{\bar{c}} \mathcal{D}_A\}$ é a medida funcional de integração sobre todos os campos dada por

$$\mathcal{D}_\mu = \prod_{x \in R^4} \prod_{K=1}^{N_f} \prod_{\rho=1}^{N_c} \mathcal{D}\bar{q}_{k,\rho}(x) \mathcal{D}q_{k,\rho}(x) \prod_{a=1}^{N_c^2-1} \mathcal{D}\bar{c}^a(x) c^a(x) \prod_{\mu}^{\mu} \mathcal{D}A_\mu^a(x). \quad (3.7)$$

³Somente a equação para o propagador do ghost é mais simples de ser derivada.

Além disso, S_{QCD} é a ação funcional da QCD dada por

$$S_{\text{QCD}}[q, \bar{q}, c, \bar{c}, A] = \int d^4x \left\{ \sum_k^{N_f} \bar{q}_k (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_k - igt^a \gamma^\mu A_\mu^a) q_k - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right\} \\ - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a \delta^{ac} \partial^2 c^c + \bar{c}^a g f^{abc} A_\mu^b c^c \right\},$$

e as fontes $S_{\text{fontes}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{fontes}}$

$$\mathcal{L}_{\text{fontes}} = \bar{\eta} q + \bar{q} \eta + \bar{w}^a c^a + \bar{c}^a w^a + J^{a\mu} A_\mu^a, \quad (3.8)$$

onde $\bar{\eta}, \eta, \bar{w}, w, J_\mu^a$ são as fontes para os campos de quarks, antiquarks, ghost, antighost e glúons, respectivamente.

O propagador do quark no espaço de posições é dado pelo valor esperado no vácuo dos campos de quark-antiquark ordenados temporalmente (T)

$$S(x, y) = \langle 0 | T \{ q(x) \bar{q}(y) \} | 0 \rangle. \quad (3.9)$$

Utilizando o gerador funcional dado pela Eq. (3.6) o propagador do quark pode ser definido como

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \langle 0 | T \{ q(x) \bar{q}(y) \} | 0 \rangle, \\ &= \frac{\int \mathcal{D}_\mu e^{iS_{\text{QCD}} + iS_{\text{fontes}}} q(x) \bar{q}(y)}{\int \mathcal{D}_\mu e^{iS_{\text{QCD}} + iS_{\text{fontes}}}} \Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=w=\bar{w}=J=0}, \\ &= \frac{\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)} \frac{i\delta}{\delta\eta(y)} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J]}{\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J]} \Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=w=\bar{w}=J=0}, \\ &= \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)} \frac{i\delta}{\delta\eta(y)} \ln \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J] \Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=w=\bar{w}=J=0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Similarmente para o propagador do glúon temos

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x, y) &= \langle 0 | T \{ A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \} | 0 \rangle, \\ &= \frac{\delta}{i\delta J_\mu^a(x)} \frac{\delta}{i\delta J_\nu^b(y)} \ln \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J] \Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=w=\bar{w}=J=0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para a derivação da ESD do quark precisamos introduzir um operador diferencial

adequado que atue sobre o gerador funcional. Para construir este operador, lembramos que devido ao princípio da mínima ação, o gerador funcional é insensível a pequenas variações dos campos. Em particular, fazendo a sua variação com respeito ao campo $\bar{q}(x)$ temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J]}{\delta \bar{q}(x)} = \int \mathcal{D}_\mu \frac{\delta}{\delta \bar{q}(x)} e^{iS_{\text{QCD}} + iS_{\text{fontes}}}, \\
&= \int \mathcal{D}_\mu \left(i \frac{\delta S}{\delta \bar{q}(x)} [q, \bar{q}, c, \bar{c}, A] + i\eta(x) \right) e^{iS_{\text{QCD}} + iS_{\text{fontes}}}, \\
&= \left(i \frac{\delta S}{\delta \bar{q}(x)} \left[\frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{i\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{w}}, \frac{i\delta}{\delta w}, \frac{\delta}{i\delta J} \right] + i\eta(x) \right) \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J]. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Note que definimos dentro dos parênteses que aparecem na última linha um operador diferencial funcional que atua sobre o gerador funcional \mathcal{Z} . Neste operador, a dependência de S_{QCD} nos campos são substituídos por suas derivadas funcionais com respeito a suas respectivas fontes. Assim

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{q}(x)} [q, \bar{q}, c, \bar{c}, A] = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m - i g t^a \gamma^\mu A_\mu^a) q(x), \quad (3.13)$$

se torna

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{q}(x)} \left[\frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{i\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{w}}, \frac{i\delta}{\delta w}, \frac{\delta}{i\delta J} \right] = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - i g t^a \gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J_\mu^a(x)} \right) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)}. \quad (3.14)$$

Agora aplicando na Eq. (3.12) mais uma derivada funcional com respeito à fonte $\eta(y)$, obtemos

$$0 = \left(\frac{\delta S}{\delta \bar{q}(x)} \left[\frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{i\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{w}}, \frac{i\delta}{\delta w}, \frac{\delta}{i\delta J} \right] \frac{i\delta}{\delta \eta(y)} + i\delta(x-y) \right) \mathcal{Z}, \quad (3.15)$$

onde na expressão acima desprezamos o termo $\eta(x) \frac{\delta}{\delta \eta(y)}$, já que no limite $\eta(x) \rightarrow 0$ ele será nulo.

Dividindo a Eq. (3.15) por \mathcal{Z} chegamos à

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\delta S}{\delta \bar{q}(x)} \left[\frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, \frac{i\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{w}}, \frac{i\delta}{\delta w}, \frac{\delta}{i\delta J} \right] \frac{i\delta}{\delta \eta(y)} \right) \ln \mathcal{Z} + i\delta(x-y), \\
&= \left[\left(i\partial_\mu - m - i g t^a \gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J_\mu^a(x)} \right) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} \frac{i\delta}{\delta \eta(y)} \right] \ln \mathcal{Z} + i\delta(x-y), \\
&= (i\partial_\mu - m) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} \frac{i\delta}{\delta \eta(y)} \ln \mathcal{Z} - i g t^a \gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J_\mu^a(x)} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}(x)} \frac{i\delta}{\delta \eta(y)} \ln \mathcal{Z} + i\delta(x-y), \quad (3.16)
\end{aligned}$$

onde na expressão acima usamos o operador definido na Eq. (3.14).

Analogamente à definição dada na Eq. (3.10), a função $\delta^3 \ln \mathcal{Z} / \delta J_\mu \delta \bar{\eta} \delta \eta$, define uma função de Green de três pontos formada pelos campos de glúon, quark e antiquark. Esta função gera diagramas de Feynman conectados. Portanto, esta função pode ser reescrita em termos de diagramas 1PI. Para isto, definiremos o gerador funcional de gráficos conectados como

$$W[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J] = -i \ln \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J]. \quad (3.17)$$

Utilizando a Eq. (3.17) podemos reescrever a Eq. (3.16) como

$$\begin{aligned} 0 &= (i\cancel{\partial} - m) \frac{i\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} - i g t^a \gamma_\mu \frac{\delta^3 W}{\delta J_\mu^a(x) \delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} + i\delta(x - y), \\ &= (i\cancel{\partial} - m) \frac{i\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} - i g t^a \gamma_\mu \int d^4 v \int d^4 w \delta(x - v) \delta(x - w) \frac{\delta^3 W}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(y)} + i\delta(x - y), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde efetuamos a seguinte mudança de variável $x \rightarrow v$ e $x \rightarrow w$, para facilitar a manipulação da equação.

A transformada funcional de Legendre é definida como

$$\Gamma[q, \bar{q}, c, \bar{c}, A] = -W[\eta, \bar{\eta}, w, \bar{w}, J] - \int d^4 x [\bar{\eta} q + \bar{q} \eta + \bar{w} c + \bar{c} w + J^\mu A_\mu]. \quad (3.19)$$

O funcional $\Gamma[q, \bar{q}, c, \bar{c}, A]$ é conhecido como ação efetiva e, de sua definição temos as seguintes identidades,

$$\delta(w - u) = \frac{\delta \bar{\eta}(u)}{\delta \bar{\eta}(w)} = \int d^4 s \frac{\delta \bar{\eta}(u)}{\delta \bar{q}(s)} \frac{\delta \bar{q}(s)}{\delta \bar{\eta}(w)} = \int d^4 s \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{q}(s) \delta q(u)} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)}, \quad (3.20)$$

$$\delta(s - y) = \frac{\delta \bar{q}(y)}{\delta \bar{q}(s)} = \int d^4 u \frac{\delta \bar{q}(y)}{\delta \bar{\eta}(u)} \frac{\delta \bar{\eta}(u)}{\delta \bar{q}(s)} = \int d^4 u \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(u) \delta \eta(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{q}(s) \delta q(u)}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} = \int d^4 t \frac{\delta A_\nu^b(t)}{\delta J_\mu^a(v)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(t)} = - \int d^4 t \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(v) \delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(t)}, \quad (3.22)$$

onde foi utilizada a regra da cadeia.

Usando as Eqs. (3.20) e (3.22), a regra do produto gera uma equação funcional que

relaciona a função de três pontos dada pela Eq. (3.18) com diagramas IP1. Assim

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} [\delta(w-u)], \\
&= \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} \int d^4s \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{q}(s) \delta q(u)} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)}, \\
&= - \int d^4s \int d^4t \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(v) \delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu^b(t) \delta \bar{q}(s) \delta q(u)} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \\
&+ \int d^4s \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{q}(s) \delta q(u)} \frac{\delta^3 W}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Passando o segundo termo da equação acima para a esquerda e multiplicando pela esquerda por $\delta^2 W / \delta \bar{\eta}(u) \delta \eta(y)$, integrando em u e usando a Eq. (3.21) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^3 W}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(y)} = \\
&\int d^4s \int d^4t \int d^4u \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(u) \delta \eta(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(v) \delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu^b(t) \delta \bar{q}(s) \delta q(u)} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Com ajuda da Eq. (3.17), os propagadores do quark (3.10) e do glúon (3.11) são escritos como

$$\begin{aligned}
S(x-y) &= i \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)}, \\
\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-y) &= -i \frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y)}, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

onde as fontes são iguais a zero. Então da Eq. (3.24), podemos identificar o vértice quark-glúon como sendo

$$\Gamma_\nu^b(t, s, u) = i \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu^b(t) \delta \bar{q}(s) \delta q(u)}. \tag{3.26}$$

Utilizando as Eq. (3.24), (3.25) e (3.26) na Eq. (3.18) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \delta^4(x-y) + [S_0(x-y)]^{-1} S(x-y) \\
&+ g t^a \gamma^\mu \int d^4s \int d^4t \int d^4u S(u-y) \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-t) \Gamma^{\nu b}(t, s, u) S(x-s), \tag{3.27}
\end{aligned}$$

onde o inverso do propagador do quark em nível de árvore no espaço de coordenadas é $S_0^{-1}(x-y) = -i(i\not{p} - m)$.

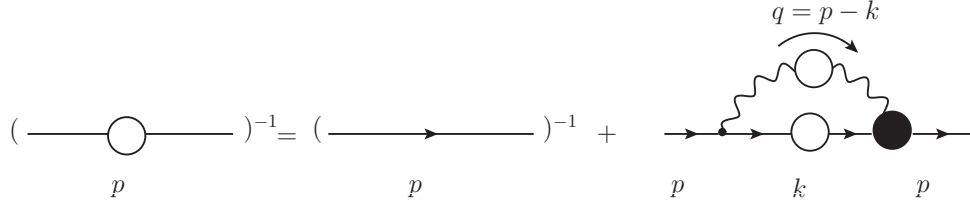


Figura 3.5: Representação diagramática da ESD para o propagador do quark utilizando a convenção de momentos fixada pela Eq. (3.28).

Multiplicando a Eq. (3.27) pelo inverso do propagador do quark completo $S(x - y)$ e fazendo a transformada de Fourier para o espaço de momentos obtemos

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m - C_F g^2 \int_k \Delta_{\mu\nu}(q) \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(q, k, -p). \quad (3.28)$$

A equação acima é a ESD do propagador do quark não renormalizada e está representada na Fig. 3.5. Note que na Eq. (3.28) fizemos $q = p - k$, $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(q) = \delta^{ab} \Delta_{\mu\nu}(q)$, $\Gamma_\nu^b(q, k, -p) = g t^b \Gamma_\nu(q, k, -p)$ e $C_F = \delta^{ab} t^a t^b = 4/3$ que é a constante de Casimir na representação fundamental dos quarks e $\int_k = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$.

3.4 ESD para o propagador do quark

Para prosseguir com a análise da ESD do quark dada pela Eq. (3.28), devemos adotar um esquema de truncamento auto-consistente e, para isto, devemos ter informações precisas sobre os comportamento não perturbativo dos seus dois principais ingredientes: (i) o propagador do glúon e (ii) o vértice quark-glúon, ilustrados na Fig 3.5. Como já foi discutido, tanto o propagador do glúon e o vértice quark-glúon satisfazem suas próprias ESDs e estas, por sua vez, dependem das ESDs dos propagadores do quark, ghost, vértices de três e quatro glúons, entre outras funções de Green de n-pontos. Obter uma solução completa deste sistema de equações em toda sua glória é uma tarefa impossível. O procedimento usualmente adotado é truncar o sistema usando modelos para algumas destas funções de Green.

No caso do propagador do glúon grandes avanços no entendimento da dinâmica IR já foram alcançados com a ajuda da QCD na rede, ESD [23, 30, 32, 86–88], métodos funcionais [89–92] e o método de Gribov-Zwanziger [93–95].

Mais especificamente, em um gauge linear covariante, o propagador completo do glúon

é dado por

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = -i \left[P_{\mu\nu}(q) \Delta(q) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right], \quad (3.29)$$

onde $P_{\mu\nu}(q)$ é o chamado projetor transverso definido como

$$P_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad (3.30)$$

e $\Delta^{-1}(q) = q^2[1 + \Pi(q)]$ é uma função escalar, que é obtida através do cálculo da polarização do vácuo $\Pi(q)$ em todas as ordens.

Atualmente o comportamento IR de $\Delta(q)$, no gauge de Landau ($\xi = 0$), é bem estabelecido tanto pela QCD na rede [86, 96, 97] como pelos métodos contínuos [23, 88, 93, 98]. Particularmente, sabemos que o propagador do glúon é finito no IR devido à presença de uma massa dinâmica que é gerada por efeitos puramente não perturbativos. Esta massa é uma função que decresce monotonicamente com o momento, zerando no UV.

Já o comportamento IR do vértice quark-glúon, $\Gamma^\nu(q, k, -p)$, que será o foco central desta tese, foi menos explorado na literatura. Mais especificamente, seu comportamento somente foi explorado em algumas configurações cinemáticas [39, 51, 63, 64, 68, 77, 99]. Por este motivo, o procedimento usual é utilizar um *Ansatz* para esta quantidade.

Para a discussão que segue é conveniente introduzir o propagador completo do ghost dado por

$$D(q) = \frac{iF(q)}{q^2}. \quad (3.31)$$

onde $F(q)$ é a chamada função de vestimento ou “dressing” do ghost que também é finita devido a massa do glúon [23, 32]

Além disto, é uma prática comum decompor o inverso do propagador completo do quark $S^{-1}(p)$ em um parte proporcional a componente vetorial de Dirac \not{p} e outra proporcional à matriz identidade \mathbb{I} , ou seja

$$S^{-1}(p) = A(p)\not{p} - B(p)\mathbb{I}, \quad (3.32)$$

onde $A(p)$ é denominado o inverso da função de onda do quark e $B(p)$ é uma função escalar. Como o pólo de um propagador define a massa da partícula, podemos definir a

massa dinâmica do quark como sendo a razão

$$\mathcal{M}(p) = B(p)/A(p). \quad (3.33)$$

Antes de começarmos com a derivação do sistema de equações que acoplam as funções $A(p)$ e $B(p)$ e portanto definem o comportamento da massa dinâmica $\mathcal{M}(p)$, é importante discutir a renormalização da Eq. (3.28). Para isto, vamos introduzir as relações

$$\begin{aligned} S_R(p; \mu) &= Z_F^{-1}(\mu) S(p), \\ \Delta_R(q; \mu) &= Z_A^{-1}(\mu) \Delta(q), \\ F_R(q; \mu) &= Z_c^{-1}(\mu) F(q), \\ \Gamma_R^\nu(q, k, -p; \mu) &= Z_1(\mu) \Gamma^\nu(q, k, -p), \\ g_R(\mu) &= Z_g^{-1}(\mu) g = Z_1^{-1} Z_F Z_A^{1/2} g, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde as constantes Z_F, Z_c, Z_A, Z_1 e Z_g são as constantes de renormalização dos campos de quark, ghost, glúon, vértice e da constante de acoplamento, respectivamente. O subíndice R indica as quantidades renormalizadas e μ é a escala de renormalização. Substituindo as relações dadas pelas Eq. (3.34) na Eq. (3.28) obtemos a ESD do propagador do quark renormalizada como

$$S^{-1}(p) = Z_F(\not{p} - m) - Z_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \gamma_\mu S(k) \Gamma_\nu(q, k, -p) \Delta^{\mu\nu}(q), \quad (3.35)$$

onde usamos $\alpha_s = g^2/4\pi$ e omitimos a dependência explícita com escala de renormalização μ e o subíndice R para evitar sobrecarregar a notação.

Para obter as equações para a $A(p)$ e $B(p)$, basta lembrar que $\text{Tr} \gamma^\mu = 0$, desta forma, utilizando a Eq. (3.32) podemos extrair as seguintes expressões

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= \frac{1}{4} \text{Tr}[\not{p} S^{-1}(p)], \\ B(p) &= -\frac{1}{4} \text{Tr}[S^{-1}(p)]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aplicando estas combinações na Eq. (3.35) juntamente com a definição de $\Delta^{\mu\nu}(q)$ dado

na Eq. (3.29) no gauge de Landau, obtemos o seguinte sistema de equações integrais

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= Z_F p^2 + i Z_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_A(p, k) \mathcal{Q}_A(k) \Delta(q), \\ B(p) &= Z_F m - i Z_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_B(p, k) \mathcal{Q}_B(k) \Delta(q), \end{aligned} \quad (3.37)$$

com

$$\mathcal{Q}_i(k) = \frac{f(k)}{[A^2(k)k^2 - B^2(k)]}, \quad (3.38)$$

onde a função $f(k)$, que aparece no numerador da Eq. (3.38), pode ser tanto $A(k)$ como $B(k)$, dependendo do índice adotado por \mathcal{Q} . Além disto, temos os kernels $\mathcal{K}_A(p, k)$ e $\mathcal{K}_B(p, k)$ cuja forma específica dependerá de detalhes do *Ansatz* que será empregado para o vértice quark-glúon. Neste primeiro momento, vamos continuar com a derivação deste sistema acoplado sem especificar maiores detalhes do vértice que será adotado.

Nosso objetivo aqui será resolver o sistema de equações acopladas (3.37) no limite quiral, *i.e.* $m \rightarrow 0$. Para isto, precisamos conhecer a forma funcional dos kernels $\mathcal{K}_A(p, k)$ e $\mathcal{K}_B(p, k)$, que dependerá dos detalhes da estrutura do vértice quark-glúon. Neste primeiro momento, para nos familiarizarmos melhor com o problema, vamos explorar na próxima seção dois modelos simplificados para o vértice quark-glúon e derivaremos as suas respectivas ESD para o quark.

3.5 Modelos simplificados para o vértice quark-glúon

Uma das maneiras mais simples de determinar o comportamento do vértice quark-glúon completo é explorar a STI que o vértice quark-glúon satisfaz para determinar os fatores de forma “longitudinais” deste vértice. Esta metodologia foi primeiramente proposta dentro do contexto da QED e recebeu o nome de “gauge technique” [72–75].

Iremos explorar em detalhes no próximo capítulo como esta técnica pode ser implementada para teorias não abelianas, como é o caso da QCD. Entretanto, nesta seção iremos mencionar brevemente quais são as aproximações que até então foram amplamente utilizadas na literatura para “simplificar” o uso da gauge technique na QCD.

Em linhas gerais, a ideia desta técnica é explorar a STI que o vértice quark-glúon satisfaz, para determinar os fatores de forma “longitudinais” do vértice. A STI para o

vértice é dada por

$$q^\mu \Gamma_\mu(q, k, -p) = F(q) [S^{-1}(p)H(q, k, -p) - \bar{H}(-q, p, -k)S^{-1}(k)] , \quad (3.39)$$

onde $F(q)$ e $S^{-1}(p)$ já foram definidos nas Eqs. (3.31) e (3.32), respectivamente. Já $H^a = -gt^a H$ (e seu conjugado $\bar{H}^a = gt^a \bar{H}$) é o kernel espalhamento quark-ghost que será o foco central do próximo capítulo, cuja representação diagramática pode ser vista na Fig. 4.4.

Uma aproximação muito comum na literatura [18, 19, 47] é “abelianizar” o vértice quark-glúon, eliminando desta forma qualquer referência direta aos campos de ghost na STI. Em outras palavras, ao substituir na Eq. (3.39), as expressões em nível de árvore, $F(q) = H = 1$, obtemos a identidade de Ward

$$q^\mu \Gamma_\mu(q, k, -p) = S^{-1}(p) - S^{-1}(k) , \quad (3.40)$$

que usualmente é satisfeita por vértices em teorias abelianas como a QED. Substituindo em (3.40) a Eq. (3.32) é fácil verificar que uma “solução” para $\Gamma_\mu(q, k, -p)$ é dada por

$$\Gamma_\mu^{\text{BC}}(q, k, -p) = L_1^{\text{BC}}(p, k)\gamma_\mu + L_2^{\text{BC}}(p, k)(p+k)_\mu(\not{p} + \not{k}) + L_3^{\text{BC}}(p, k)(p+k)_\mu , \quad (3.41)$$

onde

$$\begin{aligned} L_1^{\text{BC}}(p, k) &= \frac{A(p) + A(k)}{2} , & L_2^{\text{BC}}(p, k) &= \frac{A(p) - A(k)}{2(p^2 - k^2)} , \\ L_3^{\text{BC}}(p, k) &= -\frac{B(p) - B(k)}{p^2 - k^2} , \end{aligned} \quad (3.42)$$

que é conhecido na literatura como o vértice de Ball-Chiu (BC) [58].

É importante frisar neste ponto que a gauge technique deixa a parte transversa de Γ_μ indeterminada. Isto é devido ao fato de que Γ_μ da Eq. (3.40) está contraído com o momento q^μ . Portanto, qualquer estrutura tensorial de Γ_μ que seja transversa a q^μ será automaticamente nula após esta contração.

Uma outra aproximação que também foi explorada na literatura [22, 51] e que mantém minimamente alguma informação sobre os campos de ghost é considerar que na Eq. (3.39) $F(q)$ continua vestido, enquanto que $H = 1$. Neste caso, obtemos o vértice “minimamente

não abelianizado”

$$\Gamma_\mu^{\text{FBC}}(q, k, -p) = F(q)\Gamma_\mu^{\text{BC}}(q, k, -p), \quad (3.43)$$

onde $\Gamma_\mu^{\text{BC}}(q, k, -p)$ é dado pela Eq. (3.41). Assim, os fatores de forma de $\Gamma_\mu^{\text{FBC}}(q, k, -p)$ são dados por

$$\begin{aligned} L_1^{\text{FBC}}(p, k) &= F(q) \left[\frac{A(p) + A(k)}{2} \right], & L_2^{\text{FBC}}(p, k) &= F(q) \left[\frac{A(p) - A(k)}{2(p^2 - k^2)} \right], \\ L_3^{\text{FBC}}(p, k) &= -F(q) \left[\frac{B(p) - B(k)}{p^2 - k^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Inserindo na Eq. (3.35) o vértice quark-glúon da Eq. (3.43), os propagadores do glúon Eq. (3.29) no gauge de Landau e do quark da Eq. (3.32) e, tomando os traços apropriados, podemos derivar a seguinte equação acoplada para $A(p)$ e $B(p)$

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= Z_F p^2 + iZ_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_A^{\text{BC}}(k, p) \Delta(q) F(q), \\ B(p) &= Z_F m - iZ_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_B^{\text{BC}}(k, p) \Delta(q) F(q), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde os kernels são definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A^{\text{BC}}(k, p) &= \{3(k \cdot p) L_1^{\text{BC}} - 2[L_1^{\text{BC}} - (k^2 + p^2) L_2^{\text{BC}}] h_1(p, k)\} \mathcal{Q}_A(k) \\ &\quad - 2L_3^{\text{BC}} h_1(p, k) \mathcal{Q}_B(k), \\ \mathcal{K}_B^{\text{BC}}(k, p) &= -2L_3^{\text{BC}} h_1(p, k) \mathcal{Q}_A(k) + \{3L_1^{\text{BC}} - 4h_1(p, k) L_2^{\text{BC}}\} \mathcal{Q}_B(k), \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde usamos que $\Delta_\mu^\mu(q) = -i3\Delta(q)$, e que $p_\mu p_\nu \Delta^{\mu\nu}(q) = -ih_1(p, k)\Delta(q)$, com

$$h_1(p, k) \equiv \frac{[k^2 p^2 - (k \cdot p)^2]}{q^2}. \quad (3.47)$$

As Eqs. (3.45) formam um sistema acoplado para as funções $A(p)$ e $B(p)$ e são responsáveis por descrever a quebra de simetria quiral. Note que usamos uma aproximação para o vértice quark-glúon que carrega a quantidade “mínima” de informação não abeliana através da presença do dressing do ghost, $F(q)$.

Um outro *Ansatz*, bastante explorado na literatura, é o vértice de Curtis-Pennington (CP) [22, 67] que adiciona uma estrutura transversal ao vértice de BC, Γ_μ^{BC} , ou seja

$$\Gamma_\mu^{\text{CP}}(q, k, -p) = \Gamma_\mu^{\text{BC}}(q, k, -p) + \Gamma_\mu^{\text{T}}(q, k, -p), \quad (3.48)$$

onde

$$\Gamma_\mu^{\text{T}}(q, k, -p) = \frac{\gamma_\mu(k^2 - p^2) - (p - k)_\mu(\not{p} + \not{k})}{2d(p, k)}[A(k) - A(p)], \quad (3.49)$$

com

$$d(p, k) = \frac{1}{k^2 + p^2} \left\{ (k^2 - p^2)^2 + \left[\frac{B^2(k)}{A^2(k)} + \frac{B^2(p)}{A^2(p)} \right]^2 \right\}. \quad (3.50)$$

É importante notar que a parte transversa $\Gamma_\mu^{\text{T}}(q, k, -p)$ é uma modelagem, já que ela é automaticamente conservada, *i.e.* $q^\mu \Gamma_\mu^{\text{T}}(q, k, -p) = 0$, não sendo assim fixada pela STI dada pela Eq. (3.39).

Mais uma vez, é possível manter o mínimo de informação não abeliana que este vértice contém, através da presença da função dressing do ghost [22, 51], *i.e.*

$$\Gamma_\mu^{\text{FCP}}(q, k, -p) = F(q) \Gamma_\mu^{\text{CP}}(q, k, -p), \quad (3.51)$$

onde $\Gamma_\mu^{\text{CP}}(q, k, -p)$ é dado pela Eq. (3.48).

Com o vértice dado na Eq. (3.51) é possível derivar um sistema de equações acopladas para $A(p)$ e $B(p)$ similar ao dado pela Eq. (3.45), onde trocamos $\mathcal{K}_A^{\text{BC}}(p, k) \rightarrow \mathcal{K}_A^{\text{CP}}(p, k)$ e $\mathcal{K}_B^{\text{BC}}(p, k) \rightarrow \mathcal{K}_B^{\text{CP}}(p, k)$. Portanto, os novos kernels que entram na Eq. (3.45) são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A^{\text{CP}}(p, k) &= \mathcal{K}_A^{\text{BC}}(p, k) + \frac{3k \cdot p}{2p^2} A(k) \left[\frac{A(p) - A(k)}{p^2 - k^2} \right] \frac{(k^2 - p^2)^2}{d(k, p)}, \\ \mathcal{K}_B^{\text{CP}}(p, k) &= \mathcal{K}_B^{\text{BC}}(p, k) + \frac{3}{2} B(k) \left[\frac{A(p) - A(k)}{p^2 - k^2} \right] \frac{(k^2 - p^2)^2}{d(k, p)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

No Capítulo 5 utilizaremos a Eq. (3.45) com as duas versões de kernels dadas pelas Eqs. (3.46) e (3.52) para obter as soluções para as $A(p)$ e $B(p)$ que serão utilizadas como inputs para a determinação da estrutura não perturbativa do vértice quark-glúon.

4

O vértice quark-glúon não perturbativo

Neste capítulo derivaremos as equações dinâmicas que controlam o comportamento não perturbativo do vértice quark-glúon e da amplitude de espalhamento quark-ghost. Mais especificamente, mostraremos como o vértice quark-glúon e a amplitude de espalhamento quark-ghost estão relacionados através da STI que o vértice satisfaz. Utilizando esta identidade, expressaremos os fatores de forma longitudinais, L_i , do vértice quark-glúon em termos dos fatores de forma, X_i , da amplitude de espalhamento quark-ghost. Após isto, derivaremos as ESDs que governam o comportamento não perturbativo dos X_i , em uma configuração de momentos geral, viabilizando assim, a obtenção do comportamento dos fatores de forma L_i na região IR.

4.1 A ESD do vértice quark-glúon

O vértice quark-glúon é uma função de Green de três pontos e portanto satisfaz sua própria ESD que está ilustrada na Fig. 4.1. Note que a ESD do vértice é muito mais complexa do que a ESD do quark, pois além do vértice possuir uma estrutura de Lorentz mais rica¹, a ESD também recebe contribuições de diversos diagramas que podem ser observadas na Fig. 4.1.

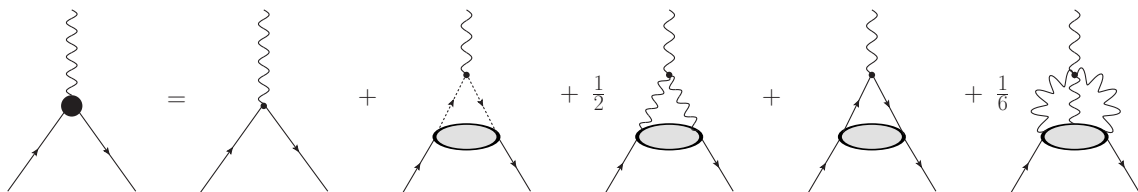


Figura 4.1: ESD do vértice quark-glúon representada em termos dos vários kernels de espalhamento (elipses em cinza).

¹ O vértice quark-glúon possui um índice de Lorentz livre e dois momentos independentes.

