

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

LÍQUIDOS DE LUTTINGER NÃO HOMOGÊNEOS

Tese de Doutorado

JERESON SILVA VALENCIA

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Miranda

Campinas-SP – Brasil

Agosto de 2001

A Guillermina e Pablo Cesar.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Eduardo Miranda pela excelente orientação neste trabalho, ensinamentos, otimismo, incentivo ao longo do mesmo e sobretudo pela amizade.

Aos Profs. Amir O. Caldeira e Raimundo R. dos Santos, pela colaboração, idéias e incentivo.

À minha mãe, Guillermina Valencia e meu irmão, Pablo Cesar Silva, pelo apoio e pela compreensão.

Aos meus mais recentes irmãos Marlio Paredes e família, Humberto Rodriguez e família, Alexis Garcia, Harold Paredes, Yolanda Casallas e Martha Celia.

A Claudia Rodrigues, pelo amor e encorajamento.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), pelo financiamento.

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas de elétrons fortemente correlacionados não homogêneos. Uma superrede de líquidos de Luttinger composta por um arranjo periódico de dois líquidos de Luttinger diferentes é considerada e encontramos que suas propriedades são uma mistura das propriedades dos líquidos constituintes dependendo da proporção espacial em que estejam. O peso de Drude é dado pelo produto da velocidade efetiva de carga e o expoente de correlação efetivo de carga, como no caso homogêneo. As leis de escala entre os expoentes nas funções de correlação não são alteradas pela estrutura da superrede.

As propriedades de baixa energia de uma superrede de Hubbard unidimensional (arranjo periódico de duas cadeias de Hubbard com acoplamentos e/ou “hoppings” diferentes) e uma superrede de spins (arranjo periódico de duas cadeias XXZ de spin- $\frac{1}{2}$ com parâmetros de anisotropia diferentes) são descritas em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger. Para as superredes de Hubbard encontramos que o estado fundamental apresenta várias fases: metálicas e isolantes, as últimas sem gap (compressíveis). As superredes de spin apresentam platôs na magnetização que dependem da proporção espacial em que estejam as cadeias.

O modelo de Wolff é generalizado e estudado via bosonização. Uma análise de grupo de renormalização é feita e, até primeira ordem, três fases são encontradas: condutor de carga e isolante de spin, condutor perfeito e isolante perfeito. Em segunda ordem, linhas de pontos fixos instáveis são encontradas.

Abstract

In this work, we study inhomogeneous strongly correlated electron systems. A Luttinger liquid superlattice, modeled by a repeated pattern of two different Luttinger liquids was considered. We find that the effective low-energy description amalgamates features of both types of liquids in proportion to their spatial extent. The Drude peak is given by the product of the effective charge velocity and the effective exponent in the charge-charge correlation function. The scaling laws between the exponents of the correlation functions are maintained, but with effective exponents.

The low-energy properties of a one-dimensional Hubbard superlattice (which consists of a periodic arrangement of two long Hubbard chains with different couplings and different hoppings) and spin superlattices (consisting of a repeated pattern of two long spin- $\frac{1}{2}$ XXZ chains, with different anisotropy parameters) are described in terms of Luttinger liquid superlattices. One-dimensional Hubbard superlattices exhibit a very rich phase diagram with several different phases: metallic and insulating, the latter with no gap (compressible). Non-trivial plateaux, with magnetization depending of the relative sizes of the chains, were found in spin superlattices.

We generalized and studied the Wolff model using bosonization. From

a renormalization group calculation we found three phases (in first order of perturbation theory): charge conductor and spin insulator, perfect conductor and perfect insulator. Lines of unstable fixed points were found in second order of perturbation theory.

Conteúdo

Introdução	xv
1 Líquidos de Luttinger	1
1.1 Modelo de Tomonaga-Luttinger	2
1.1.1 Propriedades físicas do modelo de Luttinger	8
1.1.2 Conjectura do líquido de Luttinger	9
1.2 Modelos de Rede	10
1.2.1 Modelo de Hubbard	10
1.2.2 Cadeia de Heisenberg $S = 1/2$ anisotrópica : modelo XXZ	13
2 Superredes de Líquidos de Luttinger	17
2.1 Modos Normais ($m \neq 0$)	20
2.2 Modos Zero	22
2.3 Compressibilidade	23
2.4 Funções de Correlação	25
2.4.1 Densidade-Densidade	25
2.4.2 Spin-Spin	27

2.4.3	Supercondutora	28
2.5	Condutividade	29
2.5.1	Peso de Drude	30
2.5.2	Condutância de Landauer	31
3	Superredes de Hubbard Unidimensionais	33
3.1	Gás de Férmions e uma Cadeia de Hubbard	36
3.2	Duas cadeias de Hubbard: Acoplamentos diferentes	44
3.3	Duas Cadeias de Hubbard: “Hoppings” diferentes	52
4	Superredes de Spins	59
4.1	$\Delta_1, \Delta_2 < 1$	65
4.2	$\Delta_1 < \Delta_2 > 1$	66
5	Modelo de Wolff contínuo	73
5.1	Uma Impureza	76
5.2	Ação efetiva	78
5.3	Análise do grupo de renormalização	81
5.3.1	Primeira ordem	82
5.3.2	Segunda ordem	85
	Bibliografia	93
A	Operadores das funções de Correlação	99
B	Constantes das autofunções	103
C	Simetria partícula-buraco	107

Introdução

Sistemas de elétrons fortemente correlacionados representam um desafio à nossa capacidade de descrevê-los fisicamente. Mais e mais, nos últimos anos, tem-se tornado claro que muitas das ferramentas de que normalmente dispomos para atacar esses sistemas não têm se mostrado suficientes para capturarmos a essência do seu comportamento. Essa deficiência se tornou extremamente premente no caso de supercondutores de alta temperatura crítica (SATC)[1]. Nesses óxidos de cobre de estrutura perovskita, a dinâmica dos elétrons parece ser dominada pelos planos de cobre e oxigênio, onde se acredita se formar um sistema fortemente anisotrópico de elétrons (ou buracos) com caráter essencialmente bidimensional. Embora a tridimensionalidade do sistema seja essencial em algumas propriedades físicas desses compostos, muitas propriedades importantes parecem já estar contidas na física ainda não completamente entendida de um sistema de elétrons interagentes em duas dimensões, a saber, os planos de cobre e oxigênio acima mencionados.

A característica mais marcante desses sistemas é a inadequação de uma descrição baseada na teoria dos líquidos de Fermi de Landau[2]. Isso é atestado mais dramaticamente pela dependência linear com a temperatura da resistividade planar[3]. A teoria dos líquidos de Fermi de Landau constitui a

pedra fundamental do nosso entendimento da física de baixa energia e comprimentos de onda longos de sistemas de elétrons interagentes em dimensões superiores a 1[4]. A sua inadequação para a descrição satisfatória dos SATC representa, portanto, um enorme desafio que tem incentivado a busca e o interesse por outras fases metálicas que não sejam líquidos de Fermi.

Ao mesmo tempo, uma técnica de abordagem teórica das mais bem sucedidas é a técnica de bosonização, que tem sua utilização mais frutífera na análise de sistemas fermiônicos unidimensionais (1D)[5]. Nesse caso, uma análise que foi amadurecendo ao longo dos anos culminou finalmente com o estabelecimento do conceito de líquido de Luttinger[6]. O que se sabe hoje é que sistemas de elétrons em 1 dimensão constituem uma exceção à descrição em termos de líquidos de Fermi de Landau. Ao contrário, as excitações elementares daqueles sistemas se esgotam pelos modos coletivos de carga e spin, sendo a quase-partícula, objeto central na teoria de Landau, completamente instável e de meia vida curta. Para essa conclusão foi essencial a utilização da técnica de bosonização, que mapeia um sistema de férmions num sistema de bósons equivalente.

As propriedades físicas no limite de baixas energias e comprimentos de onda longos de sistemas interagentes unidimensionais sem gap se caracterizam por funções de correlação e funções espectrais que decaem em forma de leis de potências. O comportamento do chamado líquido de Luttinger é fortemente baseado no modelo de Tomonaga-Luttinger[7, 8], da mesma forma que o estado normal e as excitações de elétrons interagentes tridimensionais (3D) são relacionados àqueles de um gás tridimensional de férmions livres (teoria de líquidos de Fermi de Landau). Um detalhado entendimento da importante

competição entre interações e desordem também têm sido obtido[9, 10, 11]. Além disso, o efeito das condições de contorno sobre as propriedades de baixa energia dos líquidos de Luttinger foi considerado poucos anos atrás[12]. Em particular, foi mostrado que sistemas quânticos 1D e com condições de contorno abertas formam uma nova classe de universalidade de comportamento crítico quântico [13].

Paralelamente, novas técnicas experimentais têm tornado possível o crescimento de nanoestruturas que são topologicamente unidimensionais, tais como fios quânticos e nanotubos de carbono. A teoria de líquidos de Luttinger tem tido sucesso em prever o transporte em sistemas com efeito Hall quântico fracionário [14, 15, 16] e nanotubos de carbono [17], entretanto para fios quânticos sua aplicação ainda causa controvérsias [18].

Recentemente, processos de espalhamento causados por não homogeneidades na interação elétron-elétron têm atraído muito a atenção[19, 20]. Tais não homogeneidades podem ser realizadas e são, na verdade, inevitáveis em sistemas 1D. Por exemplo, nós podemos mudar a densidade eletrônica e portanto, mudar a força de interação efetiva aplicando um potencial a um eletrodo que cobre parte de um fio quântico. Esses sistemas 1D com interação variável podem ser descritos em termos de líquidos de Luttinger não homogêneos, onde as velocidades das excitações (u_ρ e u_σ) e os expoentes de correlação (K_σ e K_ρ) dependem da posição. Por exemplo, a não renormalização da condutância pelas interações em fios quânticos de GaAs[21] de alta mobilidade tem sido explicada em termos de um líquido de Luttinger usual (representando o fio) em contato com um líquido de Luttinger livre (não interagente) em cada um dos extremos (representando os eletrodos)[22, 23, 24]. Líquidos

de Luttinger com diferentes perfis de não homogeneidades têm sido usados no contexto do efeito Hall quântico fracionário (EHQF) para descrever as transições entre estados de borda com diferentes preenchimentos [25, 26], ou entre um estado de borda e um líquido de Fermi[27].

Estruturas do tipo superrede são de grande interesse tanto do ponto de vista teórico como de possíveis aplicações, já que elas apresentam uma rica variedade de novas propriedades físicas. Por exemplo, amostras 3D feitas alternando camadas magnéticas metálicas (átomos de Fe, Ni ou Co) e camadas metálicas não magnéticas (átomos de Cu, Ag, Mn, Au ou Mg) apresentam uma diminuição da resistividade do sistema na presença de um campo magnético (este fenômeno é conhecido como magnetoresistência gigante). Um outro fenômeno é a oscilação da constante de troca com a largura da camada não magnética, quando a camada magnética é mantida fixa, bem como em função da largura da camada magnética quando a largura do espaçador não magnético é mantida fixa[28]. Assim fica óbvio que sistemas de elétrons fortemente correlacionados não homogêneos não aleatórios são muito diferentes dos já bem estudados e compreendidos sistemas homogêneos. Desenvolver uma teoria eletrônica das propriedades magnéticas de superredes (partindo de primeiros princípios) é uma tarefa muito difícil. Em vista disso, Paiva e dos Santos [29, 30] partiram de um modelo simplificado que contém a física essencial, chamado de superrede de Hubbard unidimensional (SHU). Este consiste de um arranjo periódico de sítios livres onde $U = 0$ seguido de sítios interagentes com $U > 0$, sendo U a interação coulombiana entre elétrons de spins opostos num mesmo sítio. Usando o método de diagonalização de Lanczos, eles observaram que o momento local é transferido das camadas

interagentes para as livres e que o quase ordenamento de ondas de densidade de spin é destruído pela frustração. A evolução do momento local e do gap de carga, junto com uma análise de acoplamento forte, mostraram que a densidade eletrônica na qual o sistema é isolante aumenta com o comprimento da camada livre, quando o comprimento da camada repulsiva é mantido fixo.

Mais recentemente, outros tipos de não homogeneidades em cadeias de Hubbard foram estudadas [31]. Esses pesquisadores consideraram um “hopping” periodicamente modulado com preenchimento e magnetização arbitrários.

Motivados pelos estudos em superredes já comentados anteriormente, nós estudamos as propriedades físicas de um arranjo periódico de dois líquidos de Luttinger diferentes, que nós chamamos de superrede de líquidos de Luttinger[32]. A Hamiltoniana deste modelo é diagonalizada fazendo uma expansão em termos de um conjunto de operadores de criação e aniquilação de bósons, e autofunções. Propriedades assintóticas tais como as velocidades efetivas das excitações, funções de correlação, condutividade e compressibilidade foram calculadas.

Dois modelos de rede foram estudados: Superredes de Hubbard unidimensionais e superredes de spin. Em equilíbrio, as propriedades de baixa energia destes modelos são descritas em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger.

Assim como uma estrutura de superrede leva à aparição de novas propriedades, um outro tipo comum de não homogeneidade, a presença de uma ou mais impurezas, também conduz a novos e interessantes fenômenos. Um exemplo clássico é o efeito Kondo, que ocorre quando se têm impurezas mag-

néticas diluídas em uma matriz metálica não magnética. As impurezas magnéticas causam um mínimo na resistência a uma temperatura finita, devido ao espalhamento com troca de spin entre os elétrons de condução e o momento localizado da impureza[33].

A presença de uma impureza em um líquido de Luttinger afeta dramaticamente as propriedades físicas. No caso de elétrons sem spin temos que para interações repulsivas há reflexão total e para interações atrativas há transmissão total[34, 35].

Um modelo de impurezas muito estudado, o modelo de Wolff[36], descreve um mar de elétrons livres com uma impureza substitucional. Quando o mar de elétrons livres é descrito em termos de um líquido de Luttinger livre e levamos em conta os termos locais de potencial e interação, obtemos o chamado modelo de Wolff contínuo. Este problema foi por nós mapeado em uma teoria de campos efetiva usando bosonização, onde são desprezados os termos que no limite de baixas energias são irrelevantes. Fizemos então uma análise perturbativa de grupo de renormalização.

Resumindo, este trabalho tem como motivação entender o efeito de não homogeneidades (ou seja, estrutura de superrede ou impurezas) sobre as propriedades de baixas energias de sistemas de elétrons fortemente correlacionados.

A estrutura dessa tese é a seguinte. A teoria básica e as mais relevantes propriedades dos líquidos de Luttinger são discutidas no capítulo 1. Nos capítulos 2, 3 e 4 são discutidas as superredes de líquidos de Luttinger, superredes de Hubbard unidimensionais e as superredes de spin, respectivamente. O modelo de Wolff contínuo é considerado no capítulo 5. Por último, são

dadas as conclusões deste trabalho e as perspectivas do mesmo.

Capítulo 1

Líquidos de Luttinger

As propriedades dos metais comuns em três dimensões (3D) podem ser descritas muito bem pela teoria de Landau dos líquidos de Fermi. Esta teoria estabelece uma correspondência 1 : 1 entre as excitações de baixa energia de um gás de Fermi e aquelas de um líquido de elétrons interagentes, chamadas de quasepartículas[37]. Elas têm os mesmos números quânticos que as partículas no gás de Fermi, mas suas propriedades são renormalizadas pelas interações. Por exemplo, a função de Green tem um pólo com resíduo $0 < Z_{k_F} < 1$ na superfície de Fermi, enquanto que no gás de Fermi $Z_{k_F} = 1$. Além disso, as quasepartículas são caracterizadas por uma massa efetiva $m^* \neq m$, onde m é a massa do elétron. Finalmente, a física de baixas energias é parametrizada por um conjunto de parâmetros $F_{s,a}^\ell$, que contém os efeitos de interação residuais entre as quasepartículas nos canais de spin e carga.

Nas últimas décadas, a busca por estados metálicos que não sejam líquidos de Fermi tem sido intensa, motivada em parte pelas propriedades não usuais

do estado normal dos supercondutores de alta temperatura crítica, mas uma confirmação definitiva do estado não líquido de Fermi ainda está faltando [1]. Em uma dimensão (1D) no entanto, já se conhece um bom exemplo que é o líquido de Luttinger[5, 6], onde as quasepartículas não são estáveis e a teoria de líquidos de Fermi não é válida. O líquido de Luttinger é baseado no modelo de Luttinger[8], que será estudado a seguir.

Primeiro, consideremos um sistema 1D com N_0 elétrons e comprimento L . Na ausência de campos externos, o estado fundamental do sistema livre é o mar de Fermi $|FS\rangle$ com $k_F = N_0\pi/2L$. Se ao sistema livre adicionamos um férmion em um estado k com $|k| > k_F$, é criada uma quasepartícula. Esta quasepartícula não é estável quando as interações são consideradas. As excitações elementares estáveis deste sistema são do tipo partícula-buraco $c_{k+p}^\dagger c_k |FS\rangle$.

1.1 Modelo de Tomonaga-Luttinger

O modelo de Tomonaga-Luttinger[7, 8] descreve férmions interagentes em uma dimensão, que se movimentam à esquerda ($r = -$) e direita ($r = +$) através da Hamiltoniana

$$H = H_0 + H_2 + H_4 \quad (1.1)$$

$$H_0 = \sum_{r,k,s} v_F(rk - k_F) : c_{r,k,s}^\dagger c_{r,k,s} :, \quad (1.2)$$

$$H_2 = \frac{1}{L} \sum_{p,s,s'} [g_2(p)\delta_{s,s'} + g_2(p)\delta_{s,-s'}] \rho_{+,s}(p) \rho_{-,s'}(-p), \quad (1.3)$$

$$H_4 = \frac{1}{2L} \sum_{r,p,s,s'} [g_4(p)\delta_{s,s'} + g_4(p)\delta_{s,-s'}] : \rho_{r,s}(p) \rho_{r,s'}(-p) :, \quad (1.4)$$

onde $c_{r,k,s}$ descreve férmions com momento k , spin s nos dois ramos ($r = \pm$) da dispersão que varia linearmente $\varepsilon_r(k) = v_F(rk - k_F)$. As constantes de acoplamento g_2 e g_4 medem a magnitude do espalhamento para frente (transferência de momento $|q| \ll k_F$) entre partículas de diferentes ramos ou no mesmo ramo, respectivamente.

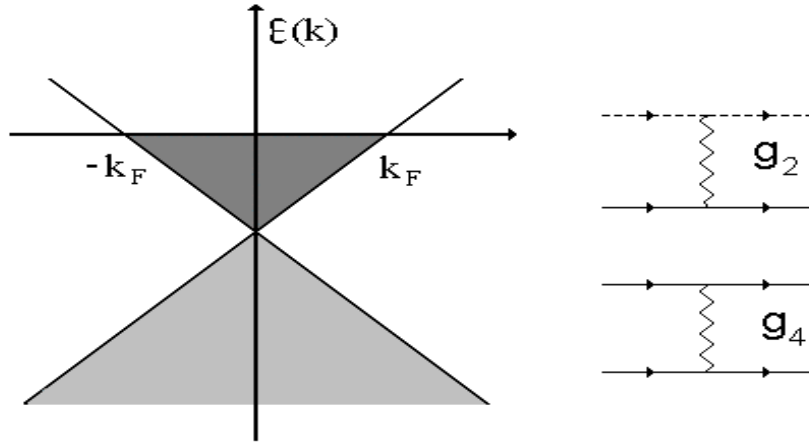


Figura 1.1: Modelo de Luttinger. Relação de dispersão (esquerda) e processos de espalhamento (direita). Linhas pontilhadas denotam partículas do ramo esquerdo e linhas cheias partículas do ramo direito.

Na Hamiltoniana (1.1)

$$\rho_{r,s}(p) = \sum_k : c_{r,k+p,s}^\dagger c_{r,k,s} : = \sum_k (c_{r,k+p,s}^\dagger c_{r,k,s} - \delta_{p,0} \langle c_{r,k,s}^\dagger c_{r,k,s} \rangle_0), \quad (1.5)$$

é o operador de flutuação de densidade nos canais $r = \pm$ e $: \cdots :$ denota ordenamento normal, definido pela segunda igualdade. Estes operadores

obedecem a seguinte relação de comutação bosônica

$$[\rho_{r,s}(p), \rho_{r',s'}(-p')] = -\delta_{r,r'}\delta_{s,s'}\delta_{p,p'}\frac{rpL}{2\pi}. \quad (1.6)$$

Esta álgebra é conhecida como a álgebra de Kac-Moody $U(1)$ na teoria de campos. A relação (1.6) é exata, já que a relação de dispersão se estende ao infinito : $-\infty < k < \infty$ para os dois ramos. Para se obterem resultados com significado físico, considera-se que todos os estados com energia negativa estão ocupados.

Atuando sobre o estado fundamental da Hamiltoniana livre H_0 , o operador $\rho_{r,s}(p)$ comporta-se tanto como operador de criação ou destruição, dependendo do sinal de p

$$\rho_{+,s}(-p)|0\rangle = \rho_{-,s}(p)|0\rangle = 0 \quad \text{para } p > 0.$$

Da Hamiltoniana (1.1), nós vemos que os termos de interação entre os férmions são bilineares nos operadores de flutuação de densidade (1.5). Uma questão crucial para se poder resolver exatamente o modelo é o fato de que a Hamiltoniana H_0 pode ser escrita de forma bilinear nos operadores $\rho_{r,s}(p)$. Observe-se que H_0 satisfaz

$$[H_0, \rho_{+,s}(p)] = v_F p \rho_{+,s}(p). \quad (1.8)$$

Isto implica que os estados criados por $\rho_{+,s}(p)$ são autoestados de H_0 com energia $v_F p$. Uma forma bilinear para H_0 que satisfaz (1.8) é

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{\pi v_F}{L} \sum_{r,p=0,s} : \rho_{r,s}(p) \rho_{r,s}(-p) : \\ & + \frac{\pi}{2L} \sum_s [v_N (N_{+,s} + N_{-,s})^2 + v_J (N_{+,s} - N_{-,s})^2], \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$(-1)_s^J = -(-1)_s^N \quad (v_s = v_N = v_J = v_F),$$

onde $N_{r,s} = \rho_{r,s}(p=0)$ são tomados relativos ao valor do estado fundamental e, por conseguinte, medem o número de excitações com relação ao estado fundamental dado. A Hamiltoniana (1.9) é a representação bosônica da Hamiltoniana (1.2). Calculando a função de partição nas duas representações (fermiônica e bosônica), pode-se provar que a multiplicidade dos níveis é a mesma para as duas representações. Portanto os espaços de Hilbert fermiônico e bosônico são idênticos.

Agora a Hamiltoniana (1.1) é bilinear em operadores bosônicos e pode ser diagonalizada por uma transformação de Bogoliubov. Mas antes, vamos reescrever a Hamiltoniana de Luttinger em termos de variáveis de carga e spin

$$\begin{aligned} \rho_r(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\rho_{r,\uparrow}(p) + \rho_{r,\downarrow}(p)] & N_{r,\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[N_{r,\uparrow} + N_{r,\downarrow}], \\ \sigma_r(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\rho_{r,\uparrow}(p) - \rho_{r,\downarrow}(p)] & N_{r,\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[N_{r,\uparrow} - N_{r,\downarrow}]. \end{aligned}$$

As interações se transformam como

$$g_{i\rho} = \frac{1}{2}(g_{i\parallel} + g_i) \quad g_{i\sigma} = \frac{1}{2}(g_{i\parallel} - g_{i\perp}),$$

onde $g_{i\parallel}$ e $g_{i\perp}$ representam processos de espalhamento de partículas com o mesmo spin e spins opostos respectivamente.

Assim, a Hamiltoniana (1.1) fica ($\nu = \rho, \sigma$)

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\pi v_F}{L} \sum_{\nu r p=0} : \nu_r(p) \nu_r(-p) : \\ &+ \frac{\pi}{2L} [v_F(N_{+\nu} + N_{-\nu})^2 + v_F(N_{+\nu} - N_{-\nu})^2], \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$H_2 = \frac{2}{L} \sum_{\nu p} g_{2\nu}(p) \nu_+(p) \nu_-(-p), \quad (1.15)$$

$$H_4 = \frac{1}{L} \sum_{\nu, r, p} g_{4\nu}(p) : \nu_r(p) \nu_r(-p) : . \quad (1.16)$$

Mediante uma transformação canônica, nós diagonalizamos (1.1) para obter

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \frac{\pi}{L} \sum_{\nu r p=0} v_\nu(p) : \tilde{\nu}_r(p) \tilde{\nu}_r(-p) : \\ & + \frac{\pi}{2L} [v_{N_\nu} (N_{+\nu} + N_{-\nu})^2 + v_{J_\nu} (N_{+\nu} - N_{-\nu})^2] \end{aligned} \quad (1.17)$$

com

$$v_{N_\nu} v_{J_\nu} = v_\nu^2 \quad \text{i.e.} \quad v_{N_\nu} = v_\nu / K_\nu \quad \text{e} \quad v_{J_\nu} = v_\nu K_\nu. \quad (1.18)$$

As velocidades de flutuação de carga e spin renormalizadas são

$$v_\nu(p) = \sqrt{\left[v_F + \frac{g_{4\nu}(p)}{\pi} \right]^2 - \left[\frac{g_{2\nu}(p)}{\pi} \right]^2}, \quad (1.19)$$

e o parâmetro de interação é dado por

$$K_\nu(p) = e^{2\xi_\nu(p)} = \sqrt{\frac{\pi v_F + g_{4\nu}(p) - g_{2\nu}(p)}{\pi v_F + g_{4\nu}(p) + g_{2\nu}(p)}}. \quad (1.20)$$

Note que para interações repulsivas $K_\nu < 1$ e atrativas $K_\nu > 1$.

As equações (1.17) e (1.18) são as relações centrais do modelo de Luttinger. Os dois parâmetros v_ν e K_ν descrevem totalmente a física de baixas energias de cada grau de liberdade ν do modelo.

De (1.19) nós vemos que a velocidade das flutuações de carga e spin no modelo de Luttinger são diferentes. Portanto, as flutuações de carga e spin se separam no tempo. Este fenômeno é conhecido como separação spin-carga [38, 39, 40] e é uma importante propriedade do modelo de Luttinger.

Uma vez diagonalizada a Hamiltoniana de Luttinger, só resta relacionar o operador de campo fermiônico $\Psi_{rs}(x)$ e os operadores bosônicos $\rho_{rs}(p)$ por

meio de uma identidade entre operadores. Esta é conhecida como relação de Mandelstan[41] e é dada por

$$\Psi_{r,s} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{irk_F x}}{\sqrt{2\pi\alpha}} U_{r,s}^\dagger \exp\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}[r\Phi_\rho(x) - \Theta_\rho(x) + s\{r\Phi_\sigma(x) - \Theta_\sigma(x)\}]\right). \quad (1.21)$$

Aqui $U_{r,s}$ é um operador unitário que incrementa em um o número de férmions com spin s no ramo r e que comuta com os operadores bosônicos com momento finito. Em (refMandel) α é um "Cutoff" que é da ordem do comprimento de rede.

Os campos de fase que aparecem em (1.21) são

$$\Phi_\nu(x) = -\frac{i\pi}{L} \sum_{p \neq 0} \frac{e^{-\alpha|p|-ipx}}{p} [\nu_+(p) + \nu_-(p)] - (N_{+,\nu} + N_{-,\nu}) \frac{\pi x}{L}, \quad (1.22)$$

e

$$\Theta_\nu(x) = \frac{i\pi}{L} \sum_{p \neq 0} \frac{e^{-\alpha|p|-ipx}}{p} [\nu_+(p) - \nu_-(p)] + (N_{+,\nu} - N_{-,\nu}) \frac{\pi x}{L}. \quad (1.23)$$

O operador densidade de carga está relacionado a Φ_ρ por

$$\rho(x) = \sqrt{2}[\rho_+ + \rho_-] = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\partial \Phi_\rho(x)}{\partial x},$$

e existe uma expressão análoga para a densidade de spin.

