

ONDAS NÃO-LINEARES EM MEIOS DISSIPATI-
TIVOS DESCRITAS PELA EQUAÇÃO DE
KORTEWEG-DE VRIES - BURGERS

por

Cesar Constantino

Orientador: Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin"
da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de
Mestre em Física.

Campinas - outubro de 1979

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Paulo Sakanaka, pela orientação e pelo apoio constante na realização deste trabalho.

Aos Profs. Drs. José Busnardo Neto, Ricardo Galvão, Shuko Aihara, Masanobu Niimura e Helmut Böckelmann, pelas discussões e sugestões.

Aos colegas de trabalho, pela cooperação e amizade.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos concedida para a realização deste trabalho.

À FINEP e CNPq pelo financiamento de projetos do Grupo de Física de Plasmas da Unicamp.

RESUMO

Estuda-se numericamente o efeito do termo dissipativo da equação de Korteweg-de Vries-Burgers sobre a evolução de um pulso quadrado e de um sôliton.

Para o pulso quadrado, o efeito de amortecimento é mais forte que o previsto por uma análise assintótica. Para tempo pequeno, todas as soluções são oscilatórias.

O sôliton com amortecimento se propaga com velocidade constante e igual à do sôliton ideal de mesma amplitude inicial. Observa-se distorsão não-linear e diminuição da amplitude durante a propagação. O quadrado da meia-largura do sôliton com amortecimento varia linearmente com o inverso de sua amplitude, como ocorre com o sôliton ideal, mas o sôliton com amortecimento é mais largo que o sôliton ideal de mesma amplitude.

ABSTRACT

The effect of the dissipative term of the Korteweg-de Vries Equation on the evolution of a square pulse and of a soliton is studied numerically.

For the square pulse, it is found that the dissipative effect is stronger than predicted by an asymptotic analysis. For small time, however, all the solutions are oscillatory.

The soliton with dissipation propagates with a constant velocity equal to that of the ideal soliton of the same initial amplitude. Nonlinear distortion and damping of amplitude are observed during the propagation. The squared half-width of the soliton varies linearly with the inverse of its amplitude, as in the non-dissipative case, but the width is greater than that of the ideal soliton of the same amplitude.

Í N D I C E

| | Página |
|------------------------------------|--------|
| I. INTRODUÇÃO | 1 |
| II. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO KdV-B | 4 |
| III. O ALGORITMO NUMÉRICO | 13 |
| IV. RESULTADOS | 40 |
| V. CONCLUSÃO E SUGESTÕES | 58 |
| BIBLIOGRAFIA | 60 |

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos a formação e propagação de ondas não-lineares em meios dispersivos e dissipativos, através de soluções numéricas da equação de Korteweg-de Vries - Burgers (KdV - B):

$$u_t + a u u_x - b u_{xx} + c u_{xxx} = 0$$

Esta equação é uma combinação da equação de Burgers

$$u_t + a u u_x - b u_{xx} = 0$$

com a equação de Korteweg-de Vries (KdV):

$$u_t + a u u_x + c u_{xxx} = 0$$

A equação KdV foi obtida pela primeira vez por Korteweg e De Vries (1) no estudo de ondas de água em um

canal raso, visando a explicar o fenômeno notável observado em 1834 de uma onda que se propagava por vários quilômetros sem alterar praticamente sua forma ou amplitude, à qual se deu o nome de onda solitária. Esta equação tem uma família monoparamétrica de soluções estacionárias exatas, que são pulsos localizados que se propagam com uma velocidade proporcional à sua amplitude e tem o produto da amplitude pelo quadrado da meia largura igual a uma constante.

Em 1965, Zabusky e Kruskal (2) estudando soluções numéricas da equação KdV, "redescobriram" as ondas solitárias, a que deram o nome de sólitons e estabeleceram algumas propriedades notáveis: embora um sóliton fosse reconhecido como solução exata apenas quando isolado, verificou-se que dois ou mais sólitons podem coexistir em estreita proximidade sem que cada um deles perca sua identidade; quando dois ou mais sólitons colidem, interagem não-linearmente e em seguida reaparecem intactos, preservando sua identidade original. A partir dessas descobertas, o soliton tem-se mostrado um conceito de fundamental importância para a evolução da física não-linear (3).

As equações KdV, de Burgers e KdV-B podem descrever ondas não-lineares em muitos sistemas físicos dispersivos e/ou dissipativos. Métodos gerais têm sido desenvolvidos (4, 5, 6) que permitem reduzir sistemas de equações não-lineares à equação KdV, de Burgers ou KdV - B, na aproximação de pequena amplitude e longo comprimento de onda.

Em particular, a equação KdV foi obtida para ondas em água rasa (7, 8), ondas magnetohidrodinâmicas num plasma não-colisional (8, 9), ondas em cristais anarmônicos (10) e ondas íon-acústicas num plasma de íons frios (11).

A equação KdV-B foi obtida para ondas de choque em plasma perpendiculares ao campo magnético (12, 13), ondas em tubos elásticos cheios de líquido (14) e ondas em água rasa com viscosidade (15). No capítulo II do presente trabalho, mostramos que o termo de amortecimento da equação KdV-B (segunda derivada) pode ser obtido para ondas íon-acústicas quando se considera um efeito pequeno de viscosidade na equação de momentum para os íons.

Como vemos, o estudo das equações KdV e KdV-B apresenta um interesse bastante geral. O objetivo central deste nosso trabalho é investigar o efeito do termo da segunda derivada da equação KdV - B. Para tanto, desenvolvemos um programa de computador para obter soluções numéricas. O algoritmo utilizado, que se baseia num método proposto por Sjöberg (16), é descrito no capítulo III. No capítulo IV apresentamos e discutimos os resultados e o capítulo V contém as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

II. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO KdV-B

Neste capítulo apresentamos a dedução da equação de Korteweg-de Vries - Burgers (KdV-B) para ondas íon-acústicas de pequena amplitude. Partimos das equações do modelo de dois fluidos e aplicamos o método de perturbação reductivo (refs. 4 e 5) para obter a equação KdV-B. Este procedimento foi utilizado por Washimi e Taniuti (ref. 16) para obter a equação de Korteweg-de Vries para ondas íon-acústicas não-lineares e dispersivas, sem amortecimento. Em nosso caso, incluímos um termo pequeno de viscosidade na equação de momentum para os íons e com isso obtemos o termo de amortecimento da equação KdV-B (segunda derivada).

Consideremos um plasma constituído por íons simples mente ionizados e quase frios e eletrons quentes isotérmicos, de massa desprezível. Nestas condições as equações de dois fluidos em uma dimensão são:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v) = 0 \quad (1)$$

$$m n_i \frac{\partial v}{\partial t} + m n_i v \frac{\partial v}{\partial x} = e n_i E + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$n_e e E = - k T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4 \pi e (n_i - n_e) \quad (4)$$

Nas equações (1) a (4), usamos a seguinte notação:

n_i = densidade de íons

n_e = densidade de eletrons

v = velocidade dos íons

m = massa do íon

e = carga elementar

E = campo elétrico

μ = coeficiente de viscosidade

k = constante de Boltzmann

T_e = temperatura dos eletrons

A equação (1) é a equação de continuidade para os íons.

(2) é a equação de conservação de momentum para os

íons. O termo $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ representa a viscosidade.

(3) é a equação de conservação de momentum para os eletrons, onde foi desprezada a massa dos eletrons. Estamos considerando que a força elétrica é balanceada pelo gradiente de pressão:

$$n_e eE = - \frac{\partial p_e}{\partial x}$$

e usamos a equação de estado

$$p_e = n_e k T_e$$

com T_e constante.

(4) é a equação de Poisson.

Agora normalizaremos as equações (1) a (4) em termos das seguintes quantidades:

Densidade: n_0 (densidade do plasma não perturbado).

Velocidade: $v_s = \left(\frac{k T_e}{m} \right)^{1/2}$ (velocidade acústica dos íons).

Comprimento: $\lambda_D = \left(\frac{k T_e}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2}$ (comprimento de Debye).

$$\text{Tempo: } t_o = \left(\frac{m}{4\pi n_o e^2} \right)^{1/2} \quad (\text{inverso da frequên}$$

cia de plasma dos íons).

$$\text{Campo elétrico: } E_o = \frac{k T_e / e}{\lambda_D} = (4\pi n_o k T_e)^{1/2}$$

$$\text{Viscosidade: } \mu_o = \frac{n_o k T_e \sqrt{m}}{(4\pi n_o e^2)} = n_o k T_e t_o$$

Com esta normalização, as equações (1) a (4) se tornam:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v) = 0 \quad (1')$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = E + \frac{\mu}{n_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2')$$

$$n_e E = - \frac{\partial n_e}{\partial x} \quad (3')$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = n_i - n_e \quad (4')$$

Nas equações (1') a (4') todas as quantidades são

adimensionais. Agora vamos aplicar ao sistema (1') a (4') a seguinte transformação de variáveis:

$$\begin{cases} \xi &= \epsilon^{1/2} (x - t) \\ \eta &= \epsilon^{3/2} t \end{cases}$$

onde ϵ é um parâmetro pequeno, da ordem da amplitude das perturbações. Portanto, estamos passando para um referencial que se move com velocidade unitária e estamos interessados em variações lentas nesse referencial. Vamos ainda considerar que o efeito de viscosidade seja pequeno: $\mu = \epsilon b$. Então as equações (1') a (4') se tornam:

$$-\frac{\partial n_i}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial n_i}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_i v) = 0 \quad (1'')$$

$$-\frac{\partial v}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial v}{\partial \eta} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} = \bar{E} + \frac{\epsilon b}{n_i} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad (2'')$$

$$n_e \bar{E} = - \frac{\partial n_e}{\partial \xi} \quad (3'')$$

$$\epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} = n_i - n_e \quad (4'')$$

onde $\bar{E} = \epsilon^{-1/2} E$

Agora vamos expandir todas as variáveis em séries de potências de ϵ :

$$n_i = 1 + \epsilon n_i^{(1)} + \epsilon^2 n_i^{(2)} + \dots$$

$$n_e = 1 + \epsilon n_e^{(1)} + \epsilon^2 n_e^{(2)} + \dots$$

$$v = \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + \dots$$

$$\bar{E} = \epsilon \bar{E}^{(1)} + \epsilon^2 \bar{E}^{(2)} + \dots$$

e escrever as equações (1'') a (4'') até 2ª ordem em ϵ :

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\epsilon n_i^{(1)} + \epsilon^2 n_i^{(2)} \right] + \epsilon^2 \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \eta} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + \epsilon^2 n_i^{(1)} v^{(1)} \right] = 0 \quad (1''') \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} \right] + \epsilon^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta} + \epsilon^2 v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = \\ & = \epsilon \bar{E}^{(1)} + \epsilon^2 \bar{E}^{(2)} + b \epsilon^2 \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2} \quad (2''') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \bar{E}^{(1)} + \epsilon^2 \left[\bar{E}^{(2)} + n_e^{(1)} \bar{E}^{(1)} \right] = \\ & = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\epsilon n_e^{(1)} + \epsilon^2 n_e^{(2)} \right] \quad (3''') \end{aligned}$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \xi} = \epsilon \left[n_i^{(1)} - n_e^{(1)} \right] + \epsilon^2 \left[n_i^{(2)} - n_e^{(2)} \right] \quad (4''')$$

Em 1^a ordem, obtemos:

$$\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} \quad (6)$$

$$E^{(1)} = - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} \quad (7)$$

$$n_i^{(1)} = n_e^{(1)} \quad (8)$$

$$\bar{E}^{(1)} = - \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \xi} \quad (9)$$

e em 2^a ordem obtemos:

$$= \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[v^{(2)} + n_i^{(1)} v^{(1)} \right] = 0 \quad (10)$$

$$= \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = \bar{E}^{(2)} + b \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2} \quad (11)$$

$$\bar{E}^{(2)} + n_e^{(1)} \bar{E}^{(1)} = - \frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial \xi} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{E}^{(1)}}{\partial \xi} = n_i^{(2)} - n_e^{(2)} \quad (13)$$

Integrando a equação (6) com a condição de contorno

$$n_i^{(1)}(\xi \rightarrow \infty) = v^{(1)}(\xi \rightarrow \infty)$$

obtemos $n_i^{(1)} = v^{(1)}$ (14)

Usando as relações (8) e (14) vamos eliminar $v^{(1)}$ e $n_e^{(1)}$ das equações (9) a (12) em favor de $n_i^{(1)}$. Obtemos en
tão

$$\bar{E}^{(1)} = - \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} \quad (15)$$

$$\frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2 n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (16)$$

$$- \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \eta} + n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = \bar{E}^{(2)} + b \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi^2} \quad (17)$$

$$\bar{E}^{(2)} + n_i^{(1)} \bar{E}^{(1)} = - \frac{\partial^2 n_e^{(2)}}{\partial \xi^2} \quad (18)$$

Usando (15) para eliminar $\bar{E}^{(1)}$ em (13) e (18) temos:

$$-\frac{\partial^2 n_i^{(1)}}{\partial \xi} = n_i^{(2)} - n_e^{(2)} \quad (19)$$

$$\bar{E}^{(2)} - n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial \xi} \quad (20)$$

Usando (19) para eliminar $n_e^{(2)}$ em (20) temos:

$$\bar{E}^{(2)} - n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial^3 n_i^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} \quad (21)$$

Agora somando (16), (17) e (21) obtemos:

$$2 \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \eta} + 2 n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} - b \frac{\partial^2 n_i^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 n_i^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0$$

que é a equação de Korteweg-de Vries Burgers. Assim acabamos de mostrar que a perturbação de 1ª ordem da densidade obedece a equação KdV-B. Em virtude da relação (14) a velocidade de 1ª ordem também segue a mesma equação.

III. O ALGORITMO NUMÉRICO

a. Descrição geral do algoritmo

Nesta secção se descreve o método de diferenças finitas utilizado para obter soluções numéricas da equação de Korteweg-de Vries Burgers (KdV - B). Este algoritmo se baseia num esquema implícito proposto por Sjöberg (ref. 16). e por ele utilizado para resolver a equação de Korteweg-de Vries, que é a equação KdV - B sem o termo de amortecimento (2^a derivada).

