



ALEX CALAZANS

**George Berkeley e o problema da inteligibilidade dos
objetos matemáticos**

CAMPINAS

2014



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

ALEX CALAZANS

George Berkeley e o problema da inteligibilidade dos objetos matemáticos

Orientadora: Profa. Dra. Fátima Regina Rodrigues Évora

**Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Filosofia e Ciências
Humanas, para obtenção do Título de
Doutor em Filosofia.**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À
VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO ALEX
CALAZANS E ORIENTADA PELA
PROF^a DR^a FÁTIMA R. R. ÉVORA.**

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/338

C125g Calazans, Alex, 1978-
George Berkeley e o problema da inteligibilidade dos objetos matemáticos /
Alex Calazans. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Fátima Regina Rodrigues Évora.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia
e Ciências Humanas.

1. Berkeley, George, 1685-1753. 2. Matemática - Filosofia. 3. Teoria do
conhecimento. 4. Objeto (Filosofia). 5. Percepção. I. Évora, Fátima Regina
Rodrigues, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e
Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: George Berkeley and the problem of intelligibility of mathematical objects

Palavras-chave em inglês:

Mathematics - Philosophy
Knowledge, Theory of
Object (Philosophy)
Perception

Área de concentração: Filosofia

Titulação: Doutor em Filosofia

Banca examinadora:

Fátima Regina Rodrigues Évora [Orientador]
Márcio Augusto Damin Custódio
Eduardo Salles de Oliveira Barra
Cristiano Novaes de Rezende
André da Silva Porto

Data de defesa: 27-03-2014

Programa de Pós-Graduação: Filosofia



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, em sessão pública realizada em vinte e sete de março de 2014, considerou o candidato ALEX CALAZANS aprovado.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Profa. Dra. Fátima Regina Rodrigues Evora

Prof. Dr. Marcio Augusto Damin Custódio

Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra

Prof. Dr. Cristiano Novaes Rezende

Prof. Dr. André da Silva Porto

Resumo:

O objetivo desta tese é estabelecer um estudo de como Berkeley concebeu os objetos matemáticos. Interessa saber se há, em seu pensamento, uma unidade no critério de inteligibilidade desses objetos. Busca-se, para isso, reconstruir alguns de seus argumentos quanto ao que ele considera como objetos legítimos não só da aritmética, álgebra e geometria, como também do cálculo infinitesimal. A partir disso, serão avaliadas as consequências interpretativas de seus textos de maturidade – como é o caso do texto *O Analista* (1734), conhecido pela crítica ao cálculo infinitesimal – sobre se há primazia de tais objetos no processo de avaliação da cientificidade das matemáticas. Não se almeja, portanto, adotar como porta de entrada a macro questão sobre o que é ciência matemática, para Berkeley, mas a questão de como a noção de objeto matemático apresenta-se, ou não, como um dos elementos importantes para o esclarecimento desse problema mais geral.

Palavras chave:

Berkeley; Filosofia; Matemática; Objeto matemático; Inteligibilidade; Percepção.

Abstract:

The aim of this thesis is to establish a study of how Berkeley devised mathematical objects. It is of interest to know whether there is, in his thinking, a unit in the criterion of intelligibility of these objects. To do this, we try to reconstruct some of his arguments about what he considers as legitimate objects, not only in arithmetic, algebra and geometry, but also in the infinitesimal calculus. From this, the interpretive consequences of his maturity texts are evaluated – such as the text *The Analyst* (1734), which is known for the criticism of the infinitesimal calculus – on whether there is primacy of such objects in the process of evaluating the scientific character of mathematics. Therefore, we don't want to adopt as an entrance the more general question of what is mathematical science, to Berkeley, but the question of how the notion of mathematical object is presented, or not, as one of the important elements to enlighten this more general problem.

Keywords:

Berkeley; Philosophy; Mathematics; Mathematical object; Intelligibility; Perception.

SUMÁRIO

Resumo:	VII
Abstract:	IX
Agradecimentos:	XV
Abreviaturas	XIX
Introdução geral	1
1 <i>Berkeley e o signo como objeto da aritmética e da álgebra</i>	13
1.1 Introdução	13
1.2 Aritmética e/ou álgebra?	17
1.3 A aritmética e o problema do número	18
1.4 Das duas possíveis interpretações de número	19
1.4.1 Concepção materialista de número	20
1.4.2 Concepção abstrata de número	23
1.4.2.1 Sobre a impossibilidade de formar ideias abstratas	25
1.4.2.2 As ideias abstratas e o problema do significado dos termos universais	27
1.4.2.3 O que de fato são os números para Berkeley?	36
1.5 Aritmética e álgebra: da pura manipulação de signos	44
1.6 Berkeley como formalista matemático	50
1.7 Conclusão	53
2 <i>Berkeley e o objeto geométrico como extensão percebida</i>	55
2.1 Introdução	55
2.2 Berkeley na primeira fase: a exigência empírica na geometria	56
2.2.1 Recusando a natureza abstrata do objeto geométrico	56
2.2.1.1 A ênfase nos sentidos	63
2.2.1.2 Os mínimos sensíveis	65
2.2.1.3 Avaliando a geometria constituída de mínimos sensíveis	77
2.3 Berkeley na segunda fase: a extensão percebida enquanto signo	83
2.3.1 O problema da infinita divisibilidade nos Princípios	83
2.3.2 Como o objeto geométrico torna-se geral: a generalização representativa	86
2.3.3 Problematizando a generalização representativa	89
2.3.3.1 Reformulando a noção de atenção seletiva	91
2.4 Conclusão	93
3 <i>O Analista e a crítica aos objetos do cálculo infinitesimal</i>	95
3.1 Introdução	95
3.2 As duas vias da crítica de Berkeley	95
3.2.1 Do critério para avaliar os novos métodos matemáticos	95

3.2.2	A crítica aos objetos do método das fluxões.....	98
3.2.3	A crítica aos objetos do cálculo diferencial leibniziano.....	102
3.2.4	A crítica aos princípios e às demonstrações do método das fluxões	105
3.2.4.1	A demonstração do método das fluxões presente nos Principia	106
3.2.4.2	A demonstração presente no De quadratura curvarum.	112
3.3	Do cruzamento entre as duas vias: uma avaliação da relação entre os dois âmbitos da crítica em O Analista.....	117
3.3.1	Robles e o texto O Analista	121
3.3.2	Jesseph e o texto O Analista.....	124
3.3.3	Avaliando as interpretações dos comentadores	128
3.4	Conclusão	131
Conclusão geral.....		135
Referências		143
Apêndice I: <i>O Analista</i> e os infinitésimos de Leibniz.....		149
Apêndice II: Uma resposta de Maclaurin a Berkeley		167

Para Luíza e Arthur

Agradecimentos:

A realização deste trabalho contou com a ajuda de muitas pessoas. Em especial, sou grato à Prof^a. Dra. Fátima Regina Rodrigues Évora, minha orientadora, que me ajudou em momentos decisivos na realização da tese, mas que, antes de tudo, confiou e me deu a liberdade para conduzir o trabalho. Agradeço ao Prof. Dr. Márcio Augusto Damin Custódio e ao Prof. Dr. Cristiano Novaes de Rezende por participarem do exame de qualificação e por contribuírem decisivamente para ajustar o rumo que a minha pesquisa tomou. Agradeço ao Prof. Dr. Marco Panza (IHPST-Paris 1) pela grande atenção dedicada à minha pesquisa no estágio de doutorado. Suas sugestões foram realmente esclarecedoras. Agradeço a todos os colegas do grupo de Filosofia da Natureza, IFCH-Unicamp, coordenado pela professora Fátima e pelo professor Márcio, por lerem e por discutirem comigo os meus textos durante todos esses anos de estudos no doutorado. Agradeço ao Prof. Dr. Marcelo Moschetti pelo incentivo à pesquisa. Sou grato às funcionárias do IFCH-Unicamp Maria Rita G. Santos e Sônia B. M. Cardoso pelo atendimento dado a mim na secretaria da pós-graduação, em filosofia, durante os anos de formação no doutorado.

Agradeço a todos os colegas do grupo de estudos em História e Filosofia da Ciência coordenado pelo Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra, na UFPR. Ali pude também vivenciar um intenso trabalho de pesquisa que interferiu diretamente na confecção desta tese. Em especial agradeço ao próprio professor Eduardo que nunca deixou de manter comigo um profícuo diálogo acadêmico, desde que me orientou no mestrado.

Agradeço à minha família. Em especial, sou grato à Veronica F. B. Calazans, minha esposa, pelo carinho, pela torcida e, também, por ser uma grande colega de estudos. Aos meus filhos, Luíza e Arthur, dedico este trabalho. Suas presenças foram inspiradoras. Sou realmente grato à Mide e ao Werner (pais da Veronica) pelo infinito apoio. Aos meus pais, Emi e Airton, agradeço por torcerem mais uma vez para que tudo se saísse bem. Agradeço à Isabelle Suzanne-M'bengue e ao Djip, não só pela amizade construída, mas por permitirem que nossa estada em L'Haÿ-les-Roses se tornasse inesquecível.

Agradeço à Capes pelas bolsas de estudos no Brasil e no exterior, que me permitiu realizar o estágio de doutorado sanduíche na IHPST-Paris 1.

... so long as I confine my thoughts to my own ideas divested of words, I do not see how I can easily be mistaken. The objects I consider, I clearly and adequately know. I cannot be deceived in thinking I have an idea which I have not. (Berkeley, Intro, PHK, §22)

Abreviaturas

Obras de Berkeley:¹

AN: *The Analyst* (O Analista);

ALC: *Alciphron: or, the minute philosopher. In seven dialogues. Containing an apology for the Christian religion, against those who are called free-thinkers.*

PC: *Philosophical Commentaries* (Comentários filosóficos);

PHK: *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge* (Um tratado sobre os princípios do conhecimento humano)

3D: *Three Dialogues between Hylas and Philonous* (Três diálogos entre Hylas e Philonous);

NTV: *An Essay towards a New Theory of Vision* (Um ensaio para uma nova teoria da visão);

TVE: *The Theory of Vision Vindicated and Explained* (A teoria da visão confirmada e explicada);

Obras de outros autores

Essay: LOCKE, J. *An Essay Concerning Human Understanding* (Um ensaio sobre o entendimento humano).

PN [Principia]: NEWTON, I. **The Principia:** *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Tradução, introdução e notas I. B. Cohen e A. Whitman. Berkeley: University of California Press, 1999 [1687].

MP [Mathematical Papers]: WHITESIDE, D. T. (Ed.) **The Mathematical Papers of Isaac Newton**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1980, 8v.

MW [Mathematical Works]: WHITESIDE, D. T. (Ed.) **The Mathematical Works of Isaac Newton**. New York/ London: Johnson Reprint Corporation, 1964. 2v.

¹ Todas as obras de Berkeley consideradas aqui se encontram em: BERKELEY, G. **The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne**. Edição A. A. Luce e T. E. Jessop. Nendeln / Liechtenstein: Kraus Reprint.. 1979. 9 v. As citações traduzidas nesta tese das principais obras filosóficas de Berkeley foram cotejadas com as versões em português presentes em: Conte, 2010. Da mesma maneira, as citações do texto *O Analista* foram cotejadas com: Berkeley, 2010.

Introdução geral

1. *Rumo aos objetos matemáticos*

Pode-se afirmar que o objetivo desta tese é compreender como Berkeley concebeu o objeto matemático presente em algumas disciplinas matemática que chamaram sua atenção. Destacam-se entre elas, a aritmética, álgebra, geometria e as versões newtonianas e leibnizianas do cálculo infinitesimal. Porém, sabe-se que um estudo, nesse sentido, pode ser abordado de muitas maneiras. Para estabelecer uma delimitação, será assumido aqui o problema da inteligibilidade dos objetos matemáticos como aquilo que motivará a investigação. Em especial, questiona-se sobre a existência, no próprio pensamento matemático de Berkeley, de um critério, de uma norma, que possa ser relacionado aos objetos matemáticos para julgá-los inteligíveis ou não. É importante frisar que o interesse é investigar o que é tal inteligibilidade exigida para os objetos matemáticos nos próprios termos de Berkeley e que é uma avaliação a partir dos próprios objetos, ou seja, pergunta-se como eles devem se manifestar para serem considerados inteligíveis. Além disso, tal critério não pode ser pensado no sentido que considera os objetos isoladamente, ou seja, de um modo a perder de vista a relação entre as disciplinas matemáticas. Assim, é de interesse saber da unicidade de tal critério, se é possível aplicar um único conceito de inteligibilidade em todas as disciplinas. Porém, na frustração disso, cabe responder como ocorre a relação entre elas.

Para esclarecer mais o objetivo da tese, será interessante, nesta introdução, estabelecer uma inicial apresentação de como o problema do objeto matemático se manifesta na obra de Berkeley. Isso será possível de ser feito abordando um de seus principais textos matemáticas: *O Analista* (1734).

É sabido na literatura filosófica, construída para explicar o pensamento de Berkeley, que ele manifestou grande interesse por vários ramos do conhecimento, principalmente por aqueles que os assim denominados “livre-pensadores” pudessem utilizar contra a fé cristã. Esse seria um dos motivos pelos quais Berkeley, além da filosofia natural, também investigou desde sua juventude a própria matemática. A sua atitude crítica quanto à

matemática atinge o ápice, em 1734, com a elaboração do texto *O Analista*. Ali Berkeley apresenta uma crítica cujos alvos principais são tanto a nova matemática praticada pelos modernos quanto o próprio livre-pensador. Os objetivos da crítica estão manifestos já no título completo da obra: “O Analista: onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé”. Em outras palavras, trata-se de criticar os fundamentos do novo cálculo infinitesimal, dentre eles está principalmente o elaborado por Newton (Método das Fluxões) e por Leibniz (*calculus differentialis*), com vistas a refutar a crítica do livre-pensador contra a religião. Para Berkeley, o livre-pensador não aceitaria a religião e, por sua vez, a cientificidade da teologia, pois em ambas se admitem os obscuros “mistérios da fé”. Tais mistérios nunca seriam aceitos na matemática, pois ela, devido à preocupação com o rigor, só negocia com objetos “distintos”. A estratégia de Berkeley é a de desqualificar o julgamento do livre-pensador contra a religião ao mostrar que conceitos centrais para os métodos matemáticos de Newton (como *momentos*, primeiras e últimas razões) e de Leibniz (como as *diferenças*) são verdadeiros “mistérios” que os matemáticos modernos aceitam sem nenhum escrúpulo.

Ainda que *O Analista* seja um texto de cunho polêmico, com um profundo caráter apologético quanto à religião, é possível afirmar que Berkeley manifesta ali várias de suas posições quanto à matemática. Pressupõe-se que elas podem ser lidas independentemente do aspecto polêmico-religioso. Uma dessas posições diz respeito a uma divisão que Berkeley faz da matemática: enquanto prática e enquanto ciência demonstrativa. A seguinte passagem poderá ser útil para um melhor esclarecimento do assunto:

Portanto, da mesma maneira como um marinheiro pode aplicar na *prática* certas regras derivadas da astronomia e da geometria, cujos princípios ele não compreende, e como qualquer homem comum pode resolver diversas questões numéricas pelas regras e operações comuns da aritmética, que ele executa e aplica sem conhecer as suas razões, assim tampouco se pode negar que podeis aplicar as regras do método das fluxões, que podeis comparar e reduzir casos particulares a formas gerais; que podeis operar, calcular e solucionar problemas por intermédio disso, não somente sem qualquer *atenção* a ou *conhecimento* efetivos dos *fundamentos* desse método e dos *princípios* dos quais ele depende e dos quais é deduzido, mas também sem nunca os ter considerado ou compreendido. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §32).

Mesmo que o texto tenha o método das fluxões de Newton como principal objeto de estudo, há aqui subentendidos dois tratamentos possíveis para um conjunto de regras, sejam elas pertencentes às matemáticas ou à filosofia natural: (i) um que permite aplicar determinados métodos sem o conhecimento e atenção de seus “fundamentos” e “princípios”; (ii) outro tratamento que também permite tal aplicação só que agora os conhecendo e lhes dando atenção. Quanto ao sucesso da aplicação, tanto (i) como (ii) podem obtê-lo: a figura do marinheiro tem a função de assegurar isso. Tal personagem é aquele que sabe as regras de algumas disciplinas (como a astronomia, a geometria e aritmética) sem saber os fundamentos e princípios que estão por trás das regras. No entanto, mesmo assim, o marinheiro pode realizar cálculos a ponto de ser muito bem sucedido na prática da navegação. A crítica ao livre-pensador se estabelece uma vez que ele, segundo Berkeley, não é um detentor de uma ciência matemática mas sim de uma prática matemática, como o faz o marinheiro: “...deve-se recordar que em tal caso, embora podeis passar por um artista, calculador ou analista, ainda não podeis considerar-vos um homem de ciência e de demonstração” (Berkeley, AN, §33). O livre-pensador teria confundido as duas espécies de tratamento da matemática.¹

Considerando especificamente a matemática, o que Berkeley deseja ao exigir nela o conhecimento ou a atenção aos “fundamentos” e aos “princípios”? Uma sugestão de resposta parece surgir quando se amplia o foco da leitura, considerando outras passagens de *O Analista*. Uma análise mais ampla do contexto em que aparecem as palavras “fundamentos” e “princípios” sugere que tais termos conduzem, dentre outras coisas, a uma avaliação dos objetos matemáticos. Nesse caso, esses objetos são constituídos de símbolos e utilizados nas demonstrações do cálculo infinitesimal. A compreensão da passagem que se segue pode confirmar isso:

¹ Não se pode confundir o conceito de “prática matemática” que Berkeley considera aqui com aquele sugerido por Mancosu (1996). O que Mancosu pretende é estabelecer uma “filosofia da prática matemática”. Ou melhor, para ele, haveria a possibilidade fazer uma leitura do trabalho matemático a partir do modo como os matemáticos praticam um determinado método matemático, independentemente dos pressupostos filosóficos assumidos por eles. Está em questão a própria atividade realizada pelo matemático e não como tal atividade deveria ser realizada, considerando pontos de vista teóricos pré-concebidos. Quanto a Berkeley, “prática matemática” se refere ao problema de como uma regra matemática pode ser aplicada independentemente de se dar atenção àquilo que a faz ser verdadeira ou não. Interessaria a essa “prática” somente a sua aplicabilidade, a obtenção de um resultado no mundo, como é o caso do marinheiro quando usa as regras matemáticas para conduzir bem o navio.

...se removermos o véu e olharmos de baixo dele, colocando de lado as expressões, voltarmos nossa atenção para considerar as próprias coisas que se supõem serem expressas ou sinalizadas por elas, descobriremos um grande vazio, muita *escuridão e confusão*, ou melhor, se eu não estiver equivocado, descobriremos *impossibilidades e contradições* diretas. (Berkeley, AN, §8).²

O contexto em que essa passagem aparece é aquele onde Berkeley acaba de apresentar uma argumentação contra os objetos do método das fluxões e do *Calculus differentialis*. Até então o foco era os próprios objetos matemáticos, independentemente da sua relação com a demonstração. É somente após tal parágrafo que se inicia uma avaliação das demonstrações matemáticas do cálculo. Desse modo, o trecho revela tal transição. Assim, quanto ao objeto matemático em si, Berkeley parece acusar Newton e Leibniz de usarem símbolos para representar determinadas entidades matemáticas sem que de fato eles tenham compreendido o que elas são, independente dos símbolos. Ao retirar o “véu”, ou seja, ao focar a atenção não nos símbolos mas nas entidades representadas pelos símbolos, será observado o vazio ou “escuridão e confusão”. O contrário disso seria dizer que tais expressões denotam coisas que são claras para a mente, o que, do seu ponto de vista, não acontece. Por outro lado, objetos matemáticos que não são claros parecem produzir “impossibilidades e contradições”, quando avaliados a partir do aspecto lógico. É por isso que, a partir desse parágrafo, Berkeley começa uma profunda avaliação das demonstrações do cálculo com o objetivo de encontrar tais impossibilidades e contradições.

Essas duas perspectivas parecem que estão subentendidas como um dos elementos para estabelecer o contraste entre os termos “fundamentos” e “princípios”, como usados no parágrafo 32 (acima citado), e que, por sua vez, conduzem à diferenciação entre “ciência” e “prática”. Desse modo, a palavra “fundamentos” parece indicar que, para Berkeley, é necessário dar atenção ao nível de clareza que se pode ter dos objetos matemáticos. E, por outro lado, a palavra “princípios” passa a indicar os objetos matemáticos que aparecem nas premissas das demonstrações. Isso faz com que entrem em questão não somente o objeto matemático em si, mas também as premissas e as consequências lógico-dedutivas. A clareza das premissas e a correção lógica dependeriam do nível de clareza que os objetos matemáticos possuem.

² Esse parágrafo será citado e analisado novamente (com outras finalidades) no capítulo 3, seção 3.3, desta tese de doutorado.

Contudo, se essa análise das palavras “fundamentos” e “princípios”, como usado por Berkeley, em *O Analista*, permite apontar para uma análise dos objetos matemáticos, uma questão central surge: o que significa demandar *claridade* a respeito de tais objetos? Ora, se na citação acima ele sugere que as próprias coisas sejam *consideradas*, independente das expressões, isso parece indicar que está em questão a avaliação a respeito da compreensão do que são as entidades supostamente denotadas pelas expressões matemáticas. Desse modo, uma das principais exigências que Berkeley parece manifestar é que se faça uma avaliação acerca da *inteligibilidade* desses objetos. Exige-se que os objetos se manifestem claramente para a mente, que eles sejam inteligíveis. Contudo, esse próprio conceito de inteligibilidade necessita ser esclarecido. Isso permite, por sua vez, que se considere o que acontece de um modo geral na filosofia de Berkeley. Porque ao se questionar sobre qual é o critério de inteligibilidade, para Berkeley, entra em cena uma discussão sobre o que é *ideia*, enquanto objeto do conhecimento.

2. *Ideia como objeto do conhecimento*

Uma das apresentações mais canônicas sobre o que é o objeto do conhecimento, para Berkeley, é aquela que aparece já no início de seu texto *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano* (1710). Ali Berkeley assume uma posição que mistura as concepções *empirista* e *idealista* quanto ao conhecimento das coisas. Isso se torna evidente ao se analisar os *objetos do conhecimento* e a *fonte de produção* deles. Primeiramente, Berkeley concebe que *ideia* é aquilo que se deve assumir como objeto do conhecimento. E, além disso, há somente três possíveis origens para ela, isto é, tudo o que é possível de ser conhecido diz respeito, somente, ao conteúdo fornecido por estas três maneiras.³ A primeira é receber ideias impressas de forma atual nos sentidos (como: cor, cheiro, sabor, forma e vários sons). A segunda, trata-se das ideias que sentimos a partir das paixões e operações do espírito (são excitações como amor, alegria, repugnância e tristeza, que se sentem quando as sensações da primeira maneira atingem o espírito). E, a terceira e última maneira, são as ideias que surgem com o auxílio da *memória* e da *imaginação* ao compor,

³ Cf. Berkeley, PHK, §1.

dividir ou representar as ideais surgidas pelas outras maneiras. São somente esses três tipos de origem das ideias que Berkeley aceita, havendo entre elas, todavia, uma ordem para que as ideias atinjam o espírito, cujo ponto inicial é os sentidos. O que é importante focar aqui é que essa descrição é claramente uma atitude empirista, sem as percepções empíricas não há as ideias ou objetos para se conhecer.

Algo importante acerca da origem das ideias diz respeito à possibilidade do conhecimento ou como algo pode vir a ser um genuíno objeto conhecimento. Argumenta-se, nos *Princípios*, contra a possibilidade de haver um mundo independente do que seja percebido por algum dos três modos enunciados acima: “E que percebemos nós *além das nossas próprias ideias ou sensações*? E não repugna admitir que alguma, ou um conjunto delas, possa existir impercebido?” [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §4). Ao apontar essa impossibilidade, Berkeley, necessariamente, identifica a *ideia* como o genuíno objeto do conhecimento, ou seja, mostra-se evidente no texto de Berkeley que, apesar de haver essa três fontes distintas da origem do objeto do conhecimento, tudo o que vem por essas fontes são *necessariamente* ideias. Todo o conteúdo que pode ser conhecido (conteúdo cognitivo) depende das percepções ou das ideias adquiridas pelos três modos acima citados. Nada surge na mente sem que tenha uma relação com a percepção obtida por algum dos órgãos dos sentidos. O significado disso é que o conteúdo que está à disposição daquele que irá conhecer são nada mais do que *percepções ou manifestações mentais*. Desse modo, Berkeley não faz a separação entre a *representação mental* do mundo e o próprio mundo como algo independente de mente. Para ele, aquilo que se manifesta na mente enquanto ideia é a única realidade existente. Eis o significado de *idealista* aqui utilizado.⁴

O problema da *inteligibilidade* se manifesta imerso nessa discussão sobre ideia. Berkeley concebe que a compreensão sobre alguma coisa deve ter respaldo no fato de ser percebido enquanto ideia. Eis um exemplo como Berkeley usa o conceito de inteligível: “O que se tem dito da existência absoluta de coisas impensáveis sem alguma relação com o seu

⁴ Não se pode levar essa descrição de idealismo às últimas consequências, de um modo a dizer que Berkeley não seja antes de tudo *empirista*. Pois a fonte do conhecimento depende dos sentidos. O idealismo aqui deve ser utilizado para descrever a *natureza* do objeto do conhecimento (que é ideia) adotado por ele, e não o modo como adquirimos ou justificamos o conhecimento. Assim, Berkeley é antes de tudo empirista, pois a fonte do conhecimento depende primariamente das percepções empíricas. A respeito do contraste dos conceitos de idealismo e empirismo, em Berkeley: Cf. AYERS, 2007, p. 15-16.

ser-percebidas parece perfeitamente *ininteligível* (*unintelligible*)” [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §3). Como só ideias são percebidas, ser *inteligível* para a própria mente depende de um vínculo com a percepção de ideias. O que evita tal vínculo torna-se incompreensível, ou melhor, *ininteligível*, para ela.

Adicionalmente, essa orientação está presente na doutrina contida na famosa expressão latina de Berkeley: o *esse est percipi* (ser é ser percebido).⁵ Isso significa que não pode haver comprometimento com a compreensão ou inteligibilidade das coisas que se encontram fora do âmbito das coisas percebidas. Ainda que o *esse est percipi* se manifeste como um princípio para avaliar os objetos do ponto de vista ontológico (via ontológica), ele também surge como um princípio para estabelecer a avaliação da inteligibilidade do objeto do conhecimento: o objeto é inteligível para a mente na medida em que ele se manifesta como uma ideia percebida. Essa é a base para a construção de uma argumentação contra várias teses filosóficas de seu tempo como é o caso do materialismo, aquela doutrina que assume a existência de um mundo material independente das percepções mentais.⁶

3. Do critério de inteligibilidade na matemática

Voltando à crítica ao cálculo infinitesimal, como sugerido em *O Analista*, parece que o uso dos símbolos nos raciocínios só se justificaria caso a mente conseguisse uma percepção das ideias associadas a eles. Sendo assim, por exemplo, os *momentos* newtonianos e as *diferenças* leibnizianas são rejeitados uma vez que eles não dão conta de serem percebidos pelos sentidos e muito menos de serem formulados na imaginação. Pode-se dizer, que à luz do conceito de ideia como objeto do conhecimento, Berkeley considera *ininteligíveis* tais objetos na medida em que não se constataria o vínculo com a percepção de ideias.

⁵ Cf. Berkeley, PHK, §3.

⁶ Berkeley, ainda nos *Princípios*, parágrafo 6, novamente se apoia na noção de inteligibilidade para criticar a interpretação que assume a matéria como algo independente da mente. Nesse parágrafo, ele também critica a doutrina das ideias abstratas como sendo a causa desse erro. A respeito desta doutrina, ela será objeto de estudo no percurso do primeiro capítulo desta tese.

Contudo, se o uso de símbolos no cálculo infinitesimal não é aceito sem a inteligibilidade daquilo que eles representam, isso não quer dizer que seja essa uma perspectiva de Berkeley válida para a matemática como um todo. Não é possível estender sua interpretação do uso de símbolos no cálculo para todas as disciplinas da matemática. Um exemplo é o que acontece na álgebra. Ali de fato Berkeley aprova o uso de símbolos independentemente da possibilidade da mente possuir as ideias *inteligíveis* representadas. Em seu texto *Alciphron*, Berkeley aceita o uso da raiz imaginária $\sqrt{-1}$ como um símbolo legítimo nas operações algébricas, apesar dela ser impossível enquanto ideia na mente.⁷ Ou seja, mesmo sem uma ideia inteligível que funcione como referência para o símbolo $\sqrt{-1}$, Berkeley parece estar disposto a aceitar a legitimidade da álgebra. Desse modo, qual é o objeto dessa disciplina e o que se aceita nela como inteligibilidade? A questão volta-se para compreender como Berkeley estabelece o critério de inteligibilidade da álgebra, já que tudo indica que a percepção de ideia ali não se faz necessária.

O mais curioso é que os termos em que Berkeley parece aceitar essa legitimidade abrangem a noção de cientificidade dessa disciplina. Ainda em *O Analista*, em uma questão ao final do texto, mesmo que timidamente, Berkeley cogita a possibilidade da álgebra ser tão científica quanto a geometria, uma vez que vários matemáticos a considerariam ciência:

Não seriam os homens capazes de no raciocínio mais geral acerca de igualdades e proporções realizarem demonstrações como as que realizam na geometria? Em tais demonstrações, eles não estariam obrigados ao mesmo [tipo] de raciocínio estrito que há na geometria? E esses seus raciocínios não seriam deduzidos dos mesmos axiomas de que são deduzidos aqueles da geometria? Portanto, a álgebra não seria tão verdadeiramente uma ciência quanto o é a geometria? (Berkeley, AN, Questão 45).

Berkeley, nessa obra matemática e em outras, não apresenta nenhuma afirmação contrária sobre a álgebra. O que parece, antes de tudo, é que ele a defende.

Desse modo, se essa legitimidade de tais disciplinas é possível, ainda considerando o uso de símbolos nos raciocínios, será necessário afirmar que o tal uso não é justificado da mesma maneira nessas várias disciplinas. Isso parece indicar a necessidade

⁷ Cf. Berkeley, ALC, VII, §14.

de atribuir uma “independência” entre elas. É o que realmente comentadores têm feito, ou seja, eles têm a tendência de interpretar o pensamento de Berkeley, quanto à matemática, não como um bloco único. Por exemplo, Pycior argumenta que Berkeley reconheceu uma tripartite divisão da matemática:

(1) geometria (a mais alta ciência matemática que foi baseada em percepções sensoriais), (2) a aritmética e a álgebra (ciências formais envolvendo raciocínio em meros sinais), e (3) análise [cálculo infinitesimal] (um método aplicado à geometria). (Pycior, 1987, 266).

Jesseph (1993, p. 113-114) também assume que há independência entre as disciplinas. Porém, diferentemente de Pycior, ele considera que, para Berkeley, a geometria não está acima da aritmética e da álgebra do ponto de vista da cientificidade.

Com essa apresentação já é possível reafirmar o que se pretende investigar nesta tese de doutorado. Interessa saber como Berkeley compreendeu o que são os objetos matemáticos. Porém, tentar-se-á compreender como o problema da inteligibilidade de tais objetos deve ser abordado nessas diversas disciplinas. Deve-se enfatizar que o objetivo é estabelecer uma avaliação da presença de um critério comum a todas essas disciplinas; ou, se no caso contrário, interessa saber se a única maneira de falar em inteligibilidade é a partir do critério das ideias percebidas. Assim, essa será a estratégia elegida aqui, ou seja, tratar dos objetos matemáticos a partir do problema da inteligibilidade. Pois, como visto acima, a respeito de *O Analista*, o problema da inteligibilidade é uma das demandas centrais do que Berkeley exige para os objetos do cálculo. E, ainda, se ele no mesmo texto sugere uma equivalência entre as disciplinas como a geometria e álgebra, cabe saber como se harmonizaria uma demanda por inteligibilidade, enquanto norma, para todas essas distintas disciplinas. É importante frisar, ainda, que tal estratégia coloca a ênfase no conceito de objeto matemático, para Berkeley. Pergunta-se, a partir do objeto matemático, como eles devem se apresentar para serem inteligíveis.

Além do mais, isso quer dizer também que não se nega que Berkeley esteja negociando, em seus textos matemáticos, com um conceito mais geral de ciência matemática. O objetivo não é fazer uma leitura do pensamento matemático de Berkeley na tentativa de esgotar tal conceito ali presente. Antes disso, pretende-se fazer algo mais

modesto e que não é comum entre os comentadores de Berkeley: ao invés de adotar essa macro questão sobre o que é ciência matemática como relevo principal da discussão, será assumido aqui que a discussão sobre o objeto matemático, à luz do problema da inteligibilidade, poderia ser a “porta de entrada” (um dos elementos indicativos) para a compreensão não só da classificação das disciplinas matemáticas, mas também sobre a compreensão de suas científicidades. Isso, por exemplo, parece estar por trás da própria discussão de Berkeley sobre a diferença entre “prática” e “ciência” matemática, presente em *O Analista*.

4. *Divisão dos capítulos*

Concebe-se que a tese poderá se estruturar da seguinte maneira. No primeiro capítulo o objetivo principal será o de compreender como se compõe na aritmética e álgebra a relação entre inteligibilidade e uso de signos. Isso exigirá o esclarecimento da noção de significado dos signos que, por sua vez, demandará esclarecimentos a respeito da filosofia de Berkeley acerca da linguagem.

O segundo capítulo deverá apresentar a mesma empreitada, porém com o foco na geometria. O objetivo será o de compreender como é que se articula um conceito de inteligibilidade ao se assumir a “extensão percebida” com sendo o objeto da geometria.

No terceiro capítulo, o foco central estará no cálculo infinitesimal. Especificamente será avaliada a recusa de Berkeley ao modo como se utiliza os símbolos matemáticos nos métodos de Newton e de Leibniz. Essa tarefa exige a compreensão do critério de inteligibilidade dos objetos relacionados a esses símbolos. Porém isso só poderá ser feito caso se considere os dois âmbitos da crítica: de um lado, estaria a crítica aos objetos matemáticos do cálculo e, do outro, a crítica aos problemas lógico-demonstrativos. De posse dessa compreensão, será possível avaliar qual é a interferência dos objetos matemáticos na correção lógica das demonstrações. Tudo indica que, para Berkeley, ambas estão conectadas.

Após isso, na conclusão, tentar-se-á responder se de fato há uma unicidade no pensamento de Berkeley a respeito de um critério de inteligibilidade para os objetos matemáticos.

Para efeitos de esclarecimentos, acrescentou-se ao final da tese dois textos cujo tema é o objeto matemático. Ambos os textos têm relação com o capítulo três, onde se aborda a crítica de Berkeley, em *O Analista*, ao cálculo infinitesimal. No apêndice I, analisa-se os textos de Leibniz na tentativa de compreender como ele concebeu o conceito de infinitamente pequeno. A questão principal é saber se a crítica de Berkeley realmente acontece a partir do aparato conceitual de Leibniz. O apêndice II, por sua vez, tenta ilustrar como Maclaurin respondeu a um dos aspectos da crítica de Berkeley. Esse matemático é considerado por muito comentadores como sendo o primeiro a dar respostas convincentes ao que Berkeley aponta em *O Analista*. Desse modo, o objetivo do apêndice é compreender como Maclaurin responde à acusação de que o método das fluxões negociaria com objetos matemáticos pautados na doutrina da abstração.

1 Berkeley e o *signo* como objeto da aritmética e da álgebra

1.1 Introdução

Muitos historiadores da matemática assumem uma divisão disciplinar da matemática.¹ Consolidada principalmente após o trabalho de Euclides, em seus *Elementos*, tal divisão comumente é compreendida a partir da bipartição que tem os objetos matemáticos a serem tratados como foco central: as *quantidades matemáticas* das quais os estudos matemáticos partiriam. Nesse sentido, de um lado, localiza-se a *geometria* que tem como objeto de estudo as quantidades contínuas (ou extensas), tais como os segmentos, ângulos, polígonos e poliedros. E na outra mão encontra-se a *aritmética*, destinada ao estudo das quantidades discretas, isto é, as quantidades numéricas. Após isso, matemáticos de língua árabe se concentraram em elaborar uma “língua”, comum aos dois âmbitos, que recebeu o nome de *álgebra*.²

Independentemente do debate sobre a pertinência dos fundamentos desses historiadores a respeito de tal classificação das matemáticas, é possível dizer que, quando Berkeley realizou seus estudos sobre a matemática, a discussão de como dividi-la em seus vários ramos ainda estava presente. O surgimento da álgebra ainda representava um estímulo para essa discussão. Desse modo, além de Berkeley, é possível ser encontrado o tema da classificação da matemática na querela travada entre outros pensadores modernos tais como: Wallis, Hobbes e Barrow. Estava em disputa a utilização de símbolos nos raciocínios algébricos. Enquanto Wallis defendeu o simbolismo, considerando a aritmética como base para fundamentar a geometria e a álgebra, Hobbes por outro lado rejeitou tal concepção. Barrow, por sua vez, foi o personagem da discussão que assumiu a geometria como a fonte para o fundamento das ciências dos números.

Berkeley não ignorou esse debate. Sua inquietação manifesta-se já em suas anotações de juventude presentes em seus *Comentários filosóficos*.³ Sobre o pensamento

¹ Para citar somente alguns: Jesseph, 1993, p.89; Berlioz, 2000, p 145; Panza, 2003, p. 35-6.

² Cf: Panza, 2005, p. 19.

³ Uma interessante discussão sobre esse tema da classificação das disciplinas matemáticas pode ser encontrada em: Mancosu, 1996. Esse texto busca não somente analisar, por exemplo, o embate entre Barrow e Wallis sobre a classificação (e hierarquia) das disciplinas matemáticas. Há a preocupação, por parte de

de Hobbes (a respeito da utilização de símbolos no processo de raciocínio), Berkeley anota o seguinte: “Receba na alma com pensamentos veementes o quadro das coisas mesmas, não por meio de letras ou em sons. Hobbes contra Wallis” (Berkeley, PC, §834).⁴ Além disso, ele ainda acrescenta: “*Mem*: quando eu tratar das matemáticas, investigar a controvérsia entre Hobbes e Wallis” (Berkeley, PC, §837). Aqui, como também em várias outras entradas dos *Comentários filosóficos*, Berkeley utiliza “*Mem*” como abreviação de *Memorandum*. Parece que o objetivo dessas duas entradas seria somente o de produzir lembretes para futuras pesquisas. Nos *Comentários filosóficos*, além das entradas 834 e 835, Berkeley não menciona mais os nomes dos dois autores referindo-se a tal querela.

Apesar de tudo, nos *Comentários filosóficos* e em vários outros textos seus, pode-se assumir a existência de uma tomada de posição por parte de Berkeley quanto a muitos aspectos da aritmética, da álgebra e, também, evidentemente, quanto à geometria. Tais aspectos permitem sim revelar um posicionamento quanto à classificação das ciências matemáticas e manifestar, mesmo que indiretamente, uma tomada de posição a respeito da querela que envolveu tais autores. O que será tratado neste capítulo poderá exemplificar isso, pois seu tema está intimamente relacionado a essa disputa. Trata-se de compreender, segundo Berkeley, o que é o objeto matemático das disciplinas: aritmética e álgebra. No entanto, sabe-se que a discussão disso está vinculada ao próprio tema da justificação da utilização de símbolos nos raciocínios matemáticos. Assim, para melhor esclarecer como a discussão será conduzida neste capítulo, cabe analisar as seguintes afirmações de Berkeley sobre essas disciplinas:

Mancuso, de sustentar que esse embate fez parte de uma discussão que teria ocupado o pensamento matemático do século XVII. Essa discussão ficou conhecida como *Quaestio de Certitudine Mathematicarum*. Dentre outros, um dos principais problemas tratados estava o da justificativa da certeza da matemática clássica, principalmente em termos do conceito de ciência demonstrativa como Aristóteles teria apresentado em seu texto *Segundos analíticos*. Quanto a Berkeley, não é difícil de dizer que ele, em um momento mais tardio, ao voltar a atenção para a classificação dessas disciplinas, está também participando dessa discussão. O próprio Mancuso (*ibidem*, p. 9 e 150-177) inclui Berkeley nisso. Por outro lado, Jesseph (1993, p. 9-21) contrasta a discussão de Berkeley, sobre a natureza abstrata dos objetos matemáticos, com esse cenário gerado pela *Quaestio de Certitudine*. Assim, isso permite dizer que é a partir da discussão sobre a própria natureza dos objetos matemáticos que se formula um dos modos de participação de Berkeley nas questões que incomodaram o século XVII sobre a certeza das matemáticas.

⁴ *Recipe in animum tuum per cogitationem vehementem rerum ipsarum non liter a rum aut sonorum imagines. Hobbes against Wallis.*

Remova os *signos* da aritmética e da álgebra, e pergunto: o que permanece? [itálico meu] (Berkeley, PC, §767).

Estas são ciências *puramente verbais* e completamente inúteis, a não ser para a prática nas sociedades dos homens. Não há nenhum conhecimento especulativo nelas, nenhuma comparação de ideias. [ênfase minha] (*Ibidem*, §768).

Está manifesto que Berkeley usa termos que evocam o tema do simbolismo na matemática. Enquanto que, de um lado, aparece a palavra “signos”, por outro, menciona-se a aritmética e a álgebra como sendo ciências “puramente verbais”. Nesse contexto, destaca-se o questionamento feito na entrada 767. Embora não pareça de imediato, pode-se dizer que a entrada 768 fornece elementos para sugerir uma resposta à pergunta de Berkeley. Já que não há “nenhuma comparação de ideias”, ao se retirar os signos dessas matemáticas, o que sobraria é “nada”. Só é possível afirmar que a aritmética e álgebra são “puramente verbais” caso os signos não estejam relacionados às coisas. Mas o que justifica a resposta? Ao menos está evidente que Berkeley estabelece uma divisão do plano linguístico. De um lado há a *linguagem especulativa*, que procura comparar ideias e, por outro, há a linguagem que não o faz. Para isso, essa última tem que ser pura, sem ideias. Ainda que não argumente, Berkeley parecer classificar a aritmética e a álgebra como pertencendo à linguagem pura. Então, “nada” resta ao se retirar a linguagem aritmética e algébrica, porque a linguagem pertencente a elas não está associada a ideias que sejam comparadas entre si.

Entretanto, a resposta sugerida para a pergunta de Berkeley não se mostra tão óbvia quando avaliada a partir de outras afirmações, como por exemplo, aquelas presentes em seu *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano* (1710). Em uma conclusão a respeito da aritmética, Berkeley repete o termo “nada”, porém desempenhado uma função um pouco diferente daquela presente na entrada 767:

Portanto, as teorias aritméticas, se são abstraídas dos nomes e algarismo, assim como de todo uso e prática, e das coisas particulares numeradas, pode-se supor, não têm como objeto absolutamente *nada*. Donde podemos ver como a ciência dos números se subordina inteiramente à prática e como se torna vazia e trivial quando considerada como um assunto de mera *especulação*. [ênfase minha] (Berkeley, *PHK*, §120).

A recusa aqui de que a aritmética seja uma disciplina que permite “especulações” é algo em comum com o que está presente nos *Comentários filosóficos*. Contudo, existe uma

diferença entre os textos: é somente nos *Princípios* que Berkeley inclui a necessidade de “abstrair”, isto é, de desconsiderar as “coisas particulares numeradas”. Nos *Comentários*, não há a necessidade de fazer menção à “retirada” do que é particular e numerável para se alegar um vazio. Basta retirar os signos. Desse modo, é possível dizer que se trata do mesmo uso da palavra “nada”? Essa pergunta parece conduzir a uma reflexão sobre o conceito de significado dos signos matemáticos. Caso se avalie as afirmações de Berkeley à luz de um conceito de significado – que exige a presença de uma referência para que o signo possua significado, isto é, que o signo denote, por exemplo, coisas –, o que é dito nos *Princípios* torna-se de imediato mais compreensível quanto à noção de significado, pois as “coisas particulares numeradas” poderiam ser as referências diretas dos nomes e algarismos. O uso por parte de Berkeley do termo “nada”, portanto, parece ser diferente daquele que possivelmente se assumiria como resposta para a entrada 767 dos *Comentários*, onde não aparece a possibilidade de pensar a referência dos signos como “coisas particulares”. Assim, a pergunta que se faz a Berkeley é: em qual sentido a aritmética e álgebra podem ser “puras”?

Contudo, além da noção de significado dos símbolos da aritmética e álgebra, outro problema se manifesta intimamente ligado a isso: se o problema da inteligibilidade adentra na filosofia de Berkeley na medida em que a percepção de ideias se manifesta, afirmar que na aritmética e na álgebra não há comparação de ideias (ou seja, que são puras) não seria também afirmar que esse critério de inteligibilidade não se aplica em tais disciplinas? Como os objetos dessas disciplinas tornam-se inteligíveis à mente?

Portanto, o que se pretende nesse capítulo é saber o que é e como se justifica essa utilização de signos em tais disciplinas. Porém, isso quer dizer que se procura compreender como os próprios signos tornam-se os objetos dessas disciplinas sem que exista a necessidade deles denotarem ideias percebíveis. Além do mais, se isso acontece, cabe saber como esses objetos tornam-se inteligíveis (ou não) na medida em que o critério de inteligibilidade baseado na percepção de ideia parece não se aplicar. Neste capítulo, será necessário adentrar e detalhar aspectos importantes da própria filosofia da linguagem, segundo Berkeley, já que, como visto nas citações acima, o problema do objeto da aritmética e da álgebra está relacionado a tal filosofia.

Além do mais, cumprir tais esclarecimentos representará a abertura para realizar outra tarefa. À luz do que será compreendido sobre a natureza do objeto da aritmética e da álgebra, será possível avaliar algumas afirmações de comentadores de Berkeley quanto ao formalismo matemático. Eles, quando consideram as posições berkeleyanas a respeito dessas disciplinas, têm a tendência de rotulá-lo como “formalista”. Saber os limites de tal interpretação poderá ser útil para compreender mais a posição de Berkeley quanto aos signos matemáticos.

1.2 Aritmética e/ou álgebra?

A tarefa de investigar as duas ciências matemáticas, a saber, aritmética e álgebra, traz inicialmente o problema de compreender se o que será dito sobre uma valerá imediatamente para a outra. O que está posto, nesse sentido, é a dificuldade de assumir se a investigação poderá tratar aritmética e álgebra conjuntamente, como se formassem uma só ciência matemática. Esse problema mostra-se inicialmente digno de alguma atenção à medida que, nas entradas 767 e 768, dos *Comentários filosóficos*, Berkeley faz uma afirmação para ambas as matemáticas. O que está valendo para uma, vale da mesma maneira para outra, isto é, não somente a aritmética é uma “ciência puramente verbal”, mas, também, a álgebra. Tal tratamento igualitário está longe de indicar uma visão parcial sobre tal assunto. Há motivos para concluir que Berkeley estava ciente das diferenças entre aritmética e álgebra. Existem vários textos de juventude de Berkeley tratando da matemática. Interessa, quanto a esse problema, o seu texto *Arithmetica absque algebra aut Euclide demonstrata*.⁵ Ali Berkeley manifesta já no título da obra a necessidade de tratar a aritmética de modo distinto da álgebra. É por isso que ele menciona, no prefácio, o trabalho de André Tacquet sobre aritmética.⁶ Para Berkeley, a aritmética é apresentada por Tacquet de maneira obscura, pois, para compreendê-la haveria a necessidade de se recorrer a procedimentos algébricos antes do entendimento daqueles que seriam especificamente aritméticos. Isso parece ser um problema para Berkeley, ainda mais tendo em vista a ordem

⁵ (*A aritmética demonstrada sem a álgebra nem Euclides*). Não existe uma data precisa da elaboração desse texto. Porém entre comentadores cogita-se a ideia de que Berkeley o teria escrito entre 1704 e 1707, almejando entrar na Trinity College em Dublin como *fellow*: Cf. Robles, 1993, p. 375.

⁶ O texto de Tacquet em questão é *Arithmeticae teoria et praxis* (1665).

que ocorreria o ensino da matemática. Ele afirma que tal ensino ocorria na seguinte ordem: aritmética, geometria e álgebra. A questão nesse caso que parece incomodar Berkeley é: como alguém pode compreender uma *apresentação* da aritmética que pressupõe o conhecimento de outras ciências que ainda não foram estudadas?⁷

Desse modo, o objetivo de Berkeley seria o de defender um procedimento demonstrativo próprio da aritmética, facilitando o estudo para quem se iniciaria nela. Para ele, não há a necessidade de recorrer a conhecimentos algébricos ou geométricos para se estudar a aritmética.

Entretanto, o que realmente pode fornecer a diferenciação entre aritmética e álgebra a respeito do problema da utilização de signos? Talvez uma afirmação do próprio Berkeley, presente nos *Comentários filosóficos*, possa ajudar: “As letras ou espécies algébricas (*species or letters*) são denominações de denominações (*denominations of denominations*), assim a aritmética deve ser tratada antes da álgebra” (Berkeley, PC, §758). Novamente aqui há uma diferenciação entre as duas ciências matemáticas. Contudo, agora Berkeley considera o grau de generalidade das duas matemáticas. “Denominações de denominações”, nesse caso, indica que Berkeley concebe a álgebra como sendo mais geral que a aritmética. É nesse sentido que esta vem antes daquela. No que segue, adotar-se-á, como estratégia de investigação, esse ponto de vista de Berkeley. Primeiro a investigação ocorrerá a partir das afirmações que tratam somente da aritmética, para depois incluir aquelas que focam ambas as ciências.

1.3 A aritmética e o problema do número

De fato o texto dos *Comentários filosóficos* não apresenta uma organização interna com o intento de fornecer uma sequência contínua entre as várias anotações. Muitas delas contêm uma ligação somente quando analisadas a partir de seu conteúdo interno. No caso do problema da “denominação” presente na entrada 758, algo importante acontece. Logo em seguida, na entrada 759, Berkeley utiliza novamente o sentido de denominação, todavia, relacionado agora à natureza dos números: “Duas coroas (*crowns*) são chamadas

⁷ Cf. Berkeley, 1843, p. 29. A referência dessa obra será a partir da tradução para o inglês, realizada em 1843 por Whight, G. N.

(called) dez xelins (*shillings*), daí pode surgir a natureza dos números” (Berkeley, PC, §759). Está claro que a atenção de Berkeley volta-se para o problema da denominação. A acepção assumida é a mesma de nomeação, isto é, a afirmação de Berkeley versa sobre a possibilidade de nomear certa quantidade de dinheiro de duas maneiras distintas: de coroa ou de xelim. Todavia, a novidade é a relação existente entre o problema da nomeação e a natureza dos números. Compreender o que permite chamar “duas coroas” por “dez xelins” forneceria, ao mesmo tempo, a possibilidade de saber o que é o número. Nesse sentido, se o objeto da aritmética são os números, ao evocar um problema especificamente linguístico para as reflexões a respeito desse objeto, só parece confirmar que Berkeley deu grande importância ao caráter verbal dessa disciplina. São as próprias palavras de Berkeley, na entrada 766, dos *Comentários filosóficos*, que confirmam: “Nos problemas *aritméticos* os homens não buscam nenhuma ideia de *número*. Eles somente buscam uma *denominação*. Isso é tudo o que pode ser útil a eles” [ênfase minha] (Berkeley, PC, §766). Aqui se apresenta explicitamente a articulação entre *aritmética* e *denominação*. Além disso, o que Berkeley chama de “ideia de número” entra como um dos elementos centrais da discussão, mesmo que seja para negá-la como objeto dos problemas aritméticos. A investigação agora toma um rumo no sentido da necessidade de esclarecer o que é o número. Mais precisamente, cabe saber a diferença entre conceber o que seria o número enquanto “ideia” ou enquanto “denominação”. Além disso, é indispensável saber por que Berkeley aceita um e não o outro. Compreender esses pontos está intimamente relacionado ao problema da natureza do objeto da aritmética e da inteligibilidade, como apresentado na introdução. Pois tal problema nasce no contexto da afirmação de que a aritmética não realiza “comparação de ideias”. Como será visto, essa é uma investigação a ser feita articulando-se o conceito de número com o que Berkeley concebe sobre a própria natureza linguagem em geral.

1.4 *Das duas possíveis interpretações de número*

Já foi dito que o texto dos *Comentários filosóficos* trata de anotações que o jovem Berkeley realizou para futuras investigações. Um exemplo é o seu *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano* (1710). Ali novamente ele tematiza a aritmética, relacionando a outros grandes temas de sua filosofia. Conceituar o que é o *número* entra

como uma de suas principais tarefas. Pode-se afirmar que a discussão acerca do *número* acontece a partir de duas teses: (t.1) concepção materialista de número; e (t.2) concepção abstrata de número.⁸ Para compreendê-las, é conveniente esclarecer que Berkeley considera Locke com sendo um dos principais adversários quanto ao conceito de número.

