

RODRIGO PODIACKI

**LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA
FORMAL QUANTIFICADAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Walter Carnielli.

RODRIGO PODIACKI

LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA FORMAL QUANTIFICADAS

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Departamento de Filosofia do Insti-
tuto de Filosofia e Ciências Humanas
da Universidade Estadual de Camp-
inas sob a orientação do Prof. Dr.
Walter Carnielli.

Este exemplar corresponde à redação
final da Dissertação defendida e
aprovada pela Comissão julgadora em
23/07/2008.

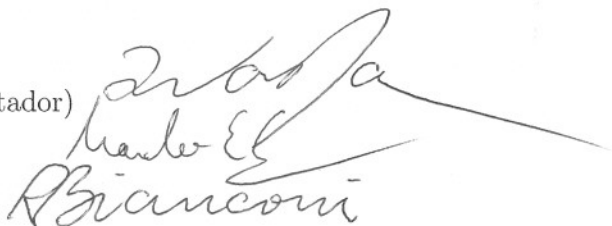
BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Walter Carnielli (Orientador)

Prof. Dr. Marcelo E. Coniglio

Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Prof. Dr. Hércules Feitosa (suplente)



Julho/2008

887005007

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA
DO IFCH - UNICAMP**

Podiacki, Rodrigo

Lógicas da inconsistência formal quantificadas / P752L
Rodrigo Podiacki.- - Campinas, SP : [s. n.], 2008.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual
de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Hu-
manas.

1. Semântica (Filosofia). 2. Lógica de primeira
ordem. 3. Estrutura. 4. Modelos. I. Carnielli, Wal-
ter A. (Walter Alexandre), 1952-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciên-
cias Humanas. III. Título.

(cn/ifch)

Título em inglês: Quantified logics of formal inconsistency

Palavras-chave em inglês (keywords): Semantics (Philoso-
phy)

First-order logic

Structure Models

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: Walter Alexandre Carnielli, Ricardo Bianconi,
Marcelo Coniglio

Data da defesa: 23-07-2008

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

Esta é para Beatriz

Agradecimentos

Durante a feitura de trabalhos de longo prazo, conta-se com variados tipos de apoio, os quais, embora possam não ter uma ligação direta com o trabalho que se está realizando, são indispensáveis para que ele possa ser levado a bom termo. Por isso, primeiramente manifesto meus agradecimentos a minha família: Beatriz, Cleo, Daniel, Milton e Vera.

Quero agradecer também a meus colegas do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, especialmente a Rodrigo de Alvarenga Freire, por elucidar várias questões suscitadas pelo livro de Shoenfield. Espero que ele possa representar, metonimicamente, meus agradecimentos a todos os outros colegas do CLE.

Agradeço à banca de qualificação: professores Marcelo Esteban Coniglio, Ricardo Bianconi e Walter Carnielli. As observações feitas durante o exame melhoraram muito o resultado final.

Agradeço aos professores do CLE: Itala, Marcelo e Walter. Todos os que freqüentam o Centro de Lógica sabem que eles são muito mais que professores, e fico feliz de poder tê-los, hoje, como amigos.

Por fim, registro novamente minha gratidão ao Walter, orientador deste trabalho. Como se pode inferir do primeiro parágrafo destes agradecimentos, há principalmente dois tipos de apoio que se podem receber em trabalhos de longo prazo: aqueles, acadêmicos, que dizem respeito à elaboração do trabalho, e aqueles outros, pessoais, que não se ligam diretamente a esta. Walter tem participação nos dois tipos.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo desenvolver uma semântica correta e completa para uma classe de lógicas de primeira ordem conhecidas como Lógicas da Inconsistência Formal (**LIFs**). Após uma elucidação geral sobre semânticas paraconsistentes e de primeira ordem, uma **LIF** particular, chamada **QmbC**, será caracterizada axiomáticamente. Em seguida será construída uma semântica que se demonstrará correta e completa para a **LIF** em questão. Por fim, uma série de **LIFs** com propriedades sintáticas interessantes serão caracterizadas axiomáticamente, e será visto como a semântica construída para **QmbC** pode ser estendida para todas essas lógicas.

Abstract

This dissertation aims to develop a sound and complete semantics for a class of first-order logics known as Logics of Formal Inconsistency (**LFIs**). After general explanation about paraconsistent and first-order semantics, a particular **LFI**, labeled **QmbC**, will be characterized by means of an axiom system. Then a sound and complete semantics for it will be constructed. Finally, a variety of **LFIs** having nice syntactic properties will be axiomatically defined, and it will be shown how the semantics proposed for **QmbC** can be extended for all these logics.

Sumário

Introdução	13
1 Semânticas de primeira ordem e semânticas paraconsistentes	19
1.1 Semânticas para a lógica clássica de primeira ordem	20
1.1.1 A interpretação objetual dos quantificadores	20
1.1.2 A interpretação substitucional dos quantificadores . . .	28
1.1.3 A semântica de valores de verdade	32
1.2 Semântica para a lógica paraconsistente	33
1.2.1 Semântica de valorações	34
2 O caso paradigmático: uma semântica para QmbC	37
2.1 Definições preliminares e notação	38
2.2 Sintaxe	41
2.3 Semântica	45
2.3.1 Pré-estruturas e valorações	45
2.3.2 Estruturas, validade	49
2.3.3 Correção, modelos	54
2.3.4 Extensões e conjuntos de Henkin	56

2.3.5	Completude da semântica proposta	64
3	O caso geral: uma semântica para as LIFs	67
3.1	Extensões de QmbC	68
3.2	Valorações e estruturas para as LIFs de primeira ordem	70
3.3	Validade e correção para as LIFs de primeira ordem	72
3.4	Completude da semântica proposta	73
	Conclusão	77
	Referências	81

Introdução

Na lógica clássica, contradição implica trivialização (obviamente, a implicação conversa também sucede). Isso significa que, diante de contradições, uma teoria pautada pelas regras da lógica clássica torna-se inútil, uma vez que todas as suas fórmulas serão derivadas como teoremas. A lógica paraconsistente coloca em cheque essa implicação. Ela não permite que uma contradição, necessariamente, acarrete a ruína de um sistema formal. Por isso, ela pode servir de base para teorias que, não obstante contraditórias, não são triviais. De maneira rigorosa, essa característica da lógica paraconsistente poderá ser vista a partir do Capítulo 2, após a caracterização sintática e semântica de um cálculo paraconsistente particular. Esta Introdução se limitará a tecer breves considerações históricas e a delinear um esboço do que está por vir.

Considerem-se as seguintes definições informais:

Princípio de Explosão: A partir de uma fórmula e de sua negação, prova-se qualquer fórmula.

Princípio Comedido de Explosão: A partir de uma fórmula e de sua ne-

gação, prova-se qualquer fórmula apenas sob a suposição adicional de que a fórmula em questão é consistente.

As *lógicas da inconsistência formal* — doravante **LIFs** — são aquelas em que o Princípio de Explosão não vale, mas em que, não obstante, o Princípio Comedido de Explosão vale. Ademais, as **LIFs** são capazes de internalizar as noções de consistência e inconsistência ao nível da linguagem-objeto, seja mediante a introdução de conectivos unários primitivos, seja mediante definições apropriadas a partir dos conectivos proposicionais usuais. Tais lógicas são paraconsistentes no seguinte sentido: dada uma contradição da forma $(\varphi \wedge \neg\varphi)$, em geral não se pode deduzir uma fórmula qualquer ψ , ou seja, elas não se tornam necessariamente triviais quando expostas a uma contradição. Isso significa que o Princípio de Explosão, ou Princípio de Pseudo-Scotus,¹ não vale de modo generalizado. Entretanto, as **LIFs** explodem se, além de φ ser contraditória, vale uma suposição adicional acerca de φ , a saber, que φ seja consistente, ou que φ se comporte classicamente. Em vista disso, as **LIFs** estão sujeitas a um princípio mais restrito de explosão, chamado em [Carnielli e Marcos, 2002] de *Gentle Principle of Explosion*, ou Princípio Comedido de Explosão: uma **LIF** explode sempre que em contato com φ , $\neg\varphi$ e $\circ\varphi$, para uma fórmula arbitrária φ , tal que “ $\circ\varphi$ ” expressa o fato de φ ser consistente.

Se se definem como paraconsistentes aquelas lógicas que não trivializam quando expostas a um par de fórmulas, uma das quais é a negação da outra, então a lógica discussiva de Jaśkowski, introduzida em 1948, é um exemplo

¹*Ex contradictione sequitur quodlibet.*

de lógica desse tipo. A motivação inicial de Jaśkowski era formalizar em um cálculo lógico uma situação em que diferentes interlocutores poderiam sustentar teses contraditórias. Sua intenção era construir uma lógica contraditória mas não trivial, e que ainda fosse interessante o suficiente a ponto de permitir boa parte das inferências usuais, além de ser dotada de uma interpretação intuitiva mais ou menos clara.² A possibilidade de elaboração de um cálculo cumprindo tais requisitos passou a ser conhecida na literatura como “o problema de Jaśkowski”. [D’Ottaviano e da Costa, 1970] expuseram uma lógica modal paraconsistente trivalente, alcunhada J_3 , como possível solução para o problema de Jaśkowski. No mesmo artigo, os autores estenderam J_3 para um cálculo de predicados com igualdade, $J_3^=$, que foi a primeira tentativa de se resolver o problema em primeira ordem. [D’Ottaviano, 1982] estabelece a completude de $J_3^=$.

É bem sabido que os cálculos paraconsistentes de da Costa foram apresentados de maneira sintática, isto é, por meio de um sistema axiomático.³ Ademais, originalmente, a consistência de uma fórmula φ era expressa por meio de uma combinação dos conectivos do cálculo proposicional clássico: “ $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ ” significa que φ respeita o Princípio da Não-contradição (é “bem comportada”), e essa fórmula complexa é abreviada por “ φ° ”. Sistemas em que a consistência de uma fórmula pode ser expressa a partir de um arranjo dos conectivos clássicos usuais, como os cálculos C_n de da Costa, formam uma classe particular das lógicas paraconsistentes conhecida na literatura como *sistemas-dC*.⁴

²Cf. [da Costa e Dubikajtis, 1968] e [Woleński, 1989].

³Cf. [da Costa, 1963].

⁴Cf. [Carnielli e Marcos, 2002].

O estudo que ora se apresenta tem por objetivo propor versões de primeira ordem das lógicas da inconsistência formal, cujas bases proposicionais foram publicadas em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007]. O foco principal é a construção de uma semântica adequada. O Capítulo 1 tem a forma de um prolegômeno geral sobre semântica — das diferentes semânticas propostas para a lógica clássica de primeira ordem, iniciadas com o trabalho de Tarski, às semânticas paraconsistentes de da Costa e Alves. O desenvolvimento técnico, propriamente dito, começa no Capítulo 2, em que, a uma **LIF** elementar isolada em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] e alcunhada **mbC**, é conferida versão quantificacional, chamada **QmbC**. Após a descrição de sua sintaxe, propõe-se uma semântica que se demonstra correta e completa. No Capítulo 3, toda uma classe de **LIFs** é axiomatizada em primeira ordem. A idéia é enriquecer **QmbC** com propriedades sintáticas de que ela não desfruta, tais como redução de negações duplas e “propagação” da consistência de fórmulas simples para fórmulas complexas. Mostra-se como o método proposto no capítulo precedente — que se propõe chamar *semântica pré-estrutural* — pode ser estendido de modo a obter-se uma semântica correta e completa para cada um desses cálculos. A dissertação é concluída com apontamentos futuros: dada uma semântica completa para os cálculos paraconsistentes de primeira ordem em tela, o passo seguinte é o estudo de como uma teoria de modelos baseada em tais cálculos pode desenvolver-se.

A novidade do presente estudo é que sua meta é a construção de uma semântica bivalente para certas lógicas paraconsistentes. [D’Ottaviano, 1982], conforme já observado, detém-se no estudo de uma lógica trivalente que deve seu caráter paraconsistente a uma noção modal primitiva. [Carnielli, Coniglio

e Marcos, 2007] desenvolvem semânticas bivalentes, mas detêm-se, contudo, em lógicas proposicionais. [Avron e Zamansky, s.d.] também estudam extensões de primeira ordem dos cálculos definidos por [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], mas trabalham com um tipo especial de semântica polivalente, que chamam de *não-determinísticas*. Além disso, [Carnielli e Coniglio, 2005] demonstraram que a semântica não-determinística de Avron e Zamansky é um caso particular das semânticas de traduções possíveis, as quais não serão tratadas aqui.⁵ Relewa notar que, a fim de manter a generalidade, o presente texto não se restringe a linguagens enumeráveis, de modo que os resultados apresentados a partir do Capítulo 2 valem para linguagens de qualquer cardinalidade.

Pede-se a indulgência do leitor a respeito de certas liberdades de expressão que foram tomadas. Por exemplo, esquemas de axiomas não raro são chamados simplesmente de *axiomas*, quando isso torna a leitura mais fluida. Não há, outrossim, demasiada diligência no uso das aspas, salvo quando, como na primeira parte do Capítulo 1, a distinção entre uso e menção e entre linguagem-objeto e metalinguagem está em foco. Ao tomar essas liberdades, a presente dissertação não se afasta da prática corrente em textos de lógica.

⁵O leitor interessado consulte [Carnielli, 1990] e [Marcos, 1999].

Capítulo 1

Semânticas de primeira ordem e semânticas paraconsistentes

No tratamento formal das lógicas paraconsistentes de primeira ordem, adotou-se, neste estudo, uma semântica substitucional. Essa semântica diverge, com relação à interpretação dos quantificadores, da semântica tarskiana clássica, [Tarski, 1933], adotada em manuais difundidos de lógica, como [Mendelson, 1964]. Por causa disso, a interpretação substitucional dos quantificadores foi denominada “não-standard” por [Leblanc, 2001], e estudada nesse artigo em comparação a outras semânticas também “não-standard”, a saber, a “semântica de valores de verdade” e a “semântica probabilística”. O objetivo deste capítulo inicial é analisar as diferenças das interpretações objetual (“clássica”, tarskiana) e substitucional dos quantificadores, e verificar as consequências que ambas as abordagens trazem para a semântica das linguagens de primeira ordem. Assim, espera-se justificar o tratamento substitucional adotado aqui. Num segundo momento, semânticas desenvolvidas para teorias *paraconsis-*

tentes serão analisadas.

1.1 Semânticas para a lógica clássica de primeira ordem

1.1.1 A interpretação objetual dos quantificadores

Antes de examinar-se a semântica tarskiana em toda a sua generalidade, uma semântica um pouco mais simples será exposta. Recorde-se que uma linguagem de primeira ordem L é composta pelos seguintes símbolos: para cada $n \in \omega$, símbolos de predicados n -ários e de funções n -árias; um conjunto (infinito) enumerável de variáveis individuais; conectivos proposicionais; quantificadores e sinais de pontuação.¹ Símbolos de predicado de aridade 0, caso os haja, são constantes proposicionais, e símbolos de função de aridade 0 são constantes individuais. Deve-se assumir sempre que, dada uma linguagem de primeira ordem L , ela possui ao menos um símbolo de predicado, do contrário não haveria fórmulas.² Embora o número de símbolos de função 0-ários, ou constantes individuais, possa ser nulo, será pressuposta, por ora, uma linguagem L que as tenha em número igual a \aleph_0 . O motivo é que, inicialmente, fórmulas com variáveis livres serão excluídas de considerações semânticas,

¹Devido a um expediente introduzido por Łukasiewicz, sinais de pontuação podem ser dispensados da linguagem. Na chamada “notação polonesa”, conectivos proposicionais e quantificadores são escritos à frente das fórmulas que estão sob seus escopos, o que torna desnecessário o uso dos parênteses. Por exemplo, a fórmula “ $((\neg(\forall x Px \wedge \forall y Qy)) \vee (\exists z \forall r R zr))$ ” é escrita como “ $ANK \prod x Px \prod y Qy \sum z \prod r R zr$ ” em notação polonesa.

²Mais precisamente: não haveria fórmulas bem formadas, já que há autores que consideram fórmulas quaisquer cadeias de símbolos da linguagem, e entre estas diferenciam as fórmulas bem formadas, que são as cadeias de símbolos que “fazem sentido”.

isto é, será exposta a seguir uma semântica que confere sentido apenas às sentenças de L . O caso geral será visto logo depois.