Entretanto, como veremos a seguir, existe um outro método que pode ser empregado para obter o comportamento IR do vértice quark-glúon. Esta abordagem alternativa, denominada *gauge technique*, utiliza o princípio de invariância de gauge, que está codificado na STI que este vértice satisfaz, para construir um *Ansatz* do vértice quark-glúon.

4.1.1 A identidade de Slavnov-Taylor

O ponto de partida da gauge technique é a STI que o vértice quark-glúon satisfaz (com o índice de cor suprimido) apresentada na Eq. (3.39) e escrita em termos dos momentos gerais $p \rightarrow p_1$, $k \rightarrow p_2$ e $q = p_1 - p_2$

$$q^\mu \Gamma_\mu(q, p_2, -p_1) = F(q) [S^{-1}(p_1)H(q, p_2, -p_1) - \bar{H}(-q, p_1, -p_2)S^{-1}(p_2)] , \quad (4.1)$$

onde o dressing do ghost, $F(q)$, e o inverso do propagador do quark, $S^{-1}(p)$, já foram definidos nas Eqs. (3.31) e (3.32). Já o kernel de espalhamento quark-ghost H e seu respectivo “conjugado” \bar{H} estão representados na Fig. 4.4.

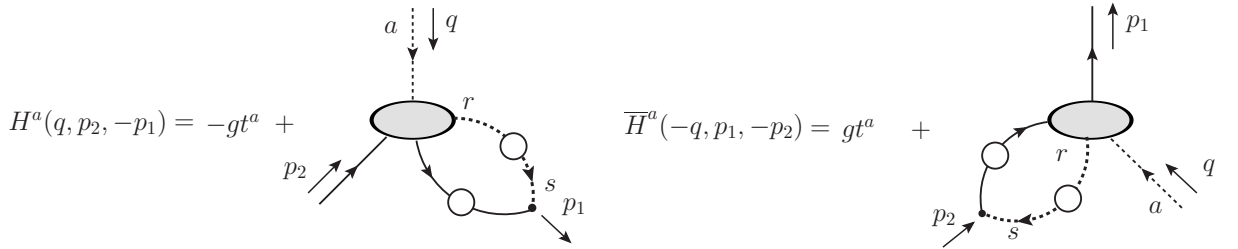


Figura 4.4: Representação diagramática dos kernels de espalhamento quark-ghost $H^a = -gt^a H$ e $\bar{H}^a = gt^a \bar{H}$. Suas expressões em nível de árvore são $-gt^a$ e gt^a , respectivamente. As elipses cinzas representam a parte conectada do kernel de espalhamento quark-ghost.

A decomposição de Lorentz de H mais geral é dada por [59]

$$H = X_0(q^2, p_2^2, p_1^2)\mathbb{I} + X_1(q^2, p_2^2, p_1^2)\not{p}_1 + X_2(q^2, p_2^2, p_1^2)\not{p}_2 + X_3(q^2, p_2^2, p_1^2)\tilde{\sigma}_{\mu\nu}p_1^\mu p_2^\nu, \quad (4.2)$$

onde $\tilde{\sigma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ e $X_i(q^2, p_2^2, p_1^2)$ são os fatores de forma do kernel. Em nível de árvore $X_0^{(0)} = 1$ e $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = X_3^{(0)} = 0$, enquanto que as expressões completas em ordem de 1-loop podem ser encontradas em [59].

Note que para obter \bar{H} a partir de H devemos fazer as seguintes operações: (i) troque $-p_1 \leftrightarrow p_2$; (ii) inverta o sinal de todos os momentos externos *i.e* $q, -p_1, p_2 \leftrightarrow -q, p_1, -p_2$;

(iii) tome o conjugado hermitiano da amplitude resultante e use

$$\overline{H} := \gamma^0 H^\dagger \gamma^0. \quad (4.3)$$

Desta maneira, se aplicarmos as operações (i)–(iii) sobre H obtemos a seguinte decomposição de Lorentz para \overline{H}

$$\overline{H} = X_0(q^2, p_1^2, p_2^2)\mathbb{I} + X_2(q^2, p_1^2, p_2^2)\not{p}_1 + X_1(q^2, p_1^2, p_2^2)\not{p}_2 + X_3(q^2, p_1^2, p_2^2)\tilde{\sigma}_{\mu\nu}p_1^\mu p_2^\nu. \quad (4.4)$$

Com o intuito de compactar a notação, daqui em diante utilizaremos as definições

$$X_i := X_i(q^2, p_2^2, p_1^2), \quad \overline{X}_i := X_i(q^2, p_1^2, p_2^2). \quad (4.5)$$

Usando a STI dada na Eq. (4.1) podemos determinar um *Ansatz* para $\Gamma_\mu(q, p_2, -p_1)$ em termos de $S(p)$, $F(q)$ e dos fatores de forma do kernel de espalhamento quark-ghost X_i e \overline{X}_i .

Note que ao substituirmos $F(q)$, $S^{-1}(p)$ e H que aparecem na Eq. (4.1), por suas versões renormalizadas expressas pela Eq. (3.34), verificamos que a STI do vértice quark-glúon impõe que $Z_1 = Z_c^{-1} Z_F Z_H^{-1}$, onde Z_H é a constante de renormalização do kernel de espalhamento quark-ghost². É importante frisar aqui que esta relação é válida em todas ordens e restringe o comportamento das constantes de renormalização.

4.2 Construção do vértice de BC não abeliano

O próximo passo é definir a estrutura de Lorentz do vértice quark-glúon. Para isto, vamos fixar o fluxo de momentos do vértice $\Gamma_\mu(q, p_2, -p_1)$, conforme mostrado na Fig. 4.5. Note que a conservação de momento impõe que $p_1 = p_2 + q$.

Como o vértice quark-glúon possui um único índice de Lorentz livre e dois momentos independentes p_1 e p_2 , sua estrutura tensorial mais geral é dada por doze tensores independentes. A decomposição tensorial mais comumente adotada na literatura foi proposta no trabalho pioneiro de BC [58], onde as doze estruturas são divididas em quatro “não transversais”³ e oito transversais, com respeito ao momento carregado pelo glúon q . Desta

²A renormalização do kernel de espalhamento quark-ghost é definida como $H_R = Z_H H$.

³Às vezes estas estruturas “não transversais” são referidas na literatura como sendo a parte “longitudinais” do vértice, embora suas estruturas tensoriais não sejam puramente longitudinais com respeito ao momento do glúon q .

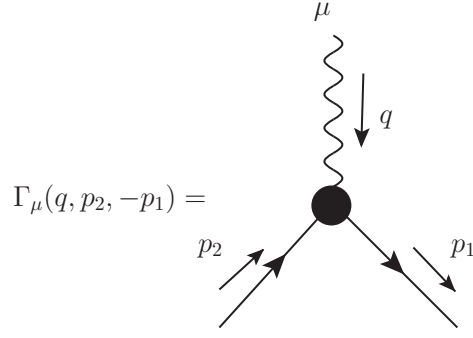


Figura 4.5: O vértice quark-glúon e a convenção de momentos adotada.

maneira o vértice pode ser descomposto como

$$\Gamma_\mu(q, p_2, -p_1) = \Gamma_\mu^{\text{STI}}(q, p_2, -p_1) + \Gamma_\mu^{\text{T}}(q, p_2, -p_1), \quad (4.6)$$

onde a parte transversal satisfaz

$$q^\mu \Gamma_\mu^{\text{T}}(q, p_2, -p_1) = 0, \quad (4.7)$$

e $\Gamma_\mu^{\text{STI}}(q, p_2, -p_1)$ é a parte do vértice que satura a STI dada pela Eq. (4.1).

Utilizando a base de BC [58] podemos decompor a parte não transversa como

$$\Gamma_\mu^{\text{STI}}(q, p_2, -p_1) = \sum_{i=1}^4 L_i(q^2, p_2^2, p_1^2) \lambda_{i,\mu}(p_1, p_2), \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_{1,\mu} &= \gamma_\mu, \\ \lambda_{2,\mu} &= (\not{p}_1 + \not{p}_2)(p_1 + p_2)_\mu, \\ \lambda_{3,\mu} &= (p_1 + p_2)_\mu, \\ \lambda_{4,\mu} &= \tilde{\sigma}_{\mu\nu}(p_1 + p_2)^\nu, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e $L_i(q^2, p_2^2, p_1^2)$ são funções escalares, que são conhecidas como os fatores de forma longitudinais do vértice quark-glúon.

Para a parte transversa, Γ_μ^{T} , vamos usar a base proposta na Ref. [61] que é ligeiramente

diferente à adotada por BC [58]. Mais especificamente,

$$\Gamma_\mu^T(q, p_2, -p_1) = \sum_{i=1}^8 T_i(q^2, p_2^2, p_1^2) \tau_{i,\mu}(p_1, p_2), \quad (4.10)$$

onde $T_i(q^2, p_2^2, p_1^2)$ são os fatores de forma e o conjunto de tensores independentes τ_i são dados por

$$\begin{aligned} \tau_{1,\mu} &= p_{2\mu}(p_1 \cdot q) - p_{1\mu}(p_2 \cdot q); & \tau_{2,\mu} &= \tau_{1\mu} \not{t}; \\ \tau_{3,\mu} &= q^2 \gamma_\mu - q_\mu \not{q}; & \tau_{4,\mu} &= q^2 [\gamma_\mu \not{t} - t_\mu] - 2q_\mu \tilde{\sigma}_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda; \\ \tau_{5,\mu} &= \tilde{\sigma}_{\mu\nu} q^\nu; & \tau_{6,\mu} &= \gamma_\mu (q \cdot t) - t_\mu \not{q}; \\ \tau_{7,\mu} &= \frac{1}{2} (q \cdot t) \lambda_{4,\mu} - t_\mu \tilde{\sigma}_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda; & \tau_{8,\mu} &= \gamma_\mu \tilde{\sigma}_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda + p_{2\mu} \not{p}_1 - p_{1\mu} \not{p}_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

com $q = p_1 - p_2$ e $t = p_1 + p_2$.

Observe que a Eq. (4.10) satisfaz a Eq. (4.7) para cada tensor $\tau_{i,\mu}$ independentemente. Além disto, note que os $\tau_{i,\mu}$ são livres de singularidades cinemáticas, em todos os gauges covariantes, quando $q = 0$, ou seja, $\tau_{i,\mu}(p_1, p_1) = 0$ [61].

Devido a Eq. (4.7), fica claro que a STI dada pela Eq. (4.1), não pode restringir o comportamento dos fatores de forma que acompanham a parte transversal Γ_μ^T . Portanto a gauge technique somente tem acesso aos fatores de forma L_i de $\Gamma_\mu^{\text{STI}}(q, p_2, -p_1)$ da Eq. (4.8).

É fácil ver que ao substituir as Eqs. (4.2), (4.4) e (3.32) no lado direito da STI (4.1), e a Eq. (4.6) no lado esquerdo de (4.1), podemos expressar os fatores de forma longitudinais L_i , em termos de A , B , F , X_i e \overline{X}_i . Mais especificamente, temos que os L_i são definidos

como [22],

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{F(q)}{2} \{A(p_1)[X_0 - (p_1^2 + p_1 \cdot p_2)X_3] + A(p_2)[\bar{X}_0 - (p_2^2 + p_1 \cdot p_2)\bar{X}_3]\} \\
&+ \frac{F(q)}{2} \{B(p_1)(X_2 - X_1) + B(p_2)(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)\}; \\
L_2 &= \frac{F(q)}{2(p_1^2 - p_2^2)} \{A(p_1)[X_0 + (p_1^2 - p_1 \cdot p_2)X_3] - A(p_2)[\bar{X}_0 + (p_2^2 - p_1 \cdot p_2)\bar{X}_3]\} \\
&- \frac{F(q)}{2(p_1^2 - p_2^2)} \{B(p_1)(X_1 + X_2) - B(p_2)(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)\}; \\
L_3 &= \frac{F(q)}{p_1^2 - p_2^2} \{A(p_1)(p_1^2 X_1 + p_1 \cdot p_2 X_2) - A(p_2)(p_2^2 \bar{X}_1 + p_1 \cdot p_2 \bar{X}_2) - B(p_1)X_0 + B(p_2)\bar{X}_0\}; \\
L_4 &= \frac{F(q)}{2} \{A(p_1)X_2 - A(p_2)\bar{X}_2 - B(p_1)X_3 + B(p_2)\bar{X}_3\}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Note que estas expressões estão no espaço de Minkowski. A versão euclidiana destes fatores de forma é dada na Eq. (A.9).

É importante frisar que quando colocamos $X_0 = \bar{X}_0 = 1$ e $X_i = \bar{X}_i = 0$, para $i \geq 1$ e $F(q) = 1$ na Eq. (4.12), obtemos fatores de forma do vértice de BC [58] dados pela Eq. (3.42), que é válido para teorias abelianas com é o caso da QED. Note que neste caso $L_4^{\text{BC}} = 0$.

4.3 Aproximação de 1-loop vestido para o $H(q, p_2, -p_1)$

Como vimos na seção anterior os L_i estão relacionados com os fatores de forma, X_i do kernel de espalhamento quark-ghost através da Eq. (4.12). Então nesta seção, calculamos os X_i na aproximação de 1-loop vestido. Esta aproximação consiste em manter somente as contribuições dos diagramas contendo 1-loop, onde seus propagadores e vértices são mantidos vestidos, como mostra a Fig. 4.6.

Adotando o fluxo de momento indicado na Fig. 4.6, podemos aplicar as regras de Feynman e obter que

$$H^{[1]}(q, p_2, -p_1) = 1 - \frac{1}{2} i C_A g^2 \int_l \Delta^{\mu\nu}(l - p_2) G_\nu(p_1 - l) D(l - p_1) S(l) \Gamma_\mu(l - p_2, p_2, -l), \tag{4.13}$$

onde fatoramos $-gt^a$. Note que o primeiro termo corresponde ao valor do kernel de espalhamento quark-ghost em nível de árvore, *i.e.*, $H^0 = 1$. Além disso, $C_A = 3$ é a constante de Casimir na representação adjunta e definimos a medida de integração como $\int_l \equiv \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$; onde entende-se que devemos utilizar um esquema de regularização que preserve as sime-

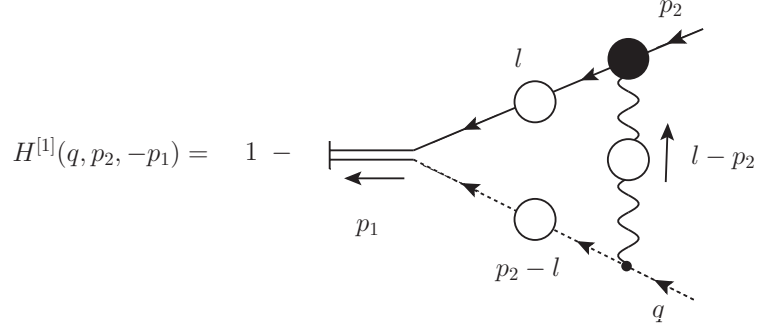


Figura 4.6: O kernel de espalhamento quark-ghost $H^{[1]}(q, p_2, -p_1)$ na aproximação de 1-loop vestido.

trias, como é o caso da regularização dimensional⁴.

Para prosseguir com a determinação dos fatores de forma da Eq. (4.13), vamos utilizar o propagador do glúon completo, $\Delta^{\mu\nu}(k)$, no gauge de Landau que foi definido na Eq. (3.29). Além disto usaremos o vértice glúon-ghost em nível de árvore, que já foi definido na Eq. (2.18), *i.e.*, $G_\nu = G_\nu^0 = (p_1 - l)_\nu$.

Já para o vértice quark-glúon, Γ_μ , neste primeiro momento, evitaremos utilizar o vértice mais completo, pois isto resultaria em um sistema de equações integrais muito complexo, que acoplaria todos os fatores de forma X_i que são funções de três variáveis. Para reduzir o grau de complexidade do problema, empregaremos um *Ansatz* para o vértice que é proporcional a γ_μ . Adicionalmente todos os X_i da Eq. (4.12) serão colocados em nível de árvore, desta forma, usaremos efetivamente o seguinte vértice simplificado

$$\Gamma_\mu(l - p_2, p_2, -l) = \frac{1}{2} [A(l) + A(p_2)] \gamma_\mu, \quad (4.14)$$

que é precisamente $L_1^{\text{BC}}(l - p_2, p_2, -l)$ definido na Eq. (3.42).

Desta forma, substituindo na Eq. (4.13) as aproximações definidas acima, obtemos a seguinte expressão para o $H^{[1]}$

$$H^{[1]}(q, p_2, -p_1) = 1 + \frac{i}{4} C_A g^2 \int_l \mathcal{K}(p_1, p_2, l) f(p_2, q, l), \quad (4.15)$$

⁴O índice [1] em $H^{[1]}(q, p_2, -p_1)$ indica que o estamos utilizando a aproximação de 1-loop vestido para o kernel de espalhamento quark-ghost.

onde definimos o \mathcal{K}

$$\mathcal{K}(p_1, p_2, l) = \frac{F(l - p_1)\Delta(l - p_2)[A(l) + A(p_2)]}{(l - p_1)^2[A^2(l)l^2 - B^2(l)]}, \quad (4.16)$$

com

$$f(p_2, q, l) = A(l) \left[l\not{q} - q \cdot (l - p_2) \left(1 + \frac{(\not{p}_2 l - p_2^2)}{(l - p_2)^2} \right) \right] + B(l) \left[\not{q} - (l - \not{p}_2) \frac{q \cdot (l - p_2)}{(l - p_2)^2} \right].$$

O passo seguinte para determinar os X_i é extraí-los com a ajuda dos projetores

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\text{Tr}\{H\}}{4}, \\ X_1 &= \frac{p_2^2 \text{Tr}\{\not{p}_1 H\} - p_1 \cdot p_2 \text{Tr}\{\not{p}_2 H\}}{4h}, \\ X_2 &= \frac{p_1^2 \text{Tr}\{\not{p}_2 H\} - p_1 \cdot p_2 \text{Tr}\{\not{p}_1 H\}}{4h}, \\ X_3 &= -\frac{\text{Tr}\{\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta H\}}{4h}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde as dependências funcionais dos X_i foram suprimidas para evitar sobrecarregar a notação e introduzimos que

$$h(p_1, p_2) = p_1^2 p_2^2 - (p_1 \cdot p_2)^2. \quad (4.18)$$

Assim, ao substituir a Eq. (4.15) nos projetores da Eq. (4.17) e calculando os respectivos traços obtemos

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 + \frac{i}{4} C_A g^2 \int_l \mathcal{K}(p_1, p_2, l) A(l) \mathcal{G}(p_2, q, l), \\ X_1 &= \frac{i}{4} C_A g^2 \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) B(l)}{h(p_1, p_2)} [p_2^2 \mathcal{G}(p_1, q, l) - (p_1 \cdot p_2) \mathcal{G}(p_2, q, l)], \\ X_2 &= \frac{i}{4} C_A g^2 \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) B(l)}{h(p_1, p_2)} [p_1^2 \mathcal{G}(p_2, q, l) - (p_1 \cdot p_2) \mathcal{G}(p_1, q, l)], \\ X_3 &= -\frac{i}{4} C_A g^2 \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) A(l)}{h(p_1, p_2)} [p_2^2 \mathcal{G}(p_1, q, l) - (p_1 \cdot p_2) \mathcal{G}(p_2, q, l) - \mathcal{T}(p_1, p_2, l)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde definimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(k, q, l) &= (k \cdot q) - \frac{[k \cdot (l - p_2)][q \cdot (l - p_2)]}{(l - p_2)^2}, \\ \mathcal{T}(p_1, p_2, l) &= (p_2 \cdot q)[(p_1 \cdot l) - (p_1 \cdot p_2)] - (p_1 \cdot q)[(p_2 \cdot l) - p_2^2].\end{aligned}\quad (4.20)$$

Para resolver estas equações numericamente precisamos reescrevê-las no espaço euclidiano. Maiores detalhes de como podemos fazer esta transição do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano estão descritos no Apêndice A. Em particular, a versão euclidiana da Eq. (4.19) é dada na Eq. (A.6) [76].

É importante mencionar aqui que a dependência funcional das funções escalares X_i , no espaço euclidiano, será agora expressa em termos dos módulos dos momentos p_1 , p_2 e o ângulo relativo entre eles θ , ou seja, $X_i(q^2, p_1^2, p_2^2) \rightarrow X_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$.

5

Determinação dos fatores de forma

Neste Capítulo determinamos numericamente os fatores de forma X_i e L_i para configurações cinemáticas gerais. Para isso, vamos discutir primeiramente o comportamento não perturbativo dos propagadores do glúon, $\Delta(q)$, do ghost, $D(q)$, além das funções $A(p)$ e $B(p)$ que descrevem o propagador do quark. Estas quantidades serão utilizadas como inputs externos nas Eqs. (A.6) e (A.9) que determinam os comportamentos dos X_i e L_i no espaço euclidiano. Os resultados numéricos para os fatores de forma $X_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ e $L_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ serão apresentados na forma de gráficos tridimensionais para valores de θ fixos. Mostraremos que os $L_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ obtidos através da “gauge-technique” apresentam características que não são capturadas pelo vértice abeliano de BC dado pelas Eqs. (3.42). Também discutiremos os resultados para os L_i em configurações cinemáticas especiais, obtidas quando os dois momentos p_1^2 e p_2^2 e o ângulo θ são fixados em valores específicos. Finalizaremos este capítulo, comparando nossos resultados com os dados obtidos pelas simulações da QCD na rede na configuração de soft-glúon [63, 64] e com os resultados prévios encontrados na literatura [68, 69, 77, 99].

5.1 Análise numérica

Nossa análise numérica para os fatores de forma $X_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ no espaço euclidiano, consiste em resolver o conjunto de 4 (quatro) integrais múltiplas dadas pela Eq. (A.6). O tratamento numérico destas integrais baseia-se em discretizar as variáveis externas p_1 , p_2 e θ , determinando o respectivo valor de $X_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ para cada combinação da tripla (p_1^2, p_2^2, θ) . Após ter os X_i podemos obter os L_i através da Eq. (A.9).

Para resolver as integrais dos fatores de forma X_i , deve-se implementar o uso de coordenadas esféricas e considerar os momentos p_1 e p_2 como sendo independentes entre

si, com suas componentes vetoriais dadas pela Eq. (A.11).

A construção do grid para os momentos externos p_1^2 e p_2^2 é feita dividindo o intervalo $[1 \times 10^{-3} \text{ GeV}^2, 1 \times 10^3 \text{ GeV}^2]$ em 96 pontos distribuídos logaritmicamente. Já o ângulo θ pode assumir 7 valores que estão uniformemente distribuídos dentro do intervalo $[0, \pi]$.

A integração numérica da Eq. (A.6) é calculada utilizando o método de Gauss-Kronrod adaptativo que fornece uma boa precisão com um custo computacional não muito alto [104]. Entretanto, ainda assim foi necessário executar o programa no cluster Feynman do Centro de Computação John David Rogers (CCJDR) do Instituto de Física “Gleb Wataghin-UNICAMP, paralelizando o cálculo para cada um dos 96 pontos do grid externo. Toda a programação do algoritmo foi feita em fortran.

Por último, como dito anteriormente neste Capítulo as funções $A(p)$ e $B(p)$ serão inputs externos para o cálculo de X_i e L_i , mas no Capítulo 6 analisaremos um sistema de equações integrais formado pelas funções $A(p)$, $B(p)$ e as quatro integrais que definem os X_i [veja Eqs. (6.1) e (A.6)]. Este sistema de seis equações será resolvido de maneira iterativa e as integrais tridimensionais serão, novamente, feitas usando o método Gauss-Kronrod adaptativo.

Na próxima Seção apresentamos os ingredientes numéricos necessários para realizar o cálculo dos fatores de forma X_i e L_i .

5.2 Ingredientes numéricos

O primeiro passo para iniciar a nossa análise numérica é especificar os ingredientes que entram nas expressões dos fatores de forma X_i e L_i dados pelas Eqs. (A.6) e (A.9). Para isso vamos precisar dos propagadores $\Delta(q)$ e $D(q)$ ou equivalentemente o “dressing” do ghost $F(q)$ [veja Eq. (3.31)]. Também precisaremos das funções $A(k)$ e $B(k)$ que podem ser determinadas através da solução da ESD do propagador do quark dada pela Eq. (3.45).

Seguindo a mesma metodologia empregada em [98, 105, 106], usaremos para $\Delta(q)$ e $F(q)$ os fits dos resultados da QCD na rede obtidos em [32]. É importante mencionar que todas as quantidades, apresentadas neste capítulo, serão renormalizadas em $\mu = 4.3 \text{ GeV}$.

Para o propagador do glúon utilizaremos a seguinte forma funcional [107],

$$\Delta^{-1}(q) = m^2(q) + q^2 \left[1 + \frac{13C_A g_1^2}{96\pi^2} \ln \left(\frac{q^2 + \rho_1 m^2(q)}{\mu^2} \right) \right], \quad (5.1)$$

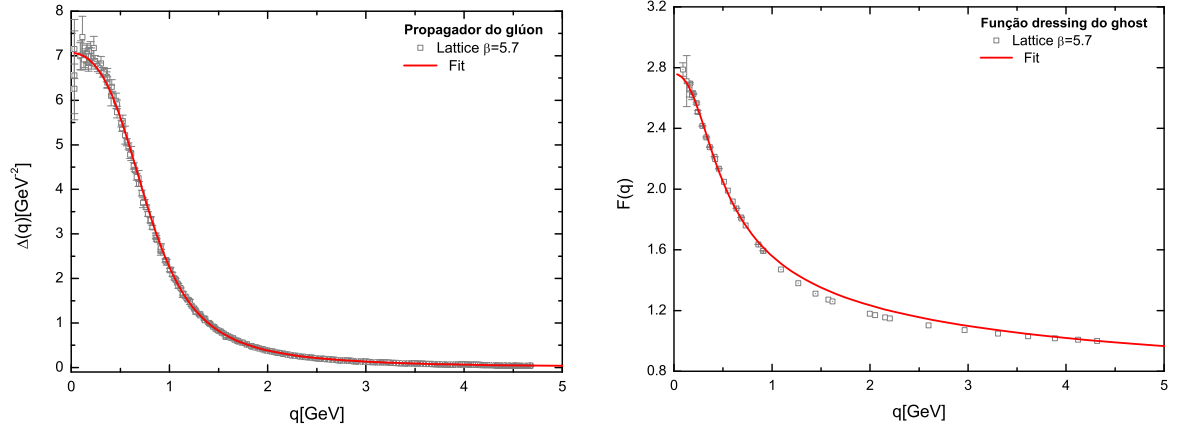


Figura 5.1: Fits para o propagador do glúon $\Delta(q)$ (painel da esquerda) e a função “dressing” do ghost $F(q)$ (painel da direita) dados pelas Eqs. (5.1) e (5.3), respectivamente. Ambas funções estão renormalizadas em $\mu = 4.3 \text{ GeV}$ e os dados da rede em $SU(3)$ foram obtidos em [32].

onde $m^2(q)$ é dado por

$$m^2(q) = \frac{m^4}{q^2 + \rho_2 m^2}, \quad (5.2)$$

com $m = 520 \text{ MeV}$, $g_1^2 = 5.68$, $\rho_1 = 8.55$ e $\rho_2 = 1.91$.

Por outro lado, o “dressing” do ghost será expresso por

$$F^{-1}(q) = 1 + \frac{9}{4} \frac{C_A g_2^2}{48\pi^2} \ln \left(\frac{q^2 + \rho_3 m^2(q)}{\mu^2} \right), \quad (5.3)$$

onde $m^2(q)$ também é dado pela Eq. (5.2), mas mudando $\rho_2 \rightarrow \rho_4 = 0.68$. Para os demais parâmetros utilizamos $g_2^2 = 8.57$, $m = 520 \text{ MeV}$ e $\rho_3 = 0.25$.

Na Fig. 5.1 comparamos os dados da QCD rede para $\Delta(q)$ e $F(q)$ [32] com os fits expressos pelas Eqs. (5.1) e (5.3), respectivamente. Note que ambas quantidades, $\Delta(q)$ e $F(q)$, são finitas quando $q^2 \rightarrow 0$. Esta saturação no limite de baixos momentos está associada com a presença de uma massa dinâmica para o glúon no IR. [22, 23, 98, 106, 108].

É importante mencionar aqui que $\Delta(q)$ e $F(q)$ foram obtidos dentro da aproximação quenched, *i.e* as simulações da QCD na rede foram realizadas na ausência dos campos de quarks.

Já para as funções $A(p)$ e $B(p)$, vamos utilizar duas soluções que são obtidas a partir de aproximações diferentes para o kernel da ESD (3.45) no limite quiral, *i.e*. $m = 0$ ¹.

¹Em ambas aproximações faremos a substituição $Z_1 \rightarrow Z_c \rightarrow F(q)$ na Eq. (3.45). Esta modificação permite obter a dimensão anômala correta para a massa dinâmica do quark $\mathcal{M}(p)$. Para maiores detalhes,

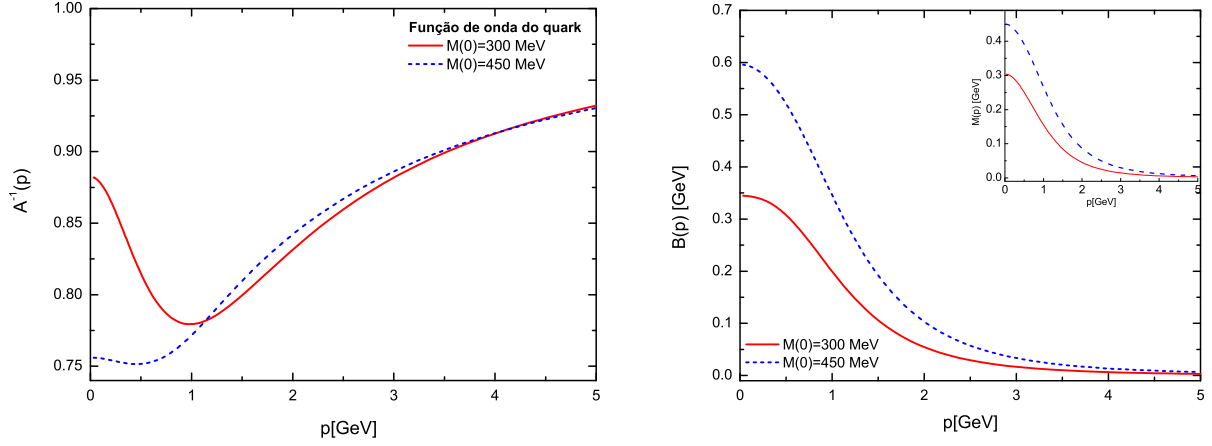


Figura 5.2: O inverso da função de onda do quark, $A^{-1}(p)$ (painel da esquerda) e a componente escalar do propagador do quark, $B(p)$ (painel da direita). Inserimos no painel da direita a massa dinâmica dos quarks definida como $\mathcal{M}(p) = B(p)/A(p)$. As linhas vermelhas contínuas representam as soluções obtidas utilizando o vértice Γ_μ^{FBC} da Eq. (3.43), enquanto que as azuis pontilhadas foram obtidas com Γ_μ^{FCP} da Eq. (3.51).