Nosso problema é resolver numericamente a equação KdV - B.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1)$$

sob a condição periódica de contorno

$$u(x + L, t) = u(x, t) \quad (2)$$

e a condição inicial

$$u(x, t = 0) = f(x) \quad (3)$$

onde $f(x)$ é uma função periódica em x , de período L .

No tratamento numérico, as variáveis independentes x e t assumem valores discretos da forma

$$x = k \cdot \Delta x \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

$$t = n \cdot \Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

A rede definida por (4) e (5) tem um comprimento finito L na direção x , de modo que $\Delta x = L/N$. Usaremos aqui a notação

$$u_k^n = u(k \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$$

Para resolver (1) numericamente vamos convertê-la numa equação a diferenças finitas, aproximando as derivadas por quocientes de diferenças finitas. A maneira de formular essas aproximações não é única, e de sua escolha depende em geral a estabilidade do algoritmo. Por exemplo, a derivada temporal pode envolver dois tempos distantes entre si de Δt :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_k^n = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$$

ou distantes de $2\Delta t$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_k^n = \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\Delta t} \quad (6)$$

No caso (6) a derivada é dita centrada. As derivadas espaciais podem envolver apenas um nível de tempo:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_k^n = \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} \quad (7)$$

ou dois níveis

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_k^n &= \alpha \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_k^{n+1} + (1 - \alpha) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_k^{n-1} \\ &= \alpha \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1 - \alpha) \frac{u_{k+1}^{n-1} - u_{k-1}^{n-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (8)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$

No caso (7) a formulação é chamada explícita e no caso (8) implícita.

Consideremos o caso em que a derivada temporal é centrada como em (6), o termo não-linear é formulado explicita

mente e as derivadas segunda e terceira podem ser implícitas ou explícitas. Sob estas condições a equação discreta que se obtém é da forma

$$A u_{k-2}^{n+1} + B u_{k-1}^{n+1} + C u_k^{n+1} + D u_{k+1}^{n+1} + E u_{k+2}^{n+1} = z_k \quad (9)$$

onde A, B, C, D e E são coeficientes constantes (dependendo somente de a, b, c, α , Δx e Δt) e z_k é um polinômio nas variáveis:

$$u_{k-2}^n, u_{k-1}^n, u_k^n, u_{k+1}^n, u_{k+2}^n$$

$$u_{k-2}^{n-1}, u_{k-1}^{n-1}, u_k^{n-1}, u_{k+1}^{n-1}, u_{k+2}^{n-1}.$$

Então, dados os valores de u em dois instantes vizinhos

$$\left\{ u_k^{n-1}, u_k^n \right\} \quad (k = 1, N)$$

e a condição de contorno

$$u_{k+N}^n = u_k^n$$

calcula-se o polinômio z_k ($k = 1, N$) e em seguida resolve-se a equação a diferenças (9) simultaneamente nos N pontos da rede discreta para obter os valores de u no instante seguinte

$$\left\{ u_k^{n+1} \right\} \quad (k = 1, N)$$

Temos, portanto, que resolver, a cada passo em tempo, um sistema linear e não-homogêneo de N equações, cujas N incôgnitas são os u_k^{n+1} ($k = 1, N$). Este sistema pode ser expresso em forma matricial como

$$M u = z \quad (10)$$

A matriz M, de dimensão N x N, é

$$M = \begin{bmatrix} C & D & E & & & & A & B \\ B & C & D & E & & & & A \\ A & B & C & D & E & & & \\ & & & & & & A & B & C & D & E \\ E & & & & & & A & B & C & D \\ D & E & & & & & A & B & C \end{bmatrix} \quad (11)$$

Exceto a diagonal principal, suas duas vizinhas à esquerda e duas à direita e os três elementos nos cantos inferior esquerdo e superior direito, todos os outros elementos de M são nulos. Os elementos de uma diagonal qualquer são todos iguais. Os elementos nos cantos inferior esquerdo e superior

direito são devidos à condição periódica de contorno.

O vetor u em (10) é formado pelas N incógnitas u_k^{n+1} , ($k = 1, N$) e o vetor z é formado pelos polinômios z_k ($k = 1, N$).

O importante no trabalho de Sjöberg (ref. 22) foi mostrar que a matriz M pode ser fatorada como um produto

$$M = L \cdot U \quad (12)$$

onde L é uma matriz triangular inferior e U é triangular superior. Então a solução do sistema (11) se reduz à solução de dois sistemas triangulares. A matriz L é da forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ a_2 & 1 & & & & & & \\ b_3 & a_3 & 1 & & & & & \\ b_4 & a_4 & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & b_{N-2} & a_{N-2} & 1 \\ r_1 & r_2 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & r_{N-3} & r_{N-2} & 1 \\ s_1 & s_2 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & s_{N-3} & s_{N-2} & s_{N-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

e a matriz U é:

$$U = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & & & p_1 & q_1 \\ & c_2 & d_2 & e_2 & & p_2 & q_2 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{N-4} & d_{N-4} & e_{N-4} & \\ & & & & c_{N-3} & d_{N-3} & p_{N-3} & q_{N-3} \\ & & & & & c_{N-2} & p_{N-2} & q_{N-2} \\ & & & & & & p_{N-1} & q_{N-1} \\ & & & & & & & q_N \end{bmatrix} \quad (14)$$

Desde que os elementos da matriz M sejam constantes, a fatoração $M = L.U$ só precisa ser feita uma vez, daí resultando a rapidez do algoritmo. Por isso é que o termo não linear é formulado explicitamente; do contrário os elementos de M não seriam constantes e seria necessária uma nova fatoração da matriz M a cada passo em tempo.

Da forma das matrizes L e U se vê que a fatoração consiste em determinar os "vetores":

$$a_i, \quad i = 2, N-2$$

$$b_i, \quad i = 3, N-2$$

$$c_i, \quad i = 1, N-2$$

$$r_i, \quad i = 1, N-2$$

$$s_i, \quad i = 1, N-1$$

$$p_i, \quad i = 1, N-1$$

$$d_i, i = 1, N-3$$

$$q_i, i = 1, N$$

$$e_i, i = 1, N-4$$

em termos dos elementos A, B, C, D e E da matriz M. Isto se obtém igualando-se cada elemento de M ao produto correspondente de uma linha de L por uma coluna de U. O resultado é:

$$c_1 = C$$

$$d_1 = D$$

$$a_2 = B/c_1$$

$$c_2 = C - a_2 d_1$$

$$e_i = E \quad (i = 1, N-4)$$

$$d_{i-1} = D - a_{i-1} e_{i-2}$$

$$b_i = A/c_{i-2}$$

$$a_i = (B - b_i d_{i-2}) / c_{i-1}$$

$$c_i = C - b_i e_{i-2} - a_i d_{i-1}$$

$$(i = 3, N-2)$$

$$p_1 = A$$

$$p_2 = -a_2 p_1$$

$$p_i = -b_i p_{i-2} - a_i p_{i-1} \quad (i = 3, N-4)$$

$$p_{N-3} = E - b_{N-3} p_{N-5} - a_{N-3} p_{N-4}$$

$$p_{N-2} = D - b_{N-2} p_{N-4} - a_{N-2} p_{N-3}$$

$$q_1 = B$$

$$q_2 = A - a_2 q_1$$

$$q_i = -b_i q_{i-2} - a_i q_{i-1} \quad (i = 3, N-3)$$

$$q_{N-2} = E - b_{N-2} q_{N-4} - a_{N-2} q_{N-3}$$

$$r_1 = E/c_1$$

$$s_1 = D/c_1$$

$$r_2 = -r_1 d_1 / c_2$$

$$s_2 = (E - s_1 d_1) / c_2$$

$$r_i = (-r_{i-2} e_{i-2} - r_{i-1} d_{i-1}) / c_i \quad (i = 3, N-4)$$

$$s_i = (-s_{i-2} e_{i-2} - s_{i-1} d_{i-1}) / c_i \quad (i = 3, N-3)$$

$$r_{N-3} = (A - r_{N-5} e_{N-5} - r_{N-4} d_{N-4}) / c_{N-3}$$

$$r_{N-2} = (B - r_{N-4} e_{N-4} - r_{N-3} d_{N-3}) / c_{N-2}$$

$$s_{N-2} = (A - s_{N-4} e_{N-4} - s_{N-3} d_{N-3}) / c_{N-2}$$

$$p_{N-1} = C - \sum_{i=1}^{N-2} r_i p_i$$

$$q_{N-1} = D - \sum_{i=1}^{N-2} r_i q_i$$

$$s_{N-1} = (B - \sum_{i=1}^{N-2} s_i p_i) / p_{N-1}$$

$$q_N = C - \sum_{i=1}^{N-1} s_i q_i$$

Uma vez obtidas as matrizes L e U pelas fórmulas acima, a solução do sistema $Mu = z$ se reduz à solução de dois sistemas triangulares, a saber,

$$Ly = z \quad e \quad Uu = y$$

Devido à estrutura especial das matrizes L e U , a solução dos sistemas $Ly = z$ e $Uu = y$ é ainda mais rápida que a solução de um sistema triangular geral.

Para o sistema $Ly = z$ temos:

$$y_1 = z_1$$

$$y_2 = z_2 - a_2 y_1$$

$$y_i = z_i - a_i y_{i-1} - b_i y_{i-2} \quad (i = 3, \dots, N-2)$$

$$y_{N-1} = z_{N-1} - \sum_{j=1}^{N-2} r_j y_j$$

$$y_N = z_N - \sum_{j=1}^{N-1} s_j y_j$$

E para o sistema $Uu = y$ temos:

$$u_N = y_N / q_N$$

$$u_{N-1} = (y_{N-1} - q_{N-1} u_N) / p_{N-1}$$

$$u_{N-2} = (y_{N-2} - p_{N-2} u_{N-1} - q_{N-2} u_N) / c_{N-2}$$

$$u_{N-3} = (y_{N-3} - d_{N-3} u_{N-2} - p_{N-3} u_{N-1} - q_{N-3} u_N) / c_{N-3}$$

$$u_i = (y_i - d_i u_{i+1} - e_i u_{i+2} - p_i u_{N-1} - q_i u_N) / c_i$$

(i = N-4, N-5, ..., 1)

Como este algoritmo envolve três níveis de tempo, precisamos ter os valores de u em dois instantes vizinhos

$$\left\{ u_k^{n-1}, u_k^n \right\}, \quad k = 1, N$$

para calcular u no instante seguinte

$$\left\{ u_k^{n+1} \right\}, \quad k = 1, N$$

Assim, para $t = 0$, $u_k^0 = f(k \cdot \Delta x)$, onde f é uma função dada.

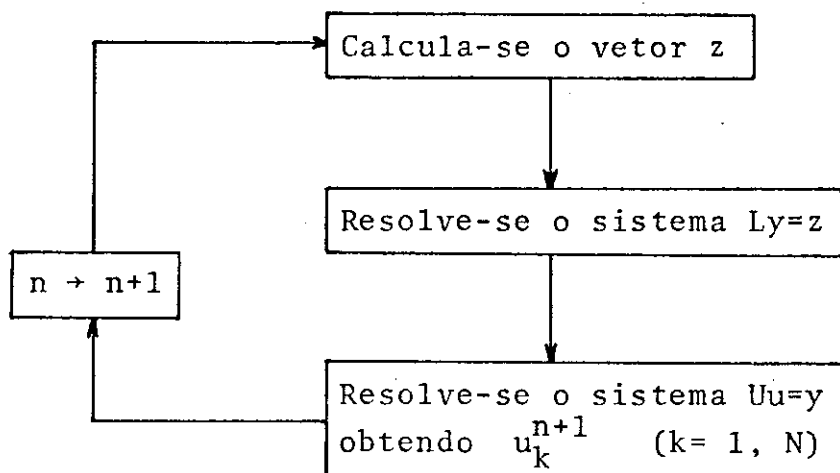
Para $t = \Delta t$, u é calculado através de uma expansão de Taylor até 1^a ordem

$$u_k^1 = u_k^0 + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta t \quad (15)$$

sendo a derivada temporal em (15) obtida através da própria equação KdV - B. Portanto,

$$u_k^1 = u_k^0 + \left[-au \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] \cdot \Delta t \quad (16)$$

A partir daqui os valores de u nos instantes seguintes são sucessivamente calculados de acordo com o seguinte esquema:



Este algoritmo na forma que acabamos de descrever se presta não apenas à solução da equação Kdv - B, mas a qualquer equação cuja equivalente a diferenças finitas possa ser escrita na forma (9).

Para a equação KdV - B, as aproximações de diferenças finitas utilizadas foram as seguintes:

A derivada temporal foi aproximada como em (6):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_k^n = \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\Delta t} \quad (6)$$

O termo não-linear foi formulado explicitamente, como sugerido por Sjöberg (ref. 16):

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_k^n &= \frac{1}{3} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right] \Big|_k^n = \\
 &= \frac{1}{6\Delta x} \left[u_k^n (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) + (u_{k+1}^n)^2 - (u_{k-1}^n)^2 \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

A 2ª derivada foi formulada implicitamente como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_k^n &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_k^{n+1} + (1 - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_k^n = \\
 &= \alpha \frac{u_{k+2}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-2}^{n+1}}{4(\Delta x)^2} + (1 - \alpha) \frac{u_{k+2}^{n-1} - 2u_k^{n-1} + u_{k-2}^{n-1}}{4(\Delta x)^2} \quad (16)
 \end{aligned}$$

E a 3ª derivada também foi implícita:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_k^{n+1} + (1 - \alpha) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_k^{n-1} = \\
 &= \alpha \frac{u_{k+2}^{n+1} - 2u_{k+1}^{n+1} + 2u_{k-1}^{n+1} - u_{k-2}^{n+1}}{2(\Delta x)^3} + \\
 &+ (1 - \alpha) \frac{u_{k+2}^{n-1} - 2u_{k+1}^{n-1} + 2u_{k-1}^{n-1} - u_{k-2}^{n-1}}{2(\Delta x)^3} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Com as aproximações (6), (15), (16) e (17) a equação discreta é da forma (9), com

$$A = - \alpha \cdot \Delta t \left[\frac{b}{2(\Delta x)^2} + \frac{c}{(\Delta x)^3} \right]$$

$$B = \frac{2\alpha \, c \Delta t}{(\Delta x)^3}$$

$$C = 1 + \frac{\alpha \, b \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$D = - \frac{2\alpha \, c \Delta t}{(\Delta x)^3}$$

$$E = - \alpha \Delta t \left[\frac{b}{2(\Delta x)^2} - \frac{c}{(\Delta x)^3} \right]$$

e o vetor z_k é

$$\begin{aligned} z_k = & u_k^{n-1} - \frac{a \Delta t}{3 \Delta x} \left[u_k^n (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + (u_{k+1}^n)^2 - (u_{k-1}^n)^2 \right] + \\ & + \frac{(1 - \alpha) \, b \Delta t}{2 (\Delta x)^2} (u_{k+2}^{n-1} - 2 u_k^{n-1} + u_{k-2}^{n-1}) - \\ & - \frac{(1 - \alpha) \, c \Delta t}{(\Delta x)^3} (u_{k+2}^{n-1} - 2 u_{k+1}^{n-1} + 2 u_{k-1}^{n-1} - u_{k-2}^{n-1}) \end{aligned}$$

Em todos os nossos experimentos numéricos os coefi
cientes de não-linearidade e de dispersão foram mantidos fi
xos, respectivamente $a=2$ e $c=1$. Nosso interesse principal

foi estudar o efeito do termo de amortecimento ($b u_{xx}$).