Dentre as várias abordagens possíveis da semântica *standard* ou padrão para a lógica de predicados, a explanação seguinte baseia-se mormente em [Leblanc, 2001]. Como ninguém ignora, dada uma linguagem de primeira ordem L , o primeiro passo na construção de uma semântica para L é a estipulação de um domínio — a ser denotado por $|\mathfrak{A}|$ —, entendido como qualquer conjunto não-vazio de indivíduos ou elementos.³ As variáveis de L são interpretadas como variando sobre os indivíduos de $|\mathfrak{A}|$. Uma \mathfrak{A} -interpretação $I_{\mathfrak{A}}$ para L é uma função que atribui, a cada termo fechado t de L , um indivíduo $i \in |\mathfrak{A}|$ como denotação de t — o qual é indicado por $I_{\mathfrak{A}}(t)$ —, e, a cada símbolo de predicado n -ário P de L , um predicado $P_{I_{\mathfrak{A}}}$ em $|\mathfrak{A}|^n$, isto é, um subconjunto de $|\mathfrak{A}|^n$. Se $|\mathfrak{A}|$ é um domínio, $I_{\mathfrak{A}}$ é uma \mathfrak{A} -interpretação para L e t é um termo fechado de L , uma t -variante $I'_{\mathfrak{A}}$ de $I_{\mathfrak{A}}$ é uma \mathfrak{A} -interpretação para L idêntica a $I_{\mathfrak{A}}$, exceto por, possivelmente, atribuir um indivíduo $i' \in |\mathfrak{A}|$, diferente daquele atribuído por $I_{\mathfrak{A}}$, como denotação de t . Uma *estrutura* para L é um par $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|, I_{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que $|\mathfrak{A}|$ é um domínio e $I_{\mathfrak{A}}$ é uma \mathfrak{A} -interpretação para L .

Fixados um domínio $|\mathfrak{A}|$ e uma \mathfrak{A} -interpretação para L , uma sentença atômica “ $P(t_1, \dots, t_n)$ ” é dita *verdadeira na estrutura* \mathfrak{A} se e somente se

$$\langle I_{\mathfrak{A}}(t_1), \dots, I_{\mathfrak{A}}(t_n) \rangle \in P_{I_{\mathfrak{A}}}.$$

Uma sentença do tipo “ $\neg\varphi$ ” é verdadeira em \mathfrak{A} se e somente se “ φ ” não é verdadeira em \mathfrak{A} . Uma sentença do tipo “ $(\varphi \wedge \psi)$ ” é verdadeira em \mathfrak{A} se e

³O problema das semânticas que permitem domínios vazios não será considerado aqui.

somente se “ φ ” é verdadeira em \mathfrak{A} e “ ψ ” é verdadeira em \mathfrak{A} . Disjunções da forma “ $(\varphi \vee \psi)$ ” são verdadeiras em \mathfrak{A} se e somente se “ φ ” é verdadeira em \mathfrak{A} ou “ ψ ” é verdadeira em \mathfrak{A} . Sentenças como “ $(\varphi \rightarrow \psi)$ ” são verdadeiras em \mathfrak{A} se e somente se “ φ ” não é verdadeira em \mathfrak{A} ou “ ψ ” é verdadeira em \mathfrak{A} . Finalmente, uma sentença do tipo “ $\forall x\psi$ ” é verdadeira em \mathfrak{A} se e somente se “ $\psi[x/t]$ ” é verdadeira em $\mathfrak{A}' = \langle |\mathfrak{A}|, I'_{\mathfrak{A}} \rangle$ para toda \mathfrak{A} -interpretação $I'_{\mathfrak{A}}$ de L que seja uma t -variante de $I_{\mathfrak{A}}$; e uma sentença do tipo “ $\exists x\psi$ ” é verdadeira em \mathfrak{A} se e somente se “ $\psi[x/t]$ ” é verdadeira em alguma t -variante de $I_{\mathfrak{A}}$.⁴ A última frase codifica a chamada interpretação objetual dos quantificadores. Sob tal interpretação, as condições de verdade de uma sentença quantificada dependem diretamente da *denotação* atribuída, no domínio escolhido, aos termos de L que são substituídos pela variável ligada em cada instância da sentença quantificada. Ou, em uma formulação mais coloquial, se “ P ” é um símbolo de predicado de L , “ $\exists xPx$ ” é verdadeira, sob a interpretação objetual dos quantificadores, se e somente se existe um indivíduo i do domínio tal que esse indivíduo tem P (ou seja, se e somente se $i \in P_{I_{\mathfrak{A}}}$). Essa é a semântica *standard* para a interpretação de *sentenças* escritas na linguagem do cálculo de predicados.

Kurt Gödel, por ocasião de sua tese de doutorado, [Gödel, 1930], em que demonstrou a completude da lógica de primeira ordem, já contava com uma noção definida de satisfação. Além disso, já havia distinguido claramente entre conceitos sintáticos e semânticos. É essa distinção, afinal, que torna possível levantar a questão mesma da *completude* de um sistema de axiomas relativamente a uma semântica proposta, já que a completude, so-

⁴Note-se que, pelo exposto no parágrafo anterior, dado um domínio $|\mathfrak{A}|$, um termo t de L e uma \mathfrak{A} -interpretação $I_{\mathfrak{A}}$ de L , $I_{\mathfrak{A}}$ é uma t -variante de si mesma.

mada à correção, nada mais é que a coincidência extensional dos conceitos de consequência sintática e consequência semântica. Entretanto, Gödel não apresenta uma semântica plenamente desenvolvida: não oferece, por exemplo, uma definição indutiva de “sentença verdadeira” como a que foi exposta acima. Em verdade, ele se limita a dizer que uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem é válida se dela resultar uma “proposição verdadeira” sempre que proposições e predicados específicos forem postos no lugar de suas variáveis proposicionais e símbolos de predicado, e cita como exemplo de fórmula válida “ $\forall x(Fx \vee \neg Fx)$ ”. Ainda, para Gödel, a validade de fórmulas com variáveis livres reduz-se à validade de seu fecho universal, e uma fórmula com variáveis livres é dita “satisfatível” se o seu fecho existencial o for.⁵ Como anota Goldfarb, a elucidação que Gödel traz a conceitos semânticos como “validade” e “satisfação” é uma elucidação “intuitiva e informal”.⁶ O passo decisivo no estabelecimento de uma semântica inteiramente formal e “científica” caberá a Tarski.⁷

Tarski, provavelmente, foi o primeiro a axiomatizar e conferir tratamento formal à metateoria na qual uma teoria-objeto é estudada.⁸ A idéia é que a metalinguagem, para que possa “falar” sobre a linguagem-objeto, contenha, além de conceitos semânticos próprios, nomes das expressões que ocorrem na linguagem-objeto. Conceitos semânticos como “denotação”, “definição” e “verdade” exprimem relações entre objetos ou estados de coisas e expressões lingüísticas. Assim, em primeiro lugar, a metalinguagem deve ser munida

⁵[Gödel, 1930], pp. 583-4, notas 3 e 4.

⁶[Goldfarb, 1979], p. 365, nota 17.

⁷Além do texto original [Gödel, 1930], cf., a esse respeito, [Goldfarb, 1979] e [Tarski, 1933].

⁸Cf. [Tarski, 1933], p.173, nota 3.

de expressões cujo sentido é o mesmo que o das expressões da linguagem que se está investigando (a linguagem-objeto), o que torna possível “traduzi-las” desta linguagem para aquela. Em segundo lugar, a metalinguagem deve ser dotada de expressões que se referem, à guisa de nomes, às expressões da linguagem-objeto. Ou seja, a metalinguagem não apenas pode expressar o mesmo conteúdo semântico que a linguagem-objeto como, ainda, pode referir-se a esse conteúdo, embora, evidentemente, não possa referir-se a seu próprio conteúdo semântico como um todo (isso demandaria uma metalinguagem).

A fim de estender o conceito “sentença verdadeira” (em uma dada estrutura) para fórmulas em geral, incluindo-se aquelas com variáveis livres, é necessário introduzir uma noção que, conquanto em sua generalidade seja também adequada a fórmulas com variáveis livres, quando aplicada a sentenças leve diretamente a um valor de verdade. A noção em tela, devida ao lógico polonês, é a de *satisfação* de uma determinada função sentencial por determinados objetos de um domínio. Uma maneira interessante — quando mais nada, ao menos historicamente interessante — de expor a idéia é citar textualmente a Definição 22 de [Tarski, 1933], pois, além de definir indutivamente o conceito “satisfação”, ela condensa toda a semântica objetual para uma linguagem particular de primeira ordem:

A seqüência f satisfaz a função sentencial x se e somente se f é uma seqüência infinita de classes, x é uma função sentencial e se f e x são tais que (α) existem números naturais k e l tais que $x = \iota_{k,l}$ e $f_k \subseteq f_l$; (β) existe uma função sentencial y tal que $x = \bar{y}$ e f não satisfaz a função y ; (γ) existem funções y e z tais

que $x = y + z$ e f satisfaz x ou satisfaz y ; ou, finalmente, (δ) existe um número natural k e uma função sentencial y tais que $x = \bigcap_k y$ e toda seqüência infinita de classes que difira de f no máximo na k -ésima coordenada satisfaz a função y .⁹

Antes do mais, alguns esclarecimentos a respeito da citação acima se fazem necessários. Nela, Tarski expõe a semântica de uma linguagem de primeira ordem cujas variáveis são entendidas como tendo escopo sobre um domínio em que os indivíduos são classes arbitrárias. O único predicado, binário, é a inclusão entre classes, $x \subseteq y$, denotado por " $\iota_{x,y}$ ".¹⁰ " \bar{y} " e " $y + z$ " denotam a negação de " y " e a disjunção de " y " e " z ". " $\bigcap_k y$ " é a quantificação universal de " y " relativamente à k -ésima variável. Naturalmente, uma enumeração das variáveis da linguagem é assumida.

Como a linguagem em questão não tem nenhuma constante individual não-lógica, suas fórmulas atômicas jamais são sentenças, mas sempre funções sentenciais, ou seja, símbolos de predicado aplicados a variáveis. Portanto, como elas não possuem significado único, pois dependem de que elemento do domínio é fixado como sendo a denotação das variáveis em cada caso, é preciso introduzir um conceito mais geral que o de "verdade", a saber, justamente o de *satisfação* de uma função sentencial por determinados objetos.¹¹ Assim, as fórmulas atômicas " $\iota_{k,l}$ " são satisfeitas por todas aquelas seqüências de elementos do domínio tais que o k -ésimo elemento da seqüência está incluído no l -ésimo. É claro que, para predicados binários, seria necessário

⁹[Tarski, 1933], p.193.

¹⁰Nesta frase, " x " e " y " não são variáveis, mas marcadores de lugar que indicam a dupla insaturação do predicado.

¹¹Cf. [Tarski, 1933], p.189.

considerar apenas seqüências com dois elementos, ou pares ordenados. Dessa forma, a função sentencial “ $\iota_{k,l}$ ” será satisfeita por todos aqueles pares $\langle f_k, f_l \rangle$ de elementos do domínio tais que $f_k \subseteq f_l$. Similarmente, para predicados unários seria necessário considerar apenas elementos do domínio tomados individualmente; para predicados ternários, considerar-se-iam tão-somente triplas ordenadas de elementos do domínio e, em geral, para predicados n -ários, n -uplas de elementos do domínio. A desvantagem desse método — que pode ser chamado de *método das seqüências finitas de tamanho variável* — é que, como nota Tarski, ele torna a definição de “satisfação” algo mais complicada, já que as seqüências de objetos a serem consideradas na definição variam de acordo com a aridade do símbolo de predicado. Assim, é preferível adotar apenas seqüências infinitas de objetos, já que isso permite um tratamento uniforme para linguagens que contenham um número arbitrário de símbolos de predicados de qualquer aridade: se “ $P(x_1, \dots, x_n)$ ” é uma fórmula bem formada com n variáveis livres, então, para que uma seqüência infinita f a satisfaça, basta que os componentes de índice $1, \dots, n$ de f estejam sob a extensão do predicado P , desprezando-se os outros componentes de f . Do contrário, para cada símbolo de predicado n -ário, seria preciso levar em consideração n -uplas de elementos do domínio.

Isso posto, o esquema geral que descreve o conceito de satisfação para o cálculo de classes, visto na Definição 22 supracitada, é dado por:

f satisfaz a função sentencial x se e somente se f é uma seqüência infinita de classes, e p .¹²

Se “ $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ” é uma função sentencial com n variáveis livres, substitui-

¹²[Tarski, 1933], p.192.

se, no esquema acima, o símbolo “ x ” por um nome de “ $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ” na metalinguagem, por exemplo, ““ $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ””, e o símbolo “ p ” é substituído por uma sentença da metalinguagem que tenha o mesmo significado que “ $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ” e na qual as variáveis x_1, \dots, x_n tenham sido trocadas pelas coordenadas da seqüência f de índice $1, \dots, n$.

O conceito de satisfação, assim definido, leva diretamente ao conceito de “verdade” ou “sentença verdadeira” quando aplicado a *sentenças*. Como estas não têm variáveis livres, ocorre que, dada uma sentença ψ , ou todas as seqüências de objetos do domínio a satisfazem ou todas não a satisfazem. Mais uma vez, pois, confirma-se a generalidade do procedimento de considerarem-se apenas seqüências infinitas, substituindo-se a variável livre de índice k pela k -ésima coordenada da seqüência: como sentenças não têm variáveis livres, nenhuma substituição é efetuada, e a configuração particular de cada seqüência acaba por não ter relevância para a veracidade ou falsidade das sentenças. Note-se que, se o método das seqüências finitas de tamanho variável fosse adotado, seria preciso tomar a seqüência vazia de elementos no caso da averiguação de sentenças, que seriam ditas verdadeiras se e somente se fossem satisfeitas pela seqüência vazia.¹³

Com efeito, a semântica objetual para a lógica de predicados, tal como exposta acima, prova-se correta e completa.¹⁴ Se os mesmos resultados de correção e completude puderem ser provados relativamente à semântica substitucional, pode-se afirmar que esta encontra-se justificada, ao menos do ponto vista técnico. Na Seção, 3 mencionarei brevemente alguns motivos

¹³Cf. [Tarski, 1933], p. 195, nota 1.

¹⁴Cf., por exemplo, [Mendelson, 1964], pp. 84-93. Este autor segue amplamente [Tarski, 1933], valendo-se do recurso às seqüências infinitas de elementos do domínio.

não-técnicos que contam a favor da semântica substitucional.

Antes de encerrar-se a seção, salienta-se a seguinte convenção que será adotada de ora avante. A semântica objetual que se vale do recurso a seqüências infinitas pressupõe uma enumeração das variáveis da linguagem. Como foi visto, a sentença “ $\exists x_1 Px_1$ ” é verdadeira se e somente se existe uma seqüência s tal que sua coordenada de índice 1 tem a propriedade P . Entretanto, por sempre ser possível recorrer ao método das seqüências de tamanho variável,¹⁵ o índice de x em “ $\exists x_1 Px_1$ ” pode ser dispensado: a condição necessária da bicondicional na frase anterior significa o mesmo que: “se e somente se existe um indivíduo do domínio que tem a propriedade P ”, pois, ao se considerar *todas* as seqüências de indivíduos do domínio, o indivíduo que tem a propriedade P (caso haja algum) forçosamente irá figurar como a coordenada de índice 1 de alguma seqüência. A semântica substitucional não recorre a seqüências e, conseqüentemente, dispensa a indexação das variáveis. Portanto, quando se estiver comparando as diferentes semânticas, a fórmula “ $\exists x Px$ ”, considerada do ponto de vista objetual, deverá ser lida “ $\exists x_n Px_n$ ”, para algum n *fixo*. Trata-se de uma conveniência notacional inofensiva, pois, pelo exposto, “existe uma seqüência s tal que sua n -ésima coordenada tem a propriedade P ” e “existe um indivíduo i que tem a propriedade P ” são frases equivalentes.

1.1.2 A interpretação substitucional dos quantificadores

Se, de acordo com a interpretação objetual dos quantificadores, uma sentença da forma “ $\exists x Px$ ” é verdadeira se e somente se existe algum indivíduo i no

¹⁵[Tarski, 1933], p. 195, nota 1.

universo de discurso (isto é, no domínio pré-estabelecido) tal que esse indivíduo é P (isto é, $i \in P_{I_{\mathfrak{A}}}$), segundo a interpretação substitucional, a sentença em questão é verdadeira se e somente se “ $P[x/t]$ ” é verdadeira para algum termo t da linguagem.