1. Na primeira versão, os kernels $\mathcal{K}_A^{\text{BC}}(k, p)$ e $\mathcal{K}_B^{\text{BC}}(k, p)$ da Eq. (3.45) são dados pela Eq. (3.46). Vale a pena recordar aqui que a Eq. (3.46) foi obtida utilizando o vértice Γ_μ^{FBC} dado pela Eq. (3.43). Este vértice é uma versão modificada do vértice BC que incorpora uma quantidade mínima de informação não abeliana através da presença do “dressing” do ghost $F(q)$. Para este caso, a solução numérica foi obtida fixando $\alpha_s = 0.28$.
2. Já a segunda solução é obtida fazendo as seguintes substituições na Eq. (3.45): $\mathcal{K}_A^{\text{BC}}(p, k) \rightarrow \mathcal{K}_A^{\text{CP}}(p, k)$ e $\mathcal{K}_B^{\text{BC}}(p, k) \rightarrow \mathcal{K}_B^{\text{CP}}(p, k)$, com $\mathcal{K}_A^{\text{CP}}(p, k)$ e $\mathcal{K}_B^{\text{CP}}(p, k)$ dados pela Eq. (3.52). Ressaltamos que neste caso, os kernels foram construídos a partir do vértice Γ_μ^{FCP} definido na Eq. (3.51) e a solução numérica foi obtida com $\alpha_s = 0.29$.

Na Fig. 5.2 comparamos as soluções da ESD do quark obtidas quando usamos estas duas aproximações. No painel da esquerda apresentamos os resultados para $A^{-1}(p)$, enquanto que no da direita $B(p)$. Em ambos gráficos, as linhas vermelhas contínuas representam as soluções obtidas usando o kernel $\mathcal{K}^{\text{BC}}(p, k)$, já as linhas azuis são as obtidas com $\mathcal{K}^{\text{CP}}(p, k)$. Também inserimos na parte superior do gráfico da direita a massa dinâmica do quark, $\mathcal{M}(p) = B(p)/A(p)$, correspondente.

Note da Fig. 5.2 que os valores da massa dinâmica $\mathcal{M}(p)$ são maiores quando é usado o kernel $\mathcal{K}^{\text{CP}}(p, k)$ ao invés do kernel $\mathcal{K}^{\text{BC}}(p, k)$. Também podemos observar que $A^{-1}(p)$ tem

sobre este ponto, veja a discussão apresentada no Apêndice C [22].

o seu comportamento qualitativo alterado, dependendo de que aproximação utilizamos. Para a solução obtida com o kernel $\mathcal{K}^{\text{BC}}(p, k)$, vemos que $A^{-1}(p)$ apresenta um mínimo, enquanto que no resultado obtido com $\mathcal{K}^{\text{CP}}(p, k)$ este mínimo começa a desaparecer. Já $B(p)$ é monotônica em ambos os casos.

A presença do mínimo na $A^{-1}(p)$ está intimamente relacionada com o valor da massa dinâmica na origem *i.e.* $\mathcal{M}(0)$ [109]. Especificamente, $A^{-1}(p)$ sempre apresenta um mínimo quando os valores de $\mathcal{M}(0) \lesssim 350$ MeV. Quando $\mathcal{M}(0)$ excede este valor, o mínimo em $A^{-1}(p)$ começa a desaparecer gradativamente até se tornar uma função monotônica.

Com o intuito de explorar o impacto da presença deste mínimo nos fatores de forma L_i , nas Secs. 5.3, 5.4 e 5.5 usaremos como inputs os resultados referentes ao caso com $\mathcal{M}(0) = 300$ MeV, enquanto que na Sec 5.4.2 repetiremos nossos cálculos utilizando, como ingrediente inicial, a solução com $\mathcal{M}(0) = 450$ MeV.

5.3 Fatores de forma da amplitude de quark-ghost

Com todos os ingredientes já definidos na Sec. 5.2, vamos agora utilizar as Eqs. (A.6) para determinar os fatores de forma X_i em uma configuração de momentos geral. Como os fatores de forma X_i são funções de três (3) variáveis *i.e.* $X_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$, apresentamos os resultados na forma de gráficos 3-D, onde os momentos p_1^2 e p_2^2 variam e o ângulo θ é mantido fixo.

Na Fig. 5.3 mostramos uma seleção de gráficos onde é possível observar as características mais importantes dos X_i , obtidos quando a massa do quark é $\mathcal{M}(0) = 300$ MeV. Nos quatro painéis da Fig. 5.3 mostramos os fatores de forma X_i quando o ângulo entre os momentos p_1 e p_2 é fixo no valor de $\theta = 0$.

Nestes gráficos podemos observar as seguintes características:

(i) Todos os X_i são finitos no IR. Enquanto que no UV, eles recuperam o seu comportamento perturbativo, ou seja no limite de grandes momentos (p_1 ou p_2 , ou ambos), os fatores de forma tendem para valores próximos aos de nível de árvore, *i.e.*, $X_0^{(0)} = 1$ e $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = X_3^{(0)} = 0$. As pequenas diferenças nestes valores são devido às correções perturbativas de 1-loop.

(ii) X_0 e X_1 são positivos definidos para todos os valores de p_1 e p_2 , enquanto X_2 e X_3 são estritamente negativos.

(iii) Na Fig. 5.3 podemos notar em quais regiões os fatores de forma X_i mais diferem

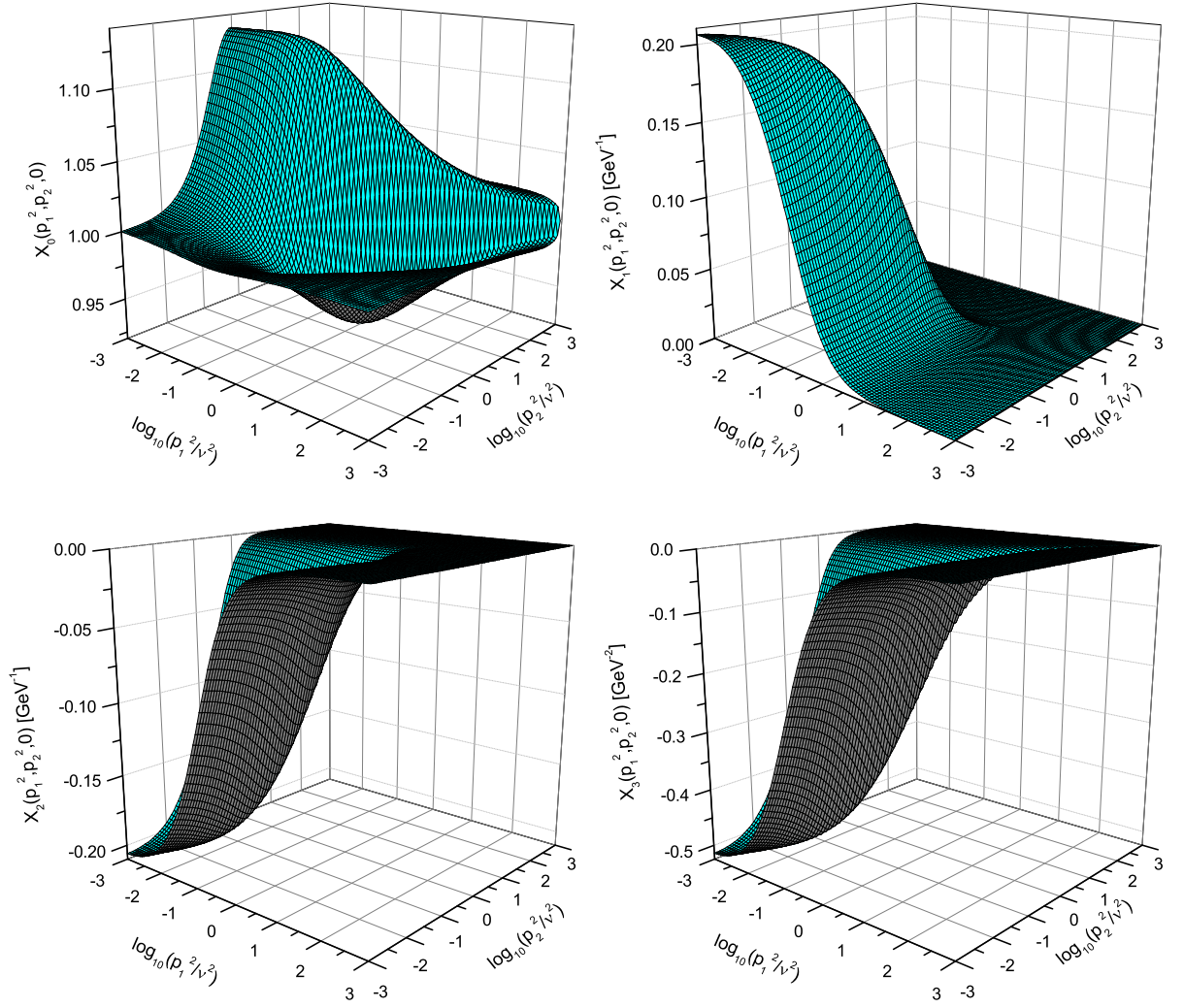


Figura 5.3: Os fatores de forma $X_i(p_1^2, p_2^2, 0)$ para uma configuração arbitrária de momentos e ângulo fixo $\theta = 0$. Estes fatores de forma foram calculados através das Eqs. (A.6). O parâmetro de escala foi fixado em $\nu = 1 \text{ GeV}$.

do seu valor em nível de árvore. Como era de se esperar, as maiores diferenças estão concentradas no IR, quando um dos momentos ou ambos são pequenos. No caso de X_0 , notamos que quando $p_1^2 \rightarrow 0$, seu valor difere do nível de árvore em 13%. Para X_1 e X_2 , o desvio máximo ocorre quando ambos momentos são nulos, atingindo um valor máximo/mínimo de $\pm 0.21 \text{ GeV}^{-1}$. Já X_3 satura no seu maior valor quando ambos momentos tendem a zero, p_1 e $p_2 \rightarrow 0$. Neste limite X_3 possui o valor de -0.52 GeV^{-2} . Portanto, é de se esperar que o impacto de X_3 sobre o vértice quark-glúon seja mais pronunciado do que os demais fatores de forma X_i .

(iv) X_0 é o fator de forma que apresenta a estrutura mais rica. Note que ele possui um pico pronunciado e um “poço” raso. O máximo está localizado em $p_1^2 = 0.009 \text{ GeV}^2$ e

$p_2^2 = 0.97 \text{ GeV}^2$. Já o mínimo em $p_1^2 = 3.14 \text{ GeV}^2$ e $p_2^2 = 0.97 \text{ GeV}^2$.

(*v*) Embora tenhamos optado por não apresentar os gráficos, vale a pena mencionar que verificamos que os comportamentos de X_1 , X_2 e X_3 são minimamente alterados quando variamos o ângulo θ . Já X_0 sofre mudanças significativas ao variarmos o ângulo θ . Em particular, quando $\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi$ o “poço” desaparece.

Como consequência da Eq. (4.5), os fatores de forma conjugados \overline{X}_i , apresentam o mesmo comportamento mostrado na Fig. 5.3. Para obtermos os \overline{X}_i basta alterar os nomes dos eixos $p_1 \leftrightarrow p_2$.

5.4 Fatores de forma do vértice quark-glúon

Com os X_i calculados e disponíveis em uma configuração cinemática geral, podemos determinar o comportamento dos fatores de forma L_i do vértice quark-glúon dados pela Eq. (A.9).

É importante frisar aqui que o vértice quark-glúon, e particularmente seu fator de forma L_1 que é proporcional ao vértice em nível de árvore γ_μ , deve ser renormalizado. O procedimento de renormalização adotado é o usual, onde introduzimos uma constante de renormalização Z_1 que depende do cutoff, como foi definido na penúltima linha da Eq. (3.34).

Para determinar a forma explícita de Z_1 utilizamos o esquema de renormalização de subtração de momentos (MOM), que impõe que no ponto totalmente simétrico, *i.e.*, quando o quadrado de todos dos três momentos que entram no vértice for igual a uma escala μ^2 , o vértice recupera seu valor em nível de árvore, *i.e.*,

$$\Gamma^\mu(q, p_2, -p_1) \Big|_{p_1^2=p_2^2=q^2=\mu^2} = \gamma^\mu. \quad (5.4)$$

5.4.1 Caso $\mathcal{M}(0) = 300 \text{ MeV}$

Após ter definido o esquema de renormalização que será adotado para o vértice quark-glúon, nas Figs. 5.4, 5.6, 5.7 e 5.8 apresentamos os resultados para L_1 , L_2 , L_3 e L_4 , respectivamente. Este resultados foram obtidos utilizando como inputs para $A(p)$ e $B(p)$ a solução que gera uma massa para o quark de $\mathcal{M}(0) = 300 \text{ MeV}$.

Em cada figura, apresentamos um dos fatores de forma para os ângulos $\theta = \pi/6$ (painel superior esquerdo), $\theta = \pi/3$ (painel superior direito), e $\theta = \pi/2$ (painel inferior esquerdo).

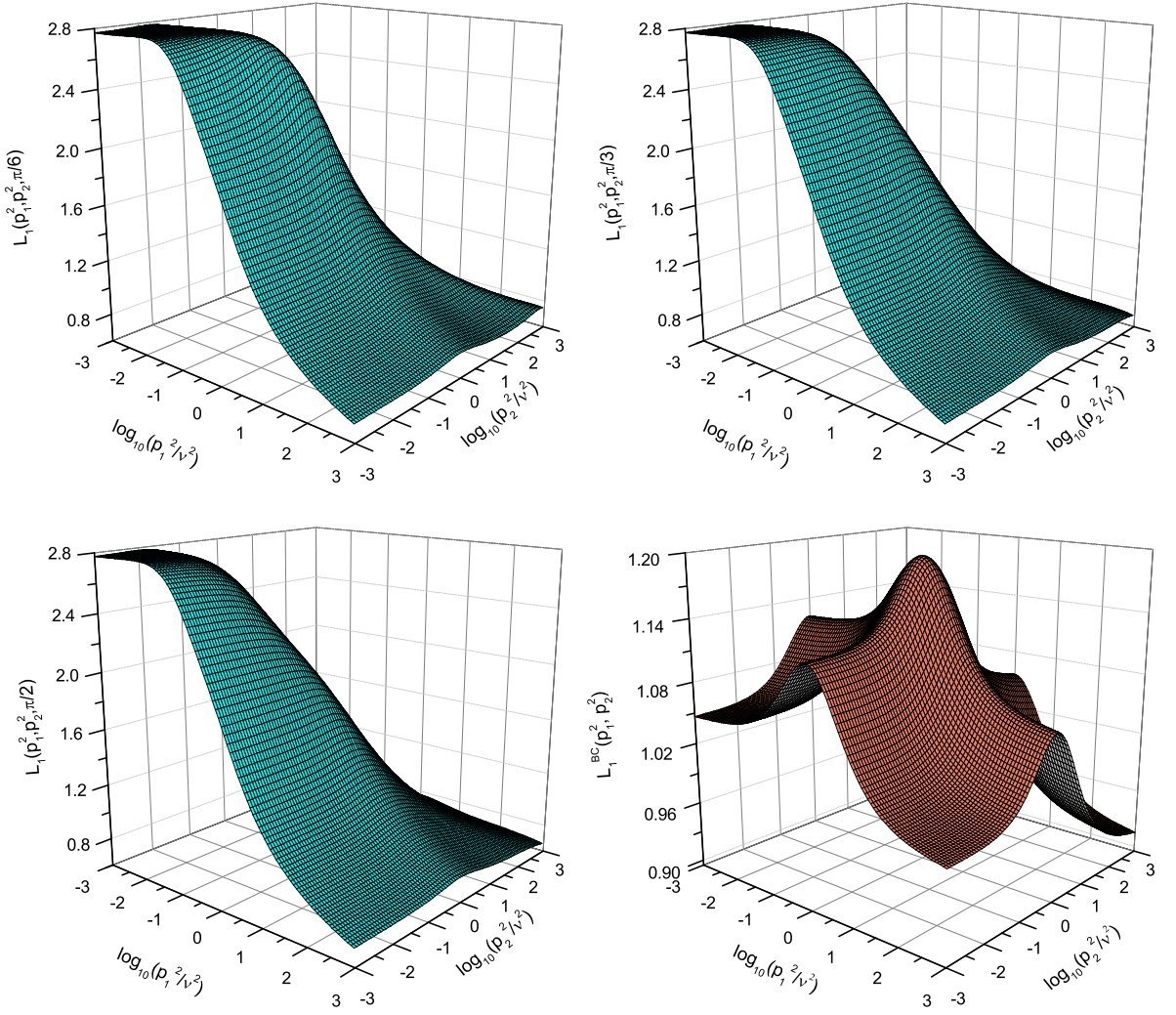


Figura 5.4: $L_1(p_1^2, p_2^2, \theta)$ para $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$, e $\theta = \pi/2$. Para comparação, no painel inferior direito mostramos o resultado abeliano $L_1^{BC}(p_1^2, p_2^2)$ dado pela Eq. (3.42).

Além disto, para facilitar a comparação com o resultado abeliano, no painel inferior da direita mostramos o L_i^{BC} correspondente que é dado pela Eq. (3.42). É importante frisar aqui que os fatores de forma abeliano L_i^{BC} são independentes do ângulo θ e que $L_4^{BC} = 0$.

As observações gerais para cada um destes fatores de forma podem ser resumidas da seguinte maneira:

(i) Da Fig. 5.4 notamos que o fator de forma L_1 praticamente não se altera para diferentes valores de $\theta = 0$, ou seja L_1 não possui uma dependência forte na variável θ , exceto quando o ângulo está perto do valor de $\theta = 0$. Devido a este comportamento diferenciado, o caso com $\theta = 0$ é mostrado separadamente na Fig. 5.5. Nesta figura, podemos observar uma pequena “fenda” no plano definido por $p_1 = p_2$. Uma análise numérica detalhada revelou que este plano, conhecido como sendo a configuração soft-

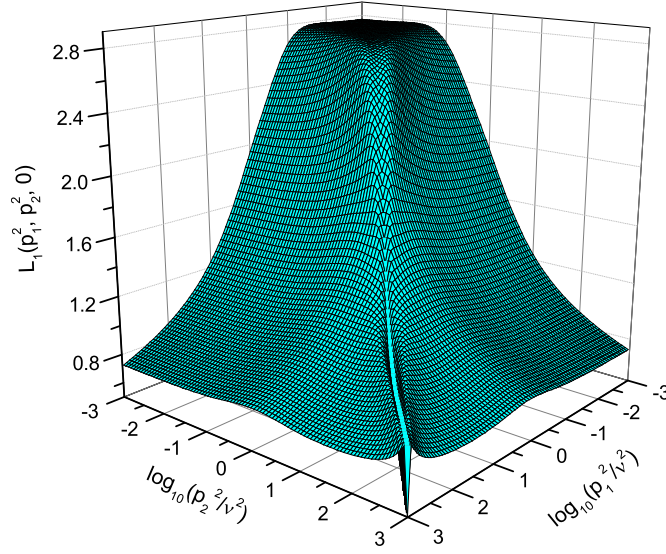


Figura 5.5: O fator de forma $L_1(p_1^2, p_2^2, 0)$. O plano definido por $p_1 = p_2$ dá o resultado para a configuração de soft-glúon. Note que, com o intuito de deixar a “fenda” mais visível, rotacionamos em 90° este gráfico em relação ao modo que os demais resultados foram apresentados na Fig. 5.4.

glúon, é drasticamente afetado pelo *Ansatz* utilizado no cálculo dos X_i . Notamos que o *Ansatz* simplificado dado pela Eq. (4.14) é o que minimiza o aparecimento desta fenda, recuperando o comportamento UV esperado. A configuração soft-glúon será discutida com mais detalhes na Secs. 5.5 e 5.6. Ressaltamos que, com exceção de $L_1(p_1^2, p_2^2, 0)$, os demais $L_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ são levemente impactados pelo *Ansatz* da Eq. (4.14). Em particular, quando multiplicamos o *Ansatz* da Eq. (4.14) por $F(l - p_2)$ (versão não abeliana), os $L_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ sofrem alterações quantitativas menores que 18%.

(ii) O fator de forma L_2 está ilustrado na Fig. 5.6, note que este fator de forma mostra uma dependência no ângulo θ , levemente maior do que L_1 , modificando principalmente o tamanho do pico localizado na região intermediária dos momentos. Note que à medida que o ângulo θ aumenta o pico é reduzido. Veja também que L_2 é uma ordem de magnitude menor do que L_1 e que para grandes momentos se aproxima de seu valor em nível árvore $L_2^{(0)} = 0$. Além disso, enquanto o fator de forma L_2^{BC} é negativo para todos os momentos, L_2 contém os picos em pequenas regiões positivas. Observe também que, na região IR L_2 e L_2^{BC} são bastante parecidos.

(iii) Similarmente, na Fig. 5.7 observamos que a dependência angular do fator de forma L_3 é bem pequena. Note que L_3 também é uma ordem de magnitude menor do que L_1 . O fator de forma L_3 é sempre negativo e se aproxima de seu valor em nível

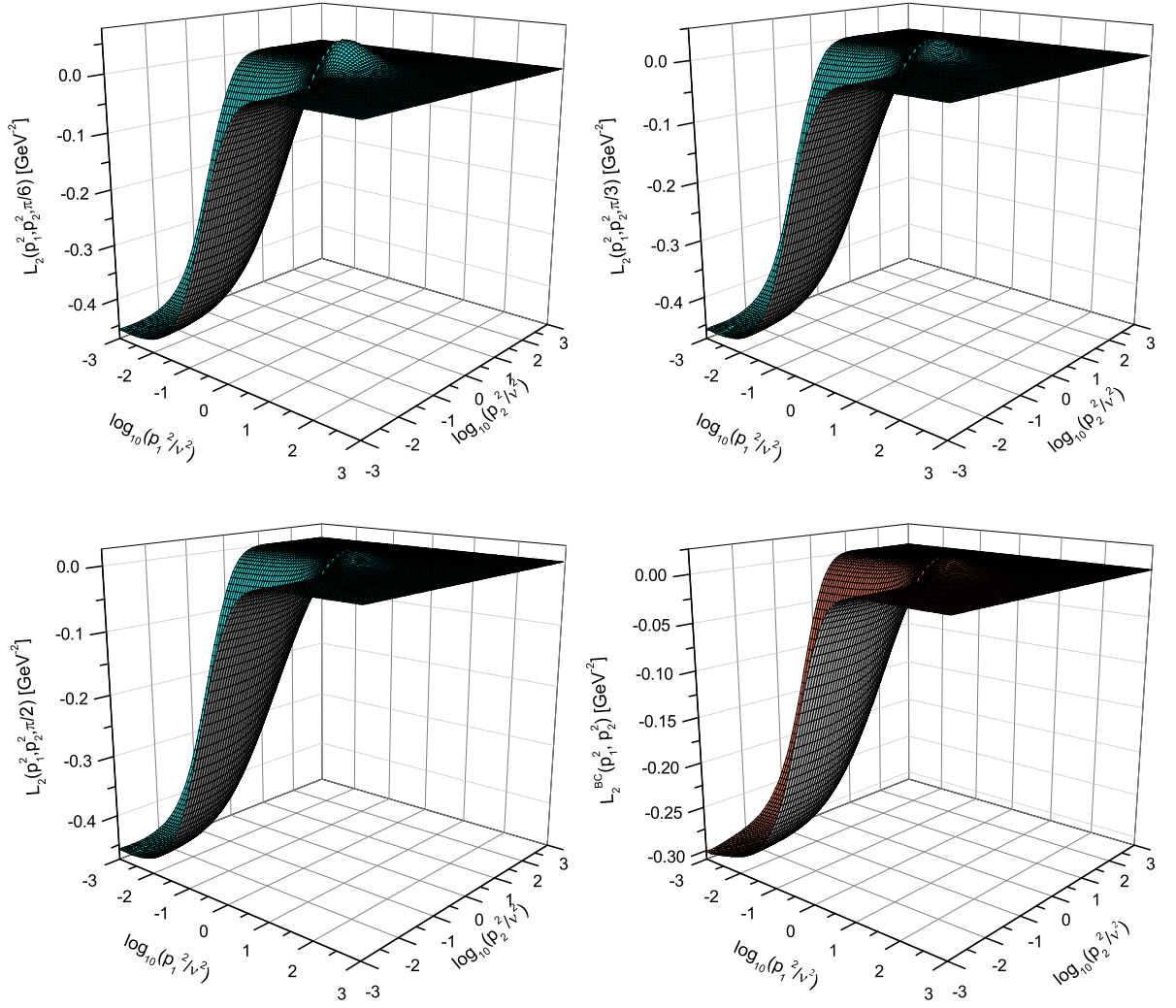


Figura 5.6: $L_2(p_1^2, p_2^2, \theta)$ para $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$, e $\theta = \pi/2$, junto com $L_2^{\text{BC}}(p_1^2, p_2^2)$ (painel inferior direito).

árvore $L_3^{(0)} = 0$ para grandes valores dos momentos (seja p_1 ou p_2 , ou ambos). Além disso, podemos ver que L_3 e L_3^{BC} se comportam de forma diferente no IR, onde claramente vemos que o L_3^{BC} apresenta uma oscilação. Note que L_3 satura no IR em $\approx -0.45 \text{ GeV}^{-1}$, que é maior (em módulo) do que o valor na origem de L_3^{BC} .

(iv) Já na Fig. 5.8, notamos que a dependência angular de L_4 é desprezível. A principal característica deste fator de forma é sua estrutura extremamente suprimida em toda a região de momento. Observe que, independentemente do ângulo θ , o seu valor máximo é $\approx 0.027 \text{ GeV}^{-1}$. Omitimos o gráfico de $L_4^{\text{BC}}(p_1^2, p_2^2)$ já que ele é identicamente nulo [veja Eq. (3.42)].

(v) Finalmente, com o intuito de apreciarmos a influência numérica dos X_i nos fatores de forma L_i , na Fig. 5.9 comparamos nossos resultados dos L_i (superfícies coloridas) com

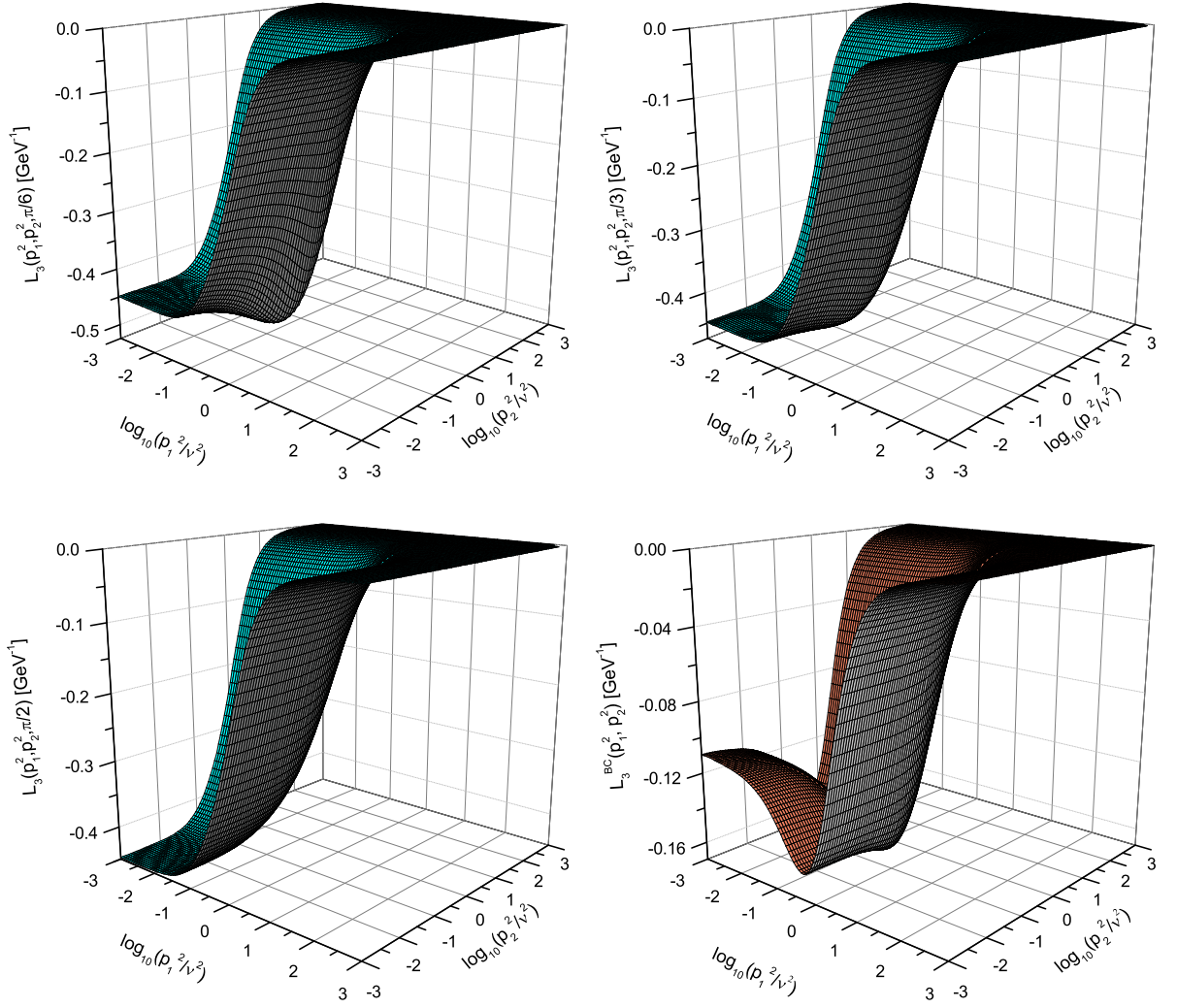


Figura 5.7: $L_3(p_1^2, p_2^2, \theta)$ para $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$, e $\theta = \pi/2$, junto com $L_3^{\text{BC}}(p_1^2, p_2^2)$ (painel inferior direito).

os resultados obtidos quando os X_i são fixados no seu valor em nível de árvore (superfícies em ciano) para um ângulo fixo ($\theta = \pi/6$). Isto é, fizemos na Eq. (A.9) os fatores de forma iguais a $X_0 = \overline{X}_0 = 1$ e $X_i = \overline{X}_i = 0$, para $i \geq 1$, desta maneira obtemos a chamada estrutura “mínima” não abeliana para o vértice quark-glúon, $L_i^{\text{FBC}}(p_1^2, p_2^2, \theta) = F(q)L_i^{\text{BC}}(p_1^2, p_2^2)$, já introduzida na Eq. (3.43) [21, 22, 48]. Na Fig. 5.9 fica evidente que nossos resultados para L_1 e L_2 são significativamente menores, em módulo, do que os resultados obtidos L_1^{FBC} e L_2^{FBC} . Por outro lado, quando comparamos o fator de forma L_3 e L_3^{FBC} (painel inferior esquerdo) notamos o efeito oposto.