1.4.1 *Concepção materialista de número*

Assim, quanto à primeira tese, o que está em questão é uma divisão adotada entre qualidades primárias e secundárias. Tal divisão se compromete com uma concepção materialista, isto é, de que existe fora da mente uma substância material não pensante.⁹ Assumindo isso, enquanto as qualidades primárias residem na matéria, as qualidades secundárias seriam qualidades presentes somente na mente, ainda que suas origens sejam a própria matéria.¹⁰ As palavras de Locke, presentes em seu *An essay concerning human understanding* (1690), defendem essa interpretação quanto à matéria:

Primeiro, o volume, a figura, o número, a situação e o movimento ou o repouso de suas partes sólidas. Essas [qualidades] estão neles [nos corpos], se percebamos ou não; e quando [os corpos] tem um tamanho que possamos percebê-los, temos por meio delas uma ideia da coisa com é em si mesma, como acontece com as coisas artificiais. Chamo essas [qualidades] de qualidades primárias.

Segundo, o poder que, em razão de suas qualidades primárias insensíveis, está em qualquer corpo para operar conforme uma maneira peculiar sobre qualquer um de nossos sentidos, e, por isso, produzir em nós as diferentes ideias de diversas cores, sons, odores, sabores, etc. Essas [qualidades] são usualmente chamadas se qualidades sensíveis. (Locke, *Essay*, II, vii, §23).

Algumas linhas a diante, Locke ainda afirma:

As primeiras dessas qualidades [as qualidades primárias], como tem sido dito, penso que podem ser chamadas de qualidades reais, originais ou primárias, porque elas estão nas coisas mesmas, sejam elas percebidas ou não. E é sobre suas diferentes modificações que depende as qualidades secundárias. (*Ibidem*).

⁸ Vários comentadores discutem o conceito de número na filosofia de Berkeley. No entanto, nenhum tem tematizado tal conceito a partir da divisão feita aqui. Um exemplo é o caso de Robles que – mesmo se referindo ao problema do materialismo e do abstracionismo acerca da discussão sobre o que é o número – utiliza o termo *descriptivismo* para tratar de tal assunto. Sua tese é que Berkeley tem uma posição antidescriptivista de número, isto é, o número não pretende dar uma descrição do que é o mundo. Cf. Robles, 1993, p. 102-9.

⁹ Cf. Berkeley, PHK, §9.

¹⁰ Cf. Berkeley, PHK, §10.

Destaca-se, nas palavras de Locke, o fato de se classificar o número como uma qualidade dos corpos, independentemente dos sentidos, isto é, como sendo qualidade primária. A tese expressa em (t.1), portanto, resulta em conceber a matéria como fonte para a mente daquilo que ela concebe como número. Em outros termos, esse conteúdo mental nada mais seria do que a *ideia* de número. Nesse sentido, a mente é submissa, pois recebe da matéria aquilo que ela assume como número. Porém, tal concepção materialista de número é imediatamente rejeitada por Berkeley:

Que o número é inteiramente uma *criação da mente*, ainda que as demais qualidades sejam admitidas existir fora dela, será evidente a qualquer um que considere que uma mesma coisa pode comportar uma diferente denominação numérica, conforme a mente a contemple de diferentes aspectos. Assim, a mesma extensão pode ser um, três ou trinta e seis, segundo a mente a considere com referência a uma jarda, a um pé ou a uma polegada. [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §12).

O que é central no argumento é a possibilidade de estabelecer as várias denominações de unidade de medida, ou seja, o número não é constante, absoluto. Um valor numérico pode ser estabelecido a partir de vários outros tipos de unidades numéricas. Assim, 1 jarda é ao mesmo tempo 3 pés e 36 polegadas. Esse é exatamente o mesmo problema identificado na entrada 759, dos *Comentários filosóficos*. Ao invés de dinheiro (seja *coroa*, seja *xelim*), agora explicitamente Berkeley, nos *Princípios*, utiliza denominações numéricas. É possível concluir que Berkeley manifesta a mesma interpretação nos dois textos, ou seja, a de que o número deve ser uma criação da mente.¹¹ Se existe a possibilidade de variar a denominação numérica, isso significa que a mente tem liberdade para determinar a unidade a ser considerada. Há, portanto, a presença de uma *arbitrariedade* para determinar o que é o número. Isso vai contra a interpretação materialista de número. Caso o número fosse uma *ideia* que teve origem na matéria, não existiria a possibilidade de variação e, da mesma maneira, de estabelecer as múltiplas denominações numéricas. Assim, a fonte do que é o

¹¹ Vale acrescentar ainda outra afirmação de Berkeley, dos *Comentários*, para se observar a semelhança de tese dos dois textos: “O número não se encontra em nenhuma coisa exterior à mente, porque é a mente, ao considerar as coisas como uma, que forma ideias complexas delas. É a mente que as combina em uma e que, por considerar suas ideias de outra maneira, pode fazer uma vintena (*score*) do que em um momento era apenas um” (Berkeley, PC, §104).

número só pode repousar na própria mente. É isso que está dito, na continuação do parágrafo 12, dos *Princípios*, quando Berkeley concebe o número como algo relativo:

O número é tão visivelmente *relativo*, e *dependente* do entendimento humano, que é estranho pensar como alguém lhe daria uma existência absoluta sem a mente. Nós dizemos: um livro, uma página, uma linha. Todas essas são igualmente unidades, embora algumas contenham várias outras. E em cada instância está claro que a unidade relata alguma particular combinação de ideias arbitrariamente juntadas pela mente. [ênfase minha] (*Ibidem*).

Portanto, a concepção materialista de número implica a impossibilidade da mente ser ativa, de ter a liberdade para indicar como quiser a unidade de medida a ser utilizada. É a mente que “arbitra”, ou seja, ela *sempre* decide o que se usará como unidade para estabelecer as medidas. Nesse sentido a unidade depende de uma ação da mente.

A rejeição de Berkeley de que o número seja uma qualidade primária (como sendo algo existente fora da mente) impede de imediato que as denominações numéricas contenham uma dependência de algo que extrapola o domínio mental. Porém, a pergunta que cabe agora é a seguinte: recusar a tese materialista de número (t.1) leva à recusa da tese abstrata de número (t.2)? Essa é uma questão facilmente respondida caso se assuma a seguinte interpretação: a concepção materialista é a fonte da concepção abstrata. Isso significa que a concepção abstrata seria somente uma maneira de descrever como a mente recebe e trata o que está fora dela. Nessa interpretação haveria uma dependência completa da mente com o que é externo. Assim, como a tese (t.1) é rejeitada, então a tese (t.2) deveria também ser rejeitada.

Contudo, a situação parece ser um pouco mais complicada. Pois, caso existisse essa correlação direta entre (t.1) e (t.2), não haveria a necessidade de assumir aqui a própria divisão entre as duas teses. Em outras palavras, (t.2) seria *parte-dependente* de (t.1). De tal modo, bastaria rejeitar somente essa última tese. Mas o que se vê no texto de Berkeley é uma tentativa de ir muito além. Há ali a preocupação em recusar uma concepção *intelectual* errônea de número: aquela que aceita a existência de algo interno à mente associado às denominações numéricas e que permitiria compreender a natureza do número. Isso estaria associado à concepção de “ideia abstrata de número”:

Tem sido pensado que a *aritmética* tem as ideias abstratas de *número* como seu objeto. Da qual, para compreender as propriedades e as relações mutuas, supôs-se não fazer parte do conhecimento especulativo. A opinião de uma natureza pura e intelectual dos números em abstrato tem fornecido a esses estima entre os filósofos, que parecem ter afetado uma incomum sutileza e elevação do pensamento. Essa opinião tem emprestado valor às mais insignificantes especulações numéricas que na prática não servem para nada senão para divertimento, e, por essa razão, tem contagiado tanto a mente de alguns que eles imaginaram profundos *mistérios* envoltos nos números, e tentaram explicar coisas naturais por meio deles. [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §119).

Nesse trecho, ao mencionar a opinião de uma “natureza pura e intelectual” do número, torna-se evidente que Berkeley assume a possibilidade do número ser interpretado, pelo seu oponente na discussão, como algo resultante somente da mente. Não há, nesse caso, a direta necessidade de admitir que a origem do conteúdo “puro” e “intelectual” do número esteja fora da mente, pois, caso tivesse, ele não seria “puro” e “intelectual”. É por isso que aqui se faz a distinção das teses (t.1) e (t.2).

Por outro lado, é claro que, ao refutar a tese (t.1), Berkeley enfatiza a total dependência do número em relação à mente. De certa forma há um comprometimento com a natureza intelectual do número. No entanto, agora, existe algo diferente na sua investigação. Sua atenção volta-se para (t.2) no sentido de realizar uma análise de algo equivocado na perspectiva “pura e intelectual”. A saber: que o número seja resultado de uma concepção equivocada de abstração, algo que resultaria na pretensa “ideia abstrata de número”. Isso teria se tornado um dos empecilhos para o desenvolvimento da aritmética. Está manifesto que Berkeley se contrapõe a uma concepção comumente aceita em seus dias, tanto por matemáticos como por filósofos, de que a aritmética é uma ciência da abstração.¹²

1.4.2 *Concepção abstrata de número*

A primeira vez que Berkeley trata, nos *Princípios*, da noção de ideia abstrata, ele o faz no contexto de uma crítica acerca da linguagem. É ainda na introdução que ele se

¹² Entre os matemáticos, é interessante citar a opinião de Barrow. Para ele a matemática estava dividida entre pura e mista. O que a diferenciava era o grau de abstração que a mente realizava quanto à matéria, à circunstância material e aos acidentes. Assim, aritmética poderia ser pura e aplicada. A aritmética pura trata dos números abstratos; e a aplicada das propriedades dos objetos finitos, particulares. Cf. Jesseph, 1993, p. 100.

preocupa em compreender se a linguagem não está sendo prejudicada ao se assumir nela a existência de ideias abstratas naquilo que a estrutura. Por outro lado, ao voltar-se para aritmética, Berkeley não deixa de relacionar o problema da suposta utilização da ideia abstrata de número com o que acontece com a linguagem. Para isso, com o objetivo de esclarecer a tese (t.2), é conveniente explorar a seguinte passagem do texto:

Já consideramos antes, no parágrafo 13, a unidade em abstrato, e, a partir do que foi dito na Introdução, segue-se claramente que não existe tal ideia. Mas, definindo-se número como uma *coleção de unidades*, podemos concluir que, se não existe tal coisa como unidade ou unidade em abstrato, não existem ideias de número em abstrato denotadas pelos nomes e algarismos (*figures*) numéricos. (Berkeley, PHK, §120).

São quatro os aspectos que ali se destacam:

- (i) Não existe unidade ou unidade em abstrato;
- (ii) Número é uma coleção de unidades;
- (iii) Não existe número em abstrato;
- (iv) Nomes e algarismos numéricos não denotam ideias abstratas.

É em (iv) que a semelhança com o que acontece na linguagem está mais flagrante. É incontestável que a preocupação é a respeito de algo também pertinente à linguagem: o problema de saber como as palavras tornam-se significativas. Ainda que se diferencie o nome do número e dos algarismos (desenhos que se faz para indicar esses nomes), lhes é comum a dificuldade de compreender como eles adquirem significado.

Se boa parte do que motiva a investigação neste capítulo é o de saber o que é objeto da aritmética, esses quatro pontos destacados acima parecem fornecer afirmações que dariam conta de produzir uma resposta. Portanto, compreender o alcance do que está proposta ali se torna tarefa daqui por diante.

No entanto, manifesta-se de maneira clara neles, principalmente em (iv), que uma compreensão adequada exige o domínio de temas sobre a linguagem. O tema da inteligibilidade parece passar por esse tópico, pois, para Berkeley, é a partir do conceito de ideia abstrata que ele evita associar qualquer outro tipo de ideia ao conceito de número, para justificar a noção de “puro” na aritmética e álgebra. Desse modo, antes de desenvolver os pontos (i), (ii), (iii) e (iv), e por sua vez o que se apresenta no mencionado parágrafo

13, dos *Princípios*, será importante fazer uma *digressão* para primeiramente investigar questões especificamente da filosofia berkeleyana da linguagem. Entre essas questões estão os problemas de saber o que é uma ideia abstrata e como as palavras possuem significado. Isso permitirá, mais adiante, retomar todos esses pontos listados acima.

1.4.2.1 *Sobre a impossibilidade de formar ideias abstratas*

O primeiro elemento que interessa é determinar, na perspectiva de Berkeley, o que alguns pretendem que seja *ideia abstrata*. Na introdução, aos *Princípios*, ele coloca a ideia abstrata como sendo resultado de um processo de abstração, ou seja, de uma atividade de separação mental. Porém, haveria dois modos de realizar essa separação mental que, por sua vez, resultaria em duas categorias de ideias abstratas. No primeiro modo, concebe-se que qualidades percebidas sempre juntas em um objeto podem sim ser separadas entre si pelo espírito e ser analisadas uma independentemente da outra. Eis um exemplo dado:

...existe percebido pela vista um objeto extenso, colorido e móvel; o espírito divide esta ideia mista ou composta em suas partes simples que a constituem e, considerando cada uma por si própria, isolada do restante, forma as ideias abstratas de extensão, cor, movimento. (Berkeley, Intro, PHK, §7).

Nesse sentido, a ideia abstrata é definida como resultado de um processo de separação realizado pela razão, ou seja, é separação de algo que os sentidos nunca encontrarão separado de outras coisas.

O outro modo de separação ocorre não somente a partir da simples divisão do que é percebido conjuntamente. Acrescenta-se agora uma nova tarefa: encontrar o que é comum a todos os particulares analisados. Contudo, o que é comum não pode em nenhum momento se particularizar em algum indivíduo:

Por exemplo, quando a mente observa que Peter, James e John se assemelham entre si em virtude de certas características comuns de aparência e outras qualidades, deixa de lado, na ideia complexa ou composta que ela tem de Peter, de James ou de qualquer outro homem em particular, o que é peculiar a cada um e retém unicamente o que é comum a todos. E assim forma uma ideia abstrata na qual todos os indivíduos particulares participam igualmente, abstraindo por completo e excluindo todas as circunstâncias e diferenças que poderiam determiná-los a alguma existência. (Berkeley, Intro, PHK, §9).

Assim, as ideias abstratas são compreendidas por Berkeley como resultado de uma busca por *noção geral* das coisas, ou ainda, uma *ideia geral abstrata*.

Após apresentar os dois pretensos tipos de ideias abstratas, Berkeley não demora em rejeitá-las. A fonte para o argumento contra elas reside em seu “empirismo”, cristalizado em sua filosofia do *esse est percipi* (ser é ser percebido). Mais especificamente, tal filosofia limita o que a mente pode produzir ao trabalhar com o objeto do conhecimento. Para Berkeley, qualquer ideia presente na mente necessariamente aponta para algo particular, percebido pelos sentidos:

Posso imaginar um homem de duas cabeças, ou a parte superior de um homem unida ao corpo de um cavalo. Posso considerar a mão, o olho e o nariz, cada qual isoladamente, abstraídos ou separados do resto do corpo. Mas, nesse caso, seja qual for a mão ou o olho que eu imagine, eles deverão ter alguma forma e cor particulares. (Berkeley, Intro, PHK, §10).

Vê-se que Berkeley não nega a existência de uma espécie de separação (ou abstração) entre ideias. A imaginação pode sim separar ideias, porém somente aquelas que foram alguma vez percebidas separadamente pelos sentidos. A mente separa unicamente aquilo que *in re* seja possível de ser percebido separadamente. Portanto, o que Berkeley nega é a possibilidade da mente produzir ideias abstratas, pois, para produzi-las, depende-se de uma incapacidade da mente: separar algo que nunca foi ou será percebido separadamente. Assim, qualquer que seja a ideia, não se atinge com ela uma independência do que é particularmente percebido.

No caso dos números, já começa a ficar claro que uma tentativa de lhes associar um conceito baseado em uma ideia obtida a partir de uma abstração será completamente rejeitada por Berkeley. Para ele, a questão seria: como pode haver ideia abstrata de número uma vez que o próprio conceito de ideia abstrata não é possível? Vale ainda investigar mais esse problema da abstração e da linguagem antes de explorar mais o problema dos números. Será de interesse compreender o problema dos termos universais relacionados ao conceito de ideia abstrata. Entra em questão saber como Berkeley resolve o problema da universalidade dos termos. Isso será importante para compreender se o próprio número pode se tornar universal.

1.4.2.2 *As ideias abstratas e o problema do significado dos termos universais*

Um questionamento que Berkeley parece ter feito é sobre a necessidade de existir ideias abstratas. Na introdução dos *Princípios*, após os argumentos contra as ideias abstratas, ele volta sua atenção para a linguagem. Berkeley apresenta a desconfiança de que ela é a possível fonte para essa demanda.¹³ O que justifica tal desconfiança é o fato de Berkeley localizar nela a existência de várias teses errôneas. Uma delas é algo que está ligado ao problema do significado dos termos universais.¹⁴ Nas palavras de Berkeley:

... pensou-se que todo nome tem, ou deveria ter, somente um único significado preciso e determinado, o que inclinou os homens a pensar que existem certas determinadas ideias abstratas que constituem a verdadeira e única significação imediata de cada nome geral, e que é pela mediação dessas ideias abstratas que um nome geral vem a significar alguma coisa particular. (Berkeley, Intro, PHK, §18).

Trata-se aqui de uma tese comprometida com uma teoria do significado: aquela que assume que há significado somente quando há a ligação entre a palavra e um *único* referente. Assumindo-se tal tese para a linguagem como um todo, uma conclusão surge quando se considera a determinação do significado de termos gerais: acreditou-se que toda palavra geral exigiria um único referente. Como o referente não pode ser particular, pois o termo em questão é geral, concluiu-se que a palavra geral, para ter significado, deveria se referir a uma ideia geral abstrata.¹⁵ Desse modo, segundo Berkeley, essa seria uma das fontes de inspiração para a origem da teoria da abstração. Locke é tratado por ele como um dos principais divulgadores dessa concepção de significado. A afirmação de Locke (citada nos

¹³ Cf. Berkeley, Intro, PHK, §18.

¹⁴ É possível localizar outras duas teses que, no conjunto dos argumentos de Berkeley contra o abstracionismo, não deixam de ter grande importância: “a linguagem não tem nenhuma outra finalidade a não ser a comunicação de nossas ideias”; e “cada nome significativo representaria (*stands for*) uma ideia” Cf. Berkeley, Intro, PHK, §19.

¹⁵ Há a necessidade de mais um esclarecimento. Berkeley parece recusar tal tipo de teoria do significado inclusive quando se considera os nomes próprios. Eles não podem ser entendidos como possuindo de maneira absoluta somente um referente que lhes assegura significado. Berkeley de modo algum nega a possibilidade de nomes serem empregados para se referir a coisas particulares: Cf. Berkeley, ALC, IV, §12; *Ibidem*, 3D, I, p. 174. Porém, contata-se que um nome particular apresenta como referência um conjunto de coisas particulares. Um exemplo é o nome “maçã”, como apresentado nos *Princípios*: Cf. Berkeley, PHK, §1. Ali Berkeley está pensando em um objeto particular nomeado como “maçã”. Esse nome aponta para uma reunião de ideias particulares como: cor, sabor, peso etc. Mesmo que a própria maçã seja pensada de modo particular, é o conjunto de percepções particulares que fornece o significado para a palavra “maçã”. Isso é muito diferente de afirmar que o significado do termo ocorre devido a uma única e absoluta referência.

Princípios) que indica isso é a seguinte: “As palavras tornam-se gerais ao serem convertidas em signos de ideias gerais” (Locke, *Essay*, III, iii, §6).¹⁶ No entanto, visto que seu diagnóstico não é favorável à doutrina das ideias abstratas, coube a Berkeley reformular a compreensão da maneira como os termos gerais adquirem significado.

A solução de Berkeley a respeito da universalidade repousa sobre dois aspectos. De um lado está a *ideia geral* e de outro, o *termo geral*. É evidente que a linguagem se torna objeto de pesquisa somente quando Berkeley investiga seus objetos, a saber, os termos, as palavras, os nomes. Porém, ele só apresenta sua solução para o plano linguístico tendo em vista o que acontece com as ideias gerais:

... se quisermos dar um significado a nossas palavras e falar somente do que podemos conceber, acredito que reconhecemos que uma ideia considerada em si é particular, mas ao representar ou significar (*represent or stand for*) todas as outras ideias particulares do mesmo tipo torna-se geral. (Berkeley, Intro, PHK, §12).

Primeiramente, é necessário ressaltar que aqui são somente as ideias que estão em sendo consideradas. A generalização para a linguagem acontece em outro momento. Todavia, nessa citação, Berkeley não nega a existência de ideias gerais. Sua queixa é a respeito da existência de ideias gerais abstratas (além, evidentemente, de elas serem tratadas como elementos fornecedores de significado dos termos gerais). Na citação, a novidade que se pode destacar repousa no que está por trás de “representar” e “significar”. Ser ideia geral é “representar” ou “significar” todas as outras ideias particulares. Mas o que Berkeley pretende com isso? O problema da universalidade agora está em saber o que tais termos indicam. Berkeley, ao utilizar a disjunção “ou”, parece tratá-los com sinônimos. Isso, contudo, ainda é algo que necessita de mais informações para se confirmar.

Uma resposta pode surgir ao se investigar primeiramente o próprio conceito de *representação*, para Berkeley.¹⁷ Há outra passagem, onde a universalidade está novamente em questão, que pode auxiliar nessa tarefa:

¹⁶ Para uma discussão sobre os erros interpretativos por parte de Berkeley das teses de Locke: Cf. Bennett, 1971, pg. 52-58; Ferraz Neto, 2005.

¹⁷ É importante aqui não confundir com o clássico problema da *representação* apresentado por Descartes em suas *Meditações*. Berkeley, nesse momento, não está preocupado com a correspondência entre ideias e coisas do mundo exterior, algo que é central nas reflexões de Descartes. Por outro lado, não se pode negar que

*A universalidade, até onde posso compreendê-la, não consiste na natureza ou na concepção positiva e absoluta de alguma coisa, mas na relação que ela tem com as coisas particulares significadas ou representadas (*signified or represented*) por ela. É em virtude disso que as coisas, os nomes ou as noções, sendo em sua própria natureza *particulares*, tornam-se *universais*. [ênfase minha] (*Ibidem*, §15).*

Diferente da citação anterior, aqui Berkeley trata em pé de igualdade a universalidade tanto para o plano das ideias (coisas) como para o da linguagem. Isso confirma que, para Berkeley, ambos utilizam o mesmo paradigma. O que acontece com as ideias será, também, o modelo para a solução de como as palavras tornam-se gerais. Contudo, a novidade importante a ser destacada na citação, é o termo “relação”. Observa-se que agora “ser universal” é “ter relação”. Mas com o que? A resposta é: com os particulares. Nisso está subentendida uma concepção de *classe*. Berkeley está supondo que a universalidade só é possível quando uma ideia possui relação com uma *classe* de particulares, estabelecida quando a mente seleciona determinadas características presentes nos particulares.¹⁸ Na citação anterior (a do parágrafo 12), há o comprometimento com a concepção de classe. Berkeley só trata o que é universal como sendo *representante* de “ideias particulares do mesmo tipo”.¹⁹ Pois, só é do mesmo “tipo” aquilo que compartilha a mesma característica. Ao compartilhar tal característica surge a classe. Desse modo, pode-se formular a primeira

Berkeley incluiu em sua agenda, ainda nos *Princípios*, esse problema tratado por Descartes, mesmo que seja para tomar o rumo distinto do cartesiano, por assumir uma posição imaterialista. Ou seja, Berkeley nega que exista uma substância material fora e independente da mente. Berkeley reduz a realidade às ideias. Tudo o que se considera como material nada mais é do que ideia. Desse modo, o que se poderia chamar, em Descartes, de representação (presente na mente) de uma realidade exterior a ela passa a se constituir, em Berkeley, a própria realidade. Essa negação da existência de uma realidade material externa à mente ficou conhecida entre os comentadores como a posição imaterialista de Berkeley. Para mais detalhes: cf. Grayling, 2005, p. 166-189.

¹⁸ No próximo capítulo, onde se investiga o objeto da geometria, essa questão da “mente selecionar” voltará à tona para considerar o problema das demonstrações geométricas. Como será visto, com mais detalhes, comentadores se referem a essa concepção de Berkeley como: “atenção seletiva”.

¹⁹ Em outro momento, Berkeley manifesta tal concepção seletiva da mente, no sentido de formular uma *classe*. Trata-se da demonstração de uma proposição da geometria. Em uma demonstração sobre triângulos, não são todas as características deles que são levadas em consideração. A demonstração só é válida a respeito daquilo que a mente selecionou em uma dada proposição. É a partir dessas características que a classe se forma. É o que está em jogo nas seguintes palavras: “(...) embora a ideia que tenho em vista ao fazer a demonstração seja, por exemplo, a de um triângulo retângulo isósceles, cujos lados são de determinada extensão, posso, não obstante, estar seguro de que tal demonstração se estende a todos os demais triângulos retilíneos, de qualquer classe ou tamanho que sejam. E isso porque nem o ângulo reto, nem a igualdade, nem a extensão determinada dos lados estão envolvidos na demonstração” (Berkeley, Intro, PHK, §16).

conclusão: ser *universal* é ser representante de algo. Porém, ser representante é ter uma relação com os elementos particulares de uma classe.²⁰

Até aqui, com as informações levantadas, torna-se possível vislumbrar parcialmente como o conceito de *universalidade*, para Berkeley, se diferencia daquele da teoria da abstração. Retomando rapidamente o problema do conceito de número, para Berkeley, na tentativa também de justificar essa exposição sobre a linguagem, já é possível observar que, ao negar as ideias abstratas, o número não se tornaria universal por denotar ideias gerais abstratas. Por sua vez, a universalidade sugerida, por Berkeley, parece indicar a necessidade de generalizar uma característica presente em um particular, selecionada pela mente para servir como indicativo de uma classe. Porém, questiona-se: quanto a esse tipo de universal, como ficará o próprio conceito de número, uma vez que para Berkeley o número poderá ser considerado como um símbolo puro, independente de ideias particulares? E, ainda, esse objeto da aritmética será universal e *inteligível* para mente mesmo sem ideias?

Voltando para a exposição sobre a linguagem, não estão claros ainda elementos que envolvem esse conceito de *relação* adotado por Berkeley. Primeiramente, é inevitável perguntar aqui qual é o *estatuto* da relação, para Berkeley. Normalmente esse tipo de questão demanda uma resposta sobre o que permite a relação. Mais precisamente, almeja-se saber se ela é algo intrínseco à natureza dos objetos relacionados, independentemente da mente que perceberia a relação; ou se é algo exclusivamente mental, que pressupõe a presença dos objetos relacionados.²¹ Para Berkeley, considerando sua filosofia idealista, torna-se impossível assumir a existência de um conceito de relação independentemente da mente. Resumidamente, Berkeley concebe a relação como resultado de uma ação mental que pressupõe ideias para serem relacionadas. Desse modo, a relação não é especificamente uma ideia, mas é a própria ação da mente que relaciona os objetos. Por exemplo, no caso do universal, a mente seleciona a característica (e, portanto, age) para estabelecer a

²⁰ A teoria das ideias abstratas não suporta essa concepção de classe, pois pretende assegurar a universalidade a partir de algo que exclui a presença dos particulares, ou seja, que é a própria ideia abstrata.

²¹ Para mais detalhes sobre essa interpretação do *estatuto* da relação, em Berkeley: Cf. Berlioz, 2004, p. 160.

comparação entre outras ideias. Assim, sempre haverá, de um lado, os objetos relacionados da classe e, do outro, a mente de constrói a relação. Sem esses dois lados não há relação. Qualquer tentativa de conceber a relação *em si mesma*, sem os objetos relacionados, poderia cair em uma concepção abstrata de relação, algo que Berkeley terminantemente é contra.

Outro problema diz respeito a seguinte pergunta: como é que a ideia geral, ou mesmo os termos gerais, se *relacionam* com os particulares de uma dada classe? Essa questão é importante porque é possível localizar em outras obras filosóficas de Berkeley concepções distintas de relação entre ideias que, conforme assumidas, surgem consequências diretas para noção de significado.

Uma ilustração pode ser feita com o que se encontra no texto *Três diálogos entre Hylas e Philonous* (1713). Ali Berkeley estabelece a diferença entre percepção “imediate” e “mediate”. Quando um dos sentidos percebe alguma coisa diretamente, isso se constitui em uma percepção “imediate”. No entanto, existe, também, a possibilidade daquilo que está sendo percebido imediatamente sugerir à mente outras ideias que só são percebidas por outros sentidos. Essa é uma percepção “mediate”. Eis um exemplo dado pelo personagem Philonous:

... quando escuto uma carruagem passar ao longo da rua, percebo imediatamente apenas o som, mas, a partir da experiência que tenho de que tal som está associado a uma carruagem, sou levado a supor que escuto uma carruagem. É evidente, todavia, que, em verdade e estritamente, nada pode ser ouvido a não ser um som, e a carruagem não é então propriamente percebida pelos sentidos, mas *sugerida* a partir da experiência. [ênfase minha] (Berkeley, 3D, I, p. 204).²²

Quando Berkeley afirma que a carruagem é “sugerida”, está por trás o comprometimento de que ela não é formada somente do som produzido. Porque, por experiências anteriores, o som sempre foi observado tendo a companhia de outras percepções sensíveis. Berkeley concebe como ideia “mediate” da carruagem aquela que leva em consideração o conjunto das experiências sensíveis anteriores. O som, assumido assim, não é uma simples ideia percebida pela audição. Há nele uma *relação* com outros dados sensíveis a ponto do som

²² O mesmo problema a respeito de objetos imediatos e mediatos aparece também em: (Berkeley, ALC, IV, §12).

tornar-se uma espécie de *índice*, isto é, um traço ou sinal de outras percepções que poderão vir a ser percebidas. Há uma relação entre ideias que permite a partir de uma obter outra, porque uma ideia sugere outra. Portanto, com respeito à ideia de carruagem, é nesse sentido de *índice* que se deve compreender o que Berkeley aceita como “sugerir”.

A comparação do que acontece no exemplo da carruagem com as afirmações sobre a universalidade, presentes nos *Princípios* (observadas nas citações acima), manifesta uma grande diferença. Berkeley se compromete com uma concepção de *sugestão* somente no exemplo da carruagem, isto é, essa espécie de movimento intelectual que permite sair de uma ideia e chegar a outra. Por que então, no caso da universidade, Berkeley não utiliza o termo “sugerir” para tratar da relação entre ideias? Isso só é compreendido à medida que se nota no texto a presença de outro tipo de relação. Ali Berkeley está negociando com o caso em que uma ideia e, por sua vez, palavras tornam-se portadoras das características de outras ideias a ponto de se tornarem *substitutatas* das demais.²³ Não está mais em questão obter uma ideia a partir de outra. Torna-se importante, agora, a possibilidade de se considerar uma ideia como substituta das demais ideias que contêm a característica selecionada. Aqui ainda há *relações* entre ideias, porém não existe mais a necessidade de *sugerir* à mente, de maneira distributiva, todos os particulares da classe. A generalização ocorre sem assumir uma delimitação de quantos particulares possivelmente poderão ser percebidos e que pertencerão à classe. É com isso que se obtém o esclarecimento do que Berkeley está tomando como *representante* no problema dos universais: é exatamente a possibilidade de se considerar uma ideia como *substituta* das demais.

É de grade utilidade, para confirmar essa interpretação, explorar o exemplo geométrico fornecido por Berkeley:

... suponhamos que um geômetra esteja demonstrando o método de dividir uma linha em duas partes iguais. Ele traça, por exemplo, uma linha preta de uma polegada de comprimento; essa linha, que em si é particular, é, no entanto geral em relação a seu significado, pois, do modo como aqui é utilizada, representa todas as linhas particulares, *sejam quais forem* (*whatsoever*). Desse modo, o que é demonstrado acerca dela fica demonstrado acerca de todas as linhas, ou, em outras palavras, de uma linha geral. [ênfase minha] (Berkeley, Intro, PHK, §12).

²³ Esse tipo de interpretação, que diferencia *índice* de *substituto*, aparece em: Berlioz, 2000, p. 127-9.

O destaque que deve ser dado aqui é o fato de não existir uma limitação na capacidade de representação da linha que o geômetra constrói na demonstração. Se a linha pode representar “sejam quais forem” as outras linhas, é porque Berkeley está tomando a linha da demonstração como substituta das demais. Portanto, ela torna-se universal quando manifesta uma relação com outras linhas, porém sem a necessária enumeração completa de todas as outras linhas particulares possíveis de serem percebidas e que se encaixam nas características escolhidas para a demonstração.

Há ainda *dois* esclarecimentos pertinentes. O *primeiro* é aquele que envolve a união feita entre os termos “representar” e “significar”. O *segundo* diz respeito ao conceito de “signo” aceito por Berkeley.

Quanto ao primeiro esclarecimento, observa-se, acima, que Berkeley para estabelecer a ligação entre “representar” e “significar” utiliza a partícula disjuntiva “ou”.²⁴ O que deve ser examinado é se as duas palavras estão sendo tratadas como sinônimos. A resposta para esse problema surge rapidamente. Basta observar que Berkeley aplica o mesmo conceito de *relação* entre ideias (do ponto de vista de ser *substituto*) para ambos os termos. Assim, no sentido da universalidade, “significar” algo é, antes de tudo, conter *relação* entre particulares. Por sua vez, isso se constitui em possuir a capacidade de ser substituto dos possíveis integrantes de uma dada classe. Portanto, tal elemento em comum com os dois termos – a saber, o conceito de relação – é aquilo que assegura o fato de Berkeley estar considerando “representar” e “significar” sinonimicamente.

É com esse primeiro esclarecimento realizado que se torna possível contemplar a recusa de Berkeley da tese da linguagem acima mencionada: aquela segundo a qual os termos gerais têm “somente um único significado preciso e determinado”. Ora, se “significar” é compreendido como ser representante de vários particulares, no sentido de ser substituto, está evidente que um termo geral considera várias ideias ao mesmo tempo, pois a universalidade só se estabelece na relação com todos os particulares da classe. São todas essas ideias particulares que darão significado ao termo geral, uma vez que nunca sai de cena a *relação* entre os particulares. É isso que Berkeley enfatiza: “... não existe algo como um significado preciso e definido anexado a cada nome geral, pois todos os nomes

²⁴ Cf. Berkeley, Intro, PHK, §12.

significam indefinidamente várias ideias particulares” (Berkeley, Intro, PHK, §18). Portanto, a suposição de um único significado se compromete com a ligação direta do termo geral com um único referente. Esse seria a própria ideia abstrata, que exclui de si qualquer elemento particular e, por sua vez, a noção de relação entre os particulares de uma classe. Decididamente, é isso o que Berkeley não está disposto a aceitar na determinação do significado dos termos gerais.²⁵

Passando agora para o segundo esclarecimento, há a necessidade de observar o que Berkeley compreende como *signo*. A tese lockeana da universalidade se compromete com um conceito de signo: palavras gerais são *signos* de ideias gerais. No entanto, como já foi visto, isso foi alvo de refutação. Portanto, se a universalidade não surge a partir de ideias abstratas, aparece a demanda de compreender como é que os signos se encaixam na nova perspectiva sugerida por Berkeley.

No contexto do problema da universalidade, é possível dizer que a solução apresentada por Berkeley emprega o termo *signo* em duas situações. Uma é a aplicação para *palavra* (ou nome) e outra para *ideia*.²⁶ No entanto, deve ser advertido que essa diferenciação não tem o propósito de realizar uma exaustiva separação entre dois domínios. O objetivo, mais que tudo, é o de destacar o que há de comum nos dois âmbitos. Especificamente, ambos compartilham justamente aquilo que autoriza Berkeley a tratá-los

²⁵ Existe ainda um caso que Berkeley necessitou refutar. Trata-se de quando um *nome* tem uma *definição*. Poderia ser argumentado que o nome possui um único significado porque a definição faria o nome apontar para uma ideia e não outra. Como exemplo, o nome “triângulo” tem como definição “superfície plana delimitada por três linhas retas”. Assim, “triângulo” apontaria para certa ideia e não outra. Berkeley recusa essa interpretação ao supor que a *definição*, como no caso do “triângulo”, não delimita a quantidade de ideias que podem estar relacionadas entre si: “(...) na definição não se diz se a superfície é grande ou pequena, preta ou branca, nem se os lados são longos ou curtos, iguais ou desiguais, nem qual inclinação os ângulos têm em relação aos outros. Em tudo isso pode haver uma grade variedade e, conseqüentemente, nenhuma ideia estabelecida que determine o significado da palavra *triângulo*” (Berkeley, Intro, PHK, §18). Portanto, a *definição* ainda necessita de uma relação entre várias ideias para dar significado ao nome associado a ela.

²⁶ Essa não é uma novidade de Berkeley, uma vez que o próprio Locke apresenta algo em tal sentido. Locke (Essay, IV, xxi, §4), no contexto da apresentação de sua “doutrina do signo” ou σημειωτική [*semeiotikē*] como um dos ramos do conhecimento, utiliza o termo “signo” como rubrica de *palavras* e de *ideias*. Por outro lado, apesar dessa semelhança, é importante não esquecer as diferenças existentes quanto ao que cada autor assume como *palavra* e *ideia*. Só para lembrar uma delas, Locke compromete-se com a existência de *ideias abstratas*. É delas que muitas palavras, como os termos gerais, adquirem significado. Tal concepção não é aceita por Berkeley, algo já analisado anteriormente. Para um esclarecedor confronto quanto ao que Berkeley e Locke assumem como *ideia* e *palavra*, consultar: McGowan, 1982, p. 231-46.

como *signo*. Isso se esclarecerá a partir do exemplo, já mencionado, da divisão de uma linha:

E, assim como essa linha particular torna-se geral por ser convertida em um signo, do mesmo modo o nome *linha*, que tomada de modo absoluto é particular, por ser um signo torna-se geral. E como essa a linha deve sua generalidade, não por ser signo de uma linha abstrata ou geral, mas por todas as linhas retas particulares que possam talvez existir, da mesma maneira pode ser pensado derivar a generalidade do nome *linha* a partir da mesma causa, isto é, das várias linhas particulares que ele indiferentemente denota. [ênfase minha] (Berkeley, Intro, PHK, §12).

Berkeley manifesta de maneira consciente a diferença existente entre a *palavra* linha e a *ideia* de linha, porque, cuidadosamente na citação, cada caso é tratado de modo individualizado. No entanto, ainda que elas sejam distintas uma da outra, é essencial o que há de comum: o fato de tornarem-se *signo*. A individualização se desfaz quando tratadas assim. Tal atitude não é um detalhe qualquer: revela que Berkeley concebe o *signo* com um caso mais geral, ou seja, nos *Princípios*, sempre será empregado o termo *signo* para designar uma capacidade comum a vários objetos. Isso nada mais é que a capacidade de *ser representante* de particulares. Dessa maneira, tudo o que apresenta tal característica será um *signo*. Novamente a *relação* entre particulares – tomada como aquilo que possibilita algo tornar-se *substituto* de outro – surge de modo fundamental na constituição de mais um conceito berkeleyano. Tal interpretação se confirma ao se observar que, na citação, o termo “denota” é aplicado tanto para a *palavra* quanto para a *ideia* de linha. Ali Berkeley pretende indicar que ambas, quando pensadas no sentido do universal, têm como referência *indeterminadas* linhas particulares concebidas em *relação* umas com as outras. Elas tornam-se signos, pois se relacionam com uma classe de particulares (ainda que não sejam completamente indicados). É dessa classe que os signos adquiririam significado geral.

Concluindo, “ser signo”, “ser representante” e “ter significado” não podem ser compreendidos sem o conceito de *relação*. Além do mais, isso se manifesta como um elemento central para a solução berkeleyana do problema dos universais. É no contexto da universalidade que é comum atribuir a Berkeley o rótulo de nominalista.²⁷ A linguagem, em tal perspectiva, não indicaria a *existência* de uma entidade absoluta e universal. O que

²⁷ Cf. Robles, 1993, p. 102-9; Ayers, 2005, p. 47.

existe são somente os particulares. Um signo (seja uma ideia, seja uma palavra) torna-se geral ao indicar uma propriedade que é comum na relação entre os particulares. A solução agora é dar ênfase à noção de *relação* entre particulares. A universalidade surge de algo onde as únicas entidades existentes são ideias particulares.

1.4.2.3 *O que de fato são os números para Berkeley?*

Voltando à discussão sobre o conceito de número, para Berkeley, agora surgem as condições que permitem compreender com mais profundidade o que os quatro pontos propostos acima apresentam.

Considerando, inicialmente o ponto (iv), ali se afirma que “nomes e algarismos numéricos não denotam ideias abstratas”. A primeira coisa que é possível de explicar é o porquê de Berkeley distinguir os dois termos: “nomes” e “algarismos”. Observa-se que com eles Berkeley pretende indicar elementos distintos. Uma coisa são os nomes dos números, outra são as marcas que designam os nomes; e, mesmo havendo distinção entre eles, um pode designar o outro. Assim, os nomes dos números (como *um, dois, três...*) podem ser designados por determinados caracteres ou algarismos (como 1, 2, 3...). Porém, isso não determina que haja uma relação necessária entre nomes e tais caracteres. Há uma arbitrariedade para se estabelecer a relação entre eles, pois mesmo que os nomes permaneçam os mesmos, os caracteres podem se modificar. Essa perspectiva encontra-se expressa, por exemplo, no parágrafo 121, dos *Princípios* quando se considera a origem da notação numérica criada pelos “árabes ou hindus”. Berkeley ali exalta a eficácia dessa notação em detrimento de outros tipos de notações até então criadas. Sua exaltação tem foco no que diz respeito somente aos “caracteres ou algarismos” e não quanto aos nomes. A superioridade da nova notação reside no fato de apresentar uma nova relação entre tais marcas. Os nomes dos números teriam permanecido os mesmos, mas as marcas que designam os nomes dos números se alteraram, facilitando os cálculos que poderiam ser feitos por outros tipos de caracteres até então existentes. Portanto, nome numérico e seu respectivo caractere, além de serem distintos um do outro, têm sua relação que é determinada *arbitrariamente*. Há a possibilidade do nome de um número qualquer ser designado não exclusivamente por um determinado caractere.

Outro elemento que deve ser explicado, quanto ao ponto (iv), diz respeito ao fato de Berkeley utilizar um conceito de “denotação”: está em questão saber quais referências são designadas pelos signos da aritmética. Isso conduz a discussão para o problema do *significado* dos nomes e algarismos numéricos. O objetivo, de Berkeley, parece ser o de avaliar qual seria a referência que torna possível dizer que os nomes e os algarismos numéricos têm significado. Segundo Berkeley, erroneamente pensou-se que eles conteriam significados por designarem “ideias abstratas de números”. Vale lembrar que ele recusa a existência de número em abstrato. É exatamente em (iii) que isso é formulado. Contudo, essa recusa conduz a outro conceito. O que se afirma em (iii) é fruto de outras duas afirmações, cujo objeto principal é o conceito de *unidade*: (i) não existe unidade ou unidade em abstrato; e (ii) número é uma coleção de unidades. Assim, cabe pesquisar o que é a unidade numérica, para Berkeley, com o objetivo de entender a recusa do número em abstrato, uma vez que o conceito de número subentende o de unidade. É também após isso que o problema da inteligibilidade poderá ser abordado adequadamente.

As seguintes palavras de Berkeley servem como ponto de partida para a investigação sobre a *unidade*:

Sei que alguns sustentam que a unidade é uma ideia simples e não composta, que acompanha todas as demais ideias na mente, mas não encontro em mim nenhuma ideia que corresponda à palavra *unidade*, e, se a tivesse, creio que não poderia deixar de encontrá-la. Pelo contrário, deveria ser a mais familiar ao meu entendimento, uma vez que se diz que ela acompanha todas as demais ideias e que é percebida por meio de todos os caminhos da sensação e reflexão. Para não me alongar, trata-se de uma *ideia abstrata*. (Berkeley, *PHK*, § 13).²⁸

No que é dito aparecem duas características importantes que estariam associadas àquilo que muitos compreendem ser a unidade. Para eles, a unidade seria: (a) uma ideia simples; e (b)

²⁸ Provavelmente Berkeley escreveu esse parágrafo pensando novamente em refutar o que Locke escreve a respeito da unidade no *Essay*: “Como entre todas as ideias que temos não há nenhuma que seja sugerida à mente por mais vias do que a de unidade ou de uno, não há, portanto, ideia que seja mais simples. (...) É, por conseguinte, a mais íntima aos nossos pensamentos, do mesmo modo que, pela sua combinação com todas as demais coisas, é a ideia mais universal que temos” (Locke, *Essay*, II, xvi, §1). Para detalhes dessa interpretação lockeana do conceito de número em relação à réplica de Berkeley: Cf. Jesseph, 1993, p. 102.

é uma ideia que acompanha todas as outras ideias. A característica (a) consiste na *simplicidade*, ou seja, é algo que não pode ser reduzido a partes menores. A característica (b) é a apresentação de uma *universalidade*, ou seja, a unidade não é algo exclusivo de uma ideia particular. Não se trataria, por exemplo, de *uma* página, *um* capítulo, de *um* livro. Em outras palavras, ainda que possa ser aplicada ao que é particular, assume-se que a unidade é uma ideia que possui independência de quaisquer que sejam os particulares. Não obstante, está claro que o argumento de Berkeley contra essa concepção de unidade parte de uma espécie de *exame* das ideias. Berkeley desafia a procurar na mente (e, assim, constituindo-se como exame) algo que contenha as propriedades (a) e (b). Como elas estão associadas entre si e apontam para uma independência do que é particular, em sua concepção, a descrição da unidade em tais termos faz lembrar a pretensa formulação de uma ideia abstrata. Portanto, é por isso que Berkeley não demora em concluir negativamente quanto à possibilidade de encontrar essa espécie de unidade.

É possível compreender ainda mais a recusa de Berkeley da unidade como sendo “ideia simples”. Basta lembrar o que foi analisado do parágrafo 12, dos *Princípios*, na discussão acima de (t.1). Observou-se que Berkeley concebe o número como criação da mente. De maneira *arbitrária* a mente pode escolher qualquer coisa como unidade de medida. Logo, isso se torna incompatível com a concepção de simplicidade, algo expresso pelo conteúdo de (a). Almejar uma unidade em seu estado mais simples é tentar delimitar a existência da unidade. Desse modo, existiria somente *uma* unidade. Visto que a unidade é sempre relativa, resultado de uma escolha, portanto, não existirá a unidade em estado mais simples e, por conseguinte, somente uma unidade. O que é em um momento tomado como unidade pode se tornar agregado em outro e vice-versa. Nem todo processo de mensuração utiliza a mesma unidade. Portanto, a arbitrariedade é incompatível com a ideia de unidade em seu estado mais puro de simplicidade.

Mas, para Berkeley, isso resulta na eliminação de qualquer conceito de unidade? Na afirmação (i), foi apresentado que Berkeley nega a existência de “unidade ou unidade em abstrato”. A disjunção não pretende assegurar que Berkeley recusa todo e qualquer tipo de unidade. Ela relaciona algo que alguns chamam de unidade, mas que, para Berkeley, deve ser chamada de “unidade em abstrato”. A palavra “unidade” sozinha indica

o conceito errôneo pretendido; e as palavras “unidade em abstrato” revelam a visão de Berkeley do que na verdade é tal conceito errôneo. É possível observar que Berkeley aceita um conceito de unidade, ou seja, é nesse sentido relativo, como sendo sempre o resultado de uma escolha. Eis, portanto, o conceito de unidade aceito por Berkeley. Tal definição de unidade não impede que o conceito de número seja formulado, como dito em (ii): enquanto “coleção de unidades”. Porém, o número também deve ser visto como resultado da arbitrariedade, como resultado de uma escolha. Essas concepções parecem não contrariar as definições apresentadas no Livro VII, dos Elementos de Euclides:

1 – Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma;

2 – E número é a quantidade [πλῆθος] composta de unidade (Euclides, 2009, p. 269).²⁹

Número enquanto “coleção de unidades” ou como “quantidade composta de unidade” tem diferença? Segundo Heath³⁰, contemporâneos de Euclides utilizaram termos diferentes para definir número. Em alguns momentos, número foi concebido como “coleção de unidades” (μονάδω σύστημα). Em outros momentos, ele foi concebido como “quantidade determinada” (πλῆθος ὁρισμένον). No entanto, Heath trata esses termos como sinônimos. Da mesma maneira, é possível defender que, do ponto de vista de Berkeley, nesse contexto da definição de número, “coleção” é sinônimo de “quantidade”. Além do mais, acredita-se que a definição de Euclides foi fonte da concepção de número como *coleção de unidades*, partilhada entre vários matemáticos no período de Berkeley.³¹

A recusa da unidade e do número em abstrato deixa em aberto uma questão importante: qual é a universalidade que Berkeley aceita na aritmética? De um modo geral, pode-se dizer que ele estava ciente do papel desempenhado pela universalidade na

²⁹ Aqui a tradução dos *Elementos* de Euclides, para o português, que está sendo utilizada é aquela realizada por Irineu Bicudo. No entanto, Heath (Euclides, 1968, v.2, p. 277) traduz especificamente o termo grego πλῆθος por “multitude” ao invés de “quantity”, que seria o termo em inglês mais imediato àquele usado por Bicudo em português. Será adotada aqui essa opção feita por Bicudo, uma vez que ela parece revelar mais o que pretende Euclides: quantidade (ainda que composta de unidade) é aquilo que pode ser colocado em comparação, ou melhor, que se pode estabelecer proporções.

³⁰ Cf. Euclides, 1968, v.2, p. 280.

³¹ Entre esses matemáticos estaria André Tacquet: Cf. Jesseph, 1993, p. 101.

constituição do conhecimento. Eis a passagem que indica o consentimento dessa necessidade:

Sei que se insiste muito no fato de todo conhecimento e toda demonstração se referirem a noções universais, com o que estou plenamente de acordo. Mas nesse caso não me parece que essas noções sejam formadas por meio da *abstração* segundo a maneira antes mencionada. (Berkeley, Intro, PHK, §15).

Como esclarecido em (b), há no conceito rejeitado de unidade a pretensão pela universalidade. Se Berkeley não aceita uma concepção de universalidade que aponta para uma perspectiva abstracionista de unidade e de número, mas por outro lado manifesta a demanda pela universalidade, falta esclarecer como se salva a universalidade naquilo que ele concebe como unidade e, por sua vez, como número. Porém, na aritmética, o problema que se põe surge da própria concepção de unidade e número como resultado da *arbitrariedade*: para haver universalidade é necessário já ter escolhido a unidade de medida? Em outro momento, foi observado que a noção de universalidade, para Berkeley, surge do fato de uma ideia ou um nome tornarem-se signo geral, isto é, por assumirem o papel de representante de ideias particulares. Porém, no caso do número, isso parece indicar duas possibilidades de interpretação da universalidade cuja escolha da unidade é o que diferenciará uma da outra.

A primeira hipótese de interpretação é aquela em que se concebe o número como universal, pois ele seria resultado da presença de uma ideia que se torna geral na relação com outras ideias. Isso está de acordo com o que Berkeley defende na *Introdução* aos *Princípios*. Porém, essa hipótese parece levar a uma demanda que deve ser satisfeita antes da própria manipulação dos números: escolher arbitrariamente a unidade de medida. A ideia que se torna geral é a própria unidade de medida. Mesmo escolhendo uma ideia percebida e tratando-a como unidade, algo importantíssimo para universalidade não é eliminado, ou seja, tal escolha não impede que a relação entre particulares se estabeleça. Por exemplo, escolhe-se uma ideia percebida que pode receber qualquer nome. A unidade de medida “polegada” é um exemplo dessa nomeação. Tal ideia pode tornar-se universal quando se estabelece a relação com outras ideias que contenham as suas mesmas propriedades. Isso não impede que “1 polegada” seja tomada no sentido universal. O que

entra em jogo não é esta ou aquela ideia percebida isoladamente e denominada “1 polegada” presente em uma dada *régua*, mas todas as ideias que podem ser representadas pela ideia referida por “1 polegada”. Isso permite pensar a *régua* (em polegadas) no sentido universal. Caso contrário existiria somente uma régua e, nesse caso, a palavra “polegada” funcionaria somente como um nome próprio de uma ideia particular.

A outra hipótese de interpretação é aquela que contém a escolha da unidade como uma ação não concretizada. A escolha arbitrária existiria enquanto possibilidade, sem ainda ser levada a cabo. Em seu universo encontra-se a possibilidade de escolha de qualquer unidade, seja ela, *uma* polegada, *uma* jarda, *um* pé, ou ainda, *um* livro, *uma* página, *uma* linha – para citar somente alguns dos exemplos de unidade que aparecem nos textos de Berkeley.³² Dessa maneira, agora a marca numérica “1” indicaria o conjunto de todas as possíveis unidades que arbitrariamente poderão ser escolhidas, diferenciando-se da hipótese anterior onde “1 polegada” é universal somente no caso da unidade de medida “polegada”.