É imediato notar o seguinte problema. Seja L uma linguagem de primeira ordem com n constantes individuais, mas nenhum símbolo de função, e seja um domínio $|\mathfrak{A}|$ contendo $n+m$ indivíduos ($n, m \in \omega^*$). Fixada uma enumeração das constantes individuais de L e dos indivíduos de $|\mathfrak{A}|$, seja $I_{\mathfrak{A}}(c_j) = i_j$, para cada constante c_j de L , $1 \leq j \leq n$. Se “ P ” é um símbolo de predicado unário de L , seja $P_{I_{\mathfrak{A}}} = \{i_{n+k}\}$, para $k \geq 1$. Isto é, a extensão de “ P ” é um subconjunto de $|\mathfrak{A}|$ que tem como membro um único indivíduo i cujo índice é maior que o de todas as constantes individuais de L . Finalmente, considere-se a sentença “ $\exists xPx$ ”. Segundo a interpretação objetual, essa sentença é verdadeira se e somente se existe um indivíduo do domínio que pertence à extensão do predicado.¹⁶ Como, de fato, existe um indivíduo $i_{n+k} \in |\mathfrak{A}|$ tal que $i_{n+k} \in P_{I_{\mathfrak{A}}}$, então, para alguma sequência s , i_{n+k} será a sua n -ésima coordenada e, portanto, “ $\exists xPx$ ” é verdadeira sob a interpretação objetual. Agora, veja-se a sentença sob o ponto de vista substitucional: “ $\exists xPx$ ” é verdadeira se, e somente se, “ Pt ” é verdadeira para algum termo t de L . Como, para todas as constantes c de L , tem-se que $I_{\mathfrak{A}}(c) \notin P_{I_{\mathfrak{A}}}$ (já que $P_{I_{\mathfrak{A}}} = \{i_{n+k}\}$ e não há nenhuma constante c de L tal que $I_{\mathfrak{A}}(c) = i_{n+k}$), e “ Pc ” é verdadeira se e somente se $I_{\mathfrak{A}}(c) \in P_{I_{\mathfrak{A}}}$, segue-se “ $\exists xPx$ ” é falsa.

O problema observado pode ser resumido assim: a interpretação substi-

¹⁶Para ser coerente com a definição dada, dever-se-ia dizer: se e somente se há uma sequência infinita s de indivíduos de $|\mathfrak{A}|$ tal que sua n -ésima coordenada é o indivíduo i que pertence a $P_{I_{\mathfrak{A}}}$. A formulação do texto tem em vista, contudo, a convenção do último parágrafo da seção anterior.

tucional dos quantificadores é inadequada sempre que o domínio selecionado tem mais elementos que o número de termos da linguagem em questão. É por isso que, dados uma linguagem de primeira ordem L e um domínio $|\mathfrak{A}|$, é preciso garantir que, a cada indivíduo i de $|\mathfrak{A}|$, haja um termo de L que tenha i como referente. Formalmente: para cada $i \in |\mathfrak{A}|$, deve haver um termo t de L tal que $I_{\mathfrak{A}}(t) = i$. Sempre que essa condição é satisfeita para uma linguagem L , um domínio $|\mathfrak{A}|$ e uma \mathfrak{A} -interpretação $I_{\mathfrak{A}}$ para L , [Leblanc, 2001], p. 61, afirma que a estrutura \mathfrak{A} para L é uma *estrutura de Henkin*.¹⁷ O problema levantado no parágrafo anterior significa que, se se deseja empregar uma semântica substitucional, todas as estruturas para a linguagem com a qual se esteja lidando devem ser estruturas de Henkin, no sentido de [Leblanc, 2001].

De fato, [Shoenfield, 1967], o primeiro livro-texto a fornecer uma semântica substitucional plenamente desenvolvida para a lógica de primeira ordem, em face de uma linguagem L e de um domínio $|\mathfrak{A}|$ para L , jamais constrói a semântica para a própria linguagem L dada, e sim para uma expansão L^+ obtida de L via acréscimo de novas constantes. O procedimento, que será detalhado no capítulo seguinte, consiste em aumentar a linguagem com um conjunto de constantes $\{\bar{i} : i \in |\mathfrak{A}|\}$. Isso garante que, para cada indivíduo i do domínio, há um termo da linguagem que se refere a esse indivíduo, o que faz com que o problema levantado dois parágrafos atrás seja dissipado. Finalmente, podem-se elaborar as cláusulas que governarão a interpretação substitucional dos quantificadores:

¹⁷Em verdade, Leblanc desvia da terminologia padrão e refere-se a “modelo de Henkin”. Reservarei à palavra ‘modelo’ o seu sentido usual, isto é, uma estrutura que valida todas as fórmulas de um determinado conjunto de fórmulas.

- “ $\exists x Px$ ” é verdadeira se e somente se “ $P\bar{i}$ ” é verdadeira para alguma constante \bar{i} de L ;
- “ $\forall x Px$ ” é verdadeira se e somente se “ $P\bar{i}$ ” é verdadeira para toda constante \bar{i} de L .

Desde inícios dos anos 60, alguns lógicos e filósofos importantes têm argumentado a favor da interpretação substitucional dos quantificadores, notadamente [Marcus, 1962] e [Parsons, 1971]. O principal argumento evocado, devido a Barcan Marcus, liga-se a comprometimentos ontológicos relacionados à interpretação objetual dos quantificadores, comprometimentos dos quais a interpretação substitucional está livre. Para ilustrar o ponto, descreverei a seguir o argumento em linhas gerais, tal como exposto por [Dunn e Belnap, 1968]. Considere-se a sentença:

(1) Pégaso é um cavalo alado.

Suponha-se que alguém sustente que (1) é verdadeira, talvez baseando-se em informações contidas em livros de mitologia. De acordo com a lógica de primeira ordem elementar, de (1) segue-se

(2) Existe x tal que x é um cavalo alado.

Conforme a interpretação objetual do quantificador existencial, (2) é verdadeira se e somente se

(3) Existe *algo* tal que este *algo* é um cavalo alado.

Por conseguinte, alguém que acredite que (1) é uma sentença verdadeira é forçado, pela interpretação objetual, a admitir a existência de *algo* que é um cavalo alado. Todavia, se se adota a interpretação substitucional, (2) é verdadeira se e somente se alguma de suas instâncias substitutivas o for (isto é, se, para algum termo t da linguagem, “ t é um cavalo alado” é verdadeira), e (1) é justamente uma tal instância (“Pégaso” é o termo t em questão).

Assim, a interpretação substitucional é defendida, de um ponto de vista filosófico, com o propósito de evitar certos comprometimentos ontológicos próprios da interpretação objetual, além de utilizada para desvanecer certos *puzzles* acerca de entes ficcionais, assuntos que excedem o escopo da presente dissertação.

1.1.3 A semântica de valores de verdade

A principal característica da semântica de valores de verdade é que ela dispensa inteiramente a noção de estrutura. Não há domínio de indivíduos nem função de interpretação a relacionar termos da linguagem a indivíduos do domínio e símbolos de predicado a subconjuntos do domínio. Com isso, a semântica de valores de verdade é bastante simples, se comparada às duas semânticas apresentadas nas seções anteriores. A exposição subsequente segue as linhas de [Leblanc, 2001].

Seja L uma linguagem de primeira ordem qualquer que tenha ao menos uma constante individual. Seja Γ o conjunto de todas as fórmulas atômicas de L . Considere-se o conjunto $\{0, 1\}$ de valores de verdade e seja $f : \Gamma \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. f é chamada uma *atribuição de valores de verdade* para L . Uma fórmula φ fechada qualquer de L é dita *verdadeira de acordo com a atribuição*

f se e somente se (i) $\varphi \in \Gamma$, e $f(\varphi) = 1$; (ii) $\varphi = \neg\psi$, e ψ não é verdadeira de acordo com f ; (iii) $\varphi = \psi \vee \delta$, e ψ ou δ são verdadeiras de acordo com f ; (iv) $\varphi = \psi \wedge \delta$, e ψ e δ são verdadeiras de acordo com f ; (v) $\varphi = \psi \rightarrow \delta$, e ψ não é verdadeira de acordo com f ou δ é verdadeira de acordo com f ; (vi) $\varphi = \exists x\psi$, e $\psi[x/t]$ é verdadeira de acordo com f para algum termo fechado t de L ; (vii) $\varphi = \forall x\psi$, e $\psi[x/t]$ é verdadeira de acordo com f para todo termo fechado t de L .

Por fim, uma fórmula fechada φ de L é dita *válida*, conforme a semântica de valores de verdade, se e somente se φ é verdadeira de acordo com todas as atribuições de valores de verdade possíveis para L . Uma limitação dessa semântica é que, aparentemente, ela só é capaz de valorar fórmulas fechadas de L ; de fato, Leblanc só considera fórmulas fechadas em seu artigo. Contudo, a semântica de valores de verdade demonstra-se correta e completa com relação a uma axiomatização da lógica de primeira ordem que, evidentemente (dado o exposto na frase anterior), só permite que sentenças substituam os esquemas de axiomas (cf. [Leblanc, 2001], pp. 57 e 78).

1.2 Semântica para a lógica paraconsistente

As primeiras semânticas construídas para a lógica paraconsistente foram propostas em forma de cláusulas que não eram verofuncionais com respeito à negação, mas, relativamente aos outros conectivos proposicionais, seguiam as tabelas usuais da lógica clássica.¹⁸ Essa idéia básica, descrita em [da Costa e Alves, 1977] e alcunhada *semântica de valorações*, é seguida ainda hoje

¹⁸Note-se que o conectivo de “consistência” \circ , que também é regulado por uma cláusula não-verofuncional, é originariamente definido em termos de negação e conjunção.

na elaboração de semânticas para lógicas paraconsistentes. Posteriormente, [D’Ottaviano, 1982] desenvolveu uma semântica para um cálculo paraconsistente trivalente, J_3^- , e [Alves, 1984] propôs uma para um cálculo bivalente, C_1^- , ambos de primeira ordem. A semântica construída por Alves é, em linhas gerais, a inspiração para a semântica adotada na presente dissertação, e será detalhada nos dois capítulos a seguir. O restante deste capítulo analisará brevemente a semântica de valorações.

1.2.1 Semântica de valorações

Como a lógica paraconsistente tem como característica permitir que uma proposição e sua negação possam ser encaradas ambas como verdadeiras, a abordagem clássica da negação, na forma

$$\varphi = 1 \Leftrightarrow \neg\varphi = 0$$

deve ser rejeitada. Entretanto, [da Costa e Alves, 1977] propõem uma semântica bivalente para C_1 , evitando um terceiro valor que faça o papel de “valor inconsistente” ou “indeterminado”. Isso posto, uma *valoração* para C_1 é uma função $v : For(C_1) \mapsto \{0, 1\}$ tal que:

- (i) $v(\varphi) = 0 \Rightarrow v(\neg\varphi) = 1$;
- (ii) $v(\neg\neg\varphi) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1$;
- (iii) $v(\psi^\circ) = v(\varphi \rightarrow \psi) = v(\varphi \rightarrow \neg\psi) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 0$;
- (iv) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$;
- (v) $v(\varphi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$;
- (vi) $v(\psi \vee \varphi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$;

$$(vii) v(\varphi^\circ) = v(\psi^\circ) = 1 \Rightarrow v((\varphi \wedge \psi)^\circ) = v((\varphi \vee \psi)^\circ) = v((\varphi \rightarrow \psi)^\circ) = 1.^{19}$$

A cláusula (i) indica o comportamento não-verofuncional da negação, já aludido. A cláusula (ii) deve-se ao fato de que C_1 tem um axioma que permite a redução de negações duplas. A cláusula (iii) codifica uma espécie de redução ao absurdo diante de fórmulas “consistentes”: se uma fórmula e sua negação são implicadas por uma outra, e a fórmula em questão é “consistente”, então a fórmula “implicante” é falsa. As cláusulas (iv), (v) e (vi) são idênticas às que governam a lógica clássica. E a cláusula (vii) indica que a “consistência” é propagada para fórmulas complexas, desde que suas componentes também sejam “consistentes”.

A prova da correção da semântica de valorações para C_1 é imediata: a todos os axiomas é atribuído o valor 1 de acordo com as cláusulas acima. Em seguida, da Costa e Alves estabelecem a completude da semântica proposta através do caminho usual: mostram que todo conjunto não-trivial pode ser estendido a um conjunto não-trivial maximal, e que este conjunto admite uma valoração segundo a qual todas as suas fórmulas recebem valor 1. Assim, se $\not\models_{C_1} \varphi$, é possível construir um conjunto Γ , maximal, tal que $\Gamma \not\models_{C_1} \varphi$. Como Γ é não-trivial, há uma valoração v tal que $v(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Como Γ é maximal e $\varphi \notin \Gamma$, segue-se que $v(\varphi) = 0$, o que garante a completude por um argumento em contrapositiva.²⁰

¹⁹A notação original “ φ° ” é empregada aqui para lembrar que “ \circ ” é um conectivo definido.

²⁰A exposição precedente é deliberadamente informal; o objetivo da dissertação não é deter-se em C_1 . Todos os conceitos técnicos mencionados serão definidos precisamente no Capítulo 2. A bem da verdade, a prova de da Costa e Alves é algo diversa da esboçada acima: eles empregam a negação forte, definida como $\neg\varphi \wedge \varphi^\circ$. A fim de evitar detalhes técnicos antes da hora, evitou-se segui-los.

Da semântica de valorações para C_1 segue-se um método de decisão para este cálculo: o método das quase-matrizes, no qual não me deterei.²¹ Por fim, é importante salientar que a semântica de valorações desempenhará um papel preponderante nos dois capítulos seguintes.

²¹Cf. [da Costa e Alves, 1977], p.624 e seguintes, e [Marcos, 1999], p.48 e seguintes.

Capítulo 2

O caso paradigmático: uma semântica para **QmbC**

A lógica **mbC** foi introduzida em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] como uma **LIF** “fundamental”, no sentido de que sua axiomática contém um mínimo necessário para manter os teoremas da lógica positiva clássica e, paralelamente, evitar a trivialização diante da presença de contradições. A seguir, será apresentada uma versão de primeira ordem da mesma, que se optou por chamar de **QmbC** (a letra “Q”, evidentemente, evoca “quantificacional”). Após a exposição de sua linguagem e axiomas, exibir-se-á uma semântica bivalente com relação à qual os axiomas escolhidos provam-se completos, isto é, toda fórmula que assume valor designado de acordo com a semântica em questão é uma consequência sintática dos axiomas. Observe-se que, no que se segue, procurou-se manter, tanto quanto possível, a interpretação clássica, modelo-teórica, das linguagens de primeira ordem. O preceito de não se afastar da lógica clássica, a não ser quando segui-la significava inevitavel-

mente a aceitação dos Princípios de Não-Contradição e de Pseudo-Scotus, foi adotado desde o início por da Costa.

2.1 Definições preliminares e notação

Definição 1. Uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L é composta de:

- um conjunto de variáveis individuais;
- para cada $n \in \omega$, um conjunto (possivelmente vazio) de símbolos de função n -ários;
- para cada $n \in \omega^*$, um conjunto de símbolos de predicado n -ários;
- conectivos proposicionais: $\neg, \circ, \wedge, \vee, \rightarrow$;
- quantificadores: \exists, \forall ;
- sinais de pontuação: parênteses, colchetes e vírgula.

Ou seja, uma linguagem paraconsistente de primeira ordem não difere, essencialmente, de uma linguagem de primeira ordem comum, exceto por ter um conectivo unário além da negação. Dada uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L , assume-se que nela há ao menos um símbolo de predicado. Símbolos de função 0-ários, caso os haja, são as constantes individuais. As definições de termo e fórmula (bem formada) são as usuais, com o acréscimo da seguinte cláusula adicional: se φ é uma fórmula, então $\circ\varphi$ também o é.

Definição 2. Sejam φ e ψ fórmulas. Se φ pode ser obtida de ψ por acréscimo ou supressão de quantificadores vácuos e/ou renomeação de variáveis ligadas, diz-se que φ e ψ são *variantes* (uma da outra).

A definição acima, introduzida por [Avron e Zamansky, s.d.] no contexto das **LIFs** quantificadas, é motivada pelo fato de que, em uma lógica paraconsistente de primeira ordem, a princípio, $\forall x\varphi[x]$ pode ser equivalente a $\forall y\varphi[y]$ e, contudo, $\neg\forall x\varphi[x]$ e $\neg\forall y\varphi[y]$ podem não ser equivalentes. Da mesma maneira, as fórmulas $\forall x\varphi[x]$ e $\forall y\forall x\varphi[x]$ podem ser equivalentes, mas nada garante que $\neg\forall x\varphi[x]$ e $\neg\forall y\forall x\varphi[x]$ também o sejam (onde x é a única variável livre em φ). O axioma 14, abaixo, tenciona resolver esse problema.