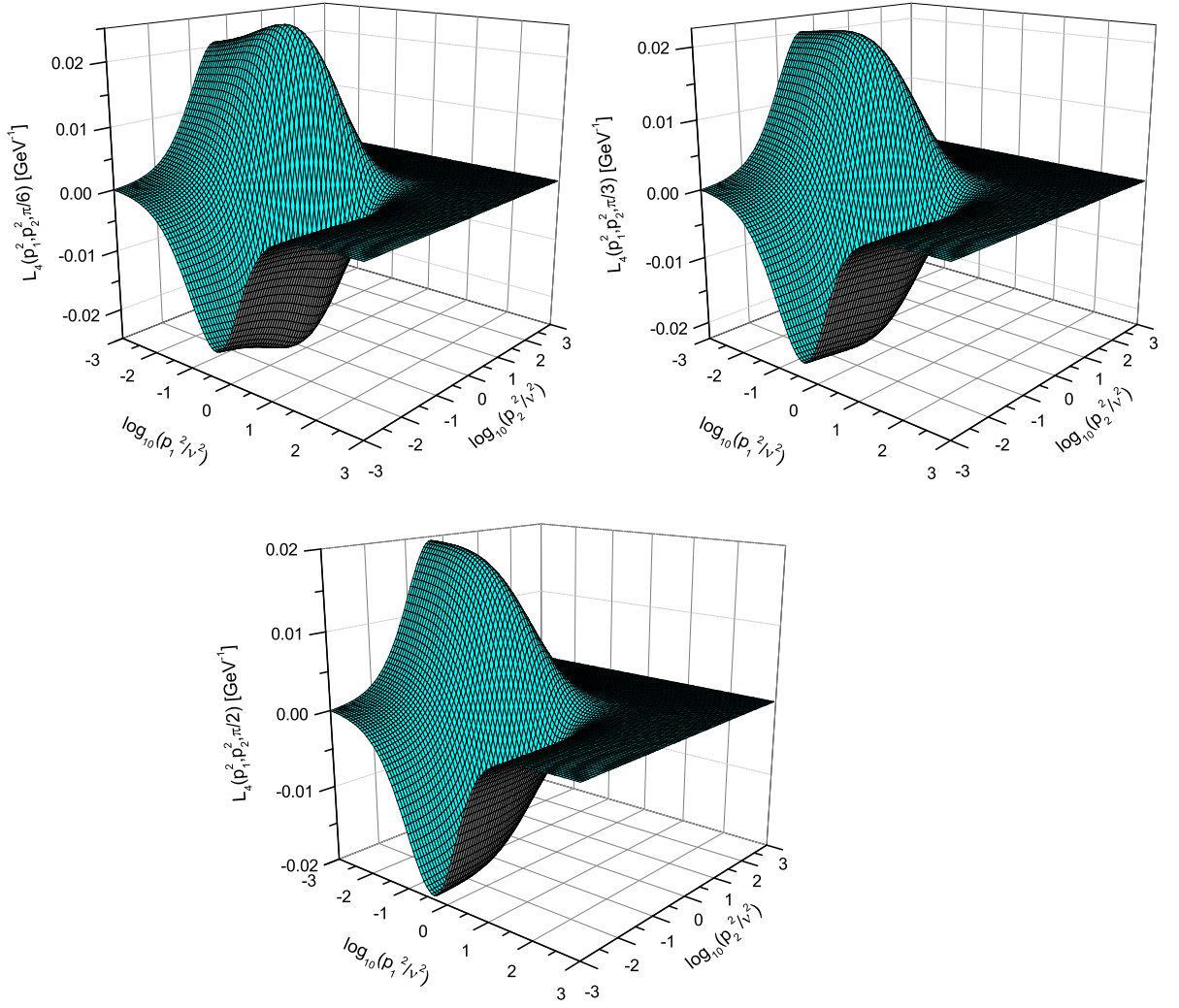


Figura 5.8: $L_4(p_1^2, p_2^2, \theta)$ para $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$, e $\theta = \pi/2$. Omitimos $L_4^{\text{BC}}(p_1^2, p_2^2)$ já que ele é identicamente nulo.

5.4.2 Caso $\mathcal{M}(0) = 450 \text{ MeV}$

Nesta seção, recalculamos os X_i e L_i utilizando como input as soluções para $A(p)$ e $B(p)$ que geram uma massa para os quarks de $\mathcal{M}(0) = 450 \text{ MeV}$, que foram mostradas na Fig. 5.2 (linha tracejada). Além da diferença no valor da massa, lembramos que neste caso $A(p)$ é praticamente uma função monotônica.

Apesar da diferença nos inputs, encontramos que os X_i apresentam um comportamento qualitativo similar ao já mostrado na Fig. 5.3. Mais especificamente, observamos que para X_0 , X_1 e X_2 , há apenas uma diferença quantitativa nos seus valores no IR que não supera a ordem dos 10%. No caso de X_0 , o valor do máximo com este novo input foi alterado de 1.13 para 1.11, enquanto que para X_1 e X_2 seus valores na origem modificaram de $\pm 0.21 \text{ GeV}^{-1}$

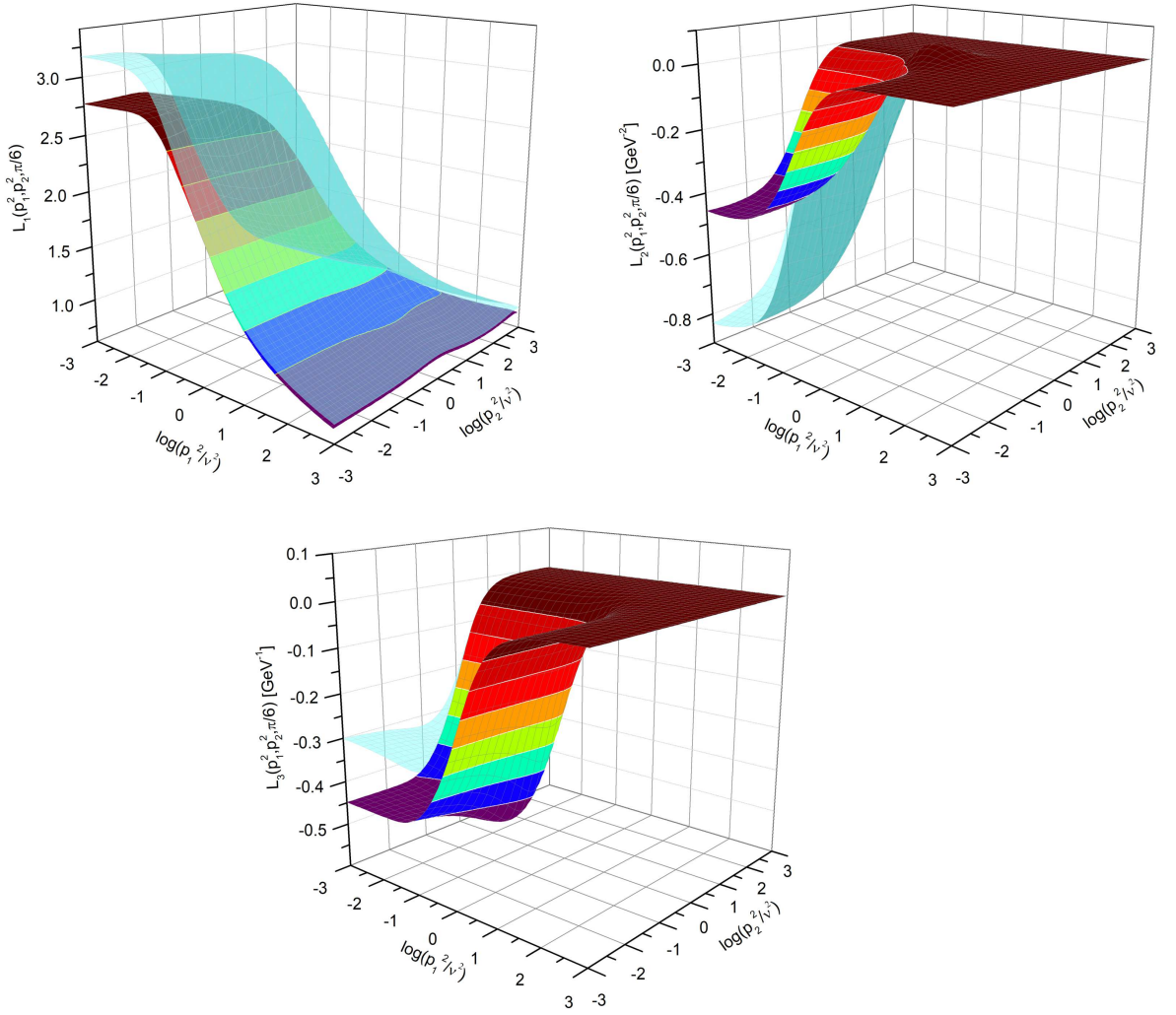


Figura 5.9: Comparação entre os fatores de forma $L_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ (superfície colorida) com $L_i^{\text{FBC}}(p_1^2, p_2^2, \theta)$ que apresenta a estrutura “mínima” não abeliana (superfície em ciano) para $\theta = \pi/6$.

para $\pm 0.22 \text{ GeV}^{-1}$ (veja Fig. 5.3). Por outro lado, X_3 foi o único que apresentou uma alteração mais pronunciada ($\approx 27.5\%$ em módulo), saturando em -0.40 GeV^{-2} ao invés de -0.52 GeV^{-2} . Devido ao comportamento qualitativo dos novos X_i ser bastante parecido com o que já foi apresentado no Fig. 5.3, omitiremos estes resultados.

Com os X_i em mãos, o próximo passo é a obtenção dos L_i a partir da Eq. (A.9). Nas Figs. 5.10, 5.11 e 5.12 apresentamos os resultados para os L_i quando o ângulo $\theta = \pi$. Para efeito de comparação, nos painéis da direita destas figuras mostramos os gráficos dos fatores de forma abelianos, L_i^{BC} , para os casos em que esta quantidade não é identicamente nula.

Agora comparando os resultados das Figs. 5.10, 5.11 e 5.12 com os previamente apre-

sentados nas Figs. 5.4, 5.6, 5.7 e 5.8, podemos fazer as seguintes observações.

(i) Os resultados para L_1 , L_3 e L_4 são qualitativamente muito similares e não parecem ser sensíveis a uma forma particular de $A(p)$ e $B(p)$, ou ao valor da massa dinâmica dos quarks.

(ii) Por outro lado, L_2 sofre uma alteração relativamente grande. Seu comportamento deixa de ser uma superfície suave como mostrado na Fig. 5.6 e reverte o seu sinal. Ou seja, quando $A(p)$ é quase monotônica no IR, L_2 se torna positivo para todo o intervalo de momento, saturando no IR por volta do valor de 0.1 GeV^{-2} (veja o painel inferior esquerdo da Fig. 5.10). Esta forte mudança pode ser atribuída ao fato de que $A(p)$ entra na expressão para L_2 multiplicado por uma combinação particular de X_0 e X_3 [ver Eq. (A.9)]; no limite que $p_1 \rightarrow p_2$, esta equação se reduz a uma derivada. Devido às correções de X_0 e X_3 serem ambas da mesma ordem, qualquer mudança nos seus valores no IR pode causar oscilações no sinal de L_2 . É interessante notar que L_3 possui um termo similar [veja Eq. (A.9)]; mas que, em este caso, a função escalar $A(p)$ é multiplicada por uma combinação de X_1 e X_2 , que tende a ser uma quantidade muito menor no IR, interferindo na forma de L_3 como um termo subdominante.

(iii) Por último, como pode-se intuir, os fatores de forma abelianos L_i^{BC} são notoriamente mais sensíveis às mudanças funcionais das funções $A(p)$ e $B(p)$. De maneira particular, note que o L_1^{BC} da Fig. 5.10 apresenta um comportamento mais suave comparado com o que foi mostrado na Fig. 5.4. Fica evidente que isto é uma consequência de ter trocado o comportamento de $A(p)$ para uma função aproximadamente monotônica, já que os planos onde $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$ no L_1^{BC} da Fig. 5.10 deve reproduzir, por construção, uma forma funcional similar a $A(p)$, que foi simplesmente deslocada e multiplicada por uma constante, *i.e.* $A(p)/2 + A(0)/2$.

5.5 Configurações cinemáticas especiais: gráficos 2-D

Nesta seção vamos calcular os fatores de forma L_i em cinco configurações cinemáticas de momentos. As configurações que discutiremos são as seguintes:

(i) O limite *soft-glúon* é definido quando os momentos p_1 e p_2 possuem a mesma magnitude *i.e.* $|p_1| = |p_2| = |p|$ e o ângulo entre eles é $\theta = 0$;

(ii) Na configuração *simétrica de quarks* os momentos também possuem a mesma magnitude, $|p_1| = |p_2| = |p|$, porém eles são anti-paralelos *i.e.*, $\theta = \pi$;

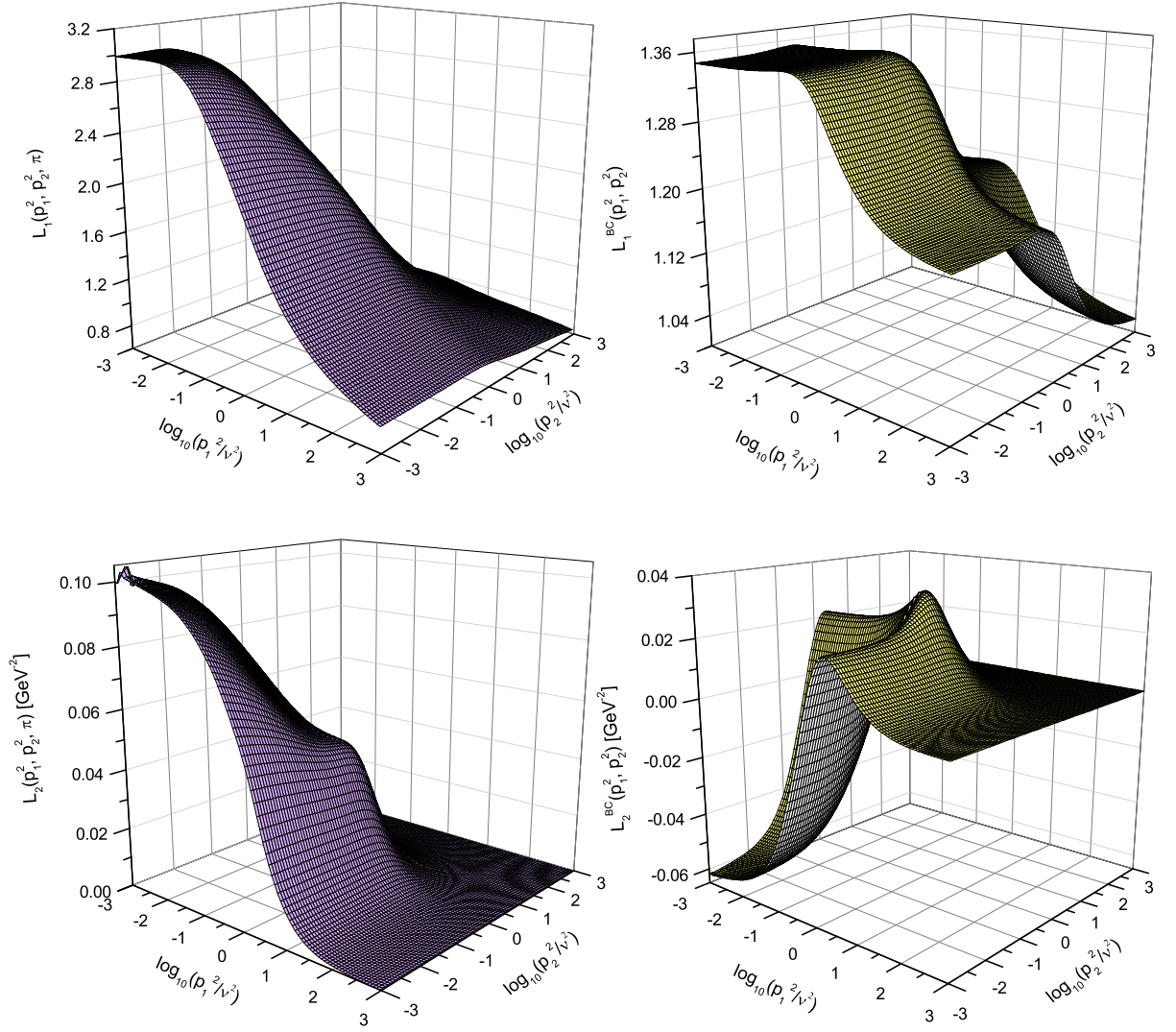


Figura 5.10: Os fatores de forma L_1 e L_2 quando $\theta = \pi$ (painéis da esquerda) e suas contrapartes abelianas correspondentes L_1^{BC} e L_2^{BC} (painéis da direita). Ambos gráficos foram calculados usando como inputs as funções $A(p)$ e $B(p)$ que geram uma massa de $\mathcal{M}(0) = 450$ MeV mostradas na Fig. 5.2 (linha tracejada).

- (iii) O limite de *soft-anti-quark* é obtido quando o momento do anti-quark é nulo, *i.e.* $p_1 \rightarrow 0$ e $p_2 \rightarrow p$;
- (iv) No limite de *soft-quark* o momento do quark é nulo, *i.e.* $p_2 \rightarrow 0$ e $p_1 \rightarrow p$;
- (v) A configuração *totalmente simétrica* é definido quando o quadrado dos três momentos do vértice quark-glúon são iguais, *i.e.* $p_1^2 = p_2^2 = q^2 = p^2$ e o ângulo entre eles é $\theta = 2\pi/3$.

Vale a pena ressaltar que para todas as configurações listadas, os fatores de forma L_i serão todos função de um único momento, que chamaremos p . A notação que usaremos para chamar cada L_i em cada configuração será: $L_i^g(p)$, $L_i^{\text{sym}}(p)$, $L_i^{\bar{q}}(p)$, $L_i^q(p)$ e $L_i^{\text{TS}}(p)$,

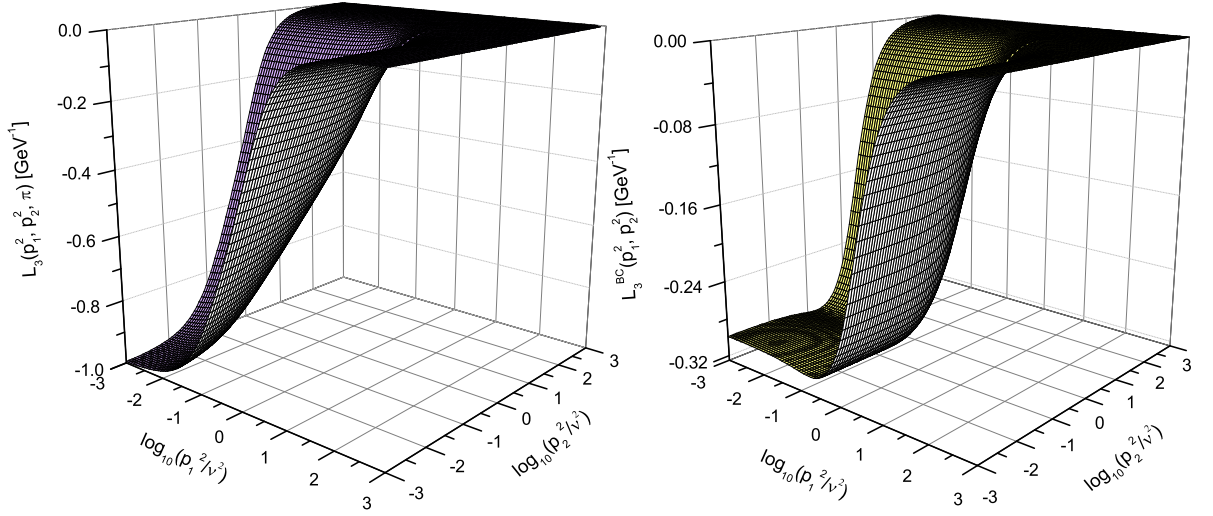


Figura 5.11: O fator de forma L_3 para $\theta = \pi$ (painel da esquerda) e o correspondente fator de forma abeliano L_3^{BC} (painel da direita), calculados usando como inputs $A(p)$ e $B(p)$ que geram uma massa de $\mathcal{M}(0) = 450$ MeV.

respectivamente.

Existem dois métodos para determinar os fatores L_i nas configurações cinemáticas acima mencionadas. Eles são:

1. Método analítico: Podemos derivar analiticamente as expressões para os L_i , nas configurações cinemáticas mencionadas, tomando os respectivos limites diretamente nos X_i dados pelas Eqs. (4.19) e depois substituímos o resultado na Eq. (A.9) para obter os L_i . Entretanto, devemos ser cuidadosos ao tomar este limite devido à presença da função h nos três denominadores das Eqs. (4.19). Note, que no espaço euclidiano

$$h = p_1^2 p_2^2 \sin^2 \theta, \quad (5.5)$$

h se anula quando implementamos os limites cinemáticos definidos nos casos (i)-(iv). Portanto, os denominadores das expressões na Eq. (4.19) devem ser expandidos apropriadamente (quando temos que $\sin \theta \rightarrow 0$, ou $p_1 \rightarrow 0$, ou $p_2 \rightarrow 0$). Os termos divergentes serão cancelados depois de realizar as integrais angulares. Os detalhes de como implementar estes limites para as configurações (i) e (ii) estão descritos no Apêndice B.

2. Método numérico: Podemos também extrair estes limites diretamente dos resultados numéricos obtidos para a configuração geral de momento para cada L_i , pois todas as

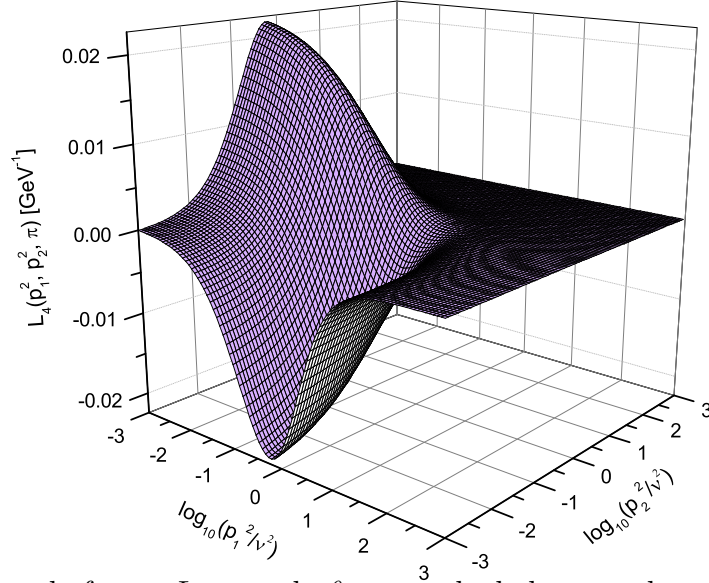


Figura 5.12: O fator de forma L_4 quando $\theta = \pi$, calculados usando como inputs $A(p)$ e $B(p)$ que geram uma massa de $\mathcal{M}(0) = 450$ MeV.

configurações cinemáticas especiais são projeções particulares (planos) dos gráficos em 3-D. Note que, para extrair o limite cinemático corretamente, o ângulo θ dos dados 3-D que vamos utilizar, devem coincidir com valor de θ que a configuração especial fixa.

Obviamente, os resultados obtidos com ambos métodos devem coincidir.

Para compreender melhor como é possível extrair estas projeções, vamos nos concentrar no plano definido pela equação $p_1 = p_2$ da Fig. 5.5 que corresponde à “fatia” que define o limite de soft-glúon $L_1^g(p)$, já que nesta figura o ângulo foi fixado em $\theta = 0$. Este caso particular foi isolado e está representado pela linha preta no painel superior esquerdo da Fig. 5.13. Observe que $L_1^g(p)$ tem um comportamento suave, decrescendo monotonicamente da região IR até UV. É muito importante ressaltar que o fato de que, $L_1^g(\mu) \neq 1$, não está em contradição com a condição de renormalização previamente definida na Eq. (5.4). Esta condição de renormalização assegura que L_1 será igual à unidade no ponto totalmente simétrico, definido quando $p_1^2 = p_2^2 = q^2 = \mu^2$.

Seguindo o mesmo procedimento podemos extrair os outros fatores de forma $L_2^g(p)$ e $L_3^g(p)$. Estes resultados estão no painel superior esquerdo da Fig. 5.13 e foram plotados na forma de combinações adimensionais, *i.e.*, $p^2 L_2^g(p)$ (linha tracejada vermelha) e $-p L_3^g(p)$ (linha pontilhada azul). Note que estas combinações anulam-se no IR (devido à presença do momento p) e são menores do que $L_1^g(p)$.

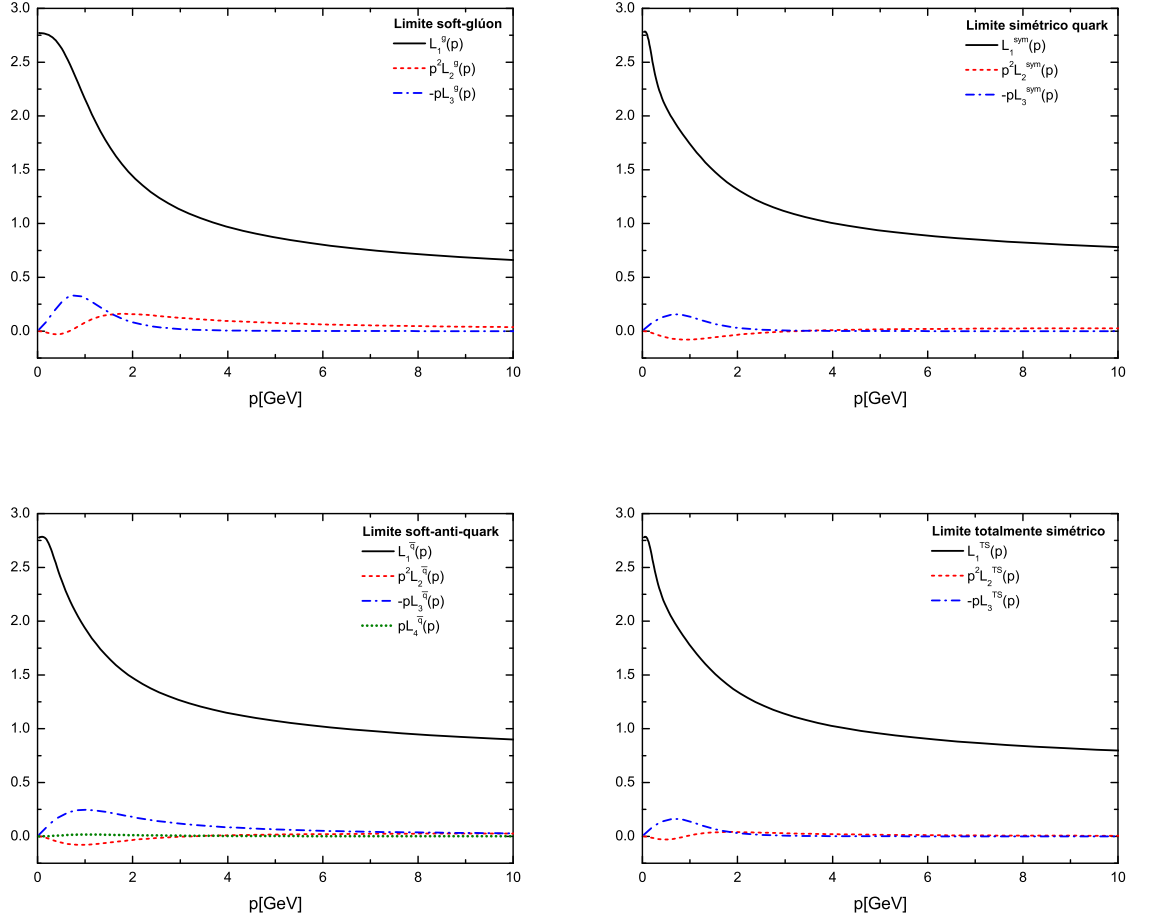


Figura 5.13: Os fatores de forma $L_i(p)$ para diferentes limites cinemáticos. Os $L_i^g(p)$ são os fatores de forma no limite soft-glúon (painel superior esquerdo). Os $L_i^{sym}(p)$ representam a configuração simétrica de quarks (painel superior direito). Os $L_i^q(p)$ [ou $L_i^{\bar{q}}(p)$] ilustram o limite de soft-anti-quark [ou soft-quark] (painel inferior esquerdo), enquanto que os, $L_i^{TS}(p)$ correspondem à configuração totalmente simétrica de quarks (painel inferior direito).

No painel superior direito da Fig. 5.13 apresentamos os $L_i^{sym}(p)$ na configuração simétrica de quarks. Note que a projeção de $L_1^{sym}(p)$ (linha preta) corresponde à fatia definida pelo plano $p_1 = p_2$ em um gráfico 3-D para $L_1(p_1^2, p_2^2, \theta)$ com $\theta = \pi^2$. Embora as estruturas tensoriais λ_2^μ , λ_3^μ e λ_4^μ definidas pela Eq. (4.9) no limite simétrico de quark anulem-se, os fatores de forma $L_2^{sym}(p)$ e $L_3^{sym}(p)$ não são nulos. Portanto, neste mesmo gráfico mostramos as combinações $p^2 L_2^{sym}(p)$ (linha vermelha tracejada) e $-p L_3^{sym}(p)$ (linha pontilhada azul).

