

Maycon Sambinelli

## “Problemas de Emparelhamentos Estáveis”

CAMPINAS  
2014





Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Computação

Maycon Sambinelli

## “Problemas de Emparelhamentos Estáveis”

Orientador(a): **Prof. Dr. Orlando Lee**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA POR  
MAYCON SAMBINELLI, SOB ORIENTAÇÃO  
DE PROF. DR. ORLANDO LEE.

A handwritten signature in blue ink that reads "Orlando Lee".

---

Assinatura do Orientador(a)

CAMPINAS  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Sambinelli, Maycon, 1988-  
Sa44p Problemas de emparelhamentos estáveis / Maycon Sambinelli. – Campinas,  
SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Orlando Lee.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Computação.

1. Modelos de emparelhamentos. 2. Algoritmos. I. Lee, Orlando, 1969-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Stable matching problems

**Palavras-chave em inglês:**

Matching models

Algorithms

**Área de concentração:** Ciência da Computação

**Titulação:** Mestre em Ciência da Computação

**Banca examinadora:**

Orlando Lee [Orientador]

Eduardo Candido Xavier

Jair Donadelli Júnior

**Data de defesa:** 27-05-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Ciência da Computação

## TERMO DE APROVAÇÃO

Defesa de Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação, apresentada pelo(a) Mestrando(a) **Maycon Sambinelli**, aprovado(a) em **27 de maio de 2014**, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



**Prof(a). Dr(a). Jair Donadelli Júnior**  
Titular



**Prof(a). Dr(a). Eduardo Candido Xavier**  
Titular



**Prof(a). Dr(a). Orlando Lee**  
Presidente



# Problemas de Emparelhamentos Estáveis

Maycon Sambinelli<sup>1</sup>

27 de maio de 2014

## Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Orlando Lee (*Orientador*)
- Prof. Dr. Eduardo Candido Xavier  
Instituto de Computação - UNICAMP
- Prof. Dr. Jair Donadelli Jr.  
Centro de Matemática, Computação e Cognição - UFABC
- Prof. Dr. Flávio K. Miyazawa  
Instituto de Computação - UNICAMP (Suplente)
- Prof. Dr. José Coelho da Pina  
Instituto de Matemática e Estatística - USP (Suplente)

---

<sup>1</sup>Suporte financeiro: bolsa de Mestrado da FAPESP (processo 2012/16625-7) 2012–2014





# Abstract

Stable matching problems consist of dividing one or more groups of agents in pairs, where each agent has an ordered preference list, and one wish to find a matching between them which respects a stability criterion that is based on their preferences. These problems are important because they have many practical applications, such as association of medical residents to hospitals, resource allocation in wireless communication and kidney donation. Due to the importance of the topic, this dissertation presents a survey describing the most important problems along with its main results.



# Resumo

Problemas de emparelhamentos estáveis consistem em dividir um ou mais grupos de agentes em pares, onde cada agente possui uma lista de preferências ordenada, e deseja-se encontrar um emparelhamento entre eles que respeite um critério de estabilidade que é baseado nas suas preferências. Estes problemas são importantes pois possuem muitas aplicações práticas, tais como associação de residentes de medicina à hospitais, alocação de recursos em comunicação sem fio e doação de rins. Devido à importância do tema, esta dissertação apresenta um *survey* descrevendo os problemas mais importantes junto com seus principais resultados.



*À minha amada esposa Carla e aos meus  
queridos pais, Luzinete e João Pedro.*



# Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, Carla Negri Lintzmayer, por ser paciente, compreensiva e amorosa. Por ser o meu braço direito, a minha amiga fiel, aquela com quem sempre posso contar nos momentos difíceis. Agradeço também pela leitura, correções e sugestões ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço à minha mãe, Luzinete Sambinelli, por sempre ter apoiado os meus estudos e por fazer diversos sacrifícios para que eu pudesse dar continuidade a eles.

Agradeço ao meu pai, João Pedro Sambinelli, por ter me ensinado lições de moral, caráter e responsabilidade. Por ter me ensinado a sempre buscar a perfeição.

Agradeço à minha tia, Patrícia Sambinelli, por ter sido o meu ombro amigo por diversos anos, pelas aulas de matemática, pelas brincadeiras e jogos. Basicamente, agradeço por ter sido a melhor tia do mundo!

Agradeço à minha madrinha, Maria Aparecida Sambinelli, por sempre ter sido atenciosa e sempre ter se preocupado tanto comigo.

Agradeço ao meu avô, Onível Sambinelli, por ter sido o meu primeiro melhor amigo. Por ter me proporcionado uma infância maravilhosa repleta de momentos que eu nunca irei esquecer.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Orlando Lee, pela paciência e boa vontade, pela liberdade e confiança depositadas, pela compreensão nos momentos difíceis e pela sua amizade.

Agradeço a todos os meus professores, atuais e passados, pelos valiosos conhecimentos recebidos. Um agradecimento especial vai para os professores: Anderson Faustino da Silva, Guilherme Pimentel Telles, José Roberto Vasconcelos, Orlando Lee e Yandre Maldonado.

Essa vitória não é só minha. É minha e dessas pessoas, que ajudaram a me tornar a pessoa que sou hoje.

E por fim, agradeço também à FAPESP pelo fornecimento da bolsa de mestrado, que foi essencial para que eu prosseguisse com o sonho de me tornar um pesquisador.





*“Escolhe um trabalho de que gostes, e  
não terás que trabalhar nem um dia na  
tua vida.”*

Confúcio



# Sumário

<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Resumo</b>	<b>xi</b>
<b>Dedicatória</b>	<b>xiii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xv</b>
<b>Epígrafe</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Definições</b>	<b>5</b>
<b>3 Problemas Clássicos de Emparelhamentos Estáveis</b>	<b>9</b>
3.1 Problema do Casamento Estável . . . . .	9
3.2 Problema dos Hospitais/Residentes . . . . .	11
3.3 Número de Emparelhamentos Estáveis . . . . .	14
3.4 Encontrando Emparelhamentos Estáveis . . . . .	16
3.4.1 Algoritmo de Gale-Shapley Orientado aos Residentes . . . . .	16
3.4.2 Algoritmo de Gale-Shapley Orientado aos Hospitais . . . . .	23
3.4.3 Algoritmo de Gale-Shapley e o Problema do Casamento Estável . .	28
3.5 Teorema dos Hospitais Rurais . . . . .	29
3.6 Problema do Casamento Estável com Listas Incompletas . . . . .	30
3.7 Emparelhamentos Estáveis Justos . . . . .	34
3.8 Reticulado Distributivo . . . . .	35
3.9 Rotações . . . . .	39
3.10 Resumo Geral do Capítulo . . . . .	42
<b>4 Problemas de Emparelhamentos Estáveis com Indiferença</b>	<b>45</b>
4.1 Estabilidade Fraca . . . . .	46



4.1.1	Existência de uma Solução . . . . .	48
4.1.2	Tamanho do Emparelhamento . . . . .	49
4.1.3	Emparelhamento Fracamente Estável de Cardinalidade Máxima . . .	50
4.1.4	Aproximando o Emparelhamento de Cardinalidade Máxima . . . .	53
4.1.5	Algoritmo 3/2-Aproximativo para o MAX-SMTI . . . . .	55
4.1.6	Reticulado Distributivo . . . . .	63
4.2	Estabilidade Forte . . . . .	64
4.2.1	Determinando a Existência de uma Solução . . . . .	66
4.2.2	Teorema dos Hospitais Rurais . . . . .	75
4.2.3	Reticulado Distributivo . . . . .	76
4.3	Super Estabilidade . . . . .	82
4.3.1	Determinando a Existência de uma Solução . . . . .	83
4.3.2	Teorema dos Hospitais Rurais . . . . .	91
4.3.3	Reticulado Distributivo . . . . .	93
4.4	Resumo Geral do Capítulo . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Outros Problemas de Estabilidade</b>	<b>97</b>
5.1	Problema do Casamento Estável Poligâmico . . . . .	97
5.1.1	Principais Resultados . . . . .	98
5.1.2	Encontrando uma Solução . . . . .	101
5.2	Problema da Alocação Estável . . . . .	107
5.2.1	Principais Resultados . . . . .	109
5.2.2	Encontrando uma Solução . . . . .	111
5.3	Problema do Fluxo Estável . . . . .	115
5.3.1	Principais Resultados . . . . .	121
5.3.2	Encontrando uma Solução . . . . .	125
5.4	Resumo Geral do Capítulo . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>133</b>



# Lista de Tabelas

3.1	Rotações da instância do SM apresentada na Figura 3.8 . . . . .	40
3.2	Rotações expostas em cada emparelhamento estável da instância do SM apresentada na Figura 3.8 . . . . .	40





# Lista de Figuras

3.1	Exemplo de uma instância do SM especificada por uma lista de preferências (a) e por um grafo de preferências (b) . . . . .	10
3.2	Emparelhamentos estáveis $M_1$ e $M_2$ representados em grafos de preferências	11
3.3	Exemplo de uma instância do HR especificada por listas de preferências (a) e por um grafo de preferências (b) . . . . .	13
3.4	Emparelhamentos estáveis $M_1$ e $M_2$ representados em um grafo de preferências . . . . .	13
3.5	Exemplo de uma das possíveis execuções do RGS sobre uma instância do HR	18
3.5	Exemplo de uma das possíveis execuções do RGS sobre uma instância do HR (continuação) . . . . .	19
3.6	Exemplo de uma execução do HGS sobre uma instância do HR . . . . .	25
3.6	Exemplo de uma execução do HGS sobre uma instância do HR (continuação)	26
3.7	Instância do SMI que possui um emparelhamento estável que não é completo	31
3.8	Instância do SM (retirado de [20]) . . . . .	34
3.9	Emparelhamentos estáveis da instância do SM apresentada na Figura 3.8 .	35
3.10	Estrutura de reticulado da instância da Figura 3.8 (retirado de [20]) . . . .	39
3.11	$(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$ da instância do SM apresentada na Figura 3.8 (retirado de [20])	41
3.12	Hierarquia de generalizações dos problemas SM, HR e SMI . . . . .	42
4.1	Exemplo de uma instância do HRT . . . . .	46
4.2	Emparelhamentos fracamente estáveis para a instância apresentada na Figura 4.1 . . . . .	47
4.3	Todas as possíveis listas de preferências obtidas através da quebra dos empates da lista de preferências $\ell = a, (b, c, d), e, (f, g), h$ . . . . .	48
4.4	Instância do SMTI que admite dois emparelhamentos fracamente estáveis de cardinalidades distintas . . . . .	50
4.5	Exemplo de uma execução do algoritmo proposto por Király [44] . . . . .	58
4.5	Exemplo de uma execução do algoritmo proposto por Király [44] (continuação) . . . . .	59



4.6	Instância do SMT que não possui uma estrutura de reticulado sob o critério de dominância “natural”, apresentada por Roth [58] (a). Únicos emparelhamentos fracamente estáveis admitidos por esta instância (b) (c) . . . . .	64
4.7	Exemplo de uma instância do SMT que não admite um emparelhamento fortemente estável . . . . .	66
4.8	Exemplo de uma execução do <i>HRT-Strong</i> sobre uma instância do HRT . .	70
4.8	Exemplo de uma execução do <i>HRT-Strong</i> sobre uma instância do HRT (continuação) . . . . .	71
4.9	Exemplo de uma execução do <i>HRT-Super</i> sobre uma instância do HRT . .	86
4.9	Exemplo de uma execução do <i>HRT-Super</i> sobre uma instância do HRT (continuação) . . . . .	87
4.10	Hierarquia de generalizações dos problemas SM, HR, SMI, SMT, HRT e SMTI . . . . .	95
4.11	Hierarquia de generalizações dos três critérios de estabilidade que surgem quando indiferença é permitido . . . . .	95
5.1	Exemplo de uma instância do MM junto com um dos seus emparelhamentos estáveis . . . . .	99
5.2	Possível execução do MM-GS sobre uma instância do MM . . . . .	103
5.2	Possível execução do MM-GS sobre uma instância do MM (continuação) .	104
5.2	Possível execução do MM-GS sobre uma instância do MM (continuação) .	105
5.3	Exemplo de uma instância do SA e sua alocação estável (adaptado de [5]) .	108
5.4	Instância do SA (a) que possui apenas a alocação estável apresentada na em (b), que, como podemos perceber, é preemptiva (retirado de [10]) . . .	111
5.5	Exemplo de uma das possíveis execuções do DM-SA sobre uma instância do SA . . . . .	117
5.5	Exemplo de uma das possíveis execuções do DM-SA sobre uma instância do SA (continuação) . . . . .	118
5.6	Exemplo de uma instância do SF junto com seu fluxo estável . . . . .	120
5.7	Estrutura utilizada para reduzir uma instância do SA que contém arestas paralelas para uma que não contém . . . . .	127
5.8	Hierarquia de generalizações dos problemas SM, HR, SMI, SMT, HRT, SMTI, MM, SA e SF . . . . .	131



# Capítulo 1

## Introdução

Em 1962, Gale e Shapley [18] publicaram um artigo que definia e resolvia o Problema do Casamento Estável e o Problema dos Hospitais/Residentes. Esse foi o primeiro artigo na área de emparelhamentos estáveis.

Desde 1952, no entanto, os hospitais dos Estados Unidos da América já utilizavam um algoritmo igual ao apresentado por Gale e Shapley [18] para atribuir residentes às suas vagas. O que aconteceu foi que, antes dessa época, os estudantes de medicina que buscavam fazer sua residência se candidatavam diretamente nos hospitais e cada hospital fazia propostas de nomeação para seus candidatos independentemente do que estava ocorrendo em outros hospitais. Com isso, o mercado era caracterizado por uma intensa competição pelos residentes, que eram insuficientes para a demanda do mercado. Os dados de 1952, por exemplo, indicam que 10400 vagas existiam para 6000 candidatos apenas [2].

Dessa forma, uma corrida foi criada e os hospitais começaram a adiantar a data de contratação. Em 1944, por exemplo, as nomeações estavam ocorrendo dois anos antes de quando as residências iriam de fato começar [58]. Isso se mostrou insatisfatório para ambos os lados: para os hospitais, que precisavam fazer contratações sem saber as notas finais dos estudantes; e para os estudantes, que perdiam boa parte do seu ano de estudo procurando por entrevistas. Para combater esse problema, foi feito um acordo entre as escolas de medicina de forma a não liberar as informações dos alunos até uma certa data fixa. Assim, os hospitais não teriam informações suficientes para fazer as contratações. No entanto, isso trocou um problema por outro, explicado a seguir.

Como alguns candidatos recebiam várias ofertas, era essencial que cada oferta tivesse uma data final para aceitação. Assim, um candidato que recebia uma nomeação de um hospital que não fosse o seu preferido iria adiar ao máximo a resposta para que, durante esse tempo, pudesse ter a chance de receber a nomeação de um hospital melhor. Caso ele aceitasse aquela proposta e posteriormente recebesse a proposta de um hospital melhor, ele não iria ficar muito feliz. Da mesma forma, um hospital que recebesse uma rejeição

tardia e percebesse que, nesse tempo “perdido”, suas próximas escolhas já haviam se comprometido com outros hospitais também não iria ficar satisfeito. Por essa razão, a data final para aceitação de uma nomeação foi gradualmente sendo reduzida, chegando eventualmente ao prazo de 12 horas.

Finalmente, em 1950 houve um acordo para que se trocasse o mercado competitivo por um sistema centralizado que iria receber as listas de preferências dos candidatos à residência e dos hospitais e associar os candidatos aos hospitais da melhor maneira possível. Nasceu assim o *National Resident Matching Program*, NRMP [2].

A participação no NRMP, tanto por parte dos hospitais quanto por parte dos residentes, é facultativa. Por isso, é importante que o emparelhamento gerado pelo sistema não forneça incentivos para que os participantes fechem acordos por fora, isto é, que um certo hospital e um certo residente não possam obter resultados mais satisfatórios para si mesmos se não participarem do programa. Essa é justamente a característica que os emparelhamentos estáveis fornecem: tal par de participantes não existe. Roth [58] argumentou que o principal fator do sucesso do NRMP, que continua funcionando até hoje, se deve principalmente pela garantia da estabilidade do emparelhamento gerado pelo sistema.

Em um problema de emparelhamento estável, de forma geral, tem-se um ou mais conjuntos de *agentes* e deseja-se emparelhá-los de acordo com as preferências que eles fornecem de forma que não existam dois agentes que consigam melhorar o seu emparelhamento.

Aplicações de emparelhamentos estáveis surgem em sistemas de emparelhamento centralizados, onde um sistema central deve emparelhar candidatos a vagas. O NRMP sem dúvida é a aplicação mais famosa que atribui residentes a vagas em hospitais, no entanto ainda existem o *Canadian Resident Matching Service* [59], *Japan Residency Matching Program* [1] e o *Scottish Foundation Allocation Scheme* [3]. Considerando emparelhamentos de forma geral, existem ainda outras aplicações, como por exemplo: atribuição de crianças a creches na Dinamarca; admissão em ensino superior na China, Alemanha, Hungria, Espanha e Turquia; alocação de estudantes a fraternidades nas universidades do Estados Unidos; alocação de estudantes a moradias; redes P2P; transplante de rins entre doadores vivos [51] e migração de máquinas virtuais entre servidores [62].

Além das aplicações citadas acima, a importância dos problemas de emparelhamentos estáveis também pode ser observada pelo fato de que Lloyd Shapley e Alvin Roth ganharam o prêmio Nobel de economia em 2012 devido às suas contribuições na área.

Vários problemas de emparelhamentos estáveis já foram estudados na literatura. Dada a grande quantidade de material existente e a importância desses problemas, essa dissertação apresenta um *survey* atualizado da área, com resultados sobre os principais problemas envolvidos.

Até 1989, os resultados existentes na área foram publicados em um livro [20], que

os apresenta de forma bastante didática. Quase vinte anos depois, Iwama e Miyazaki [35] forneceram um breve *survey*, reapresentando alguns problemas antigos e mostrando alguns resultados mais recentes. Posteriormente, Stathopoulos [60] apresentou também uma dissertação de mestrado sobre a área, definindo alguns problemas e citando seus principais resultados. Até onde sabíamos, esses haviam sido os únicos trabalhos que buscavam reunir os resultados mais recentes sobre emparelhamentos estáveis até o ano de 2012. Por este motivo, decidimos apresentar um *survey* atualizado que fosse mais didático e completo do que os citados anteriormente. Durante nosso trabalho, em 2013, ficamos cientes que Manlove [51] publicou um livro atualizado sobre o tema. No entanto, nosso trabalho ainda se difere deste último, justamente pela forma como decidimos apresentá-lo: exemplos são dados sempre que possível e todos os algoritmos apresentados possuem pseudocódigos e exemplos de execução.

O Capítulo 2 apresenta as principais definições que serão utilizadas no decorrer desse texto, de forma genérica. No Capítulo 3 apresentamos principalmente os dois primeiros problemas de emparelhamentos estáveis apresentados por Gale e Shapley [18]. Nesses problemas, cada agente fornece uma lista de preferência que classifica estritamente todos agentes com os quais ele deseja se relacionar. No Capítulo 4 apresentamos as variações desses problemas que permitem que um agente classifique os outros agentes em grupos, de forma que ele seja indiferente entre os agentes que pertencem a um mesmo grupo. No Capítulo 5 apresentamos os principais resultados sobre três outros problemas de estabilidade que são bem relacionados com os apresentados. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta nossas conclusões e trabalhos futuros.





# Capítulo 2

## Definições

De forma geral, problemas de emparelhamentos estáveis possuem várias definições em comum. Neste capítulo, apresentaremos as principais definições, de forma genérica, que serão necessárias nos capítulos posteriores.

**Definição 2.1** (Preferência). *Dizemos que um agente  $p$  **prefere** um agente  $q$  a um agente  $q'$ , denotando por  $q \succ_p q'$ , se  $p$  acha melhor ser emparelhado a  $q$  do que a  $q'$ .*

**Definição 2.2** (Indiferença). *Dizemos que um agente  $p$  é **indiferente** entre um agente  $q$  e um agente  $q'$ , denotando por  $q =_p q'$ , se  $q$  e  $q'$  possuem a mesma preferência para  $p$ , isto é, ambos são igualmente bons para  $p$ .*

**Definição 2.3** (Lista de preferências). *Dado um agente  $p$ , chamamos de **entrada** um conjunto maximal de agentes tais que  $p$  é indiferente entre eles. A **lista de preferências** de um agente  $p$  mantém uma sequência de entradas tais que  $p$  prefere a entrada mais à esquerda, isto é, é uma lista decrescente das preferências de  $p$ .*

**Definição 2.4** (Morfologia das listas de preferências). *A primeira entrada de qualquer lista de preferências é chamada de **cabeça** enquanto que a última entrada é chamada de **cauda**.*

**Definição 2.5** (Aceitação). *Dizemos que  $p$  é um agente **aceitável** para outro agente  $q$  se e somente se  $p$  pertence à lista de preferências de  $q$ ; caso contrário, dizemos que  $p$  é **inaceitável** para  $q$ . Dizemos que um par de agentes  $(p, q)$  é um **par aceitável** se  $p$  é aceitável para  $q$  e  $q$  é aceitável para  $p$ . Caso contrário dizemos que  $(p, q)$  é um **par inaceitável**.*

Se um problema permite que os agentes declarem outros agentes como inaceitáveis, então dizemos que as listas de preferências desse problema são **incompletas**. Caso contrário, as listas são **completas**.

**Definição 2.6** (Consistência). *Dizemos que a lista de preferências de um agente  $p$  é **consistente** se, para todo agente  $q$  pertencente a tal lista,  $p$  pertence à lista de preferências de  $q$ .*

Nesta dissertação, vamos assumir que todas as listas de preferências são consistentes, pois, caso contrário, bastaria percorrer a lista de preferências de cada agente  $p$  removendo os agentes que não acham  $p$  aceitável para transformá-la em uma lista consistente.

**Definição 2.7** (Melhor/pior agentes). *Dizemos que  $q$  é o **melhor** agente para  $p$  se não existe um agente  $q'$  tal que  $q' \succ_p q$ . Dizemos que  $q$  é o **pior** agente para  $p$  se não existe um agente  $q'$  tal que  $q \succ_p q'$ .*

Em alguns problemas, os agentes possuem uma *capacidade*, que define a quantidade máxima de agentes com os quais eles podem ser emparelhados. Um exemplo é o problema dos Hospitais/Residentes, no qual os hospitais possuem uma quantidade máxima de vagas que podem ser preenchidas por residentes.

**Definição 2.8** (Representação por listas de preferências). *Em uma representação por listas de preferências, cada linha é formada por (i) um identificador, que indica à qual agente aquela lista pertence; (ii) um número entre parênteses, que representa a capacidade do agente e é omitido quando a capacidade é igual a um; (iii) dois pontos “.”; (iv) a descrição da lista do agente, em ordem decrescente de preferência, onde cada entrada aparece envolvida entre parênteses, o que é omitido quando ela é formada por um único agente, e as entradas são separadas por vírgula.*

Consideraremos que toda entrada de uma lista de preferências será um empate, mesmo que esta tenha tamanho unitário, isto é, é formada por um único agente. Considere, por exemplo, a lista de preferências de um agente  $p$  como sendo  $q_1, (q_2, q_4), q_3$  e a lista de preferências de um agente  $q$  como sendo  $p_1, (p_3, p_4), (p_2, p_5, p_6)$ . Temos que  $(q_2, q_4)$  e  $(p_3, p_4)$  são a segunda entrada da lista do agente  $p$  e do agente  $q$ , respectivamente. Podemos dizer que ambas são um empate de tamanho dois. Também temos que  $q_1$  e  $p_1$  são a cabeça das listas (ambos são empates de tamanho um) e  $q_3$  e  $(p_2, p_5, p_6)$  são as caudas das listas (a primeira é um empate de tamanho um e a última é um empate de tamanho três).