Nosso programa utiliza 400 pontos na direção x ($N = 400$).

Na próxima secção se expõem os testes que foram realizados com o programa, levando à escolha dos parâmetros α , Δx e Δt .

b. Testes com o programa

Como primeiro teste do programa utilizamos como condição inicial uma função suave, a saber

$$u(x, t = 0) = \cos(2\pi x) \quad (18)$$

cujo período é $L = 1$, logo $\Delta x = L/N = 0.0025$. O passo em tempo foi tomado $\Delta t = 0.001$. Nestas condições obtivemos estabilidade até $t=1$ e na faixa de b entre 0 e 4, fazendo $\alpha = 0.7$ nas derivadas implícitas. Este valor de α foi mantido daí por diante em todos os experimentos com o programa.

Verificou-se, portanto, que do ponto de vista da estabilidade numérica, o algoritmo que utilizamos é bem menos restritivo que outros algoritmos como por exemplo o de Lax - Wendroff (ref. 17) e aquele utilizado por Zabusky na ref. 2,

onde a condição de estabilidade é $\Delta t < (\Delta x)^3$, o que exige passos em tempo muito pequenos. Em nosso caso obtém-se esta bilidade com um Δt da mesma ordem que Δx . Como veremos adiante, nossa escolha de Δt foi determinada por um critério de convergência e não de estabilidade.

Em seguida passamos a experimentar como condição inicial um pulso do tipo

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_e \\ 1 & \text{se } x_e < x < x_d \\ 0 & \text{se } x > x_d \end{cases} \quad (19)$$

onde x_e e x_d são as posições de início e fim do pulso.

Numericamente o pulso foi um pouco suavizado, isto é, utilizam-se quatro pontos da rede espacial para representar a subida ou descida do pulso. Foi tomado inicialmente $\Delta t = 0.001$, $L = 10$, $\Delta x = 0.025$. Verificamos que no primeiro passo em tempo ($t = \Delta t$) apareciam oscilações de comprimento de onda $4 \cdot \Delta x$ em torno das posições de subida e descida do pulso inicial (fig. 1). Estas oscilações, de amplitude igual a 8 vezes a amplitude do pulso inicial, apareciam independentemente do valor do coeficiente de difusão b na faixa entre 0 e 4, mas eram amortecidas depois de alguns passos (~ 10) em tempo.

O primeiro passo em tempo era calculado de acordo com a fórmula (16), com as derivadas substituídas por quocientes de diferenças finitas. Para estudar a causa do apa

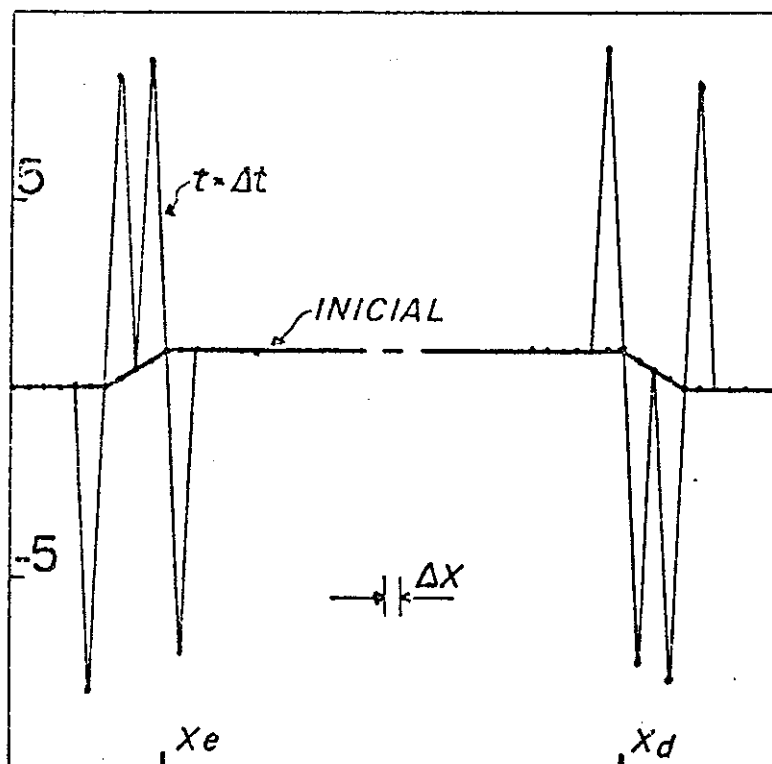


Figura 1: Oscilações numéricas
no primeiro passo em tempo.

$$\Delta t = 0.001$$

recimento das oscilações referidas, procuramos uma função analítica que representasse o pulso inicial, de modo que as derivadas em (16) pudessem ser calculadas analiticamente. Foi escolhida a função

$$f(x) = \frac{A}{1 + \exp s(x_e - x)} + \frac{A}{1 + \exp s(x - x_d)} - A \quad (20)$$

A função (20) é bem parecida com o pulso não analítico, exceto nas vizinhanças dos pontos x_e e x_d onde ela é uma função suave (ver fig. 2, onde se mostra a descida do pulso analítico e não analítico).

Usando a função (20) como condição inicial com $s = 36.72$ calculamos os valores $u(x, \Delta t)$ pela equação (16), com as expressões analíticas das derivadas. O resultado está mostrado na (fig. 3), onde se vê que, embora não apareçam oscilações, aparece um salto muito grande nas posições x_e e x_d . Evidentemente um e outro efeito não tem sentido físico, portanto, algo devia estar errado no cálculo do primeiro passo. De fato, isso foi verificado analiticamente. As derivadas da função (20) são, nos pontos x_e e x_d , em módulo:

$$u_x = As, \quad u_{xx} = As^2 \quad \text{e} \quad u_{xxx} = As^3$$

de modo que o termo dominante na expansão (16) é a 3ª derivada. Consideremos então, aproximadamente

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta t \approx u_{xxx} \cdot \Delta t = As^3 \cdot \Delta t \quad (21)$$

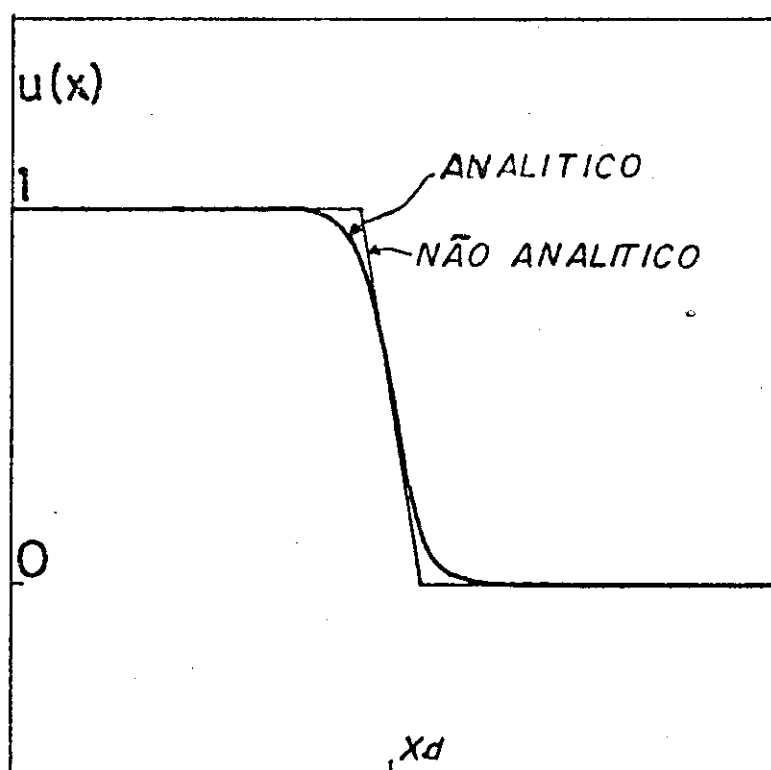


Figura 2: Comparação entre os pulsos analítico e não-analítico.

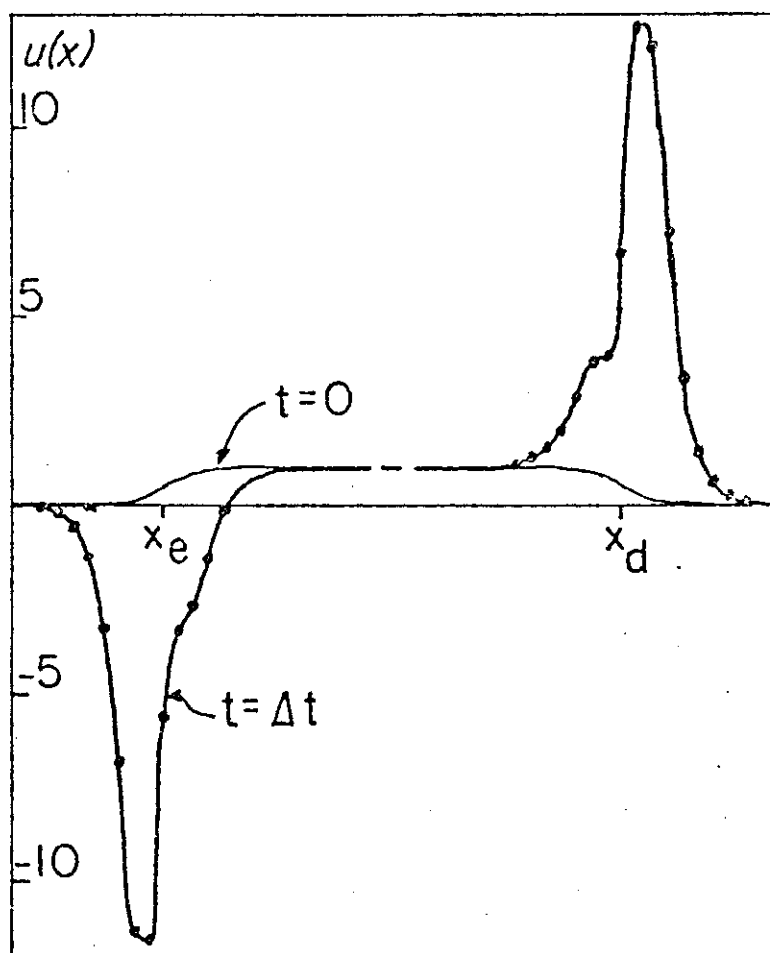


Figura 3: Solução obtida da
expressão analítica para
 $t = \Delta t = 0.001$

O termo seguinte da expansão (16), que foi desprezado, seria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot (\Delta t)^2 \sim \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \cdot \Delta t^2 = A s^6 \cdot \Delta t^2 \quad (22)$$

Para que a expansão (10) seja válida devemos ter o quociente entre (22) e (21) menor que 1, logo a condição de convergência é

$$\Delta t < \frac{1}{s^3} \quad (23)$$

Para $s = 36.72$ resulta $\Delta t < 2 \times 10^{-5}$, portanto o valor de Δt usado anteriormente ($\Delta t = 0.001$) não satisfazia a condição de convergência (23). Rodamos a seguir o programa até $t = 0.001$ (t igual ao antigo Δt), com três valores de Δt : 10^{-6} , 10^{-5} e 10^{-4} . Nos três casos não aparece mais o grande salto em $t = 0.001$ e os três resultados são praticamente coincidentes. O resultado para $t = 0.001$ com $\Delta t = 10^{-5}$ está mostrado na (fig. 4). Este resultado é para o coeficiente de amortecimento $b = 4$ e observa-se a formação de uma estrutura oscilatória à esquerda das posições de subida e descida do pulso inicial. Esta estrutura não era observada quando se usava $\Delta t = 0.001$. Tendo em vista os resultados acima adotamos daqui por diante $\Delta t = 10^{-5}$ para a faixa de tempo entre 0 e 0.001.

