



LARISSA GAYDUTSCHENKO

MATRIZES DE MASSA E VIOLAÇÃO CP

CAMPINAS  
2013





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Instituto de Física Gleb Wataghin

LARISSA GAYDUTSCHENKO

MATRIZES DE MASSA E VIOLAÇÃO CP

Dissertação apresentada ao Instituto  
de Física Gleb Wataghin da Universidade  
Estadual de Campinas como parte  
dos requisitos exigidos para a obtenção  
do título de Mestre em Física

*Orientador:* Orlando Luis Goulart Peres

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA  
LARISSA GAYDUTSCHENKO, E ORIENTADA PELO  
PROF. DR. ORLANDO LUIS GOULART PERES

A handwritten signature in blue ink, likely belonging to the advisor, Orlando Luis Goulart Peres, is positioned above a horizontal line.

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin  
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

G254m Gaydutschenko, Larissa, 1987-  
Matrizes de massa e violação CP / Larissa Gaydutschenko. – Campinas, SP :  
[s.n.], 2013.

Orientador: Orlando Luis Goulart Peres.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Física Gleb Wataghin.

1. Matrizes de massa. 2. Neutrinos. 3. Matrizes de mistura. 4. Quebra  
espontânea de simetria. 5. Violação de CP (Física nuclear). I. Peres, Orlando Luis  
Goulart, 1969-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb  
Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Mass matrices and CP violation

**Palavras-chave em inglês:**

Mass matrices

Neutrinos

Mixing matrix

Spontaneous symmetry breaking

CP violation (Nuclear physics)

**Área de concentração:** Física

**Titulação:** Mestra em Física

**Banca examinadora:**

Orlando Luis Goulart Peres [Orientador]

Juan Carlos Montero Garcia

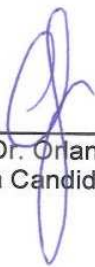
Carola Dobrigkeit Chinellato

**Data de defesa:** 27-06-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Física

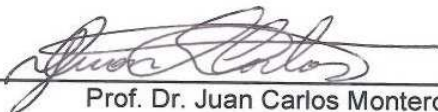
MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **LARISSA GAYDUTSCHENKO – RA 062100** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 27 / 06 / 2013.

**COMISSÃO JULGADORA:**



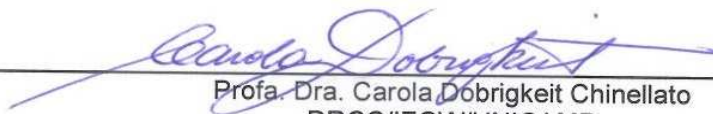
---

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres  
Orientador da Candidata - DRCC/IFGW/UNICAMP



---

Prof. Dr. Juan Carlos Montero Garcia  
IFT/UNESP



---

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato  
DRCC/IFGW/UNICAMP



# *Resumo*

O fenômeno de oscilação de neutrinos, já experimentalmente observado, só pode ser explicado se a massa dos neutrinos for diferente de zero. No entanto, até pouco tempo atrás, acreditava-se que neutrinos não tivessem massa.

O Modelo Padrão das partículas elementares ainda não é capaz de descrever a natureza massiva dos neutrinos, de forma que as matrizes de mistura para léptons (entre autoestados de gauge e autoestados de massa), análogas às matrizes de mistura de quarks, ainda não podem ser encontradas.

Através de uma pequena extensão do Modelo Padrão, é possível descrever uma física que leva em conta essas massas e que, portanto, nos fornece essas matrizes de mistura.

Essa extensão trata-se de nada mais que o acréscimo de uma nova partícula ao modelo, um lépton neutro que não interage por força fraca. Essa partícula é chamada de neutrino estéril. Portanto, acrescentando um ou mais neutrinos estéreis ao Modelo Padrão posso obter a matriz de mistura para léptons e, conseqüentemente, contar o número de parâmetros físicos que ela possui.

O interesse em contar esses parâmetros reside no fato de que encontrar o número de fases complexas presentes na matriz de mistura é equivalente a encontrar o número de fases de violação de simetria conjugação de carga e paridade (CP) para léptons.

Em 1967, o físico russo Andrei Sakharov propôs uma forma de explicar a assimetria bariônica (matéria-antimatéria) partindo de um estado simétrico. Para isso, algumas condições precisariam ser respeitadas pela física do universo. Uma dessas condições é que exista na natureza uma fonte de violação CP. Procurar essa violação em léptons foi o objetivo deste trabalho.

Assim, foi possível obter a matriz de mistura para léptons estendendo o modelo padrão pela adição de um neutrino estéril e levando em conta o caso geral de  $n$  famílias de léptons. Uma vez tendo encontrado a matriz de mistura, fizemos a contagem dos parâmetros.

Além abranger os cálculos usados para encontrar o número de fases complexas da matriz, a dissertação apresenta uma breve introdução à teoria quântica de campos, a simetrias discretas e ao mecanismo de quebra espontânea de simetria, conceitos necessários para o entendimento do trabalho realizado.

# *Abstract*

The neutrino oscillation phenomenon, already experimentally observed, can only be explained if neutrino masses are different from zero. However, till recently, it was believed that neutrinos were massless.

The Standard Model of elementary particles is yet not able to describe the massive nature of neutrinos, such that the lepton mixing matrix (between gauge eigenstates and mass eigenstates), analogous to the quark mixing matrix, can still not be found.

Through a small extension of the Standard Model, it is possible to describe physics that take into account these masses and, therefore, provides us with these mixing matrices.

This extension is nothing but the addition of a new particle, a neutral lepton that does not interact through weak force. This particle is called sterile neutrino. So, by adding one or more sterile neutrinos to the Standard Model, I can get the lepton mixing matrix and consequently count the number of physical parameters that it presents.

The interest in counting these parameters resides in the fact that finding the number of complex phases in the mixing matrix is equivalent to finding the number of charge conjugation-parity (CP) violation for leptons.

In 1967, the Russian physicist Andrei Sakharov proposed a way to explain the barionic asymmetry (matter-antimatter) beginning with a symmetric state. For that to work some conditions needed to be respected by the universe physics. One of them is that there must exist in nature a source of CP violation. Looking for that source as the leptonic sector of the particle physics was the goal of this project.

And finally it was possible to get the lepton mixing matrix extending the standard model by the addition of one sterile neutrino and taking into account the general case of  $n$  lepton families. Once we got the mixing matrix, we counted the physical parameters.

Besides presenting all the calculation used for finding the number of complex phases in the matrix, this thesis presents a brief introduction to quantum field theory, discrete symmetries and the spontaneous symmetry breaking mechanism, all of these concepts being necessary for the understanding of the work accomplished.



# *Sumário*

<b>Dedicatória</b>	p. xiii
<b>Agradecimentos</b>	p. xv
<b>1 Introdução</b>	p. 1
1.1 Objetivo do trabalho . . . . .	p. 2
1.2 Conceitos Fundamentais . . . . .	p. 4
1.2.1 Quiralidade e Helicidade . . . . .	p. 4
1.2.2 Transformações de Calibre . . . . .	p. 5
1.3 Convenção de unidades . . . . .	p. 6
1.4 Condições de Sakharov . . . . .	p. 7
1.4.1 Teoria . . . . .	p. 7
1.4.2 Neutrinos massivos e as condições de Sakharov . . . . .	p. 11
<b>2 Teorema spin-estatística</b>	p. 13
2.1 Conceitos . . . . .	p. 13
2.1.1 Comutadores e Anti-comutadores . . . . .	p. 14
2.1.2 Microcausalidade . . . . .	p. 14
2.1.3 Positividade . . . . .	p. 14
2.1.4 Estados simétricos e anti-simétricos . . . . .	p. 15
2.2 Estatística Quântica de Bose-Einstein . . . . .	p. 15

2.3	Estatística de Fermi-Dirac . . . . .	p. 16
2.4	Teorema spin-estatística . . . . .	p. 16
2.4.1	Contexto Histórico . . . . .	p. 17
2.4.2	Prova de Pauli . . . . .	p. 18
2.5	Prova de Weinberg . . . . .	p. 23
2.6	Conclusões . . . . .	p. 26
<b>3</b>	<b>Simetrias</b>	p. 27
3.1	Definição . . . . .	p. 27
3.2	Simetrias Contínuas . . . . .	p. 28
3.2.1	Teorema de Noether . . . . .	p. 29
3.3	Formulação matemática das simetrias . . . . .	p. 31
3.4	Simetrias Discretas . . . . .	p. 32
3.4.1	Paridade . . . . .	p. 33
3.4.2	Inversão temporal . . . . .	p. 33
3.4.3	Conjugação de carga . . . . .	p. 34
3.5	Evidências experimentais da quebra de simetrias . . . . .	p. 34
3.5.1	Yang-Lee: Violação de paridade nas interações fracas . . . . .	p. 34
3.5.2	Sistema $K^0 - \bar{K}^0$ : violação de simetria conjugação de carga-paridade	p. 35
3.6	Teorema CPT . . . . .	p. 37
<b>4</b>	<b>Quebra Espontânea de Simetria</b>	p. 39
4.1	Introdução . . . . .	p. 39
4.1.1	Teoria de Yang-Mills . . . . .	p. 41
4.2	Mecanismo de geração de massas . . . . .	p. 41

4.3	Caso Abelian	p. 48
<b>5</b>	<b>Teoria Quântica de Campos</b>	p. 51
5.1	Motivação	p. 51
5.2	Dinâmica dos campos clássicos	p. 52
5.2.1	Fundamentos	p. 53
5.2.2	A dinâmica a partir da Lagrangiana	p. 53
5.2.3	Campos de Klein-Gordon	p. 55
5.2.4	Campos de Maxwell	p. 56
5.2.5	Localidade dos campos	p. 58
5.2.6	Invariância de Lorentz	p. 58
5.2.7	A dinâmica a partir da Hamiltoniana	p. 61
5.3	Campos Livres	p. 62
5.3.1	Quantização canônica	p. 62
5.3.2	Oscilador Harmônico Simples	p. 64
5.3.3	Campo Escalar Livre	p. 67
5.4	O modelo padrão	p. 69
5.5	Interações fracas	p. 71
5.6	Teoria Eletrofraca	p. 72
<b>6</b>	<b>Matriz de massa para neutrinos</b>	p. 73
6.1	Neutrinos estéreis	p. 74
6.2	Modelo padrão estendido por neutrinos estéreis	p. 74
6.3	Matriz de massa	p. 81
6.4	Matriz de mistura com $n_0 = 1$ e $n = 1$	p. 94

6.5	Matriz de mistura com $n_0 = 1$ e $n > 1$ . . . . .	p. 98
-----	---	-------

6.6	Resultados . . . . .	p. 109
-----	----------------------	--------

<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	p. 111
----------	------------------	--------

	<b>Referências</b>	p. 113
--	--------------------	--------

## *Dedicatória*

Dedico este trabalho a meus pais por tudo o que fizeram por mim, espero um dia poder retribuir. A meu irmão pelos fins de semana com longas horas de *Halo 3* no nível legendário, que passavam como minutos. À minha irmã por todas as roupas emprestadas e por todos os cuidados para me arrumar quando saíamos. E finalmente à minha tia, que não só patrocinou, como torceu por mim o tempo todo.

E também a todos os meus amigos. Porque todos me ajudaram a chegar aqui. Não poderia deixar de dedicar um pouquinho disso a vocês.



## *Agradecimentos*

Agradeço a infindável paciência do Orlando e também a sua compreensão. Foi um amigo quando eu mais precisei. Obrigada.





# 1 *Introdução*

Este trabalho abrangeu uma gama de diferentes áreas relacionadas ao modelo padrão das partículas elementares e a simetrias. Assim, para apresentá-lo, seguiu-se a mesma linha de estudo percorrida para sua execução.

Neste primeiro capítulo, da introdução, são apresentadas quatro seções. A primeira seção explica o objetivo do trabalho que foi realizado. A seção seguinte, referente aos Conceitos Fundamentais, tem como propósito apresentar alguns conceitos básicos necessários para o entendimento da teoria, como a diferença entre quiralidade e helicidade e o que são transformações de calibre. A terceira seção deste capítulo apresenta a convenção de unidades adotada nesta dissertação. E a última seção deste capítulo, Condições de Sakharov, trata de uma breve introdução ao estudo de Andrei Sakharov que deu origem às condições de Sakharov e que, em última instância, motivou todo este trabalho. Esta seção tem como objetivo explicar um pouco melhor as condições de Sakharov e quais são as consequências de sua existência para a física.

A seguir apresenta-se o capítulo Teorema spin-estatística, que pode, no entanto, parecer um pouco fora de contexto. Trata-se de um comentário e breve explanação sobre um estudo realizado a respeito de duas diferentes provas para o teorema spin-estatística. Este é um teorema que fundamenta a base da teoria quântica de campos, definindo a estatística que separa fundamentalmente os bósons dos férmions. Em especial, o estudo está aqui apresentado porque foi o tema do exame de qualificação de mestrado. É um capítulo auto-contido e, apesar de muito interessante, não é fundamental para o entendimento do resto do trabalho realizado.

Por ser de fundamental importância para o trabalho, o capítulo seguinte foi reservado ao tratamento das simetrias. Este capítulo apresenta a diferença entre simetrias contínuas e discretas, apresenta a prova do teorema de Noether e formula as três simetrias discretas de

interesse: transformação de paridade, inversão temporal e conjugação de carga. A seção final deste capítulo apresenta ainda um estudo sobre violação CP, que seria a violação simultânea de duas simetrias discretas: a inversão espacial (ou paridade) e a conjugação de carga. É exatamente a quebra da simetria CP o que estamos procurando para o caso de neutrinos.

Seguindo a linha do estudo das simetrias o capítulo posterior, Quebra Espontânea de Simetria, equaciona o mecanismo de Higgs, partindo dos princípios fundamentais da quebra espontânea de simetria. É também de grande importância, sendo o mecanismo que possibilita a descoberta da matriz de mistura para quarks, exatamente a que inspira a procura de uma matriz de mistura para os férmions.

O capítulo seguinte, Teoria Quântica de Campos, apresenta de maneira pontual os principais pontos da construção da teoria quântica de campos, partindo da motivação para sua descoberta e apresentando os campos clássicos, a quantização de um campo escalar livre, uma introdução ao Modelo Padrão das partículas elementares, às interações fracas e finalmente à Teoria Eletrofraca.

Finalmente, o capítulo de maior importância para o trabalho e que, de fato, apresenta uma visão diferente daquela que pode ser encontrada em livros-texto, é o capítulo Matriz de massa para neutrinos. O estudo teve como base o artigo (1) e apresenta os cálculos para encontrar uma matriz de mistura para léptons através da adição, ao modelo padrão, de neutrinos estéreis. Após encontrar matriz de mistura, primeiro para o caso de um neutrino estéril adicionado a um modelo de uma família de léptons e, posteriormente, para o caso de um neutrino estéril adicionado a um modelo de  $n$  famílias, é realizada a contagem dos parâmetros de violação CP.

O capítulo final, Conclusões, resume o escopo do trabalho realizado apresentando uma visão geral do que foi estudado e dos resultados obtidos com o estudo.

## 1.1 Objetivo do trabalho

O modelo padrão, atualmente, não leva em conta o fato de que neutrinos possuem massa. Apesar de sabermos que isso não é, de fato, verdadeiro, ainda não há concordância em meio à comunidade científica sobre como tratar este problema. Pelo fato de o modelo padrão ser um modelo com resultados bastante favoráveis, acredita-se que a solução esteja em adotar

apenas uma extensão do modelo padrão já existente.

Concomitantemente a este fato, outro problema em aberto da física é explicar a notável assimetria entre a quantidade de matéria e antimatéria presente no nosso universo. O físico russo Andrei Sakharov propôs três condições que, se respeitadas pela natureza, seriam suficientes para explicar esse fenômeno de assimetria. Entre essas condições, Sakharov aponta a necessidade de que exista uma fonte de violação CP na natureza.

A violação CP já foi verificada para o caso de bósons, mas nunca foi encontrada para sistemas de férmions. No entanto, a quebra encontrada não é suficiente para causar a assimetria que vemos atualmente.

Voltando à ideia original, uma das possíveis soluções sugeridas para o problema das massas dos neutrinos, e que no caso trata-se da solução adotada para este trabalho, é a de adicionar neutrinos estéreis ao modelo padrão. Tais neutrinos não teriam nenhum tipo de interação fraca e seriam apenas os responsáveis pelo mecanismo de massa dos férmions neutros.

Os neutrinos estéreis foram propostos há alguns anos e, apesar de ainda não haver nenhuma prova concreta de sua existência, existem diversos resultados experimentais que apontam nessa direção.

Ao assumir a existência desses neutrinos é possível encontrar uma matriz de massa para férmions, análoga àquela encontrada para o caso de quarks. E, com a diagonalização dessa matriz de massa, encontramos a matriz de mistura dos férmions, que não existiria no caso de neutrinos não massivos.

Nessa matriz é possível identificar fases de violação CP que, se encontradas, talvez sejam suficientes para sustentar a condição de Sakharov que exige violação CP para explicar a assimetria matéria-antimatéria.

É com esse objetivo que este estudo foi iniciado e o principal material de estudo foi um artigo publicado por Yi Liao (1), onde este faz a contagem destes parâmetros livres na matriz de mistura encontrada para o caso de um neutrino estéril adicionado ao modelo. Este trabalho revisita o artigo de Liao e apresenta os resultados com o estudo.

## 1.2 Conceitos Fundamentais

Para o desenvolvimento do trabalho realizado foi necessário levar em conta alguns conceitos já bem estabelecidos na física. O objetivo desta seção é introduzir ao leitor estes conceitos que, a partir deste capítulo, serão utilizados de forma direta no desenvolvimento da dissertação.

Primeiramente, os conceitos de helicidade e quiralidade serão diferenciados. A seguir é apresentada a formulação das transformações de calibre (*gauge*), um conceito também de fundamental importância ao longo do trabalho.

### 1.2.1 Quiralidade e Helicidade

A *helicidade* de uma partícula é projeção de seu spin na direção do seu momento. Quando a direção do spin é a mesma do momento linear, a partícula é dita de mão direita, e quando o spin tem direção oposta ao momento, ela é dita de mão esquerda. É importante diferenciar o conceito de helicidade do conceito de quiralidade. A helicidade  $h$  é dada pela equação:

$$h = \vec{S} \cdot \hat{p}, \quad (1.1)$$

onde o momento linear da partícula é dado por  $\hat{p}$  e  $\vec{S}$  é o spin da partícula.

O conceito de *quiralidade* pode ser definido no âmbito da física da seguinte forma: uma entidade é dita quiral quando ela pode ser diferenciada de sua imagem no espelho. Assim, quando a imagem de um fenômeno físico visto no espelho pode ser diferenciada do fenômeno original, esse fenômeno pode ser chamado de quiral.

A quiralidade de uma partícula pode ser determinada sabendo se ela se transforma por uma representação de mão direita ou de mão esquerda do grupo de Pointcaré. O grupo de Pointcaré é um grupo de isomerias do espaço de Minkowski. Para a física de partículas o operador da quiralidade pode ser escrito como:

$$P^{RL} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5), \quad (1.2)$$

onde R quer dizer a projeção de mão direita e L quer dizer a projeção para a mão esquerda. Assim tenho que:

$$P^L \psi = \psi_L. \quad (1.3)$$

O campo  $\psi_L$  destrói uma partícula quiral de mão esquerda ou constrói uma antipartícula quiral de mão direita, enquanto um campo  $\psi_R$  destrói uma partícula quiral de mão direita ou constrói uma antipartícula quiral de mão esquerda.

Quando a partícula não tem massa, a quiralidade pode representar a mesma quantidade que a helicidade. Isso acontece porque partículas de massa zero viajam na velocidade da luz e, conseqüentemente, não existe nenhum referencial no qual você pode ver essa partícula viajando na direção contrária. A helicidade neste caso é a mesma para todos os referenciais, ou seja, é um invariante relativístico.

No entanto, para o caso de partículas massivas, e em especial para o caso dos neutrinos, sempre é possível encontrar um referencial em que o momento linear da partícula aponta na direção contrária da original, revertendo então sua helicidade, mas não sua quiralidade. Há uma escolha de referencial em que uma partícula de mão direita pode ser vista como uma partícula de mão esquerda, do ponto de vista de helicidade. Assim, a helicidade não é um invariante relativístico.

A matriz  $\gamma_5$  é um invariante de Lorentz, e conseqüentemente o projetor de quiralidade deve ser, também, escrito em termos da matriz  $\gamma_5$ , sendo conseqüentemente um invariante relativístico. Não há mudança de referencial que torne uma partícula de mão direita, do ponto de vista quiral, em uma partícula de mão esquerda.

Das três forças descritas pela Teoria Quântica de Campos: forte, fraca e eletromagnética, apenas uma não é cega à quiralidade da partícula: a força fraca. A interação fraca diferencia partículas com quiralidades diferentes.

Na teoria quântica de campos, quando a Lagrangeana que descreve a interação em questão pode ser separada em duas partes, uma parte de mão direita e uma parte de mão esquerda, e essas duas partes podem ser tratadas independentemente então essa Lagrangeana descreve um modelo quiral. A Teoria Quântica de Campos é uma teoria quiral.

### 1.2.2 Transformações de Calibre

Transformações de calibre (ou gauge, do inglês), são uma simetria para diversas teorias físicas. Tanto uma teoria clássica de campos quanto uma teoria quântica de campos podem apresentar simetria de calibre. Impondo invariância de calibre é possível encontrar diversas

propriedades de grande importância para a teoria.

Campos que respeitam a teoria de gauge são invariantes por uma transformação de fase.

Existem dois tipos de transformações de gauge. As chamadas transformações de calibre globais, ou do primeiro tipo, são aquelas em que a fase é alterada homogeneamente para todos os pontos do espaço-tempo. Por exemplo:

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ie\lambda} \phi(x). \quad (1.4)$$

Aqui a letra  $e$  na exponencial é um parâmetro desta transformação. Em notação de teoria de grupos esta é uma transformação do tipo  $U(1)$ .

São chamadas de transformações de calibre local, ou do segundo tipo, aquelas em que a fase é alterada de forma diferente para cada ponto do espaço-tempo. Por exemplo:

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ie\lambda(x)} \phi(x). \quad (1.5)$$

As transformações de calibre locais impõe uma restrição muito maior à Lagrangiana do que as transformações de calibre globais, uma vez que no caso local cada ponto do espaço-tempo se transforma de forma diferente.

### 1.3 Convenção de unidades

Para o desenvolvimento desta dissertação e, em especial, para os capítulos sobre Teoria Quântica de Campos e posteriores, foi utilizada a convenção das chamadas *unidades naturais*.

Tenho que duas das principais constantes universais possuem dimensões tais que:

$$\begin{aligned} [c] &= \text{espaço} \cdot \text{tempo}^{-1} \\ [\hbar] &= \text{espaço}^2 \cdot \text{massa} \cdot \text{tempo}^{-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Assim, para utilizar unidades naturais, defino que:

$$c = \hbar = 1. \quad (1.7)$$

Escolho também que  $4\pi\epsilon_0 = 1$ . Na tabela abaixo encontram-se algumas quantidades

fundamentais e como podem ser escritas em unidades naturais:

Unidade Natural	Valor Métrico
$1 \text{ eV}^{-1}$ de comprimento	$1.97 \times 10^7 \text{ m}$
$1 \text{ eV}$ de massa	$1.78 \times 10^{-36} \text{ kg}$
$1 \text{ eV}^{-1}$ de tempo	$6.58 \times 10^{-16} \text{ s}$

Finalmente, a métrica espacial de Minkowski usada neste trabalho é tal que:

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

A convenção de unidades adotada aplica-se a todo o trabalho apresentado.

## 1.4 Condições de Sakharov

Por ser a motivação principal deste trabalho, esta seção foi reservada para explicar com mais detalhes o que são as condições de Sakharov e sua importância para explicar a assimetria matéria-antimatéria no universo.

### 1.4.1 Teoria

A teoria de expansão do universo pressupõe um estado inicial denso de matéria, este que aniquilaria qualquer antimatéria presente. Assim, entende-se que seria impossível ter quantidade semelhante de antimatéria durante esse desenvolvimento. E, até onde sabemos, o universo resultante é assimétrico no quesito matéria-antimatéria (2). Isso porque as evidências de que o universo que habitamos seja realmente formado apenas por matéria são fortes.

De fato, de toda a informação que possuímos, seja ela provinda de observações ou de explorações, todos os outros corpos celestes existentes são formados por matéria, assim como nosso planeta. Mas a razão pela qual a quantidade de matéria formada passou a ser maior do que a de antimatéria ainda permanece desconhecida.

Assim, sendo  $B = b - \bar{b}$ , onde  $b$  é o número de bárions e  $\bar{b}$  é o número de antibárions, hoje percebemos que  $B > 0$ . Há algumas teorias que procuram explicar esse fato. Entre elas:

1. *O universo sempre foi assimétrico quanto ao número de bárions e anti-bárions.*

Essa teoria propõe que após o Big-Bang  $B > 0$  e que isso permanece até hoje. Apesar de ter sido a teoria de maior aceitação no passado, hoje já não prevalece como a mais adequada. Entre outras razões, porque é muito provável que qualquer assimetria inicial fosse rapidamente eliminada devido a considerações termodinâmicas.

2. *O universo começou neutro, tal que  $B = 0$ , e permanece assim até hoje.*

Aqui a ideia é a de que o universo se expandiu tão rapidamente que nem todo par matéria-antimatéria se aniquilou antes que flutuações randômicas formadas por matéria/antimatéria se separassem e assim, nesses lugares onde houve predominância de uma das duas, formaram-se aglomerações onde uma ou outra geraram os corpos celestes. Neste caso, deveria ser possível detectar radiação provinda dos lugares do espaço onde acontece mistura entre esses clusters de matéria com os de antimatéria. E por causa disso raios cósmicos de alta energia deveriam se apresentar como uma radiação anisotrópica de aniquilação com quantidades iguais de matéria e antimatéria, já que se espera que a quantidade de matéria e antimatéria presente no universo seja a mesma. A evidência experimental aponta na direção contrária desta teoria, já que na radiação cósmica o número de prótons supera o de antiprótons por uma escala de  $10^4$  para 1.

3. *O universo começou neutro, tal que  $B = 0$ , mas houve uma assimetria matéria-antimatéria durante algum instante de seu desenvolvimento e isso acabou resultando na presença final apenas de matéria.*

Este modelo é chamado de bariogênese, já que a matéria é criada após o Big Bang. Deve preceder a nucleossíntese - a criação dos nucleons e de núcleos leves dos primeiros átomos. E assim, como a criação dos quarks aconteceu nos primeiros  $10^{-2}$  segundos, a bariogênese deve ter acontecido antes disso. É a teoria mais aceita atualmente e é a premissa que vamos assumir como correta.

Assim, assumimos que no princípio da formação do universo o número de bárions e antibárions era o mesmo, mas que logo após o Big Bang houve um momento em que as condições físicas presentes acarretaram numa assimetria entre estas quantidades e ao final



do processo apenas bárions permaneceram. A causa dessa assimetria inicial permanece um problema em aberto.

O físico russo Andrei Sakharov propôs para este problema um modelo capaz de explicar a existência dessa assimetria como consequência de três condições (3). Uma dessas condições seria a violação simultânea de duas simetrias: conjugação de carga e paridade, ou seja, violação CP. As duas simetrias serão explicadas com maior detalhe em um capítulo posterior.