**Definição 2.9** (Representação por grafo de preferências). *Um **grafo de preferências** é um grafo no qual os vértices são os agentes envolvidos e as arestas indicam as preferências. Cada vértice atribui um valor inteiro às suas arestas incidentes (em uma figura, esse número aparece próximo ao vértice), que indica a sua preferência em relação à sua vizinhança. Assim, um vértice  $u$  prefere  $w$  a  $v$  se e somente se o valor atribuído por  $u$  à aresta  $uw$  é menor do que o valor atribuído à aresta  $uv$ . Dessa forma, se o valor  $i$  é atribuído por  $u$  a uma aresta  $uv$ , então  $v$  é a  $i$ -ésima entrada da lista de preferências de*

*u. Note que uma aresta  $uv$  só existe se o par  $(u, v)$  é aceitável. Quando os agentes possuem uma capacidade, o número que indica tal valor aparece inscrito no vértice. Quando indiferenças são permitidas, um vértice  $u$  atribui o mesmo valor inteiro para as arestas  $uv$  e  $uw$  se  $u$  é indiferente entre  $v$  e  $w$ .*

Essas duas representações nos ajudam de formas diferentes. A representação por listas é uma forma compacta, fácil e clássica de se representar uma instância de problemas de emparelhamentos estáveis, porém difícil para ilustrar a execução de um algoritmo e visualizar rapidamente *pares bloqueantes*<sup>1</sup>. Já a representação por grafos de preferências é mais adequada para a visualização da execução de algoritmos e pares bloqueantes, porém é menos comum na literatura.

**Definição 2.10** (Emparelhamento). *Um **emparelhamento**  $M$  é um conjunto de pares ordenados onde cada agente aparece em no máximo  $x$  pares ordenados, onde  $x$  é a sua capacidade. Se um par  $(p, q)$  de agentes pertence a um emparelhamento, então  $p$  é **parceiro** de  $q$  e vice-versa. Denotamos por  $M(p)$  o conjunto de agentes emparelhados a  $p$  em  $M$ . Se esse conjunto for unitário, tratamos  $M(p)$  como sendo o elemento.*

Em um grafo de preferências, representamos as arestas de um emparelhamento por linhas mais grossas.

**Definição 2.11** (Estados de agentes). *Seja  $c(p)$  a capacidade de um agente  $p$  e seja  $M$  um emparelhamento. Dizemos que  $p$  é **não cheio** se  $|M(p)| \leq c(p)$  e **cheio** se  $|M(p)| = c(p)$ . Se, durante a execução de um algoritmo,  $|M(p)| > c(p)$ , dizemos que  $p$  é **lotado** nesse período.*

**Definição 2.12** (Estabilidade do emparelhamento). *Dizemos que um emparelhamento é **estável** se e somente se ele não possui um par bloqueante. Caso contrário, dizemos que ele é **instável**.*

**Definição 2.13** (Par estável). *Um par de agentes  $(p, q)$  é um **par estável** se e somente se  $(p, q)$  pertence a algum emparelhamento estável. Dizemos também que  $p$  é um **parceiro estável** de  $q$  e vice-versa.*

Alguns algoritmos que mostraremos removem entradas das listas de preferências que podem, portanto, variar de tamanho.

**Definição 2.14** (Remoção). *Dizemos que um par de agentes  $(p, q)$  é **removido** por um algoritmo quando o agente  $p$  é removido da lista de preferências do agente  $q$  e  $q$  é removido da lista de  $p$ .*

---

<sup>1</sup>Os conceitos de pares bloqueantes variam e, portanto, são definidos à parte para cada problema, nos próximos capítulos.

As seguintes notações matemáticas também serão utilizadas nesse texto.

**Definição 2.15** (Grafo). *Dado um grafo  $G$ , chamamos de  $V(G)$  seu conjunto de vértices e de  $E(G)$  seu conjunto de arestas. Dado um vértice  $v \in V(G)$ ,  $\mathcal{N}_G(v)$  é o conjunto de vértices que são vizinhos a  $v$  em  $G$  e  $\delta_G(v)$  é o conjunto de arestas incidentes a  $v$ .*

**Definição 2.16** (Funções sobre conjuntos). *Sejam  $S$  e  $R$  dois conjuntos. Se  $S' \subseteq S$  e  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida sobre  $S$ , então  $g(S') = \sum_{x \in S'} g(x)$ . Se  $S' \subseteq S$  ( $R' \subseteq R$ ) e  $r \in R$  ( $s \in S$ ) e  $f : S \times R \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida sobre o produto cartesiano de  $S$  e  $R$ , então  $f(S', r) = \sum_{x \in S'} f(x, r)$  ( $f(s, R') = \sum_{y \in R'} f(s, y)$ ).*

# Capítulo 3

## Problemas Clássicos de Emparelhamentos Estáveis

Neste capítulo, vamos estudar os clássicos problemas do Casamento Estável e dos Hospitais/Residentes, ambos propostos por Gale e Shapley em seu artigo seminal [18]. Definiremos ambos formalmente nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Veremos na Seção 3.3 que o número de emparelhamentos estáveis desses problemas pode ser exponencial nos tamanhos das instâncias e na Seção 3.4, veremos como encontrar algum desses emparelhamentos estáveis. Na Seção 3.5 apresentaremos o Teorema dos Hospitais Rurais, que garante que não importa qual o algoritmo utilizado para encontrar um emparelhamento estável em uma instância do problema do Hospitais/Residentes, cada hospital é sempre emparelhado ao mesmo número de residentes em qualquer emparelhamento estável. Veremos na Seção 3.6 uma pequena generalização do Problema do Casamento Estável e na Seção 3.7 alguns critérios utilizados na tentativa de encontrar um emparelhamento estável “justo” para todos os participantes de uma instância desse problema. Finalmente, na Seção 3.8, veremos que o conjunto de emparelhamentos estáveis de uma instância do Problema do Casamento Estável possui uma certa estrutura, e, na Seção 3.9, que podemos representar todos os emparelhamentos estáveis de uma instância do Problema do Casamento Estável de forma compacta. O conteúdo apresentado nesse capítulo foi baseado principalmente no trabalho de Gusfield e Irving [20].

### 3.1 Problema do Casamento Estável

O **Problema do Casamento Estável** (SM, de *Stable Marriage*) consiste em encontrar uma forma de realizar matrimônios entre homens e mulheres de forma que não existam um homem e uma mulher que não são cônjuges mas que prefeririam ser ao invés de estarem casados com seus atuais cônjuges. Formalmente, descrevemos o SM como o problema de

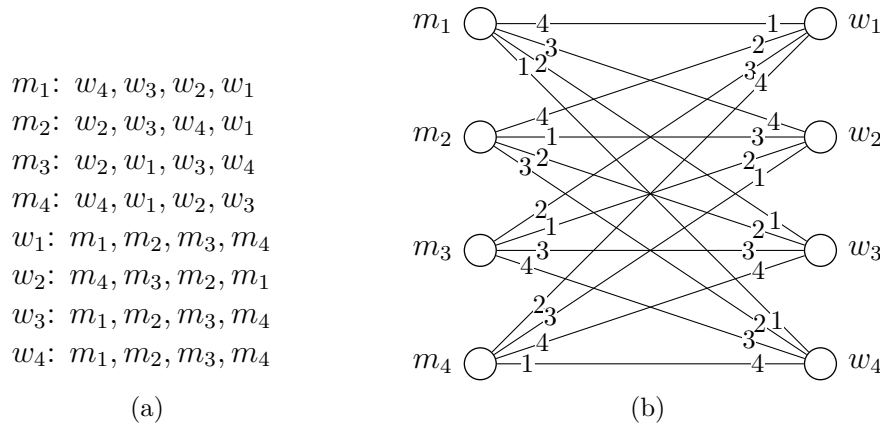


Figura 3.1: Exemplo de uma instância do SM especificada por uma lista de preferências (a) e por um grafo de preferências (b)

encontrar um emparelhamento estável entre um conjunto de homens e um de mulheres.

Uma instância de tamanho  $n$  do SM consiste em um conjunto  $U$  de  $n$  homens e um conjunto  $W$  de  $n$  mulheres, onde cada pessoa  $p \in U \cup W$  fornece uma lista de preferências completa que classifica, sem empates, as pessoas do sexo oposto de acordo com o desejo de casar-se com ela. Um emparelhamento para uma instância do SM é um conjunto  $M$  de pares ordenados  $(m, w) \in U \times W$  onde cada homem  $m \in U$  e cada mulher  $w \in W$  pertence a exatamente um par ordenado.

**Definição 3.1** (Par bloqueante). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância do SM, um par  $(m, w) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um **par bloqueante** de  $M$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $w \succ_m M(m)$ ; e
- (ii)  $m \succ_w M(w)$ .

Assim, um emparelhamento representa uma possível forma de se casar os homens e as mulheres. Por sua vez, um par bloqueante  $(m, w)$  para um emparelhamento  $M$  representa um homem  $m$  e uma mulher  $w$  que não estão casados, uma vez, que pela Definição 3.1,  $(m, w) \notin M$ . Além disso, ambos conseguiriam cônjuges melhores se rompessem com seus atuais cônjuges e iniciassem um casamento entre si, pois  $w \succ_m M(m)$  e  $m \succ_w M(w)$ . Finalmente, um emparelhamento estável representa uma maneira de realizar os  $n$  matrimônios de forma que não exista um homem e uma mulher que não estão casados mas que prefeririam estar ao invés de estarem casados com seus pares atuais.

A partir daqui, utilizaremos a convenção de que  $m_i$ , para  $i \in \mathbb{Z}$ , é um homem e que  $w_j$ , para  $j \in \mathbb{Z}$ , é uma mulher. A Figura 3.1a ilustra a representação através

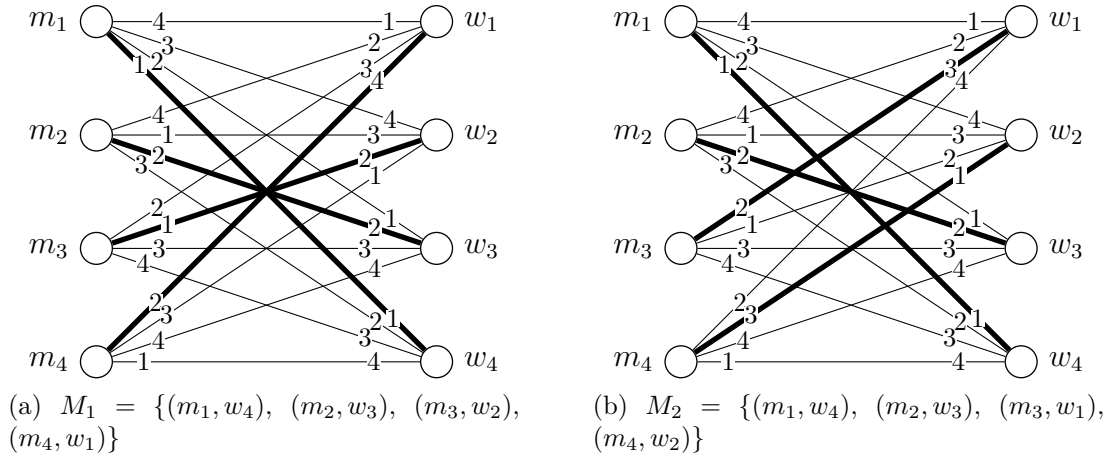


Figura 3.2: Emparelhamentos estáveis  $M_1$  e  $M_2$  representados em grafos de preferências

de listas de preferências. Note que, nesse problema, a capacidade de cada agente é um e, portanto, as listas de preferência omitem a notação de capacidade. Assim, temos, por exemplo, que a lista de preferências do homem  $m_1$  é  $w_4, w_3, w_2, w_1$  e que este prefere  $w_4$  a  $w_3$ ,  $w_3$  a  $w_2$  e  $w_2$  a  $w_1$ . A instância apresentada em tal figura admite dois emparelhamentos estáveis, a saber,  $M_1 = \{(m_1, w_4), (m_2, w_3), (m_3, w_2), (m_4, w_1)\}$  e  $M_2 = \{(m_1, w_4), (m_2, w_3), (m_3, w_1), (m_4, w_2)\}$ . A Figura 3.1b ilustra a mesma instância através de um grafo de preferências. Neste caso, esse grafo é bipartido e completo, sendo que uma parte representa os homens e a outra representa as mulheres. A Figura 3.2 apresenta os emparelhamentos estáveis  $M_1$  e  $M_2$  para a instância da Figura 3.1.

## 3.2 Problema dos Hospitais/Residentes

O **Problema dos Hospitais/Residentes** (HR, de *Hospitals/Residents*) é uma generalização do SM que foi introduzida originalmente por Gale e Shapley [18] com o nome de Problema da Admissão em Faculdades (*College Admissions*). Neste problema, um conjunto de hospitais  $H$  possui vagas para residentes de medicina e um conjunto de residentes  $R$  busca um hospital para realizar a sua residência. Cada hospital  $h \in H$  possui  $c(h) \geq 1$  vagas a oferecer (sua capacidade), cada residente  $r \in R$  fornece uma lista de preferências que classifica, sem empates, apenas os hospitais que ele considera aceitável de acordo com o seu desejo de realizar sua residência naquele hospital e cada hospital fornece uma lista de preferências que classifica os seus candidatos de acordo com a sua preferência entre eles. Assumiremos que um residente  $r$  só consegue se candidatar a uma vaga em um hospital  $h$  se  $h$  o considera aceitável.

Note que nesse problema o número de residentes não é necessariamente igual ao número

total de vagas ofertadas pelos hospitais. Outra diferença em relação ao SM é o fato de que os agentes envolvidos não precisam fornecer listas de preferências que classifiquem todos os elementos do conjunto oposto, isto é, eles classificam apenas aqueles elementos que eles consideram aceitáveis. Dessa forma, um agente  $p$  pode declarar que prefere não ser emparelhado a ser emparelhado com outro agente  $q$ .

Dizemos que  $M$  é um emparelhamento para o HR se cada residente está emparelhado a no máximo um hospital e cada hospital  $h$  possui no máximo  $c(h)$  estudantes emparelhados a ele, ou seja, para o HR, um emparelhamento é uma mapeamento 1-para- $n$  entre residentes e hospitais. Assim, dado um emparelhamento  $M$ , o hospital emparelhado ao residente  $r$  em  $M$  é representador por  $M(r)$  e o conjunto de residentes emparelhados ao hospital  $h$  em  $M$  é representado por  $M(h)$ . Note que, para uma instância do HR, podemos ter que no emparelhamento estável alguns residentes não foram emparelhados a nenhum hospital e que alguns hospitais podem não ter todas as suas vagas preenchidas.

**Definição 3.2** (Par bloqueante). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância do HR, dizemos que um par  $(r, h) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um **par bloqueante** de  $M$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $r$  e  $h$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $r$  não está emparelhado a um hospital ou  $h \succ_r M(r)$ ;
- (iii)  $h$  tem uma vaga não preenchida ou existe um residente  $r' \in M(h)$  tal que  $r \succ_h r'$ .

Cabe notar que o SM é um caso particular do HR no qual  $|R| = |H|$ ,  $c(h) = 1$  para todo  $h \in H$ , todos os residentes acham todos os hospitais aceitáveis e todos os hospitais acham todos os residentes aceitáveis. É fundamental entender essa estrutura de generalizações entre os problemas, pois muitos resultados que serão apresentados para um problema seguem diretamente para os seus casos restritos ou suas generalizações.

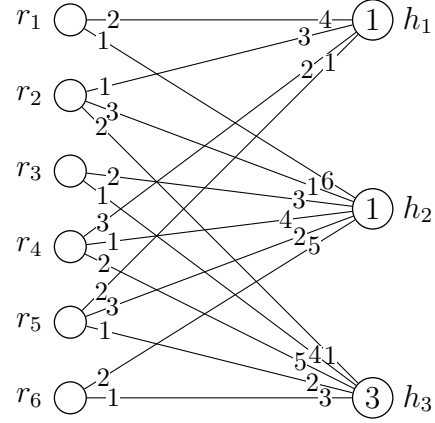
A Figura 3.3a mostra uma instância do HR com a representação por listas de preferências (daqui em diante, assumiremos que  $r_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , é um residente e  $h_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , é um hospital). Note que as listas de preferências não precisam mais ser completas, ou seja, cada agente não precisa mais fornecer uma lista de preferências que classifique todos os agentes do conjunto oposto. A Figura 3.3b apresenta a instância por um grafo de preferências. Neste problema, os grafos são também bipartidos, mas não necessariamente são completos.

A instância apresentada na Figura 3.3 admite apenas dois emparelhamentos estáveis, a saber,  $M_1 = \{(r_2, h_1), (r_3, h_3), (r_4, h_2), (r_5, h_3), (r_6, h_3)\}$  e  $M_2 = \{(r_2, h_3), (r_3, h_2), (r_4, h_1), (r_5, h_3), (r_6, h_3)\}$ . A Figura 3.4 apresenta tais emparelhamentos em um grafo de preferências.



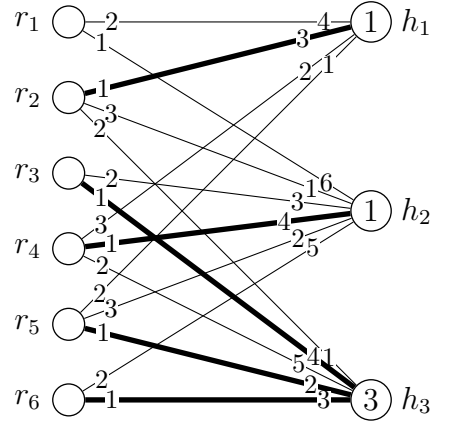
$r_1: h_2, h_1$   
 $r_2: h_1, h_3, h_2$   
 $r_3: h_3, h_2$   
 $r_4: h_2, h_3, h_1$   
 $r_5: h_3, h_1, h_2$   
 $r_6: h_2, h_3$   
 $h_1 (1): r_5, r_4, r_2, r_1$   
 $h_2 (1): r_2, r_5, r_3, r_4, r_6, r_1$   
 $h_3 (3): r_2, r_5, r_6, r_3, r_4$

(a)

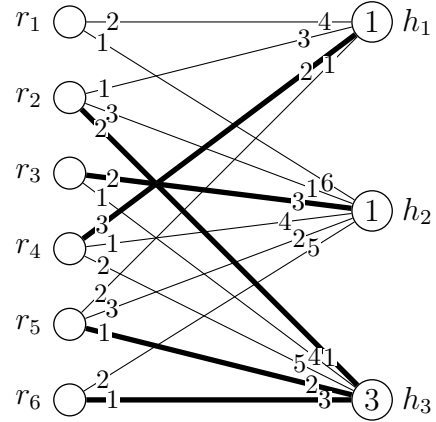


(b)

Figura 3.3: Exemplo de uma instância do HR especificada por listas de preferências (a) e por um grafo de preferências (b)



(a)  $M_1 = \{(r_2, h_1), (r_3, h_3), (r_4, h_2), (r_5, h_3), (r_6, h_3)\}$



(b)  $M_2 = \{(r_2, h_3), (r_3, h_2), (r_4, h_1), (r_5, h_3), (r_6, h_3)\}$

Figura 3.4: Emparelhamentos estáveis  $M_1$  e  $M_2$  representados em um grafo de preferências

### 3.3 Número de Emparelhamentos Estáveis

Vimos anteriormente que a instância do SM exibida na Figura 3.1 admitia dois emparelhamentos estáveis. Uma questão natural sobre o número de emparelhamentos estáveis é se esse número pode ser muito grande. Nesta seção, provaremos que uma instância do SM pode possuir um número exponencial de emparelhamentos estáveis no seu tamanho  $n = |U| = |W|$ . Note que esse resultado também vale para o HR, visto que o SM é um caso particular dele.

**Lema 3.1.** *Dadas duas instâncias do SM de tamanhos  $m$  e  $n$ , cada uma contendo  $x$  e  $y$  emparelhamentos estáveis, respectivamente, existe uma instância do SM de tamanho  $mn$  com ao menos  $\max\{yx^n, xy^m\}$  emparelhamentos estáveis.*

*Demonstração.* Suponha que os homens e as mulheres da instância de tamanho  $m$  são nomeados de  $a_1, \dots, a_m$  e  $c_1, \dots, c_m$ , respectivamente, e que os da instância de tamanho  $n$  são  $b_1, \dots, b_n$  e  $d_1, \dots, d_n$ , respectivamente. Considere a instância de tamanho  $mn$  formada da seguinte forma:

- Os homens são nomeados  $(a_i, b_j)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
- As mulheres são nomeadas  $(c_i, d_j)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
- Um homem  $(a_i, b_j)$  prefere  $(c_k, d_l)$  a  $(c_{k'}, d_{l'})$  se  $l \neq l'$  e  $b_j$  prefere  $d_l$  a  $d_{l'}$ , ou se  $l = l'$  e  $a_i$  prefere  $c_k$  a  $c_{k'}$ ;
- Uma mulher  $(c_i, d_j)$  prefere  $(a_k, b_l)$  a  $(a_{k'}, b_{l'})$  se  $l \neq l'$  e  $d_j$  prefere  $b_l$  a  $b_{l'}$ , ou se  $l = l'$  e  $c_i$  prefere  $a_k$  a  $a_{k'}$ .

Seja  $M_1, \dots, M_n$  qualquer sequência de emparelhamentos estáveis (não necessariamente distintos) da instância de tamanho  $m$  e seja  $M$  qualquer emparelhamento estável da instância de tamanho  $n$ . O número total de escolhas para  $M_1, \dots, M_n$  e  $M$  é claramente  $yx^n$ . Afirmamos então que o mapeamento

$$(a_i, b_j) \Rightarrow (M_j(a_i), M(b_j))$$

é um emparelhamento estável para a instância criada.

É fácil perceber que este mapeamento gera um emparelhamento, uma vez que  $M_j$  e  $M$  são emparelhamentos. Suponha então que este emparelhamento é bloqueado pelo par  $((a, b), (c, d))$ . Logo, dentre as seguintes condições, devemos satisfazer (i) ou (ii) juntamente com (iii) ou (iv):

- (i)  $d \succ_b M(b)$ ;

(ii)  $d = M(b)$  e  $c \succ_a M_j(a)$ ;

(iii)  $b \succ_d M(d)$ ;

(iv)  $b = M(d)$  e  $a \succ_c M_j(c)$ .

Dentre as quatro possibilidades acima, temos que a combinação de (i) e (iii) contraria a estabilidade de  $M$ , enquanto que a combinação de (ii) e (iv) contraria a de  $M_j$ . As outras duas combinações geram uma incompatibilidade.

Assim, a afirmação é justificada e mostramos uma instância com pelo menos  $yx^n$  emparelhamentos estáveis. Além disso, trocando os papéis das duas instâncias originais, podemos estabelecer o resultado correspondente para  $xy^m$ .  $\square$

**Teorema 3.1.** *Para cada  $n \geq 0$ , onde  $n$  é uma potência de 2, existe uma instância do SM de tamanho  $n$  com ao menos  $2^{n-1}$  emparelhamentos estáveis.*

*Demonstração.* A prova é por indução em  $n$ . A instância trivial na qual  $n = 2^0$ , admite apenas um único emparelhamento estável. Suponha que o resultado é verdade para  $n = 2^k$ . Considere a seguinte instância de tamanho 2:

$m_1: w_1, w_2$

$m_2: w_2, w_1$

$w_1: m_2, m_1$

$w_2: m_1, m_2$

Esta instância possui apenas 2 emparelhamentos estáveis. Considerando o Lema 3.1,  $m = 2$ ,  $x = 2$  e pela hipótese de indução  $y = 2^{2^k-1}$ . Além disso, pelo lema, existe uma instância de tamanho  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$  com ao menos  $\max\{2 \cdot (2^{2^k-1})^2, 2^{2^k-1} \cdot 2^{2^k}\} = 2^{2^{k+1}-1}$  emparelhamentos estáveis, como requerido.  $\square$

Os resultados apresentados anteriormente mostram que um algoritmo que lista todos os emparelhamentos estáveis de uma instância do SM pode requerer um número exponencial de passos. Gusfield [19] apresentou um algoritmo com tal característica de complexidade  $O(n^2 + Kn)$  de tempo e  $O(n^2)$  de espaço, onde  $K$  é o número de emparelhamentos estáveis da instância dada. Atualmente, não se conhece um limitante superior não trivial para o número máximo de emparelhamentos estáveis possíveis de uma instância de tamanho  $n$ . Temos também que o problema de contar o número de emparelhamentos estáveis de uma dada instância  $I$  do SM é #P-completo [27] e, desta forma, não possui um algoritmo polinomial, a menos que  $P = NP$ .