Podemos observar na figura 4 que a inclinação do pul

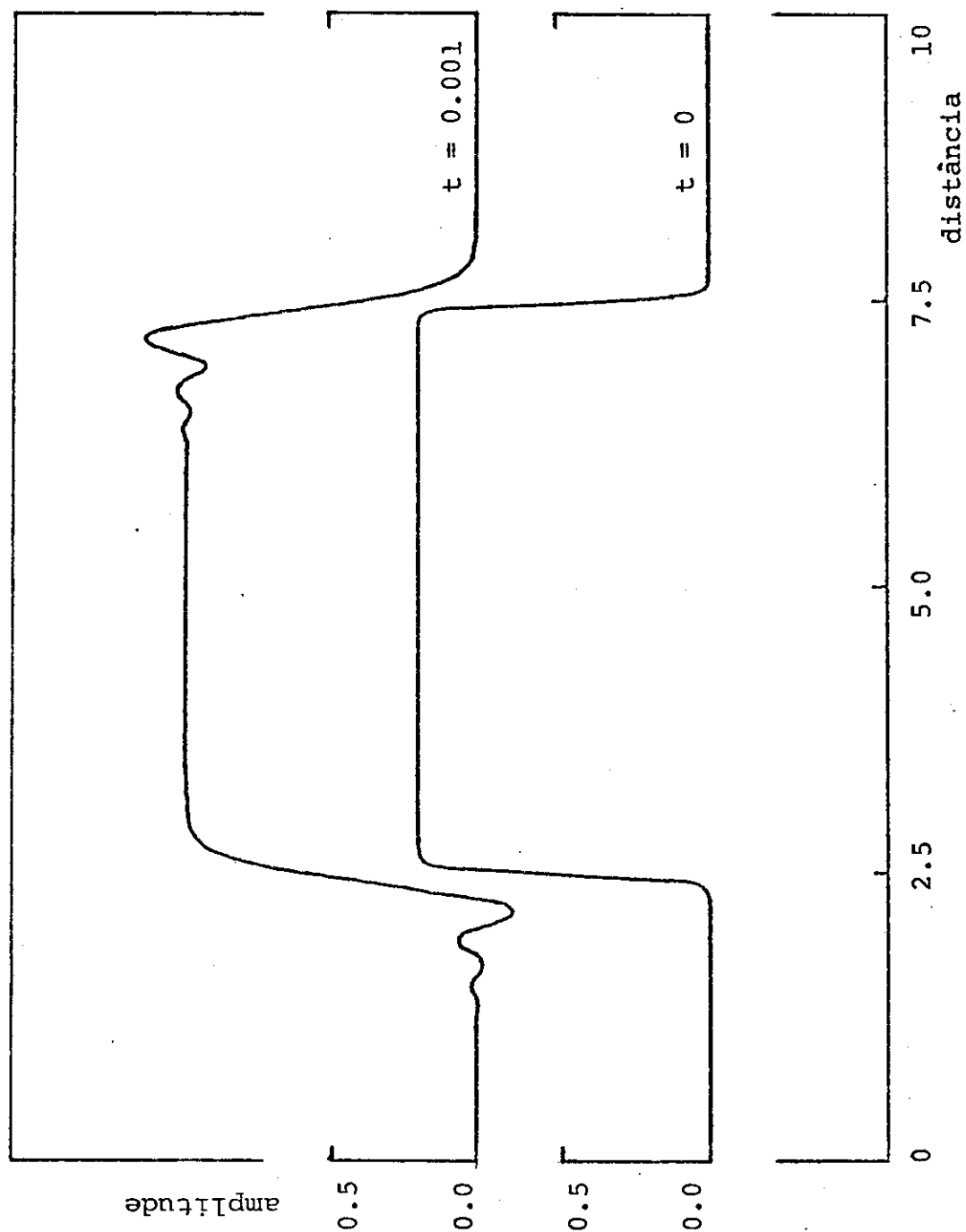


Figura 4: Pulso inicial e solução para $t=0.001$

$$b=4.0$$

$$\Delta t=10^{-5}$$

so inicial se torna mais suave com o passar do tempo. Portanto a condição de convergência (23) fica menos rigorosa e podemos usar valores maiores de Δt para tempos maiores.

Daqui por diante passamos a usar como condição inicial um pulso mais largo (largura = 20 e período $L = 40$) e com uma largura de subida também maior: tomamos $s = 10$ na função inicial (20), o que dá uma largura de subida da ordem de 1. Com isto a condição de convergência (23) fica folgadoamente satisfeita.

Para $t > 0.001$ experimentamos vários valores de Δt , visando a aumentar gradualmente o Δt inicial, mas sempre verificando se esse aumento não afetava os resultados. A solução típica é como aquela da figura 4. Para comparar quantitativamente soluções obtidas com diferentes valores de Δt , fizemos gráficos da amplitude e da posição dos dois primeiros picos (contando da direita para a esquerda na figura 4) em função do tempo (figuras 5 e 6).

Para a segunda faixa de tempo ($0.001 < t \leq 0.01$) experimentamos três valores de Δt : 2×10^{-5} , 5×10^{-5} e 10^{-4} . No gráfico de amplitude em função do tempo (figura 5) notamos que as três soluções concordam muito bem, exceto por uma pequena discrepância para o segundo pico em torno de $t = 0.007$, que todavia, diminui com o passar do tempo. Na figura 6 se observa que os três casos coincidem perfeitamente quanto à posição dos picos. Tendo em vista estes resultados foi escolhido o valor intermediário $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ para a segunda faixa

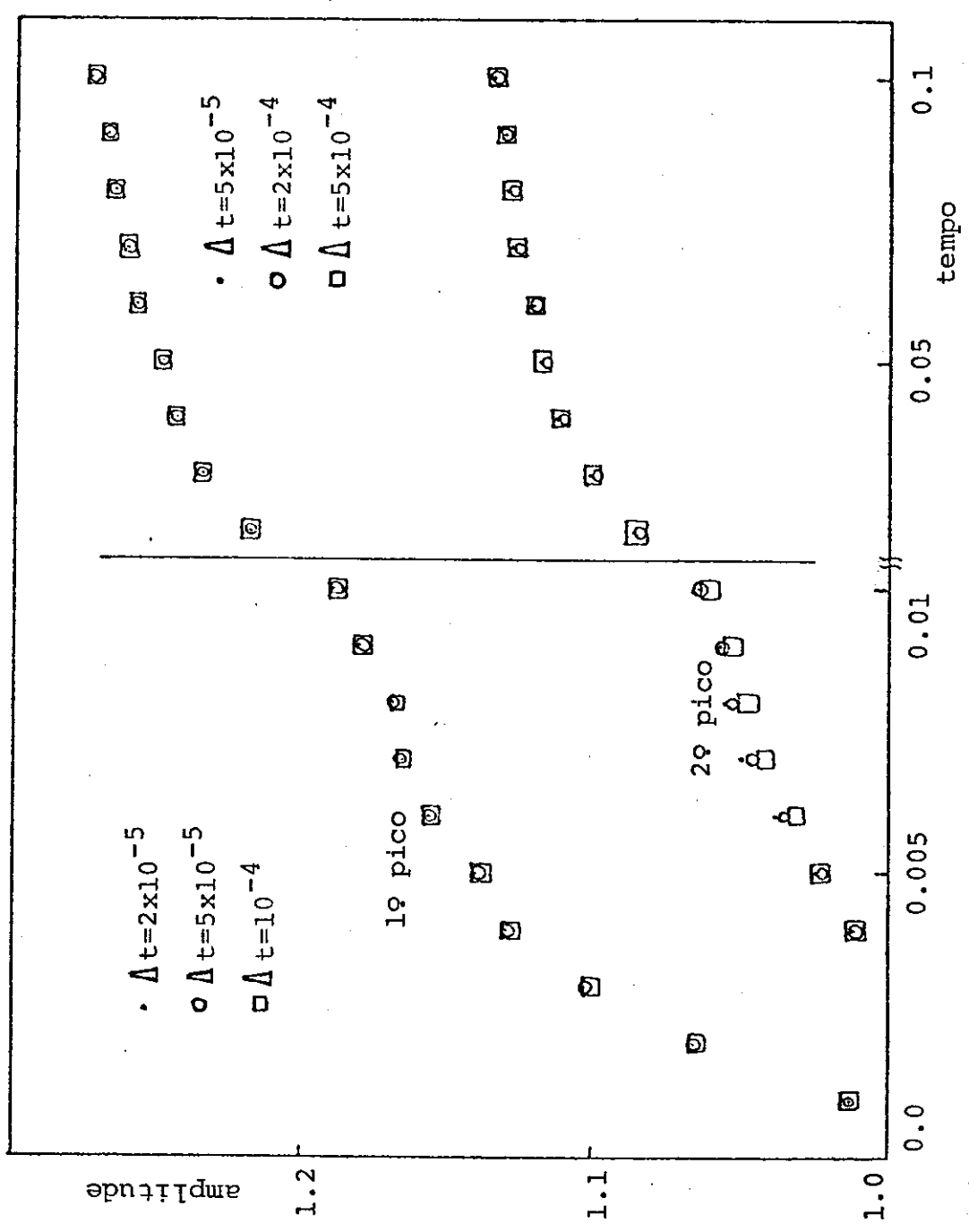


Figura 5: Amplitude dos dois primeiros pico em função do tempo, com vários Δt 's, para o pulso de largura 20.

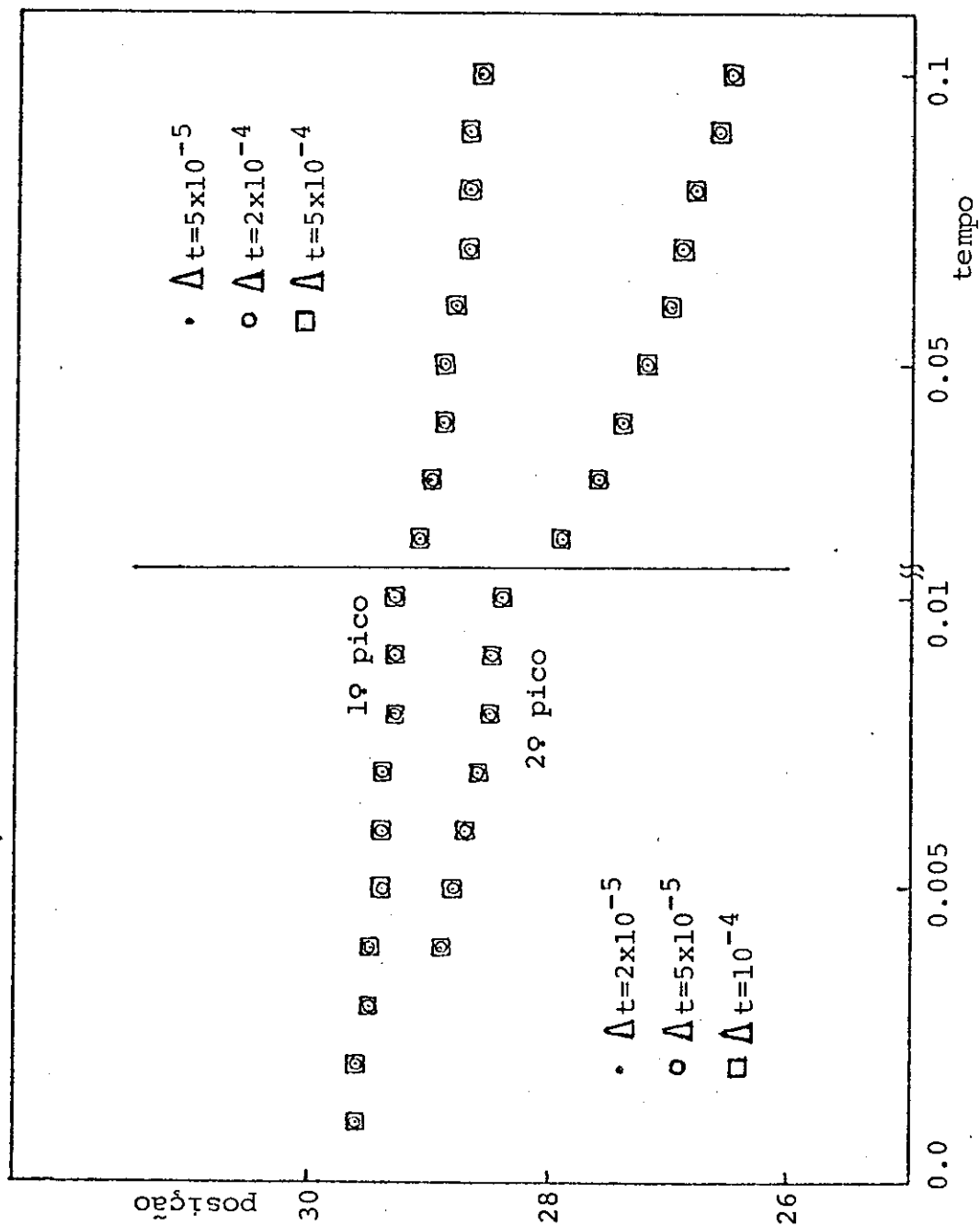


Figura 6: posição dos dois primeiros picos em função do tempo, com vários Δt 's, para o pulso de largura 20.

de tempo.

Para a terceira faixa de tempo ($0.01 \leq t \leq 0.1$) também experimentamos três valores de Δt : 5×10^{-5} , 2×10^{-4} e 5×10^{-4} . Nas figuras 5 e 6 se observa que as três soluções concordam muito bem quanto à amplitude e posição dos picos. Para esta faixa foi escolhido o valor $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$.

Por um procedimento análogo escolhemos $\Delta t = 10^{-3}$ para $0.1 \leq t \leq 1$ e $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ para $1 \leq t \leq 4$.

O fato de usarmos Δt menor para tempo pequeno e maior para tempo grande se justifica também porque inicialmente as mudanças no perfil das soluções são muito mais rápidas, exigindo um maior refinamento da malha para descrevê-las com suficiente precisão.

Como último teste do programa, depois de estabelecer o escalonamento em Δt que acabamos de descrever, empregamos como condição inicial um sóliton, que é solução exata da equação de Korteweg-de Vries, isto é, a equação KdV - B com o coeficiente de amortecimento $b=0$.

Como nosso interesse principal era investigar o efeito de amortecimento, queríamos ter certeza de que não havia nenhuma dissipação numérica. O sóliton é descrito pela função (ref. 2):

$$f(x) = u_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - x_0}{\Delta} \right) \quad (24)$$

onde $\Delta = \sqrt{\frac{6}{u_0}}$

e é solução exata da equação KdV - B na forma (1), com $b = 0$, num referencial que se move com velocidade $(2/3) u_0$.

Nós utilizamos como condição inicial três sólitons, com amplitudes $u_0 = 1.3, 1.0$ e 0.8 e verificamos que eles se propagam sem distorsão e com a velocidade prevista até $t = 1.0$. No caso $u_0 = 1.3$ rodamos até $t = 4.0$, sem haver distorsão ou atenuação mensuráveis.

Após todos estes testes o programa foi considerado confiável e passamos ao estudo das soluções obtidas por meio dele. Na próxima secção apresentamos os resultados.