As próximas quantidades de interesse são os fatores de forma no limite de soft-anti-quark, $L_i^{\bar{q}}(p)$, que são apresentados no painel inferior esquerdo da Fig. 5.13. Como $L_i^{\bar{q}}(p)$

²Este gráfico 3-D para L_1 não foi mostrado neste trabalho.

não possui dependência com o ângulo θ , podemos selecionar o plano $p_1 = 0$ (para fins práticos $p_1 \approx 30$ MeV) em qualquer um dos gráficos das Figs. 5.4, 5.6, 5.7 e 5.8, já que iremos encontrar o mesmo resultado para todos os $L_i^{\bar{q}}(p)$.

No caso da configuração de soft-quark, $L_i^q(p)$, note que das Eqs. (4.5), (4.8) e (A.9), pode-se concluir que $L_i^{\bar{q}}(p) = L_i^q(p)$ para $i = 1, 2, 3$, enquanto que $L_4^{\bar{q}}(p) = -L_4^q(p)$; isto acontece pela simetria sob a troca $p_1 \leftrightarrow p_2$ nas três primeiras estruturas tensoriais na Eq. (4.8), enquanto que a quarta é assimétrica. Portanto, os resultados numéricos para $L_1^q(p)$, $p^2 L_2^q(p)$ e $-p L_3^q(p)$ são idênticos aos já apresentados na Fig. 5.13, exceto para $p L_4^q(p)$ (linha pontilhada verde), que reverte o sinal.

Finalmente, a configuração totalmente simétrica de quarks, $L_i^{\text{TS}}(p)$ foi obtida selecionando o plano definido por $p_1^2 = p_2^2$ no gráfico 3-D para $\theta = 2\pi/3$. Os resultados destas projeções estão no painel inferior direito da Fig. 5.13.

Note que todos os $L_i(p)$, para as distintas configurações cinemáticas, exibem um padrão bastante similar. Especificamente, podemos notar que todos os $L_1(p)$ possuem picos estreitos de tamanhos parecidos localizados em uma região de uns poucos MeV, e que decrescem logaritmicamente no UV, enquanto $p^2 L_2(p)$ e $-p L_3(p)$ são quantidades bastantes suprimidas e que anulam-se nos limites IR e UV.

5.6 Comparação com trabalhos anteriores

Nesta seção comparamos nossos resultados para o vértice quark-glúon na configuração de soft-glúon com os resultados obtidos previamente na literatura através de métodos analíticos [68, 69, 77, 99] e através de simulações de QCD na rede [34, 63]

Escolhemos este limite para nossas comparações já que é a configuração cinemática mais exploradas na literatura. Além disso, esse é um dos poucos limites que pode ser calculado através simulações da QCD na rede sem ser “contaminado” pela parte transversa do vértice.

Lembramos que os resultados apresentados nas Refs [68, 69] foram obtidos através de uma versão aproximada da ESD para o vértice quark-glúon, que mantém somente os diagramas de 1-loop vestido que compõem a expansão de Γ_μ . A principal diferença entre os trabalhos das Ref. [68] e [69] está na forma funcional implementada para o propagador do glúon, $\Delta(q)$. No caso da Ref. [68] foi usada a chamada aproximação de “rainbow-ladder” onde o produto $g^2 \Delta(q)$ é substituído por um *Ansatz* fenomenológico [110]. Por outro

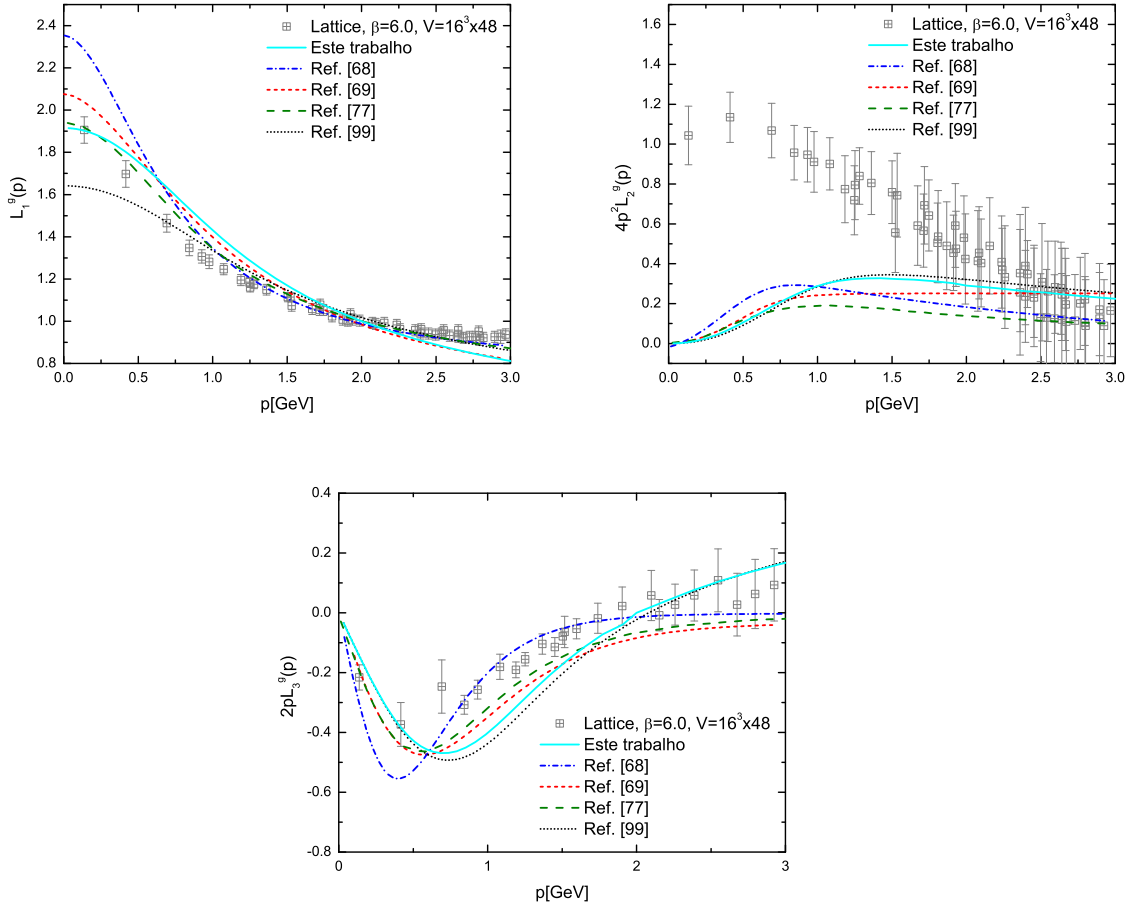


Figura 5.14: Comparação de nossos resultados (ciano) na configuração de soft-glúon com os resultados analíticos previamente obtidos nas Refs. [68] (curva com traços e pontos azul), [69] (curva tracejada vermelha), [77] (curva tracejada verde), [99] (curva pontilhada preta). Os dados da QCD na rede são das Refs. [63, 64].

lado, na Ref. [69], os diagramas de 1-loop vestido foram calculados usando ingredientes não perturbativos derivados dentro do formalismo da chamada “solução de escala”, onde o propagador do glúon é nulo na origem e do ghost diverge mais que um polo simples [21, 48].

Já na Ref. [77], os autores construíram uma ação efetiva 3PI em três loops para determinar a estrutura do vértice quark-glúon. Para obter seus resultados, eles utilizaram como dados inputs para os propagadores do glúon e do ghost que estão em acordo com os resultados da rede da Ref. [87]. Por último, na Ref. [99] implementou-se uma versão melhorada da “gauge technique”, onde além de determinar os fatores de forma longitudinais do vértice também foram estimados os fatores de forma transversos. Para determinar os fatores de forma transversos usou-se a chamada identidade de Ward transversa [111–116] e para $\Delta(q)$ e $F(q)$ foram utilizados os resultados da QCD na rede de [32].

Para comparar nossos resultados com os dados da rede [34, 63], é importante menci-

onar que estes resultados foram obtidos usando uma massa de corrente para o quark de $m_0 = 115$ MeV. Além disso, os fatores de forma foram renormalizados na escala $\mu' = 2$ GeV. Portanto, para fazer esta análise, vamos empregar somente nesta seção um novo conjunto de inputs para $A(p)$, $B(p)$, $\Delta(q)$ e $F(q)$ que foram obtidos usando os mesmos valores de m_0 e μ' acima mencionados. Para derivar estes inputs fizemos $\alpha(\mu') = 0.45$ baseando-nos no procedimento descrito em [99].

Na Fig. 5.14 comparamos nossos resultados para os fatores de forma $L_1^g(p)$, $4p^2L_2^g(p)$ e $2pL_3^g(p)$ na configuração de soft-glúon (curva ciano) com os resultados obtidos em [99] (curva pontilhada preta), [68] (curva pontilhada azul) e [69] (curva vermelha). Além disso, apresentamos os resultados de [77] (curva tracejada verde) e os dados da QCD rede obtidos em [63,64] (quadrados).

Note que nossos resultados para os fatores $L_1^g(p)$ e $2pL_3^g(p)$ estão em bom acordo tanto com os dados da rede como com os resultados analíticos prévios. Já no caso de $4p^2L_2^g(p)$, podemos observar que nosso resultado apresenta o mesmo comportamento qualitativo que foi encontrado pelos estudos analíticos anteriores; em particular, vemos que todas as curvas analíticas tendem à zero na origem. Porém, como podemos claramente observar na Fig. 5.14, todos os resultados analíticos diferem dos resultados encontrados na QCD na rede.

6

QDSQ com vértice BC não abeliano

No Capítulo anterior os fatores de forma X_i e L_i foram calculados considerando as funções $A(p)$ e $B(p)$, que definem o comportamento não perturbativo do propagador do quark, como inputs externos. Neste capítulo, vamos aprimorar nossa análise acoplando a ESD do quark com as quatro equações dos fatores de forma X_i na aproximação de 1-loop vestido. O acoplamento destes dois conjuntos de equações integrais se dá devido à presença do vértice quark-glúon na ESD do quark. Para este vértice vamos considerar somente os fatores de forma longitudinais, L_i , expressos pela Eq. (A.9), que foram determinados através da gauge technique. Estes fatores de forma, por sua vez, são expressos em termos dos quatro X_i e das próprias funções $A(p)$ e $B(p)$. Assim, o sistema acoplado resultante é formado por seis equações integrais. Determinaremos a solução numérica deste sistema acoplado e na sequência analisaremos o impacto que as contribuições não abelianas do vértice quark-glúon têm no fenômeno de geração de massa para os quarks. Também dedicaremos parte de nossas discussões para o delicado processo de renormalização da ESD do quark, que precisa ser ajustado afim de reproduzir o comportamento correto para a dimensão anômala da massa do quark. Finalizaremos este capítulo utilizando as soluções numéricas encontradas $A(p)$ e $B(p)$ para calcular a constante de decaimento do pión.

6.1 Sistema de equações acopladas

No Capítulo 4 mostramos que os quatro fatores de forma L_i do vértice quark-glúon, Γ_μ^{STI} , podem ser determinados exatamente através da gauge technique que “resolve” a STI que este vértice satisfaz. As expressões resultantes para os L_i , não somente envolvem as funções $A(p)$ e $B(p)$ que definem o propagador completo do quark, $S(p)$, mas também o

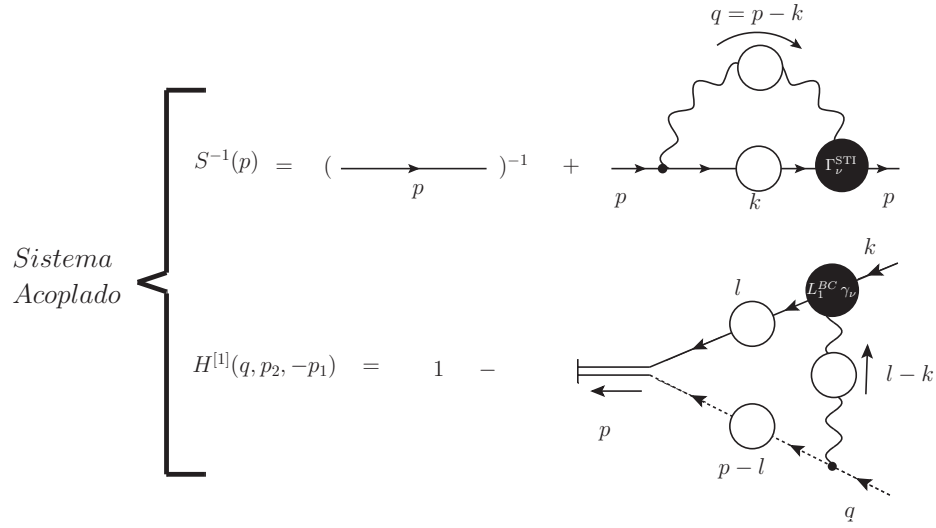


Figura 6.1: Representação diagramática do sistema acoplado formado pela ESD para o propagador do quark, $S(p)$, e do kernel de espalhamento quark-ghost na aproximação de 1-loop vestido, $H^{[1]}(q, k, -p)$. Note que é o vértice quark-glúon, $\Gamma_{\nu}^{\text{STI}}(q, k, -p)$, que acopla $S(p)$ com $H^{[1]}(q, k, -p)$.

dressing do ghost, $F(q)$, além dos quatro fatores de forma X_i do kernel quark-ghost [veja a Eq. (A.9)]. Também discutimos no Capítulo 3 que o vértice quark-glúon desempenha um papel crucial no fenômeno da QDSQ. Portanto, a pergunta mais natural que surge é: Qual é o impacto que $\Gamma_{\mu}^{\text{STI}}$ tem na geração de uma massa dinâmica para o quark? Mais precisamente, estamos interessados em quantificar as contribuições relacionadas com o setor de ghost da teoria, em especial dos fatores de forma X_i do kernel quark-ghost.

Relembramos que na Sec. 3.5, derivamos a ESD para o quark utilizando modelos simplificados para o vértice quark-glúon. Nestes modelos, o vértice quark-glúon foi parcialmente abelianizado, já que o kernel quark-ghost H foi aproximado em nível de árvore, *i.e.*, $H^0 = 1$ e $F(q)$ foi mantido vestido [veja as Eqs. (3.45), (3.46) e (3.52), respectivamente]. Aqui, derivaremos a ESD do quark utilizando o $\Gamma_{\mu}^{\text{STI}}$ da Eq. (4.8). Ao fazer isto notamos que as equações para $S(p)$ e $H^{[1]}(q, k, -p)$ se acoplam através do vértice quark-glúon $\Gamma_{\mu}^{\text{STI}}$, formando assim um sistema de seis equações integrais acopladas envolvendo as funções $A(p)$, $B(p)$ e os quatro X_i . Este sistema acoplado está diagramaticamente representado na Fig. 6.1.

Após substituir na Eq. (3.35) $\Gamma_{\nu} \rightarrow \Gamma_{\nu}^{\text{STI}}(q, k, -p)$ ¹, podemos tomar os traços e chegar nas seguintes expressões para as equações integrais satisfeitas para $A(p)$ e $B(p)$ (no espaço

¹ Para que a definição de $\Gamma_{\mu}^{\text{STI}}$, dada pela Eq. (4.8), seja compatível com a convenção de momentos utilizada na ESD do quark da Fig. 6.1 é necessário fazer as seguintes mudança de variáveis nas Eqs. (4.8) e (4.12): $p_1 \rightarrow p$, $p_2 \rightarrow k$, e $q = p - k$.

euclidiano)

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= Z_F p^2 + Z_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_A(k, p) \Delta(q) F(q), \\ B(p) &= Z_1 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_B(k, p) \Delta(q) F(q), \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde as expressões para os kernels são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A(k, p) &= \left\{ \frac{3}{2} (k \cdot p) \bar{L}_1 - [\bar{L}_1 - (k^2 + p^2) \bar{L}_2] h_1(p, k) \right\} \mathcal{Q}_A(k) \\ &\quad - \left\{ \frac{3}{2} p \cdot (k + p) \bar{L}_4 + (\bar{L}_3 - \bar{L}_4) h_1(p, k) \right\} \mathcal{Q}_B(k), \\ \mathcal{K}_B(k, p) &= \left\{ \frac{3}{2} k \cdot (k + p) \bar{L}_4 - (\bar{L}_3 + \bar{L}_4) h_1(p, k) \right\} \mathcal{Q}_A(k) \\ &\quad + \left\{ \frac{3}{2} \bar{L}_1 - 2h_1(p, k) \bar{L}_2 \right\} \mathcal{Q}_B(k), \end{aligned} \quad (6.2)$$

com $L_i := F(q) \bar{L}_i / 2$. Já as funções $\mathcal{Q}_i(k)$ e $h_1(p, k)$ foram definidas nas Eqs. (3.38) e (3.47), respectivamente.

Podemos ver que os kernels $\mathcal{K}_A(k, p)$ e $\mathcal{K}_B(k, p)$ dependem dos quatro L_i dados pelas Eq. (A.9). Portanto é através dos L_i que as funções $A(p)$ e $B(p)$, dadas pelas Eqs. (6.1), se acoplam às quatro equações integrais para os fatores de forma X_i , expressos nas Eq. (A.6).

Desta forma, o sistema formado pelas Eqs. (6.1) e (A.6) estabelecem as seguintes dependências explícitas entre as funções

$$\begin{aligned} A(p) &\rightarrow \{A(k), B(k), X_i(p^2, k^2, \theta)\}, \\ B(p) &\rightarrow \{A(k), B(k), X_i(p^2, k^2, \theta)\}, \\ X_i(p^2, k^2, \theta) &\rightarrow \{A(l), B(l)\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Vale a pena destacar que a derivação deste sistema acoplado dado pelas Eqs. (6.1) e (A.6) foi apresentado pela primeira vez na literatura em nosso trabalho [49]. Antes de resolvê-lo numericamente, precisamos fazer alguns ajustes no processo de renormalização afim de corrigir o comportamento da dimensão anômala do massa do quark.

6.2 Renormalização e a dimensão anômala da massa

Para resolver o sistema acoplado apresentado na seção anterior, precisamos definir as constantes de renormalização Z_1 e Z_F que aparecem na Eq. (6.1). Como foi discutido no final da Sec. 4.1.1, a STI definida na Eq. (4.1) estabelece a relação entre as constantes de renormalização $Z_1 = Z_c^{-1} Z_F Z_H$. Entretanto, no gauge de Landau, tanto $S(p)$ quanto $H(q, k, -p)$ são finitos em 1-loop [117], logo Z_F e Z_H são constantes de renormalização finitas. Assim, de forma aproximada, podemos considerar que $Z_F = Z_H = 1$, o que nos leva à relação $Z_1 = Z_c^{-1}$. Aplicando estas duas últimas relações na Eq. (6.1) nos leva à seguinte versão aproximada para a equação de gap

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= p^2 + Z_c^{-1} 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_A(k, p) \Delta(q) F(q), \\ B(p) &= Z_c^{-1} 4\pi C_F \alpha_s \int_k \mathcal{K}_B(k, p) \Delta(q) F(q). \end{aligned} \quad (6.4)$$

A presença da constante de renormalização Z_c^{-1} multiplicando a Eq. (6.4) é ainda um fator complicante que precisa ser tratado durante o processo de truncamento da equação de gap [67, 118–121]. É sabido que o tratamento das divergências que se sobrepõem depende de um cancelamento sutil que ocorre entre a constante de renormalização multiplicativa Z_c^{-1} e as contribuições cruciais que vêm da parte transversa do vértice [122]. Como Γ_μ^T não pode ser determinado em nosso tratamento, este delicado cancelamento fica comprometido desde o início. Uma das possíveis consequências deste desbalanço no processo de cancelamento das divergências pode ser sentido no comportamento da dimensão anômala da massa do quark. Note que, se além de assumir que $\Gamma_\mu^T = 0$ nós insistirmos em aproximar $Z_c^{-1} = 1$ na Eq. (6.4), obteremos uma resposta incorreta para a dimensão anômala da massa do quark [22]. De forma mais detalhada, sabemos que o comportamento assintótico de $\mathcal{M}(p)$ em ordem de 1-loop é dado por [19, 123, 124].

$$\mathcal{M}_{\text{UV}}(p) = \frac{C}{p^2} \left[\ln \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \right]^{\gamma_f - 1}, \quad (6.5)$$

onde C é uma constante com dimensão de massa $[M]^3$, $\gamma_f = 12/(11C_A - 2n_f)$ é a dimensão anômala da massa. Entretanto, ao implementar a aproximação $Z_c^{-1} = 1$, o comportamento assintótico da massa do quark obtida como resultado da equação gap fica distorcido², pois

²No Apêndice C apresentamos com detalhes a derivação da dimensão anômala de $\mathcal{M}(p)$ e como surge

$$\gamma_f = 48/(35C_A - 8n_f).$$

Uma maneira de corrigir este problema foi elaborada em [22], nos mesmos moldes de uma proposta apresentada anteriormente em [48]. Em linhas gerais, ela consiste em realizar a substituição

$$Z_c^{-1}\mathcal{K}_{A,B}(p,k) \rightarrow \mathcal{K}_{A,B}(p,k)\mathcal{C}(q), \quad (6.6)$$

onde a função $\mathcal{C}(q)$ precisa ser construída de maneira que o produto

$$\mathcal{R}(q) = \alpha_s \Delta(q, \mu) F(q, \mu) \mathcal{C}(q, \mu), \quad (6.7)$$

seja invariante sob o grupo de renormalização (RGI) (independente de μ) pelo menos em 1-loop.

Ao impor que $\mathcal{R}(q)$ seja RGI, estamos indiretamente restringindo o comportamento UV de $\mathcal{C}(q)$ para que ele seja da forma

$$\mathcal{C}_{UV}(q) = 1 + \frac{9C_A\alpha_s}{48\pi} \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right). \quad (6.8)$$

Entretanto o comportamento IR $\mathcal{C}(q)$ permanece completamente indeterminado, o que nos leva à necessidade de introduzir *Ansätze* específicos para esta função. Evidentemente, podemos imaginar que existam várias funções que assintoticamente reproduzam o comportamento dado pela Eq. (6.8), mas que na região de baixos momentos sejam completamente distintas entre si.

Uma das candidatas mais naturais para desempenhar o papel de $\mathcal{C}(q)$ na Eq. (6.6) é a função de dressing do propagador do ghost, $F(q)$, já que ela exhibe exatamente o mesmo comportamento UV dado pela Eq. (6.8) e seu comportamento é bem conhecido no IR. De fato essa substituição já foi implementada anteriormente no trabalho [22].

Uma outra função que exhibe o comportamento de 1-loop exigido pela Eq. (6.8) é o inverso da função auxiliar $1+G(q)$, que é uma função de Green que desempenha um papel chave nas aplicações contemporâneas do formalismo PT-BFM [23, 125–127]. No gauge de Landau esta função coincide com a função de Kugo-Ojima [21, 128–131].

Como mencionado, $[1+G(q)]^{-1}$ possui o mesmo comportamento perturbativo definido em Eq. (6.8), enquanto que o seu comportamento para momentos baixos e intermediários pode ser determinado através de sua ESD [132]. De fato, graças à identidade

este resultado errôneo para γ_f .

$[1 + G(0)]^{-1} = F(0)$, válida no gauge de Landau [28], ambas as funções coincidem no momento zero [132], diferindo quantitativamente apenas para momentos intermediários (veja a Fig. 6.2).

A solução da ESD para $[1 + G(q)]^{-1}$ pode ser fitada com a forma funcional [49]

$$[1 + G(q)]^{-1} = 1 + \frac{9C_A\alpha_s}{48\pi} I(q) \ln \left(\frac{q^2 + \rho_3 m^2(q)}{\mu^2} \right), \quad (6.9)$$

com

$$\begin{aligned} m^2(q) &= \frac{m^4}{q^2 + \rho_2 m^2}, \\ I(q) &= 1 + D \exp \left(-\frac{\rho_4 q^2}{\mu^2} \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde $m^2 = 0.55 \text{ GeV}^2$, $\rho_2 = 0.60$, $\rho_3 = 0.50$, $\rho_4 = 2.08$, $\alpha_s = 0.22$, $D = 3.5$ e $\mu = 4.3 \text{ GeV}$.

Vamos considerar três modelos para a função $\mathcal{C}(q)$. Os primeiros dois terão a função $[1 + G(q)]^{-1}$ como seu principal ingrediente, enquanto que o terceiro será simplesmente a função $F(q)$. Evidentemente, estes *Ansätze* devem ser encarados como três possibilidades simplificadas que representam uma classe muito maior de funções que satisfazem a restrição imposta pela Eq. (6.8), mas que podem apresentar comportamentos IR completamente distintos³. Os *Ansätze* que usaremos são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(q) &= [1 + G(q)]^{-1}, \\ \mathcal{C}_2(q) &= \frac{q^2}{q^2 + a_1} \left[1 + \exp \left(-\frac{a_2 q^2}{\mu^2} \right) \right] [1 + G(q)]^{-1}, \\ \mathcal{C}_3(q) &= F(q), \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde $a_1 = 0.13 \text{ GeV}^2$ e $a_2 = 50$. Além disso, a função $F(q)$ também pode ser fitada como a mesma forma funcional dada na Eq. (6.9), onde os parâmetros correspondentes são $m^2 = 0.55 \text{ GeV}^2$, $\rho_2 = 2.57$, $\rho_3 = 0.50$, $\rho_4 = 3.83$ e $D = 2.24$. Todas as funções estão renormalizadas em $\mu = 4.3 \text{ GeV}$.

Na Fig. 6.2 são apresentadas as três funções $\mathcal{C}_i(q)$ da Eq. (6.11), juntamente com os dados da QCD da rede para $F(q)$ [32]. Podemos notar que as caudas perturbativas das três funções se fundem aproximadamente na região de 3 GeV, já que elas possuem, por

³Vale a pena ressaltar, que se o comportamento de $\mathcal{C}(q)$ tiver como origem Γ_μ^T , é natural esperar que $\mathcal{C}(q)$ apresente uma dependência como os momentos k , p e θ e não somente com $q^2 = (k - p)^2$.

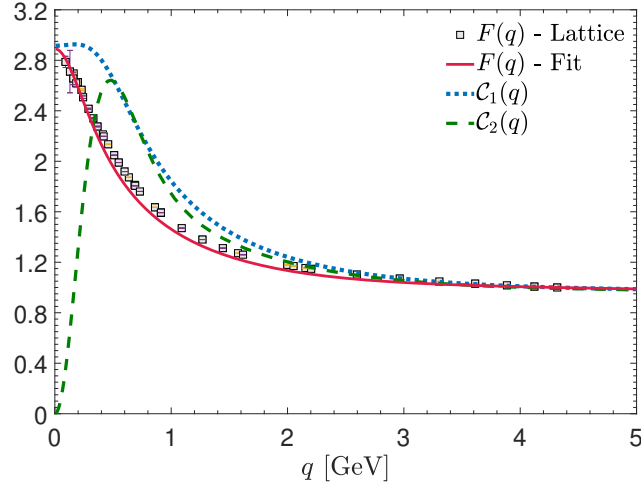


Figura 6.2: Comparação das funções $\mathcal{C}_1(q)$ (curva pontilhada azul), $\mathcal{C}_2(q)$ (curva tracejada verde) e $\mathcal{C}_3(q) = F(q)$ (curva contínua vermelha) dadas pela Eqs. (6.11). Todas as funções estão renormalizadas em $\mu = 4.3$ GeV. Os dados da QCD na rede para $F(q)$ foram obtidos em [32].

construção, o mesmo comportamento assintótico. Além disto, podemos ver que $\mathcal{C}_3(q)$ é mais suprimida do que $\mathcal{C}_1(q)$ e $\mathcal{C}_2(q)$ no intervalo de momentos de [400 MeV, 2 GeV]. Por outro lado, a principal diferença entre os dois primeiros *Ansätze* aparece aproximadamente para momentos menores do que 700 MeV; desta maneira, enquanto $\mathcal{C}_1(q)$ satura no valor de $F(0)$ e decresce monotonicamente, $\mathcal{C}_2(q)$ se anula na origem e apresenta um máximo na região de 500 MeV.

Por fim, ao fazer a substituição da Eq. (6.6) na Eq. (6.4), nós chegamos às versões finais das equações integrais para $A(p)$ e $B(p)$ dadas por

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= p^2 + 4\pi C_F \int_k \mathcal{K}_A(k, p) \mathcal{R}_i(q), \\ B(p) &= 4\pi C_F \int_k \mathcal{K}_B(k, p) \mathcal{R}_i(q), \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $\mathcal{R}_i(q)$ faz referência as três combinações RGI definidas na Eq. (6.7) que podem ser construídas utilizando os três $\mathcal{C}_i(q)$ da Eq. (6.11).