### 3.4 Encontrando Emparelhamentos Estáveis

Um dos principais resultados obtidos por Gale e Shapley [18] foi demonstrar que toda instância do HR possui ao menos um emparelhamento estável fornecendo um algoritmo que ficou conhecido com o **Algoritmo de Gale-Shapley** (GS). No GS temos que os agentes de um dos conjuntos ficam fazendo propostas de emparelhamento para os agentes do outro conjunto, que aceitam ou rejeitam essas propostas. Assim, existem duas versões do GS. Na versão **orientada aos residentes** (RGS), apresentada na Seção 3.4.1, os residentes fazem as propostas para os hospitais. Na versão **orientada aos hospitais** (HGS), apresentada na Seção 3.4.2, temos que os hospitais fazem as propostas de emparelhamento.

#### 3.4.1 Algoritmo de Gale-Shapley Orientado aos Residentes

Na versão orientada aos residentes do algoritmo de Gale-Shapley, os residentes fazem as propostas de emparelhamento para os hospitais. Primeiro vamos descrever o algoritmo original de Gale-Shapley e depois vamos apresentar uma pequena extensão desse algoritmo que diminui as listas de preferências removendo alguns pares de elementos que não podem pertencer a emparelhamentos estáveis. Essa última versão facilitará algumas provas que veremos mais adiante.

Em cada iteração do algoritmo, um residente  $r$  que não está emparelhado propõe um emparelhamento para o melhor hospital que ainda não recusou uma proposta sua. Quando um hospital  $h$  recebe uma proposta de um residente  $r$ ,  $h$  sempre aceita se ele não está cheio e eles iniciam um emparelhamento. Se  $h$  estiver cheio, então ele compara  $r$  com o pior residente  $r'$  emparelhado a ele. Se  $h$  preferir  $r$  a  $r'$ , então  $h$  rompe o emparelhamento com  $r'$ , que volta a ser não emparelhado, e inicia um com  $r$ . Se  $h$  preferir  $r'$  a  $r$ , então  $h$  rejeita a proposta de  $r$ . Dessa forma, um hospital  $h$  sempre mantém as melhores propostas recebidas até o momento. O algoritmo continua iterando enquanto existir um residente que não está emparelhado e que não foi rejeitado por todos os hospitais da sua lista de preferências. O Algoritmo 1 apresenta um pseudo-código para o algoritmo original de Gale-Shapley orientado aos residentes.

A versão do algoritmo RGS que usaremos é apresentada no Algoritmo 2. A principal diferença entre esse algoritmo e o original é que quando um hospital  $h$  fica cheio, todos os pares  $(s', h)$  são removidos, onde  $s'$  é um sucessor do pior residente  $s$  emparelhado a  $h$  na lista de  $h$  (linhas 11-13). Veremos no Lema 3.3 que  $(s', h)$  não é um par estável. Uma consequência da remoção desses pares é que se  $h$  fica cheio, não é preciso mais testar se o residente proponente  $r$  possui uma preferência maior do que o pior residente  $r'$  emparelhado a  $h$  pois, caso essa preferência não existisse, o par  $(r, h)$  teria sido removido.

Através do uso de estruturas de dados adequadas podemos implementar o RGS em

**Algoritmo 1** Algoritmo original de Gale-Shapley orientado aos residentes (RGS)**Entrada:** Uma instância  $I$  do HR**Saída:** Um emparelhamento estável  $M$ 


---

```

1:  $M \leftarrow \emptyset$  ▷ Conjunto que armazenará os pares emparelhados
2: Enquanto existir um residente  $r$  que não está emparelhado e que ainda não foi
   rejeitado por todos os hospitais de sua lista de preferências Faça
3:   Seja  $h$  o melhor hospital para  $r$  que ainda não o rejeitou
4:   Se  $h$  está cheio Então
5:     Seja  $r'$  o pior residente emparelhado a  $h$ 
6:     Se  $r \succ_h r'$  Então
7:        $M \leftarrow M \setminus \{(r', h)\}$  ▷  $h$  desfaz o emparelhamento com  $r'$ 
8:        $M \leftarrow M \cup \{(r, h)\}$  ▷  $r$  inicia um emparelhamento com  $h$ 
9:     Fim Se
10:  Senão
11:     $M \leftarrow M \cup \{(r, h)\}$  ▷  $r$  inicia um emparelhamento com  $h$ 
12:  Fim Se
13: Fim Enquanto
14: Devolve  $M$ 

```

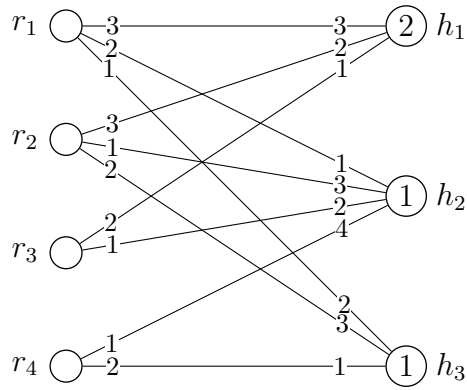
---

$O(m)$  [51, seq. 1.3.3], onde  $m$  é o número de pares aceitáveis de residentes e hospitais. Como Ng e Hirschberg [56] forneceram um limitante inferior de  $\Omega(m)$  para o problema de encontrar um emparelhamento estável para uma instância do SM, e este é um caso restrito do HR, temos que esse limitante também se aplica ao HR. Assim, o RGS é um algoritmo ótimo. A Figura 3.5 ilustra uma execução do RGS sob uma instância do HR.

Os Lemas 3.2 e 3.3 junto com o Teorema 3.2 provam a corretude o RGS. Antes disso, vamos definir alguns termos que serão utilizados durante as provas. Durante a execução do RGS, as listas de preferências são modificadas através da remoção de alguns agentes. Por fim, definimos  $(r^\succ, h) = \{(r', h) \mid r' \succ_h r\}$  e  $(r, h^\succ) = \{(r, h') \mid h' \succ_r h\}$ .

**Lema 3.2.** *Para uma dada instância do HR, todas as execuções possíveis do RGS terminam com as mesmas listas de preferências.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que as execuções  $E$  e  $E'$  do RGS resultaram em listas de preferências distintas ao término das duas execuções. Suponha sem perda de generalidade que o par  $(r, h)$  está contido nas listas de preferências resultantes da execução  $E$ , mas não nas de  $E'$  e que  $(r, h)$  foi o primeiro par removido durante a execução  $E'$  que não foi removido durante a execução de  $E$ . No momento em que  $(r, h)$  foi removido em  $E'$ ,  $h$  estava emparelhado a um conjunto  $R'$  de  $c(h)$  residentes preferíveis a  $r$  para  $h$ , caso contrário  $(r, h)$  não teria sido removido. Seja  $M$  o conjunto de pares de residentes e hospitais emparelhados ao final de  $E$ . Como o par  $(r, h)$  não foi removido durante a execução de  $E$ , temos que  $|M \cap (r^\succ, h)| < c(h)$ . Então, existe um residente  $r' \in R'$  tal que



(a) Instância do HR

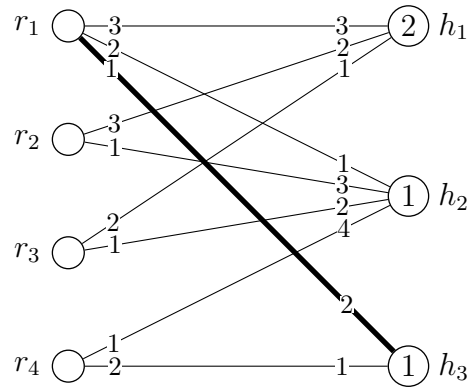
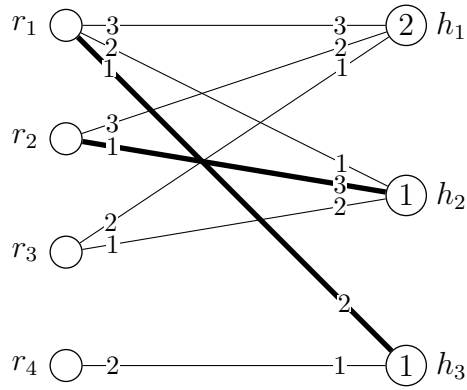
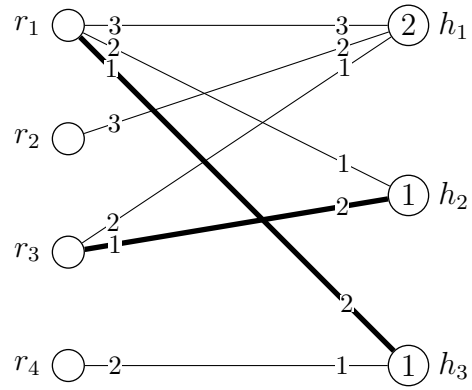
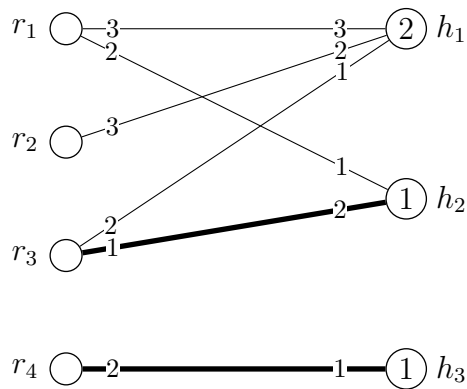
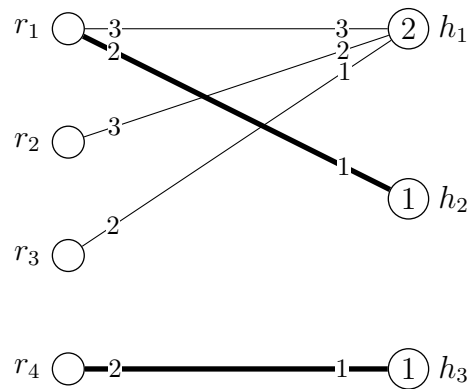
(b)  $r_1$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_3$  e o par  $(r_2, h_3)$  é removido, pois  $h_3$  fica lotado(c)  $r_2$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_2$  e o par  $(r_4, h_2)$  é removido(d)  $r_3$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_2$ , o emparelhamento de  $r_2$  com  $h_2$  termina e o par  $(r_2, h_2)$  é removido(e)  $r_4$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_3$ , o emparelhamento de  $h_3$  com  $r_1$  termina e o par  $(r_1, h_3)$  é removido(f)  $r_1$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_2$ , o emparelhamento entre  $r_3$  e  $h_2$  termina e o par  $(r_3, h_2)$  é removido

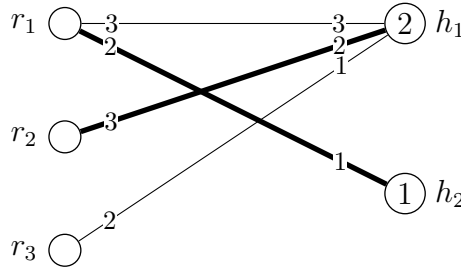
Figura 3.5: Exemplo de uma das possíveis execuções do RGS sobre uma instância do HR

**Algoritmo 2** Algoritmo de Gale-Shapley orientado aos residentes (RGS)**Entrada:** Uma instância  $I$  do HR**Saída:** Um emparelhamento estável  $M$ 

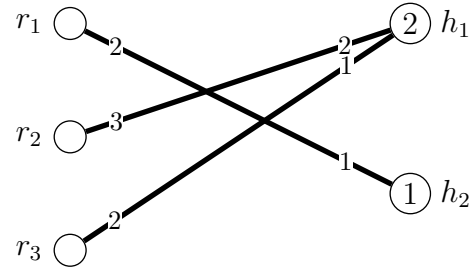
```

1:  $M \leftarrow \emptyset$  ▷ Conjunto que armazenará os pares emparelhados
2: Enquanto existir um residente  $r$  que não está emparelhado e cuja lista de preferências não se encontra vazia Faça
3:   Seja  $h$  o primeiro hospital da lista de preferências de  $r$ 
4:   Se  $h$  está cheio Então
5:     Seja  $r'$  o pior residente emparelhado a  $h$ 
6:      $M \leftarrow M \setminus \{(r', h)\}$  ▷  $h$  desfaz o emparelhamento com  $r'$ 
7:   Fim Se
8:    $M \leftarrow M \cup \{(r, h)\}$  ▷  $r$  inicia um emparelhamento com  $h$ 
9:   Se  $h$  está cheio Então
10:    Seja  $s$  o pior residente emparelhado a  $h$ 
11:    Para todo sucessor  $s'$  de  $s$  na lista de  $h$  Faça
12:      remova  $s'$  da lista de  $h$  e  $h$  da lista de  $s'$ 
13:    Fim Para
14:   Fim Se
15: Fim Enquanto
16: Devolve  $M$ 

```



(g)  $r_2$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_1$ , o que não desencadeia nenhuma remoção porque  $h_1$  não está cheio



(h)  $r_3$  propõe e inicia um emparelhamento com  $h_1$ , levando à remoção do par  $(r_1, h_1)$ . Como não existe um residente não emparelhado cuja lista de preferências não seja vazia, esse emparelhamento é estável

Figura 3.5: Exemplo de uma das possíveis execuções do RGS sobre uma instância do HR (continuação)

$r' \succ_h r$  e  $(r', h) \notin M$ . Como  $(r, h)$  não foi removido durante a execução de  $E$  e  $r' \succ_h r$ , temos que o par  $(r', h)$  também não foi. Assim, temos que  $M(r') = h'$ ,  $h' \succ_{r'} h$  e  $(r', h')$  pertence às listas de preferências resultantes da execução de  $E$ . No momento em que  $(r, h)$  foi removido durante a execução  $E'$ , temos que o hospital  $h$  estava na cabeça da lista de preferências de  $r'$  e assim o par  $(r', h')$  já havia sido removido das listas de preferências, o que contraria a hipótese de que o par  $(r, h)$  havia sido o primeiro par removido durante a execução de  $E'$  e que pertencia as listas de preferências resultantes da execução  $E$ .  $\square$

**Lema 3.3.** *Se um par  $(r, h)$  não está presente nas listas de preferências resultantes da execução do RGS, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i)  $(r, h)$  não é um par estável;
- (ii)  $h$  prefere todos os residentes da sua lista de preferências resultante a  $r$ ;
- (iii)  $(r, h)$  não pode bloquear nenhum emparelhamento que está contido nas listas de preferências resultantes.

*Demonstração.* Para provarmos o item (i), suponha por contradição que uma execução  $E$  do RGS removeu um par estável  $(r, h)$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $(r, h)$  foi o primeiro par estável removido em  $E$ . Seja  $M$  o conjunto de pares de agentes emparelhados no momento da remoção do par  $(r, h)$ . Então temos que  $|M \cap (r^\succ, h)| = c(h)$ , caso contrário o RGS não teria removido o par  $(r, h)$ . Seja  $M'$  um emparelhamento estável que contém o par  $(r, h)$ . Então existe um residente  $r'$  tal que  $(r', h) \in M \cap (r^\succ, h)$  e que  $(r', h) \notin M'$ . Se  $r'$  não está emparelhado em  $M'$ , então temos que  $M'$  é bloqueado pelo par  $(r', h)$ . Suponha então que  $r'$  está emparelhado em  $M'$ . Como  $h$  estava na cabeça de  $r'$  no momento em que  $(r, h)$  foi removido durante a execução  $E$  e este foi o primeiro par estável removido durante a execução de  $E$ , temos que  $r'$  não prefere nenhum parceiro estável a  $h$ . Logo,  $h \succ_{r'} M'(r')$ . Como  $r' \succ_h r$ , temos que o par  $(r', h) \notin M'$  bloqueia o suposto emparelhamento estável  $M'$ .

A prova do item (ii) é trivial e o item (iii) é consequência do (ii).  $\square$

**Teorema 3.2.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) O emparelhamento resultante da execução do RGS é estável;
- (ii) No emparelhamento citado acima, cada residente emparelhado é emparelhado ao seu melhor parceiro estável e cada residente que não foi emparelhado não é emparelhado em qualquer emparelhamento estável.



*Demonstração.* Para demonstrarmos a afirmação (i), primeiro note que, pelo item (iii) do Lema 3.3, nenhum par ausente nas listas resultantes da execução do RGS pode bloquear o emparelhamento resultante. Como cada residente está emparelhado com o hospital da cabeça da sua lista, temos também que nenhum par contido nelas pode bloquear o emparelhamento resultante. Logo, tal emparelhamento é estável.

A primeira parte da afirmação (ii) é consequência do item (i) do Lema 3.3 e do fato de que cada residente é emparelhado ao hospital da cabeça da sua lista. A segunda parte segue também do item (i) do Lema 3.3 e do fato de que a lista de preferências resultante de qualquer residente que não está emparelhado no emparelhamento resultante é vazia.  $\square$

O Teorema 3.2 justifica o fato de nos referirmos ao emparelhamento estável gerado pelo RGS como **ótimo para os residentes**. Vamos analisar agora qual a relação dos hospitais com o emparelhamento ótimo para os residentes gerado pelo RGS.

É natural definirmos que um residente  $r$  **prefere um emparelhamento**  $M$  a um  $M'$  se  $M(r) \succ_r M'(r)$ . Porém, essa tarefa não é tão óbvia quando tentamos definir essa relação de preferência entre dois emparelhamentos para um hospital. O Lema 3.4 e o Teorema 3.3 nos mostrarão que, se  $M$  e  $M'$  são emparelhamentos estáveis, então cada hospital também possui uma forma óbvia de escolher entre dois emparelhamentos.

**Lema 3.4.** *Sejam  $M$  e  $M'$  emparelhamentos estáveis para uma instância do HR. Suponha que o residente  $r$  é emparelhado ao hospital  $h$  em  $M$ , mas não em  $M'$ . Se  $r$  prefere  $M$  a  $M'$ , então  $h$  prefere o pior residente em  $M'(h) \setminus M(h)$  ao pior residente de  $M(h) \setminus M'(h)$ . Caso contrário, se  $r$  prefere  $M'$  a  $M$ , então  $h$  prefere o pior residente de  $M(h) \setminus M'(h)$  ao pior residente de  $M'(h) \setminus M(h)$ .*

*Demonstração.* Denotamos por  $R$  e  $R'$  o conjunto de residentes que preferem  $M$  a  $M'$  e  $M'$  a  $M$ , respectivamente. Seja  $H$  o conjunto de hospitais  $h$  que preferem o pior residente de  $M(h) \setminus M'(h)$  ao pior residente de  $M'(h) \setminus M(h)$ . Seja  $H'$  o conjunto de hospitais  $h$  que preferem o pior residente de  $M'(h) \setminus M(h)$  ao pior residente de  $M(h) \setminus M'(h)$ . Note que  $R \cap R' = \emptyset$  e que todo residente que é emparelhado a hospitais diferentes em  $M$  e  $M'$  está ou em  $R$  ou em  $R'$ . Note também que  $H \cap H' = \emptyset$  e que todo hospital que não é emparelhado ao mesmo conjunto de residentes em  $M$  e  $M'$  está ou em  $H$  ou em  $H'$ . Para provar o lema, é suficiente mostrar que (i)  $r \in R \Rightarrow M(r) \in H'$  e (ii)  $r \in R' \Rightarrow M(r) \in H$ .

Em  $M$ , nenhum residente de  $R$  pode ser emparelhado a um hospital de  $H$ , pois esses residente e hospital bloqueariam  $M'$ . Assim, todo residente em  $R$  está emparelhado em  $M$  a um hospital de  $H'$ . Portanto, estabelecemos o primeiro dos nossos requisitos e disso também segue que

$$|R| \leq \sum_{h \in H'} n(h), \quad (3.1)$$

onde  $n(h)$  denota o número de residentes que são emparelhados a  $h$  em  $M$  mas não em  $M'$ .

Similarmente, em  $M'$ , nenhum residente em  $R'$  pode ser emparelhado a um hospital em  $H'$ , pois esses residente e hospital bloqueariam  $M$ . Assim, todo residente em  $R'$  é emparelhado em  $M'$  a um hospital do conjunto  $H$  e, desta forma,

$$|R'| \leq \sum_{h \in H} n'(h), \quad (3.2)$$

onde  $n'(h)$  denota o número de residentes que estão emparelhados a  $h$  em  $M'$  mas não em  $M$ .

Além disso,

$$|R| + |R'| = \sum_{h \in H'} n(h) + \sum_{h \in H} n'(h), \quad (3.3)$$

onde cada lado representa o número de residentes que são emparelhados a diferentes hospitais em  $M$  e  $M'$ . Isto é obvio para o lado esquerdo e também é verdade para o lado direito, porque como já observado, todo hospital que não é emparelhado ao mesmo conjunto de residentes em  $M$  e  $M'$  está em  $H$  ou  $H'$ , mas não em ambos.

Juntando 3.1, 3.2 e 3.3, tem-se que 3.1 e 3.2 são satisfeitas na igualdade. Assim, em  $M$ , todo residente em  $R'$  deve ser emparelhado a um hospital em  $H$  e isto completa a prova.  $\square$

**Teorema 3.3.** *Suponha que  $M$  e  $M'$  são dois emparelhamentos estáveis para uma instância do HR e que o hospital  $h$  recebe dois conjuntos de residentes distintos, ou seja,  $M(h) \setminus M'(h) \cup M'(h) \setminus M(h) \neq \emptyset$ . Se  $h$  prefere o pior residente em  $M(h) \setminus M'(h)$  ao pior residente em  $M'(h) \setminus M(h)$ , então  $h$  prefere todos os residentes em  $M(h)$  a todos os residentes em  $M'(h) \setminus M(h)$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  um membro arbitrário de  $M(h)$  e  $r'$  um membro arbitrário de  $M'(h) \setminus M(h)$ . Na notação da prova do Lema 3.4,  $h$  é um membro do conjunto  $H$ , e então  $r'$  deve ser um membro do conjunto  $R'$ . Então,  $r'$  prefere  $h$  (ao qual foi emparelhado em  $M'$ ) a  $M(r')$ . Se  $h$  preferisse  $r'$  a  $r$ , o par  $(r', h)$  bloquearia  $M$ . Logo,  $h$  deve preferir  $r$  a  $r'$ . Como  $r$  e  $r'$  foram escolhidos em seus conjuntos de forma arbitrária, o resultado afirmado vale.  $\square$

O Teorema 3.3 nos mostra que um hospital  $h$  que é emparelhado a conjuntos distintos de residentes em dois emparelhamentos estáveis, digamos  $M$  e  $M'$ , ou prefere todos os residentes de  $M(h)$  a todos os de  $M'(h) \setminus M(h)$ , ou prefere todos os residentes de  $M'(h)$  a todos os de  $M(h) \setminus M'(h)$ . Se  $h$  prefere todos os residentes de  $M(h)$  aos de  $M'(h) \setminus M(h)$ , então é natural dizer que  $h$  **prefere o emparelhamento**  $M$  a  $M'$ . Combinando o

Lema 3.4 com o Teorema 3.3, podemos concluir então que se  $M_R$  é o emparelhamento estável ótimo para os residentes e  $M$  é um emparelhamento estável qualquer, então cada hospital prefere o emparelhamento estável  $M$  ao emparelhamento estável  $M_R$ . Por esse motivo, também dizemos que o emparelhamento estável ótimo para os residente é **péssimo para os hospitais**.

Por fim, cabe notar que o RGS sempre consegue produzir um emparelhamento estável (Teorema 3.2), o que nos leva ao seguinte resultado.

**Corolário 3.1.** *Toda instância do HR admite ao menos um emparelhamento estável.*

### 3.4.2 Algoritmo de Gale-Shapley Orientado aos Hospitais

Nessa seção vamos apresentar o algoritmo de Gale-Shapley orientado aos hospitais. Dessa vez, apresentaremos apenas a versão estendida. Na seção anterior, apresentamos a versão original por esta ser a mais comum na literatura.

O funcionamento do HGS é muito parecido com o funcionamento do RGS, uma vez que ambos utilizam a ideia de que um conjunto de agentes faz propostas para seus elementos de maior preferência enquanto o outro conjunto de agentes sempre mantém um emparelhamento temporário com os agentes que fizeram as melhores propostas até o momento. Na verdade, o GS está mais para *framework* de Gale-Shapley, pois utilizar essa ideia simples com algumas adaptações nos ajuda a encontrar emparelhamentos estáveis para diversos problemas de estabilidade. No decorrer dessa dissertação é possível perceber que a maioria dos algoritmos apresentados são adaptações desse mecanismo.