IV. RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos e discutimos as soluções numéricas da equação de Korteweg-de Vries - Burgers (KdV-B) obtidas por meio do algoritmo descrito no capítulo III. Estudamos a equação KdV - B na forma

$$u_t + 2 u u_x - b u_{xx} + u_{xxx} = 0$$

variando o coeficiente de amortecimento b . A condição de contorno é periódica e estudamos a evolução temporal de dois tipos de perturbação inicial: um "pulso quadrado" e um sóliton.

a) Pulso quadrado

O pulso quadrado inicial é dado pela função

$$f(x, t=0) = \frac{1}{1 + \exp s(x_e - x)} + \frac{1}{1 + \exp s(x - x_d)} - 1$$

Em todos os resultados aqui apresentados, temos $s=10$, o que dá uma largura de subida ou descida do pulso aproximadamente igual a 1. Os pontos x_e e x_d são as posições de subida e descida do pulso, que tem portanto uma largura igual a $(x_d - x_e)$ e um período $L = 2(x_d - x_e)$. Nas figuras 7 a 10, apresentamos os resultados para um pulso inicial de período $L = 40$.

Na figura 7 temos a evolução do pulso quando o coeficiente de amortecimento é $b = 0$. Neste caso a equação KdV-B se reduz à KdV e a perturbação inicial deve evoluir para um conjunto de sólitons (ref. 2). A figura 7 mostra o início desta evolução: em $t = 0.2$, observamos a formação de um trem de ondas tanto na parte superior como na inferior do pulso. Cada uma daquelas oscilações evoluiria para um sóliton. Entretanto, devido à condição de contorno periódica, temos a interação entre os sólitons produzidos na parte superior e na inferior do pulso, de modo que se torna impossível seguir a trajetória de cada sóliton individualmente. Em $t = 0.5$ já se pode observar a deformação dos sólitons devido à interação com os demais e em $t = 1$ a interação já é bastante grande. Como nosso objetivo é investigar o efeito do termo de amortecimento, não estendemos mais o tempo no caso $b = 0$.

As figuras 8, 9 e 10 mostram a evolução do pulso para $b = 0.45$, 1 e 2, respectivamente. No caso $b = 0.45$ observamos em $t = 0.05$ e 0.1 a formação do trem de ondas referido

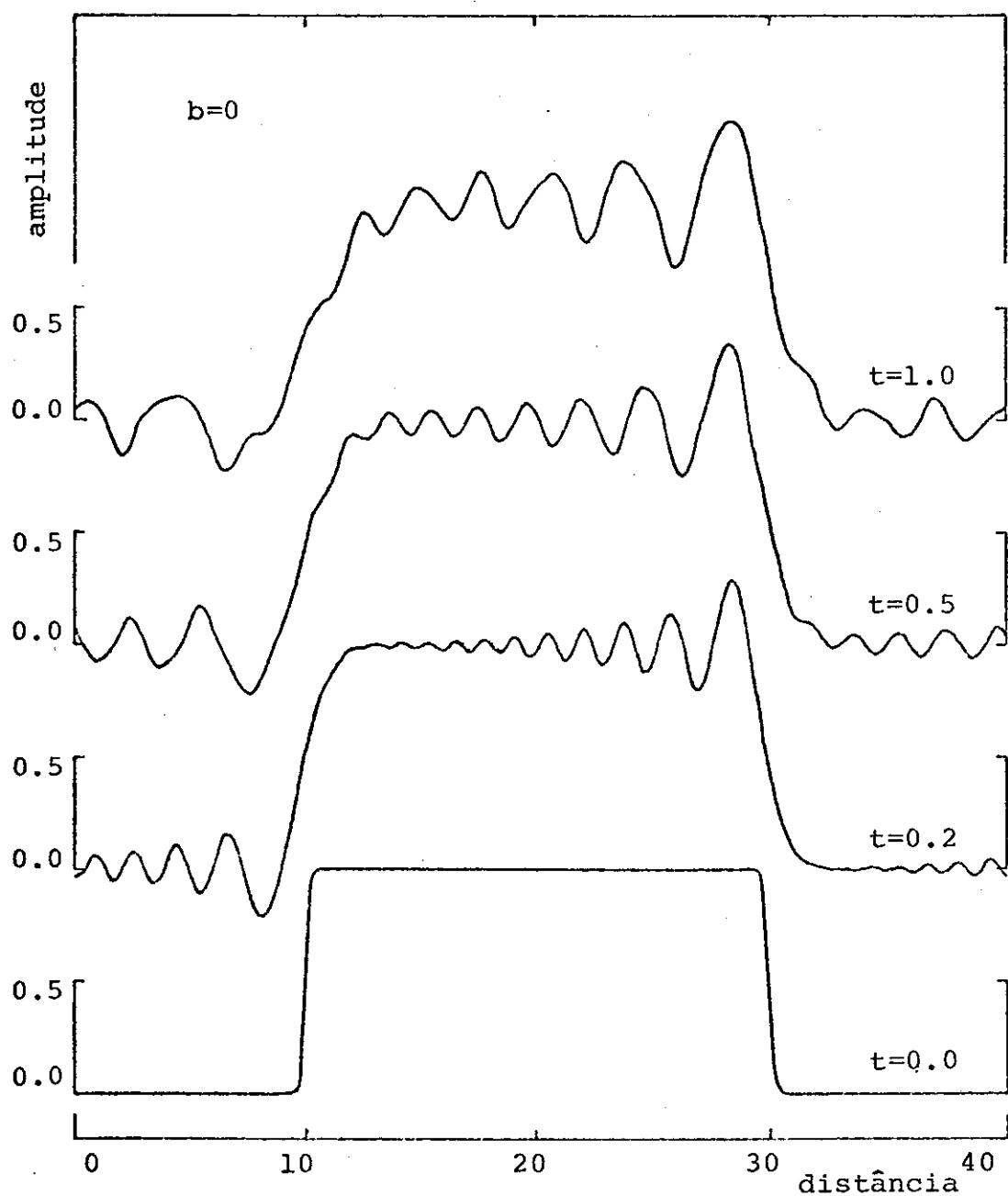


Figura 7: Evolução temporal do pulso sem dissipação ($b = 0$).

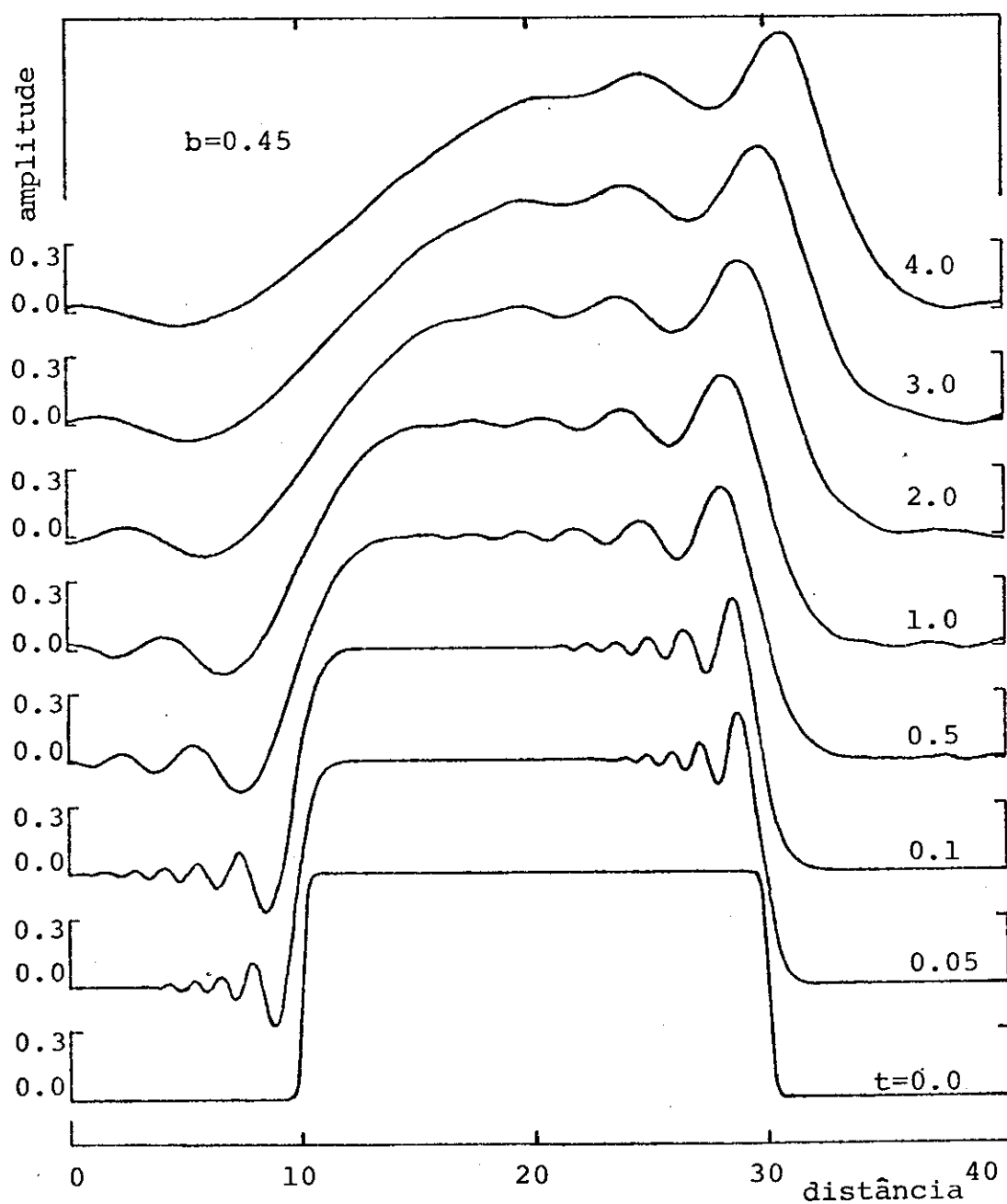


Figura 8: Evolução temporal do pulso com amortecimento ($b=0.45$).

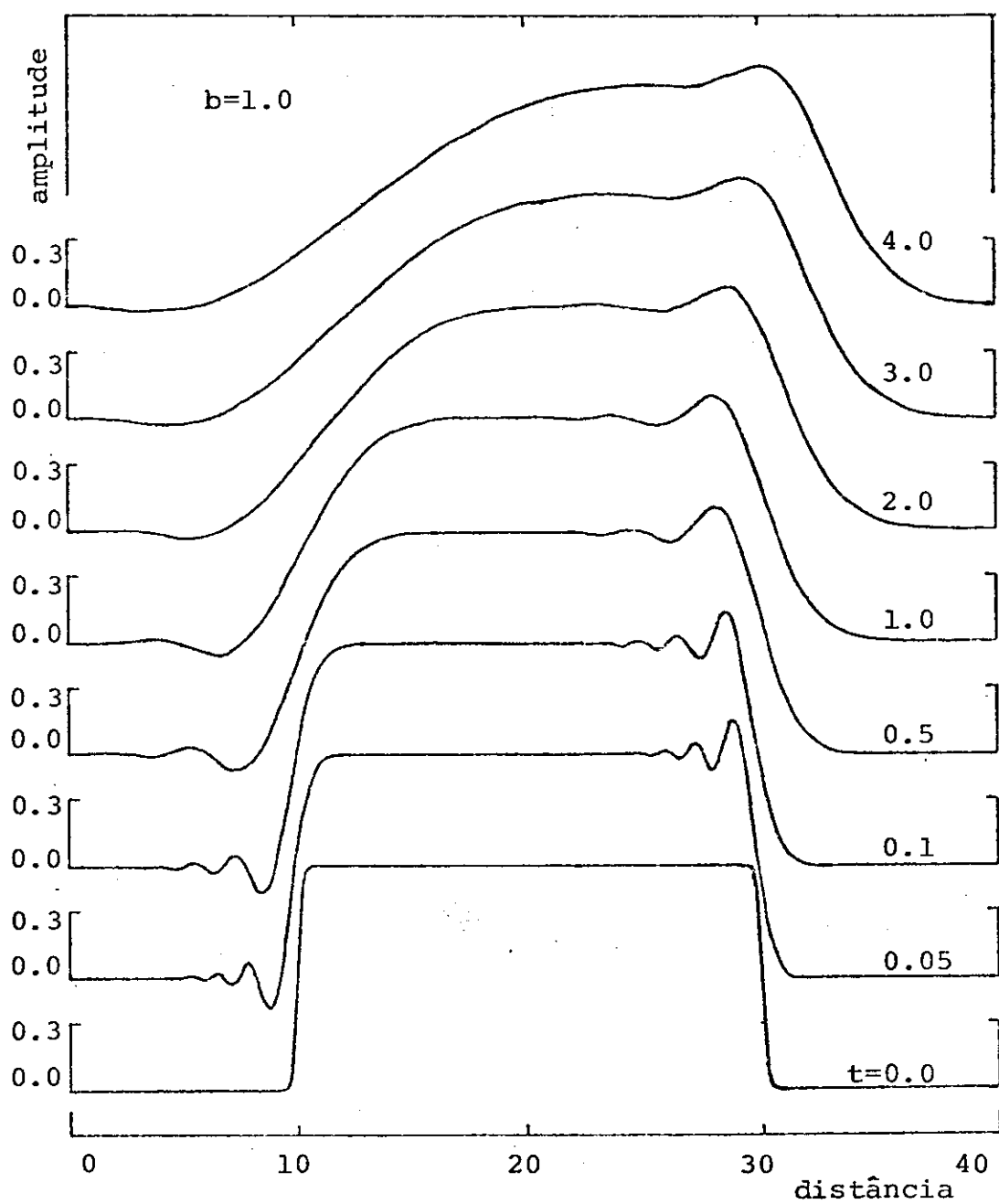


Figura 9: Evolução temporal do pulso com amortecimento ($b=1.0$).