Contudo, qual das duas hipóteses Berkeley concebe para a aritmética? É possível ter universalidade sem escolher efetivamente a unidade de medida? Uma afirmação de Berkeley, que aparece ao final dos *Princípios*, no parágrafo 122, pode fornecer elementos para formulação de respostas. Ali existe uma menção ao que ele tivera discutido na *Introdução aos Princípios* acerca das palavras.³³ Trata-se da concepção de que elas teriam significado devido às ideias abstratas, algo que, como visto, é em sua opinião insustentável. Agora a tarefa do parágrafo é outra. Há um contraponto com o conceito de número, ou seja, o objetivo é o de negar a tese onde se pensa que “as ideias abstratas são significadas por nomes numerais ou caracteres, enquanto eles não sugerem ideias de coisas particulares para nossas mentes” (Berkeley, PHK, §122).³⁴ Adota-se, nesse parágrafo, um modo “econômico” de escrita, ou seja, Berkeley afirma que não entrará em uma “dissertação mais minuciosa sobre o assunto”. Realmente ali não são desenvolvidas as situações em que “nomes numerais ou caracteres” não sugeririam coisas particulares. Além

³² Cf. Berkeley, PHK, §12, p. 106.

³³ Berkeley precisamente menciona o parágrafo 19 da *Introdução*, dos *Princípios*.

³⁴ “...abstract ideas are thought to be signified by numeral names or characters, while they do not suggest ideas of particular things to our minds”.

disso, deixa-se subentendido que tal tese torna-se insustentável tendo em vista sua argumentação contra a ideia abstrata de número. Por outro lado, Berkeley limita-se a uma atitude positiva: indicar quais são os elementos presentes na correta interpretação a respeito dos numerais e de caracteres na aritmética:

...é evidente, a partir do que foi visto, que estas coisas que passam por verdades e teoremas abstratos concernentes a números não estão relacionadas (*conversant about*), na realidade, a nenhum objeto distinto de coisas particulares numeráveis, exceto somente nomes e caracteres, que originalmente não foram considerados senão como *signos*, ou capazes de representar apropriadamente quaisquer (*whatever*) coisas particulares que os homens tenham necessidade de computar. (Berkeley, PHK, §122).

Ao utilizar as palavras “verdades e teoremas abstratos”, Berkeley pretende indicar o que muitos pensadores de sua época aceitavam como conhecimento matemático a respeito de números. Porém, a finalidade é corrigir esses pensadores. Isso é feito quando Berkeley classifica os *objetos particulares* (passíveis de serem numerados) e os *nomes e caracteres* numéricos como sendo os únicos objetos que se relacionam com o que é conhecimento relativo aos números. É importante notar que, nesse caso, Berkeley não está indicando quando os nomes e caracteres *são aplicados* aos objetos particulares. Contudo, sua afirmação tem um caráter mais geral, isto é, o de apresentar de modo amplo todos os elementos que podem em alguma ocasião estar presentes naquilo que é tido como conhecimento a respeito de números. Evidentemente, em sua perspectiva, a ideia abstrata de número nunca surgirá como um desses elementos.

Por sua vez, ao listar tais objetos, Berkeley concebe “nomes e caracteres” como sendo “signos”. Isso não é mais um simples detalhe, pois, como analisado na seção anterior, Berkeley utiliza *signo* para designar uma classe geral de termos onde a *relação* entre particulares desempenha papel central. É exatamente a mesma interpretação que se manifesta quanto aos signos da aritmética. Para confirmar, vale observar o peso que o termo “representar” tem na citação acima. Com ele, Berkeley não somente evidencia a capacidade que o signo tem de ser substituto, isto é, de ser representante de coisas nos raciocínios matemáticos, mas, também, manifesta em qual amplitude isso acontece. A saber: em seu sentido mais geral. Prova disso é o fato de Berkeley considerar indiscriminadamente a possibilidade de aplicação dos signos. A aplicabilidade diz respeito

a *quaisquer* coisas particulares que se necessite contar. Independentemente do aspecto prático dado aos signos, isto é, o de suprir uma necessidade dos homens, Berkeley não delimita quais objetos particulares deverão ser contados. Isso indica que qualquer particular pode vir a ser representado pelos signos à medida que apareça a demanda por contá-los. Assim, é possível dizer que Berkeley, na citação, trata do signo matemático no plano mais universal possível. É exatamente isso que permitirá esclarecer em qual sentido ele concebe a universalidade na aritmética. Em outras palavras, tal interpretação é mais compatível com uma universalidade onde a unidade ainda não foi escolhida. Pois, é somente nesse caso que existe a possibilidade de se conceber uma indiscriminada aplicabilidade do signo aos objetos particulares, não importando quais sejam. Há várias unidades, mas interessa, nesse momento, a unidade enquanto signo de um grupo onde estão todas as coisas que podem vir a ser escolhidas como unidade. Efetivar a escolha da unidade, antes de tudo, resulta na eliminação de tal grupo. Isso permite dizer que a universalidade, como descrita na primeira hipótese, manifesta-se muito mais como sendo um caso especial da segunda hipótese, uma vez que esta última, além do grupo das possíveis unidades, contém em seu âmbito de aplicabilidade todos os possíveis casos a que a primeira hipótese se aplicaria. Talvez seja esse o motivo de Berkeley não realizar de fato uma menção em seus textos à possibilidade de fazer a divisão nas duas hipóteses. Se a universalidade é algo importante para constituir o que é aceito como conhecimento, bastaria, para a aritmética, considerar o caso quando a universalidade se manifesta plenamente.

Portanto, até aqui já é possível afirmar que o objeto da aritmética é o número, porém enquanto signo que possui em si a possibilidade de ser considerado universal. A partir dessa concepção de universalidade pode-se questionar qual a consequência para a noção de significado dos signos utilizados na aritmética e sobre o problema da inteligibilidade de tal objeto.

Argumentou-se acima que o termo universal possui significado na relação entre particulares. Ele é universal quando se torna representante, isto é, substituto de particulares. Foi visto que, nesse contexto, “ser representante” e “ter significado” podem ser considerados sinônimos. Aplicada essa interpretação ao conceito de número, ele também passa a ser concebido como um signo que adquire significado na relação entre particulares

e, novamente, não por designar uma ideia abstrata de número. A inteligibilidade do signo poderia ser descrito nesses mesmos termos, ou seja, o signo tornar-se-ia inteligível à mente na medida em que a relação entre particulares, ou melhor, a relação entre ideias particulares se apresentaria associado ao signo. O critério de inteligibilidade baseado em ideias percebidas parece que estaria sendo aplicado aqui.

No entanto, o caso não é tão fácil de resolver. Ao se voltar a atenção para a questão da utilização, por parte de Berkeley, da palavra “nada”, como apresentado na introdução do capítulo³⁵, tais conceitos de significado e de inteligibilidade do signo se adequaria a somente uma interpretação, ou seja, àquela que considera a presença de “coisas particulares numeráveis”, posição extraída do parágrafo 120, dos *Princípios*. Está obvio que só há relação entre particulares quando há a presença de particulares. Mesmo assim, o caso ainda não se mostra tão simples de se resolver quando se compara essa noção de significado com o conteúdo da discussão da entrada 767, dos *Comentários filosóficos*. Supostamente o *vazio* alegado ali não se compromete com particulares. Assim, afirmar que há particulares que podem ser percebidos, ao se retirar os signos, é uma situação bem diferente a de alegar que se estabeleceu um *vazio* completo. O problema está ainda em conceber o significado e a inteligibilidade quando se assume o signo *puramente*. Ou seja, o que é essa “ciência *puramente* verbal”? O que é o *vazio* que os *Comentários filosóficos* parecem sugerir para tal ciência? A solução do impasse exige uma expansão da noção de significado para Berkeley e, por sua vez, parece conduzir para um caminho que necessita evitar a noção de inteligibilidade baseada na avaliação de ideias percebidas. O diálogo *Alciphron* (1732) poderá contribuir para mais esclarecimentos.

1.5 Aritmética e álgebra: da pura manipulação de signos

No *Alciphron*, de fato Berkeley retoma a análise não somente da aritmética. Agora a álgebra é objeto de estudo. A justificativa para ele generalizar encontra-se no fato dele perceber que tanto a aritmética como a álgebra “tratam de signos”.³⁶ Com o que foi

³⁵ “Remova os *signos* da aritmética e da álgebra, e pergunto: o que permanece?” [ênfase minha] (Berkeley, PC, §767).

³⁶ Cf. Berkeley, ALC, VII, §12.

visto nos *Princípios*, é muito fácil assumir que a aritmética trata de signos, posto que os símbolos numérico, tidos como seus objetos, são considerados signos. No entanto, agora Berkeley almeja algo mais amplo no *Alciphron*. Isso permite incluir a álgebra no contexto.

O que está em questão poderá ser compreendido a partir de algo retirado da própria álgebra. Trata-se do exemplo do quadrado negativo, isto é, as raízes imaginárias. Utilizando o personagem *Euphranor*, Berkeley afirma o seguinte:

Pode-se às vezes atingir esta meta [a de encontra um bem determinado] mesmo se as ideias designadas não se apresentam ao espírito e mesmo se ela fosse impossível de apresentar ou de mostrar tal ideia ao espírito. Por exemplo, o símbolo algébrico que denota a raiz de um quadrado negativo tem sua *utilização* dentro da operação do cálculo ainda mesmo que seja impossível de se fazer uma ideia de tal quantidade. (Berkeley, *ALC*, VII, §14).

Observa-se que Berkeley não mais concebe o signo como *representante* de alguma ideia, pois a raiz imaginária é assumida como algo que “não se apresenta” ou “impossível de se apresentar” ao espírito. Isso parece só dificultar a compreensão do conceito de universalidade dos signos aritméticos e algébricos, porque dispensa um signo da necessidade de designar uma ideia percebida ou possivelmente percebida. Se $\sqrt{-1}$ denota uma *impossibilidade* enquanto ideia, elimina-se a construção da *relação* entre particulares, algo necessário para universalidade, uma vez que o signo universal (seja ele uma ideia ou uma palavra), com já foi afirmado, é construído a partir da relação entre tais particulares. A passagem não só mostra que Berkeley aceita a raiz imaginária como um símbolo legítimo para os cálculos algébricos. Também ela revela que Berkeley estava consciente da impossibilidade do signo da raiz imaginária designar aquilo de que ela seria representante, isto é, a de determinar algo sensível, perceptível, para ser generalizado a outros particulares percebidos ou que possivelmente serão percebidos. Desse modo, surge a demanda por saber em que aspecto, para Berkeley, essa espécie de símbolo torna-se legítima no cálculo algébrico a ponto de possuir significado e ser inteligível, sem deixar de ser universal.

A partir do *Alciphron*, a solução surge com a observação de que Berkeley manifesta várias outras possibilidades de relações entre signo e ideia. É o que está presente em outro exemplo dado por ele: as “fichas de jogos”. Por intermédio dos personagens

Euphranor e *Alciphron*, Berkeley faz uma analogia entre palavras e as fichas de apostas, utilizadas nos jogos de cartas:

Euphranor: (...) As palavras, como é admitido, são signos; é conveniente, pois, examinar o uso de outros signos para conhecer o das palavras. Por exemplo, as fichas (*counters*) que são usadas em uma mesa de jogo. Elas são utilizadas não por si mesmas, mas somente como signos substitutos do dinheiro, assim como são as palavras para o dinheiro. Diga-me Alciphron, é necessário formar, cada vez que essas fichas são usadas, no decorrer do jogo, uma ideia da distinta soma ou do valor que cada uma representa?

Alciphron: De modo nenhum. É suficiente que os jogadores em princípio se ponham de acordo sobre seus respectivos valores e, ao final, substituam as fichas por esses valores.

Euphranor: E calculando uma soma, as figuras que representam libras, xelins e centavos (*pounds, shillings, and pence*), você pensa que é necessário, ao longo de toda a operação, a cada passo formar as ideias de libras, xelins e centavos?

Alciphron: Não. Será suficiente se, na conclusão, essas figuras dirijam nossas ações com respeito às coisas. (Berkeley, ALC, VII, §5).

Defende-se ali uma manipulação de signos sem a obrigação de dar atenção às ideias denotadas por eles. Está evidente que isso revela outra perspectiva de como interpretar a relação entre signo e ideia. Essa concepção não é uma exclusividade do texto *Alciphron*. É a mesma interpretação que Berkeley defende já na introdução aos *Princípios*, contudo, utilizando uma comparação com a álgebra:

Nas leituras e raciocínios, os nomes são quase sempre utilizados como letras são utilizadas na *álgebra*, ou seja, embora cada letra represente uma quantidade particular, não é necessário, para calcular corretamente, que em cada passo cada letra sugira ao nosso pensamento a quantidade particular cuja representação lhe foi designada. (Berkeley, Intro, PHK, §19).

Nota-se que, em ambos os textos, o signo é assumido como representante, mesmo que o representado não se apresente à mente em todo momento que o signo é utilizado. A inovação que surge é que tanto palavras, ficha de jogo ou, ainda, as letras na álgebra, adquirem o que será chamando aqui de *autonomia operatória* do signo. Isso merece uma melhor explicação.

Da mesma maneira como um jogador não precisa, sempre que utiliza uma ficha de jogo, ter em mente o dinheiro que ela representa, uma palavra ou as letras na álgebra não necessitam (por também serem signos) trazer à mente, no decorrer de sua utilização, a ideia

que representam. Segundo Berkeley, bastaria indicar no início da ação o que o signo irá representar. Após tal situação o signo adquire uma autonomia, importando ali somente a manipulação do signo na relação com outros signos e as regras dessa manipulação. Ainda que tenha adquirido a autonomia, o signo não impossibilita o retorno à ideia inicialmente associada a ele. É o que acontece no caso do jogo, pois as fichas, ao final de uma partida, podem ser trocadas pelo dinheiro que elas representam durante a partida.

Voltando ao caso da raiz imaginária, o signo $\sqrt{-1}$ indica uma impossibilidade de concebê-lo como representante de algo, porque há a impossibilidade da ideia correspondente se apresentar ao espírito. Esse é um caso que se exige uma avaliação tanto do conceito de significado bem como o de inteligibilidade. Se existe o nível operatório onde se consegue *proceder precisamente* com o signo, desconsiderando a ideia representada, isso quer dizer que em tal nível nada impede a introdução de outros signos. É suficiente que o novo signo se adeque às regras que estabelecem as relações entre os signos e que, ao final das operações, seja possível indicar coisas no mundo.³⁷ Os conceitos de significado e de inteligibilidade agora apontam para relação operatória entre os signos. Tais signos em particular não necessitam ter significado e muito menos ser inteligíveis. Porém, no conjunto dos signos (constituído pela relação regrada), tais signos adquirem significado, por um lado, porque, ao final da operação, signos poderiam indicar coisas. Desse modo, do ponto de vista denotativo, o signo $\sqrt{-1}$ individualmente falha em possuir significado, porém no conjunto da operação ele pode manifestar significado, já que a operação pode conduzir a coisas no mundo.

Por outro lado, quanto ao problema da inteligibilidade, o signo tem sua inteligibilidade avaliada no conjunto operatório. Ou seja, no contexto do raciocínio matemático, o signo torna-se inteligível à *mente* na medida em que ela percebe como operar com ele. Por exemplo, o signo $\sqrt{-1}$ torna-se inteligível não porque ele denota uma ideia perceptível à mente. Ou seja, individualmente, a partir desse critério ele também falha para se manifestar como inteligível. Tal signo torna-se inteligível porque a mente, ao considerar as regras, sabe o que fazer com ele quando o introduz em uma operação. A importância das

³⁷ É necessário ressaltar que, no jargão berkeleyano, as coisas no mundo são ideias percebidas ou possivelmente percebidas.

regras (que inclui a própria *definição* desse signo), assim, torna-se fundamental, porque são elas que estipulam precisamente como os signos devem se comportar na relação com outros símbolos. Para Berkeley, a mente consegue capturar essa operacionalidade do signo a partir das regras. O surpreendente disso é que o critério de inteligibilidade agora passar ser aquele que avalia o signo não na sua individualidade, mas no conjunto com outros signos, na sua *utilidade* ao permitir, dentro da operação, que se chegue a outros signos.³⁸

Portanto, de um modo amplo, a noção de significado e inteligibilidade presente entre os signos, tanto na aritmética quanto na álgebra, diz respeito não ao signo em si, mas ao nível operatório. Ali o que está em jogo é a relação entre signos, determinadas pelas regras operatórias, e que no conjunto podem denotar coisas. Uma vez que a relação entre signos não é eliminada, é nesse sentido que eles tornam-se *universais*. Assim, é no conjunto também que se avalia a universalidade dos signos.

Com tais esclarecimentos, surgem os elementos necessários para solucionar o que foi apresentado na introdução a respeito da utilização da palavra “nada”. Aquilo sugerido como resposta à pergunta presente na entrada 767 dos *Comentários filosóficos* só tem sentido caso se interprete a afirmação de Berkeley considerando o nível operatório da aritmética e álgebra. Em tal nível há somente signos e suas respectivas regras de operação. Assim, ao retirá-los, o que resta é um vazio, pois os particulares supostamente representados por eles não estão em questão. Eis o porquê de Berkeley negar que tais ciências sejam especulativas. Não há especulação onde não existe comparação entre ideias. No nível operatório a aritmética e álgebra tratam puramente de signos. É nesse sentido que,

³⁸ Se a inteligibilidade depende das regras, qual a natureza delas? Berkeley percebe que as regras são fruto de uma ação da mente ao estipular relações e que, todavia, não dependem necessariamente de ideias. As relações podem ser feitas sem que se pense necessariamente naquilo que os signos podem ou não denotar. Esse é um problema, por exemplo, no caso dos números grandes. Em uma carta a Samuel Molynoeux, em dezembro de 1709, é possível observar que Berkeley separa a compreensão da regra, que determina a relação entre os números, da compreensão do número que denotaria uma ideia perceptível à mente: “Não podemos formular nenhuma noção de número além de certo grau. Ainda assim podemos raciocinar tão bem tanto com mil quanto cinco. A verdade sobre isso é que números não são nada mais do que nomes” (Berkeley, 1979, v. 8, p. 25). No entanto, não se deve interpretar esse raciocínio sem ideias como sinônimo de um puro intelecto. Foi dito acima que relação, para Berkeley, é uma ação da mente que pressupõe ideias para serem relacionadas. Não há relação “em si” sem algo que seja relacionado pela mente. Nesse contexto, da álgebra Berkeley não está assumindo a relação como algo puro, mesmo que os signos não necessitem denotar ideias. O que está em jogo é que o próprio signo é algo que está sendo relacionado. Não há possibilidade de apreender a relação sem os signos.

no *Alciphron*, Berkeley declara que a aritmética é uma ciência que “trata, sobre tudo – em sua origem, em suas operações, regras e teoremas – do uso artificial de signos, de nomes e caracteres” [ênfase minha] (Berkeley, ALC, VII, § 12).

O conceito de número enquanto pura “denominação”, como está sugerido na entrada 766, dos *Comentários filosóficos*, adquire agora nitidez. Berkeley está concebendo o número a partir desse aspecto operatório, artificial. Basta que ele seja um signo manipulável a partir de regras. Não há a necessidade de conter ideia alguma (muito menos a ideias abstratas) relacionada ao signo para saber operar com ele. Mais uma prova para assumir o número como “denominação”, além do que está presente no caso da raiz imaginária, nasce da discussão que Berkeley faz sobre os números grandes³⁹:

Qu: se temos ideias claras de números grandes por eles mesmos ou só de suas relações. (Berkeley, PC, §77).⁴⁰

Parece-nos que as ideias claras e distintas de números grandes, p.ex. 1000, não as temos de outro modo a não ser considerando-as como formadas pela multiplicação de números pequenos. (Berkeley, PC, §217).

Essas anotações revelam, ainda em um “tom” investigativo, como os números grandes podem ser considerados. Contudo, é central ali o fato de que Berkeley assume a existência de uma dificuldade para a mente formular tais números enquanto ideia. A solução é conceber que o número seja um simples signo que contém regras para ser manipulado. A mente sabe muito bem proceder com números grandes a partir das regras estabelecidas, mesmo que não esteja associada ideia nenhuma a esse signo.

E quanto aos *Princípios*, o uso do termo “nada” sugerido no parágrafo 120 é diferente desse apresentado para os *Comentários filosóficos*? Pode-se afirmar agora que não. Em ambos os textos a característica operatória é ressaltada. Isso mostrar-se, nos *Princípios*, quando Berkeley, mesmo assumindo a aplicabilidade às coisas particulares, resalta uma independência dos signos em relação a elas: “Na *aritmética*, portanto, não consideramos as *coisas*, mas os *signos*...” (Berkeley, *PHK*, §122). Aqui, “não considerar as coisas” confirma que realmente Berkeley pensou o signo com sendo o objeto com que essa

³⁹ As seguintes afirmações de Berkeley revelam o mesmo caso apresentado na carta a Samuel Molyneux, como citada na nota anterior, ou seja, a possibilidade de haver raciocínios sem ideias.

⁴⁰ “Qu”, possivelmente, é a abreviação para “Query”, “Question”, “Quaere” ou “Quaestio”.

disciplina negocia. O que está em jogo nessa tarefa é a pura manipulação dos signos. Desse modo, o *nada* sugerido nos *Comentários* se manifesta também nos *Princípios*. Contudo, a diferença entre esses textos repousa é na ênfase dada à aplicabilidade da aritmética ao mundo. O discurso de Berkeley, nos *Princípios*, trata tal disciplina matemática em seu aspecto mais geral possível, ou seja, é uma tentativa de elencar tudo o que está envolto nela. Portanto, a aplicabilidade ao mundo, às “coisas particulares numeráveis”, é algo que deve ser considerada. Para Berkeley, o conceito de ciência matemática contém em si essa aplicabilidade. Esse tom generalista definitivamente não é o dos *Comentários filosóficos*. Ali o objetivo é destacar somente o aspecto “verbal” da aritmética e da álgebra.

1.6 Berkeley como formalista matemático

A partir do que foi dito, cabe ainda uma última reflexão. Será interessante compreender em qual aspecto é válido, ou não, considerar o tratamento dos signos feito por Berkeley, como sendo uma espécie de *formalismo*. Vários comentadores assumem a existência dessa perspectiva no pensamento berkeleyano quanto à aritmética e álgebra. Entre os comentários mais recentes, um bom exemplo é a interpretação elaborada por Douglas Jesseph.⁴¹ É manifesto seu cuidado em esclarecer como Berkeley apresenta tal posição formalista. Especificamente, Berkeley se caracterizaria como partidário de uma espécie de formalismo conhecida como “jogo formal”. Isso seria similar ao defendido por Johannes Thomae no texto *Elementare teoria der analytischen functionen einer complexen veränderlichen* (1898). Eis a passagem utilizada por Jesseph:

Na concepção formalista, a aritmética é um jogo com signos que são denominados de modo vazio. Isso quer dizer que eles não têm outro conteúdo (no jogo calculado) além daquele assinalado pelo seu comportamento com respeito a certas regras de combinação (regras do jogo). O jogador de xadrez faz similar uso das peças, assinalando-as com certas características que determinam seu comportamento no jogo. As figuras são somente sinais exteriores desse comportamento. É claro que há importantes diferenças entre xadrez e aritmética. As regras do xadrez são arbitrárias, mas o sistema de regras para a aritmética é tal que o número pode se referir à perceptual diversidade por meio de axiomas simples e assim fazer importantes contribuições para nosso conhecimento da natureza. (Thomae, *apud* [Jesseph, 1993, p.107]).

⁴¹ Além de Jesseph, pode-se destacar: Baum, 1972, 119-34; Brook, 1973, 152; Robles, 1993, 119-21.

Ainda que Jesseph não enumere, pode ser útil destacar três elementos que se manifestam nessa citação:

- (i) Os signos são vazios de conteúdo (similares às peças de xadrez);
- (ii) O que interessa é a manipulação dos signos de acordo com as regras (regras do jogo). Aqui se pode associar uma noção de “verdade enquanto correção”: é verdadeiro aquilo que corretamente se derivou por meio das regras;
- (iii) A aritmética pode ser aplicada ao mundo (é o que a diferencia do jogo de xadrez).

Há na análise de Jesseph uma tentativa de argumentar que todos esses elementos estão presentes no tratamento dado por Berkeley à aritmética e à álgebra. O seu argumento para assegurar a presença de (i) baseia-se na noção de número enquanto “denominação”. O problema dos números largos seria suficiente para assegurar isso: “De fato Berkeley afirma que aritmética é um caso de raciocínio em que nós não temos ideias distintas anexadas às palavras e é este problema dos números largos que o conduz a afirmar que aritmética somente concerne a signos” (Jesseph, 1993, p. 108). Por outro lado, (ii) e (iii) são sustentados quase que consecutivamente. Jesseph analisa uma passagem dos *Princípios*, onde Berkeley estaria se comprometendo tanto com a valorização das regras de manipulação dos números quanto, também, com a sua possibilidade de aplicação às coisas:

Pois, sendo conhecidos esses signos, podemos, pelas operações da aritmética, conhecer os signos de qualquer parte das somas particulares significadas por eles; e assim computando em sinais (devido à conexão estabelecida entre eles e os diferentes conglomerados (*multitudes*) de coisas, das quais uma é tomada como uma unidade), podemos perfeitamente ser capazes de somar, dividir estabelecer proporções das coisas entre si que pretendemos numerar. (Berkeley, *PHK*, §121).

São somente as regras que permitem conhecer outros signos. Isso, para Jesseph, é prova de que Berkeley, além de aceita-las com algo que constitui a aritmética, deu importância para as “regras de computação”. Essa importância diz respeito à aplicabilidade da aritmética, pois as regras nos permitem, por meio da manipulação de símbolos, interagir adequadamente com coisas particulares (presentes no mundo) que necessitariam ser contadas.⁴²

⁴² Cf. Jesseph, 1993, p. 110.

Ao se focar a atenção novamente no texto de Thomae, observa-se realmente que a distinção entre aritmética e xadrez ocorre quanto à aplicabilidade ao mundo. Todavia, é necessário fazer outra distinção aqui. “Poder” ser aplicado ao mundo é muito diferente de exigir a “necessidade” de aplicação. Parece que Thomae defende somente a possibilidade. Não há nada nessa possibilidade que interfira na manipulação dos signos. Se os signos funcionam de acordo com as regras, torna-se irrelevante saber se eles são aplicáveis ao mundo. Em outras palavras, o “jogo formal” de Thomae pode promover um desprezo quanto à aplicabilidade da matemática às coisas do mundo. Nessa perspectiva, por exemplo, a aritmética seria “pura” no seu sentido mais forte. Por sua vez, o matemático poderia trabalhar com ela sem *nunca* cogitar sua aplicação às coisas particulares, mesmo que na própria aritmética exista algo que permita tal aplicabilidade. A questão da aplicabilidade não é necessária para estabelecer corretas relações entre os símbolos aritméticos.

Contudo, não é isso que pode ser assumido caso se avalie o que é a matemática como um todo, para Berkeley. Ela não pode ser definida como possuindo um fim em si mesma. Há, de fato, como visto na seção anterior, uma pura manipulação de signos, ou seja, a aritmética e a álgebra são *puras* porque seus objetos imediatos são signos. Porém, contemplar isso é somente um dos elementos do que é a matemática, para Berkeley. Há uma finalidade na matemática: ser aplicada ao mundo. Assim o *puro* não é no sentido forte. Está *sempre* presente a possibilidade de aplicação ao mundo. Para serem consideradas *matemática*, elas devem ser *necessariamente* aplicáveis ao mundo. A aritmética e a álgebra são ferramentas que capacitam a agir sobre as coisas, uma vez que elas descrevem suas relações corretamente. É isso que Berkeley apresenta, nos *Princípios*, após conceber que a aritmética trata de signos e não de coisas: “Na *aritmética*, portanto, não consideramos as *coisas* mas os *signos*, os quais, todavia, não são tomados por si mesmos, mas porque nos indicam como devemos agir relativamente às coisas e dispor adequadamente delas” [ênfase minha] (Berkeley, *PHK*, §122). Nesse sentido amplo, portanto, avaliar a aplicabilidade da aritmética é, antes de tudo, avaliar se o matemático está diante de uma ferramenta realmente matemática.

Logo, aqui não se pretende discordar de Jesseph ao caracterizar o tratamento de Berkeley aos signos da aritmética e álgebra como possuindo uma espécie de “jogo formal”. Todavia, o que se pretende aqui é reforçar a tese de que a aplicabilidade é, para Berkeley, um elemento para se definir a aritmética e a álgebra enquanto matemática. A tese de Jesseph corre o risco de ser mal interpretada quando não se enfatiza de modo *veemente* que a aplicabilidade está *constantemente* presente naquilo que define o que é a matemática. Por exemplo, a diferença entre o xadrez e a álgebra é aplicabilidade. A álgebra, apesar também de ser um jogo, se torna matemática na medida em que se aplica ao mundo. É necessário considerar um elemento a mais nesse formalismo para contemplar a totalidade do que é a matemática, para Berkeley, a saber: a sua utilidade que necessariamente leva à aplicabilidade nas coisas que serão contadas.

1.7 Conclusão

É possível resumir as principais conclusões alcançadas nesse capítulo da seguinte maneira. Primeiramente, foi produzida na introdução uma questão que remete a uma explicação de texto, ou seja, trata-se da suposta diferença entre o uso da palavra “nada” na entrada 769, dos *Comentários filosóficos*, e no parágrafo 120, dos *Princípios*. Concluiu-se que de fato não há diferença no uso desse termo, uma vez que em ambos os casos é possível dizer que Berkeley enfatiza o nível operatório existente na aritmética e na álgebra. No entanto, mais fundamental que isso, é que essa resposta nasce de outra conclusão: o fato da aritmética e da álgebra serem disciplinas que podem usar signos sem que seja necessário tomá-los como representantes de ideias claras. Não está em questão a referência direta de tais signos, mas a relação entre eles estipulada pelas regras operatórias. Nesse sentido, os objetos imediatos de tais disciplinas tornam-se os próprios signos, concebidos nessas operações realizadas a partir de regras definidas.

Assim, considerando esse nível operatório, resultam duas outras conclusões importantes. Uma a respeito do conceito de significado dos signos e outra a respeito do critério de inteligibilidade adotado na aritmética e na álgebra. Foi possível observar que ambos os conceitos emergem ao mesmo tempo quando se considera esse nível operatório.

Desse modo, quanto ao significado, observou-se que os signos da aritmética e da álgebra, ainda que não necessitem ter significado intrínseco, podem possuir significado no conjunto da operação, pois eles podem ser úteis para se referir a coisas. E, quanto à inteligibilidade, observou-se que não é possível adotar o critério das ideias percebidas como sendo aquele vigora nessas disciplinas. Se o signo é o objeto imediato delas, ele torna-se inteligível somente dentro de uma operação regida por regra. A mente, ao perceber como operar com o signo (o que subentende a relação com outros signos), está ao mesmo tempo percebendo quão inteligível ele é. Portanto, se há um critério de inteligibilidade é aquele que exige que o signo se manifeste compreensível quanto à operacionalidade no conjunto com outros signos. Se a mente sabe operar com o signo para se chegar a outro signo, então ele é inteligível.

Esse bloco de conclusões permite compreender, mesmo que parcialmente, como Berkeley concebeu o estatuto da aritmética e da álgebra. Foi possível observar que o cálculo aritmético e algébrico pode ser realizado precisamente sem a necessidade de considerar objetos existentes na geometria. O signo torna-se o objeto imediato da aritmética e da álgebra independentemente do que acontece na geometria. Assim, se o conceito de objeto faz parte daquilo que fundamenta tais disciplinas, então aritmética e álgebra, desse ponto de vista do objeto, não estão subordinadas à geometria. Para Berkeley, o cálculo pode ser realizado precisamente sem a necessidade de considerar os objetos existentes na geometria. De certa forma, isso revela como Berkeley se posicionou diante da polêmica da classificação e hierarquia das matemáticas: quanto ao objeto, a aritmética e a álgebra são independentes da geometria. Se Wallis e Barrow consideram essa perspectiva para hierarquizá-las, então, eles estão errados.

Por outro lado, surge agora a necessidade de investigar como a geometria lida com a noção de signo para que se possa concluir o inverso, ou seja, se a geometria está subordinada a uma utilização pura do signo. Essa é uma tarefa para o próximo capítulo.

2 Berkeley e o objeto geométrico como *extensão percebida*

2.1 Introdução

Como visto no capítulo anterior, um questionamento sobre o objeto da aritmética e da álgebra conduziu a uma reflexão sobre o conceito de signo. Neste segundo capítulo, tem-se como finalidade algo semelhante ao anterior. Ainda pretende-se investigar um objeto matemático específico, ou seja, considera-se agora o que acontece na geometria. Mais precisamente, trata-se de saber como Berkeley avalia se a geometria está diante de seus legítimos objetos do conhecimento. A inteligibilidade desses objetos entra em questão nessa tarefa. Contudo, alguns elementos precisam ser considerados na discussão. Não será o foco aqui a magnitude *simpliciter*, enquanto objeto particular. Se ponto, linha, plano etc., são exemplos de objetos da geometria, almeja-se uma análise deles enquanto participantes do raciocínio matemático, ou seja, da demonstração geométrica. É nesse sentido que será necessário colocar novamente o problema da *universalidade* que, por sua vez, conduz ao problema da natureza do signo, também, na geometria.

Porém, quanto à geometria, diferentemente do que aconteceu com as posições filosóficas sobre o objeto da aritmética e da álgebra – uma vez que Berkeley teria mantido uma “certa” unidade durante toda sua carreira filosófica – há um complicador para a discussão. Pois, Berkeley parece ter mudado de posição quando se compara seu pensamento da fase madura com o que ele apresentou em sua juventude. Em um de seus primeiros textos, *Comentários filosóficos*, assim como foi visto no caso da aritmética e da álgebra, Berkeley tenta combater a interpretação de que a geometria seria uma ciência que trata de objetos “abstratos”. Para isso, ele dá primazia aos sentidos no processo de avaliação do conhecimento geométrico. O resultado parece ser a necessidade de se assumir a extensão *atualmente* percebida pelos sentidos como o verdadeiro objeto da geometria. Nessa perspectiva de Berkeley, não haveria a possibilidade de se fazer geometria sem a percepção empírica das figuras geométricas. Muitas das teses apresentadas pela geometria euclidiana se tornariam incompatíveis com tal perspectiva. Desse modo, outra questão que pode ser posta aqui é sobre a função da figura particular (atualmente percebida) nesse modo de fazer geometria. Uma perspectiva empírica como essa parece exigir que as figuras devam estar

sempre presentes aos sentidos, caso contrário, não haveria a possibilidade de se fazer geometria.

No entanto, com a introdução do *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano*, a resposta a essa questão indicaria mudanças no modo de compreender a função das figuras geométricas. Ao apresentar a solução antilockeana quanto ao problema dos universais, Berkeley introduziu a possibilidade de considerar figuras como representantes de outras. Trata-se da própria tese da *generalização representativa*, algo que indicaria a presença do conceito de signo também na geometria. Eis a mudança, pois na fase madura as figuras particulares são somente uma parte daquilo que permite fazer geometria, enquanto que, na fase inicial, a figura seria o ponto crucial para a constituição dessa disciplina. De fato, as figuras não parecem ter recebido a mesma interpretação em ambas as fases.

Portanto, se o propósito do capítulo é investigar o objeto geométrico, como descrito acima, isso não poderá ser feito sem ter em vista o problema do estatuto das figuras particulares para o raciocínio geométrico e essa tarefa deve contemplar as duas fases distintas do pensamento berkeleyano.

2.2 *Berkeley na primeira fase: a exigência empírica na geometria*

2.2.1 *Recusando a natureza abstrata do objeto geométrico*

A compreensão de como Berkeley interpretou, em sua juventude filosófica, o que seria o objeto geométrico pode surgir a partir de um exame de suas afirmações sobre a relação que as matemáticas possuiriam entre si. Em uma das entradas, do texto *Comentários filosóficos*, ele faz uma elucidativa comparação entre várias disciplinas matemáticas:

Questão: se a geometria não poderia ser propriamente reconhecida entre as matemáticas mistas [*mixt mathematics*]. Sendo, pois, a aritmética e a álgebras as únicas puras abstraídas, isto é, inteiramente nominais. A geometria é uma aplicação dessas para pontos. (Berkeley, PC, §770).

Primeiramente, devido ao estilo de construção das frases, torna-se necessário focar a atenção naquilo que verdadeiramente se propõe como objeto de investigação, separando-o do que é fornecido como ponto de partida para tal empreitada. É possível observar uma

organização da disposição das disciplinas em um tipo de divisão: de um lado está a matemática *pura* (abstrata, nominal) e de outro a matemática *aplicada*. Está dado, pelo modo de expor de Berkeley, que a aritmética e a álgebra encontram-se do lado da matemática pura.¹ A geometria, por sua vez, é uma matemática aplicada. A divisão entre essas disciplinas não é, necessariamente, de contraposição. Não significa que a geometria, por ser *aplicada*, seria oposta à aritmética e à álgebra. Berkeley supõe que a geometria é uma disciplina que se apoia em um elemento comum à aritmética e à álgebra. É nesse sentido que, para ele, a geometria é uma aplicação “dessas para pontos”, ou seja, ela se utiliza de algo (que está presente nas duas outras disciplinas) e se restringe a uma determinada aplicação. Portanto, o que realmente está em questão é se a *geometria se filiar* (ou não) às disciplinas consideradas “mistas”. O fato de a geometria ser uma espécie de “aplicação” deve ser compreendido como um dado da questão. Contudo, esta interpretação de Berkeley merece ser exposta em mais detalhes.

Muitas vezes, o vocabulário, nos *Comentários filosóficos*, não recebe muitos esclarecimentos por parte Berkeley.² Uma dificuldade que o texto revela é saber quais são essas matemáticas mistas. O termo em inglês “mixt”, relacionado à matemática, é usado nesse texto somente mais uma vez, agora para se referir à demonstrabilidade da moral: “A moralidade pode ser demonstrada como as matemáticas mistas [*mixt mathematics*]” (Berkeley, PC, §755). Como no caso anterior, o máximo que se pode retirar da afirmação é que a moralidade possui uma semelhança com o que acontece nas matemáticas mistas. Assim, do que se trata tal matemática? Por que Berkeley cogita a possibilidade de aproximar a geometria com as matemáticas mistas? Seu objeto de estudo é que o faria estabelecer essa aproximação?

¹ A entrada 770, dos *Comentários filosóficos*, pode ser relacionada a outras do mesmo texto (tais como, 758 e 766-7) em que Berkeley interpreta a aritmética e álgebra como disciplinas que têm os signos como seus objetos imediatos. É nesse contexto que se deve interpretar a afirmação delas serem “inteiramente nominais”. Assim, os termos “abstratas” e “puras” não podem ser comprometidos com a teoria das ideias abstratas (que é, de modo recorrente, alvo de críticas por parte de sua filosofia) mas sim devem ser interpretados como termos que indicam o descompromisso com a necessidade dos signos aritméticos e algébricos denotarem ideias. Para mais detalhes dessa análise, conferir o capítulo anterior desta tese.

² Vale lembrar que tal texto foi escrito como um caderno de anotações, sem o propósito de uma publicação. Para mais detalhes sobre as circunstâncias da publicação póstuma dos *Comentários filosóficos*: Cf. Ayers, 1998.

Para obter respostas, uma estratégia de investigação é observar como tal vocabulário foi usado por outros pensadores na mesma época. Um bom exemplo é o que fornece o matemático inglês Joseph Raphson, contemporâneo de Berkeley. Em 1702, ou seja, alguns anos antes da redação dos *Comentários filosóficos*, Raphson publica seu *Mathematical Dictionary*. Ali aparece um verbete especificamente sobre a *matemática mista*:

São estas artes e ciências que consideram e tratam das propriedades de quantidades aplicadas aos seres materiais ou objetos sensíveis, tais como a astronomia, cosmologia, ótica, música, aferição [*gauging*], agrimensura, navegação etc. (Raphson, 1702, [páginas não numeradas]).

Duas informações merecem destaque. A primeira, diferentemente da atitude de Berkeley, é o fato de Raphson fazer uma lista com exemplos das disciplinas matemáticas consideradas mistas. A outra informação relevante diz respeito ao próprio motivo para classificá-las com tal. A saber: os objetos dos quais se ocupam. Tais objetos são os “seres materiais ou objetos sensíveis”. Isso é de grande relevância para compreender por que Raphson não inclui na lista das matemáticas mistas a própria geometria. A sua interpretação sobre a geometria encontra-se em outro verbete: *matemática pura*. Essa matemática é apresentada como aquela disciplina que tem como objeto a “magnitude ou números considerados abstratamente a partir de qualquer matéria” (*Ibidem*). É ali que, além da aritmética e da álgebra, se inclui a geometria. Pois, ela seria pura por negociar com objetos “abstratos”. Em seu dicionário, Raphson não realiza grandes detalhamentos do que é “abstração”. Mas, a partir desses verbetes, já é possível observar que a abstração pressupõe um afastamento do objeto da matemática mista, ou seja, o que é abstrato torna-se *independente* do que é material, sensível.

Berkeley, nos *Comentários filosóficos*, não cita o dicionário de Raphson.³ No entanto, não significa que não seja permitido realizar essa comparação entre os dois

³ Nos *Comentários filosóficos*, as únicas vezes em que Berkeley se refere a Raphson (nas entradas 298 e 827) são para criticá-lo acerca das interpretações teológicas. Berkeley não aceita a atribuição da extensão a Deus, feita por Raphson. Outro exemplo de menção a Raphson ocorre mais tarde, em sua carta ao filósofo americano Samuel Johnson, datada em 24 de março de 1730. Ali ele cita o texto de Raphson, *De spatio reali*, para novamente criticá-lo quanto ao mesmo problema da relação entre os conceitos de extensão e de Deus. Para mais detalhes dessas críticas: Cf. Daniel, 2001, p. 179–194.

autores. Segundo Jesseph (1993, p. 17), há a possibilidade interpretar a descrição do *Mathematical Dictionary*, acerca do objeto da matemática pura, de um modo a incluir Raphson no grupo de matemáticos e de filósofos que defende teses condenadas por Berkeley. Além de outros pensadores, estaria ali o próprio Locke. A tese principal que Berkeley não aceita é aquela que faz da matemática uma atividade fundamentada na abstração. Do ponto de vista berkeleyano, o objeto geométrico não pode ser abstrato. Eis uma afirmação que conduz a tal tese: “A extensão sem largura, isto é, o comprimento invisível, intangível não é concebível. Isso é um erro ao qual somos conduzidos pela doutrina da abstração” (Berkeley, PC, §365a). Em primeiro lugar, é necessário destacar que esta citação negocia com um conceito de extensão, porém, ela especifica um tipo de extensão: o comprimento sem largura etc. Isso, por outro lado, nada mais é do que o clássico conceito de linha⁴. Portanto, está em jogo o conceito clássico de linha enquanto um objeto abstrato. Assim, o conceito de abstração criticado aqui se compromete com dois itens:

- a) A possibilidade realizar uma separação entre qualidades sensíveis;
- b) O que é abstrato torna-se *independente* do sensível.

O item (a) aponta para a tentativa de separar a largura do comprimento. O (b) refere-se à tentativa de se assumir aquilo que é separado como algo distinto do que é percebido por meio dos sentidos. Desse modo, a “extensão”, considerada abstrata, além de não se confundir com aquela apreendida pela visão ou pelo tato, tem *autonomia* diante do sensível. Se essas descrições podem ser aplicadas ao que Raphson afirma sobre a matemática mista, faz sentido ele não querer incluir a geometria entre elas. Pois, do ponto de vista do abstracionista, a extensão que resulta do processo de abstração exclui os elementos sensíveis, algo presente nos objetos das disciplinas mistas.

Assumir objetos como esses representa, para Berkeley, um flagrante desprezo da importância do que é sensível na constituição da própria geometria. O objeto da geometria, ao seu modo de ver, não é concebível sem o vínculo com os sentidos. Essa é a perspectiva “negativa” do descontentamento de Berkeley com teses como as de Raphson.

⁴ Aqui basta lembrar como Euclides define linha em seus Elementos: “Linha é comprimento sem largura” (Euclides, 2009, p. 97).

Para efeitos de precisão, ela poderia ser reformulada da seguinte maneira: *não* há extensão por meio de abstração. Assim, desse aspecto negativo, seria possível sugerir um critério positivo que estaria regendo essa filosofia da geometria, presente nos *Comentários filosóficos*:

c) A extensão é algo *sensível* (percebida por meio dos sentidos).

Por esse critério, objetos que normalmente são considerados objetos próprios da geometria, como linha, planos etc., não podem ser definidos do ponto de vista abstrato. Se eles são objetos extensos, logo, eles são objetos sensíveis. Se esse é o critério que vigora como pano de fundo da entrada 365a, não é sem motivo que Berkeley se questionou sobre o fato de a geometria ser (ou não) uma disciplina mista. A compreensão do que seja a extensão se apresenta vinculada a um critério empírico: característica comumente atribuída aos objetos das matemáticas mistas.

Apesar de já ser possível indicar algo importante da natureza dos objetos geométricos – ter natureza sensível –, ainda é possível apresentar mais detalhes sobre a amplitude de tal interpretação. “Ser sensível” liga-se a outras características que comprometerão a geometria com diversos aspectos filosóficos. Um deles será o vínculo necessário que existirá com a mente. Aquilo que faz a extensão ser o que é sempre exigirá a presença da mente. Eis a afirmação de Berkeley com tal interpretação: “A extensão [é] uma sensação. Por isso, não [existe] fora da mente” (Berkeley, PC, §18). Está evidente que se reduz a “extensão” a ser exclusivamente “conteúdo mental”, por ser uma “sensação”.⁵ No

⁵ Pode-se agora relacionar essa reflexão sobre o objeto geométrico com outras críticas presentes na filosofia de Berkeley. Em especial uma feita por ele ao *materialismo*. Dentre outras coisas, tal doutrina defenderia que a extensão reside em algo distinto da mente, ou seja, na matéria. Há várias afirmações de Berkeley no sentido de argumentar que o conhecimento de algo depende de ser percebido; e isso significa ser *conteúdo mental*: “Admitindo-se que há substâncias extensas sólidas etc. fora da mente, é impossível que a mente as conheça ou as perceba. A mente inclusive de acordo com os materialistas só percebe as impressões produzidas sobre seu cérebro ou, antes, as ideias que acompanham essas impressões” (Berkeley, PC, §74). A novidade da reflexão de Berkeley não é somente negar a possibilidade de haver conhecimento de uma substância que independe da mente (que não seja percebida). A novidade está em afirmar que isso seria indício para negar a existência dessa substância: “Não elimino as substâncias. Não devo ser acusado de excluir a substância do mundo racional. Só nego o sentido filosófico (que na verdade não é sentido algum) da palavra substância. Pergunte a um homem não contaminado com seu jargão o que ele quer dizer com ‘substância corpórea’ ou com ‘substância do corpo’. Ele responderá massa, solidez e outras qualidades sensíveis semelhantes. Estas eu mantenho. O *nec quid nec quantum nec quale* filosófico, do qual não tenho ideia, eu descarto, se é que se pode dizer que um homem descarta aquilo que nunca teve existência alguma e nunca foi nem imaginado nem concebido” [ênfase minha] (*ibidem*, § 517). Aquilo que se apresenta

entanto, quando se compara isso com o critério (c), novamente dúvidas aparecem acerca da precisão do vocabulário usado por Berkeley: ser “sensível” e ser “sensação”, nos *Comentários filosóficos*, são a mesma coisa? É bem verdade que, na entrada 365a, acima, não se chega a usar o termo “sensível”. Por sua vez, tal termo é sugerido como algo que está ali de modo implícito, o que permitiu a formulação do próprio critério (c). Assim, a ligação entre os dois termos ainda deverá ser feita.

Isso acontecerá ao se considerar o que está em jogo em outra entrada, a de número 378, onde o objetivo de Berkeley é apresentar uma grande demonstração a respeito da natureza do que é uma ideia. Não há necessidade, para o propósito aqui, de avaliar a demonstração por inteiro. Em especial, basta considerar as premissas 3 e 4. Ali Berkeley concebe como verdadeira a afirmação de que toda *ideia* vinda de fora “deve ser por meio dos sentidos e são chamadas sensações” (Berkeley, PC, §378). Antes de tudo, o mais importante é que na formulação de tais premissas, estabelece-se o vínculo entre os termos “sentidos” e “sensações”, mas, também, com “ideia”. Berkeley entende que aquilo que vem pelos sentidos não pode ser separado do fato de ser algo presente na mente, pois o que é sensível manifesta-se, necessariamente, na mente enquanto *sensação*. E o que é sensação? Ela é ideia. Logo, a tese que regula o que é sensível formula-se como segue: *toda sensação é uma ideia (conteúdo mental) vinda pelos sentidos*.

Voltando à entrada 365a, que permitiu a formulação do critério (c), é possível dizer que Berkeley interpretou a “a extensão abstrata” como algo inconcebível. Isso significa que, para ele, seria impossível conceber a extensão destituída de características sensíveis. À luz dessa discussão sobre o caráter mental da extensão, pode-se afirmar que, para ele, a tentativa de abstração é injustificável mesmo que se garanta o caráter mental daquilo que se almeja como abstrato. A extensão é uma ideia, porém, isso não significa que

empiricamente só se manifesta como tal na mente. Além da mente e das ideias presentes nela, não há certeza de sua existência. Berkeley em alguns momentos parece recusar a substância material, porque isso implicaria em contradição: “Que exista a extensão em uma coisa não pensante (...) é uma contradição” (*ibidem*, §37). Mas ao mesmo tempo ele parece eliminá-la, porque a tese *imaterialista* solucionaria vários problemas: “Pela imaterialidade, soluciona-se a coesão dos corpos, ou, antes, a disputa cessa” (*ibidem*, §71). Em outros textos, Berkeley assumirá explicitamente a tese *imaterialista* como sendo o princípio para a filosofia natural. Essa é a discussão, por exemplo, de seu texto *De motu* (1721). Para uma análise da tese *imaterialista*, interpretada a partir dos argumentos presentes nos textos da maturidade filosófica de Berkeley: Cf. Graying, 2005, p. 166-189.

ela perderá o caráter empírico. Ter se manifestado na mente enquanto sensação implica em possuir sempre algo de empírico, pois ela veio através dos sentidos.

Se essa relação entre conceitos está correta, é possível reformular o critério (c), considerando agora o aspecto mental da extensão:

- d) A extensão é uma *ideia*, uma *sensação* (que só existe na mente), *percebida* como algo sensível (que veio por meio dos sentidos).

Aqui se apresentam alguns dos principais elementos que permitem a compreensão do que é extensão, nos *Comentários filosóficos*. E, para Berkeley, ela estaria filiada a algo que impossibilita a abstração: ter ideia de extensão significa *percebê-la* sempre como objeto sensível. Desse modo, a percepção da extensão (enquanto dotada do aspecto empírico) determina o que é a própria extensão. Berkeley assume que a mente é incapaz de separar da ideia de extensão as características sensíveis, percebidas nela devido à origem: ter vindo por meio dos sentidos. Tudo que se apresenta na ideia de extensão pode ser percebido e tem alguma relação com o sensível. É exatamente o contrário disso que a doutrina da abstração defende, ou seja, que haveria a extensão distinta daquilo que se apresenta à percepção.

É nisso que Roble (1993, p. 149) identifica um vínculo do pensamento de Berkeley, sobre a geometria, com sua doutrina mais geral do princípio filosófico *Esse est percipi* (ser é ser percebido). Isso faz a questão do vínculo com a percepção ser o critério para avaliar se a geometria estaria diante de objetos claros. Logo, a inteligibilidade dos objetos geométricos diria respeito ao fato deles possuírem ou não relação com o conteúdo percebido, que nesse caso é um conteúdo vindo pelos sentidos. Eis como Robles interpreta o caso dos objetos geométricos na filosofia berkeleyana: “a geometria não pode tratar senão de objetos da percepção” (*Ibidem*).

Se esse é o caso, ou seja, de que a percepção dos objetos geométricos implica em identificar o seu caráter empírico, pode-se concluir que Berkeley não somente acreditou, já no início de sua carreira filosófica, que existiam motivos para tratar a geometria como uma matemática mista, mas, também, que isso exigiria dar uma importância diferente ao papel desenhado pelos sentidos na geometria. Mais adiante será explorado mais esse tópico da importância dos sentidos, focando o problema do limite da

percepção. Disso surgirá uma análise do que Berkeley defende como *mínimo sensível*, o que permitirá compreender como tais interpretações não foram pacíficas quando se considera a matemática clássica. Pois elas forçaram Berkeley a assumir o objeto da geometria de um modo distinto da tradição matemática em vigor em sua época, de cunho euclidiano.

2.2.1.1 *A ênfase nos sentidos*

Como visto, nos *Comentários filosóficos*, a recusa de que o objeto da geometria seria abstrato está filiada à negação da possibilidade de separar de tal objeto seu caráter empírico, aquilo que é apreendido pelos sentidos. Aqui se manifesta mais uma das principais posições de Berkeley, nesse texto de juventude, a respeito da geometria: os sentidos passam a ter primazia na avaliação dos assuntos relacionados aos objetos geométricos. Se a extensão é algo sensível, então linha, planos etc. (que são exemplos de objetos extensos de que a geometria trata) devem ser avaliados considerando os sentidos. Eis uma afirmação de Berkeley, onde, além de exemplificar os tipos de objetos geométricos, há também a ênfase dada aos sentidos:

[É] ridículo os matemáticos depreciarem os sentidos. (Berkeley, PC, §317);

Os sentidos, mais do que a razão, e a demonstração deveriam ser empregados a respeito de linhas e figuras, já que estas são coisas sensíveis, pois, em relação a isso que você chama de insensível, nós provamos que são absurdo, nada. (*Ibidem*, §466).