Os campos de fase satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\Phi_\nu, \partial_{x'} \Theta_{\nu'}(x')] = i\pi \delta_{\nu,\nu'} \delta(x - x'). \quad (1.25)$$

Nós podemos escrever a Hamiltoniana (1.1) em termos dos campos de fase (1.22), (1.23)

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int dx \left\{ v_{J\nu} \left(\frac{\partial \Theta_\nu(x)}{\partial x} \right)^2 + v_{N\nu} \left(\frac{\partial \Phi_\nu(x)}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (1.26)$$

Aqui é óbvia a equivalência com o modelo Gaussiano da mecânica estatística. Sob a transformação de Bogoliubov os campos de fase se transformam como

$$\Phi_\nu \rightarrow \Phi_\nu \sqrt{K_\nu} \quad e \quad \Theta_\nu \rightarrow \Theta_\nu / \sqrt{K_\nu}. \quad (1.27)$$

1.1.1 Propriedades físicas do modelo de Luttinger

A termodinâmica dos líquidos de Luttinger não é muito diferente daquela dos líquidos de Fermi, tendo um calor específico linear com T (esperado para ambos férmions e bósons!) e susceptibilidade de Pauli e compressibilidade eletrônica independentes da temperatura

$$C(T) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_F}{v_\rho} + \frac{v_F}{v_\sigma} \right) \gamma_0 T, \quad \chi = \frac{2K_\sigma}{\pi v_\sigma}, \quad \kappa = \frac{2K_\rho}{\pi v_\rho}.$$

Como podemos ver a suscetibilidade e a compressibilidade são renormalizadas pelas interações. Daqui nós vemos que a razão de Wilson é

$$R_W = \frac{2v_\rho}{v_\rho + v_\sigma}.$$

O peso de Drude de um líquido de Luttinger é $D/g_0 = 2v_\rho K_\rho$, onde $g_0 = e^2/\hbar$ é a condutância quântica.

As funções de correlação densidade-densidade e spin-spin são dadas por (as expressões para os operadores são dadas no apêndice A)

$$\begin{aligned} \langle n(0)n(x) \rangle &\sim \frac{K_\rho}{\pi^2 |x|^2} + A_1 \cos(2k_F x) |x|^{-K_\rho - K_\sigma} \\ &\quad + A_2 \cos(4k_F x) |x|^{-4K_\rho}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(0) \vec{S}(x) \rangle &\sim \frac{K_\sigma}{\pi^2 |x|^2} + B_1 \cos(2k_F x) |x|^{-K_\rho - K_\sigma^{-1}} \\ &\quad + B_2 \cos(2k_F x) |x|^{-K_\rho - K_\sigma}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Para as correlações supercondutoras singleto e tripleto temos

$$\langle O_{SS,TS0}(0) O_{SS,TS0}(x) \rangle \sim \frac{C_1}{2(\pi\alpha)^2} |x|^{-K_\rho^{-1} - K_\sigma}, \quad (1.32)$$

$$\langle O_{TS\pm 1}(0)O_{TS\pm 1}(x) \rangle \sim \frac{C_2}{2(\pi\alpha)^2} |x|^{-K_\rho^{-1}-K_\sigma^{-1}}. \quad (1.33)$$

A função de distribuição de momentos perto de k_F é dada por

$$n(k) \approx n_{k_F} - \beta \operatorname{sign}(k - k_F) |k - k_F|^\gamma$$

e a densidade de estados de uma partícula é $N(\omega) \approx |\omega|^\gamma$ com $\gamma = (K_\rho + K_\rho^{-1} - 2)/4$ e β é uma constante que depende do modelo. Isto ilustra diretamente a ausência de quasipartículas: no líquido de Fermi, $n(k)$ tem um salto em k_F com amplitude $Z_{k_F} \neq 0$.

1.1.2 Conjectura do líquido de Luttinger

Nós vimos que o modelo de Luttinger é exatamente solúvel. Entretanto, este tem severas aproximações comparado com um modelo de muitos corpos realista: (i) sua dispersão é estritamente linear, e (ii) a interação elétron-elétron é limitada só a espalhamento para frente. Mas a física do modelo de Luttinger é robusta e, para outros modelos, se espera, baseado em argumentos propostos por Haldane, que os parâmetros (K_ν, v_ν) sejam renormalizados perto da superfície de Fermi, mas que a teoria a baixas energias seja idêntica à do modelo de Luttinger. Assim o modelo de Luttinger representa o comportamento genérico dos sistemas quânticos $1D$ sem gap e nós podemos construir sobre este a fenomenologia universal de baixas energias para todos os metais $1D$ (Líquidos de Luttinger)[6].

1.2 Modelos de Rede

Nós agora discutiremos alguns dos mais importantes modelos de rede que têm sua física de baixas energias descrita pelo líquido de Luttinger.

1.2.1 Modelo de Hubbard

O modelo de Hubbard é um modelo protótipo usado na descrição de férmions correlacionados em uma variedade de circunstâncias, indo desde supercondutores de alta temperatura até compostos de férmions pesados e condutores orgânicos[42].

Este modelo têm só dois termos: um termo de “hopping”, que representa a energia cinética do sistema, com parâmetro t , que é uma medida da superposição da função de onda de dois átomos vizinhos; e um outro termo que leva em conta a interação local (no sítio) dos elétrons (U). Então, a Hamiltoniana toma a seguinte forma

$$H = -t \sum_{i,s} (c_{i,s}^\dagger c_{i+1,s} + c_{i+1,s}^\dagger c_{i,s}) + U \sum_i n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} \quad (1.35)$$

onde $c_{i,s}^\dagger (c_{i,s})$ cria (aniquila) elétrons no sítio i , com spin $s = \uparrow$ ou \downarrow , $n_{i,s} = c_{i,s}^\dagger c_{i,s}$ é o operador número de férmions de spin s , e a soma corre pelos L sítios de uma cadeia unidimensional com condições de fronteira periódicas.

O modelo têm duas simetrias globais $SU(2)$: a primeira é a já conhecida invariância sob rotação de spin e a segunda é exclusiva para o modelo de Hubbard com semi-preenchimento e relaciona setores com diferentes números de partículas (simetria partícula-buraco). Assim a simetria total é $SU(2) \times SU(2) \approx SO(4)$.

No limite $U \rightarrow 0$ a teoria de bandas é recuperada, os elétrons têm momento bem definido (energia do elétron $\varepsilon_k = -2t \cos ka$) e o sistema é metálico e não magnético. No limite $t \ll U$ e na banda semi-cheia ($N_e = N_b$), a função de onda de cada elétron fica confinada em torno de um sítio e, usando teoria de perturbação, é possível provar que a Hamiltoniana efetiva é do tipo Heisenberg ($H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$). Logo, o comportamento antiferromagnético isolante é recuperado.

A solução exata do modelo de Hubbard unidimensional foi encontrada por Lieb e Wu[43] usando o método de Ansatz de Bethe.

No limite de acoplamento fraco $U \ll t$, nós podemos tratar U como uma perturbação, e a banda de tight-binding $\varepsilon(k) = -2t \cos ka$ pode ser linearizada perto dos pontos de Fermi $\pm k_F$. Então, os operadores eletrônicos podem ser substituídos por campos quirais $\Psi_{+/-,\sigma}(x)$ no limite contínuo (constante de rede $a \rightarrow 0$, o número de sítios da rede $N \rightarrow \infty$, tal que $L = Na$ seja finito). Assim

$$c_{n,\sigma}/\sqrt{a} \approx e^{-ik_F na} \Psi_{-,\sigma}(na) + e^{ik_F na} \Psi_{+,\sigma}(na). \quad (1.36)$$

Como resultado o modelo de Hubbard é mapeado na Hamiltoniana (1.1), com constantes de acoplamento $g_{1\perp} = g_{2\perp} = g_{4\perp} = Ua$ e $g_{2\parallel} = g_{4\parallel} = 0$. O limite contínuo é uma boa aproximação em acoplamento fraco e para as propriedades de baixa energia. Neste limite, os parâmetros K_ν and v_ν podem ser determinados perturbativamente, por exemplo

$$K_\rho = \sqrt{\frac{\pi v_F}{\pi v_F + Ua}} \approx 1 - U/(2\pi v_F) + \dots, \quad (1.37)$$

onde $v_F = 2t \sin(\pi n/2)$ é a velocidade de Fermi para n partículas por sítio.

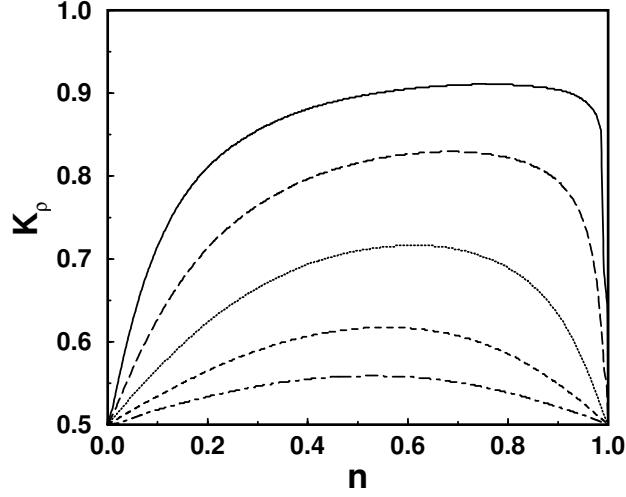


Figura 1.2: Parâmetro de interação K_ρ para o modelo de Hubbard com $U/t=1,2,4,8,16$ de cima para baixo.

Para o modelo de Hubbard é possível provar que a descrição em termos de líquidos de Luttinger também é válida para acoplamento forte; assim as propriedades de baixas energias do modelo são determinadas só por três parâmetros $v_{\rho,\sigma}$ e K_ρ , já que $K_\sigma = 1$ [44].

K_ρ como uma função da densidade de partículas para o modelo de Hubbard é mostrado na figura (1.2) para diferentes valores de U/t . Para U pequeno nós encontramos em todos os casos concordância com a expressão perturbativa, equação (1.37) entretanto para U grande $K_\rho \rightarrow 1/2$. O comportamento limite para U grande pode ser entendido notando que para $U = \infty$ a dinâmica de carga do sistema pode ser descrita por férmions sem spin não interagentes com k_F mudado para $2k_F$. Conseqüentemente, nós encontramos uma contribuição à função de correlação densidade-densidade proporcional a

$\cos(4k_F x)x^{-2}$ que implica que $K_\rho = 1/2$. Como se pode ver na figura (1.2), o valor de acoplamento forte $K_\rho = 1/2$ é alcançado nos limites $n \rightarrow 0, 1$ para qualquer U positivo. Para $n \rightarrow 0$ este comportamento é facilmente entendido: o parâmetro de interação efetivo é U/v_F , mas v_F vai a zero no limite de baixas densidades (correspondendo à divergência da densidade de estados). O limite $n \rightarrow 1$ é mais delicado: neste caso cada sítio está quase com ocupação simples, com uma densidade de buracos muito baixa. A única interação importante é a repulsão Coulombiana de curta distância entre buracos, que pode ser aproximada tratando-se os buracos como um gás de férmions não interagentes sem spin, obtendo-se $K_\rho = 1/2$.

Note que, como a interação é repulsiva, sempre temos $K_\rho < 1$, que significa que as flutuações magnéticas são aumentadas em relação ao caso não interagente. Por outro lado, o emparelhamento supercondutor é sempre suprimido.

Deve ser enfatizado que estes resultados são válidos para $n \rightarrow 1$, mas não para $n = 1$. No último caso, existe um gap no espectro de excitações de carga por causa dos termos de Umklapp e as correlações de ϕ_ρ são de longo alcance.

Resultados equivalentes foram obtidos usando a invariância conforme do modelo de Hubbard[45, 46].

1.2.2 Cadeia de Heisenberg $S = 1/2$ anisotrópica :

modelo XXZ

Um dos modelos fundamentais da física do estado sólido é o modelo de Heisenberg de magnetos isolantes. No caso unidimensional (“cadeias de spin”),

a Hamiltoniana em presença de um campo magnético h aplicado ao longo do eixo z é

$$H_{xxz} = J \sum_{l=1}^L \left\{ \Delta S_l^z S_{l+1}^z + \frac{1}{2} (S_l^+ S_{l+1}^- + S_l^- S_{l+1}^+) \right\} - h \sum_{l=1}^L S_l^z. \quad (1.38)$$

Aqui $\mathbf{S}_l = (S_l^x, S_l^y, S_l^z)$ é um operador de spin atuando sobre o sítio l , Δ é um parâmetro de anisotropia que nos permite tratar o caso antiferromagnético ($\Delta = 1$), o ferromagnético ($\Delta = -1$) e casos gerais de anisotropia. Supomos condições de contorno periódicas, o que implica que $\mathbf{S}_{L+1} = \mathbf{S}_1$. Note que a Hamiltoniana conserva a componente z do spin total (para $|\Delta| = 1$, o spin total é conservado).

Este modelo de spins pode ser transformado em um modelo de férmions sem spin, tomando em conta que S_l^+ e S_l^- anticomutam. A transformação de Jordan-Wigner[47] vincula operadores de spins e operadores de férmions (a_l, a_l^\dagger) por meio de

$$S_l^+ = a_l^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{j=1}^{l-1} a_j^\dagger a_j\right), \quad S_l^z = a_l^\dagger a_l - \frac{1}{2}.$$

A presença ou não de um férmion agora representa um spin para cima ou para baixo, respectivamente, e o fator exponencial assegura que os operadores de spins comutam, enquanto os operadores fermiônicos anticomutam. A Hamiltoniana (1.38) é exatamente solúvel através do método do Ansatz de Bethe[48]. Assim, pode-se mostrar rigorosamente que as propriedades de baixa energia são descritas por uma teoria conforme de campos com carga conforme $c = 1$ de um campo bosônico livre compactado em um raio R no limite termodinâmico para $\Delta > -1$ e qualquer magnetização $\langle M \rangle$ [50]. Ou seja, uma cadeia de spins XXZ na presença de um campo magnético pode

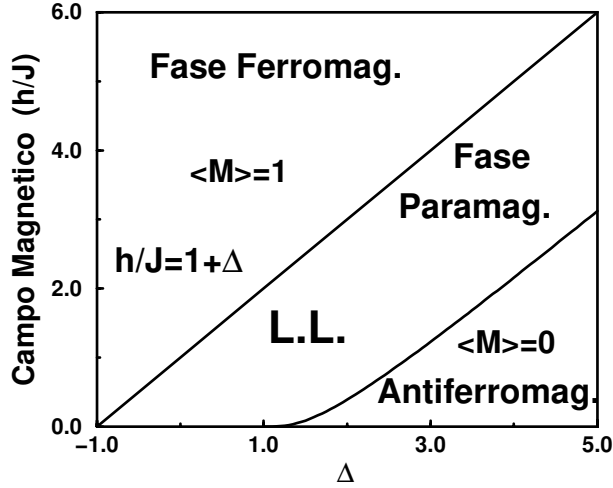


Figura 1.3: Diagrama de fases de uma cadeia XXZ de spin $1/2$. O modelo tem uma fase Ferromagnética ($\langle M \rangle = 1$), uma fase Paramagnética onde temos um líquido de Luttinger (L.L.) e uma fase Antiferromagnética ($\langle M \rangle = 0$).

ser descrita em termos de um líquido de Luttinger (1.26) com parâmetro de interação $K^{-1} = 2\pi R^2$ [50, 49].

O modelo XXZ tem o diagrama de fase apresentado na figura (1.3). Nós temos duas fases com gap: uma ferromagnética em campos suficientemente fortes (para $\Delta < -1$ é a única) e uma fase antiferromagnética para $\Delta > 1$ e campos baixos. Entre estas, existe uma fase sem gap, onde a Hamiltoniana (1.26) é válida. A transição entre a fase ferromagnética e a fase sem gap está localizada em $h/J = 1 + \Delta$. A outra linha de transição inicia no ponto $SU(2)$ simétrico $\langle M \rangle = 0$, $\Delta = 1$ e aumenta segundo um campo crítico h_c [49].

As funções de correlação em $T = 0$ são

$$\begin{aligned} \langle S_l^z S_0^z \rangle &= \frac{K}{(\pi x)^2} + A \cos(2k_F x) x^{-2K} \\ \langle S_l^+ S_0^- \rangle &= B_1 \cos(2k_F x) x^{-2K-1/2K} + (-1)^l B_2 x^{-1/2K}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Podemos concluir agora que líquidos de Luttinger são sistemas paramagnéticos unidimensionais sem quasipartículas de Landau. As excitações elementares são modos coletivos de spin e carga, levando a separação spin-carga. As funções de correlação tem um comportamento tipo lei de potências. Todas as propriedades físicas de baixas energias podem ser calculadas por bosonização e dependem só de três parâmetros: o parâmetro de interação K_ρ e as velocidades de spin e carga. O modelo de Hubbard ($0.5 \leq K_\rho < 1$) e a cadeia de spin $S = 1/2$ anisotrópica são líquidos de Luttinger.

Capítulo 2

Superredes de Líquidos de Luttinger

Uma superrede de líquidos de Luttinger (SLL)[32] é um arranjo periódico de dois líquidos de Luttinger com propriedades diferentes (u_ν, K_ν e L), perfeitamente conectados, como é apresentado na Figura (2.1). Cada líquido de Luttinger tem comprimento L_λ , velocidades $u_{\nu\lambda}$ e parâmetro de interação $K_{\nu\lambda}$, onde $\lambda = 1, 2$ indica cada líquido. O comprimento total da SLL é L , logo, o número de células unitárias é $N_c = L/(L_1 + L_2)$.

Nós usamos a aproximação adiabática, ou seja, a interface entre os líquidos de Luttinger (aqui tomada como tendo espessura nula) é muito maior que o comprimento de onda de Fermi $2\pi/k_F$. Assim, os termos de “backscattering” devido ao espalhamento nas interfaces podem ser desprezados. Então, as propriedades de baixa energia da SLL são descritas por uma generalização

da Hamiltoniana bosônica usual de um líquido de Luttinger (1.26), ou seja,

$$H_{SLL} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu} \int dx \left\{ u_{\nu}(x) K_{\nu}(x) \left(\frac{\partial \Theta_{\nu}(x)}{\partial x} \right) + \frac{u_{\nu}(x)}{K_{\nu}(x)} \left(\frac{\partial \Phi_{\nu}(x)}{\partial x} \right) \right\}. \quad (2.1)$$

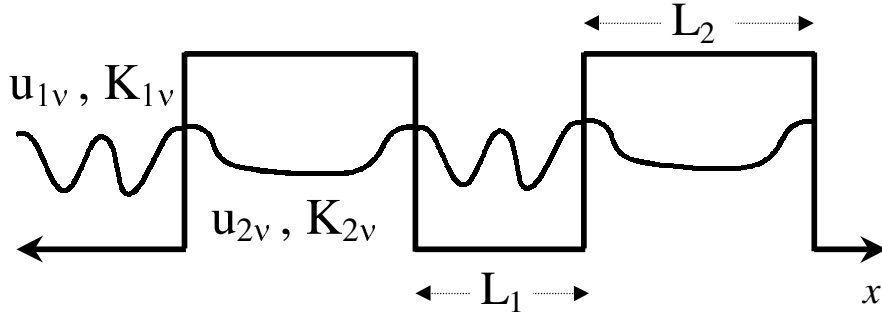


Figura 2.1: Superrede de Líquidos de Luttinger. Aqui, $u_{\lambda\nu}$, $K_{\lambda\nu}$ e L_{λ} são as velocidades, o parâmetro de interação e o comprimento de cada líquido de Luttinger, respectivamente.

A Hamiltoniana em cada camada é diagonal e nosso problema agora é diagonalizar a Hamiltoniana (2.1). Com isto em mente, nós obtemos as equações de movimento para os campos bosônicos Φ_{ν} e Θ_{ν} , que são

$$\partial_t \Phi_{\nu} = -i[\Phi_{\nu}(x), H] = u_{\nu}(x) K_{\nu}(x) \partial_x \Theta_{\nu}, \quad (2.2)$$

$$\partial_t \Theta_{\nu} = -i[\Theta_{\nu}(x), H] = \frac{u_{\nu}(x)}{K_{\nu}(x)} \partial_x \Phi_{\nu}. \quad (2.3)$$

Mas nós podemos desacoplar os campos, obtendo as seguintes equações

$$\partial_{tt}\Phi_\nu - u_\nu(x)K_\nu(x)\partial_x\left(\frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)}\partial_x\Phi_\nu\right) = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_{tt}\Theta_\nu - \frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)}\partial_x\left(u_\nu(x)K_\nu(x)\partial_x\Theta_\nu\right) = 0. \quad (2.5)$$

Pode-se ver das equações (2.4) e (2.5) que os campos Φ_ν e Θ_ν são duais, ou seja, basta fazer $K_\nu \rightarrow 1/K_\nu$ para ir de um para outro. Nós discutiremos amplamente as soluções para o campo Φ_ν e usaremos a propriedade de dualidade para obter as soluções de Θ_ν .

Diagonalizar a Hamiltoniana é equivalente a resolver as equações de movimento para os campos Φ_ν e Θ_ν . Considerando a forma destes campos para um líquido de Luttinger homogêneo (1.22,1.23), nós podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x, t) = & -i \sum_m \text{sgn}(m) \frac{\phi_{m,\nu}(x)}{2\sqrt{\omega_{m,\nu}}} [b_{-m,\nu} e^{i\omega_{m,\nu}t} + b_{m,\nu}^\dagger e^{-i\omega_{m,\nu}t}] \\ & - \phi_{0,\nu}(x) + \gamma_{\lambda,\nu}t \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} \Theta_\nu(x, t) = & -i \sum_m \frac{\theta_{m,\nu}(x)}{2\sqrt{\omega_{m,\nu}}} [b_{-m,\nu} e^{i\omega_{m,\nu}t} - b_{m,\nu}^\dagger e^{-i\omega_{m,\nu}t}] \\ & + \theta_{0,\nu}(x) - \tau_{\lambda,\nu}t, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $b_{\pm m,\nu} = \sqrt{1/|m|}\nu_\pm(m)$ são operadores bosônicos que satisfazem

$$[b_{\pm m\nu}, b_{\pm m\nu}^\dagger] = 1$$

e m é um inteiro. Os campos bosônicos $\Phi_\nu(x, t)$ e $\Theta_\nu(x, t)$ tem duas partes. Os modos normais, que estão relacionados às flutuações e que são descritos por $\omega_{m,\nu}$, $\phi_{m,\nu}(x)$ e $\theta_{m,\nu}(x)$ com $m \neq 0$, que são autovalores e autofunções

a serem determinadas. Os operadores $\phi_{0,\nu}(x)$ e $\theta_{0,\nu}(x)$ descrevem os modos zero, que estão relacionados às propriedades do estado fundamental, como veremos. Já $\gamma_{\lambda,\nu}$ e $\tau_{\lambda,\nu}$ são obtidos das equações de movimento e estão relacionados aos modos zero.

Da relação de Mandelstam (1.21), nós vemos que a continuidade do operador de campo fermiônico $\Psi(x)$ implica a continuidade dos campos bosônicos $\Phi_\nu(x)$ e $\Theta_\nu(x)$. Então, as equações (2.2) e (2.3) implicam a continuidade de $u_\nu(x)K_\nu(x)\partial_x\Theta_\nu$ e $\frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)}\partial_x\Phi_\nu$ [22, 23, 24].

Agora nós discutiremos cada uma das partes (modos normais e modos zero) dos operadores (2.6, 2.7) separadamente. Primeiro, falaremos dos modos normais.

2.1 Modos Normais ($m \neq 0$)

Os modos normais descrevem as flutuações das propriedades globais do sistema (carga, spin, correntes de carga e spin) com relação ao estado fundamental. Eles são representados pelas funções $\phi_{m,\nu}(x)$ e $\theta_{m,\mu}(x)$.

Substituindo (2.6) em (2.4), obtemos que $\phi_{\nu,m}$ satisfaz a seguinte equação

$$\omega_{m,\nu}^2 \phi_{m,\nu} + u_\nu(x)K_\nu(x)\partial_x \left(\frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)} \partial_x \phi_{m,\nu} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Esta é uma equação de autovalores onde o operador diferencial de segunda ordem é

$$\mathfrak{L} = \partial_x \left(\frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)} \partial_x \right).$$

\mathfrak{L} é autoadjunto por definição.

As autofunções $\phi_{m,\nu}$ satisfazem as seguintes condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{m,\nu}(x) \\ \frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)} \partial_x \phi_{m,\nu}(x) \end{array} \right\} \text{ contínuas.}$$

Segue que o operador \mathfrak{L} é Hermitiano, ou seja, os autovalores $\omega_{m,\nu}$ são reais e as autofunções $\phi_{m,\nu}$ formam um conjunto completo. A condição de normalização das autofunções é

$$\int_0^L \frac{dx}{2\pi v_{\nu,J}} \phi_{m,\nu}(x) \phi_{m',\nu}(x) = \delta_{m,m'}. \quad (2.11)$$

Na superrede, os parâmetros de líquido de Luttinger variam de camada a camada, assim

$$u_\nu(x), K_\nu(x) = \begin{cases} u_{1,\nu}, K_{1,\nu} & \text{se } 0 \leq x \leq L_1, \\ u_{2,\nu}, K_{2,\nu} & \text{se } -L_2 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Portanto, as autofunções $\phi_{m,\nu}$ são

$$\phi_{m,\nu}(x) = \begin{cases} A_{m,\nu} e^{-i\alpha_{m,\nu}x} + B_{m,\nu} e^{i\alpha_{m,\nu}x} & \text{se } 0 \leq x \leq L_1, \\ C_{m,\nu} e^{-i\beta_{m,\nu}x} + D_{m,\nu} e^{i\beta_{m,\nu}x} & \text{se } -L_2 \leq x \leq 0, \\ e^{-ip(L_1+L_2)} \{ C_{m,\nu} e^{-i\beta_{m,\nu}(x-L_1-L_2)} + D_{m,\nu} e^{i\beta_{m,\nu}(x-L_1-L_2)} \} & \text{se } L_1 \leq x \leq (L_1+L_2), \end{cases}$$

onde $\alpha_{m,\nu} = \frac{\omega_{m,\nu}}{u_{1,\nu}}$, $\beta_{m,\nu} = \frac{\omega_{m,\nu}}{u_{2,\nu}}$ e $A_{m,\nu}, B_{m,\nu}, C_{m,\nu}$ e $D_{m,\nu}$ são coeficientes dados no apêndice (B). Considerando condições de contorno de Born-von Karman

$$\phi_\nu(x+L) = \phi_\nu(x), \quad (2.14)$$

temos que $e^{-ipL} = 1$, logo, o momento $p = \frac{2m\pi}{L}$.

Os autovalores $\omega_{m,\nu}$ são dados por

$$\cos\left(\frac{\omega_\nu L_2}{u_{2,\nu}}\right) \cos\left(\frac{\omega_\nu L_1}{u_{1,\nu}}\right) - \frac{1}{2} \Delta_\nu \sin\left(\frac{\omega_\nu L_2}{u_{2,\nu}}\right) \sin\left(\frac{\omega_\nu L_1}{u_{1,\nu}}\right) = \cos(p(L_1+L_2)), \quad (2.15)$$

onde $\Delta_\nu = \frac{K_{2,\nu}}{K_{1,\nu}} + \frac{K_{1,\nu}}{K_{2,\nu}}$.

Para $p \ll 1/(L_1 + L_2)$ temos que $\omega_\nu(p) = c_\nu |p|$ onde a velocidade efetiva é

$$c_\nu = u_{1,\nu} \frac{1 + \ell}{\sqrt{1 + \Delta_\nu \frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}} \ell + \left(\frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}} \ell\right)^2}}, \quad (2.16)$$

com $\ell = L_2/L_1$. Claramente, pode-se ver que, $c_\nu \rightarrow u_{2,\nu}$ quando $\ell \rightarrow \infty$, e $c_\nu \rightarrow u_{1,\nu}$ quando $\ell \rightarrow 0$.

2.2 Modos Zero

Os modos zero estão ligados às propriedades globais do sistema e levam em consideração os efeitos de tamanho finito. As funções de modos zero satisfazem

$$\begin{aligned} \tau_{\lambda\nu} &= \frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)} \partial_x \phi_{0,\nu}(x), \\ \gamma_{\lambda\nu} &= u_\nu(x) K_\nu(x) \partial_x \theta_{0,\nu}(x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Estas equações são obtidas substituindo as relações (2.6) e (2.7) nas equações (2.2) e (2.3), respectivamente.

De (2.17) é possível ver que para uma camada dada nós devemos ter

$$\phi_{0,\nu}(x) = A_{m,\lambda\nu} + \tau_{\lambda,\nu} \frac{K_\nu(x)}{u_\nu(x)} x.$$

Em um líquido de Luttinger homogêneo temos que $\frac{1}{\pi} \phi_{0,\rho}(x) = N_\rho \frac{x}{L}$, ou seja, $\phi_{0,\rho}/\pi$ é igual ao número de partículas à distância x .