6.3 Análise numérica do sistema acoplado

O conjunto de ESDs truncadas formado pelas Eqs. (6.12) e (A.6), juntamente com os L_i dados pela Eq. (A.9), formam um sistema acoplado de seis equações não lineares para $A(p)$, $B(p)$ e os quatro X_i . Entretanto este sistema não é fechado devido à necessidade de especificar $\Delta(q)$, $F(q)$ e $\mathcal{C}_i(q)$. Idealmente poderíamos considerar um sistema de equações

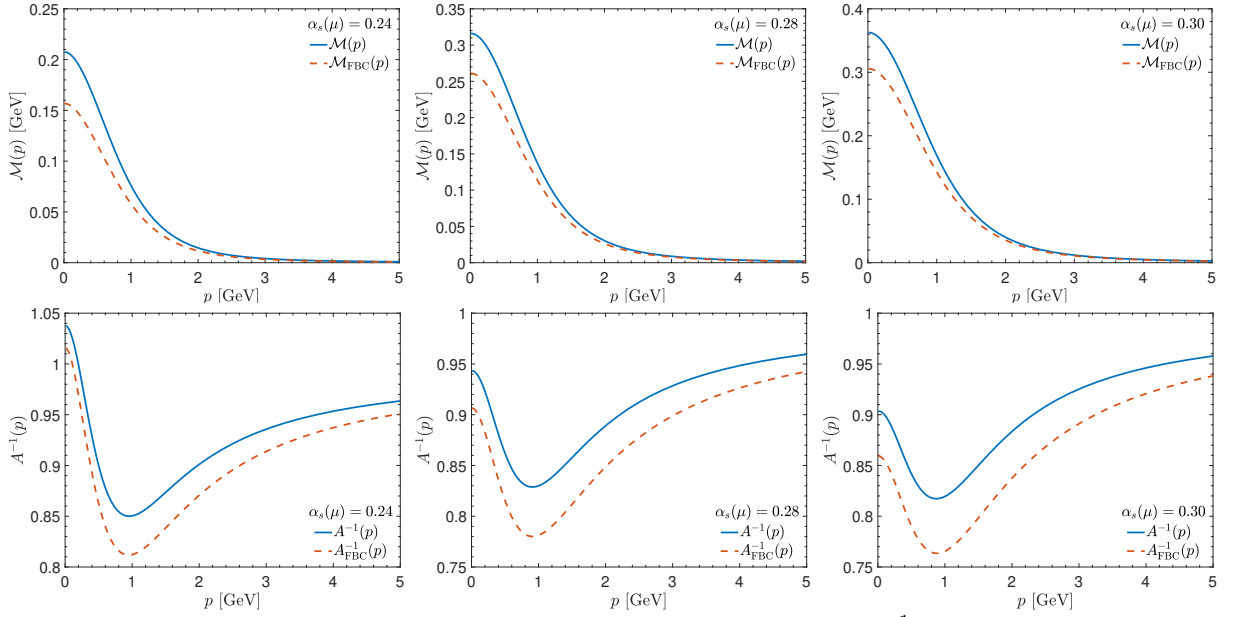


Figura 6.3: Comparação de $\mathcal{M}(p)$ (painéis superiores) e de $A^{-1}(p)$ (painéis inferiores) obtidos com Γ_μ^{STI} (curva contínua azul) ou com Γ_μ^{FBC} (curva tracejada laranja). Todas as soluções foram derivadas utilizando função $\mathcal{C}_1(q)$ da Eq. (6.11) e usamos $\alpha_s = 0.24$ (painéis da esquerda), $\alpha_s = 0.28$ (painéis centrais) e $\alpha_s = 0.30$ (painéis da direita).

ainda mais estendido, que englobasse também as duas ESDs que descrevem o comportamento não perturbativo de $\Delta(q)$ e $F(q)$. Entretanto, o sistema de equações resultante seria muito complexo. Para reduzir o nível de dificuldade deste problema, vamos seguir os mesmos passos adotados em uma série de trabalhos prévios [22, 76] onde $\Delta(q)$, $F(q)$ e $\mathcal{C}_i(q)$ são tratados como inputs externos. Para isto, vamos empregar os fits para os resultados de $\Delta(q)$ e $F(q)$ que foram obtidos pela QCD na rede [32]. Lembramos que estes fits foram apresentados nas Eqs. (5.1) e (6.9). O fit para $\Delta(q)$ pode ser visto na Fig. 5.1 (painel da esquerda), enquanto que na Fig. 6.2 mostramos os ajustes para $F(q)$ e $\mathcal{C}_i(q)$. Ressaltamos que as três quantidades, $\Delta(q)$, $F(q)$ e $\mathcal{C}_i(q)$ estão renormalizadas em $\mu = 4.3$ GeV.

6.3.1 Solução do sistema acoplado

Com os inputs externos definidos, estamos em posição de resolver numericamente o sistema acoplado de seis equações integrais para $A(p)$, $B(p)$ e os quatro X_i definido pelas Eqs. (6.12) e (A.6). Com estas soluções em mãos, os fatores de forma L_i serão obtidos através de uma substituição direta na Eq. (A.9).

O sistema de ESD (6.12) e (A.6) foi resolvido iterativamente. Para isto, usamos um grid de 136 valores diferentes do momento p^2 distribuídos logaritmicamente no intervalo $[5 \times 10^{-5} \text{ GeV}^2, 5 \times 10^3 \text{ GeV}^2]$. Já o intervalo angular foi dividido uniformemente em 25

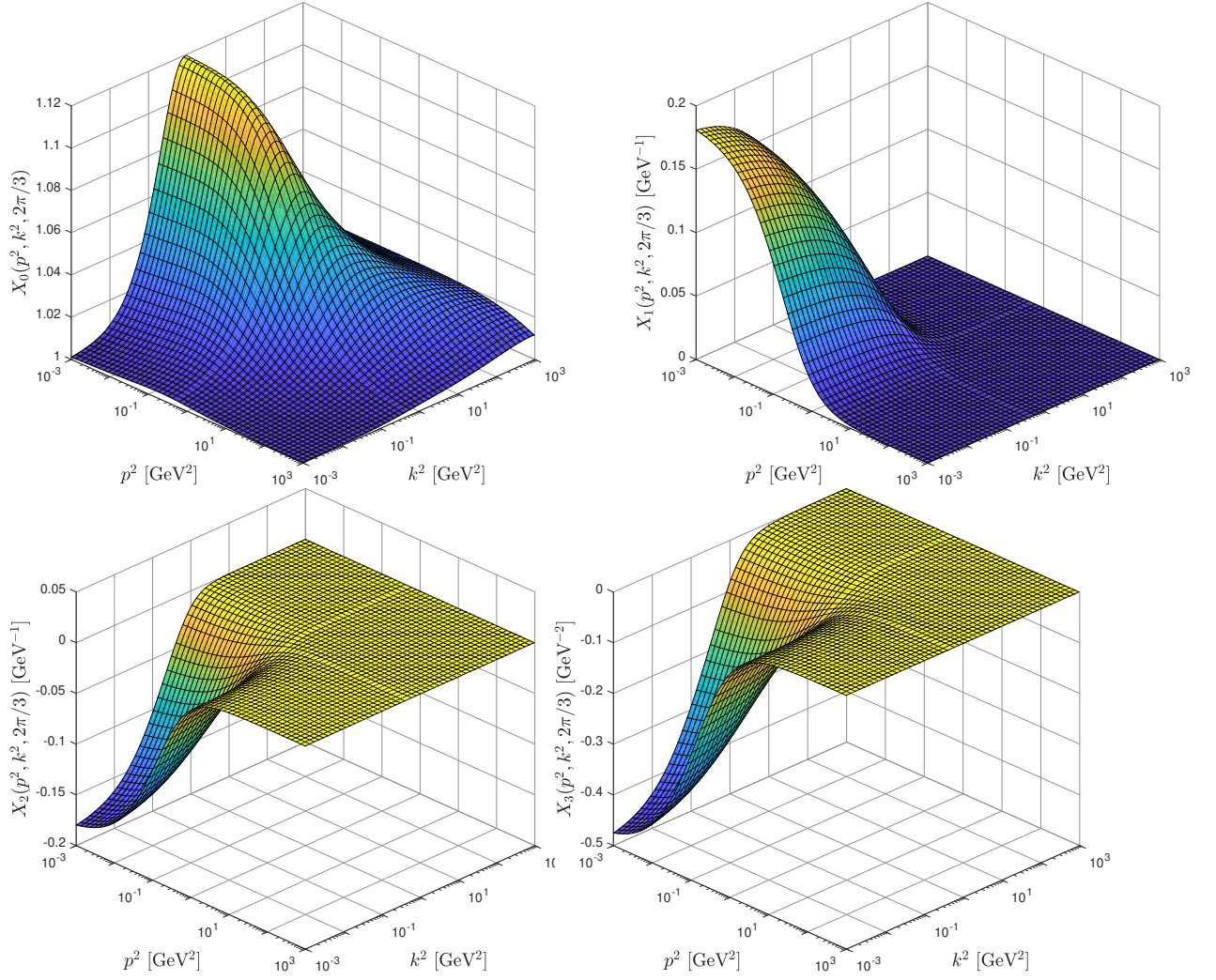


Figura 6.4: Os fatores de forma $X_i(p^2, k^2, 2\pi/3)$ obtidos como soluções do sistema de acoplado das Eqs. (6.12) e (A.14) quando $\alpha_s = 0.28$ e $\theta = 2\pi/3$.

valores entre 0 até π .

Na Fig. 6.3 mostramos os resultados numéricos para duas das seis equações integrais: (i) a massa dinâmica do quark, $\mathcal{M}(p)$ (painel superior), e (ii) a função de onda do quark, $A^{-1}(p)$ (painel inferior). Todas estas curvas foram obtidas utilizando a função $\mathcal{C}_1(q)$ no produto $\mathcal{R}_1(q)$ [veja as Eqs. (6.11) e (6.7)]. Além disto, fixamos a constante de acoplamento da seguinte forma: $\alpha_s = 0.24$ (painéis da esquerda), $\alpha_s = 0.28$ (painéis centrais) e $\alpha_s = 0.30$ (painéis da direita).

Dado que a principal característica do nosso esquema de truncamento é a presença da contribuição não trivial de H , expressa pelo conjunto de equações para o X_i , é interessante avaliar o impacto que H possui no fenômeno de geração dinâmica de massa para o quark. Para isso, na Fig. 6.3 comparamos os resultados obtidos para $\mathcal{M}(p)$ e $A^{-1}(p)$, quando empregamos na equação de gap (i) o vértice completo, Γ_μ^{STI} (curva contínua azul) e (ii) o

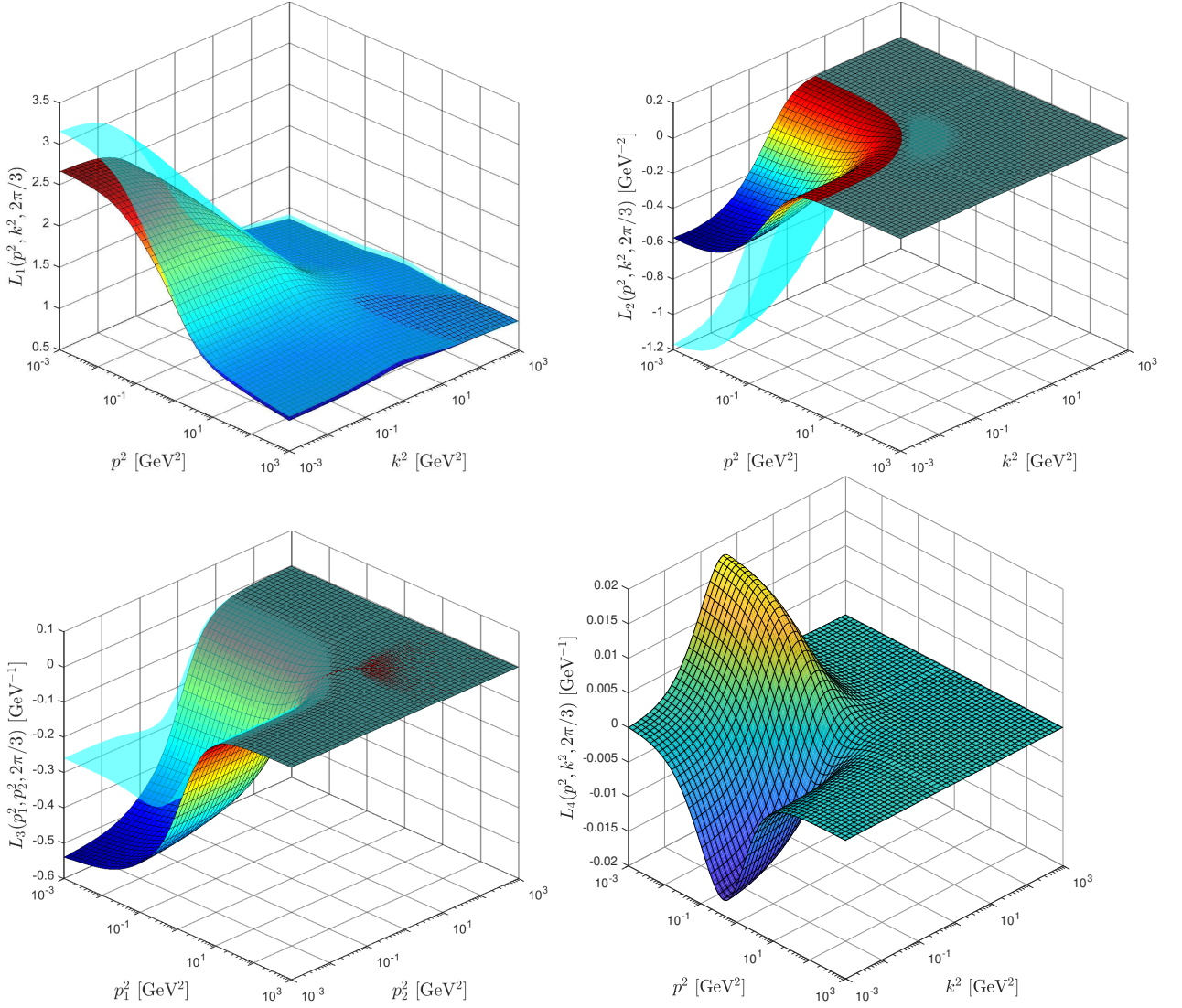


Figura 6.5: Os fatores de forma longitudinais do vértice quark-glúon L_i obtidos através da substituição na Eq. (A.9) das soluções do sistema acoplado dado pelas Eqs. (6.12) e (A.6) (superfícies coloridas). Todos os gráficos representam o caso onde $\alpha_s = 0.28$ e $\theta = 2\pi/3$. As superfícies em ciano representam os fatores de forma “minimamente não abelianizado”, L_i^{FBC} , definidos na Eq. (3.44).

vértice “minimamente não abelianizado”, Γ_μ^{FBC} [introduzido nas Eqs. (3.43) e (3.44)] (curva tracejada laranja). Observe que embora as duas soluções sejam qualitativamente similares, a contribuição do H tem um impacto quantitativo significativo, produzindo valores de massas maiores que no caso em que ele é colocado em nível de árvore. Evidentemente, o valor exato da diferença entre $\mathcal{M}(p)$ e $\mathcal{M}_{\text{FBC}}(p)$ depende de α_s : desta maneira quanto menor o valor de α_s a diferença entre $\mathcal{M}(p)$ e $\mathcal{M}_{\text{FBC}}(p)$ é maior. Mais precisamente, o valor de $\mathcal{M}(0)$ é aproximadamente 32 %, 21 % e 19 % maior que $\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)$, quando $\alpha_s = 0.24$, $\alpha_s = 0.28$ e $\alpha_s = 0.30$, respectivamente. Portanto, a inclusão de H parece ser crucial para gerar massas de quark fenomenológicas compatíveis da ordem de 300 MeV. Já para

$A^{-1}(p)$ e $A_{\text{FBC}}^{-1}(p)$ observamos o efeito contrário, ou seja, aumentando o valor de α_s a diferença relativa entre $A^{-1}(p)$ e $A_{\text{FBC}}^{-1}(p)$ torna-se maior.

Na Fig. 6.4 apresentamos, na forma de gráficos 3D, as soluções para os quatro fatores de forma X_i , determinados através do sistema acoplado fixando $\alpha_s = 0.28$ e $\theta = 2\pi/3$. Observe que todos os $X_i(p^2, k^2, 2\pi/3)$ são finitos no IR e que as superfícies tendem assintoticamente ao seu valor perturbativo esperado.

Com os resultados de X_i em mãos, nós podemos determinar o fatores de forma L_i utilizando a Eq. (A.6). Na Fig. 6.5 apresentamos os resultados para os fatores de forma L_i obtidos com $\alpha_s = 0.28$ e $\theta = 2\pi/3$. Como podemos ver os L_i (superfície colorida) apresentam um comportamento bastante similar aos resultados apresentados na Sec. 5.3 [compare com a Fig. 5.9], onde $A(p)$ e $B(p)$ foram tratados como inputs externos. É interessante também notar que os L_i apresentam desvios significativos dos L_i^{FBC} (superfície em ciano), definidos na Eq. (3.44) e que não contêm os efeitos do kernel de espalhamento H [76].

Vamos agora discutir a contribuição individual que cada um dos L_i fornece aos resultados de $A^{-1}(p)$ e $\mathcal{M}(p)$. Para isto, nós resolvemos o sistema de ESDs “ligando” gradualmente cada um dos L_i que formam os kernels \mathcal{K}_A e \mathcal{K}_B , dados pela Eq. (6.2). O resultado deste exercício está na Fig. 6.6, onde cada cor representa as soluções para $A^{-1}(p)$ e $\mathcal{M}(p)$ correspondentes, obtidos quando ligamos cada um dos L_i sucessivamente. Fica claro que L_1 é o fator de forma que fornece a maior contribuição para $\mathcal{M}(p)$. Entretanto é interessante notar que todos L_i contribuem de forma significativa para aumentar a capacidade

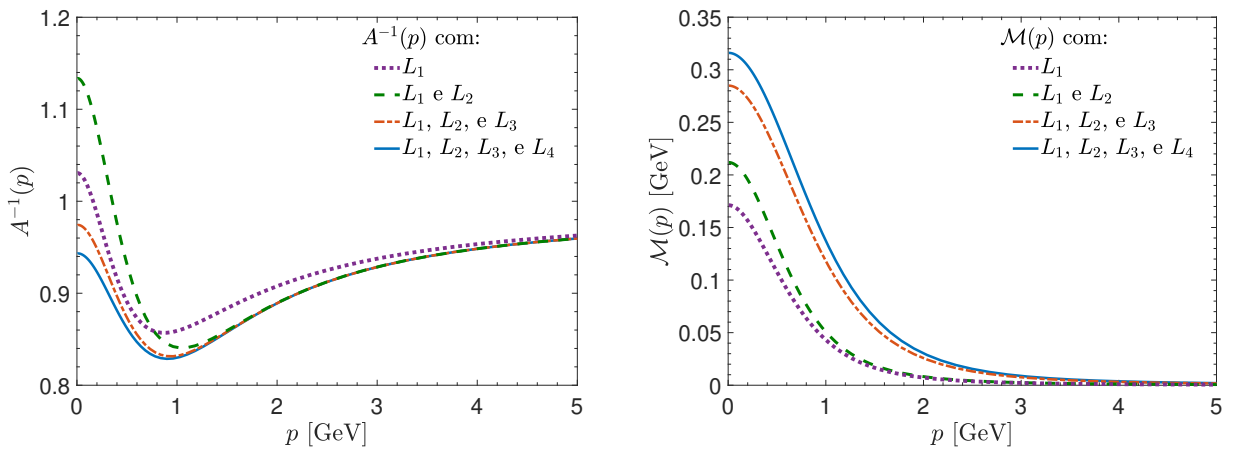


Figura 6.6: Impacto das contribuições individuais dos fatores de forma L_i na (i) função de onda do quark, $A^{-1}(p)$ (painel da esquerda) e (ii) na massa dinâmica do quark, $\mathcal{M}(p)$ (painel da direita).

que o kernel da equação de gap tem para gerar valores de $\mathcal{M}(p)$ mais altos. Note que L_2 contribui com aproximadamente 13% do valor de $\mathcal{M}(0)$, enquanto que L_3 fornece por volta de 23% desse valor. Vale a pena destacarmos que, embora L_4 possua uma estrutura bastante suprimida [veja Fig. 6.5] e que usualmente ele seja desprezado nos estudos de QDSQ [19, 22, 48], determinamos que ele surpreendentemente contribui com 10% do valor de $\mathcal{M}(0)$.

6.3.2 Variando as funções $\mathcal{C}_i(q)$

Nesta subseção vamos determinar qual é a influência das funções $\mathcal{C}_i(q)$ nas soluções do sistema acoplado. Para isto, resolvemos novamente o sistema de ESDs formado pelas Eqs. (6.12) e (A.6) usando $\mathcal{C}_2(q)$ e $\mathcal{C}_3(q)$ ao invés de $\mathcal{C}_1(q)$ [ou equivalentemente, $\mathcal{R}_1(q) \rightarrow \mathcal{R}_2(q)$ ou $\mathcal{R}_1(q) \rightarrow \mathcal{R}_3(q)$].

Na Fig. 6.7 comparamos as soluções obtidas para $A^{-1}(p)$ e $\mathcal{M}(p)$ quando implementamos os três *Ansätze* para $\mathcal{C}_i(q)$ que foram definidos na Eq. (6.11). Os gráficos correspondem aos resultados obtidos fixando $\alpha_s = 0.24$ (painéis da esquerda), $\alpha_s = 0.28$ (painéis centrais) e $\alpha_s = 0.30$ (painéis da direita).

Embora $\mathcal{C}_2(q)$ apresente uma supressão significativa na região IR quando comparado com $\mathcal{C}_1(q)$ e $\mathcal{C}_3(q)$ [veja Fig. 6.2], podemos observar que os dois primeiros modelos geram massas para os quark praticamente iguais: as massas obtidas usando $\mathcal{C}_1(q)$ (curva pontilhada azul) são ligeiramente maiores que as obtidas com $\mathcal{C}_2(q)$ (curva tracejada verde). Note que a diferença relativa entre os resultados obtidos como $\mathcal{C}_1(q)$ e $\mathcal{C}_2(q)$ diminui a medida que o valor de α_s aumenta. Em especial, nos concentramos na diferença relativa entre os valores encontrados para $\mathcal{M}(0)$ com $\mathcal{C}_1(q)$ e com $\mathcal{C}_2(q)$, encontramos uma variação de 20% para $\alpha_s = 0.24$, 10% quando $\alpha_s = 0.28$ e 6% para $\alpha_s = 0.30$.

Também podemos notar através da Fig. 6.7 que $\mathcal{C}_3(q)$ não fornece o suporte necessário ao kernel da Eq. (6.12) para acionar o mecanismo de geração de massa dinâmica quando $\alpha_s = 0.24$ (curva contínua vermelha no painel superior da esquerda). Mesmo aumentando o valor de α_s , notamos que embora a simetria quiral seja quebrada, os valores da massa são muito baixos. Em particular, encontramos que $\mathcal{M}(0)$ é 160 MeV para $\alpha_s = 0.28$ e 217 MeV quando $\alpha_s = 0.30$. Assim, a função $\mathcal{C}_3(q)$ produz $\mathcal{M}(p)$ que são fenomenologicamente desfavoráveis.

É importante ressaltar que o padrão observado na Fig. 6.7 corrobora com nosso entendimento atual sobre o comportamento geral da ESD do quark, confirmando mais uma vez

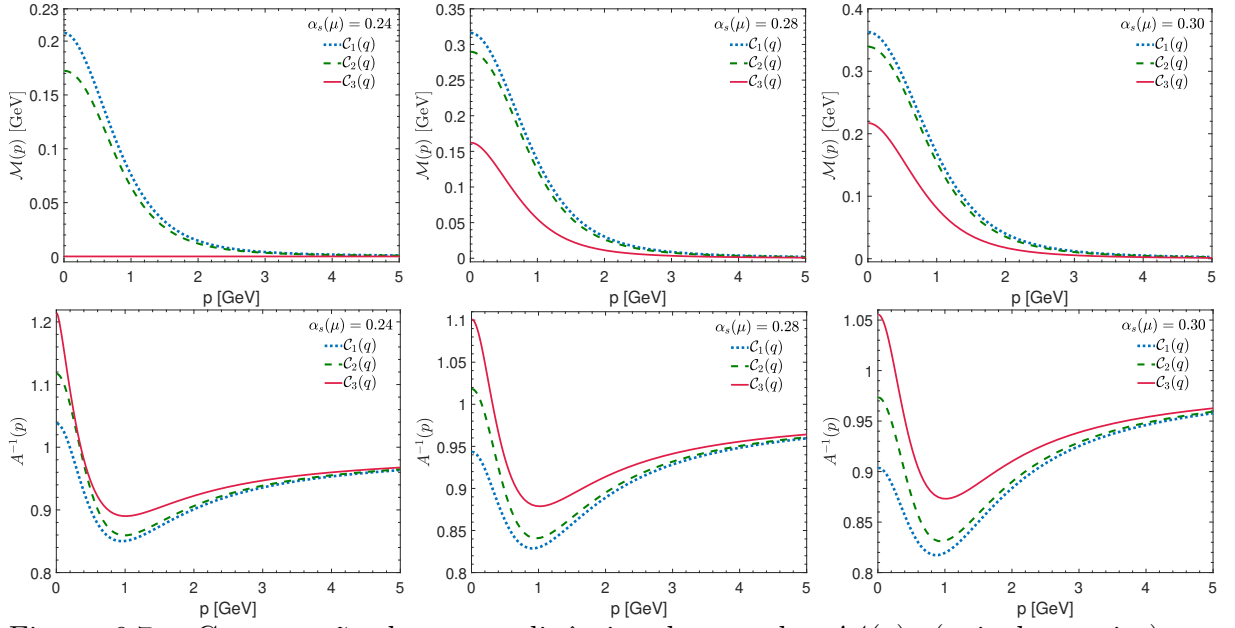


Figura 6.7: Comparação da massa dinâmica dos quarks, $\mathcal{M}(p)$, (painel superior) e a função de onda do quark, $A^{-1}(p)$, (painel inferior) obtidas quando utilizamos os $\mathcal{C}_i(q)$ dados pela Eq. (6.11) para diferentes valores de α_s .

que a região intermediária de momentos é crucial para fornecer o suporte necessário para que a equação de gap seja capaz de gerar valores de massas que sejam fenomenologicamente compatíveis [22, 48]. Por outro lado, fica claro também que modificações do kernel na região IR não afetam significativamente os resultados para a massa do quark [19, 110]. Assim, a origem da pequena diferença entre os valores de $\mathcal{M}(p)$, obtida com os dois primeiros modelos, pode ser naturalmente atribuída à leve supressão que $\mathcal{C}_2(q)$ apresenta na região de $[1 - 2]$ GeV em comparação com $\mathcal{C}_1(q)$, enquanto que a considerável supressão de $\mathcal{C}_3(q)$ na região de $[0.5 - 1.5]$ GeV impossibilita ou reduz substancialmente a geração de massa para o quark.

Por fim, ao observar a Tabela 6.1 podemos construir um panorama geral do impacto do kernel de espalhamento H na geração dinâmica de massa para o quark, quando variamos a função $\mathcal{C}_i(q)$. Observe que nesta tabela, comparamos os valores para $\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)$ e $\mathcal{M}(0)$; no primeiro caso a massa foi obtida com H em nível de árvore [utilizando na equação de gap o vértice “minimamente não abeliano”, $\Gamma_{\mu}^{\text{FBC}}$, definido na Eq. (3.43)], enquanto que no segundo, a massa foi determinada resolvendo o sistema acoplado formado pelas Eqs. (6.12) e (A.6). Desta forma é possível quantificar o impacto do kernel de espalhamento H [ou equivalentemente dos X_i] através da variação percentual

$$I_{\text{H}} = \left[\frac{\mathcal{M}(0)}{\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)} - 1 \right] \times 100\%. \quad (6.13)$$

	Massas com $\mathcal{C}_1(q)$ [MeV]			Massas com $\mathcal{C}_2(q)$ [MeV]			Massas com $\mathcal{C}_3(q)$ [MeV]		
α_s	$\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)$	$\mathcal{M}(0)$	I_H	$\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)$	$\mathcal{M}(0)$	I_H	$\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)$	$\mathcal{M}(0)$	I_H
0.24	157	207	32%	114	172	51%	0	0	0%
0.28	261	316	21%	231	286	24%	86	162	88%
0.30	305	362	19%	278	339	22%	142	217	53%

Tabela 6.1: Comparação dos valores obtidos para $\mathcal{M}_{\text{FBC}}(0)$ e $\mathcal{M}(0)$ quando empregamos os três *Ansätze* $\mathcal{C}_i(q)$ dados na Eq. (6.11).

Na Tabela 6.1 podemos observar que independentemente da forma funcional empregada para $\mathcal{C}_i(q)$, o valor de I_H aumenta quanto o valor de α_s diminui. É interessante notar que, quando estamos próximos dos valores de $\mathcal{M}(0)$ que são fenomenologicamente relevantes (*i.e.*, dentro do intervalo de 280 – 360 MeV), I_H praticamente estabiliza próximo ao valor de 20%.

6.3.3 Fits para as massas constituintes dos quarks

Vale a pena mencionar que todas as massas $\mathcal{M}(p)$ apresentadas na Fig. 6.7 podem ser fitadas com bastante precisão utilizando a seguinte forma funcional

$$\mathcal{M}(p) = \frac{\mathcal{M}_1^3}{\mathcal{M}_2^2 + p^2 [\ln(p^2 + \mathcal{M}_3^2)/\Lambda^2]^{1-\gamma_f}}, \quad (6.14)$$

onde $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ são três parâmetros ajustáveis que possuem dimensão de massa e $\Lambda = 270$ MeV. Note que a presença de \mathcal{M}_2 no denominador garante a saturação de $\mathcal{M}(p)$ na origem, enquanto que o \mathcal{M}_3 , presente no argumento do logaritmo, melhora a convergência do fit.

Verificamos também que a expressão

$$\mathcal{M}(p) = \frac{\mathcal{M}_0}{1 + (p^2/\lambda^2)^{1+d}}, \quad (6.15)$$

é uma outra possibilidade de fit que reproduz com bastante precisão nossos dados numéricos para $\mathcal{M}(p)$. Em geral, o fit dado pela Eq. (6.15) pode ser mais facilmente empregado em integrações numéricas que envolvem $\mathcal{M}(p)$.

Na Fig. 6.8 comparamos os fits construídos com a forma funcional dada pela Eq. (6.15) (curvas contínuas) com as soluções para $\mathcal{M}(p)$ obtidas com $\alpha_s = 0.24$ (círculos vermelhos), $\alpha_s = 0.28$ (quadrados roxos) e $\alpha_s = 0.30$ (estrelas verdes) para $\mathcal{C}_1(q)$ (painel da esquerda)

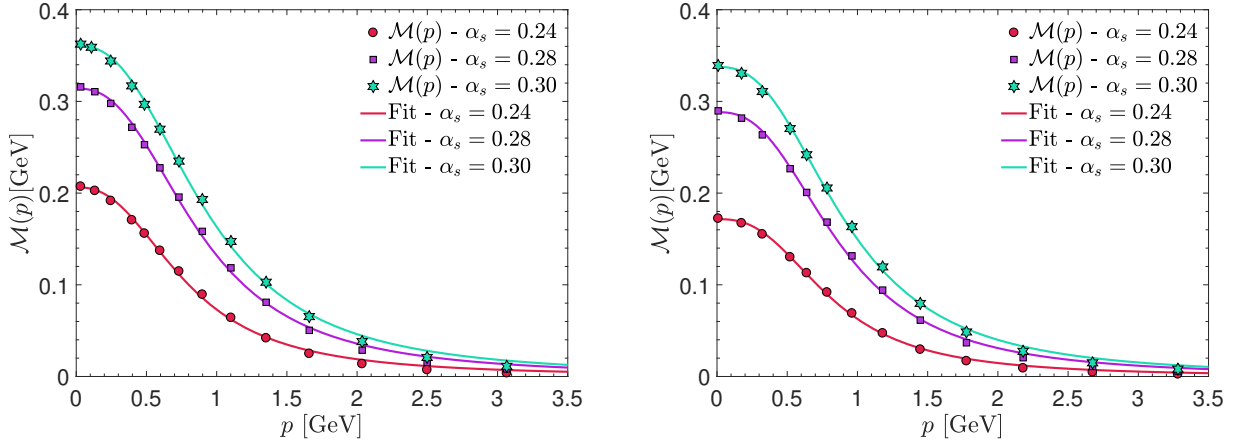


Figura 6.8: A solução numérica para $\mathcal{M}(p)$ obtida usando $\mathcal{C}_1(q)$ (painel da esquerda) e $\mathcal{C}_2(q)$ (painel da direita). Em ambos painéis mostramos as soluções para $\alpha_s = 0.24$ (círculos vermelhos), $\alpha_s = 0.28$ (quadrados roxos) e $\alpha_s = 0.30$ (estrelas verdes). As curvas contínuas representam os fits construídos com a forma funcional da Eq. (6.15).

e $\mathcal{C}_2(q)$ (painel da direita). Nós optamos por mostrar somente os fits produzidos com a Eq. (6.15), pois não é possível notar nenhuma diferença visível entre as curvas geradas com as Eqs. (6.15) e (6.14).