No modelo proposto por Sakharov a assimetria seria uma consequência da violação CP durante a expansão não estacionária do universo quente, durante seu estágio superdenso. O efeito não foi observado experimentalmente, mas foi demonstrado na teoria. Vale ressaltar que Sakharov apenas lista as condições mínimas para a assimetria, sem procurar entender o mecanismo da bariogênese.

Para justificar a assimetria neste momento três condições precisam ser respeitadas:

1. Existência de ao menos um processo com violação de número bariônico;
2. O sistema deve apresentar violação de simetria de conjugação de carga (C) e de simetria conjugação de carga-paridade (CP);
3. Existência de interações fora do equilíbrio térmico.

O primeiro item é claro, pois se todas as reações conservarem número bariônico, nunca haveria assimetria. Ou seja, deve haver uma reação do tipo:

$$X \rightarrow Y + B, \quad (1.9)$$

onde  $X$  e  $B$  tem número bariônico zero, enquanto  $B$  tem número bariônico maior do que zero. Mas isso não é suficiente. Assim entramos na segunda condição, pois se C for uma simetria do universo, então toda reação em que o número bariônico não é conservado terá uma reação conjugada correspondente, de tal forma que todo bárion resultante da reação será compensado pelo antibárion resultante da reação conjugada. Ou seja, se

$$\Gamma(X \rightarrow Y + B) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{Y} + \bar{B}), \quad (1.10)$$

então não haverá assimetria. Com os dois processos acontecendo no mesmo ritmo, o número bariônico vai se conservar ao longo do tempo. Então violação de C é uma condição necessária,

mas ainda não suficiente.

Supondo uma reação em que há violação do número bariônico e são criados bárions de mão esquerda,  $X \rightarrow Q_e Q_e$ . Se a natureza respeita a simetria de carga-paridade, CP, então o processo inverso por CP deve acontecer na mesma proporção e velocidade de  $\bar{X} \rightarrow \bar{Q}_d \bar{Q}_d$ , tal que:

$$\Gamma(X \rightarrow Q_e Q_e) + \Gamma(X \rightarrow Q_d Q_d) = \bar{\Gamma}(X \rightarrow \bar{Q}_e \bar{Q}_e) + \bar{\Gamma}(X \rightarrow \bar{Q}_d \bar{Q}_d). \quad (1.11)$$

As reações de conjugação de carga têm larguras diferentes, mas as duas somadas ainda conservam número bariônico e, conseqüentemente, é preciso haver violação de CP para que a taxa de bariogênese supere a de antibariogênese. E assim fica clara a segunda condição de Sakharov.

A terceira condição é necessária do ponto de vista de que ainda que exista violação C, CP e de número bariônico, considerações termodinâmicas precisam ser feitas. A diferença de energia entre uma partícula e sua antipartícula correspondente é dada por:

$$\Delta E = m_{\text{matéria}} - m_{\text{antimatéria}} = 0. \quad (1.12)$$

A distribuição de Boltzman diz que no equilíbrio térmico deve haver a mesma quantidade de matéria e antimatéria, pois outros processos acontecendo simultaneamente trazem de volta o número de bárions e antibárions para o equilíbrio. Este argumento também deruba a possibilidade de que qualquer assimetria matéria/antimatéria inicial permaneceria posteriormente.

E assim, com as três condições satisfeitas é possível chegar a um sistema B-assimétrico.

Vale ressaltar que as condições de Sakharov não são suficientes para explicar a assimetria matéria-antimatéria. Uma vez satisfeitas as condições, ainda é preciso descrever o mecanismo através do qual acontece a bariogênese.

Violação de simetria CP já foi observada nas interações fracas para mésons (4). Mas a quebra encontrada não é suficiente para explicar a assimetria encontrada atualmente. Assim, permanece a necessidade de encontrar mais fontes de violação CP na natureza. E esse é um dos principais motivadores para esse projeto.

Neste trabalho procura-se encontrar indícios da violação carga-paridade para léptons,

mais especificamente em sistemas de neutrinos. Para isso seria preciso encontrar fases complexas na matriz de massa de neutrinos, como será explicitado posteriormente.

### 1.4.2 Neutrinos massivos e as condições de Sakharov

A primeira questão que surge neste momento é entender como as condições listadas na seção anterior dão sentido ao trabalho demonstrado nesta tese. O ponto principal, neste caso, seria a segunda condição de Sakharov, que afirma que o universo deve apresentar violação de simetria de conjugação de carga (C) e de simetria conjugação de carga-paridade (CP). Conforme mencionado, sabe-se que a violação CP já foi identificada para mésons (4). No entanto, isso foi identificado a baixas energias e, como sabemos, no estado inicial do universo as energias eram muito altas. O efeito da violação fica diluído para o caso de altas energias e, portanto, o mecanismo de quebra encontrado não é capaz de cumprir a condição descrita por Sakharov.

Para o caso de neutrinos poderíamos ter esse efeito com neutrinos suficientemente massivos. Ou seja, para respeitar a condição de Sakharov seria preciso ocorrer violação CP a altas energias e isso só seria possível para partículas com massas muito maiores do que a escala eletrofraca. Neste caso, o setor leptônico, e mais especificamente os neutrinos, no caso de apresentarem massa, poderiam explicar esse fenômeno. Os neutrinos de mão direita adicionados ao modelo padrão devem ter massas de ordem muito maior do que a escala eletrofraca.

Quantitativamente, supondo que exista um certo processo que vai gerar a assimetria e sendo  $\mathcal{M}(i \rightarrow j)$  a amplitude para a transição entre um dado estado  $i$  para um dado estado  $j$ , a invariância CP vai implicar (5):

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j}). \quad (1.13)$$

Aqui,  $\bar{j}$  e  $\bar{i}$  são os estados com conjugação de carga e com inversão espacial (ou seja, os estados de conjugação CP) de  $i$  e  $j$ , respectivamente. E respeitando a unitariedade da matriz  $S$  de espalhamento, que liga os estados  $i$  e  $j$ , então a condição abaixo deve ser respeitada:

$$\sum_j |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_j |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2. \quad (1.14)$$

Respeitando então a invariância CP, isso implicaria em:

$$|\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2. \quad (1.15)$$

Onde a equação (1.15), acima, representa uma reação que produz partículas e antipartículas em mesma quantidade. O número de partículas criadas no estado  $j$ , partindo do estado  $i$ , é o mesmo número de partículas criadas no estado  $\bar{j}$  partindo do estado  $\bar{i}$ . A assimetria só seria verificada, para a produção destas partículas para o caso em que há quebra da simetria CP.

Para que este efeito não fique diluído para o caso de altas energias, tais partículas precisam ter massas de ordem muito maior do que a escala eletrofraca. Assim, conforme apresentado, se encontrada violação CP para sistemas de neutrinos, neutrinos muito massivos poderiam explicar o fenômeno.

## 2 *Teorema spin-estatística*

O desenvolvimento de duas provas para o teorema spin-estatística será apresentado neste capítulo. O teorema spin-estatística é uma das bases da teoria quântica de campos, apresentada no capítulo 5. Aqui é apresentado um estudo que explicita duas provas distintas deste teorema. Este estudo e a posterior comparação destas provas foi um trabalho realizado ao longo do mestrado e apresentado como base para o exame de qualificação (EQM). Sua principal referência foi o artigo de M. Massimi e M. Redhead (6).

O interesse no desenvolvimento das duas provas reside no fato de que a prova de Pauli fundamentou-se em duas hipóteses iniciais, enquanto a prova de Weinberg fundamentou-se em apenas uma hipótese.

O teorema spin-estatística é a relação encontrada que prova que o spin de uma partícula está diretamente ligado à estatística que ela obedece. Mais especificamente, é o teorema que demonstra que férmions e bósons comportam-se de maneiras fundamentalmente diferentes no que diz respeito à ocupação de estados de energia.

Pode-se considerar a prova de Weinberg mais "fundamental" do que a de Pauli, sendo que esta última permanecia indireta para o caso de férmions desde sua formulação original. A ideia principal aqui é apontar as diferenças entre essas duas provas.

### 2.1 Conceitos

Para compreender as duas formulações é preciso definir a princípio alguns conceitos fundamentais.

### 2.1.1 Comutadores e Anti-comutadores

Defino como a operação de comutação entre dois operadores genéricos  $A$  e  $B$  a seguinte relação:

$$[A, B]_- = AB - BA. \quad (2.1)$$

E, para a operação de anticomutação:

$$[A, B]_+ = AB + BA. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Microcausalidade

Outro conceito fundamental é o da chamada microcausalidade. A microcausalidade pode ser expressa como a comutatividade de quantidades físicas para um intervalo do tipo espaço. Isso seria equivalente a dizer que, para duas quantidades físicas  $A$  e  $B$  quaisquer, locais, se  $A$  e  $B$  respeitam a microcausalidade, então tenho que:

$$[A(x), B(y)]_- = 0 \quad \text{para} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (2.3)$$

Neste caso, dizemos que o intervalo  $(x - y)^2 < 0$  é um intervalo do tipo espaço.

A microcausalidade é um requerimento relativístico no qual toda a teoria quântica de campos está fundamentada. E será uma das hipóteses assumidas para a prova do teorema spin-estatística.

Usando teoria quântica clássica, ou seja, no caso em que os operadores representam quantidades físicas, a condição da microcausalidade requer a comutatividade de quaisquer dois operadores que pertencem a dois pontos distintos do espaço-tempo, se estes dois pontos não puderem ser ligados por um sinal (caso do intervalo tipo espaço). Essa comutatividade significa que as quantidades físicas que estão associadas a cada um destes operadores podem ser determinadas precisamente de forma independente e simultânea (7).

### 2.1.3 Positividade

Uma matriz  $H$ , hermitiana, é dita positiva definida se todos os autovalores a ela associados forem positivos e reais. Como uma consequência disso, tenho que todos os valores esperados

de  $H$  serão positivos:

$$\langle x|H|x\rangle > 0. \quad (2.4)$$

Assim, se  $H$  for a matriz que representa uma Hamiltoniana, esta Hamiltoniana será positiva definida se, ao diagonalizar  $H$ , todos os elementos da diagonal forem positivos.

### 2.1.4 Estados simétricos e anti-simétricos

Um estado dito simétrico para partículas indistinguíveis é descrito por um vetor de estado que não muda de sinal sob permutação das variáveis de espaço e spin dessas partículas. A equação abaixo representa o vetor de estado simétrico para duas partículas idênticas:

$$1/\sqrt{2}(|a_1^r\rangle \otimes |a_2^s\rangle + |a_1^s\rangle \otimes |a_2^r\rangle). \quad (2.5)$$

Aqui o índice 1 indica que o autoestado está ocupado pela partícula 1 e o índice 2 indica que o autoestado está ocupado pela partícula 2. Tenho também dois autovalores, um autovalor associado a cada autoestado. Assim,  $a^r$  é o autovalor associado a um dos autoestados e  $a^s$  é o autovalor associado ao outro autoestado.

O estado anti-simétrico para partículas indistinguíveis, no entanto, é descrito por um vetor de estado que muda de sinal sob a permutação das variáveis de espaço e spin dessas partículas. A equação abaixo representa o vetor de estado anti-simétrico para duas partículas idênticas:

$$1/\sqrt{2}(|a_1^r\rangle \otimes |a_2^s\rangle - |a_1^s\rangle \otimes |a_2^r\rangle). \quad (2.6)$$

## 2.2 Estatística Quântica de Bose-Einstein

A estatística quântica pode ser dividida em duas partes, a estatística de Bose-Einstein e a estatística de Fermi-Dirac. Esta seção procura descrever brevemente a primeira.

Tendo sido elaborada em 1924 por Bose e Einstein, separadamente, foi proposta para descrever o comportamento de um gás de fótons. Esta estatística impõe que todas as partículas que a respeitam devem ocupar somente estados simétricos.

Sua principal característica é que ela permite que mais de uma partícula idêntica ocupe

o mesmo estado de energia. Mais do que isso, nesta estatística não há limite superior para o número de partículas idênticas que podem ocupar o mesmo estado de energia ao mesmo tempo.

As partículas que respeitam esta estatística são chamadas de bósons, em clara homenagem a um de seus descobridores.

## 2.3 Estatística de Fermi-Dirac

Foi elaborada também separadamente por Fermi e Dirac no ano de 1926. Procurava descrever um gás que respeitasse o princípio da exclusão de Pauli.

Descrevendo exatamente o caso oposto da estatística bosônica, propõe que as partículas que a respeitam devem ocupar somente estados anti-simétricos.

Sua principal característica é o fato de que ela não permite que mais de uma partícula idêntica ocupe um mesmo estado de energia ao mesmo tempo. Ou seja, cada estado de energia pode ser ocupado por no máximo uma partícula.

Também em homenagem a um de seus descobridores, as partículas que respeitam esta estatística são chamadas de férmions.

## 2.4 Teorema spin-estatística

Toda partícula tem um número quântico associado ao seu valor de momento angular intrínseco, o spin. Com respeito a esse valor, as partículas podem ter spin inteiro ou semi-inteiro.

O teorema de spin-estatística faz a seguinte conexão:

**Partículas de spin inteiro** respeitam estatística de Bose-Einstein e são por isso chamadas de bósons.

**Partículas de spin semi-inteiro** respeitam estatística de Fermi-Dirac e são por isso chamadas de férmions.

Trata-se de uma afirmação bastante forte a fazer, dividindo todas as partículas elemen-



tares fundamentalmente em sua natureza, com comportamentos completamente distintos estatisticamente.

Para provar o teorema spin-estatística, portanto, é preciso verificar se o spin da partícula (inteiro ou semi-inteiro) está relacionado com uma regra de comutação ou com uma regra de anticomutação para os campos que descrevem essa partícula.

Se o valor de spin estiver associado a uma regra de comutação, a estatística respeitada é a de Bose-Einstein, onde os estados permitidos são simétricos. E, caso contrário, se o valor de spin estiver associado a uma regra de anticomutação, a estatística respeitada é a de Fermi-Dirac, onde os estados permitidos são anti-simétricos.

### 2.4.1 Contexto Histórico

Em 1928, Dirac anunciou a solução para a equação do elétron (8). Seria a descoberta da equação de Dirac. É dada por:

$$\left[ \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \right] \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.7)$$

Aqui  $\gamma^{\mu}$  são as matrizes de Dirac ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ),  $\psi$  são os campos de Dirac (espinores), que representam partículas de spin 1/2, e  $x^{\mu}$  é o vetor posição em quatro dimensões.

Lembrando que as matrizes de Dirac satisfazem  $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$ , sendo que  $g^{\mu\nu}$  é a métrica de Lorentz contravariante, de diagonal  $(1, -1, -1, -1)$ .

Procurava-se uma equação de onda relativística que tivesse soluções positivas e negativas separadas. Dirac não conseguiu esse feito pois, para o caso de campos externos dependentes do tempo, era preciso lidar com transições de estados de energia positiva para estados de energia negativa. Mas em 1930 Dirac descreveu o pacote de onda constituído pela superposição de estados de energia negativa como o movimento de um elétron de carga  $+e$  (e energia positiva), no campo eletromagnético original.

Isso o aproximou da descoberta do pósitron e deu a ele uma ideia de como lidar com as soluções de energia negativa. E é assim que Dirac propõe a existência do chamado mar de Dirac, um mar de férmions ocupando infinitos estados de energia negativa. Todos os elétrons do mundo teriam uma tendência a cair para estes estados e o fariam, não estivessem eles

ocupados por outros elétrons.

### 2.4.2 Prova de Pauli

E finalmente, em 1940, Pauli publica a primeira prova do teorema spin-estatística (9). Isso acontece em meio ao contexto científico da dificuldade de explicar as soluções de energia negativa que resultavam da equação de Dirac proposta.

A prova de Pauli para o teorema se baseava em dois postulados diferentes:

- **Microcausalidade**
- **Positividade da Energia**

Para o caso de bósons, era suficiente o requerimento da microcausalidade. Mas para o caso de férmions, o requerimento da microcausalidade não era suficiente, por isso Pauli precisou recorrer ao argumento da positividade para completar a prova. O problema é que, recorrendo ao requerimento da positividade, Pauli estava se baseando no trabalho de Dirac.

Por anos o teorema ficou à espera de uma prova que fosse direta também para o caso de férmions, mais "fundamental". Mas isso só foi atingido em 1964, com Weinberg. Em seu trabalho, Weinberg precisou recorrer apenas a um postulado, o requerimento relativístico da microcausalidade. Apesar de ter sido encontrada há quase 50 anos, a prova de Weinberg ainda não é utilizada nos livros-texto. Normalmente são utilizadas provas análogas àquela realizada por Pauli. Por serem análogas as provas para partículas de spin inteiro e spin semi-inteiro, só será apresentada a prova para o caso do spin semi-inteiro. Também porque, exatamente para este caso, a prova difere para Pauli e para Weinberg. Conforme mencionado, a prova de Pauli, para o caso dos bósons, precisa apenas postular a microcausalidade. No entanto, para o caso de férmions é preciso postular, além da microcausalidade, a positividade da energia.

O desconforto com a prova de Pauli residia exatamente no fato de que ela era indireta para os férmions. Greiner e Reinhardt apresentam uma prova praticamente análoga à de Pauli, mas mais didática. Ela também é indireta no caso de férmions e será apresentada aqui. A diferença entre Pauli e Greiner e Reinhardt é simplesmente o fato de que os últimos

utilizam os operadores criação e destruição de partículas, no espaço de Fock, enquanto a prova original de Pauli usa a visão do mar de Dirac. Mas são provas análogas.

O ponto de partida é a equação de Dirac, já explicitada em (2.7)

As soluções dessa equação, os espinores, descrevem as partículas de spin 1/2:

$$\left[ \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.8)$$

O interesse está em encontrar o valor do comutador (+) ou do anticomutador (-), dados pela equação abaixo, (2.9):

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y) \right]_{\pm}. \quad (2.9)$$

Isso porque  $\psi$  é o campo que descreve a partícula, e o momento canônico associado a esse campo é proporcional a  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$ .

A equação para encontrar o momento canônico,  $\hat{P}$ , é dada por:

$$\hat{P} = -i\hbar \nabla. \quad (2.10)$$

Posso expressar a solução de  $\psi(\mathbf{x}, t)$  como uma expansão de onda plana, conforme a equação:

$$\psi_p^{(r)}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} w_r(\mathbf{p}) e^{-i\epsilon_r(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2.11)$$

Há quatro soluções para o espinor de Dirac  $w_r(\mathbf{p})$ , onde o índice  $r$  indica qual a solução que está sendo usada. Assim,  $r = 1, 2$  denota soluções de energia positiva, tais que  $(E = +\omega_p \equiv +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ . E  $r = 3, 4$  denota soluções de energia negativa, tais que  $(E = -\omega_p \equiv -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ . Mas expressando  $\psi(\mathbf{x}, t)$  como expansão de onda plana conforme a equação (2.11), estou trabalhando com funções e não com operadores. Não posso calcular comutadores ou anticomutadores de funções. Para resolver este problema, substituo os campos de Dirac  $\psi(\mathbf{x}, t)$  e  $\psi^{\dagger}(\mathbf{x}, t)$  por operadores de campo  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$  e  $\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}, t)$ , respectivamente. Quero agora verificar se a relação de anticomutação para esses operadores de campo respeita a microcausalidade, testando portanto a estatística de Fermi-Dirac. Assim:

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y) \right]_{+} = 0 \quad \text{para} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (2.12)$$

Quantizando as equações de  $\psi(\mathbf{x}, t)$  ( $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ ) para  $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$  ( $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ ) encontram-se:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^4 \int d^3p \hat{a}(\mathbf{p}, r) \psi_p^r(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^4 \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r) \psi_p^r(\mathbf{x}, t). \quad (2.14)$$

Onde os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  respeitam as seguintes regras de anticomutação:

$$[\hat{a}(\mathbf{p}, r), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}', r')]_+ = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'} \quad (2.15)$$

$$[\hat{a}(\mathbf{p}, r), \hat{a}(\mathbf{p}', r')]_+ = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}', r')]_+ = 0. \quad (2.16)$$

Vou agora redefinir os operadores. Os espinores  $w_r(\mathbf{p})$  podem ser separados de acordo com o nível de energia que representam, positiva ou negativa. Chamando de  $u(\mathbf{p}, s)$  e  $v(\mathbf{p}, s)$  as soluções de energia positiva e negativa, respectivamente, posso relacionar:

Energia positiva	Energia negativa
$w_1(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, +1)$	$w_3(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}, -1)$
$w_2(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, -1)$	$w_4(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}, +1)$

Redefinindo então os operadores de partícula e buraco da seguinte forma:

Energia positiva	Energia negativa
$\hat{a}(\mathbf{p}, 1) \equiv \hat{b}(\mathbf{p}, +1)$	$\hat{a}(\mathbf{p}, 3) \equiv \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, -1)$
$\hat{a}(\mathbf{p}, 2) \equiv \hat{b}(\mathbf{p}, -1)$	$\hat{a}(\mathbf{p}, 4) \equiv \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, +1)$

Esses novos operadores respeitam relações de anticomutação análogas àquelas definidas previamente. Assim, antes eu tinha:

$$[\hat{a}(\mathbf{p}, r), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}', r')]_+ = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'} \quad (2.17)$$

$$[\hat{a}(\mathbf{p}, r), \hat{a}(\mathbf{p}', r')]_+ = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, r), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}', r')]_+ = 0. \quad (2.18)$$

E para os novos anticomutadores, que estão agora representados no espaço de Fock,

tenho:

$$\left[ \hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right]_+ = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (2.19)$$

$$\left[ \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s') \right]_+ = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}. \quad (2.20)$$

Sendo assim, posso somar todas as soluções, integrar sobre todos os momentos e obter a solução da equação de Dirac:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{\omega_p}} (b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s)) e^{-ip \cdot x} + d^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{+ip \cdot x}. \quad (2.21)$$

Substituo nessa expressão encontrada os operadores de campos para os espinores. Assim:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{\omega_p}} (\hat{b}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s)) e^{-ip \cdot x} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{+ip \cdot x}. \quad (2.22)$$

Posso agora usar o operador de transformação de Lorentz obtendo uma forma explícita para os espinores normalizados, conforme as equações a seguir:

$$u(\mathbf{p}, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} u(0, s) \quad (2.23)$$

$$v(\mathbf{p}, s) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(\omega_p + m)}} v(0, s). \quad (2.24)$$

A relação de anticomutação para  $\hat{\psi}(x)$  e  $\hat{\bar{\psi}}(y)$ , onde  $\hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^\dagger \gamma^0$ , pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y) \right]_+ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \\ \sum_s &\left( u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot (x-y)} + v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) e^{+ip \cdot (x-y)} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

A somatória sobre spins dos espinores normalizados  $u$  e  $v$ , leva aos operadores de projeção:

$$\sum_s u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \right) \quad (2.26)$$

$$\sum_s v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \left( \frac{\not{p} - m}{2m} \right). \quad (2.27)$$

Dessa forma, o anticomutador pode ser escrito como:

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)]_+ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} ((\not{p} + m)e^{-ip \cdot (x-y)} - (-\not{p} + m)e^{+ip \cdot (x-y)}) = \quad (2.28)$$

$$(i\not{\nabla} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] = (i\not{\nabla} + m)i\Delta(x-y). \quad (2.29)$$

Sendo  $\Delta(x-y)$  a função de comutação que Jordan e Pauli introduziram para o caso especial do campo eletromagnético. Essa função é invariante de Lorentz e satisfaz a propriedade fundamental:

$$\Delta(x-y) = 0 \text{ para } (x-y)^2 < 0. \quad (2.30)$$

Portanto, consigo o anticomutador:

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y) \right]_+ = (i\not{\nabla} + m)i\Delta(x-y). \quad (2.31)$$

Isso mostra que partículas de spin semi-inteiro respeitam a microcausalidade quando a relação utilizada entre elas é a de anticomutação. Ou seja, se isso é verdade, não há nenhum impedimento para que respeitem a estatística de Fermi-Dirac, que é aquela para a qual as partículas respeitam a relação de anti-comutação.

Agora é preciso testar o comutador, já que o caso do anticomutador provou respeitar a microcausalidade. Isso porque o fato de que a microcausalidade é respeitada quando utilizo a anticomutação não descarta o fato de que ela pode também ser respeitada no caso da comutação. Se for este o caso, chega-se ao impasse.

Mas primeiro, usando a comutação, encontro:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y) \right]_- &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} \sqrt{\frac{m}{\omega_{p'}}} \\ &\sum_{s,s'} \left( \left[ \hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right]_- u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}', s') e^{-ip \cdot x + ip' \cdot y} + \right. \\ &\left. \left[ \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s), \hat{d}(\mathbf{p}', s') \right]_- v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}', s') e^{+ip \cdot x - ip' \cdot y} + \text{termos mistos} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Em um cálculo análogo e aplicando as relações de comutação correspondentes, abaixo:

$$\left[ \hat{b}(\mathbf{p}, r), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', r') \right]_- = \left[ \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, r), \hat{d}(\mathbf{p}', r') \right]_- = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'}. \quad (2.33)$$

Chega-se na mesma equação obtida para o caso da anticomutação, ou seja, a causalidade é respeitada. Assim, mostrou-se que tanto a relação de anticomutação quanto a relação de comutação, para campos espinoriais, respeitam a microcausalidade. Mas é preciso descartar uma das estatísticas. Para sair deste impasse Pauli recorre a mais um postulado, o da positividade. Postulando agora a positividade da energia, basta descobrir se uma das relações, de comutação ou anticomutação, vai violar este postulado.

Mas olhando para a Hamiltoniana do campo de Dirac quantizado por um comutador, dada por:

$$\hat{H} = \sum_s \int d^3p \omega_p (\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, s) \hat{b}(\mathbf{p}, s) - \hat{d}(\mathbf{p}, s) \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s)). \quad (2.34)$$

É possível verificar que essa Hamiltoniana não é positiva definida, o que viola o postulado da positividade da energia. Isso elimina a estatística de Bose-Einstein para o caso de partículas de spin 1/2. E o teorema spin-estatística para os férmions está provado. Ou seja, foi mostrado que assumindo a relação de anticomutação e a relação de positividade da energia é possível encontrar apenas uma solução que satisfaz a condição de microcausalidade, exigida. Assim, as partículas de spin 1/2 satisfazem relações de anticomutação. O teorema não elimina a possibilidade de outro possível tipo de estatística. Ele apenas prova que partículas de spin semi-inteiro podem respeitar estatística de Fermi-Dirac, mas não podem respeitar estatística de Bose-Einstein.

## 2.5 Prova de Weinberg

Agora que a prova de Pauli foi apresentada, vamos ver como Weinberg, para o mesmo caso (férmions) realiza a prova do mesmo teorema. A prova de Weinberg foi apresentada como uma prova secundária em um trabalho onde ele procurava calcular as regras de Feynman para partículas de spin genérico e, com isso, construir uma matriz-S invariante de Lorentz (10).

A matriz-S faz a relação entre os estados iniciais e finais de um sistema físico que sofre um processo de espalhamento. É uma matriz unitária que liga os estados das partículas no espaço de Hilbert. Por isso seu ponto de vista era completamente diferente. A matriz-S é pode ser escrita como:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T\hat{\mathbf{H}}(x_1) \dots \hat{\mathbf{H}}(x_n). \quad (2.35)$$

Heisenberg procurava encontrar a matriz  $\hat{S}$  de espalhamento, conforme a equação (2.35), mas que respeitasse invariância de Lorentz. Para fazer isso era preciso impor uma condição equivalente à de que, para intervalos  $(x - y)$  do tipo espaço, a equação de microcausalidade fosse respeitada:

$$[\hat{\mathbf{H}}(x), \hat{\mathbf{H}}(y)]_- = 0. \quad (2.36)$$

Na equação de microcausalidade, (2.36), acima,  $x$  e  $y$  são pontos no espaço-tempo. O sinal negativo ao lado dos colchetes indica a relação de anti-comutação.