Já que as entradas dos *Comentários filosóficos* são anotações particulares que Berkeley fez pensando em futuras publicações, não é evidente qual “prova” (que permitiu julgar o absurdo de considerar os objetos geométricos como abstratos) ele tem em mente quando escreve a entrada 466. Possivelmente Berkeley esteja pensando nas consequências ao considerar a própria definição de “ideia sensível”: enquanto algo que deve ser totalmente percebido. Do ponto de vista mais geral, essa afirmação está vinculada à concepção sobre o que é *ideia*. Nos *Comentários filosóficos*, há ainda dois momentos diferentes em que Berkeley fornece mais elementos para compreender o que ela é: “Além de ideias, nada é perceptível” (Berkeley, PC, §50). E ainda: “Uma ideia não pode existir não percebida”

(*Ibidem*, §377). Em ambas as afirmações o que se destaca é a condição necessária da existência da ideia: ser percebida⁶. Se isso é algo que determina a sua existência, é possível afirmar que Berkeley assumiu ser *contraditório* considerar que *exista* algo na ideia sem ser percebido. Em outras palavras, tudo que faz a ideia ser o que ela é deve ser percebido.⁷

Especificamente para o caso da extensão, o problema da percepção total também vale. Se ela é uma ideia, logo, tudo o que faz a extensão ser o que é pode ser percebido. O “absurdo” ao qual a citação acima se refere, talvez, tenha relação com o fato de que uma definição abstracionista da extensão vai contra aquilo que é a condição de sua existência: a constatação de que a extensão é *uma ideia sensível*. Para Berkeley os sentidos apreendem a extensão por completo, ou seja, todo o seu teor empírico pode ser percebido, nada na ideia sensível fica oculto.

Contudo, uma questão surge: até onde vai o limite dessa percepção? A resposta a isso faz a ênfase repousar sobre os sentidos, ou seja, o limite da percepção vai até onde eles são capazes de apreender. É bem verdade que Berkeley não deixa de considerar que extensão seja algo mental. A mente *percebe* a extensão enquanto uma ideia sensível. Porém, sua denúncia consiste em afirmar que tal característica não permite tratar um objeto

⁶ Berkeley apresenta uma esclarecedora passagem, nos *Comentários filosóficos*, sobre o que é *percepção*: “Seja o que for que tenha em si qualquer de nossas ideias, deve perceber, sendo este próprio ter, essa recepção passiva das ideias que define a mente perceptiva. Esta é a essência mesma da percepção, ou no que a percepção consiste” (Berkeley, PC, §301). Destaca-se aqui o caráter mental da percepção, constituído de uma curiosa combinação de fatores. De um lado, a percepção é uma *ação* do espírito, pois ele percebe que “tem” ideia (nesse sentido a percepção é uma espécie de *constatação* que o espírito faz em si da presença da ideia). Por outro lado, tal percepção pressupõe a *passividade* do espírito ao receber ideias. Isso seria o elemento que garantiria a *objetividade* da ideia vinda pelos sentidos, pois a percepção não decide o que ela pode receber pelos sentidos. Há regularidade nas ideias vindas pelos sentidos de um modo que o espírito as recebe tal como se apresentam, querendo ou não querendo. É esse o problema que Berkeley discute nos *Princípios*: “Mas, seja qual for o meu poder sobre os meus pensamentos, eu noto que as ideias realmente percebidas pelos sentidos não dependem por igual da minha vontade. Quando abro os olhos em plena luz do dia não posso escolher se verei ou não, nem determinar os objetos particulares que se me apresentam à vista...” (*Idem*, PHK, §29). Desse modo, para ter ideia, o espírito precisa recebê-la de modo passivo. Isso faz da percepção ser ao mesmo tempo uma *ação* que pressupõe uma *passividade*. Para uma discussão sobre a atividade-passividade da percepção, em Berkeley: Cf. Winkler, 1989, p. 8-9.

⁷ Nos *Princípios*, Berkeley parece considerar a tese da *percepção total* da ideia como um tipo de princípio evidente por si mesmo. Um exemplo disso é quando ele discute a possível relação de causalidade entre ideias. Estaria em questão saber se uma ideia causa outra ideia. Isso implicaria em considerar que ideias são “ativas”. Berkeley nega isso. Para ele, ideias são passivas. Só o espírito é ativo, porque percebe as ideias. Caso as ideias fossem ativas, tal atividade seria percebida nelas: “Para nos convenceremos de que isso é verdade, não precisamos de mais nada a não ser de uma simples observação de nossas ideias, pois, uma vez que elas no todo e em cada uma de suas partes existem apenas na mente, não existe nada nelas a não ser o que é percebido” [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §25).

sensível sem aquilo que o caracterize como objeto *vindo* pelos sentidos. Desse modo, nessa concepção, os sentidos e a mente desempenham papéis interligados. Mas antes de tudo, a atividade de um está subordinada à atividade do outro. Há um limite gerado pela atividade de um em relação ao outro. Eis, portanto, de modo mais preciso, o *limite* da percepção: a mente não percebe em uma ideia sensível mais do que aquilo que os sentidos fornecem. Assim, a primazia, afirmada acima, refere-se, antes de tudo, ao fato de que são os sentidos que fornecem o limite da percepção. A mente está subordinada a tal limite.

2.2.1.2 *Os mínimos sensíveis*

Se os sentidos capturam tudo o que pode ser percebido em relação à extensão e que a mente não ultrapassa o que é percebido, cabe ainda perguntar se é possível precisar mais do que se trata tal limite. Uma resposta a essa demanda, surge daquilo que Berkeley denominou como *mínimo sensível*. Na geometria, tal mínimo será considerado como uma solução berkeleyana ao próprio problema do limite da percepção. O *mínimo sensível*, assim, trata-se da *menor parte percebida na extensão*. E, ao assumi-lo como *limite* da percepção em relação à extensão, Berkeley acaba transformando a consideração da natureza da extensão. Sua discussão, na geometria, passa a tratar a concepção da extensão como constituída desse limite último que é possível ser percebido. Um exemplo disso é o modo como Berkeley descreve a ideia de comprimento: “As ideias de comprimento não são determinadas sem um *minimum*” (Berkeley, PC, §88). A condição para compreender o que é comprimento está vinculada ao mínimo. Isso significa dizer que tudo o que se apresenta como comprimento pressupõe que se admita a possibilidade de perceber nele os *mínimos* que o compõem.

Uma gama de problemas nasce dessa caracterização da extensão em termos de mínimo. Um deles toca fortemente em um dos mais clássicos problemas da geometria: a *infinita* divisibilidade da extensão. Se a extensão é constituída de mínimos, seria tal mínimo de alguma forma divisível? Berkeley foi contundente em negar qualquer possibilidade de divisão do mínimo e, ainda mais, uma divisão infinita. Do seu ponto de vista, é contraditório supô-lo como tal, porque o mínimo é, antes de tudo, uma ideia. Assim, se ele é uma ideia, o que resulta da divisibilidade seria percebido: “supor divisível um M. S

[*minimum sensible*] quer dizer que há ideias distinguíveis quando não há ideias distinguíveis” (*Ibidem*, §343). Tentar assegurar que a mente ultrapassa esse mínimo é um erro que Berkeley acusa os matemáticos de terem cometido, talvez, iludidos pela teoria da abstração. Uma prova desse erro diz respeito à própria tese assumida pela geometria clássica da extensão não ser somente divisível, mas, também, *divisível infinitamente*.

Antes de aprofundar alguns dos argumentos de Berkeley, será oportuno ilustrar, com um exemplo, como a geometria euclidiana foi interpretada de modo a se comprometer com a infinita divisibilidade da extensão. No livro 1, do *Elementos*, Euclides apresenta uma demonstração para a Proposição 10, com o objetivo de provar a possibilidade de dividir qualquer linha finita dada. Eis como segue a construção da prova:

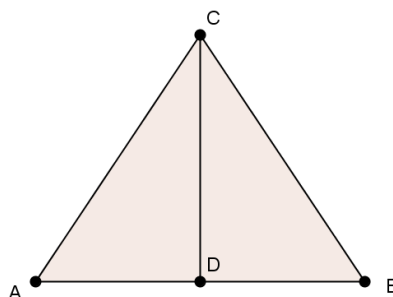


Figura 2.1

[Proposição 10]: *Cortar em duas a reta limitada dada.*

Seja a reta limitada dada AB; é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.

Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC, e fique cortado o ângulo sob ACB em dois pela reta CD; digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D. Pois, como a AC é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto a base AD é igual à base BD. Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso fazer. (Euclides, 2009, p. 106).

Apesar da prova não ser muito longa, há vários elementos a serem observados. Um deles diz respeito ao próprio problema: cortar a reta AB em duas. Se linha reta é um exemplo de objeto da extensão, considerada pela geometria, então, pergunta-se: qual linha reta está em questão? Contudo, antes de responder, cabe destacar, primeiramente, o que tal divisão assegura na prova.

Inicialmente, Euclides sugere que se construa o triângulo equilátero ACB de um modo que a reta AB, que será dividida, se torne um dos lados do triângulo. Após isso, ele indica que se faça a divisão do ângulo ACB, utilizando uma reta. Aqui Euclides está evocando o que foi provado na proposição anterior (a de número 9) cujo objetivo era demonstrar como dividir um ângulo igualmente em duas partes. Desse modo, nessa prova da proposição 10, é exatamente isso que permite cortar a linha AB em dois. Dito de outra forma, ao se dividir o ângulo, divide-se a linha AB no ponto D.

Agora é interessante retomar a pergunta sobre a amplitude da prova, ou melhor, sobre qual reta essa prova pode se aplicar. Caso se esteja considerando qualquer reta finita, haverá a necessidade de admiti-la como infinitamente divisível. Um exemplo de argumento a favor da infinita divisibilidade é o que alega Proclus. Segundo Heath (Euclides, 1968, v.1, p. 268), Proclus comenta essa prova e afirma que os geômetras devem assumir que a reta seja infinitamente divisível, pois o caso contrário implicaria em assumir que a divisibilidade da linha resulta em um tipo específico de magnitude última, chamada por ele de *indivisível*. Desse modo, a linha acaba sendo interpretada como composta de um número finito de indivisíveis. Essa é a hipótese inicial que Proclus não recomenda que os geômetras assumam. Sua reflexão é fácil de ser compreendida, ou seja, ela diz respeito ao número de indivisíveis assumidos em uma linha. Caso a linha seja considerada como constituída de indivisíveis, haverá nela um número par ou um número ímpar de indivisíveis. No caso de ser ímpar, será necessário tentar a divisão exatamente no indivisível de número ímpar. Contudo, como o indivisível não é divisível (por definição), não será possível dividir a linha.

É possível ainda se questionar se a prova, da Proposição 10, funcionaria na ocasião de um número par de indivisíveis, já que o ponto D, nesse caso, deveria cair entre os indivisíveis. Exemplos de perguntas que surgem são: há alguma coisa entre dois

indivisíveis que permitiria localizar o ponto D? Caso sim, isso não implicaria em dizer que a reta contém mais indivisíveis do que foi determinado inicialmente? Tais questões conduzem a reflexão para a seguinte situação: para que a prova seja aplicável a qualquer linha finita, supõe-se que, além dela ser infinitamente divisível, ela terá que conter infinitos pontos. Isso exige que a reta seja considerada como contínua⁸. Problemas como esses fizeram com que matemáticos evitassem as interpretações comprometidas com indivisíveis, na tentativa de garantir a aceitabilidade das provas apresentada por Euclides, nos *Elementos*. Por exemplo, é exatamente essa a reflexão de Barrow, quanto à divisibilidade, em seu texto *Lectiones mathematicae* (1664-1666):

Não existe parte em uma magnitude que seja absolutamente a última. Tudo o que é dividido em partes, é dividido em partes que são novamente divisíveis. Eu digo, como declarou Aristóteles, o que é contínuo é sempre divisível em partes novamente divisíveis. (Barrow [Capítulo 9], 1970, p. 151).

Dentre as magnitudes em questão, nessa passagem, estão consideradas as linhas das demonstrações geométricas. Além disso, é interessante observar que Barrow menciona Aristóteles com o objetivo de vincular *continuidade* com *infinita divisibilidade*.⁹ Ser infinitamente divisível é, também, ser uma magnitude contínua. Nesse sentido, para Barrow, seria incompatível assumir a existência de uma “magnitude última” (ou indivisível) com a noção de magnitude contínua.

⁸ Ao comentar a demonstração da Proposição 1, Livro 1, dos *Elementos*, Heath afirma que a prova pressupõe um princípio de continuidade. Somente assim seria possível garantir, na demonstração, que as linhas possuam pontos pelos quais as divisões ocorreriam. Heath afirma que uma formulação desse princípio, enquanto uma propriedade geométrica, foi dada por Dedekind. Intuitivamente, ele a apresentou como segue: “Se todos os pontos de uma linha reta se dividem em duas classes, de tal forma que todos os pontos da primeira classe estão à esquerda de todos os pontos da segunda classe, existe um e somente um ponto que produz essa divisão de todos os pontos em duas classes nessa divisão da reta em duas partes”. (Dedekind, *Apud*, Euclides, 1968, v.1, p. 236). Segundo Jesseph (1993, p.50), é necessário considerar também que esse princípio de continuidade se aplique para as demonstrações das Proposições 9-10, livro 1, de Euclides, pois, do contrário, a prova não chegaria ao final. Para uma análise formal do princípio de continuidade: Cf. Mueller, 1981.

⁹ A passagem de Aristóteles, citada por Barrow, é: *Metafísica*, $\Delta 13$, 1020a 7-8.

Agora é possível retomar a discussão da infinita divisibilidade em Berkeley, para poder avaliar a amplitude de sua queixa. Para ele, a tese da infinita divisibilidade, como sugerida pela prova da Proposição 10, é algo que deveria ser corrigido na matemática. Localizar a origem desse erro é a tarefa que Berkeley assumiu para si. É justamente na teoria da abstração que ele encontra os elementos que teriam iludido os matemáticos a acreditarem na possibilidade de dividir a extensão infinitamente. Nos *Comentários filosóficos*, há muitas afirmações nesse sentido (e que podem ser lidas independentes uma das outras). Um exemplo, que considera o problema da abstração, apresenta-se como segue:

Ocorrem 3 erros nos argumentos dos matemáticos a favor da divisibilidade *ad infinitum*. 1) Eles supõem que a extensão existe fora da mente ou não percebida; 2) eles supõem que temos uma ideia de comprimento sem profundidade, ou* que o comprimento sem profundidade existe; 3) que a unidade é divisível *ad infinitum*.

*Ou, antes, que existe o comprimento invisível. (Berkeley, PC, §342-342a).

Aparecem aqui três argumentos contra a infinita divisibilidade da extensão. Quanto ao primeiro, Berkeley compreende que argumentos a favor da infinita divisibilidade dependem da premissa que assume a *extensão como existindo fora da mente*. Isso significa dizer, antes de tudo, que a extensão existe de forma independente da mente.

Berkeley não nomeia quais são os matemáticos em questão que sustentam tal tese. Porém, é possível identificar, nesse primeiro argumento, interpretações como as de Newton sobre o “espaço absoluto”. Em seu texto *Princípios matemáticos da filosofia natural* [*Principia*] (1687), no Escólio às definições, Newton, ao tratar do problema do referencial para determinar movimentos, defendeu a existência de um espaço infinito, imóvel, independente de corpos e não apreensível pelos sentidos. Esse seria o *espaço absoluto*, que se diferenciaria do espaço relativo, pois esse último se daria em função dos corpos observáveis pelos sentidos.¹⁰ Embora Newton assuma que corpos físicos estejam

¹⁰ “Espaço absoluto, por sua própria natureza, sem referência a qualquer coisa externa, permanece sempre homogêneo e imóvel. Espaço relativo é qualquer medida ou dimensão móvel do espaço absoluto. Tal medida ou dimensão é determinada por nossos sentidos a partir da situação do espaço com respeito aos corpos e é popularmente usada em vez do espaço imóvel...” (Newton, PM, p. 408-409). Desse modo, considerando essa

localizados no espaço absoluto, é possível assumir que ele concebe tal espaço como sendo o espaço geométrico.¹¹ Assim, embora o espaço absoluto, não esteja atualmente dividido infinitamente (enquanto uma propriedade física), Newton assumiu a possibilidade de que matematicamente o espaço seja infinitamente divisível.¹²

Em 1710, Berkeley analisa esse conceito de espaço absoluto nos *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano* (1710). Nesse texto, acusa-se Newton de defender o espaço absoluto como sendo um conceito abstrato. Por sua vez, o mais importante é que Berkeley interpreta as duas afirmações sobre o espaço absoluto (não apreensível pelos sentidos e a *independência* em relação ao corpo) como indicativo de que Newton considerou tal espaço como existindo fora da mente.

Destarte, se o espaço absoluto pode ser divisível infinitamente (e, por sua vez, linhas, planos etc.), comparando essa perspectiva com os *Comentários filosóficos*, é possível aplicar contra isso o que Berkeley apresenta como argumento (1), na entrada 342. Ali Berkeley considera que a tese da infinita divisibilidade da extensão (enquanto objeto da geometria) depende da suposição de que a extensão exista fora da mente. Como essa premissa é falsa, então, supor a infinita divisibilidade também o é, mesmo que seja uma divisibilidade matemática, como é o caso de Newton. Portanto, o primeiro argumento, de

definição, Newton apresenta como “movimento absoluto” (“verdadeiro”) aquele que se refere ao espaço absoluto. E, por sua vez, o “movimento relativo” diz respeito ao espaço relativo.

¹¹ Por exemplo, Newton, em seu texto de juventude, *De gravitatione et aequipondio fluidorum* (1664-1668), sem ainda usar o termo “espaço absoluto”, apresenta a possibilidade de se determinar as figuras geométricas, pressupondo que isso ocorre em um espaço infinito, não observável pelos sentidos, que existe independentemente de corpos: “Em todas as direções, o espaço pode ser distinguido em partes, sendo que os limites que unem essas partes costumam ser denominados superfícies; por sua vez, estas superfícies podem ser distinguidas em todas as direções, em partes, cujos limites comuns costumamos denominar linhas; finalmente, estas linhas podem ser distinguidas, em todas as direções, em partes que chamamos pontos. Disso segue que as superfícies não têm profundidade, nem linhas possuem largura, nem os pontos possuem dimensões, a menos que se diga que os espaços limítrofes se interpenetram um ao outro tão longe quanto a profundidade da superfície entre eles, isto é, o que afirmei ser a fronteira de ambos ou o limite comum. O mesmo se aplica às linhas e aos pontos” (Newton, 1962, p. 100).

¹² Newton, (1952, p. 403), no final de sua obra *Ótica*, apresenta a diferença entre divisão da matéria e a divisão do espaço. Para ele o “espaço é divisível *in infinitum*”, enquanto que “matéria” não o é. Janiak discute essa distinção no sentido de defender que Newton concebeu, inclusive nos *Principia*, um tratamento físico e um matemático do espaço. A infinita divisibilidade seria possível enquanto uma atividade matemática realizada na mente do geômetra: “Eu acredito que, quando Newton escreve na *Ótica*, que espaço é infinitamente divisível, ele pega sua *divisibilidade matemática* na mente. Quando ele afirma no *De gravitatione* que o espaço é indivisível, o espaço está concebido em sua *divisibilidade física*” (Janiak, 2000, p. 224).

Berkeley, nessa entrada, assegura a impossibilidade da demonstração da infinita divisibilidade, pois os matemáticos partiriam de premissas falsas.

A segunda parte do argumento de Berkeley, da entrada 342, é de mais fácil explicação, pois pressupõe algo já apresentado acima. Trata-se da tese abstracionista que considera o objeto da geometria como algo distinto (e independente) do que é sensível. Desse modo, por exemplo, o comprimento, que interessaria à geometria, não é igual ao que se apresenta aos sentidos. Pois, nessa disciplina seria possível tratar o comprimento como não contendo largura. Berkeley faz um acréscimo com a entrada 342a (utilizando um asterisco) para informar que tal tratamento abstracionista considera o comprimento como “invisível”. Isso nada mais é que a indicação de que o comprimento abstrato não é igual àquele apreendido pela visão. Contudo, para Berkeley, tais afirmações são falsas. Para concluir isso, basta recordar que a única extensão concebível é aquela percebida como uma ideia sensível.¹³ A mente não consegue separar as propriedades sensíveis uma da outra de um modo a transformá-la em uma ideia independente e distinta daquilo que originalmente foi apreendido pelos sentidos. Logo, o pressuposto para a infinita divisibilidade é uma premissa falsa. Isso lança luz para esse segundo argumento no sentido de que Berkeley novamente rejeita a infinita divisibilidade, porque argumentos a favor dela partem de premissas falsas. A clássica definição euclidiana de linha, como “comprimento sem largura”, pode ser relacionada aqui. Seria esse tipo de linha que estaria em questão na demonstração da Proposição 10, apresentada acima. Nesse sentido, a própria validade da proposição 10 poderia ser colocada em dúvida, considerando essa perspectiva de Berkeley, justamente por causa da definição euclidiana de linha se comprometer com uma falsa perspectiva abstracionista.

Passando para o terceiro e último argumento, presente na entrada 342, destaca-se a menção da infinita divisibilidade relacionada ao conceito de unidade. Jesseph (1993, p. 55) afirma que Berkeley pretende recusar a infinita divisibilidade, nesse terceiro argumento, pensando na circularidade gerada entre a definição de unidade e a de

¹³ Vale lembrar que esse é o conteúdo que permitiu estabelecer o critério (d), nas seções acima: a extensão é uma *ideia*, uma *sensação* (que só existe na mente), *percebida* como algo sensível (que veio por meio dos sentidos).

divisibilidade infinita. Berkeley, assim, conceberia a unidade como aquilo que *não é composto de partes*. A unidade compreendida dessa maneira torna-se por definição indivisível. A circularidade, então, segundo Jesseph, está exatamente em se assumir divisível algo que, por definição, não se pode assumir com tal. No entanto, uma reflexão sobre esse conceito de unidade se faz necessária.

Na aritmética, Berkeley apresenta o conceito de número relacionado ao de unidade.¹⁴ Número seria uma coleção de unidades. Isso indica que, conforme o matemático aglomera a unidade, ele possuirá diferentes números. No entanto, Berkeley nega que número seja uma ideia abstrata. O ponto crucial é a constatação de que a unidade também não o é, pois, para Berkeley, não existe unidade no sentido *absoluto*. A unidade é algo relativo, porque o matemático sempre determina *arbitrariamente* o que ele está considerando como unidade. Nesse sentido, o símbolo “1”, usado normalmente para indicar unidade, pode ser tratado pelo matemático de várias maneiras: 1 quarto, 1 casa, 1 bairro, 1 cidade etc. Isso resulta em considerar a unidade como um *signo* que sempre depende da ação do matemático em estipular as coisas às quais o próprio signo se refere. Desse modo, questiona-se: é esse o conceito da aritmética que se encontra como pano de fundo na interpretação da entrada 342? Ao afirmar ser um erro tratar a unidade como infinitamente divisível, Berkeley estaria negando a infinita divisibilidade na aritmética também? Saber qual unidade que está em questão na entrada 342 é exatamente o que torna a leitura desse terceiro argumento mais difícil do que parece.

Primeiramente, é importante considerar que, na aritmética, negar a divisibilidade da unidade resultaria em limitar o uso de frações. Um exemplo disso são os símbolos $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$ que jamais poderiam ser construídos, pois se subteme que as somas de partes resultam na unidade. As partes, nesse sentido, são menores que a unidade. Portanto, números decimais não poderiam ser construídos. No entanto, é exatamente o contrário que Berkeley sugere em outro texto de juventude *Aritmetica absque algebra aut Euclide demonstrata* (1704-1707). Berkeley (1843, p. 47), na Parte II, capítulo 1, ensina como utilizar os números fracionários para fazer somas, subtrações, multiplicações e

¹⁴ Esse foi um dos temas do capítulo anterior desta tese de doutorado.

divisões. Para isso, inicialmente, ele fornece alguns esclarecimentos, como por exemplo, a seguinte relação:

.25 equivale a $\frac{25}{100}$;
.004 equivale a $\frac{4}{1000}$

O símbolo “.25” foi uma maneira que Berkeley encontrou para grafar “0,25”. O mesmo caso ocorre com “.004” em relação a “0,004”. O que é válido notar ali é que Berkeley apresenta dois exemplos cujas frações indicam números menores que a unidade. Tanto $\frac{25}{100}$ como $\frac{4}{1000}$ pressupõe a divisão da unidade. Agora, esse caso não estaria contrariando a interpretação de Jesseph sobre a unidade definida como aquilo que não possui partes? Para encontrar uma solução, é fundamental observar o contexto do argumento na entrada 342, dos *Comentários filosóficos*. Nos dois primeiros argumentos, Berkeley considerou a infinita divisibilidade da extensão. Se esse é o caso, é coerente assumir que a unidade em questão é aquela relacionada à geometria. Trata-se da aplicação do conceito de unidade para a extensão. Isso, portanto, exige que se diferencie quando Berkeley está considerando aritmética por si mesmo e quanto ela está aplicada a outra ciência. Quanto à aritmética, Berkeley parece não negar que se possa construir uma relação de signos que indicariam números menores que a unidade, resultado da divisão dessa unidade. No entanto, deve-se observar que isso ocorre no plano dos signos. Por outro lado, outra coisa é dizer que algo de concreto, definido como unidade (como seria o caso da extensão na entrada 342), seja divisível infinitamente. Pode-se sugerir que o *mínimo sensível* seria essa unidade básica na geometria. Isso faz com que o erro, para Berkeley, seja assumir que, ao aplicar as regras da aritmética na geometria, estar-se-ia dividindo o próprio mínimo sensível ao infinito.

Há outra entrada, nos *Comentários filosóficos*, que poderia reforçar essa diferença entre a unidade considerada a partir do enfoque aritmético ou do geométrico:

A unidade em abstrato não é de modo algum divisível, por assim dizer, como se fosse um ponto, ou com Barrow, nada de modo algum em concreto não é divisível *ad infinitum* já que não há nenhuma ideia que pode ser reduzida *ad infinitum*. (Berkeley, PC, §75).¹⁵

Aqui se menciona o nome de Barrow. Provavelmente Berkeley faz a menção pensando na discussão que Barrow realiza no final do Capítulo 3, das *Lectioes*, cujo objetivo é corrigir uma interpretação aristotélica a respeito do que são unidade e ponto. Aristóteles teria igualado unidade e ponto devido a ambos não serem quantitativamente divisíveis segundo nenhuma dimensão.¹⁶ Barrow considera ser um erro tal interpretação:

Mas essa comparação de ponto na geometria com unidade na aritmética é de toda a mais insuportável e produz as consequências mais graves para o conhecimento matemático. Pois, unidade corresponde realmente para alguma parte de toda magnitude, não para ponto. Se uma linha for dividida em seis partes iguais, assim como a linha toda corresponde para o número seis, cada sexta parte corresponde à unidade, mas não para o ponto que não é parte da tal linha reta. Um ponto é corretamente chamado de invisível, não a unidade (pois, por exemplo, como pode $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$ ser igual à unidade, se unidade é indivisível, não composta [*incomposita*] e representa um ponto?). Mais de que unidade é unicamente divisível, números surgem da divisão da unidade. (Barrow, [Capítulo 3], 1970, p. 48).

O que deve ser observado na citação é o motivo pelo qual Barrow recusa que ponto seja comparado à unidade: ponto não pode ser divisível, já que se subentende que ele seja definido como *aquilo que não tem partes*. Se ponto não tem parte, ele também não pode ser considerado parte daquilo que tem. Uma linha, quando dividida em partes (como é o caso sugerido pelo exemplo das seis partes da linha), utiliza como referência uma unidade que, antes de tudo, ainda é linha. Unidade sempre está relacionada à noção de composição. Ponto não pode ser interpretado dessa maneira. Negar isso resulta, dentre outras coisas, na impossibilidade de se construir na aritmética a soma $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$.

A solução de Barrow para essa relação da geometria com a aritmética é comparar o ponto ao nada. No início do Capítulo 3, das *Lectioes*, Barrow afirma que entre dois números há uma infinita sequência que vai em direção ao nada. Esse é o “nada

¹⁵ “Unite in abstracto not at all divisible it being as it were a point or with Barrow nothing at all in concrete not divisible *ad infinitum* there being no one idea diminishable *ad infinitum*”.

¹⁶ Quanto a essa questão da comparação do ponto com a unidade, a referência de Barrow é: *Metafísica*, Δ 6, 1016b 29-31.

aritmético” que pode, na aritmética, ser representado por um *signo* qualquer.¹⁷ O importante, segundo Barrow, é que tal signo, quando somado ou diminuído a outros números, não os alteram. Isso sugere que Barrow compreendeu o nada como aquilo que não possui partes, mas que, além disso, o nada não modifica o que tem partes, indicando, assim, a sua indivisibilidade.

É difícil negar que a reflexão feita por Barrow ecoa na entrada 75, dos *Comentários filosóficos*. Nessa entrada, assim como na outra acima analisada (a de número 342), Berkeley faz uma avaliação da aplicação incorreta do conceito de unidade na geometria. Ele parece repetir, nas palavras iniciais, a negação de que unidade, considerada como ponto, seja divisível. Nisso Berkeley acompanha Barrow no sentido de que ponto é definido como aquilo que não pode ser dividido por não conter partes. No entanto, o que não está claro ainda, na entrada 75, é o que surge após se mencionar o nome de Barrow. Berkeley parece identificar no pensamento de Barrow algo que lhe permite afirmar que “nada de modo algum em concreto não é divisível *ad infinitum* já que não há nenhuma ideia que pode ser reduzida *ad infinitum*”. Aqui a palavra “nada” não está sendo usada no sentido do “nada aritmético”. Berkeley não está pensando em um conceito de nada, definido como aquilo que é desprovido de partes e, por isso, não pode ser divisível. O raciocínio de Berkeley para negar a infinita divisibilidade está baseado em uma constatação quanto às ideias: não há ideia divisível ao infinito. Toda ideia é divisível até um número finito de vezes e, por sua vez, o mais interessante das palavras de Berkeley, é que isso seria concordante como o pensamento de Barrow.

Como visto, a reflexão sobre a relação entre ponto e unidade, presente no final do Capítulo 3, das *Lectiones*, realmente pressupõe uma discussão sobre a divisibilidade. Contudo, em nenhum momento da discussão a respeito da unidade, Barrow afirma a impossibilidade de divisão *ad infinitum* por que ideias não o são. Provavelmente, as palavras de Berkeley foram inspiradas em algo que extrapola a discussão da relação entre ponto e unidade feita por Barrow. Não é de interesse aqui identificar precisamente qual é

¹⁷ Assim, por exemplo, entre os números 1 e 2 pode haver uma sequência infinita como esta: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \text{etc.}$ Para Barrow, essa sequência *ad infinitum* vai em direção ao nada antes de se chegar a 2. Assim, nada há entre a sequência infinita e o número 2.

essa fonte de inspiração.¹⁸ O que é mais importante é saber o alcance que a entrada 75 tem no sentido de esclarecer a recusa da infinita divisibilidade da extensão. E isso pode ser resumido com segue:

- i) Unidade considerada na geometria (enquanto ponto) não é divisível uma vez que a definição de ponto exclui a noção de divisibilidade;
- ii) Berkeley assume que não há ideia divisível ao infinito.

A comparação entre (i) e (ii) pode indicar que Berkeley estava preparado para tratar ponto geométrico como sendo ideia e que, por isso, deve ser percebida. Não é de todo impossível dizer que tal ponto seria o próprio *mínimo sensível*. Portanto, a terceira parte do argumento, da entrada 342, parece ter como suporte a reflexão de que a geometria, mesmo quando considerada pela aritmética, tem ainda como limite uma ideia sensível. Desse modo, o erro de quem defende a infinita divisibilidade, a partir do terceiro argumento de Berkeley, não é só assumir inicialmente o conceito de unidade como algo indivisível, como sugere Jesseph,

¹⁸ Nas *Lectiones mathematicae*, não há realmente uma afirmação explícita de Barrow de que *nada em concreto* não é divisível *ad infinitum* porque ideias não o seriam. Desse modo, comentadores não se preocupam em fornecer precisamente a que Berkeley se refere na entrada 75, considerando o pensamento de Barrow. Jesseph limita-se a indicar somente o final do Capítulo 3, das *Lectiones*. Porém, como visto, só isso não explica a origem do conjunto total das palavras de Berkeley na entrada. Foi mostrado acima que Barrow, quando trata da infinita divisibilidade, parece indicar o contrário, ou seja, que toda magnitude é divisível infinitamente. Além disso, No Capítulo 9, Barrow (1970, p. 152) apresenta mais afirmações que parecem ir contra o que Berkeley tenta defender. Por exemplo, Barrow cita Descartes no sentido de concordar que a matéria é divisível ao infinito, ou seja, a própria realidade física (que é algo *concreto*) permite afirmar que há infinita divisibilidade. Desse modo, onde, na obra de Barrow, Berkeley teria se inspirado para afirmar que não há nada de concreto infinitamente divisível? Uma resposta é possível ser sugerida. No entanto, isso exige realmente que se extrapole esse Capítulo 3. Barrow, no próprio Capítulo 9, se dispõe a precisar vários conceitos polêmicos da matemática. Um deles é o de magnitude. Ser “delimitada” (*Terminatio*) é uma das propriedades que definem magnitude. É nesse sentido que Barrow afirma: “...nós não podemos conceber qualquer magnitude no pensamento, pelo menos distintamente, mas somente enquanto ela está contida ou compreendida com algum limite” (*Ibidem*, p. 142). Barrow considera linha como um exemplo de magnitude e que, por sua vez, só é concebida pela mente enquanto delimitada por pontos. Exclui-se a possibilidade de apreensão pela mente de uma linha infinita. Considerando esse problema e inspirado em Aristóteles, Barrow afirma que conceber uma linha infinita é tentar apreender o próprio infinito; e isso é impossível. Na linguagem aristotélica, o que Barrow recusa é a apreensão do infinito *atual*. A solução é assumir que o pensamento tem um “poder” para conceber uma linha aumentando sem fim. É o *processo* de aumentar ou de diminuir (uma linha delimitada) que é possível ser concebida pela mente. Em linguagem aristotélica, isso se compromete com a noção de infinito *potencial*: “[O aumento,] uma subtração ou divisão pode ser continuado à vontade, sem causar uma impossibilidade de procedimento adicional” (*Ibidem*). Berkeley, por sua vez, parece ter considerado essa noção de *Magnitude delimitada* como indicativo de que toda ideia de extensão necessariamente é finita. Se as ideias são o conteúdo do pensamento e extensão é ideia, logo não ideia que não seja delimitada, finita. No entanto, é necessário observar que Berkeley parece recusar a noção de infinito potencial quando apresenta o mínimo sensível como o limite do pensamento. A mente não consegue conceber algo menor que um mínimo sensível. Então, a divisibilidade não é possível de ser realizada infinitamente.

há a necessidade de que esse conceito de unidade esteja relacionado à geometria. O mínimo sensível seria a unidade básica a ser considerada. O erro dos matemáticos, para Berkeley, é não compreenderem isso.

2.2.1.3 *Avaliando a geometria constituída de mínimos sensíveis.*

O caso sobre a infinita divisibilidade, nos *Comentários filosóficos*, não faz menção somente ao pensamento de Isaac Barrow. Há outras afirmações de Berkeley tentando rebater argumentos a favor da infinita divisibilidade. Nomes como de John Keill, cuja obra analisada é *Introductio ad veram physicam*, recebem alguma atenção. Aqui não será necessário adentrar em outras investidas de Berkeley, pois a análise feita na seção anterior não aponta para uma necessária avaliação de outros argumentos quanto a esse tema. É suficiente afirmar que há em comum a rejeição da infinita divisibilidade, tendo como pressuposto uma defesa do *mínimo sensível* como limite da percepção.¹⁹ Além disso, o que foi apresentado já é suficiente para indicar muitas consequências interpretativas de Berkeley em relação à geometria. É de interesse agora analisar algumas dessas consequências quanto a determinados conceitos da geometria clássica euclidiana.

Um conhecido problema, cuja validade Berkeley não aceita, é o da teoria das magnitudes comensuráveis e incommensuráveis. É possível ilustrar com Euclides o que de problemático existiria nessa teoria. No Livro X, dos *Elementos*, aparece a seguinte definição a respeito das magnitudes: “magnitudes são ditas *comensuráveis* as que são medidas pela mesma medida, e *incommensuráveis*, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se” (Euclides, 2009, p. 353). Berkeley recebe esse tipo de definição sem deixar de perceber nela um comprometimento com a infinita divisibilidade. O próprio Euclides fornece condições para isso. Nesse mesmo livro X, ele apresenta várias demonstrações de cunho geométrico. Em especial, as Proposições 2 e 3 têm o objetivo de provar que, no caso de duas magnitudes *incommensuráveis*, surge um absurdo ao assumir que exista uma medida comum para elas. E, quanto às *comensuráveis*, isso não aconteceria. Em ambas as provas, Euclides realiza um processo de subtração entre duas linhas desiguais. No

¹⁹ Para uma análise dos argumentos de Berkeley contra Keill: Cf. Neri, 1980, p. 79-80; Jesseph, 1993, 55-56.

caso das incomensuráveis (Proposição 2), para que a prova funcione, subentende-se que duas linhas desiguais (uma maior que a outra) possam ser subtraídas uma da outra continuamente, sem se estabelecer um fim. Se isso acontece, surgirá uma contradição quando se tenta indicar uma medida comum para essas duas linhas, pois, pelo processo de subtração haveria a possibilidade de indicar uma linha menor, e assim por diante. Na Proposição 3, quanto às comensuráveis, o processo de subtração terá um fim, permitindo identificar uma linha que mesure as duas linhas em questão.

Se linhas são constituídas de mínimos sensíveis, e considerando que eles são o limite da percepção, assumir que um processo de subtração continua sem fim é, para Berkeley, agir contra a própria natureza da linha. Esse processo contínuo subentende uma infinita divisibilidade da linha. Como isso é falso, então não existirão linhas incomensuráveis. O mínimo sensível será a quantidade comum que mensurará todas as linhas. Eis afirmações nesse sentido cujo problema, especificamente, é sobre a comensurabilidade entre linhas de um quadrado: “A diagonal de um quadrado particular é comensurável com seus lados, ambos contendo certo número de M. V [*minima visibilia*]” (Berkeley, PC, §258). Destaca-se aqui a discussão sobre a comensurabilidade entre a diagonal de um quadrado e seus lados. Matemáticos antes de Berkeley teriam identificado essas duas linhas como incomensuráveis.²⁰ O problema, mais precisamente, é a impossibilidade de expressar a proporção entre uma diagonal e a linha de um quadrado utilizando números inteiros:

$$D: L :: \sqrt{2}: 1 \text{ [cf. Figura 2.2].}$$

²⁰ A história da descoberta da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado está ligada à própria descoberta do conceito de incomensurabilidade de um modo em geral. Há discordância entre renomados historiadores da matemática sobre a origem exata de tal conceito. Alguns defendem que ele nasceu entre os matemáticos pitagóricos (em uma pura investigação com números) e outros defendem que os incomensuráveis nasceram em uma investigação na geometria. No caso de Euclides, apesar de não haver nos *Elementos* uma demonstração especificamente sobre incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado, é bem provável que os gregos já sabiam disso antes dele. O maior indício é uma menção feita por Aristóteles, nos *Primeiros analíticos* (I, 23,41^a 21-27), sobre a existência de uma demonstração *por absurdo* a respeito disso. Para uma discussão atual, em português, sobre esse tema: Cf. Roque, 2012, p 124-132. Quanto a Berkeley, é importante frisar que ele já se depara com a discussão sobre incomensuráveis, tendo como pano de fundo o problema da comensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Outros matemáticos da sua época mencionam isso como uma tese aceita entre os matemáticos, como é o caso de Barrow (1970, p. 282).

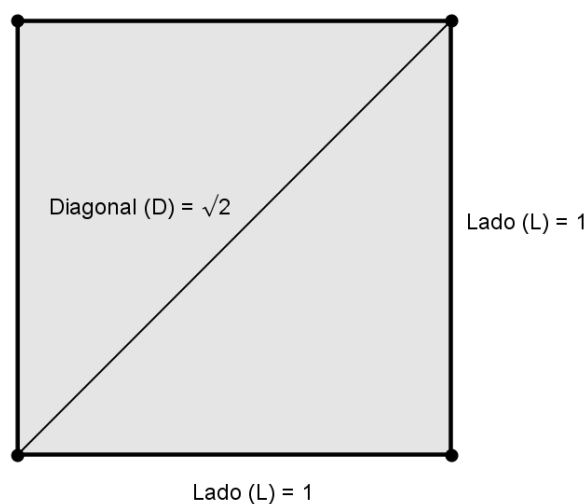


Figura 2.2

De acordo com Berkeley, se a diagonal é uma linha e o lado também o é, eles serão compostos de mínimos. Então, haverá um número inteiro de *mínimos* para ambas as linhas. Assumir que a diagonal de um quadrado seja um número irracional, como por exemplo $\sqrt{2}$, será um erro.

Outra entrada, dos *Comentários filosóficos*, poderá revelar mais sobre a natureza do quadrado em relação aos incomensuráveis:

Digo que não existem incomensuráveis, que não há irracionais (*surds*). E digo que ao lado de qualquer quadrado pode ser assinalado com um número. Digamos que você assinale ao lado do quadrado 10. Eu pergunto que 10, 10 pés, polegadas etc. ou 10 pontos. Se o último, eu nego que haja um quadrado assim, é impossível que 10 pontos componham um quadrado. Se o primeiro, resolve suas 10 polegadas, 10 pés etc. quadrados em pontos e o número de pontos deve necessariamente ser um número quadrado cujo lado é facilmente determinável. (*Ibidem*, §469).

Aqui Berkeley explicitamente nega não somente que existam incomensuráveis, mas, também, números irracionais, como é o caso de $\sqrt{2}$. Está óbvia a relação entre geometria e aritmética. A partir do que acontece na geometria, Berkeley nega que exista a possibilidade de se aplicar um conceito de incomensurabilidade ao domínio aritmético. É por isso que ele recusa os irracionais, uma vez que, na geometria, só é possível associar números inteiros às figuras quadradas. No entanto, na citação, o motivo está na própria natureza dos quadrados.

Há um número limitado deles, pois eles são determinados pelo número de pontos selecionados. Esses pontos são os mínimos sensíveis que podem constituir os quadrados. E quais são os quadrados que existem? São aqueles que respeitam a seguinte ordem: $2^2, 3^2, 4^2, 5^2 \dots$. Uma representação poderia ser feita como segue:

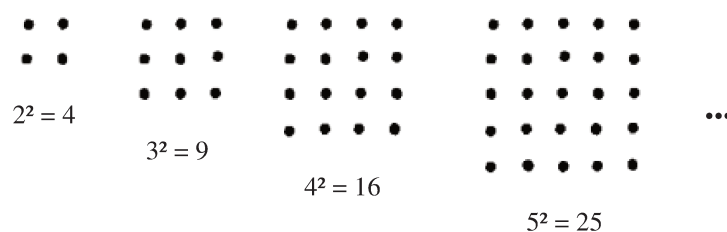


Figura 2.3

O menor quadrado possível é aquele que possui quatro pontos. Os próximos quadrados surgem sempre se acrescentado uma unidade a mais no número de pontos da base do anterior e elevando ao quadrado. Desse modo, quando Berkeley associa um *número quadrado* a cada quadrado que segue, ele nada mais faz do que estabelecer a área do quadrado. Se ela é medida em ponto, essa será a *área verdadeira*. Nesse sentido, não existe um quadrado com uma área que contemple 10 pontos. O símbolo “10”, então, só poderia ser associado a cada quadrado com se fosse uma medida arbitrária, ou seja, uma convenção assim como é quando se determina medidas como *pés*, *polegadas* etc.

Se essa é a maneira de construir os quadrados possíveis e, uma vez que Berkeley nega a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado, já é possível observar o impacto de sua interpretação geométrica contra concepções clássicas da geometria. Uma consequência é sobre a própria relação entre o lado e a diagonais. Eles não são somente comensuráveis, eles, também, serão sempre *iguais*, pois possuirão o mesmo número de pontos. No entanto, outra consequência que nasce do problema das figuras quadradas é o fato de Berkeley recusar a veracidade do teorema de Pitágoras. Euclides apresenta uma demonstração desse teorema na Proposição 47, Livro I, dos *Elementos*. A tese central é que seria possível construir três quadrados, tendo como base deles os catetos e

a hipotenusa de um triângulo retângulo, de um modo que a soma da área daqueles construídos sobre os catetos seria igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Simbolicamente, dado um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c , pode-se estabelecer a seguinte igualdade: $a^2 = b^2 + c^2$. Euclides não trata especificamente do caso de um triângulo retângulo isóscele (com ângulo reto e com dois lados iguais). Mas, um desdobramento possível desse caso será a seguinte igualdade: $a^2 = 2b^2$. Ou seja, se a hipotenusa é a e os dois lados b , logo sempre haverá um quadrado que será o dobro do outro. É aqui que surge um motivo para Berkeley recusar o teorema de Pitágoras como verdadeiro: “Um quadrado não pode ser o dobro do outro. Portanto, o teorema de pitagórico é falso” (Berkeley, PC, §500). Para se compreender o motivo da recusa, basta observar a sequência de possíveis quadrados construídos com suas verdadeiras áreas, isto é, a partir do número de pontos que os constituem: (4, 9, 16, 25 ...). Nessa sequência nunca existirá um número que será o dobro do outro; e como eles representam as figuras quadradas, então não existirão quadrados com o dobro da área verdadeira de outros [Cf. figura 2.3]. Por outro lado, não há um esclarecimento, por parte de Berkeley, se ele interpretou o tema dos quadrados como sendo um caso especial do teorema de Pitágoras. O interessante é que a entrada 500 parece manifestar a rejeição de tal teorema como um todo, mesmo para o caso de outros tipos de triângulos.

Com isso, já é possível perceber a presença de uma atitude radical de Berkeley. Com a constatação da falsidade do teorema pitagórico, assim como da teoria dos incomensuráveis, constrói-se já um “panorama teórico” que tem como objetivo estabelecer uma revisão por completo da geometria.²¹ Vários elementos conceituais estão por trás da atitude de Berkeley. Pode-se destacar, dentre eles, primeiramente, a própria noção de objeto da geometria. Está manifesto que Berkeley assume, nos *Comentários filosóficos*, a extensão sensível como sendo o legítimo objeto dessa disciplina. No entanto, mais precisamente, é necessário compreendê-lo como sendo a *extensão composta de mínimos sensíveis*. É isso

²¹ Há, nos *Comentários filosóficos*, muitas outras afirmações que confirmam essa interpretação. Berkeley se manifesta contrário a várias soluções de problemas clássicos da geometria, tais como: quadratura do círculo, problema do comprimento de arco, problema da razão entre o diâmetro e o comprimento de uma circunferência. Para isso, basta analisar a seguintes entradas respectivamente: §§249-251, 395, 514-516, 457. Para uma lista detalhada dos problemas analisados por Berkeley: cf. Jesseph, 1993, p. 58-62.

que Brook (2012, p. 2) identifica como motivo para tornar falso muitos dos teoremas de Euclides e da geometria clássica que surge baseada neles.

No entanto, mais uma questão importante que nasce, a partir disso, é a respeito da *ênfase* a ser dada ao mínimo sensível em si, considerando o raciocínio geométrico. Acima, considerando a entrada 466, analisou-se a primazia dada aos sentidos na geometria. Quando Berkeley afirma que “os sentidos, mais do que a razão, e a demonstração deveriam ser empregados a respeito de linhas e figuras”, estabelece-se uma exigente avaliação do *fazer* geometria. Isso significa que o geômetra não está autorizado a fazer geometria sem que perceba, de modo atual, os objetos geométricos. Berkeley parece exigir que o geômetra tenha diante de si as linhas, os planos, os sólidos etc., com os quais trabalha para que possa estabelecer as conclusões sobre a natureza desses objetos. Não se nega que existam demonstrações geométricas, porém a confirmação de sua veracidade só se estabelece contemplando os objetos geométricos que estarão diante do geômetra.

Portanto, para Berkeley, mais do que somente “extensão percebida”, nos *Comentários filosóficos*, o critério para estabelecer legítimos objetos para a geometria passa a ser: *extensão atualmente percebida, constituída de mínimos sensíveis*. A partir disso, a pretensão de universalidade para a geometria não parece ser o foco de atenção de Berkeley. Se há universalidade, isso será em um sentido mais restrito, já que se deve fazer uma inspeção sensível para identificar propriedades comuns aos objetos geométricos que estariam diante do geômetra. Sem essa inspeção o geômetra não parece estar autorizado a afirmar que uma conclusão, estabelecida para um objeto, realmente vale para outro.

Em outros textos, posteriores aos *Comentários filosóficos*, há ainda a menção aos mínimos. Esse é o caso do *Ensaio sobre uma Nova teoria da visão* (1709), onde Berkeley recusa mais uma vez que a extensão seja abstrata e infinitamente divisível.²² Contudo, o projeto de uma reconstrução total da geometria baseada em mínimos percebidos não se apresentou de modo pacífico para o próprio Berkeley. Alguns problemas, ainda a

²² “Cada uma destas magnitudes [tangível e visível] é maior ou menor conforme contenha mais ou menos pontos, já que são compostas de pontos, ou *minima*. Pois, o que quer que se diga da extensão em abstrato, é certo que a extensão sensível não é infinitamente divisível. Há um *minimum tangibile* e um *minimum visibile*, para além dos quais o sentido não pode perceber, fato que a experiência de cada um pode confirmar” (Berkeley, NTV, §54).

respeito da natureza do mínimo sensível, não foram resolvidos por Berkeley. Jesseph (1993, p. 68) identifica alguns deles. Por exemplo, qual a forma que o mínimo possui? Caso seja circular, isso fará com que um plano composto de mínimos seja descontínuo, pois o contato entre círculos não é total. Por outro lado, caso seja quadrado, isso ainda aponta para a “estranha” conclusão de que a diagonal e os lados dos quadrados são iguais, uma vez que há o mesmo número de mínimos. A noção de que o quadrado seja composto por quatro ângulos retos também é posto em dúvida com essa interpretação. Desse modo, essas dificuldades parecem ter desestimulado Berkeley a prosseguir com a ênfase no mínimo sensível. Muitos comentadores avisam para não se tomar a geometria do mínimo, presente na fase jovem Berkeley, como sendo sua última visão.²³ Cabe agora investigar como na fase, dita madura, Berkeley concebeu o objeto da geometria. Mais ainda, interessa saber como esse objeto deve ser considerado no raciocínio geométrico.

2.3 *Berkeley na segunda fase: a extensão percebida enquanto signo*

2.3.1 *O problema da infinita divisibilidade nos Princípios*

Em 1710, no texto *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano*, Berkeley retoma a discussão sobre a geometria. No entanto, o modo com ele passa a tratá-la agora contém também elogios. Berkeley ressalta, por exemplo, que a matemática de um modo geral (algo que inclui a própria geometria) desde a inauguração na antiga Grécia até os matemáticos modernos, possuiria princípios e demonstrações incontestáveis. Desse modo, sua atitude seria mais a de corrigir alguns princípios usados, ou pelo menos subentendidos nas demonstrações, que impediria a matemática de ser considerada uma ciência totalmente coerente:

Vamos agora fazer uma investigação concernente a outro ramo do conhecimento especulativo: a matemática. Celebrada ao máximo pela sua clareza e certeza demonstrativa, (...), no entanto não pode supor-se livre de erros (...). Embora os matemáticos deduzam os seus teoremas de um alto nível de evidência, os seus primeiros princípios são limitados à consideração da quantidade; e como não ascendem à investigação concernente às máximas transcendentais que influenciam todas as ciências, cada uma de suas partes desde o início, inclusive a matemática, de fato estão sujeitas aos erros envolvidos nelas. Não se pode negar a

²³ Cf Jesseph, 2005, p. 282; Szabo, 1995, p. 57-58.

veracidade desses princípios, nem a clareza e incontestabilidade da dedução efetuada; mas pode haver máximas errôneas de extensão superior ao objeto da matemática, tacitamente admitidas no progresso desta ciência... [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §118).

Aqui, ao invés de projetar uma reconstrução, é possível encontrar sim uma consideração favorável ao trabalho matemático. Isso está explícito quando Berkeley afirma a impossibilidade de “negar” a veracidade e clareza de princípios e de demonstrações realizados no trabalho matemático. Se há um projeto, resume-se muito mais a uma tentativa de apontar os seus compreensíveis desvios das “máximas transcendentais que influenciam todas as ciências”, para então torná-la corretamente fundamentada. No caso da geometria, um dos principais problemas a serem corrigidos diz respeito ao seu objeto: a extensão. Uma das principais teses a serem corrigidas é a infinita divisibilidade da extensão.