Propõem-se os esquemas abaixo como uma axiomatização de **QmbC**:

- 1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- 2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- 3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
- 4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- 5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- 6) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- 7) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- 8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
- 9) $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$
- 10) $\alpha \vee \neg\alpha$
- 11) $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$
- 12) $\varphi[x/t] \rightarrow \exists x\varphi$, se t é um termo livre para x em φ
- 13) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi[x/t]$, se t é um termo livre para x em φ

14) Se α é variante de β , $\alpha \rightarrow \beta$

Regras de inferência:

- *Modus ponens*;
- **Introdução de Universal**: $\alpha \rightarrow \beta / \alpha \rightarrow \forall x\beta$, se x não é livre em α ;
- **Introdução de Existencial**: $\alpha \rightarrow \beta / \exists x\alpha \rightarrow \beta$, se x não é livre em β .

Algumas observações iniciais acerca da notação se fazem necessárias. Fixada uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L , a álgebra de fórmulas gerada por sua assinatura é denotada por For_L° , e S_L° denota o conjunto de fórmulas fechadas, ou sentenças, de L . Se $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ é uma fórmula com n variáveis livres e t_1, \dots, t_n são termos de L , denota-se por $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ o resultado da substituição de cada variável livre x_i pelo termo t_i , $1 \leq i \leq n$. A interpretação de termos t (fórmulas φ) numa dada (pré-) estrutura¹ \mathfrak{A} é denotada por $I_{\mathfrak{A}}(t)$ ($I_{\mathfrak{A}}(\varphi)$). Se f e P são, respectivamente, símbolos de função e predicado de uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L , $f_{I_{\mathfrak{A}}}$ e $P_{I_{\mathfrak{A}}}$ denotam uma função e um predicado da (pré-) estrutura \mathfrak{A} . Os índices que indicam a aridade dos símbolos de função e predicado de L serão omitidos. A relação de conseqüência sintática (provabilidade) de **QmbC** será indicada pelo símbolo $\vdash_{\mathbf{QmbC}}$. Sempre que se estiver tratando de uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L específica e houver necessidade de salientar que determinada fórmula α é teorema de **QmbC** na linguagem

¹Os conceitos de pré-estrutura e estrutura serão definidos na seção 2.3.

em questão, tal fato será indicado por $\vdash_{\mathbf{QmbC}}^L$; esse cuidado pode importar quando uma fórmula de L também for teorema de \mathbf{QmbC} em uma linguagem L' diferente de L (tipicamente, uma linguagem com mais ou menos constantes individuais). Por fim, se Δ é um conjunto de fórmulas escritas em uma linguagem L , emprega-se a expressão $L(\Delta)$ caso seja necessário frisar que a linguagem sob consideração é essa em que as fórmulas de Δ estão escritas.

2.2 Sintaxe

Como já foi dito, a presente dissertação visa à investigação das **LIFs** de primeira ordem mormente em seu aspecto semântico. Contudo, faz-se necessário um desenvolvimento mínimo da contraparte sintática de \mathbf{QmbC} antes de passar-se a sua semântica. No ulterior desenvolvimento da sintaxe de \mathbf{QmbC} , a completude de sua contraparte proposicional será pressuposta; em especial, serão usados livremente esquemas proposicionais válidos desse cálculo.² Assim, é fácil ver que a Regra de Generalização pode ser demonstrada a partir dos postulados de \mathbf{QmbC} :

Teorema 3. *Se $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$, então $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x \varphi$.*

Demonstração. Como $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ é um esquema válido de \mathbf{mbC} , o fragmento proposicional de \mathbf{QmbC} :

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

pela completude de \mathbf{mbC} . Logo, se $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$, então $\vdash_{\mathbf{QmbC}} (\psi \rightarrow \varphi)$, por *modus ponens*; em particular, $\vdash_{\mathbf{QmbC}} (\neg \forall x \varphi \rightarrow \varphi)$. Donde, por **Introdução**

²O resultado pressuposto aqui é demonstrado em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], p. 35.

de **Universal**, $\vdash_{\mathbf{QmbC}} (\neg \forall x \varphi \rightarrow \forall x \varphi)$, pois x certamente não é livre em $\neg \forall x \varphi$. Como $(\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ é um esquema válido de **mbC**:

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi.$$

Portanto, de

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} (\neg \forall x \varphi \rightarrow \forall x \varphi)$$

segue-se

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x \varphi$$

por *modus ponens*. □

Definição 4. Diz-se que φ' é uma *instância* de φ se φ' é do tipo $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$, para termos t_1, \dots, t_n de L .

Pode-se mostrar que a Regra de Substituição também se segue dos postulados de **QmbC**:

Teorema 5. Se $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$ e φ' é uma instância de φ , então $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi'$.

Demonstração. Suponha-se que φ tem apenas uma variável livre, x , e $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$. Logo, φ' é da forma $\varphi[x/t]$ e, pelo 3 (Regra de Generalização), $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x \varphi$. Onde $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi'$ pelo axioma 13 e *modus ponens*. Se φ tem n variáveis livres, φ' é da forma $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$. Se y_1, \dots, y_n são variáveis novas que não aparecem nem em φ e nem em φ' , usando-se a primeira parte da demonstração, encontra-se sucessivamente:

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[x_1/y_1]$$

$$\begin{aligned} &\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[x_1/y_1, x_2/y_2] \\ &\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[x_1/y_1, x_2/y_2, \dots, x_n/y_n] \end{aligned}$$

Donde, mais uma vez empregando-se a primeira parte da demonstração:

$$\begin{aligned} &\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[y_1/t_1] \\ &\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[y_1/t_1, y_2/t_2] \\ &\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[y_1/t_1, y_2/t_2, \dots, y_n/t_n] \end{aligned}$$

Como desejado. □

Teorema 6. (*Teoremas de Substituição*) *Se t_1, \dots, t_n são termos livres para x_1, \dots, x_n em φ , provam-se os seguintes esquemas:*

$$(i) \vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi;$$

$$(ii) \vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \rightarrow \varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n].$$

Demonstração. Pelo axioma 12, se t é um termo livre para x em φ , $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[x/t] \rightarrow \exists x \varphi$. Daqui segue-se que

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} \exists x_{i+1} \dots \exists x_n \varphi[x_i/t_i] \rightarrow \exists x_i \exists x_{i+1} \dots \exists x_n \varphi$$

$1 \leq i \leq n$. E, logo, $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$. Da última asserção segue-se, pelo 5 (Regra de Substituição) $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$

Quanto à verificação de (ii), note-se que, se t é um termo livre para x em φ , $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x \varphi \rightarrow \varphi[x/t]$ pelo axioma 13. De onde se segue

$$\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x_i \forall x_{i+1} \dots \forall x_n \varphi \rightarrow \forall x_{i+1} \dots \forall x_n \varphi[x_i/t_i]$$

$1 \leq i \leq n$. E, logo, $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \rightarrow \varphi$. Finalmente, pelo 5 (Regra de Substituição), $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \rightarrow \varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$. \square

Teorema 7. (*Teorema do Fecho*) *Se φ' é o fecho de φ , então $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$ se e somente se $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi'$.*

Demonstração. Conseqüência da Regra de Generalização e do Teorema de Substituição (ii). \square

Teorema 8. (*Teorema das Constantes*) *Seja L uma linguagem paraconsistente de primeira ordem e seja L' uma linguagem obtida de L mediante o acréscimo de novas constantes. Seja, ademais, $\Delta \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de L . Então, tem-se que $\Delta \vdash_{\mathbf{QmbC}}^{L'} \alpha$ se e somente se $\Delta \vdash_{\mathbf{QmbC}}^L \alpha$.*

Demonstração. Se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ é uma cadeia de fórmulas que constitui uma prova de α a partir de Δ em L' (e, portanto, $\alpha = \varphi_n$), então todas as fórmulas entre $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ que não são fórmulas de L contêm constantes próprias de L' . Ao substituírem-se, em cada uma dessas fórmulas, as constantes próprias de L' por um termo arbitrário de L , obtém-se uma prova de α a partir de Δ em L . A volta é imediata. \square

Listam-se os dois teoremas a seguir porque são dignos de nota e, especialmente o segundo, necessários à prova de resultados posteriores, em particular à obtenção de um teorema de completude. Como suas demonstrações não diferem das clássicas, remete-se o leitor a obras como Kleene [1952]

ou Shoenfield [1967]. Quanto ao Teorema da Dedução, observa-se amiúde que ele vale para qualquer cálculo que prove os esquemas $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ e que tenha *modus ponens* como única regra de inferência. As demais regras de **QmbC**, contudo, não interferem na prova do referido teorema.

Teorema 9. (*Teorema da Dedução*) *Seja φ uma fórmula fechada. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$ se e somente se $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \Gamma \rightarrow \varphi$.*

Teorema 10. (*Teorema da Redução*) *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas escritas em uma linguagem L . Então, $\Gamma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ se e somente se $\vdash_{\mathbf{QmbC}} \gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow \alpha$, onde cada γ_i ($1 \leq i \leq n$) é um fecho de fórmulas de Γ .*

2.3 Semântica

2.3.1 Pré-estruturas e valorações

Essa pequena porção de sintaxe desenvolvida até o momento basta para que se possa passar ao tratamento da semântica de **QmbC**. Seja L uma linguagem paraconsistente de primeira ordem.

Definição 11. Uma *pré-estrutura* \mathfrak{A} para L é composta de:

- um domínio não vazio $|\mathfrak{A}|$ de indivíduos;
- uma interpretação para cada símbolo de função n -ário, isto é, uma função $f_{I_{\mathfrak{A}}}: |\mathfrak{A}|^n \longrightarrow |\mathfrak{A}|$. Em particular, selecionam-se indivíduos específicos do domínio como interpretações das constantes individuais de L ;

- uma interpretação $P_{I_{\mathfrak{A}}}$ para cada símbolo P de predicado n -ário, isto é, um subconjunto de $|\mathfrak{A}|^n$.

Alternativamente, \mathfrak{A} é definida como um par ordenado $\langle |\mathfrak{A}|, I_{\mathfrak{A}} \rangle$, tal que $|\mathfrak{A}|$ é um conjunto não-vazio e $I_{\mathfrak{A}}$ é uma função que interpreta os símbolos da linguagem dada, de acordo com os itens acima. Em outras palavras, entende-se por “pré-estrutura” exatamente o que é entendido por “estrutura” na semântica do cálculo clássico de primeira ordem (vide Capítulo 1). O motivo de tal diferenciação será visto a seguir. A noção de pré-estrutura foi introduzida por [Alves, 1984] na construção da semântica de uma variante do cálculo C_1^- .³

Obviamente, se L é uma linguagem (paraconsistente) de primeira ordem e se φ é uma fórmula fechada de L , então φ expressa apenas um significado: é uma sentença. Por outro lado, se φ possui variáveis livres, por exemplo, uma variável livre x , seu significado dependerá de que indivíduo i de $|\mathfrak{A}|$ é atribuído como sendo a denotação de x em $I_{\mathfrak{A}}(\varphi)$. Como no caso clássico, a validade de uma fórmula φ dependerá dos significados que ela possa vir a assumir nas (pré-) estruturas para L . Portanto, é vantajoso que, para cada significado que φ possa assumir, haja uma fórmula que expresse precisamente tal significado. Como significados são fixados selecionando-se elementos de $|\mathfrak{A}|$ como denotações das variáveis livres, é claro que, para que se possa ter uma fórmula de L que expresse precisamente cada significado que φ possa assumir, é necessário que L contenha nomes para cada indivíduo de $|\mathfrak{A}|$. Assim, seguindo Shoenfield, se \mathfrak{A} é uma pré-estrutura para L , seleciona-se,

³Na versão de Alves, também chamada por ele de C_1^- , o axioma original $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ é substituído por $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.

para cada indivíduo i em $|\mathfrak{A}|$, uma nova constante c que servirá de nome de i . A linguagem estendida obtida de L ao acrescentar-se um nome para cada indivíduo de $|\mathfrak{A}|$ é denotada por $L(\mathfrak{A})$. Como a linguagem foi estendida com mais símbolos, a função de interpretação de uma pré-estrutura para a nova linguagem $L(\mathfrak{A})$ deve ser definida também para os símbolos novos. Tais observações são formalizadas a partir da seguinte definição:

Definição 12. Seja $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|, I_{\mathfrak{A}} \rangle$ uma pré-estrutura para uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L . $L(\mathfrak{A})$ é a linguagem obtida de L ao acrescentar-se, como símbolos novos, o conjunto de constantes $\{\bar{i} : i \in |\mathfrak{A}|\}$. $\mathfrak{A}' = \langle |\mathfrak{A}|, I'_{\mathfrak{A}} \rangle$ é a pré-estrutura para $L(\mathfrak{A})$, tal que $I'_{\mathfrak{A}}$ é uma extensão de $I_{\mathfrak{A}}$ satisfazendo: $I'_{\mathfrak{A}}(\bar{i}) = i$.

Dada uma pré-estrutura \mathfrak{A} para uma linguagem L , sua extensão \mathfrak{A}' para $L(\mathfrak{A})$ também será denotada por \mathfrak{A} ; o sentido é claro pelo contexto. De fato, serão usadas apenas estruturas estendidas nesse sentido, tais que suas funções de interpretação $I_{\mathfrak{A}}$ são sempre definidas para as constantes $\{\bar{i} : i \in |\mathfrak{A}|\}$ da maneira indicada na definição precedente. Assim, dadas uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L e uma pré-estrutura \mathfrak{A} para L , o que estará *sempre* em consideração é a pré-estrutura \mathfrak{A}' para $L(\mathfrak{A})$, a qual, saliente-se mais uma vez, também será denotada por \mathfrak{A} . As novas constantes (nomes) \bar{i} acrescentadas a L serão freqüentemente denotadas pelas letras c e e . As referências dos termos fechados de $L(\mathfrak{A})$ são definidas por indução do modo usual: se t é um nome c , então, de acordo com a definição acima, $I_{\mathfrak{A}}(t)$ é o indivíduo do domínio cujo nome é t . Se t é $f(t_1, \dots, t_n)$, $I_{\mathfrak{A}}(t)$ é $f_{I_{\mathfrak{A}}}(I_{\mathfrak{A}}(t_1), \dots, I_{\mathfrak{A}}(t_n))$.

Definição 13. Sejam L , \mathfrak{A} e $I_{\mathfrak{A}}$ tais como no parágrafo acima. Uma ***QmbC***-*valoração* (ou simplesmente *valoração*, se não houver risco de desentendi-

mento) baseada na pré-estrutura \mathfrak{A} é uma função $v : S_{L(\mathfrak{A})}^\circ \longrightarrow \{0, 1\}$, tal que:

1. $v(P(t_1, \dots, t_n)) = 1 \Leftrightarrow \langle I_{\mathfrak{A}}(t_1), \dots, I_{\mathfrak{A}}(t_n) \rangle \in P_{I_{\mathfrak{A}}}$
2. $v(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$
3. $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$
4. $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 1$
5. $v(\alpha) = 0 \Rightarrow v(\neg\alpha) = 1$
6. $v(\circ\alpha) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$
7. $v(\exists x\varphi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi[x/t]) = 1$ para algum termo t de $L(\mathfrak{A})$ livre para x em φ
8. $v(\forall x\varphi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi[x/t]) = 1$ para todo termo t de $L(\mathfrak{A})$ livre para x em φ
9. Se φ é uma variante de ψ , então $v(\varphi) = v(\psi)$

O lado direito da cláusula 1 será escrito alternativamente como

$$P_{I_{\mathfrak{A}}}(I_{\mathfrak{A}}(t_1), \dots, I_{\mathfrak{A}}(t_n)).$$

Dadas as cláusulas 5 e 6 acima, é imediato notar o seguinte problema: se L é uma linguagem paraconsistente de primeira ordem qualquer fixada, uma **QmbC**-valoração que determine o valor de todas as fórmulas atômicas de L não será capaz, por si só, de determinar o valor de todas as suas fórmulas em geral. Na lógica clássica, é muito simples provar que, uma vez firmada

uma valoração para todas as fórmulas atômicas de determinada linguagem, há apenas uma maneira de estender essa valoração para todas as fórmulas em geral, pois todos os conectivos são verofuncionais. Isso significa que, se duas valorações clássicas (booleanas) v_1 e v_2 coincidem em todas as fórmulas atômicas, então coincidem forçosamente em todas as fórmulas e, portanto, $v_1 = v_2$.⁴ É fácil ver por que o mesmo não se dá em **QmbC**. Seja \mathfrak{A} uma pré-estrutura para uma linguagem paraconsistente L e seja $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ uma fórmula atômica de $L(\mathfrak{A})$. Suponha-se que $\langle I_{\mathfrak{A}}(t_1), \dots, I_{\mathfrak{A}}(t_n) \rangle \in P_{I_{\mathfrak{A}}}$. Logo, se v_1 e v_2 são valorações baseadas em \mathfrak{A} , pela cláusula 1, $v_1(\varphi) = v_2(\varphi) = 1$. Contudo, como a cláusula 5 não é verofuncional, nada impede que $v_1(\neg\varphi) \neq v_2(\neg\varphi)$. Ou seja, ainda que duas **QmbC**-valorações coincidam em todas as fórmulas atômicas, pode haver mais de uma maneira, e via de regra haverá infinitas maneiras, de estendê-las para todas as fórmulas de $L(\mathfrak{A})$. Dito de modo conciso: ao contrário do caso clássico, o valor das fórmulas complexas de **QmbC** não é determinado totalmente a partir do valor de suas fórmulas atômicas.