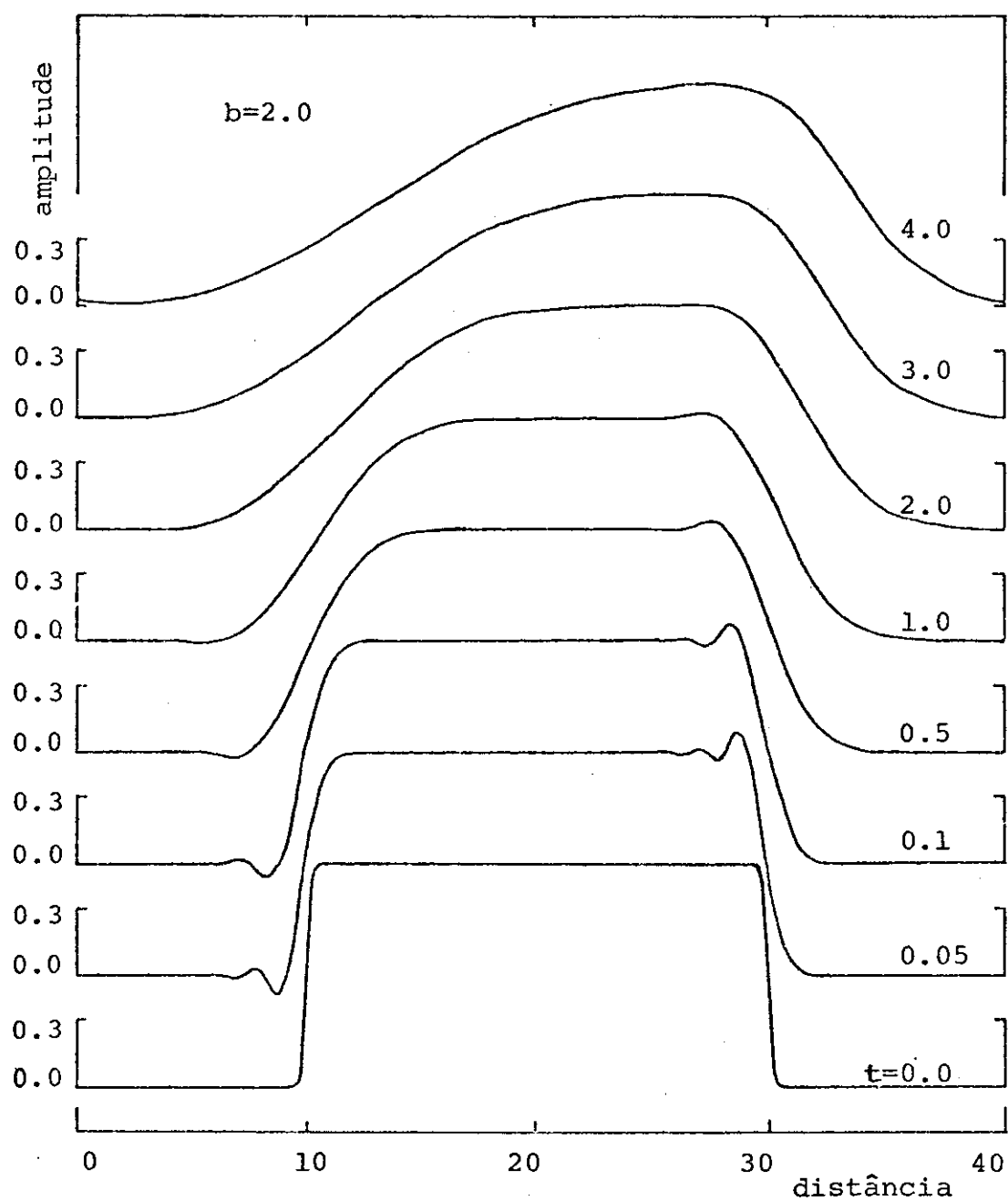


Figura 10: Evolução temporal do pulso com amortecimento ($b=2.0$).

anteriormente, mas sua extensão é menor que para $b = 0$; as oscilações mais à esquerda são quase completamente amortecidas antes de atingir as oscilações formadas no outro nível do pulso, de modo que pelo menos os dois primeiros picos são identificáveis até $t = 4$. Além disso, o pulso como um todo sofre a deformação característica de propagação não-linear, isto é, a parte de trás do pulso se torna menos inclinada que a frente, no curso da propagação.

Para $b = 1$ (fig. 9), a evolução do pulso é qualitativamente semelhante ao caso anterior ($b = 0.45$), mas o número de picos observado e as respectivas amplitudes são menores. Para $b = 2$ (fig. 10) o efeito de amortecimento é ainda mais notável: a partir de $t = 2$ já não se tem nenhuma oscilação. Em todos os casos se observa a deformação não-linear do pulso.

Estudando a equação KdV-B em forma estacionária, no contexto de ondas de choque em plasma, Grad e Hu (ref. 12) concluíram que as soluções estacionárias são oscilatórias para $b < 2\sqrt{2} \equiv b_G$ e não oscilatórias para $b > b_G$. Naquela análise a condição inicial era uma função-degrau, estendendo-se entre $+\infty$ e $-\infty$. Canosa e Gazdag (ref. 18) apresentaram soluções numéricas da equação KdV-B com a mesma condição inicial, para $b = 0.01$ e $b = 6$, que concordam com a condição de Grad e Hu, mas não determinaram o valor de b para o qual ocorre a transição do regime oscilatório para não-oscilatório. No presente trabalho, como a perturbação inicial

é um pulso finito, não temos soluções estacionárias, pois para qualquer $b > 0$ a energia do pulso inicial acabará sendo completamente dissipada. Entretanto, para tempo pequeno, enquanto a extensão do trem de ondas seja menor que a largura do pulso, é lícito fazermos uma comparação entre nossos resultados e a análise de Grad e Hu. O que observamos é que em nosso caso as oscilações são amortecidas completamente com um valor de b mais baixo que b_G .

Na figura 11 temos um gráfico da amplitude do pico mais alto em função de b para vários tempos.

O ponto onde as curvas correspondentes a $t = 0.05, 0.1$ e 0.5 se cruzam corresponde a $b \sim 0.45 \equiv b_c$ e indica que a amplitude do pico é estacionária nesse intervalo de tempo. Para $b < b_c$ a amplitude é sempre crescente com o tempo e para $b > b_c$ a amplitude cresce inicialmente depois diminui com o tempo. Isto pode ser visto mais claramente na figura 12 onde temos um gráfico da amplitude do pico principal em função do tempo para diversos valores de b . As curvas correspondentes a $b=0$ e $b=0.45$ na figura 12 foram interrompidas a partir dos instantes em que as amplitudes começam a oscilar devido à interação com ondas de menor amplitude.

A diferença entre os valores b_G e b_c não pode ser explicada completamente pela largura finita do pulso. Em particular, para $b=1$, a curva da amplitude em função do tempo coincide com a obtida para um pulso de largura $= 10$. Se o amortecimento fosse devido à largura finita, não deveriam

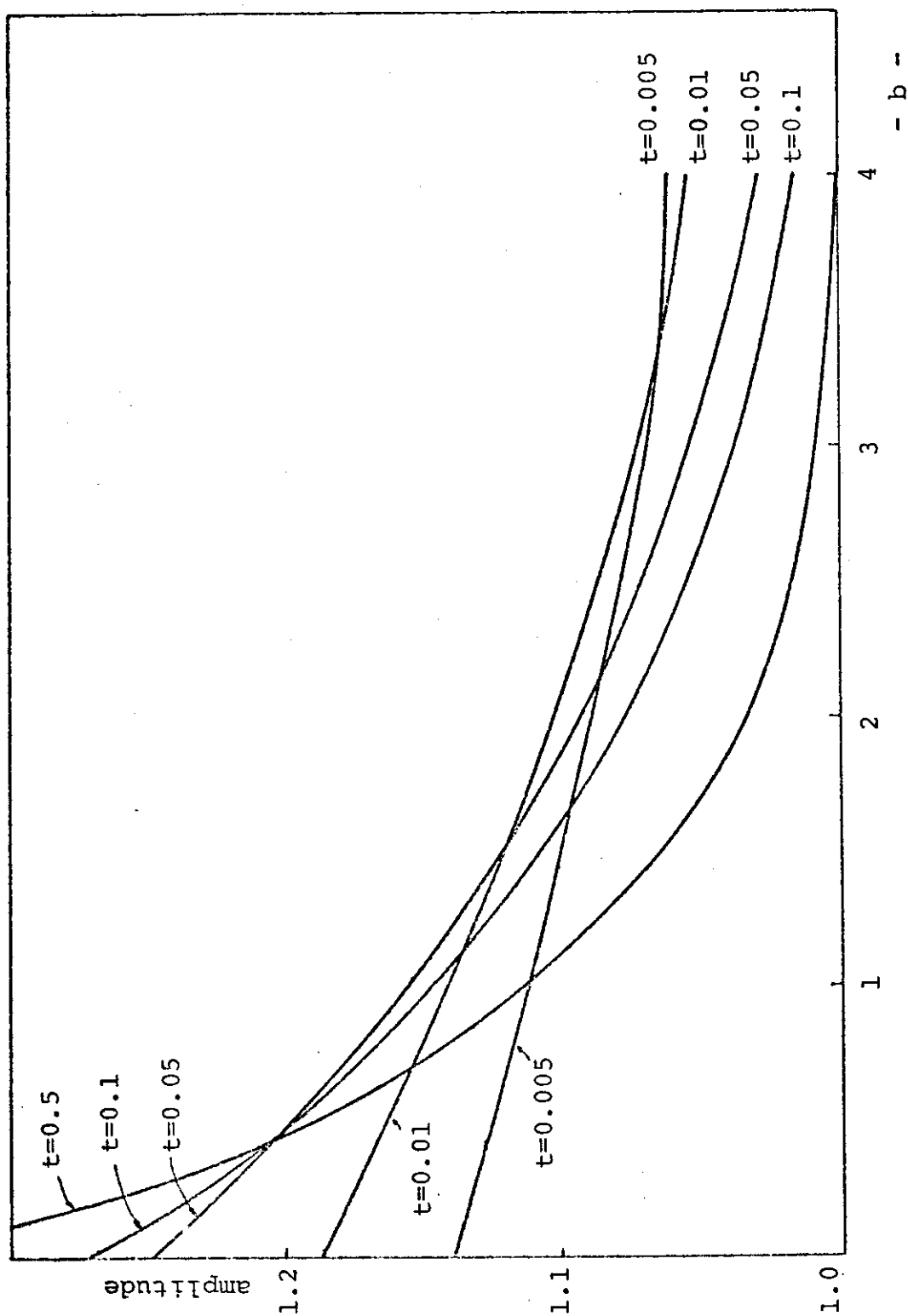


Figura 11: Amplitude do pico principal em função do coeficiente de amortecimento b para vários tempos .

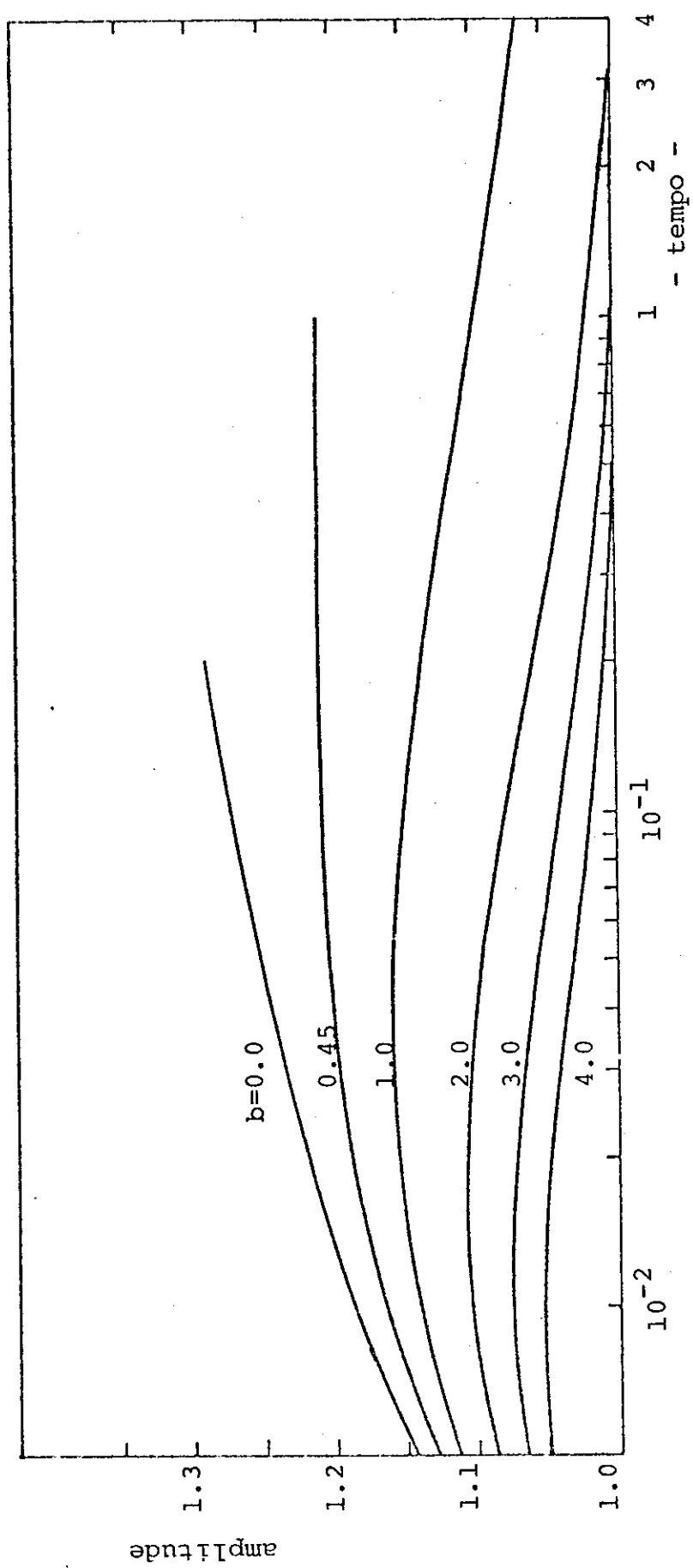


Figura 12: Amplitude do pico principal em função do tempo para diversos valores do coeficiente de amortecimento. (a escala do tempo é logarítmica).