No caso da superrede, nós devemos ter que

$$\phi_{0,\nu}(x_i^\lambda) - \phi_{0,\nu}(x_i^\lambda - L_\lambda) = \pi N_{\lambda,\nu} = \tau_{\lambda,\nu} \frac{K_\nu(x)}{u_\nu(x)} L_\lambda. \quad (2.19)$$

Assim, escrevemos

$$\phi_{0,\nu}(x) = A_{m,\lambda\nu} + \frac{\pi N_{\lambda\nu}}{L_\lambda} x, \quad (2.20)$$

$$\theta_{0,\nu}(x) = B_{m,\lambda\nu} + \frac{\pi J_{\lambda\nu}}{L_\lambda} x, \quad (2.21)$$

Onde

$$A_{m,\lambda,\nu} = \begin{cases} (m-1)\pi L_2 \left(\frac{N_{2,\nu}}{L_2} - \frac{N_{1,\nu}}{L_1} \right) & \text{se } \lambda = 1, \\ m\pi L_1 \left(\frac{N_{1,\nu}}{L_1} - \frac{N_{2,\nu}}{L_2} \right) & \text{se } \lambda = 2, \end{cases} \quad (2.22)$$

com uma expressão análoga para $B_{m,\lambda,\nu}$ obtida substituindo-se $N_{\lambda,\nu}$ por $J_{\lambda,\nu}$.

Aqui $m = 1, 2, 3, \dots$ indica a célula unitária.

Como já conhecemos as expressões para os modos zero $\phi_{0,\nu}(x)$ e $\theta_{0,\nu}(x)$, então nosso problema está resolvido, já que nós também conhecemos os autovalores $\omega_\nu(q)$ e autofunções $\phi_{p,\nu}(x)$ e $\theta_{p,\nu}(x)$. Assim a Hamiltoniana diagonalizada fica

$$H_{SLL} = \frac{1}{2\pi} \sum_{r,\nu,p \neq 0} \omega_\nu(p) b_{r,\nu,p}^\dagger b_{r,\nu,p} + \frac{\pi}{2} \int dx \left\{ u_\nu(x) K_\nu(x) \left(\frac{J_{\lambda\nu}}{L_\lambda} \right)^2 + \frac{u_\nu(x)}{K_\nu(x)} \left(\frac{N_{\lambda\nu}}{L_\lambda} \right)^2 \right\}. \quad (2.23)$$

Agora vamos considerar algumas propriedades das SLL, tais como a compressibilidade, a condutividade e as funções de correlação[32].

2.3 Compressibilidade

A compressibilidade é definida como

$$\frac{1}{\kappa} = L \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2} \right), \quad (2.24)$$

onde E_0 é a energia do estado fundamental como uma função do número de partículas. No estado fundamental, não temos excitações bosônicas. Assim, o valor esperado da Hamiltoniana da SLL é

$$\langle H_{SLL} \rangle = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu} \int dx \left\{ u_{\nu}(x) K_{\nu}(x) \left(\frac{J_{\lambda\nu}}{L_{\lambda}} \right)^2 + \frac{u_{\nu}(x)}{K_{\nu}(x)} \left(\frac{N_{\lambda\nu}}{L_{\lambda}} \right)^2 \right\}. \quad (2.25)$$

Mas considerando que não temos correntes e que a magnetização é zero em cada camada no estado fundamental, temos

$$\begin{aligned} \langle H_{SLL} \rangle = E_0 &= \frac{\pi}{2} \int dx \frac{u_{\rho}(x)}{K_{\rho}(x)} \left(\frac{N_{\lambda\rho}}{L_{\lambda}} \right)^2 \\ &= \frac{\pi L}{4(L_1 + L_2)} \left\{ \frac{u_{1,\rho}}{K_{1,\rho}} \frac{N_1^2}{L_1} + \frac{u_{2,\rho}}{K_{2,\rho}} \frac{N_2^2}{L_2} \right\}. \end{aligned}$$

Usando a conservação do número de partículas e a condição de equilíbrio termodinâmico $\mu_1 = \mu_2$ onde μ_{λ} é o potencial químico das camadas, temos

$$N_1 = \frac{N(L_1 + L_2)}{L \left(1 + \frac{L_2 u_{1,\rho} K_{2,\rho}}{L_1 u_{2,\rho} K_{1,\rho}} \right)},$$

e

$$N_2 = \frac{N(L_1 + L_2)}{L \left(1 + \frac{L_1 u_{2,\rho} K_{1,\rho}}{L_2 u_{1,\rho} K_{2,\rho}} \right)}.$$

Assim, a energia do estado fundamental em função do número de partículas é

$$E_0 = \frac{\pi(L_1 + L_2)}{4L} \frac{1}{\frac{L_1 K_{1,\rho}}{u_{1,\rho}} + \frac{L_2 K_{2,\rho}}{u_{2,\rho}}} N^2. \quad (2.28)$$

Então, a compressibilidade da SLL é

$$\kappa_s = \frac{\kappa_1 + \ell \kappa_2}{1 + \ell}, \quad (2.29)$$

onde $\kappa_{\lambda} = \frac{2K_{\lambda,\rho}}{\pi u_{\lambda,\rho}}$ é a compressibilidade de cada líquido. Claramente pode-se ver que, $\kappa_s \rightarrow \kappa_2$ quando $\ell \rightarrow \infty$, e $\kappa_s \rightarrow \kappa_1$ quando $\ell \rightarrow 0$.

2.4 Funções de Correlação

É bem sabido que transições de fase causadas pela quebra de uma simetria contínua não podem ocorrer em uma dimensão. Mas as interações num fio infinito aumentam as flutuações da densidade de carga ou supercondutora dependendo se elas são repulsivas ou atrativas[5]. A pergunta que surge agora é se tais tendências persistem no caso da superrede.

Assim, serão calculadas as funções de correlação de densidade-densidade, spin-spin e supercondutora (singleto e tripleto) para tentar responder esta pergunta.

2.4.1 Densidade-Densidade

A função de correlação densidade-densidade consiste de várias partes, que descrevem a resposta do sistema a uma perturbação com transferência de momento $q \simeq 0$ (ρ), $q \simeq \pm 2k_F$ (CDW) e $q \simeq \pm 4k_F$ ($4k_F$ -CDW) e em princípio múltiplos maiores. A versão bosônica do operador densidade é(ver apêndice A)

$$\begin{aligned} n(x) &= O_\rho(x) + O_{CDW}(x) + O_{4k_F-CDW}(x), \\ &\simeq -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\partial \Phi_\rho(x)}{\partial x} + \frac{1}{\pi\alpha} e^{-2ik_F x + \sqrt{2}i\Phi_\rho(x)} \cos[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)] \\ &\quad + \frac{2}{(2\pi\alpha)^2} e^{-4ik_F x + \sqrt{8}i\Phi_\rho(x)}. \end{aligned}$$

A função de correlação densidade-densidade é definida pelo valor esperado

$\langle n(x)n(y) \rangle$; usando (2.6) e (2.7) nós temos

$$\begin{aligned} \langle n(x)n(y) \rangle \sim & -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{p \neq 0} e^{\alpha|p|} \frac{1}{\omega_p} \partial_x \phi_p(x) \partial_y \phi_{-p}(y) \\ & + \eta(2) e^{-\frac{1}{4} \sum_{p,\nu} e^{-\alpha|p|} \frac{1}{\omega_{\nu,p}} (\phi_{\nu,p}(x) - \phi_{\nu,p}(y)) (\phi_{\nu,-p}(x) - \phi_{\nu,-p}(y))} \\ & + \eta(4) e^{-\frac{1}{4} \sum_p e^{-\alpha|p|} \frac{1}{\omega_{\rho,p}} (\phi_{\rho,p}(x) - \phi_{\rho,p}(y)) (\phi_{\rho,-p}(x) - \phi_{\rho,-p}(y))}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $\eta(z) = e^{zi(\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y))}$, e

$$\bar{\phi}(x) = k_F x - \int^x dx' \mu(x') \frac{K_\rho(x')}{u_\rho(x')} = k_F x - \phi_{0,\rho}(x).$$

No caso homogêneo, as oscilações nas funções de correlação são múltiplos de $k_F x$, mas na superrede temos mais um termo devido às não homogeneidades do sistema.

Considerando a forma das autofunções $\phi_{\nu,p}(x)$ dadas por (2.13), obtemos (para x e y bem separados)

$$\langle n(x)n(y) \rangle \sim \frac{R_{\lambda,\lambda',\rho}}{\pi^2 |x-y|^2} + A_1 \frac{e^{2i(\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y))}}{|x-y|^{K_\rho^* + K_\sigma^*}} \quad (2.32)$$

$$+ A_2 \frac{e^{4i(\bar{\phi}(x) - \bar{\phi}(y))}}{|x-y|^{4K_\rho^*}}, \quad (2.33)$$

onde

$$R_{\lambda,\lambda',\nu} = K_{1,\nu} \frac{\frac{u_{1,\nu}}{c_\nu} (1+\ell)^3}{[1 + \ell \frac{u_{1,\nu} K_{1,\nu}}{u_{2,\nu} K_{2,\nu}}] [\frac{K_{1,\nu}}{K_{2,\nu}} + \ell \frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}}]^2} \begin{cases} (\frac{K_{1,\nu}}{K_{2,\nu}})^2 & \lambda = \lambda' = 1, \\ \frac{u_{1,\nu} K_{1,\nu}}{u_{2,\nu} K_{2,\nu}} & \lambda = 2 \text{ e } \lambda' = 1, \\ (\frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}})^2 & \lambda = \lambda' = 2. \end{cases} \quad (2.34)$$

aqui λ e λ' são iguais a "1" ou "2" correspondendo ao líquido de Luttinger "1" e "2". De (2.32) temos

$$K_\nu^* = \frac{\sqrt{1 + \Delta_\nu \frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}} \ell + \left(\frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}} \ell \right)^2}}{\frac{1}{K_{1,\nu}} + \frac{1}{K_{2,\nu}} \frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}} \ell} \equiv f(K_\nu). \quad (2.35)$$

Note que a função de correlação densidade-densidade tem a mesma forma que no caso homogêneo, só que os expoentes agora são os expoentes efetivos K_ν^* . Claramente, pode se ver que $K_\nu^* \rightarrow K_{2,\nu}$ quando $\ell \rightarrow \infty$ e $K_\nu^* \rightarrow K_{1,\nu}$ quando $\ell \rightarrow 0$. Para um sistema com interações repulsivas, temos que $K_\nu^* < 1$. Como no caso homogêneo, as correlações que dominam são aquelas de $2k_F$ que decaem com expoente $K_\rho^* + K_\sigma^*$.

O que é interessante notar é que K_ν^* é uma média dos valores de $K_{\lambda\nu}$ de cada camada, pesados pelos comprimentos das camadas. Portanto, vemos aqui uma característica que será encontrada em todas as outras propriedades físicas de baixas energias do sistema: o comportamento da SLL combina as propriedades das camadas constituintes na proporção dos comprimentos das mesmas.

2.4.2 Spin-Spin

A função de correlação spin-spin tem duas partes, que descrevem a resposta do sistema a uma perturbação com transferência de momento $q \simeq 0$ (σ) e $q \simeq \pm 2k_F$ (SDW). A parte de SDW tem caráter vetorial.

As expressões bosônicas para os operadores densidade de spin com transferência de momento $q = 0$ e $q \simeq \pm 2k_F$ são (ver apêndice A)

$$O_\sigma(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\partial \Phi_\sigma(x)}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{SDW}(x) = \frac{1}{\pi\alpha} e^{-2ik_F x + \sqrt{2}i\Phi_\rho(x)} & \left\{ \cos[\sqrt{2}\Theta_\sigma(x)], \sin[\sqrt{2}\Theta_\sigma(x)] \right. , \\ & \left. \sin[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)] \right\} . \end{aligned}$$

Assim, as correlações de spin são (para x e y bem separados)

$$\langle O_\sigma(x)O_\sigma(y) \rangle = \frac{R_{\lambda,\lambda',\sigma}}{\pi^2 |x-y|^2}, \quad (2.37)$$

e

$$\langle \mathbf{O}_{SDW}(x)\mathbf{O}_{SDW}(y) \rangle \sim A_1 \frac{e^{2i(\bar{\phi}(x)-\bar{\phi}(y))}}{|x-y|^{K_\rho^*+\bar{K}_\sigma}} + A_2 \frac{e^{2i(\bar{\phi}(x)-\bar{\phi}(y))}}{|x-y|^{K_\rho^*+K_\sigma^*}}, \quad (2.38)$$

onde $\bar{K}_\nu = f(1/K_\nu)$ (ver Equação 2.35). No limite homogêneo, $\bar{K}_\nu \rightarrow 1/K_\nu$, recuperando assim as expressões já conhecidas para um líquido de Luttinger homogêneo.

2.4.3 Supercondutora

A função de correlação de pares supercondutores, que considera a tendência do sistema a formar pares elétron-elétron tem duas partes, dependendo se o spin total é $S = 0$, formando um singlete (SS) ou $S = 1$ formando um tripleto (TS).

A expressão bosônica dos operadores para as funções de correlação supercondutoras singlete e tripleto são (ver apêndice A)

$$\begin{aligned} O_{SS}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\sqrt{2}i\Theta_\rho(x)} \cos[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)], \\ O_{TS\pm 1}(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha} e^{\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x)\pm\Theta_\sigma(x)]}, \\ O_{TS0}(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha} e^{\sqrt{2}i\Theta_\rho(x)} \sin[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)]. \end{aligned}$$

Usando (2.6) and (2.7) e as expressões para as autofunções $\phi_{\nu,p}(x)$ e $\theta_{\nu,p}(x)$, temos que as funções de correlação são (para x e y bem separados)

$$\langle O_{SS,TS0}(x)O_{SS,TS0}(y) \rangle \sim \frac{1}{2(\pi\alpha)^2} \frac{C_1}{|y-x|^{\bar{K}_\rho+K_\sigma^*}}, \quad (2.42)$$

$$\langle O_{TS\pm 1}(x)O_{TS\pm 1}(y) \rangle \sim \frac{1}{2(\pi\alpha)^2} \frac{C_2}{|y-x|^{\overline{K}_\rho + \overline{K}_\sigma}}. \quad (2.43)$$

Note que a estrutura de superrede não altera as leis de escala entre os expoentes nas funções de correlação, onde K_ν^* e \overline{K}_ν fazem o papel de K_ν e $1/K_\nu$ no sistema homogêneo, respectivamente.

2.5 Condutividade

Agora calcularemos a condutividade DC. Para isso, consideramos uma superrede de líquidos de Luttinger na presença de um potencial elétrico externo $V(x, t)$ fraco, que varia lentamente com a distância e que depende do tempo. O campo elétrico associado a este campo é $E(x, t) = -\partial_x V(x, t)$. A interação dos elétrons com este potencial é descrita pelo seguinte termo extra na Hamiltoniana (2.1)

$$H_{ext} = -e \int dx V(x, t) \rho(x).$$

A equação de movimento para o campo Θ_ρ é modificada e agora é

$$\partial_t \Theta_\rho = \frac{u_\rho(x)}{K_\rho(x)} \partial_x \Phi_\rho - \sqrt{2}eV(x, t). \quad (2.45)$$

Eliminando Θ_ρ em (2.2) usando (2.45) temos

$$D_{x,t} \Phi_\rho(x, t) = -\sqrt{2}eE(x, t), \quad (2.46)$$

onde

$$D_{x,t} = \frac{1}{u_\rho(x)K_\rho(x)} \partial_{tt} - \partial_x \left(\frac{u_\rho(x)}{K_\rho(x)} \partial_x \right).$$

A função de Green bosônica é definida por

$$G(x, x', t) = -i\Theta(t) \langle [\Phi_\rho(x, t), \Phi_\rho(x', 0)] \rangle.$$

Portanto, a solução da equação (2.46) é

$$\langle \Phi_\rho(x, t, E) \rangle = -\sqrt{2}e \int dx' dt' G(x, x', t - t') E(x', t').$$

A corrente elétrica, que é definida por $j(x, t) = \sqrt{2}/\pi \partial_t \Phi_\rho$ é

$$e \langle j(x, t) \rangle = \int \int dx' dt' \sigma(x, x', t - t') E(x', t'),$$

onde definimos uma condutividade não local dada por

$$\sigma(x, x', t) = -\frac{2g_0}{\pi} \partial_t G(x, x', t), \quad (2.51)$$

$$= \frac{2ig_0}{\pi} \Theta(t) \langle [\partial_t \Phi_\rho(x, t), \Phi_\rho(x', 0)] \rangle. \quad (2.52)$$

Considerando (2.6), temos

$$\sigma(x, x', t) = \frac{g_0}{2\pi} \Theta(t) \sum_p \phi_{p,\rho}(x) \phi_{-p,\rho}(x') [e^{i\omega_{p,\rho}t} + e^{-i\omega_{p,\rho}t}]. \quad (2.53)$$

2.5.1 Peso de Drude

Vamos agora tomar o limite $\omega \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0$ nessa ordem. O resultado que se obtém é o peso de Drude[51]. Assim

$$\begin{aligned} \sigma(0, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \sigma(x, y, t) \\ &= \frac{g_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_p \phi_{p,\rho}(x) \phi_{-p,\rho}(y) \left[\frac{2i(\omega + i\delta)}{(\omega + i\delta)^2 - \omega_{p,\rho}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando (2.13) finalmente encontramos

$$\sigma(0, \omega) = 2g_0 u_{1,\rho} K_{1,\rho} \frac{1 + \ell}{1 + \frac{u_{1,\rho} K_{1,\rho}}{u_{2,\rho} K_{2,\rho}} \ell} \delta(\omega) \quad (2.55)$$

$$= 2g_0 c_\rho K_\rho^* \delta(\omega). \quad (2.56)$$

Como vemos, o peso de Drude para a SLL é igual ao produto da velocidade de carga efetiva e o expoente efetivo de carga K_ρ^* . No caso homogêneo, temos que $\sigma(0, \omega) = 2g_0 u_\rho K_\rho \delta(\omega)$. Logo, podemos concluir que a estrutura da superrede não muda a forma do peso de Drude.

2.5.2 Condutância de Landauer

A condutância de Landauer é obtida quando se tomam os seguintes limites nesta ordem $p \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$ [51]. Aqui, estamos aplicando um campo estático sobre uma região finita (mas grande) da amostra, ou seja, estamos estudando a condutividade em função do momento em frequência zero[22]. Agora

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \sigma(x, y, t) \\ &= \frac{g_0}{2\pi} \sum_p \phi_{p,\rho}(x) \phi_{-p,\rho}(y) \left[\frac{2\varepsilon}{(\varepsilon)^2 - \omega_{p,\rho}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Usando (2.13) e considerando que x e y estejam bem separadas temos

$$\sigma(q, 0) = 2g_0 K_\rho^* \delta(q). \quad (2.58)$$

O caso homogêneo é facilmente recuperado já que $K_\rho^* \rightarrow K_\rho$ quando os dois líquidos de Luttinger são iguais.

Neste capítulo, estudamos uma superrede de líquidos de Luttinger. Foi visto que as propriedades de uma SLL são uma mistura das propriedades dos líquidos constituintes dependendo da proporção espacial em que estejam (ℓ). Também encontramos que o peso de Drude não muda de forma por causa da estrutura da superrede e é dado por $\sigma(0, \omega) = 2g_0 c_\rho K_\rho^* \delta(\omega)$. As leis de escala entre os expoentes nas funções de correlação não são alteradas pela estrutura da superrede. No capítulo seguinte, estudaremos as superredes de Hubbard

unidimensionais e veremos como estas podem ser descritas em termos de SLL.

Capítulo 3

Superredes de Hubbard Unidimensionais

Com o objetivo de estudar a competição entre as correlações eletrônicas e uma estrutura de superrede em uma dimensão, foi proposto por Paiva e dos Santos um modelo microscópico unidimensional onde a repulsão Coulombiana é dependente da posição [29, 30]. Aqui, generalizamos o modelo proposto por eles, considerando um arranjo periódico de L_1 sítios onde o “hopping” e a interação Coulombiana são t_1 e $U_1 > 0$, seguidos por L_2 sítios onde t_2 e $U_2 > 0$ são o “hopping” e acoplamento Coulombiano, respectivamente. Portanto, tanto o “hopping” como a interação são dependentes da posição e temos uma Superrede de Hubbard Unidimensional (SHU) com Hamiltoniana

$$H = - \sum_{i,\sigma} t_i (c_{i\sigma}^\dagger c_{i+1\sigma} + H.c.) + \sum_i U_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad (3.1)$$

onde i corre sobre os sítios de uma rede unidimensional com $(t_i, U_i) = (t_1, U_1 > 0)$ para sítios nas camadas “1” e $(t_i, U_i) = (t_2, U_2 > 0)$ para sítios nas camadas

“2”. $c_{i\sigma}^\dagger(c_{i\sigma})$ cria (destrói) um férmion no sítio i com spin $\sigma = \uparrow$ ou \downarrow e $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$.

A presença das correlações dependentes da posição faz com que o sistema perca algumas das simetrias presentes no sistema homogêneo, tais como partícula-buraco (ver apêndice C).

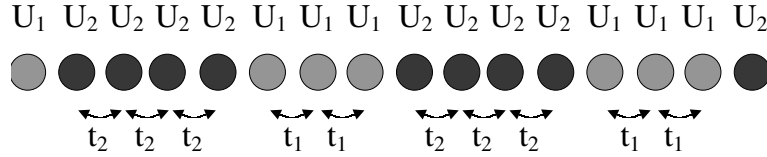


Figura 3.1: Superrede de Hubbard Unidimensional. Aqui U_λ , t_λ e L_λ são os acoplamentos, os “hoppings” e os comprimentos das cadeias de Hubbard ($\lambda = 1, 2$).

Primeiro, consideremos um caso especial no qual temos só duas camadas diferentes inicialmente desconectadas e com a mesma densidade inicial $n = N/L$. Em geral estes subsistemas não têm o mesmo potencial químico. Quando são colocados em contato, os subsistemas trocam partículas. Os elétrons vão de uma camada a outra até que os potenciais químicos sejam iguais, assim

$$\mu_1(n_1) = \mu_2(n_2). \quad (3.2)$$

Esta é a condição de equilíbrio termodinâmico. $\mu_\lambda(n_\lambda)$ ($\lambda = 1, 2$) é o potencial químico de uma cadeia de Hubbard homogênea como função da densidade, que pode ser tomado da solução exata do modelo de Hubbard, obtida por

Lieb e Wu, usando o método do Ansatz de Bethe [43].

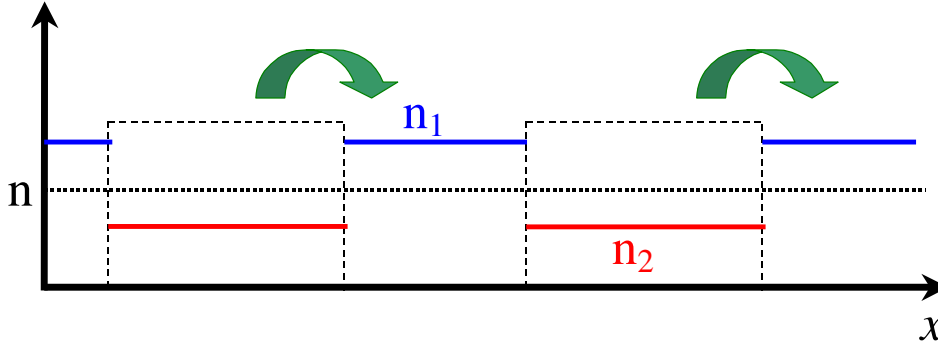


Figura 3.2: Fluxo de carga na superrede e modulação de carga no equilíbrio. n é a densidade inicial e n_1 , n_2 são as densidades nas camadas no equilíbrio.

Naturalmente, devemos ter conservação de carga total

$$n_1 + \ell n_2 = n(1 + \ell), \quad (3.3)$$

onde n_λ são os valores de equilíbrio da densidade de carga em cada camada.

A extensão ao caso de uma superrede não traz modificações.

Devido à não homogeneidade no “hopping” e na interação, esperamos que tenha lugar um rearranjo da carga no sistema, ou seja que os elétrons fluam até equilibrar o potencial químico na superrede. Então, uma vez alcançado o equilíbrio, a superrede apresenta uma modulação na carga, como é representado na Figura (3.2).

3.1 Gás de Férmions e uma Cadeia de Hubbard

Agora discutiremos o caso particular em que uma das camadas tem acoplamento zero (gás de férmions), por exemplo $U_1 = 0$, e a outra camada é interagente (Hubbard) com acoplamento $U_2 \neq 0$, mas as duas têm o mesmo “hopping” $t_1 = t_2 = t$. Este foi o sistema originalmente proposto e estudado por Paiva e dos Santos[29] e é mostrado na Figura 3.3.

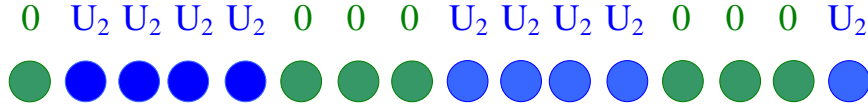


Figura 3.3: Superrede de Hubbard com $U_1 = 0$ e $U_2 \neq 0$.

Foi encontrado que a densidade na camada “1” (livre) n_1 é maior que a densidade inicial n , para todos os valores do acoplamento U_2 , indicando que a transferência de carga é sempre da camada “2” (interagente) para a camada “1” (livre). Isto é intuitivo, já que os elétrons diminuem sua energia de repulsão Coulombiana fugindo para as camadas livres. Este fato também foi observado por Paiva e dos Santos[29], onde os máximos do momento local são transferidos das camadas repulsivas para as camadas livres (eles usaram o método de diagonalização de Lanczos). Também observamos que a transferência de carga aumenta com o acoplamento U_2 (comprimento ℓ) para ℓ (U_2) fixo, como é esperado.

Encontramos que as superredes de Hubbard unidimensionais onde uma das camadas é livre ($U_1=0$) e a outra é interagente ($U_2 \neq 0$) têm o diagrama de fase apresentado na Figura (3.4). Neste diagrama de fase temos um

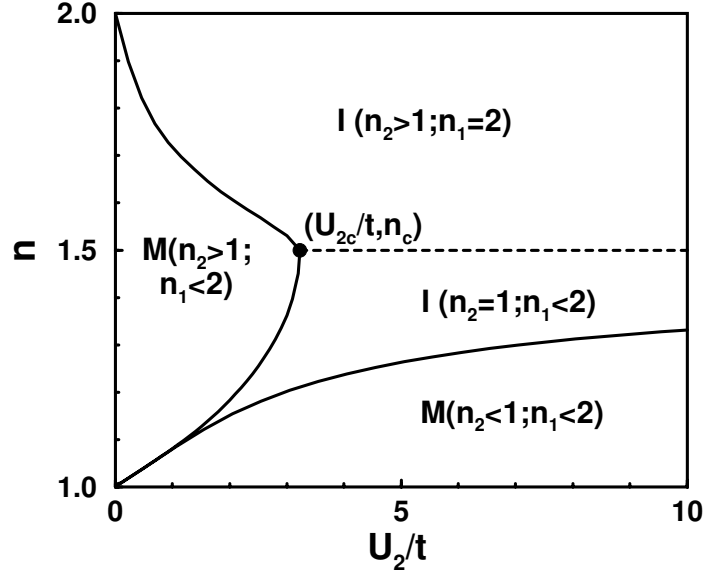


Figura 3.4: Diagrama de fase de uma superrede de Hubbard. Existem duas fases metálicas (M) e duas isolantes (I) ($\ell = 1$). ($U_{2c}/t \approx 3.2309$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$).

acoplamento crítico U_{2c} dado por

$$\mu_{2-}(U_{2c}) = U_{2c} - 2t, \quad (3.4)$$

onde $\mu_{-}(U)$ foi definido para o modelo de Hubbard para meio preenchimento por Lieb e Wu[43] como

$$\mu_{-}(U) = 2t - 4t \int_0^\infty \frac{J_1(\omega) d\omega}{\omega [1 + e^{\frac{1}{2}\omega \frac{U}{t}}]}. \quad (3.5)$$

Assim, o acoplamento crítico é $U_{2c} = 3.23097t$. É importante notar que U_{2c} é independente da razão entre os comprimentos das camadas ℓ .

Vemos que o sistema é sempre metálico para $n < 1$. Mas para $n > 1$, observamos quatro fases diferentes, duas metálicas e duas isolantes. É

importante notar que para $U_2 < U_{2c}$ temos duas regiões metálicas e duas regiões isolantes, enquanto há só uma metálica e duas isolantes para $U_2 > U_{2c}$.

As linhas no diagrama de fase apresentado na (Figura 3.4,3.5) são determinadas assim:

linha n'

$$\mu_{2-}(U_2) = -2t \cos \left(\frac{\pi}{2} [n'(1 + \ell) - \ell] \right), \quad (3.6)$$

linha n''

$$U_2 - \mu_{2-}(U_2) = -2t \cos \left(\frac{\pi}{2} [n''(1 + \ell) - \ell] \right), \quad (3.7)$$

linha n'''

$$\mu_2 \left(U_2, \frac{n'''(1 + \ell) - 2}{\ell} \right) = 2t. \quad (3.8)$$

Para $U_2 > U_{2c}$ as duas fases isolantes são separadas pela linha tracejada da Figura 3.4 e o sistema abre um gap na densidade $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$ [29, 30]. Note que o valor da densidade n_c implica que devemos ter $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$ e que é independente do valor do acoplamento U_2 como no sistema homogêneo.