Na Tabela 6.2 compilamos todos os valores dos parâmetros ajustáveis, *i.e.*, $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ e $(\mathcal{M}_0, \lambda, d)$, que entram em ambos fits. Todos os fits possuem um $\chi^2_\nu = 0.99$ (χ^2 -reduzido).

	Fit - Eq. (6.14)			Fit - Eq. (6.15)		
α_s	\mathcal{M}_1 [MeV]	\mathcal{M}_2 [GeV]	\mathcal{M}_3 [MeV]	\mathcal{M}_0 [MeV]	λ [MeV]	d
0.24 com $\mathcal{C}_1(q)$	601	1.03	404	206	780	0.22
0.24 com $\mathcal{C}_2(q)$	572	1.04	270	171	809	0.31
0.28 com $\mathcal{C}_1(q)$	758	1.18	426	314	878	0.25
0.28 com $\mathcal{C}_2(q)$	715	1.12	270	288	876	0.28
0.30 com $\mathcal{C}_1(q)$	824	1.25	358	361	925	0.25
0.30 com $\mathcal{C}_2(q)$	772	1.16	270	337	914	0.28

Tabela 6.2: Valores dos parâmetros ajustáveis que foram empregados para os fits dados pelas Eqs. (6.14) e (6.15). Todos os fits possuem um $\chi^2_\nu = 0.99$.

6.3.4 Estimando a constante de decaimento do pión

Para concluir este capítulo, nós usaremos a constante de decaimento do pión, f_π , para acessar o impacto que a inclusão de H na construção do Γ_μ^{STI} pode ter em um observável físico. Utilizado uma versão melhorada da fórmula de Pagels-Stokar-Cornwall [133, 134]

proposta em [135] e dada por ⁴

$$f_\pi^2 = \frac{3}{8\pi^2} \int_0^\infty dy y B^2(y) \left\{ \sigma_V^2 - 2[\sigma_s \sigma'_s + y \sigma_V \sigma'_V] - y [\sigma_s \sigma''_s - (\sigma'_s)^2] - y^2 [\sigma_V \sigma''_V - (\sigma'_V)^2] \right\}, \quad (6.16)$$

onde

$$\sigma_V := \frac{A(y)}{yA^2(y) + B^2(y)}, \quad \sigma_s := \frac{B(y)}{yA^2(y) + B^2(y)}. \quad (6.17)$$

Na Tabela 6.3 apresentamos um conjunto de seis resultados para f_π que foram obtidos utilizando na Eq. (6.16) as soluções de $A(p)$ e $\mathcal{M}(p)$ obtidas com (i) o vértice de “minimamente não abeliano”, Γ_μ^{FBC} , e (ii) o vértice completo, Γ_μ^{STI} . Para ambos vértices, utilizamos na equação de gap (6.12) as três formas funcionais de $\mathcal{C}_i(q)$ apresentadas na Eq. (6.11).

	f_π com $\mathcal{C}_1(q)$		f_π com $\mathcal{C}_2(q)$		f_π com $\mathcal{C}_3(q)$	
α_s	Γ_μ^{FBC}	Γ_μ^{STI}	Γ_μ^{FBC}	Γ_μ^{STI}	Γ_μ^{FBC}	Γ_μ^{STI}
0.24	62	73	52	67	0	0
0.28	87	97	83	93	40	61
0.30	97	107	93	103	57	75

Tabela 6.3: Os valores de f_π [em MeV] obtidos através da Eq. (6.16). Os seis resultados apresentados foram obtidos utilizando as soluções de $A(p)$ e $\mathcal{M}(p)$ obtidas com o vértice “minimamente não abeliano”, Γ_μ^{FBC} , e o vértice completo, Γ_μ^{STI} . Para cada um desses vértices usamos os três modelos de $\mathcal{C}_i(q)$ apresentados na Eq. (6.11).

Os valores para f_π mostrados na Tabela 6.3 devem ser comparados com o valor experimental de $f_\pi = 93$ MeV [136]. Como esperado, a função $\mathcal{C}_3(q)$ produz os menores valores para f_π , já que as massas $\mathcal{M}_{\text{FBC}}(p)$ e $\mathcal{M}(p)$ obtidas com $\mathcal{C}_3(q)$ são bem mais suprimidas em comparação com as obtidas com $\mathcal{C}_1(q)$ ou $\mathcal{C}_2(q)$. Através da Tabela 6.3 notamos que a nossa análise apresenta uma clara preferência por valores de α_s localizados no intervalo de $0.28 - 0.30$ e pelas formas funcionais de $\mathcal{C}_1(q)$ ou $\mathcal{C}_2(q)$, já que são estas variações que se aproximam mais do valor experimental de $f_\pi = 93$ MeV. Além disto, notamos que tanto para $\mathcal{C}_1(q)$ como para $\mathcal{C}_2(q)$, as variações percentuais relativas entre os valores de f_π obtidos com Γ_μ^{FBC} e Γ_μ^{STI} são aproximadamente 10% para $\alpha_s = 0.28$ e $\alpha_s = 0.30$, o que indica que o impacto de H neste observável físico é da ordem de 10%.

⁴Utilizando uma outra expressão alternativa, que pode ser encontrada na Eq. (6.27) de [19], encontramos valores de f_π que são aproximadamente 10% menores.

7

Conclusões

Neste trabalho, nós determinamos as quatro componentes longitudinais do vértice quark-glúon, L_i , na região não perturbativa, em configurações cinemáticas gerais. Para isto, utilizamos a chamada *gauge technique*, que se vale do princípio da invariância de gauge, para construir um *Ansatz* para os fatores de forma “resolvendo” a STI que este vértice satisfaz. Através desta técnica, derivamos uma expressão exata, válida em todas as ordens, onde os quatro L_i podem ser escritos em termos do propagador do quark, $S(p)$, da função de dressing do ghost, $F(q)$, e do kernel de espalhamento quark-ghost, H . Verificamos que ao “desligar” o setor de ghost nas expressões encontradas para os L_i (*i.e.*, substituindo $F(q)$ e H por suas expressões em nível de árvore) recuperamos o vértice abeliano de BC dado pela Eq. (3.41). Portanto, esta derivação consiste em uma extensão não abeliana do procedimento proposto por BC [58] para a QED.

O ponto de partida para determinar o comportamento dos L_i em configurações gerais de momentos euclidianos é o cálculo dos fatores de forma do kernel de espalhamento quark-ghost, X_i . Estes fatores de forma foram obtidos dentro da aproximação de “1-loop vestido”, que envolve o cálculo de um único diagrama, onde todos os propagadores são completamente vestidos, enquanto que algumas aproximações foram empregadas para os vértices (veja o diagrama da Fig. 4.6). Primeiramente, o conjunto de quatro equações que descreve os X_i foi resolvidos numericamente, utilizando como inputs externos: o propagador do glúon, $\Delta(q)$, o dressing do ghost, $F(q)$, e as componentes de Dirac $A(p)$ e $B(p)$ que definem o propagador do quark. Na sequência, com os resultados numéricos dos X_i e os inputs externos em mãos, utilizamos a Eq. (A.9), válida no espaço euclidiano, para determinar o comportamento dos L_i em qualquer configuração cinemática de momentos.

Os resultados obtidos, tanto dos X_i como dos L_i , foram apresentados na forma de

gráficos 3-D ao longo do Capítulo 5. Através destes resultados, observamos que os L_i apresentam desvios claros dos comportamentos dos fatores de forma abelianos L_i^{BC} . Além disto, analisamos detalhadamente vários limites cinemáticos especiais, que foram previamente considerados na literatura, como é o caso das configurações de “soft-glúon” e “simétrica”. Estas configurações foram extraídas a partir dos gráficos 3-D através de “projeções” 2-D apropriadas. Em particular, na Seção 5.6, comparamos nossos resultados para os fatores de forma na configuração de soft-glúon, *i.e.*, $L_1^g(p)$, $4p^2L_2^g(p)$ e $2pL_3^g(p)$, com os dados da QCD na rede obtidos em [63, 64] e com os resultados de estudos analíticos prévios [68, 69, 77, 99]. Encontramos que os resultados para os fatores $L_1^g(p)$ e $2pL_3^g(p)$ estão em bom acordo, tanto com a rede como com os estudos analíticos anteriores. Entretanto, para $4p^2L_2^g(p)$, todos os estudos analíticos estão em clara contradição com o comportamento encontrado na rede.

Com o objetivo de validar os resultados que encontramos para o vértice quark-glúon, utilizando a versão não abeliana da gauge technique, estudamos qual é o padrão de massas dinâmicas geradas para os quarks que emerge quando empregamos este vértice na equação de gap. Em particular, analisamos detalhadamente qual é o impacto que o kernel quark-ghost, H , tem na QDSQ. Para isto, no Capítulo 6, acoplamos as duas ESDs, que descrevem as funções $A(p)$ e $B(p)$ do propagador do quark, com as quatro equações para os fatores de forma X_i (veja a representação diagramática deste sistema acoplado na Fig. 6.1). Com a solução numérica deste sistema, construímos os L_i correspondentes através da Eq. (A.9). Nossos resultados demonstram que a inclusão das contribuições dos X_i nos L_i causa um efeito quantitativo substancial no comportamento IR do propagador do quark. Particularmente importante é o seu efeito no valor da massa dinâmica na origem, $\mathcal{M}(0)$, que aumenta aproximadamente 20% em comparação com o resultado obtido com o vértice “minimamente não abelianizado”, Γ_μ^{FBC} [137]. Embora o valor exato de $\mathcal{M}(0)$ dependa de α_s , vimos que nosso sistema acoplado tem capacidade de gerar valores para $\mathcal{M}(0)$ dentro do intervalo de 280 – 360 MeV.

Um outro resultado interessante de nossa análise é o comportamento de L_4 . Observamos que apesar de L_4 ser extremamente suprimido em comparação como os demais fatores de forma, L_1 , L_2 e L_3 (veja Fig. 6.5), surpreendentemente, L_4 é responsável por gerar sozinho 10% do valor total de $\mathcal{M}(0)$. Este resultado sugere que L_4 fornece um suporte “bem localizado” no kernel da equação de gap, que age precisamente na região de momentos

que mais impacta no aumento do valor da massa dinâmica. Tanto quanto sabemos, esta é a primeira vez que o impacto de L_4 na geração de massa do quark é quantificado na literatura [49].

Também estimamos, de uma forma indireta, o impacto do kernel H na QDSQ através do cálculo da constante de decaimento f_π . Quando as soluções da equação de gap produzem um $\mathcal{M}(0)$ que se aproxima dos valores fenomenologicamente aceitáveis para as massas dos quarks constituintes, vimos que inclusão do H dentro do Γ_μ^{STI} , *i.e.*, a transição $\Gamma_\mu^{\text{FBC}} \rightarrow \Gamma_\mu^{\text{STI}}$, incrementa em aproximadamente 10% o valor de f_π .

Por fim, as dificuldades em implementar a renormalizabilidade multiplicativa na equação de gap e a subsequente restauração da dimensão anômala correta para a massa dinâmica do quark foram contornadas através da introdução, a mão, de um conjunto de *Ansätze* para $\mathcal{C}_i(q)$. O papel de $\mathcal{C}_i(q)$ foi basicamente corrigir o comportamento UV do kernel da equação de gap. Embora este procedimento seja bem definido no UV, infelizmente ele é ambíguo no IR, já que o comportamento que $\mathcal{C}_i(q)$ precisa ter no IR não pode ser fixado. Resolvendo o sistema acoplado com os diferentes *Ansätze* para $\mathcal{C}_i(q)$, encontramos evidências que o suporte de $\mathcal{C}_i(q)$, na região de momentos de [500 MeV, 1.5 GeV], é de crucial importância para gerar uma massa para o quark da ordem de 300 MeV. Certamente, qualquer supressão no comportamento de $\mathcal{C}_i(q)$, como sinalizado no caso de $\mathcal{C}_3(q)$ dado pela Eq. (6.11), pode diminuir ou inclusive erradicar a QDSQ.

Tamanha dificuldade em lidar com a renormalização multiplicativa da equação de gap, nos faz evidente a necessidade de buscar uma forma consistente para determinar a parte transversal do vértice quark-glúon, Γ_μ^T . Embora existam algumas técnicas que visam restringir essa estrutura [99, 112, 113, 115, 116, 138], ainda nos falta uma maneira sistemática e bem definida para determiná-la.

Vale a pena ressaltar que todo o conteúdo, apresentado nesta tese, foi desenvolvido dentro da aproximação “quenched”, já que os propagadores do glúon e ghost utilizados como inputs para resolver o sistema de equações integrais foram obtidos em simulações da rede sem quarks dinâmicos [32]. Certamente, um estudo mais completo requer a incorporação dos efeitos dos campos de quarks (unquenched). É esperado que a sua inclusão afete os resultados, tanto dos fatores de forma do vértice quark-glúon como da massa dinâmica gerada para o quark, já que o propagador do glúon unquenched fica mais suprimido (veja, *e.g.*, [139] para resultados da rede unquenched e [68, 77, 106, 140, 141]

para estudos relacionados). Um estudo preliminar apresentado em [99] indica um sutil incremento, da ordem de $6 - 10\%$, nos fatores de forma do vértice quark-glúon, calculado em algumas configurações especiais. É claro que um estudo completo deve ser realizado com o objetivo de determinar se tal incremento persiste no nível de um sistema de equações acoplado e as mudanças que isto pode induzir na equação de gap e na massa que é derivada a partir dela.

A

Conversão para o espaço euclidiano

Neste Apêndice apresentamos os passos necessários para converter as expressões encontradas no espaço de Minkowski para o espaço euclidiano. Para isto, considere dois momentos arbitrários, p e q , definidos no espaço de Minkowski. As transformações para o espaço euclidiano das diferentes combinações destes momentos devem seguir as seguintes regras

$$(\not{p}, \not{q}) \rightarrow i(\not{p}_E, \not{q}_E); \quad (p^2, q^2, p \cdot q) \rightarrow -(p_E^2, q_E^2, p_E \cdot q_E), \quad (\text{A.1})$$

onde o subíndice E indica que a variável está no espaço euclidiano.

Além disto, a medida de integração se transforma seguindo

$$d^4l \rightarrow i d^4l_E, \quad \int_l \rightarrow i \int_{l_E}. \quad (\text{A.2})$$

Em particular, a medida de integração em quatro dimensões no espaço euclidiano é definida, em coordenadas esféricas, como sendo

$$\int_{l_E} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4l = \frac{1}{32\pi^4} \int_0^\infty dl_E^2 \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3. \quad (\text{A.3})$$

Explorando a dimensionalidade dos propagadores, podemos facilmente utilizar as regras acima descritas, para definir como são as transformações dos propagadores do glúon, ghost e quark para o espaço euclidiano. Mais especificamente, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(q^2) &\xrightarrow{q^2 \rightarrow -q_E^2} -\Delta_E(q_E^2); & D(q^2) &\xrightarrow{q^2 \rightarrow -q_E^2} -D_E(q_E^2); \\ A(p^2) &\xrightarrow{q^2 \rightarrow -q_E^2} A(p_E^2); & B(p^2) &\xrightarrow{q^2 \rightarrow -q_E^2} B(p_E^2). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Assim as combinações de funções dadas pelas Eqs. (3.38), (4.18) e (4.19) se modificam de acordo com

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(p_1^2, p_2^2, l^2) &\rightarrow -\mathcal{K}_E(p_{1E}^2, p_{2E}^2, l_E^2), \\
\mathcal{G}(k^2, q^2, l^2) &\rightarrow -\mathcal{G}_E(k_E^2, q_E^2, l_E^2), \\
\mathcal{T}(p_1^2, p_2^2, l^2) &\rightarrow \mathcal{T}_E(p_{1E}^2, p_{2E}^2, l_E^2), \\
\mathcal{Q}_f(k^2) &\rightarrow -\mathcal{Q}_f^E(k_E^2), \\
h(p_1, p_2) &\rightarrow h_E(p_{1E}, p_{2E}).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Para evitar o sobrecarregamento da notação, daqui em diante, iremos suprimir o subíndice E.

Utilizando as Eqs. (A.4) e (A.5) é fácil ver que os fatores de forma X_i , dados pela Eq. (4.19), são expressos no espaço euclidiano como

$$\begin{aligned}
X_0 &= 1 - \frac{1}{4}C_A g^2 \int_l \mathcal{K}(p_1, p_2, l) A(l) \mathcal{G}(p_2, q, l), \\
X_1 &= \frac{1}{4}C_A g^2 \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) B(l)}{h(p_1, p_2)} [p_2^2 \mathcal{G}(p_1, q, l) - (p_1 \cdot p_2) \mathcal{G}(p_2, q, l)], \\
X_2 &= \frac{1}{4}C_A g^2 \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) B(l)}{h(p_1, p_2)} [p_1^2 \mathcal{G}(p_2, q, l) - (p_1 \cdot p_2) \mathcal{G}(p_1, q, l)], \\
X_3 &= -\frac{1}{4}C_A g^2 \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) A(l)}{h(p_1, p_2)} [p_2^2 \mathcal{G}(p_1, q, l) - (p_1 \cdot p_2) \mathcal{G}(p_2, q, l) - \mathcal{T}(p_1, p_2, l)], \tag{A.6}
\end{aligned}$$

onde o kernel no espaço euclidiano é dado por

$$\mathcal{K}(p_1, p_2, l) = \frac{F(l - p_1) \Delta(l - p_2) [A(l) + A(p_2)]}{(l - p_1)^2 [A^2(l) l^2 - B^2(l)]}. \tag{A.7}$$

Já as versões euclidianas de $\mathcal{G}(k, q, l)$ e $\mathcal{T}(p_1, p_2, l)$, definidas na Eq. (4.20), são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(k, q, l) &= -(k \cdot q) + \frac{[k \cdot (l - p_2)][q \cdot (l - p_2)]}{(l - p_2)^2}, \\
\mathcal{T}(p_1, p_2, l) &= (p_2 \cdot q)[(p_1 \cdot l) - (p_1 \cdot p_2)] - (p_1 \cdot q)[(p_2 \cdot l) - p_2^2]. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Por sua vez, os fatores de forma do vértice quark-glúon L_i , dados pela Eq. (4.12), se

tornam no espaço euclidiano

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{F(q)}{2} \left\{ A(p_1)[X_0 + (p_1^2 + p_1 \cdot p_2)X_3] + A(p_2)[\bar{X}_0 + (p_2^2 + p_1 \cdot p_2)\bar{X}_3] \right\} \\
&+ \frac{F(q)}{2} \left\{ B(p_1)(X_2 - X_1) + B(p_2)(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \right\}; \\
L_2 &= -\frac{F(q)}{2(p_1^2 - p_2^2)} \left\{ A(p_1)[X_0 - (p_1^2 - p_1 \cdot p_2)X_3] - A(p_2)[\bar{X}_0 - (p_2^2 - p_1 \cdot p_2)\bar{X}_3] \right\} \\
&+ \frac{F(q)}{2(p_1^2 - p_2^2)} \left\{ B(p_1)(X_1 + X_2) - B(p_2)(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \right\}; \\
L_3 &= \frac{F(q)}{p_1^2 - p_2^2} \left\{ A(p_1)(p_1^2 X_1 + p_1 \cdot p_2 X_2) - A(p_2)(p_2^2 \bar{X}_1 + p_1 \cdot p_2 \bar{X}_2) + B(p_1)X_0 - B(p_2)\bar{X}_0 \right\}; \\
L_4 &= \frac{F(q)}{2} \left\{ A(p_1)X_2 - A(p_2)\bar{X}_2 - B(p_1)X_3 + B(p_2)\bar{X}_3 \right\}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Para calcular numericamente as integrais no espaço euclidiano, é conveniente decompor o momento de integração l da seguinte maneira

$$l = |l| (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3), \tag{A.10}$$

onde $|l|$ é o módulo do momento l . Assim, é fácil verificar que a definição (A.10) garante que $(l \cdot l) = |l|^2$.

Sem perda de generalidade, também podemos decompor os momentos p_1 e p_2 da seguinte maneira

$$p_1 = |p_1| (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0), \quad p_2 = |p_2| (1, 0, 0, 0), \tag{A.11}$$

onde $|p_1|$ e $|p_2|$ são as magnitudes dos momentos euclidianos e θ é o ângulo entre eles. Note que ambas definições recuperam os resultados $(p_1 \cdot p_1) = |p_1|^2$ e $(p_2 \cdot p_2) = |p_2|^2$.

Combinando as Eqs. (A.10) e (A.11), podemos definir os seguintes produtos escalares

$$\begin{aligned}
(p_1 \cdot p_2) &= |p_1||p_2| \cos \theta, \\
(p_1 \cdot l) &= |p_1||l| (\cos \theta \cos \varphi_1 + \sin \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2), \\
(p_2 \cdot l) &= |p_2||l| \cos \varphi_1. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

É interessante notar que os produtos escalares $(p_1 \cdot p_2)$, $(p_1 \cdot l)$, e $(p_2 \cdot l)$, que entram na Eq. (A.6), não possuem dependência angular sobre φ_3 . Assim, a integração sobre este

ângulo é trivial e, a medida de integração dada pela Eq. (A.3) se torna

$$\int_l = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4l = \frac{1}{16\pi^3} \int_0^\infty dl^2 l^2 \int_0^\pi d\varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2. \quad (\text{A.13})$$

Substituindo explicitamente os produtos escalares, dados na Eq. (A.12), podemos reescrever a Eq. (A.6) da seguinte forma

$$\begin{aligned} X_0(p_1^2, p_2^2, \theta) &= 1 + \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) A(l^2)}{s^2} \{ p_2^2 l^2 \sin^2 \varphi_1 - s^2 p_1 p_2 \cos \theta \\ &\quad + [p_1 l (\cos \theta \cos \varphi_1 + \sin \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) - p_1 p_2 \cos \theta] (p_2 l \cos \varphi_1 - p_2^2) \} , \\ X_1(p_1^2, p_2^2, \theta) &= \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) B(l^2)}{s^2} \left[s^2 - l^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \right. \\ &\quad \left. + l(l \cos \varphi_1 - p_2) \left(\frac{p_2}{p_1} - \cos \theta \right) \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \theta} \right] , \\ X_2(p_1^2, p_2^2, \theta) &= \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) B(l^2)}{s^2} \left[(l \cos \varphi_1 - p_2)^2 \left(1 - \frac{p_1}{p_2} \cos \theta \right) - s^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_1 l^2}{p_2} \cos \theta \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 - \frac{p_1 l}{p_2} (l \cos \varphi_1 - p_2) \sin \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right. \\ &\quad \left. - l(l \cos \varphi_1 - p_2) \cos \theta \left(1 - \frac{p_1}{p_2} \cos \theta \right) \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \theta} \right] , \\ X_3(p_1^2, p_2^2, \theta) &= \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{\mathcal{K}(p_1, p_2, l) A(l^2)}{s^2} \left[-s^2 \frac{l}{p_1} \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \theta} \right. \\ &\quad \left. + s^2 \frac{l}{p_2} \left(\frac{\cos \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \theta} - \cos \varphi_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + l^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + l(l \cos \varphi_1 - p_2) \left(\cos \theta - \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin \theta} \right] , \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

onde omitimos o módulo, *i.e.* $p_1 \equiv |p_1|$, $p_2 \equiv |p_2|$, $l \equiv |l|$. Também introduzimos a variável $s^2 = l^2 + p_2^2 - 2lp_2 \cos \varphi_1$.

Assim, fica claro que no espaço euclidiano, a dependência funcional das funções escalares X_i e L_i serão expressas em termos dos módulos dos momentos p_1 , p_2 e θ , ou seja, $X_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$ e $L_i(p_1^2, p_2^2, \theta)$.

B

Expansão de Taylor para \mathcal{K}

Neste Apêndice vamos apresentar os passos que precisam ser feitos para calcular a expansão de Taylor da Eq. (A.14). Esta expansão é necessária para a derivação de certos limites cinemáticos especiais. Em particular, apresentaremos em detalhes a derivação dos fatores de forma X_i nos limites de soft-glúon e simétrico de quarks. Como vimos na seção 5.5, estas configurações fixam o ângulo $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente. Portanto, para calcular os X_i nestas configurações devemos tomar o limite $\sin \theta \rightarrow 0$ da Eq. (A.14)¹. Para isso, vamos expandir o kernel $\mathcal{K}(p_1, p_2, l)$ da Eq. (A.14) em torno de $\sin \theta = 0$, *i.e.*,

$$\mathcal{K}(p_1, p_2, l) = \mathcal{K}_0 + \sin \theta \mathcal{K}'_0 + \mathcal{O}(\sin^2 \theta), \quad (\text{B.1})$$

onde introduzimos a notação compacta

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(p_1, p_2, l) \Big|_{\sin \theta = 0}, \quad \mathcal{K}'_0 = \frac{\partial \mathcal{K}(p_1, p_2, l)}{\partial \sin \theta} \Big|_{\sin \theta = 0}.$$

Vamos primeiramente analisar a contribuição do primeiro termo da expansão, \mathcal{K}_0 . A partir da Eq. (A.14) podemos observar que a única dependência na variável φ_2 que $\mathcal{K}(p_1, p_2, l)$ apresenta está em $D(l - p_1)$, ou seja

$$D(l - p_1) = D(l^2 + p_1^2 - 2lp_1[\cos \theta \cos \varphi_1 + \sin \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2]). \quad (\text{B.2})$$

Desta forma, $\lim_{\sin \theta \rightarrow 0} \mathcal{K}_0$ é completamente independente de φ_2 , e a integração sobre este ângulo se torna trivial. O passo seguinte é notar que nos X_i , dados pela Eq. (A.14), os

¹As expansões correspondentes de \mathcal{K} em torno de $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, que são importantes para as configurações de soft-anti-quark e soft-quark, podem ser obtidas seguindo de forma análoga os passos apresentados aqui.

termos que possuem $\sin \theta$ no denominador são sempre proporcionais ao $\cos \varphi_2$, o que nos leva à seguinte integração angular $\int_0^\pi d\varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = 0$. Portanto, todas as contribuições geradas pelo termo \mathcal{K}_0 são finitas. Claramente, a contribuição do segundo termo da expansão da Eq. (B.1) é automaticamente finito, já que o $\sin \theta$ que aparece na expansão cancela com aquele presente no denominador de \mathcal{K} .

Implementando o procedimento descrito acima na Eq. (A.14), encontramos que os fatores de forma no limite $\sin \theta = 0$ são dados por

$$\begin{aligned}
X_0(p_1^2, p_2^2, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} &= 1 + \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{A(l^2)}{s^2} \mathcal{K}_0 \{ p_2^2 l^2 \sin^2 \varphi_1 - (l - p_2)^2 p_1 p_2 \cos \theta \\
&\quad + [p_1 l \cos \theta \cos \varphi_1 - p_1 p_2 \cos \theta] (p_2 l \cos \varphi_1 - p_2^2) \} , \\
X_1(p_1^2, p_2^2, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} &= \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{B(l^2)}{s^2} \{ \mathcal{K}_0 [s^2 - l^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2] \\
&\quad + l(l \cos \varphi_1 - p_2) \left(\frac{p_2}{p_1} - \cos \theta \right) \mathcal{K}'_0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \} , \\
X_2(p_1^2, p_2^2, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} &= \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{B(l^2)}{s^2} \left\{ \mathcal{K}_0 \left[(l \cos \varphi_1 - p_2)^2 \left(1 - \frac{p_1}{p_2} \cos \theta \right) - s^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{p_1 l^2}{p_2} \cos \theta \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \right] - l(l \cos \varphi_1 - p_2) \cos \theta \left(1 - \frac{p_1}{p_2} \cos \theta \right) \mathcal{K}'_0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right\} , \\
X_3(p_1^2, p_2^2, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} &= \frac{C_A g^2}{4} \int_l \frac{A(l^2)}{s^2} \left\{ \mathcal{K}_0 \left[l^2 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 - s^2 \frac{l}{p_2} \cos \varphi_1 \right] \right. \\
&\quad \left. - l^2 (l - p_2 \cos \varphi_1) \left(\frac{1}{p_1} - \frac{\cos \theta}{p_2} \right) \mathcal{K}'_0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right\} , \tag{B.3}
\end{aligned}$$

onde a variável s^2 foi definida logo após a Eq. (A.14).

Para determinar \mathcal{K}'_0 observe que

$$\frac{\partial D(l - p_1)}{\partial \sin \theta} \Big|_{\sin \theta=0} = -2l p_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial D(l)}{\partial l^2} , \tag{B.4}$$

assim

$$\mathcal{K}'_0 = -2l p_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{[A(l^2) + A(p_2^2)]}{A^2(l^2)l^2 + B^2(l^2)} \Delta(l - p_2) \frac{\partial D(l)}{\partial l^2} . \tag{B.5}$$

Portanto as expressões finais dos X_i nas configurações cinemáticas de soft-glúon e simétrica de quarks podem ser obtidas a partir da Eq. (B.3). Para isto, basta lembrar que em ambos os casos devemos impor na Eq. (B.3) que $p_1 = p_2$ e fixar $\theta = 0$ para a soft-glúon e $\theta = \pi$ para a configuração simétrica de quarks.

C

Dimensão anômala da massa

Neste Apêndice mostramos como a dimensão anômala da massa do quark, γ_f , pode ser determinada a partir da equação de gap.