O problema da infinita divisibilidade aparece novamente como alvo de reflexão, para Berkeley, porém, diferente do que aconteceu nos *Comentários filosóficos*, é manifesta a não utilização de um vocabulário comprometido com mínimos sensíveis. Constrói-se, agora, nos *Princípios*, uma argumentação que exclui dois tipos de conceito de infinita divisibilidade. Trata-se da divisibilidade *potencialmente* infinita da extensão finita e da concepção da extensão finita atualmente detentora de infinitas partes. Contra a extensão finita como possuidora de infinitas partes de modo atual, Berkeley argumenta inicialmente que: “Cada extensão finita particular pensável é uma *ideia* existente apenas no espírito, e, portanto, cada parte dela deve ser percebida” (*Ibidem*, PHK, §124). Vê-se claramente aqui, como aconteceu, nos *Comentários filosóficos*, a identificação da extensão finita como sendo *ideia*. E parece ser fundamental a compreensão dessa identificação entre ideia e extensão finita para o conhecimento geométrico, pois Berkeley conclui já em seguida a impossibilidade dessa espécie de infinito: “logo, se não posso perceber inúmeras partes em uma extensão finita considerada, é certo não estarem aí contidas” (*Ibidem*). O conceito de ideia como aquilo que é percebido por completo pela mente é o ponto central da argumentação. A extensão, por ser ideia percebida, para realmente conter infinitas partes, deveria permitir que todas essas partes fossem percebidas de modo infinito. No entanto, isso não acontece. Então, é falso assumir que a extensão possui atualmente infinitas partes.

Berkeley também relaciona ideia e extensão finita para argumentar contra a extensão potencialmente dividida infinitamente:

Nada pode ser mais evidente para mim que as extensões que tenho em vista não são outra coisa senão minhas próprias ideias, e não menos clara a impossibilidade de dividir cada uma das minhas ideias em um número infinito de outras ideias, isto é, não são infinitamente divisíveis. Se por extensão finita se entende algo diverso de uma ideia finita, não sei o que seja e que, portanto, não posso nem afirmar nem negar alguma coisa sobre ela. [ênfase minha] (Berkeley, PHK, §124).

Aparece aqui novamente de modo explícito o motivo para negar o processo da infinita divisibilidade: extensão é ideia percebida. Quando Berkeley afirma que é “evidente” que possui ideia de extensão, ele está se referindo ao fato dela ser percebida pela mente enquanto extensão finita. Enquanto no argumento acima se compreendia uma percepção total de infinitas partes, a diferença agora está em afirmar que a divisão da extensão resultará em finitas partes. Não se percebe na ideia de extensão a existência de um processo contínuo e sem fim de divisão. Ela é uma ideia que se divide até certo limite. Portanto, é falso assumi-la como divisível infinitamente.

Afirmar, para ambos os casos, que a extensão é um “ideia percebida”, significa dizer, para Berkeley, que o critério que legitima o objeto da geometria é “ser ideia percebida”. Isso elimina qualquer interpretação de infinita divisibilidade. Tal critério será o motivo para Berkeley, nos *Princípios*, acusar os matemáticos de terem errado quanto ao objeto da geometria, por assumi-lo como infinitamente divisível, pois estariam influenciados pela doutrina da abstração. No parágrafo 125, ele recusa duas interpretações da extensão enquanto objeto abstrato. A primeira assume que a extensão é infinitamente divisível de modo abstrato, isto é, enquanto ideia abstrata, construída a partir da separação de qualidades sensíveis. Como não se percebe tal separação, essa interpretação é falsa. Berkeley também recusa a afirmação de que a extensão é algo externo à mente. Isso no sentido de que haveria infinitas partes nessa extensão mesmo que não seja possível de observar. Assim como nos *Comentários filosóficos*, assumir que a extensão é algo externo à mente, é considerá-la como não sendo ideia. É contraditório, para Berkeley, achar que se possa formular uma ideia de algo que exista fora da mente, mas que seja distinto do próprio conteúdo mental. Se for algo percebido pela mente, então não pode estar fora da mente.

Uma reflexão é necessária agora. Esse caso contra a infinita divisibilidade permite questionar o que há de distinto nele em comparação com a concepção da extensão enquanto *ideia sensível atualmente percebida*, apresentada nos *Comentários filosóficos*. Uma leitura apressada dos argumentos, nos *Princípios*, contra a infinita divisibilidade, pode levar à conclusão de que não existe diferença com a posição inicial de Berkeley. Novamente, o ponto central está em conceber a extensão como ideia percebida. E por isso, não seria muito difícil assumir que existam de modo implícito os tais mínimos sensíveis, também, nos *Princípios*. Então, qual a diferença entre a posição de juventude e a da maturidade? A resposta a isso exige que se inclua agora uma análise sobre o objeto da geometria enquanto objeto presente nas demonstrações. Diferentemente da fase de juventude, agora Berkeley pensará o objeto geométrico do ponto de vista da sua universalidade. A grande novidade é a extensão compreendida como signo que é fruto de um processo de generalização. Uma vez que, enquanto mínimo sensível, a ênfase na extensão conduz à indispensabilidade da presença atual dos objetos geométricos (enquanto figuras geométricas), será possível agora investigar essa nova interpretação perguntando sobre tal indispensabilidade na demonstração geométrica.

2.3.2 *Como o objeto geométrico torna-se geral: a generalização representativa*

Uma das principais novidades que aparecem, nos *Princípios*, é como Berkeley soluciona o problema dos termos gerais. Essa é uma solução do âmbito linguístico que Berkeley irá utilizar na geometria. Como visto no capítulo anterior, Berkeley, no parágrafo 12, da *Introdução*, dos *Princípios*, apresenta a noção de *representação* aplicada a ideias particulares. Nesse sentido, a universalidade é resultado de se considerar uma ideia particular como *representante* de uma classe. O particular, nesse sentido, não é tomado isoladamente, mas na relação com outros particulares.²⁴ O ponto central da *representação* está no fato de Berkeley reconhecer que uma ideia particular conteria elementos (ou propriedades) comuns a outros particulares. A noção de classe surge na media em que se

²⁴ Nas palavras de Berkeley: “acredito que reconhecemos que uma ideia considerada em si é particular, mas ao representar ou significar (*represent or stand for*) todas as outras ideias particulares do mesmo tipo (*sort*) torna-se geral” [ênfase minha]. Berkeley, Intro, PHK, §12.

considera unicamente a propriedade que possa aparecer em outros particulares. Há nisso uma *atenção seletiva*. A mente focaria a atenção em uma propriedade presente em um particular e consideraria a possibilidade dela estar presente em outros particulares. Desse modo, tudo o que for dito de tal propriedade valerá para todos aqueles que possuírem a propriedade. Os termos ser tornariam gerais na medida em que eles denotariam particulares como representantes da classe. Comentadores como Douglas Jesseph (1993, p. 69) se referem a esse processo de universalização como *generalização representativa*.

É exatamente nesse ponto que uma reflexão sobre a geometria torna-se possível. Se o objeto da geometria é extensão percebida e, por isso, ela não é infinitamente divisível, como ela será tomada no raciocínio geométrico? Berkeley aplicar a concepção de generalização representativa ao objeto geométrico. Nesse sentido, a noção de demonstração geométrica, considerará as figuras particulares, produzidas durante o processo de demonstração, como representante de outras possíveis figuras que poderão ser percebidas como detentoras das propriedades ali identificadas. O que é desenhado torna-se *signo* de toda possível figura geométrica que contenha a propriedade presente no desenho. Logo, o raciocínio geométrico poderia se expandir para objetos que não estão diante dos sentidos.

A invenção da *generalização representativa* impactou profundamente a filosofia da geometria de Berkeley. O que ele apresenta, a partir dos *Princípios*, seria a sua visão mais madura sobre a geometria. A mudança que surge é a possibilidade de considerar as figuras geométricas, focando-se nelas somente determinada propriedade que interessa ao raciocínio geométrico. Desse modo, por exemplo, não interessaria saber se uma linha contém um determinado número finito de *mínimos*, algo exigido nos *Comentários filosóficos*. Existiriam outras propriedades na linha que seriam relevantes para a demonstração e que permitiriam considerá-la como signo de outras. No parágrafo 126, dos *Princípios*, é isso que está sendo sugerindo:

...as linhas e as figuras particulares incluídas num diagrama supostamente representam inúmeras outras de diferentes tamanhos, ou, em outras palavras, que o geômetra as considera fazendo abstração de sua magnitude... (Berkeley, PHK, §126.)

Percebe-se que nesse tipo de afirmação evita-se o comprometimento o tamanho particular da linha. Não interessa, por exemplo, se ela tem 1 ou 2 centímetros.

Uma importante consequência dessa interpretação é que seria possível resgatar boa parte das demonstrações da geometria clássica. Pois, ao modo de ver de Berkeley, Euclides não faz nenhuma menção sobre a necessidade de uma demonstração se referir ao tamanho desta ou daquela magnitude finita particular. Segundo Jesseph, a reaproximação com a geometria clássica é uma das principais mudanças que Berkeley realiza nos *Princípios*. Pois, ali se considera magnitudes de um modo geral:

Se nós tomarmos seriamente a afirmação de que uma linha pode representar muitas outras, então nós podemos considerar uma linha particular dada como representantes de toda possível linha e não necessitando se preocupar com o exato número de mínimos em alguma linha particular. Essa concepção de geometria livra Berkeley de sua inicial visão cujas verdades da geometria deveriam ser sobre nossa percepção imediata e de sua tese de que a inspeção visual de figuras percebidas é suficiente para estabelecer um resultado geométrico. Como é esperado, uma boa quantidade da geometria tradicional pode ser acomodada na nova filosofia da geometria de Berkeley. (Jesseph, 1993, p.70).

Portanto, Berkeley está mais próximo de aceitar a geometria clássica a partir do que ele apresenta nos *Princípios*, e não a partir de suas teses de juventude.

No entanto, um problema que se manifesta com a *generalização representativa*, inclusive nessa solução na geometria, é o fato de ela levar a conclusão de que a atenção seletiva não pode dispensar *totalmente* os próprios particulares. Aquilo que possui a propriedade deve sempre estar presente para manifesta a propriedade que permite identificar os membros da classe. Sem isso o sentido universal parece não acontecer. Assim, novamente, como aconteceu, nos *Comentários filosóficos*, as figuras tornar-se-iam indispensáveis para a atividade geométrica. Algo que confirmaria tal interpretação aplicada à geometria seria a própria atitude de Berkeley. Pois, sempre que se manifesta a intenção de ilustrar o processo de generalização, Berkeley recorre a um exemplo geométrico:

...suponhamos que um geômetra esteja demonstrando o método de dividir uma linha em duas partes iguais. Ele traça, por exemplo, uma linha preta de uma polegada de comprimento; essa linha, que em si é particular, é, no entanto, geral em relação a seu significado, pois, do modo como aqui é utilizada, representa todas as linha particulares, quaisquer que sejam. (Berkeley, Intro, PHK, §12).

Aqui, realmente parece que Berkeley considera que o geômetra realiza uma *ação* construtiva da figura. Mais importante que isso, é o fato de que Berkeley trataria a linha construída como representativa de outras linhas, ou melhor, é a linha que o geômetra constrói que se torna signo e não outra. Portanto, não parece ser possível dizer que as figuras são absolutamente dispensáveis.

Com esses elementos apresentados, é possível compreender alguns pontos. Inicialmente, destaca-se a própria natureza do objeto geométrico nessa fase madura de Berkeley. Como visto, o objeto geométrico é concebido como uma ideia sensível, percebida pela mente. Mas, além disso, é da natureza de tal objeto geométrico permitir tomá-lo como signo de outros da mesma espécie. Desse modo, ele não é somente uma ideia atualmente percebida, mas, também se refere àquelas *possivelmente* percebidas. Assim, já é razoável identificar o critério para avaliar a inteligibilidade dos pretensos objetos geométricos como segue:

- O legítimo objeto geométrico deve se apresentar enquanto ideia percebida, de modo que possa funcionar como representante de outros objetos (da mesma classe) nos raciocínios geométricos.

Por outro lado, para formular esse critério, foi necessário compreender o conceito de generalização representativa no pensamento de Berkeley. Uma consequência direta disso foi a discussão do papel que as figuras particulares desempenham durante a demonstração. Mesmo tratando-as como signos, elas não são dispensáveis. O geômetra ainda parece necessitar delas para que o raciocínio geométrico aconteça. Caberá agora, uma pequena avaliação sobre como alguns comentadores têm compreendido o problema da generalização representativa e a função das figuras particulares na demonstração.

2.3.3 *Problematizando a generalização representativa*

Richard Brook (2012) é um dos mais contundentes comentadores ao afirmar que a pretensão de Berkeley em tratar o objeto da geometria enquanto representante de outros objetos da mesma espécie não permite ainda a reabilitação da geometria Euclidiana. Para ele, o que Euclides apresenta nos *Elementos* é incompatível com uma generalização representativa, pautada na *atenção seletiva* de propriedades presentes em particulares. Um

dos argumentos de Brook diz respeito à noção de *continuidade* existente na geometria euclidiana.²⁵ Por exemplo, no Postulado 2, Livro 1, dos *Elementos*, afirma-se que é possível *encontrar um segmento finito contínuo de linha a partir de outro segmento*. Isso quer dizer que dado um segmento de linha qualquer, seria possível encontrar um ponto nesse segmento que forneceria um novo segmento (menor), porém ainda contínuo. Em outras palavras, dado dois pontos, por onde passa uma reta, haverá sempre entre eles um ponto. Nesse sentido, *continuidade* subteme-se *densidade* e isso implica em afirmar que uma reta sempre conterá infinitos pontos.

Brook reconhece o esforço de Jesseph em considerar que a filosofia de Berkeley, nos *Princípios*, revela uma mudança de postura quanto aos objetos geométricos. A teoria do *mínimo sensível* não desempenha o mesmo papel como nos textos de juventude. Contudo, Brook enfatiza que, apesar disso, Berkeley nunca negou que os objetos da geometria, tais como linhas, planos e sólidos são constituídos de *mínimos*. A mudança, segundo Brook, não é sobre a natureza desses objetos mas sim na ênfase que eles desempenham no raciocínio matemático. Assim, ainda nos *Princípios*, os objetos geométricos são constituídos de *mínimos*. Desse modo, a noção de *continuidade*, comprometida com a *densidade*, torna-se incompatível com o que Berkeley assume como objeto geométrico. Os desenhos particulares, realizados pelo geômetra, seriam incompatíveis com os conceitos presentes nas demonstrações de Euclides.

Para Brook, a fonte desse problema de Berkeley repousa na própria noção de generalização representativa. A generalização não poderia ocorrer a partir da atenção seletiva, pois ela exige, inevitavelmente, considerar propriedades empíricas dessas figuras. Se Berkeley quis, de fato, salvar a geometria euclidiana, ele deveria ter se comprometido com uma concepção de objeto geométrico onde as figuras particulares são irrelevantes para a demonstração. É nesse sentido que Brook sugere o conceito de *idealização*. Isso nada mais é do que descomprometer o conteúdo de uma definição com a sua existência na realidade. Os conceitos geométricos seriam definidos independentemente de eles serem encontrados na natureza. É por isso que, para Brook, Berkeley deveria ter tratado os termos geométricos como “ficções úteis”, ou seja, sem que eles possuam referência na natureza.

²⁵ Cf. Brook, 2012, p. 4.

Em linguagem berkeleyana, isso quer dizer que deveria ter tratado os objetos geométricos sem comprometê-los com ideias percebidas.

2.3.3.1 *Reformulando a noção de atenção seletiva*

O questionamento que se põe, agora, é se realmente a única possibilidade de interpretar a noção de “atenção seletiva” é esta sugerida acima. Para isso, será necessário evocar uma passagem que Berkeley acrescentou somente na segunda edição dos *Princípios*, em 1734:

...aqui se deve reconhecer que um homem pode considerar uma figura meramente como triangular, sem prestar atenção nas qualidades particulares dos ângulos ou nas relações entre os lados. (...) Da mesma maneira, podemos considerar Pedro apenas um homem ou um animal, sem formar ideia abstrata antes mencionada, seja de homem, seja de animal, visto que tudo do que é percebido não é considerado. [ênfase minha] (Berkeley, Intro, PHK, §16).

Ora, o que seria tal noção de *triangularidade*? Trata-se de um tipo de conteúdo mental que estaria de alguma forma desvinculada da relação direta com o que é percebido. Pois, caso contrário, Berkeley não poderia afirmar que “tudo o que é percebido não é considerado”. O problema está em saber em que media esse conteúdo mental se manifesta. A resposta é muito simples, ou seja, trata-se da própria linguagem. As palavras poderiam ser compreendidas sem a necessidade de apresentar, em todo momento, as ideias que são as referências dessas palavras. É nesse sentido que Berkeley, no §19, da *Introdução*, dos *Princípios*, compara o uso da linguagem ao uso de símbolos na álgebra. Um matemático sabe raciocinar com símbolos algébricos sem ter que apresentar à mente os números que esses símbolos representam. Portanto, há um conteúdo mental ligado às palavras que permitem manipula-las mesmo sem alguma ideia.

Se essa interpretação é coerente, pode-se afirmar, diferentemente da tese criticada por Brook, que é possível sim considerar as figuras particulares como dispensáveis no processo demonstrativo. Algo que corrobora isso é o fato de que, para Berkeley, a demonstração lida com proposições, ou seja, não tem como desassociar o processo demonstrativo de um plano linguístico. Por exemplo, no parágrafo 15, da *Introdução*, dos *Princípios*, Berkeley enfaticamente considera uma demonstração como

algo que contém proposições. Caso a ênfase fosse dada somente na propriedade empírica, como é o caso da filosofia da geometria presente nos *Comentários filosófico*, a presença de uma proposição seria secundária, pois o que importaria é a constatação sensível da propriedade presente nas figuras

No entanto, nos *Princípios*, a linguagem é entendida como aquilo que admite que se faça um recorte da realidade sem que a todo momento se necessite voltar a atenção a essa realidade. É aqui que é possível retomar a discussão sobre a “atenção seletiva”. Se a demonstração é algo associado à linguagem, não é necessário que a atenção esteja sempre voltada para a qualidade particular que é generalizada. A atenção seletiva não necessita atuar constantemente, pois há momentos em que as ideias não estão presentes na demonstração para serem conteúdo dessa atenção. Com isso conclui-se o seguinte: se a atenção seletiva é importante para Berkeley, é somente em uma fase inicial quando as palavras adquirem significado. Há momentos em que a mente necessita se voltar às ideias particulares. Porém, após isso, as palavras mantêm seu significado. Para Berkeley, há raciocínio, há compreensão das palavras sem que as ideias necessitem atuar de modo constante. Portanto, no caso, da geometria, a demonstração não necessita se referir às figuras particulares, pois a demonstração, a partir dos *Princípios*, antes de tudo, é algo linguístico.

Tendo considerado essa nova maneira de tratar a “atenção seletiva”, pode-se concordar com Brook de que as figuras particulares não desempenham uma função na demonstração. Porém, uma vez que existiria um processo inicial da construção do conceito, onde as ideias particulares desempenham uma função necessária, é impossível defender que Berkeley deveria ter tratado os objetos geométricos como “ficções úteis”. A percepção sensível ainda desempenha um papel importante na atividade matemática, mesmo que seja inicialmente, quando o matemático adquire o vocabulário que irá utilizar na demonstração. A demonstração de fato não precisa se apoiar em figuras particulares, porém a construção da compreensão matemática, que nesse caso está associada a um processo inicial de aquisição de linguagem, deve em algum momento considerar tais figuras. Problemas como o da continuidade, como apresentado por Brook, talvez devam ser assumidos como uma real limitação da filosofia da geometria de Berkeley. No entanto, se Berkeley estava ou não

consciente dessa limitação, o importante é que é possível constatar, como Jesseph defende, que há uma atitude de Berkeley favorável à geometria euclidiana a partir dos *Princípios*.

2.4 Conclusão

O objetivo deste capítulo foi o de se questionar como Berkeley avalia a legitimidade do objeto geométrico. Na filosofia da geometria de Berkeley, isso se mostra como sendo um questionamento sobre o critério para estabelecer o que tal objeto deve apresentar para ser considerado inteligível. A dificuldade para responder isso é o fato de que há duas fases no pensamento de Berkeley. Na primeira, de juventude, o critério é que tais objetos se manifestem enquanto “extensão percebida, constituída de *mínimos sensíveis*”. Qualquer pretensa definição que fuja a isso é rejeitada por Berkeley. A inteligibilidade de tal objeto depende da mente apreendê-lo enquanto ideia percebida. E isso implica em dizer que a extensão possui um teor empírico que a mente não consegue eliminar. Portanto, uma concepção abstracionista da extensão é enfaticamente rejeitada por Berkeley. A consequência dessa interpretação não é de todo branda para o raciocínio geométrico. Pois, a ênfase é dada na percepção sensível atual de tais objetos. Os sentidos assumem a primazia no *fazer* geométrico, ou seja, caberia ao geômetra somente uma inspeção sensível das propriedades das figuras para que conclusões pudessem ser alcançadas. Muito da geometria euclidiana não se mantém com esse critério.

No entanto, na segunda fase, Berkeley concebe o objeto geométrico como sendo não somente a “extensão percebida” de modo atual. A extensão *possivelmente* percebida é também assumida como característica de um legítimo objeto da geometria. Isso quer dizer que o critério para avaliar os objetos mantém ainda a percepção sensível, porém a mudança agora está no fato de que a ênfase de Berkeley sobre a inteligibilidade dos objetos repousa da possibilidade deles funcionarem como representantes de outros possíveis objetos percebidos. O critério de inteligibilidade a partir das ideias percebida se aplica nisso. O conceito de signo aparece aqui. No raciocínio geométrico, a extensão sensível é julgada não somente em relação ao atualmente percebido, mas, também, em relação com aquilo que poderá ser percebido. Berkeley não admite que tal signo manifeste uma propriedade impossível de ser percebida. A infinita divisibilidade não pode ser

percebida em figuras particulares. Portanto, ela não entrará na lista dessas propriedades que se esperaria que fosse percebida em outros particulares. Desse modo, aquilo que foi generalizado surge de algo percebido.

No âmbito da demonstração, foi afirmado que, por ser algo que envolve a linguagem, é possível dispensar as figuras particulares. No nível da generalização, a demonstração não trata desta ou aquela figura, mas sim de todas. Isso não quer dizer que o conceito de signo possa eliminar as figuras por completo. A inspeção sensível é importante em uma fase inicial, ou seja, no momento de aquisição de linguagem que será utilizada na demonstração. Desse modo, a percepção de *ideias* ainda é fundamental na atividade do geômetra. É isso que permite diferenciá-la da aritmética e da álgebra. Nessas disciplinas, admite-se a possibilidade de considerar o signo de modo puro, sem que ele tenha possuído qualquer relação com ideias percebidas. A raiz imaginária ($\sqrt{-1}$) é um exemplo. Ela surge na álgebra sem que tenha existido qualquer relação com o que é percebido enquanto ideia. Diferentemente na geometria, ponto, linha, planos etc., são objetos percebíveis. Eles serão essenciais para dar significado aos termos usados nas demonstrações geométricas.

Caberá, agora, investigar como essa concepção de objeto geométrico se manifesta na crítica que Berkeley fez ao cálculo infinitesimal, em especial como apresentada em *O Analista*.

3 O Analista e a crítica aos objetos do cálculo infinitesimal

3.1 Introdução

Pretende-se neste capítulo reconstruir os principais argumentos de Berkeley, apresentados em seu texto *O Analista*, contra as versões newtoniana e leibniziana do cálculo infinitesimal. Mais importante, é compreender como aquilo que Berkeley demanda para esses métodos se relaciona com os conceitos de objetos matemáticos vistos nos capítulos anteriores, principalmente em termos da questão da inteligibilidade. Tanto Newton quanto Leibniz se apoiaram em conceitos matemáticos que, ao modo de ver de Berkeley, utilizam elementos tanto da aritmética e da álgebra como, também, da geometria. Então, saber precisamente de que modo Berkeley avalia a legitimidade dos objetos do cálculo, nessas duas versões, exige que se considere qual é o critério adotado.

Será observado também, que Berkeley avalia os erros lógico-demonstrativos de tais métodos. Assim, é de interesse a própria relevância do critério de avaliação dos objetos matemáticos. Isto é, buscar-se-á compreender se tal crítica é constituída por duas vias distintas onde de um lado estaria a crítica aos objetos e de outro a crítica às demonstrações; ou ainda, se haveria uma relação de dependência entre elas, no sentido de que o matemático deveria assumir a denuncia Berkeley, em *O Analista*, como sendo a apresentação de um plano por onde começar a construção da verdadeira matemática.

3.2 As duas vias da crítica de Berkeley¹

3.2.1 Do critério para avaliar os novos métodos matemáticos

Primeiramente, o que deve ser observado, quanto ao texto *O Analista*, é o seu caráter polêmico.² No início dele, Berkeley (AN, §2) revela que adotará a postura de um

¹ Esta seção contém elementos presentes no capítulo 2 de minha dissertação de mestrado: Cf. Calazans, 2008a, p. 60-83. Diferentemente do uso que será feito aqui, na dissertação tratei das duas vias da crítica de Berkeley à matemática newtoniana de um modo a construir um conceito de rigor matemático próprio à filosofia berkeleyana. Para isso, foi necessário analisar também, no terceiro capítulo da dissertação, a tese da *compensação de erros*, que Berkeley apresenta em *O Analista* com a finalidade de mostrar por que o método das fluxões e o cálculo leibniziano produzem respostas corretas, mesmo partindo de premissas falsas. Sobre esse assunto a respeito do critério de rigor berkeleyano, relacionado à tese da compensação de erros, também desenvolvi em: Calazans, 2008b.

² Para mais informações históricas a respeito da elaboração do texto *O Analista*: Cf. Calazans, 2010.

“livre pensador” para então avaliar os “objetos, princípios e métodos de demonstração” da matemática adotada em sua época.³ Essa informação possui uma interessante característica. Trata-se de uma estratégia argumentativa que tem como objetivo atacar uma crítica, de cunho teológico, já elaborada. Para compreendê-la, basta observar o título completo da obra: “*O Analista*: ou um discurso dirigido a um matemático infiel, onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé”. Esse título manifesta que o que se pretende investigar é se um matemático teria a permissão para tratar a matemática como mais importante do que a religião. Isso porque os objetos com as características dos mistérios (presentes na religião, isto é, os objetos da fé) nunca seriam admitidos nas demonstrações matemáticas. Para Berkeley esse é “o caminho mais curto para se produzir infiéis” (Berkeley, AN, §1).

Segundo Robles (2006, p. 19-20), há biógrafos de Berkeley que apontam como sendo o físico e matemático Edmund Halley (o do tão famoso cometa Halley) esse infiel matemático em questão. *O Analista* teria sido escrito, desse modo, em resposta a uma atitude de Halley em ter convencido Samuel Garth (um amigo em comum com Berkeley) a não receber seus últimos serviços espirituais no leito de morte. Pois, para Halley, a religião estaria repleta de mistérios e sofismas a ponto de não valer a pena confiar nela. Robles não assegura a veracidade de tal fato. Porém, ele coloca *O Analista* como parte de um projeto berkeleyano para atacar o ateísmo e ceticismo, tentando assegurar a possibilidade do ensino da religião cristã. *O Analista*, nesse sentido, seria um texto dirigido de maneira mais geral a matemáticos modernos descrentes e que usariam a matemática para difamar a religião.

Dito isso, quando Berkeley afirma que adotará a posição de um livre-pensador, ele estará se propondo a assumir transitoriamente a posição de um matemático moderno (que considerasse ao mesmo tempo a religião como duvidosa) para avaliar a então matemática praticada pelos modernos, como, por exemplo, o método das fluxões, de Newton, e o *Calculus differentialis*, de Leibniz. Portanto, a posição de um “livre pensador” pode ser caracterizada, em *O Analista*, como sendo a de um matemático moderno que reconheceria o

³ Berkeley utiliza os termos “livre pensador” em outros de seus textos, como por exemplo, *Alciphron* (1732), para se referir a pensadores céticos e ateus (cf. Robles, 2006, p. 19-20).

rigor de tais métodos matemáticos; e, ao mesmo tempo, desconsideraria a religião quanto à ausência de rigor demonstrativo, uma vez que na teologia se aceita como objeto de estudos os “mistérios”, que são impossíveis de serem apreendidos pela razão humana.

Desse modo, se alguém julga a religião como inexata, deve existir um ponto de referência para realizar tal avaliação. Isso se encontraria na própria matemática até então aceita. É nesse sentido que Berkeley localiza, de maneira geral, o que seria um elementar critério para avaliar a matemática (que os próprios matemáticos teriam utilizado), em especial a geometria:

Trata-se de uma antiga observação que a geometria é uma lógica excelente. E é preciso reconhecer que, quando as definições são claras, quando os postulados não podem ser recusados nem os axiomas, negados, quando, após contemplar e comparar distintamente as figuras, as propriedades delas são derivadas por meio de uma cadeia contínua e bem conectada de consequências, mantendo os objetos constantemente à vista e a atenção sempre fixada sobre eles, adquire-se com isso um hábito de raciocínio minucioso, exato e metódico, hábito esse que fortalece e ilumina a mente e torna-se de uso geral na investigação da verdade ao ser transferido para outros assuntos. Mas, por ora, valeria a pena considerar até que ponto nossos geômetras analíticos se afastam disso. (Berkeley, AN, §2)⁴.

Como uma estratégia explicativa, será possível assumir uma divisão em três tópicos do que estaria em questão para a avaliação que Berkeley se propõe. Nesse sentido, quanto se destaca que a geometria seria uma *lógica* excelente, isso significa que ela respeitaria os seguintes tópicos:

- (1) *Objetos adequados* que podem ser mantidos “à vista” e com a “atenção fixada sobre eles”;
- (2) Definições claras, postulados, princípios autoevidentes;
- (3) Propriedades derivadas por uma cadeia *bem* interligada de raciocínios.

⁴ Nos termos originais de Berkeley: “It hath been an old remark that Geometry is an excellent Logic. And it must be owned, that when the Definitions are clear; when the Postulata cannot be refused, nor the Axioms denied; when from the distinct Contemplation and Comparison of Figures, their Properties are derived, by a perpetual well-connected chain of Consequences, the Objects being still kept in view, and the attention ever fixed upon them; there is acquired an habit of Reasoning, close and exact and methodical: which habit strengthens and sharpens the Mind, and being transferred to other Subjects, is of general use in the inquiry after Truth. But how far this is the case of our Geometrical Analysts, it may be worth while to consider”.

Segundo Jesseph (1993, p. 183-185; 2005, p.299), não há nada de idiossincrático nesses critérios apresentados por Berkeley. Tratar-se-ia do mais elementar critério para avaliar a exatidão matemática. Em especial, isso evocaria princípios lógicos de origem aristotélica e que seriam aceitos por outros matemáticos da época como, por exemplo, o próprio Isaac Barrow.⁵ Desse modo, será a partir desses três pontos retirados da própria prática matemática dos modernos que Berkeley irá avaliar o método das fluxões e o cálculo diferencial de Leibniz. Antes de uma avaliação mais pontual do que se trata cada tópico acima, será interessante apresentar as críticas de Berkeley. Para isso, será seguido o próprio roteiro sugerido por ele. Primeiro focar-se-á nos objetos e depois nos princípios e nas demonstrações dos métodos matemáticos postos em questão.

3.2.2 A crítica aos objetos do método das fluxões

O julgamento de Berkeley sobre o método das fluxões tem como base dois textos de Newton: o Lema II, Livro II, dos *Principia*, e a versão do *De quadratura curvarum*, publicada como apêndice da edição latina da *Ótica*. A primeira concepção importante apresentada foi o tratamento newtoniano das quantidades matemáticas como sujeitas ao movimento. Newton entendeu que isso poderia ser realizado fazendo o movimento exercer o papel de “gerador” ou “produtor” das quantidades geométricas. Berkeley parafraseia esses textos de Newton da seguinte maneira: “...linhas são geradas pelo movimento de pontos, planos são gerados pelo movimento de linhas e sólidos são gerados pelo movimento de planos”(Berkeley, AN, §3). As quantidades geométricas são vista, portanto, sempre como possuindo um caráter cinemático. No lema II, Livro II, dos *Principia*, além de apresentar as quantidades matemáticas como geradas pelo movimento, Newton afirma que elas são geradas, também, em um fluxo contínuo. Ele está, nesse caso, se referindo ao

⁵ É de considerável semelhança as palavras de Berkeley e as seguintes de Barrow: “Mas, receio que alguém possa se incomodar com longas e prolixas comparações. Apesar de tudo, a partir disso se pode chegar ao método de demonstração que é utilizado pelos matemáticos, isto é, eles somente tomam coisas, nas suas considerações, que eles as tenham clara e distintamente em suas mentes; e tais coisas eles as designam com nomes invariáveis, adequados e corretos. Para investigar suas afecções e extrair conclusões verdadeiras delas, eles colocam, de início, muito poucos axiomas que são muito conhecidos e certos. Similarmente, tais matemáticos declaram muito poucas hipóteses, que são altamente consonantes com a razão, e que não seriam refutadas por uma mente sã. (...) Preservam uma ordem primorosa em suas demonstrações, tal que muitas proposições seguem facilmente de coisas provadas ou supostas previamente” (Barrow, 1970, p. 65).

tempo, que é quem realmente possui o caráter de fluidez. Desse modo, o motivo pelo qual ocorre a geração de linhas, planos (ou qualquer outra quantidade) no fluxo contínuo é o seguinte: o movimento sempre está acompanhado pelo tempo fluente. É o tempo que transfere sua fluidez *contínua* aos movimentos geradores de quantidades matemáticas.⁶

Ao se apresentar a relação entre o movimento como produtor de quantidades matemáticas e o tempo matemático, estabelece-se, assim, a base para a construção de outro conceito central do método das fluxões. Esse conceito recebe o nome de *momento*. Berkeley interpreta o *momento* como sendo o objeto que Newton contundentemente admitiu no método das fluxões. Para saber do que se trata, é necessário observar como *momento* se relaciona como outros dois termos: *fluxão* e *quantidades fluentes*. Para isso as próprias palavras de Berkeley serão úteis: “velocidades são chamadas fluxões (*fluxions*); enquanto que as quantidades [matemáticas] geradas são chamadas quantidades fluentes (*flowing quantities*)” (Berkeley, AN, §3). Berkeley destaca que o termo “fluxão” é usado para designar a *velocidade* das quantidades que são geradas pelo movimento (quantidades fluentes). Contudo, não se trata de qualquer velocidade. “Fluxão” é a velocidade de

⁶ Para Newton, existe um só tempo do qual todos os tipos de movimento dependem. Esse é tempo absoluto, matemático, que flui uniformemente sem depender de qualquer movimento em particular. Como visto em uma nota, no capítulo anterior, esse conceito de tempo é aquele apresentado no Escólio às Definições, dos *Principia*. No entanto, em outro texto seu, o *De methodis serierum et fluxionum* (1670-1671), Newton afirma que não poderia apreender o tempo verdadeiro (ou seja, absoluto) e tratá-lo formalmente em equações. Isso significa que uma equação só se pode comparar quantidades da mesma espécie. Assim introduzir uma quantidade de tempo, em si mesma, poderia ferir a construção da equação enquanto sua homogeneidade. Para resolver, Newton supõe que o movimento matemático ocorre tendo o tempo verdadeiro como “pano de fundo”. Isso significa que se pressupõe que as quantidades seriam geradas no tempo verdadeiro. Assim, Newton escolheria um dos movimentos, que gera uma quantidade, com sendo o tempo por analogia. Eis as palavras de Newton: “... ao passo que (...) somente coisas da mesma espécie podem ser comparadas, sendo que vale o mesmo para suas velocidades de aumento e decréscimo. Por isso, no que segue, não tratarei o tempo considerando-o formalmente. Mas suporei que alguma das quantidades propostas, sendo da mesma espécie, é incrementada por um fluxo uniforme, pelo qual o restante poderia referir-se como se fosse ao tempo. Sendo por isso, por meio da analogia, que isso pode propriamente receber o nome de tempo. Seja onde for que a palavra tempo ocorrerá no que segue (que em consideração à perspicuidade e distinção que tenho algumas vezes usado), não terei compreendido como se medisse o tempo em sua acepção formal, mas somente compreendo esta outra quantidade, por cujo aumento uniforme ou fluxo, o tempo é exposto e medido” (MP-3, p. 73). Mais adiante, neste capítulo quando se analisará a crítica de Berkeley à demonstração de Newton, presente no *De quadratura*, aparecerá o símbolo θ . Tal símbolo representará o tempo não em sua em sua própria natureza. Mais precisamente, ele representará o primeiro movimento gerado no tempo. Ali o tempo está pressuposto. No entanto, ele será somente o tempo por analogia pelo qual todos os outros movimentos seriam regulados.

quantidades fluentes que surgiriam nas *partes infinitamente pequenas de tempo*.⁷ É exatamente aqui que se chega ao conceito de *momento*: são as *quantidades fluentes* geradas nessa quantidade infinitamente pequena de tempo. É isso que está presente nas palavras, novamente, de Berkeley:

Afirma-se que essas fluxões são quase como incrementos das quantidades fluentes, geradas nas menores partículas iguais de tempo e que estão, precisamente, na proporção primeira dos incrementos nascentes ou na proporção última dos incrementos evanescentes. Às vezes, em lugar das velocidades, consideram-se, sob o nome de momentos, os incrementos ou decréscimos momentâneos de quantidades fluentes indeterminadas. [ênfase minha] (Berkeley, AN §3).

Aqui, além de Berkeley negociar com uma tríade de conceitos (fluxão, quantidade fluente e *momento*), destaca-se algo importante: há a possibilidade de substituir *momento* por fluxão. Isso é algo importante que o próprio Newton defendeu. No Lema II, Livro II, dos *Principia*, ele reconhece que essas quantidades (enquanto *momento*) são proporcionais às velocidades com que elas são geradas. Devido à proporcionalidade, torna-se possível substituir uma pela outra. É isso que Berkeley reproduz em *O Analista*.⁸

Há ainda dois aspectos importantes do conceito de *momento* que se deve esclarecer. O primeiro é a interpretação que coloca os *momentos* como as quantidades com as quais os movimentos se iniciam ou finalizam. Porém, não se deve concebê-los como quantidades finitas, isto é, desconsidera-se a magnitude do *momento*, pois é uma quantidade que se localiza entre o nada e uma quantidade finita e, assim, são compreendidos como “princípios que geram quantidades finitas”. O outro aspecto refere-se à possibilidade de se determinar

⁷ A respeito da origem do termo “fluxão” na obra de Newton: Cf. Panza, 2010, p. 509-546. Segundo Panza, esse termo foi introduzido por Newton pela primeira vez no texto *De methodis serierum et fluxionum*. Nessa obra, Newton teria usado “fluxão” de modo diferente do que se entendia como “velocidade pontual”. Pois, Newton introduz ali “fluxão” para negociar com a variação de quantidades no sentido *geral, abstrato*. Desse modo, enquanto que “fluxão” se referiria à velocidade com que *qualquer* quantidade matemática é gerada continuamente no instante de tempo, “velocidade pontual” foi um conceito usado no início da carreira de Newton para se referir somente à velocidade inicial das quantidades geométricas. “Velocidade pontual”, assim, tratava-se somente de um caso particular de “fluxão”. Panza, também, reconhece a dificuldade de aplicar essa generalidade abstrata de “fluxão” aos textos posteriores de Newton, como é o caso dos *Principia* e do *De quadratura*, que são os textos analisados por Berkeley.

⁸ Nas palavras de Newton: “[os] incrementos ou diminuição momentâneos [das quantidades matemáticas] são o que eu chamo de momentos (...). O mesmo ocorre se em lugar de momentos se tratar das velocidades dos incrementos (que também podem chamar-se movimentos, mutações, fluxões de quantidades) ou bem de qualquer quantidade finita proporcional as ditas velocidades” [ênfase minha] (Newton, 1999, p. 647).

momentos de ordens superiores. Isso significa que se pode obter uma nova *fluxão* instantânea a partir de uma primeira:

...das citadas *fluxões* existem outras *fluxões*, sendo estas *fluxões* das *fluxões* chamadas de segundas *fluxões*. E as *fluxões* dessas segundas *fluxões* são chamadas de terceiras *fluxões*, e assim sucessivamente, quarta, quinta, sexta etc., *ad infinitum*. (Berkeley, AN, §4).

Ou ainda nas palavras de Newton, no *De quadratura*, sobre as *fluxões* de outras ordens:

Existem *fluxões* de *fluxões* (...), mutações mais ou menos rápidas que podem ser chamadas *segundas fluxões* de z, y, x, v que podem ser marcadas como $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$. As *primeiras fluxões* dessas, ou as *terceiras* de z, y, x, v , portanto são $\dot{\ddot{z}}, \dot{\ddot{y}}, \dot{\ddot{x}}, \dot{\ddot{v}}$, e as *quartas* são $\ddot{\ddot{z}}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{v}}$... (MW-2, p. 143).⁹

Com isso, tem-se o suficiente para apresentar a crítica. Segundo Berkeley, esses objetos tornam-se suspeitos em virtude da maneira como as faculdades mentais se estruturariam e têm acesso aos seus conteúdos. As faculdades em questão são os sentidos e a imaginação:

...assim como nossos *sentidos* ficam exauridos e intrigados com a percepção de objetos extremamente diminutos, também a *imaginação*, faculdade que deriva dos sentidos, fica sumamente exaurida e intrigada para conceber ideias claras das partículas mais diminutas do tempo, ou dos ínfimos incrementos aí gerados; e muito mais ainda para compreender os momentos ou incrementos das quantidades fluentes em *statu nascenti*, em sua origem ou primeiríssimo começo da sua existência, antes de se tornarem partículas finitas. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §4).

Nessa instância da crítica, há um duplo comprometimento. Um deles é considerar os sentidos como padrão para as demais atividades cognitivas. A imaginação, em particular, seria restrita aos mesmos limites da sensibilidade. Assim, tudo o que não fosse possivelmente perceptível e, por conseguinte, imaginável, tampouco seria inteligível. Em segundo lugar, trata-se do vínculo entre tais faculdades. Entende-se que a imaginação “deriva” dos sentidos. Supostamente isso acontece, porque quem fornece o conteúdo para imaginação é a própria faculdade dos sentidos. Sem esse vínculo, a imaginação não atuaria

⁹ Em termos matemáticos atuais (e correndo o risco de anacronismo), “fluxão” poderia ser identificado como sendo a velocidade instantânea obtida pela primeira derivada de uma equação de posição. Assim, “fluxão de fluxão” seria a derivada segunda a partir da derivada primeira. Porém, no caso de Newton, isso seria um processo que poderia ser repetido indefinidamente.

ou, até mesmo, não existiria. Assim, o vínculo não só possibilita a atuação da imaginação, como, também a limita a produzir objetos que nunca ultrapassarão as características dos objetos fornecidos pelos sentidos. Imaginar é trabalhar com o que é primeiramente sensível. Berkeley atribui a essas duas faculdades o papel de determinar se algo é compreensível ou não. Portanto, pode-se dizer que o critério de inteligibilidade utilizado, em *O Analista*, para avaliar os objetos do método das fluxões diz respeito ao fato deles serem percebidos pelos sentidos e, consecutivamente, pela imaginação.

Como os *momentos* são compreendidos como quantidades sem magnitudes, geradas em um fluxo temporal infinitamente pequeno, ele se encontram além da capacidade da percepção sensível. Os sentidos não percebem o que está além do que é finito. Portanto, eles não percebem o que são *momento*. Além disso, como o conteúdo que é imaginado incide no mesmo campo do conteúdo dos sentidos, o do finito, não se pode imaginar o que seja *momento*. É nesse sentido que os *momentos* são rejeitados por serem objetos ininteligíveis.

Com tal critério, tudo o que diz respeito quanto ao conceito de *momento* fica inteiramente rejeitado. Por exemplo, recusa-se o processo de se obter fluxões instantânea a partir de outra, ou momento de outro momento *ad infinitum*. Pois, a “...celeridade incipiente de uma celeridade incipiente, o aumento nascente de um aumento nascente, isto é, de uma coisa que não tem magnitude, (...), a menos que eu me engane, se revelará impossível...” (Berkeley, 1979, §4, p. 67).

3.2.3 A crítica aos objetos do cálculo diferencial leibniziano

Em *O Analista*, Berkeley não se limita ao ataque à inteligibilidade unicamente do objeto do método newtoniano. Há outro alvo ao qual ele dirige a mesma espécie de crítica que foi utilizada contra Newton. Esse outro alvo é o *Calculus differentialis*. Enquanto que, no método de Newton, o conceito principal criticado é o conceito de *momento* (quantidade fluente gerada em relação a uma parcela de tempo infinitamente pequena), quanto a Leibniz, elege-se as diferenciais infinitamente pequenas, ou infinitesimais, como as

responsáveis pela imprecisão das demonstrações no cálculo diferencial.¹⁰ Segundo Berkeley, o cálculo diferencial “atende a todos os mesmos fins e efeitos que o das fluxões”, porém o primeiro utilizaria conceitos infinitesimais ao invés de *momentos*. Após expor o método das fluxões e submetê-lo à crítica, a primeira vez que se apresenta o que é o cálculo diferencial, em *O Analista*, é no parágrafo 5. Berkeley o faz por meio de uma comparação com o método newtoniano:

Supõe-se, até entre nós próprios, que os matemáticos estrangeiros procedem de uma maneira menos precisa, talvez, e geométrica, ainda que mais inteligível. Ao invés de quantidades fluentes e suas fluxões, eles consideram as quantidades variáveis finitas como aumentando ou diminuindo pela contínua adição ou subtração de quantidades infinitamente pequenas. Ao invés das velocidades com as quais os acréscimos são gerados, eles consideram os próprios aumentos ou diminuições, que chamam diferenças, e supõem como infinitamente pequenas. A diferença de uma linha é uma linha infinitamente pequena; de um plano, um plano infinitamente pequeno. Eles supõem que as quantidades finitas *consistem* (*consist*) de partes infinitamente pequenas e que as curvas são polígonos cujos lados são infinitamente pequenos e determinam a curvatura da linha pelos ângulos que formam uns com os outros. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §5).

Aqui se expõe o cálculo aproximando dois conceitos centrais dos dois métodos: *momentos* e as *diferenças*. A concepção cinemática da matemática newtoniana, ou seja, que magnitudes geométricas são geradas pelo movimento em função do tempo, permite estabelecer que tais magnitudes possuem velocidades em seu primeiro estado de geração ou alteração. No entanto, no cálculo diferencial não há a concepção cinemática de matemática e a primeira variação de uma magnitude surge com o acréscimo de uma grandeza infinitamente pequena ou infinitesimal, sem que se exija que o tempo desempenhe alguma função ali. Esse acréscimo é a diferença de uma magnitude. O papel comum de ambas, tanto do *momento* quanto da *diferença*, é representar a primeira variação possível das magnitudes. Assim, por exemplo, no caso do cálculo, a primeira possível variação de uma linha surge como o acréscimo de sua diferença, isto é, de uma linha com grandeza infinitamente pequena.

Mesmo indicando a semelhança nos papéis desempenhados pelas *diferenciais* e *momentos* em seus respectivos métodos, a exposição do cálculo, por parte de Berkeley, leva em consideração a desigualdade quanto à representação geométrica de tais conceitos. Sabe-se que Newton tentou, no texto em discussão, conferir um caráter geométrico aos *momentos*

¹⁰ Não cabe nesse capítulo uma análise detalhada se de fato Leibniz defendeu o *Calculus differentialis* a partir do conceito de infinitesimais. Isso está realizado no APÊNCIE I, no final desta tese.

ao fundamentá-los com a teoria das primeiras e últimas razões.¹¹ O resultado disso é o comprometimento com o estatuto real (ainda que matemático) dos *momentos*. Agora, no cálculo diferencial, Berkeley parece estar ciente de uma tentativa de não comprometimento com algum caráter real das *diferenciais*, ou seja, da necessidade de provar, demonstrando geometricamente, a presença de diferenciais infinitamente pequenas nas magnitudes finitas. É nesse sentido que o cálculo seria “menos preciso e geométrico”. Todavia, a integridade do cálculo não estaria comprometida, pois bastaria *supor* as diferenciais. Do ponto de vista ontológico, suspende-se o comprometimento com a presença delas *in re*. Bastaria supô-las nas quantidades que receberão o acréscimo. Dessa maneira, no cálculo supõe-se que em linhas finitas *há* linhas diferenciais infinitamente pequenas, assim como planos de planos diferenciais infinitamente pequenos.

Deve-se levar em consideração que, para Berkeley, o cálculo estaria comprometido, no mínimo, como a compreensibilidade dessa *suposição* do infinitamente pequeno. Na visão de Berkeley, mesmo não se afirmando, no cálculo diferencial, o caráter real dos infinitésimos, o matemático ali está pelo menos admitindo que tal suposição seja formulada de maneira clara pela mente do matemático. Na linguagem de Berkeley, esse seria o papel da própria *imaginação*, considerando os objetos em questão: ponto, linha, plano etc. Se é assim, então, na concepção de Berkeley, para os “matemáticos estrangeiros” o infinitésimo

¹¹ A base fundamental da teoria das primeiras e últimas razões é a concepção de limite. Nos movimentos nascentes e evanescentes existe um limite de onde o movimento parte ou para onde ele tende, mas nunca ultrapassa. É nesse limite que essas quantidades assumem razão de igualdade. No entanto, para Newton, os limites podem ser determinados geometricamente: “Ai [nas quantidades evanescentes] existe um limite que sua velocidade pode atingir no fim do movimento, mas não pode exceder. Esse é sua última velocidade. Há um limite semelhante para todas as quantidades que começam ou terminam sua existência. E já que esse limite é certo e definido, a determinação dele é propriamente um problema geométrico. Mas tudo o que é geométrico é legitimamente usado na determinação e demonstração de tudo o que pode ser geométrico” (Newton. 1999. p. 441). Os *momentos*, na matemática newtoniana, se fundamentam com a teoria dos limites. Assim, os limites ao serem determinados geometricamente, eles transferem um caráter geométrico aos *momentos*. Da mesma maneira, em 1710, Newton, em outro texto, *Commercium epistolicum*, (referindo-se a si mesmo na terceira pessoa) se compromete mais abertamente com a realidade das primeiras e últimas razões e afirma a inexistência dos infinitamente pequenos: “Nós não temos ideias de quantidades infinitamente pequenas. Por isso, Sr. Newton introduz fluxões em seu método que procederiam ao máximo possível com quantidades finitas. Esse método é mais natural e geométrico porque se fundamenta nas razões primeiras de quantidades nascentes (*primae quantitatum nascentium rationes*) que têm uma existência na geometria...” (MP-8, p. 597). Assim, o que é real na matemática seria somente aquilo que possui uma correspondência geométrica.

seria compreensível (enquanto suposição) quando, ao menos, for possível *imaginá-lo*. Tal possibilidade de *supor* algo estaria relacionada à possibilidade dele ser imaginado.

Porém, Berkeley é contundente ao rejeitar a inteligibilidade dos infinitamente pequenos mesmo como suposição (algo do plano da imaginação): “Ora, conceber uma quantidade infinitamente pequena, isto é, infinitamente menor do que alguma quantidade sensível ou imaginável, ou do que a menor magnitude finita, eu confesso, está acima de minha capacidade”. (Berkeley, AN, §5).

Por que Berkeley não aceita os infinitésimos mesmo como suposições? Essa questão é respondida ao se retomar novamente a relação entre percepção e imaginação presente na crítica de Berkeley. Assim como aconteceu na crítica aos *momentos* newtonianos, assume-se que há uma ordem para as ideias surgirem no espírito, sendo que os sentidos são o ponto inicial. Isso necessariamente limita a atuação da faculdade da imaginação para supor coisas. Tudo o que pode ser imaginado surge do conteúdo fornecido pelos sentidos, porém o próprio conteúdo produzido pela imaginação deve ser um conteúdo perceptível finito, com referência ao particular. É evidente que, no caso das *diferenciais* leibnizianas, se retoma esse vínculo existente entre percepção sensível e imaginação. As diferenciais como quantidades infinitamente pequenas são impossíveis de serem produzidas puramente pela imaginação. Elas ultrapassam qualquer possibilidade de percepção e por isso são rejeitadas por serem inconcebíveis. Conclui-se, desse modo, que Berkeley utiliza o mesmo critério de inteligibilidade usado na crítica aos objetos newtonianos para rejeitar os objetos leibnizianos.

3.2.4 A crítica aos princípios e às demonstrações do método das fluxões

Após criticar os objetos do método das fluxões e do *Calculus differentialis*, Berkeley passa a tratar das demonstrações apresentadas por esses métodos. Sem ainda se questionar sobre a relação entre esses dois âmbitos da crítica berkeleyana, será interessante analisar o que há de problemático nas demonstrações. Existe n’*O Analista* a apresentação de dois exemplos de demonstração. O curioso é que elas são demonstrações newtonianas, baseadas em *momentos*.