As duas fases isolantes correspondem a $n_2 = 1$ (isolante tipo Mott) ou $n_1 = 2$ (insolante de banda). Deve-se notar que, em cada caso, um tipo de camada é por si mesma isolante, enquanto a outra é metálica e o caráter isolante global é consequência da estrutura unidimensional. Portanto, ambas as fases isolantes são sem gap. As duas fases metálicas diferem na densidade da camada interagente: o potencial químico pode ficar na banda de Hubbard superior ou inferior.

Na Figura 3.5, apresentamos o diagrama de fase para $\ell = 0.5, 2$. Observa-se como a topologia do diagrama é independente de ℓ . O tamanho das fases

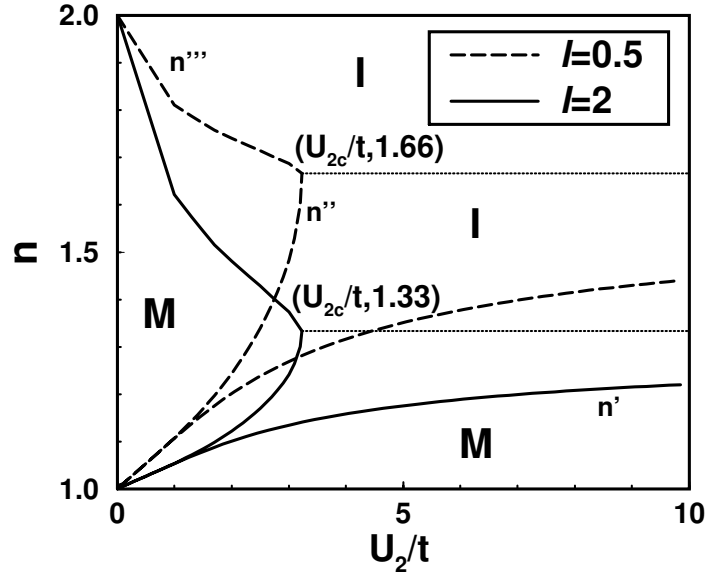


Figura 3.5: Diagrama de fase para uma superrede de Hubbard com $\ell = 0.5$ e $\ell = 2$.

metálicas aumenta quando ℓ diminui. Este comportamento é esperado porque o tamanho das camadas livres é maior.

O gap da superrede de Hubbard unidimensional é igual a

$$\Delta_c = U_2 - \mu_{2-}(U_2) - 2t. \quad (3.9)$$

Vemos que o gap de quasepartículas para a superrede de Hubbard unidimensional é zero para $U < U_{2c}$ e que não depende do tamanho relativo das camadas ℓ . O gap de quasepartículas para $n = n_c$ é aproximadamente linear com U e sempre é menor que o gap do sistema homogêneo.

Para discutir as propriedades de baixa energia das superredes de Hubbard unidimensionais, consideramos cadeias longas (L_1 e L_2 grandes) tais que uma

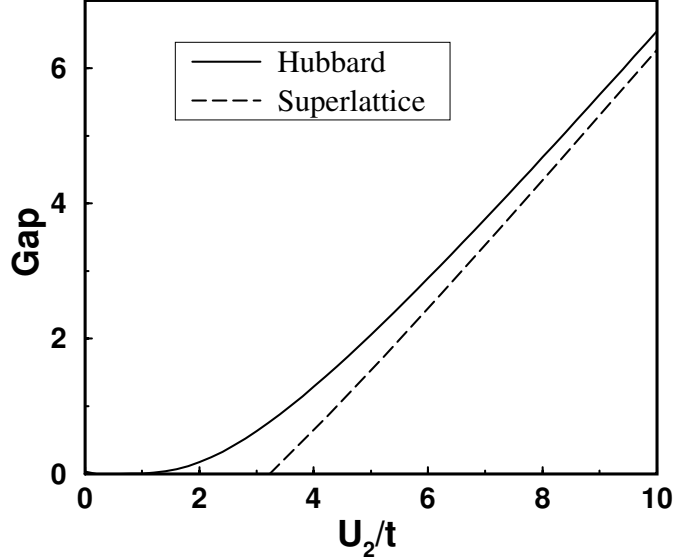


Figura 3.6: Gap da superrede de Hubbard e do modelo de Hubbard. Aqui ($U_{2c}/t \approx 3.2309$).

descrição de cada camada como um líquido de Luttinger seja válida. Sendo assim a camada livre é descrita como um líquido de Luttinger livre com parâmetros $K_{1\nu} = 1$ e $u_{1\nu} = v_F$ onde $v_F = 2t \sin(0.5n)$ é a velocidade de Fermi de um gás unidimensional.

A camada interagente representa uma cadeia de Hubbard, cujas propriedades de baixa energia são descritas em termos de um líquido de Luttinger com parâmetros $u_{2\nu} = u_\nu$ e $K_{2\rho} = K_\rho < 1$. Como é sabido, o modelo de Hubbard tem simetria $SU(2)$, então $K_\sigma = 1$.

Portanto, as propriedades de baixa energia da superrede de Hubbard unidimensional são descritas por uma superrede de líquidos de Luttinger, que foi discutida extensamente no capítulo anterior. Para acoplamentos fracos

é possível mostrar que um modelo de superrede de líquidos de Luttinger é obtido a partir de uma superrede de Hubbard unidimensional (Apêndice D).

Assim, na Hamiltoniana (2.1) temos

$$u_\nu(x), K_\nu(x) = \begin{cases} u_{1,\nu} = v_F, K_{1,\nu} = 1 & \text{se } 0 \leq x \leq L_1, \\ u_{2,\nu} = u_\nu, K_{2,\rho} = K_\rho, K_{2,\sigma} = 1 & \text{se } -L_2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

A estrutura da superrede não quebra a simetria $SU(2)$, de maneira que se espera que o K_σ inhomogêneo se renormalize a 1.

De (2.16) vemos que as velocidades de carga e spin para esta realização da SLL são dadas por

$$c_\rho = v_F \frac{1 + \ell}{\sqrt{1 + \Delta_\rho \frac{v_F}{u_\rho} \ell + (\frac{v_F}{u_\rho} \ell)^2}}, \quad (3.11)$$

$$c_\sigma = v_F \frac{1 + \ell}{1 + \frac{v_F}{u_\sigma} \ell}. \quad (3.12)$$

Para o modelo de Hubbard com interações repulsivas temos que $u_\sigma \leq v_F$ e $u_\rho > v_F$ [44]. Este quadro não é verdadeiro para SHU: as velocidades efetivas podem ser maiores ou menores que a velocidade de Fermi dependendo do valor do acoplamento e de ℓ .

Como o parâmetro de interação no setor de spin é homogêneo na superrede ($K_\sigma=1$), temos que $K_\sigma^* = \overline{K}_\sigma = 1$ e de (2.32,2.38,2.42,2.43) as funções de correlação densidade-densidade e spin-spin para uma SHU são

$$\begin{aligned} \langle n(x)n(y) \rangle &\sim \frac{R_{\lambda,\lambda',\sigma}}{\pi^2 |x-y|^2} + A_1 \frac{e^{2i(\overline{\phi}(x)-\overline{\phi}(y))}}{|x-y|^{1+K_\rho^*}} \\ &\quad + A_2 \frac{e^{4i(\overline{\phi}(x)-\overline{\phi}(y))}}{|x-y|^{4K_\rho^*}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\langle \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{S}(y) \rangle \sim \frac{\alpha_\sigma}{\pi^2 |x-y|^2} + B_1 \frac{e^{2i(\overline{\phi}(x)-\overline{\phi}(y))}}{|x-y|^{1+K_\rho^*}}, \quad (3.14)$$

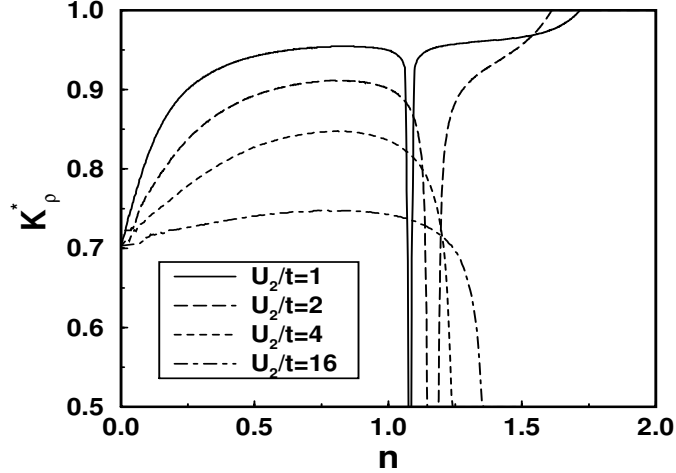


Figura 3.7: Expoente efetivo K_ρ^* como uma função do preenchimento n para $\ell = 1$ e diferentes valores de U_2 ($U_2/t = 1, 2, 4, 16$).

onde o expoente efetivo é

$$K_\rho^* = \frac{\sqrt{1 + \Delta_\rho \ell v_F / u_\rho + (\ell v_F / u_\rho)^2}}{1 + \ell v_F / K_\rho u_\rho} \equiv f(K_\rho). \quad (3.15)$$

Da mesma forma, as funções de correlação supercondutoras singlete e tripleto são

$$\langle O^\dagger(x)O(y) \rangle \sim \frac{C}{|x - y|^{1 + \overline{K}_\rho}}, \quad (3.16)$$

onde $\overline{K}_\rho = f(1/K_\rho)$.

Pode-se ver que as funções de correlação não dependem só da diferença $x - y$, mas também das próprias posições x e y , através das funções de modos zero. Seu efeito é gerar as oscilações usuais presentes nos líquidos de Luttinger homogêneos. Entretanto, devido ao perfil de densidade não homogêneo, seu período varia de camada a camada, refletindo a dependência com a camada

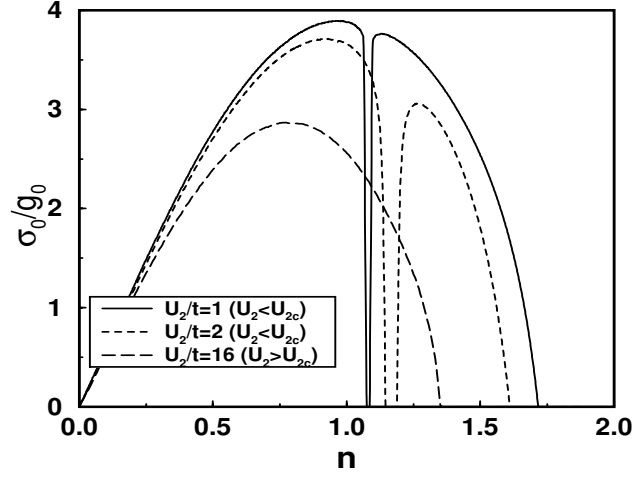


Figura 3.8: Peso de Drude como uma função de n com $\ell = 1$ e para diferentes valores de U ($U/t = 1, 2, 16$, de cima para baixo).

dos vetores de onda de Fermi.

Apesar da presença dos expoentes efetivos K_ρ^* e \overline{K}_ρ , a condição para que as correlações supercondutoras dominem se reduz àquela para um sistema homogêneo, que é $K_\rho > 1$. Na Figura 3.7, o expoente de correlação K_ρ^* de uma SHU é mostrado como uma função do preenchimento da banda para $\ell = 1$. As duas fases metálicas são caracterizadas por $1/2 < K_\rho^* < 1$. Em baixas densidades, K_ρ^* se aproxima de um valor maior que $1/2$ quando $n \rightarrow 0$, que depende de ℓ , mas não de U_2 . Esta é uma característica única da superrede. Da Eq. (3.15) vemos que K_ρ^* interpola monotonicamente entre 1 (camada livre) e K_ρ (camada interagente) quando ℓ varia de 0 ao ∞ . Como $K_\rho^* > K_\rho$ as funções de correlação densidade-densidade e spin-spin caem mais rápido nas superredes de Hubbard que no sistema homogêneo.

Apresentamos o peso de Drude de uma superrede de Hubbard unidimen-

sional como uma função de n para $\ell = 1$ e vários valores de U na Figura 3.8. Esta figura mostra um comportamento reentrante como uma função de n para $U < U_{2c}$. Ademais, o peso de Drude cai a zero quando se aproxima das regiões isolantes como um resultado da diminuição das velocidades de carga $u_\rho \rightarrow 0$ (isolante tipo Mott) e $v_F \rightarrow 0$ (isolante tipo banda).

3.2 Duas cadeias de Hubbard: Acoplamentos diferentes

Agora consideraremos o caso no qual temos duas cadeias de Hubbard com diferentes acoplamentos $U_\lambda \neq 0$ ($U_2 > U_1$), mas com igual “hopping” $t_\lambda = t$ como é mostrado na Figura 3.9. Neste caso, a carga tende à acumular-se na camada com menor acoplamento (camada “1”), como deve ser.

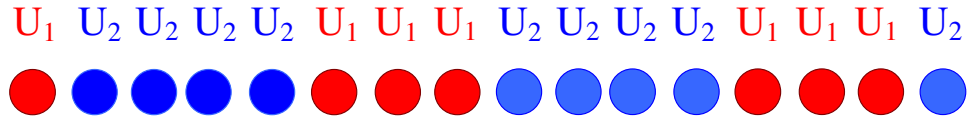


Figura 3.9: Superrede de Hubbard com $U_1, U_2 \neq 0$.

O diagrama de fases para as SHU com acoplamentos diferentes é muito rico. Observamos seis fases diferentes, três metálicas e três isolantes, cada uma com um perfil de carga diferente, como é apresentado na Figura 3.10. A topologia do diagrama de fases é a mesma para qualquer ℓ e note que os casos limites de $U_1 \rightarrow 0$ (seção anterior) e $U_1 = U_2$ (cadeia homogênea) são recuperados.

As linhas no diagrama de fases da Figura 3.10 são dadas por:

linha I:

$$\mu_{1-}(U_1, n_1 = 1) = \mu_2(U_2, \frac{n_I(1 + \ell) - 1}{\ell}), \quad (3.17)$$

linha II:

$$U_1 - \mu_{1-}(U_1, n_1 = 1) = \mu_2(U_2, \frac{n_{II}(1 + \ell) - 1}{\ell}), \quad (3.18)$$

linha III:

$$\mu_1(U_1, n_{III}(1 + \ell) - \ell) = \mu_{2-}(U_2, n_2 = 1), \quad (3.19)$$

linha IV:

$$\mu_1(U_1, n_{IV}(1 + \ell) - \ell) = U_2 - \mu_{2-}(U_2, n_2 = 1), \quad (3.20)$$

linha V:

$$\mu_1(U_1, n_1 = 2) = \mu_{2-}(U_2, \frac{n_V(1 + \ell) - 2}{\ell}). \quad (3.21)$$

Na Figura 3.10 observamos que para $n < 1$ o sistema têm uma fase isolante, fato que não é observado na seção anterior ($U_1 = 0$) onde o sistema é sempre metálico. As três fases isolantes correspondem a $n_\lambda = 1$ (isolante tipo Mott) ou $n_1 = 2$ (isolante tipo banda). Note que em cada caso uma das camadas é isolante enquanto a outra é metálica e o caráter isolante da SHU é consequência da estrutura unidimensional. Logo as fases isolantes não têm gap.

No diagrama de fase para $U_2 = 3t < U_c$ (Figura 3.10a) observamos que a SHU tem um gap na densidade $n = 1$ para $U_1 > U^* \approx 2.145608t$, que é representado pela linha tracejada que separa as duas fases isolantes inferior ($n_1 = 1, n_2 < 1$) e intermediária ($n_1 > 1, n_2 = 1$). Note que para $U_1 < U^*$ a SHU é sem gap e tem três fases metálicas.

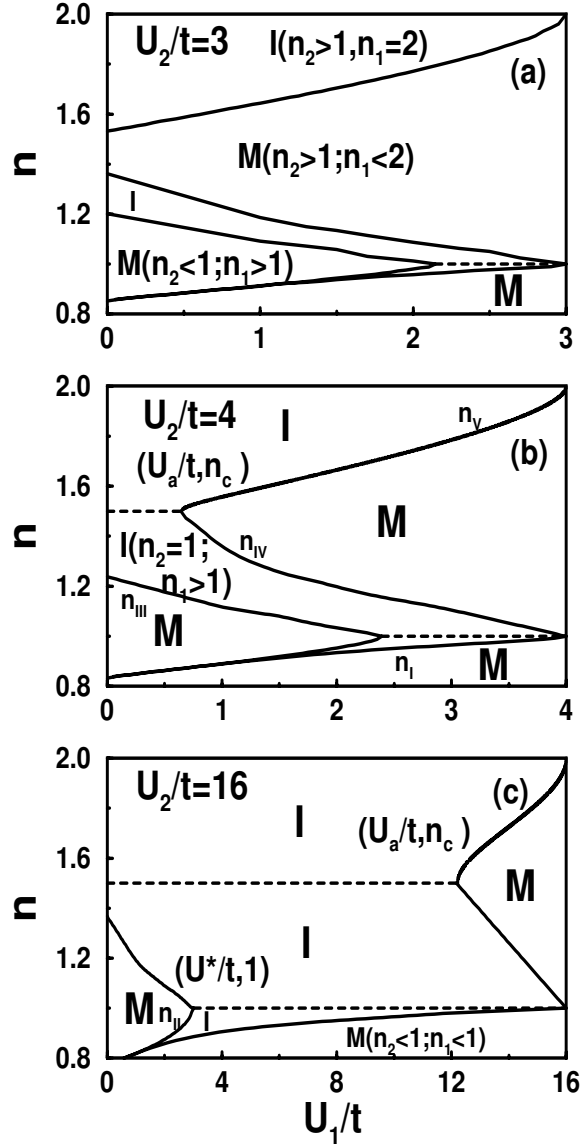


Figura 3.10: Diagrama de fases de uma Superrede de Hubbard (acoplamentos diferentes) com três regiões metálicas (M) e três isolantes (I) para (a) $U_2/t = 3$, (b) $U_2/t = 4$ e (c) $U_2/t = 16$ ($\ell = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$). Para $U_2 = 3t$ temos $U^* \approx 2.145608t$. Além disso, para $U_2 = 4t$ e $U_2 = 16t$ temos $U^* = 2.39149t$, $U_a = 0.643364t$ e $U^* = 3.01509t$, $U_a = 12.1724t$, respectivamente.

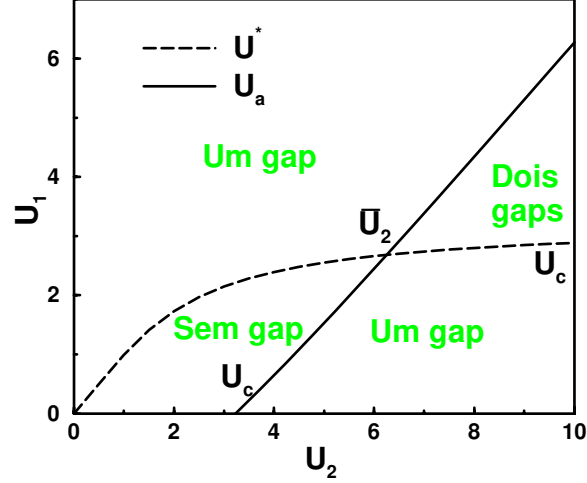


Figura 3.11: Parametros U^* e U_a como função de U_2 . Aqui $\bar{U}_2 = 6.25261t$.

No diagrama de fases para $U_2 = 4t > U_c$ (Figura 3.10b) o sistema é sem gap entre $U_a < U_1 < U^*$ onde $U_a \approx 0.6433t$ e $U^* \approx 2.39149t$. Para $U_1 < U_a$ as fases isolantes intermediária ($n_1 > 1, n_2 = 1$) superior ($n_1 = 2, n_2 > 1$) são separadas por uma linha tracejada, ao longo da qual o sistema abre um gap na densidade $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$. Outro gap é aberto na densidade $n = 1$, e novamente é representado pela linha tracejada que separa as fases isolante intermediária ($n_1 = 1, n_2 < 1$) e inferior ($n_1 > 1, n_2 = 1$) para $U_1 > U^*$.

Para $U_2 = 16t > U_c$ (Figura 3.10c) e $U^* < U_1 < U_a$ o sistema é metálico só para $n < 1$ e temos dois gaps nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$. Aqui temos que $U^* = 3.01509t$ e $U_a = 12.1724t$. Duas fases metálicas são observadas para $U_1 < U^*$ e $U_1 > U_a$. Em cada caso, o sistema só têm um gap, nas densidades $n = 1 (U_1 > U_a)$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell) (U_1 < U^*)$, respectivamente.

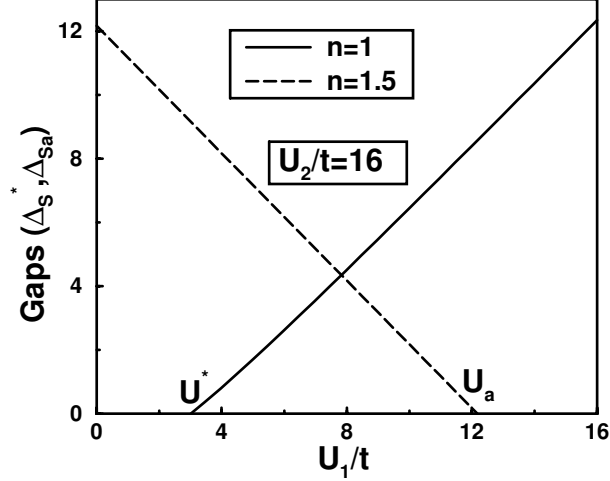


Figura 3.12: Gaps Δ_S^* e $\Delta_{S,a}$ nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$, respectivamente. Aqui $U_2 = 16t$ e $\ell = 1$.

Os parametros U^* e U_a dependem de U_2 e são dados por

$$U_a = U_2 - \mu_{2-}(U_2, n_2 = 1) - 2t, \quad (3.22)$$

$$U^* - \mu_-(U^*) = \mu_{2-}(U_2, n_2 = 1). \quad (3.23)$$

Observe que estes valores são independentes de ℓ . Na Figura (3.11) mostramos U^* e U_a como função de U_2 . Observamos que U^* começa em zero e aumenta até U_c em $U_2 = \infty$; entretanto, U_a aumenta linearmente com U_2 e é nulo em $U_2 < U_c$. U^* coincide com U_a em $\overline{U}_2 = 6.25261t$. Assim, para valores maiores que \overline{U}_2 , o sistema sempre tem um gap. Note que o sistema é sem gap para $U_a < U_1 < U^*$ com $U_2 < \overline{U}_2$. Para $U_2 > \overline{U}_2$ e $U^* < U_1 < U_a$ o sistema tem dois gaps. No entanto, para $U_1 < U^*$ e $U_1 > U_a$ ele tem só um gap.

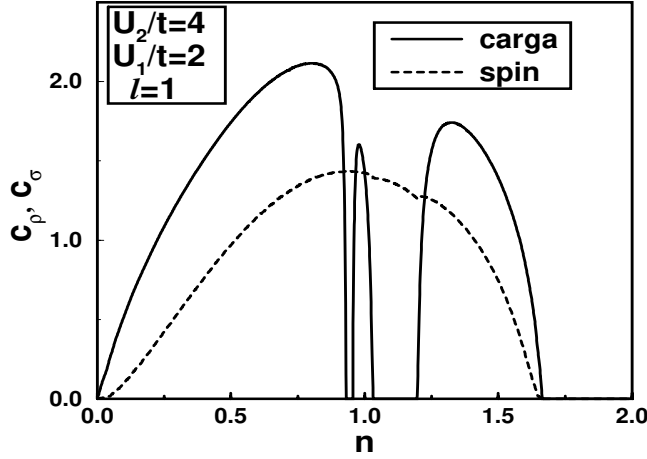


Figura 3.13: Velocidades efetivas de carga c_ρ (linha cheia) e spin c_σ (linha tracejada) para uma SHU em função de n ($\ell = 1$) para $U_1 = 2t$ e $U_2 = 4t$.

Os gaps nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$ são dados por

$$\Delta_S^* = U_1 - \mu_-(U_1) - \mu_-(U_2) \quad (n = 1), \quad (3.24)$$

$$\Delta_{S,a} = U_2 - \mu_-(U_2) - 2t - U_1 \quad (n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)). \quad (3.25)$$

Observe que os gaps não dependem de ℓ . Os gaps Δ_S^* e $\Delta_{S,a}$ são apresentados na Figura (3.12) para $U_2 = 16t$ em função de U_1 . O gap em $n = 1$ ($n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$) aumenta (diminui) linearmente com U_1 e é zero para $U_1 < U^*$ ($U_1 > U_a$). Note que o comportamento em função do acoplamento de $\Delta_{S,a}$ é contrário ao observado na seção anterior, onde o gap em $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$ aumenta com o acoplamento. Também da figura, temos só um gap para $U_1 < U^*$ e $U_1 > U_a$. Para $U^* < U_1 < U_a$ temos dois gaps.

Para $U_2 = 4t$ e $U_1 = 2t$, as velocidades efetivas de carga e spin para uma SHU são apresentadas na Figura (3.13), em função de n . A velocidade de

carga (linha cheia na Figura 3.13) é nula nas regiões isolantes como resultado do cancelamento das velocidades de carga $u_{\lambda,\rho} \rightarrow 0$. Assim, c_ρ apresenta um comportamento re-entrante em função de n . Para esta SHU temos três fases metálicas e três fases isolantes. Aqui as fases isolantes são separadas por regiões metálicas indicando que a SHU não tem gap como pode ser visto na Figura (3.10b). Como no caso homogêneo, a velocidade de spin é sempre menor que a velocidade de Fermi e é nula só na fase isolante superior (linha tracejada na Figura 3.13). Como uma função de ℓ , encontramos que a velocidade efetiva de carga (spin) aumenta (diminui) até alcançar u_ρ (u_σ). Note que as velocidades de carga e spin no modelo de Hubbard homogêneo u_ρ e u_σ aumentam e diminuem com o acoplamento, respectivamente.

Como a estrutura de superrede não quebra a simetria $SU(2)$, temos que $\overline{K}_\sigma = K_\sigma^* = 1$. Assim de (2.32,2.38) temos que as funções de correlação densidade-densidade e spin-spin para SHU com acoplamentos diferentes é dominada pelo termo $\langle O^\dagger O \rangle \sim |x - y|^{-1-K_\rho^*}$ que correspondem a $2k_F$ -CDW e $2k_F$ -SDW no sistema homogêneo. Aqui $K_{2\rho} < K_\rho^* < K_{1\rho}$. Assim, as funções de correlação densidade-densidade e spin-spin decaem mais rapidamente (lentamente) que no sistema homogêneo com acoplamento $U = U_2$ ($U = U_1$). Similarmente, as funções de correlação supercondutoras são $\langle O^\dagger O \rangle \sim |x - y|^{-1-\overline{K}_\rho}$.

Na Figura 3.14, o expoente efetivo de correlação K_ρ^* de uma SHU com acoplamentos diferentes é apresentado, em função do preenchimento, para três situações diferentes ($\ell = 1$): SHU-1 com $U_2 = 4t$ e $U_1 = 2t$; SHU-2 com $U_2 = 16t$ e $U_1 = 2t$; SHU-3 com $U_2 = 16t$ e $U_1 = 8t$. Para qualquer ℓ todas as fases metálicas são caracterizadas por terem $1/2 < K_\rho^* < 1$. Observamos

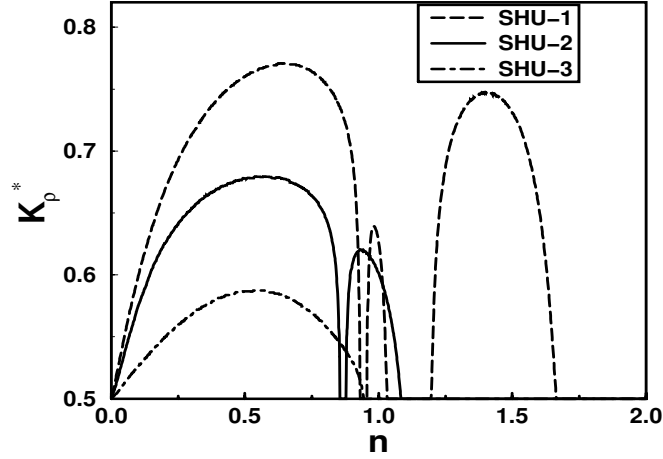


Figura 3.14: Expoente efetivo de correlação K_ρ^* em função de n ($\ell = 1$). Três superredes diferentes são apresentadas: SHU-1, com $(U_2/t = 4, U_1/t = 2)$, SHU-2, com $(U_2/t = 16, U_1/t = 2)$ e SHU-3, com $(U_2/t = 16, U_1/t = 8)$.

que a SHU-1 tem três fases metálicas, SHU-2 tem duas fases metálicas e SHU-3 tem só uma fase metálica. Note que K_ρ^* é maior na fase metálica inferior e, portanto, as funções de correlação de densidade e spin decaem mais rapidamente.