2.3.2 Estruturas, validade

As observações do parágrafo precedente motivam a introdução preliminar do conceito de pré-estrutura. Porém, a fim de se alcançar uma semântica adequada para o cálculo em questão, faz-se necessária uma noção mais forte, capaz de determinar univocamente o valor de todas as fórmulas complexas de $L(\mathfrak{A})$ (para L e \mathfrak{A} uma linguagem e uma pré-estrutura arbitrárias) a partir

⁴Cf. p. ex. [Smullyan, 1968], pp. 10 e 47, para uma breve discussão informal a esse respeito.

de suas fórmulas atômicas. Para tanto será introduzida a noção de *estrutura*.

Antes do mais, convém apresentar outras notações relevantes. Se L é uma linguagem paraconsistente de primeira ordem e \mathfrak{A} é uma pré-estrutura para L , então $\mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^F$ denotará o conjunto das fórmulas atômicas de $L(\mathfrak{A})$ e $\mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S$, o conjunto das sentenças atômicas de $L(\mathfrak{A})$, isto é, fórmulas atômicas sem variáveis. Além disso, $For_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ e $S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ indicarão, respectivamente, o conjunto de todas as fórmulas e o conjunto de todas as sentenças de $L(\mathfrak{A})$. Toda vez em que expressões como $\mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^F$, $\mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S$, $For_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ ou $S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ forem usadas sem que se façam referências explícitas a uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L e a uma pré-estrutura \mathfrak{A} , está-se pressupondo que estas estão fixadas de maneira arbitrária; nesse caso, a linguagem expandida $L(\mathfrak{A})$ e a estrutura expandida \mathfrak{A}' são entendidas relativamente à linguagem e à estrutura pressupostas fixadas.

Definição 14. A *complexidade* de uma fórmula é uma função $l : For_L^\circ \rightarrow \mathbb{N}$ tal que: $l(\varphi) = 0$, se $\varphi \in \mathcal{A}_L^F$; $l(\psi \# \xi) = l(\psi) + l(\xi) + 1$, para $\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$; $l(\neg\varphi) = l(\varphi) + 1$; $l(\circ\varphi) = l(\varphi) + 2$; e $l(Qx\varphi) = l(\varphi) + 1$, para $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Lema 15. *Seja \mathfrak{A} uma pré-estrutura para uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L . Seja $v_0 : \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S\} \rightarrow \{0, 1\}$ uma função em conformidade com as cláusulas 1 e 5 da 13. Então, existe uma **QmbC**-valoração $v : S_{L(\mathfrak{A})}^\circ \rightarrow \{0, 1\}$ baseada em \mathfrak{A} que estende v_0 , isto é, tal que $v(\varphi) = v_0(\varphi)$ para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S\}$.*

Demonstração. Define-se v indutivamente a partir da complexidade de φ . Se $\varphi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S\}$, coloca-se $v(\varphi) = v_0(\varphi)$. Se $\psi, \xi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S$ e $\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $v(\psi \# \xi)$ é definido de acordo com as cláusulas 2, 3 e 4

da 13. Se ψ é do tipo $P(x)$, possivelmente com parâmetros t_1, \dots, t_n , e φ é $Qx\psi$ ($Q \in \{\exists, \forall\}$), então $v(\psi[x/t])$ já está definido por v_0 para todo termo fechado t em $L(\mathfrak{A})$, e $v(\varphi)$ é definido conforme as cláusulas 7 e 8 da 13. Esse procedimento completa a definição de $v(\varphi)$ para toda $\varphi \in S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ tal que $l(\varphi) \leq 1$. Suponha-se que $v(\varphi)$ foi definido para toda $\varphi \in S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ tal que $l(\varphi) \leq n$, para $n \geq 1$, e seja $\varphi \in S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ tal que $l(\varphi) = n + 1$. Se φ é da forma $(\psi \# \xi)$, define-se $v(\varphi)$ segundo as cláusulas 2, 3, 4 da 13. Se φ é do tipo $\neg\psi$, define-se $v(\varphi) = 1$, se $v(\psi) = 0$, e $v(\varphi)$ é definido arbitrariamente se $v(\psi) \neq 0$. Se $\psi \in S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ é do tipo $Q_{n-1}x_{n-1} \dots Q_1x_1\xi$ e φ é $Q_nx_n\psi$, então φ é variante de ψ , e define-se $v(\varphi) = v(\psi)$, em conformidade com a cláusula 9 da 13. Se ψ contém uma variável livre x e φ é da forma $Qx\psi$, verifica-se, para cada termo fechado t em $L(\mathfrak{A})$, o valor de $\psi[x/t]$, e define-se $v(\varphi)$ de acordo com as cláusulas 7 e 8 da 13. Finalmente, se φ é $\circ\psi$, então $v(\varphi) = 0$ se $v(\psi) = v(\neg\psi) = 1$, e $v(\varphi)$ é definido arbitrariamente, caso contrário. Por construção, v é uma **QmbC**-valoração baseada em \mathfrak{A} que estende v_0 . \square

Fato: É evidente, levando-se em conta a prova do lema anterior, que, uma vez definida uma valoração v_0 para toda fórmula $\psi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \mathcal{A}_{L(\mathfrak{A})}^S\}$, há infinitas maneiras de estender v_0 para todo o conjunto $S_{L(\mathfrak{A})}^\circ$ das fórmulas fechadas de $L(\mathfrak{A})$.

As definições 16 e 17 a seguir são baseadas em [Alves, 1984].

Definição 16. Uma **QmbC**-*estrutura* — ou simplesmente *estrutura*, quando não houver risco de confusão — para uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L , é um par $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{A}, v \rangle$, tal que \mathfrak{A} é uma pré-estrutura para

L e v é uma **QmbC**-valoração — ou simplesmente valoração, se não houver risco de desentendimento — baseada em \mathfrak{A} .

Como os indivíduos da estrutura \mathfrak{E} são os mesmos que os da pré-estrutura \mathfrak{A} e, conseqüentemente, $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{E}|$, é indiferente denotar por $L(\mathfrak{E})$ ou $L(\mathfrak{A})$ a linguagem expandida de L mediante o acréscimo dos nomes dos elementos de $|\mathfrak{A}|$, tendo sempre em mente que, se \mathfrak{G} é uma estrutura para L baseada em \mathfrak{A} diferente de \mathfrak{E} — ou seja, $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{A}, v \rangle$ e $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{A}, v' \rangle$, $v \neq v'$ — $L(\mathfrak{G}) = L(\mathfrak{E}) = L(\mathfrak{A})$. Por conseguinte, se \mathfrak{E} é uma estrutura para L baseada em \mathfrak{A} , a linguagem obtida de L a partir do acréscimo de novas constantes que servirão de nomes dos elementos de $|\mathfrak{A}|$, será designada tanto por $L(\mathfrak{A})$ quanto por $L(\mathfrak{E})$, conforme a conveniência de cada contexto. Também é evidente que as funções e predicados de \mathfrak{E} são os mesmos que os de \mathfrak{A} . Demais disso, infere-se imediatamente do **Fato** acima que, para cada pré-estrutura \mathfrak{A} para L , há infinitas estruturas baseadas em \mathfrak{A} . As convenções notacionais aplicadas às interpretações dos símbolos de uma linguagem L em pré-estruturas aplicam-se também a estruturas. Note-se que, para termos t e símbolos de predicados P de uma linguagem L qualquer, se \mathfrak{E} e \mathfrak{G} são estruturas baseadas na pré-estrutura \mathfrak{A} para L , então $I_{\mathfrak{A}}(t) = I_{\mathfrak{E}}(t) = I_{\mathfrak{G}}(t)$ e $P_{I_{\mathfrak{A}}} = P_{I_{\mathfrak{E}}} = P_{I_{\mathfrak{G}}}$.

Dada uma estrutura \mathfrak{E} para L (baseada em \mathfrak{A}), define-se um valor de verdade $I_{\mathfrak{E}}(\varphi)$ para cada fórmula fechada φ de $L(\mathfrak{E})$ da seguinte maneira:

$$I_{\mathfrak{E}}(\varphi) = v(\varphi)$$

tal que v é a valoração de $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{A}, v \rangle$.

Se φ é uma fórmula de L , uma \mathfrak{A} -instância de φ é uma fórmula fechada do tipo $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ em $L(\mathfrak{A})$, tal que t_1, \dots, t_n são termos fechados de $L(\mathfrak{A})$

(Cf. [Shoenfield, 1967], p.19, de onde a presente formulação foi adaptada). A partir das observações feitas dois parágrafos acima, infere-se que, se \mathfrak{E} é uma estrutura baseada na pré-estrutura \mathfrak{A} , uma \mathfrak{E} -instância de φ é o mesmo que uma \mathfrak{A} -instância de φ . Assim, as duas expressões serão empregadas alternativamente, de novo conforme a conveniência do contexto em tela.

Enfim, passa-se à definição formal de validade:

Definição 17. Uma fórmula φ de uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L é:

1. ***QmbC**-válida na estrutura \mathfrak{E}* — se $I_{\mathfrak{E}}(\varphi') = 1$ para toda \mathfrak{E} -instância φ' de φ ;
2. ***QmbC**-válida na pré-estrutura \mathfrak{A}* — se φ é **QmbC**-válida em qualquer estrutura \mathfrak{E} baseada em \mathfrak{A} ;
3. ***QmbC**-válida* — se φ é **QmbC**-válida em qualquer estrutura \mathfrak{E} para L (neste caso, obviamente, φ é **QmbC**-válida em qualquer pré-estrutura \mathfrak{A} para L).

A expressão “**QmbC**-estrutura” será empregada em referência a qualquer estrutura para uma linguagem paraconsistente de primeira ordem arbitrária, não especificada, cuja valoração subjacente seja uma **QmbC**-valoração. Em geral, a expressão “válida” será usada no lugar de “**QmbC**-válida”. Como de costume, $\Gamma \models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ indica que α é válida em toda estrutura em que cada $\gamma \in \Gamma$ é válida; $\models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ indica que α é válida.

2.3.3 Correção, modelos

A partir da definição de “validade”, é fácil verificar que a semântica proposta para **QmbC** é *correta*.

Teorema 18. *Todos os axiomas de **QmbC** são válidos, e as regras de inferência de **QmbC** preservam a validade.*

Demonstração. Serão desconsiderados os axiomas proposicionais e a regra *modus ponens*; os primeiros foram checados em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], e a validade da segunda é constatada exatamente como no caso clássico.

Seja \mathfrak{E} uma **QmbC**-estrutura arbitrária. Seja t um termo livre para x em φ e suponha-se que $I_{\mathfrak{E}}(\varphi[x/t] \rightarrow \exists x\varphi) = 0$. Então, $I_{\mathfrak{E}}(\varphi[x/t]) = 1$ e $I_{\mathfrak{E}}(\exists x\varphi) = 0$. Mas $I_{\mathfrak{E}}(\varphi[x/t]) = 1$ implica, pela cláusula 7 da 13, que $I_{\mathfrak{E}}(\exists x\varphi) = 1$. Isso prova que o axioma 12 é válido.

Seja t é um termo livre para x em φ e suponha-se que $I_{\mathfrak{E}}(\forall x\varphi \rightarrow \varphi[x/t]) = 0$. Então, $I_{\mathfrak{E}}(\forall x\varphi) = 1$ e $I_{\mathfrak{E}}(\varphi[x/t]) = 0$. Mas $I_{\mathfrak{E}}(\forall x\varphi) = 1$ implica, pela cláusula 8 da 13, que $I_{\mathfrak{E}}(\varphi[x/t]) = 1$. Isso prova que o axioma 13 é válido.

Suponha-se que $\alpha \rightarrow \beta$ é válida em \mathfrak{E} e que x não é livre em β . Suponha-se, por absurdo, que $I_{\mathfrak{E}}(\exists x\alpha \rightarrow \beta) = 0$. Então, $I_{\mathfrak{E}}(\exists x\alpha) = 1$ e $I_{\mathfrak{E}}(\beta) = 0$. Da primeira conclusão, $I_{\mathfrak{E}}(\alpha[x/t]) = 1$ para algum termo t em $L(\mathfrak{E})$; logo, $I_{\mathfrak{E}}(\alpha[x/t] \rightarrow \beta) = 0$. Mas isso está em contradição com a cláusula 1 da 17, porque $\alpha[x/t] \rightarrow \beta$ é uma \mathfrak{E} -instância de $\alpha \rightarrow \beta$.

Suponha-se que $\alpha \rightarrow \beta$ é válida em \mathfrak{E} e que x não é livre em α . Suponha-se, por absurdo, que $I_{\mathfrak{E}}(\alpha \rightarrow \forall x\beta) = 0$. Então, $I_{\mathfrak{E}}(\alpha) = 1$ e $I_{\mathfrak{E}}(\forall x\beta) = 0$. Logo, $I_{\mathfrak{E}}(\beta[x/t]) = 0$ para todo termo t em $L(\mathfrak{E})$. Portanto, $I_{\mathfrak{E}}(\alpha \rightarrow \beta[x/t]) = 0$. Mas isso também contradiz a cláusula 1 da 17, porque $\alpha \rightarrow \beta[x/t]$ é uma

\mathfrak{E} -instância de $\alpha \rightarrow \beta$. □

Corolário 19. (*Correção*) *Sejam L uma linguagem paraconsistente de primeira ordem, \mathfrak{A} uma pré-estrutura para L , \mathfrak{E} uma estrutura para L baseada em \mathfrak{A} e $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em $For_L^\circ(\mathfrak{A})$. Então, $\Gamma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$.*

Demonstração. Por indução sobre o comprimento de uma dedução de α a partir de Γ , como é usual. □

Definição 20. Seja Δ um conjunto de fórmulas em $For_L^\circ(\mathfrak{A})$ e \mathfrak{E} uma **QmbC**-estrutura para $L(\mathfrak{A})$ baseada em uma pré-estrutura \mathfrak{A} . Diz-se que \mathfrak{E} é um *modelo* de Δ se e somente se $\mathfrak{E}(\delta) = 1$ para toda $\delta \in \Delta$, e indica-se este fato por $\mathfrak{E} \models_{\mathbf{QmbC}} \Delta$.

Dada a cláusula 6 da 13, é óbvio que **QmbC** não admite modelos triviais:⁵ nenhum conjunto que contenha $\{\varphi, \neg\varphi, \circ\varphi\}$ tem modelo. Em geral, dada qualquer linguagem paraconsistente L , o conjunto For_L° não tem modelo. Essa observação não é insignificante. De fato, há lógicas paraconsistentes que admitem modelos triviais. Considere-se, por exemplo, a lógica proposicional que [Avron, 1991] denominou *Pac*, caracterizada pelas matrizes abaixo (1 e 1/2 são os valores designados):

\vee	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

\wedge	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

\rightarrow	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

	\neg
1	0
1/2	1/2
0	1

⁵Um modelo trivial é uma interpretação que valida todas as fórmulas (bem formadas) de determinada linguagem.

É fácil ver que, em Pac , para nenhuma fórmula α é o caso que $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$, para uma fórmula β arbitrária, isto é, Pac é uma lógica paraconsistente. Não obstante, tal lógica admite modelo trivial: considerando que toda função de verdade que recebe $1/2$ como *input* devolve $1/2$ como *output* e que $1/2$ é um valor designado, basta atribuir $1/2$ às variáveis proposicionais — neste caso, todas as fórmulas de Pac assumirão valor designado. Releva salientar que nenhuma das **LFI**'s estudadas na presente dissertação tem essa característica.