No HGS, cada hospital  $h$  que não está cheio propõe um emparelhamento ao seu residente  $r$  de maior preferência que ainda não está emparelhado a  $h$ . Cada residente  $r$  emparelhado a um hospital  $h$  remove todos os hospitais sucessores de  $h$  de sua lista de preferências, uma vez que, como a ideia do algoritmo é que cada residente sempre fique emparelhado à melhor proposta fornecida a ele até o momento,  $r$  não iria aceitar a proposta de nenhum desses hospitais sucessores. Obviamente, ao removermos um hospital  $h'$  da lista de  $r$ , também removemos  $r$  da lista de  $h'$ , de forma que  $h'$  nunca irá fazer uma proposta para  $r$ , pois este iria recusar de qualquer maneira. Então, quando um residente  $r$  recebe uma proposta de um hospital  $h$ , se ele estava emparelhado a algum hospital, ele rompe o emparelhamento atual, pois um hospital melhor está oferecendo uma vaga para ele. Em seguida, ele remove todos os hospitais sucessores deste, pois ele não irá aceitar a vaga desses hospitais, uma vez que ele está emparelhado a um hospital melhor. Note que um residente sempre troca um hospital  $h'$  por um hospital  $h$  que ele considera melhor. Outra observação é que um residente emparelhado continua emparelhado até o final da execução, pois apenas os residentes fazem rejeições e, quando eles as fazem, é por um outro hospital. Da mesma forma que o RGS, temos que através do uso de estruturas de

dados adequadas podemos implementar o HGS em  $O(m)$  [51, seq. 1.3.3], onde  $m$  é o número de pares aceitáveis de residentes e hospitais. Assim, temos que o HGS também é um algoritmo ótimo. O Algoritmo 3 apresenta um pseudo-código para o HGS e a Figura 3.6 apresenta uma execução desse algoritmo em uma instância do HR.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo de Gale-Shapley orientado aos hospitais (HGS)

---

**Entrada:** Uma instância  $I$  do HR

**Saída:** Um emparelhamento estável  $M$

```

1:  $M \leftarrow \emptyset$  ▷ Conjunto que armazenará os pares emparelhados
2: Enquanto (existe um hospital  $h$  que não está cheio) e (a lista de  $h$  contém um
   residente  $r$  que não está emparelhado a  $h$ ) Faça
3:   Seja  $r$  o residente de maior preferência para  $h$  que não está emparelhado a ele.
4:   Se  $r$  está emparelhado a um hospital  $h'$  Então
5:      $M \leftarrow M \setminus \{(r, h')\}$ 
6:   Fim Se
7:    $M \leftarrow M \cup \{(r, h)\}$ 
8:   Para todo sucessor  $h'$  de  $h$  na lista de  $r$  Faça
9:     remova  $h'$  da lista de  $r$  e  $r$  da lista de  $h'$ 
10:  Fim Para
11: Fim Enquanto
12: Devolve  $M$ 

```

---

O lema a seguir mostra que apesar da definição do HGS permitir um certo indeterminismo, afinal ele não especifica a ordem em que os hospitais fazem as propostas, ele sempre termina com as mesmas listas de preferências. Este lema, juntamente com o Lema 3.6 e o Teorema 3.4, mostram a corretude do HGS.

**Lema 3.5.** *Para uma dada instância do HR, todas as possíveis execuções do HGS terminam com as mesmas listas de preferências.*

*Demonstração.* Sejam  $E$  e  $E'$  duas execuções diferentes do HGS e suponha por contradição que o par  $(r, h)$  é removido durante  $E'$ , mas não durante  $E$ . Suponha ainda que tal par é o primeiro removido durante a execução de  $E'$  que não foi removido por  $E$ . A remoção de  $(r, h)$  ocorreu porque  $r$  recebeu uma oferta de um hospital, digamos  $h'$ , que ele prefere a  $h$ . Assim, durante  $E$ ,  $h'$  nunca ofereceu uma vaga para  $r$  e, como o algoritmo parou, isso significa que  $h'$  está cheio com residentes que ele prefere a  $r$ . Desta forma, durante  $E'$ , um desses residentes deve ter sido removido da lista de  $h'$  antes que  $h'$  pudesse fazer uma proposta para  $r$ , o que contraria a nossa suposição.  $\square$

**Lema 3.6.** *Se um par  $(r, h)$  não está presente nas listas de preferências resultantes da execução do HGS, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

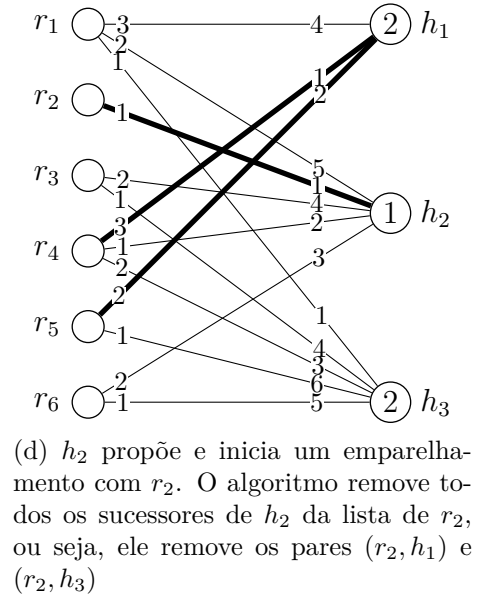
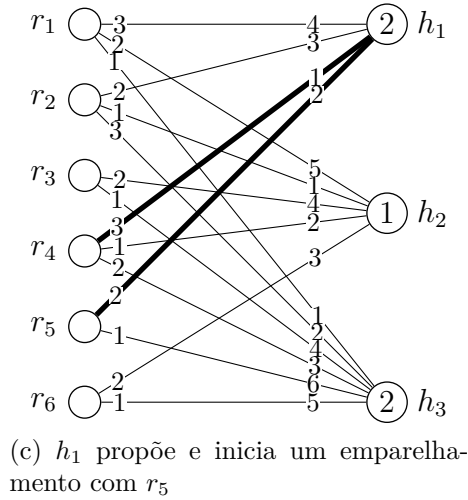
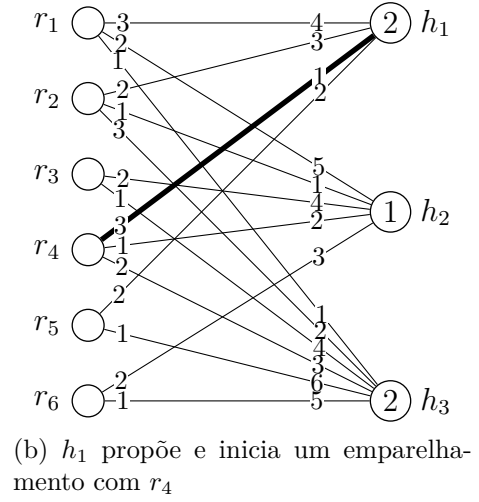
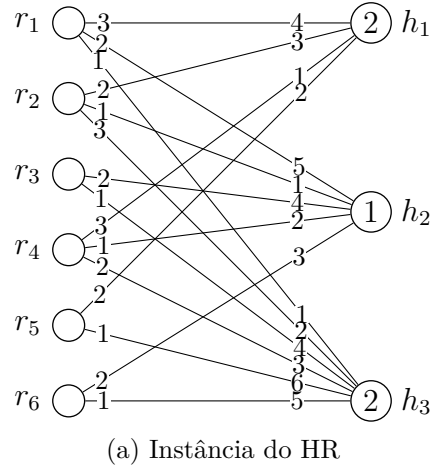
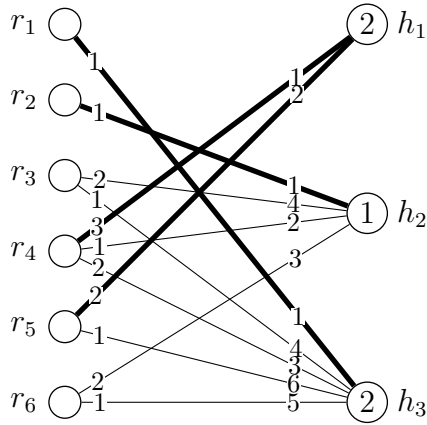
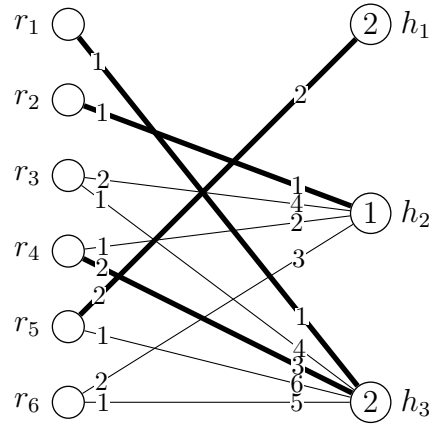


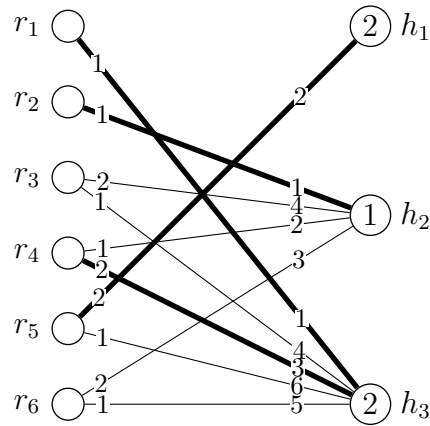
Figura 3.6: Exemplo de uma execução do HGS sobre uma instância do HR



(e)  $h_3$  propõe e inicia um emparelhamento com  $r_1$ . O algoritmo remove todos os sucessores de  $h_3$  na lista de  $r_1$ , ou seja, ele remove os pares  $(r_1, h_1)$  e  $(r_1, h_2)$



(f)  $h_3$  propõe e inicia um emparelhamento com  $r_4$  e o par  $(h_1, r_4)$  é removido



(g) O algoritmo termina porque não existe um hospital  $h$  tal que o número de residentes emparelhados a ele é menor do que  $c(h)$  e que possui um residente em sua lista de preferências que não está emparelhado a ele

Figura 3.6: Exemplo de uma execução do HGS sobre uma instância do HR (continuação)

- (i)  $(r, h)$  não pode ser um par estável;
- (ii)  $r$  prefere todos os hospitais da sua lista resultante a  $h$ ;
- (iii)  $(r, h)$  não pode bloquear nenhum emparelhamento que está contido nas listas resultantes.

*Demonstração.* Para demonstrarmos o item (i), suponha que  $(r, h)$  foi o primeiro par estável removido durante uma execução particular do HGS e que ele foi removido quando o hospital  $h'$  ofereceu uma vaga para  $r$ . Assim,  $r$  deve preferir  $h'$  a  $h$ . Temos que o número de pares estáveis  $(h', r')$  no qual  $h'$  prefere  $r'$  a  $r$  deve ser menor do que  $c(h')$ , caso contrário, um desses pares estáveis teria sido removido para que  $h'$  pudesse propor a  $r$ , o que contrariaria a nossa suposição de que  $(r, h)$  foi o primeiro par estável a ser removido. Desta forma, em qualquer emparelhamento estável que o par  $(r, h)$  pertença, temos que ou  $h'$  não está cheio ou existe um residente  $r'$  emparelhado a ele tal que  $h'$  prefere  $r$  a  $r'$ . Assim, o suposto emparelhamento estável seria bloqueado pelo par  $(r, h')$ .

O item (ii) é uma consequência imediata do funcionamento do algoritmo, porque um hospital  $h$  é removido da lista de um residente  $r$  apenas quando  $r$  torna-se emparelhado a um hospital que ele prefere a  $h$ .

O item (iii) é uma consequência do item (ii). □

**Teorema 3.4.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) O emparelhamento resultante do HGS é estável;
- (ii) No emparelhamento citado acima, um hospital  $h$  é emparelhado aos seus  $c(h)$  melhores parceiros estáveis ou a um conjunto menor do que  $c(h)$  residentes. No último caso, nenhum outro residente é emparelhado a  $h$  em qualquer emparelhamento estável;
- (iii) Cada residente é emparelhado nesse emparelhamento ao seu pior parceiro estável.

*Demonstração.* Para o item (i), temos que pelo item (iii) do Lema 3.6, o emparelhamento em questão não pode ser bloqueado por nenhum par que está ausente nas listas resultantes. Temos também que nenhum par presente na lista pode bloquear tal emparelhamento, pois todos os hospitais são emparelhados com residentes que estão no início de suas listas.

Se a lista resultante de  $h$  possui ao menos  $c(h)$  elementos, então  $h$  está emparelhado aos  $c(h)$  primeiros elementos de sua lista resultante. Como nenhum par estável está ausente dessas listas, temos que esses são os  $c(h)$  melhores parceiros estáveis de  $h$ . Se a lista de  $h$  contém menos do que  $c(h)$  residentes, então todos esses residentes estão emparelhados a

$h$  e, como nenhum par estável está ausente dessas listas, temos que  $h$  não possui outros parceiros estáveis. Assim, temos que o item (ii) é verdadeiro.

A afirmação do item (iii) segue do Lema 3.6 juntamente com o fato de que cada residente é emparelhado ao último hospital da sua lista resultante.  $\square$

O teorema anterior justifica o fato de nos referirmos ao emparelhamento gerado pelo HGS como **ótimo para os hospitais** e **péssimo para os residentes**.

### 3.4.3 Algoritmo de Gale-Shapley e o Problema do Casamento Estável

Como o SM é um caso particular do HR, podemos utilizar o RGS para produzir um emparelhamento estável para esse problema. Fazendo com que os homens se comportem como os residentes e as mulheres como os hospitais durante a execução do RGS, temos, pelos Teoremas 3.2 e 3.3 e pelo Lema 3.4, que cada homem é emparelhado à melhor mulher que ele poderia ser emparelhado em qualquer emparelhamento estável e que cada mulher é emparelhada ao pior homem que ela poderia ser emparelhada em um emparelhamento estável. Por isso, dizemos que esse emparelhamento é **ótimo para os homens** e **péssimo para as mulheres**. Invertendo-se os papéis durante a execução do RGS, ou seja, fazendo com que as mulheres se comportem como os residentes e os homens como os hospitais, temos que cada mulher é emparelhada ao melhor homem que ela poderia ser emparelhada em qualquer emparelhamento estável e que cada homem é emparelhado à pior mulher à qual ele poderia ser emparelhado. Por isso, dizemos que esse emparelhamento é **ótimo para as mulheres** e **péssimo para os homens**. Ao longo desse texto, denotaremos por  $M_U$  o emparelhamento ótimo para os homens e  $M_W$  o emparelhamento ótimo para as mulheres.

Pelo Teorema 3.4, temos que o HGS também produz o emparelhamento ótimo para os homens e péssimo para as mulheres, quando os homens se comportam como os hospitais e as mulheres como os residentes, e ótimo para as mulheres e péssimo para os homens, quando as mulheres se comportam como os hospitais e os homens como os residentes.

Basicamente, temos que tanto no RGS quanto no HGS, o sexo que faz as propostas encontra um emparelhamento que é ótimo para ele e péssimo para o sexo oposto. Isso se deve porque o RGS e o HGS basicamente são o mesmo algoritmo; eles apenas foram adaptados para lidar com a assimetria de uma instância do HR, o que não existe em uma instância do SM. Não é difícil perceber que tanto o HGS quanto o RGS vão se comportar de forma semelhante em uma instância do SM com relação às rejeições e aceitações de propostas (desde que a ordem em que os agentes propõem seja mantida e que o sexo que se comporte como residente no RGS se comporte como hospital no HGS). Por esse motivo



não faremos distinção entre o RGS e o HGS quando lidarmos com uma instância do SM, nos referindo apenas como o algoritmo de Gale-Shapley (GS).

Dizemos que o GS é **orientado aos homens** quando os homens estão fazendo as propostas e **orientado às mulheres** quando elas as fazem.

Vimos na Seção 3.3 que o número de emparelhamentos estáveis para uma instância do SM pode ser exponencial e que utilizando o GS podemos encontrar apenas dois: um que é ótimo para os homens e o outro que é ótimo para as mulheres. Na Seção 3.7 abordaremos o problema de encontrar um emparelhamento estável mais justo para ambos os sexos.

### 3.5 Teorema dos Hospitais Rurais

Nesta seção, apresentaremos um importante teorema que ficou conhecido com **Teorema dos Hospitais Rurais**. A origem de seu nome e contexto histórico remontam aos primeiros anos de funcionamento do algoritmo do NRMP. É comum que hospitais localizados em zonas rurais sejam declarados como inaceitáveis por uma parcela considerável dos candidatos, fenômeno este que resulta em um grande número de hospitais que não conseguem preencher todas as vagas ofertadas. Surgiram então as dúvidas: existe um algoritmo alternativo ao utilizado pelo NRMP para encontrar um emparelhamento estável? Qual seria seu impacto com relação aos hospitais rurais? A resposta fornecida pelo Teorema dos Hospitais Rurais é que não adianta trocar o algoritmo, pois cada hospital é emparelhado ao mesmo número de residentes em qualquer emparelhamento estável. O lema a seguir é muito importante para a apresentação de tal teorema.

**Lema 3.7.** *Para uma dada instância do HR, seja  $M$  o emparelhamento ótimo para os residentes e  $M'$  um emparelhamento estável qualquer. Se um hospital  $h$  não preenche todas as suas vagas em  $M'$ , então todo residente emparelhado a  $h$  em  $M$  também está emparelhado a  $h$  em  $M'$ .*

*Demonstração.* Se o residente  $r$  fosse emparelhado a  $h$  em  $M$  mas não em  $M'$ , então  $(r, h)$  bloqueia  $M'$ , já que  $h$  não está cheio em  $M'$  e  $r$  prefere  $h$  a qualquer outro parceiro estável.  $\square$

**Teorema 3.5** (Teorema dos Hospitais Rurais). *Para uma dada instância do HR:*

- (i) *Cada hospital é emparelhado ao mesmo número de residentes em qualquer emparelhamento estável;*
- (ii) *Exatamente os mesmos residentes não são emparelhados em qualquer emparelhamento estável;*

- (iii) *Qualquer hospital que não está cheio em um emparelhamento estável é emparelhado precisamente com o mesmo conjunto de residentes em todos os emparelhamentos estáveis.*

*Demonstração.* Para o item (i), seja  $M$  o emparelhamento ótimo para os residentes e seja  $M'$  qualquer outro emparelhamento estável. Primeiro, observe que se um residente não está emparelhado em  $M$ , então ele não pode ser emparelhado em nenhum outro emparelhamento estável, pois sua lista resultante da execução do RGS está vazia e temos, pelo item (i) do Lema 3.3, que o algoritmo não remove nenhum par estável. Desta forma, o número de residentes emparelhados a hospitais em  $M'$  não pode exceder o número de emparelhados em  $M$ . Pelo Lema 3.7, qualquer hospital que preenche todas as suas vagas em  $M$  também preenche em  $M'$ , bem como qualquer hospital que não está cheio em  $M$  deve ao menos preencher tantas vagas em  $M'$  quanto em  $M$ . Assim, todo hospital preenche ao menos tantas vagas em  $M'$  quanto em  $M$ . Contudo, como já observado antes, o número total de residentes emparelhados em  $M'$  não pode exceder o número total de emparelhados a  $M$ . Assim, cada hospital que não está cheio em  $M$  tem exatamente o mesmo número de residentes emparelhados em  $M'$ .

O item (ii) segue do item (i) e do fato de que nenhum residente que não está emparelhado em  $M$  pode ser emparelhado em  $M'$ . Já o item (iii), segue de (i) e do Lema 3.7.  $\square$

Uma consequência direta do teorema anterior é que todo emparelhamento estável para uma instância do HR possui a mesma cardinalidade.

### 3.6 Problema do Casamento Estável com Listas Incompletas

Em uma instância do HR, os agentes não precisam aceitar todos os agentes do conjunto oposto, isto é, cada agente fornece uma lista de preferências que classifica apenas os agentes do conjunto oposto com o qual ele tem algum interesse em ser emparelhado. A generalização do SM que permite que cada pessoa classifique apenas as pessoas do sexo oposto com as quais ela aceita se casar chama-se **Problema do Casamento Estável com Listas Incompletas** (SMI, de *Stable Marriage with Incomplete lists*). Geralmente, assume-se que o número de homens é igual ao número de mulheres em uma instância do SMI, mas vamos assumir que esse número pode ser diferente. Note que o SM é um caso restrito do SMI no qual cada pessoa acha todas as pessoas do sexo oposto aceitáveis e o número de homens é igual ao número de mulheres. Note também que o SMI é um caso restrito no HR no qual  $c(h) = 1$  para todo  $h \in H$ . Dessa forma, podemos usar a definição de par bloqueante do HR, que é dada a seguir, de forma adaptada.

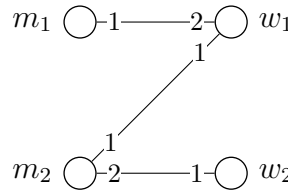


Figura 3.7: Instância do SMI que possui um emparelhamento estável que não é completo

**Definição 3.3** (Par bloqueante). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância do SMI, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um **par bloqueante** de  $M$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $m$  e  $w$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $m$  não está emparelhado ou  $w \succ_m M(m)$ ; e
- (iii)  $w$  não está emparelhada ou  $m \succ_w M(w)$ .

Note que, diferente de um emparelhamento estável para o SM, um emparelhamento estável para o SMI não precisa ser completo, isto é, pode acontecer que uma ou mais pessoas não sejam emparelhadas. A Figura 3.7 ilustra o exemplo de uma instância do SMI que não possui um emparelhamento completo. A instância apresentada possui apenas o emparelhamento estável  $M = \{(m_2, w_1)\}$ , que possui cardinalidade um, apesar dos conjuntos de homens e mulheres terem tamanho dois cada um.

Aplicando o Teorema 3.5 a uma instância do SMI, temos que todo emparelhamento estável possui a mesma cardinalidade e que cada conjunto de pessoas é particionado em dois: aquelas que são emparelhadas em todos os emparelhamentos estáveis e aquelas que não são emparelhadas em nenhum. O teorema a seguir mostra que é possível reduzir o SMI para uma instância do SM e vice-versa, de forma que o conjunto de emparelhamentos estáveis dos dois problemas tenham um mapeamento de 1-para-1.

**Teorema 3.6.** *Seja  $I$  uma instância do SMI com  $n_1$  homens e  $n_2$  mulheres. Então, existe uma instância  $I'$  do SM de tamanho  $n = \max\{n_1, n_2\}$ , tal que os emparelhamentos estáveis de  $I$  têm uma correspondência de 1-para-1 com os emparelhamentos estáveis de  $I'$ .*

*Demonstração.* Suponha que os homens e as mulheres em  $I$  são dados por  $U = \{m_1, \dots, m_{n_1}\}$  e  $W = \{w_1, \dots, w_{n_2}\}$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, assumamos que  $n_1 \leq n_2$ . Logo,  $n = n_2$ . Seja  $I'$  formado pelos homens  $U' = U \cup S$  e as mulheres  $W' = W$ , onde  $S = \{m_{n_1+1}, \dots, m_n\}$  e  $U \cap S = \emptyset$ . Seja  $W_i$  o conjunto de mulheres pertencentes à lista de preferências de  $m_i$  em  $I$  e  $U_j$  o conjunto dos homens pertencentes

à lista de preferências de  $w_j$  em  $I$ . Para cada homem  $m_i \in U$ , sua lista de preferências em  $I'$  é formada pela sua lista de preferências em  $I$  seguida das mulheres de  $W \setminus W_i$  em ordem crescente de subscrito, e para cada homem  $m_i \in S$ , sua lista de preferências em  $I'$  é formada pelas mulheres de  $W$  em ordem crescente de subscrito. Para cada mulher  $w_j \in W$ , sua lista em  $I'$  é formada pela sua lista de preferências em  $I$  seguida dos homens de  $U' \setminus U_j$  em ordem crescente de subscrito.

Afirmamos que existe um mapeamento de 1-para-1 entre os emparelhamentos estáveis de  $I$  e  $I'$ .