Weinberg impõe a invariância de Lorentz da matriz  $S$  e isso implica em uma condição equivalente ao requerimento da microcausalidade, representada aqui pela equação (2.36). Isso é muito diferente do que foi feito por Pauli, pois Weinberg quer a invariância de Lorentz, que só é possível se a ação foi um escalar. A ação é um escalar se os campos  $H$  puderem ser trocados de lugar devido ao ordenamento temporal e essa condição só será respeitada se a equação (2.36) for verdadeira. Pauli impunha a microcausalidade a campos, mas para Weinberg a única condição era a invariância de Lorentz, que impõe uma condição que é igual à microcausalidade do Hamiltoniano.

Em sua notação, Weinberg introduz os campos de criação e aniquilação de partículas:

$$\hat{\psi}^+(x) = (2\pi)^{3/2} \sum_s \int d^3p \sqrt{\frac{1}{\omega_p}} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} \hat{b}(\mathbf{p}, s) \quad (2.37)$$

$$\hat{\psi}^-(x) = (2\pi)^{3/2} \sum_s \int d^3p \sqrt{\frac{1}{\omega_p}} v(\mathbf{p}, s) e^{+ip \cdot x} \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}, s). \quad (2.38)$$

Onde  $u$  e  $v$  são funções de onda que satisfazem as equações de Dirac, para frequências positivas e negativas. E  $b$  e  $d$  são os operadores definidos tais que:

$$[\hat{b}(\vec{p}, s), \hat{b}^\dagger(\vec{p}', s')]_+ = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'} \quad (2.39)$$

$$[\hat{d}^\dagger(\vec{p}, s), \hat{d}(\vec{p}', s')]_+ = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'}. \quad (2.40)$$



Ou seja,  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$  são os operadores aniquilação e criação para partículas, e  $\hat{d}$  e  $\hat{d}^\dagger$  para antipartículas. Agora, com os campos representados conforme as equações (2.37) e (2.38), acima, procura-se encontrar o valor do comutador destes campos:

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y) \right]_{\pm} = 0. \quad (2.41)$$

Weinberg faz a seguinte combinação linear:

$$\hat{\psi}(x) = k\hat{\psi}^+(x) + \lambda\hat{\psi}^-(x). \quad (2.42)$$

Onde as constantes  $k$  e  $\lambda$  podem ser determinadas se, para  $(x - y)$  sendo um intervalo do tipo espaço, a relação de comutação ou anticomutação entre os campos for respeitada. Sendo que para os operadores  $b$  e  $d$ , que respeitam as equações (2.39) e (2.40), acima, tenho:

$$\left[ \hat{b}(\mathbf{p}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right]_{\pm} = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (2.43)$$

$$\left[ \hat{d}(\mathbf{p}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right]_{\pm} = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}. \quad (2.44)$$

A condição de microcausalidade para o campo de Dirac é dada por:

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y) \right]_{\pm} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_p} \left[ |k|^2 \sum_s u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot (x-y)} \right. \quad (2.45)$$

$$\left. \pm |\lambda|^2 \sum_s v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) e^{+ip \cdot (x-y)} \right]. \quad (2.46)$$

Pode ser simplificada pelo uso de operadores de projeção:

$$\left[ \hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y) \right]_{\pm} = (i\not{\nabla} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \left[ |k|^2 e^{-ip \cdot (x-y)} \pm (-) |\lambda|^2 e^{ip \cdot (x-y)} \right]. \quad (2.47)$$

A integral que aparece no resultado vai ser exatamente a função  $\Delta(x - y)$ . Ou seja:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \left[ |k|^2 e^{-ip \cdot (x-y)} \pm (-) |\lambda|^2 e^{ip \cdot (x-y)} \right] = i\Delta(x - y). \quad (2.48)$$

Isso quer dizer que a integral se resume à mesma função de Pauli e Jordan mencionada para a prova de Pauli, contanto que  $-|k|^2 = \pm(-)|\lambda|^2$ , ou seja  $|k| = |\lambda|$ , sendo necessário escolher o sinal  $+$  no lado direito da equação. Lembrando que  $\Delta(x - y) = 0$  para  $(x - y)^2 < 0$

é uma propriedade dessa função de comutação, e essa propriedade nada mais é do que o requerimento da **microcausalidade**. Assim, para respeitar a microcausalidade, preciso escolher o anticomutador e conseqüentemente a estatística de Fermi-Dirac.

## 2.6 Conclusões

A condição da microcausalidade, definida anteriormente, vale para a comutatividade de quantidades físicas, como o caso de bilineares associados ao campo  $\psi$ . Ou seja, a condição:

$$\left[ \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x), \bar{\psi}(y)\Gamma\psi(y) \right]_- = 0 \quad \text{para} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (2.49)$$

Mas essa condição implica que deve ser respeitada a relação:

$$\left[ \psi(x), \bar{\psi}(y) \right]_+ = 0. \quad (2.50)$$

Ou a relação:

$$\left[ \psi(x), \bar{\psi}(y) \right]_- = 0. \quad (2.51)$$

Essas foram as relações impostas ao campo espinorial para a prova de Pauli e Weinberg. Mas a condição da microcausalidade expressa o fato de que se  $x - y$  é um intervalo do tipo espaço, medições de um bilinear realizadas no ponto  $x$  não podem afetar medições deste mesmo bilinear realizadas no ponto  $y$ . Considerações como essa só fazem sentido se o campo com o qual se está lidando é mensurável, da mesma forma que o campo eletromagnético é mensurável, por exemplo. Mas os campos de Dirac **não são mensuráveis** nesse sentido. A invariância de Lorentz da matriz  $S$ , usada por Weinberg, implica na causalidade dos campos mesmo que não sejam mensuráveis. Finalmente conclui-se que a prova de Weinberg é análoga à prova de Pauli, exceto pela condição de positividade no caso dos férmions, que não é necessária. No caso de Weinberg isso torna, finalmente, a prova do teorema spin-estatística direta tanto para bósons quanto para férmions.

## 3 *Simetrias*

Este capítulo introduz o estudo de simetrias do ponto de vista da física. Em especial, são apresentadas as três simetrias discretas, inversão temporal, conjugação de carga e inversão espacial, e também o teorema de Noether, que liga leis de conservação a simetrias contínuas presentes em sistemas físicos.

### 3.1 Definição

Uma transformação aplicada a um sistema é dita uma simetria do sistema quando o sistema original é indistinguível do sistema obtido após a aplicação da transformação.

Na natureza as simetrias dividem-se em dois grupos diferentes: simetrias discretas e simetrias contínuas. Se um sistema físico respeita algum tipo de simetria, diversas implicações disso podem ser identificadas e estudadas, de forma a facilitar o entendimento da lei física que governa o sistema. Um exemplo é a existência de regras de seleção, implicação da presença de uma simetria discreta, que facilitam a previsão do comportamento de um sistema quântico.

As simetrias são uma importante ferramenta para a construção e verificação de modelos físicos, e procurar sua conservação ou quebra facilita a consolidação do modelo físico proposto para descrever o sistema em questão. Na física de partículas, em especial, as simetrias são muito importantes. Há, inclusive, modelos de supersimetrias.

As simetrias de um problema podem facilitar enormemente os cálculos necessários para resolvê-lo e diversas vezes argumentos de simetria são usados para descartar soluções incoerentes. Ao mesmo tempo, a quebra de simetrias pode ajudar também a explicar o comportamento de um sistema físico.

Este trabalho procura, afinal, pela quebra simultânea de duas simetrias discretas (Con-

jugação de Carga e Paridade) e é fundamental que o conceito de simetrias e, em especial, das simetrias discretas, seja explicitado.

A formulação matemática de uma simetria discreta varia de acordo com a teoria utilizada para estudá-la. Como uma primeira aproximação, é importante verificar quais as diferentes versões para as simetrias discretas a serem estudadas.

Serão estudadas as versões da teoria clássica, teoria relativística e teoria quântica. As simetrias a serem formuladas são a de paridade e inversão temporal e, no caso quântico, conjugação de carga. Antes disso, é preciso introduzir alguns conceitos importantes, explicitados abaixo, bem como diferenciar as simetrias contínuas das simetrias discretas.

## 3.2 Simetrias Contínuas

São chamadas de simetrias contínuas aquelas cujo operador correspondente à transformação pode ser continuamente ligado à identidade. O grupo dos geradores de tais transformações é formado por um conjunto infinito, não contável.

A presença de uma simetria contínua tem uma implicação muito forte sobre um sistema físico. O teorema de Noether mostra que qualquer simetria *contínua* implica na presença de uma lei de conservação associada. Segue uma demonstração do teorema de Noether, que vale apenas para simetrias internas de um sistema.

Para transformações contínuas existe uma representação unitária que, na vizinhança da identidade, tem como possível representação dos elementos do grupo a seguinte forma:

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n i\alpha_j G_j \right\}, \quad (3.1)$$

onde  $\alpha_j$  são os  $n$  parâmetros reais do grupo e  $G_j$  são os geradores do grupo. Tendo explicitamente fatorado um  $i$ , o fato de que  $U$  é unitário implica na hermiticidade de  $G_j$ . Considerando por simplicidade um grupo com apenas um parâmetro, se as transformações representadas por  $U$  são transformações de simetria do sistema, então a Hamiltoniana deve ser invariante sob essas transformações, de tal forma que:

$$H \rightarrow H' = U^\dagger(\alpha) H U(\alpha) = H. \quad (3.2)$$

Isso é o mesmo que dizer que  $[H, U] = 0$ . Para  $\alpha$  infinitesimal, isso implica:

$$(1 - i\alpha G)H(1 + i\alpha G) \cong H - i\alpha[G, H] = H. \quad (3.3)$$

O que é o mesmo que dizer  $[G, H] = 0$ .  $G$  comuta com a Hamiltoniana e, como é Hermitiano, representa portanto uma constante do movimento.

Exemplos de simetria contínuas são: a simetria perante translação espacial, que implica na conservação de momento; a simetria perante rotação espacial, que implica na conservação de momento angular e a simetria perante translação temporal que implica na conservação de energia.

Para o caso das simetrias contínuas, as quantidades conservadas são os geradores da transformação. Sendo  $U$  uma transformação contínua tal que  $U = e^{i\alpha G}$ , onde  $G$  são os geradores da transformação e sendo os dois autovetores de  $G$  dados por:

$$\begin{aligned} G|\psi_1\rangle &= g_1|\psi_1\rangle \\ G|\psi_2\rangle &= g_2|\psi_2\rangle . \end{aligned}$$

Nesse caso, a lei de conservação é aditiva.

Então tenho:

$$\begin{aligned} U|\psi_1\psi_2\rangle &= e^{i\alpha G}|\psi_1\psi_2\rangle \\ &= U|\psi_1\rangle U|\psi_2\rangle = e^{i\alpha G}|\psi_1\rangle e^{i\alpha G}|\psi_2\rangle \\ &= e^{i\alpha g_1}|\psi_1\rangle (e^{i\alpha g_2}|\psi_2\rangle) \\ &= e^{i\alpha(g_1+g_2)}|\psi_1\psi_2\rangle \\ &= G|\psi_1\psi_2\rangle = (g_1 + g_2)|\psi_1\psi_2\rangle . \end{aligned}$$

### 3.2.1 Teorema de Noether

O teorema de Noether mostra que toda invariância por uma transformação contínua implica em uma lei de conservação. Podemos descrever a transformação contínua infinitesimal

de um campo  $\phi$  conforme a equação a seguir, onde  $\alpha$  é um parâmetro infinitesimal e  $\Delta\phi$  é uma medida da deformação da configuração do campo  $\phi$ . Como as equações de movimento são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange que são derivadas da ação, se um termo de superfície for adicionado a essa última, as equações de movimento permanecem invariantes, tal que:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x). \quad (3.4)$$

Para ser uma simetria do sistema, conforme explicado no princípio deste capítulo, as equações de movimento associadas ao campo  $\phi$  precisam permanecer invariantes sob a transformação contínua aplicada. Garantir a invariância das equações de movimento é o mesmo que garantir a invariância da ação sob essa mesma transformação contínua.

A Lagrangeana associada ao campo  $\phi$ , por sua vez, será invariante pela transformação:

$$L(x) \rightarrow L(x) + \alpha \partial_\mu J^\mu(x). \quad (3.5)$$

Para um  $J^\mu$  arbitrário. Posso calcular o valor esperado para  $\Delta L$  e comparar esse resultado com o resultado do valor quando vario os campos:

$$\begin{aligned} \alpha \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial \phi}(\alpha \Delta\phi) + \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\mu(\alpha \Delta\phi) \\ &= \alpha \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta\phi \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mas, pela equação de Euler-Lagrange, tenho que:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Assim, fico apenas com o segundo termo da equação (3.6), que deve ser igualado a  $\alpha \partial_\mu J^\mu$ :

$$\alpha \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi \right) = \alpha \partial_\mu J^\mu. \quad (3.8)$$

E, portanto, tenho que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) &= 0 \\ j^{\mu(x)} &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - J^\mu \end{aligned} \quad (3.9)$$

Onde fica explícito que a corrente  $j^\mu$  é conservada. E, portanto, para toda simetria contínua da Lagrangeana, tenho uma corrente correspondente que será conservada. Pode também ser expressada por:

$$Q \equiv \int_V j^0 d^3x. \quad (3.10)$$

Onde  $V$  representa todo o espaço.

### 3.3 Formulação matemática das simetrias

As transformações aplicadas a um sistema físico podem ser descritas de duas diferentes formas: ativa e passiva. No caso ativo, aplica-se a transformação a ser estudada no sistema dado, enquanto os operadores hermitianos permanecem iguais. No caso da versão passiva, os sistemas físicos permanecem inalterados, enquanto os operadores hermitianos são transformados no sentido inverso.

Sendo  $O$  um operador qualquer,  $|\psi\rangle$  o ket estado e  $U$  o operador que causa a transformação sofrida pelo sistema, tenho, para o caso ativo:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad (3.11)$$

$$O \rightarrow O \quad (3.12)$$

Enquanto no caso passivo:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \quad (3.13)$$

$$O \rightarrow O' = U^{-1}OU \quad (3.14)$$

Se o operador  $O$  comuta com um outro operador genérico  $U$  (unitário e que representa uma transformação) então tenho  $[O, U] = 0$ , e isso significa que o valor esperado do observável

correspondente ao operador  $O$  é o mesmo, antes e depois de aplicado o operador  $U$ , pois:

$$\langle \psi | U^\dagger O U | \psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger U O | \psi \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (3.15)$$

Sabendo que a Hamiltoniana de um sistema é responsável por sua evolução temporal, qualquer transformação representada por um operador que não comuta com a Hamiltoniana não pode ser uma simetria do sistema. Isso porque, através da evolução temporal, seria possível distinguir um sistema transformado de um sistema não transformado.

Para garantir que a norma de um estado físico seja sempre preservada mediante qualquer transformação de simetria, apenas dois tipos de operadores são viáveis para representar matematicamente o processo: operadores unitários e operadores anti-unitários. A diferença entre eles fica clara nas equações abaixo.

Sendo  $U$  um operador unitário e  $|\alpha\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$  um ket estado genérico em um espaço bidimensional com coeficientes  $a$  e  $b$  complexos, tenho:

$$U|\alpha\rangle = aU|1\rangle + bU|2\rangle. \quad (3.16)$$

E para o operador anti-unitário  $U_A$ , tenho:

$$U_A|\alpha\rangle = a^*U_A|1\rangle + b^*U_A|2\rangle. \quad (3.17)$$

### 3.4 Simetrias Discretas

Uma simetria é dita discreta se a transformação a que ela corresponde é formada por um grupo discreto. Um grupo discreto é um grupo de topologia discreta cujos elementos formam um conjunto finito ou contável. Isso quer dizer que a transformação correspondente à simetria não é ligada continuamente à identidade.

Têm uma importância especial as simetrias discretas chamadas de *inversões*. Uma inversão é uma simetria caracterizada pelo fato de que, ao aplicar a transformação a ela correspondente duas vezes consecutivas a um sistema físico qualquer, obtêm-se o sistema inicial. Isso é equivalente a dizer que, sendo o operador  $U_I$  relativo à inversão,  $U_I^2 = 1$ . No exemplo das inversões tenho que:

$$U_I|\psi_1\rangle = u_1|\psi_1\rangle \quad (3.18)$$



$$U_I |\psi_2\rangle = u_2 |\psi_2\rangle \quad (3.19)$$

$$U_I |\psi_1 \psi_2\rangle = U_I |\psi_1\rangle U_I |\psi_2\rangle = u_1 |\psi_1\rangle u_2 |\psi_2\rangle = u_1 u_2 |\psi_1 \psi_2\rangle. \quad (3.20)$$

Que gera uma regra de conservação multiplicativa, ao contrário das simetrias contínuas que mostram uma conservação aditiva.

### 3.4.1 Paridade

A transformação de paridade (também conhecida por inversão espacial) é dada por:

$$\begin{aligned} t \rightarrow t' &= t \\ x \rightarrow x' &= -x \\ y \rightarrow y' &= -y \\ z \rightarrow z' &= -z \end{aligned}$$

Não deve ser confundida com imagem especular, que inverte apenas uma das coordenadas espaciais.

A transformação de paridade não inverte o sinal da energia nem do momento angular, porém inverte o sinal do momento linear.

### 3.4.2 Inversão temporal

Para a inversão temporal, analogamente à paridade, tenho:

$$\begin{aligned} t \rightarrow t' &= -t \\ x \rightarrow x' &= x \\ y \rightarrow y' &= y \\ z \rightarrow z' &= z \end{aligned} \quad (3.21)$$

Na representação de Schroedinger da mecânica quântica, tenho a equação de movimento dada por:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle. \quad (3.22)$$

A invariância sob inversão temporal implica que, a partir de qualquer solução da equação de Schroedinger posso obter outra solução que satisfaz a mesma equação, porém com  $t \rightarrow -t$ .

Na mecânica clássica o movimento temporalmente revertido de um sistema invariante sob essa transformação (supondo-se que trata-se de um sistema com poucas partículas) é realizável e tem igual probabilidade de ocorrer se comparado ao sistema antes da transformação.

### 3.4.3 Conjugação de carga

Foi provado experimentalmente que toda partícula possui uma anti-partícula a ela correspondente, com mesma massa porém sinais opostos para carga elétrica, números bariônico, leptônico, estranheza, terceira componente do isospin, charme, beleza, entre outros números quânticos.

A conjugação de carga é a transformação que troca o sinal de todas as cargas associadas a grupos  $U(1)$ . O momento, a energia e o spin são conservados perante a conjugação de carga.

As interações eletromagnéticas são invariantes sob conjugação de carga, já que tanto as partículas quanto suas anti-partículas têm o mesmo acoplamento com os fótons (propagadores da interação).

## 3.5 Evidências experimentais da quebra de simetrias

Não faltam experimentos que mostram evidências das quebras de simetrias, principalmente P e CP, atualmente. No entanto, é importante entender como, pela primeira vez, tais violações foram detectadas.

### 3.5.1 Yang-Lee: Violação de paridade nas interações fracas

No dia 22 de junho de 1956 a revista Physical Review recebeu uma publicação levantando a dúvida a respeito de a paridade ser ou não conservada em interações fracas e, ao mesmo tempo, sugerindo diversos experimentos para verificar se havia violação. Chen Ning Yang e Tsung Dao Lee eram os autores, ambos cientistas chineses atuando nos Estados Unidos. Em 1957 ambos seriam premiados com um Nobel pela publicação(11).

A cientista chinesa Chien-Shiung (12), uma renomada física experimental, foi responsável pela realização do experimento que comprovou a violação de paridade pelas interações fracas. Entre todos os experimentos propostos por Lee e Yang, ela escolheu realizar aquele que envolvia pegar uma amostra de cobalto radioativo e resfriá-la a temperaturas criogênicas usando gases líquidos. O cobalto 60 é um isótopo que decai por emissão de uma partícula beta e a Dr. Wu era especialista em decaimento beta.

Para reduzir a vibração térmica dos átomos de cobalto a praticamente zero era preciso reduzir drasticamente a temperatura. Para alinhar o spin de todos os átomos da amostra, era preciso aplicar um campo magnético uniforme e constante através da amostra.

Lee e Yang previram que os elétrons liberados pelo decaimento beta dos átomos de cobalto 60 seriam emitidos de forma assimétrica se a conservação de paridade fosse violada pela interação. Isso porque o decaimento beta do cobalto 60 libera elétrons que podem ser capturados pelos detectores. Se a força fraca conservasse paridade haveria um número de igual de elétrons liberados para as duas direções possíveis de eixo de spin dos átomos, ou seja, haveria 50% de elétrons liberados no sentido "norte" e 50 % liberados no sentido "sul". No entanto, os resultados obtidos pela Dra. Wu mostraram uma violação indiscutível, comprovando que a direção da emissão dos elétrons era extremamente assimétrica.

### 3.5.2 Sistema $K^0 - \bar{K}^0$ : violação de simetria conjugação de carga-paridade

Quando foi mostrado que havia violação de paridade pela interação fraca, começou-se a acreditar que a simetria respeitada pela natureza era, na verdade, a de conjugação de carga-paridade (simetria CP). Foi através de um sistema de káons que se mostrou que essa simetria também era violada.

Os káons possuem número quântico de estranheza e, portanto, mesmo sendo neutros os káons são diferentes de suas antipartículas. Então há dois tipos de káons que diferem por duas unidades de estranheza e, para estabelecer qual dos dois mésons estaria presente a ferramenta utilizada foi a oscilação de partículas neutras, através da qual os káons e os anti-káons podem transformar-se um no outro através da interação fraca, fazendo com que decaiam em um pión.

Os cientistas Gell-Mann e Pais investigaram o fenômeno, considerando a evolução tem-

poral invariante CP de estados com estranheza oposta. Em notação matricial:

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) = e^{iHt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$H = \begin{pmatrix} M & \Delta \\ \Delta & M \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Sendo  $\psi$  um estado quântico do sistema especificado pelas amplitudes de estar em cada um dos autoestados da base (que no tempo inicial são  $a$  e  $b$ ). Os dois elementos da diagonal da Hamiltoniana  $M$ , que representam a massa das partículas, são devido a interações fortes que conservam estranheza e devem ser iguais, uma vez que ambas a partícula e a anti-partícula têm massas iguais se não houver interação fraca presente. Já no caso dos elementos fora da diagonal são devido a interações fracas. Se houver simetria CP, devem ser ambos reais pois, com isso a matriz  $H$  real garante que as probabilidades dos dois estados permanecerá oscilando.

Para o caso de qualquer elemento imaginário na matriz  $H$ , parte da combinação irá diminuir com o tempo e isso violaria a simetria CP.

Os auto estados do sistema são obtidos pela diagonalização dessa matriz, dando novos autovetores que podem ser chamados de  $K_1$  ( a soma dos dois estados de estranheza oposta) e  $K_2$  (a diferença entre os dois estados). Os dois são autoestados do operador CP, com autovalores  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. O estado final com dois píons tem autovalor CP=1, apenas o estado  $K_1$  pode decair dessa forma. O estado  $K_2$  deve decair em três píons, consequentemente. Para esse caso, a massa do  $K_2$  é apenas ligeiramente maior do que a soma das massas dos três píons resultantes do decaimento e, portanto, essa reação ocorre mais lentamente (cerca de 600 vezes) do que o decaimento de  $K_1$  em dois píons.

Em 1956, Leon Lederman e seu grupo de pesquisa observaram esses dois diferentes modos de decaimento e estabeleceu a existência de dois autoestados *fracos* dos káons neutros, assim chamados por serem estados com tempo de vida definido perante decaimento por força fraca e a esses dois autoestados foram dados os nomes  $K_L$  (K-long, do inglês) e  $K_S$  (K-short). A invariância por simetria CP implicava que  $K_S = K_1$  e  $K_L = K_2$ .

Assim, um feixe de káons neutros ( $K^0$ ) se tornará em um feixe de suas anti-partículas e novamente no feixe original e permanecerá assim, oscilando. Os  $K^0$  sempre decaem por força fraca produzindo elétron e os  $\bar{K}^0$  produzindo pósitron. Já se sabia que havia uma relação entre a taxa de produção de elétrons e pósitrons por fontes de  $K^0$  e  $\bar{K}^0$ , cuja análise da dependência temporal desse decaimento mostrava o fenômeno da oscilação e permitia a extração da separação de massa entre o  $K_S$  e o  $K_L$  e, sendo devido à interação fraca, essa separação é muito pequena.

Assim, um feixe de káons neutros decai durante seu caminho, de forma que todos os estados de vida curta desaparecem deixando um feixe formado apenas pelos estados de vida longa. Atirando o feixe final contra a matéria, os káons e os anti-káons irão interagir de forma diferente com os núcleos, sendo que os káons sofrem um espalhamento quasi-elástico pelos núcleos e o anti-káons podem criar hyperons. Como interagem de forma diferente com a matéria, a coerência quântica do feixe é perdida e o feixe emergente possui diferentes superposições lineares dos káons e anti-káons, sendo essa superposição uma mistura entre os estados  $K_S$  e  $K_L$ . O estado  $K_S$  é regenerado através da passagem de um feixe de káons neutros pela matéria. A regeneração foi observada por Oreste Piccioni em 1955 (13) e em 1964 James Cronin e Val Fitch encontraram decaimento do autoestado  $K_L$  em dois píons, um estado com  $CP=+1$ . Isso sugeriu a violação CP. Em 1980 Cronin e Fitch receberam um prêmio Nobel pela descoberta.

### 3.6 Teorema CPT

O teorema CPT trata da aplicação simultânea das três simetrias discretas, P, C e T, que numa teoria quântica de campos, que é descrita por campos locais e com a hipótese de causalidade implica que para qualquer Lagrangeana possível, o sistema é invariante por esta simetria CPT. Foi no trabalho de Julian Schwinger (que tentava encontrar uma relação entre estatística e spin) em 1952, que o teorema CPT foi implicitamente provado e, portanto, descoberto. Em 1954, Gerhart Lüders (14) de maneira independente e Wolfgang Pauli (15) desenvolveram uma demonstração explícita do teorema. Uma das consequências do teorema CPT é que massas e tempos de vida de partículas e anti-partículas são iguais.



## 4 *Quebra Espontânea de Simetria*

Este capítulo apresenta uma descrição detalhada do mecanismo de quebra espontânea de simetria, responsável pela atribuição de massa aos bósons de gauge.

Neste capítulo também é apresentada uma formulação da teoria de Yang-Mills, mostrando o mecanismo de geração de massa. Também é apresentado o caso abeliano da quebra espontânea de simetria.

### 4.1 Introdução

Quando uma partícula carregada é submetida a um campo eletromagnético ela pode ser descrita pela equação de Schrödinger, conforme apresentado abaixo:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \psi = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eV \right) \psi. \quad (4.1)$$

Onde  $\psi$  é a função que descreve a partícula,  $\vec{A}$  e  $V$  são o potencial vetor e o potencial escalar do campo eletromagnético aplicado, respectivamente.