O nosso ponto de partida é a versão euclidiana da ESD para o propagador do quark dada pela Eq. (3.37). Utilizando o *Ansatz* simplificado para o vértice quark-glúon [142]

$$\Gamma_\mu(p, k) = F(q) \left[A(p)\gamma_\mu + \frac{q_\mu}{q^2} [A(p) - A(k)]\not{k} - [B(p) - B(k)] \right], \quad (\text{C.1})$$

obtemos que, no limite quiral, o sistema de ESDs para o propagador do quark é dado por ¹

$$\begin{aligned} p^2 A(p) &= p^2 + Z_c^{-1} C_F g^2 \int_k \mathcal{K}_A(p, k) \mathcal{Q}_A^E(k^2), \\ B(p) &= 3Z_c^{-1} C_F g^2 \int_k \mathcal{K}_B(p, k) \mathcal{Q}_B^E(k^2), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde definimos os kernels

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_A(p, k) &= \Delta(q) F(q) A(p) \left[(p \cdot k) - 2 \frac{(p \cdot q)(k \cdot q)}{q^2} \right], \\ \mathcal{K}_B(p, k) &= \Delta(q) F(q) A(p), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e introduzimos as versões euclidianas das funções definidas na Eq. (3.38), *i.e.*,

$$\mathcal{Q}_A^E(k^2) = \frac{A(k)}{A^2(k)k^2 + B^2(k)}, \quad \mathcal{Q}_B^E(k^2) = \frac{B(k)}{A^2(k)k^2 + B^2(k)}. \quad (\text{C.4})$$

¹Seguindo a discussão apresentada na Sec. 6.2, note que as constantes de renormalização presentes na Eq. (3.37) foram aproximadas por $Z_F = 1$ e $Z_1 = Z_c^{-1}$.

Aplicando a aproximação angular padrão na Eq. (C.2) e, supondo que a constante de renormalização possa ser aproximada por $Z_c^{-1} = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} A(p) &= 1, \\ B(p) &= \frac{3C_F g^2}{16\pi^2} \left[\Delta(p) F(p) A(p) \int_0^{p^2} dk^2 k^2 \mathcal{Q}_B^E(k^2) + A(p) \int_{p^2}^{\infty} dk^2 k^2 \Delta(k) F(k) \mathcal{Q}_B^E(k^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Usando o fato que $A(p) = 1$ na segunda linha da Eq. (C.6) e substituindo que a massa dinâmica do quark (para esta aproximação) é dada por $\mathcal{M}(p) = B(p)$, é fácil ver que no limite de grandes k^2 , o comportamento assintótico da massa do quark $\mathcal{M}_{\text{UV}}(p)$ será descrito pela equação [22]²

$$\mathcal{M}_{\text{UV}}(p) = \frac{3C_F g^2}{16\pi^2} \left[\Delta(p) F(p) \int_0^{p^2} dk^2 \mathcal{M}_{\text{UV}}(k) + \int_{p^2}^{\infty} dk^2 \Delta(k) F(k) \mathcal{M}_{\text{UV}}(k) \right], \quad (\text{C.6})$$

onde evidentemente devemos utilizar para $\Delta(p)$ e $F(p)$ suas expressões perturbativas em 1-loop, já que a equação acima é válida somente assintoticamente.

É fácil ver que, no limite de grandes valores de p^2 , a primeira integral da Eq. (C.6) será o termo dominante. Com o intuito de verificar se a expressão assintótica para a massa dinâmica do quark, dada pela Eq. (6.5) e repetida aqui por conveniência

$$\mathcal{M}_{\text{UV}}(p) = \frac{C}{p^2} \left[\ln \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \right]^{\gamma_f - 1}, \quad (\text{C.7})$$

satisfaz a Eq. (C.6), vamos substituir a expressão para $\mathcal{M}_{\text{UV}}(p)$ no lado direito da Eq. (C.6), juntamente com o propagador do glúon em nível de 1-loop dado por

$$\Delta^{-1}(q) = q^2 \left[1 + \gamma_1 g^2 \ln \left(\frac{q^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (\text{C.8})$$

onde $\gamma_1 = (\frac{13}{3}C_A - C_F n_f)/32\pi^2$, e a função de dressing do ghost em 1-loop

$$F^{[1]}(q) = \left[1 + \frac{9}{4} \frac{C_A g^2}{48\pi^2} \ln \left(\frac{q^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Após implementar estas substituições é fácil ver que de fato a Eq. (C.7) é solução da Eq. (C.6). Entretanto isto só é verdade se a dimensão anômala γ_f da massa assumir o

²No limite assintótico temos que $\mathcal{Q}_B^E(k^2) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{UV}}(p)/k^2$.

valor $\gamma_f = 48/(35C_A - 8n_f)$, em vez de seu valor correto, dado por $\gamma_f = 12/(11C_A - 2n_f)$. Como foi discutido na Sec. 6.2, a origem desta discrepância está no fato que, em nossa aproximação, os termos transversos estão ausentes. É sabido que estes termos embora não modifiquem o comportamento IR, eles são cruciais para a derivação correta das propriedades UV das ESDs, pois garantem que a renormalizabilidade multiplicativa das ESDs não seja distorcida.

Como foi apresentado em detalhes na Sec. 6.2, o comportamento assintótico correto para $\mathcal{M}(p)$ pode ser restaurado realizando na Eq. (C.2) a substituição dada pela Eq. (6.6), *i.e.*, $Z_c^{-1}\mathcal{K}_{A,B}(p,k) \rightarrow \mathcal{K}_{A,B}(p,k)\mathcal{C}(q)$, desde que a função $\mathcal{C}(q)$ tenha o mesmo comportamento UV de $F(q)$.

Implementando na Eq. (C.2) a modificação do kernel acima descrita, a nova versão da Eq (C.6) será dada por

$$\mathcal{M}_{UV}(p) = \frac{3C_F g^2}{16\pi^2} \left[\Delta(p)F(p)\mathcal{C}(p) \int_0^{p^2} dk^2 \mathcal{M}_{UV}(k) + \int_{p^2}^{\infty} dk^2 \Delta(k)F(k)\mathcal{C}(k)\mathcal{M}_{UV}(k) \right]. \quad (C.10)$$

Substituindo no lado direito da Eq. (C.10) as expressões de 1-loop dadas pelas Eqs. (C.7), (C.8) e (C.9), é fácil verificar que o termo dominante da Eq. (C.10) somente irá produzir o valor correto para a dimensão anômala do quark, *i.e.*, $\gamma_f = 12/(11C_A - 2n_f)$, se e somente se, em 1-loop a função $\mathcal{C}(q)$ apresente o mesmo comportamento de $F(q)$, dado pela Eq. (C.9).

Referências Bibliográficas

- [1] Yang, C.-N. & Mills, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.* **96**, 191–195 (1954).
- [2] Marciano, W. J. & Pagels, H. Quantum Chromodynamics: A Review. *Phys. Rept.* **36**, 137 (1978).
- [3] Muta, T. Foundations of quantum chromodynamics: An Introduction to perturbative methods in gauge theories. *World Sci. Lect. Notes Phys.* **5**, 1–409 (1987).
- [4] Gell-Mann, M. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. *California Institute of Technology* (1961).
- [5] Pich, A. Quantum chromodynamics. In *High energy physics. Proceedings, 2nd European School, Sorrento, Italy, August 29-September 1, 1994. Vol. 1, 2*, 157–207 (1995).
- [6] Quigg, C. Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions. *Front. Phys.* **56**, 1–334 (1983).
- [7] Kaku, M. *Quantum field theory: A Modern introduction* (New York, USA: Oxford Univ. Pr. (1993) 785 p, 1993).
- [8] Bjorken, J. D. & Drell, S. D. Relativistic quantum fields. *McGraw-Hill* (1965).
- [9] Gross, D. J. & Wilczek, F. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343–1346 (1973).
- [10] Politzer, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346–1349 (1973).
- [11] Anselmino, M., Caruso, F., Mahon, J. R. & Oguri, V. *Introdução à QCD perturbativa* (LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2013).

-
- [12] Bjorken, J. D. & Paschos, E. A. Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon. *Phys. Rev.* **185**, 1975–1982 (1969).
- [13] Wilson, K. G. Confinement of quarks. *Phys. Rev.* **D10**, 2445–2459 (1974).
- [14] Creutz, M. Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory. *Phys. Rev.* **D21**, 2308–2315 (1980).
- [15] Yndurain, F. J. *The theory of quark and gluon interactions* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999).
- [16] Gupta, R. Introduction to lattice QCD: Course. In *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2*, 83–219 (1997).
- [17] Luscher, M. Advanced lattice QCD. In *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2*, 229–280 (1998).
- [18] Maris, P. & Roberts, C. D. Dyson-Schwinger equations: A Tool for hadron physics. *Int. J. Mod. Phys.* **E12**, 297–365 (2003).
- [19] Roberts, C. D. & Williams, A. G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477–575 (1994).
- [20] Alkofer, R. & von Smekal, L. The infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.* **353**, 281 (2001).
- [21] Fischer, C. S. Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations. *J. Phys.* **G32**, R253–R291 (2006).
- [22] Aguilar, A. C. & Papavassiliou, J. Chiral symmetry breaking with lattice propagators. *Phys. Rev.* **D83**, 014013 (2011).

-
- [23] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.* **D78**, 025010 (2008).
- [24] Huber, M. Q. Nonperturbative properties of Yang-Mills theories. *Thesis: Habilitation* 135 (arXiv:1808.05227 [hep-ph], 2018).
- [25] Skullerud, J. & Kizilersu, A. Quark gluon vertex from lattice QCD. *JHEP* **0209**, 013 (2002).
- [26] Aguilar, A. C., Binosi, D., Cardona, J. & Papavassiliou, J. Nonperturbative results on the quark-gluon vertex. *PoS ConfinementX*, 103 (2012).
- [27] Rojas, E., de Melo, J., El-Bennich, B., Oliveira, O. & Frederico, T. On the Quark-Gluon Vertex and Quark-Ghost Kernel: combining Lattice Simulations with Dyson-Schwinger equations. *JHEP* **1310**, 193 (2013).
- [28] Cucchieri, A. & Mendes, T. What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS LAT2007*, 297 (2007).
- [29] Cucchieri, A., Maas, A. & Mendes, T. Three-point vertices in Landau-gauge Yang-Mills theory. *Phys. Rev.* **D77**, 094510 (2008).
- [30] Cucchieri, A., Dudal, D., Mendes, T. & Vandersickel, N. Modeling the Gluon Propagator in Landau Gauge: Lattice Estimates of Pole Masses and Dimension-Two Condensates. *Phys. Rev.* **D85**, 094513 (2012).
- [31] Cucchieri, A., Mendes, T. & Santos, E. M. Covariant gauge on the lattice: A New implementation. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 141602 (2009).
- [32] Bogolubsky, I. L., Ilgenfritz, E. M., Muller-Preussker, M. & Sternbeck, A. The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes. *PoS LATTICE2007*, 290 (2007).
- [33] Oliveira, O. & Silva, P. J. The lattice Landau gauge gluon propagator: lattice spacing and volume dependence. *Phys. Rev.* **D86**, 114513 (2012).

-
- [34] Skullerud, J., Bowman, P. O. & Kizilersu, A. The Nonperturbative quark gluon vertex. In *Quark confinement and the hadron spectrum. Proceedings, 5th International Conference, Gargnano, Italy, September 10-14, 2002*, 270–272 (2002).
- [35] Oliveira, O., Kizilersu, A., Silva, P. J., Skullerud, J.-I., Sternbeck, A. & Williams, A. G. Lattice Landau gauge quark propagator and the quark-gluon vertex. *Acta Phys. Polon. Supp.* **9**, 363–368 (2016).
- [36] Hopfer, M., Windisch, A. & Alkofer, R. The Quark-Gluon Vertex in Landau gauge QCD. *PoS ConfinementX*, 073 (2012).
- [37] Bicudo, P., Binosi, D., Cardoso, N., Oliveira, O. & Silva, P. J. Lattice gluon propagator in renormalizable ξ gauges. *Phys. Rev.* **D92**, 114514 (2015).
- [38] Oliveira, O., Frederico, T., de Paula, W. & de Melo, J. Exploring the Quark-Gluon Vertex with Slavnov-Taylor Identities and Lattice Simulations. *Eur. Phys. J. C* **78**, 553 (2018).
- [39] Oliveira, O., de Paula, W., Frederico, T. & de Melo, J. P. B. C. The Quark-Gluon Vertex and the QCD Infrared Dynamics. *Eur. Phys. J. C* **79**, 116 (2019).
- [40] Oliveira, O., Frederico, T. & de Paula, W. The soft-gluon limit and the infrared enhancement of the quark-gluon vertex. *Eur. Phys. J. C* **80**, 484 (2020).
- [41] See, J. G., for example. The confinement problem in lattice gauge theory. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **1**, and references therein (2003).
- [42] Krein, G., Roberts, C. D. & Williams, A. G. On the implications of confinement. *Int. J. Mod. Phys.* **A7**, 5607–5624 (1992).
- [43] Cucchieri, A., Mendes, T. & Taurines, A. R. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. *Phys. Rev.* **D71**, 051902 (2005).
- [44] Tanabashi, M. *et al.* Review of Particle Physics. *Phys. Rev.* **D98**, 030001 (2018).
- [45] Higgs, P. W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508–509 (1964).

-
- [46] Roberts, C. D. Three Lectures on Hadron Physics. *J. Phys. Conf. Ser.* **706**, 022003 (2016).
- [47] Hawes, F. T., Roberts, C. D. & Williams, A. G. Dynamical chiral symmetry breaking and confinement with an infrared vanishing gluon propagator. *Phys. Rev.* **D49**, 4683–4693 (1994).
- [48] Fischer, C. S. & Alkofer, R. Nonperturbative propagators, running coupling and dynamical quark mass of Landau gauge QCD. *Phys. Rev.* **D67**, 094020 (2003).
- [49] Aguilar, A. C., Cardona, J. C., Ferreira, M. N. & Papavassiliou, J. Quark gap equation with non-abelian Ball-Chiu vertex. *Phys. Rev.* **D98**, 014002 (2018).
- [50] Serna, F. E., Chen, C. & El-Bennich, B. Interplay of dynamical and explicit chiral symmetry breaking effects on a quark. *Phys. Rev. D* **99**, 094027 (2019).
- [51] Alkofer, R., Fischer, C. S., Llanes-Estrada, F. J. & Schwenzer, K. The Quark-gluon vertex in Landau gauge QCD: Its role in dynamical chiral symmetry breaking and quark confinement. *Annals Phys.* **324**, 106–172 (2009).
- [52] Atkinson, D. & Johnson, P. W. Chiral Symmetry Breaking in QCD. 2. Running Coupling Constant. *Phys. Rev.* **D37**, 2296–2299 (1988).
- [53] Papavassiliou, J. & Cornwall, J. M. Coupled fermion gap and vertex equations for chiral symmetry breakdown in QCD. *Phys. Rev.* **D44**, 1285–1297 (1991).
- [54] Boucaud, P. *et al.* On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator. *JHEP* **06**, 099 (2008).
- [55] Fischer, C. S., Maas, A. & Pawłowski, J. M. On the infrared behavior of Landau gauge Yang-Mills theory. *Annals Phys.* **324**, 2408–2437 (2009).
- [56] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. The Gluon Mass Generation Mechanism: A Concise Primer. *Front. Phys.(Beijing)* **11**, 111203 (2016).
- [57] Aguilar, A., Ferreira, M., Figueiredo, C. & Papavassiliou, J. Gluon mass scale through nonlinearities and vertex interplay. *Phys. Rev. D* **100**, 094039 (2019).

-
- [58] Ball, J. S. & Chiu, T.-W. Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 1. *Phys. Rev.* **D22**, 2542 (1980).
- [59] Davydychev, A. I., Osland, P. & Saks, L. Quark gluon vertex in arbitrary gauge and dimension. *Phys. Rev.* **D63**, 014022 (2001).
- [60] Berges, J. N-particle irreducible effective action techniques for gauge theories. *Phys. Rev.* **D70**, 105010 (2004).
- [61] Kizilersu, A., Reenders, M. & Pennington, M. One loop QED vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form. *Phys. Rev.* **D52**, 1242–1259 (1995).
- [62] Sternbeck, A., Balduf, P.-H., Kizilersu, A., Oliveira, O., Silva, P. J., Skullerud, J.-I. & Williams, A. G. Triple-gluon and quark-gluon vertex from lattice QCD in Landau gauge. *PoS LATTICE2016*, 349 (2017).
- [63] Skullerud, J. I., Bowman, P. O., Kizilersu, A., Leinweber, D. B. & Williams, A. G. Nonperturbative structure of the quark gluon vertex. *JHEP* **0304**, 047 (2003).
- [64] Skullerud, J. I., Bowman, P. O., Kizilersu, A., Leinweber, D. B. & Williams, A. G. Quark-gluon vertex in arbitrary kinematics. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **141**, 244–249 (2005).
- [65] Lin, H.-W. Quark-gluon vertex with an off-shell $O(a)$ -improved chiral fermion action. *Phys. Rev.* **D73**, 094511 (2006).
- [66] Kizilersu, A., Leinweber, D. B., Skullerud, J.-I. & Williams, A. G. Quark-gluon vertex in general kinematics. *Eur. Phys. J.* **C50**, 871–875 (2007).
- [67] Curtis, D. C. & Pennington, M. R. Truncating the Schwinger-Dyson equations: How multiplicative renormalizability and the Ward identity restrict the three point vertex in QED. *Phys. Rev.* **D42**, 4165–4169 (1990).
- [68] Bhagwat, M. & Tandy, P. Quark-gluon vertex model and lattice-QCD data. *Phys. Rev.* **D70**, 094039 (2004).
- [69] Llanes-Estrada, F. J., Fischer, C. S. & Alkofer, R. Semiperturbative construction for the quark-gluon vertex. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **152**, 43–46 (2006).

-
- [70] Cardona, J. C. *The non-perturbative quark-gluon vertex and the quark-ghost scattering amplitude*. Master's thesis, Universidade Federal do ABC (2012).
- [71] Natale, A. A. & Rodrigues da Silva, P. S. Critical coupling for dynamical chiral-symmetry breaking with an infrared finite gluon propagator. *Phys. Lett.* **B392**, 444–451 (1997).
- [72] Salam, A. Renormalizable electrodynamics of vector mesons. *Phys. Rev.* **130**, 1287–1290 (1963).
- [73] Salam, A. & Delbourgo, R. Renormalizable electrodynamics of scalar and vector mesons. II. *Phys. Rev.* **135**, B1398–B1427 (1964).
- [74] Delbourgo, R. & West, P. C. A Gauge Covariant Approximation to Quantum Electrodynamics. *J. Phys.* **A10**, 1049 (1977).
- [75] Delbourgo, R. & West, P. C. Infrared Behavior of a Gauge Covariant Approximation. *Phys. Lett.* **B72**, 96 (1977).
- [76] Aguilar, A. C., Cardona, J. C., Ferreira, M. N. & Papavassiliou, J. Non-Abelian Ball-Chiu vertex for arbitrary Euclidean momenta. *Phys. Rev.* **D96**, 014029 (2017).
- [77] Williams, R., Fischer, C. S. & Heupel, W. Light mesons in QCD and unquenching effects from the 3PI effective action. *Phys. Rev.* **D93**, 034026 (2016).
- [78] Cheng, T. P. & Li, L. F. *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford University Press, 1984).
- [79] Aitchison, I. J. R. & Hey, A. J. G. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction* (Bristol, Eng. ; Philadelphia : A. Hilger, 1989).
- [80] Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. *An Introduction to quantum field theory* (Reading, USA: Addison-Wesley, 842 p, 1995).
- [81] Ji, X. *Quarks, nuclei and the cosmos: An introduction to modern nuclear physics* (Phy 741. Lectures note (Spring 2007), 2007).
- [82] Pennington, M. R. Swimming with quarks. *J. Phys. Conf. Ser.* **18**, 1–73 (2005).

-
- [83] Eichmann, G., Sanchis-Alepuz, H., Williams, R., Alkofer, R. & Fischer, C. S. Baryons as relativistic three-quark bound states. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **91**, 1–100 (2016).
- [84] Dyson, F. J. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* **75**, 1736–1755 (1949).
- [85] Schwinger, J. S. On the Green’s functions of quantized fields. 1. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**, 452–455 (1951).
- [86] Cucchieri, A., Maas, A. & Mendes, T. Infrared-suppressed gluon propagator in 4-D Yang-Mills theory in a Landau-like gauge. *Mod. Phys. Lett.* **A22**, 2429–2438 (2007).
- [87] Sternbeck, A., Ilgenfritz, E. M., Mueller-Preussker, M. & Schiller, A. Going infrared in SU(3) Landau gauge gluodynamics. *Phys. Rev.* **D72**, 014507 (2005).
- [88] Cornwall, J. M. Exploring dynamical gluon mass generation in three dimensions. *Phys. Rev.* **D93**, 025021 (2016).
- [89] Pawłowski, J. M. The QCD phase diagram: Results and challenges. *AIP Conf. Proc.* **1343**, 75–80 (2011).
- [90] Braun, J., Gies, H. & Pawłowski, J. M. Quark Confinement from Color Confinement. *Phys. Lett.* **B684**, 262–267 (2010).
- [91] Blum, A., Huber, M. Q., Mitter, M. & von Smekal, L. Gluonic three-point correlations in pure Landau gauge QCD. *Phys. Rev.* **D89**, 061703 (2014).
- [92] Braun, J., Fister, L., Pawłowski, J. M. & Rennecke, F. From Quarks and Gluons to Hadrons: Chiral Symmetry Breaking in Dynamical QCD. *Phys. Rev.* **D94**, 034016 (2016).
- [93] Mintz, B. W., Palhares, L. F., Peruzzo, G. & Sorella, S. P. Infrared massive gluon propagator from a BRST-invariant Gribov horizon in a family of covariant gauges. *Phys. Rev.* **D99**, 034002 (2019).
- [94] Capri, M. A. L., Dudal, D., Fiorentini, D., Guimaraes, M. S., Justo, I. F., Pereira, A. D., Mintz, B. W., Palhares, L. F., Sobreiro, R. F. & Sorella, S. P. Local and

-
- BRST-invariant Yang-Mills theory within the Gribov horizon. *Phys. Rev.* **D94**, 025035 (2016).
- [95] Capri, M. A. L., Dudal, D., Fiorentini, D., Guimaraes, M. S., Justo, I. F., Pereira, A. D., Mintz, B. W., Palhares, L. F., Sobreiro, R. F. & Sorella, S. P. Exact nilpotent nonperturbative BRST symmetry for the Gribov-Zwanziger action in the linear covariant gauge. *Phys. Rev.* **D92**, 045039 (2015).
- [96] Nakagawa, Y., Voigt, A., Ilgenfritz, E.-M., Muller-Preussker, M., Nakamura, A. *et al.* Coulomb-gauge ghost and gluon propagators in SU(3) lattice Yang-Mills theory. *Phys. Rev.* **D79**, 114504 (2009).
- [97] Oliveira, O., Duarte, A. G., Dudal, D. & Silva, P. J. Gluon and Ghost Dynamics from Lattice QCD. *Few Body Syst.* **58**, 99 (2017).
- [98] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. The dynamical equation of the effective gluon mass. *Phys. Rev.* **D84**, 085026 (2011).
- [99] Aguilar, A. C., Binosi, D., Ibañez, D. & Papavassiliou, J. New method for determining the quark-gluon vertex. *Phys. Rev.* **D90**, 065027 (2014).
- [100] Aguilar, A. C., Ferreira, M. N., Figueiredo, C. T. & Papavassiliou, J. Nonperturbative Ball-Chiu construction of the three-gluon vertex. *Phys. Rev.* **D99**, 094010 (2019).
- [101] Matevosyan, H. H., Thomas, A. W. & Tandy, P. C. Quark-gluon vertex dressing and meson masses beyond ladder-rainbow truncation. *Phys. Rev.* **C75**, 045201 (2007).
- [102] Chetyrkin, K. & Seidensticker, T. Two loop QCD vertices and three loop MOM beta functions. *Phys. Lett.* **B495**, 74–80 (2000).
- [103] Chetyrkin, K. & Retey, A. Three loop three linear vertices and four loop similar to MOM beta functions in massless QCD. *hep-ph/0007088* (2000).
- [104] Berntsen, J., Espelid, T. O. & Genz, A. Algorithm 698: Dcuhre: An adaptive multidimensional integration routine for a vector of integrals. *ACM Trans. Math. Softw.* **17**, 452–456 (1991).

-
- [105] Aguilar, A. C., Ibañez, D. & Papavassiliou, J. Ghost propagator and ghost-gluon vertex from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.* **D87**, 114020 (2013).
- [106] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Unquenching the gluon propagator with Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.* **D86**, 014032 (2012).
- [107] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. QCD effective charges from lattice data. *JHEP* **1007**, 002 (2010).
- [108] Cornwall, J. M. Dynamical Mass Generation in Continuum QCD. *Phys. Rev.* **D26**, 1453 (1982).
- [109] Binosi, D., Chang, L., Papavassiliou, J., Qin, S.-X. & Roberts, C. D. Natural constraints on the gluon-quark vertex. *Phys. Rev.* **D95**, 031501 (2017).
- [110] Maris, P. & Tandy, P. C. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants. *Phys. Rev.* **C60**, 055214 (1999).
- [111] Takahashi, Y. *Canonical quantization and generalized Ward relations: Foundation of nonperturbative approach* (Print-85-0421 (Alberta), 1985).
- [112] Kondo, K.-I. Transverse Ward-Takahashi identity, anomaly and Schwinger-Dyson equation. *Int. J. Mod. Phys.* **A12**, 5651–5686 (1997).
- [113] He, H.-X., Khanna, F. & Takahashi, Y. Transverse Ward-Takahashi identity for the fermion boson vertex in gauge theories. *Phys. Lett.* **B480**, 222–228 (2000).
- [114] Pennington, M. & Williams, R. Checking the transverse Ward-Takahashi relation at one loop order in 4-dimensions. *J. Phys.* **G32**, 2219–2234 (2006).
- [115] He, H.-X. Transverse vector vertex function and transverse Ward-Takahashi relations in QED. *Commun. Theor. Phys.* **46**, 109–112 (2006).
- [116] Qin, S.-X., Chang, L., Liu, Y.-X., Roberts, C. D. & Schmidt, S. M. Practical corollaries of transverse Ward-Green-Takahashi identities. *Phys. Lett.* **B722**, 384–388 (2013).

-
- [117] Nachtmann, O. & Wetzel, W. The Beta Function for Effective Quark Masses to Two Loops in QCD. *Nucl. Phys.* **B187**, 333–342 (1981).
- [118] Brown, N. & Dorey, N. Multiplicative Renormalizability and Selfconsistent Treatments of the Schwinger-dyson Equations. *Mod. Phys. Lett.* **A6**, 317–324 (1991).
- [119] Curtis, D. C. & Pennington, M. R. Nonperturbative study of the fermion propagator in quenched QED in covariant gauges using a renormalizable truncation of the Schwinger- Dyson equation. *Phys. Rev.* **D48**, 4933–4939 (1993).
- [120] Bloch, J. C. R. Multiplicative renormalizability of gluon and ghost propagators in QCD. *Phys. Rev.* **D64**, 116011 (2001).
- [121] Bloch, J. C. R. Multiplicative renormalizability and quark propagator. *Phys. Rev.* **D66**, 034032 (2002).
- [122] Albino, L., Bashir, A., Guerrero, L. G., Bennich, B. E. & Rojas, E. Transverse Takahashi Identities and Their Implications for Gauge Independent Dynamical Chiral Symmetry Breaking. *Phys. Rev. D* **100**, 054028 (2019).
- [123] Politzer, H. D. Effective Quark Masses in the Chiral Limit. *Nucl. Phys.* **B117**, 397 (1976).
- [124] Miransky, V. A. & Fomin, P. I. Chiral symmetry breakdown and the spectrum of pseudoscalar mesons in quantum chromodynamics. *Phys. Lett.* **B105**, 387–391 (1981).
- [125] Binosi, D. & Papavassiliou, J. Pinch Technique: Theory and Applications. *Phys. Rept.* **479**, 1–152 (2009).
- [126] Binosi, D., Chang, L., Papavassiliou, J. & Roberts, C. D. Bridging a gap between continuum-QCD and ab initio predictions of hadron observables. *Phys. Lett.* **B742**, 183–188 (2015).
- [127] Binosi, D., Mezrag, C., Papavassiliou, J., Roberts, C. D. & Rodriguez-Quintero, J. Process-independent strong running coupling. *Phys. Rev.* **D96**, 054026 (2017).
- [128] Kugo, T. & Ojima, I. Local Covariant Operator Formalism of Nonabelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **66**, 1 (1979).

-
- [129] Kugo, T. The Universal renormalization factors $Z(1) / Z(3)$ and color confinement condition in nonAbelian gauge theory. In *BRS symmetry. Proceedings, International Symposium on the Occasion of its 20th Anniversary, Kyoto, Japan, September 18-22, 1995*, 107–119 (1995).
- [130] Grassi, P. A., Hurth, T. & Quadri, A. On the Landau background gauge fixing and the IR properties of YM Green functions. *Phys. Rev.* **D70**, 105014 (2004).
- [131] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Indirect determination of the Kugo-Ojima function from lattice data. *JHEP* **0911**, 066 (2009).
- [132] Aguilar, A. C., Binosi, D., Papavassiliou, J. & Rodriguez-Quintero, J. Non-perturbative comparison of QCD effective charges. *Phys. Rev.* **D80**, 085018 (2009).
- [133] Pagels, H. & Stokar, S. The Pion Decay Constant, Electromagnetic Form-Factor and Quark Electromagnetic Selfenergy in QCD. *Phys. Rev.* **D20**, 2947 (1979).
- [134] Cornwall, J. M. Confinement and Chiral Symmetry Breakdown: Estimates of $f(\pi)$ and of Effective Quark Masses. *Phys. Rev.* **D22**, 1452 (1980).
- [135] Roberts, C. D. Electromagnetic pion form-factor and neutral pion decay width. *Nucl. Phys.* **A605**, 475–495 (1996).
- [136] Patrignani, C. *et al.* Review of Particle Physics. *Chin. Phys.* **C40**, 100001 (2016).
- [137] Aguilar, A. & Ferreira, M. Quark mass generation with Schwinger-Dyson equations. In *14th International Workshop on Hadron Physics* (2018).
- [138] He, H.-X. Transverse Ward-Takahashi relation for the fermion-boson vertex function in four-dimensional Abelian gauge theory. *Int. J. Mod. Phys.* **A22**, 2119–2132 (2007).
- [139] Ayala, A., Bashir, A., Binosi, D., Cristoforetti, M. & Rodriguez-Quintero, J. Quark flavour effects on gluon and ghost propagators. *Phys. Rev.* **D86**, 074512 (2012).
- [140] Fischer, C., Watson, P. & Cassing, W. Probing unquenching effects in the gluon polarisation in light mesons. *Phys. Rev.* **D72**, 094025 (2005).

- [141] Cyrol, A. K., Mitter, M., Pawłowski, J. M. & Strodthoff, N. Nonperturbative quark, gluon, and meson correlators of unquenched QCD. *Phys. Rev.* **D97**, 054006 (2018).
- [142] Atkinson, D., Johnson, P. W. & Stam, K. Chiral symmetry breaking in QCD. 3. Arbitrary covariant gauge. *Phys. Rev.* **D37**, 2996 (1988).