Dado um emparelhamento estável  $M$  para  $I$ , vamos mostrar como construir um emparelhamento estável  $M'$  em  $I'$  a partir de  $M$ . Seja  $U_M = \{m_{j_1}, \dots, m_{j_p}\}$  e  $W_M = \{w_{k_1}, \dots, w_{k_q}\}$  o conjunto de homens e mulheres, respectivamente, da instância  $I$  que não foram emparelhados em  $M$ . O número de mulheres não emparelhadas, portanto, é de  $p + n_2 - n_1 = q$ .

Seja  $U^* = \langle m_{j_1}, \dots, m_{j_q} \rangle$  a sequência dos homens de  $U_M \cup S$  ordenados em ordem crescente de subscrito e seja  $W^* = \langle w_{k_1}, \dots, w_{k_q} \rangle$  a sequência das mulheres de  $W_M$  ordenadas em ordem crescente de subscrito. Seja  $M^* = \{(m_{j_r}, w_{k_r}) : 1 \leq r \leq q\}$ . Vamos mostrar que o emparelhamento  $M' = M \cup M^*$  é estável para  $I'$ .

Suponha por contradição que  $(m_i, w_j)$  bloqueia  $M'$ . Seja  $M'(m_i) = w_k$  e  $M'(w_j) = m_l$ . Como  $(m_i, w_j)$  é um par bloqueante, então  $w_j \succ_{m_i} w_k$  e  $m_i \succ_{w_j} m_l$ . Vamos dividir a prova em dois casos:

- (i) Se  $m_i \in S$ : devido à forma como  $I'$  foi construído, temos que  $j < k$ . Como  $m_i \succ_{w_j} m_l$ , então  $m_l$  não pode pertencer a  $U_j$  e  $i < l$ , o que contraria o fato de como  $M'$  é construído.
- (ii) Se  $m_i \notin S$ : então  $m_i \in U$ . Suponha primeiro que  $(m_i, w_j)$  é um par aceitável para  $I$ . Se  $m_i$  não está emparelhado em  $M$ , então  $(m_i, w_j)$  bloqueia  $M$ , pois  $w_j$  ou não está emparelhada em  $M$  ou está emparelhada a  $m_l$  pela construção de  $M'$ , o que contraria a estabilidade de  $M$ . Analogamente, temos que  $w_j$  deve ser emparelhada em  $M$ , caso contrário  $(m_i, w_j)$  bloquearia  $M$ . Então  $m_i$  e  $w_j$  estão emparelhados em  $M$  e, pela construção de  $M'$ , temos que  $M(m_i) = w_k$  e  $M(w_j) = m_l$ . Assim, o par  $(m_i, w_k)$  bloqueia  $M$ , o que é uma contradição. Resta então analisar o caso onde o par  $(m_i, w_j)$  é um par inaceitável em  $I$ . Como  $m_i$  prefere  $w_j$  a  $w_k$  e  $(m_i, w_j)$  é um par inaceitável em  $I$ , pela construção de  $I'$  podemos concluir que  $(m_i, w_k)$  é um par inaceitável em  $I$ . Assim,  $j < k$ . Analogamente, temos que  $w_j$  prefere  $m_i$  a  $m_l$  e, pela construção de  $I'$ , podemos concluir que  $(m_l, w_j)$  também é um par inaceitável em  $I$ , o que implica que  $i < l$ . No entanto, isso contraria a forma como  $M'$  foi construído, pois  $m_i, m_l \in U_M \cup S$  e  $i < l$  e, assim,  $k$  deveria ser menor do que  $j$ .

Não é difícil perceber que dados dois emparelhamentos estáveis distintos  $M_1$  e  $M_2$  de  $I$ , eles serão mapeados para emparelhamentos estáveis distintos  $M'_1$  e  $M'_2$  de  $I'$  através desse procedimento.

Vamos mostrar agora que o conjunto dos emparelhamentos estáveis em  $I'$  possui um função injetora no conjunto dos emparelhamentos estáveis em  $I$ . Dado um emparelhamento estável  $M'$  para  $I'$ , construímos um emparelhamento  $M$  para  $I$  fazendo  $M = M' \cap (U \times W)$ . Primeiro vamos mostrar que  $M$  é estável para  $I$ .

Suponha por contradição que  $M$  é bloqueado por  $(m_i, w_j)$  e seja  $M'(m_i) = w_k$  e  $M'(w_j) = m_l$ . Como  $(m_i, w_j)$  não é um par bloqueante de  $M'$ , então ou  $m_i$  prefere  $w_k$  a  $w_j$  ou  $w_k$  prefere  $m_l$  a  $m_i$  (possivelmente ambos). Se  $w_j$  prefere  $m_l$  a  $m_i$ , então pela construção de  $I'$  e pelo fato de  $(m_i, w_j)$  ser um par aceitável, podemos concluir que  $(m_l, w_j)$  é um par aceitável para  $I$ . Logo,  $m_l \in U$ . Assim, temos que  $M(w_j) = m_l$ , contrariando a suposição de que  $(m_i, w_j)$  era um par bloqueante. Se  $m_i$  prefere  $w_k$  a  $w_j$ , podemos utilizar o mesmo raciocínio e também chegaremos a uma contradição. Assim, temos que  $M$  é estável.

Vamos mostrar agora que esse mapeamento é uma injeção. Suponha por contradição que existem dois emparelhamentos estáveis distintos  $M'$  e  $M''$  em  $I'$  tais que  $M = M' \cap (U \times W) = M'' \cap (U \times W)$ . Como  $M' \neq M''$ , então existe ao menos um par  $(m_i, w_j) \in M'$  tal que  $(m_i, w_j) \notin M''$ . Como os dois emparelhamentos são mapeados em  $M$ , temos que  $(m_i, w_j) \notin M$ ; portanto,  $m_i \in S$ . Seja  $M''(w_j) = m_l$  e suponha sem perda de generalidade que  $w_j$  prefere  $m_i$  a  $m_l$ . Vamos mostrar que existe uma sequência  $\langle m_{r_1}, \dots, m_{r_i} \rangle$  de homens e uma sequência  $\langle w_{s_1}, \dots, w_{s_i} \rangle$  de mulheres em  $I'$  tais que, para cada  $i \geq 1$ :

- (i)  $(m_{r_i}, w_{s_i}) \in M'$ ,  $(m_{r_{i-1}}, w_{s_i}) \in M''$  e  $w_{s_i}$  prefere  $m_{r_i}$  a  $m_{r_{i-1}}$ ;
- (ii)  $m_{r_i} \in S$ ; e
- (iii)  $r_i < r_{i-1}$ .

Para  $i = 1$ , basta fazer  $r_0 = l$ ,  $r_1 = i$ ,  $s_1 = j$ . Como  $m_i \in S$  e  $w_j$  prefere  $m_i$  a  $m_l$ , sabemos pela construção de  $I'$  que  $i < l$ . Logo, temos que o caso base vale. Suponha que a proposição vale para algum  $i = k$ . Seja  $M''(m_{r_k}) = w_{s_{k+1}}$ . Temos que  $m_{r_k}$  prefere  $w_{s_{k+1}}$  a  $w_{s_k}$ , caso contrário teríamos que  $(m_{r_k}, w_{s_k})$  bloquearia  $M''$ . Seja  $M'(w_{s_{k+1}}) = m_{r_{k+1}}$ . Então  $w_{s_{k+1}}$  prefere  $m_{r_{k+1}}$  a  $m_{r_k}$ , pois caso contrário  $(m_{r_k}, w_{s_{k+1}})$  bloquearia  $M'$ . Sabemos que o par  $(m_{r_{k+1}}, w_{s_{k+1}})$  pertence a  $M'$  e não pertence a  $M''$ . Como  $M'$  e  $M''$  foram mapeados para  $M$ , temos que  $(m_{r_{k+1}}, w_{s_{k+1}}) \notin M$ . Assim, concluímos que  $m_{r_{k+1}} \in S$ . Como  $m_{r_k}, m_{r_{k+1}} \in S$  e  $w_{s_{k+1}}$  prefere  $m_{r_{k+1}}$  a  $m_{r_k}$ , pela construção de  $I'$  concluímos que  $r_{k+1} < r_k$ . Como temos uma sequência infinita e o nosso grafo é finito, temos uma contradição e a bijeção está provada.  $\square$

$m_1$ : $w_5, w_7, w_1, w_2, w_6, w_8, w_4, w_3$	$w_1$ : $m_5, m_3, m_7, m_6, m_1, m_2, m_8, m_4$
$m_2$ : $w_2, w_3, w_7, w_5, w_4, w_1, w_8, w_6$	$w_2$ : $m_8, m_6, m_3, m_5, m_7, m_2, m_1, m_4$
$m_3$ : $w_8, w_5, w_1, w_4, w_6, w_2, w_3, w_7$	$w_3$ : $m_1, m_5, m_6, m_2, m_4, m_8, m_7, m_3$
$m_4$ : $w_3, w_2, w_7, w_4, w_1, w_6, w_8, w_5$	$w_4$ : $m_8, m_7, m_3, m_2, m_4, m_1, m_5, m_6$
$m_5$ : $w_7, w_2, w_5, w_1, w_3, w_6, w_8, w_4$	$w_5$ : $m_6, m_4, m_7, m_3, m_8, m_1, m_2, m_5$
$m_6$ : $w_1, w_6, w_7, w_5, w_8, w_4, w_2, w_3$	$w_6$ : $m_2, m_5, m_8, m_3, m_4, m_6, m_7, m_1$
$m_7$ : $w_2, w_5, w_7, w_6, w_3, w_4, w_8, w_1$	$w_7$ : $m_7, m_5, m_2, m_1, m_8, m_6, m_4, m_3$
$m_8$ : $w_3, w_8, w_4, w_5, w_7, w_2, w_6, w_1$	$w_8$ : $m_7, m_4, m_1, m_5, m_2, m_3, m_6, m_8$
Listas de preferências dos homens	Listas de preferências das mulheres

Figura 3.8: Instância do SM (retirado de [20])

### 3.7 Emparelhamentos Estáveis Justos

Vimos na Seção 3.3 que uma instância do SM pode conter muitos emparelhamentos estáveis e vimos na Seção 3.4.3 que o GS sempre encontra um emparelhamento estável que é ótimo para um dos sexos e péssimo para o outro. Surgiu então a necessidade de encontrar um emparelhamento que fosse mais “justo”. Nesta seção, apresentaremos alguns critérios utilizados para calcular a justiça de um emparelhamento estável.

Definimos o **rank** de uma pessoa  $q$  para uma  $p$ , denotado por  $r(p, q)$ , como sendo o número de pessoas que  $p$  prefere a  $q$  mais 1. Por exemplo, dada a instância  $I$  do SM apresentada na Figura 3.8, temos que  $r(m_3, w_1) = 3$  e  $r(w_1, m_3) = 2$ .

Um emparelhamento estável  $M$  é **igualitário** se a soma

$$\sum_{m \in U} r(m, M(m)) + \sum_{w \in W} r(w, M(w))$$

é mínima dentre todos os emparelhamentos estáveis. Irving *et al.* [30] apresentaram um algoritmo que, dada uma instância  $I$  do SM, encontra um emparelhamento estável igualitário em  $O(n^4)$ . Posteriormente, Feder [14] diminuiu esse tempo para  $O(n^3)$ . Dentre todos os emparelhamentos estáveis da instância apresentada na Figura 3.8, que são oito no total e foram apresentados na Figura 3.9, temos que os emparelhamentos  $M_U$  e  $M_3$  são igualitários, sendo o valor do somatório dado acima igual a 49. Note que o emparelhamento  $M_U$  é o ótimo para os homens.

Um emparelhamento estável  $M$  é de **arrependimento mínimo** se o valor dado por  $\max_{p \in U \cup W} r(p, M(p))$  é mínimo entre todos os emparelhamentos estáveis. Knuth [45] apresentou um algoritmo  $O(n^4)$  para esse problema, que foi atribuído a Stanley Melvyn Selkow. Posteriormente, Gusfield [19] apresentou um novo algoritmo com complexidade  $O(n^2)$ . Para a instância apresentada na Figura 3.8, temos que o valor de arrependimento mínimo é igual a 6 e que as instâncias que são consideradas de arrependimento mínimo

$$\begin{aligned}
M_U &= \{(m_1, w_5), (m_2, w_3), (m_3, w_8), (m_4, w_6), (m_5, w_7), (m_6, w_1), (m_7, w_2), (m_8, w_4)\} \\
M_1 &= \{(m_1, w_8), (m_2, w_3), (m_3, w_5), (m_4, w_6), (m_5, w_7), (m_6, w_1), (m_7, w_2), (m_8, w_4)\} \\
M_2 &= \{(m_1, w_3), (m_2, w_6), (m_3, w_5), (m_4, w_8), (m_5, w_7), (m_6, w_1), (m_7, w_2), (m_8, w_4)\} \\
M_3 &= \{(m_1, w_8), (m_2, w_3), (m_3, w_1), (m_4, w_6), (m_5, w_7), (m_6, w_5), (m_7, w_2), (m_8, w_4)\} \\
M_4 &= \{(m_1, w_3), (m_2, w_6), (m_3, w_1), (m_4, w_8), (m_5, w_7), (m_6, w_5), (m_7, w_2), (m_8, w_4)\} \\
M_5 &= \{(m_1, w_8), (m_2, w_3), (m_3, w_1), (m_4, w_6), (m_5, w_2), (m_6, w_5), (m_7, w_7), (m_8, w_4)\} \\
M_6 &= \{(m_1, w_3), (m_2, w_6), (m_3, w_1), (m_4, w_8), (m_5, w_2), (m_6, w_5), (m_7, w_7), (m_8, w_4)\} \\
M_W &= \{(m_1, w_3), (m_2, w_6), (m_3, w_2), (m_4, w_8), (m_5, w_1), (m_6, w_5), (m_7, w_7), (m_8, w_4)\}
\end{aligned}$$

Figura 3.9: Emparelhamentos estáveis da instância do SM apresentada na Figura 3.8

são  $M_U$ ,  $M_1$ ,  $M_3$  e  $M_5$ .

Um emparelhamento estável  $M$  é **igualitário entre os sexos** se a diferença

$$\left| \sum_{m \in U} r(m, M(m)) - \sum_{w \in W} r(w, M(w)) \right|$$

é mínima entre todos os emparelhamentos estáveis. Kato [40] provou que o problema de encontrar um emparelhamento estável igualitário entre os sexos para uma instância do SM é NP-difícil. Na instância apresentada na Figura 3.8, temos que apenas o emparelhamento  $M_3$  é considerado igualitário entre os sexos, sendo o valor da diferença mínima igual a 3.

Os critérios apresentados nesta seção servem apenas para o SM, pois devido à assimetria de uma instância do HR, não faria muito sentido utilizá-los. Além disso, ao nosso saber, ainda não foi proposta na literatura uma forma de medir a justiça de um emparelhamento estável para uma instância do HR.

## 3.8 Reticulado Distributivo

Em alguns casos, estamos interessados não apenas em encontrar uma solução, mas em encontrar uma que respeite uma restrição a mais, por exemplo, como as abordadas na Seção 3.7. Como o número de soluções do HR é exponencial, fica evidente a necessidade de entender a estrutura algébrica de suas soluções. Nessa seção, mostraremos que os emparelhamentos estáveis de uma instância do SM formam uma estrutura algébrica chamada de reticulado distributivo. Esse resultado também é válido para instâncias do

HR [20, seq. 1.6.5], mas por simplicidade e clareza, demonstraremos nesta seção apenas para o SM.

Antes de mais nada, precisamos provar que  $\mathcal{M}$ , o conjunto dos emparelhamentos estáveis de uma instância  $I$  do SM, é um conjunto parcialmente ordenado (*poset*). Um **conjunto parcialmente ordenado** é um conjunto  $\mathcal{S}$  junto com uma relação binária “ $\succeq$ ” tal que para cada elemento  $a, b, c \in \mathcal{S}$  temos que as seguintes propriedades são válidas:

- (i)  $a \succeq a$  para todo  $a \in \mathcal{S}$  (reflexiva);
- (ii)  $a \succeq b$  e  $b \succeq a$  implica que  $a = b$  (anti-simétrica);
- (iii)  $a \succeq b$  e  $b \succeq c$  implica que  $a \succeq c$  (transitiva).

A seguir veremos alguns conceitos que nos permitirão definir uma relação binária que satisfaça as propriedades acima. Dizemos que uma pessoa  $q$  prefere um emparelhamento  $M$  ao emparelhamento  $M'$ , e denotamos por  $M \succ_q M'$ , se  $M(q) \succ_q M'(q)$ . Se  $M(q) = M'(q)$ , então dizemos que  $q$  é indiferente entre  $M$  e  $M'$ .

**Teorema 3.7.** *Sejam  $M$  e  $M'$  emparelhamentos estáveis e suponha que  $(m, w) \in M$  e  $(m, w) \notin M'$ . Então ou  $m$  prefere  $M$  a  $M'$  e  $w$  prefere  $M'$  a  $M$  ou então  $m$  prefere  $M'$  a  $M$  e  $w$  prefere  $M$  a  $M'$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  ( $\mathcal{X}'$  e  $\mathcal{Y}'$ ) os conjuntos de homens e mulheres, respectivamente, que preferem  $M$  a  $M'$  ( $M'$  a  $M$ ).

Não pode haver um par  $(m, w) \in M$  tal que  $m \in \mathcal{X}$  e  $w \in \mathcal{Y}$ , pois  $(m, w)$  bloquearia  $M'$ . Então, todo homem de  $\mathcal{X}$  está emparelhado a uma mulher de  $\mathcal{Y}'$ . Logo,  $|\mathcal{X}| \leq |\mathcal{Y}'|$ .

Similarmente, não pode haver um par  $(m, w) \in M'$  tal que  $m \in \mathcal{X}'$  e  $w \in \mathcal{Y}$ , pois  $(m, w)$  bloquearia  $M$ . Então todo homem de  $\mathcal{X}'$  está emparelhado a uma mulher de  $\mathcal{Y}$ . Logo,  $|\mathcal{X}'| \leq |\mathcal{Y}|$ .

Temos que  $|\mathcal{X}| + |\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|$ , ou seja, o número de homens que foram emparelhados a mulheres diferentes em  $M$  e  $M'$  é igual ao número de mulheres que foram emparelhadas a homens diferentes em  $M$  e  $M'$ . Segue então que  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}'|$  e  $|\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}|$ . Assim, todo homem em  $\mathcal{X}$  é emparelhado a uma mulher em  $\mathcal{Y}'$  e todo homem em  $\mathcal{X}'$  é emparelhado a uma mulher em  $\mathcal{Y}$ .  $\square$

Dados dois emparelhamentos estáveis  $M$  e  $M'$ , de uma dada instância do SM, dizemos que  $M$  **domina**  $M'$ , e denotamos por  $M \succeq M'$ , se e somente se para cada homem  $m$ , temos que  $M \succ_m M'$  ou  $M(m) = M'(m)$ . O lema a seguir prova que o conjunto  $\mathcal{M}$  mais a relação binária de dominância “ $\succeq$ ” definida anteriormente formam um conjunto parcialmente ordenado, denotado por  $(\mathcal{M}, \succeq)$ .

**Lema 3.8.**  *$(\mathcal{M}, \succeq)$  é um conjunto parcialmente ordenado.*



*Demonstração.* Sejam  $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$  emparelhamentos estáveis de uma instância  $I$  do SM e seja  $m$  um homem qualquer de  $U$ :

A propriedade reflexiva se mostra pela definição de  $\succeq$ , que garante que  $M \succeq M$ .

Para a anti-simétrica, temos que se (a)  $M_1 \succeq M_2$  e (b)  $M_2 \succeq M_1$ , então para um  $m \in U$  qualquer temos que, por (a),  $r(m, M_1(m)) \leq r(m, M_2(m))$  e, por (b),  $r(m, M_2(m)) \leq r(m, M_1(m))$ . Assim, essas inequações devem ser satisfeitas na igualdade. Como  $m$  foi escolhido de forma arbitrária, temos que esse resultado é válido para todo  $m \in U$ . Logo,  $M_1 = M_2$ .

Para a transitiva, temos que se (a)  $M_1 \succeq M_2$  e (b)  $M_2 \succeq M_3$ , então para um  $m \in U$  qualquer temos que, por (a),  $r(m, M_1(m)) \leq r(m, M_2(m))$  e, por (b), que  $r(m, M_2(m)) \leq r(m, M_3(m))$ . Logo,  $r(m, M_1(m)) \leq r(m, M_3(m))$ . Como  $m$  foi escolhido de forma arbitrária, temos que esse resultado é válido para todo  $m \in U$ . Assim,  $M_1 \succeq M_3$ .  $\square$

Finalmente, um **reticulado distributivo** é uma ordem parcial  $(S, \succeq)$  na qual:

- (i) Cada par de elementos  $a, b$  possui um *meet*, denotado por  $a \wedge b$ , de forma que  $a \wedge b \succeq a$ ,  $a \wedge b \succeq b$  e não existe um elemento  $c$  tal que  $c \succeq a$ ,  $c \succeq b$  e  $a \wedge b \succeq c$ .
- (ii) Cada par de elementos  $a, b$  possui um *join*, denotado por  $a \vee b$ , de forma que  $a \succeq a \vee b$ ,  $b \succeq a \vee b$  e não existe um elemento  $c$  tal que  $a \succeq c$ ,  $b \succeq c$  e  $c \succeq a \vee b$ .
- (iii) As leis distributivas valem:  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  e  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ .

Os lemas a seguir exibirão propriedades que serão úteis nas definições das operações de *meet* e *join* do  $(\mathcal{M}, \succeq)$ .

**Lema 3.9.** *Para uma dada instância do SM, sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos estáveis distintos. Se cada homem  $m$  recebe a melhor mulher (de maior preferência para  $m$ ) entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ , então o resultado é um emparelhamento estável.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que o resultado é um emparelhamento e então vamos mostrar que o emparelhamento é estável.

Se os homens  $m$  e  $m'$  recebem a mesma mulher  $w$ , isto é,  $(m, w) \in M$  e  $(m', w) \in M'$ , então  $m$  prefere  $M$  a  $M'$  e  $m'$  prefere  $M'$  a  $M$ . Aplicando o Teorema 3.7 ao par  $(m, w)$ , temos que  $w$  prefere  $M'$  a  $M$  e, consequentemente,  $m'$  a  $m$ . Aplicando o mesmo teorema ao par  $(m', w)$ , temos que  $w$  prefere  $M$  a  $M'$  e, consequentemente,  $m$  a  $m'$ , chegando assim a uma contradição. Assim, temos que o procedimento forma um emparelhamento.

Agora suponha que o emparelhamento criado é bloqueado pelo par  $(m, w)$ . Então  $m$  prefere  $w$  a  $M(m)$  e  $M'(m)$ , assim como  $w$  prefere  $m$  ao seu parceiro atual. Se  $w$  foi emparelhada a  $M(w)$ , então o par  $(m, w)$  bloqueia  $M$ , enquanto que se  $w$  foi emparelhada a  $M'(w)$ , temos que  $(m', w)$  bloqueia  $M'$ . Assim, chegamos a um absurdo e temos que o lema vale.  $\square$

Vamos denotar por  $M \wedge M'$  o emparelhamento estável no qual cada homem  $m$  é emparelhado à melhor de suas parceiras estáveis entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ .

**Lema 3.10.** *Para uma dada instância  $I$  do SM, sejam  $M$  e  $M'$  emparelhamentos estáveis distintos de  $I$ . Se cada homem  $m$  recebe a pior mulher (de menor preferência para  $m$ ) entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ , então o resultado é um emparelhamento estável.*

*Demonstração.* Se cada homem  $m$  recebe a pior mulher entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ , pelo Teorema 3.7, cada mulher  $w$  recebe o melhor homem entre  $M(w)$  e  $M'(w)$ . Temos então que o lema atual é apenas uma re-escrita do Lema 3.9 com o papel dos homens e mulheres trocados.  $\square$

Denotamos por  $M \vee M'$  o emparelhamento estável na qual cada homem  $m$  recebe a pior mulher entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ . O teorema a seguir apresenta o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.8.** *Para uma dada instância  $I$  do SM, a ordem parcial  $(\mathcal{M}, \succeq)$  forma um reticulado distributivo, com  $M \wedge M'$  representando a operação *meet* de  $M$  e  $M'$  e  $M \vee M'$  a operação *join*.*

*Demonstração.* É imediato da definição de *meet* e da relação de dominância  $\succeq$  que  $M \wedge M' \succeq M$  e  $M \wedge M' \succeq M'$ . Além disso, se  $M^*$  é qualquer emparelhamento estável que satisfaz  $M^* \succeq M$  e  $M^* \succeq M'$ , então cada homem em  $M^*$  deve ter uma parceira ao menos tão boa quanto as suas parceiras em  $M$  e  $M'$ . Logo,  $M^* \succeq M \wedge M'$ . Assim temos que  $M \wedge M'$  é um *meet* para  $M$  e  $M'$ .