Posso alterar a fase da função  $\psi$  por uma quantidade arbitrária:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar}\chi(\vec{x}, t)} \psi'(\vec{x}, t). \quad (4.2)$$

E nesse, caso, os potenciais devem ser alterados de acordo com essa mudança:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \vec{A}'(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}, t) \\ V(\vec{x}, t) &= V'(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

As alterações simultâneas da fase de  $\psi$  e dos potenciais, conforme as equações acima,

mantém inalterada a forma da equação de Schrödinger original. Ela permanece a mesma, apenas com as variáveis agora com o índice linha. O valor dos campos mensuráveis também permanece inalterado, já que tenho:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}' \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}'.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Essa é uma formulação matemática do princípio de invariância local, que é claramente respeitado neste caso da interação eletromagnética. A invariância local também pode ser chamada de invariância de calibre.

Ao perceber que a interação eletromagnética respeita essa simetria, procurou-se encontrar teorias para descrever outras forças da física (forte e fraca) que também respeitassem esse princípio. Ao escolher trabalhar com teorias que respeitam sempre a invariância de calibre, restrinjo fortemente a quantidade de acoplamentos permitidos, além de diminuir os graus de liberdade do sistema. Sendo aplicada a todas as forças, a invariância de calibre é o único princípio unificador das interações.

Outra grande vantagem em trabalhar com teorias que respeitam esse princípio é que t'Hooft provou matematicamente que teorias invariantes por transformações de calibre são sempre renormalizáveis (16) e isso, quando aplicado a teorias de perturbação, é de extrema importância para diversos casos em que é preciso lidar com divergências.

Assim, ao escrever a Lagrangeana de qualquer sistema físico, procuro fazê-lo de forma que a expressão encontrada seja invariante por transformações locais. No caso eletromagnético, por exemplo, a Lagrangeana mais simples que respeita esse pré-requisito é dada pela equação abaixo:

$$L_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_{\mu}A_{\mu}.\tag{4.5}$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange a essa Lagrangeana obtenho as equações de Maxwell:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial A_{\nu}}\delta L = j^{\nu}.\tag{4.6}$$

E essas equações obtidas descrevem muito bem as interações eletromagnéticas. Aqui, a quantidade  $j_{\nu}$  é a corrente conservada nessas interações, e que pode ser calculada através dos métodos apresentados no capítulo anterior, sobre simetrias. É possível dizer que a invariância



de calibre, uma vez assumida, leva às equações de Maxwell.

### 4.1.1 Teoria de Yang-Mills

As transformações de calibre formam um grupo contínuo chamado de grupo de Lie, que é também conhecido como grupo de gauge (do inglês, calibre). A álgebra associada ao grupo formado pelos geradores dessas transformações é a álgebra de Lie que, entre outras coisas, define que para cada gerador do grupo de transformações há necessariamente um campo vetorial correspondente, chamado de campo de gauge.

Portanto, se eu descrevo uma interação que é invariante de calibre para um determinado grupo de gauge, essa simetria vai implicar em propriedades dessa interação, como simetrias que podem ser encontradas nos números quânticos a ela associados. Os campos vetoriais criados pelos geradores do grupo de simetria da interação em questão serão responsáveis por carregar a informação dessa interação entre os campos que estiverem a ela submetidos.

Quando os geradores do grupo de gauge não comutam entre si tenho o caso de um grupo não-abeliano. A este, as mesmas regras se aplicam, de forma que ainda tenho campos vetoriais associados a cada gerador. O exemplo mais conhecido para uma teoria não-abeliana invariante de gauge é o dos campos de Yang-Mills. Nesta teoria as interações conservam número de isospin e são invariantes por calibre (17).

## 4.2 Mecanismo de geração de massas

É necessário que haja campos massivos para intermediar uma interação de curto alcance. O termo de massa adicionado à Lagrangeana da interação fraca é  $\frac{m^2}{2} W_\mu W^\mu$ . Quando esse termo massivo é adicionado à Lagrangeana, essa deixa de respeitar a simetria de calibre (17).

O mecanismo da quebra espontânea de simetria é responsável por dar massa aos bósons de gauge, sendo a base para a construção do mecanismo de Higgs, em que os bósons de gauge da teoria fraca recebem massa.

Quero então encontrar uma forma de obter uma descrição invariante de gauge para um campo vetorial massivo. Até hoje, a melhor saída para conseguir isso é recorrer ao mecanismo de Higgs. Para tanto é preciso entender o funcionamento, ou seja, o mecanismo relacionado

à quebra espontânea de simetria que vai, ao final, gerar esta massa.

O mecanismo de Higgs explica a natureza da interação, mas para que funcione é preciso postular a existência de partículas escalares adicionais que seriam, a princípio, detectáveis.

Nenhuma simetria absolutamente exata pode ser identificada diretamente na natureza. Assim, é razoável assumir que pequenas imperfeições irão implicar em pequenos desvios da solução simétrica. Para aplicar essa ideia, não basta que exista uma solução simétrica, é também preciso admitir que há estabilidade do sistema descrito.

### Exemplo: Bastão em duas dimensões

Um dos exemplos mais clássicos de quebra espontânea de simetria é o de um bastão, preso pela parte superior e inferior a uma base, em duas dimensões. Se é aplicada uma força à base superior, o bastão é obrigado a entortar, de forma a ficar no formato de mínimo de energia. No entanto, por estar em duas dimensões, o bastão irá entortar para um dos lados, direito ou esquerdo, quebrando a simetria. (17).

A figura a seguir exemplifica o sistema descrito:

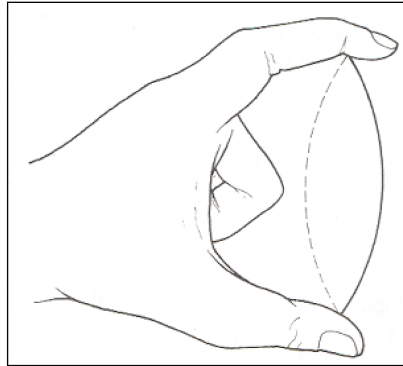


Figura 1: Representação de um bastão com uma força aplicada a suas extremidades.

As equação para pequenas deflexões aplicada a este caso será dada por:

$$\begin{aligned} IE \frac{d^2 X}{dz^4} + F \frac{d^2 X}{dz^2} &= 0, \\ IE \frac{d^2 Y}{dz^4} + F \frac{d^2 Y}{dz^2} &= 0. \end{aligned}$$

Onde  $F$  é a força externa que está sendo aplicada ao bastão,  $I$  é o momento de inércia a

ele associado e  $E$  é o módulo de Young.  $X(z)$  e  $Y(z)$  são as equações de movimento nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. O eixo  $z$  é ao longo do bastão, quando ele está na posição simétrica, inicial.

A solução simétrica é quando  $X = Y = 0$ . Mas também é possível minimizar a energia obtendo soluções assimétricas, da forma geral:

$$X = A + Bz + C \sin kz + D \cos kz. \quad (4.7)$$

Onde  $k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ .

Quando são encontradas duas soluções possíveis para o mínimo de energia atingido pelo bastão verifica-se que essas soluções são instáveis. Uma característica típica de problemas em que há quebra espontânea de simetria é o fato de que as soluções assimétricas correspondem aos mínimos de energia. Assim, se aplicada uma transformação de simetria a uma solução assimétrica, encontra-se uma outra solução assimétrica, degenerada com a primeira.

A simetria é quebrada sempre a partir de um ponto crítico, em que o sistema precisa assumir o estado de um dos possíveis mínimos de energia. Apenas ao atingir esse ponto crítico é possível dizer se o sistema vai ou não quebrar a simetria.

São necessárias duas características básicas para que o problema se caracterize como uma quebra espontânea de simetria:

- As soluções que representam os mínimos de energia são instáveis;
- Os estados assimétricos que correspondem a esses mínimos de energia (vácuo) são degenerados.

No caso em que não ocorre uma quebra espontânea de simetrias, no caso de tratar-se de uma simetria exata, então  $\delta L = 0$ , ou seja, a ação permanece inalterada sob transformações desse grupo de simetria. Além disso, o vácuo permanece invariante sob ação dos geradores do grupo da transformação. Assim, se estou tratando de uma transformação de simetria em que os geradores são  $Q_i$ , tenho que  $Q_i |0\rangle = 0$ .

Sendo assim, tenho que os geradores do grupo comutam com a Hamiltoniana e, conseqüentemente, seus autovalores são bons números quânticos. E, tendo  $[H, Q_i]$ , é preciso que

os multipletos tenham a mesma massa.

Para obter, agora, uma Lagrangeana do sistema que seja assimétrica é possível seguir dois caminhos. O primeiro é causar essa assimetria de forma perturbativa, ou seja, adicionando à Lagrangeana simétrica um termo assimétrico:

$$L = L_0 + cL_1. \quad (4.8)$$

Onde  $L_1$  é o termo assimétrico da Lagrangeana, tal que  $\delta L_1 \neq 0$  e  $L_0$  é a Lagrangeana original, tal que  $\delta L_0 = 0$ . Isso é equivalente a aplicar um método perturbativo para criar a assimetria. Sendo assim, quando  $c \rightarrow 0$ , tenho que  $Q_i |0\rangle \rightarrow 0$ , que é o mesmo que dizer que quando não há um termo de assimetria, tenho a Lagrangeana original.

No entanto, há uma outra forma de construir uma Lagrangeana que tenha sua simetria quebrada. Nesse segundo método, mantenho a ação inalterada, ou seja, nenhum termo é adicionado à Lagrangeana. No entanto, o vácuo da teoria vai ser degenerado, de forma que  $Q_i |0\rangle \neq 0$ .

Com o vácuo agora variando, é possível causar a assimetria sem a adição de nenhum termo. O vácuo é degenerado pela própria dinâmica do sistema físico que está sendo tratado. E ao escolher um dos vácuos degenerados, o sistema quebra espontaneamente a simetria. Para cada estado de energia do sistema tenho infinitos geradores  $Q_i$ , de forma que  $[H, Q_i]$  permanece zero quando a Lagrangeana permanece invariante e é diferente de zero quando ela varia.

Na teoria quântica de campos, o vácuo é definido como o estado de menor energia do sistema, de forma que o valor esperado desse vácuo é dado por  $\langle \phi \rangle_0$ . Para esse segundo método, o vácuo apresenta um valor esperado diferente de zero e a simetria temporal-espacial da densidade de Lagrangeana  $L(x) = L(-x)$  é perdida quando um dos vácuos é escolhido. Aqui  $x$  representa uma variável espacial.

Uma das formas de observar melhor o comportamento do sistema uma vez que ele quebrou a simetria é numa tentativa de restaurar a simetria ao estado de vácuo. Para fazer isso, crio uma combinação linear do campo mais uma componente, onde esse novo campo criado respeita a teoria de campos livre. Assim, tenho:

$$\phi' = \phi - \langle \phi \rangle_0. \quad (4.9)$$

Onde posso facilmente ver que  $\langle \phi' \rangle_0 = 0$ . Escolhi essa translação do campo por construção, para conseguir obter com uma translação do campo um novo campo para o qual o valor esperado de vácuo é agora zero.

Ao substituir esse  $\phi'$  na Lagrangeana obtida após a escolha do vácuo, obtenho a equação da Lagrangeana original. Essa nova expressão não apresenta a simetria de reflexão original e, em especial, apresenta um termo que introduz massa ao campo  $\phi'$ .

A quebra espontânea de simetria não se aplica somente a simetrias discretas. Para o caso de simetrias contínuas, um exemplo é o do campo escalar complexo. No caso de uma simetria global, na qual aplico a transformação  $e^{\alpha x}$ , é possível fazer uma análise análoga ao caso discreto, obtendo que a escolha de fase é que destrói então a simetria.

Tenho, nesse caso, que o campo escalar complexo pode ser descrito pela Lagrangeana abaixo:

$$L_1 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \mu^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda}{2} (\phi \phi^*)^2. \quad (4.10)$$

Essa equação é invariante por transformação de gauge global. Ou seja, é invariante para a transformação  $\phi(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \phi(x)$  e, equivalentemente  $\phi^*(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi^*(x)$ .

Posso refazer a análise acima, ou seja, tenho dois possíveis casos para essa Lagrangeana. Para  $\mu^2 > 0$ , tenho que o mínimo, quando  $\phi = 0$  vai ser estável e não há nenhuma degenerescência no vácuo. No entanto, para  $\mu^2 < 0$ , o caso em que  $\phi$  é nulo é um ponto instável. A degenerescência de vácuos é infinita agora, de tal forma que posso escolher entre infinitos mínimos.

No segundo caso, onde o vácuo é degenerado, o que destrói a simetria é a escolha da fase, que é equivalente a escolher um entre os infinitos vácuos. Posso fazer uma analogia da situação com o caso de uma esfera, onde o raio é dado pelo valor esperado do campo escalar no vácuo  $\langle |\phi| \rangle_0^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$  e onde a escolha de fase quebra a simetria (pois escolho uma direção preferencial), porém não influencia nesse valor esperado.

Posso transladar o valor do campo escalar para tornar a quebra da simetria mais explícita.

Supondo, então, que tenho agora:

$$\phi \rightarrow \phi' + \chi. \quad (4.11)$$

Onde claramente escolhi  $\chi$  como sendo o deslocamento do campo. Outra escolha é que este *shift* tenha uma fase real. Então posso escolher meu valor de  $\chi$  tal que o valor esperado de vácuo do meu campo  $\phi$  seja dado por:

$$\langle \phi \rangle_0 = \langle \chi \rangle_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.12)$$

Mas esta não é uma escolha arbitrária. Essa escolha garante que o valor esperado de vácuo do meu campo  $\phi'$  transformado seja zero, ou seja:

$$\langle \phi' \rangle_0 = 0. \quad (4.13)$$

Posso escrever, de maneira geral, o meu campo  $\phi$  como:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2). \quad (4.14)$$

Sendo  $\phi_1$  a componente real do campo  $\phi$ , e  $\phi_2$  a componente imaginária de  $\phi$ . Como escolhi o *shift* como sendo real, então neste caso, necessariamente:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 \rangle_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

$$\langle \phi_2 \rangle_0 = 0.$$

A transformação realizada implica:

$$\phi_1 \rightarrow \phi'_1 + \chi, \quad (4.17)$$

$$\phi_2 \rightarrow \phi'_2. \quad (4.18)$$

E essas transformações fazendo com que a Lagrangeana original, apresentada na equação (4.10), vai se transformar e pode ser escrita, em função de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  segundo a fórmula a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \phi'_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \phi'_2 \right)^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} \langle \phi \rangle_0 \left( \mu^2 + \lambda \langle \phi \rangle_0^2 \right) \phi'_1 \\ & - \frac{1}{2} \left( \mu^2 + 3\lambda \langle \phi \rangle_0^2 \right) \phi_1'^2 - \frac{1}{2} \left( \mu^2 + \lambda \langle \phi \rangle_0^2 \right) \phi_2'^2 + \\ & - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \langle \phi \rangle \phi'_1 \left( \phi_1'^2 + \phi_2'^2 \right) - \frac{\lambda}{8} \left( \phi_1'^2 + \phi_2'^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora é preciso analisar as possibilidades da transformação. Ou seja, qual será o valor adotado para  $\mu^2$ .

#### Caso $\mu^2 \geq 0$

Neste caso tenho que  $\langle \phi \rangle_0 = 0$  e, conseqüentemente,  $\phi \equiv \phi'$ . Este é o caso trivial, pois a Lagrangeana  $\mathcal{L}_1$  vai permanecer inalterada e, portanto, não há quebra espontânea de simetria. Isso quer dizer que a simetria global permanece.

#### Caso $\mu^2 < 0$

Este é o caso não trivial, pois para obter  $\langle \phi' \rangle_0 = 0$  é preciso realizar a transformação. E entre todas as possibilidades de escolha para  $\chi$ , é preciso escolher uma. Neste caso, portanto, é preciso escolher um estado de vácuo entre todos os possíveis estados de vácuo infinitamente degenerados. E neste caso a Lagrangiana não permanece inalterada, mas toma a forma de:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\mu \phi'_1 \right)^2 + 2\mu^2 \phi_1'^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \phi'_2 \right)^2 + \\ & + \frac{\mu^2}{\sqrt{2}} \phi'_1 \left( \phi_1'^2 + \phi_2'^2 \right) - \frac{\lambda}{8} \left( \phi_1'^2 + \phi_2'^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A simetria inicial de vácuos foi perdida com a quebra e escolha de um vácuo em especial. E a nova Lagrangeana  $\mathcal{L}_2$  apresenta dois campos:  $\phi'_1$  e  $\phi'_2$ . Desses, o campo  $\phi'_1$  tem agora massa  $m$ , tal que  $m^2 = -2\mu^2$ . Esse valor é necessariamente positivo, já que  $\mu^2$  é negativo, por premissa. O campo  $\phi'_2$  permanece com massa zero, e será o campo que representa o

bóson de Goldstone da teoria.

### 4.3 Caso Abelian

Para estudar a quebra espontânea de simetria para o caso abeliano, a Lagrangeana inicial é a de um campo escalar carregado, dada por:

$$\mathcal{L}_1 = (\partial_\mu + igW_\mu) \phi (\partial^\mu - igW^\mu) \phi^* - V(\phi\phi^*). \quad (4.21)$$

Na equação (4.21) acima,  $g$  é a constante de acoplamento,  $W$  é o campo vetorial e  $V$  é dado pela equação a seguir:

$$V(\phi\phi^*) = \frac{1}{2}\mu^2\phi\phi^* + \frac{1}{4}\lambda(\phi\phi^*)^2. \quad (4.22)$$

Neste caso, para manter a invariância de (4.21) é preciso utilizar duas transformações locais de gauge, dadas por:

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ig\lambda(x)}\phi(x) \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

$$\text{e } W_\mu(x) \rightarrow W_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x).$$

Novamente as transformações dividem-se em dois casos:

**Caso  $\mu^2 \geq 0$**

Este é, novamente, o caso trivial. A Lagrangeana vai descrever a interação eletrodinâmica de um escalar carregado.

**Caso  $\mu^2 < 0$**

Neste caso o valor esperado do vácuo para o campo  $\phi(x)$  é diferente de zero. O potencial mínimo é atingido quando:



$$\left(\mu^2 + \lambda\phi\phi^*\right)\phi = 0. \quad (4.25)$$

Com a equação (4.25) é possível perceber que há infinitos valores de vácuo possíveis, dada uma fase arbitrária  $\alpha$  em  $e^{-i\alpha}$ . Portanto:

$$\langle\phi\rangle_0 = e^{i\alpha}\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv e^{i\alpha}\frac{\phi_0}{\sqrt{2}}. \quad (4.26)$$

Para simplificar os cálculos escolho  $\alpha = 0$ . Assim:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)). \quad (4.27)$$

Fazendo o deslocamento encontro:

$$\phi(x) = \phi'(x) = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}. \quad (4.28)$$

Assim:

$$\langle\phi'\rangle_0 = 0. \quad (4.29)$$

O valor esperado do vácuo para o campo transladado passa a ser zero.



## 5 *Teoria Quântica de Campos*

Este capítulo apresenta os principais conceitos de teoria quântica de campos. O estudo da teoria teve sua base principalmente nas referências (18) e (19).

A primeira seção apresenta as motivações para a criação da teoria quântica de campos e as seções seguintes apresentam, em sequência, a dinâmica dos campos clássicos, a formulação de campos livres (onde é apresentada a quantização do campo mais simples, o campo de Klein-Gordon), e uma introdução à eletrodinâmica quântica. A última seção apresenta uma breve introdução ao modelo padrão das partículas elementares, cuja teoria que o fundamenta é a teoria quântica de campos.

### 5.1 Motivação

A física clássica trata partículas e ondas como entidades completamente diferentes. Com a física clássica é impossível formular simultaneamente o aspecto ambíguo onda-partícula das entidades da natureza que estão sendo descritas. Isso acontece porque classicamente as partículas são tratadas como a entidade fundamental do modelo.

Tratar as partículas como entidades fundamentais de um modelo também pode causar diversos problemas quando passamos a tratar de casos que envolvem partículas com velocidades relativísticas e com energias, conseqüentemente, muito mais altas.

Isso porque, quando estamos tratando de energias muito altas, partículas são criadas e destruídas e o número de partículas em um sistema deixa de ser uma constante, como era no caso clássico.

Quando estamos lidando com problemas de partículas elementares (escalas muito pequenas de tamanho) a velocidades muito altas (relativísticas), tratar as partículas como entidade

fundamental leva a soluções incoerentes.

A essa altura, portanto, a teoria quântica clássica se depara com dois problemas fundamentais: como lidar com o aspecto ondulatório que todas as partículas apresentam quando submetidas a certas circunstâncias e como lidar com a criação e destruição de partículas em sistemas com energias altas o suficiente para permitir isso.

A teoria que surgiu como resposta para estes problemas foi a teoria quântica de campos. Sua principal diferença para a teoria quântica normal é o fato de que agora a entidade fundamental da teoria não é a partícula, mas sim o **campo**, que se torna o gerador da partícula. A Teoria Quântica de Campos é uma teoria **local** onde todas as interações são mediadas de maneira local pelos campos.

A escolha do campo como entidade fundamental da natureza também foi corroborada pelo fato de que partículas elementares de um dado tipo são indistinguíveis entre si. Ou seja, um elétron criado no centro de um sistema a 7 bilhões de anos-luz da Terra e que viaja até aqui é indistinguível de um elétron criado em uma colisão em um acelerador de partículas ontem à noite.

## 5.2 Dinâmica dos campos clássicos

Na Teoria Quântica Clássica os graus de liberdade clássicos foram quantizados, ou seja, foram promovidos a operadores com respectivos autovalores e autovetores associados, agindo no chamado espaço de Hilbert. Há um operador para a posição, um para o momento linear, um para o momento angular e assim por diante.

No caso da Teoria Quântica de Campos, tenho também a quantização, mas agora dos próprios campos. Os graus de liberdade básicos agora se tornam operadores que são funções do espaço e do tempo. Ou seja, o campo  $\psi(t, \vec{x})$  é agora um operador  $\Psi(t, \vec{x})$ . Há, portanto, **infinitos** graus de liberdade, já que o campo assumirá um valor para cada ponto do espaço-tempo.

Antes de partir para a quantização dos campos, no entanto, é preciso entender sua dinâmica.

### 5.2.1 Fundamentos

Um campo é uma função das três coordenadas espaciais, denotadas por  $\vec{x}$  e pela coordenada temporal  $t$ . Assim, para cada ponto do espaço-tempo tenho um valor associado do campo. Posso escrever:

$$\phi(\vec{x}, t). \quad (5.1)$$

A posição  $\vec{x}$ , que era uma variável dinâmica que foi quantizada para a teoria quântica, agora é apenas um índice para o campo  $\phi$ , através do qual posso identificar qual é o valor associado ao campo que estou procurando.

**Exemplo:** Os exemplos mais conhecidos de campos, para ilustrar o conceito, seriam dados pelos campos elétrico,  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ , e magnético  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ . Cada uma destas coordenadas necessárias para o cálculo do campo assume um valor específico, dado o ponto no espaço-tempo em que está sendo avaliado o campo, de tal forma que o campo tem, além de amplitude, uma direção no espaço.

Assim, tenho  $E_x$ , a projeção no eixo x do campo elétrico,  $E_y$ , que seria a projeção em y e  $E_z$ , a projeção do eixo z. O mesmo vale para o campo magnético.

Mas tanto os dois campos podem ser obtidos através do campo  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , onde o índice  $\mu$  varia tal que  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Ou seja, tenho agora um campo que é um vetor no espaço-tempo. É possível encontrar os campos elétrico e magnético através das equações abaixo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e ainda} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.2)$$

### 5.2.2 A dinâmica a partir da Lagrangiana

O comportamento dinâmico de um campo (ou seja, sua variação no tempo) será descrito pela Lagrangeana deste campo. E, para qualquer campo  $\phi$  estudado neste trabalho, a Lagrangeana que o descreve será sempre uma função apenas do próprio campo  $\phi(\vec{x}, t)$ , de sua derivada temporal,  $\dot{\phi}(\vec{x}, t)$  e de sua derivada espacial  $\nabla\phi(\vec{x}, t)$ .

Isso segue um padrão clássico. Na mecânica de partículas as Lagrangeanas sempre dependem dos parâmetros  $q$  e  $\dot{q}$  (coordenadas generalizadas), mas não dependem de  $\ddot{q}$ . E analogamente, as Lagrangeanas estudadas aqui vão depender também apenas de derivadas em primeira ordem do campo, tanto temporal quanto espacialmente.

Uma das principais razões para isso, como será abordado com mais cuidado posteriormente neste trabalho, é o fato de que se procura manter a invariância de Lorentz, o que se torna mais simples de conseguir com derivadas de primeira ordem. Além disso, para manter a invariância é preciso tratar as variáveis de tempo e espaço em pé de igualdade, ou seja, derivadas de segunda ordem no espaço precisariam aparecer junto de derivadas de segunda ordem no tempo.

Com estes critérios, usando a notação de Lorentz é possível dizer que as Lagrangeanas de interesse podem ser escritas como:

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a). \quad (5.3)$$

Aqui, tenho que a Lagrangeana  $L$  será a integral espacial da densidade de Lagrangeana  $\mathcal{L}$ . O índice  $a$  refere-se à  $a$ -ésima partícula descrita pela Lagrangiana. O índice  $a$  refere-se ao campo  $a$  cujo comportamento está sendo descrito pela Lagrangiana.

Para encontrar as equações de movimento, analogamente ao caso clássico, preciso minimizar a ação. A ação  $S$  é dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (5.4)$$

Minimizar a ação requer  $\delta S = 0$  e consequentemente requer:

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a) \right] = 0. \quad (5.5)$$

Mas tenho que:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a). \quad (5.6)$$

Usando a equação (5.5) na equação (5.6), encontro que:

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right). \quad (5.7)$$

O argumento aqui é de que o último termo da equação (5.7) é uma derivada total e, portanto, deve ir para zero para qualquer  $\delta \phi_a(\vec{x}, t)$  quando vai para  $-\infty$  espacialmente e deve obedecer que  $\delta \phi(\vec{x}, t_1) = \delta \phi(\vec{x}, t_2) = 0$ . E o argumento da menor ação que garante  $\delta S = 0$  faz com que eu encontre as equações do movimento, as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (5.8)$$

O primeiro passo agora é encontrar a dinâmica do tipo mais simples de campo, o campo escalar. Aplicando as equações de Euler-Lagrange acima encontradas a uma Lagrangeana que descreve campos escalares é possível encontrar a chamada equação de Klein-Gordon. Este será o primeiro exemplo de dinâmica de um campo, mostrado a seguir.

### 5.2.3 Campos de Klein-Gordon

Os campos de Klein-Gordon são os primeiros a serem estudados porque são os campos mais simples. Para obter sua equação parte-se da Lagrangeana apresentada na equação (5.9). O campo será denotado por  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mas sabendo que a forma clássica da Lagrangeana  $L$  é dada por:

$$L = (\text{Energia cinética}) T - (\text{Energia potencial}) V. \quad (5.10)$$

É possível identificar na equação (5.9) o que poderia ser considerada a energia cinética referente ao campo  $\phi$ , dada por (lembrando que a integral no espaço aparece porque a equação

(5.9) trata da densidade de Lagrangiana):

$$T = \int d^3x \frac{1}{2} \dot{\phi}^2. \quad (5.11)$$

Bem como a sua energia potencial correspondente, consequentemente dada por:

$$V = \int d^3x \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (5.12)$$

Estou procurando a equação da dinâmica do campo, ou seja, a equação de Euler-Lagrange. Assim, devo proceder conforme a seção anterior, encontrando os valores da derivada de  $\mathcal{L}$  que aparecem na equação (5.8), apresentada na seção anterior. Assim, calculo para a densidade de Lagrangeana (5.9) os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -m^2 \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \partial^\mu \phi \equiv (\dot{\phi}, -\nabla \phi). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Assim, por (5.8), tenho que:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi, \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Em (5.14), para simplificar a forma da equação encontrada, explicitou-se a derivada nas quatro coordenadas relativísticas (as três coordenadas espaciais mais a coordenada temporal).