Para baixas densidades, K_ρ^* se aproxima de $1/2$ como no caso homogêneo, contrariamente ao observado na seção anterior onde K_ρ^* permanecia entre $1/2$ e 1.

3.3 Duas Cadeias de Hubbard: “Hoppings” diferentes

Consideraremos agora duas cadeias de Hubbard arranjadas periodicamente com o mesmo acoplamento $U_\lambda = U > 0$, mas com diferentes “hoppings” $t_2 > t_1$. Inicialmente, a carga é acumulada na camada com menor “hopping” (camada “1”). Isto acontece para densidades $n < n^* < 1$, onde n^* satisfaz $\mu_\lambda(n^*) = 0$. No entanto, esta situação é invertida quando $n > n^*$ e a carga flui da camada “1” para a camada “2”. n^* é independente de $r = t_2/t_1$ e ℓ , e diminui com U .

Para este caso, o diagrama de fases apresenta 7 fases diferentes, três metálicas e quatro isolantes. Ele é apresentado na Figura 3.15 para $U = 4t_1$ e $U = 8t_1$ com $\ell = 1$.

As linhas no diagrama de fases da Figura 3.15 são dadas por:

linha I:

$$\mu_2(U, n_2 = 0) = \frac{t_2}{t_1} \mu_1(U, n'_I(1 + \ell)), \quad (3.26)$$

linha II:

$$\mu_{2-}(U, n_2 = 1) = \frac{t_2}{t_1} \mu_1(U, n'_{II}(1 + \ell) - \ell), \quad (3.27)$$

linha III:

$$U - \mu_{2-}(U, n_2 = 1) = \frac{t_2}{t_1} \mu_1(U, n'_{III}(1 + \ell) - \ell), \quad (3.28)$$

linha IV:

$$\mu_2(U, \frac{n'_{IV}(1 + \ell) - 1}{\ell}) = \frac{t_2}{t_1} \mu_{1-}(U, n_1 = 1), \quad (3.29)$$

linha V:

$$\mu_2(U, \frac{n'_V(1 + \ell) - 1}{\ell}) = \frac{t_2}{t_1} [U - \mu_{1-}(U, n_1 = 1)], \quad (3.30)$$

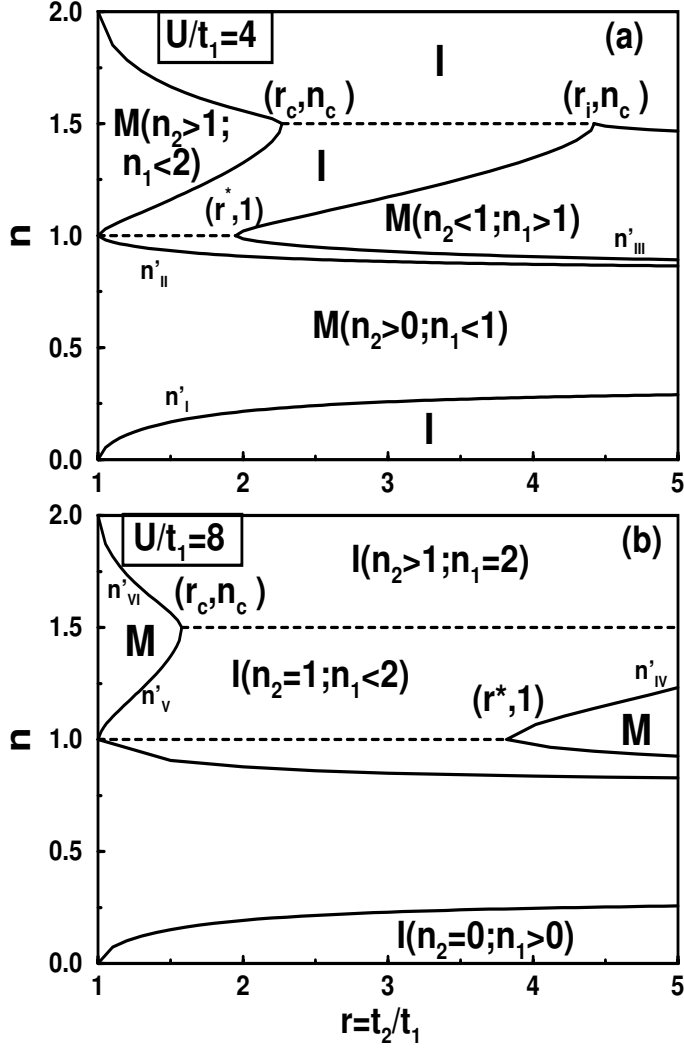


Figura 3.15: Diagrama de fases para SHU com “hoppings” diferentes. Aqui temos três fases metálicas (M) e quatro isolantes (I) para (a) $U = 4t_1$ e (b) $U = 8t_1$ ($\ell = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$). Para $U = 4t_1$ e $U = 8t_1$ temos $r^* = 1.94847$, $r_c = 2.26984$, $r_i = 4.4227$ e $r^* = 3.818576$, $r_c = 1.57735$, $r_i = 6.02322$ respectivamente.

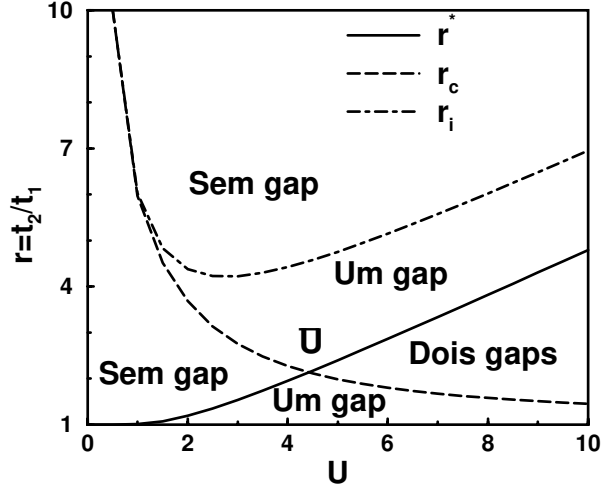


Figura 3.16: Parâmetros r^* , r_c e r_i em função de U . Aqui $\bar{U} \approx 4.4191t_1$.

linha VI:

$$\mu_2(U, n_2 = 2) = \frac{t_2}{t_1} \mu_1(U, n'_{VI}(1 + \ell) - 2\ell). \quad (3.31)$$

Aqui como nas seções anteriores, a topologia do diagrama de fases é a mesma para qualquer ℓ .

Para $n < 1$ o sistema têm duas fases isolantes. Nestas, a densidade de equilíbrio na camada “2” é $n_2 = 0$ (região isolante inferior, tipo banda) ou $n_2 = 1$ (região isolante superior, tipo Mott). Entre estas fases temos uma fase metálica. Duas fases metálicas e duas fases isolantes são encontradas para $n > 1$: nas fases isolantes temos $n_1 = 1, n_2 > 1$ (tipo Mott) ou $n_1 > 1, n_2 = 2$ (tipo banda). Note que todas as fases isolantes são compressíveis, ou seja, sem gap. No diagrama de fases da Figura 3.15, a fronteira entre duas fases isolantes é representada por linhas tracejadas. Precisamente ao longo destas o sistema abre gaps, nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$.

Os parâmetros r_c , r^* e r_i que aparacem na Figura (3.15) são dados por

$$r_c = \frac{\mu_2(U, n_2 = 2)}{U - \mu_{1-}(U, n_1 = 1)}, \quad (3.32)$$

$$r^* = \frac{U - \mu_{2-}(U, n_2 = 1)}{\mu_{1-}(U, n_1 = 1)}, \quad (3.33)$$

$$r_i = \frac{\mu_2(U, n_2 = 2)}{\mu_{1-}(U, n_1 = 1)}. \quad (3.34)$$

Observe que estas quantidades são independentes de ℓ .

Na Figura 3.15(a) vemos que o sistema não tem gap para $r > r_i$ e entre r^* e r_c para $U = 4t_1$. Entretanto, para $U = 8t_1$ o sistema é sem gap apenas para $r > r_i$ (Figura 3.15(b)) e tem dois gaps entre $r_c = 1.57735$ e $r^* = 3.818576$. Este fato pode ser visto mais claramente na Figura (3.16), onde apresentamos r^* , r_c e r_i em função de U . Note que r^* e r_c coincidem em $\bar{U} \approx 4.4191t_1$.

Os gaps nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$ são dados por

$$\Delta_r^* = U - \mu_{2-}(U) - \frac{t_2}{t_1}\mu_{1-}(U) \quad n = 1, \quad (3.35)$$

$$\Delta_{c,r} = \frac{t_2}{t_1}(U - \mu_{1-}(U)) - (2t_1 + U) \quad n_c = \frac{2+\ell}{1+\ell}. \quad (3.36)$$

Observe que os gaps são independentes de ℓ . Os gaps Δ_r^* e $\Delta_{c,r}$ são apresentados na Figura (3.17) para $U = 8t_1$ em função de $r = t_2/t_1$. Temos apenas um gap para $r < r_c$ e $r^* < r < r_i$, enquanto que para $r_c < r < r^*$ temos dois gaps. O gap em $n = 1$ ($n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$) diminui (aumenta) linearmente com r e é nulo para $r > r^*$ ($r < r_c$).

As velocidades efetivas de carga e spin para uma SHU com “hoppings” diferentes são dadas por

$$c_\nu = \frac{u_{1,\nu}(1 + \ell)}{\sqrt{1 + \Delta_\nu \ell r u_{1,\nu}/u_{2,\nu} + (r \ell u_{1,\nu}/u_{2,\nu})^2}}. \quad (3.37)$$

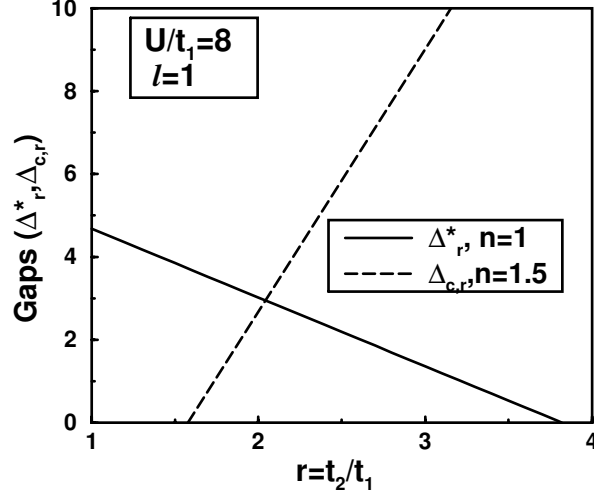


Figura 3.17: Gaps Δ_r^* e $\Delta_{c,r}$ nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$, respectivamente. Aqui $U = 8t_1$ e $\ell = 1$.

As velocidades são nulas para $n < n^*$ e, para $n > n^*$, são menores que as velocidades do modelo de Hubbard homogêneo ($c_\nu < u_\nu$). Aqui, também c_ρ apresenta um comportamento re-entrante em função de n .

O parametro efetivo de interação K_ρ^* é dado por

$$K_\rho^* = \frac{\sqrt{1 + \Delta_\nu \ell r u_{1,\nu}/u_{2,\nu} + (r \ell u_{1,\nu}/u_{2,\nu})^2}}{\frac{1}{K_{1,\nu}} + \ell \frac{1}{K_{2,\nu}} r \frac{u_{1,\nu}}{u_{2,\nu}}}, \quad (3.38)$$

Como $K_\rho^* < K_\rho$ as funções de correlação densidade-densidade e spin-spin para a SHU com “hoppings” diferentes decaem mais lentamente que no caso homogêneo.

Na Figura (3.18) o expoente de correlação K_ρ^* para uma SHU é apresentado em função do preenchimento, para diferentes parâmetros ($\ell = 1$): SHU-A com $U = 4t_1$ e $r = 2$; SHU-B com $U = 8t_1$ e $r = 2$; SHU-C com $U = 4t_1$

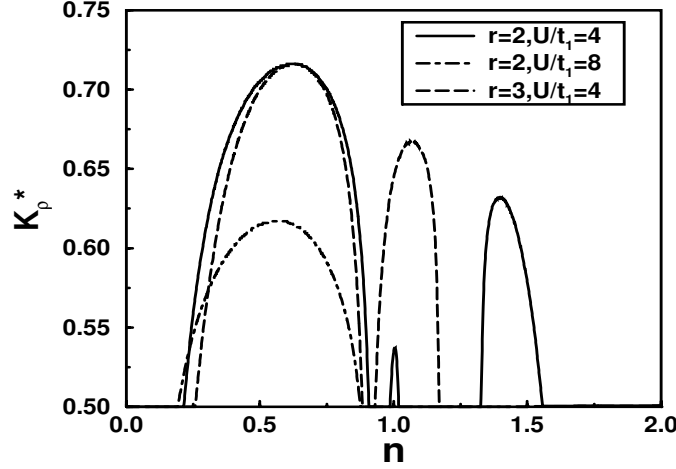


Figura 3.18: Expoente de correlação efetivo K_ρ^* ($\ell = 1$) em função do preenchimento n para $U = 4t_1$ com $r = 2, 3$ e $U = 8t_1$ com $r = 2$.

e $r = 3$. Vemos que $1/2 < K_\rho^* < 1$ nas fases metálicas para qualquer ℓ . A SHU-A tem três fases metálicas, a SHU-B tem apenas uma fase metálica e SHU-C tem duas fases metálicas. Note que K_ρ^* é maior na fase metálica inferior. Portanto, as funções de correlação decaem mais rapidamente nesta fase.

Devemos lembrar que no sistema homogêneo a descrição de líquido de Luttinger perde validade sempre que um gap é aberto no setor de carga (ou de spin), o que acontece no semi-preenchimento. Para a superrede, esta perda de validade acontece nas fases isolantes, como um resultado tanto de processos tipo Umklapp ou de um isolante tipo banda nas Figuras (3.4,3.10,3.15).

Nesse capítulo, estudamos as superredes de Hubbard unidimensionais, mais especificamente, três de suas realizações: (i) Uma camada livre ($U_1 = 0$), com uma camada de Hubbard, mas com o mesmo “hopping”, (ii) mesmo “hop-

ping” nas duas camadas de Hubbard, mas com acoplamentos diferentes e (iii) acoplamentos iguais para as duas camadas, mas “hoppings” diferentes. Em todas as realizações os diagramas de fases para o estado fundamental apresentaram várias fases metálicas e isolantes, as últimas sem gap (compressíveis). A topologia dos diagramas de fase é independente do parâmetro ℓ . As SHU têm gaps nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$, dependendo da realização. As propriedades de baixas energias podem ser descritas em termos do modelo de superredes de líquidos de Luttinger. Como no caso homogêneo só três parâmetros determinam toda a física em baixas energias: c_ν ($\nu = \rho$ ou σ) e K_ρ^* .

Capítulo 4

Superredes de Spins

Sistemas quânticos de spin unidimensionais têm sido estudados amplamente nas últimas décadas, tanto do ponto de vista experimental como teórico[52]. Uma importante observação nesta área é a chamada *Conjectura de Haldane* [53], que estabelece que cadeias de spins tipo Heisenberg isotrópicas com spin semi-inteiro não têm gap, enquanto aquelas com spin inteiro têm gap. Esta conjectura não foi provada ainda, mas muitas evidências sobre sua validade foram acumuladas[54].

Além disso, vários fenômenos foram descobertos como resultado das fortes correlações spin-spin e das fortes flutuações quânticas. Entre estes fenômenos estão os platôs na magnetização, que são um fenômeno quântico macroscópico no qual a magnetização é quantizada em frações de seu valor de saturação. Os primeiros estudos foram feitos por Hida[55] e Okamoto[56] na tentativa de descrever alguns compostos orgânicos com acoplamentos periódicos. Oshikawa e colaboradores[57] fizeram o primeiro estudo sistemático deste problema, estendendo o teorema de Lieb-Schultz-Mattis a sistemas com

campo magnético. Eles estabeleceram a condição necessária para a aparição de platôs na magnetização em sistemas 1D, a saber,

$$p(S - m^z) = q \equiv \text{inteiro}, \quad (4.1)$$

onde p é a periodicidade do estado fundamental magnético no limite termodinâmico, S é valor do spin e m^z é a magnetização por sítio. O estado de platôs pode ser visto como um estado de gap de spin com magnetização diferente de zero.

A existência de materiais reais com constituintes trimerizados[58, 59] têm motivado a pesquisa dos procesos de magnetização em trímeros [55, 56], quadrímeros [60] e, mais geralmente, em cadeias de spin de Heisenberg $S = 1/2$ periodicamente moduladas com período p (as chamadas cadeias p -merizadas)[61, 62, 63].

Do ponto de vista experimental, um dos materiais mais excitantes é o NH_4CuCl_3 , onde dois platôs na magnetização com $\langle M \rangle = 1/4$ e $3/4$ foram observados [64]. Estes platôs foram encontrados em cadeias de spin quase-periódicas, onde uma modulação no plano X-Y foi considerada [65].

O efeito de uma estrutura sobre as propriedades magnéticas das cadeias de spin e a possibilidade de aparição de platôs na magnetização devido à estrutura são, portanto, de grande interesse. Aqui, estudaremos o que acontece quando se considera uma modulação periódica (estrutura de superrede) no parâmetro de anisotropia em cadeias XXZ de spin- $\frac{1}{2}$.

Uma superrede de spins é um arranjo periódico de duas cadeias de Heisenberg de spins $1/2$ anisotrópicas (cadeias XXZ) com diferentes comprimentos L_λ e parâmetros de anisotropia Δ_λ ($\lambda = 1, 2$). Assim, a Hamiltoniana de

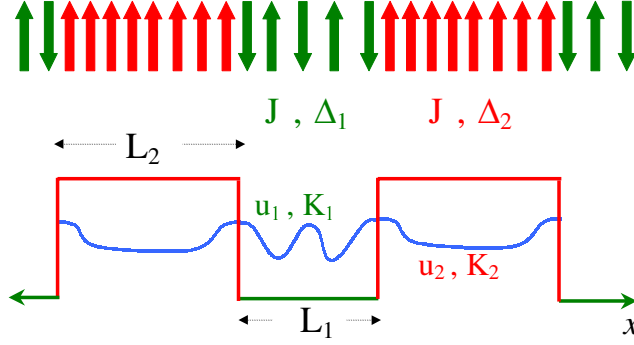


Figura 4.1: Superrede de spins e sua relação com a superrede de líquidos de Luttinger. Aqui, J , Δ_λ e L_λ são o acoplamento, parâmetro de anisotropia e o comprimento de cada cadeia, respectivamente. O campo magnético h está aplicado na direção z .

uma superrede de spins na presença de um campo magnético na direção z é

$$H = J \sum_n^L (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \Delta_\lambda S_n^z S_{n+1}^z) - h \sum_n^L S_n^z \quad (4.2)$$

onde S^x , S^y e S^z denotam as matrizes de spin- $\frac{1}{2}$, h é o campo magnético na direção z , $L = N_c(L_1 + L_2)$ é o comprimento da superrede e N_c é o número de células unitárias, cada uma delas com uma base com $L_1 + L_2$ sítios. Em (4.2) Δ_λ é o parâmetro de anisotropia, que depende da posição (ver Figura 4.1), ou seja, toma diferentes valores nas duas subredes ($\Delta_\lambda = \Delta_1$, na subrede com L_1 sítios e $\Delta_\lambda = \Delta_2$ na outra subrede com L_2 sítios).

Como foi discutido no capítulo (1), no caso homogêneo ($\Delta_n = \Delta$, independente da posição) a Hamiltoniana (4.2) é exatamente solúvel usando o método do Ansatz de Bethe, mesmo quando $h \neq 0$ [48]. Então, é possível mostrar que as propriedades de baixas energias podem ser descritas por

meio de uma teoria de campos com carga conforme $c = 1$ de um campo bosônico livre (líquido de Luttinger), compactado em um raio R no limite termodinâmico para $\Delta > -1$ e qualquer magnetização $< M > [50]$.

As propriedades de baixa energia de uma superrede de spins são descritas em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger (SLL) (capítulo 2) de férmions sem spin com Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2\pi} \int dx \left\{ u(x)K(x)(\partial_x \Theta)^2 + \frac{u(x)}{K(x)}(\partial_x \Phi)^2 \right\}, \quad (4.3)$$

onde os parâmetros que dependem das camadas $u(x)$ e $K(x)$ são a velocidade das excitações e o parâmetro que determina o decaimento das funções de correlação, respectivamente. Para x na subrede λ temos $K(x) = K(< M_\lambda >, \Delta_\lambda)$ e $u(x) = u(< M_\lambda >, \Delta_\lambda)$ *i.e.* os parâmetros usuais de líquido de Luttinger para cada subrede. No caso homogêneo, a constante $K = K(< M >, \Delta)$ governa a dimensão conforme dos operadores de vértice bosônicos e pode ser obtida exatamente usando o Ansatz de Bethe. Temos que $K = 1/2$ para o caso com simetria $SU(2)$ ($\Delta = 1$). Ele está relacionado ao raio de compactificação R por $K^{-1} = 2\pi R^2$.

Na Hamiltoniana (4.3), $\partial_x \Theta$ é o momento conjugado a Φ : $[\Phi(x), \partial_y \Theta(y)] = i\delta(x - y)$. Os campos Φ e Θ são duais, já que eles satisfazem

$$\partial_t \Phi = u(x)K(x)\partial_x \Theta \quad (4.4)$$

e a equação obtida da substituição $\Phi \rightarrow \Theta$, $\Theta \rightarrow \Phi$, e $K \rightarrow 1/K$. Como foi visto no capítulo (2) estes campos podem ser desacoplados para dar

$$\partial_{tt} \Phi - uK\partial_x \left(\frac{u(x)}{K(x)} \partial_x \Phi \right) = 0, \quad (4.5)$$

e uma equação dual para Θ .

As equações de movimento são sujeitas à continuidade de Φ e Θ . Como as derivadas temporais destas funções são contínuas, o lado direito da Eq. (4.4) e sua dual conduzem às condições adicionais da continuidade de $(u/K) \partial_x \Phi$ e $uK \partial_x \Theta$ nas interfaces.

Como já se observou acima, ficamos com um problema similar àquele que foi tratado no capítulo (2), mas neste caso só temos um grau de liberdade (carga). Assim, os resultados e expressões do capítulo (2) podem ser usados aqui fazendo $\rho = \sigma$ em todas as expressões e retirando-se o sub-índice.

O estado fundamental para um campo magnético dado h tem $J_\lambda = 0$. Já N_λ pode ser determinado a partir da equação de estado, obtida da solução exata[48, 49]

$$h = h(J, \Delta_1, M_1) = h(J, \Delta_2, M_2). \quad (4.6)$$

Note que aqui, $\langle M_\lambda \rangle = 2m_\lambda^z = 1 - 2N_\lambda/L_\lambda$ é a magnetização por sítio de cada cadeia λ normalizada ao valor de saturação. Assim, a magnetização da superrede de spins é

$$\langle M_s \rangle = \frac{\langle M_1 \rangle + \ell \langle M_2 \rangle}{1 + \ell}, \quad (4.7)$$

onde $\ell = L_2/L_1$. Podemos ver como a magnetização das superredes é uma média das magnetizações das subredes, com ℓ sendo o peso na média.

Note que as equações (4.6) e (4.7) são válidas também nas regiões onde não é possível fazer uma descrição em termos de líquidos de Luttinger. Elas são (i) a região ferromagnética (F) para $\Delta < -1$ e para qualquer valor de Δ em campos magnéticos suficientemente altos e (ii) a região antiferromagnética a campos pequenos e $\Delta > 1$ (ver figura (1.3) do capítulo (1)). Na região antiferromagnética, o sistema é descrito pela teoria de “sine-Gordon” e

tem um gap. Entretanto, na região ferromagnética o sistema está totalmente magnetizado e não pode ser descrito em termos de uma teoria de campos que seja invariante sob uma transformação de Lorentz [69].

Do capítulo (2) temos que para $p \ll \pi/(L_U + L_0)$ a velocidade efetiva das excitações para uma superrede de spins é dada por

$$c = \frac{u_1(1 + \ell)}{\sqrt{1 + \Delta \ell u_1/u_2 + (\ell u_1/u_2)^2}}, \quad (4.8)$$

onde $\Delta = K_1/K_2 + K_2/K_1$. Note que, $c \rightarrow u_2$ quando $\ell \rightarrow \infty$, e $c \rightarrow u_1$ quando $\ell \rightarrow 0$.

Em termos dos campos bosônicos Φ e Θ , os operadores de spin podem ser escritos como [70]

$$\begin{aligned} S_x^z &= \frac{M}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_x \Phi + \frac{1}{\pi\alpha} \cos [2\Phi(x) - 2\bar{\phi}(x)], \\ S_x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-i\Theta(x)} \left\{ 1 + e^{2i\bar{\phi}(x)} \cos [2\Phi(x)] \right\}, \end{aligned}$$

onde $\bar{\phi}(x) = k_F x - \phi_0(x)$, o momento de Fermi k_F está relacionado à magnetização da cadeia por $k_F = (1 + M)\pi/2$ e α é um parametro de "cutoff" [5].

As funções de correlação para uma superrede de spins (i.e., para x e y muito separados) são

$$\langle S^z(y) S^z(x) \rangle \sim \frac{C}{2\pi^2 |x - y|^2} + A \frac{e^{2i(\bar{\phi}(y) - \bar{\phi}(x))}}{|x - y|^{2K^*}}, \quad (4.9)$$

$$\langle S^+(y) S^-(x) \rangle \sim \frac{B_1}{|x - y|^{\bar{K}/2}} + B_2 \frac{e^{2i(\bar{\phi}(y) - \bar{\phi}(x))}}{|x - y|^{\bar{K}/2 + 2K^*}}, \quad (4.10)$$

onde o expoente efetivo é

$$K^* = \frac{\sqrt{1 + \Delta \ell u_1/u_2 + (\ell u_1/u_2)^2}}{\frac{1}{K_1} + \ell \frac{1}{K_2} \frac{u_1}{u_2}} \equiv f(K_1, K_2), \quad (4.11)$$

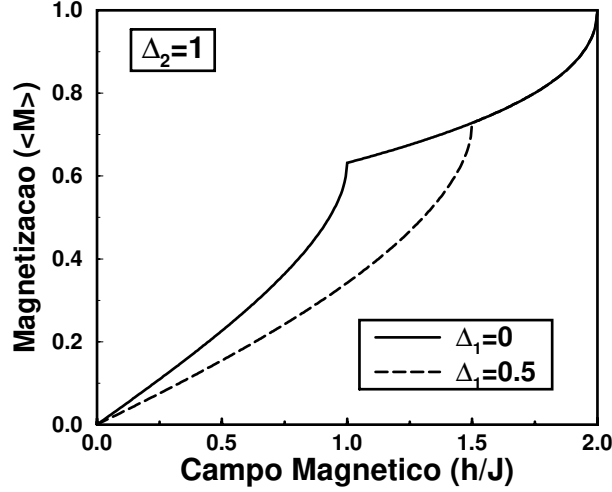


Figura 4.2: Curva de magnetização de uma superrede de spins com $\Delta_2 = 1$ e $\Delta_1 = 0, 0.5$ ($\ell = 1$).

$\bar{K} = f(1/K_1, 1/K_2)$ e C é uma função dos parâmetros do sistema (ver capítulo 2). Da Eq. (4.9) vemos que as funções de correlação da cadeia homogênea são recuperadas quando é feito $K_1 = K_2$ e $u_1 = u_2$.

4.1 $\Delta_1, \Delta_2 < 1$

Aqui a superrede é composta por duas cadeias com parâmetros de anisotropia menores que 1. Nesse caso, as cadeias têm apenas duas fases possíveis: paramagnética e ferromagnética.

Na Figura (4.2), apresentamos a magnetização em função do campo magnético para uma superrede de spins com $\Delta_2 = 1$ e $\Delta_1 = 0, 0.5$. Vemos que a magnetização é uma função crescente do campo magnético, como esperado.

Também vemos uma mudança no comportamento, que coincide com o fato de que uma das subredes torna-se ferromagnética, enquanto a outra ainda é paramagnética. Esta mudança acontece no campo $h = 1 + \Delta_1$. Nesse ponto, a inclinação é menos aguda se comparada com aquela que se obtém quando o sistema fica ferromagnético. Dado um campo magnético a magnetização da superrede de spins é menor (maior) que a magnetização de uma cadeia homogênea de igual comprimento mas parâmetro de anisotropia $\Delta_1 = 0, 0.5$ ($\Delta_2 = 1$).

A descrição das propriedades de baixas energias em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger é válida só para campos menores que $1 + \Delta_1$, já que para campos maiores um gap é aberto em uma das cadeias (subrede ferromagnética).