De forma análoga, temos que é imediato da definição de *join* e da relação de dominância  $\succeq$  que  $M \succeq M \vee M'$  e  $M' \succeq M \vee M'$ . Se  $M^*$  é um emparelhamento estável tal que  $M \succeq M^*$  e  $M' \succeq M^*$ , então cada homem em  $M^*$  deve ter uma parceira no máximo igual à pior de suas parceiras entre  $M$  e  $M'$ . Logo,  $M \vee M' \succeq M^*$  e portanto temos que  $M \vee M'$  é um *join* de  $M$  e  $M'$ .

Vamos provar apenas a segunda propriedade distributiva, a primeira pode ser demonstrada de maneira análoga. Se  $Y(m) = Z(m) = w$ , então é imediato que, em ambos  $A = X \wedge (Y \vee Z)$  e  $B = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ ,  $m$  será emparelhado com a mulher que ele prefere mais entre  $X(m)$  e  $w$ . Caso contrário, é fácil verificar que em  $A$  e  $B$   $m$  é emparelhado a  $Z(m)$  se  $Y \succ_m Z \succ_m X$ , ou é emparelhado a  $Y(m)$  se  $Z \succ_m Y \succ_m X$ , ou é emparelhado a  $X(m)$  em todos os outros casos. Assim, todo homem tem a mesma parceira em  $A$  e em  $B$ , isto é,  $A = B$ .  $\square$

A Figura 3.10 ilustra a estrutura de reticulado  $(\mathcal{M}, \succeq)$  da instância da Figura 3.8 através de um diagrama. Um emparelhamento é representado como uma sequência de mulheres, onde a  $i$ -ésima mulher da sequência é emparelhada ao homem  $m_i$ . Existe um

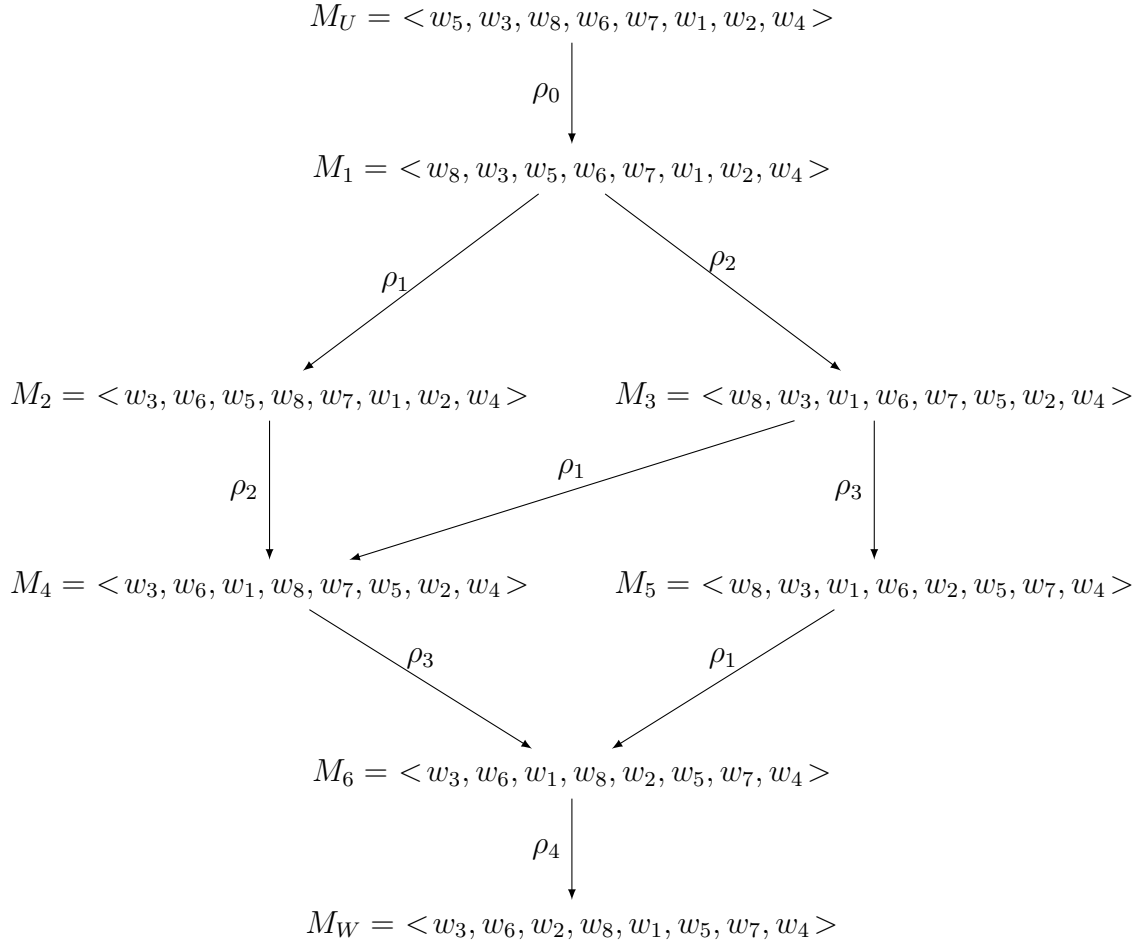


Figura 3.10: Estrutura de reticulado da instância da Figura 3.8 (retirado de [20])

arco do emparelhamento estável  $M_i$  para o emparelhamento estável  $M_j$  se e somente se  $M_i \succeq M_j$  e não existe um emparelhamento estável  $M_k$  tal que  $M_i \succeq M_k \succeq M_j$ . Por enquanto ignore os rótulos dos arcos, pois discutiremos sobre eles na Seção 3.9.

### 3.9 Rotações

Nesta seção, mostraremos que existe uma representação compacta e que pode ser construída de maneira eficiente capaz de representar todos os emparelhamentos estáveis de uma instância do SM. A exploração dessa estrutura resultou em uma melhora na complexidade computacional de alguns problemas [19, 30].

Seja  $M$  um emparelhamento estável para uma instância do SM. Para qualquer homem  $m$ , seja  $s_M(m)$  a mulher de maior preferência para  $m$  tal que  $s_M(m)$  prefere  $m$  a  $M(s_M(m))$

Tabela 3.1: Rotações da instância do SM apresentada na Figura 3.8

Rotação	Lista de pares ordenados
$\rho_0$	$(m_1, w_5), (m_3, w_8)$
$\rho_1$	$(m_1, w_8), (m_2, w_3), (m_4, w_6)$
$\rho_2$	$(m_3, w_5), (m_6, w_1)$
$\rho_3$	$(m_7, w_2), (m_5, w_7)$
$\rho_4$	$(m_3, w_1), (m_5, w_2)$

Tabela 3.2: Rotações expostas em cada emparelhamento estável da instância do SM apresentada na Figura 3.8

Emparelhamento	Rotações expostas
$M_U$	$\rho_0$
$M_1$	$\rho_1, \rho_2$
$M_2$	$\rho_2$
$M_3$	$\rho_1, \rho_3$
$M_4$	$\rho_3$
$M_5$	$\rho_1$
$M_6$	$\rho_4$
$M_W$	

e seja  $next_M(m) = M(s_M(m))$ . Note que  $s_M(m)$  pode não existir. Uma **rotação**  $\rho = (m_0, w_0), (m_1, w_1), \dots, (m_{r-1}, w_{r-1})$  é uma lista ordenada de pares do emparelhamento  $M$  tal que para cada  $i$ , com  $(0 \leq i \leq r-1)$ ,  $m_{i+1}$  é o  $next_M(m_i)$ , onde  $i+1$  é tomado em módulo de  $r$ . A partir de agora, assumiremos que o valor do subscrito de um elemento da rotação sempre terá o seu valor tomado em modulo  $r$ . Dizemos que  $m$  (ou  $w$ ) está na rotação  $\rho$  se existe um par  $(m, w)$  na lista de pares ordenados de  $\rho$ . Se o emparelhamento estável  $M$  apresenta uma rotação  $\rho = (m_0, w_0), (m_1, w_1), \dots, (m_{r-1}, w_{r-1})$ , então dizemos que  $\rho$  está **exposta** em  $M$ . Definimos  $M \setminus \rho$  como sendo  $\bigcup_{m \notin \rho} (m, M(m)) \cup \bigcup_{m_i \in \rho} (m_i, w_{i+1})$ , ou seja, cada homem que não pertence a rotação  $\rho$  continua emparelhado com a sua parceira de  $M$  e cada homem pertencente a  $\rho$  é emparelhado com a sua mulher  $s_M(m)$ . A transformação de  $M$  em  $M \setminus \rho$  chama-se **eliminação** da rotação  $\rho$  de  $M$ .

A Tabela 3.1 mostra todas as rotações expostas pelos emparelhamentos estáveis da instância apresentada na Figura 3.8. A Tabela 3.2 exhibe qual rotação está exposta em cada emparelhamento estável dessa instância. Agora podemos interpretar os rótulos dos arcos apresentados na Figura 3.10. Cada arco recebe uma rotação como rótulo, que indica qual rotação deve ser eliminada para transformar um emparelhamento no outro. Por exemplo, o emparelhamento  $M_1$  da Figura 3.10 possui duas rotações expostas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Ao eliminarmos  $\rho_1$  de  $M_1$  geramos o emparelhamento estável  $M_2$  e ao eliminarmos a rotação  $\rho_2$  de  $M_1$  geramos o emparelhamento estável  $M_3$ .

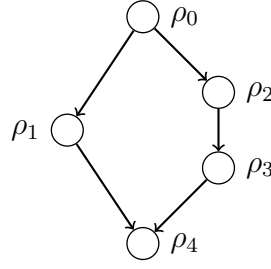


Figura 3.11:  $(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$  da instância do SM apresentada na Figura 3.8 (retirado de [20])

**Lema 3.11** (Gusfield e Irving [20]). *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se  $\rho$  é qualquer rotação exposta em um emparelhamento estável  $M$ , então  $M \setminus \rho$  é um emparelhamento estável dominado por  $M$ ;*
- (ii) *Qualquer emparelhamento estável diferente do ótimo para as mulheres possui uma rotação exposta;*
- (iii) *O número de rotações diferentes de uma instância do SM é  $O(n^2)$  e podemos encontrar todas em  $O(n^2)$  a partir das listas de preferências.*

Denotamos por  $\Pi(\mathcal{M})$  o conjunto de todas as rotações de uma instância  $I$  do SM. Definimos uma ordem parcial  $\triangleleft$  sob esse conjunto da seguinte forma: uma rotação  $\rho_1$  precede uma rotação  $\rho_2$ , denotado por  $\rho_1 \triangleleft \rho_2$ , se ao caminhar em  $(M, \succeq)$  através da eliminação de rotações, iniciando-se da rotação ótima para os homens, temos que para alcançar um emparelhamento estável  $M$  no qual  $\rho_2$  está exposto é necessário primeiro eliminar a rotação  $\rho_1$ . A Figura 3.11 apresenta  $(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$  para a instância apresentada na Figura 3.8.

**Teorema 3.9** (Gusfield e Irving [20]). *Existe uma estrutura de dados eficiente que pode ser construída em  $O(n^2)$  que representa  $(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$ .*

Um subconjunto  $S$  de  $\Pi(\mathcal{M})$  é **fechado** se, para qualquer rotação  $\rho_i \in S$ , temos que toda rotação  $\rho_j$ , tal que  $\rho_j \triangleleft \rho_i$ , pertence a  $S$ . O teorema a seguir, mostra que cada emparelhamento estável de  $\mathcal{M}$  é determinado por um conjunto fechado em  $(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$ .

**Teorema 3.10** (Gusfield e Irving [20]). *Seja  $I$  uma instância do SM. Existe uma correspondência de 1-para-1 entre os emparelhamentos estáveis de  $I$  um um subconjunto fechado de rotações em  $(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$ .*

A exploração de  $(\Pi(\mathcal{M}), \triangleleft)$  nos forneceu os resultados algorítmicos dados no teorema a seguir:

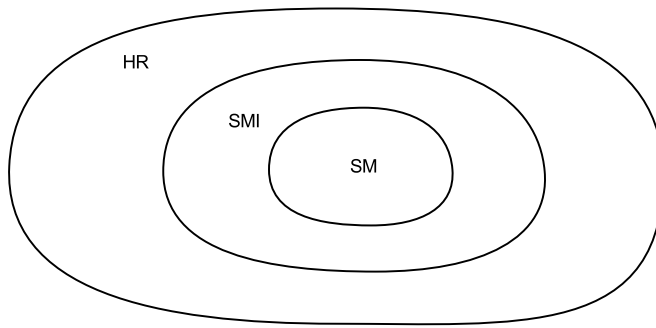


Figura 3.12: Hierarquia de generalizações dos problemas SM, HR e SMI

**Teorema 3.11** (Gusfield e Irving [20]). *Se  $I$  é uma instância do SM de tamanho  $n$ , então:*

- (i) *Os pares estáveis de  $I$  podem ser encontrados em  $O(n^2)$ ;*
- (ii) *As rotações de  $I$  podem ser encontradas em  $O(n^2)$ ;*
- (iii) *Os emparelhamentos estáveis de  $I$  podem ser listados em  $O(n)$  por emparelhamento após  $O(n^2)$  de pré-processamento;*
- (iv) *Um emparelhamento estável igualitário pode ser encontrado em  $O(n^4)$ .*

### 3.10 Resumo Geral do Capítulo

Neste capítulo, vimos os problemas do Casamento Estável (SM), Hospitais/Residentes (HR) e Casamento Estável com Listas Incompletas (SMI). A Figura 3.12 apresenta a relação entre tais problemas.

Mostramos que o número de soluções para o SM pode ser exponencial, o que implica que isso também pode acontecer para HR e para o SMI. Mostramos um algoritmo para encontrar um emparelhamento estável para o HR que, devido à hierarquia dos problemas, também serve para o SM e para o SMI. Mostramos que o Teorema dos Hospitais Rurais garante que todo agente de uma instância do HR é emparelhado à mesma quantidade de agentes em qualquer emparelhamento estável e que, se um hospital é emparelhado a um número de residentes menor do que o número de vagas que ele tem para oferecer em um emparelhamento estável, então ele é emparelhado àqueles mesmos residentes em qualquer emparelhamento estável. Por consequência, esse resultado também vale para o SM e para o SMI.

Vimos também alguns critérios utilizados para medir a justiça de um emparelhamento. Devido à assimetria do HR, esses critérios são utilizados apenas pelo SM e pelo SMI.

Para uma instância do SM, mostramos que o conjunto dos seus emparelhamentos estáveis formam um reticulado distributivo, além disso, apresentamos uma estrutura compacta capaz de representar todos esses emparelhamentos estáveis. Para uma instância do HR, temos que o primeiro resultado também vale, mas ainda não se conhece uma estrutura compacta capaz de representar todos os emparelhamentos estáveis de uma instância do HR.





## Capítulo 4

# Problemas de Emparelhamentos Estáveis com Indiferença

Em muitas aplicações práticas dos problemas de emparelhamentos estáveis, como por exemplo o NRMP, pode ser praticamente impossível para os agentes envolvidos fornecerem listas de preferências que classifiquem estritamente os agentes do conjunto oposto. Imagine uma grande instância do HR como as que o NRMP tem que lidar. Em tal instância, um hospital popular pode receber centenas ou até mesmo milhares de candidatos e é pouco provável que tal hospital consiga fornecer uma lista de preferências que classifique estritamente todos esses candidatos. O mais provável é que esse hospital consiga classificá-los em grupos, de forma que candidatos do mesmo grupo possuam a mesma preferência para ele, (o hospital é indiferente entre tais candidatos), e que ele consiga fornecer uma lista de preferências que classifique estritamente esses grupos.

Uma generalização dos problemas de emparelhamentos estáveis consiste em remover a restrição de que as listas de preferências devem fornecer uma classificação estrita dos agentes e permitir que elas declarem que dois ou mais agentes possuem a mesma preferência, isto é, que eles estão “empatados”. Chamamos de **Problema do Casamento Estável com Empates** (SMT, de *Stable Marriage with Ties*), **Problema do Casamento com Empates e Listas Incompletas** (SMTI, de *Stable Marriage with Ties and Incomplete lists*) e **Problema dos Hospitais/Residentes com Empates** (HRT, de *Hospital/Residents with Ties*) as generalizações do SM, SMI e do HR, respectivamente, que permitem indiferença em suas listas de preferências.

De maneira análoga aos problemas com listas estritamente ordenadas, temos que o SMTI é um caso particular do HRT e que o SMT é um caso particular do SMTI.

A Figura 4.1a apresenta um exemplo de uma instância do HRT descrita através de listas de preferências. Lembramos que, nesse tipo de representação para instâncias que permitem indiferença, utilizamos parênteses para agrupar todos os elementos que possuem

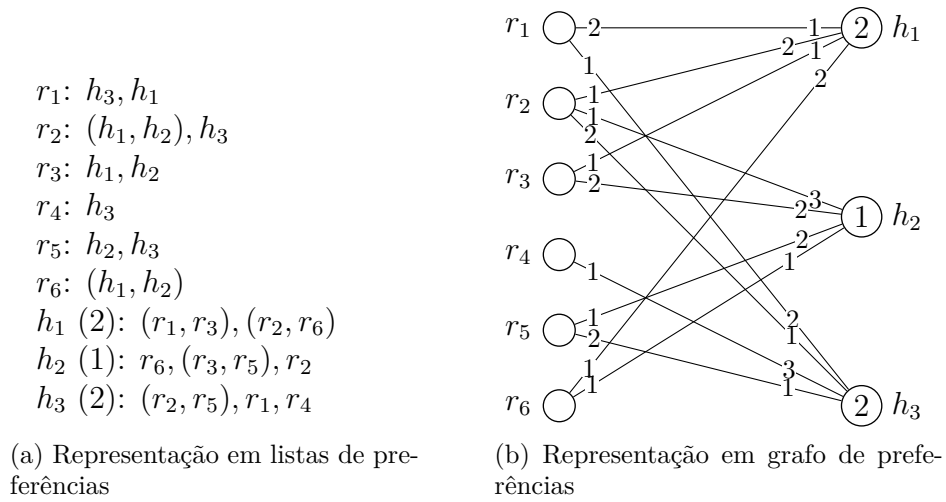


Figura 4.1: Exemplo de uma instância do HRT

a mesma preferência para um agente. Por exemplo, o residente  $r_2$  é indiferente entre os hospitais  $h_1$  e  $h_2$ . A Figura 4.1b apresenta o grafo de preferências para a mesma instância do HRT. Nela podemos notar que  $h_2$  prefere  $r_6$  a  $r_3$  e a  $r_5$  e que ele prefere  $r_3$  e  $r_5$  a  $r_2$ .

Quando empates são permitidos nas listas de preferências, podemos estender a definição de estabilidade de três formas diferentes: estabilidade fraca, estabilidade forte e super estabilidade [26]. Estudaremos o SMT, SMTI e HRT sob esses três critérios de estabilidade nas Seções 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

## 4.1 Estabilidade Fraca

Nesta seção vamos estudar os problemas de emparelhamentos estáveis sob o critério de estabilidade fraca. Como o SMT e o SMTI são casos restritos do HRT, seria suficiente definir tal critério para o HRT apenas. No entanto, para deixar mais claro, vamos apresentá-lo para cada um dos problemas.

**Definição 4.1** (Par bloqueante - SMT sob o critério de estabilidade fraca). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMT, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um **par bloqueante** de  $M$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i)  $w \succ_m M(m)$ ;

(ii)  $m \succ_w M(w)$ .

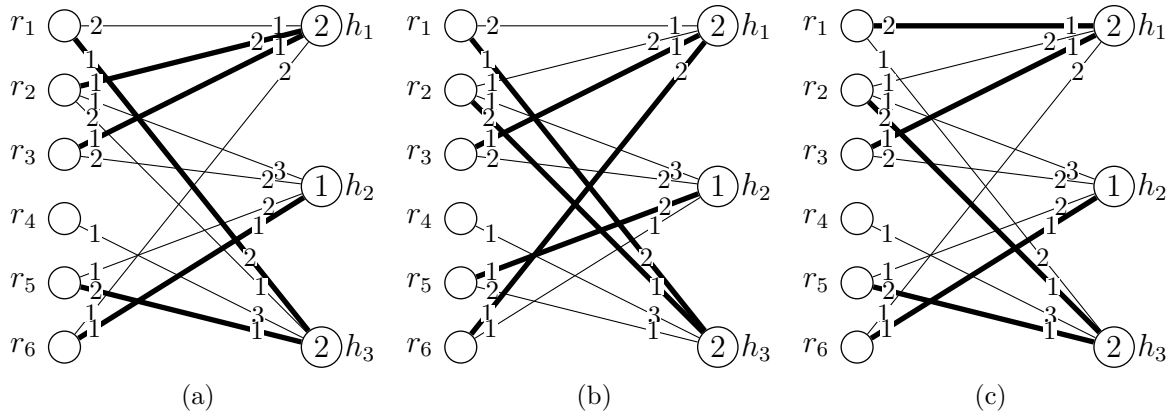


Figura 4.2: Emparelhamentos fracamente estáveis para a instância apresentada na Figura 4.1

**Definição 4.2** (Par bloqueante - SMTI sob o critério de estabilidade fraca). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMTI, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um **par bloqueante** de  $M$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $m$  e  $w$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $m$  não está emparelhado em  $M$  ou  $w \succ_m M(m)$ ;
- (iii)  $w$  não está emparelhada em  $M$  ou  $m \succ_w M(w)$ .

**Definição 4.3** (Par bloqueante - HRT sob o critério de estabilidade fraca). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do HRT, dizemos que um par  $(r, h) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um **par bloqueante** de  $M$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $r$  e  $h$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $r$  não foi emparelhado ou  $h \succ_r M(r)$ ;
- (iii)  $|M(h)| < c(h)$  ou existe um residente  $r' \in M(h)$  tal que  $r \succ_h r'$ .

**Definição 4.4** (Estabilidade fraca). *Dizemos que um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMT/SMTI/HRT é **fracamente estável** para  $I$  se e somente se nenhum par  $(a, b) \notin M$  bloqueia  $M$ , de acordo com as definições de pares bloqueantes apresentadas para os respectivos problemas nas definições 4.1, 4.2 e 4.3.*

A instância do HRT apresentada na Figura 4.1 possui três emparelhamentos fracamente estáveis, que são exibidos na Figura 4.2.

$a, b, c, d, e, f, g, h$	$a, c, d, b, e, f, g, h$
$a, b, c, d, e, g, f, h$	$a, c, d, b, e, g, f, h$
$a, b, d, c, e, f, g, h$	$a, d, b, c, e, f, g, h$
$a, b, d, c, e, g, f, h$	$a, d, b, c, e, g, f, h$
$a, c, b, d, e, f, g, h$	$a, d, c, b, e, f, g, h$
$a, c, b, d, e, g, f, h$	$a, d, c, b, e, g, f, h$

Figura 4.3: Todas as possíveis listas de preferências obtidas através da quebra dos empates da lista de preferências  $\ell = a, (b, c, d), e, (f, g), h$

No restante dessa seção, veremos que toda instância do HRT sob o critério de estabilidade fraca contém pelo menos uma solução (pode haver mais do que uma e elas podem ter tamanhos diferentes). Além disso, encontrar um emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima para o SMTI é NP-difícil [49] e apresentaremos algoritmos aproximativos para tal problema, sendo que o melhor deles possui fator de aproximação  $3/2$ . Por fim, mostraremos que a estrutura de reticulado não é válida quando se considera o critério de estabilidade fraca se utilizarmos a relação binária vista na Seção 3.8.