Essa é, portanto, a chamada equação de Klein-Gordon, que descreve a dinâmica associada a um campo escalar cuja Lagrangeana é (5.9).

## 5.2.4 Campos de Maxwell

Um outro exemplo importante é o dos campos de Maxwell, ou seja, os campos eletromagnéticos. A física clássica, através das equações de Maxwell, consegue descrever bem o



comportamento dos campos eletromagnéticos.

É possível encontrar as equações de Maxwell partindo da Lagrangeana dos campos eletromagnéticos, da mesma maneira que se encontra a equação de Klein-Gordon. A Lagrangeana pode ser construída a partir da equação:

$$L_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (5.15)$$

Onde o campo  $F^{\mu\nu}$  é dado por  $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Assim, posso escrever:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (5.16)$$

Novamente trata-se apenas de calcular os valores das derivadas da densidade de Lagrangiana, a fim de obter a equação de Euler-Lagrange. Para isso é preciso computar dois termos, sendo o primeiro:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\mu)} = -\partial_\mu A^\mu + (\partial_\rho A^\rho) \eta^{\mu\mu}. \quad (5.17)$$

E o segundo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) &= -\partial^2 A^\nu + \partial^\nu (\partial_\rho A^\rho) \\ &= -\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\partial_\mu F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Com estes termos é possível encontrar o valor da equação de Euler-Lagrange para os campos eletromagnéticos, que vai computar:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.19)$$

Assim, a equação (5.19) é a equação da dinâmica dos campos eletromagnéticos. Estes campos são campos vetoriais, dado que  $A$  é um quadrivetor no espaço-tempo, ao contrário do caso de Klein-Gordon apresentado, onde  $\phi$  era apenas um escalar.

### 5.2.5 Localidade dos campos

Como agora a entidade estudada é o campo, como saber o comportamento deste campo quando submetido a uma transformação de Lorentz? Primeiramente vale pensar na sua localidade.

Todas as Lagrangeanas apresentadas acima tem caráter local, ou seja, nenhuma delas apresenta termos tais que  $\phi(\vec{x}, t)$  e  $\phi(\vec{y}, t)$ , para  $\vec{x} \neq \vec{y}$ , estão acoplados. Se houvesse um termo desta natureza haveria uma associação, no mesmo instante de tempo, de valores do campo associados a pontos diferentes do espaço.

Uma teoria não local não respeitaria a invariância de Lorentz. Todas as Lagrangeanas aqui estudadas serão locais.

### 5.2.6 Invariância de Lorentz

Quando se procura obter a covariância de Lorentz para uma teoria, é preciso que nesta teoria o tempo e o espaço sejam tratados da mesma forma.

Uma das motivações da teoria quântica de campos, conforme mencionado no princípio deste capítulo, é fazer com que a mecânica clássica passe a respeitar a teoria da relatividade. Assim, nesta sub-seção tratamos de compreender o comportamento dos campos estudados quando submetidos às transformações de Lorentz.

A transformação de Lorentz é dada por:

$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (5.20)$$

Sendo que a transformação  $\Lambda$ , que representa a transformação de Lorentz, satisfaz com a métrica de Minkowski a seguinte relação:

$$\Lambda^\mu_\sigma \eta^{\sigma\tau} \Lambda^\nu_\tau = \eta^{\mu\nu}. \quad (5.21)$$

A transformação de Lorentz que representa um *boost* ao longo do eixo  $x$ , a uma velocidade  $v < 1$  é dada por:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

É importante ressaltar que se usa a transformação  $\Lambda^{-1}$  na equação (5.23) a seguir porque se trata da visão ativa da transformação, onde o campo realmente é trocado de posição. Isso quer dizer que, quando tenho que a fonte do campo  $\phi(\vec{x})$  originalmente se encontra no ponto  $\vec{p} = (1, 0, 0)$ , se eu rodar este campo através da transformação  $R$  em torno do eixo  $z$ , tal que  $R\vec{p} = (0, 1, 0)$ , isso quer dizer que agora o campo tem sua fonte no ponto  $\vec{p}'$ . Ou seja, se eu quero saber como escrever o novo campo  $\phi'(\vec{x})$  em função do campo original  $\phi$ , basta, a partir da nova fonte em  $\vec{p}' = (0, 1, 0)$  descobrir quanto valia o campo antigo no lugar de onde parti, ou seja,  $R^{-1}(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$ .

Por isso  $\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}(x))$ .

Se eu aplicar esta transformação ativamente a um campo escalar, como o de Klein-Gordon, vou obter a transformação de Lorentz de um ponto  $x \rightarrow \Lambda x$ , que pode ser escrita conforme a equação a seguir:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (5.23)$$

Aqui a equação (5.23) mostra a transformação aplicada a um campo escalar.

Se quero garantir que a teoria é invariante de Lorentz, basta garantir então que tanto o campo  $\phi(x)$  quanto o novo campo  $\phi'(x)$  respeitem as mesmas equações de movimento, ou seja, que a transformação de Lorentz mantenha inalteradas as equações de movimento. Mais do que isso, devo garantir que:

$$\phi'(x) = \phi(x). \quad (5.24)$$

Isso seria equivalente a garantir que a ação  $S$  seja invariante de Lorentz. Para verificar essa propriedade, vamos encontrar as equações de movimento para os campos de Klein-Gordon após a estes ter sido aplicada uma transformação de Lorentz.

### Equação de Klein-Gordon

Como neste caso se trata de um campo escalar, tenho que  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}(x))$ . Mas a derivada de um campo escalar comporta-se como um vetor quando submetida a uma transformação de Lorentz. Assim:

$$(\partial_\mu \phi)(x) \rightarrow (\Lambda^{-1})^\nu_\mu (\partial_\nu \phi)(\Lambda^{-1}x). \quad (5.25)$$

Para facilitar a visualização, vou definir  $y = \Lambda^{-1}x$ . Quero saber, portanto, como ficariam as derivadas do campo  $\phi$  após a transformação. Usando a equação (5.25), encontro que a minha densidade de Lagrangeana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{derivada}}(x) = \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) \eta^{\mu\nu} &\rightarrow (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\partial_\rho \phi)(y) (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu (\partial_\sigma \phi)(y) \eta^{\mu\nu} \\ &= (\partial_\rho \phi)(y) (\partial_\sigma \phi)(y) \eta^{\rho\sigma} \\ &= \mathcal{L}_{\text{derivada}}(y). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ainda falta observar o comportamento da parte potencial da Lagrangiana. Sabendo que  $\phi(x) \rightarrow \phi(y)$  a ação, portanto, será dada por:

$$\begin{aligned} S &= \int dt L = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(x) \\ &= \int d^4x \mathcal{L}(x) \rightarrow \int d^4x \mathcal{L}(y) \\ &= \int d^4y \mathcal{L}(y) = S. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Na última linha da equação (5.27) a transformação da variável de integração de  $x$  para  $y$  levou em conta que o determinante de  $\Lambda$  é 1 e, conseqüentemente, o Jacobiano da mudança de variáveis será 1. Portanto fica claro por (5.27) que a ação permanece invariante pela transformação de Lorentz para o caso dos campos de Klein-Gordon.

### 5.2.7 A dinâmica a partir da Hamiltoniana

Para continuar com a construção da teoria quântica de campos utilizando o formalismo das Lagrangeanas, apresentado até este momento, seria preciso utilizar integrais de caminho. Uma outra forma de continuar com a formação seria através da quantização canônica, mas para este caso o formalismo adotado deve ser o da Hamiltoniana.

Seguindo por esta última linha, portanto, vamos apresentar aqui como construir esse formalismo. Primeiro, defini-se o momento  $\pi^a(x)$  conjugado ao campo  $\phi_a(x)$ . É dado por:

$$\pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}. \quad (5.28)$$

Onde  $a$  é o subíndice que indica a qual partícula estou me referindo.

A partir do momento conjugado é possível escrever a densidade de Hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , que é dada por:

$$\mathcal{H} = \phi^a(x) \dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x). \quad (5.29)$$

Para obter a Hamiltoniana basta aplicar a integral no espaço:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (5.30)$$

As equações de movimento para o campo  $\phi(x)$ , partindo da Hamiltoniana, são dadas por:

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial H}{\partial \pi(\vec{x}, t)}, \quad (5.31)$$

$$\dot{\pi}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(\vec{x}, t)}. \quad (5.32)$$

Estas são as equações de Euler-Lagrange no formalismo hamiltoniano.

## 5.3 Campos Livres

Agora que a dinâmica dos campos clássicos foi propriamente apresentada vamos procurar apresentar como é feita a quantização dos campos a partir do formalismo da Hamiltoniana. Para fazer isso parte-se de uma analogia clara com o caso da mecânica clássica. Assim, partindo da quantização canônica, a quantização de um campo livre é feita nesta seção. A partir disso é possível estudar também como equacionar e tratar as excitações deste campo quantizado.

### 5.3.1 Quantização canônica

O que acontece no caso da mecânica quântica é que a partir do formalismo Hamiltoniano utiliza-se a quantização canônica para passar da dinâmica clássica para a dinâmica da teoria quântica. Neste caso clássico tanto o momento  $p_a$  quanto a posição  $q_a$  deixam de ser apenas parâmetros do modelo e passam a ser operadores quantizados e, conseqüentemente, com auto-estados e auto-valores definidos para cada sistema. Daí a quantização.

Sendo agora operadores, não necessariamente comutam. Assim, as novas relações de comutação passam a ser (levando em conta unidades naturais, definidas no princípio deste trabalho):

$$[q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0 \quad (5.33)$$

$$[q_a, p^b] = i\delta_a^b. \quad (5.34)$$

Aqui  $a$  e  $b$  referem-se às partículas  $a$  e  $b$  correspondentes. Lembrando que para estas equações  $\delta_a^b = 0$  se  $a \neq b$  e  $\delta_a^b = 1$  se  $a = b$ . Agora fazendo a analogia, no caso em que queremos quantizar o campo posso tratar, no lugar da coordenada espacial  $q_a$ , o próprio campo  $\phi_a(\vec{x})$  e seu momento conjugado do formalismo da Hamiltoniana, definido na seção anterior,  $\pi^b(\vec{x})$ .

Assim, um campo quântico é agora um **operador** que é uma função do espaço e que respeita as seguintes relações de comutação:

$$[\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})] = [\pi^a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = 0, \quad (5.35)$$

$$[\phi_a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_a^b. \quad (5.36)$$

Aqui está sendo usada a representação de Schrödinger, por isso os operadores não dependem do tempo. Os autoestados destes operadores, no entanto, vão evoluir temporalmente conforme a equação de Schrödinger, ou seja, um estado  $|\psi\rangle$  regido pela Hamiltoniana  $H$  vai evoluir conforme:

$$i\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle. \quad (5.37)$$

Percebe-se que, na teoria quântica de campos, há infinitos graus de liberdade, já que há ao menos um para cada ponto  $(\vec{x}, t)$  do espaço-tempo. Para o caso das teorias livres é possível descrever a dinâmica de um campo de maneira que cada grau de liberdade evolua independentemente no tempo.

O caso mais simples onde é possível fazer isso seria o dos campos de Klein-Gordon. Sendo o campo dado por  $\phi(\vec{x}, t)$ , e sua equação de movimento (encontrada na seção anterior) dada por:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (5.38)$$

Se quero desacoplar os graus de liberdade, posso utilizar a transformada de Fourier do campo, tal que:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t). \quad (5.39)$$

Agora, a equação de movimento satisfeita por  $\phi(\vec{p}, t)$  será dada por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (m^2 + \vec{p}^2) \right) \phi(\vec{p}, t) = 0. \quad (5.40)$$

A equação (5.40) nada mais é do que a equação de um oscilador harmônico para um dado

valor de  $\vec{p}$ , tal que sua frequência de oscilação é dada por:

$$\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (5.41)$$

Ou seja, a equação de Klein-Gordon é uma superposição linear de osciladores harmônicos simples, que vibram a diferentes frequências e com diferentes amplitudes. Se quero quantizar o campo de Klein-Gordon, posso então fazer isso através da quantização destes osciladores. A subseção seguinte apresenta o modelo clássico da quantização de um oscilador harmônico simples.

### 5.3.2 Oscilador Harmônico Simples

A Hamiltoniana quântica, que dá origem ao oscilador harmônico simples em uma dimensão, é dada por:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \quad (5.42)$$

Os operadores  $p$  e  $q$ , agora já quantizados, respeitam a seguinte relação de comutação (em unidades naturais):

$$[q, p] = i. \quad (5.43)$$

Defino os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  que destroem e criam, respectivamente, os autoestados da Hamiltoniana, como:

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}q + \frac{i}{\sqrt{2\omega p}}, \quad (5.44)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}q - \frac{i}{\sqrt{2\omega p}}. \quad (5.45)$$

Posso isolar nas equações (5.44) e (5.45) os operadores  $p$  e  $q$ , encontrando:



$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger), \quad (5.46)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger). \quad (5.47)$$

Com essa definição, substituindo as equações (5.46) e (5.47) na equação (5.43), encontro a relação de comutação entre os operadores  $a$  e  $a^\dagger$ . Assim:

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (5.48)$$

Posso também substituir (5.46) e (5.47) na Hamiltoniana (5.42). Com a Hamiltoniana agora escrita dessa forma, posso também encontrar as relações de comutação entre  $H$  e os operadores criação e destruição. A Hamiltoniana ficará:

$$H = \frac{1}{2}\omega (aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (5.49)$$

$$= \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (5.50)$$

Enquanto os comutadores de  $a$  e  $a^\dagger$  serão dados pelas equações a seguir:

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger, \quad (5.51)$$

$$[H, a] = -\omega a. \quad (5.52)$$

$$(5.53)$$

Para deixar claro como os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  percorrem os diferentes estados de energia do oscilador harmônico, basta aplicar a Hamiltoniana a um estado onde  $a$  ou  $a^\dagger$  foi aplicado. Isso porque, se aplico o operador  $H$  a um estado da Hamiltoniana, seu autovalor correspondente será a energia, ou seja,  $H|E\rangle = E|E\rangle$ . Quero saber qual seria a energia associada ao estado  $a|E\rangle$  ou  $a^\dagger|E\rangle$ . Para fazer isso, usando (5.52) e (5.53):

$$\begin{aligned}
Ha^\dagger |E\rangle &= (\omega a^\dagger + a^\dagger H) |E\rangle \\
&= (E + \omega) a^\dagger |E\rangle
\end{aligned}
\tag{5.54}$$

$$\tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}
Ha |E\rangle &= (-\omega a + aH) |E\rangle \\
&= (E - \omega) a |E\rangle .
\end{aligned}
\tag{5.56}$$

$$\tag{5.57}$$

Dessa forma, através dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$  é possível percorrer, de maneira discreta (ou seja, a passos de amplitude dada por  $\omega$ ) todos os infinitos estados de energia do oscilador harmônico. Ou seja, os possíveis estados de energia para este oscilador serão:

$$\dots, E - 2\omega, E - \omega, E, E + \omega, E + 2\omega \dots$$

Pode haver um mínimo possível de energia, neste caso haveria um estado de menor energia, o vácuo. Podemos chamá-lo de  $|0\rangle$ . Por ser o menor estado de energia possível, deve ser tal que  $a |0\rangle = 0$ . A energia deste menor estado seria:

$$H |0\rangle = \frac{1}{2} \omega |0\rangle . \tag{5.58}$$

Todos os outros estados de energia possíveis podem ser escritos a partir deste estado  $|0\rangle$  através de repetidas aplicações do operador  $a^\dagger$ . O  $n$ -ésimo estado de energia pode ser escrito como:

$$|n\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle , \tag{5.59}$$

e a energia correspondente a este estado será:

$$H |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega |n\rangle . \tag{5.60}$$

Ou seja, a energia do estado fundamental mais  $n \cdot \omega$ .

### 5.3.3 Campo Escalar Livre

Agora que já foi apresentado o método de quantização do oscilador harmônico simples, basta aplicar este mesmo método ao campo escalar que havíamos quantizado na subseção sobre quantização canônica. Assim, da mesma maneira que  $p$  e  $q$  foram escritos com operadores de criação e destruição, posso escrever o campo  $\phi(\vec{x})$  e o momento canônico  $\pi(\vec{x})$  como uma combinação de operadores criação e destruição. A principal diferença, neste caso, é que cada operador  $a$  ou  $a^\dagger$  estará agora indexado a um vetor 3-momento  $\vec{p}$ , de forma análoga aos operadores  $\phi$  e  $\pi$ , que estão indexados a um ponto no espaço  $\vec{x}$ . Assim:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[ a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad (5.61)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left[ a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]. \quad (5.62)$$

Conforme feito para o caso do oscilador harmônico simples, quero agora encontrar as relações de comutação para  $a_{\vec{p}}$  e  $a_{\vec{p}}^\dagger$  equivalentes às relações de  $\phi(\vec{x})$  e  $\pi(\vec{x})$ . Assim, a partir das relações de comutação (5.63) e (5.64), a seguir:

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 \quad (5.63)$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.64)$$

É possível provar as relações entre os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  que seguem:

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0 \quad (5.65)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (5.66)$$

Equações (5.65) e (5.66) representam as relações entre os operadores criação e destruição de partículas.

Para mostrar isso, também conforme foi feito para o caso do oscilador harmônico simples,

vou computar o valor da Hamiltoniana do campo de Klein-Gordon. Segundo o formalismo Hamiltoniano, ela é dada por:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left( \pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right). \quad (5.67)$$

Assim, substituindo os valores para  $\phi(\vec{x})$  e  $\pi(\vec{x})$  em função de  $a$  e  $a^\dagger$ , encontro:

$$H = \frac{1}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\vec{p}}} \left[ \left( -\omega_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2 \right) \left( a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) + \left( \omega_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2 \right) \left( a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right) \right].$$

Se eu usar que  $\omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , então tenho:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right]. \quad (5.68)$$

Não existe uma forma de saber a energia de vácuo  $E_0$  de um campo escalar diretamente. Por isso, como em geral o que nos interessa é sempre uma diferença de energia, posso redefinir a Hamiltoniana de forma a eliminar o problema do infinito na energia negativa. Assim:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \quad (5.69)$$

Com essa forma da Lagrangiana, tenho que  $H|0\rangle = 0$ .

Novamente numa analogia com o caso do oscilador harmônico simples, é possível provar as seguintes relações de comutação:

$$[H, a_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \quad (5.70)$$

$$[H, a_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}, \quad (5.71)$$

e construo cada um dos autoestados de energia a partir do operador  $a_{\vec{p}}^\dagger$  aplicado ao estado fundamental  $|0\rangle$ . Assim, posso escrever:

$$|\vec{p}\rangle = a_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle. \quad (5.72)$$

Novamente levando em conta que  $\omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , tenho a energia associada ao autoestado  $|\vec{p}\rangle$ :

$$H |\vec{p}\rangle = \omega_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle. \quad (5.73)$$

Ainda é possível se perguntar o que significaria, fisicamente, uma excitação do campo quantizado. Ou seja, o que representam todos os possíveis estados de energia associados a cada oscilador (afinal há um oscilador para cada  $\vec{p}$ ).

Para isso basta perceber que a equação (5.73) mostra, afinal, justamente a expressão da energia relativística  $E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$  para uma partícula de massa  $m$  e momento linear  $\vec{p}$ .

Sendo assim, posso interpretar  $|\vec{p}\rangle$  como sendo o autoestado de energia para uma partícula de massa  $m$  e com momento  $\vec{p}$ . As excitações do campo  $\phi(\vec{p})$  quantizado são partículas de momento linear  $\vec{p}$ , energia  $E_{\vec{p}}$  e massa  $m$ .

## 5.4 O modelo padrão

Uma vez tendo os campos quantizados individualmente, é possível construir um modelo onde a interação entre esses campos quantizados é modelada. Essa é a base para a construção do chamado modelo padrão das partículas elementares. Aqui, como nas teorias de perturbação clássicas, a contribuição de cada termo é proporcional à probabilidade de que a interação física que ele descreve aconteça.

Através de cálculos usando o modelo padrão é possível prever resultados experimentais de tempos de decaimento e de seções de choque para colisões entre partículas. A precisão destes resultados é extremamente alta, e há limites previstos pela teoria que ainda não puderam ser verificados experimentalmente já que o limite de energia que pode ser atingido nos aceleradores existentes ainda não é suficiente para medir tais valores.

A verificação experimental dos resultados previstos teoricamente corroboram a ideia de que se trata provavelmente da teoria física mais bem sucedida até hoje para descrever as

interações entre partículas elementares.

As principais quantidades físicas previstas pela teoria e que podem ser verificadas experimentalmente são:

- *Tempo de vida*: algumas partículas podem ter um tempo de vida finito antes de sofrerem algum tipo de interação e decaírem em outras partículas mais elementares. É possível obter um valor experimental para esse tempo de vida.
- *Seção de choque*: quando duas partículas viajam uma em direção à outra, elas podem interagir quando estiverem próximas o suficiente para que isso aconteça. A seção de choque é uma forma de medir a probabilidade dessa interação acontecer, dada a distância a que as partículas se cruzam e o tipo de força que causa a interação. Trata-se de uma área hipotética que pode ser medida ao redor do alvo e que representa uma superfície. Se esta área delimitada pela seção de choque for atravessada pela outra partícula em algum ponto, haverá alguma interação. Portanto, é possível obter experimentalmente o valor da seção de choque de uma colisão, sendo que este valor vai depender do tipo de interação sofrido, bem como das propriedades das partículas envolvidas nessa interação.

Calculando através da teoria essas quantidades físicas e comparando os valores encontrados com os resultados obtidos experimentalmente é possível verificar a validade das suposições físicas feitas para desenvolver o modelo padrão.

Assim, para descrever uma interação começo quantizando os campos físicos envolvidos (e não mais os parâmetros de posição e momento, como era o caso na física quântica não relativística, conforme mencionado acima). Após a quantização dos campos, aplico então uma teoria de perturbação para encontrar a quantidade física que quero encontrar.

Uma forma de entender a visão aplicada em teoria quântica de campos é pensar que, quando as partículas A e B interagem, eu só tenho acesso a duas informações básicas: o estado inicial (partículas A e B estão se aproximando) e o estado final (partículas finais detectáveis). O que acontece neste estado intermediário entre os estados inicial e final é uma "caixa preta", ou seja, não há como dizer exatamente que processos se deram naquele intervalo do espaço-tempo e não há como observar experimentalmente esse estado. A teoria

quântica de campos atribui a cada um dos infinitos possíveis estados intermediários um peso, dependendo da probabilidade que esse estado intermediário tem de acontecer.

Ou seja, a teoria quântica de campos procura encontrar o valor mais preciso possível para os tempos de vida e as seções de choque, fazendo isso através de uma aproximação, que é obtida através de uma série perturbativa. Cada termo da série perturbativa pode ser encontrado com a ajuda dos chamados gráficos de Feynman, uma representação pictórica dos processos que possivelmente podem acontecer ao longo da interação dessas partículas. E esses gráficos representam interações entre campos que são, agora, quantizados.

No método dos diagramas de Feynman cada termo é obtido através de uma combinação de contribuições onde cada caminho possível para a interação é uma contribuição a ser levada em conta. Para obter a contribuição de cada termo da série perturbativa, correspondente a cada diagrama, basta associar a cada parte do diagrama em questão uma expressão adequada. A construção dos diagramas respeita algumas regras básicas, que por sua vez foram estabelecidas de forma a respeitar a física envolvida no fenômeno que está sendo descrito, e que serão explicitadas mais adiante.

## 5.5 Interações fracas

Antes do estudo de modelos que respeitam invariância de calibre, a formulação das interações fracas era principalmente obtida através de dois métodos diferentes: a teoria de quatro férmions (*four fermion theory*) (20) e a teoria do bóson intermediário - IVB - (do inglês, *intermediate vector boson*) (21).

A teoria de interações de quatro férmions surgiu para explicar o longo tempo de vida de alguns processos, como o decaimento de  $\pi$  em  $\mu$  ou o decaimento  $\mu - e$ . O tempo de vida era tão longo que foi preciso recorrer a um novo tipo de interação para explicar os processos: a interação fraca.

Após a descoberta da violação de paridade, formulou-se a teoria V-A, onde a corrente associada a um processo podia ser dividida em vetorial ou axial. Essa teoria apenas fazia uma decomposição dessa corrente  $J_\lambda$  em duas componentes, uma associada a um bilinear vetorial e uma associada a um bilinear pseudovetorial(axial), respectivamente:  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  e  $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ .

A Lagrangeana referente a essa interação fraca pode ser descrita como:

$$L(x) = -\frac{G_F^\dagger}{\sqrt{2}} J_\lambda(x) J^\lambda(x) + \text{conjugado hermitiano.} \quad (5.74)$$

Mas a equação (5.74), acima, não é renormalizável e, conseqüentemente, uma teoria cuja Lagrangeana é descrita por (5.74) terá infinitos.

## 5.6 Teoria Eletrofraca

A teoria eletrofraca padrão descreve a estrutura das interações fraca e eletromagnética de forma unificada. Este capítulo procura apresentar os aspectos fundamentais dessa teoria, que em última análise leva a uma descrição do modelo de mistura para quarks e sua conseqüente matriz de massa. A principal referência para a redação deste capítulo foi o livro de Cheng e Li (22).

A teoria eletrofraca combina a eletrodinâmica quântica com a teoria fraca de baixa energia para correntes carregadas e neutras.

Por ser conseqüência de uma força de curto alcance, a interação fraca não pode ser intermediada por uma partícula de massa zero. No entanto, o bóson intermediário da teoria fraca, se fosse descrito por uma partícula massiva, quebraria a invariância de gauge da Lagrangeana da teoria e, conseqüentemente, viria a ferir o requisito básico para renormalizabilidade.

A solução para lidar com esse tipo de problema é o mecanismo de quebra espontânea de simetria, descrito no capítulo quatro desta dissertação. A teoria renormalizável que descreve essa interação é unificada com a teoria eletromagnética. A simetria de gauge respeitada nesse caso é  $SU(2) \times U(1)$ .

Uma teoria eletrofraca renormalizável onde os bósons intermediários da interação fraca tivessem massa gerada pelo mecanismo de Higgs só foi proposta em 1967 por Weinberg e independentemente em 1968 por Salam . Assim, a teoria passou a ser também conhecida por modelo Glashow-Weinberg-Salam (23)(24)(25).



## 6 *Matriz de massa para neutrinos*

Apesar de descrever de maneira correta o mecanismo de mistura de quarks e, consequentemente, sua matriz de massa, o modelo padrão ainda trata de uma física em que os neutrinos não possuem massa. De fato, houve um tempo em que a comunidade científica acreditou que os neutrinos tivessem massa zero, mas descobertas mais recentes provaram o contrário.

Entre essas descobertas, uma das mais notórias foi a observação do fenômeno de oscilação de neutrinos. Observou-se que neutrinos solares emitidos com um sabor chegavam à Terra como neutrinos de sabor diferente do original. Esse fenômeno indica que os autoestados de massa dos neutrinos são diferentes dos autoestados de sabor. Cada autoestado de massa pode ser descrito como uma combinação linear dos autoestados de sabor.

Para tratar desta característica massiva dos neutrinos é preciso ir além do modelo padrão atual. É possível fazer isso através de uma extensão deste modelo.