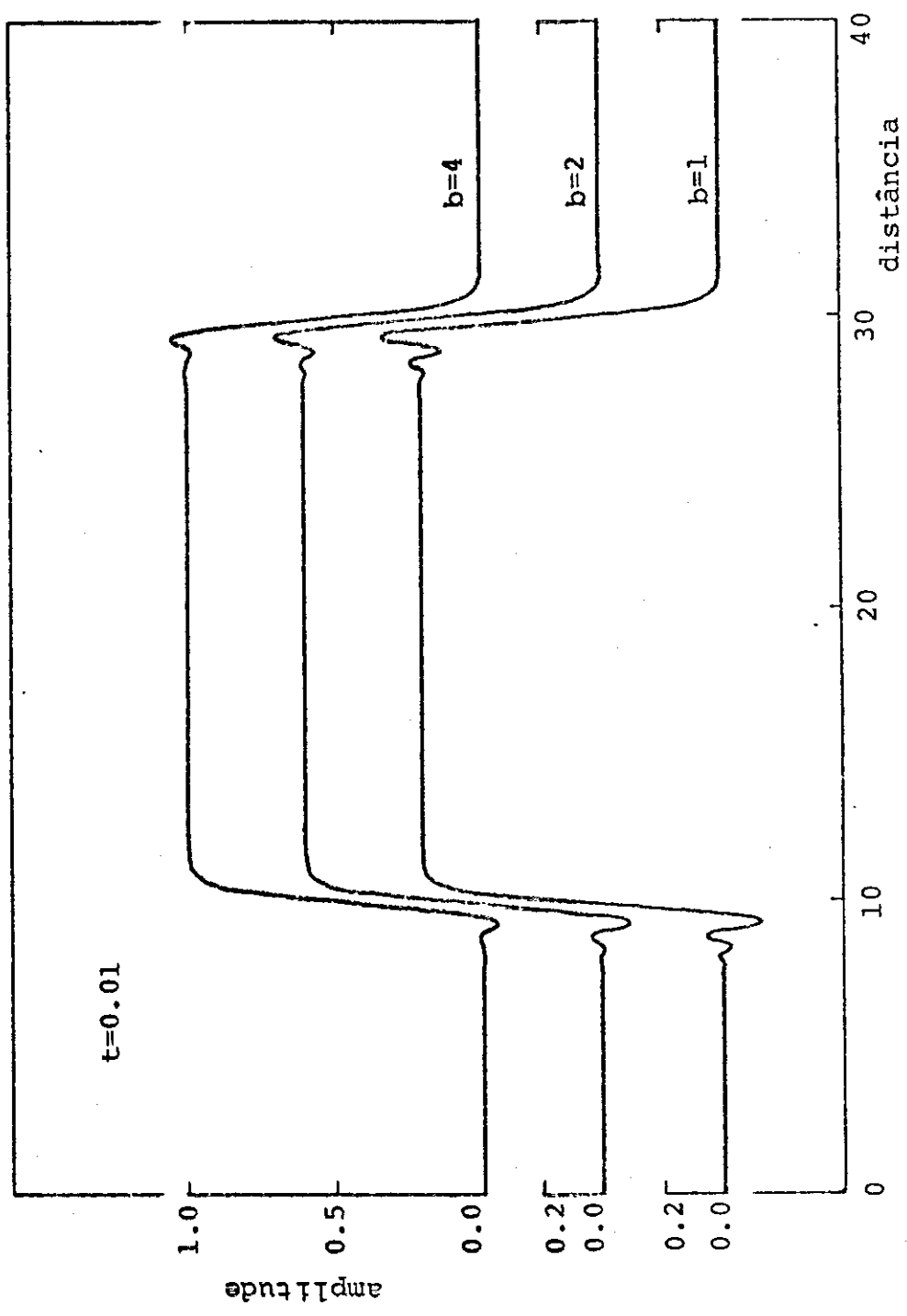


Figura 13: Soluções em $t=0.01$ para $b=1, 2$ e 4 , mostrando oscilações nos tres casos.

coincidir as duas curvas. Será necessário um estudo analítico mais profundo para entender melhor a diferença observada.

Observamos ainda que para tempo pequeno sempre se formam oscilações, até para $b = 4 > b_G$. É o que mostra a figura 13, onde temos as soluções para $b = 1, 2$ e 4 , em $t = 0.01$.

b) Sóliton

Discutiremos agora os resultados obtidos quando a perturbação inicial é um sóliton, que é solução exata da equação KdV (sem amortecimento). O sóliton inicial é dado pela função

$$u(x, t=0) = u_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - x_0}{\Delta} \right)$$

onde u_0 é a amplitude, x_0 a posição do pico e

$$\Delta = (6/u_0)^{1/2}$$

é a meia-largura a $0.42 u_0$.

Na figura 14 se mostra a evolução temporal de um sóliton cuja amplitude inicial é $u_0 = 1.3$; o coeficiente de amortecimento é $b = 0.5$. Observamos durante a propagação três

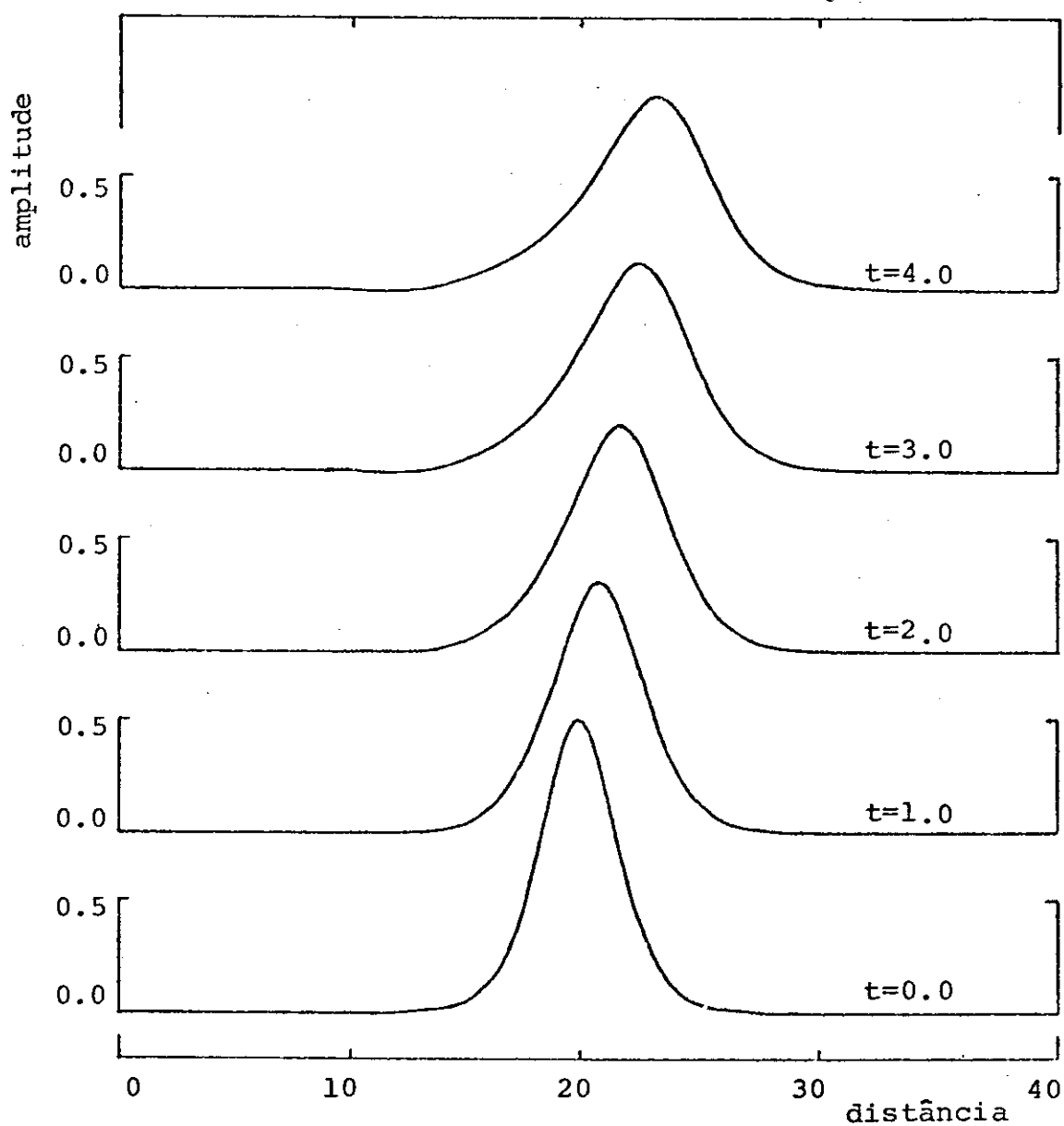


Figura 14: Evolução temporal do soliton com amortecimento ($b=0.5$). Amplitude inicial do s \acute{o} liton \acute{e} 1.3.

efeitos diferentes: diminuição da amplitude, alargamento e deformação. A deformação consiste no fato de que o sôliton perde sua simetria em torno do pico, tornando-se mais abrupto na frente que atrás. Com a finalidade de analisar melhor esses efeitos, medimos para cada tempo as posições do pico (x_p) e dos pontos à esquerda (x_-) e à direita (x_+) do pico, onde a função vale 0.42 do seu valor no pico. As trajetórias dos pontos x_- , x_p e x_+ são mostradas na figura 15. A reta tracejada nesta figura representa a trajetória que teria um sôliton de mesma amplitude inicial, sem amortecimento. Vemos portanto, que a velocidade do pico é praticamente a mesma de um sôliton sem amortecimento, apesar de a amplitude cair até aproximadamente 60% do valor inicial, como se vê na figura 16. O decaimento da amplitude com o tempo não segue nenhuma lei simples tipo logarítmica ou de potência.

Na figura 15 se vê claramente o alargamento e a distorsão do sôliton, notando que as três curvas são divergentes e que a distância entre os pontos x_+ e x_p é sempre menor que entre x_p e x_- .

Uma propriedade dos sôlitons que são soluções da equação de Korteweg-de Vries, sem amortecimento, é que o quadrado da meia-largura multiplicado pela amplitude é uma constante, independente da amplitude:

$$\Delta^2 u_0 = \text{constante}$$

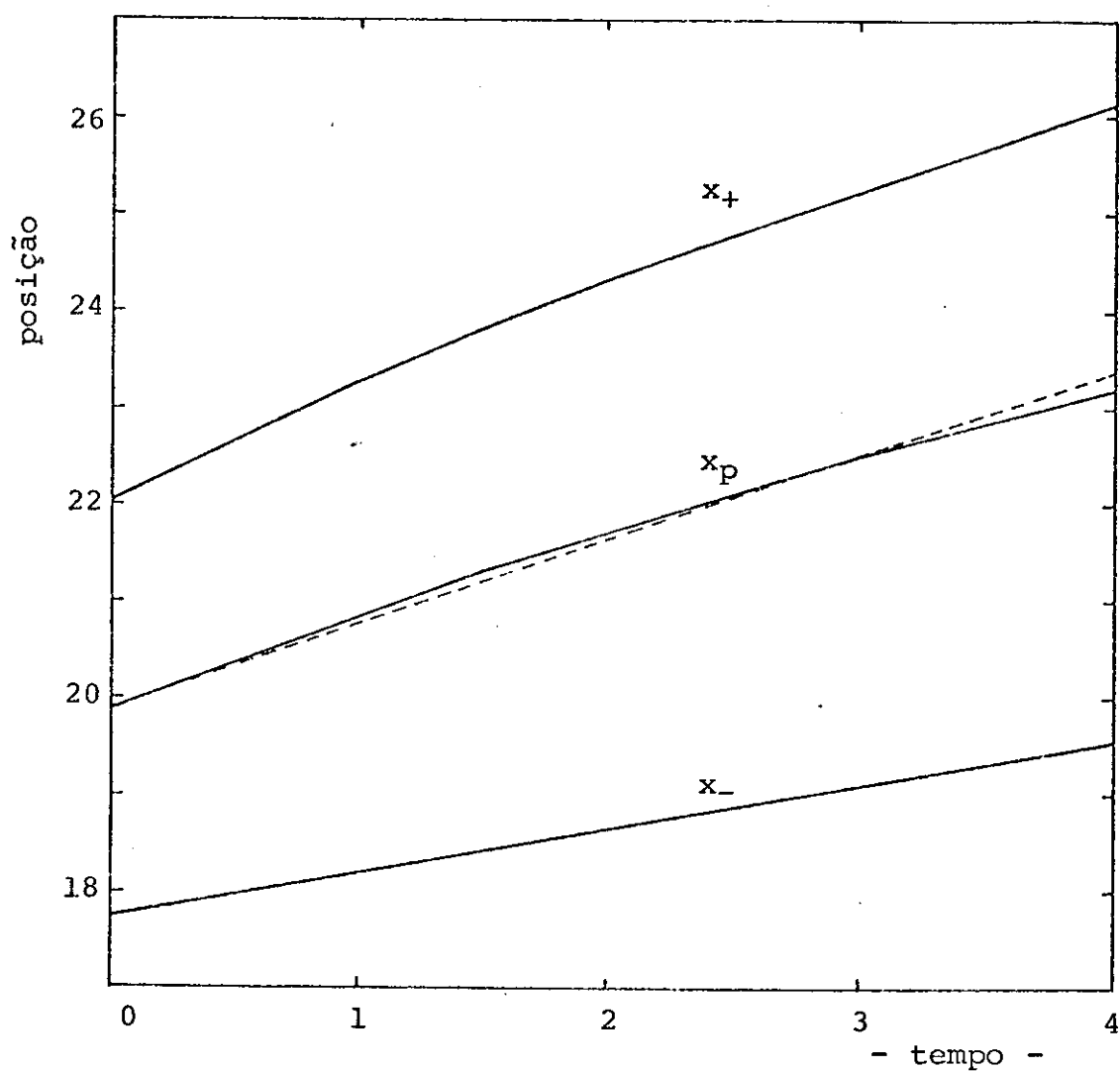


Figura 15: Trajetória dos pontos x_+ , x_p e x_- , mostrando o alargamento e a deformação do soliton com amortecimento. A linha tracejada é a trajetória do soliton ideal de mesma amplitude inicial.