3.2.4.1 A demonstração do método das fluxões presente nos Principia

A primeira demonstração é uma versão do método das fluxões apresentada no Lema II, Livro II, dos *Principia*. Ali Newton demonstra como encontrar o *momento* gerado pelo movimento nascente de duas quantidades fluentes multiplicadas. Assim, para um retângulo de lados A e B , encontra-se como *momento* $aB + bA$. Nas palavras de Newton:

Caso 1: Um retângulo qualquer, como AB , aumentando por um contínuo movimento, quando ainda faltava dos lados A e B a metade de seus momentos $(\frac{1}{2})a$ e $(\frac{1}{2})b$, era $A - (\frac{1}{2})a$ multiplicado por $B - (\frac{1}{2})b$, ou $AB - (\frac{1}{2})aB - (\frac{1}{2})bA + (\frac{1}{4})ab$; todavia, assim que aos lados A e B são acrescidos as outras metades dos momentos, o retângulo transforma-se em $A + (\frac{1}{2})a$ multiplicado por $B + (\frac{1}{2})b$, ou $AB + (\frac{1}{2})aB + (\frac{1}{2})bA + (\frac{1}{4})ab$. Subtraia-se desse retângulo o retângulo anterior e restará o excesso $aB + bA$. Portanto, com a totalidade dos incrementos a e b dos lados gera-se o incremento $aB + bA$ do retângulo. Q.E.D. (Newton, 1999, p. 648).

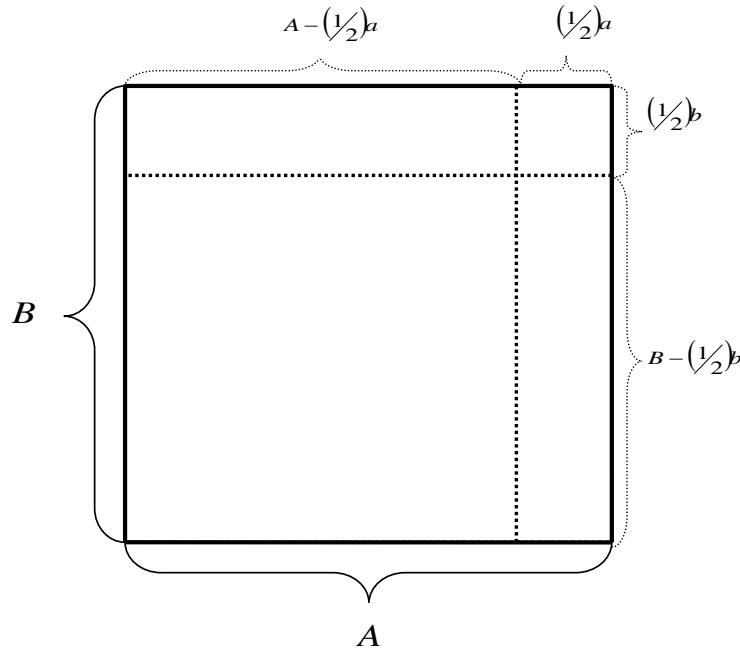


Figura 3.1

Mesmo que Newton não tenha apresentado as figuras propriamente ditas, será interessante construí-las aqui como um auxílio explicativo do que está exposto na demonstração. Inicialmente, é importante frisar que o objetivo dessa demonstração é encontrar o *momento* de um movimento *nascente*, isto é, *momento* pelo qual o retângulo AB irá aumentar [ver figura 3.1]. Para isso, Newton considera que a multiplicação de duas linhas, A e B , geram o retângulo AB , permitindo distinguir dois passos: (I) é possível determinar a quantidade desse retângulo quando ainda faltava meio *momento* para se chegar em AB . Tal retângulo (antes de ser AB) poderia ser expresso pela multiplicação dos lados:

$$A - \left(\frac{1}{2}\right)a \text{ e } B - \left(\frac{1}{2}\right)b.$$

Efetuada a multiplicação, obtém-se como resultado:

$$A \left(B - \left(\frac{1}{2}\right)b \right) = AB - \left(\frac{1}{2}\right)Ab.$$

O outro passo (II) pode ser identificado como o que Newton encontra como quantidade do retângulo AB *após* transcorrer meio *momento* desse mesmo retângulo. Isso é expresso pela multiplicação da seguinte maneira:

$$A + \left(\frac{1}{2}\right)a \text{ e } B + \left(\frac{1}{2}\right)b \text{ [ver figura 3.2];}$$

gerando como resultado:

$$A \left(B + \left(\frac{1}{2}\right)b \right) = AB + \left(\frac{1}{2}\right)Ab.$$

Portanto, o *momento* inteiro do retângulo será a soma do valor final do retângulo (apresentado no segundo passo) menos o inicial (obtido no primeiro passo):

$$\left[A \left(B + \left(\frac{1}{2}\right)b \right) - A \left(B - \left(\frac{1}{2}\right)b \right) \right] = \left[AB + \left(\frac{1}{2}\right)Ab - AB + \left(\frac{1}{2}\right)Ab \right] = Ab.$$

e que resultará em: $aB + bA$.

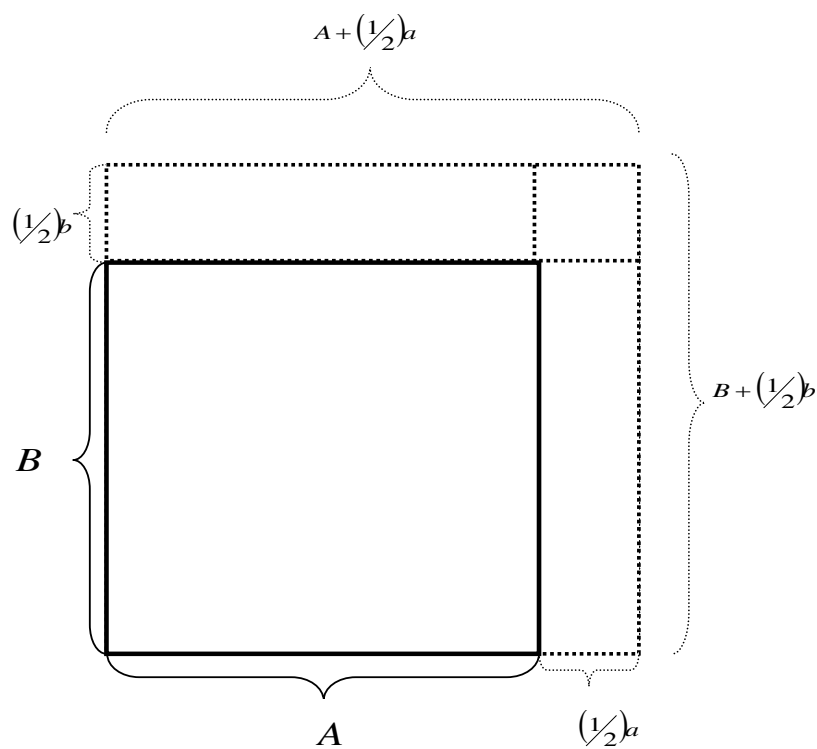


Figura 3.2

São dois os problemas que Berkeley encontra na obtenção desse resultado. O primeiro surge do confronto entre duas premissas:

- (P.1) O movimento é nascente, ou seja, o retângulo AB está aumentando por um contínuo movimento;
- (P.2) Considera-se possível tratar o retângulo como incompleto, isto é, como faltando $(\frac{1}{2})a$ e $(\frac{1}{2})b$.

Para Berkeley, essas duas premissas são mutuamente excludentes, porque, ao se assumir (P.1), Newton se compromete com o movimento nascendo a partir de um limite determinado. O *momento* determinará o primeiro movimento a partir desse limite estabelecido. Nesse caso, os limites seriam os lados do retângulo, a saber: a linha A e a linha B . No entanto, Newton assume como um passo demonstrativo o que está expresso em

(P.2). Isso faz com que o movimento evanesça em direção aos limites. Em (P.1) o movimento parte dos limites, enquanto que em (P.2) o movimento vai em direção a eles. Ora, se o movimento é nascente, como descreve (P.1), o que autoriza já em seguida assumir o que está descrito em (P.2), que trata o movimento como evanescente? Para Berkeley não há nada que permita essa mudança, ou seja, (P.1) não implica diretamente em (P.2). É por isso que mais adiante ele conclui:

Afirma-se que não se considera a magnitude do momento e, todavia, supõe-se dividir esses mesmos momentos em partes. Isso não é fácil de ser concebido, não mais do que a razão pela qual se toma quantidades menores do que A e B para obter o incremento de AB, um procedimento – isto se deve reconhecer – cuja causa final ou cujo motivo é bastante óbvio, mas cuja razão exata e legítima não é tão óbvia nem tão fácil de explicar, como seria mostrar que ele é geométrico. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §11).

Aqui a “causa” ou “motivo” último nada mais é do que o resultado $aB + bA$. Newton, segundo Berkeley, acreditava na veracidade desse resultado, mas tivera dificuldades para mostrar por que ele seria verdadeiro. Para Berkeley, está claro que Newton, e os seus seguidores, teriam se contentado muito facilmente com as demonstrações do método das fluxões. É esse o significado da seguinte acusação:

Se um homem, por métodos não geométricos nem demonstrativos, convence-se da utilidade de certas regras que, em seguida, propõe a seus discípulos como verdades indubitáveis e que ele próprio se encarrega de demonstrar de maneira sutil com a ajuda de noções refinadas e intrincadas, não é difícil supor que seus discípulos, para pouparem-se do aborrecimento de pensar, inclinam-se a confundir a utilidade de uma regra com a certeza de uma verdade e a aceitar uma pela outra – especialmente, se eles forem homens mais acostumados a computar do que a pensar, mais ansiosos por avançar cada vez mais rápido e mais distante do que dispostos a estabelecer cautelosamente e a enxergar nitidamente o seu caminho. (Berkeley, AN, §10).

Essa acusação adentra o plano da aplicação do método das fluxões. Para Berkeley, tanto Newton como seus seguidores matemáticos acreditaram ter obtido sucesso na aplicação do método das fluxões. Disso surgiu a crença na *utilidade* em tal método. Porém, Berkeley separa a *utilidade* da *certeza* demonstrativa. Ele assume que é possível aplicar uma regra sem que se saiba demonstrá-la. Berkeley está assumindo aqui, nessa crítica, que é uma demonstração correta que permitiria dizer por que o método das fluxões fornece uma resposta verdadeira. Desse modo, os seguidores de Newton teriam confundido essa relação

entre utilidade e certeza. A crença na veracidade do resultado teria os impedido de diferenciar entre a certeza e a utilidade de um procedimento demonstrativo, permitindo que erros fossem introduzidos em pretensas demonstrações sem serem percebidos. Eles se iludiram, ou pelas palavras de Newton a favor do método das fluxões (caindo em um argumento de autoridade), ou pelo sucesso da aplicação, interpretando-o como indicativo da veracidade desse método. Para Berkeley, tanto uma atitude com a outra não são suficientes para revelar quão verdadeiro é o método das fluxões.

Passando à outra problemática encontrada por Berkeley, ela diz respeito também a outras duas premissas assumidas.

(P.3) Os *momentos* não são quantidades finitas, mas “princípios geradores” dessas quantidades;

(P.4) Os *momentos* podem ser divididos, ou seja, considerados em suas metades;

Novamente, essas duas afirmações são excludentes entre si. Comparando com o que foi visto na seção da crítica aos objetos do método das fluxões, (P.3) descreve uma das características dos *momentos*. Na demonstração de Newton, ela entra como uma “premissa” ou espécie de princípio que regularia a cadeia de raciocínio da demonstração. Isso porque é a finalidade central da demonstração determinar esse tal objeto denominado como *momento*. Contudo, na sua prática demonstrativa, Newton parece não levar em consideração o que está descrito em (P.3). Visto que os *momentos* não são quantidades finitas, eles não podem assumir características dessas quantidades. Assim, ao praticar (P.4), ou seja, dividir os *momentos* pela metade, Newton está atribuindo uma propriedade das quantidades finitas aos *momentos*: possuir magnitude ao ponto de poder ser distinguido em partes. Essa propriedade está justamente sendo negada em (P.3). Berkeley deixa evidente esse problema, como visto na citação acima, ao afirmar que a magnitude dos *momentos* não é levada em conta, mas supõe-se que esses mesmos *momentos* se dividam em partes.

Cabe agora uma reflexão sobre crítica a essa demonstração de Newton. Inicialmente, em qual sentido se pode afirmar que existe um descontentamento por parte Berkeley em relação a essa primeira demonstração do método das fluxões? Na verdade, tal pergunta exige um maior esclarecimento, além do que foi feito, da acusação de *non sequitur* de Berkeley ao raciocínio de Newton para encontrar o *momento* do retângulo *AB*. Com o objetivo de levantar vários problemas para os analistas modernos refletirem, problemas esses apresentados no corpo de *O Analista*, Berkeley elabora uma grande lista de perguntas no final do próprio texto. Em uma delas, a Questão 28, existe algo que pode ser utilizado para precisar tal acusação a Newton:

Não seria a mudança de hipóteses ou (como poderíamos chamar) a *fallacia suppositionis* um sofisma que contagia larga e amplamente os raciocínios modernos, tanto na filosofia mecânica como na abstrusa e refinada geometria? (Berkeley, AN, Questão 28).

Está explícito que Berkeley acusa os modernos de se apoiarem em falácias, tanto na geometria como também na filosofia natural, em particular, a mecânica. O importante é que ele denomina a falácia em questão: *Fallacia suppositionis*. O significado é que alguns dos raciocínios utilizados pelos modernos supõem hipóteses que são alteradas sem uma justificativa adequada. No caso da demonstração, apresentada acima, quando de (P.1) vai-se para (P.2), ou de (P.3) vai-se para (P.4), Berkeley interpreta isso como uma mudança de hipótese sem, na verdade, justificar tal alteração. Há, nesse sentido, ausência de elementos que permitam tal mudança de hipóteses. Isso é uma falácia, ou melhor, uma *Fallacia suppositionis*.

Para deixar mais explícito o erro de Newton na demonstração, Berkeley corrige a demonstração e apresenta o que resultaria caso não se alterasse as hipóteses assumidas inicialmente. Se for tratado o movimento realmente como nascente, sem considerar que alguma quantidade esteja faltando, muito menos dividida pela metade mas sim como sendo acrescentada, obtém-se como *momento* o seguinte resultado: *aBbAal*. A justificativa é a seguinte: “...está claro que o método direto e verdadeiro para obter o *momento* ou incremento do retângulo *AB* é considerar os lados aumentados por seus incrementos

inteiros” (Berkeley, AN, §9). Aqui não há erro demonstrativo, pois “...isso é universalmente válido para as quantidades a e b , sejam elas o que forem, grandes ou pequenas, finitas ou infinitesimais, incrementos, *momentos* ou velocidades” (*Ibidem*).

Todavia, está claro que Newton não aceitaria $aB+bA$ como sendo a resposta final do problema, já que, para ele, há a necessidade de encontrar um meio de eliminar a quantidade ab . É por isso que Berkeley mais a diante firma:

O caso realmente é difícil. Nada podeis fazer até que tenhais conseguido livrar-vos da quantidade ab . Para esse propósito, a noção de fluxão é alterada, é colocada sob luzes diversas; confundem-se pontos que, na condição de primeiros princípios, deveriam ser claros e tornam-se ambíguos termos que deveriam ser usados de maneira fixa. (*Ibidem*, §10).

Para Berkeley, as constantes alterações nos conceitos, que geram as incompatibilidades das premissas, analisadas nessa demonstração, confirmariam que Newton só acredita que o resultado $aB+bA$ é verdadeiro, porém sem que ele soubesse o porquê. A demonstração falhou, porque se almejou manter o resultado a todo custo, mesmo que isso resultasse em imprecisão conceitual das premissas. Portanto, Berkeley assume que ocorrer em *fallacia suppositionis* torna-se inevitável quando a ênfase é dada unicamente no resultando sem se considerar a importância da consistência da demonstração como um todo.

Outra situação que confirmaria as suspeitas de Berkeley da inconsistência demonstrativa do método das fluxões, diz respeito a Newton ter apresentado outras demonstrações para o mesmo problema a respeito dos *momentos*. Não se contentar com uma demonstração seria sinal de insegurança. Newton estaria desconfiado de si mesmo e se sentiu na obrigação fornecer mais de uma demonstração sobre o mesmo ponto. Essa é a leitura que Berkeley da necessidade de Newton voltar ao mesmo assunto e fornecer novas demonstrações no *De quadratura*. Isso permite passar para uma análise da segunda demonstração newtoniana.

3.2.4.2 A demonstração presente no *De quadratura curvarum*.

A segunda análise de Berkeley se constrói a partir do texto newtoniano *De quadratura curvarum*. Ali, Newton apresenta o seguinte procedimento geral para encontrar

agora as *fluxões* com potências. O objetivo é mostra que a fluxão de x^n é nx^{n-1} . Eis o que se fornece como demonstração:

Faça a quantidade x fluir uniformemente e deixe a fluxão de x^n ser descoberta. Da mesma maneira que a quantidade, x pelo fluir, torna-se $x + o$, a quantidade x^n torna-se, $(x + o)^n$ isto é pelo método das infinitas séries:

$$x^n + n\alpha x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha\alpha x^{n-2} + Etc.,$$

e os aumentos

$$o \text{ e } n\alpha x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha\alpha x^{n-2} + Etc.$$

estão um para o outro como 1 está para $nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha\alpha x^{n-2} + Etc$. Agora faça esses aumentos evanescerem, e suas últimas razões estarão na razão de 1 para nx^{n-1} . É por isso que a fluxão da quantidade x estará para a fluxão da quantidade x^n assim como 1 estará para nx^{n-1} . (MW-1, p. 142).

A ideia central do que está exposto é a identificação da relação de *proporcionalidade* entre os movimentos das quantidades fluentes. Para Newton, o primeiro movimento de x está para o primeiro movimento da quantidade x^n assim como $x + o$ está para $(x + o)^n$, ou seja:

$$(i) \quad x : x^n :: x + o : (x + o)^n.$$

Newton encontrou várias soluções para transformar equações de termos composto em infinitas séries. A origem desse trabalho se deu a partir da influência do trabalho de Wallis.¹² Baseando-se nisso, Newton transforma $(x + o)^n$ na série infinita:

$$x^n + n\alpha x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha\alpha x^{n-2} + Etc.$$

¹² Cf. Guicciardini, 1999, p. 18.

Isso faz com que a proporção (i) possa ser reescrita da seguinte maneira:

$$(ii) \quad x : x^n :: x + o : x^n + n\alpha x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha\alpha x^{n-2} + Etc.$$

É aqui que aparece uma sutil estratégia. Como o que se pretende é determinar somente os aumentos de x e de x^n , eles podem ser descartados do terceiro e quarto membros da proporção (ii). O que permanecerá assim será:

$$(iii) \quad x : x^n :: o : n\alpha x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}o\alpha x^{n-2} + Etc.$$

Ainda resta um passo a ser explicado: é o fato de Newton substituir o símbolo \boldsymbol{o} [letra grega ômicron] pelo número 1. O que isso significa? Trata-se da interpretação cinemática de sua matemática. Em outras palavras, o símbolo \boldsymbol{o} representa o *momento* de x . Portanto, é o primeiro movimento com que x aumenta. Esse símbolo seria considerado geométrico, porque ele representa as razões nascentes de x . Assim, por ser o primeiro movimento, \boldsymbol{o} torna-se a referência para todos os outros movimentos.¹³ Isso gera outra proporção:

$$(iv) \quad o : n\alpha x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}o\alpha x^{n-2} + Etc. :: 1 : nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha x^{n-2} + Etc.$$

O que Newton realiza na quarta proporcional de (iv), isto é, $nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha x^{n-2} + Etc.$, nada mais é do que eliminar somente uma instância de \boldsymbol{o} em cada termo. Trata-se de assumir que cada termo é regulado somente por um \boldsymbol{o} , fazendo com que ainda restem termos com outros \boldsymbol{o} . Com isso, surge o último passo. Visto que permanecem na série

¹³ Como visto em uma nota acima, esse é o tempo por analogia.

infinita a expressão $nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}\alpha x^{n-2} + Etc.$, que são termos com o elemento temporal representado por α , pode-se agora fazer com que essas quantidades esvançam. Em seguida, somente o que não possui relação com um elemento temporal restará. Isso será a quantidade nx^{n-1} . Portanto, é após esse movimento esvanecente que a proporção (iii) tornar-se a proporção descrita no final da citação acima:

$$(v) \quad x : x^n :: 1 : nx^{n-1}.$$

Há um motivo para Berkeley não aceitar essa demonstração com sendo rigorosa: pois ela ofende diretamente um lema aceito na lógica. Em suas palavras:

...tomarei como premissa o lema seguinte: ‘Se com o propósito de demonstrar alguma proposição, admite-se um certo ponto, em virtude do qual outros pontos são alcançados, e se tal ponto admitido for posteriormente eliminado ou rejeitado por uma suposição contrária, então, nesse caso, todos os outros pontos alcançados por intermédio dele e consequentes a ele devem também ser eliminados ou rejeitados, de tal modo que não devem ser mais admitidos ou aplicados no restante da demonstração’. Isso é tão claro que não necessita de prova. (Berkeley, AN, §12).

Nesse lema, estabelece-se a seguinte relação entre premissas e conclusão: se a partir de uma premissa P , obtém-se C . E em seguida assume-se $\neg P$ (que é a negação da premissa P), então não será possível reter C . Para Berkeley, tal lema não elimina a possibilidade de que, em uma demonstração, alguma hipótese inicial seja alterada. O que se afirma é que ao se alterar uma hipótese inicial, tudo o que surgiu dessa hipótese deve também ser afetado.

Outra possível explicação do lema pode ser apresentada como sugere Robles (1993, p. 300-301). Suponha o seguinte esquema argumentativo:

$$(a) \quad \frac{P_1, \dots, P_k}{\therefore A}, \text{ onde } A \text{ é uma conclusão que depende do conjunto de premissas } P_i \ (1 \leq i \leq k);$$

Em seguida constrói-se, a partir de regras de derivação, outro esquema argumentativo onde A entra como premissa para obter B :

- (b) $\frac{P'_1, \dots, P'_m, A}{\therefore B}$; onde B é uma conclusão que depende de A e do conjunto de premissas P'_j ($1 \leq j \leq m$). Nesse conjunto P'_j existem premissas que são negações de algumas premissas de (a);

Desse modo, por exemplo, se a premissa P'_1 (presente no conjunto P'_j) for a negação de P_1 , então o esquema argumentativo (b) pode ser transformado no seguinte:

$$(c) \quad \frac{\neg P_1, \dots, P'_m, P_1, \dots, P_k}{\therefore B}$$

Uma vez que B depende do conjunto de premissas que permitem derivar A , no esquema (c) foi possível substituir o próprio A por suas premissas. Desse modo, segundo Robles, o esquema (c) torna-se equivalente a:

$$(d) \quad \frac{\neg P_1, P_1}{\therefore B}$$

Esse esquema (d) representaria uma formulação que fere o lema sugerido por Berkeley. Pois, para obter B , foram incluídas premissas que são a negação uma da outra. Em outras palavras, não respeitar o lema gera uma contradição. B , desse modo, é obtido *trivialmente*, uma vez que de uma contradição é possível concluir qualquer coisa. Ainda que válido, o argumento não é correto.

Newton estaria agindo contra o lema de Berkeley, pois, na demonstração, primeiro assume-se que o movimento é nascente [essa seria a premissa P_1 do esquema (a) de Robles]. Tal suposição gera como incremento de x^2 a série infinita $n\alpha^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}o\alpha^{n-2} + Etc.$ [essa é a conclusão A do esquema (a)]. Porém, no percurso da demonstração, essa hipótese é alterada, passando-se a considerar o movimento como evanescente [premissa P'_1 ou $\neg P_1$]. Assim, de acordo com o lema, tudo o que surgiu com a hipótese inicial deve ser descartado ou rejeitado. Não seria correto *reter* nada dessa

primeira hipótese, pois, ela foi rejeitada. Para Berkeley, Newton não pode reter a expressão $nx^{(n-1)}$ [que é a conclusão *B* esquema (c)], porque ela surgiu da hipótese inicial que considera o movimento como nascente. É por isso que Berkeley afirma:

Mas pode parecer que esse raciocínio não seja razoável nem conclusivo. Pois, quando se diz ‘faça-se esvanecer os incrementos’, isto é, ‘reduzam-se os incrementos a nada’ ou ainda ‘que não haja incremento’, elimina-se a suposição inicial, a saber, a suposição de que os incrementos eram alguma coisa ou que havia incrementos, e, no entanto, retém-se uma consequência dessa suposição, isto é, uma expressão obtida em virtude dela. Isso, pelo lema precedente, é uma maneira incorreta de raciocinar. Certamente, quando supomos que incrementos esvanecem, devemos supor que esvanecem com eles suas proporções, suas expressões e tudo mais derivado da suposição da existência deles. (Berkeley, AN, §13).

A partir da sugestão de Robles, é possível afirmar que Newton obtém $nx^{(n-1)}$ trivialmente. Porém, na perspectiva berkeleyana isso significa dizer que Newton está apresentando o mesmo tipo de *Fallacia suppositionis* ou mudança de hipótese da demonstração anterior. Ou seja, esse é o mesmo problema que ocorre com a demonstração do Lema II, Livro II, dos *Principia*.

3.3 Do cruzamento entre as duas vias: uma avaliação da relação entre os dois âmbitos da crítica em *O Analista*

No início deste capítulo, quando o parágrafo 2, de *O Analista*, foi considerado, observou-se que Berkeley sugere um parâmetro para avaliar os métodos matemáticos praticados pelos modernos. Com a finalidade de realizar uma explicação, sugeriu-se que fossem destacados três tópicos. Eis o que foi sugerido:

- (1) *Objetos adequados* que podem ser mantidos “à vista” e com a “atenção fixada sobre eles”;
- (2) Definições claras, postulados, princípios autoevidentes;
- (3) Propriedades derivadas por uma cadeia *bem* interligada de raciocínios.

Após a reconstrução dos problemas que Berkeley apresentou em sua crítica, passa-se agora para uma avaliação mais pontual de como compreender esses tópicos em relação ao que é dito contra os métodos de Newton e de Leibniz.

Sem muita dificuldade, há dois tópicos de fácil identificação dentro da crítica: tópicos (1) e (3). O primeiro tópico, de número (1), claramente se relaciona com a crítica inicial de Berkeley, onde *momentos* e *diferenças* são tratados como sendo os pretensos objetos matemáticos. Berkeley se recusa a aceitá-los. O motivo central da rejeição recai sobre a relação entre os sentidos e a imaginação, pois os objetos do método das fluxões de do *Calculus differentialis* não podem ser percebidos pelos sentidos e pela imaginação. Como foi visto, aparece aqui o critério de inteligibilidade. Desse modo, os objetos matemáticos em questão *não* são considerados inteligíveis à mente por não serem percebidos por tais faculdades mentais. Se isso acontece, portanto, tais objetos não são apresentados pelos matemáticos de uma maneira que permita mantê-lo à *vista* ou com a *atenção fixada* neles.¹⁴

Outro tópico de fácil identificação na exposição de Berkeley é de número (3). Quando se acusa que as duas demonstrações recaem na falácia de mudança de hipóteses, pretende-se como isso dizer que a cadeia de raciocínio não está bem interligada. Obviamente, esse tópico pressupõe que a avaliação da matemática esteja sendo feita a partir de princípios lógico-demonstrativos. Um exemplo disso é o lema lógico apresentado no parágrafo 12. Berkeley afirmou que esse lema “é tão claro que não necessita de prova”. Ser “claro” aqui não se trata de ser *autoevidente* mas sim de o lema ser algo bastante conhecido entre os praticantes de tais matemáticos modernos. Assim, eles mesmos assumiriam o lema como pressuposto das demonstrações matemáticas. Mas Berkeley o utiliza para revelar a imprecisão no processo de raciocínio. Isso significa que ele não estaria adotando um critério lógico estranho às práticas demonstrativas desses matemáticos. Mais que isso, Berkeley acusa tais matemáticos de serem *incapazes* de cumprir algo adotado por eles mesmos. Portanto, nesse âmbito da crítica, o ponto de vista da avaliação não é especificamente o de Berkeley. Isso explica por que ele afirma, ainda nesse parágrafo 2,

¹⁴ No original em inglês, manter o objeto “à vista” surge na frase: “the objects being still kept in view”. Não se deve tratar isso como sendo um critério visual. Berkeley não está sugerindo uma inspeção visual. Mesmo sabendo que ele apresentou um critério empirista para rejeita os *momentos* e *diferença* (ou seja, ser percebido pelos sentidos), “in view” deve ser tomado, nesse caso, como sinônimo de “ser considerado”. Trata-se, assim, de um indicativo daquilo que pode ser continuamente *considerado* em uma investigação.

que assumiria a posição de um livre-pensador. Nesse caso, ser livre-pensar é avaliar uma determinada ciência a partir de seus próprios princípios.

Se essa identificação dos dois tópicos (1) e (3), respectivamente com as duas vias da crítica de Berkeley, está corretamente feita, saber qual é a relação entre eles mostra-se importante. Isso porque indicaria se a própria crítica de Berkeley se formula em dois âmbitos independentes ou não. Para desenvolver essa problemática, será necessário agora considerar o que está em questão no tópico (2).

O que se formula em (2) não se manifesta de tão fácil interpretação como é o caso dos outros dois tópicos. O motivo é que ele parece fornecer duas possibilidades de interpretação. A primeira conecta (2) diretamente ao tópico (1). Pois, nesse sentido, “definições claras, postulados, princípios autoevidentes” são apresentados em função dos *objetos* matemáticos adotados. Eles tornam-se expressões que são julgadas em função dos objetos. Se a expressão em questão captura adequadamente uma propriedade do objeto em questão, ela será admitida. Dito assim, o curioso é que o tópico (2) passa a ser avaliado a partir do que Berkeley expõe na primeira parte de sua crítica: da relação entre as faculdades mentais (percepção sensível e imaginação). A validade das definições, postulados e dos princípios seria constatada na medida em que eles denotam objetos psicologicamente possíveis, ou seja, percebíveis pelos sentidos ou pela imaginação. Para facilitar a menção essa interpretação de (2) em função de (1), passa-se denominá-la aqui como interpretação *psicologista*.

A segunda possibilidade de interpretação do tópico (2) contém em si uma relação com (3). Tal relação se apresenta quando se assume “definições claras, postulados, princípios autoevidentes” com premissas das quais se parte para construir a cadeia de raciocínio. Nesse sentido, o que se exige em (2) torna-se o ponto de partida para a cadeia de raciocínios exigida em (3). A avaliação das expressões tomadas como premissas é feita pelo sucesso demonstrativo ou não. Isso significa que os erros demonstrativos tem como causa a má formulação das expressões introduzidas nas premissas. Por exemplo, poderia ser dito que a *Fallacia suppositionis* ocorre nas demonstrações porque Newton não soube introduzir adequadas expressões como premissas. O erro lógico torna-se sinal de que o tópico (2) não

foi respeitado como devia. Novamente, para facilitar a menção a essa interpretação de (2) em função de (3), passa-se a denominá-la aqui como interpretação *logicista*.

Essas duas possibilidades de leitura surgem no contraste das interpretações de dois renomados comentadores de Berkeley a respeito de *O Analista*: J. A. Robles e D. Jesseph. Apesar de ambos seguirem estratégias explicativas distintas, é possível identificar um ponto em comum que poderá servir como base para compará-los. Trata-se do que Berkeley apresenta no parágrafo 8, de *O Analista*:

Mas, apesar de todas essas asserções e pretensões [a respeito de quantidades infinitamente pequenas], pode-se justificadamente questionar se eles [os matemáticos modernos] não estão sendo enganados e iludidos de maneira admirável por seus signos, símbolos ou espécies (*species*) peculiares, assim como outros homens em outras investigações são frequentemente enganados por palavras ou termos. Nada é mais fácil do que inventar expressões ou notações para fluxões e infinitesimais de primeira, segunda, terceira, quarta e subsequentes ordens, prosseguindo com \dot{x} , \ddot{x} , \dddot{x} , $\ddot{\ddot{x}}$ etc., ou dx , ddx , $dddx$, $ddddx$, etc. sem fim nem limite de forma regular. Essas expressões são realmente claras e distintas, e a mente não encontra dificuldade para conceber o prosseguimento delas para além de quaisquer limites assináveis. Mas, se removermos o véu e olharmos por debaixo dele, se, colocando de lado as expressões, voltarmos nossa atenção para considerar as próprias coisas que se supõem serem expressas ou sinalizadas por elas, descobriremos um grande vazio, muita escuridão e confusão, ou melhor, se eu não estiver equivocado, descobriremos impossibilidades e contradições diretas. Se esse é ou não o caso, estão convidados a examinar e a julgar por si próprios todos os leitores pensantes. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §8).

Essa passagem é de grande interesse para a elucidação da relação entre os dois âmbitos da crítica de Berkeley. Primeiro, porque ela se apresenta no texto para estabelecer uma transição na investigação. É exatamente após essas palavras que Berkeley muda o foco da análise dos objetos matemáticos para iniciar a crítica às demonstrações newtonianas. Assim, pode haver ali elementos que mostrem como acontece tal relação.

Além disso, outro motivo da importância desse parágrafo diz respeito a um de seus conteúdos. Há no início da citação uma menção a uma das características centrais dos novos métodos propostos pelos matemáticos modernos: a utilização de símbolos nos raciocínios matemáticos. Por exemplo, \dot{x} , \ddot{x} , \dddot{x} , $\ddot{\ddot{x}}$ etc. e dx , ddx , $dddx$, $ddddx$, etc. são respectivamente símbolos que Newton e Leibniz usaram para indicar fluxões e diferenças

de ordens superiores.¹⁵ Isso indica que Berkeley inclui na sua agenda uma avaliação da utilização dos símbolos nesses novos métodos matemáticos. É nesse sentido que em sua crítica se inclui a acusação aos matemáticos de produzirem expressões matemáticas (utilizando símbolos) sem que eles façam uma cuidadosa avaliação dos objetos que elas supostamente representariam. Para corrigir, Berkeley sugere que os próprios objetos sejam *considerados*. Isso revelará, dentre outras coisas, “impossibilidades e contradições diretas”.

No entanto, o que realmente Berkeley quer dizer com isso? Ou melhor, o que são as impossibilidades ou as contradições diretas? Esses dois comentadores avaliam a passagem, do parágrafo 8, de um modo que os tópicos numerados acima tomam direcionamentos diferentes em relação as suas leituras. Cabe agora um pouco mais de detalhamento do que eles estão pensando quando abordam as queixas de Berkeley.

3.3.1 Robles e o texto *O Analista*

Robles realiza um estudo sobre *O Analista*, dotando como estratégia uma divisão da crítica de Berkeley. De um lado, a crítica seria quanto aos objetos matemáticos e, do outro, ela seria quanto aos procedimentos demonstrativos. Robles nomeia isso respectivamente como *crítica semântica (ontológica)* e como *crítica metodológica (sintática)*. Essa duas formas de considerar a crítica de Berkeley aparecem subentendidas no comentário que ele faz logo após citar o parágrafo 8, de *O Analista*:

A crítica de Berkeley vai, por um lado, contra os pressupostos teóricos (metafísicos, se quiser) que os matemáticos tinham a respeito de seu objeto de estudos e, por outro lado, contra os procedimentos argumentativos que empregavam os matemáticos. (Robles, 1993, 291-292).

Ir contra os “pressuposto teóricos” diz respeito à crítica semântica; e ir contra os “procedimentos argumentativos” diz respeito à crítica metodológica.

Além disso, Robles continua afirmando, a respeito do parágrafo 8, que Berkeley ali “questiona os pressupostos teóricos e assinala, também, que os mesmos podem

¹⁵ No caso de Newton, \dot{x} representa a primeira fluxão e \ddot{x} a segunda. As outras fluxões de ordens superiores serão representadas com o acréscimo de mais um ponto em cima do símbolo da fluxão anterior. Por outro lado, no caso de Leibniz, algo parecido acontecerá. Ao invés de pontos, as *diferenças* de ordens superiores serão representadas como o acréscimo de um *d*. Desse modo, dx é a primeira *diferença*; ddx a segunda e assim por diante.

esconder problemas tão sérios como seriam as contradições". [ênfase minha] (*Ibidem*). Está evidente que, nesse último comentário, quanto Robles utiliza a palavra "contradições", ele o faz pensando no próprio termo utilizado por Berkeley no parágrafo 8. No entanto, há um detalhe que necessita ser frisado. Robles relaciona essa palavra aos tais "pressupostos teóricos" a respeito dos objetos matemáticos. Desse modo, para ele, parece que quando Berkeley menciona "impossibilidades e contradições" não estaria em questão somente uma avaliação dos erros metodológicos do cálculo, tais como de recair na *Fallacia suppositionis*. Os problemas lógicos seriam assumidos como elementos para avaliar a metafísica por trás dos objetos matemáticos em questão. Será que é isso que está acontecendo mesmo? Para responder, é necessário compreender, segundo Robles, como as *expressões* e os pretensos objetos matemáticos denotados por elas poderiam ser interpretados em termos de *contradição*.

Robles (1993, p. 283), para melhor explicar do que se trata a tal crítica semântica de Berkeley ao cálculo infinitesimal, afirma que, em *O Analista*, há uma *tese semântica matemática* (TSM) atuando. Mais precisamente, tal tese prega que os matemáticos, como Newton e Leibniz, empregariam expressões "com um caráter descritivo", mas, no entanto, as supostas entidades de que eles pretenderiam falar "são (logicamente) impossíveis tal com eles a apresentam".¹⁶ Assim, na leitura de Robles, ser *logicamente possível* significa, antes de tudo, não manifestar *contradição*. Isso quer dizer que as *boas* expressões que denotam adequadas entidades matemáticas não entram em contradição com outras afirmações assumidas pelo matemático. Isso faz com que seja possível abarcar o âmbito *ontológico* da matemática e, além disso, surge a possibilidade de avaliá-lo a partir do âmbito *lógico*. Desse modo, se há contradição, considerando o conjunto das proposições, então, é sinal de haver problemas quanto à *existência* das entidades matemáticas. É nesse sentido que Robles afirma que em muitas ocasiões, a contestação de Berkeley é:

¹⁶ O que Robles está entendendo como "caráter descritivo", em relação a Berkeley, trata-se do uso de uma linguagem no sentido de descrever a realidade. Assim, em termos berkeleyanos, uma sentença é *descritiva* na medida em que ela denota ideias percebidas inicialmente pelos sentidos. Para mais detalhes dessa interpretação: Cf. Robles, 1990, 19-38.

‘você pode ter uma ideia *X* que eu não posso ter?’ Na maioria dos casos, quando Berkeley formula essa contestação em alguma de suas variantes, *não* se deve tomá-la como uma proposta de impossibilidade *psicológica*, mas, no entanto, como uma impossibilidade *lógica*: há uma contradição em supor que se possa haver uma ideia assim. (*Ibidem*, p. 287).

Na leitura de Robles, seria essa avaliação lógica da metafísica dos objetos matemáticos que vigoraria, em *O Analista*, e não a psicológica.

Algo surpreendente surge nessa interpretação de Robles quanto à avaliação da ontologia dos objetos a partir do âmbito lógico. Trata-se do próprio critério de inteligibilidade. O sucesso lógico também pode indicar que tais objetos são inteligíveis, além de ontologicamente bem formulados. Se o texto de *O Analista* mostra ser uma questão importante o problema da inteligibilidade dos objetos, Robles é forçado a assumir que a tal “impossibilidade lógica” indica quão ininteligíveis são os objetos matemáticos assumidos por Newton e Leibniz. Portanto, nessa análise de Robles, sugere-se uma avaliação da inteligibilidade pode ser realizada no contexto lógico.

Um exemplo, para esclarecer mais essa leitura de Robles, pode ser encontrado na análise da demonstração do Lema II, Livro II, dos *Principia*. Berkeley admite haver contradição em considerar os *momentos* como não possuindo magnitude e ao mesmo tempo tratá-los como divisíveis. Há sonoras afirmações de Newton de que o método das fluxões seria condizente com a geometria clássica.¹⁷ Berkeley reproduz isso na medida em que assume o método das fluxões como sendo um método geométrico. Nesse sentido, o conceito de magnitude seria aquele adotado pela geometria clássica. Em Euclides, por exemplo, o que é divisível possui magnitude. Ponto não possui magnitude, portanto, ele também não é tratado como divisível. Para Berkeley, juntar a afirmação da “divisibilidade da magnitude” com a de “ausência de magnitude” é recair em contradição, considerando como pressuposição a atuação dos conceitos da geometria clássica no método das fluxões. Assim, assumir a divisibilidade do *momento* conduz ao problema lógico, considerando outros pressupostos. Mas, antes de tudo, esse problema lógico torna-se indicativo da

¹⁷ Nas seguintes palavras de Newton é possível constatar uma aproximação do método das fluxões com o trabalho dos geômetras antigos: “A composição de um cálculo com quantidades finitas está ajustada à geometria dos antigos (assim como a investigação das primeiras e últimas razões de quantidades finitas evanescentes). Eu me dispus a mostrar que no método das fluxões não existe a necessidade de introduzir na geometria quantidades infinitamente pequenas” (MW-1, p. 143).

existência de problemas metafísicos em relação à entidade que supostamente seria denotada pelo termo “momento”. Quando se constata a contradição, não só a existência do “momento” é posta em dúvida mas também a sua inteligibilidade para a mente.¹⁸

Dito assim, essa concepção de Robles não pressuporia aquela interpretação *logicista*, como acima apresentada? Considerando o que foi afirmado a respeito dos tópicos enumerados acima, o que Robles parece defender é que a avaliação de uma *ontologia* (e também da inteligibilidade) dos objetos matemáticos, em *O Analista*, ocorre ao se relacionar os tópicos (2) e (3). Nesse sentido, saber que uma demonstração recai em uma falácia pode ser o indício de que as entidades denotadas pelas expressões são metafisicamente mal estabelecidas. Entendido assim, não haveria objeto matemático adequado já que o tópico (2) é problemático; e, por sua vez, esse tópico se manifesta problemático quando se constata problema a respeito do tópico (3). Portanto, uma interpretação como essa de Robles, exclui uma avaliação pura do tópico (2) em função de (1), onde prevalece o critério psicológico da relação entre os sentidos e a imaginação.

3.3.2 *Jesseph e o texto O Analista*

A leitura que Jesseph faz do texto *O Analista* pressupõe igualmente uma divisão. Assume-se também que Berkeley criticou o método das fluxões e o *Calculus differentialis* a partir das duas linhas de frente: de um lado, a crítica quanto aos objetos matemáticos e, do outro, quanto aos princípios e demonstrações. É no conjunto dessas duas

¹⁸ Berkeley trata do problema da identidade do *momento* (se ele é ponto ou não) no início do parágrafo 11, de *O Analista*. Isso foi motivo para acusar Newton de utilizar infinitesimais (ao estilo de Leibniz) no método das fluxões: “Os pontos ou os simples limites de linhas nascentes são indubitavelmente iguais, pois, não tendo mais magnitude do que os demais, um limite como tal não é quantidade. Se por momento significais algo mais do que o próprio limite inicial, ele deve ser ou uma quantidade finita ou um infinitesimal. Mas todas as quantidades finitas são expressamente excluídas da noção de momento. Portanto, o momento deve ser um infinitesimal” (Berkeley, AN, §11). Newton e Leibniz vivenciaram uma polêmica. O tema central era a prioridade da invenção do cálculo diferencial e integral. No decorrer da polêmica, Newton recusava o rigor do cálculo de Leibniz. Em sua perspectiva, o método das fluxões era mais rigoroso por não se apoiar em quantidades que pudessem ser identificadas como quantidades infinitesimais. É nesse sentido que Newton afirma: “Este método [das fluxões] deriva imediatamente da própria natureza, não de indivisíveis, diferenças leibnizianas ou quantidades infinitamente pequenas. Pois não existem quantidades primeiras nascentes ou quantidades últimas evanescentes, existem somente razões primeiras de quantidades nascentes e razões últimas de quantidades últimas evanescentes” (MP-3, p. 17-18). Berkeley, portanto, quando acusa Newton de usar infinitesimais, ele participa da polêmica no sentido de dar um veredito: nem Newton nem Leibniz venceu a polêmica, pois seus respectivos métodos possuem problemas tanto do ponto de vista da natureza dos objetos utilizados quanto das demonstrações apresentadas.

perspectivas da crítica que Jesseph identifica qual seria um dos temas de *O Analista*: o rigor matemático. Assim, encontrar problemas nesses dois âmbitos faz com que a crítica de Berkeley seja uma acusação de que os métodos de Newton e de Leibniz não são rigorosos. Eis como Jesseph apresenta o conceito de rigor matemático adotado por Berkeley:

A fundamental acusação em *O Analista* é de que o cálculo não é rigoroso. Rigor matemático é um conceito notoriamente difícil de articular, mas proponho que há a necessidade de incluir ambos os critérios, metafísico e lógico. De um lado, uma demonstração seria rejeitada por evocar objetos que são tidos como problemáticos conceitual ou metafisicamente (...). Por outro lado, um procedimento matemático deve ser estimado como logicamente não rigoroso por evocar inferências inválidas ou erradas. (Jesseph, 1993, p. 183-184).

Se o conceito de rigor pressupõe ambos os lados da crítica de Berkeley, a questão que permanece é a respeito de qual seria a relação entre os dois elementos assinalados por Jesseph. Não está claro ainda, nas palavras de Jesseph, se é necessário interpretar o critério metafísico como algo independente do critério lógico.

Para esclarecer mais esse ponto, será útil evocar a interpretação desse comentador quanto ao parágrafo 8, de *O Analista*. Assim como Robles, Jesseph cita essa parte do texto de Berkeley para fazer uma explicação:

A força deste argumento [de Berkeley] está em amarrar as objeções metafísicas contra o cálculo às objeções lógicas. Se confusão, impossibilidades e contradições seguem logicamente de básicas afirmações do cálculo, então há boas razões para suspeitar que esses objetos ali supostos não existam (de fato, não podem existir). (*Ibidem*, p. 188).

Não é difícil localizar, no que Jesseph diz a mesma tese apresentada por Robles: a avaliação *ontológica* dos objetos matemáticos está subordinada àquilo que acontece no plano lógico. Para eles, o tema da existência de tais objetos surge tendo em vista o sucesso ou o insucesso das demonstrações. Assim, torna-se inevitável afirmar que Jesseph interpreta os termos “impossibilidade e contradições”, utilizadas por Berkeley, como indicativo do que acontece nas demonstrações newtonianas. Mas, além disso, para Jesseph, esses termos estão ligados ao julgamento dos próprios objetos matemáticos. Assim, quando Berkeley acusa Newton de cometer *Fallacia suppositionis*, subentende-se que acontece ao mesmo tempo uma avaliação acerca dos *momentos*: eles não devem existir, da maneira como apresentada por

Newton, pois não surgiria falácia caso tais objetos fossem metafisicamente bem concebidos.

A mesma interpretação, indicada por Robles, quanto ao problema da inteligibilidade deve ser aplicada a essa parte da discussão com Jesseph. Além da ontologia dos objetos matemáticos, a inteligibilidade passa a ser avaliada pelo contexto lógico. Portanto, até aqui, Jesseph não se diferencia de Robles quanto a uma leitura *logicista* dos argumentos de Berkeley. Mais uma vez, aparece a interpretação que dá ênfase na relação dos tópicos (2) e (3). As expressões, que denotam os objetos matemáticos, são avaliadas a partir das demonstrações. A existência de problemas lógico-demonstrativos permite por em dúvida não só as expressões, mas a consistência da metafísica dos objetos que elas supostamente denotam. A não constatação de uma “cadeia *bem* interligada de raciocínios” é assumida como indicativo da existência de problemas quanto aos objetos ali envolvidos, tanto no âmbito ontológico como no que diz respeito a sua possibilidade de serem inteligíveis.

Contudo, essa identificação entre as leituras dos dois comentadores não pode ser assumida por completo. Jesseph, diferentemente de Robles, tem o cuidado de considerar a crítica de Berkeley, quanto aos objetos matemáticos, a partir da relação entre sentidos e imaginação. Jesseph apresenta isso quando examina o parágrafo 4, de *O Analista*, onde Berkeley rejeita os momentos, por eles se comprometerem com pretensas quantidades que não são percebidas pelos sentidos e nem pela imaginação. Isso faz com que Jesseph se comprometa com a presença, em *O Analista*, de um veredito acerca dos objetos matemáticos que independe dos problemas lógicos. É isso que está implícito nas seguintes palavras de Jesseph: “como poderia ser esperado, Berkeley julga estes objetos [*momentos* newtonianos] como totalmente misteriosos, inconcebíveis em termos de princípios epistemológicos que ele aparentemente toma como não problemático” (Jesseph, 1993, p. 185). O princípio epistemológico nada mais é do que aquele constituído a partir da ligação entre sentidos e imaginação:

O modelo epistemológico [de Berkeley] aqui é familiar: o que nós percebemos pelos sentidos é o material bruto a partir do qual as ideias da imaginação são construídas. As faculdades mentais consistem de sentido e imaginação, não

havendo qualquer faculdade de ‘puro intelecto’ capaz de armar uma ideia independentemente. (*Ibidem*, p. 186).

Duas perguntas surgem dessa afirmação de Jesseph. A primeira, por que aqui Jesseph focaliza o epistemológico e não ontológico? De fato, nesses parágrafos antes de Berkeley passar à crítica das demonstrações, não aparecem afirmações sobre a *existência* dos objetos matemáticos, o que caracterizaria uma avaliação ontológica dos objetos. Berkeley permanece no plano da compreensibilidade de tais objetos. O veredito quanto aos *momentos* e às *diferenças* é em termos de ser concebido pela mente. E a atuação dos sentidos e da imaginação é assumida como essencial para isso. Jesseph trata isso como sendo a perspectiva epistemológica dos objetos matemáticos.

A segunda pergunta é exatamente sobre esse “modelo epistemológico”: qual a diferença entre esse modelo e o critério de inteligibilidade de Berkeley de caráter *psicologista*, como acima sugerido? A resposta é que não há diferença. Ambos assumem a mesma interação entre os sentidos e a imaginação. O que Jesseph está explicando é que Berkeley toma como objetos do conhecimento matemático aqueles que são inteligíveis à mente na medida em que são percebidos pelos sentidos ou pela imaginação. Assim, a perspectiva epistemológica que Jesseph apresenta é ao mesmo tempo um critério para a avaliação da inteligibilidade dos objetos. Porém, não do ponto de vista do contexto lógico. Não se deve confundir essa perspectiva psicologista da avaliação da inteligibilidade com aquela onde se pressupõe a ênfase na construção lógica.

Portanto, o mais importante, nessa parte da leitura de Jesseph, é que existe realmente a possibilidade de se assumir que, para Berkeley, os objetos matemáticos são avaliados antes de serem concebidos no contexto de uma demonstração. O princípio epistemológico é algo fundamental para isso. Desse modo, tal avaliação acontece ainda no plano “psicológico”, na pura constatação mental da presença dos objetos matemáticos enquanto ideias percebidas. Assim, à luz do que foi dito sobre os tópicos enumerados acima, essa parte da análise de Jesseph faz com que exista, na crítica de Berkeley, a possibilidade de avaliar (2) em função de (1), onde expressões são rejeitadas na medida em que os objetos denotados por elas não respeitam o critério de ser percebido pelos sentidos

ou imaginação. Ou seja, Jesseph também permite uma leitura *psicologista* de Berkeley, algo que é negligenciado na interpretação sugerida por Robles.

3.3.3 *Avaliando as interpretações dos comentadores*

Portanto, o panorama conceitual fornecido pelas interpretações de Robles e Jesseph fornece a possibilidade de conceber as críticas de Berkeley de duas maneiras. Uma delas é a interpretação *logicista*. Nela, os problemas demonstrativos permitem estabelecer um julgamento quanto à metafísica dos objetos matemáticos. Tanto Robles quanto Jesseph conduzem essa avaliação para a *ontologia e inteligibilidade* dos objetos matemáticos: os problemas lógicos permitem avaliar não só a existência ou não desses objetos, mas também sua inteligibilidade. Deve-se ressaltar que, nesse modelo, esses problemas metafísicos estão intimamente ligados a uma avaliação a partir do contexto lógico.

Constatou-se que essa leitura *logicista* da crítica de Berkeley é a única presente no texto de Robles quanto ao texto *O Analista*. Esse tipo de interpretação também se encontra no texto de Jesseph. No entanto, esse comentador se diferencia de Robles por acrescentar outra análise da crítica de Berkeley. Ou seja, Jesseph considera o que Berkeley apresenta antes do parágrafo 8, de *O Analista*, como sendo uma avaliação que não é necessariamente de teor lógico. Essa é a segunda maneira de interpretar a crítica de Berkeley. Assim, a rejeição aos *momentos* e as *diferenças* se constrói a partir de um princípio epistemológico. Tal princípio pressupõe uma avaliação psicológica no sentido de saber se os pretensos objetos matemáticos são percebidos pelas faculdades mentais, seja a imaginação, seja qualquer órgão dos sentidos. Mas, além disso, é necessário dizer que o problema epistemológico como descrito por Jesseph é um problema que se identifica com a questão da inteligibilidade dos objetos matemáticos. Atua nessa parte da crítica a questão de saber se os objetos do conhecimento são inteligíveis e o critério utilizado para isso é, antes de tudo, um critério de inteligibilidade do ponto de vista *psicologista*.