#### 4.1.1 Existência de uma Solução

Uma das primeiras questões levantadas ao se deparar com um novo problema de emparelhamento estável é se existe a garantia de uma solução. Nesta seção, mostraremos que toda instância do HRT sob o critério de estabilidade fraca possui uma solução. Consequentemente, temos que toda instância do SMTI e do SMT também possuem soluções.

Antes de mostrarmos isso, precisamos definir o que significa quebrar os empates de uma lista de preferências.

**Definição 4.5** (Quebra de empates). *Dizemos que uma lista de preferências  $\ell$  foi gerada a partir da **quebra dos empates** da lista  $\ell'$  de um agente  $p$  se e somente se as seguintes condições são válidas:*

- (i)  $\ell$  e  $\ell'$  classificam o mesmo conjunto de agentes;
- (ii) Se o agente  $p$  prefere o agente  $q$  ao agente  $r$  em  $\ell'$ , então  $p$  prefere o agente  $q$  ao agente  $r$  em  $\ell$ ;
- (iii)  $\ell$  não contém empates.

A Figura 4.3 apresenta um exemplo de todas as possíveis listas de preferências obtidas através da quebra dos empates da lista de preferências  $\ell = a, (b, c, d), e, (f, g), h$ .

O teorema a seguir apresenta uma condição necessária e suficiente para que um emparelhamento seja fracamente estável para uma instância do HRT. Tal resultado será utilizado para provarmos o resultado principal desta seção.

**Teorema 4.1** (Manlove [51], Manlove *et al.* [52]). *Seja  $I$  uma instância do HRT e seja  $M$  um emparelhamento em  $I$ . Então,  $M$  é fracamente estável em  $I$  se e somente se  $M$  é estável em alguma instância  $I'$  do HR obtida através da quebra dos empates em  $I$ .*

*Demonstração.* Seja  $R_M(I)$  o conjunto das instâncias do HR formadas através da quebra de empates em  $I$ , tal que se  $t$  era um empate na lista de um residente  $r$  que continha  $M(r)$ , então  $t$  deve ser quebrado de forma que  $r$  prefira  $M(r)$  aos elementos de  $t \setminus M(r)$ . Seja  $H_M(I)$  o conjunto das instâncias do HR formadas através da quebra de empates de  $I$  de forma que, se  $t$  era um empate na lista de um hospital  $h$  que continha algum membro de  $M(h)$ , então  $t$  deve ser quebrado de forma que  $h$  prefira cada elemento de  $t \cap M(h)$  a  $t \setminus M(h)$ .

Suponha que  $M$  é fracamente estável em  $I$ . Seja  $I'$  um membro de  $R_M(I) \cap H_M(I)$ , isto é,  $I'$  é uma instância do HR obtida através da quebra de empates em  $I$ . Suponha por contradição que  $(r, h) \in R \times H$  bloqueia  $M$  em  $I'$ . Então ou  $r$  não está emparelhado ou  $h \succ_r M(r)$  e  $h$  não está cheio ou existe um residente  $r' \in M(h)$  tal que  $r \succ_h r'$ , considerando  $I'$ . O mesmo também é verdade em  $I$ , devido à forma com que os empates foram quebrados. Assim,  $(r, h)$  bloqueia  $M$  em  $I$ , o que é uma contradição.

Inversamente, suponha que  $M$  é estável em alguma instância  $I'$  obtida através da quebra de empates em  $I$ . É fácil verificar que se  $(r, h)$  bloqueia  $M$  em  $I$ , então o mesmo também vale para  $I'$ , o que é uma contradição.  $\square$

O teorema anterior aliado à garantia da existência de uma solução para o HR (Corolário 3.1), nos fornece o seguinte resultado.

**Teorema 4.2.** *Toda instância  $I$  do HRT admite um emparelhamento fracamente estável e tal emparelhamento estável pode ser encontrado em  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de pares aceitáveis de residentes e hospitais.*

### 4.1.2 Tamanho do Emparelhamento

Com relação ao tamanho dos emparelhamentos estáveis, não é difícil perceber que todos os emparelhamentos fracamente estáveis para uma instância do SMT contêm todos os agentes envolvidos, e, conseqüentemente, possuem o mesmo tamanho. O mesmo não é verdade para emparelhamentos fracamente estáveis de instâncias do SMTI (e conseqüentemente do HRT). A Figura 4.4 exibe um exemplo de uma instância do SMTI que admite emparelhamentos estáveis de cardinalidades diferentes.

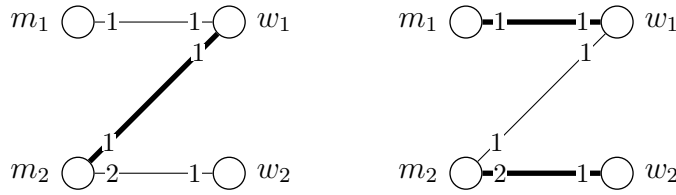


Figura 4.4: Instância do SMTI que admite dois emparelhamentos fracamente estáveis de cardinalidades distintas

Na maioria das aplicações práticas, um emparelhamento maior é preferível a um menor, pois os agentes que não foram emparelhados pelo sistema ficarão desapontados com ele, o que pode levar à rejeição do sistema por parte dos agentes. Além disso, agentes que não foram emparelhados pelo sistema terão que entrar em algum tipo de processo seletivo secundário, como o SOAP<sup>©</sup> do NRMP, para tentar preencher as vagas restantes, o que pode ser indesejável como discutido por Irving e Manlove [29]. Eles discutiram sobre o caso da Escócia, onde residentes que não são emparelhados na primeira rodada têm uma grande chance de sair para outros países, como a Inglaterra, à procura de uma posição, o que pode ser prejudicial para o sistema de saúde escocês.

Discutiremos sobre o problema de encontrar um emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima para instâncias do HRT na Seção 4.1.3.

### 4.1.3 Emparelhamento Fracamente Estável de Cardinalidade Máxima

Como provaremos nesta seção, o problema de encontrar um emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima para uma instância do SMTI (MAX-SMTI) é NP-difícil, conforme mostrado por Manlove [49]. Consequentemente, temos que o mesmo resultado vale para uma instância do HRT. Na verdade, vamos provar que a NP-dificuldade vale mesmo se os empates acontecem apenas nas listas de preferências de um dos sexos.

A seguir definimos a versão de decisão do MAX-SMTI.

*Nome:* MAX-SMTI-D

*Entrada:* uma instância do SMTI, onde as listas dos homens são estritamente ordenadas, e um inteiro  $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

*Pergunta:* A instância dada admite um emparelhamento fracamente estável  $M$  tal que  $|M| \geq K$ ?

Para provar a NP-completude, faremos uma redução polinomial do Problema de Emparelhamento Exato Maximal (EMM, de *Exact Maximal Matching*) para o problema MAX-SMTI-D. A versão de decisão do EMM é definida como a seguir.

*Nome:* EMM-D

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

*Pergunta:*  $G$  possui um emparelhamento maximal  $M$  tal que  $|M| = K$ ?

A NP-completude do EMM-D vale mesmo para grafos subdivisão (*subdivision graph*) de um grafo de grau máximo 3 [61]. Este resultado é implícito da NP-completude do problema de Emparelhamento Maximal Mínimo para a mesma classe de grafos [25]. Na verdade, Horton e Kilakos [25] provaram a NP-completude do problema do Conjunto Dominante Mínimo de Arestas para essa classe de grafos, que é polinomialmente equivalente ao problema de Emparelhamento Maximal Mínimo [64].

**Teorema 4.3** (Manlove [49]). *MAX-SMTI-D é NP-completo.*

*Demonstração.* Claramente, MAX-SMTI está em NP pois, dado um conjunto  $M$ , podemos facilmente verificar se  $M$  é um emparelhamento fracamente estável e se  $|M| \geq K$ .

Para mostrar a NP-dificuldade, vamos reduzir o problema EMM-D em um grafo subdivisão de um grafo de grau máximo três para o MAX-SMTI-D.

Seja  $G = (V, E)$  e  $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  uma instância desse problema. Logo,  $G$  é um grafo subdivisão de algum grafo  $G' = (V', E')$  tal que  $V = V' \cup E'$  e  $E = \{ev : e \in E' \text{ e } v \in V' \text{ e } e \text{ é incidente a } v \text{ em } G'\}$ . Note que  $G$  tem uma bipartição  $(U, W)$ , onde  $U = E'$  e  $W = V'$ .

Note que, em  $G$ , todo vértice pertencente a  $U$  tem grau 2 e todo vértice pertencente a  $W$  tem grau máximo 3. Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $G'$  é conexo e não é uma árvore. Então,  $|E'| \geq |V'|$ , ou seja,  $|U| \geq |W|$ . Novamente sem perda de generalidade, podemos assumir que  $|U| = |W|$ , pois se  $|U| = |W| + r$  para algum  $r > 0$ , então nós podemos adicionar  $r$  vértices  $a_1, \dots, a_r$  a  $U$  e  $2r$  vértices  $b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_r$  a  $W$ , de forma que  $a_i$  seja adjacente a  $b_i$  e a  $c_i$  para cada  $i$  com  $1 \leq i \leq r$ ; claramente, todo vértice do novo conjunto  $U$  tem grau dois no novo grafo e todo vértice do novo conjunto  $W$  tem grau máximo três no novo grafo. Além disso,  $G$  tem um emparelhamento maximal de tamanho  $K$  se e somente se o grafo transformado tem um emparelhamento maximal de tamanho  $K + r$ . Finalmente, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $K \leq n$ , onde  $n = |U| = |W|$ .

Seja  $U = \{m_1, \dots, m_n\}$  e  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ . Construímos uma instância  $I$  do MAX-SMTI da seguinte forma: seja  $U \cup U' \cup X$  o conjunto de homens e seja  $W \cup Y \cup Z$  o conjunto de mulheres, onde  $U' = \{m'_1, \dots, m'_n\}$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_{n-K}\}$ ,  $Y = \{y_1, \dots, y_{n-K}\}$  e  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ . Assuma que  $j_i$  e  $k_i$  são duas sequências tais que  $j_i < k_i$ ,  $m_i w_{j_i} \in E$  e  $m_i w_{k_i} \in E$  com  $1 \leq i \leq n$ . Para qualquer  $w_j$ , com  $1 \leq j \leq n$ ,  $M_j$  contém o homem  $m_i$  tal que  $m_i w_j \in E$  e  $M'_j$  contém o homem  $m'_i$  tal que  $m_i w_j \in E$  e  $j = k_i$ . Claramente,  $|M'_j| \leq |M_j| \leq 3$ . Criamos a lista de preferências de cada pessoa da seguinte forma:

$m_i$ :	$z_i, w_{j_i}, w_{k_i}$ , todos os elementos de $Y$ em qualquer ordem estrita	$(1 \leq i \leq n)$
$m'_i$ :	$z_i, w_{k_i}$	$(1 \leq i \leq n)$
$x_i$ :	todos os elementos de $W$ em qualquer ordem estrita	$(1 \leq i \leq n - K)$
$w_j$ :	(membro de $M_j$ e $M'_j$ ), $(x_1, \dots, x_{n-K})$	$(1 \leq j \leq n)$
$y_j$ :	$(m_1, \dots, m_n)$	$(1 \leq j \leq n - K)$
$z_j$ :	$(m_j, m'_j)$	$(1 \leq j \leq n)$

Para completar a construção da instância, o valor alvo é definido como  $K' = 3n - K$ . Claramente, o valor máximo de um emparelhamento fracamente estável para essa instância é  $K'$ . Afirmamos que  $G$  tem um emparelhamento maximal de tamanho exatamente  $K$  se e somente se a instância do SMTI admite um emparelhamento fracamente estável de tamanho  $K'$ .

Suponha que  $G$  tem um emparelhamento maximal  $M$  tal que  $|M| = |K|$ . Construimos um emparelhamento  $M'$  em  $I$  como segue. Para cada aresta  $m_i w_j \in M$ , se  $j = j_i$ , então adicionamos  $(m_i, w_{j_i})$  e  $(m_i, z_i)$  a  $M'$ . Se  $j = k_i$ , então adicionamos  $(m'_i, w_{k_i})$  e  $(m_i, z_i)$  a  $M'$ . Restam  $2(n - K)$  homens da forma  $m_{p_i}, m'_{p_i}$  ( $1 \leq i \leq n - K$ ) que não foram emparelhados. Adicione  $(m_{p_i}, y_i)$  e  $(m'_{p_i}, z_{p_i})$  a  $M'$ , com  $1 \leq i \leq n - K$ . Restam  $n - K$  mulheres da forma  $w_{q_i}$  ( $1 \leq i \leq n - K$ ) que não foram emparelhadas. Adicione  $(x_i, w_{q_i})$  a  $M'$  ( $1 \leq i \leq n - K$ ). Claramente,  $M'$  é um emparelhamento de tamanho  $2K + 2(n - K) + (n - K) = K'$ . Resta mostrar que  $M'$  é fracamente estável.

É fácil verificar que nenhum homem da forma  $x_i$  e nenhuma mulher da forma  $y_j$  ou  $z_j$  podem pertencer a um par bloqueante de  $M'$ . Temos também que nenhum par  $(m_i, w_j)$  não emparelhado pode bloquear  $M'$ . Suponha por contradição que o par  $(m_i, w_j)$  bloqueia  $M'$ . Logo,  $m_i \succ_{w_j} M(w_j)$ . Pela forma como  $M'$  foi construído, sabemos que  $(m_i, y_k) \in M'$  e, assim não há nenhuma aresta de  $M$  incidente a  $m_i$ . Pela maximalidade de  $M$  temos que  $(m'_i, w_j) \in M'$ , tal que,  $m'_i \in \{m_l, m'_l\}$  para algum  $m_l$ , o que é uma contradição, pois  $w_j$  é indiferente entre  $m_i$  e  $m'_i = M(w_j)$ . Finalmente, nenhum par  $(m'_i, w_j)$  não emparelhado pode bloquear  $M'$ , pois ou  $(m'_i, z_i) \in M'$  ou  $(m'_i, w_{k_i}) \in M'$  vale. Logo,  $M'$  é fracamente estável.

Por outro lado suponha que  $M'$  é um emparelhamento fracamente estável para  $I$  e que  $|M'| = K'$ . Assim, todas as pessoas de  $I$  estão emparelhadas em  $M'$ . Para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), no máximo um dentre  $m_i$  e  $m'_i$  é emparelhado a uma mulher da forma  $w_j$  em  $M'$ , caso contrário  $z_i$  não seria emparelhada. Assim,

$$M = \{m_i w_j \in E : 1 \leq i, j \leq n \text{ e } ((m_i, w_j) \in M' \vee (m'_i, w_j) \in M')\}$$

é um emparelhamento em  $G$ .

Há exatamente  $n - K$  homens  $m_{r_i}$  ( $1 \leq i \leq n - K$ ) que tem parceiras entre  $y_k$  em  $M'$ . Como o homem  $m'_{r_i}$  deve ter  $z_{r_i}$  como sua parceira em  $M'$  ( $1 \leq i \leq n - K$ ), então  $|M| = K$ .



Para completar a prova, resta mostrar que  $M$  é maximal. Suponha por contradição que  $M$  não é maximal. Então, existe alguma aresta  $m_i w_j \in E(G)$  tal que nenhuma aresta de  $M$  é incidente a  $m_i$  ou  $w_j$ . Assim,  $(m_i, y_k) \in M'$  para algum  $y_k$  e  $(w_j, x_l) \in M'$  para algum  $x_l$ . Então  $(m_i, w_j)$  bloqueia  $M'$ , pois  $m_i$  prefere  $w_j$  a  $y_k$  e  $w_j$  prefere estritamente  $m_i$  a  $x_l$ . Isto contraria a suposição de que  $M'$  era fracamente estável. Logo,  $M$  é de fato maximal.  $\square$

O problema MAX-SMTI se mostra NP-difícil mesmo para os seguintes casos restritos:

- (i) Se os empates ocorrem apenas nas listas das mulheres, cada empate ocorre apenas no final de cada lista de preferências, há no máximo um empate por lista de preferências e cada empate tem tamanho máximo de 2 [53];
- (ii) Se cada lista de preferências tem tamanho máximo 3 [34];
- (iii) Se as listas dos homens são derivadas de uma lista mestra<sup>1</sup> estrita e a lista das mulheres é derivada de uma lista mestra que possui apenas um empate [33];
- (iv) Se as listas dos homens e das mulheres são derivadas de listas mestras, os empates ocorrem em apenas uma lista mestra e cada empate possui tamanho 2 [33].

Antes de finalizar, cabe dizer que o problema de encontrar um emparelhamento fracamente estável de cardinalidade mínima para o SMTI também é NP-difícil [53].

#### 4.1.4 Aproximando o Emparelhamento de Cardinalidade Máxima

A garantia da existência de uma solução conforme mostrado no Teorema 4.2, fez com que o desenvolvimento de algoritmos aproximativos fosse uma das saídas encontradas para lidar com a NP-dificuldade do MAX-SMTI. O lema a seguir dá suporte para o desenvolvimento de um algoritmo 2-aproximativo trivial.

**Teorema 4.4** (Manlove *et al.* [53]). *Para uma instância arbitrária do HRT, o tamanho do maior emparelhamento fracamente estável é no máximo duas vezes o tamanho do menor.*

*Demonstração.* Seja  $I$  uma instância do HRT e seja  $M$  um emparelhamento fracamente estável em  $I$  de cardinalidade máxima. Suponha que  $M'$  é qualquer emparelhamento

---

<sup>1</sup>Uma lista mestra é uma lista da qual todos os agentes de um conjunto derivam as suas. Dizemos que uma lista  $\ell$  foi derivada de uma lista mestra  $\ell'$  se  $\ell$  é a lista  $\ell'$  com alguns elementos removidos, mas nunca trocados de ordem.

fracamente estável em  $I$  e suponha que  $|M'| < |M|/2$ . Então existe um conjunto de residentes  $r_1, \dots, r_p$ , com  $p > |M'|$ , em  $I$  tal que para cada  $j$  ( $1 \leq j \leq p$ ),  $r_j$  não está emparelhado em  $M'$ , mas está emparelhado em  $M$ . Como  $r_j$  está emparelhado em  $M$  ( $1 \leq j \leq p$ ), então há  $p$  hospitais  $h_{i_1}, \dots, h_{i_p}$  (não necessariamente distintos) tal que  $r_j$  está emparelhado a  $h_{i_j}$  em  $M$  ( $1 \leq j \leq p$ ). Seja  $K = |\{h_{i_1}, \dots, h_{i_p}\}|$  e seja  $t$  a soma das capacidades dos  $K$  hospitais considerando apenas os distintos. Cada hospital deve estar cheio em  $M'$ , caso contrário algum hospital  $h_{i_j}$  ( $1 \leq j \leq p$ ) teria uma vaga e  $(r_j, h_{i_j})$  bloquearia  $M'$ , o que é uma contradição. Assim,  $|M'| \geq t$ . No entanto,  $t \geq p$ , então  $|M'| \geq p$ , o que é uma contradição.  $\square$

Pelo teorema anterior, podemos desenvolver um algoritmo 2-aproximativo para o HRT, simplesmente quebrando os empates de uma instância do HRT e aplicando o algoritmo de Gale-Shapley à instância do HR gerada. Tal algoritmo foi apresentado por Manlove *et al.* [53].

Posteriormente, algoritmos aproximativos mais elaborados foram apresentados para o MAX-SMTI:

- Iwama *et al.* [36] apresentaram um algoritmo  $(2 - c \frac{\log n}{n})$ -aproximativo baseado em busca local, onde  $c$  é uma constante positiva arbitrária e  $n$  é o número de homens, que posteriormente foi melhorado pra  $2 - c' \frac{1}{\sqrt{n}}$  em [37], sendo  $c'$  uma constante que satisfaz a condição  $c' \leq \frac{1}{4\sqrt{6}}$ ;
- Iwama *et al.* [38] apresentaram um algoritmo 13/7-aproximativo;
- Király [43] apresentou um algoritmo 5/3-aproximativo;
- McDermid [55], Paluch [57] e Király [44] apresentaram algoritmos 3/2-aproximativos.

Algoritmos aproximativos também foram apresentados para casos particulares do MAX-SMTI:

- Halldórsson *et al.* [23] apresentaram um algoritmo  $(2/(1 + L^{-2}))$ -aproximativo para quando os empates aparecem apenas nas listas de preferências das mulheres e os empates possuem tamanho máximo de  $L$ . Assim, tal algoritmo fornece uma razão de aproximação de 1,6 e 1,8 quando  $L = 2$  e 3, respectivamente;
- Halldórsson *et al.* [24] apresentaram um algoritmo aleatório com uma razão de aproximação esperada de 10/7 para quando os empates aparecem apenas nas listas das mulheres, cada mulher possui no máximo um empate e seu tamanho é 2;

- Király [43] apresentou um algoritmo  $3/2$ -aproximativo e Iwama *et al.* [39] apresentaram um algoritmo  $25/17$ -aproximativo para o caso onde os empates aparecem apenas nas listas de preferências das mulheres;
- Irving e Manlove [28] apresentaram um algoritmo  $5/3$ -aproximativo para o caso onde os empates aparecem apenas nas listas das mulheres e a lista de cada mulher possui no máximo um empate, que está no final dela.

Halldórsson *et al.* [22] provaram que o MAX-SMTI é APX-difícil e Halldórsson *et al.* [23] provaram que o MAX-SMTI não é aproximável dentro de  $21/19$ , limitante inferior esse que posteriormente foi melhorado para  $33/29$  por Yanagisawa [63].

#### 4.1.5 Algoritmo $3/2$ -Aproximativo para o MAX-SMTI

Dos três algoritmos com fator de aproximação  $3/2$  para o MAX-SMTI, escolhemos explicar o algoritmo de Király [44] por este ser o de mais fácil compreensão. Iremos explicá-lo nesta seção, em sua versão orientada aos homens. Da mesma forma que o algoritmo de Gale-Shapley, esse algoritmo consiste em uma sequência de propostas de emparelhamentos.

Durante a execução do algoritmo, um homem pode assumir três estados: **novo**, se ele não propôs para todas as mulheres da sua lista de preferências; **restaurado**, se ele propôs para todas as mulheres da sua lista de preferências e foi rejeitado ao menos uma vez por cada uma; e **velho**, se ele foi rejeitado ao menos duas vezes por cada uma das mulheres de sua lista de preferências.

Durante a execução do algoritmo, o conceito de preferência será estendido, como descreveremos a seguir. Se um certo homem  $m$  for indiferente entre duas mulheres  $w$  e  $w'$  de sua lista de preferências,  $w$  não estiver emparelhada e  $w'$  estiver, então consideraremos que  $m$  prefere  $w$  a  $w'$ . Além disso, se uma mulher  $w$  for indiferente entre dois homens  $m$  e  $m'$  de sua lista de preferências,  $m$  estiver no estado de restaurado e  $m'$  no estado novo, então diremos que  $w$  prefere  $m$  a  $m'$ . Durante as provas de corretude, precisaremos utilizar tanto a versão estendida de preferência quanto a real (afinal, no fim das contas o que vale é a preferência real das pessoas). Para evitar ambiguidade, diremos que uma pessoa  $p$  **prefere estritamente** uma pessoa  $q$  a uma pessoa  $q'$ , quando estivermos nos referindo à preferência real de  $p$ .

A **melhor** mulher  $w$  para um homem  $m$  é aquela para a qual não existe outra mulher  $w'$  tal que  $m$  prefere  $w'$  a  $w$ , de acordo com esse critério estendido. Note que pode haver mais do que uma mulher que atende essa característica.

Diremos que um homem  $m$  é **indeciso** se ele estiver emparelhado a uma mulher  $w$  e se existir uma outra mulher  $w'$  em sua lista de preferências tal que  $m$  prefere  $w'$  a  $w$ . Também diremos que uma mulher é **insegura** se ela estiver emparelhada a um homem que for indeciso.

Em cada iteração do algoritmo, um homem  $m$  que não está emparelhado e não está no estado velho faz uma proposta de emparelhamento para a melhor mulher  $w$  presente em sua lista de preferências. Se houver mais do que uma melhor mulher para  $m$ , a escolha é arbitrária. Se  $w$  aceitar a proposta, então  $m$  e  $w$  iniciam um emparelhamento, isto é,  $m$  e  $w$  se tornam parceiros; caso contrário,  $m$  deve remover  $w$  de sua lista de preferências e  $w$  deve remover  $m$  de sua lista de preferências.