Uma das extensões sugeridas para incorporar a massa dos neutrinos ao modelo padrão foi adicionar ao setor leptônico ao menos uma nova partícula. Esta partícula seria incapaz de interagir por força fraca, podendo ser a responsável na matriz de mistura pelo termo gerador de massa dos neutrinos.

Este trabalho segue exatamente esta linha de desenvolvimento, em que o modelo padrão é estendido pela adição de partículas elementares que não interagem por força fraca, nem forte e nem eletromagnética, e que seriam os chamados neutrinos estéreis. A primeira seção deste capítulo é dedicada a introduzir estas partículas ao leitor.

A seção seguinte apresentará os cálculos da extensão do setor leptônico do modelo padrão, considerando  $n$  famílias de léptons e  $n_0$  neutrinos estéreis adicionados.

Uma vez tendo sido apresentadas as consequências da adição dos neutrinos estéreis, calcula-se a matriz de mistura para os neutrinos. Em um primeiro momento, esta matriz é en-

contrada para o caso em que temos apenas um neutrino estéril adicionado e, posteriormente, para o caso de  $n_0$  neutrinos estéreis adicionados.

Estas últimas seções apresentadas foram norteadas pelo artigo (1).

## 6.1 Neutrinos estéreis

Conforme mencionado no artigo da referência (26), os neutrinos estéreis são léptons neutros com nenhum tipo de interação fraca conhecida exceto aquela induzida pela mistura com os neutrinos ativos (neutrinos do modelo padrão). Tais partículas elementares poderiam ter qualquer valor de massa e seriam de difícil detecção. Essa adição pode ocorrer porque dentro de uma extensão simples do modelo padrão é possível adicionar neutrinos estéreis como singletos de SU(2).

Ou seja, o neutrino estéril é um singlete de SU(2) e poderia, em princípio, participar de interações envolvendo nova física ou interações envolvendo o bóson de Higgs. Isso quer dizer que em extensões do modelo padrão o neutrino estéril poderia participar efetivamente de interações.

Uma grande parte das extensões já sugeridas para o modelo padrão envolvem a adição de um ou mais neutrinos estéreis.

## 6.2 Modelo padrão estendido por neutrinos estéreis

Quero desenvolver um setor leptônico que possua agora, além das  $n$  famílias formadas pelos léptons conhecidos,  $n_0$  neutrinos estéreis. Adicionando estes neutrinos estéreis ao modelo, encontro diferenças nas Lagrangeanas que descrevem o setor leptônico, que agora deixa de ser padrão. O interesse aqui está em encontrar as Lagrangeanas do modelo modificado, que vão descrever o setor leptônico estendido.

Do modelo padrão tenho, a princípio, os  $n$  dubletos de quiralidade de mão esquerda (um dublete para cada geração de léptons), que posso escrever como:

$$F_{La} = \begin{bmatrix} n_{La} \\ f_{La} \end{bmatrix}^T. \quad (6.1)$$

Aqui  $a = 1, \dots, n$ , para levar em conta todas as  $n$  famílias e  $T$  representa que é a transposta da matriz. Portanto  $n_{La}$  representam os  $n$  léptons neutros de mão esquerda (seriam os  $n$  neutrinos padrão) e  $f_{La}$  representam os  $n$  léptons carregados de mão esquerda (seriam no modelo padrão os elétrons, táons e múons de mão esquerda, supondo  $n$  igual a 3, englobando as famílias conhecidas).

Além destes dubletos, tenho os  $n$  singletos referentes aos léptons carregados de mão direita, representados por  $f_{Ra}$ . Novamente,  $a$  varia de 1 a  $n$ .

Vale ressaltar que a letra  $L$  representa aqui a projeção de quiralidade de mão esquerda e a letra  $R$  representa a quiralidade de mão direita. O operador de projeção de quiralidade, que foi definido no capítulo de conceitos fundamentais, pode ser escrito aqui como:

$$P_{L,R} = \frac{(1 \mp \gamma^5)}{2}. \quad (6.2)$$

A representação dos léptons padrão sugere que é preciso escolher a quiralidade dos neutrinos estéreis que estou adicionando ao modelo. Tratando-se de partículas ainda não identificadas, não tenho como saber qual é sua projeção de quiralidade. Como os neutrinos estéreis, por construção, são singletos de  $SU(2)$ , estes tratam-se necessariamente de partículas de mão direita.

Sendo assim, posso agora representar os singletos formados pelos neutrinos estéreis como  $s_{Rx}$ .  $R$  é a projeção de quiralidade e agora  $x$  varia de 1 até  $n_0$ , pois estou adicionando  $n_0$  neutrinos estéreis.

Estou procurando as consequências da adição de neutrinos estéreis apenas para a parte fraca do modelo padrão. Isso porque os neutrinos estéreis só vão apresentar algum tipo de interação induzida pela mistura dos neutrinos padrão e as forças eletromagnética e forte são cegas aos neutrinos. Como no modelo padrão a força fraca e eletromagnéticas foram unificadas na teoria eletrofraca, vou partir da Lagrangeana da teoria eletrofraca para encontrar quais Lagrangeanas serão alteradas com a adição dos  $s_R$ . Tenho:

$$\mathcal{L}_{eletrofraca} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4. \quad (6.3)$$

O primeiro termo da Lagrangiana,  $\mathcal{L}_1$  é invariante de gauge e é a Lagrangeana que

representa a interação entre os tensores do campo de gauge SU(2) e U(1), tal que:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \quad (6.4)$$

Aqui tenho  $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + q\epsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k$ , e o tensor  $G$  do campo  $B$ , dado por  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ .

Neste caso  $F_{\mu\nu}$  é o tensor do campo de gauge SU(2), que neste caso trata-se de  $A$  e  $G_{\mu\nu}$  é o tensor do campo de gauge U(1) que neste caso trata-se de  $B$ . O índice  $\mu$  varia de 1 a 4 e o índice  $i$  varia de 1 a 3.

O segundo termo da Lagrangiana,  $\mathcal{L}_2$ , é também invariante de gauge e é a Lagrangeana que provém da Lagrangeana de Dirac, tal que:

$$\mathcal{L}_2 = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi. \quad (6.5)$$

Onde  $\psi$  é o campo do espinorial de Dirac dos férmions da teoria e  $D_\mu$  é a derivada covariante, que torna a Lagrangeana invariante de gauge. A derivada covariante é dada por:

$$\left( \partial_\mu - i\vec{g}\vec{T} \cdot \vec{A}_\mu - ig'\frac{V}{2}B_\mu \right). \quad (6.6)$$

Onde  $T$  é a representação da matriz SU(2),  $g'$  é a hipercarga.

O terceiro termo da Lagrangiana,  $\mathcal{L}_3$ , representa a interação do campo escalar consigo mesmo. É dado por:

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi). \quad (6.7)$$

Onde  $\phi$  é o campo escalar de Higgs,  $D_\mu\phi$  é a derivada covariante do campo de Higgs e onde tenho  $V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ .

Finalmente  $\mathcal{L}_4$  é a Lagrangeana referente ao acoplamento de Yukawa, também invariante de gauge. Pode ser escrita agora com os sub-índices explicitados na equação:

$$-\mathcal{L}_4 = y_{ab}^{(f)} \bar{F}_{aL} \phi f_{bR} + y_{ab}^{(p)} \bar{Q}_{aL} \tilde{\phi} p_{bR} + y_{ab}^{(n)} \bar{Q}_{aL} \phi n_{bR} + \text{conjugado hermitiano}. \quad (6.8)$$

Nesta equação tenho  $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi$ , onde o campo  $\phi$ , acima introduzido, é o campo escalar de Higgs. É esta equação que representa o acoplamento entre os campos escalares e os férmions do modelo e aqui ela está descrita apenas para  $n$  famílias de campos fermiônicos. Neste caso, tenho:

$$f_{aR} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (6.9)$$

$$p_{aR} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (6.10)$$

$$q_{aR} = (q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (6.11)$$

Nas equações (6.9), (6.10) e (6.11) acima,  $f_{aR}$  representa os  $n$  férmions carregados de quiralidade de mão direita,  $p_{aR}$  representa os  $n$  quarks de carga  $2/3$  de quiralidade de mão direita e  $q_{aR}$  representa os  $n$  quarks de carga  $-1/3$ , projeção de quiralidade de mão direita.

Preciso definir ainda algumas variáveis presentes na interação de Yukawa, são:  $F_{aL}$ , que está definida na equação (6.1) e  $n_R$ , que representa os singletos formados pelos neutrinos de mão direita, definidos acima.

Também tenho agora os  $n$  dubletos de projeção de mão esquerda formados pelas  $n$  famílias de quarks:

$$Q_{La} = \begin{bmatrix} p_a \\ q_a \end{bmatrix}_L^T. \quad (6.12)$$

Tenho também os termos que dão a constante de acoplamento para cada caso, descritos como  $y_{ab}^{(i)}$ , onde  $i$  representa a partícula da interação e  $ab$  são as duas famílias que estão sob acoplamento de Yukawa.

É importante ressaltar que na Lagrangeana de Yukawa do modelo padrão não há nenhum termo de interação entre o dubleto de mão esquerda  $F_{aL}$  e os singletos referentes aos férmions neutros de mão direita, que seriam os  $n_{Ra} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ .

Olhando para as Lagrangeanas acima descritas é fácil perceber que as que sofrerão alte-

rações pela adição dos neutrinos estéreis são apenas as Lagrangeanas  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_4$ . Isso porque, conforme mencionado anteriormente, a adição de neutrinos estéreis não tem nenhuma consequência para a parte eletromagnética da lagrangiana, uma vez que tratam-se de partículas neutras que não interagem eletromagneticamente. E também não causará nenhuma alteração para a Lagrangeana referente à interação dos campos escalares com eles mesmos, já que os neutrinos estéreis são campos fermiônicos.

O spinor  $\psi$ , presente na Lagrangeana  $\mathcal{L}_2$ , vai assumir o campo referente a cada um dos férmions presentes no modelo.

Uma vez tendo sido realizada a quebra espontânea de simetria, a partir da Lagrangeana  $\mathcal{L}_2$  encontro as Lagrangeanas da teoria eletrofraca do modelo padrão referentes a:

- Lagrangeana cinética ( $K$ );
- Lagrangeana da corrente fraca carregada ( $CC$ );
- Lagrangeana da corrente fraca neutra ( $NC$ );
- Lagrangeana eletromagnética ( $EM$ ).

A Lagrangeana referente à interação eletromagnética, após a adição de  $n_0$  neutrinos estéreis ao modelo, permanece inalterada e pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\mathcal{L}_{EM} = -eA_\mu \bar{f}_a \gamma^\mu f_a. \quad (6.13)$$

Onde  $f_a$  são os campos referentes aos férmions carregados da família  $a$ , conforme explicitado na equação (6.9) e  $A_\mu$  é o campo eletromagnético vetorial.

As Lagrangeanas referentes às correntes carregada e neutra da teoria eletrofraca são dadas respectivamente por:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ W_\mu^+ \bar{n}_{La} \gamma^\mu f_{La} + W_\mu^- \bar{f}_{La} \gamma^\mu n_{La} \right]. \quad (6.14)$$

$$\mathcal{L}_{CN} = \frac{g}{2c_w} Z_\mu \left[ \bar{n}_{La} \gamma^\mu n_{La} + \bar{f}_a \gamma^\mu (-P_L + 2s_w^2) f_a \right]. \quad (6.15)$$

Nas equações (6.14) e (6.15), acima, tenho que o campo  $W_\mu^\pm$  é o campo massivo introduzido pela quebra espontânea de simetria (17).

A Lagrangeana cinética, no entanto, apresenta agora um novo termo, referente aos neutrinos estéreis adicionados. Pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_K = \bar{n}_{La} i \not{\partial} n_{La} + \bar{s}_{Rx} i \not{\partial} s_{Rx} + \bar{f}_a i \not{\partial} f_a. \quad (6.16)$$

Lembrando que aqui  $s_{Rx}$  é o neutrino estéril de mão direita, onde  $x$  varia de 1 até  $n_0$ .

Preciso agora escrever a Lagrangeana de Yukawa levando em conta os  $n_0$  neutrinos estéreis. Levando em conta apenas os termos ligados aos férmions, a Lagrangeana de Yukawa é agora dada por:

$$-\mathcal{L}_Y = y_{ab}^f \bar{F}_{aL} \phi f_{bR} + y_{ax}^n \bar{F}_{aL} \tilde{\phi} s_{xR} + \text{c.h.}. \quad (6.17)$$

Nesta Lagrangiana, o termo  $\phi$  é o dubleto de Higgs, que possui valor esperado de vácuo dado por:  $\langle \phi \rangle_0 = (0, 1)^T (v + \eta(x)) / \sqrt{2}$ , onde  $v$  é dado por  $(\mu^2 / \lambda)^{1/2}$ , sendo que  $\lambda$  e  $\mu$  devem ter valores positivos para que ocorra a quebra e  $\eta(x)$  é o deslocamento do campo.

O termo  $\phi$  só apareceu depois da quebra espontânea de simetria, que neste caso já foi levada em conta.

Há ainda um termo novo, que precisa ser acrescentado ao modelo. Ele aparece porque os neutrinos estéreis são invariantes por transformações do tipo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , e portanto posso ter uma Lagrangeana de massa para eles, da forma:

$$-\mathcal{L}_{sR} = -\frac{1}{2} M_{xy} \bar{s}_{xR}^c s_{yR} + \frac{1}{2} M_{xy}^* \bar{s}_{yR} s_{xR}^c. \quad (6.18)$$

Nesta equação a notação  $\psi^c$  representa um campo onde foi aplicada uma operação de conjugação de carga, tal que  $\psi^c = \mathcal{C} \gamma^0 \psi^*$ . Aqui, a transformação de conjugação de carga é  $\mathcal{C} = i \gamma^0 \gamma^2 = -\mathcal{C}^\dagger = -\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}^{-1}$ .

A Lagrangeana de massa de neutrinos estéreis (6.18), acima apresentada, representa os termos de massa do modelo, juntamente à Lagrangeana de Yukawa.

Para encontrar as matrizes de massa vou partir da Lagrangeana de Yukawa, posso escre-

ver. Levando em conta que a quebra espontânea de simetria fez com o que o valor esperado de vácuo do campo  $\phi$  passe a ser não nulo. Ou seja,  $\langle \phi \rangle_0 = (0, 1)^T (v + \eta(x)) / \sqrt{2}$ . Para escrever a equação abaixo (6.19) também utiliza-se o fato de que  $\tilde{\phi} = i\tau^2 \phi^*$  e  $\tau^2 = i$ . Assim:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y &= y_{ab}^f \begin{pmatrix} \bar{n}_{aL} \\ \bar{f}_{aL} \end{pmatrix}^T \phi f_{bR} + y_{ax}^n \begin{pmatrix} \bar{n}_{aL} \\ \bar{f}_{aL} \end{pmatrix}^T \tilde{\phi} s_{xR} + \text{c.h.} \\
&= y_{ab}^f \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{f}_{aL} f_{bR} + y_{ax}^n \begin{pmatrix} \bar{n}_{aL} \\ \bar{f}_{aL} \end{pmatrix}^T i\tau^2 \phi^* s_{xR} + y'_{ay} \bar{s}_{xR}^c s_{yR} + \text{c.h.} \\
&= y_{ab}^f \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{f}_{aL} f_{bR} + y_{ab}^f \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \bar{f}_{aL} f_{bR} + y_{ax}^n \frac{v^*}{\sqrt{2}} \bar{n}_{aL} f_{xR} + y_{ax}^n \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \bar{n}_{aL} s_{xR} + \text{c.h.} \quad (6.19)
\end{aligned}$$

Na equação (6.19), acima, o primeiro, segundo e quarto termos representam termos de massa de férmions.

Quero encontrar a Lagrangeana de massa do modelo. Sei que os termos multiplicados por  $\eta(x)$  não representam termos de massa. Eliminando estes termos e já adicionando os termos referente à Lagrangeana de massa de neutrinos (6.18), fico com a Lagrangeana de massa do modelo, dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = y_{ab}^f \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{f}_{aL} f_{bR} + y_{ax}^n \frac{v^*}{\sqrt{2}} \bar{n}_{aL} f_{xR} + y'_{xy} \bar{s}_{xR}^c + \text{c.h.} \quad (6.20)$$

E assim, chamando  $m_f = y_{ab}^f \frac{v}{\sqrt{2}}$ ,  $D = y_{ax}^n \frac{v^*}{\sqrt{2}}$ , encontro:

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = (\bar{f}_{aL} m_f f_{bR} + \bar{n}_{aL} D s_{xR} + \text{c.h.}) + \frac{1}{2} (\bar{s}_{xR}^c M s_{yR} + \text{c.h.}). \quad (6.21)$$

E nesta equação  $m_f$  é a matriz de massa para as  $n$  famílias de férmions carregados,  $D$  é a matriz de massa para as  $n$  famílias de férmions neutros de projeção de mão esquerda e  $M$  é a matriz de massa dos  $n_0$  férmions estéreis de projeção de mão direita, neste caso os neutrinos estéreis que adicionei ao modelo.

Fica claro que, se não houvesse a adição dos férmions neutros ao modelo a matriz  $D$ , e conseqüentemente a matriz  $M$ , seriam nulas e os neutrinos de mão esquerda não teriam massa, como foi apresentado no capítulo anterior.



As dimensões destas matrizes de massa  $M$  e  $D$  dependem do número de famílias do modelo e do número de neutrinos estéreis que foram adicionados, já que  $m_f$  tem dimensão  $n \times n$ ,  $D$  tem dimensão  $n \times n_0$  e  $M$  tem dimensão  $n_0 \times n_0$ .

Quero encontrar a base de massa, partindo da base que possuo, dos autoestados de gauge. Para encontrar essa relação basta diagonalizar a matriz de massa encontrada, obtendo assim a matriz de mistura.

## 6.3 Matriz de massa

A primeira matriz a ser diagonalizada, por simplicidade, será a matriz de massa dos léptons carregados. Ela pode ser diagonalizada diretamente através das chamadas transformações biunitárias.

Isso porque a Lagrangeana de massas é composta por matrizes de massa genéricas. E para os léptons carregadas não há nenhuma restrição sobre a matriz de massa  $m_f$  que aparece na Lagrangeana e que precisa ser diagonalizada para se encontrar os autoestados de massa.

Esta seção procura apresentar como encontrar a forma diagonal de uma matriz genérica  $M$ , sem qualquer informação a priori a seu respeito.

### Transformações biunitárias

Uma matriz genérica que não apresenta nenhuma restrição conhecida, como ser hermitiana ou simétrica, pode ser diagonalizada através das chamadas transformações biunitárias. Isso quer dizer que, dada uma matriz genérica  $M$ , existem duas matrizes unitárias  $S$  e  $T$ , tais que:

$$S^\dagger M T = M_d. \quad (6.22)$$

A matriz  $M_d$  é uma matriz diagonal com os autovalores não nulos. Os autovalores de  $M$  são positivos.

Neste caso posso dizer que qualquer matriz  $M$  com essas características pode ser escrita como um produto entre duas matrizes, uma hermitiana  $H$  e uma unitária  $V$ , e que a matriz hermitiana sempre pode ser diagonalizada por uma matriz unitária. Lembrando que uma

matriz hermitiana  $H$  é aquela onde  $H = H^\dagger$  e uma matriz unitária  $V$  é aquela onde  $V \cdot V^\dagger = I \Rightarrow V^\dagger = V^{-1}$ .

Ou seja, o ponto de partida é escrever minha matriz geral  $M$  como o produto de uma matriz  $H$  e de uma matriz  $V$  com as características acima citadas. Este é o ponto inicial.

Posso escrever então:

$$M = HV. \quad (6.23)$$

Por construção tenho que  $MM^\dagger$  é hermitiana, isso porque para as matrizes genéricas  $A$  e  $B$ ,  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$  e assim:

$$MM^\dagger = B \Rightarrow (MM^\dagger)^\dagger = B^\dagger \Rightarrow MM^\dagger = B^\dagger. \quad (6.24)$$

Portanto,  $MM^\dagger$  é hermitiana. E sendo hermitiana,  $MM^\dagger$  pode ser diagonalizada por uma matriz unitária  $S$ , tal que:

$$S^\dagger(MM^\dagger)S = M_d^2. \quad (6.25)$$

Onde a matriz diagonal  $M_d^2$  para três sabores, como no caso dos quarks, é dada por:

$$M_d^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & & \\ & m_2^2 & \\ & & m_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

A matriz unitária  $S$  responsável pela diagonalização é única, a menos de uma matriz diagonal de fases. Chamando de  $F$  essa matriz de fases, tal que:

$$F = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & e^{i\theta_2} & \\ & & e^{i\theta_3} \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Isso quer dizer que:

$$(SF)^\dagger(MM^\dagger S = M_d^2)(SF) = M_d^2. \quad (6.28)$$

Com uma escolha adequada de fases, é possível garantir que todos os autovalores da matriz  $M$  sejam positivos.

Definindo agora a matriz  $H = SM_dS^\dagger$ , hermitiana, posso escrever:

$$V \equiv H^{-1}M \Rightarrow V^\dagger = M^\dagger(H^{-1})^\dagger \Rightarrow V^\dagger = M^\dagger H^{-1}. \quad (6.29)$$

Usando a equação (6.29), tenho que:

$$\begin{aligned} VV^\dagger &= H^{-1}MM^\dagger H^{-1} \\ &= H^{-1}SS^\dagger MM^\dagger SS^\dagger H^{-1} \\ &= H^{-1}SM_d^2S^\dagger H^{-1} \\ &= H^{-1}SM_dSS^\dagger M_dS^\dagger H^{-1} \\ &= H^{-1}HHH^{-1} \\ &= I. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Ou seja, agora sei que  $V$  deve ser uma matriz unitária. E sabendo que a matriz  $H$  é hermitiana, posso defini-la da forma:

$$\begin{aligned} H &= SM_dS^\dagger \\ S^\dagger SM_dSS^\dagger &= S^\dagger HS \\ S^\dagger HS &= M_d. \end{aligned} \quad (6.31)$$

E como  $M = HV$ , então:

$$\begin{aligned}
MV^{-1} &= HVV^{-1} \\
MV^{-1} &= H \quad \text{mas como } V \text{ é unitária} \\
MV^\dagger &= H \Rightarrow S^\dagger HS = S^\dagger MV^\dagger S = M_d.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Chamando  $T = V^\dagger S$  e usando o fato de que  $S$  e  $V$  são unitárias, tenho:

$$\begin{aligned}
T^\dagger &= S^\dagger V \\
T^{-1} &= (V^\dagger S)^{-1} \\
T^{-1} &= S^{-1}(V^\dagger)^{-1} \\
T^{-1} &= S^\dagger V = T^\dagger.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Assim,  $S^\dagger MT = M_d$ , onde  $S$  e  $T$  são matrizes unitárias. Encontrar a forma diagonal de matriz  $M$  genérica era exatamente a proposta da demonstração.

### Autoestados de massa dos férmions carregados

Voltando, portanto, à Lagrangeana do modelo padrão estendido, calculo os autoestados de massa dos férmions carregados. Sem nenhuma restrição imposta à matriz  $m_f$ , vou encontrar essa diagonalização aplicando a ela uma transformação biunitária. Supondo que são unitárias as matrizes  $X_{L,R}$ , onde  $L$  representa a matriz aplicada aos campos de mão esquerda e  $R$  a matriz aplicada aos de mão direita, tenho:

$$X_{L,R}^{-1} = X_{L,R}^\dagger. \tag{6.34}$$

Aplicando essas matrizes aos seus respectivos campos:

$$f_L = X_L l_L \tag{6.35}$$

$$f_R = X_R l_R. \tag{6.36}$$

Aqui  $l_{L,R}$  é o novo autoestado, agora não mais um autoestado de gauge, mas um auto-

estado de massa. Levando isso em conta, posso escrever que a matriz de mistura original  $m^f$  pode ser escrita como a matriz agora diagonalizada  $m^l$ . Estou usando o fato de que uma matriz geral sem simetrias pode ser diagonalizada por uma transformação biunitária, conforme a equação abaixo explicita:

$$X_L^\dagger m^f X_R = m^l = \text{diagonal}(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n). \quad (6.37)$$

Lembrando que tenho uma matriz  $n \times n$ , formada pelas  $n$  famílias, por isso tenho  $n$  autovalores na matriz diagonal. Também vale relembrar que a matriz original  $m_f$ , que foi diagonalizada, é formada a partir da Lagrangeana de Yukawa, mais especificamente posso escrever que:

$$m_{ab}^f = y_{ab}^f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (6.38)$$

Isso é equivalente aos cálculos realizados para o caso da matriz de mistura do modelo padrão. Mas agora, com a adição dos neutrinos estéreis, ainda é preciso diagonalizar mais dois termos de massa. Exatamente nesse caso encontramos a diferença. Esses dois termos são:

$$\bar{n}_L D s_R + \text{conjugado hermitiano} \quad (6.39)$$

$$\frac{1}{2} \bar{s}_r^c M s_R + \text{conjugado hermitiano} \quad (6.40)$$

Para encontrar as matrizes de mistura dos férmions neutros, primeiramente, é mais fácil escrever as Lagrangeanas cinética e de massa uniformemente em função dos campos presentes:  $n_L, s_R$  e seus conjugados de carga  $n_L^c, s_R^c$ . Para fazer isso será preciso usar a relação  $\bar{\psi}^C i \gamma^\mu \partial_\mu \chi^C = -i \partial_\mu (\bar{\chi} \gamma^\mu \psi) + \bar{\chi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ . Isso vale porque:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^C i\gamma^\mu \partial_\mu \chi^C &= -i\partial_\mu (\bar{\chi} \gamma^\mu \psi) + \bar{\chi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \\
&= -i\partial_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \psi - i\bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\chi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \\
&= -i\partial_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \psi, \quad \text{mas como} \quad \bar{\psi}^C \chi^C = \bar{\chi} \psi \\
&= \bar{\psi}^C i\gamma^\mu \partial_\mu \chi^C.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

E assim posso escrever:

$$\mathcal{L}_k^\nu = \frac{1}{2} (\bar{n}_L^C, \bar{s}_R) i\partial \begin{pmatrix} n_L^C \\ s_R \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\bar{n}_L, \bar{s}_R^C) i\partial \begin{pmatrix} n_L \\ s_R^C \end{pmatrix} \tag{6.42}$$

$$-\mathcal{L}_m^\nu = \frac{1}{2} (\bar{n}_L, \bar{s}_R^C) m^n \begin{pmatrix} n_L^C \\ s_R \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\bar{n}_L^C, \bar{s}_R) m^{n\dagger} \begin{pmatrix} \bar{n}_L \\ s_R^C \end{pmatrix}. \tag{6.43}$$

Agora, sabendo que a dimensão da matriz  $D$  é  $n \times n_0$ , e a dimensão da matriz  $M$  é  $n_0 \times n_0$ , sei que a matriz de mistura  $m^n$  tem dimensão  $(n + n_0) \times (n + n_0)$ , e que ela é da forma:

$$m^n = \begin{pmatrix} 0_n & D \\ D^T & M \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Acima, em (6.44),  $0_n$  é a matriz  $n \times n$  de zeros.

Tenho a forma geral da matriz de mistura para o novo modelo com neutrinos estéreis. Antes de diagonalizar essa matriz, encontrando seus autovalores, e levando em conta que  $m^n$  possui uma submatriz de zeros, é mais simples procurar já a priori qual é a dimensão de degenerescência do autovalor zero para  $m^n$ .