É necessário concordar com Jesseph de que Berkeley, no percurso de sua apresentação em *O Analista*, primeiro ataca os objetos matemáticos a partir de uma perspectiva epistemológica na medida em que pressupõe a atuação dos sentidos e da imaginação. Não se pode negar essa perspectiva da crítica.

No entanto, permanece a questão: se Jesseph assume as duas possibilidades da interpretação de Berkeley (uma *logicista* e outra *psicologista*), qual é a mais importante? Para responder é fundamental notar que o texto de *O Analista* é de caráter polêmico. A afirmação de Berkeley, no início desse texto, de que iria se “revestir” de livre-pensador não pode ser tomada como um simples detalhe. Berkeley tenta polemizar a partir dos termos adotados pelos próprios inimigos. Desse modo, torna-se relevante o fato de ainda no início, no parágrafo 2, Berkeley destacar que a geometria sempre foi considerada uma excelente lógica. Isso revela que ele estrategicamente adotou a lógica como sendo o elemento que chamaria mais atenção dos matemáticos em questão, pois para eles tal lógica seria importante. Berkeley não critica os métodos matemáticos dos modernos baseando-se somente em problemas epistemológicos, porque ele acreditou que chamaria mais atenção mostrar os problemas na própria lógica utilizada pelos matemáticos, o que poderia fazê-los voltar a atenção para os problemas mais básicos, no âmbito metafísico, quanto aos objetos. Isso explica a ênfase de Robles na leitura *logicista* de *O Analista*. Assim como Jesseph, ele acreditou que a *força* de *O Analista* está em mostrar os problemas de natureza lógica dos métodos de Newton e, por consequência, de Leibniz. Eis como Jesseph apresenta essa ênfase da lógica no texto de Berkeley:

Mostrar inconsistência no cálculo seria claramente muito mais efetivo para Berkeley do que simplesmente relatar que ele não pode conceber fluxões ou diferenças, especialmente considerando a história da matemática. Muitos objetos supostamente inconcebíveis – números irracionais, negativos e complexos são exemplos óbvios de antes dos dias de Berkeley – ganharam respeitabilidade pelas suas utilidades pelas quais manifestaram. Portanto, um leal defensor do cálculo, no século XVII, replicaria que o critério metafísico de rigor é simplesmente irrelevante. Mas se essas objeções metafísicas são ligadas a objeções lógicas convincentes, então o caso de Berkeley é significativo. (Jesseph, 1993, p. 189).

Portanto, ambos os comentadores assumem que, para a polêmica, a crítica lógica de Berkeley tem mais importância.

No entanto, uma coisa que não está bem explicada pelos comentadores é o porquê de Berkeley ter que apresentar primeiramente uma crítica aos *momentos* e *diferenças* a partir de um critério epistemológico. Se a força da crítica está no que ele diz a respeito da lógica, falta ainda saber por que ele não se contentou em permanecer só na lógica. É aqui que entra a necessidade de reverter um pouco o caráter “destrutivo” do texto

O Analista. Berkeley faz essa apresentação inicial de um modo a indicar também como corrigir os problemas do cálculo. O primeiro passo para isso é tentar avaliar os próprios objetos matemáticos isoladamente, sem que eles estejam apoiados pela linguagem (utilização de símbolos) ou envolvidos no próprio raciocínio matemático. É por isso que Berkeley indica, no parágrafo 8, que se dê a atenção às próprias ideias dos objetos matemáticos, independentemente das expressões usadas. Isso aparece em outros parágrafos do texto de Berkeley:

Nada mais fácil do que atribuir nomes, signos ou expressões a essas fluxões; tampouco é difícil computar e operar por meio desses signos. Mas será encontrada muita dificuldade em omitir os signos e, ainda assim, reter em nossas mentes as coisas que supomos serem significadas por eles. Não há qualquer dificuldade em considerar os expoentes, sejam geométricos, algébricos ou fluxionários, mas formar uma ideia precisa de, por exemplo, uma terceira velocidade, em si e por si mesma, *hoc opus, hic labor* (isso é o trabalho, isso é o esforço). [ênfase minha] (*Ibidem*, §37).

Aqui novamente aparece a necessidade de uma constatação mental independentemente das expressões. Isso pode indicar que, para Berkeley, tal constatação mental é o ponto de partida, ou seja, o início de onde o matemático começaria a construir todo o restante quanto à matemática. É possível localizar várias afirmações espalhadas pelo *O Analista*, desse indicativo de que a solução das dificuldades encontradas na matemática começa por uma avaliação adequada dos próprios objetos matemáticos. Eis um exemplo disso:

E há de fato razão para pensar que toda tentativa de estabelecer a geometria abstrusa e refinada sobre fundamentos corretos e evitar a doutrina das velocidades, momentos etc., mostrar-se-á impraticável até quando o objeto e a finalidade da geometria forem melhor compreendidos do que aparentemente têm sido até agora. (Berkeley, AN, §35).

Nessas palavras Berkeley claramente subordina a solução do problema de estabelecer os fundamentos corretos na geometria a uma investigação quanto a dois elementos: o objeto e a finalidade da própria geometria. A discussão de Berkeley sobre a finalidade ocorre no sentido de saber se cabe à geometria investigar seu objeto de estudo enquanto um objeto abstrato. Assim como em outros textos onde Berkeley trata da geometria, ele nega essa finalidade abstrata da geometria. O motivo está na própria natureza do objeto: ele não é abstrato. O mais importante nessa citação é observar que a solução para os problemas de

fundamentos tem como ponto de partida um questionamento sobre a natureza do objeto matemático.

Portanto, considerando o texto *O Analista*, na sua contraparte positiva¹⁹, o critério epistemológico torna-se importante tanto quanto a interpretação lógica, porque ele permite ao matemático abordar o objeto geométrico em si mesmo, enquanto ideia presente na mente. Ainda que essa investigação metafísica não constitua o todo da geometria, tal disciplina começa quando se investiga qual é o seu objeto adequado. E uma boa solução já nesse nível (enquanto âmbito metafísico) evitará que problemas ocorram em outros âmbitos, como é o caso da lógica. Essa abordagem construtiva do texto de Berkeley não aparece nos comentadores acima. É necessário acrescentá-la, pois Berkeley parece entender que uma investigação no nível metafísico, quanto aos objetos da geometria, é absolutamente necessária; e ela começa em saber se a mente possui ou não as ideias de seus pretensos objetos.²⁰

3.4 Conclusão

Focando somente no problema da inteligibilidade dos objetos matemáticos, como foi visto, em *O Analista*, é possível encontrar duas abordagens nas críticas de Berkeley. A principal, que constitui a força argumentativa do texto, concebe o contexto lógico como sendo a porta de entrada para avaliar a inteligibilidade de tais objetos. Desse modo, encontrar contradições nos raciocínios seria um modo de dizer que os objetos pressupostos manifestam problemas quanto à sua inteligibilidade. Por outro lado, é possível localizar uma recusa, em *O Analista*, dos *momentos e diferenças*, baseando-se somente na

¹⁹ Um exemplo de como essa contraparte positiva se manifesta encontra-se na resposta de Maclaurin a Berkeley. Maclaurin constrói uma resposta ao problema da inteligibilidade dos *momentos* newtonianos de um modo a assimilar o conteúdo berkeleyano. Para ilustrar isso, acrescentou-se ao final desta tese o APÊNDICE II.

²⁰ Os seguintes questionamentos, apresentados ao final de *O Analista*, sugerem o mesmo posicionamento quanto à importância de uma investigação adequada sobre o objeto matemático: “Equívocos cometidos com relação ao objeto e à finalidade da geometria não teriam gerado dificuldades desnecessárias e buscas mal orientadas nessa ciência?” (Berkeley, AN, Questão 3). E ainda: “Seria possível livrar a geometria de dificuldades e absurdos insuperáveis supondo que seu objeto verdadeiro seja a ideia abstrata geral de extensão ou a extensão externa absoluta?” (*Ibidem*, Questão 7). Novamente, contata-se aqui que uma má compreensão do objeto da geometria produz problemas nessa disciplina. Uma abordagem adequada dos objetos, sem confundi-los como as expressões (signos, símbolos) permitirá concluir que sua natureza não é abstrata; e isso evitará adentrar em investigações e dificuldades desnecessárias.

impossibilidade da mente percebê-los enquanto ideias vindas pelos sentidos ou sugeridas pela imaginação. Assim, tal critério de inteligibilidade pode ser abordado de um ponto de vista *logicista* ou *psicologista*. No entanto, qual é a abordagem mais importante? O que primeiro necessita ser destacado é que, do ponto de vista negativo da crítica de Berkeley, a demanda por inteligibilidade, a partir do contexto lógico, ganha peso enquanto estratégia argumentativa, enquanto motivo para causar polêmica contra os matemáticos que depreciam a religião.

No entanto, do ponto de vista construtivo, Berkeley compreende que uma avaliação metafísica do objeto em si mesmo é necessária. E a importância de uma avaliação puramente metafísica tem o mesmo peso que uma avaliação lógica. É preciso avaliar aquilo que está embaixo das expressões, dos símbolos, dos signos. Isso implica em usar o critério de inteligibilidade, como aqui denominado, *psicologista*. Assim, se Berkeley concebeu isso como ponto de partida para a formulação adequada da matemática, o critério de inteligibilidade abordado desse modo é tão importante quanto do ponto de vista lógico. Além disso, tal critério na versão *psicologista* não é de todo incompatível a versão *logicista*. Pois, caso o matemático consiga conceber objetos inteligíveis para a mente (enquanto percepção sensível), isso não impedirá que seja possível para ele construir demonstrações adequadas, que evitem falácias. No entanto, o que Berkeley parece indicar é que o contrário não é possível, ou seja, demonstrações falaciosas não possuem objetos adequados do ponto de vista *psicologista*.

Um segundo ponto que necessita ser abordado, é a respeito da própria natureza dos objetos adotados nos métodos de Newton e de Leibniz. É possível, antes de tudo, identificar que a crítica de Berkeley se faz a partir de um critério de inteligibilidade, ainda que psicologista, que se aproxima ao que foi discutido sobre a geometria, no capítulo anterior. Berkeley demanda que os *momentos* e *diferenças* de manifestem enquanto ideias perceptíveis. O significado disso é que Berkeley entendeu que ainda que o método das fluxões e o *Calculus differentialis* se utilizem de signos, símbolos, como é o caso da álgebra, seus objetos são necessariamente geométricos. Para Berkeley, falar de aumentos de linhas, planos, como é o caso de ambos os métodos, é, antes de tudo, tratar de objetos geométricos. A utilização de símbolos não dá direito aos matemáticos de negligenciarem

essa característica geométrica. A seguinte questão, presente ao final de *O Analista*, é uma retumbante acusação de Berkeley contra os matemáticos por terem confundido a natureza desses objetos:

Embora, quando os raciocínios algébricos se limitam aos signos ou às espécies que representam quantidades em geral, se admita que eles são extremamente exatos, não poderíeis, apesar de tudo, cair em erro se, quando eles forem por vós limitados a representar coisas particulares, não limitásseis a vós mesmos a raciocinar em conformidade com a natureza de tais coisas particulares? Esse erro deveria ser imputado à álgebra pura? (Berkeley, AN, Questão 46).

Para Berkeley, os métodos de Newton e de Leibniz são aplicações da álgebra a um objeto particular. Se o objeto da álgebra é o símbolo em si, independentemente dele estar relacionado a ideias, quando tal símbolo denota um objeto geométrico, ele começa a denotar ideias. Portanto, não se trata mais de um caso puro da álgebra. Assim, esses signos devem respeitar a natureza do objeto que denotam. Não compreender essa diferença é o motivo para os erros que Berkeley denuncia tão enfaticamente nesse texto de *O Analista*.

Conclusão geral

Foi visto que uma das respostas à pergunta pelo que é o objeto do conhecimento, em um sentido mais geral no pensamento de Berkeley, conduz ao conceito de ideia. No entanto, essa discussão leva a considerar seu princípio mais basilar: ser é ser percebido. Um grande exemplo da aplicação disso foi possível de ser observado nos argumentos contra a doutrina das ideias abstratas. Ao negar que a mente consiga construir uma ideia abstrata, Berkeley está reconhecendo, de um lado, o limite da própria mente e, de outro, a natureza do objeto com os quais ela trata. Ao invés de ideias abstratas, os verdadeiros objetos são as *ideias percebidas*. A doutrina da abstração que Berkeley recusa é aquela que quer atribuir uma capacidade à mente no sentido de construir seu objeto de um modo a se tornar independente de qualquer característica particular que possa ser percebida pelos sentidos. Berkeley nega tanto essa capacidade de abstração como o objeto que resultaria disso. Para ele, se a mente pode “abstrair”, é em um sentido muito mais limitado, ou seja, ela só consegue separar qualidades sensíveis uma das outras desde que a própria separação seja possível de ser percebida na realidade. Esse “teor” empírico nunca sai de cena, o que é separado deve apresentar-se sempre como percebido ou possivelmente percebido pelos sentidos. Tal conceito de abstração é muito diferente daquele adotado pela doutrina da abstração. Assim, o papel desempenhado pelos sentidos não é somente o de ser a fonte primária do material pelo qual a mente irá trabalhar, mas o de estipular o próprio limite de ação da mente. A imaginação, por exemplo, considerada como uma das faculdades mentais, pode produzir ideias, porém não abstratas. O conteúdo imaginado sempre terá algum vínculo com o que foi percebido pelos sentidos. Portanto, o princípio do “ser é ser percebido” não se constitui unicamente como um princípio para as *ideias*. Ele também se constituiu como um princípio fundamental para o esclarecimento da própria ação do espírito.

No entanto, considerando essa “composição” entre a ideia percebida e a mente que a percebe, ao se perguntar sobre o que é *inteligibilidade*, para Berkeley, uma resposta imediatamente se formula ainda considerando o critério de “ser é ser percebido”. Do ponto de vista do objeto, é inteligível aquilo que se manifesta como uma ideia percebida. Assim, a

mente tem ideia *clara* quando a própria mente constata a presença de uma ideia, não enquanto abstração, mas percebida com um teor sensível. Mesmo as ideias da imaginação não conseguem se livrar do que é sensível. Assim, caso o vínculo se mantenha, tudo o que é estabelecido a partir dessa ideia percebida também passa a ter *inteligibilidade*. Portanto, nesse sentido mais geral da filosofia de Berkeley, é possível constatar um critério para a inteligibilidade constituído a partir do conceito de ideia percebida.

Se for possível descrever esse critério de inteligibilidade, formulando a pergunta a partir do próprio objeto do conhecimento, uma situação que merece uma atenção especial emerge quando se considera especificamente o objeto matemático. Isso porque tal critério, enquanto norma matemática, parece não ser aplicável tão imediatamente aos dois tipos específicos de objetos matemáticos.

De um lado, o objeto matemático, para Berkeley, se constitui enquanto signo puro, ou seja, não é uma ideia abstrata, mas também não é uma ideia percebida. Esse é o caso revelado pela aritmética e pela álgebra. Então, como é que um signo puro torna-se inteligível uma vez que ali se dispensa as ideias percebidas? Como é que $\sqrt{-1}$ pode ser considerado inteligível já que a mente não consegue ter a ideia dessa quantidade? As respostas, quanto a isso, exigem que se considere o signo não a partir da ideia que ele denotaria, mas da operação regrada, realizada com ele em relação com outros signos. Desse modo, é inteligível à mente o signo com o qual ela sabe operar, considerando as regras. É a partir do nível operatório, no conjunto com outros signos, que esse objeto matemático torna-se inteligível. O critério, portanto, não é o de ideias percebidas.

Do outro lado, aparece a geometria que trata de ideias percebidas. Ou melhor, seu objeto é uma ideia percebida que se torna signo ao representar outras possíveis ideias percebíveis. Assim, não há signo *puro* na geometria. A fidelidade com o princípio mais básico do ser é ser percebido se mantém na geometria, pois pontos, linhas, planos, etc., são ideias percebidas que se tornam universais ao representar outras ideias, considerando uma dada propriedade percebida nelas. É desse modo que Berkeley assume o objeto da geometria presente nas demonstrações. Mesmo assim, o critério de inteligibilidade se formula tendo ainda uma afinidade com a percepção de ideias, ou seja, é inteligível, dentro

de uma demonstração, o objeto que tem alguma característica perceptível ou possivelmente perceptível em outras ideias.

O caso da crítica ao cálculo infinitesimal se revelou de grande interesse para a compreensão do problema da inteligibilidade dos objetos matemáticos. Em especial, porque ele junta dois importantes elementos: a utilização de símbolos (algo comum à aritmética e à álgebra) e os objetos geométricos (como pontos, linhas etc). A principal investigação ocorreu a partir do texto *O Analista*, de Berkeley. O objetivo central foi o de compreender como se articula o problema da inteligibilidade, a partir das críticas formuladas ali. Dada a natureza polêmica do texto, foi necessário fazer uma sutil separação, revelando a dura tarefa de se interpretar esse texto de Berkeley.

Assim, sugeriu-se que, de um lado, deve-se colocar a própria estratégia adotada por Berkeley. O peso lógico é o maior, pois parece que ele estaria pensando na audiência do texto: aqueles que recebem a crítica dariam atenção às suas críticas por eles valorizarem a lógica. Esse seria o caso do matemático livre-pensador que denigre a teologia a partir de problema de natureza lógica. Berkeley, ao constatar erros lógico-demonstrativos, introduz ao mesmo tempo uma acusação de que os métodos de Newton e de Leibniz negociam com objetos ininteligíveis. A conclusão é que as expressões desses objetos (construídas por símbolos) não denotariam objetos inteligíveis. No entanto, essa é uma conclusão que se estabelece a partir do contexto lógico, ou melhor, o problema da inteligibilidade dos objetos denotados pelos símbolos adentra na discussão a partir de uma avaliação lógica. Esse problema, que é de natureza metafísica, para Berkeley, passa a ser avaliado a partir da própria lógica.

No entanto, essa ênfase no aspecto lógico, não dá conta de explicar por que Berkeley avalia os *momentos* e as *diferenças* a partir da própria constatação mental das entidades matemáticas. Nos primeiros parágrafos, Berkeley põe a atenção nesses objetos na tentativa de construir um argumento baseado, antes de tudo, na percepção de ideias. Ali não surge nenhum vínculo necessário com o problema quanto ao erro lógico. Trata-se somente de uma rejeição de tais objetos a partir de um critério psicologista, ou seja, *momentos* e *diferenças* são pretensas entidades ininteligíveis, pois eles não se manifestam como ideias percebidas pelos sentidos e muito menos construídas na imaginação.

A sugestão de solução dessa aparente variação, entre uma leitura *logicista* e uma *psicologista*, de *O Analista*, foi a admissão de uma contraparte “positiva” do texto de Berkeley. Ele não só quer apontar para os pontos fracos dos métodos matemáticos a partir das regras admitidas neles. Mas ele também manifesta uma proposta de correção dos problemas. Isso aconteceria pela investigação das próprias ideias. Parece que Berkeley sugere que a primeira coisa que os matemáticos devem fazer é “retirar o véu” dos símbolos e considerar as próprias ideias. Por que deveriam fazer isso? Pois a solução já nesse nível psicológico evitaria problema no nível lógico. Desse modo, a pergunta pela inteligibilidade passa a dar primazia ainda à concepção psicologista. A percepção de ideias é o critério principal para construir a inteligibilidade dos objetos matemáticos. Portanto, isso permite afirmar que no cálculo Berkeley não fornece um novo modelo para o critério de inteligibilidade. Aquilo que aparece para a geometria novamente se manifesta na interpretação de Berkeley sobre o que é o objeto matemático do cálculo infinitesimal. Em outras palavras, mesmo usando símbolos, o cálculo para Berkeley é de natureza geométrica. Os símbolos estão subordinados a agirem, dentro de um raciocínio, de acordo com a natureza geométrica daquilo que eles denotam. É isso que Berkeley demanda na seguinte questão:

Embora, quando os raciocínios algébricos se limitam aos signos ou às espécies que representam quantidades em geral, se admita que eles são extremamente exatos, não poderíeis, apesar de tudo, cair em erro se, quando eles forem por vós limitados a representar coisas particulares, não limitásseis a vós mesmos a raciocinar em conformidade com a natureza de tais coisas particulares? Esse erro deveria ser imputado à álgebra pura? (Berkeley, AN, Questão 46).

Uma coisa é a álgebra raciocinar a partir de signos puros, outra é a partir de quantidades particulares. Berkeley assume que o cálculo infinitesimal é um caso da aplicação da álgebra a um objeto particular, a saber: ideias percebidas.

Esse é o cenário construído a partir do conceito de objeto matemático. Com isso, é possível voltar a atenção ao problema que motivou a construção desta tese. Há uma unicidade no critério de inteligibilidade quanto aos objetos matemáticos no pensamento de Berkeley? O que Berkeley demanda para aritmética e álgebra seria a mesma coisa do que ele exige na geometria? Parece ser uma situação realmente difícil estabelecer uma

identidade entre essas duas maneiras de considerar a inteligibilidade. Basta lembrar sua afirmação no *Alciphron*, onde ele abertamente aceita a utilização do símbolo $\sqrt{-1}$. Ali Berkeley dispensa a necessidade de avaliá-lo a partir de um critério das ideias percebidas. Ora, não é justamente isso que ele nega para o método das fluxões e para o *Calculus differentialis*? Antes de haver uma unicidade, no sentido de se constituir como uma norma, o que se revela é uma ambiguidade. Ora a inteligibilidade do objeto dispensa as ideias claras, ora a inteligibilidade exige a presença de ideias claras.

Esse tipo de desconforto tem se manifestado nas análises feitas por comentadores, considerando outros aspectos do pensamento matemático de Berkeley. Por exemplo, Sherry (1987, p. 465), quanto ao problema da verdade matemática, identifica duas maneiras diferentes de Berkeley tratá-la. Uma é a partir de uma teoria referencial da verdade, como é o caso da geometria (onde há ideias percebidas para funcionarem como referência), e a outra é a partir de uma teoria pragmática de verdade. Essa teoria conduziria a uma avaliação da utilidade dos termos matemáticos, trata-se da noção de “verdadeiro por utilidade”. Nesse caso, não se perguntaria se eles têm referencia, mas se eles permitem produzir resultados corretos. Sherry assume que essa diferença do tratamento da verdade matemática revela uma dificuldade do próprio Berkeley em lidar com outro conceito: o de *ciência matemática*. Nas palavras de Sherry:

Nós podemos dizer que Berkeley é culpado de se equivocar a respeito da palavra ‘ciência’. Quando ele acusa os newtonianos de falharem de serem homens de ciência, ele está usando ‘ciência’ no sentido de ‘ciência demonstrativa’. No entanto, no contexto em que ele fala sobre o caráter de ciência da álgebra e mecânica, ele usa ‘ciência’ no sentido de ‘prática ciência’ (...). Essa distinção também explica a tensão no pensamento de Berkeley entre a teoria referencial e a pragmática da verdade. Essas ciências como a álgebra, que são significativas mas não-denotativas, são práticas e as restantes, como a geometria, são demonstrativas. (Sherry, 1987, p. 465).

O tom adotado na análise de Sherry é mesmo de acusar Berkeley de não estar preparado para conciliar conceitos distintos.

Quanto ao problema da inteligibilidade, a situação parece ser a mesma. No pensamento de Berkeley, parece haver uma tensão entre conceitos distintos de inteligibilidade. No entanto, aqui são levantadas três possibilidades de respostas.

A primeira é acompanhar o tom adotado na interpretação de Sherry quanto conceito de ciência matemática. Isso no sentido de assumir que não há unicidade no pensamento matemático de Berkeley que permita confirmar a presença de um critério que funcione como uma norma última para avaliar a inteligibilidade dos objetos matemáticos.

A segunda possibilidade é assumir que o verdadeiro critério de inteligibilidade é aquele a partir das ideias claras, ou melhor, ideias percebidas. A favor dessa interpretação existe a análise dos termos “inteligível” (*intelligible*) e, seu correlato negativo, “ininteligível” (*unintelligible*). Um mapeamento nas principais obras, onde Berkeley trata da matemática, revela que ele usa esses termos sempre os relacionando à percepção de ideias.¹ Assim, os objetos da aritmética e da álgebra poderiam ser considerados inteligíveis em um sentido mais fraco. O problema com essa possibilidade de interpretação é conciliar o que a Questão 45, de *O Analista*, sugere.² Ali Berkeley parece sugerir que tanto a aritmética e a álgebra como a geometria seriam “ciências”, no sentido demonstrativo. Isso revelaria que o nível de cientificidade seria o mesmo para todas essas disciplinas. Ora, se o nível de inteligibilidade dos objetos seria distinto nessas disciplinas, assim seria necessário excluir o conceito de objeto matemático daquilo que indica a cientificidade? Essa segunda possibilidade de interpretação necessariamente exigem que se desconsidere a tese de que os objetos matemáticos fazem parte dos “fundamentos” e dos “princípios” que indicariam a diferença entre “ciência” e “prática” matemática.

Uma terceira possibilidade (e que é a resposta assumida aqui nesta pesquisa) exige uma mudança de perspectiva tanto a respeito do modo como se formula o problema sobre a inteligibilidade dos objetos como, também, a respeito do sentido da Questão 45, de *O Analista*. Se a pergunta sobre a inteligibilidade for feita não a partir dos objetos, mas a partir do próprio sujeito que percebe, então parece surgir uma unicidade. Para esclarecer,

¹ Um exemplo disso foi sugerido na Introdução, desta tese. Em especial quando Berkeley fala da concepção de matéria como algo exterior à mente. Vale lembrar que, com visto no capítulo 1, Berkeley recusa uma interpretação de número que se filiaria a essa concepção de matéria.

² “Não seriam os homens capazes de no raciocínio mais geral acerca de igualdades e proporções realizarem demonstrações como as que realizam na geometria? Em tais demonstrações, eles não estariam obrigados ao mesmo [tipo] de raciocínio estrito que há na geometria? E esses seus raciocínios não seriam deduzidos dos mesmos axiomas de que são deduzidos aqueles da geometria? Portanto, a álgebra não seria tão verdadeiramente uma ciência quanto o é a geometria?” (Berkeley, AN, Questão 45). Essa questão foi apresentada e analisada na Introdução, desta tese.

aqui se toma de empréstimo o modo como Paty (2005, p. 371) conceitua inteligibilidade. Para ele, inteligibilidade é uma “apropriação pela razão”. Nessa definição o sujeito é o ponto de partida para apresentar a questão.

Aplicado isso a Berkeley, a questão se constitui no sentido de saber se a mente é capaz de se apropriar dos objetos matemáticos. Em outras palavras, a mente consegue saber qual é a natureza dos objetos matemáticos? A resposta é sim. Para Berkeley, ao afirmar que o signo é o objeto imediato da aritmética e da álgebra, ele está afirmando ao mesmo tempo em que a mente sabe qual é a natureza desses objetos. Tais objetos são inteligíveis para a mente nesse sentido. Da mesma maneira acontece com a geometria. A mente sabe qual é a natureza do objeto geométrico: ser uma ideia percebida. A partir do sujeito, o problema da “inteligibilidade” se constitui como uma pergunta sobre o fato da mente saber o que é aquele objeto de uma determinada disciplina. Isso faz com que a diferença quanto à inteligibilidade (entre a aritmética, a álgebra e a geometria) seja somente de modalidade, isto é, a pergunta é a mesma para todos os objetos, as respostas são diferentes. Mas o nível de compreensão quanto à natureza de cada objeto também é o mesmo. Assim a inteligibilidade se manifesta de modos diferentes, mas a “apreensão pela razão” do que é o objeto de sua respectiva ciência acontece no mesmo nível.

Se isso está correto, pode-se dizer que a Questão 45, de *O Analista*, não está de fato se comprometendo com a cientificidade da aritmética e álgebra, mas que talvez isso pudesse ser revelado em uma pesquisa futura dos próprios matemáticos. As seguintes palavras de Pycior são esclarecedoras nesse sentido:

Embora no escrito *Alciphron* ele pareça ter dado um último passo para aceitar uma álgebra puramente simbólica e encaixá-la em sua filosofia, Berkeley reconhece aqui [Questão 45, de *O Analista*] que estes matemáticos pensadores de 1734 (incluindo ele?) ainda necessitariam de tempo e meditação para chegar a um acordo pedagogicamente, se não cientificamente, de como aritmética e álgebra seriam ciências dos signos. (Pycior, 1997, p. 231).

Pycior parece interpretar que, antes de considerar a aritmética e a álgebra como disciplinas científicas, para Berkeley, elas seriam boas ferramentas, espécie de “arte” de invenção de como construir uma relação entre símbolos, para manipular coisas no mundo. Isso não se confundiria com uma ciência no sentido mais forte. No entanto, considerando o que está em

jogo, em *O Analista*, Berkeley também não duvidaria de que talvez essas disciplinas pudessem adquirir o estatuto de ciência. Caberia investigar mais para isso. Saber qual é a natureza dos objetos tratados por tais disciplinas já seria o começo. Portanto, saber que esses objetos seriam inteligíveis, entendido aqui enquanto “apreensão pela razão”, seria um elemento para avançar rumo a tal cientificidade.

Referências

Obras de George Berkeley

BERKELEY, G. **The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne**. Edição, introdução e notas A. A. Luce e T. E. Jessop. Nendeln / Liechtenstein: Kraus Reprint. 1979. 9 v.

_____. Arithmetic demonstrated without Euclid or Algebra. In: WRIGHT, M. A. (Ed) **Works of George Berkeley**. London. p. 29-58. v 2. 1843

_____. O Analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel. Tradução A. Calazans e E. S. de O. Barra. **Scientiae studia**: revista latino-americana de filosofia e história da ciência. São Paulo-SP. v. 8, n. 4, 633-676, 2010.

Outras obras

ARTHUR, R. (Ed.) **The labyrinth of the continuum: writings on the continuum problem, 1672-1686**. Yale University Press. 2001

AYERS, M. R. (Ed) **George Berkeley**: Philosophical works, including the works on vision. London: Everyman. 1998.

_____. Berkeley, Ideas, and Idealism. In: **Reexamining Berkeley's Philosophy**. Edição S. H. Daniel. Canada: University of Toronto Press Incorporated. 2007.

_____. Was Berkeley an empiricist or a rationalist? In: WINKLER, K (ed) **The Cambridge Companion to Berkeley**. Cambridge New York: University Press. 2005.

BARROW, I. **The usefulness of mathematical learning explained and demonstrated**. Tradução J. Kirkby. London: Frank Cass. 1970 [1734].

BAUM, Robert. The Instrumentalist and Formalist Elements of Berkeley's Philosophy of Mathematics. **Studies in History and Philosophy of Science**. 3: 119-134. 1972

BENNETT, J. **Locke, Berkeley, Hume**: Central Themes. Oxford: Clarendon Press, 1971.

BERLIOZ, D. **Berkeley: un nominalisme realiste**. Paris: Vrin. 2000.

_____. Vision et géométrie chez Berkeley. In: CHARLES, S. **Science et épistémologie Selon Berkeley**: actes du colloque international organisé dans le cadre du Congrès annuel de l'Association canadienne de philosophie. Québec : Les Presses de l'Université Laval. 145-162. 2004

BROOK, R. J. Berkeley and Proof in Geometry. **Dialogue** 51. Association canadienne de philosophie. 1-17. 2012

CAJORI, F. A **History of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse**. Chicago/London: Open Court. 1919.

CALAZANS, Alex. **Newton e Berkeley**: As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões n'O Analista. 2008a. p. 110. Dissertação (Mestrado em filosofia). Programa de pós-graduação em filosofia, Universidade Federal do Paraná. Curitiba-Pr. 2008a.

_____. Considerações a respeito do problema do rigor matemático em “O analista” de Berkeley. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**. Campinas-SP. v. 18, n. 2, p. 391-418, 2008b.

_____. Um panfleto de Berkeley contra as práticas matemáticas de Newton e de Leibniz. **Scientiae studia**: revista latino-americana de filosofia e história da ciência. São Paulo-SP. v. 8, n. 4, 623-632, 2010.

CHARLES, S. **Science et épistémologie Selon Berkeley**: actes du colloque international organisé dans le cadre du Congrès annuel de l'Association canadienne de philosophie. Québec : Les Presses de l'Université Laval. 2004.

COHEN, I. B. & WESTFALL, R. S. **Newton**: Textos, Antecedentes e Comentários. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto. 2002.

CONTE, J. **Obras filosóficas**: George Berkeley. Tradução, Apresentação e notas J. Conte. São Paulo: Unesp, 2010.

DANIEL, S. H. Berkeley's pantheistic discourse. **International Journal for Philosophy of Religion**. Kluwer Academic Publishers, v. 49, 179–194, 2001.

_____. **Reexamining Berkeley's Philosophy**. Edição. Canada: University of Toronto Press Incorporated. 2007.

DEDEKIND, R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. 3ª ed. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1905 [1872] *Apud* EUCLIDES. **The thirteen books of Euclid's Elements**. Tradução, introdução e notas T. L. Heath. New York: Dover, 1968. 3v.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução, introdução I. Bicudo. São Paulo: Ed. Unesp. 2009

_____. **The thirteen books of Euclid's Elements**. Tradução, introdução e notas T. L. Heath. New York: Dover, 1968. 3v.

FERRAZ NETO, B. P. A. O triângulo geral de Locke e a consideração parcial de Berkeley. **Doispontos**: Filosofia Britânica nos séculos XVII e XVIII. Curitiba-Pr. v. 1, n. 2, 97-110, 2005.

FREMONT, C. (Ed.) **Discours de métaphysique et autre textes**. Paris: Flammarion. 2001 [1687].

GIORELLO, G. The 'fine struture' of mathematical revolutions: metaphysics, legitimacy e rigour. The case of calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin. In: GILLIES, D. (ed.) **Revolutions in mathematics**. Oxford: Carendon Press. 1992.

GRABINER, J.V. Was Newton's Calculus a Dead End? The Continental Influence of Maclaurin's Treatise of Fluxions. In: **American Mathematical Monthly**. 104, 1997, pp. 393-410.

GRAYLING, A. C. Berkeley's argument for immaterialism. In: WINKLER, K (ed) **The Cambridge Companion to Berkeley**. Cambridge New York: University Press. 2005.

GUICCIARDINI, N. La época del punto: el legado matemático de newton en el siglo XVIII. **Estudios de Filosofía**. Medellín. Universidad de Antioquia. N. 35. 67-109. 2007

_____. **Reading the Principia**: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

_____. **The development of the Newtonian calculus in Britain: 1700-1800**. Cambridge: Cambridge University Press. 1989

HALL, A. R. & HALL, M-B. **Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton**. Cambridge: Cambridge University Press. 1962

HORVÁTH, M. On the attempts made by Leibniz to justify his calculus. In: **Studia Leibnitiana**. 18 – Bd VIII, Heft. 60-71.1986.

JANIAK, A. Space, Atoms and Mathematical Divisibility in Newton. **Studies in History and Philosophy of Science**. 30. 203-30. 2000

JESSEPH, D. M. **Berkeley's Philosophy of Mathematics**. Chicago/London: The University of Chicago Press. 1993.

_____. Berkeley's Philosophy of Mathematics. In: WINKLER, K (ed) **The Cambridge Companion to Berkeley**. Cambridge New York: University Press. 2005.

LEIBNIZ, G. W De analysi per aequationes numero terminorum infinitas. In: PARMENTIER, M. (ind., trad., e notas) **La naissance du calcul différentiel – 26 articles des Acta Eruditorum**. 2ª ed. Paris: Vrin. 1995. [1669].

_____. *Lettre de M. L. sur un principe général*. In: FREMONT, C. (Ed.) **Discours de métaphysique et autre textes**. Paris: Flammarion. 2001 [1687].

_____. **Novos ensaios sobre o entendimento humano**. Tradução Luiz João Baraúna.. São Paulo-SP: Nova Cultura. 1999. (Os Pensadores)

_____. Pacidius Philalethi. In: ARTHUR. R. (Ed). **The labyrinth of the continuum: writings on the continuum problem, 1672-1686**. Yale University Press. 2001 [1676].

LOCKE, J. **An Essay Concerning Human Understanding**. Edição P. H. Niddith. Oxford: Clarendon Press, 1975.

MACLAURIN, C. **A treatise on fluxions**. London: William Baynes/William Davis, 1801 [1742]. 2v.

MANCOSU, P. **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**. Oxford: Oxford University Press, 1996.

MCGOWAN, W. Berkeley's doctrine of signs. In: TURBAYNE, C. [ed.]. **Berkeley: critical and interpretive essays**. Mineasopolis: University of Minnesota Press. 1982. p. 231-246

MUELLER, I. **Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements**. Cambridge, MA: MIT Press. 1981.

NERI, L. Filling the World with a Mite: un paradosso dell'infinita divisibilità negli scritti giovanili di George Berkeley. **Rivista di filosofia**. 71. 67-97. 1980

NEWTON, I. De gravitatione et aequipondio fluidorum. In: HALL, A. R. e HALL, M-B. **Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton**. Cambridge: Cambridge University Press. 1962.

_____. **Opticks: Or A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections & Colours of Light.** New York: Dover, 1952 [1730].

_____. **The Principia:** Mathematical Principles of Natural Philosophy. Tradução, introdução e notas I. B. Cohen e A. Whitman. Berkeley: University of California Press, 1999 [1687].

PANZA, M. Das velocidades às fluxões. **Scientiae studia:** revista latino-americana de filosofia e história da ciência. São Paulo-SP. v. 8, n. 4, 509-546, 2010.

_____. **Newton et les origines de l'analyse:** 1664-1666. Paris: Albert Blanchard, 2005.

_____. **Newton.** Paris: Belles Lettres, 2003.

PARIGI, Silvia (org). **George Berkeley:** religion and science in the age of enlightenment. International Archives of the History of Ideas. Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer, 201, 2010.

PARMENTIER, M. (Ed.) **La naissance du calcul différentiel** – 26 articles des Acta Eruditorum. 2ª ed. Paris: Vrin. 1995.

PATY, M. Inteligibilidade racional e historicidade. **Estudos avançados.** São Paulo-SP. v 19. n 54. 369-390. 2005.

PYCIOR, H. M. Mathematics and philosophy: Wallis, Hobbes, Barrow, and Berkeley. **Journal of the history of ideas.** University of Pennsylvania Press. V. 48, N.2. 65–86. 1987.

_____. **Symbols, Impossible Numbers and Geometric Entanglements:** British Algebra through the Commentaries on Newton's 'Universal Arithmetick. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997

RAPHSON, J. **A Mathematical Dictionary:** or, a compendious explication of all mathematical terms. London: J. Nicholson, T. Leigh, D. Midwinter. 1702.

ROBLES, J. A. **Estudios berkeleyanos.** México: UNAM. Instituto de Investigaciones Filosóficas. 1990

_____. **Las ideas matemáticas de George Berkeley.** México: UNAM. Instituto de Investigaciones Filosóficas. 1993.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.** Rio de Janeiro-RJ:Zahar. 2012.

SCHWARTZ, C. Berkeley and His Contemporaries: The Question of Mathematical Formalism. In: PARIGI, Silvia (org). **George Berkeley: religion and science in the age of enlightenment.** International Archives of the History of Ideas, (Dordrecht/Heidelberg/London/New York): Springer, 201, 2010. Cap. 4, p. 43-56.

SHERRY, D. The wake of Berkeley' Analyst: rigor mathematicae? **Studies in History and Philosophy of Science.** v 18. n 4. 455-480. 1987.

SZABO, Z. Berkeley's Triangle. **History of Philosophy Quarterly.** V. 12 , N 1. 1995.

TURBAYNE, C. (Ed). **Berkeley: critical and interpretive essays.** Mineasopolis: University of Minnesota Press. 1982. p. 231-246

WHITESIDE, D. T. (Ed.) **The Mathematical Papers of Isaac Newton.** Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1980, 8v.

_____. **The Mathematical Works of Isaac Newton.** New York, London: Johnson Reprint Corporation, 1964. 2 v.

WINKLER, K. (ed) **The Cambridge Companion to Berkeley.** Cambridge New York: University Press. 2005.

_____. **Berkeley: An Interpretation.** Oxford: Clarendon Press. 1989

WRIGHT, M. A. (Ed) **Works of George Berkeley.** London. p. 29-58. 2 v. 1843.

Apêndice I: *O Analista* e os infinitésimos de Leibniz

1. *Introdução*

O objetivo aqui é se questionar sobre o alvo da crítica de Berkeley. Há a necessidade de saber quem é que concebe o cálculo diferencial comprometido com a *suposição* de diferenciais infinitamente pequenas. Alguns comentadores assumem que o alvo da crítica de Berkeley é o cálculo diferencial de Leibniz.¹ Porém, o próprio Leibniz afirma não usar em seu cálculo quantidades infinitamente pequenas. Para ele, o rigor do cálculo surge não pelo uso dessas quantidades infinitesimais e sim pelo uso de quantidades que podem ser tomadas como tão pequenas o quanto se deseja:

Eu dei a considerar (...) que é suficiente ao matemático, para o rigor de suas demonstrações, tomar, no lugar de *grandezas infinitamente pequenas*, [grandezas] tão pequenas quanto seja necessário, para mostrar que o erro é menor que este que um adversário queira assinalar... (Leibniz, [*apud* Parmentier, Introdução].1995. p. 34).²

Assim, qual a real distinção entre os dois casos? Berkeley estaria se referindo realmente ao cálculo de Leibniz? Para obter respostas cabe investigar as próprias justificativas de Leibniz sobre o objeto do *Calculus differentialis*.

2. *Leibniz e o infinitamente pequeno em seu Calculus differentialis*

Leibniz sustenta que os raciocínios na metafísica, quanto ao rigor, não são iguais aos da matemática. As características dos objetos investigados na primeira exigiriam raciocínios mais rigorosos do que os objetos da segunda: “eu creio que se poderia raciocinar mais familiarmente nas matemáticas, onde as coisas se regulam delas mesmas, mas que se deve raciocinar com mais rigor na Metafísica, porque ali nos falta a ajuda da

¹ Jessop (Berkeley, 1979, v.4, p. 67) na sua edição de *O Analista* acrescenta uma nota de rodapé para afirmar que Leibniz é um dos matemáticos estrangeiros a quem Berkeley se refere no §5. O mesmo sustenta Cohen (2002. p.483) ao apresentar esse parágrafo em seu livro sobre Newton.

² “j’ai donné à considérer (...)qu’il suffit aux Mathématiciens, pour la rigueur de leurs démonstrations, de prendre, au lieu des *grandeurs infiniment petites*, d’aussi petites qu’il en faut, pour montrer que l’erreur est moindre que celle qu’un adversaire voudrait assigner...”

imaginação e das experiências” (Leibniz para Malebranche).³ Um exemplo de investigação metafísica seria aquela acerca da existência real de algo, isto é, caso haja o comprometimento com essa existência real, haverá a necessidade de raciocínios metafísicos rigorosos para sustentá-la. Esse seria o domínio próprio da filosofia. Leibniz, ao elaborar seu cálculo diferencial, parece ter identificado essa exigência de uma rigorosa justificação metafísica para qualquer comprometimento com a real existência de alguma coisa. Desse modo, assumir que quantidades infinitamente pequenas realmente existam conduziria à necessidade de estabelecer uma rigorosa justificação. No entanto, não é o que o próprio Leibniz realiza quanto à fundamentação das diferenciais, utilizadas no cálculo diferencial. Em uma carta para Varignon, Leibniz libera os raciocínios matemáticos do de tratar os infinitamente pequenos como sendo entidades matemáticas metafisicamente reais em seu sentido absoluto: “...se alguém não admite linhas infinitas e infinitamente pequenas no rigor metafísico e como coisas reais, ele pode se servir seguramente de noções ideais que abreviam o raciocínio” (Leibniz para Varignon).⁴ Aqui, de fato Leibniz assume os conceitos ideais como uma alternativa para evitar a necessidade de rigorosas justificativas metafísicas sobre a existência real dos infinitamente pequenos. Porém, antes de esclarecer do que se tratam tais conceitos, há a necessidade de investigar como Leibniz evita o comprometimento, na matemática, com apreensão da realidade absoluta dos infinitamente pequenos.⁵

³ “je crois qu’on pourrait raisonner un peu plus familièrement en mathématiques, où les choses se règlent d’elles-mêmes, mais qu’on doit raisonner avec plus de rigueur en Métaphysique, parce que nous y manquons du secours de l’imagination et des expériences”(Leibniz, [*apud* Parmentier, Introdução].1995. p. 35).

⁴ “...si quelcun n’admet point des lignes infinies et infiniment petites a la rigueur metaphysique et comme des choses reelles, il peut s’en servir seurement comme des notions ideales qui abregent le raisonnement...”. (Leibniz, *apud* Horváth, 1986. p.66).

⁵ Há de se tomar cuidado com o que Leibniz toma como *real*, pois esse é um tema de difícil tratamento considerando sua filosofia. Segundo Horváth (1986, p. 64), é necessário assumir que, para Leibniz, há a distinção de vários níveis, ou graus, de realidade. A perfeição das coisas seria im modo de estabelecer a distinção desses níveis. Assim, o grau máximo de perfeição, em sentido absoluto, pode ser, por exemplo, conferido aos atributos divinos. Para Leibniz, “tempo infinito” e “espaço infinito” *existiria* de modo a personificar a eternidade e imensidade de Deus. Leibniz não nega a *existência* desse grau absoluto. É possível dizer que inclusive infinitesimais têm sua existência em um sentido absoluto, enquanto algo perfeito. O seu famoso conceito de *mônada* talvez poderia ser a contraparte desse infinitamente pequeno. Por outro lado, Leibniz também teria negado que existiriam infinitesimais no mundo, uma vez que o mundo material é imperfeito. Porém a dificuldade de tratar o infinitamente pequeno nesse sentido de “perfeição” é que isso cabe à filosofia, ou seja, exige adentrar no plano metafísico e construir a justificativas necessárias. Portanto,

Na filosofia de Leibniz, a discussão sobre existência dos infinitamente pequenos encontra-se inserida na própria discussão a respeito do infinito. O que ele terminantemente recusa é a compreensão do infinito como apreendido na sua totalidade, de modo atual, ou seja, como sendo algo formado pela adição de todas as partes ou como um número infinito que contém todos os outros atualmente. Nos *Novos Ensaios* Leibniz afirma: “...não existe número infinito, nem linha ou outra quantidade infinita, se o tomarmos todos como verdadeiros...” (Leibniz. 1999. p.139). Porém qual o problema que Leibniz encontra na tentativa de estabelecer a compreensão do infinito como um todo ou como um número infinito que seria a soma de todos os números finitos? A resposta é simples: isso gera contradição, portanto é algo impossível. O diálogo *Pacidius Philalethi* (1676), de Leibniz, possui uma esclarecedora passagem sobre a impossibilidade do infinito como “todo”.

2.1 *O infinito como um “todo”*

O personagem Gallutius, que no diálogo representa um médico acostumado com o trabalho experimental, retoma os raciocínios de Galileu acerca da impossibilidade de realizar algumas relações no infinito. A tarefa inicial de Gallutius é apresentar a relação da quantidade de números elevados ao quadrado com o número de todos os números:

Gallutius: Isso faz mencionar aqui uma similar linha de raciocínio evidente nos escritos de Galileu. O número de todos quadrados é menor do que o número de todos os números, já que existem alguns números que são não-quadrados. Por outro lado, o número de todos quadrados é igual ao número de todos os números, que eu mostro como segue: não existe número que não tenha seu próprio correspondente quadrado, por isso o número de números não é maior do que número de quadrados; em outra mão, todo número quadrado tem um número ao lado: portanto o número de quadrado não é maior que o número de todos os números. Por conseguinte o número de todos os números (quadrados e não quadrados) não será nem maior do que, nem menor do que, mas igual ao número de todos os quadrados: o todo será igual à parte, que é absurdo”. (Leibniz, *Pacidius Philalethi*. 2001. p. 500-501).

quando Leibniz parece liberar a matemática de tratar o infinitamente pequeno como sendo coisas reais, isso deve ser entendido no sentido de que tal disciplina não necessitaria assumir os infinitamente pequenos no seu sentido metafísico mais forte. As “noções ideais” não seriam apreensões das entidades finitamente pequenas em si mesmas, na sua realidade absoluta, perfeita.

$\{N^{\circ}\}$	$\{(N^{\circ})^2\}$
1	1
2	4
3	9
(...)	(...)

Tabela 1

Apesar do texto não o mencionar, tomar o conjunto dos números naturais pode ser ainda mais esclarecedor. Assim, há como explicar essa citação dividindo-a em duas partes. A primeira diz respeito ao fato do número de todos os quadrados ser menor que o número de todos os números, isto é, o número total do conjunto $\{1, 4, 9, 16...\}$ é menor que o número total do conjunto $\{1, 2, 3, 4...\}$. Essa relação será representada da seguinte maneira: $\{N^{\circ}\} > \{(N^{\circ})^2\}$. Para sustentar isso, argumenta-se que há números não quadrados, ou seja, existem números em $\{N^{\circ}\}$ que não estão em $\{(N^{\circ})^2\}$. Como por exemplo “2” e “3”. Todavia, subte-se que todos os números de $\{(N^{\circ})^2\}$ se fazem presentes em $\{N^{\circ}\}$, ou melhor, que o conjunto de números quadrados é parte do conjunto de todos os números. Com isso facilmente conclui-se: $\{N^{\circ}\} > \{(N^{\circ})^2\}$.

A outra parte da apresentação de Gallutius conclui que o número de todos os números é igual ao número de todos os quadrados: $\{N^{\circ}\} = \{(N^{\circ})^2\}$. Para chegar a essa conclusão há a possibilidade de fazer uma subdivisão da sua argumentação em outras duas fases: (1) na primeira, o número de todos os números não é maior que o número de todos os quadrados, pois cada número possui um correspondente quadrado. Na **Tabela 1** pode-se visualizar que cada número natural, da coluna esquerda, é associado ao seu quadrado, da coluna da direita. Portanto, o número total de números não pode ser maior que o número total de quadrados. A representação dessa negação será: $\sim[\{N^{\circ}\} > \{(N^{\circ})^2\}]$. (2) na segunda fase, prova-se o contrário. Como todo número quadrado pode ser associado a um número

“não” quadrado, conclui-se que o número de todos os quadrados não é maior que o número de todos os números, ou seja: $\sim[\{(N^o)^2\} > \{N^o\}]$. Isso pode ser visualizado na **Tabela 2**.

$\{(N^o)^2\}$	$\{N^o\}$
1	1
4	2
9	3
(...)	(...)

Tabela 2

As duas fases, tanto (1) como (2), conduzem à conclusão de que os números totais dos dois conjuntos devem ser iguais, ou seja, $\{N^o\} = \{(N^o)^2\}$. No entanto, segundo o personagem Gallutius, essa conclusão gera um absurdo. Como o conjunto de números quadrados *faz parte* do conjunto de não quadrados – pois os números quadrados encontram-se no conjunto de todos os números (sendo o contrário não verdadeiro), como foi estabelecido na primeira parte da exposição de Gallutius – concluir a igualdade entre o número total de elemento de cada conjunto fere diretamente o tratamento euclidiano sobre a parte e o todo. No Livro I dos *Elementos*, Euclides registrou em uma noção comum, ou axioma, que o todo é maior do que a parte.⁶ Para Euclides, é evidente, e por isso não necessita demonstração, que a parte de um todo não é nem maior nem igual ao todo, mas sempre menor que esse todo. Portanto, a igualdade entre os números totais dos conjuntos, relatada acima, é a afirmação que o todo e a parte são iguais, sendo um absurdo de acordo com o axioma de Euclides.

Gallutius, logo em seguida, expõe que Galileu teria visualizado essa dificuldade e por isso, para evitá-la, teria afirmado que as relações “... maior que, igual a e menor que não têm lugar no infinito” (Leibniz, *Pacidius Philalethi*. 2001. p. 551). No diálogo, é

⁶ Cf. Euclides, 2009, p. 99.

Pacidius quem normalmente expõe a opinião de Leibniz. Porém, desta vez, é o personagem Charinus que revela o que Leibniz pensa quanto a tal problemática:

Charinus: É difícil concordar com isso. Pois quem negaria que o número de números quadrados está contido no número de todos os números, quando quadrados são encontrados entre todos os números? Mas estar contido em alguma coisa é certamente ser uma parte dela, e eu acredito ser não menos verdade no infinito do que no finito que a parte é menor do que o todo. (Leibniz, *Pacidius Philalethi*. 2001. p. 551).

E ainda prossegue: “E se me atrevesse a dizer que não existe número de todos os números em tudo, e que tal suposição implica uma contradição?” (*Ibidem*). Pacidius de imediato concorda com a suposição de Charinus, acrescentando que o infinito como “todo” é impossível por possuir tais conseqüências contraditórias. Portanto, essa opinião de Pacidius, que é a própria opinião de Leibniz, significa que não há como pensar o infinito como um “todo”, atual, composto por todas as partes. O erro de Galileu é excluir as relações de tamanhos quanto ao infinito e, ainda, mantendo a concepção de infinito como agregado ou algo composto de todas as partes.