Da Figura (4.2) também é claro que, à medida que $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$, a magnetização fica menor e tende à magnetização de uma cadeia homogênea com anisotropia Δ_2 . A região na qual é válida a descrição em termos de SLL também aumenta com Δ_1 .

4.2 $\Delta_1 < \Delta_2 > 1$

Neste caso, estamos considerando a situação na qual uma ou ambas cadeias tem anisotropia maior que 1, como pode ser visto no diagrama de fases para uma cadeia XXZ (1.3). Isto implica que, para um campo magnético dado, uma ou ambas as cadeias podem ter uma fase antiferromagnética ($\langle M \rangle = 0$). Na Figura (4.3) apresentamos a magnetização de uma superrede de spins em função do campo magnético externo para $\Delta_2 = 5$ and

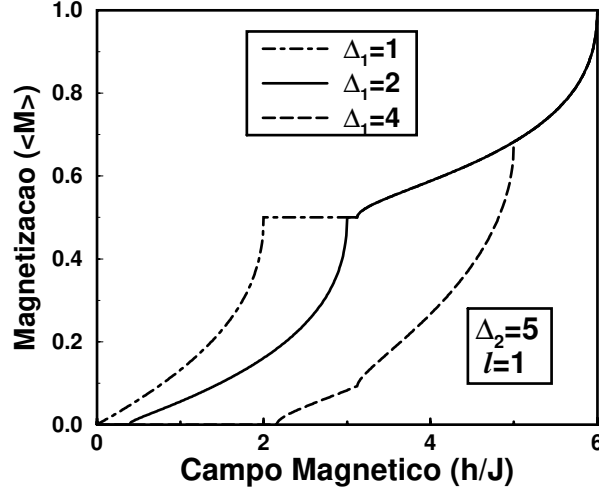


Figura 4.3: Curva de magnetização de uma superrede de spins com $\Delta_2 = 5$ e $\Delta_1 = 1, 2, 4$ ($\ell = 1$).

$\Delta_1 = 1, 2, 4$. Vemos como a curva de magnetização para a superrede depende do valor de Δ_1 . Observe a presença de platôs de magnetização com valor $\langle M_s \rangle = 0.5$ para $\Delta_1 = 1$ e 2. Entretanto, para $\Delta_1 = 4$ só temos o platô correspondente à fase antiferromagnética $\langle M_s \rangle = 0$. Como uma função do campo magnético e com Δ_2 e Δ_1 fixos, a curva de magnetização tem regimes diferentes de comportamento. Por exemplo, na Figura (4.3) para $\Delta_1 = 2$ temos uma fase antiferromagnética ($\langle M_s \rangle = 0$) até $h_c(\Delta_1 = 2) = 0.3898J$. Depois, a magnetização aumenta até chegar no platô com magnetização $\langle M_s \rangle = 0.5$. Finalmente, a partir de $h_c(\Delta_2 = 5) = 3.2182J$, a magnetização aumenta novamente até que os spins fiquem totalmente polarizados e o sistema seja ferromagnético. A Figura (4.4) mostra a magnetização de uma superrede de spins com $\Delta_2 = 5$ e $\Delta_1 = 2$ para diferentes ℓ . Para

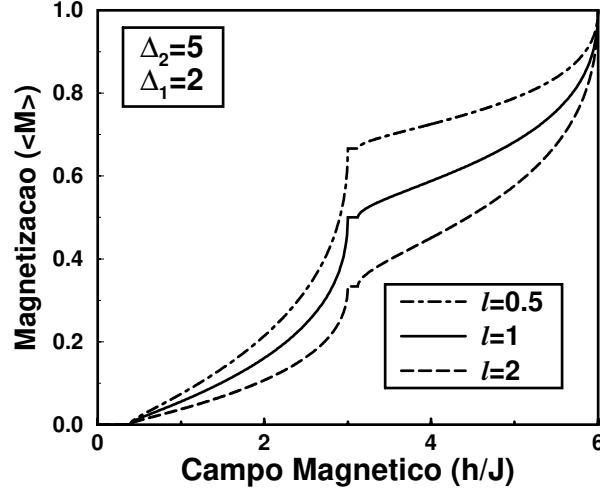


Figura 4.4: Curva de magnetização de uma superrede de spins com $\Delta_2 = 5$ e $\Delta_1 = 2$ para diferentes ℓ .

campos menores que $h_c(\Delta_1 = 2) = 0.3898J$ a superrede de spins têm uma fase antiferromagnética ($\langle M_s \rangle = 0$) para qualquer ℓ . Para campos maiores, um platô na magnetização é encontrado com valores $\langle M_s \rangle = 0.666$, $\langle M_s \rangle = 0.5$ e $\langle M_s \rangle = 0.3333$ para $\ell = 0.5, 1$ e 2 , respectivamente. Este platô corresponde a uma subrede na fase ferromagnética $\langle M_1 \rangle = 1$ e outra subrede na fase antiferromagnética $\langle M_2 \rangle = 0$. Assim, a superrede de spins apresenta uma modulação espacial na magnetização. Note que a largura do platô é a mesma nas três curvas, mas o valor da magnetização *varia continuamente com ℓ* segundo $\langle M_s \rangle = 1/(1 + \ell)$. Esta é uma assinatura macroscópica da estrutura da superrede e é um limite extremo dos platôs de magnetização já estudados[57]. Outra propriedade abordada na última referência é a dependência com o campo magnético da magnetização,

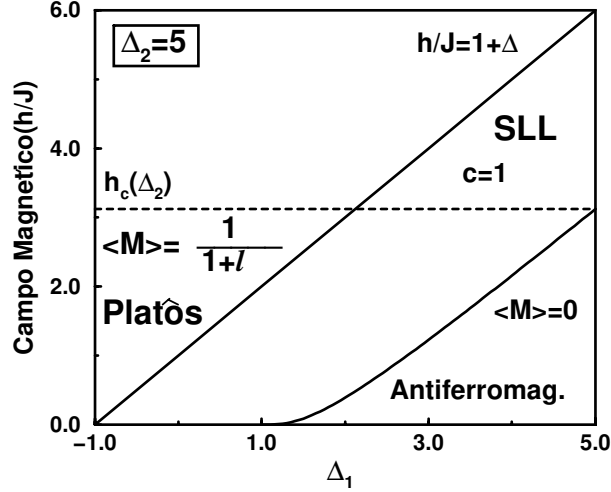


Figura 4.5: Diagrama de fases de uma superrede de spins com $\Delta_2 = 5$.

quando esta se aproxima do platô: $M_s \propto \sqrt{|h - h_c|}$, típica desta classe de universalidade[66, 67, 68]. Em nosso caso, isto se deve à natureza de média ponderada de M_s (equação 4.7) e às dependências individuais do tipo raiz quadrada de M_1 e M_2 quando estas se aproximam de seus platôs. Mas aqui o gap não é consequência de uma perturbação relevante[57] como usualmente, já que a cadeia que satura ferromagneticamente não pode ser descrita em termos de uma teoria de campos[69].

O diagrama de fases de uma superrede de spins com $\Delta_1 < \Delta_2 \neq 0$ e qualquer ℓ é apresentado na Figura (4.5). Observamos que uma descrição em termos de superrede de líquidos de Luttinger é possível para campos magnéticos maiores que $h_c(\Delta_2 = 5) = 3.2182J$. Para campos menores, temos platôs com magnetização $\langle M_s \rangle = 1/(1 + \ell)$ para $-1 < \Delta_1 < 2.2182$ e uma região antiferromagnética para $\Delta_1 > 1$. Assim, entre $1 < \Delta_1 < 2.2182$,

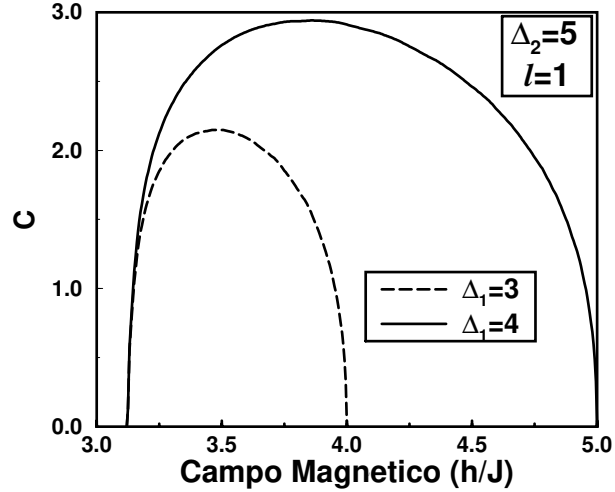


Figura 4.6: Velocidade efetiva c para uma superrede de spins em função do campo magnético h para $\ell = 1$, com $\Delta_2 = 5$ e $\Delta_1 = 3$ e 4.

temos dois platôs de magnetização. Então, dado Δ_1 temos uma curva de magnetização ou com dois platôs ou com apenas um. As outras regiões neste diagrama têm magnetizações $\langle M_s \rangle \neq 0, 1$ e não apresentam platôs. O diagrama de fases é válido só para $\Delta_2 > 1$. Para anisotropias menores a curva de magnetização para superredes de spins não tem platôs, como foi visto na seção anterior.

A velocidade efetiva é apresentada na Figura (4.6) para duas superredes de spins diferentes, ambas com $\ell = 1$. A velocidade é diferente de zero para campos magnéticos entre $h_c(\Delta_2)$ e $h/J = 1 + \Delta_1$. Note que estes valores determinam a região de validade da descrição em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger.

É importante recordar que no sistema homogêneo, a descrição em ter-

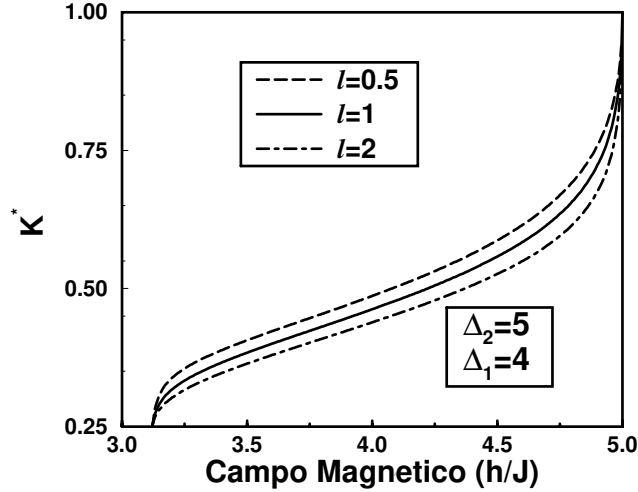


Figura 4.7: Expoente de correlação K^* para uma superrede de spins em função do campo magnético h para $\ell = 1$, com $\Delta_2 = 5$ e $\Delta_1 = 3$ e 4.

mos de líquidos de Luttinger perde validade quando um gap é aberto. Isto acontece nas regiões ferromagnética e antiferromagnética. No caso de uma superrede de spins com $\Delta_2 > 1$, a descrição em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger não é possível para campos magnéticos menores que $h_c(\Delta_2)$.

Na Figura (4.7), o expoente efetivo de correlação K^* de uma superrede de spins em função do campo magnético para $\ell = 0.5, 1$ e 2 é apresentado. Observamos que $0.25 < K^* < 1$, como no caso homogêneo com anisotropia maior que 1. Também, $K_2 < K^* < K_1$, indicando que as funções de correlação para uma superrede de spins decaem mais (menos) rapidamente que aquelas para um sistema homogêneo com anisotropia Δ_2 (Δ_1). Note que, dados Δ_1 e Δ_2 , o expoente de correlação K^* diminui quando ℓ aumenta, mas

seus valores limites 0.25 e 1 são os mesmos para qualquer valor de ℓ e são alcançados nos mesmos valores de campo magnético.

É interessante relacionar o nosso tratamento a análises anteriores feitas no regime de forte acoplamento. Já foi mostrado que os platôs de magnetização podem ser entendidos em termos de blocos de spins fortemente acoplados, os quais estão fracamente acoplados entre si. Neste caso, os blocos tendem a magnetizar-se independentemente, levando a valores quantizados da magnetização [49, 63]. Isto é o que acontece no caso de uma superrede de spins. Já que estamos tratando o limite de cadeias muito longas, as interações na fronteira entre duas cadeias são sempre uma *perturbação fraca* e assim o argumento de acoplamento forte é aplicável.

Nossa descrição pode ser facilmente estendida para valores de spins maiores, usando o procedimento introduzido por Schulz[71], onde outros platôs podem ocorrer. Regiões onde seja possível uma descrição em termos de superredes de líquidos de Luttinger são esperadas para superredes de spins com spin semi-inteiro.

Neste capítulo, consideramos uma superrede de spins composta por um arranjo periódico de duas cadeias de spins XXZ com diferentes parâmetros de anisotropia e comprimentos. Um perfil de magnetização não homogêneo é obtido como consequência da dependência espacial das propriedades do sistema. Encontramos platôs de magnetização que dependem do comprimento relativo das camadas ℓ e com magnetização $M_s = 1/(1 + \ell)$, se uma ou as duas cadeias de spin tem parâmetro de anisotropia maior que 1. As propriedades de baixas energias podem ser descritas em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger.

Capítulo 5

Modelo de Wolff contínuo

O modelo de Wolff[36] descreve um mar de elétrons livres, onde introduzimos uma impureza substitucional. O nível de energia na impureza é ε_0 e a interação de Coulomb é U_0 (ver Figura 5.1).

A Hamiltoniana do modelo de Wolff unidimensional é

$$H = -t \sum_{i,\sigma} (c_{i\sigma}^\dagger c_{i+1\sigma} + H.c.) + \varepsilon_0 \sum_{\sigma} n_{0,\sigma} + U_0 n_{0\uparrow} n_{0\downarrow}. \quad (5.1)$$

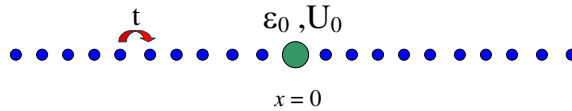


Figura 5.1: Representação esquemática do modelo de Wolff. ε_0 é a energia do nível de impureza e U_0 a interação de Coulomb.

Este modelo será estudado via bosonização, através da qual o modelo será mapeado em uma teoria de campos efetiva. Estamos interessados só em modos de baixas energias próximos à superfície de Fermi. Assim, podemos

escrever

$$\frac{c_{j,\sigma}}{\sqrt{a}} \approx e^{-ik_Fja} \Psi_{-,j,\sigma} + e^{ik_Fja} \Psi_{+,j,\sigma}, \quad (5.2)$$

onde a é o parâmetro de rede e $+$ ($-$) indica férmions que se movimentam para a direita (esquerda). Assim, o mar de férmions livres fica agora descrito por meio de um líquido de Luttinger livre. Ou seja

$$\begin{aligned} H_0 &= -t \sum_{i,\sigma} (c_{i\sigma}^\dagger c_{i+1\sigma} + H.c.) \\ &\approx iv_F \sum_{\sigma} \int dx \left\{ \Psi_{-\sigma}^\dagger(x) \partial_x \Psi_{-\sigma}(x) - \Psi_{+\sigma}^\dagger(x) \partial_x \Psi_{+\sigma}(x) \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $v_F = 2at \sin(k_F a)$ é a velocidade de Fermi.

O termo correspondente ao nível de energia fica

$$\begin{aligned} V_L &= \varepsilon_0 \sum_{\sigma} n_{0,\sigma} \\ &\approx \int dx \varepsilon(x) [\Psi_{\uparrow}^\dagger(x) \Psi_{\uparrow}(x) + \Psi_{\downarrow}^\dagger(x) \Psi_{\downarrow}(x)], \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $\varepsilon(x)$ denota a energia da impureza, que generalizamos temporariamente para uma dependência qualquer com a posição.

No modelo de Luttinger, os elétrons podem interagir de várias formas: espalhamento de elétrons para frente com transferência de momento pequena (em ramos diferentes g_2 e sobre o mesmo ramo g_4) e espalhamento de elétrons para trás (g_1) com transferência de momento de $\pm 2k_F$. Assim, o termo de interação local do modelo de Wolff é composto de três contribuições

$$V_U = U_0 n_{0\uparrow} n_{0\downarrow} \approx V_1 + V_2 + V_4, \quad (5.5)$$

onde

$$V_1 = \int dx \bar{g}_{1,ss'}(x) \Psi_{+,s}^\dagger(x) \Psi_{-,s}(x) \Psi_{-,s'}^\dagger(x) \Psi_{+,s'}(x) \quad (5.6)$$

$$V_2 = \int dx \bar{g}_{2,ss'}(x) \Psi_{+,s}^\dagger(x) \Psi_{+,s}(x) \Psi_{-,s'}^\dagger(x) \Psi_{-,s'}(x) \quad (5.7)$$

e

$$V_4 = \frac{1}{2} \sum_r \int dx \bar{g}_{4,ss'}(x) \Psi_{r,s}^\dagger(x) \Psi_{r,s}(x) \Psi_{r,s'}^\dagger(x) \Psi_{r,s'}(x). \quad (5.8)$$

Aqui também $\bar{g}_{\lambda,ss'}(x)$ denota a interação como função da posição ($\lambda = 1, 2, 4$).

Usando a identidade de Mandelstam (1.21), cada uma das partes da Hamiltoniana de Wolff é expressa em termos dos campos bosônicos de spin σ e de carga ρ , da seguinte maneira (α é um "cutoff" ver [5])

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\nu \int dx \left(v_F (\partial_x \Theta_\nu)^2 + v_F (\partial_x \Phi_\nu)^2 \right), \quad (5.9)$$

$$V_L = \int dx \varepsilon(x) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\pi} \partial_x \Phi_\rho(x) + \frac{2}{\pi\alpha} \cos(\sqrt{2\pi} \Phi_\sigma(x)) \cos(\sqrt{2\pi} \Phi_\rho(x) - 2k_F x) \right], \quad (5.10)$$

$$V_1 = \frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \bar{g}_{1,\perp}(x) \cos(\sqrt{8\pi} \Phi_\sigma(x)), \quad (5.11)$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_\nu \int dx \bar{g}_{2\nu}(x) \left((\partial_x \Phi_\nu)^2 - (\partial_x \Theta_\nu)^2 \right) \quad (5.12)$$

e

$$V_4 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_\nu \int dx \bar{g}_{4\nu}(x) \left((\partial_x \Phi_\nu)^2 + (\partial_x \Theta_\nu)^2 \right). \quad (5.13)$$

Finalmente, a Hamiltoniana bosônica que descreve o modelo de Wolff é

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int dx \left\{ \left[\pi v_F - \bar{g}_{2\nu}(x) + \bar{g}_{4\nu}(x) \right] (\partial_x \Theta_\nu)^2 + \right. \\ & \left. \left[\pi v_F + \bar{g}_{2\nu}(x) + \bar{g}_{4\nu}(x) \right] (\partial_x \Phi_\nu)^2 \right\} \\ & + \int dx \varepsilon(x) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\pi} \partial_x \Phi_\rho(x) + \frac{2}{\pi\alpha} \cos(\sqrt{2\pi} \Phi_\sigma(x)) \cos(\sqrt{2\pi} \Phi_\rho(x) - 2k_F x) \right] \\ & + \frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \bar{g}_{1,\perp}(x) \cos(\sqrt{8\pi} \Phi_\sigma(x)). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Um modelo mais geral pode ser obtido quando se considera que os elétrons de condução interagem entre si. Então, v_F é mudada para uma velocidade efetiva das excitações v_ν ($\nu = \rho, \sigma$) e os campos são reescalados assim $\Phi_\nu \rightarrow \Phi_\nu \sqrt{K_\nu}$ e $\Theta_\nu \rightarrow \Theta_\nu / \sqrt{K_\nu}$ (ver capítulo 1). Assim, ficamos com um problema mais complexo, que chamamos de modelo de Wolff contínuo, que é descrito pela Hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int dx \left\{ \left[\pi v_\nu - \bar{g}_{2\nu}(x) + \bar{g}_{4\nu}(x) \right] (\partial_x \Theta_\nu)^2 + \right. \\
& \left. \left[\pi v_\nu + \bar{g}_{2\nu}(x) + \bar{g}_{4\nu}(x) \right] (\partial_x \Phi_\nu)^2 \right\} \\
& + \frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \bar{g}_{1,\perp}(x) \cos\left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_\sigma(x)\right) \\
& + \int dx \varepsilon(x) \left[-\frac{\sqrt{2K_\rho}}{\pi} \partial_x \Phi_\rho(x) \right. \\
& \left. + \frac{2}{\pi\alpha} \cos\left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_\sigma(x)\right) \cos\left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_\rho(x) - 2k_F x\right) \right]. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

5.1 Uma Impureza

A Hamiltoniana (5.15) representa um modelo geral, onde os elétrons de condução estão interagindo e onde é possível haver até uma distribuição de impurezas, descritas pelos parâmetros $\varepsilon(x)$ e $\bar{g}_{\lambda,\nu}(x)$ ($\lambda = 1, 2, 4$). Agora consideraremos o caso em que só temos uma impureza. Então, os parâmetros são dados por

$$\bar{g}_{i\nu}(x) = g_{i\nu} \delta(x) \quad \bar{g}_{1\perp}(x) = g_{1\perp} \delta(x) \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_0 \delta(x), \quad (5.16)$$

onde $g_{i\nu}$ e ε_0 são constantes. Para o modelo de Wolff, $g_{i\nu} = U_0 a > 0$.

A Hamiltoniana do modelo de Wolff contínuo com uma impureza é

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \sum_{\nu} \int dx \{ v_{\nu} (\partial_x \Theta_{\nu})^2 + v_{\nu} (\partial_x \Phi_{\nu})^2 \} \\
& + \frac{2g_{1,\perp}}{(2\pi\alpha)^2} \cos \left(\sqrt{8\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0) \right) \\
& - \frac{\sqrt{2K_{\rho}}}{\pi} \int dx \varepsilon_0 \delta(x) \partial_x \Phi_{\rho}(x) \\
& + \frac{2\varepsilon_0}{\pi\alpha} \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0) \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\rho}} \Phi_{\rho}(0) \right), \quad (5.17)
\end{aligned}$$

onde os termos de espalhamento para frente locais $g_{2\nu}$ e $g_{4\nu}$ não são considerados (a análise de grupo de renormalização a ser feita adiante mostra que esses termos são invariantes e não influenciam o fluxo).

O terceiro termo em (5.17) pode ser eliminado da Hamiltoniana por meio de uma transformação canônica, determinada pelo operador

$$U_{\rho} = \exp \left(\frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{2K_{\rho}}{\pi}} \frac{\varepsilon_0}{v_{\rho}} \Theta_{\rho}(0) \right). \quad (5.18)$$

Assim, a Hamiltoniana (5.17) fica

$$\begin{aligned}
\tilde{H} = U_{\rho}^{\dagger} H U_{\rho} = & \frac{1}{2} \sum_{\nu} \int dx \{ v_{\nu} (\partial_x \Theta_{\nu})^2 + v_{\nu} (\partial_x \Phi_{\nu})^2 \} \\
& + \frac{2g_{1,\perp}}{(2\pi\alpha)^2} \cos \left(\sqrt{8\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0) \right) \\
& + \frac{2\varepsilon_0}{\pi\alpha} \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0) \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\rho}} \Phi_{\rho}(0) \right). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Esta transformação implica que

$$\Phi_{\rho}(x) \rightarrow \Phi_{\rho}(x) + \frac{\sqrt{2K_{\rho}} E_f}{\pi v_{\rho}} \theta(x), \quad (5.20)$$

ou seja temos um “kink” no campo Φ_{ρ} . Isto se traduz em um deslocamento de fase na função de onda de $\delta = \frac{\sqrt{K_{\rho}} E_f}{4\pi v_{\rho}}$.

A Lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \int dx \left\{ \frac{1}{v_{\nu}} (\partial_{\tau} \Phi_{\nu})^2 + v_{\nu} (\partial_x \Phi_{\nu})^2 \right\} \quad (5.21)$$

$$+ \varepsilon \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0) \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\rho}} \Phi_{\rho}(0) \right) + g \cos \left(\sqrt{8\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0) \right),$$

onde $\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0}{\pi\alpha}$ e $g = \frac{2g_{1,+}}{(2\pi\alpha)^2}$.

Finalmente, a função de partição fica dada por

$$Z = \int D\Phi_{\rho} D\Phi_{\sigma} e^{-S}$$

$$= \int D\Phi_{\rho} D\Phi_{\sigma} \exp \left\{ - \sum_{\nu} \int \frac{d\tau dx}{2} \left[\frac{1}{v_{\nu}} (\partial_{\tau} \Phi_{\nu})^2 + v_{\nu} (\partial_x \Phi_{\nu})^2 \right] \right.$$

$$- \varepsilon \int d\tau \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0, \tau) \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_{\rho}} \Phi_{\rho}(0, \tau) \right)$$

$$\left. - g \int d\tau \cos \left(\sqrt{8\pi K_{\sigma}} \Phi_{\sigma}(0, \tau) \right) \right\}. \quad (5.22)$$

5.2 Ação efetiva

Vemos na função de partição (5.22) que nos termos de interação só estão presentes os campos em $x = 0$. Logo, a dinâmica do sistema vai estar determinada por esses campos locais. Portanto, devemos achar uma ação efetiva onde só estejam presentes esses campos locais. Em geral, temos uma função de partição da forma

$$Z_{\nu} = \int D\Phi_{\nu} e^{-S_{0\nu}[\Phi_{\nu}(x, \tau)] - S_{1\nu}[\Phi_{\nu}(0, \tau)]}$$

$$= \int D\Phi_{\nu} e^{-\int d\tau [L_0(\tau) + L_1(\tau)]}$$

onde $\nu = \rho, \sigma$, $S_{1\nu}[\Phi_{\nu}(0, \tau)]$ é a parte da ação que vem da interação e que só depende dos campos locais e $S_{0\nu}[\Phi_{\nu}(x, \tau)]$ é a ação livre.

Para obtermos uma ação efetiva local, devemos integrar todos os graus de liberdade com $x \neq 0$. Para isto, introduzimos um campo auxiliar $\lambda(\tau)$ e reescrevemos a função partição como

$$Z_\nu = \int D\Phi_{0\nu} \int d\lambda \int D\Phi_\nu e^{-\int d\tau [L_0(\tau) + L_1(\tau) + i\lambda(\tau)(\Phi_{0\nu}(\tau) - \Phi_\nu(0, \tau))]} \quad (5.23)$$

Agora vamos integrar Φ_ν , definindo

$$A = \int D\Phi_\nu \exp \left[- \int d\tau \left[\int \frac{dx}{2} \left(\frac{1}{v_\nu} (\partial_\tau \Phi_\nu)^2 + v_\nu (\partial_x \Phi_\nu)^2 \right) + i\lambda(\tau) (\Phi_{0\nu}(\tau) - \Phi_\nu(0, \tau)) \right] \right].$$

Mas

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x, \tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \Phi_\nu(x, \omega_n) \\ \lambda(\tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \lambda(\omega_n) \\ \Phi_\nu(x, \omega_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \Phi_\nu(q, \omega_n) \end{aligned}$$

onde $\beta = 1/K_B T$ e ω_n são as frequências de Matsubara bosônicas. Assim

$$\begin{aligned} \int d\tau \left\{ \int \frac{dx}{2\pi} \left[\frac{1}{v_\nu} (\partial_\tau \Phi_\nu)^2 + v_\nu (\partial_x \Phi_\nu)^2 \right] + i\lambda(\tau) (\Phi_{0\nu}(\tau) - \Phi_\nu(0, \tau)) \right\} = \\ \frac{1}{2\pi\beta} \sum_n \int \frac{dq}{2\pi} \left[\left(\frac{\omega_n^2}{v_\nu} + v_\nu q^2 \right) \Phi_\nu(q, \omega_n) \Phi_\nu(-q, -\omega_n) \right. \\ \left. - 2\pi i \lambda(\omega_n) \Phi_\nu(-q, -\omega_n) \right] + \frac{i}{\beta} \sum_n \lambda(\omega_n) \Phi_{0\nu}(-\omega_n). \end{aligned}$$

Fazendo

$$\tilde{\Phi}_\nu(q, \omega_n) = \Phi_\nu(q, \omega_n) - \frac{i\pi \lambda(\omega_n)}{\frac{\omega_n^2}{v_\nu} + v_\nu q^2}, \quad (5.24)$$

temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega_n^2}{v_\nu} + v_\nu q^2 \right) \Phi_\nu(q, \omega_n) \Phi_\nu(-q, -\omega_n) - 2\pi i \lambda(\omega_n) \Phi_\nu(-q, -\omega_n) = \\ & \tilde{\Phi}_\nu(q, \omega_n) \left(\frac{\omega_n^2}{v_\nu} + v_\nu q^2 \right) \tilde{\Phi}_\nu(-q, -\omega_n) + \lambda(\omega_n) \frac{\pi^2}{\frac{\omega_n^2}{v_\nu} + v_\nu q^2} \lambda(-\omega_n). \end{aligned}$$

Fazendo agora a integração Gaussiana em $\tilde{\Phi}_\nu(-q, -\omega_n)$ temos

$$\begin{aligned} A &= \exp \left[-\frac{\pi}{2\beta} \sum_n \int \frac{dq}{2\pi} \lambda(\omega_n) \frac{\pi^2}{\frac{\omega_n^2}{v_F} + v_F q^2} \lambda(-\omega_n) - \frac{i}{\beta} \sum_n \lambda(\omega_n) \Phi_{0\nu}(-\omega_n) \right] \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4\beta} \sum_n \left[\lambda(\omega_n) \frac{\pi}{|\omega_n|} \lambda(-\omega_n) - 4i \lambda(\omega_n) \Phi_{0\nu}(-\omega_n) \right] \right\}, \end{aligned}$$

já que $\int \frac{dq}{2\pi} (\frac{\omega_n^2}{v_F} + v_F q^2)^{-1} = (2|\omega_n|)^{-1}$. Mas

$$\begin{aligned} & \lambda(\omega_n) \frac{\pi}{|\omega_n|} \lambda(-\omega_n) - 4i \lambda(\omega_n) \Phi_{0\nu}(-\omega_n) = \\ & \tilde{\lambda}(\omega_n) \frac{\pi}{|\omega_n|} \tilde{\lambda}(-\omega_n) + \frac{4}{\pi} \Phi_{0\nu}(\omega_n) |\omega_n| \Phi_{0\nu}(-\omega_n), \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\lambda}(\omega_n) = \lambda(\omega_n) + \frac{2i \Phi_{0\nu}(\omega_n)}{\frac{\pi}{|\omega_n|}}$$

e fazendo a integral Gaussiana em λ finalmente temos

$$Z_\nu = \int D\Phi_{0\nu} e^{-S_0[\Phi_{0\nu}] - \int d\tau L_1(\tau)}, \quad (5.26)$$

onde a ação local é

$$S_0[\Phi_{0\nu}] = \frac{1}{\beta} \sum_n |\omega_n| \Phi_{0\nu}(\omega_n) \Phi_{0\nu}(-\omega_n). \quad (5.27)$$

5.3 Análise do grupo de renormalização

Com o objetivo de obter informações sobre o sistema faremos agora uma análise em termos do grupo de renormalização, ou seja, vamos retirar graus de liberdade de altas energias, encontrando assim a ação efetiva para os setores de mais baixa energia. Isso levará a uma mudança nos acoplamentos (ε e g) à medida que mais graus de liberdade de altas energias são retirados.