2.3.4 Extensões e conjuntos de Henkin

No intuito de provar a completude de **QmbC**, será preciso notar ainda alguns lemas e definições suplementares. Seja L uma linguagem paraconsistente de primeira ordem fixada.

Definição 21. Um conjunto de fórmulas $\Delta \subset For_L^\circ$ é dito *trivial em QmbC* se $\Delta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$, para qualquer $\alpha \in For_L^\circ$; do contrário Δ é não-trivial.

Definição 22. Seja $\Delta \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For_L° . Diz-se que Δ é *maximalmente não-trivial em QmbC* se Δ é não-trivial em **QmbC** e $\Delta \cup \{\alpha\}$ é trivial em **QmbC**, para qualquer fórmula $\alpha \in For_L^\circ$ tal que $\alpha \notin \Delta$.

Considerando-se as definições acima, pode-se usar o argumento de Lindenbaum a fim de se mostrar que qualquer conjunto não-trivial em **QmbC** pode ser estendido a um conjunto maximalmente não-trivial em **QmbC**.

Lema 23. *Seja $\Delta \subset For_L^\circ$ um conjunto não-trivial em QmbC. Então há um conjunto $\Gamma \supseteq \Delta$ maximalmente não-trivial em QmbC.*

Demonstração. Procede-se por indução transfinita. Seja uma cadeia Γ_α , α um ordinal qualquer, construída mediante o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Delta \\ \Gamma_{\alpha+1} &= \begin{cases} \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & \text{se } \Gamma_\alpha, \varphi_\alpha \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \psi, \text{ para qualquer } \psi \\ \Gamma_\alpha & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \Gamma_\alpha &= \bigcup_{\kappa < \alpha} \Gamma_\kappa, \text{ se } \alpha \text{ é um ordinal limite}\end{aligned}$$

Tome-se $\Gamma = \bigcup \Gamma_\alpha$. Se Γ fosse trivial, algum Γ_α o seria, mas $\Gamma_0 = \Delta$ é não-trivial pela hipótese do lema. Assuma-se, como hipótese de indução, que Γ_α é não-trivial. Se $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$, $\Gamma_{\alpha+1}$ é não-trivial; se $\Gamma_{\alpha+1} \neq \Gamma_\alpha$, então $\Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ não é trivial e, por construção, $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$. Se α é um ordinal limite, suponha-se que Γ_κ é não-trivial para todo $\kappa < \alpha$. Nesse caso, como $\Gamma_\alpha = \bigcup_{\kappa < \alpha} \Gamma_\kappa$, se Γ_α fosse trivial, algum Γ_κ o seria, o que contradiz a hipótese de indução. Ainda, Γ é maximalmente não-trivial: seja $\beta \notin \Gamma$. Uma tal β é igual a φ_α , para algum ordinal α . Logo, $\beta \notin \Gamma_{\alpha+1}$, uma vez que $\Gamma_{\alpha+1} \subseteq \Gamma$. Portanto, $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$, e $\Gamma_\alpha \cup \{\beta\}$ é trivial, por construção. Nesse caso, $\Gamma \cup \{\beta\}$ é trivial, pois $\Gamma_\alpha \cup \{\beta\} \subseteq \Gamma \cup \{\beta\}$. \square

Se L é uma linguagem paraconsistente de primeira ordem, ao serem acrescentados a L novos símbolos não-lógicos, por exemplo, símbolos de predicados e funções, ou constantes individuais, como no caso de uma extensão $L(\mathfrak{A})$ para uma dada pré-estrutura \mathfrak{A} , obtém-se uma linguagem L' que é denominada uma extensão de L . Se L' é uma extensão de L e \mathfrak{A}' é uma pré-estrutura para L' , está claro que, ao omitirem-se certas funções e predi-

cados de \mathfrak{A}' , obtém-se uma pré-estrutura \mathfrak{A} para L . Na esteira de Shoenfield (1967, p.43), essa pré-estrutura é chamada de *restrição* de \mathfrak{A}' para L e é designada por $\mathfrak{A}'|L$. Conversamente, \mathfrak{A}' é dita uma *expansão* de \mathfrak{A} para L' . Se \mathfrak{A}' é uma expansão de \mathfrak{A} , então $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}|$. Portanto, a mesma constante c é escolhida como nome de um mesmo indivíduo i em L e L' . Ainda, se \mathfrak{E}' é uma estrutura para L' baseada em \mathfrak{A}' , define-se a restrição $\mathfrak{E}'|L$ do mesmo modo: omitindo-se funções e predicados de \mathfrak{E}' . Nesse último caso, se v' é a valoração de \mathfrak{E}' , a valoração v de $\mathfrak{E}'|L$ é simplesmente a restrição de v' para as fórmulas de L . Ou seja, v' pode ser vista como uma extensão de v para as fórmulas de L' . Segue-se que $\mathfrak{E}'(\varphi) = \mathfrak{E}(\varphi)$ para toda fórmula φ de L .

Definição 24. Seja L uma linguagem paraconsistente de primeira ordem. Um conjunto Δ , cujas fórmulas têm como linguagem alguma extensão L' de L ,⁶ é um *conjunto de Henkin* se e somente se (i) para toda fórmula fechada $\exists x\varphi \in \Delta$, há um termo t de L' tal que $\exists x\varphi \rightarrow \varphi[x/t] \in \Delta$ e (ii) se $\varphi[x/t] \in \Delta$ para todo termo t de L' livre para x em φ , então $\forall x\varphi \in \Delta$.

A demonstração do próximo teorema requer o seguinte resultado:

Lema 25. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha \wedge (\beta \rightarrow \perp)$

Demonstração. Primeiramente, é óbvio que $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \alpha \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. É igualmente óbvio que $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \alpha \rightarrow \beta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. Logo, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. Como $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$ é uma tautologia da lógica positiva clássica, tem-se finalmente que $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$.

⁶Tipicamente, uma extensão via acréscimo de constantes. A fim de se manter a generalidade, considera-se que uma linguagem L é extensão dela mesma mediante o acréscimo do conjunto \emptyset de constantes.

Por outro lado, note-se que $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \alpha, \beta \vdash_{\mathbf{QmbC}} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp) \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$ e, portanto, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \alpha, \beta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp$. Também ocorre obviamente que $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \beta, \alpha \rightarrow \beta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp$. Logo, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp, \beta, \alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp$. Por conseguinte, aplicando-se o teorema da dedução: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \perp \vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta \rightarrow \perp$. \square

Teorema 26. *Se Δ é um conjunto de fórmulas de L não-trivial em \mathbf{QmbC} , então há um conjunto $\Gamma \supseteq \Delta$ de fórmulas de L' , para alguma extensão L' de L , tal que Γ é um conjunto de Henkin não-trivial em \mathbf{QmbC} .*

Demonstração. Utiliza-se do método de [Henkin, 1949]. Seja Δ_0 um conjunto que preenche as condições do teorema. Se as fórmulas de Δ_0 pertencem a uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L — que então será chamada $L(\Delta_0)$ —, sejam u_κ^α — α, κ ordinais — constantes que não pertencem a $L(\Delta_0)$. Se a linguagem das fórmulas do conjunto Δ_λ , a ser construído no parágrafo seguinte, está definida, constrói-se a linguagem do conjunto $\Delta_{\lambda+1}$ mediante o acréscimo das constantes u_κ^α . Se λ é ordinal limite e se $L(\Delta_\sigma)$ está construída para todo $\sigma < \lambda$, então $L(\Delta_\lambda) = \bigcup_{\sigma < \lambda} L(\Delta_\sigma)$. Por exemplo, a linguagem das fórmulas de Δ_1 será aquela obtida da de Δ_0 acrescentando-se as constantes u_κ^1 , e $L(\Delta_\omega) = \bigcup_{n < \omega} L(\Delta_n)$. Seja $L(\Delta_V)$ a linguagem que contém todas as constantes u_κ^α que aparecem em todas as $L(\Delta_\lambda)$, isto é, $L(\Delta_V) = \bigcup L(\Delta_\lambda)$.

A seguir, constrói-se uma cadeia Δ_λ de conjuntos cujas fórmulas têm linguagem $L(\Delta_\lambda)$ mediante o seguinte processo indutivo. Seja φ_κ^0 a κ -ésima fórmula de Δ_0 do tipo $\exists x\psi$. Então Δ_1 é o conjunto obtido de Δ_0 acrescentando-se (i) a fórmula $\varphi_\kappa^0 \rightarrow \psi[x/u_\kappa^1]$, para cada fórmula φ_κ^0 do tipo $\exists x\psi$ de Δ_0 e

toda constante u_κ^1 de $L(\Delta_1)$; e (ii) se $\varphi[x/t] \in \Delta_0$ para todo termo t de $L(\Delta_0)$ livre para x em φ , então $\forall x\varphi \in \Delta_1$. A fórmula $\exists x\psi \rightarrow \psi[x/u_\kappa^\alpha]$ é chamada de *fórmula especial* para a constante u_κ^α . Em geral, se o conjunto Δ_λ está construído e se φ_κ^λ é a κ -ésima fórmula de Δ_λ do tipo $\exists x\psi$, então $\Delta_{\lambda+1}$ é o conjunto obtido de Δ_λ acrescentando-se (i) a fórmula $\varphi_\kappa^\lambda \rightarrow \psi[x/u_\kappa^{\lambda+1}]$, para cada fórmula φ_κ^λ do tipo $\exists x\psi$ de Δ_λ e toda constante $u_\kappa^{\lambda+1}$ de $L(\Delta_{\lambda+1})$; e (ii) se $\varphi[x/t] \in \Delta_\lambda$ para todo termo t de $L(\Delta_\lambda)$ livre para x em φ , então $\forall x\varphi \in \Delta_{\lambda+1}$. Se λ é um ordinal limite e se Δ_σ está construído para todo $\sigma < \lambda$, então $\Delta_\lambda = \bigcup_{\sigma < \lambda} \Delta_\sigma$. Finalmente, postula-se $\Delta_V = \bigcup \Delta_\lambda$. Por construção, Δ_V é um conjunto de Henkin tal que $\Delta_0 \subseteq \Delta_V$.

Resta mostrar que Δ_V não é trivial em **QmbC**. Se fosse esse o caso, então $\Delta_V \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp_{\Delta_0}$ para alguma partícula *falsum* em $L(\Delta_0)$ e, portanto, em $L(\Delta_\lambda)$, para todo λ , já que $For_{L(\Delta_0)}^\circ \subseteq For_{L(\Delta_\lambda)}^\circ \subseteq For_{L(\Delta_V)}^\circ$. Como a prova de \perp_{Δ_0} a partir de premissas em Δ_V envolve apenas um número finito de fórmulas e, em particular, um número finito das fórmulas especiais para as constantes u_κ^α , ela será uma prova de \perp_{Δ_0} a partir de premissas em algum Δ_λ . Por conseguinte, basta mostrar que todo Δ_λ não é trivial, o que é feito por indução transfinita.

Suponha-se que Δ_λ não é trivial mas $\Delta_{\lambda+1} \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp_{\Delta_0}$. Por construção, $\Delta_{\lambda+1} = \Delta_\lambda \cup \{\exists x\psi \rightarrow \psi[x/u_\kappa^{\lambda+1}]\}$. Logo, $\Delta_\lambda \cup \{\exists x\psi \rightarrow \psi[x/u_\kappa^{\lambda+1}]\} \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp_{\Delta_0}$. Pelo teorema da dedução, $\Delta_\lambda \vdash_{\mathbf{QmbC}} (\exists x\psi \rightarrow \psi[x/u_\kappa^{\lambda+1}]) \rightarrow \perp_{\Delta_0}$. Pelo lema anterior, $\Delta_\lambda \vdash_{\mathbf{QmbC}} \exists x\psi \wedge (\psi[x/u_\kappa^{\lambda+1}] \rightarrow \perp_{\Delta_0})$. Assim, $\Delta_\lambda \vdash_{\mathbf{QmbC}} \psi[x/u_\kappa^{\lambda+1}] \rightarrow \perp_{\Delta_0}$. Como a constante $u_\kappa^{\lambda+1}$ é nova, segue-se que $\Delta_\lambda \vdash_{\mathbf{QmbC}} \psi[x] \rightarrow \perp_{\Delta_0}$ e, por introdução de existencial, $\Delta_\lambda \vdash_{\mathbf{QmbC}} \exists x\psi \rightarrow \perp_{\Delta_0}$. Mas $\exists x\psi \in \Delta_\lambda$, portanto $\Delta_\lambda \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp_{\Delta_0}$.

Se λ é um ordinal limite, suponha-se que Δ_σ não é trivial para todo $\sigma < \lambda$. Como $\Delta_\lambda = \bigcup_{\sigma < \lambda} \Delta_\sigma$, se Δ_λ é trivial, então, para algum σ , $\Delta_\sigma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \perp_{\Delta_0}$, em contradição com a hipótese. \square

Como é claro a partir da prova acima, se Δ é um conjunto não-trivial de fórmulas numa linguagem paraconsistente L , sua extensão não-trivial de Henkin Δ' tem linguagem L' , obtida de L mediante acréscimo de um conjunto enumerável de constantes individuais novas. Assim, sempre que um conjunto não-trivial de fórmulas for escrito em uma linguagem L (ou $L(\mathfrak{A})$, se se estiver considerando uma extensão de L para uma certa pré-estrutura \mathfrak{A}), a linguagem do conjunto que é sua extensão de Henkin será denotada por L_H (ou $L_H(\mathfrak{A})$, se for o caso). As demais notações são adaptações óbvias: $For^\circ_{L_H}$, $For^\circ_{L_H(\mathfrak{A})}$, $S^\circ_{L_H}$ etc.

Definição 27. Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For°_L , para uma dada linguagem L . Diz-se que Γ é *maximal relativamente a α* em \mathbf{QmbC} se $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ e, para qualquer fórmula β tal que $\beta \notin \Gamma$, tem-se que $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. Em tal caso, Γ também é dito *relativamente maximal* (a uma dada fórmula α).

Lema 28. *Seja $\Delta \cup \{\beta\}$ um conjunto de fórmulas de L tal que $\Delta \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$. Então há um conjunto $\Gamma \supseteq \Delta$ de fórmulas de L que é maximal relativamente a β em \mathbf{QmbC} .*

Demonstração. Proceda-se por indução transfinita. Seja uma cadeia Γ_α , α um ordinal qualquer, construída mediante o seguinte procedimento:

$$\Gamma_0 = \Delta$$

$$\Gamma_{\alpha+1} = \begin{cases} \Gamma_{\alpha} \cup \{\varphi_{\alpha}\} & \text{se } \Gamma_{\alpha}, \varphi_{\alpha} \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta \\ \Gamma_{\alpha} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Gamma_{\alpha} = \bigcup_{\kappa < \alpha} \Gamma_{\kappa}, \text{ se } \alpha \text{ é um ordinal limite}$$

Tome-se $\Gamma = \bigcup \Gamma_{\alpha}$. Por hipótese, $\Delta = \Gamma_0 \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$. Assuma-se, como hipótese de indução, que $\Gamma_{\alpha} \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$. Se $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_{\alpha}$, $\Gamma_{\alpha+1} \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$; se $\Gamma_{\alpha+1} \neq \Gamma_{\alpha}$, então $\Gamma_{\alpha} \cup \{\varphi_{\alpha}\} \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$ e, por construção, $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_{\alpha} \cup \{\varphi_{\alpha}\}$. Se α é um ordinal limite, suponha-se que $\Gamma_{\kappa} \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$ para todo $\kappa < \alpha$. Nesse caso, como $\Gamma_{\alpha} = \bigcup_{\kappa < \alpha} \Gamma_{\kappa}$, se $\Gamma_{\alpha} \vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$, a prova de β a partir de Γ_{α} , por envolver apenas um número finito de fórmulas, seria uma prova de β a partir de premissas em Γ_{κ} , para algum κ , o que contradiz a hipótese de indução. Ainda, Γ é maximal relativamente a β : seja $\delta \notin \Gamma$. Uma tal δ é igual a φ_{α} , para algum ordinal α . Logo, $\delta \notin \Gamma_{\alpha+1}$, uma vez que $\Gamma_{\alpha+1} \subseteq \Gamma$. Portanto, $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_{\alpha}$, e $\Gamma_{\alpha} \cup \{\delta\} \vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$, por construção. Nesse caso, $\Gamma \cup \{\delta\} \vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$, pois $\Gamma_{\alpha} \cup \{\delta\} \subseteq \Gamma \cup \{\delta\}$. \square

Lema 29. *Seja L uma linguagem paraconsistente de primeira ordem qualquer. Todo conjunto de fórmulas de L que é maximal relativamente a uma dada fórmula α arbitrária é uma teoria fechada.⁷*

Demonstração. Dado um conjunto de fórmulas Δ maximal relativamente a uma fórmula α , é preciso mostrar que $\Delta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$ se e somente se $\beta \in \Delta$. Da direita para a esquerda, o resultado é óbvio, por reflexividade da relação de

⁷Se Γ é um conjunto de fórmulas e se Δ é o conjunto das fórmulas que são consequência de Γ (em determinada lógica), então Γ é uma teoria fechada se e somente se $\Gamma = \Delta$. Cf. [Tarski, 1930], p.33, em que teorias fechadas são chamadas de *sistemas dedutivos*.

consequência sintática. Da esquerda para a direita, dado algum $\beta \notin \Delta$, tem-se que (a) $\Delta \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ e (b) $\Delta, \beta \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$, pois Δ é maximal relativamente a α . Então, de (a) e (b) conclui-se que $\Delta \not\vdash_{\mathbf{QmbC}} \beta$, pois a relação de consequência sintática de **mbC** (e de **QmbC**) é construída de tal maneira a respeitar a regra do corte (Cf. [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], p. 6, de onde a prova foi retirada). \square

Juntos, o lema 23 e o teorema 26 garantem que, para qualquer linguagem paraconsistente de primeira ordem L , todo conjunto de fórmulas de L que não seja trivial em **QmbC** pode ser estendido a um conjunto de Henkin maximalmente não-trivial em **QmbC**. Se o lema 28 for empregado no lugar do lema 23, tem-se que um conjunto de fórmulas relativamente maximal a uma dada fórmula em **QmbC** (e, portanto, não-trivial) pode ser estendido a um conjunto de Henkin maximal relativamente à mesma fórmula dada. O lema a seguir elenca algumas propriedades importantes de conjuntos maximais de Henkin em **QmbC**.