Tratar o infinito como um “todo”, além de produzir as contradições sobre o “todo e a parte”, esbarra, também, em uma outra contradição gerada na própria tentativa de determinação do número infinito. Pacidius expõe esse problema comparando número com movimento:

Pacidius: (...) Número é uma tal coisa como o movimento: pois eu não acredito que é inteligível o mais rápido movimento. Suponha que alguma roda é colocada a girar com o mais rápido movimento; ora, se concebemos algum de seus raios ser produzido, então nós teremos algum ponto sobre o raio produzido externo à roda que estará girando com um movimento maior do que a roda, isto é, mais rápido do que o mais rápido. (*Ibidem*).

No exemplo de Pacidius quanto à velocidade⁷, a contradição surge em consideração à suposição inicial de que o movimento da roda é o mais rápido de todos os movimentos, ou seja, que é um movimento infinitamente grande. Supondo-se que a roda atingisse esse movimento, nada permitiria assumir algo mais rápido do que o movimento da roda. No

⁷ É evidente que a velocidade em questão, no texto de Leibniz, não é o que se chamaria hoje de *velocidade Angular*. Podemos afirmar que se trata da *velocidade linear*, ou seja, da distância (que em tal caso são circunferências) em função do tempo. Assim, em um mesmo eixo radial de uma circunferência, em um dado tempo, dois pontos distintos percorrem distâncias diferentes. O mais afastado do centro terá uma velocidade linear maior do que o outro ponto, ainda que suas velocidades angulares sejam iguais.

entanto, não é o que ocorre. Pacidius está consciente de que o que está distante do centro da roda tem velocidade maior em relação ao que está mais próximo de tal centro. Como há a possibilidade de conceber um ponto fora da roda em relação ao seu raio, esse ponto externo deve possuir uma velocidade maior do que a própria roda. A circunferência da roda, estando mais próxima do centro, deve possuir menor velocidade que o ponto externo à circunferência, o que contraria a suposição inicial de que a roda estaria girando a uma velocidade infinitamente grande. Assim, conceber esse ponto externo à roda prova que não se pode conceber uma maior de todas as velocidades, pois há sempre a possibilidade de obter uma velocidade ainda maior. Isso ocorre da mesma maneira com o número. Ou seja, ao se determinar um número, sempre se pode adicionar uma outra unidade, formando um outro número. Esse processo sempre pode se repetir indefinidamente. É por isso que Pacidius continua:

E exatamente como essa máxima velocidade é algo impossível, assim também é o maior de todos os números. Mas o número de todos os números é o mesmo que o número de todas as unidades (já que uma unidade nova adicionada a uma unidade precedente sempre faz um novo número), e o número de todas unidades é nada mais do que o maior de todos os números. (Leibniz, *Pacidius Philalethi*. 2001. p. 552).

Mas, voltando ao infinitamente pequeno, como ele se insere nessa rejeição sobre a impossibilidade do infinito como um “todo”? Johann Bernoulli⁸ tentou provar a existência do infinitamente pequeno na natureza como sendo algo real e atual. A prova para isso surgiria de sua interpretação do que são os números. Ele sustentou que o infinitamente pequeno é o menor de todos os números e sua existência é garantida pelo seguinte raciocínio: a existência de uma sequência finita exige a existência do último número, ou seja, a existência de dez números exige a existência do décimo número. Para uma sequência infinitamente diminuída existir deve-se existir obrigatoriamente o infinitésimo número. Assim, deve existir o menor termo possível, que é um número infinitamente pequeno, para que a sequência infinita $\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \}$ exista. Segundo Leibniz, esse raciocínio não é válido, pois, da mesma maneira que não é possível determinar o maior de todos os

⁸ Aqui, acompanho a apresentação de Horváth (1986. p.64-65).

números, não é possível determinar o menor de todos os números. Em uma carta a Bernoulli, ele responde:

Essa conclusão é errada. O raciocínio a partir de um caso finito para um caso infinito não é válido. O fato de que existem infinitos números de termos quer dizer que a sequência tem mais termos do que pode ser descrito por algum número finito ao invés de que o número de termos é um dado número finito. (Leibniz para Bernoulli).⁹

Portanto, quanto aos infinitamente pequenos (como o menor de todos os números), Leibniz localiza o mesmo problema que existe no número infinitamente grande (como o maior de todos os números). Um número sempre pode ser diminuído. É por isso que Leibniz descreve que a sequência supostamente infinita tem mais números do que se pode descrever.

No entanto, como é que Leibniz concebe os infinitamente pequenos? Como já foi mencionado, Leibniz permite na matemática o uso dos infinitamente pequenos como conceitos ideais, ao invés de tentar apreender o infinitamente pequeno como existindo de maneira atual. O não comprometimento funda-se, antes de tudo, na impossibilidade de introduzir nos raciocínios matemáticos tal entidade enquanto uma quantidade atual, real, pois isso gera contradições. Tratar os infinitésimos como ideias seria a maneira encontrada de contornar as dificuldades de oferecer as justificações metafísicas para a realidade absoluta desses infinitésimos. Então, agora se faz necessário percorrer as razões positivas de Leibniz tratar os infinitésimos como conceitos ideais.

2.2 *As quantidades incomparáveis*

Para Leibniz, há muitas maneiras de justificar as regras do cálculo diferencial. Tratar os infinitamente pequenos como *quantidades incomparáveis* seria uma das maneiras encontradas de justificar tais regras¹⁰. Na carta, já mencionada, de Leibniz a Varignon, há a

⁹ Cf. Leibniz, *Apud* Horváth, 1986. p.65.

¹⁰ No texto *Additio ad schedam de dimensionibus figurarum inveniendis*, Leibniz sugere que o método de Jean Christophe Sturn, da quadratura das figuras por meio de series infinitas, é uma das possíveis maneiras de resolver o problema da quadratura, inclusive de figuras desconhecidas. (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 94). Parmentier lê essa sugestão como sendo a confirmação de que para Leibniz haveria muitas possibilidades

seguinte afirmação a respeito dessas quantidades: “... essas [quantidades] incomparáveis não são de modo algum fixadas ou determinadas, mas podem ser tomadas tão pequenas quanto se queira nos nossos raciocínios geométricos, tendo o efeito de infinitamente pequenos no rigor...” (Leibniz a Varignon)¹¹. Aqui, Leibniz trata as quantidades incomparáveis como indetermináveis ou não fixáveis. O significado é que elas não são quantidades finitas. As considerações sobre o infinito levaram Leibniz a concluir que o infinitamente pequeno não pode resultar do processo de diminuição de quantidades finitas. Isso somente produz contradição, pois se interpretaria o infinitamente pequeno como um número. O mesmo, portanto, deve valer para as quantidades incomparáveis: elas não podem ser consideradas como as menores de todas as quantidades, fruto do processo de diminuição das quantidades finitas.

Todavia, cabe investigar de onde as quantidades incomparáveis surgem. O próprio Leibniz já indicou: as quantidades incomparáveis são ideais, isto é, são frutos de uma ficção. A natureza dessa ficção pode ser compreendida a partir do que Leibniz entendeu por *relação* entre objetos matemáticos. No texto *Responsio ad difficultates...*¹², Leibniz se refere à definição 5¹³, do Livro V, de Euclides como um exemplo do que seria uma verdadeira relação entre objetos matemáticos. A definição de Euclides é a seguinte: “Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra” (Euclides, 2009, p. 205). De acordo com essa definição uma quantidade a está para outra b (na relação de razão) somente se $a.b > a$ e $a.b > b$. Sabe-se que o propósito de Euclides nessa definição é somente permitir a comparação entre quantidades da mesma espécie e, antes de tudo, finitas, determinadas. Há, também, além de uma preocupação

de justificar o cálculo. Ver: (Leibniz. [ed. Parmentier. Introdução]. 1995. p. 38). No caso do cálculo de Leibniz, o próprio Parmentier aponta três tentativas dele justificá-lo independentes uma da outra com infinitamente pequenos. Tratando os infinitamente pequenos: como infinitamente pequenos atuais (impetus ou conatus de um movimento); como grandeza incomparável e como limites de grandezas (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. Nota 38. p. 432). Todavia, Horváth identifica somente duas justificativas de Leibniz, ou seja, como sendo justificativas que se baseiam nas duas últimas sugeridas por Parmentier (Horváth. 1986. p. 65-66). Minha exposição acompanha a exposição de Horváth, sem tratar dos conceitos de impetus ou conatus de movimentos para Leibniz.

¹¹ Cf. (Leibniz, *Apud* Horváth, 1986. p.66).

¹² Cf. Leibniz (1695). *Responsio ad nonnullas difficultates a DN. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimale motas*. In: (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 324-334)

¹³ Em seu texto, Leibniz realmente indica a definição 5. Porém o conteúdo, ao qual Leibniz se refere, aparece na edição de Heath dos *Elementos* como sendo a definição 4.

quantitativa das magnitudes, uma preocupação qualitativa. Aquilo que faz a magnitude ser uma magnitude é relevante para a comparação. Nesse esquema, por exemplo, linhas e pontos não podem ser comparados diretamente, pois são magnitudes de espécies distintas ou qualidades diferentes. Leibniz está consciente de que somente existe uma verdadeira comparação entre quantidades que possuem as características das magnitudes previstas pela definição de Euclides. Porém, ele encontra uma maneira de expandir o conceito de *relação*: não se comprometendo com a real natureza do que está sendo comparado. Há, para Leibniz, uma separação entre o aspecto quantitativo e os próprios objetos comparados, ou seja, o aspecto quantitativo não depende da natureza dos comparados. É possível focar somente no aspecto quantitativo das coisas e compará-las. Por exemplo, mesmo que distinto da linha quanto à sua natureza, ainda é possível dizer que um ponto possui um aspecto quantitativo, a saber, uma magnitude nula. Nesse sentido surge uma relação ficcional à medida que se abstrai da natureza dos objetos comparados, levando em consideração somente o seu aspecto quantitativo.¹⁴ Outro exemplo pode esclarecer mais. Em outro texto, Leibniz afirma a possibilidade de saber se uma relação é rigorosa ou não mesmo sem conhecer os objetos relacionados:

... mesmo se as quantidades das coisas são desconhecidas, pode existir sua razão; por exemplo, eu posso ignorar a quantidade de nariz ou de olho que tem em uma cidade, no entanto, eu sei que é necessário pegar duas vezes o número de nariz para obter o número de olhos. (Leibniz, [apud Parmentier].1995. p. 427).

Olhos são qualitativamente distintos de narizes. Um não deriva do outro. Porém, é possível atribuir-lhes quantidades, permitindo uma relação quantitativa. Desse modo, afirma-se que tal relação é de dois para um. O texto de Leibniz sustenta a independência entre natureza quantitativa (que gera a relação de dois para um) e os próprios objetos da relação na possibilidade de generalização da relação quantitativa. Mesmo não conhecendo todos os narizes e olhos de uma cidade, a relação de dois para um é válida. Portanto, a relação dos aspectos quantitativos (expressa pelo conceito de razão) não é produzida pelo conhecimento da natureza dos próprios objetos, sendo nesse sentido uma relação fictícia.

¹⁴ Isso permite compreender o porquê de Leibniz, no texto *Responsio ad difficultates...*, sugerir a soma de uma linha com um ponto. Como já foi dito, essa relação é proibida no esquema euclidiano. No entanto, Leibniz percebe que há um aspecto quantitativo que pode ser atribuído à linha e ao ponto, desconsiderando-se o aspecto qualitativo, ou seja, sua natureza. Cf. (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 327).

Se a própria relação entre quantidades é ideal, fictícia, para Leibniz, não existe problema em supor uma quantidade ideal, fictícia, como é o caso da quantidade incomparável. Nessa quantidade não está em jogo a sua natureza real, compreendida pelo seu estatuto metafísico. Porém, se não é real a natureza de uma quantidade incomparável, o que permite relacioná-la ao que é finito? O próprio termo “incomparável” não estaria proibindo essa relação entre finito e não-finito? Há de fato uma descontinuidade entre quantidade finita e incomparável. Esta não deriva daquela. Todavia, Leibniz trata ambas como quantidades. Ele se preocupa somente com o aspecto quantitativo desses objetos matemáticos. Assim, há algo de comum entre as quantidades, isto é, o fato de serem quantidades, mesmo estando em ordens distintas de grandeza. É isso que resolve o problema da relação entre as quantidades. O termo “incomparável” é utilizado por Leibniz para designar as quantidades que estão nessas diferentes ordens de grandeza, ou melhor, que uma quantidade incomparável nunca poderá ser assinalada ou determinada por uma quantidade finita, mesmo diminuindo uma quantidade finita o quanto se queira.

Por outro lado, Leibniz trata a quantidade incomparável como sendo *menor* do que qualquer possível quantidade finita, ao sustentar que não há como alterar uma quantidade finita com o acréscimo de uma quantidade incomparável. É surpreendente essa conclusão, pois, assim, aproxima-se a quantidade incomparável à natureza do zero, visto que esse não tem a capacidade de alterar uma quantidade finita. Mesmo diante dessa desconcertante aproximação, não se deve considerar a quantidade incomparável como se fosse realmente o zero. Niewentijt foi um dos matemáticos que acusaram Leibniz de considerar as quantidades incomparáveis como verdadeiros zeros. Leibniz, em resposta a Niewentijt, afirma que com as quantidades incomparáveis surge outra possibilidade de escrever uma relação de igualdade. Duas quantidades são iguais não somente quando sua diferença é zero ou nada. Pode-se também afirmar a igualdade quando a diferença entre quantidades é incomparavelmente pequena, isto é, se a diferença não é assinalável por qualquer quantidade finita. No texto *Responsio ad difficultates...* isso está afirmado da seguinte maneira:

Eu julgo, aliás, que termos são iguais não somente quanto sua diferença é absolutamente nula, mas também quando ela é incomparavelmente pequena, e

ainda que não se possa dizer que essa diferença seja absolutamente Nada, ela não é, entretanto, uma quantidade comparável a essas da qual ela é a diferença. (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 326).

Leibniz não trata o zero ou o nada como quantidade. Ele é a ausência de quantidade. As quantidades incomparáveis não são consideradas um nada absoluto. Veja-se, o exemplo da linha e do ponto. Ai Leibniz não considera o ponto como um nada absoluto. Talvez seja muito radical afirmar de imediato que um ponto seja um nada absoluto ou a ausência de quantidade. Ele resolve isso, simplesmente, atribuindo ao ponto uma quantidade que não pode ser determinada por uma quantidade finita. Logo, é esse aspecto quantitativo (que se encontra em outra ordem em comparação com as quantidades finitas) que pertence às quantidades incomparáveis e que é impossível ser assinalado por qualquer quantidade finita.

Há ainda dois pontos importantes a esclarecer sobre as quantidades incomparáveis. Quanto ao primeiro, de fato Leibniz não considera as quantidades incomparáveis como um zero absoluto. Mas, no cálculo diferencial, seu caráter ficcional produz a possibilidade de agirem como se fossem zero. O efeito produzido com a introdução dessas quantidades no cálculo é o mesmo que aquele produzido pelo zero, mesmo que, no entanto, não seja zero em absoluto. Essa é a sutileza que, segundo Leibniz, Niewentijt não teria percebido. No texto *Responsio ad difficultates...*¹⁵, Leibniz explica que as quantidades incomparáveis são dispensadas no decorrer das demonstrações do cálculo não porque elas são zero absoluto mas sim porque são incomparáveis. O efeito é como se fossem zero, porém não são. Leibniz trata as quantidades incomparáveis como zero simplesmente porque o efeito delas é o mesmo que o do zero. Há novamente um apelo à ficção. Para Leibniz, pode ser um erro tratar uma quantidade incomparável como zero (mesmo de maneira ficcional), mas esse erro também é quantitativo. Tal erro é justificável já que ele se dissolve também em quantidades incomparáveis quando se afirma que ele não é passível de ser determinado, pois se trata de um erro menor do que qualquer erro assinalável. É a isso que Leibniz se refere no texto *Tentamen de motuum coelestium causis*:

¹⁵ Cf. (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 327).

Ao curso da demonstração eu emprego quantidades incomparavelmente pequenas, por exemplo, a diferença entre duas grandezas ordinárias incomparáveis com elas. Parece-me que se pode esclarecer completamente isso da seguinte maneira. Se alguém recusa empregar grandezas infinitamente pequenas, pode-se adotar grandezas tão pequenas que se julgue suficiente para que elas sejam incomparáveis e que o erro que elas produzam não tenha mais importância e seja mesmo inferior a um erro dado. (Leibniz, *Apud* .Parmentier. 1995. Nota 38. p. 328).

O outro ponto a ser tratado refere-se exatamente ao significado do termo infinitamente pequeno. É evidente que Leibniz usará esse termo sempre designando quantidades incomparáveis, entendidas como quantidades fictícias. Existem outras quantidades que para Leibniz possuem o mesmo estatuto fictício dos infinitamente pequenos. Esse é o caso das raízes imaginárias. A raiz de um número negativo não é uma verdadeira quantidade, ela é usada na álgebra de maneira fictícia. Raízes imaginárias e quantidades infinitamente pequenas se identificam enquanto ficção: “...sendo que esses todos infinitos, bem como os seus opostos infinitamente pequenos, são de atualidade apenas nos cálculos geométricos, da mesma forma que as raízes imaginárias da álgebra” (Leibniz. 1999. p.139). A atualidade do infinitamente pequeno é fictícia, mas Leibniz o considera como útil para abreviar as demonstrações do cálculo. A utilização dos infinitamente pequenos, compreendidos como quantidades incomparáveis, fornece um novo estilo de demonstração, evitando como, por exemplo, as reduções ao absurdo presentes no método arquimediando de exaustão. Tal método foi considerado uma maneira de resolver problemas de análise sem se comprometer com quantidades infinitamente pequenas. Porém, para Leibniz é muito mais rápido supor de maneira direta a atualidade dessas quantidades e depois rejeitá-las. No texto *Responsio ad difficultates*., isso surge da seguinte maneira:

O procedimento de Arquimedes permite sempre confirmar por meio de um raciocínio por absurdo. Contudo, como o método direto é mais imediatamente compreensível e mais expediente para inventar, é suficiente, uma vez que se compreenda essa demonstração regressiva, aplicar o método direto consistindo em negligenciar as quantidades incomparavelmente muito pequenas, método esse que comporta em si mesmo sua própria justificação... (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 327).

Portanto, supõem-se quantidades incomparáveis com a convicção de que reside nelas mesmas a justificativa do porquê para dispensá-las quando se fizer necessário. Elas são

quantidades ideais cuja grandeza é indeterminável por qualquer quantidade finita, mesmo que diminuída o tanto quanto se queira¹⁶.

2.3 *O princípio de continuidade*

Como foi apresentada, a quantidade incomparável foi utilizada como um artifício para abreviar as demonstrações, isto é, essa quantidade é introduzida no cálculo, tratando-a como um infinitamente pequeno, e logo após descartando-a por ser uma quantidade incomparável às finitas. Com tal princípio, Leibniz considera o infinitamente pequeno como o termo limite ou o estado último em uma dada transição. Todavia, o limite não deixa de possuir as mesmas características ideais, ou ficcionais, apresentadas quanto às quantidades incomparáveis. No texto *Observatio quod rationes...* (1712), Leibniz apresenta tais características em relação ao termo limite:

Mas quando por um salto ao limite, nós dizemos somente infinito ou infinitamente pequeno, nós nos encurvamos em uma comodidade de linguagem, isso quer dizer um recurso mental, mas nós não dizemos coisa que são verdadeiras por tolerância... (Leibniz. [ed. Parmentier]. 1995. p. 435).

Há a necessidade, ainda, de destacar nesse texto dois aspectos importantes. O primeiro diz respeito ao termo “salto ao limite”. Ali Leibniz quer evitar que as quantidades dos limites sejam resultado do processo de diminuição entre quantidades. Diminui-se, por exemplo, o quanto se queira as quantidades, porém Leibniz realiza um salto até o limite – ao qual tal diminuição nunca ultrapassa – a fim de desconsiderar a necessidade de realizar um inesgotável processo de diminuição. Passando para o outro aspecto, esse se refere ao sentido de verdade dado aos infinitamente pequenos. Eles são verdadeiros, porém por

¹⁶ Horváth sugere, a partir da carta de Leibniz para Wallis, o seguinte exemplo de prova para determinar o primeiro aumento da multiplicação de xy . Leibniz representa esse aumento com o termo $d(xy)$. Tanto x quanto y é aumentado, respectivamente, por dx e dy . Assim, para determinar o aumento de xy deve-se considerar a seguinte subtração: $(x+dx)(y+dy)-xy$. É uma subtração do estado final, ou o que foi aumentado, menos o estado inicial. Tal subtração é igualada à $d(xy)$. O desenvolvimento da multiplicação permite chegar a $d(xy) = xdy+ydx+dx dy$. O último passo de Leibniz é desconsiderar $dx dy$. No entanto, a justificativa para tal procedimento fundamenta-se no conceito de quantidade incomparável. Em relação às outras quantidades dessa igualdade, $dx dy$ são quantidades incomparáveis. Pode-se descartá-las, pois elas não são capazes de alterar nenhum estado finito das outras quantidades, chegando, portanto, em: $d(xy) = xdy+ydx$ (Horváth, 1986. p.67).

tolerância, no sentido em que são aceitos enquanto conceitos ideais e não conduzem o raciocínio matemático a contradições.

Uma outra maneira de Leibniz justificar as regras do cálculo diferencial se fundamenta no “princípio de continuidade”. Uma das formulações do princípio pode ser encontrada no texto *Lettre de M. L. sur un principe général...* (1687). Ali Leibniz assinala que são as considerações sobre o infinito que dão origem a esse princípio. Desse modo, a utilidade do princípio de continuidade não é exclusiva da geometria; ele é útil, também, em outras áreas como na física. A formulação mais geral apresentada por Leibniz é a seguinte: “*Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata*” (Leibniz. 1687. p. 278) ¹⁷. Seu significado é que encontrando uma ordem (ou uma regularidade) no que é dado, o que for adquirido desses dados deve estar de acordo com a ordem dos dados. Ele é um princípio que afirma a continuidade entre *datis* e *quaesitis*. Vale lembrar que esse é um princípio geral e é válido não somente para os dados que são determináveis, como por exemplo, as quantidades finitas. Para Leibniz, o caráter geral entre *dado ordenado* e *adquirido ordenado* abrange também os estados limites, ou seja, o princípio é aplicável aos estados, como no caso das grandezas matemáticas, onde as quantidades são menores que qualquer quantidade assinalável. Leibniz formula tal princípio em relação ao limite da seguinte maneira:

Quando a diferença entre dois casos pode ser diminuída abaixo de toda grandeza dada *in datis* ou nisto que é posto, é necessário que ela possa se encontrar também diminuída abaixo de toda grandeza dada *in quaesitis* ou no que resulta disso, ou para falar mais familiarmente: Quando os casos (ou isso que é dado) se aproximam continuamente e se perde enfim um no outro, é necessário que as sequências ou eventos (ou o que é demandado) o façam também. (*Ibidem*). ¹⁸.

Aqui Leibniz utiliza o termo “diferença” em duas instâncias: para o dado e para o que resulta do dado. Isso é feito justamente para identificar as duas instâncias e a ligação existente entre elas. Para Leibniz, o que acontecer nos dados acontecerá também no que resulta deles. Assim, se há uma diferença entre os *dados* haverá também uma diferença

¹⁷ “Ordenados os dados, também, são ordenados os adquiridos” (tradução minha).

¹⁸ “*Lorsque la différence de deux cas peut-être diminuée au-dessous de toute grandeur donnée in datis ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver aussi diminuée au dessous de toute grandeur donnée in quaesitis ou dans ce que en résulte, ou pour paller plus familièrement: Lorsque les cas (ou ce qui est donné) s'approchent continuellement et se perdent enfin l'un dans l'autre, il faut que les suites ou événements (ou ce qui est demandé) le fassent aussi*” .

proporcional no que resulta dos dados. Como a descrição de Leibniz trata do caso limite, onde a diferença entre os dados não é assinalável, a diferença no que resulta dos dados deverá ser indeterminável ou menor do que qualquer diferença dada. A distinção não assinalável presente nos *data* se estende também para os *quaesita*.

Mas, o que são os *data* e *quaesita* aos quais Leibniz se refere? Para esclarecer o princípio de continuidade Leibniz ainda sugere vários exemplos. Um deles diz respeito à elipse e à parábola. A elipse e a parábola são os dados e o que é adquirido são as regras ou teoremas geométricos aplicados a elas. Deve haver uma continuidade entre as figuras geométricas e seus teoremas para se estabelecer que um é aplicável ao outro. Desse modo, o que acontecer a um deverá acontecer, de maneira proporcional, ao outro. Nesse exemplo, Leibniz sugere que a diferença entre elipse e parábola deve tornar-se menor do que qualquer quantidade atribuível, ao atingir o estado limite, por fazer os focos da elipse serem distanciados infinitamente. O resultado da diminuição entre dados (elipse e parábola) fará com que a diferença entre os teoremas também seja indeterminável. A conclusão de Leibniz é a possibilidade de tratar, nesse estado limite, uma figura como se fosse a outra e utilizar as regras de uma na outra:

“Sabe-se que o caso ou suposição de uma elipse pode se aproximar do caso de uma parábola o tanto que se queira, tanto que a diferença da elipse e da parábola pode tornar-se menor que qualquer diferença dada, contanto que um dos focos da elipse esteja afastado da outra, pois então os raios vindos deste foco distante diferem dos raios paralelos tão pouco que se queira, e por consequência todos os teoremas geométricos que se verificam da elipse em geral, poderão ser aplicados à parábola...” (Leibniz. 1687. p. 278).

Esse exemplo esclarece, também, a segunda parte da apresentação do princípio na citação anterior. Leibniz lá descreve o estado quando os casos fundem-se um no outro. O significado disso é que se está tratando o estado limite como a junção entre dois estados contraditórios. Assim, como no exemplo fornecido, no estado limite há como tratar um caso como se fosse outro, ou melhor, tratar a parábola como se fosse uma elipse.

Pode-se encontrar a aplicação de Leibniz do princípio de continuidade, agora, também, para justificar as regras do cálculo diferencial, no texto *Cum prodiisset atque increbuisse Analysis mea infinitesimalis...* (1701). Tal princípio é reformulado da seguinte maneira: “Sendo proposto em qualquer transição contínua, cessando em algum limite [*terminum*], então é possível formular um raciocínio geral no qual esteja compreendido o

último termo” (Leibniz, apud Horváth, 1986, p. 67).¹⁹ O que permite a inclusão do termo limite é o caráter geral do princípio de continuidade, ou seja, o que valer para um termo da série valerá para os demais, incluindo o termo limite. Nessa inclusão, nada ainda elimina o caráter ideal ou ficcional do termo limite. A generalização abarca um termo que se fundamenta como ficção. Dessa maneira, Leibniz estabelece que a diferença²⁰ da multiplicação de duas quantidades x e v , no estado limite, é $d(vx) = xdv + vdx$. Essa equação resulta, na demonstração²¹ de Leibniz, de uma equação mais geral

$$\frac{a(d)y}{(d)x} = \frac{x(d)v}{(d)v} + v + dv$$

. Essa última equação foi construída por Leibniz a partir da análise de dados particulares e generalizada até o ponto de incluir todos os termos de uma série. Portanto, como pelo princípio de continuidade o estado limite de uma série pode ser considerado como fazendo parte da própria série, isso justifica aplicar tal regra geral no

estado limite onde $dv = 0$. Isso transforma a equação geral em $\frac{a(d)y}{(d)x} = \frac{x(d)v}{(d)v} + v$.

3. Conclusão

Em qual sentido a crítica de Berkeley ao cálculo diferencial, em *O Analista*, atinge realmente as justificativas fornecidas por Leibniz? Vale lembrar que, como sugere Jesseph (1993, p. 186), a apresentação do cálculo diferencial em *O Analista* não se baseia diretamente em textos de Leibniz. O que acontece ali é uma paráfrase do cálculo de L'Hospital, apresentado na *Analyse des infiniment petits* (1696). No entanto, a análise das próprias justificativas de Leibniz permite concluir que Berkeley não deixa de lado uma das características essenciais do infinitamente pequeno para Leibniz: o caráter ideal ou ficcional das quantidades infinitesimais (observado tanto pelas quantidades incomparáveis como pela noção de limite com o princípio de continuidade). Para Leibniz, há como proceder

¹⁹ “Proposito quocunque transitu continuo in aliquem terminum desinente, liceat ratiocinationem communem instituere, qua ultimus comprehendatur”.

²⁰ Nesse caso Leibniz simboliza tal diferença por $d(vx)$

²¹ A análise e a apresentação total dessa demonstração de Leibniz encontra-se em: Horváth, 1986, p. 67

precisamente no cálculo, pois há uma independência entre regras do cálculo e os objetos do cálculo. Não significa que essa precisão exija um comprometimento com quantidades infinitamente pequenas realmente existentes. Desse modo, Leibniz utiliza o termo “infinitamente pequeno” para denominar, na verdade, uma quantidade que é fruto de uma suposição, sustentada pela possibilidade de tomar quantidades tão pequenas quanto se queira. É nesse sentido que o “infinitamente pequeno”, na matemática de Leibniz, é aceito como *verdadeiro por tolerância*, pois ele não resulta em contradição dentro do raciocínio matemático.

Em *O Analista*, está-se considerando os infinitésimos como ideais, como possuindo tal caráter de verdade. Berkeley, ao afirmar que o cálculo é considerado como menos “preciso e geométrico”, se refere somente a essa característica ficcional dos infinitésimos. Portanto, há como afirmar que a crítica de Berkeley atinge a justificativa essencial dos infinitamente pequenos de Leibniz, ou seja, há uma ligação – existente entre dados sensíveis e imaginação – que impede a formulação do conceito de uma quantidade que está abaixo de qualquer quantidade dada. Não se aceita o que garante a suposição das quantidades infinitamente pequenas: que as quantidades finitas possam ser diminuídas o quanto se queira. Esse é o ponto de partida para justificar o caráter ideal, para Leibniz, do infinitamente pequeno. Berkeley rejeita como incompreensível a afirmação de que as quantidades possam diminuir o quanto se queira. Há um limite para os sentidos perceberem tal processo, assim, a imaginação também não está liberada para formular ideias que ultrapassem as características do que é sensível. Tanto Berkeley quanto Leibniz concordam com o absurdo de afirmar que o infinitamente pequeno é uma quantidade determinável, como sendo o menor de todos os números. No entanto, no caso de Berkeley, não existe a menor possibilidade, mesmo em *O Analista*, de aceitar um infinitésimo como suposição. Tal suposição também é incompreensível.

Apêndice II: Uma resposta de Maclaurin a Berkeley

1. Introdução

O objetivo aqui será o de fornecer uma ilustração de como o texto *O Analista* de Berkeley foi absorvido por seus contemporâneos. Interessa esclarecer, do ponto de vista dos objetos matemáticos, como alguns dos aspectos da crítica de Berkeley foram respondidos. É certo que quase todos os textos publicados desde o aparecimento de *O Analista*, em 1734, até o final do século XVIII fazem alguma referência a esse trabalho de Berkeley¹. Um exemplo é o *Treatise of fluxions*, de Colin Maclaurin, publicado em 1742. No prefácio da obra, ele afirma que foi a leitura de *O Analista* que o motivara a escrever seu texto. O trabalho de Maclaurin merece atenção especial, uma vez que vários comentadores o consideram como um dos primeiros a produzir uma resposta aceitável às críticas de Berkeley.² Vários comentadores dão a entender que Maclaurin teria respondido Berkeley com sucesso.³

Especificamente, será mote desta apresentação a relação entre o conceito de *fluxão* e o de abstração, segundo Berkeley. Em *O Analista*, é possível localizar um rápido argumento no sentido de afirmar que o conceito de fluxão é ininteligível uma vez que recorre aos suspeitos conceitos da teoria da abstração. Seria de se esperar que o antiabstracionismo de Berkeley, tão importante para muitas de suas discussões filosóficas, aparecesse também na sua crítica ao cálculo infinitesimal. Nesse sentido, o que se pretende esclarecer é a relação entre o que Maclaurin concebe em seu texto como *fluxão* das quantidades nascentes e evanescentes e a crítica berkeleyana, que caracteriza tal *fluxão* como nada mais do que uma rejeitável ideia abstrata. Como é afirmado na introdução da obra, o objetivo de Maclaurin era o de preservar, no *Tratado de fluxão*, o mesmo conceito

¹ Cf. Jesseph, 1993, p. 231.

² Segundo Jesseph, Maclaurin foi o mais importante matemático da década em que *O Analista* foi publicado (cf. Jesseph, 1993, p. 279). Por outro lado, Guicciardini vai além: “a resposta a Berkeley mais consagrada foi dada por Colin Maclaurin” (Guicciardini, 1989, p. 47). Cajori, em tom de aprovação, cita Lagrange com o objetivo de caracterizar o *Treatise of fluxions*, de Maclaurin, como o “mais competente e rigoroso texto do século XVIII” (Cajori, 1919, p. 181).

³ Além dos mencionados na nota anterior, inclui-se: Grabiner, 1997, p. 394; Giorello, 1992, p. 157-164.

de fluxo presente nos textos de Newton. Caso isso seja verdade, em qual sentido a resposta de Maclaurin se põe? Trata-se de acusar Berkeley de não ter compreendido o conceito de fluxo ou trata-se de uma reformulação do conceito de fluxo, mesmo que o próprio Maclaurin não tenha percebido?

2. *Fluxões como ideias abstratas*

A tarefa inicial é compreender por que, para Berkeley, Newton estaria negociando com ininteligíveis ideias abstratas ao propor as fluxões de quantidades em estado nascente e evanescentes. Em *O Analista*, se a crítica aos objetos e aos princípios lógico-demonstrativos parecem não depender do antiabstracionismo para se estruturar, isso não significa que, para Berkeley, Newton não estejam negociando com as ideias abstratas ao propor um dos principais conceitos do método das fluxões, ou seja, sua teoria dos *momentos*. O argumento de Berkeley, para acusar Newton, se constrói a partir de dois elementos subjacentes ao conceito de *momento*, isto é, o conceito de *velocidade* e de *limite matemático*. A velocidade, para Berkeley, é algo que exige uma “relação”. Para ele não existe velocidade sem a presença de espaço e tempo devidamente relacionados:

... não temos nenhuma noção que nos permita conceber e medir os vários graus de velocidade além daquelas do espaço e do tempo; ou, quando são dados os tempos, além do espaço sozinho. Nem sequer temos qualquer noção de velocidade *separada* de tempo e espaço. Então, quando se supõe um ponto se mover em um tempo dado, *não temos noção de nenhuma* velocidade maior ou menor ou de proporções entre as velocidades, mas somente de linhas maiores ou menores e de proporções entre tais linhas geradas em intervalos iguais de tempo. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §30).

Aqui está claro que Berkeley concebe a velocidade como um conceito relacional. O que se chama como velocidade é na verdade uma relação de proporção entre linhas geradas em uma quantidade de tempo. Para Berkeley, quanto se afirma que velocidades são proporcionais, o que se coloca em relação de proporção são as próprias proporções entre linhas e tempo. Apesar de Berkeley não fornecer uma proporção, podemos ilustrar com o seguinte exemplo. Se a seguinte proporção ocorre

$$v_1:v_2 :: v_3:v_4 \quad [1],$$

o significado dela nada mais seria do que a relação indireta entre as linhas e tempo, isto é,

$$\left(\frac{l_1}{t}\right):\left(\frac{l_2}{t}\right) :: \left(\frac{l_3}{t}\right):\left(\frac{l_4}{t}\right) \quad [2].$$

Não existe a quantidade “velocidade” em si mesma dada em proporção. A relação de proporção em [1] é na verdade uma proporção “composta”, como expressa em [2]. Nesse sentido, as velocidades são maiores ou menores à medida que linha maiores ou menores são consideradas em um dado intervalo de tempo.

Ainda que, nesse parágrafo 30, Berkeley não utilize o termo “abstração” para tratar das velocidades, é possível afirmar que seu antiabstracionismo está sendo levado em consideração. Isso porque ali explicitamente impede-se uma separação mental ao estilo da *teoria das ideias abstratas*, ou seja, não se pode conceber velocidade *separada* dos conceitos de espaço e tempo. Nossa interpretação aqui é reforçada com o que acontece, mais adiante, no parágrafo 37. Ali Berkeley retoma o mesmo tipo de tratamento dado à velocidade, porém agora abertamente referindo-se a “abstrações”:

Para mim parece evidente que medidas e sinais são absolutamente necessários a fim de conceber ou raciocinar sobre velocidades. Consequentemente, quando nós pensamos conceber as velocidades simplesmente e em si mesmas, estamos nos enganando por vãs *abstrações*. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §37).

Portanto, fica evidente até aqui em qual sentido o conceito de velocidade deve ser assumido sem recorrer a impossíveis ideias abstratas.

Passando agora para o conceito de limite matemático, no parágrafo 31, de *O Analista*, Berkeley fornece os seguintes casos como exemplo de limites: “um ponto pode ser o limite de uma linha; uma linha pode ser o limite de um plano; um momento pode terminar um tempo” (*Ibidem*, §31). Os exemplos ilustram uma retomada da concepção clássica de limite. Assim como em Euclides⁴, Berkeley concebe o limite como uma

⁴ Conferir as definições 3 e 6 do Livro I, dos *Elementos* de Euclides (2009, p. 97).

extremidade daquilo que está sendo delimitado. Isso significa que ele compromete-se com a ideia de que tais extremidades *não possuem magnitude* em relação àquilo que delimitam. Um ponto não possui magnitude por si mesmo, mas, no caso de uma linha, ela também não possui magnitude em relação ao plano que delimita. O curioso dos exemplos de limites fornecidos é que ali se sugere a existência de um limite temporal. Ainda que Euclides, em seus *Elementos*, não defina o limite temporal, para Berkeley é possível aplicar a noção de *extremidade* ao tempo. Nesse sentido, “momento” como término de um tempo deve ser entendido como um instante de tempo, ou seja, como uma extremidade sem magnitude de um intervalo de tempo⁵.

Com isso há o suficiente para atacar o conceito de fluxão dos estados nascentes e evanescentes, presente no conceito de *momento* newtoniano. Se os *momentos* são acréscimos e decréscimos em estados nascentes e evanescentes – tomados em suas primeiras e últimas razões, em um tempo infinitamente pequeno – para Berkeley, tais *momentos* dependem dos limites. Isso porque eles partem dos limites, sejam eles pontos, linhas ou um instante (no caso do tempo). Desse modo, se existe velocidade ou fluxão (em termos newtonianos) nesse estado limite, a relação espaço e tempo deve acontecer com a magnitude que tais elementos apresentam no estado limite. Com isso Berkeley se questiona: “Mas de que modo podemos nós conceber uma velocidade com a ajuda de tais limites?” (Berkeley, AN, §31). O tom de Berkeley aqui é de reprovação, pois velocidade não pode existir com os limites, pois as magnitudes do espaço e o tempo ali são nulas. Vale lembrar que, para Newton, a magnitude das quantidades no estado nascente e evanescente não é levada em consideração, pois, o que importa é a relação de proporcionalidade que existiria ali, ou seja, as primeiras e últimas razões. Porém, mesmo assim Berkeley nega a legitimidade de tal concepção:

Ela [velocidade] necessariamente implica ambos, tempo e espaço, e não pode ser concebida sem eles. Se as velocidades de quantidades nascentes e evanescentes, isto é, abstraídas de tempo e espaço, não podem ser compreendidas, como podemos nós compreender e demonstrar suas proporções ou considerar suas *rationes primae* e *ultimae*? Pois, considerar a proporção ou *ratio* das coisas

⁵ Não devemos confundir o “momento” (no sentido de limite temporal) com o momento newtoniano discutido acima (algo que implica um acréscimo de quantidades fluentes em uma quantidade de tempo extremamente pequena, em uma dada fluxão ou velocidade).

implica que tais coisas tenham magnitude, que se possa medir tais magnitudes e conhecer as suas relações mútuas. [ênfase minha] (Berkeley, AN, §31).

Com essas afirmações de Berkeley é possível concluir que há sim, em *O Analista*, uma face da crítica ao método das fluxões que depende de teses antiabstracionistas. Pode-se afirmar que, mesmo que alguns dos elementos das críticas sejam aceitos pelos próprios adeptos do método das fluxões, como por exemplo, os critérios lógico-demonstrativos, não se pode dizer que o “pano de fundo” da crítica como um todo, em *O Analista*, é a própria filosofia berkeleyana⁶. Está evidente no que vimos que a concepção de fluxo presente nos *momentos* de Newton apela para ilegítimas abstrações. Algo que autoriza Berkeley a chamar as fluxões das quantidades que evanescem como “fantasmas de quantidades defuntas”⁷.

Aqui ainda é pertinente se questionar se a leitura que Berkeley faz das fluxões das quantidades nascentes e evanescentes é coerente com o que o próprio Newton propôs. Em especial, é necessário saber se aquilo que Newton concebe como quantidades primeiras e últimas é compatível com o conceito de limite proposto por Berkeley. Há a necessidade para esclarecer isso de explorar alguns exemplos de Newton, tais como aqueles fornecidos nos onze lemas iniciais do Livro I, Seção I, dos *Principia*. Contudo, limitamo-nos a afirmar que Newton não tem problema em assumir a concepção clássica de extremidade como limite. A diferença é que ele acredita ter alcançado, com a sua concepção cinemática, um meio de projetar uma relação de proporção no estado limite. É por isso que nos vários exemplos dos lemas Newton estabelece uma relação de proporção entre quantidades finitas que são estendidas, pelo movimento, até o limite.⁸ Isso aponta, segundo Newton (e diferente do que Berkeley assume), que existem magnitudes no estado limite, ainda que não sejam determinadas. Newton parece ter notado a dificuldade do assunto. É por isso que ele faz o seguinte alerta ao leitor quanto àquilo que ele demonstrou nas seções seguintes do Livro 1, dos *Principia*:

⁶ Aqui estou sugerindo que um texto matemático de Berkeley explicita sua importância no pensamento do autor à medida que localizo a ligação desse texto com elementos mais amplos da própria filosofia do autor. Mas acredito que é possível fazer o contrário, ou seja, mostrar como os aspectos mais amplos da filosofia do autor dependem de quesitos particularmente tratados nos textos de matemática.

⁷ Cf. Berkeley, AN, §35.

⁸ Cf. Newton, PN, p. 435-436.

... se me ocorrer no que se segue, para ser mais facilmente compreendido, mencionar quantidades como mínimas, ou evanescentes, ou últimas, o leitor não deve presumir que pretendo me referir a quantidades de qualquer magnitude determinada, mas às que são concebidas como sendo sempre diminuídas, indefinidamente. (Newton, PN, p.443).

Portanto, não significa que Berkeley tenha mal compreendido o que Newton propõe. O que está acontecendo é que aspectos ligados ao seu antiabstracionismo o impede de aceitar a existência de quantidades indeterminadas (pelo menos no âmbito da geometria) e que elas possam ser colocadas em relação de proporcionalidade. Isso de fato pareceu, a Berkeley, ser um exemplo do abstracionismo que tanto recusou.

3. A resposta de Maclaurin: seu conceito de velocidade nos “estados limites” no Livro I, do Tratado de Fluxão

Para Guicciardini (2006, pp. 85-89), com a obra *Tratado de fluxão*, Maclaurin se tornou um grande “sintetizador”. Pois, Maclaurin teria apresentado uma síntese do complexo e multifacetado legado newtoniano na matemática⁹, além de mostrar como essas várias facetas da matemática de Newton estão interligadas. Porém, algo deve ser enfatizado aqui. Quando a obra foi publicada em 1742, ela estava diante de duas polêmicas: a discussão sobre a prioridade da invenção do cálculo entre newtonianos e leibnizianos; e a controvérsia gerada pelo *O Analista*. Portanto, defendemos aqui que Maclaurin não ignorou tais polêmicas, mas que principalmente elas influenciaram a apresentação de muitos conceitos matemáticos ali presentes. Um deles é o conceito de *fluxão* dos estados nascentes e evanescentes. Para isso, iniciemos com o conceito de *movimento* aplicado às quantidades matemáticas.

Maclaurin apresenta o *movimento* como sendo “...o poder pelo qual se concebe gerar magnitudes [na geometria]”¹⁰. Maclaurin parece estar ciente que uma afirmação desse

⁹ Guicciardini (2007, p. 81) aponta no mínimo quatro faces do trabalho matemático de Newton: “i) en análisis común, o álgebra; ii) en el nuevo método analítico de series y fluxiones; iii) en el método sintético de fluxiones; y iv) en geometría pura (que en realidad es una anticipación de la geometría proyectiva)”.

¹⁰ Cf. Maclaurin, 1742, p. 52.

tipo poderia trazer inúmeras dificuldades, principalmente metafísicas. Pois seria possível se questionar sobre a natureza de tal “poder”. Contudo, assumindo concepções lockeanas, Maclaurin (1742, p. 51) esclarece que o objetivo da matemática é tratar das “relações entre as coisas, muito mais do que das suas essências internas”. Está evidente que ele pretende mostrar que não importa o que se compreenda como *causa* da geração das quantidades, o que é necessário é estabelecer relações precisas das quantidades que ali são geradas. Portanto, em seu ponto de vista, o *movimento* é mais um método para colocar quantidades matemática em “relações” umas com as outras.

São nesses termos que se apresenta o conceito de *velocidade*. Maclaurin define velocidade como sendo “o poder pelo qual um certo espaço poderia ser descrito em um certo tempo” (*ibidem*, p. 54). Novamente o termo “poder” aparece aqui. Porém, para evitar descrever a natureza de tal “poder” (o que na sua perspectiva exigiria descrever a velocidade como “causa” de um movimento no tempo), Maclaurin procura estudar a velocidade a partir do efeito produzido por ela:

...se não agradar essa expressão [a de velocidade como causa do movimento], pode-se supor qualquer movedor ou causa do movimento que agradar e que se possa atribuir poder, considerando a velocidade como a ação desse poder ou como um *adequado efeito* e medida de sua ação... [ênfase minha] (*Ibidem*).

Mas o que na verdade está em jogo ao tratar a velocidade como um efeito? A resposta é a seguinte: o efeito da velocidade é o espaço gerado em um determinado tempo. Portanto, o que Maclaurin está propondo é estudar a velocidade a partir da *relação* entre duas magnitudes, a saber, o espaço e o tempo. Nesse caso, o tempo que entra nessa relação não é o “tempo” ele mesmo (no sentido absoluto), mas a representação geométrica do tempo que é sempre uma linha gerada por um movimento uniforme¹¹. Para Maclaurin, o movimento pode ser uniforme, mas em outras situações pode também possuir variações. Quando é uniforme, a velocidade é constante, caso contrário o movimento será acelerado ou retardado. Para saber qual é o caso, bastaria comparar os espaços descritos em iguais partes

¹¹ Nas próprias palavras de Maclaurin: “tempo é representado por uma linha reta que flui uniformemente ou é descrita por um movimento uniforme”. Nesse sentido o tempo é assumido com algo que flui uniformemente e passível de ter uma representação matemática. Mas é importante não confundir algo: a uniformidade do tempo não implica necessariamente que o movimento seja sempre uniforme.

de tempo. Se os espaços forem iguais, conclui-se que o movimento é uniforme, caso contrário será movimento variável. Portanto, é nesse sentido que Maclaurin trata o conceito de movimento e velocidade na matemática. Falta, no entanto, saber como ele define a velocidade nos estados limites, ou seja, velocidades no estado nascente e evanescente, algo que tem sido nosso objeto de estudo na discussão com Berkeley.

Maclaurin parece estar ciente das dificuldades impostas por Berkeley para estabelecer a existência de velocidades nos limites. Assim como Berkeley, Maclaurin reconhece a inteligibilidade de conceber limites como *extremidade* das quantidades: “nenhuma quantidade é mais claramente concebidas para nós do que as limitadas partes do espaço e do tempo” (Maclaurin, 1742, p. 53). Ainda que ele reconheça a existência de limites, Maclaurin, por outro lado, evitar afirmar a existência de velocidade em tais limites. A dificuldade, portanto, é definir as velocidades pontuais. Em outras palavras, em um movimento variável, a dificuldade é saber como medir a velocidade em cada instante de tempo desse movimento sem apelar para a noção de limite e para quantidades infinitamente pequenas. A solução de Maclaurin é um subterfúgio que se utiliza de uma situação hipotética: basta supor que a velocidade no instante é a velocidade de um movimento uniforme. As palavras de Maclaurin são esclarecedoras: “...a velocidade em cada *termo* de tempo é precisamente medida pelo espaço que seria descrito em um tempo dado, se o movimento tivesse sido continuamente uniforme a partir desse termo [de tempo]” (*Ibidem*). A hipótese consiste em supor que o movimento pudesse seguir uniformemente a partir do instante de tempo em que se pretende medir a velocidade. Com isso Maclaurin acreditou ter definido a velocidade instantânea recorrendo somente à quantidade finitas de espaço e tempo. Logo, seria a partir desse subterfúgio que Maclaurin concebe fluxões das quantidade nascentes e evanescentes. De fato tal concepção não se utiliza do conceito newtoniano razões primeiras e últimas. Porém, para Maclaurin, tal definição de velocidade instantânea evita dois problemas: (a) o apelo a infinitesimais (algo enfaticamente rejeitado inclusive por Newton, mas aceito pelos leibnizianos); e (b) e o apelo a ideias abstratas no sentido que Berkeley rejeita. Eis as palavras de Maclaurin quanto aos dois problemas:

Quando supomos que um corpo tem uma ou outra velocidade em cada termo do tempo, durante o qual ele se move, nós não pretendemos dizer que existiria algum

movimento em cada termo, limite ou momento do tempo, ou em um ponto indivisível do espaço. Mas como nós sempre mediremos essa velocidade pelo espaço que seria descrito por ele, se esse movimento tivesse continuado uniformemente durante algum tempo finito dado, não se poderá dizer que nós pretendemos conceber movimento ou velocidade *sem considerar* o espaço e o tempo. (Maclaurin, 1742, p. 56).

Portanto, a partir da última afirmação dessa citação, está mais do que evidente que Maclaurin se preocupou com as acusações de Berkeley. As fluxões dos estados nascentes e evanescentes não seriam “fantasmas de quantidades defuntas”, pois elas estariam fundamentas sempre em quantidades finitas geometricamente determinadas.

4. Conclusão

A partir da discussão feita, pode-se retirar importantes conclusões quanto à polêmica gerada com *O Analista*, de Berkeley. A primeira delas diz respeito ao antiabstracionismo berkeleyano. Se a resposta de Maclaurin foi realmente uma das melhores respostas elaboradas, tal resposta não se preocupou somente em fornecer soluções aos problemas lógico-demonstrativos. Conceitos filosóficos aceitos por Berkeley foram levados em consideração. Nesse sentido, qual a real natureza da resposta de Maclaurin? Pode-se afirmar que ela se formula com uma base totalmente berkeleyana, ou seja, Maclaurin é “berkeleyano” quando evita descrever as fluxões abstratamente, ou seja, sem considerar a relação espaço e tempo. Além disso, Maclaurin é novamente “berkeleyano” quando fornece um conceito de velocidade no ponto, baseado em magnitudes finitas. Berkeley talvez aceitasse esses conceitos sem qualquer problema. Portanto, está evidente que o objetivo de sua resposta não é o de acusar Berkeley de incompreensão quanto ao conceito de fluxão.

Por outro lado, como outra consequência, afirma-se que Maclaurin não se utiliza da teoria dos *momentos* newtonianos, mesmo assumindo conceitos básicos da concepção cinemática de Newton. Tal afirmação parece agora criar uma situação singular, ou seja, parece que, quando se volta a atenção a Maclaurin, surge a imagem de um matemático muito mais berkeleyano do que newtoniano. No entanto, essa é uma imagem de Maclaurin que não se deve assumir. Aqui se defende que de fato Maclaurin se tornou um

“grande sintetizador”, mas em sentido um pouco mais amplo daquele sugerido por Guicciardini, porque sua resposta sintetiza conceitos aceitos por Berkeley, mas que também residem no próprio pensamento de Newton. As quantidades finitas consideradas por Maclaurin são aceitas por ambos os pensadores. Portanto, além de resolver os problemas do multifacetado legado newtoniano na matemática, Maclaurin ao mesmo tempo resolve os problemas levantados em *O Analista*. Maclaurin era um newtoniano convicto.¹² Ao olhar para as demonstrações do próprio Newton ele as aceita como um dos maiores exemplos de rigor matemático. Porém, devido à necessidade de responder a Berkeley, Maclaurin parece ter encontrado dentro do próprio pensamento de Newton elementos que seriam compatíveis com aquilo que Berkeley aceitou como um adequado tratamento das questões do campo da matemática. Logo, sua resposta quanto à fluxões nos estado nascentes e evanescentes é, antes de tudo, berkeleyana e newtoniana ao mesmo tempo.

¹² Vale lembrar que Maclaurin refuta o imaterialismo e o antiabstracionismo em outras de suas obras. Um exemplo se localiza em: *An Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*. Para mais detalhes: cf. Pycior, 1997, p. 253.