A função de partição do sistema agora é

$$Z = \int D\Phi_{0\rho} D\Phi_{0\sigma} e^{-S_0[\Phi_{0\rho}, \Phi_{0\sigma}] - S_1[\Phi_{0\rho}, \Phi_{0\sigma}]}, \quad (5.28)$$

onde

$$S_0[\Phi_{0\rho}, \Phi_{0\sigma}] = \frac{1}{\beta} \sum_n |\omega_n| |\Phi_{0\rho}|^2 + \frac{1}{\beta} \sum_n |\omega_n| |\Phi_{0\sigma}|^2 \quad (5.29)$$

e

$$\begin{aligned} S_1[\Phi_{0\rho}, \Phi_{0\sigma}] &= \varepsilon \int d\tau \cos\left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma}(\tau)\right) \cos\left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho}(\tau)\right) \\ &\quad + g \int d\tau \cos\left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma}(\tau)\right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Agora, introduzimos um “cut-off” Λ e os campos passam a ser escritos como $\Phi_{0\nu\Lambda}$. Assim,

$$\Phi_{0\rho\Lambda} = \Phi_{0\rho\Lambda'} + h_\rho, \quad \Phi_{0\sigma\Lambda} = \Phi_{0\sigma\Lambda'} + h_\sigma, \quad (5.31)$$

onde $\Phi_{0\nu\Lambda'}$ e h_ν são os modos lentos e rápidos dos campos, respectivamente, onde $\Lambda' = \Lambda - d\Lambda$.

Nosso objetivo agora é integrar os modos rápidos dos campos $\Phi_{0\nu\Lambda}$ e achar os parâmetros efetivos (renormalizados) do problema. A função de partição pode ser escrita

$$Z_\Lambda = Z_h \int D\Phi_{0\rho\Lambda'} D\Phi_{0\sigma\Lambda'} e^{-S_0[\Phi_{0\rho}, \Phi_{0\sigma}]} e^{-S_{1eff}[\Phi_{0\rho\Lambda'}, \Phi_{0\sigma\Lambda'}]}, \quad (5.32)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{1eff}[\Phi_{0\rho\Lambda'}, \Phi_{0\sigma\Lambda'}] &= -\ln \left\langle e^{S_1[\Phi_{0\rho\Lambda'}+h_\rho, \Phi_{0\sigma\Lambda'}+h_\sigma]} \right\rangle_h \\ &= \langle S_1 \rangle_h + \frac{1}{2} \left(\langle S_1^2 \rangle_h - \langle S_1 \rangle_h^2 \right) + \dots \quad (5.33) \end{aligned}$$

Como vemos, a segunda linha de (5.33) corresponde a uma expansão perturbativa, onde só apresentamos os termos até segunda ordem.

5.3.1 Primeira ordem

Considerando só o primeiro termo na expansão (5.33) temos

$$\begin{aligned} S_{1eff}[\Phi_{0\rho\Lambda'}, \Phi_{0\sigma\Lambda'}] &= \langle S_1 \rangle_h = g \int d\tau \left\langle \cos \left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma}(\tau) \right) \right\rangle_h \\ &\quad + \varepsilon \int d\tau \left\langle \cos \left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma}(\tau) \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho}(\tau) \right) \right\rangle_h. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} &\left\langle \cos \left(\sqrt{2\pi K_\sigma} (\Phi_{0\sigma} + h_\sigma) \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_\rho} (\Phi_{0\rho} + h_\rho) \right) \right\rangle_h \\ &= e^{(K_\sigma + K_\rho)d\ell} \cos \left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'} \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho\Lambda'} \right) \end{aligned}$$

e

$$\left\langle \cos \left(\sqrt{8\pi K_\sigma} (\Phi_{0\sigma} + h_\sigma) \right) \right\rangle_h = e^{-4K_\sigma d\ell} \cos \left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'} \right) \quad (5.34)$$

onde $d\ell = \frac{d\Lambda}{\Lambda}$.

Então, até primeira ordem temos

$$\begin{aligned} S_{1eff}[\Phi_{0\rho\Lambda'}, \Phi_{0\sigma\Lambda'}] &= \varepsilon e^{-(K_\sigma + K_\rho)d\ell} \int d\tau \cos \left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'} \right) \cos \left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho\Lambda'} \right) \\ &\quad + g e^{-4K_\sigma d\ell} \int d\tau \cos \left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'} \right). \quad (5.35) \end{aligned}$$

Para restaurar o cut-off original Λ , deve-se reescalar a energia

$$\omega' = \frac{\Lambda}{\Lambda'} \omega \approx \omega(1 + d\ell). \quad (5.36)$$

Além disso, o produto $\omega' t' = \omega t$ é invariante. Então, o tempo deve ser reescalado

$$t' = t \frac{1}{1 + d\ell} \approx t(1 - d\ell). \quad (5.37)$$

Assim

$$\begin{aligned} S_{1eff} = & g' \int d\tau \cos\left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda}\right) \\ & + \varepsilon' \int d\tau \cos\left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'}\right) \cos\left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho\Lambda'}\right), \end{aligned}$$

onde os parâmetros de acoplamento renormalizados são

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{\varepsilon}{1 - d\ell} e^{-(K_\sigma + K_\rho)d\ell}, \\ g' &= \frac{g}{1 - d\ell} e^{-4K_\sigma d\ell}. \end{aligned}$$

Portanto, as equações do grupo de renormalização até primeira ordem para os acoplamentos são

$$\frac{d\varepsilon}{d\ell} = \left[1 - \frac{1}{2}(K_\sigma + K_\rho)\right] \varepsilon \quad (5.40)$$

e

$$\frac{dg}{d\ell} = [1 - 2K_\sigma] g. \quad (5.41)$$

Da equação (5.41), vemos que a interação g é marginal para $K_\sigma = 1/2$. Logo, para $K_\sigma > 1/2$, g é irrelevante, ou seja ele diminui à medida que nós atingimos setores de mais baixa energia. Entretanto, para $K_\sigma < 1/2$, g é relevante, ou seja ele cresce à medida que vamos retirando graus de liberdade do sistema.

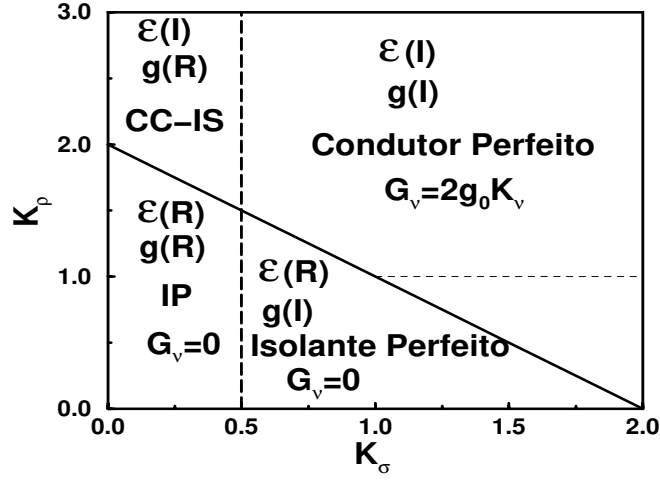


Figura 5.2: Diagrama de fases do modelo de Wolff contínuo até a primeira ordem em teoria de perturbação.

Para o nível local ε , temos que ele é marginal ao longo da linha $K_\rho + K_\sigma = 2$ e é irrelevante (relevante) para valores de K_ρ e K_σ que satisfazem $K_\rho + K_\sigma > 2$ ($K_\rho + K_\sigma < 2$).

Considerando o comportamento de ε e g encontramos o diagrama de fases apresentado na Figura (5.2). Nos eixos temos K_σ e K_ρ e observamos que há quatro fases bem definidas pelas linhas $K_\sigma = 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma = 2$.

Para $K_\sigma > 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma > 2$, tanto ε como g são irrelevantes. Assim, à medida que atingimos setores de mais baixa energia eles diminuem. Logo, tanto a carga como o spin do elétron são transmitidos totalmente através da impureza e o sistema é um condutor perfeito (a $T = 0$) com condutância $G_\nu = 2g_0K_\nu$, onde $g_0 = e^2/h$ é a condutância quântica.

ε é irrelevante, enquanto g é relevante para $K_\sigma < 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma > 2$. Assim, enquanto a carga é transmitida totalmente o spin sofre reflexão total,

ou seja, temos um condutor de carga ($G_\rho = 2g_0K_\rho$) e um isolante de spin ($G_\sigma = 0$). Note que esta fase não é possível quando só é considerado o potencial local ε_0 [34].

O sistema é um isolante perfeito, ou seja $G_\nu = 0$ e temos reflexão total de carga e spin, para $K_\rho + K_\sigma < 2$ e $K_\sigma \geq 1/2$. As duas fases que temos aqui são caracterizadas por terem ε relevante, enquanto que elas se diferenciam por terem g relevante ou irrelevante para K_σ menor ou maior que $1/2$, respectivamente. Note que a existência de uma região em que ε e g sejam relevantes abre a possibilidade para a existência de pontos fixos não triviais, que requerem, entretanto, uma análise até segunda ordem em teoria de perturbações.

5.3.2 Segunda ordem

A ação S_{1eff} até segunda ordem fica

$$S_{1eff}[\Phi_{0\rho\Lambda'}, \Phi_{0\sigma\Lambda'}] = \langle S_1 \rangle_h + \frac{1}{2} \left(\langle S_1^2 \rangle_h - \langle S_1 \rangle_h^2 \right), \quad (5.42)$$

onde $\langle S_1 \rangle_h$ já foi calculado na seção anterior.

O termo de segunda ordem é

$$\begin{aligned} \langle S_1^2 \rangle_h - \langle S_1 \rangle_h^2 &\approx -\varepsilon^2 e^{-(K_\sigma + K_\rho)d\ell} \int d\tau \cos\left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda}\right) \\ &\quad - \varepsilon g e^{-K_\rho d\ell} \int d\tau \cos\left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'}\right) \cos\left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho\Lambda'}\right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{1eff} &= \left[g e^{-4K_\sigma d\ell} - \varepsilon^2 e^{-(K_\sigma + K_\rho)d\ell} \right] \int d\tau \cos\left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda}\right) \\ &+ \left[\varepsilon e^{-(K_\sigma + K_\rho)d\ell} - \varepsilon g e^{-K_\rho d\ell} \right] \int d\tau \cos\left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'}\right) \cos\left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho\Lambda'}\right). \end{aligned}$$

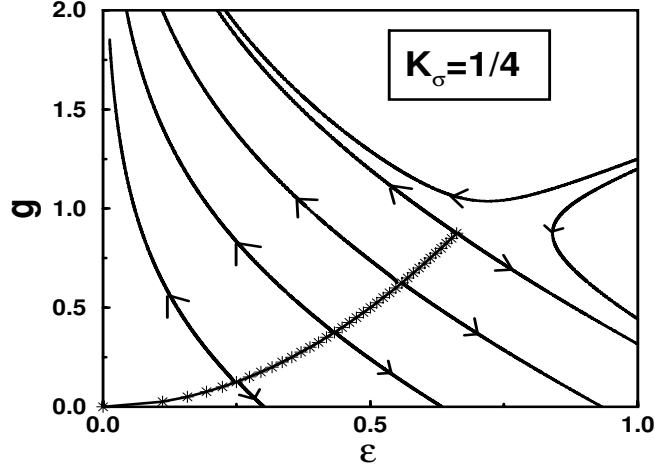


Figura 5.3: Linhas de fluxo dos acoplamentos ε e g para $K_\sigma = 1/4$.

Reescalando a frequência e o tempo, temos que

$$S_{1eff} = g' \int d\tau \cos\left(\sqrt{8\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda}\right) + \varepsilon' \int d\tau \cos\left(\sqrt{2\pi K_\sigma} \Phi_{0\sigma\Lambda'}\right) \cos\left(\sqrt{2\pi K_\rho} \Phi_{0\rho\Lambda'}\right),$$

onde

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 - d\ell} e^{-(K_\sigma + K_\rho)d\ell} - \varepsilon g d\ell, \quad (5.44)$$

$$g' = \frac{g}{1 - d\ell} e^{-4K_\sigma d\ell} - \varepsilon^2 d\ell. \quad (5.45)$$

Por conseguinte, as equações de grupo de renormalização até segunda ordem são

$$\frac{d\varepsilon}{d\ell} = \left[1 - \frac{1}{2}(K_\sigma + K_\rho)\right]\varepsilon - \varepsilon g, \quad (5.46)$$

$$\frac{dg}{d\ell} = \left[1 - 2K_\sigma\right]g - \varepsilon^2. \quad (5.47)$$

Das quatro fases mostradas na Figura (5.2), só em duas fases temos pontos fixos não triviais. Estas fases se caracterizam por terem tanto ε como g ambos

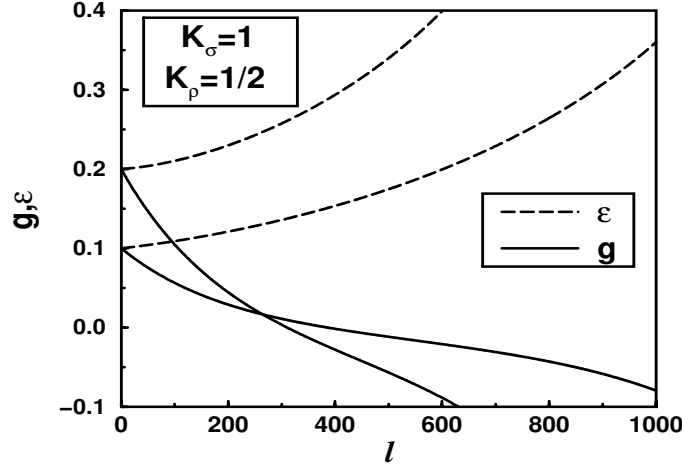


Figura 5.4: Acoplamentos ε e g em função de ℓ para $K_\sigma = 1$ e $K_\rho = 0.5$.

relevantes ou irrelevantes. Para $K_\sigma < 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma < 2$ eles são relevantes, enquanto para $K_\sigma > 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma > 2$ são irrelevantes.

Os pontos fixos das equações 5.46 e 5.47 são $g^* = a$ e $\varepsilon^* = \pm\sqrt{ab}$ onde

$$a = 1 - \frac{1}{2}(K_\sigma + K_\rho) \quad \text{e} \quad b = 1 - 2K_\sigma.$$

Em verdade, dado K_σ temos uma linha de pontos fixos.

Para $K_\sigma < 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma > 2$ encontramos que em segunda ordem do grupo de renormalização os acoplamentos ε e g são ainda irrelevantes e relevantes, respectivamente, como em primeira ordem. Assim, o sistema ainda é um isolante de spin e um condutor de carga.

Na Figura (5.3) apresentamos o fluxo do grupo de renormalização de ε e g para $K_\sigma = 1/4$. Note que temos uma linha de pontos fixos que começa no ponto trivial ($\varepsilon^* = 0$, $g^* = 0$) com $K_\rho = 1.75$ e para $K_\rho = 0$ alcança o valor máximo ($\varepsilon^* = 0.661437$, $g^* = 0.875$). Estes pontos fixos são instáveis e é

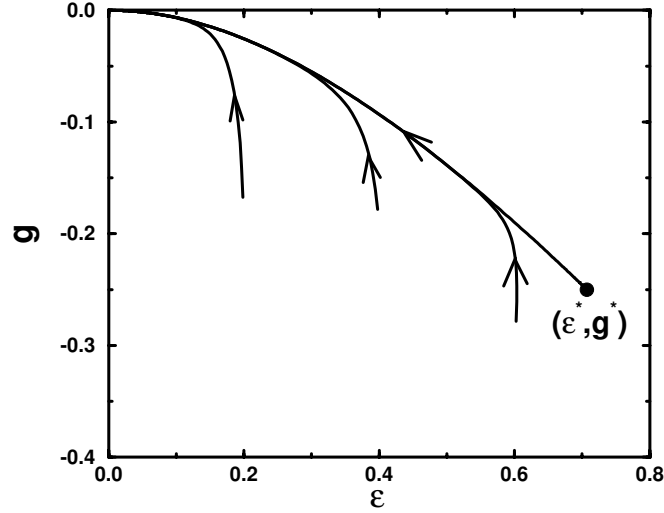


Figura 5.5: Linhas de fluxo dos acoplamentos ε e g para $K_\rho = 1$ e $K_\sigma = 3/2$. O ponto fixo não-trivial (ε^*, g^*) é instável.

possível ver como, para pontos acima da linha de pontos fixos, ε é irrelevante enquanto g é relevante e os acoplamentos tendem a um outro ponto fixo que é caracterizado por ter $(\varepsilon^* = 0, g^* = \infty)$. Este ponto fixo corresponde a uma situação em que o líquido de Luttinger é dividido em dois sistemas semi-infinitos. Entretanto, para pontos abaixo da linha de pontos fixos, a tendência do sistema é a interação g adquirir valores menores e mudar de sinal, passando ao regime atrativo, ou seja ε e g são relevantes.

O comportamento dos acoplamentos ε e g muda na região onde $K_\sigma > 1/2$ e $K_\rho + K_\sigma < 2$, em segunda ordem. Em primeira ordem ε é relevante e g irrelevante e, como pode ser visto na Figura (5.4), em segunda ordem ε é ainda relevante. Entretanto, deve-se observar como g é irrelevante no início

do fluxo mas depois muda de sinal e torna-se relevante. Isso porque em (5.47), o segundo termo sempre acaba dominando, já que ε é relevante.

As linhas de fluxo para os acoplamentos ε e g com $K_\rho = 1$ e $K_\sigma = 3/2$ são apresentadas na Figura (5.5). Embora exista o ponto fixo não trivial em (ε^*, g^*) , este é instável e todos os pontos estão na bacia de atração do ponto fixo trivial $(0, 0)$. Portanto, o resultado em primeira ordem, de que tanto ε quanto g são irrelevantes, permanece válido em segunda ordem.

Neste capítulo, estudamos o modelo de Wolff contínuo. Até primeira ordem em teoria de perturbações encontramos três fases: condutor perfeito ($G_\nu = 2g_0K_\nu$), isolante perfeito ($G_\nu = 0$) e uma fase onde o sistema é condutor de carga ($G_\rho = 2g_0K_\rho$) e isolante de spin ($G_\sigma = 0$). Pontos fixos não triviais, porém instáveis, foram encontrados em segunda ordem de teoria de perturbações.

Conclusões e Direções Futuras

Neste trabalho, estudamos as propriedades físicas de sistemas unidimensionais de elétrons fortemente correlacionados não homogêneos.

Mostramos que as propriedades de uma superrede de líquidos de Luttinger são uma mistura das propriedades dos líquidos constituintes dependendo da proporção espacial em que estejam (ℓ). Também encontramos que o peso de Drude não muda de forma por causa da estrutura da superrede, e é dado por $\sigma(0, \omega) = 2g_0 c_\rho K_\rho^* \delta(\omega)$. As leis de escala entre os expoentes nas funções de correlação não são alteradas pela estrutura da superrede, embora novos expoentes efetivos apareçam.

Estudar o efeito da estrutura de superrede sobre as propriedades de transporte de um líquido de Luttinger, quando se consideram os termos irrelevantes é um problema interessante que fica em aberto.

Estudamos as superredes de Hubbard unidimensionais e encontramos que o diagrama de fases para o estado fundamental apresenta várias fases metálicas e isolantes, as últimas sem gap (compressíveis). A topologia dos diagramas de fase é independente do parâmetro ℓ . As superredes de Hubbard unidimensionais têm gaps nas densidades $n = 1$ e $n_c = (2 + \ell)/(1 + \ell)$, dependendo da realização. As propriedades de baixa energia podem ser descritas

em termos do modelo de superredes de líquidos de Luttinger. Como no caso homogêneo, só três parâmetros determinam toda a física em baixas energias: c_ν ($\nu = \rho, \sigma$) e K_ρ^* .

Para superredes de spins encontramos um perfil de magnetização não homogêneo como consequência da dependência espacial das propriedades do sistema. Também encontramos platôs de magnetização que dependem do comprimento relativo das camadas ℓ e com magnetização $M_s = 1/(1 + \ell)$, se uma ou as duas cadeias de spin tem parâmetro de anisotropia maior que 1. As propriedades de baixa energia são descritas em termos de uma superrede de líquidos de Luttinger.

Estudos adicionais podem ser feitos sobre as superredes de spins, para complementar o realizado aqui, usando métodos numéricos como Grupo de Renormalização de Matriz Densidade (GRMD)[72].

O modelo de Wolff contínuo até primeira ordem em teoria de perturbações apresenta três fases: condutor perfeito ($G_\nu = 2g_0K_\nu$), isolante perfeito ($G_\nu = 0$) e uma fase onde o sistema é condutor de carga ($G_\rho = 2g_0K_\rho$) e isolante de spin ($G_\sigma = 0$). Pontos fixos não triviais instáveis foram encontrados em segunda ordem de teoria de perturbações.

Um outro problema interessante, que é deixado em aberto, é o cálculo das propriedades de transporte de um sistema com duas ou uma rede de impurezas no líquido de Luttinger.

Bibliografia

- [1] J. G. Bednorz e K. A. Müller, Z. Phys. B **64**,189(1986); M. B. Maple, cond-mat/9802202.
- [2] P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **64**,1839(1990) e Phys. Rev. Lett. **65**,2306 (1990).
- [3] M. Gurvitch e A. T. Fiory, Phys. Rev. Lett. **59**,1337 (1987).
- [4] L. D. Landau, Sov. Phys.-JETP **3**,920 (1956),**5**,101(1957) e **8**, 70 (1959).
- [5] J. Voit, Rep. Prog. Phys. **57**, 977 (1994).
- [6] F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).
- [7] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).
- [8] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [9] T. Giamarchi and H. J. Schulz,Phys. Rev. B **37**, 325 (1988).
- [10] W. Apel and T. M. Rice,Phys. Rev. B **26**, 7063 (1982).
- [11] C. L. Kane and M. P. A. Fisher,Phys. Rev. B **46**,1220 (1992);A. Furusaki and N. Nagaosa,Phys. Rev. B **47**,4631 (1993).

- [12] M. Fabrizio and A. O. Gogolin, Phys. Rev. B **51**, 17827 (1995).
- [13] J. Voit, Y. Wang, M. Grioni, cond-mat/9912392.
- [14] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 7268 (1992).
- [15] K. Moon *et al.*, , Phys. Rev. Lett. **71**, 4381 (1993).
- [16] F. P. Milliken, C. P. Umbach, and R. A. Webb, Solid State Commun. **97**, 309 (1996).
- [17] R. Egger, A. Bachtold, M. S. Fuhrer, M. Bockrath, D. H. Cobden, and P. L. McEuen, cond-mat/0008008.
- [18] D. W. Wang, A. J. Millis and S. Das Sarma, cond-mat/0004146.
- [19] I. Safi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **59**, 3040 (1999).
- [20] D. L. Maslov and P. M. Goldbart, Phys. Rev. B **57**, 9879 (1998).
- [21] S. Tarucha *et al.*, Solid State Commun. **94**, 413(1995).
- [22] I. Safi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **52**, R17040 (1995).
- [23] D. L. Maslov and M. Stone , Phys. Rev. B **52**, R5539 (1995).
- [24] V. V. Ponomarenko, Phys. Rev. B **52**, R8666 (1995).
- [25] Y. Oreg and A. M. Finkel'stein, Phys. Rev. Lett. **74**, 3668(1993).
- [26] D. B. Chklovskii and B. Halperin, Phys. Rev. B, **57**, 3781 (1998).
- [27] C. de C. Chamon and E. Fradkin, Phys. Rev. B **56**, 2012 (1997).

- [28] M. N. Baibich and R. B. Muniz, Braz. Journ. Phys. **22**, 253 (1992); B. Heinrich and J. F. Cochran, Adv. Phys. **42**, 523 (1993); K. B. Hathaway, in *Ultrathin Magnetic Structures II*, edited by B. Heinrich and J. A. C. Bland, (Springer, Berlin, 1994).
- [29] T. Paiva and R. R. dos Santos, Phys. Rev. Lett. **76**, 1126 (1996).
- [30] T. Paiva and R. R. dos Santos, Phys. Rev. B, **58**, 9607 (1998).
- [31] D. C. Cabra, A. De Martino, A. Honecker, P. Pujol and P. Simon, Phys. Lett. A **268**, 418 (2000)
- [32] J. Silva-Valencia, E. Miranda e Raimundo R. dos Santos, J. Phys.:Condens. Matter **13** L619 (2001).
- [33] J. Kondo, Prog. Theoret. Phys. **32**, 37 (1964).
- [34] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **68**, 1220(1992), Phys. Rev. B **46**, 15233 (1992).
- [35] A. Furusaki, N. Nagaosa, Phys. Rev. B **47**, 4631 (1993).
- [36] P. A. Wolff, Phys. Rev. **124**, 1030 (1961).
- [37] P. Nozières, *Interacting Fermi Systems*, W. A. Benjamin Inc, New York (1964).
- [38] E. A. Jagla, K. Hallberg e C. A. Balseiro, Phys. Rev. B **47** 5849 (1993).
- [39] C. Kim *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** 4054 (1996).
- [40] V. E. Korepin e I. Roditi, cond-mat/0012266.

- [41] S. Mandelstam, Phys. Rev. D **11** 3026 (1975).
- [42] J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **276**, 238 (1963), e **277**, 237 (1964).
- [43] E. H. Lieb and F. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20**, 1445 (1968).
- [44] H. J. Schulz, Phys. Rev. Lett. **64**, 2831 (1990); H. J. Schulz, Int. Jour. Mod. Phys. B **5**, 57 (1991).
- [45] H. Frahm and V. E. Korepin, Phys. Rev. **B 42**, 10553 (1990).
- [46] N. Kawakami and S. K. Yang, Phys. Lett. **A 148**, 359 (1990).
- [47] P. Jordan and E. Wigner, Z. Phys. **47**, 631 (1928).
- [48] C. N. Yang and C. P. Yang, Phys. Rev. **150** 321, 327 (1966).
- [49] D. C. Cabra, A. Honecker e P. Pujol, Phys. Rev. B **58**, 6241 (1998).
- [50] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **45** 1358 (1980).
- [51] E. W. Fenton, Phys. Rev. B, **46**, 3754 (1992).
- [52] S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **69** Suppl. A, (2000).
- [53] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **50**, 1153(1983).
- [54] T. Ziman and H. J. Schulz, Phys. Rev. Lett. **59**, 140(1987); M. Takahashi, *ibid.* **62**, 2313(1989); K. Hallberg, X. Q. G. Wang, P. Horsch, and A. Moreo, Phys. Rev. Lett. **76**, 4955(1996).
- [55] K. Hida, J. Phys. Soc. Jpn. **63**, 2359(1994).