Lema 30. *Seja Δ um conjunto de Henkin maximal relativamente a uma fórmula α em **QmbC**. Então:*

- (i) $(\beta \wedge \gamma) \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ e $\gamma \in \Delta$;
- (ii) $(\beta \vee \gamma) \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;
- (iii) $(\beta \rightarrow \gamma) \in \Delta$ sse $\beta \notin \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;
- (iv) $\beta \notin \Delta$ implica $\neg\beta \in \Delta$;
- (v) $\beta \circ \gamma \in \Delta$ implica $\beta \notin \Delta$ ou $\neg\beta \notin \Delta$;

(vi) $\exists x\varphi \in \Delta$ sse $\varphi[x/t] \in \Delta$ para algum termo t de $L_H(\mathfrak{A})$ livre para x em φ ;

(vii) $\forall x\varphi \in \Delta$ sse $\varphi[x/t] \in \Delta$ para todo termo t de $L_H(\mathfrak{A})$ livre para x em φ .

(viii) Se φ é variante de ψ , então $\varphi \in \Delta$ implica $\psi \in \Delta$.

Demonstração. O item (i) é consequência do fechamento de Δ (lema anterior), axiomas 3, 4 e 5 e *modus ponens*. O item (ii) é consequência do fechamento de Δ , axiomas 6, 7 e 8 e *modus ponens*. O item (iii) é consequência do fechamento de Δ , item (ii), axiomas 1 e 9 e *modus ponens*. O item (iv) é consequência do fechamento de Δ , axioma 10 e *modus ponens*. Com relação ao item (v), suponha-se que $\beta \in \Delta$ e $\neg\beta \in \Delta$; logo, pelo fechamento e maximalidade relativa de Δ e axioma 11, conclui-se que $\circ\beta \notin \Delta$. Os itens (vi) e (vii) são consequências do fechamento de Δ , definição de conjunto de Henkin, axiomas 12 e 13 e *modus ponens*. O item (viii) segue-se do axioma 14, *modus ponens* e do fechamento de Δ . \square

2.3.5 Completude da semântica proposta

Agora está-se em condições de provar o principal resultado deste capítulo. Dado um conjunto Δ não-trivial, será fornecido um método para obter-se um modelo para Δ . Mostra-se em seguida que a completude de **QmbC** segue-se desse resultado. O método utilizado na obtenção de um modelo para Δ será o método de [Henkin, 1949]. A idéia de Henkin é escolher uma estrutura que tenha como domínio os próprios termos fechados (sem variáveis) de $L(\Delta)$ (ou de uma extensão de $L(\Delta)$, caso esta não tenha um

número suficiente de termos) e deixar que os teoremas de Δ digam o que será verdadeiro relativamente a esses termos, vistos como indivíduos do domínio. Ou seja, aos termos fechados (entidades sintáticas) atribuem-se eles mesmos como denotação (num sistema interpretado), e como extensão de um símbolo P de predicado são selecionadas as n -uplas i_1, \dots, i_n de indivíduos do domínio conforme $P(i_1, \dots, i_n) \in \Delta$. Uma estrutura construída da maneira indicada é chamada de *estrutura canônica* em [Shoenfield, 1967], p. 44.

Teorema 31. *Usando-se a função característica de um conjunto de Henkin Δ , relativamente maximal em \mathbf{QmbC} , pode-se definir uma pré-estrutura \mathfrak{B} para $L(\Delta)$ e uma \mathbf{QmbC} -valoração v_H baseada em \mathfrak{B} tal que $v_H(\delta) = 1$ para toda $\delta \in \Delta$.*

Demonstração. Uma pré-estrutura \mathfrak{B} para $L(\Delta)$ e uma \mathbf{QmbC} -valoração v_H baseada em \mathfrak{B} são construídas do seguinte modo. O domínio $|\mathfrak{B}|$ de \mathfrak{B} é composto por todas as constantes individuais de $L(\Delta)$, que por construção tem um conjunto enumerável delas. Para toda constante individual c de $L(\Delta)$, define-se $\mathfrak{B}(c) = c$. Para todo símbolo funcional n -ário f , $n \geq 1$, e para todos os termos fechados t_1, \dots, t_n de $L(\Delta)$, define-se $f_{I_{\mathfrak{B}}}(I_{\mathfrak{B}}(t_1), \dots, I_{\mathfrak{B}}(t_n)) = f(t_1, \dots, t_n)$. Para cada símbolo de predicado n -ário P de $L(\Delta)$, define-se o predicado $P_{I_{\mathfrak{B}}}$ como sendo o conjunto de todas as n -uplas $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ tais que $P(t_1, \dots, t_n) \in \Delta$. É imediato notar que, pela definição de cada predicado $P_{I_{\mathfrak{B}}}$ em \mathfrak{B} , $\Delta \vdash_{\mathbf{QmbC}} P(t_1, \dots, t_n)$ se e somente se $P(t_1, \dots, t_n) \in \Delta$ (pois Δ é uma teoria fechada), se e somente se $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P_{I_{\mathfrak{B}}}$ (pela definição do predicado $P_{I_{\mathfrak{B}}}$). Como, de acordo com a cláusula 1 da 13, $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P_{I_{\mathfrak{B}}}$ se e somente se $v(P(t_1, \dots, t_n)) = 1$, conclui-se que, para toda fórmula atômica $\varphi = P(t_1, \dots, t_n) \in \Delta$, $v_H(\varphi) = 1$.

Resta definir v_H para todas as fórmulas de Δ . Se φ tem complexidade n e $v_H(\varphi)$ está definida, define-se $v_H(\varphi') = 1$ se e somente se $\varphi' \in \Delta$, para qualquer φ' de complexidade $n + 1$. Como Δ é um conjunto de Henkin relativamente maximal, pelo 30 v_H assim definida satisfaz todas as cláusulas da 13. \square

Corolário 32. *A estrutura $\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{B}, v_H \rangle$ é um modelo de Δ .*

Demonstração. Imediata. \square

Teorema 33. (*Completeness*) $\Gamma \models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \alpha$.

Demonstração. Sejam α e Γ tais que $\Gamma \not\models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. Pelo 26 e 28, pode-se estender Γ a um conjunto Γ^* de Henkin relativamente maximal com respeito a α em \mathbf{QmbC} . Como $\Gamma^* \not\models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$, então $\alpha \notin \Gamma^*$. Pelo 31, pode-se construir uma pré-estrutura \mathfrak{B} e uma \mathbf{QmbC} -valoração v_H baseada em \mathfrak{B} tal que a estrutura $\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{B}, v_H \rangle$ é um modelo de Γ^* e, demais disso, $v_H(\varphi) = 1$ se, e somente se, $\varphi \in \Gamma^*$. Portanto, $\mathfrak{H} \models_{\mathbf{QmbC}} \Gamma^*$ e, em particular, $\mathfrak{H} \models_{\mathbf{QmbC}} \Gamma$; mas $\mathfrak{H} \not\models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. E isso significa que $\Gamma \not\models_{\mathbf{QmbC}} \alpha$. \square

Capítulo 3

O caso geral: uma semântica para as LIFs

QmbC é uma **LIF** bastante simples. Como foi dito, ela pode ser vista como uma **LIF** “fundamental”: uma lógica que mantém todos os esquemas válidos da lógica positiva clássica. Uma maneira natural de obter lógicas mais complexas é acrescentar axiomas que lidem, por exemplo, com negações duplas ou com a “propagação” da consistência de fórmulas atômicas para fórmulas complexas. Por intermédio de uma combinação de tais tipos de axiomas, consegue-se uma rica variedade de cálculos paraconsistentes com propriedades interessantes, tais como a definição de uma relação de congruência não-trivial entre fórmulas e a interdefinição de alguns conectivos proposicionais em certos casos.¹

Neste capítulo apresentarei alguns dos esquemas que podem ser acrescentados à axiomática de **QmbC**, gerando uma classe de **LIFs**. Cada um destes

¹Ver, a propósito, a lógica denominada **Cio** em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007].

esquemas determinará uma cláusula a ser adicionada à definição de **QmbC**-valoração (Definição 13). Cada valoração assim determinada acarretará, por sua vez, uma modificação no conceito de **QmbC**-estrutura (Definição 16), do que resultará uma semântica que se provará completa todas as lógicas definidas axiomáticamente a seguir.

3.1 Extensões de QmbC

Considerem-se os esquemas abaixo:

- (1) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
- (2) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
- (3) $\circ(\neg\varphi)$
- (4) $\circ(\varphi\#\psi)$
- (5) $\neg(\circ\varphi) \rightarrow \varphi$
- (6) $\neg(\circ\varphi) \rightarrow \neg\varphi$
- (7) $\circ\varphi \vee \varphi$
- (8) $\circ\varphi \vee \neg\varphi$
- (9) $\circ\varphi \rightarrow \circ(\neg\varphi)$
- (10) $(\circ\varphi \vee \circ\psi) \rightarrow \circ(\varphi\#\psi)$
- (11) $(\circ\varphi \wedge \circ\psi) \rightarrow \circ(\varphi\#\psi)$
- (12) $\forall x(\circ\varphi) \rightarrow \circ(Qx\varphi)$
- (13) $\exists x(\circ\varphi) \rightarrow \circ(Qx\varphi)$
- (14) $\circ(Qx\varphi)$

Ao aditarem-se um ou mais esquemas de 1 a 14 aos axiomas de **QmbC**, o resultado é uma nova **LIF**, dita definida a partir de **QmbC** (via acréscimo de certos esquemas 1-14). Cada **LIF** obtida dessa maneira será denotada por $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$, $n \geq 1$, tal que $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ é uma ênupla composta pelos números de 1 a 14, em ordem crescente, de acordo com quais axiomas forem acrescentados a **QmbC**. Por exemplo, $\mathbf{Q}_{\langle 1, 14 \rangle} \mathbf{mbC}$ indica que os esquemas (1) e (14) foram acrescentados aos axiomas de **QmbC**, e $\mathbf{Q}_{\langle 1, 2, 11 \rangle} \mathbf{mbC}$, que os esquemas (1), (2) e (11) o foram.

Os axiomas de 10 a 13 dizem respeito à questão da “propagação da consistência”. O axioma 11 significa que, se duas fórmulas são consistentes, então todas as fórmulas complexas compostas a partir dessas duas também o são. Nesse sentido, ele se relaciona ao axioma 12, cujo significado é: se toda instância de uma determinada fórmula φ é consistente, então a consistência de $Qx\varphi$ é garantida ($Q \in \{\exists, \forall\}$). O caráter intuitivo desses dois axiomas salta aos olhos: tudo que é composto de partes consistentes forma uma totalidade consistente. Os axiomas 10 e 13 mantêm entre si uma relação semelhante. O 10 pode ser lido da seguinte maneira: se ao menos uma entre duas fórmulas é consistente, então toda fórmula complexa composta a partir dessas duas também o é. E o 13 lê-se: se ao menos uma instância de uma determinada fórmula φ é consistente, então a consistência de $Qx\varphi$ é garantida ($Q \in \{\exists, \forall\}$). Essa última dupla de axiomas não tem um caráter intuitivo, como a primeira. É considerada aqui porque seu tratamento é tão simples quanto os outros, e não se deve excluí-la com base unicamente em critério de “intuitividade”.

3.2 Valorações e estruturas para as LIFs de primeira ordem

Na construção de uma semântica correta e completa para todos os cálculos $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$, os conceitos de **QmbC**-valoração e de **QmbC**-estrutura precisam ser refinados. A definição de **QmbC**-valoração é estendida tendo-se em vista as seguintes cláusulas:

- (1) $v(\varphi) = 1 \Rightarrow v(\neg\neg\varphi) = 1$
- (2) $v(\neg\neg\varphi) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1$
- (3) $v(\circ(\neg\varphi)) = 1$
- (4) $v(\circ(\varphi\#\psi)) = 1$
- (5) $v(\neg(\circ\varphi)) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1$
- (6) $v(\neg(\circ\varphi)) = 1 \Rightarrow v(\neg\varphi) = 1$
- (7) $v(\circ\varphi) = 1$ ou $v(\varphi) = 1$
- (8) $v(\circ\varphi) = 1$ ou $v(\neg\varphi) = 1$
- (9) $v(\circ\varphi) = 1 \Rightarrow v(\circ(\neg\varphi)) = 1$
- (10) $v((\circ\varphi \vee \circ\psi)) = 1 \Rightarrow v(\circ(\varphi\#\psi)) = 1$
- (11) $v((\circ\varphi \wedge \circ\psi)) = 1 \Rightarrow v(\circ(\varphi\#\psi)) = 1$
- (12) $v(\forall x(\circ\varphi)) = 1 \Rightarrow v(\circ(Qx\varphi)) = 1$
- (13) $v(\exists x(\circ\varphi)) = 1 \Rightarrow v(\circ(Qx\varphi)) = 1$
- (14) $v(\circ(Qx\varphi)) = 1$

Com relação à lista acima, diz-se que a cláusula n é a *cláusula correspondente* ao axioma n , $1 \leq n \leq 14$. Como qualquer cálculo $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ tem,

como linguagem subjacente, uma linguagem paraconsistente L , os conceitos de pré-estrutura e de linguagem estendida são exatamente como no Capítulo 2. De ora em diante, uma linguagem paraconsistente L será pressuposta fixa, isto é, a linguagem de todos os cálculos $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ têm um número particular de símbolos de função e predicado de aridade n (cf. Definição 1).

Definição 34. Seja $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ uma LIF definida a partir de \mathbf{QmbC} e sejam L , \mathfrak{A} e $I_{\mathfrak{A}}$ tais como na Definição 13. Uma $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração baseada em \mathfrak{A} é exatamente como uma \mathbf{QmbC} -valoração, exceto que a esta são acrescentadas as cláusulas entre 1 e 14 correspondentes aos axiomas que aparecem como coordenadas de $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$.

Definição 35. Uma $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -estrutura — ou simplesmente estrutura, quando não houver risco de confusão — para uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L , é um par $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{A}, v \rangle$, tal que \mathfrak{A} é uma pré-estrutura para L e v é uma $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração — ou simplesmente valoração, se não houver risco de desentendimento — baseada em \mathfrak{A} .

Se \mathfrak{E} é uma $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -estrutura para L baseada em uma pré-estrutura \mathfrak{A} , um valor de verdade $I_{\mathfrak{E}}(\varphi)$ para cada fórmula fechada φ de L é definido à maneira do capítulo anterior:

$$I_{\mathfrak{E}}(\varphi) = v(\varphi)$$

tal que v é a $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração de $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{A}, v \rangle$.

3.3 Validade e correção para as LIFs de primeira ordem

Recorde-se a definição de uma \mathfrak{E} -instância de φ .