Para encontrar esse valor é preciso recorrer ao chamado teorema da dimensão núcleo-imagem. A prova está a seguir:

### Degenerescência do autovalor nulo

Encontrar a dimensão da degenerescência do autovalor zero para uma matriz genérica  $C$  é equivalente a encontrar a dimensão do núcleo (kernel) da matriz  $C$ . Para este caso estamos

querendo encontrar a dimensão do núcleo da matriz  $m^n$ . Para verificar isso constrói-se matriz genérica  $C$ , abaixo.

Partindo da matriz quadrada  $C$ , de dimensão  $(m+n) \times (m+n)$ , posso escrever  $Cx = 0$  da forma:

$$C = \begin{pmatrix} 0_{(n \times n)} & B_{(n \times m)} \\ B_{(m \times n)}^T & A_{(m \times m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \text{ (n)} \\ x_2 \text{ (m)} \end{pmatrix} = 0.$$

Aqui, a matriz  $C$  representa a matriz  $m^n$ , que desejamos diagonalizar, e as matrizes  $A$  e  $B$  são matrizes genéricas cujas dimensões estão especificadas na fórmula acima. A matriz  $A$  é inversível e matriz  $B$  tem posto máximo, o que significa que a dimensão da imagem de  $B$  é  $m$ .

E o vetor  $x$ , de  $(n+m)$  dimensões, pode ser escrito como  $x_1$  e  $x_2$ , de dimensões  $n$  e  $m$  respectivamente, que são os dois subvetores do vetor  $x$ . Assim, tenho:

$$\begin{aligned} Bx_2 &= 0 \\ B^T x_1 + Ax_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Mas por construção  $B$  é uma matriz unitária (como é o caso de  $D$ ), assim, tenho que  $B = B^T$ , e portanto, aplicando  $B$  à segunda equação acima encontro:

$$\begin{aligned} BB^T x_1 + BAx_2 &= 0 \\ BB^T x_1 &= -BAx_2 \\ x_1 &= -(BB^T)^{-1} B^T Ax_2. \end{aligned} \tag{6.46}$$

De maneira mais direta, posso então escrever:

$$\begin{aligned}
\text{kernel}(C) &= \{(x_1, x_2); C(x_1, x_2) = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2); Bx_2 = 0 \text{ e } B^T x_1 + Ax_2 = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2); x_2 \in \text{kernel}(B) \text{ e } x_2 = -A^{-1}B^T x_1\} \\
&= \{(x_1, x_2); -A^{-1}B^T x_1 \in \text{kernel}(B) \text{ e } x_2 = -A^{-1}B^T x_1\}.
\end{aligned}$$

Mas  $-A^{-1}B^T x_1 \in \text{kernel}(B) \Leftrightarrow B(-A^{-1}B^T x_1) = 0 \Leftrightarrow B^T x_1 \in \text{kernel}(BA^{-1})$ . Abaixo, defino  $D = BA^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
\text{kernel}(C) &= \{(x_1, x_2); B^T x_1 \in \text{kernel}(BA^{-1}) \text{ e } x_2 = -A^{-1}B^T x_1\} \\
&= \{(x_1, x_2); B^T x_1 \in \text{kernel}(D) \text{ e } x_2 = -A^{-1}B^T x_1\}.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

$D$  tem posto máximo, pois  $A$  é inversível e porque  $B$  tem posto máximo. Para encontrar o kernel de  $D$ , então:

$$\begin{aligned}
B &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow B^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\
D &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow DB^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Lembrando que a dimensão da imagem de  $B^T$  é  $m$ , pois  $B^T$  tem posto máximo. Portanto  $\Rightarrow \text{Im}(B^T) = \mathbb{R}^m \Rightarrow \dim(\text{Im}(B^T)) = \dim(\text{Im}(D)) = m$ .

Pelo teorema do núcleo-imagem aplicado agora a  $DB^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vou encontrar:

$$\begin{aligned}
\dim(DB^T) &= \dim(\text{Im } DB^T) + \dim(\text{kernel}(DB^T)) \\
n &= m + \dim(\text{kernel}(DB^T)) \\
\dim(\text{kernel}(DB^T)) &= n - m.
\end{aligned}$$



Mas como:

$$\begin{aligned}
\text{kernel}(C) &= \{(x_1, x_2); B^T x_1 \in \text{kernel}(D) \text{ e } x_2 = -A^{-1} B^T x_1\} \\
&= \{(x_1, x_2); B^T x_1 \in \text{kernel}(DB^T) \text{ e } x_2 = -A^{-1} B^T x_1\} \\
\Rightarrow \dim \text{kernel}(C) &= \dim \text{kernel}(DB^T) = n - m.
\end{aligned}$$

Agora, podemos voltar ao caso dos neutrinos estéreis e da matriz de mistura que pretendemos diagonalizar.

Portanto, posso dizer que para a matriz de mistura  $m^n$ , encontrada com a adição de  $n_0$  neutrinos estéreis ao modelo padrão, terei que o autovalor nulo será  $(n - n_0)$  vezes degenerado após a diagonalização.

Como a dimensão da matriz  $m^n$ , que seria a transformação linear, é  $n + n_0$ , isso quer dizer que dos  $n + n_0$  autovalores possíveis, serão diferentes de zero apenas  $n + n_0 - (n - n_0)$ , ou seja  $2n_0$  autovalores diferentes de zero.

Essa matriz será diagonalizada através de uma transformação biunitária, como no caso dos férmions carregados. Assim, supondo a transformação unitária dada pela matriz  $Y$  (tal que  $Y^{-1} = Y^\dagger$ ), posso escrever:

$$\begin{pmatrix} n_L^C \\ s_R \end{pmatrix} = Y \nu_R. \quad (6.48)$$

Com essa definição posso escrever analogamente para os campos com conjugação de carga:

$$\begin{pmatrix} n_L \\ s_R^C \end{pmatrix} = Y^* \nu_R^C. \quad (6.49)$$

E aplicando essas transformações na matriz  $m^n$ , já levando em conta a degenerescência de zero, encontro a diagonalização. Aqui, os autovalores diferentes de zero são indexados de  $n - n_0 + 1$  até  $n + n_0$ , ou seja, somando exatamente  $2n_0$ . A matriz diagonalizada é chamada de  $m^\nu$ :

$$Y^T m^n Y = m^\nu = \text{diag}(0, \dots, 0, m_{n-n_0+1}, \dots, m_{n+n_0}). \quad (6.50)$$

Por construção, agora, a matriz  $m^\nu$  é formada por uma submatriz de zeros, de dimensão  $(n - n_0 \times n - n_0)$ . E a matriz original  $m^n$  era formada também por uma submatriz de zeros, mas de dimensão  $n$ . Mais tarde isso fornecerá uma importante condição de contorno.

Substituindo a forma diagonalizada da matriz  $m^\nu$ , posso escrever as Lagrangianas de massa e cinética de maneira agora mais compacta. Fazendo isso, encontro a equação apresentada abaixo:

$$\mathcal{L}_k^\nu + \mathcal{L}_m^\nu = \frac{1}{2} \left( \bar{\nu}_R i \not{\partial} \nu_R + \bar{\nu}_R^C i \not{\partial} \nu_R^C \right) - \frac{1}{2} \left( \bar{\nu}_R^C m^\nu \nu_R + \bar{\nu}_R i m^\nu \nu_R^C \right). \quad (6.51)$$

Essa equação pode ser escrita de uma forma ainda mais compacta supondo os neutrinos como neutrinos de Majorana, ou seja, neutrinos que satisfazem a relação  $\nu^C = \nu$ . Dessa forma posso descrever os campos de neutrinos de Majorana  $\nu$  como:

$$\nu = \nu_R + \nu_R^C. \quad (6.52)$$

Ou seja, posso escrever a equação (6.51) com termos dos campos apresentados na equação (6.52), que representa um campo de Majorana. Assim, substituindo essa forma na equação para as Lagrangeanas encontro:

$$\mathcal{L}_K^\nu + \mathcal{L}_m^\nu = \frac{1}{2} \bar{\nu} (i \nu \partial - m^\nu) \nu. \quad (6.53)$$

Agora devemos tentar escrever as Lagrangeanas de interação dos léptons usando a forma diagonalizada das matrizes de mistura, que encontramos tanto para os léptons neutros como para os léptons carregados. Novamente lembrando aqui que tudo que está sendo calculado vale para um número arbitrário de famílias  $n$  e neutrinos estéreis adicionados  $n_0$ , contanto apenas que  $n > n_0$  (condição para validade da demonstração da dimensão do núcleo da matriz  $m^n$ ).

Usar as matrizes de mistura diagonalizadas é equivalente a escrever agora as Lagrangeanas em função dos autoestados de massa, ou seja, escrever em função dos campos com massas definidas.

As Lagrangeanas eletromagnética,  $\mathcal{L}_{EM}$ , não apresenta nenhuma alteração após a diagonalização das matrizes de mistura. A parte referente aos léptons carregados da Lagrangeana

da corrente neutra  $\mathcal{L}_{CN}$  também permanece inalterada. Mas as Lagrangeanas de massa e  $\mathcal{L}_{CC}$  sofrem alterações, bem como a parte referente aos léptons neutros da corrente neutra.

Começando pela corrente carregada,  $\mathcal{L}_{CC}$ , posso escrever:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{q}{\sqrt{2}} \left[ W_\mu^- \bar{l}_{La} X_{La}^\dagger \gamma^\mu Y_a^* \nu_R^C + W_\mu^+ Y_a \nu_R \gamma^\mu X_{La} l_{La} \right]. \quad (6.54)$$

Onde tenho que  $\bar{f}_{La} = \bar{l}_L X^\dagger$  e  $n_{La} = Y_a^* \nu_R^C$ . Posso substituir nessa equação a matriz  $n \times (n + n_0)$ , abaixo:

$$V_{\beta j}^C = \sum_{a=1}^n \left( X_L^\dagger \right)_{\beta a} Y_{aj}^*. \quad (6.55)$$

O  $C$  aqui refere-se ao fato de que estou encontrando a matriz de mistura da corrente carregada. Fazendo a substituição dessa matriz e usando a propriedade dos neutrinos de Majorana, posso então escrever:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{q}{\sqrt{2}} \left[ V_{\beta j}^C W_\mu^- \bar{l}_{L\beta} \gamma^\mu \nu_j + V_{\beta j}^{*C} W_\mu^+ \bar{\nu}_j \gamma^\mu l_{L\beta} \right]. \quad (6.56)$$

Aqui chega-se a um importante ponto do trabalho, pois a matriz  $V_{\beta j}^C$  é a análoga para o setor leptônico estendido da famosa matriz  $V_{CKM}^\dagger$  de mistura de quarks, ou seja, do setor hadrônico.

Outro ponto muito importante é o fato de que o somatório em  $V_{\beta j}^C$  vai apenas até  $n$ , já que tenho  $n$  famílias e, consequentemente, a matriz unitária  $X$ , que diagonaliza os férmions carregados, tem dimensão  $n \times n$ . Isso é importante porque indica que apenas uma parte da matriz  $Y$  que diagonaliza os férmions neutros estará envolvida na parte da corrente carregada. Isso é natural, dado o fato de que estamos adicionando  $n_0$  neutrinos estéreis, que não possuem equivalente adicionado ao caso carregado e a matriz  $Y$  terá exatamente  $n_0$  dimensões a mais do que a matriz  $Y$ .

Isso é equivalente a levar em conta que os neutrinos estéreis **não** interagem com os férmions carregados, que é exatamente a física que estamos tentando modelar.

A partir da matriz  $V_{\beta j}^C$  posso encontrar uma importante relação que será utilizada futuramente para encontrar os parâmetros físicos da matriz de massa resultante.

Lembrando que tanto a matriz  $X$  quanto a matriz  $Y$  são unitárias, posso escrever que:

$$\begin{aligned}
X_L^{-1} &= X_L^\dagger \\
Y^{-1} &= Y^\dagger \\
\Rightarrow V^\dagger &= Y^\dagger X^\dagger = Y^{-1} X^{-1} \\
V &= XY \\
\Rightarrow VV^\dagger &= Y^{-1} X^{-1} XY = Y^{-1} \mathbb{I}_{n \times n} Y \\
&= Y^{-1} Y = \mathbb{I}_{n \times n} \\
\Rightarrow VV^\dagger &= \mathbb{I}_{n \times n}.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

E essa é a primeira identidade respeitada pela matriz de mistura  $V^C$ .

$$\boxed{V^C V^{C\dagger} = \mathbb{I}_{n \times n}} \tag{6.58}$$

Mas, por causa da diferença entre dimensões das matrizes  $Y$  e  $X$ , a identidade vale para  $\mathbb{I}_{n \times n}$ , mas não vale para  $\mathbb{I}_{n_0 \times n_0}$ . Ou seja,  $V^C V^{C\dagger} \neq \mathbb{I}_{n_0 \times n_0}$ . Aqui a matriz  $V^C$  tem dimensão  $n \times (n + n_0)$ , já que os índices  $\beta$  e  $j$  estão variando em espaços diferentes. O índice  $\beta$  varia de 0 a  $n$ , enquanto  $j$  varia de 0 a  $n + n_0$ , já que é o índice associado à matriz  $Y$ .

E ainda é preciso levar em conta o que acontece com a parte relacionada aos neutrinos da Lagrangeana da corrente neutra. Posso escrever que (onde o índice  $\nu$  indica que se trata apenas da parte relacionada aos férmions neutros):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CN}^\nu &= \frac{g}{2c_w} Z_\mu [\bar{n}_L a \gamma^\mu n_{La}] \\
&= \frac{g}{2c_w} Z_\mu [\bar{\nu}_R^C Y \gamma^\mu Y^* \nu_R^C].
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Analogamente ao caso da corrente carregada, posso escrever agora uma matriz da corrente neutra, levando já em conta o fato de que estou trabalhando com neutrinos de Majorana, posso escrever:

$$\begin{aligned}
V_{kj}^N &= \sum_{a,b=1}^n Y_{bk} \delta_{ba} Y_{aj}^* \\
&= \sum_{a,b=1}^n \sum_{a=1}^n Y_{bk} (X_L)_{b\alpha} (X_L^\dagger)_\alpha Y_{aj}^* \\
&= \left( V^C V^{C\dagger} \right)_{kj}.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

É importante ressaltar que a matriz de mistura da Lagrangeana da corrente neutra pode ser escrita como função da matriz de mistura da corrente carregada  $V^C$ .

Sendo  $P_L \nu_j$  o projetor de helicidade de mão esquerda (left) de  $\nu_j$ , posso escrever então a Lagrangeana  $\mathcal{L}_{CN}^\nu$ :

$$\mathcal{L}_{CN}^\nu = \frac{g}{2c_w} Z_\mu \left[ V_{kj}^N Z_\mu \bar{\nu}_k \gamma^\mu P_L \nu_i \right]. \tag{6.61}$$

Ainda é possível encontrar uma nova relação para a matriz  $V_C$ . Para fazer isso basta levar em conta que originalmente a matriz  $m^n$  possuía uma submatriz  $(n \times n)$  de zeros na sua diagonal superior, ou seja, fazendo a transformação inversa, tenho que:

$$\begin{aligned}
\left( Y^* m^\nu Y^\dagger \right)_{ab} &= 0 \quad \text{para } a, b = 1, \dots, n. \\
Y^* m^\nu Y^\dagger &= Y^* Y^T m^n Y Y^\dagger \\
&= Y^* Y^T m^n \\
&= Y^* Y Y^\dagger Y^T m^n \\
&= m^n.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

E agora, multiplicando a relação  $\left( Y^* m^\nu Y^\dagger \right)_{ab} = 0$  para  $a, b = 1, \dots, n$  por  $\left( X_L^\dagger \right)_{\alpha a} \left( X_L^\dagger \right)_{\beta b}$  e somando em  $a$  e  $b$ , além de substituir a equação (6.55) para  $V^C$ , encontro:

$$\begin{aligned}
(X_L^\dagger)_{\alpha a} (Y^* m^\nu Y^\dagger)_{ab} (X_L^\dagger)_{\beta b} &= 0 \\
(X_L^\dagger)_{\alpha a} (Y^*)_{ab} m_{ba}^\nu (Y^\dagger)_{ab} (X_L^\dagger)_{\beta b} &= 0 \\
\text{substituindo na equação } V_{ab}^C &= \sum_{a=1}^n (X_L^\dagger)_{\alpha a} (Y_L^*)_{ab} \\
\text{e } V_{ab}^{\dagger C} &= \sum_{a=1}^n (Y_L^{*T})_{ab} (X_L^\dagger)_{\alpha a}^T \\
\Rightarrow V_{ab}^C (m^\nu)_{ba} V_{\alpha\beta}^{CT} &= 0_{n \times n} \text{ para } \alpha, \beta = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Assim, a segunda condição de contorno que será utilizada é:

$$\boxed{V_{ab}^C (m^\nu)_{ba} V_{\alpha\beta}^{CT} = 0_{n \times n}} \tag{6.64}$$

Essa segunda restrição é válida mesmo quando  $n \leq n_0$ .

Até este momento, os cálculos apresentados e as relações encontradas valem para  $n$  e  $n_0$  genéricos. A partir de agora, o escopo do trabalho é parametrizar a matriz de massa e para isso, a princípio, será estudado o caso em que apenas um neutrino estéril é adicionado. A seção final deste capítulo apresenta então o caso em que se adiciona apenas um neutrino estéril, mas levando em conta  $n$  famílias de férmions.

## 6.4 Matriz de mistura com $n_0 = 1$ e $n = 1$

Num primeiro momento, além de supor  $n_0 = 1$  (apenas um neutrino estéril adicionado ao modelo) vamos também supor que temos apenas uma família de férmions, ou seja  $n = n_0 = 1$ . A parametrização da matriz é realizada de duas formas diferentes, a primeira é através da aplicação da duas restrições encontradas na seção anterior e posteriormente a mesma parametrização é encontrada através de diagonalização direta.

### Forma 1

Para o caso  $n = n_0 = 1$  tenho apenas dois neutrinos. Posso admitir que os dois possuem massas diferentes de zero e diferentes entre si, ou seja  $0 < m_- < m_+$ .

E a matriz de mistura para a corrente carregada,  $V^C$ , pode ser escrita agora como uma

linha com dois elementos. Lembrando que a dimensão de  $V^C$  é  $n \times (n + n_0)$ , e portanto, neste caso  $(1 + 1) = 2$ , uma linha e duas colunas.

Escrevendo a matriz de mistura  $V^C$  mais genérica possível, complexa, tenho:

$$V^C = \begin{pmatrix} r_1 e^{i\rho_1} & r_2 e^{i\rho_2} \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Agora é preciso encontrar as consequências das duas restrições apresentadas na seção anterior. A primeira delas:

$$V^C V^{C\dagger} = \mathbb{I}_{n \times n}. \quad (6.66)$$

Já que  $V^C V^{C\dagger} = 1$ , neste caso, a equação acima vai impor à matriz  $V^C$  a seguinte restrição (obtida por cálculo direto):

$$r_1^2 + r_2^2 = 1. \quad (6.67)$$

Para a segunda relação encontrada:

$$V_{ab}^C (m^\nu)_{ba} V_{\alpha\beta}^{CT} = 0_{n \times n}. \quad (6.68)$$

Que neste caso quer dizer  $V_{ab}^C (m^\nu)_{ba} V_{\alpha\beta}^{CT} = 0$ , vou encontrar uma nova restrição para  $V^C$ . Neste caso simples que montamos, a matriz diagonalizada  $m^\nu$  vai ter dimensão  $(2 \times 2)$  e pode ser escrita como:

$$m^\nu = \begin{pmatrix} m_- & \\ & m_+ \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

Aplicando essa forma de  $m^\nu$  à equação (6.68) acima, encontro:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha b}^C (m^\nu)_{ba} V_{\alpha\beta}^{CT} &= 0 \\
(r_1 e^{i\rho_1}, r_2 e^{i\rho_2}) \begin{pmatrix} m_- & \\ & m_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 e^{i\rho_1} \\ r_2 e^{i\rho_2} \end{pmatrix} &= 0 \\
(r_1 e^{i\rho_1} m_-, r_2 e^{i\rho_2} m_+) \begin{pmatrix} r_1 e^{i\rho_1} \\ r_2 e^{i\rho_2} \end{pmatrix} &= 0 \\
m_- r_1^2 + m_+ r_2^2 e^{2i(\rho_2 - \rho_1)} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Essas duas restrições juntas formam um sistema linear que pode ser resolvido de forma que ambos os parâmetros  $r_{1,2}$  e  $\rho_2$  podem ser escritos em função apenas dos dados conhecidos, ou seja, das massas dos neutrinos  $m_-$  e  $m_+$ , e conseqüentemente a matriz  $V^C$  também pode ser escrita apenas como função das massas e de  $\rho_1$ . Definindo:

$$c_m = \sqrt{\frac{m_+}{m_+ + m_-}} \quad \text{e} \quad s_m = \sqrt{\frac{m_-}{m_+ + m_-}}. \tag{6.71}$$

Posso escrever a matriz  $V^C$ :

$$V^C = e^{-i\rho_1} (c_m \pm i s_m). \tag{6.72}$$

E se tenho a matriz  $V^C$ , posso encontrar conseqüentemente a matriz  $V^N$ , já que  $V_{kj}^N = (V^{C\dagger} V^C)_{kj}$ . Assim:

$$V^N = \begin{pmatrix} c_m^2 & \pm i c_m s_m \\ \mp i c_m s_m & s_m^2 \end{pmatrix}. \tag{6.73}$$

Queremos contar os parâmetros físicos restantes na matriz de mistura. A matriz  $V^C$  apresenta a fase global  $\rho_1$ , mas essa fase pode ser absorvida pelo campo eletrônico na Lagrangeana e os sinais  $\pm$  podem ser invertidos quando se inverte o sinal de  $\nu_2$ . E se esses parâmetros podem ser retirados da matriz  $V^C$  por uma redefinição, também saem da matriz  $V^N$ . Se tanto  $V^C$  quanto  $V^N$  podem ser definidas completamente pelas massas dos dois neutrinos,  $m_\pm$ , então não há nenhum ângulo livre de mistura e nenhuma fase de violação CP.

## Forma 2



Para este caso, encontram-se os parâmetros da matriz através da diagonalização direta. Como  $n = n_0 = 1$  a matriz que diagonaliza  $m^n$ ,  $Y$  tem dimensão  $(n + n_0) \times (n + n_0)$ , e neste caso, portanto,  $(2 \times 2)$ . Uma matriz unitária  $(2 \times 2)$  genérica pode ser escrita como:

$$Y = e^{i\gamma_0} \begin{pmatrix} ce^{i\gamma_1} & se^{i\gamma_2} \\ -se^{-i\gamma_2} & ce^{-i\gamma_1} \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Por ser unitária, há a restrição de que  $c^2 + s^2 = 1$  e de que todos os parâmetros são reais. A matriz  $m^n$  pode ser escrita, já que é também uma matriz  $(2 \times 2)$  como:

$$m^n = \begin{pmatrix} 0 & |D|^{i\delta_1} \\ |D|^{i\delta_1} & |M|^{i\delta_2} \end{pmatrix}. \quad (6.75)$$

Neste caso, tenho então que a equação (6.75) fornece:

$$Y^T m^n Y = \begin{pmatrix} m_- & 0 \\ 0 & m_+ \end{pmatrix}$$

e portanto:

$$e^{2i\gamma_0} \begin{pmatrix} ce^{i\gamma_1} & -se^{-i\gamma_2} \\ se^{i\gamma_2} & ce^{-i\gamma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & |D|^{i\delta_1} \\ |D|^{i\delta_1} & |M|^{i\delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ce^{i\gamma_1} & se^{i\gamma_2} \\ -se^{-i\gamma_2} & ce^{-i\gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_- & 0 \\ 0 & m_+ \end{pmatrix}. \quad (6.76)$$

Definindo as constantes  $c_m$  e  $s_m$  exatamente como no caso anterior, (6.75), e identificando-as com  $c$  e  $s$  respectivamente, encontram-se as seguinte relações:

$$\begin{aligned} m_{\pm} &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{|M|^2 + 4|D|^2} \pm |M| \right] \\ e^{i2\gamma_1} &= -e^{i1\gamma_2} = \pm e^{-i(\delta_1 - \delta_2)} \\ e^{i2\gamma_0} &= \pm i e^{-i\delta_1}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

E agora levando em conta o fato de que apenas a primeira linha da matriz  $Y$  é usada

para encontrar a matriz  $V^C$  a fase relevante é  $e^{(\gamma_2 - \gamma_1)} = \pm i$ . E assim obtêm-se o mesmo resultado obtido com a forma 1 de cálculo.

## 6.5 Matriz de mistura com $n_0 = 1$ e $n > 1$

Agora, para estudar o caso em que tenho mais de uma família de férmions, mas onde estou novamente adicionando apenas um neutrino estéril, também serão apresentadas duas formas.

### Forma 1

Usando o argumento comprovado anteriormente que garante que terei  $2n_0$  autovalores diferentes de zero na matriz diagonalizada, neste caso novamente, apesar de ter  $n$  famílias, terei apenas 2 estados massivos, já que  $n_0 = 1$  (apenas um neutrino estéril é adicionado).

As massas para estes estados serão  $m_- < m_+$ .

Posso escrever de maneira genérica que cada elemento  $(V^C)_{\alpha,\beta}$  da matriz  $(V^C)$ , tal que:

$$\begin{aligned} (V^C)_{\alpha,j} &= r_{\alpha,j} e^{i(\rho_{\alpha,j})} \quad \text{onde } \alpha = 1, \dots, n \\ \beta &= 1, \dots, (n_0 + n). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Mas a partir da relação  $V^C m^\nu V^{CT} = 0_n$ , e lembrando que, para este caso, a matriz diagonalizada  $m^\nu$  é dada por:

$$m^\nu = \begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & m_- & 0 \\ 0_{n \times 1} & 0 & m_+ \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (6.79)$$

Com essa propriedade encontra-se a relação:

$$m_- r_{\alpha,n} r_{\beta,n} e^{i(\rho_{\alpha,n} + \rho_{\beta,n})} + m_+ r_{\alpha,n+1} r_{\beta,n+1} e^{i(\rho_{\alpha,n+1} + \rho_{\beta,n+1})} = 0. \quad (6.80)$$

Posso escolher fatorar a matriz  $V^C$  de forma  $V^C = VU$ .

$$\begin{aligned}
\text{Sei que } V^C V^{C\dagger} &= \mathbb{I}_n, \\
\text{então, por construção } UU^\dagger &= \mathbb{I}_n. \\
\text{Posso escrever, portanto } V^C V^{C\dagger} &= \mathbb{I}_n \\
&= (VU)(VU)^\dagger = VUU^\dagger V^\dagger \\
\text{mas } UU^\dagger &= \mathbb{I}_n \Rightarrow \mathbb{I}_n = VV^\dagger.
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Mas tenho a seguinte relação de restrição:  $V^N = V^{C\dagger} V^C$ . Portanto, tenho:

$$V^N = V^{C\dagger} V^C = (VU)^\dagger (VU) = U^\dagger V^\dagger VU = U^\dagger \mathbb{I}_n U. \tag{6.82}$$

E se posso escrever que  $V^N = U^\dagger U$ , então se decido escrever a matriz  $U$  da forma:

$$U = \begin{pmatrix} 1_{(n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & c_m & \pm i s_m \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}. \tag{6.83}$$

Com essa escolha, e usando a mesma convenção anterior para as constantes  $c_m$  e  $s_m$ , posso escrever a matriz  $V^N$ , tal que:

$$V^N = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{(n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & c_m^2 & \pm i s_m \\ 0_{1 \times (n-1)} & \pm i s_m & s_m^2 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \tag{6.84}$$

Mas a partir do momento em que se escolhe escrever  $U$  desta forma,  $V$  está definida, já que quero manter a generalidade de  $V^C$ . Assim, como  $V^C = VU$ , a matriz  $V$  é escrita como:

$$(r_{\alpha,1} e^{i\rho_{\alpha,1}}, r_{\alpha,2} e^{i\rho_{\alpha,2}}, \dots, r_{\alpha,n-1} e^{i\rho_{\alpha,n-1}}, r_{\alpha,n} \sqrt{1 + r_m^2} e^{i\rho_{\alpha,n}}). \tag{6.85}$$

Também é possível, a partir da forma genérica dos elementos de  $V^C$ , dada na equação (6.79), e das condições de contorno encontradas anteriormente, encontrar algumas restrições e relações entre os elementos dessa matriz.

$$V^C = \begin{pmatrix} r_{1,1}e^{i\rho_{1,1}} & \dots & r_{1,n+n_0}e^{i\rho_{1,n+n_0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1}e^{i\rho_{n,1}} & \dots & r_{n,n+n_0}e^{i\rho_{n,n+n_0}} \end{pmatrix} \quad (6.86)$$

Neste caso genérico,  $r_{i,j}e^{i\rho_{i,j}}$  tal que  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, n_0$ , e ainda  $r_{i,j}$  e  $\rho_{i,j}$  são reais. Usando  $V^C V^{C\dagger} = \mathbb{I}_n$ , para o elemento  $a_{a,b}$ :

$$a_{a,b} = \sum_{i=n-n_0+1}^{n+n_0} r_{a,i} r_{b,i} e^{i(\rho_{a,i} + \rho_{b,i})} m_i = 0. \quad (6.87)$$

Onde  $a$  e  $b$  variam de 1 a  $n$ .