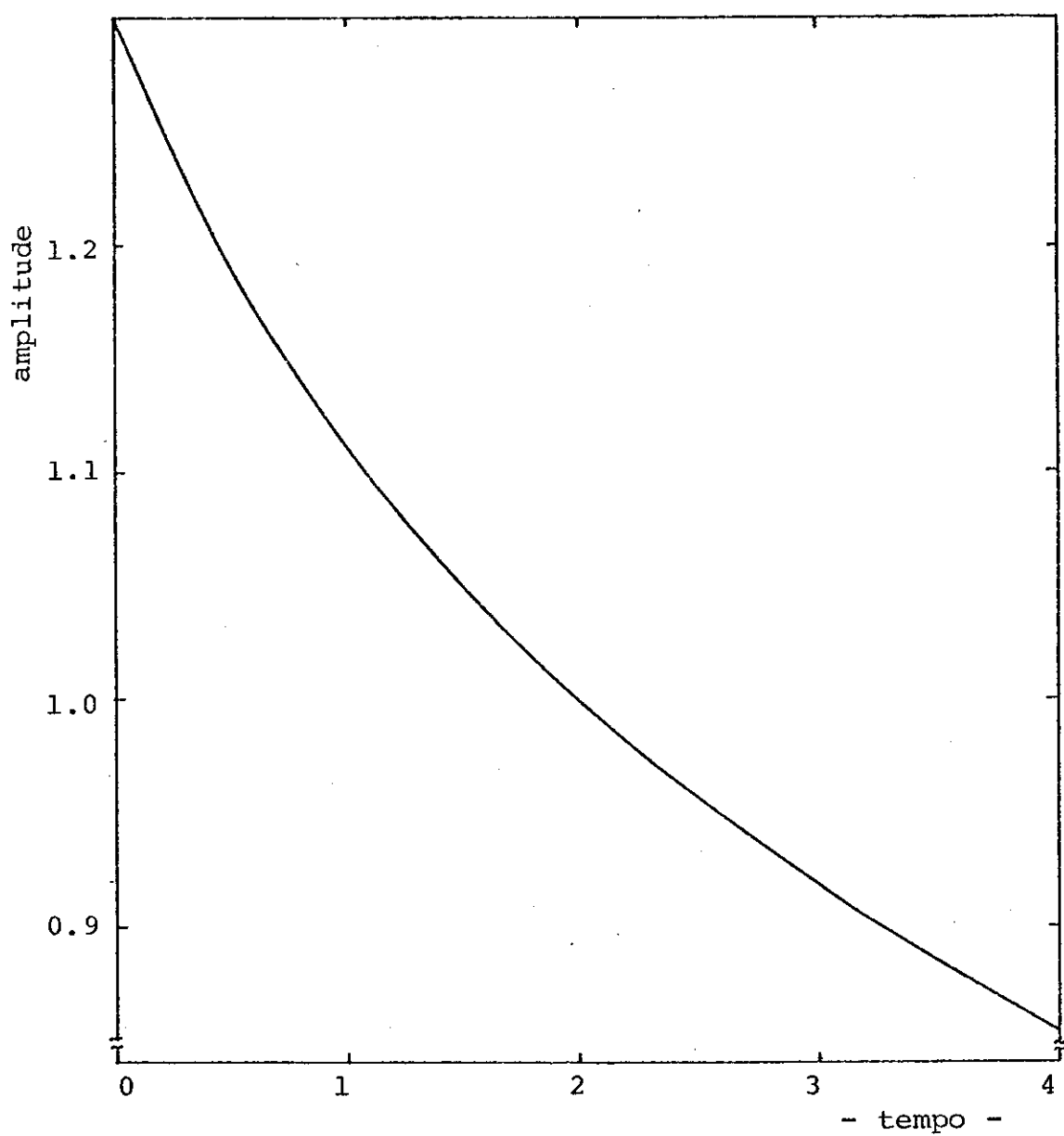


Figura 16: Amplitude do soliton com amortecimento em função do tempo .

($b=0.5$)

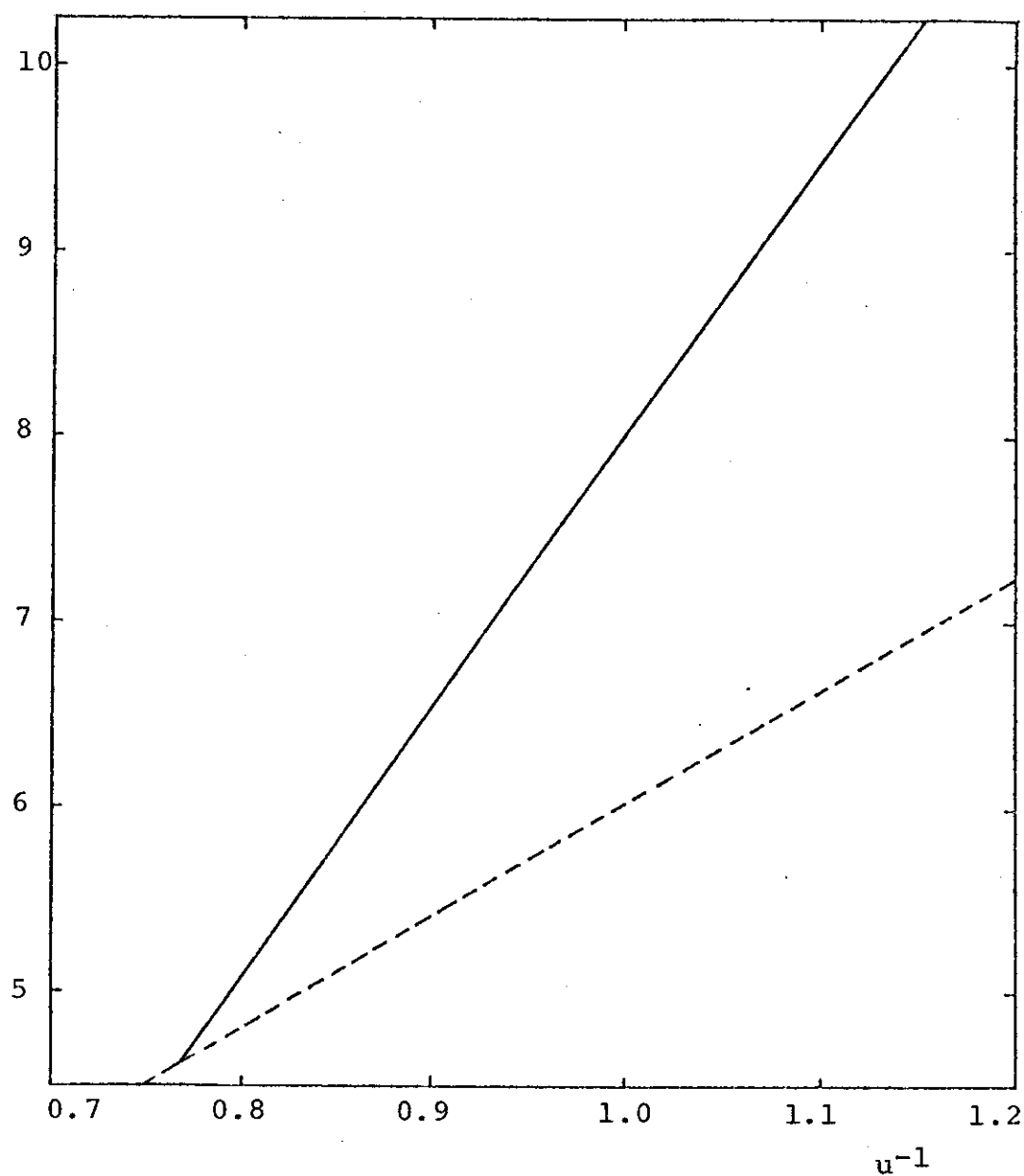


Figura 17: Meia-largura ao quadrado em função do inverso da amplitude para o sôliton com amortecimento (linha cheia) e para o soliton ideal (linha tracejada).

Na figura 17 apresentamos um gráfico do quadrado da meia-largura em função do inverso da amplitude para o sóliton ideal (sem amortecimento) e para o sóliton com amortecimento. A amplitude inicial do sóliton neste caso é 1.3 e o coeficiente de amortecimento é $b = 0.5$. Observamos que, como no caso ideal, o quadrado da amplitude do sóliton com amortecimento cresce linearmente com o inverso de sua amplitude. Observamos entretanto que o sóliton com amortecimento é mais largo que o sóliton ideal de mesma amplitude, pois a inclinação da reta com amortecimento da figura 17 é 2.5 vezes maior que a da reta ideal. Em todo caso é surpreendente que ocorra essa variação linear, apesar da distorção observada no curso da propagação.

Os sólitons íon-acústicos observados experimentalmente (refs. 19, 20 e 21), entretanto, são mais estreitos que o sóliton ideal de mesma amplitude e não apresentam a distorção observada em nossos resultados. Suas propriedades são bem explicadas pela teoria de íons quentes de Sakanaka (ref. 22). Podemos portanto, concluir que no caso de sólitons ion-acústicos, a viscosidade ou qualquer outro efeito que possa ser reduzido ao termo de 2^a derivada da equação KdV-B não são importantes para explicar os resultados experimentais.

V. CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Neste trabalho estudamos soluções numéricas da equação de Korteweg-de Vries-Burgers (KdV-B), que descreve ondas não-lineares em meios dispersivos e dissipativos.

O algoritmo numérico utilizado, proposto por Sjöberg foi por nós desenvolvido e testado para o caso da equação KdV-B.

Investigamos o efeito do termo de amortecimento ($b u_{xx}$) para dois tipos de perturbação inicial: um pulso quadrado e um sóliton.

Para o pulso quadrado verificamos que a transição de soluções oscilatórias para não-oscilatórias ocorre para $b = 0.45$, um valor bem mais baixo que o previsto por uma análise assintótica. Verificamos também que para tempo pequeno as soluções são sempre oscilatórias, até pelo menos $b = 4$.

Para o sóliton observamos uma distorção não-linear no curso da propagação, acompanhada de um alargamento e diminuição da amplitude. Dois fatos notáveis foram observados:

a) o s \acute{o} liton com amortecimento se propaga com velocidade praticamente constante e igual \grave{a} do s \acute{o} liton sem amortecimento, de mesma amplitude inicial; b) apesar da distors \tilde{o} observada durante a propaga \tilde{c} o, o quadrado da meia-largura do s \acute{o} liton com amortecimento varia linearmente com o inverso de sua amplitude, como acontece com o s \acute{o} liton ideal. Entretanto o s \acute{o} liton com amortecimento \acute{e} mais largo que o s \acute{o} liton ideal de mesma amplitude.

Como os s \acute{o} litons \tilde{i} on-ac \acute{u} sticos observados experimentalmente n \tilde{a} o apresentam as propriedades acima, concluimos que neste caso a viscosidade ou qualquer outro efeito que seja descrito pela 2 a derivada da equa \tilde{c} o KdV - B n \tilde{a} o s \tilde{a} o importantes para explicar os resultados experimentais.

O c \acute{o} digo computacional desenvolvido neste trabalho pode ser usado ainda para estudar intera \tilde{c} o de s \acute{o} litons em v \tilde{a} rias situa \tilde{c} oes e a evolu \tilde{c} o temporal de qualquer perturba \tilde{c} o inicial, com ou sem amortecimento. Pretendemos tamb \acute{e} m adapt \tilde{a} -lo ao estudo de ondas n \tilde{a} o-lineares em geometria cil \tilde{i} ndrica e esf \acute{e} rica, que s \tilde{a} o descritas por equa \tilde{c} oes KdV ou KdV - B modificadas.

BIBLIOGRAFIA

1. D.J. KORTEWEG & G. de Vries, "On the change of form of long waves in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave", Philos. Mag. 39, 422(1895).
2. N.J. ZABUSKY & M. D. Kruskal, "Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
3. ICHIKAWA, Y.H. & Wadati, M., "Solitons in Plasma and Other Dispersive Media - Dawn of Nonlinear Physics", Inst. of Plasma Phys., Nagoya University, Res. Report IPPJ-283 (1977).
4. C.H. SU & C.S. Gardner, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg - de Vries Equation and Burgers Equation", J. Math. Physics 10, 536 (1969).
5. T. TANIUTI, Progr. Theoret. Phys. Supplement 55, 1 (1974).

6. W. ZIELKE, "A nonlinear system of Euler - Lagrange Equations. Reduction to the Korteweg-de Vries Equation and periodic solutions", J. Math. Phys. 16, 1573 (1975).
7. J.J. STOKER, Water Waves (Interscience Publishers, Inc. New York, 1957).
8. C.S. GARDNER & G.K. Morikawa, "Similarity in the asymptotic behavior of collision - free hydromagnetic waves and water waves, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., Res. Report NYO-9082 (1960).
9. C.S. GARDNER & G.K. Morikawa, Comm. Pure. Appl. Math., 18, 35 (1965).
10. N.J. Zabusky, in Proc. of the Conference on Mathematical Models in the Physical Sciences, edited by Stefan Drobot (Prentice-Hall, Inc., New York, 1965, p. 99).
11. H. WASHIMI & T. Taniuti, "Propagation of Ion-Acoustic Solitary Waves of small amplitude" Phys. Rev. Lett., 17, 996 (1966).
12. H. GRAD & P.N. Hu, "Unified Shock Profile in a Plasma", Phys. of Fluids 10, 2596 (1967).
13. P.N. HU, "Collisional Theory of Shock and Nonlinear

Waves in a Plasma", Phys. of Fluids 15, 854 (1972).

14. JOHNSON, R.S. Thesis submitted for Ph.D., Univ. of London (1969).
15. R.S. JOHNSON, "Shallow Water Waves on a Viscous Fluid-The Undular Bore", Phys. of Fluids 15, 1693 (1972).
16. A. SJOBERG, "Numerical solution of the Korteweg-de Vries equation", Uppsala Univ., Depart. of Computer Sciences, Report NR 25 (1969).
17. R.D. RICHTMYER & K.W. Morton, "Difference Methods for Initial - Value Problems" (Interscience, 1967).
18. J. CANOSA & J. Gazdag, "The Korteweg-de Vries-Burgers Equation", J. Comp. Phys. 23, 393 (1977).
19. H. IKEZI, "Experiments on ion-acoustic solitary waves". Phys. of Fluids 16, 1668 (1973).
20. S. WATANABE, "Ion - acoustic solitons excited by a single grid", J. Plasma Phys., 14, 353(1975).
21. Ch. HOLLENSTEIN & M.Q. Tran, "Propagation of Ion Acoustic Solitons in a Warm Ion Plasma" Helvetica Physica Acta 49, 547 (1976).

22. P.H. SAKANAKA, "Formation and Interaction of Ion-
Acoustic Solitary Waves in a Collisionless Warm
Plasma", Phys. of Fluids 15, 304 (1972).