Definição 36. Uma fórmula φ de uma linguagem paraconsistente de primeira ordem L é:

1. $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -válida na estrutura \mathfrak{E} — se $I_{\mathfrak{E}}(\varphi') = 1$ para toda \mathfrak{E} -instância φ' de φ ;
2. $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -válida na pré-estrutura \mathfrak{A} — se φ é válida em qualquer estrutura \mathfrak{E} baseada em \mathfrak{A} ;
3. $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -válida — se φ é válida em qualquer estrutura \mathfrak{E} para L (neste caso, obviamente, φ é válida em qualquer pré-estrutura \mathfrak{A} para L).

Mais uma vez, quando um cálculo $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ estiver sob consideração, dir-se-á, quando o sentido for claro pelo contexto, “estrutura” e “válida” em vez de “ $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -estrutura” e “ $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -válida”.

Teorema 37. Se $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ é uma **LIF** definida a partir de $Q\mathbf{mbC}$, todos os seus axiomas são válidos.

Demonstração. Consequência óbvia das definições. É suficiente checar a validade de cada axioma de $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$. Considerarei apenas o caso em que $Q_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ é $Q_{\langle 2, 3, 12 \rangle} \mathbf{mbC}$, ou seja, $Q\mathbf{mbC}$ acrescido dos axiomas 2, 3 e 12.

Seja \mathfrak{E} uma $\mathbf{Q}_{\langle 2,3,12 \rangle} \mathbf{mbC}$ -estrutura arbitrária para L . Suponha-se que o axioma (2) não é válido. Então, $v(\neg\neg\varphi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$, em contradição com a cláusula 2 da definição de $\mathbf{Q}_{\langle 2,3,12 \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração. Suponha-se inválido o axioma 12. Segue-se que $v(\forall x(\circ\varphi)) = 1$ e $v(\circ(Qx\varphi)) = 0$, em contradição com a cláusula 12 da definição de $\mathbf{Q}_{\langle 2,3,12 \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração. Da mesma maneira, checka-se a validade do axioma 3 (e de todos os outros e suas combinações). \square

Corolário 38. (*Correção*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$ implica $\Gamma \models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$.

Demonstração. Por indução sobre o comprimento da dedução de α a partir de Γ . \square

3.4 Completude da semântica proposta

Recordem-se as definições de conjunto de Henkin e conjunto maximal (relativamente a uma dada fórmula) em \mathbf{QmbC} (Definições 24 e 27). A definição de conjunto maximal (relativamente a uma dada fórmula) em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ é o obviamente esperado: diz-se que Δ é maximal relativamente a α em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ se $\Delta \not\vdash_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$ e $\Delta \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$ para qualquer $\beta \notin \Delta$. A demonstração de que conjuntos maximais em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ são teorias fechadas é idêntica à do capítulo anterior (Lema 29). Além disso, dado um conjunto de fórmulas qualquer não-trivial em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$, demonstra-se que ele pode ser estendido a um conjunto maximal de Henkin, cuja linguagem possui um conjunto enumerável de constantes individuais.

Lema 39. *Seja Δ um conjunto de Henkin maximal relativamente a uma fórmula α em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$. Então, além das propriedades (i)-(viii) do Lema*

30, Δ possui as características 1-14 abaixo indicadas, conforme 1... 14 ocorreram em $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$:

- (1) $\varphi \in \Delta \Rightarrow \neg\neg\varphi \in \Delta$
- (2) $\neg\neg\varphi \in \Delta \Rightarrow \varphi \in \Delta$
- (3) $\circ(\neg\varphi) \in \Delta$
- (4) $\circ(\varphi\#\psi) \in \Delta$
- (5) $\neg(\circ\varphi) \in \Delta \Rightarrow \varphi \in \Delta$
- (6) $\neg(\circ\varphi) \in \Delta \Rightarrow \neg\varphi \in \Delta$
- (7) $\circ\varphi \in \Delta$ ou $\varphi \in \Delta$
- (8) $\circ\varphi \in \Delta$ ou $\neg\varphi \in \Delta$
- (9) $\circ\varphi \in \Delta \Rightarrow \circ(\neg\varphi) \in \Delta$
- (10) $(\circ\varphi \wedge \circ\psi) \in \Delta \Rightarrow \circ(\varphi\#\psi) \in \Delta$
- (11) $(\circ\varphi \wedge \circ\psi) \in \Delta \Rightarrow \circ(\varphi\#\psi) \in \Delta$
- (12) $\forall x(\circ\varphi) \in \Delta \Rightarrow \circ(Qx\varphi) \in \Delta$
- (13) $\exists x(\circ\varphi) \in \Delta \Rightarrow \circ(Qx\varphi) \in \Delta$
- (14) $\circ(Qx\varphi) \in \Delta$

Demonstração. Conseqüências do fechamento de Δ , dos axiomas 1-14 constantes em $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ e *modus ponens*. □

Teorema 40. Usando-se a função característica de um conjunto de Henkin Δ , relativamente maximal em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$, pode-se definir uma pré-estrutura \mathfrak{B} para $L(\Delta)$ e uma $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração v_H baseada em \mathfrak{B} tal que $v_H(\delta) = 1$ para toda $\delta \in \Delta$.

Demonstração. Idêntica à do Teorema 31. □

Corolário 41. *A estrutura $\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{B}, v_H \rangle$ é um modelo de Δ .*

Teorema 42. *(Completeness) $\Gamma \models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$.*

Demonstração. Sejam α e Γ tais que $\Gamma \not\models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$. Pode-se estender Γ a um conjunto Γ^* de Henkin relativamente maximal com respeito a α em $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$. Como $\Gamma^* \not\models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$, então $\alpha \notin \Gamma^*$. Pelo Teorema 40, pode-se construir uma pré-estrutura \mathfrak{B} e uma $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$ -valoração v_H baseada em \mathfrak{B} tal que a estrutura $\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{B}, v_H \rangle$ é um modelo de Γ^* e, demais disso, $v_H(\varphi) = 1$ se, e somente se, $\varphi \in \Gamma^*$. Portanto, $\mathfrak{H} \models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \Gamma^*$ e, em particular, $\mathfrak{H} \models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \Gamma$; mas $\mathfrak{H} \not\models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$. E isso significa que $\Gamma \not\models_{\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}} \alpha$. \square

Conclusão

Historicamente, sistemas lógicos têm sido apresentados de maneira sintática; interpretações semânticas costumam vir depois. Com relação à lógica clássica de predicados, basta notar os anos que separam as obras de Frege e Tarski; com relação à lógica modal, é suficiente lembrar o hiato que separa a obra de Lewis e Langford da semântica modal de Kripke. No que tange à lógica paraconsistente, seu decurso não foi diverso.² Ao fornecer uma semântica correta e completa para as Lógicas da Inconsistência Formal quantificadas, o Autor tem a esperança de ter contribuído para a pesquisa sobre paraconsistência. Como se viu, adotou-se uma abordagem substitucional dos quantificadores.

Os manuais de lógica, em geral, tratam a teoria de modelos após o estabelecimento da completude da lógica de predicados de primeira ordem. Essa sequência sugere-se por si mesma: como a matemática corrente pode ser formalizada em linguagem de primeira ordem,³ uma vez demonstrada a completude da lógica, passa-se, em seguida, ao estudo geral das estruturas caracterizadas por certos axiomas não-lógicos: as chamadas teorias de primeira ordem, como a teoria formalizada dos grupos ou a dos corpos. A completude

²Cf. Introdução e Seção 1.2.

³Em particular, os axiomas de ZFC podem ser escritos em primeira ordem.

da lógica clássica de primeira ordem garante que os teoremas de uma teoria de primeira ordem T serão exatamente aquelas fórmulas válidas em todos os modelos de T .

As linhas precedentes da dissertação que ora se encerra, ao formularem uma semântica completa para todas as lógicas paraconsistentes de primeira ordem apresentadas aqui, apontam para o desenvolvimento de uma teoria de modelos baseada em tais lógicas. [Béziau, 1998], quando lista prováveis tópicos de pesquisa futura no domínio da paraconsistência, sugere nominalmente a teoria de modelos como uma área ainda por ser desenvolvida. Pode-se definir uma teoria paraconsistente de primeira ordem T , cuja linguagem seria elaborada como na Definição 1 e cujos axiomas lógicos poderiam ser os de **QmbC** ou de qualquer outra lógica definida a partir de **QmbC**, à maneira do Capítulo 3. Em seguida, seria feito um estudo sistemático das estruturas caracterizadas por teorias assim constituídas, analisando-se os pontos de acordo e diferença face às teorias clássicas de primeira ordem. [Meyer e Mortensen, 1984 e 1987] iniciaram um estudo de estruturas inconsistentes. No trabalho de 1984, estudam eles certas teorias cujos axiomas não-lógicos são axiomas para a aritmética, com indução e possivelmente regra ômega, e que têm como lógica subjacente uma lógica relevante.

Uma continuação natural do presente trabalho é proceder à investigação de teorias de primeira ordem que tenham como lógicas subjacentes aquelas estudadas aqui. Um ponto de partida modesto seria estender a definição de linguagem com um predicado de igualdade. Outro prolongamento espontâneo é a pesquisa de lógicas paraconsistentes de ordens superiores e a construção de uma teoria paraconsistente de conjuntos. [da Costa, Béziau e Bueno, 1998]

iniciaram a investigação de uma variedade de teorias de conjuntos assentadas sobre C_1^- , como o sistema ali chamado NF_1 , qual seja, uma teoria cujos axiomas lógicos são os de C_1^- e que tem como axiomas não-lógicos aqueles da teoria NF de [Quine, 1937]. Seria de interesse estudar teorias de conjuntos formalizadas em linguagem paraconsistente de primeira ordem e que tenham, como lógica subjacente, alguma **LFI** dentre as definidas no presente estudo. Importaria analisar, então, as implicações que isso teria sobre, por exemplo, o Paradoxo de Russell, um axioma de separação irrestrito e, talvez, um possível *conjunto* de todos os conjuntos, já que tais lógicas suportam contradições.⁴

Assim, uma vez que se dispõe de uma semântica correta e completa para **QmbC** e para todos os cálculos $\mathbf{Q}_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle} \mathbf{mbC}$, encontra-se pavimentado o caminho para o desenvolvimento dos temas mencionados nos parágrafos desta Conclusão. Espera-se que a futura perquisição desses temas possa encontrar eco entre todos aqueles interessados no desenvolvimento técnico da lógica paraconsistente.

⁴Note-se que a última frase menciona um conjunto de todos os conjuntos, uma noção contraditória, e não uma classe própria, como em NBG. [da Costa, Béziau e Bueno, 1998] esboçam algumas dessas implicações. Releva analisá-las em detalhe e no contexto mais geral das **LFIs**.

Referências

[Alves, 1984] E. Alves. Paraconsistent logic and model theory. *Studia Logica*, vol.42, n.1-2, 1984.

[Avron, 1991] A. Avron. Natural 3-valued logics – characterization and proof theory. *The Journal of Symbolic Logic*, vol.56, n.1, 1991.

[Avron e Zamansky, s.d.] A. Avron e A. Zamansky. Many-valued non-deterministic semantics for first-order logics of formal (in)consistency. Inédito.

[Béziau, 1998] J.-Y. Béziau. A lógica paraconsistente: história de uma revolução conceitual. In.: [da Costa, Béziau e Bueno, 1998].

[Carnielli, 1990] W. A. Carnielli. Possible-translations semantics for paraconsistent logics. In.: D. Batens et al. (eds.) *Frontiers of paraconsistent logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, Logic and Computation Series, Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 1990.

[Carnielli e Coniglio, 2005] W. A. Carnielli e M. E. Coniglio. Splitting logics. In.: S. Artemov et al. (eds.) *We will show them! Essays in honour of Dov Gabbay*, vol.1, College Publications, 2005.

[Carnielli e Marcos, 2002] W. A. Carnielli e J. Marcos. A taxonomy of C-systems. In.: W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e I. M. L. D'Ottaviano (eds.), *Paraconsistency – the logical way to the inconsistent, Lecture notes in pure and applied mathematics*, vol. 228. Nova York: Marcel Dekker, 2002.

[Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio e J. Marcos. Logics of formal inconsistency. In.: D. Gabbay e F. Guenther (eds.), *Handbook of philosophical logic*, 2ed., vol.14. Springer, 2007.

[da Costa, 1963] N. C. A. da Costa. Sistemas formais inconsistentes. Tese de doutorado. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1963.

[da Costa e Alves, 1977] N. C. A. da Costa e E. Alves. A semantical analysis of the calculi C_n . *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.18, n.4, 1977.

[da Costa e Dubikajtis, 1968] N. C. A. da Costa e L. Dubikajtis. Sur la logique discursive de Jaskowski. Bulletin – Académie polonaise des sciences, v. 15, 1968.

[da Costa, Béziau e Bueno, 1998] N. C. A. da Costa, J.-Y. Béziau e O.

Bueno. *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – Universidade Estadual de Campinas. Coleção CLE, vol. 23, 1998.

[D'Ottaviano, 1982] I. M. L. D'Ottaviano. Sobre uma teoria de modelos trivalente. Tese de doutorado apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas, sob orientação do Prof. Dr. N. C. A. da Costa. Campinas, 1982.

[D'Ottaviano e da Costa, 1970] I. M. L. D'Ottaviano e N. C. A. da Costa. Sur une problème de Jaśkowski. *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 270A, 1970.

[Dunn e Belnap, 1968] J. M. Dunn e N. D. Belnap. The substitution interpretation of the quantifiers. *Noûs*, vol.2, n.2, maio, 1968.

[Gödel, 1930] K. Gödel. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. In.: J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic – 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967. Texto originalmente publicado em 1930 sob o título “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, n.37.

[Goldfarb, 1979]. W. Goldfarb. Logic in the Twenties: the nature of the

quantifier. *Journal of Symbolic Logic*, vol.44, n.3, setembro, 1979.

[Henkin, 1949] L. Henkin. The completeness of the first-order functional calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, vol.14, n.3, setembro, 1949.

[Kleene, 1952] S. C. Kleene. *Introduction to metamathematics*. Nova York: D. van Nostrand Company, 1952.

[Leblanc, 2001] H. Leblanc. Alternatives to standard first-order semantics. In.: D. Gabbay e F. Guenther (eds.), *Handbook of philosophical logic*, vol.2, 2ed., Dordrecht: Kluwer, 2001.

[Marcos, 1999] J. Marcos. Semânticas de traduções possíveis. Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação em Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da Universidade Estadual de Campinas, sob orientação do Prof. Dr. W. A. Carnielli. Campinas, 1999.

[Marcus, 1962] R. B. Marcus. Interpreting quantification. *Inquiry*, V, 1962.

[Mendelson, 1964] E. Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. Londres: Chapman & Hall, 1964.

[Meyer e Mortensen, 1984] R. K. Meyer e C. Mortensen. Inconsistent models for relevant arithmetics. *The Journal of Symbolic Logic*, vol.49, n.3, setembro, 1984.

[Meyer e Mortensen, 1987] R. K. Meyer e C. Mortensen. Inconsistent non-standard arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, vol.52, n.2, junho, 1987.

[Parsons, 1971] C. Parsons. A plea for substitutional quantification. *The Journal of Philosophy*, vol.68, n.8, abril, 1971.

[Quine, 1937] W. O. Quine. New foundations for mathematical logic. In.: W. O. Quine. *From a logical point of view*. Harper and Row, 1953. Originalmente publicado em *American Mathematical Monthly*, n.44, 1937.

[Shoenfield, 1967] J. R. Shoenfield. *Mathematical logic*. Reading: Addison-Wesley, 1967.

[Smullyan, 1968] R. Smullyan. *First-order logic*. Nova York: Springer, 1968.

[Tarski, 1930] A. Tarski. On some fundamental concepts of metamathematics. In.: A. Tarski. *Logic, semantics, metamathematics*. 2ed. Indianápolis: Hackett Publishing Company, 1983. Texto originalmente publicado em 1930 sob o título “Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik”, *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol.23.

[Tarski, 1933] A. Tarski. The concept of truth in formalized languages. In.: A. Tarski. *Logic, semantics, metamathematics*. 2ed. Indianápolis: Hackett

Publishing Company, 1983. Texto originalmente publicado em 1933 sob o título “Pojecie prawdy w językach nauk dedukcyjnych”, Varsóvia (não consta editora).

[Woleński, 1989] J. Woleński. *Logic and philosophy in the Lvov-Warsaw school*. Dordrecht: Kluwer, 1989.