Aplicando a condição  $V^C V^{C\dagger} = \mathbb{I}_n$  encontro:

$$a_{a,b} = \sum_{i=1}^{n+n_0} r_{a,i} r_{b,i} e^{i(\rho_{a,i} - \rho_{b,i})} m_i = \delta_{a,b}. \quad (6.88)$$

Nesta segunda equação estou igualando à função  $\delta$ , tal que  $\delta_{a,b} = 1$ , se  $a = b$ , e  $\delta_{a,b} = 0$ ,  $a \neq b$ .

Mas voltando à matriz  $V^N$ , descoberta. Basta olhar para a equação (6.84), para perceber que não há nenhum ângulo de mistura livre e nenhuma fase de violação CP que possa aparecer para as interações de corrente carregada.

Só há duas interações fora da diagonal, as duas acontecem entre os dois neutrinos massivos.

## Forma 2

É possível obter esse resultado sem recorrer às restrições encontradas. Para isso basta realizar a diagonalização direta. Trata-se apenas da generalização do caso apresentado para 1 família e um neutrino estéril.

Mas antes de começar essa demonstração, vale entender uma premissa a respeito de como escrever matrizes diagonais arbitrárias.

Assim, suponha que tenho  $n^2$  geradores  $A_a^b$  de uma transformação unitária. Posso escrever que o elemento genérico de  $A_b^a = (A_b^a)_{ij}$ , como  $(A_b^a)_{ij} = \delta_{bi} \delta_{aj}$ .

Partindo deste pressuposto, posso escrever uma matriz arbitrária diagonal como:

$$\omega(\alpha) = \exp\left(i \sum_{a=1}^n \alpha_a A_a^a\right), \quad \alpha_a = \alpha_a^*. \quad (6.89)$$

E uma rotação complexa no plano  $ab$  com parâmetro:

$$\eta_{ab} = |\eta_{ab}| e^{i\theta_{ab}}. \quad (6.90)$$

Assim:

$$\omega(\eta_{ab}) = \exp\left(\eta_{ab} A_a^b - \eta_{ab}^* A_b^a\right) \quad (a \neq b). \quad (6.91)$$

E isso me permite escrever a relação abaixo, onde  $R_{\alpha,\beta}$  é a matriz real de rotação de um ângulo dado  $\theta_{\alpha,\beta}$ , para o plano  $\alpha\beta$ .

$$\omega_{\alpha,\beta}(\theta_{\alpha,\beta}, \varphi_{\alpha,\beta}) = e_\alpha \left( e^{i\varphi_{\alpha,\beta}} \right) R_{\alpha,\beta} e^\alpha \left( e^{-i\varphi_{\alpha,\beta}} \right). \quad (6.92)$$

Segundo a referência, através do uso da identidade (6.93) abaixo,

$$\omega_0(\alpha) \omega\left(|\eta_{\alpha,\beta}| e^{i\theta_{\alpha\beta}}\right) \omega_0^\dagger(\alpha) = \omega\{|\eta_{\alpha\beta}| \exp[i(a_\alpha + \theta_{\alpha\beta} - a_\beta)]\}, \quad (6.93)$$

é possível escrever uma dada matriz unitária  $A$  como:

$$A = \omega_0(\gamma) \prod_{\alpha < \beta} \omega(\eta_{\alpha\beta}). \quad (6.94)$$

Vamos guardar essa relação e seguir com o raciocínio. E antes de voltar para a diagonalização da matriz, vamos observar como é feita a contagem dos parâmetros livres de uma matriz genérica. Uma matriz  $S$ , quadrada e de dimensão  $n \times n$ , pode ser escrita por  $n^2$  entradas onde cada entrada pode ser escrita genericamente como  $a_{i,j} e^{i\rho_{i,j}}$ , onde  $a_{i,j}$  e  $\rho_{i,j}$  são reais. Aqui os parâmetros  $i$  e  $j$  variam de 1 a  $n$ , percorrendo todas as linhas e colunas da matriz.

Isso quer dizer que para uma matriz quadrada genérica tenho  $2n^2$  parâmetros livres.

Tratando-se de uma matriz unitária tenho uma condição de contorno:

$$S \cdot S^\dagger \Rightarrow \mathbb{I}. \quad (6.95)$$

A expressão (6.95) fornece  $n^2$  equações que são condições de contorno para a matriz  $S$ . Assim, dos  $2n^2$  parâmetros livres fico com apenas  $n^2$  parâmetros livres.

Já fica claro neste caso que pretendemos escrever novamente nossa relação de diagonalização  $Y^\dagger m^n Y$ , que diagonaliza a matriz  $m^n$  de massa dos neutrinos.

Relembrando a forma da matriz  $m^n$  segue a equação abaixo:

$$m^n = \begin{pmatrix} 0_n & D \\ D^T & M \end{pmatrix}. \quad (6.96)$$

Como estou trabalhando no caso em que tenho apenas um neutrino estéril e  $n$  famílias de férmions, a entrada  $D$  da matriz  $m^n$  nada mais é do que um vetor, com  $n$  entradas (uma por família de férmion). Tenho, portanto, um vetor de  $n$  dimensões, ou seja, um vetor em  $\mathbb{R}_n$ . Posso escrever cada uma das entradas deste vetor como:

$$D_a = |D_a| e^{i\delta_a}. \quad (6.97)$$

Posso aplicar uma rotação  $R_0$  a esse vetor  $D$ , levando-o ao  $n$ -ésimo eixo. Neste eixo, o vetor  $\vec{D}$  passa a valer  $|D|$  na direção do eixo  $n$  do  $\mathbb{R}_n$ . Posso escrever:

$$R_0 \vec{D} = |D| \hat{n} = \sqrt{\sum_a |D_a|^2} \hat{n}. \quad (6.98)$$

Agora é possível escrever a matriz unitária de  $n + 1$  dimensões  $Y_0$  como:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} (R_0 E_0)^T \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.99)$$

Neste caso  $E_0$  é uma matriz diagonal, tal que  $E_0 = \text{diag}(e^{-i\delta_1}, \dots, e^{-i\delta_n})$ . Posso escrever então, antes de aplicar a rotação a  $\vec{D}$ :

$$Y_0'^T m^n Y_0' = \begin{pmatrix} 0_{n-3} & 0 & 0 & 0 & |D_1| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |D_{n-1}| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |D_n| \\ |D_1| & \cdots & |D_{n-1}| & |D_n| & M \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (6.100)$$

A matriz  $Y_0'$  ali está diferenciada por ' porque trata-se da matriz sem a rotação aplicada. Mas agora, se eu aplicar a rotação  $R_0$  ao vetor  $D$  vou encontrar:

$$R_0 \vec{D} = [0, \dots, |\vec{D}|]_n^T. \quad (6.101)$$

E analogamente aplico  $R_0^T$  ao vetor linha  $\vec{D}$ . Colocando isso na matriz  $Y_0'$  tenho:

$$Y_0^T m^n Y_0 = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\vec{D}| \\ 0 & |\vec{D}| & M \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (6.102)$$

Mas apenas olhando para a matriz (6.102) percebe-se que trata-se de uma diagonalização análoga àquela realizada para o caso direto quando estudamos o caso de  $n = 1$  (uma família de férmions) e  $n_0 = 1$  (um neutrino estéril adicionado). E consequentemente essa diagonalização já foi realizada.

Seu resultado foi encontrar a matriz tal que  $Y^T m^n Y = \text{diag}(0, \dots, 0, m_-, m_+)$ . Para este caso, estou supondo  $Y = Y_0 Y_1$ , tal que:

$$Y^T = (Y_0 Y_1)^T = Y_1^T Y_0^T \Rightarrow Y^T m^n Y = Y_1^T Y_0^T m^n Y_0 Y_1 = Y_1^T. \quad (6.103)$$

Assim, posso então escrever  $Y_1$ , que é *block diagonal*, tal que:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & \\ & e^{i\gamma_0} \begin{bmatrix} ce^{i\gamma_1} & se^{i\gamma_2} \\ -se^{-i\gamma_2} & ce^{-i\gamma_1} \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (6.104)$$

Apenas para lembrar, aqui temos dimensões iguais para  $Y_1$  e  $Y_0$ , tal que ambas são

matrizes  $(n + n_0) \times (n + n_0)$ . E se a matriz  $V^C$  é dada por:

$$\begin{aligned} V^C &= VU \\ V_{\beta j}^C &= \sum_{a=1}^n (X_L^\dagger)_{\beta\alpha} Y_{aj}^* \\ V_{\beta j}^C &= \sum_{a=1}^n (X_L^\dagger)_{\beta\alpha} (Y_{0\ ai}^* Y_{1\ ij}^*). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Lembrando que neste caso a matriz  $Y$  vai colaborar apenas até a entrada  $n$ , e não  $n + 1$ , porque  $V^C$  trata-se da matriz de interação com os férmions carregados e que por isso a matriz  $X$  tem apenas  $n \times n$  entradas.

Como ambas as matrizes  $Y_1$  e  $Y_2$  são diagonais em bloco, olhando para esta matriz encontrada  $Y_1$  (6.104) é possível perceber que estamos reduzidos ao caso de um neutrino estéril adicionado a um modelo com apenas uma família de férmions. E este caso foi tratado na seção anterior.

Como a forma fatorada da matriz de mistura  $V^C$  permanece, ou seja,  $V^C = VU$ , o que muda neste caso seria apenas a matriz  $V$ , que agora tem a forma:

$$V = X_L^\dagger (R_0 E_0)^\dagger e^{i(\gamma_0 + \gamma_1)}. \quad (6.106)$$

Enquanto a matriz  $U$  permanece a mesma matriz apresentada na seção anterior. Abaixo:

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{(n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & c_m^2 & \pm i s_m \\ 0_{1 \times (n-1)} & \pm i s_m & s_m^2 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (6.107)$$

Isso só vale porque as matrizes encontradas são bloco-diagonais e o problema pode ser reduzido ao caso estudado.

Agora que a matriz foi diagonalizada diretamente, basta contar os parâmetros livres que restam na matriz de mistura  $V^C$ . Conforme explicado acima, a matriz  $V$  unitária pode ser parametrizada conforme a equação (6.92).

Sabemos que  $V$  é  $n$ -dimensional. A parametrização sugerida por (6.92) leva em conta



matrizes de rotação complexas.

Se  $V$  é unitária, como mencionado acima, tenho  $n^2$  parâmetros livres. Destes, posso tirar  $n$  fases globais, uma por dimensão. Assim:

$$\begin{aligned} \text{total de parâmetros} &\rightarrow 2n^2 \\ \text{menos restrição de unitariedade} &\rightarrow n^2. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Para encontrar a parametrização da matriz  $V$ , vamos recorrer à equação (6.94). Essa equação mostra que, para descrever qualquer matriz unitária, posso combinar na ordem que escolher o produto de  $n$  matrizes de fases  $e_n(u_n)$  e um produtório de matrizes de rotação complexas  $\omega_{\alpha\beta, \varphi_{\alpha n}}$ . Mas realizar o produtório de  $\alpha < \beta$  é equivalente a realizar o produto de  $n(n-1)/2$  matrizes. Posso colocar isso explicitamente, encontrando uma forma de escrever uma matriz unitária genérica:

$$A = \prod_{\gamma=1}^n e_{\gamma}(u_{\gamma}) \prod_{\alpha < \beta, \beta=1}^{n(n-1)/2} \omega(\eta_{\alpha\beta}). \quad (6.109)$$

Onde o parâmetro  $\eta_{\alpha\beta}$  é dado por  $|\eta_{\alpha\beta}| e^{i\theta_{\alpha\beta}}$ . Sendo assim cada matriz  $\omega(\eta_{\alpha\beta})$  possui dois parâmetros reais.

E assim, se possuo  $n(n-1)/2$  matrizes como indica a equação (6.109), quer dizer que tenho no total  $n(n-1)$  parâmetros reais. Para estas contagens de parâmetro tenho então:

$$\begin{aligned} \text{matrizes de rotação complexas} &\rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \\ \text{matrizes de fase} &\rightarrow n. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Percebe-se que, no caso de uma matriz unitária  $n \times n$  terei  $n^2$  parâmetros livres (seriam os  $2n^2$  parâmetros originais, menos as  $n^2$  restrições dado o fato de ser unitária), indicando assim que a parametrização é consistente no que diz respeito à quantidade de parâmetros. Assim, para a notação apresentada na equação (6.109) fica claro que terei os  $n$  parâmetros das matrizes de fase somados de  $n(n-1)$  parâmetros das matrizes de rotação complexas, somando assim  $n + n^2 - n$  parâmetros no total, ou seja,  $n^2$  parâmetros. A notação é consistente.

Outra propriedade importante que será utilizada é o fato de que as matrizes de rotação complexas  $\omega_{\alpha,\beta}(\theta_{\alpha,\beta}, \varphi_{\alpha,\beta})$  podem ser escritas como:

$$\omega_{\alpha,\beta}(\theta_{\alpha,\beta}, \varphi_{\alpha,\beta}) = e_{\alpha}(e^{i\varphi_{\alpha,\beta}}) R_{\alpha,\beta} e_{\alpha}(e^{-i\varphi_{\alpha,\beta}}). \quad (6.111)$$

Como fiz uma rotação para o eixo  $n$ , para que o vetor  $D$  pudesse ser escrito como apresentado na equação (6.101), posso escolher escrever a parametrização de uma matriz unitária, conforme apresentado na equação (6.94), fixando o índice mudo  $\beta$  com o valor  $n$ , e usando apenas uma matriz de fase  $e_{\gamma}(u_{\gamma})$ . Posso parametrizar a matriz unitária  $V$  desta forma. Neste caso, a equação pode ser reescrita como:

$$V = e_n(u_n) \prod_{\alpha=1}^{(n^2-1)/2} \omega(\eta_{\alpha n}). \quad (6.112)$$

Na equação (6.112), acima, o produtório passa a ser de  $(n^2-1)/2$  matrizes. Para verificar isso basta fazer a contagem de parâmetros. Fixando a primeira matriz de fase  $u_n$ , sobram  $n^2-1$  parâmetros e portanto  $(n^2-1)/2$  matrizes.

Mas, como foram incluídos  $n_0 = 1$  neutrinos estéreis a um modelo com  $n$  famílias, o número de estados não massivos de neutrinos é  $n-1$ . Sabendo disso, é possível separar, na equação (6.112) uma matriz unitária  $(n-1) \times (n-1)$ , separando assim  $(n-1)^2$  parâmetros. Portanto dos  $n^2-1$  parâmetros no produtório das matrizes, fico com apenas  $2n-2$  parâmetros, ou seja, o produtório será até  $n-1$ . Posso escrever, então:

$$V = e_n(u_n) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(\eta_{\alpha n}) \begin{pmatrix} X & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (6.113)$$

$$V = V_0 \begin{pmatrix} X & \\ & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.114)$$

A matriz  $X$  tem a dimensão exata da matriz bloco diagonal presente em  $U$ . Estou procurando contar parâmetros complexos presentes na matriz  $V^C$ , encontrada a partir da Lagrangiana da corrente carregada. E como a matriz  $V^C$  é dada por:

$$V^C = VU. \quad (6.115)$$

Então é fácil perceber que a matriz  $X$  de dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  vai comutar com a matriz identidade  $(n-1) \times (n-1)$  presente em  $U$  e os  $(n-1)^2$  parâmetros poderão ser absorvidos pelos  $n-1$  neutrinos não massivos do modelo. Para verificar isso basta olhar para a Lagrangeana de massa:

$$\mathcal{L}_m^\nu = -\frac{1}{2} \left( \bar{\nu}_R^C m^\nu \nu_R + \bar{\nu}_R m^\nu \nu_R^C \right). \quad (6.116)$$

A matriz  $m^\nu$  também é bloco diagonal e tem uma submatriz de dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  de zeros em sua diagonal superior. Assim, a matriz  $X$ , também de dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  pode ser absorvida por essa submatriz sem causar alterações à Lagrangiana.

E uma vez que a matriz  $X$  foi absorvida por estes campos, a quantidade de parâmetros passa a ser  $1 + 2(n-1)$ , o parâmetro da fase  $n$  da primeira matriz  $u_n$  deixada à esquerda da equação (6.113) e os dois parâmetros de cada matriz do produtório até  $n-1$ . Assim, para encontrar o número de parâmetros físicos em  $V$  basta contar a quantidade de parâmetros presentes em  $V_0$ , apresentado na equação (6.114). Explicitamente,  $V_0$  é dado por:

$$V_0 = e_n(u_n) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(\eta_{\alpha n}). \quad (6.117)$$

Mas usando a propriedade das matrizes  $\omega$ , apresentada na equação (6.111), posso escrever cada uma das matrizes  $\omega$  como um produto de uma matriz de fase, uma matriz de rotação real e uma matriz de fase conjugada. Observando esta propriedade é possível perceber que, no caso do produto de mais de uma matriz  $\omega$  estas multiplicações podem ser agrupadas por tipo. Assim, uma vez que fixei o valor do  $\beta$ , usando apenas o índice mudo  $\alpha$  na equação (6.111) posso verificar como organizar este produto. No caso de duas matrizes:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \omega_{\alpha+1} &= e_\alpha R_\alpha e_\alpha^* e_{\alpha+1} R_{\alpha+1} e_{\alpha+1}^* \\ &= e_\alpha e_{\alpha+1} R_\alpha R_{\alpha+1} e_\alpha^* e_{\alpha+1}^*. \end{aligned} \quad (6.118)$$

Antes de fazer essa separação em produtórios, segue o esquema para rever a contagem até o momento de parâmetros, dos  $n^2$  parâmetros iniciais:

1	[matriz de fase]
$2(n-1)$	[são 2 parâmetros por matriz de rotação]
$(n-n_0)^2$	[são os parâmetros reais da matriz $X$ absorvidos pelos neutrinos não massivos]

Ainda restam, neste caso,  $2n-1$  parâmetros livres para a matriz  $V$ . Destes,  $n-1$  correspondem aos ângulos de rotação reais e os outros  $n$  são fases complexas.

A contagem de parâmetros  $P$  fica, até este momento:

$$P = n \text{ fases complexas} + (n-1) \text{ ângulos de rotação.}$$

Com a reorganização seguindo o padrão apresentado em (6.118), escrevo  $V_0$  como:

$$V_0 = \left[ e_n(u_n) \prod_{\alpha=1}^{n-1} e_\alpha \right] \cdot \left[ \prod_{\beta=1}^{n-1} R_\beta \right] \cdot \left[ \prod_{\gamma=1}^{n-1} e_\gamma^* \right]. \quad (6.119)$$

Assim, em (6.119), o produtório original de (6.117) foi subdividido em 3 produtórios, os índices mudos foram colocados para facilitar a organização. É possível observar que o produtório do lado direito em (6.119), de índice  $\gamma$ , pode novamente ser absorvido pelos  $n-1$  estados de neutrinos não massivos, como aconteceu com a matriz  $X$ . O produtório será exatamente até o valor  $n-1$ .

Falta ainda analisar o produtório do lado esquerdo de (6.119). Tratam-se de  $n$  fases que, neste caso também poderão ser absorvidas sem alterações à Lagrangeana. Isso porque cada um dos  $n$  campos que representam os  $n$  léptons carregados do modelo podem ser redefinidos com estas fases sem que a Lagrangeana seja alterada.

E se as  $n$  fases referentes ao produtório da esquerda, do índice  $\alpha$  a quantidade de parâmetros físicos presentes na matriz  $V$  é dada por:

$$\begin{aligned}
&= 2n - 1 \text{ quantidade de parâmetros em (6.119)} \\
&= n \text{ total de fases independentes absorvidas} \\
&\Rightarrow n - 1 \text{ quantidade final de parâmetros da matriz } V
\end{aligned}$$

E essa é a quantidade de parâmetros livres que a matriz de mistura  $V$  apresenta. Todos são ângulos de mistura, tratam-se dos parâmetros pertencentes às matrizes de rotação. Nenhuma fase de violação CP aparece nesta matriz. Ou seja, os parâmetros restantes são dados por:

$$\prod_{\beta=1}^{n-1} R_{\beta n}(\theta_{\beta n}). \quad (6.120)$$

A matriz  $V^C$ , dada por  $VU$  terá exatamente, portanto,  $n - 1$  ângulos de mistura  $\theta_{\beta}$  e nenhuma fase de violação CP. Isso porque, conforme apresentado, a matriz  $U$  não possui nenhum ângulo de mistura e nenhuma fase de violação CP.

## 6.6 Resultados

Conforme mencionado na introdução, a motivação deste trabalho foi procurar fases de violação CP em sistemas de neutrinos, num modelo padrão estendido por neutrinos estéreis. Os resultados encontrados para o caso de 1 neutrino estéril adicionado ao modelo estão consistentes com aqueles apresentados pela principal bibliografia do trabalho, o artigo (1).

Para o caso das  $n$  famílias adicionadas ao modelo, duas diferentes análises foram realizadas. O caso de 1 família e 1 neutrino estéril ( $n = n_0 = 1$ ) adicionado ao modelo e o segundo caso, onde tratamos de  $n$  famílias e 1 neutrino estéril adicionado ao modelo ( $n > n_0 = 1$ ). E para cada um destes dois casos, duas maneiras de obter os resultados foram apresentadas:

- Diagonalização através da aplicação das duas restrições obtidas para a matriz  $V^C$
- Diagonalização direta

Para os dois casos as duas maneiras aplicadas apresentam resultados consistentes.

No caso de um neutrino estéril adicionado ao modelo, ambas as matrizes  $V^C$  e  $V^N$  estão completamente definidas pelos dois autovalores de massa dos neutrinos, sendo assim não há nenhum ângulo de mistura presente na matriz e nenhuma fase complexa. Neste caso não há violação CP.

No caso de  $n$  famílias e 1 neutrino estéril adicionado, o número de ângulos de mistura encontrados foi  $n - 1$ , mas novamente nenhuma fase de violação CP, ou seja, fase complexa, foi encontrada.

## 7 *Conclusão*

O trabalho remontou a contagem de parâmetros na matriz de mistura do caso dos neutrinos, encontrando resultados diferentes daqueles obtidos nos artigos da área.

Para fazer isso, o estudo partiu da base para teoria de descrição da dinâmica dos léptons, ou seja, da teoria quântica de campos. Tendo sido compreendida a parte básica da teoria, o passo seguinte foi estudar os modelos de quebra espontânea de simetria, entendendo assim o mecanismo de geração de massas dentro do modelo padrão das partículas elementares.

No caso dos neutrinos, já que o modelo padrão não descreve ainda um mecanismo que gere massa de neutrinos, foi utilizada uma extensão do modelo padrão para encontrar a matriz de massa e, consequentemente, a matriz de mistura. Esta extensão do modelo compreendeu a adição de neutrinos estéreis ao modelo padrão, primeiro a adição de apenas um neutrino estéril a uma única família de férmions e posteriormente o caso onde um neutrino estéril foi adicionado a  $n$  famílias de férmions.

Essa adição permitiu que a partir da matriz de massa, agora diagonalizada, fosse encontrada a matriz de mistura para os léptons neutros. E com a matriz de mistura foi possível realizar a conta da quantidade de parâmetros complexos que essa matriz de mistura encontrada apresenta, observando assim as fases de violação CP do modelo.

Para os dois casos observados, não foi encontrada nenhuma fase de violação CP na matriz de mistura do modelo.





## *Referências*

- 1 Y. Liao, *Eur.Phys.J.* **C49**, 783 (2007).
- 2 D. V. Perepelitsa, Sakharov Conditions for Baryogenesis (2008). Notes as Professor at Columbia University Department of Physics.
- 3 A. Sakharov, *Pisma Zh.Eksp.Teor.Fiz.* **5**, 32 (1967).
- 4 J. W. Cronin, P. F. Kunz, W. S. Risk, P. C. Wheeler, *Phys.Rev.Lett.* **18**, 25 (1967).
- 5 Y. F. P. González, *Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Ciências* pp. 8–9 (2013).
- 6 M. Massimi, M. Redhead, *Stud.Hist.Philos.Mod.Phys.* **34**, 621 (2003).
- 7 B. Vvedenskii, *The Great Soviet Encyclopedia* (The Gale Group, 1979), third edn.
- 8 P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society of London* **A117**, 610 (1928).
- 9 W. Pauli, *Physical Review* **58**, 716 (1940).
- 10 S. Weinberg, *Phys.Rev.* **133**, B1318 (1964).
- 11 T. Lee, C.-N. Yang, *Phys.Rev.* **104**, 254 (1956).
- 12 C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, R. Hudson, *Phys.Rev.* **105**, 1413 (1957).
- 13 A. Pais, O. Piccioni, *Phys.Rev.* **100**, 1487 (1955).
- 14 G. Lueders, *Fys. Medd.* **28 - No 5** (1954).
- 15 W. Pauli, *Pergamon London* (1955).
- 16 G. 't Hooft, M. Veltman, *Nuclear Physics B* **44**, 189 (1972).
- 17 G. Fogli, *Symmetry and Group Theory in Particle Physics* (Lecture Notes on Physics, 2000).
- 18 M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)* (Westview Press, 1995), second edn.
- 19 D. Tong, *Quantum Field Theory* (Lecture Notes for the Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, 2007).

- 20 E. Fermi, *Z. Physik* **88**, 161 (1934).
- 21 J. Ellis, M. K. Gaillard, G. Girardi, P. Sorba, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **32**, 443 (1982).
- 22 T. P. Cheng, L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford University Press USA, 1988).
- 23 S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961).
- 24 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- 25 A. Salam, *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity* (Nobel Symposium No.8 - Ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm), 1968).
- 26 K. N. Abazajian, *et al.*, *arXiv:1204.5379* (2012).