- [56] K. Okamoto, Solid State Commun. **98**,245 (1996).
- [57] M. Oshikawa, M. Yamanaka and I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **78**, 1984(1997).
- [58] Y. Ajiro, T. Asano, T. Inami, H. Aruga-Katori, T. Goto, J. Phys. Soc. Jpn. **63**,859(1994).
- [59] D. D. Swank, C. P. Landee, R. D. Willet, J. Magnetism and Magnetic Materials **15**,319 (1980).
- [60] W. Chen, K. Hida and H. Nakano, J. Phys. Soc. Jpn. **68**,625 (1999).
- [61] W. Chen, K. Hida and B. C. Sanctuary, cond-mat/0009481.
- [62] D. C. Cabra, M. D. Grynberg, Phys. Rev. **B59**,119 (1999).
- [63] A. Honecker, Phys. Rev. **B59**,6790 (1999).
- [64] W. Shiramura, K. Takatsu, B. Kurniawan, H. Tanaka, H. Uekusa, Y. Ohashi, K. Takizawa, H. Mitamura, T. Goto, J. Phys. Soc. Jpn. **67**,1548 (1998).
- [65] M. Arlego, D. C. Cabra and M. D. Grynberg, cond-mat/0104082.
- [66] G. I. Dzhasharidze and A. A. Nersisyan, JETP Lett. **27**, 334 (1978).
- [67] V. L. Pokrovsky and A. L. Talapov, Phys. Rev. Lett. **42**, 65 (1979).
- [68] H. J. Schulz, Phys. Rev. **B22**, 5274 (1980).
- [69] I. Affleck, in *Fields, strings and critical phenomena*, edited by E. Brézin and J. Zinn-Justin (North- Holland, Amsterdam, 1988), pp. 563- 640.

- [70] A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B **12**, 3908 (1975).
- [71] H. J. Schulz, Phys. Rev. **B34**, 6372 (1986).
- [72] S. R. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 2863 (1992); Phys. Rev. B **48**, 10345 (1993).
- [73] A. O. Gogolin, A. A. Nersesyan and A. M. Tsvelik, *Bosonization and Strongly Correlated Systems*, Cambridge University Press (1998).
- [74] T. Paiva, Tese de Doutorado, UFF (1999).

Apêndice A

Operadores das funções de Correlação

Neste apêndice são dadas as expressões dos operadores usados no calculo das funções de correlação densidade-densidade , spin-spin e as supercondutoras dos capítulos (1) e (2).

- Ondas de densidade de carga ($2k_F$)

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{CDW}(x) &= \sum_{r,s} \Psi_{r,s}^\dagger(x) \Psi_{-r,s}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{r,s} U_{r,s} U_{-r,s}^\dagger \exp(-2ir k_F x + \sqrt{2}ir [\Phi_\rho(x) + s\Phi_\sigma(x)]) \\ &\approx \frac{2}{\pi\alpha} \cos(2k_F x) \cos[\sqrt{2}\Phi_\rho(x)] \cos[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)].\end{aligned}\tag{A.1}$$

- Ondas de densidade de carga ($4k_F$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_{4K_F-CDW}(x) &= \sum_{r,s} \Psi_{r,s}^\dagger(x) \Psi_{r,-s}^\dagger(x) \Psi_{-r,-s}(x) \Psi_{-r,s}(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi\alpha)^2} \sum_{r,s} U_{r,s} U_{r,-s} U_{-r,-s}^\dagger U_{-r,s}^\dagger \exp(-4irk_F x + \sqrt{8}ir\Phi_\rho(x)) \\
&\approx \frac{1}{(\pi\alpha)^2} \cos(4k_F x) \cos[\sqrt{8}\Phi_\rho(x)]. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

- Ondas de densidade de spin ($2k_F$)

– Componente x

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_{SDW,x}(x) &= \sum_{r,s} \Psi_{r,s}^\dagger(x) \Psi_{-r,-s}(x) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{r,s} U_{r,s} U_{-r,-s}^\dagger \exp(-2irk_F x + \sqrt{2}ir[\Phi_\rho(x) - s\Theta_\sigma(x)]) \\
&\approx \frac{-2}{\pi\alpha} \cos(2k_F x) \sin[\sqrt{2}\Phi_\rho(x)] \cos[\sqrt{2}\Theta_\sigma(x)]. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

– Componente y

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_{SDW,y}(x) &= -i \sum_{r,s} s \Psi_{r,s}^\dagger(x) \Psi_{-r,-s}(x) \\
&= \frac{-i}{2\pi\alpha} \sum_{r,s} s U_{r,s} U_{-r,-s}^\dagger \exp(-2irk_F x + \sqrt{2}ir[\Phi_\rho(x) - s\Theta_\sigma(x)]) \\
&\approx \frac{-2}{2\pi\alpha} \cos(2k_F x) \sin[\sqrt{2}\Phi_\rho(x)] \sin[\sqrt{2}\Theta_\sigma(x)]. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

– Componente z

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_{SDW,z}(x) &= -i \sum_{r,s} s \Psi_{r,s}^\dagger(x) \Psi_{-r,s}(x) \\
&= \frac{-i}{2\pi\alpha} \sum_{r,s} s U_{r,s} U_{-r,s}^\dagger \exp(-2irk_F x + \sqrt{2}ir[\Phi_\rho(x) + s\Theta_\sigma(x)]) \\
&\approx \frac{-2}{2\pi\alpha} \cos(2k_F x) \sin[\sqrt{2}\Phi_\rho(x)] \sin[\sqrt{2}\Theta_\sigma(x)]. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

- Supercondutoras

- Singlete

$$\begin{aligned}
 \mathbf{O}_{SS}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s s \Psi_{-,s}(x) \Psi_{+,-s}(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}2\pi\alpha} \sum_s s U_{-,s}^\dagger U_{+,-s}^\dagger \exp(\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x) + s\Phi_\sigma(x)]) \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{2}\pi\alpha} \exp[\sqrt{2}i\Theta_\rho(x)] \cos[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)]. \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

- Tripleto com $S = +1$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{O}_{TS+1}(x) &= \Psi_{-, \uparrow}(x) \Psi_{+, \uparrow}(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha} U_{-, \uparrow}^\dagger U_{+, \uparrow}^\dagger \exp(\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x) + \Theta_\sigma(x)]) \\
 &\approx \frac{1}{2\pi\alpha} \exp(\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x) + \Theta_\sigma(x)]). \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

- Tripleto com $S = 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{O}_{TS,0}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s \Psi_{-,s}(x) \Psi_{+,-s}(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}2\pi\alpha} \sum_s U_{-,s}^\dagger U_{+,-s}^\dagger \exp(\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x) + s\Phi_\sigma(x)]) \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{2}\pi\alpha} \exp[\sqrt{2}i\Theta_\rho(x)] \sin[\sqrt{2}\Phi_\sigma(x)]. \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

- Tripleto com $S = -1$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{O}_{TS,-1}(x) &= \Psi_{-, \downarrow}(x) \Psi_{+, \downarrow}(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha} U_{-, \downarrow}^\dagger U_{+, \downarrow}^\dagger \exp(\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x) - \Theta_\sigma(x)]) \\
 &\approx \frac{1}{2\pi\alpha} \exp(\sqrt{2}i[\Theta_\rho(x) - \Theta_\sigma(x)]). \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Apêndice B

Constantes das autofunções

Os campos bosônicos para uma superrede de líquidos de Luttinger são

$$\begin{aligned}\Phi_\nu(x, t) = & -i \sum_m \text{sgn}(m) \frac{\phi_{m,\nu}(x)}{2\sqrt{\omega_{m,\nu}}} [b_{-m,\nu} e^{i\omega_{m,\nu} t} + b_{m,\nu}^\dagger e^{-i\omega_{m,\nu} t}] \\ & - \phi_{0,\nu}(x) + \gamma_{\lambda,\nu} t\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

e

$$\begin{aligned}\Theta_\nu(x, t) = & -i \sum_m \frac{\theta_{m,\nu}(x)}{2\sqrt{\omega_{m,\nu}}} [b_{-m,\nu} e^{i\omega_{m,\nu} t} - b_{m,\nu}^\dagger e^{-i\omega_{m,\nu} t}] \\ & + \theta_{0,\nu}(x) - \tau_{\lambda,\nu} t,\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

onde $\phi_{m,\nu}(x)$, $\theta_{m,\mu}(x)$ são autofunções com autovalores $\omega_{m,\nu}$ de um modelo tipo Kronig-Penney.

As autofunções podem ser escritas

$$\phi_{m,\nu}(x) = \begin{cases} A_{m,\nu} e^{-i\alpha_{m,\nu} x} + B_{m,\nu} e^{i\alpha_{m,\nu} x} & \text{se } 0 \leq x \leq L_1, \\ C_{m,\nu} e^{-i\beta_{m,\nu} x} + D_{m,\nu} e^{i\beta_{m,\nu} x} & \text{se } -L_2 \leq x \leq 0, \\ e^{-ip(L_1+L_2)} \{ C_{m,\nu} e^{-i\beta_{m,\nu}(x-L_1-L_2)} + D_{m,\nu} e^{i\beta_{m,\nu}(x-L_1-L_2)} \} & \text{se } L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2), \end{cases}$$

onde $\alpha_{m,\nu} = \frac{\omega_{m,\nu}}{u_{1,\nu}}$, $\beta_{m,\nu} = \frac{\omega_{m,\nu}}{u_{2,\nu}}$.

A expressão para os autovalores $\omega_{p,\nu}$ já foi dada no capítulo (2). Agora serão dadas as expressões gerais para os coeficientes nas autofunções.

$$B_{p,\nu} = -\frac{\zeta_\nu e^{-i\alpha_{p,\nu}L_1} - e^{-ip(L_1+L_2)} \left(\zeta_\nu \cos(\beta_{p,\nu}L_2) + i \sin(\beta_{p,\nu}L_2) \right)}{\zeta_\nu e^{i\alpha_{p,\nu}L_1} - e^{-ip(L_1+L_2)} \left(\zeta_\nu \cos(\beta_{p,\nu}L_2) - i \sin(\beta_{p,\nu}L_2) \right)} A_{p,\nu}, \quad (\text{B.4})$$

$$C_{p,\nu} = \frac{\cos(\alpha_{p,\nu}L_1) + i\zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu}L_1) - e^{-ip(L_1+L_2)} e^{-i\beta_{p,\nu}L_2}}{\zeta_\nu e^{i\alpha_{p,\nu}L_1} - e^{-ip(L_1+L_2)} \left(\zeta_\nu \cos(\beta_{p,\nu}L_2) - i \sin(\beta_{p,\nu}L_2) \right)} A_{p,\nu}, \quad (\text{B.5})$$

$$D_{p,\nu} = \frac{-\cos(\alpha_{p,\nu}L_1) + i\zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu}L_1) + e^{-ip(L_1+L_2)} e^{i\beta_{p,\nu}L_2}}{\zeta_\nu e^{i\alpha_{p,\nu}L_1} - e^{-ip(L_1+L_2)} \left(\zeta_\nu \cos(\beta_{p,\nu}L_2) - i \sin(\beta_{p,\nu}L_2) \right)} A_{p,\nu}, \quad (\text{B.6})$$

onde $\zeta_\nu = \frac{K_{1,\nu}}{K_{2,\nu}}$; e

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{L |A_{p,\nu}|^2} = & \frac{1}{(L_1 + L_2)Q_6} \left\{ \frac{2L_2}{u_{2,\nu}K_{2,\nu}} Q_0 + \frac{1 - \cos(2\beta_{p,\nu}L_2)}{2\beta_{p,\nu}L_2} Q_1 + \frac{\sin(2\beta_{p,\nu}L_2)}{2\beta_{p,\nu}L_2} Q_2 \right. \\ & \left. + \frac{2L_1}{u_{1,\nu}K_{1,\nu}} Q_3 + \frac{\cos(2\alpha_{p,\nu}L_1) - 1}{2\alpha_{p,\nu}L_1} Q_4 - \frac{\sin(2\alpha_{p,\nu}L_1)}{2\alpha_{p,\nu}L_1} Q_5 \right\}, \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Q_0 = & 1 + \cos^2(\alpha_{p,\nu}L_1) + \zeta_\nu^2 \sin^2(\alpha_{p,\nu}L_1) \\ & - 2 \left[\cos(\alpha_{p,\nu}L_1) \cos(\beta_{p,\nu}L_2) - \zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu}L_1) \sin(\beta_{p,\nu}L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 = & \zeta_\nu \sin(2\alpha_{p,\nu}L_1) - \sin(2\beta_{p,\nu}L_2) \\ & + 2 \left[\cos(\alpha_{p,\nu}L_1) \sin(\beta_{p,\nu}L_2) - \zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu}L_1) \cos(\beta_{p,\nu}L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & -\cos^2(\alpha_{p,\nu}L_1) + \zeta_\nu^2 \sin^2(\alpha_{p,\nu}L_1) - \cos^2(\beta_{p,\nu}L_2) + \sin^2(\beta_{p,\nu}L_2) \\ & + 2 \left[\cos(\alpha_{p,\nu}L_1) \cos(\beta_{p,\nu}L_2) + \zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu}L_1) \sin(\beta_{p,\nu}L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)), \end{aligned}$$

$$Q_3 = \zeta_\nu^2 + \zeta_\nu^2 \cos^2(\beta_{p,\nu} L_2) + \sin^2(\beta_{p,\nu} L_2) \\ - 2 \left[\zeta_\nu^2 \cos(\alpha_{p,\nu} L_1) \cos(\beta_{p,\nu} L_2) - \zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu} L_1) \sin(\beta_{p,\nu} L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)),$$

$$Q_4 = \zeta_\nu^2 \sin(2\alpha_{p,\nu} L_1) - \zeta_\nu \sin(2\beta_{p,\nu} L_2) \\ + 2 \left[\zeta_\nu \cos(\alpha_{p,\nu} L_1) \sin(\beta_{p,\nu} L_2) - \zeta_\nu^2 \sin(\alpha_{p,\nu} L_1) \cos(\beta_{p,\nu} L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)),$$

$$Q_5 = \zeta_\nu^2 \cos(2\alpha_{p,\nu} L_1) + \zeta_\nu^2 \cos^2(\beta_{p,\nu} L_2) - \sin^2(\beta_{p,\nu} L_2) \\ - 2 \left[\zeta_\nu^2 \cos(\alpha_{p,\nu} L_1) \cos(\beta_{p,\nu} L_2) + \zeta_\nu \sin(\alpha_{p,\nu} L_1) \sin(\beta_{p,\nu} L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)),$$

$$Q_6 = \zeta_\nu^2 + \zeta_\nu^2 \cos^2(\beta_{p,\nu} L_2) + \sin^2(\beta_{p,\nu} L_2) \\ - 2\zeta_\nu \left[\zeta_\nu \cos(\alpha_{p,\nu} L_1) \cos(\beta_{p,\nu} L_2) - \sin(\alpha_{p,\nu} L_1) \sin(\beta_{p,\nu} L_2) \right] \cos(p(L_1 + L_2)) \\ + 2\zeta_\nu \left[\zeta_\nu \cos(\beta_{p,\nu} L_2) \sin(\alpha_{p,\nu} L_1) + \sin(\beta_{p,\nu} L_2) \cos(\alpha_{p,\nu} L_1) \right] \sin(p(L_1 + L_2)).$$

Para $p \ll \pi/(L_1 + L_2)$, os coeficientes são independentes de p , ou seja,

$$B_\nu = \frac{\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} - \zeta_\nu (L_1 + L_2)}{\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} + \zeta_\nu (L_1 + L_2)} A_\nu, \quad (\text{B.8})$$

$$C_\nu = \frac{\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} + (L_1 + L_2)}{\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} + \zeta_\nu (L_1 + L_2)} A_\nu, \quad (\text{B.9})$$

$$D_\nu = \frac{\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} - (L_1 + L_2)}{\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} + \zeta_\nu (L_1 + L_2)} A_\nu \quad (\text{B.10})$$

e

$$\frac{L |A_{p,\nu}|^2}{2\pi} = \frac{L_1 + L_2}{4} \frac{\left(\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} + \zeta_\nu (L_1 + L_2) \right)^2}{\left(\frac{L_2}{u_{2,\nu} K_{2,\nu}} + \frac{L_1}{u_{1,\nu} K_{1,\nu}} \right) \left(\frac{c_\nu L_2}{u_{2,\nu}} + \zeta_\nu \frac{c_\nu L_1}{u_{1,\nu}} \right)^2}. \quad (\text{B.11})$$

Se os dois líquidos de Luttinger são iguais, ou seja $L_2 = L_1 = L$, $u_{\lambda,\nu} = u_\nu$ e $K_{\lambda,\nu} = K_\nu$ nós temos

$$B_{p,\nu} = D_{p,\nu} = 0, \quad A_{p,\nu} = C_{p,\nu}, \quad (\text{B.12})$$

com

$$|A_{p,\nu}|^2 = \frac{2\pi u_\nu K_\nu}{L}. \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

Simetria partícula-buraco

Aqui, vamos examinar o comportamento do modelo de Hubbard homogêneo e das superredes de Hubbard sob uma transformação partícula-buraco completa. Esta transformação leva elétrons com uma dada polarização em buracos com a mesma polarização

$$c_{j\sigma} \rightarrow \tilde{c}_{j\sigma}^\dagger = (-1)^j c_{j\sigma}, \quad (\text{C.1})$$

de tal forma que

$$n_{j\sigma} \rightarrow 1 - \tilde{n}_{j\sigma}. \quad (\text{C.2})$$

A versão grand-canônica da Hamiltoniana de Hubbard é

$$H = -t \sum_{i,\sigma} (c_{i,\sigma}^\dagger c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^\dagger c_{i,\sigma}) + U \sum_i n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} - \mu \sum_{i,\sigma} n_{i,\sigma}. \quad (\text{C.3})$$

Sob a transformação partícula-buraco, Eqs.(C.1)-(C.2), a Hamiltoniana

do modelo de Hubbard fica

$$\begin{aligned}\tilde{H} = & -t \sum_{i,\sigma} (\tilde{c}_{i,\sigma}^\dagger \tilde{c}_{i+1,\sigma} + \tilde{c}_{i+1,\sigma}^\dagger \tilde{c}_{i,\sigma}) + U \sum_i \tilde{n}_{i,\uparrow} \tilde{n}_{i,\downarrow} \\ & -(U - \mu) \sum_{i,\sigma} \tilde{n}_{i,\sigma} + (U - 2\mu) N_s.\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

onde N_s é o número de sítios.

Da Hamiltoniana (C.4), vemos que o comportamento dos buracos em densidades $2 - n$ é obtido do comportamento das partículas em n por meio da correspondência $\mu \rightarrow \tilde{\mu} = U - \mu$. No caso em que $\tilde{\mu} = \mu = U/2$ as Hamiltonianas (C.3) e (C.4) são iguais e o sistema está em semi-preenchimento.

Agora vamos considerar as superredes de Hubbard, que têm uma Hamiltoniana grand-canônica dada por

$$H_{SHU} = - \sum_{i,\sigma} t_i (c_{i\sigma}^\dagger c_{i+1\sigma} + H.c.) + \sum_i U_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}. \quad (\text{C.5})$$

Sob a transformação partícula-buraco, Eqs.(C.1)-(C.2), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{SHU} = & - \sum_{i,\sigma} t_i (\tilde{c}_{i,\sigma}^\dagger \tilde{c}_{i+1,\sigma} + \tilde{c}_{i+1,\sigma}^\dagger \tilde{c}_{i,\sigma}) + \sum_i U_i \tilde{n}_{i,\uparrow} \tilde{n}_{i,\downarrow} \\ & - \sum_{i,\sigma} (U_i - \mu) \tilde{n}_{i,\sigma} + \sum_i (U_i - 2\mu).\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

De fato, a transformação partícula-buraco, mapeia um sistema com potencial químico uniforme em um onde $\tilde{\mu}$ é dependente da posição, perdendo-se assim a simetria partícula buraco.

Concluindo, vimos como a presença das correlações dependentes da posição faz com que o sistema perca algumas das simetrias presentes no sistema homogêneo, tais como a simetria partícula-buraco[29, 74].

Apêndice D

Bosonização da superrede de Hubbard

Neste apêndice, mostraremos como, para baixas energias, os modelos de Hubbard homogêneo e não homogêneo podem ser mapeados nos modelos de líquido de Luttinger homogêneo e não homogêneo, respectivamente.

$$H = -t \sum_{j,\sigma} (\Psi_{j,\sigma}^\dagger \Psi_{j+1,\sigma} + h.c.) + U \sum_j n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} - \mu \sum_{j,\sigma} \Psi_{j,\sigma}^\dagger \Psi_{j,\sigma}. \quad (\text{D.1})$$

Se consideramos só os modos de *baixa energia* próximos à superfície de Fermi, podemos escrever

$$\Psi_{j,\sigma} \approx e^{-ik_F j a} \Psi_{-,j,\sigma} + e^{ik_F j a} \Psi_{+,j,\sigma}, \quad (\text{D.2})$$

onde a é o parâmetro de rede e $+$ ($-$) denota férmions que se movimentam para a direita (esquerda).

Sem considerar as interações locais temos

$$\begin{aligned}
H_0 &= -t \sum_{j,\sigma} (\Psi_{j,\sigma}^\dagger \Psi_{j+1,\sigma} + h.c.) - \mu \sum_{j,\sigma} \Psi_{j,\sigma}^\dagger \Psi_{j,\sigma} \\
&\approx -t \sum_{j,\sigma} \left\{ \left(e^{-ik_F j a} \Psi_{-,j,\sigma}^\dagger \Psi_{-,j+1,\sigma} + e^{ik_F j a} \Psi_{+,j,\sigma}^\dagger \Psi_{+,j+1,\sigma} \right) + h.c. \right\} \\
&\quad + \mu \sum_{j,\sigma} \left(\Psi_{-,j,\sigma}^\dagger \Psi_{-,j,\sigma} + \Psi_{+,j,\sigma}^\dagger \Psi_{+,j,\sigma} \right). \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Mas $\Psi_{j+1,\sigma} \equiv \Psi_\sigma(j+1) \approx \Psi_\sigma(j) + a \partial_x \Psi_\sigma(j) + O(a^2)$, logo

$$H_0 = v_F \sum_\sigma \int dx \left[\Psi_{-, \sigma}^\dagger(x) \partial_x \Psi_{-, \sigma}(x) - \Psi_{+, \sigma}^\dagger(x) \partial_x \Psi_{+, \sigma}(x) \right], \tag{D.4}$$

onde $v_F = 2at \sin(k_F a)$ e usamos o fato de que $\sum_j a = \int dx$.

Mas os operadores de campo fermiônicos podem ser escritos em termos dos campo bosônicos

$$\begin{aligned}
\Psi_{-, \sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} U_{-, \sigma}^\dagger e^{2i\sqrt{\pi}\Phi_{-, \sigma}} \\
\Psi_{+, \sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} U_{+, \sigma}^\dagger e^{-2i\sqrt{\pi}\Phi_{+, \sigma}}. \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Assim

$$H_0 = \frac{v_F}{2\pi} \sum_{\nu=\rho,\sigma} \int dx \left[(\partial_x \Theta_\nu)^2 + (\partial_x \Phi_\nu)^2 \right] \tag{D.6}$$

onde $\Phi_{\uparrow,\downarrow} = (\Phi_\rho \pm \Phi_\sigma)/\sqrt{2}$ e $\Phi_\uparrow = \Phi_{-\uparrow} + \Phi_{+\uparrow}$.

Agora, consideremos o termo de interação local

$$H_{int} = U \sum_j n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} = U \sum_j : n_{j,\uparrow} :: n_{j,\downarrow} :, \tag{D.7}$$

onde $: \dots :$ indica ordenamento normal. Usando (D.2) obtemos

$$\begin{aligned}
H_{int} &= U \sum_j \left[(J_{+,j,\uparrow} + J_{-,j,\uparrow})(J_{+,j,\uparrow} + J_{-,j,\uparrow}) \right. \\
&\quad + (\Psi_{+,j,\uparrow}^\dagger \Psi_{-,j,\uparrow} \Psi_{-,j,\downarrow}^\dagger \Psi_{+,j,\downarrow} + h.c.) \\
&\quad \left. + (e^{4ik_F j a} \Psi_{-,j,\uparrow}^\dagger \Psi_{+,j,\uparrow} \Psi_{-,j,\downarrow}^\dagger \Psi_{+,j,\downarrow} + h.c.) \right], \tag{D.8}
\end{aligned}$$

com $J_{\pm,j,\sigma} =: \Psi_{\pm,j,\sigma}^\dagger \Psi_{\pm,j,\sigma} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \Phi_{\pm,\sigma}$. Então

$$\begin{aligned} H_{int} \approx & Ua \int dx \frac{1}{\pi} (\partial_x \Phi_\uparrow) (\partial_x \Phi_\downarrow) \\ & + Ua \int dx \left[\frac{1}{(2\pi\alpha)^2} e^{2i\sqrt{\pi}(\Phi_\uparrow - \Phi_\downarrow)} + h.c. \right] \\ & + Ua \int dx \left[\frac{e^{4ik_F x}}{(2\pi\alpha)^2} e^{2i\sqrt{\pi}(\Phi_\uparrow + \Phi_\downarrow)} + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (D.9)$$

Pasando a variáveis de carga (ρ) e spin (σ) temos

$$\begin{aligned} H_{int} \approx & Ua \int \frac{dx}{\pi} \left[(\partial_x \Phi_\rho)^2 + (\partial_x \Phi_\sigma)^2 \right] + Ua \int dx \frac{1}{2(\pi\alpha)^2} \cos(\sqrt{8\pi}\Phi_\sigma) \\ & + Ua \int dx \frac{1}{2(\pi\alpha)^2} \cos(4k_F x + \sqrt{8\pi}\Phi_\rho). \end{aligned} \quad (D.10)$$

Os dois últimos termos correspondem a espalhamentos tipo “backward” e Umklapp.

Segue que a Hamiltoniana de baixas energias do modelo de Hubbard é

$$\begin{aligned} H = & \frac{v_F a}{2\pi} \int dx \left\{ (\partial_x \Theta_\rho)^2 + \left[1 + \frac{U}{\pi v_F} \right] (\partial_x \Phi_\rho)^2 \right\} \\ & + \frac{v_F a}{2\pi} \int dx \left\{ (\partial_x \Theta_\sigma)^2 + \left[1 - \frac{U}{\pi v_F} \right] (\partial_x \Phi_\sigma)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (D.11)$$

Esta é a Hamiltoniana de um líquido de Luttinger. Assim provamos que o modelo de Hubbard para baixas energias pode ser descrito em termos de um líquido de Luttinger.

Agora, consideremos um modelo de Hubbard não homogêneo, onde o acoplamento local varia com a posição, ou seja, consideremos a seguinte Hamiltoniana

$$H_{SHU} = -t \sum_{j,\sigma} (\Psi_{j,\sigma}^\dagger \Psi_{j+1,\sigma} + h.c.) + \sum_j U_j n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} - \mu \sum_{j,\sigma} \Psi_{j,\sigma}^\dagger \Psi_{j,\sigma}. \quad (D.12)$$

Para baixas energias é possível ver que a parte livre de interação não muda e que a interação toma a seguinte forma

$$H_{SHU-int} \approx a \int \frac{dx}{\pi} U(x) \left[(\partial_x \Phi_\rho)^2 + (\partial_x \Phi_\sigma)^2 \right]. \quad (D.13)$$

Assim, para baixas energias o modelo de Hubbard não homogêneo é descrito pela seguinte Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H = & \frac{v_F a}{2\pi} \int dx \left\{ (\partial_x \Theta_\rho)^2 + \left[1 + \frac{U(x)}{\pi v_F} \right] (\partial_x \Phi_\rho)^2 \right\} \\ & + \frac{v_F a}{2\pi} \int dx \left\{ (\partial_x \Theta_\sigma)^2 + \left[1 - \frac{U(x)}{\pi v_F} \right] (\partial_x \Phi_\sigma)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (D.14)$$

Como pode-se ver esta Hamiltoniana corresponde a uma superrede de líquidos de Luttinger (Eq.(2.1)).

Provamos que, assim como uma cadeia homogênea de Hubbard em baixas energias pode ser descrita em termos de um líquido de Luttinger, também uma superrede de Hubbard pode ser estudada em baixas energias partindo de uma superrede de líquidos de Luttinger.