Uma mulher  $w$  sempre aceita a proposta de um homem  $m$  se ela não estiver emparelhada, se ela for insegura ou se ela preferir  $m$  ao homem com o qual ela estiver emparelhada. Nesse último caso,  $w$  irá romper seu emparelhamento atual e iniciar um emparelhamento novo com  $m$ . Em qualquer outro caso, ela irá recusar a proposta de  $m$ .

Se um homem não indeciso  $m$  estiver emparelhado a uma mulher  $w$  e, em algum momento,  $w$  rompe tal emparelhamento, então  $m$  deverá remover  $w$  de sua lista de preferências e, conseqüentemente,  $w$  também deverá remover  $m$  de sua lista de preferências. Se  $m$  for indeciso, nada deve ser feito com as listas de preferências envolvidas.

Conforme mencionado nos parágrafos anteriores, as listas de preferências dos homens e das mulheres podem variar de tamanho. Se em algum momento da execução a lista de preferências de um homem  $m$  ficar vazia, então sua lista original deve ser restaurada, ele deve ser restaurado nas listas de preferências das mulheres que originalmente o aceitavam e  $m$  deve passar para o estado de restaurado se ele for novo ou deve passar para o estado de velho se ele for restaurado. Esse último caso indica que  $m$  não será emparelhado no emparelhamento final.

O algoritmo de Király [44] executa enquanto houver um homem que não está emparelhado que não é velho. Com o emprego de estruturas de dados adequadas, esse algoritmo pode ser implementado em  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de pares aceitáveis. O Algoritmo 4 o apresenta e a Figura 4.5 mostra um exemplo de execução. Note que, para a instância dada na Figura 4.5a, o algoritmo encontra o emparelhamento fracamente estável dado na Figura 4.5k. No entanto, tal emparelhamento não possui cardinalidade máxima, conforme a Figura 4.5l mostra.

Os Lemas 4.1 e 4.2 mostram que o algoritmo de Király de fato produz um emparelhamento fracamente estável.

**Lema 4.1** (Király [44]). *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Quando uma mulher recebe a sua primeira proposta, ela se torna emparelhada e nunca mais volta a ser não emparelhada;*
- (ii) *Uma mulher pode se tornar insegura apenas depois de receber a primeira proposta;*
- (iii) *Depois de receber a segunda proposta, uma mulher nunca pode ser insegura;*

---

**Algoritmo 4** Algoritmo proposto por Király

---

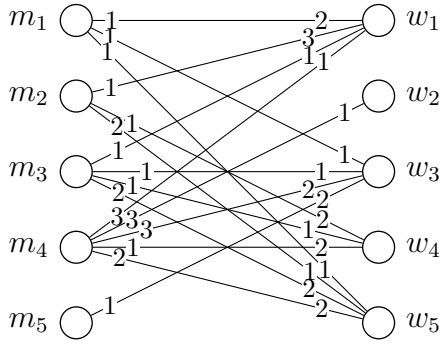
**Entrada:** Uma instância  $I$  do SMTI**Saída:** Um emparelhamento fracamente estável  $M$  para  $I$ 

```

1:  $M \leftarrow \emptyset$ 
2: Para todo homem  $m$  Faça
3:    $estado[m] \leftarrow novo$ 
4: Fim Para
5: Enquanto existir um homem  $m$  não emparelhado e  $estado[m] \neq velho$  Faça
6:   Se a lista de preferências de  $m$  está vazia Então
7:     Se  $estado[m] = novo$  Então
8:       restaura a lista de preferências de  $m$  e restaura  $m$  nas listas de preferências
       das mulheres que o aceitavam originalmente
9:        $estado[m] \leftarrow restaurado$ 
10:    Senão
11:       $estado[m] \leftarrow velho$ 
12:      Continue
13:    Fim Se
14:  Fim Se
15:   $m$  propõe para a sua melhor mulher  $w$ 
16:  Se  $w$  não está emparelhada Então
17:     $M \leftarrow M \cup \{(m, w)\}$   $\triangleright w$  inicia o emparelhamento com  $m$ 
18:  Senão
19:     $m' = M(w)$ 
20:    Se  $w$  é insegura ou  $m \succ_w m'$  Então
21:      Se  $m'$  não é indeciso Então
22:         $m'$  remove  $w$  de sua lista de preferências e  $w$  remove  $m'$ 
23:      Fim Se
24:       $M \leftarrow M \setminus \{(m', w)\}$   $\triangleright w$  rompe o emparelhamento com  $m'$ 
25:       $M \leftarrow M \cup \{(m, w)\}$ 
26:    Senão
27:       $m$  remove  $w$  de sua lista de preferências e  $w$  remove  $m$ 
28:    Fim Se
29:  Fim Se
30: Fim Enquanto
31: Devolve  $M$ 

```

---



(a) Instância do SMTI

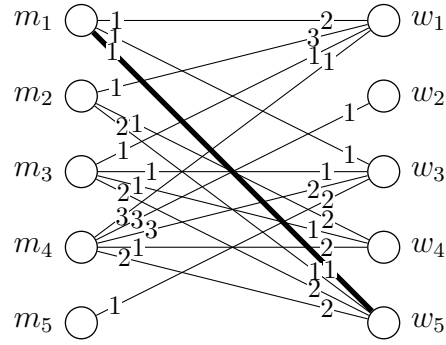
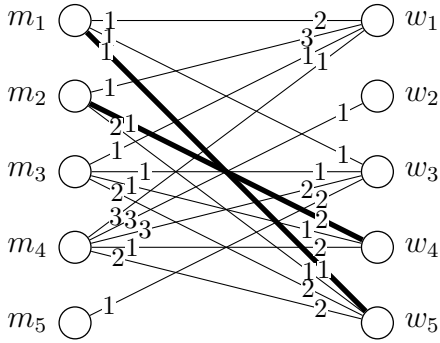
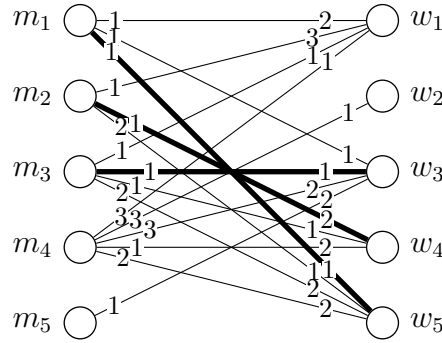
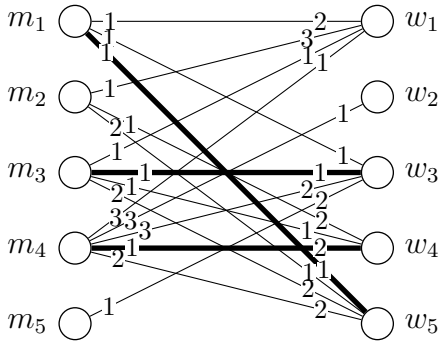
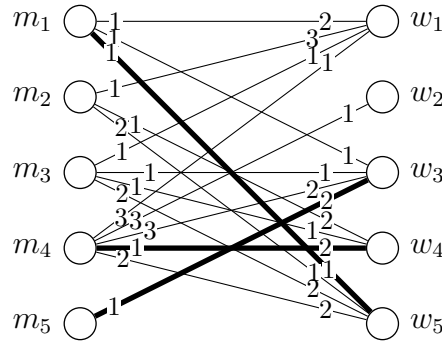
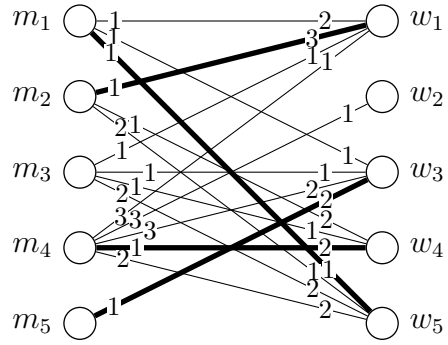
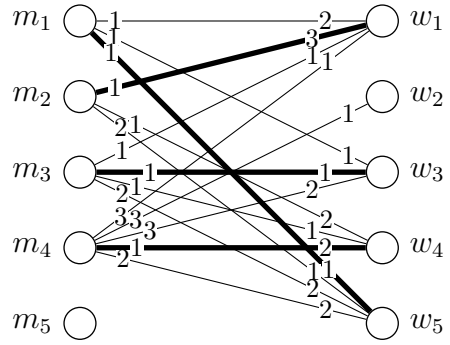
(b)  $m_1$  propõe um emparelhamento a  $w_5$ , que aceita por não estar emparelhada. Note que  $m_1$  poderia também ter proposto a  $w_1$  ou  $w_3$ (c)  $m_2$  propõe um emparelhamento a  $w_4$ , que também aceita por não estar emparelhada. Ele também poderia ter proposto a  $w_1$ (d)  $m_3$  propõe e inicia um emparelhamento com  $w_3$ . Note que, pelo critério estendido, ele prefere  $w_1$  e  $w_3$  a  $w_4$ , porque esta já está emparelhada, apesar de ser indiferente entre elas se considerarmos apenas o critério original(e)  $m_4$  propõe a  $w_4$ , que aceita por ser insegura. Como  $m_2$  era indeciso, o par  $(m_2, w_4)$  não é removido(f)  $m_5$  propõe a  $w_3$ , que também vai aceitar por ser insegura. O par  $(m_3, w_3)$  não é removido

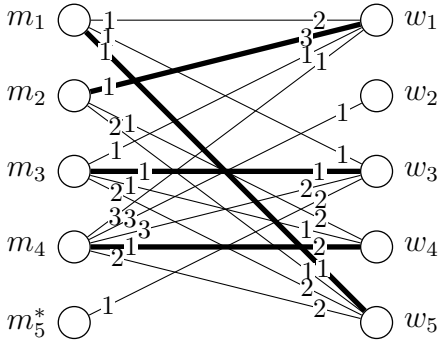
Figura 4.5: Exemplo de uma execução do algoritmo proposto por Király [44]



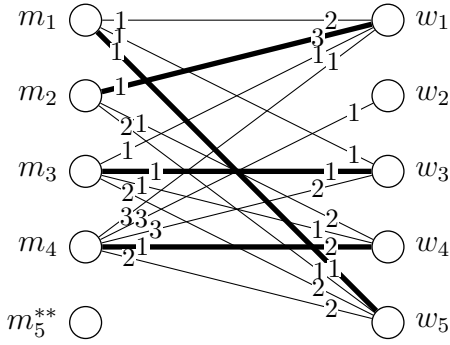
(g)  $m_2$  propõe emparelhamento a  $w_1$ , que aceita por não estar emparelhada



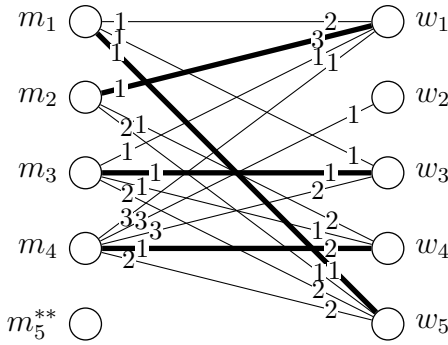
(h)  $m_3$  propõe a  $w_3$ , que aceita por preferir ele a  $m_5$ . Como  $m_5$  não era indeciso, o par  $(m_5, w_3)$  é removido



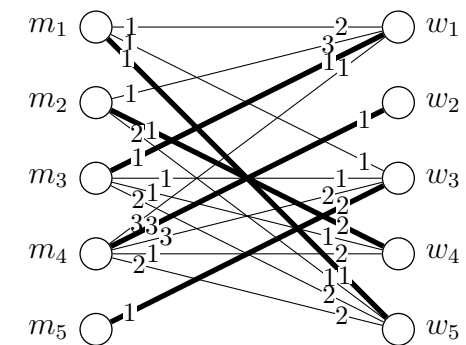
(i)  $m_5$  se torna restaurado (estado simbolizado por um ‘\*’)



(j)  $m_5$  é o único ainda não emparelhado e propõe a  $w_3$ . Ela não aceita por preferir seu parceiro atual e, como  $m_5$  não é indeciso, o par  $(m_5, w_3)$  é removido



(k)  $m_5$  se torna velho (estado simbolizado por dois ‘\*’). Não existem mais homens que não estão emparelhados e cujo estado não seja velho. O algoritmo para e retorna esse emparelhamento



(l) Emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima para a instância dada

Figura 4.5: Exemplo de uma execução do algoritmo proposto por Király [44] (continuação)

- (iv) Se uma mulher que não é insegura desfaz um emparelhamento com um homem  $m'$  para iniciar um emparelhamento com um homem  $m$ , então ela sempre irá preferir  $m$  a  $m'$ ;
- (v) Se uma mulher é insegura e desfaz um emparelhamento com um homem  $m'$  para iniciar um emparelhamento com um homem  $m$ , então não há como garantir se ela prefere  $m$  a  $m'$ . Uma mulher insegura pode romper um emparelhamento com um homem de maior preferência, mas irá permanecer na lista de preferências desse homem;
- (vi) A partir da segunda proposta que uma mulher recebe, ela aceita propostas apenas de homens de maior preferência com relação aos parceiros que ela já teve.

*Demonstração.* Com exceção da terceira e da última afirmações, as outras são consequências diretas do funcionamento do algoritmo. A última é consequência da terceira e quarta afirmações e a terceira é explicada a seguir.

Suponha que uma mulher  $w$  recebeu uma proposta de um homem  $m$  e que esta não foi a primeira proposta que ela recebeu até tal momento. Se  $w$  recusou a proposta de  $m$ , então ela não era insegura, pois uma mulher insegura nunca recusa uma proposta. Se  $w$  aceitou a proposta, então  $m$  não pode ser indeciso, pois se existisse uma mulher não emparelhada  $w'$  tal que  $m$  é indiferente entre  $w$  e  $w'$ , então  $m$  teria feito a proposta a  $w'$ . Logo, após a segunda proposta uma mulher não pode ser insegura.  $\square$

**Lema 4.2** (Király [44]). *O emparelhamento  $M$  produzido pelo algoritmo de Király é fracamente estável.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que o par  $(m, w)$  é um par bloqueante. Suponha inicialmente que  $w$  não está emparelhada a ninguém. Logo, ela não recebeu nenhuma proposta e, por isso,  $m$  não a alcançou em sua lista de preferências enquanto ele a percorria. Consequentemente,  $m$  está emparelhado a uma mulher  $w'$  tal que  $m$  prefere estritamente  $w'$  a  $w$  ou é indiferente entre  $w'$  e  $w$ . No entanto, isso contraria o fato de  $(m, w)$  ser um par bloqueante.

Suponha agora que  $m$  não está emparelhado em  $M$ . Logo, o estado de  $m$  é velho e, dessa forma,  $m$  deve ter proposto a  $w$  pelo menos duas vezes. Pelo Lema 4.1, sabemos que uma mulher aceita propostas apenas de homens de maior preferência com relação aos parceiros que ela já teve, a partir da segunda proposta. Portanto, a preferência do parceiro de  $w$  não pode ser estritamente menor do que a de  $m$ , o que também contraria a hipótese de que  $(m, w)$  seria um par bloqueante.

Finalmente, suponha que ambos  $m$  e  $w$  estão emparelhados em  $M$  e que a parceira de  $m$  é  $w'$ . Como  $(m, w)$  é um par bloqueante, temos que  $m$  prefere estritamente  $w$  a



$w'$ . Por isso,  $m$  propôs a  $w$  antes de propor a  $w'$  e ela o recusou. Se no momento dessa recusa  $w$  não era insegura, então ela preferia o seu parceiro a  $m$ . Se ela era insegura, então ela permaneceu na lista de  $m$ , que propôs a ela novamente antes de propor a  $w'$ . Pelo mesmo motivo anterior,  $w$  irá recusar a nova proposta de  $m$  (pois eles não terminaram emparelhados). Em ambos os casos surge uma contradição, isto é,  $w$  não prefere  $m$  ao seu parceiro atual e, portanto,  $(m, w)$  não pode ser um par bloqueante. Logo, o emparelhamento  $M$  produzido pelo algoritmo de Király é fracamente estável.  $\square$

O Lema 4.3 e o Teorema 4.5 mostram que o fator de aproximação do algoritmo de Király é  $3/2$ . Nestas demonstrações, representaremos o emparelhamento  $M$  obtido pelo algoritmo por meio de um grafo bipartido cujos vértices são todos os homens e mulheres que estão emparelhados em  $M$  e no qual uma aresta entre os vértices  $m$  e  $w$  existe se e somente se  $m$  e  $w$  estiverem emparelhados em  $M$ . Por simplificação, também denotaremos tal grafo por  $M$ . Chamaremos de  $M_{OPT}$  o emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima para a instância de entrada. Da mesma forma, ele também será representado por um grafo bipartido como descrito acima.

Essas representações são necessárias para facilitar a compreensão do que ocorre em  $M \cup M_{OPT}$ . Cada componente desse grafo é formada por **caminhos alternantes** ou por **circuitos alternantes**, isto é, caminhos ou circuitos que alternam entre arestas de  $M$  e de  $M_{OPT}$ . Diremos que um caminho alternante é **aumentador** se as arestas de seus extremos pertencem a  $M_{OPT}$ . Um caminho (alternante) aumentador é chamado de **curto** se ele tem apenas três arestas.

**Lema 4.3** (Király [44]).  *$M \cup M_{OPT}$  não possui um caminho aumentador curto.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $w_s, m, w, m_r$  é um caminho aumentador curto de  $M \cup M_{OPT}$  onde  $w_s$  e  $w$  são mulheres e  $m$  e  $m_r$  são homens. Como o algoritmo terminou e  $m_r$  não está emparelhado em  $M$  (se tivesse, haveria uma aresta de  $M$  incidindo em  $m_r$ ), então  $m_r$  é velho. Como  $w_s$  não está emparelhada em  $M$ , então  $m$  nunca chegou a fazer uma proposta a ela durante a execução do algoritmo (pois uma mulher não emparelhada sempre aceita uma proposta e, pelo Lema 4.1, ela nunca volta a ser não emparelhada). Logo,  $m$  nunca foi recusado por todas as mulheres da sua lista e, portanto, ele deve ser novo.

Note que, como  $M_{OPT}$  é um emparelhamento fracamente estável e  $m$  e  $w$  não estão emparelhados nele, então  $(m, w)$  não é um par bloqueante para  $M_{OPT}$ . Logo, ou (i)  $m$  prefere estritamente  $w_s$  a  $w$  ou é indiferente entre elas ou então (ii)  $w$  prefere estritamente  $m_r$  a  $m$  ou é indiferente entre eles.

Suponha que (i) seja verdadeiro. Se  $m$  prefere estritamente  $w_s$  a  $w$ , então  $m$  teria proposto a  $w_s$  antes de propor a  $w$ . Sabemos que isso não é verdade porque  $w_s$  não é emparelhada em  $M$ . Logo, devemos ter apenas que  $m$  é indiferente entre  $w_s$  e  $w$ .

Nesse caso, quando  $m$  iniciar um emparelhamento com  $w$ , ele se torna indeciso e ela se torna insegura. Como  $m$  e  $w$  terminam emparelhados em  $M$ , é impossível que em algum momento da execução  $w$  tenha rompido com  $m$ . Se isso acontecesse,  $m$  teria que propor a  $w_s$  antes de propor a  $w$  novamente, o que não é possível pois  $w_s$  nunca recebeu uma proposta. Dessa forma,  $w$  permaneceu insegura até o final da execução, o que também não é possível, pois  $m_r$  é velho e propôs a  $w$  pelo menos duas vezes.

Suponha agora que (ii) seja verdadeiro. Se  $w$  prefere estritamente  $m_r$  a  $m$ , então  $(m_r, w)$  bloqueia  $M$ , contrariando o Lema 4.2. Portanto,  $w$  é indiferente entre  $m_r$  e  $m$ . Vamos analisar agora o momento em que  $w$  recebe a proposta de  $m_r$  no estado restaurado. Nesse momento,  $w$  já recebeu pelo menos duas propostas (uma de seu parceiro atual e outra do próprio  $m_r$  no estado novo). Logo,  $w$  não pode ser insegura. Pelo Lema 4.1,  $m$  deve ser tão bom quanto  $m_r$  no estado restaurado. No entanto, isso é um absurdo, pois  $w$  é indiferente entre  $m$  e  $m_r$ ,  $m_r$  está no estado restaurado e  $m$  no estado novo.

Logo,  $M \cup M_{OPT}$  não contém um caminho aumentador curto.  $\square$

**Teorema 4.5** (Király [44]). *O algoritmo de Király é 3/2-aproximativo.*

*Demonstração.* Para provar o fator de aproximação desse algoritmo, basta provar que  $|M_{OPT}| \leq \frac{3}{2}|M|$ . Para isso, vamos analisar as componentes de  $M \cup M_{OPT}$ .

A desigualdade vale para as componentes que são circuitos alternantes e para as componentes que são caminhos alternantes que começam com uma aresta de  $M_{OPT}$  ( $M$ ) e terminam com uma aresta de  $M$  ( $M_{OPT}$ ), pois, em ambos os casos,  $|M| = |M_{OPT}|$ . Não é difícil perceber que a desigualdade também vale para caminhos alternantes que começam e terminam com arestas de  $M$ . Resta então provar que ela vale para caminhos alternantes que começam e terminam com arestas de  $M_{OPT}$ . Nesse caso, a restrição será violada se

$$\begin{aligned} P(M_{OPT}) &> \frac{3}{2}P(M) \\ P(M) + 1 &> \frac{3}{2}P(M) \\ P(M) &< 2 \end{aligned}$$

onde  $P$  é um caminho alternante que começa e termina em  $M_{OPT}$  e  $P(X)$  é o número de arestas em  $X$  que pertencem a  $P$ .

Logo, a restrição só é violada para caminhos aumentadores curtos, os quais, pelo Lema 4.3, não ocorrem em  $M \cup M_{OPT}$ . Assim, temos que o algoritmo proposto por Király fornece uma razão de aproximação de 3/2 para o MAX-SMTI.  $\square$

Király [44] descreve o algoritmo e apresenta as provas para o MAX-SMTI e fornece indicações de como adaptá-lo para o MAX-HRT. Note que um algoritmo que encontra um emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima para esse último sempre encontra tal emparelhamento para o primeiro e, portanto, descrever um algoritmo para

o HRT seria o mais adequado. Sob os critérios de estabilidade forte e super, que serão apresentados nas próximas seções, é o que fazemos. Sob o critério de estabilidade fraca, no entanto, optamos por manter apenas a descrição para o SMTI, uma vez que nenhum outro autor forneceu explicitamente um algoritmo para o HRT e, dessa forma, mantivemos o caráter de *survey* dessa dissertação.

#### 4.1.6 Reticulado Distributivo

Vimos na Seção 3.8 que o conjunto de emparelhamentos estáveis de uma instância do SM forma um reticulado distributivo e que esse resultado também era válido para instâncias do HR. Diferente de suas versões que possuem listas estritamente ordenadas, temos que as generalizações desses problemas que permitem indiferença em suas listas de preferências não admitem tal estrutura sob o critério de estabilidade fraca; pelo menos, não utilizando a relação binária de dominância mais “natural”, que definimos a seguir.

Dados dois emparelhamentos fracamente estáveis  $M$  e  $M'$  para uma instância do SMT, dizemos que um homem  $m$  **prefere**  $M$  a  $M'$  se e somente se  $M(m) \succ_m M'(m)$  e que ele é **indiferente** entre  $M$  e  $M'$  se e somente se  $M(m) = M'(m)$  ou  $M(m) =_m M'(m)$ . Um emparelhamento fracamente estável  $M$  **domina** outro emparelhamento fracamente estável  $M'$ , o que denotaremos por  $\succeq$ , se e somente se cada homem  $m$  prefere  $M$  a  $M'$  ou é indiferente entre eles.

A primeira pessoa a observar que o conjunto de emparelhamentos fracamente estáveis não possuía uma estrutura de reticulado foi Roth [58], que apresentou a instância do SMT exibida na Figura 4.6a. A Figura 4.6b e Figura 4.6c apresentam os dois únicos emparelhamentos fracamente estáveis para essa instância, que nomearemos de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Note que,  $M_1$  não domina  $M_2$  e  $M_2$  não domina  $M_1$ . Se o conjunto de emparelhamentos fracamente estáveis  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$  possuísse uma estrutura de reticulado, então teríamos uma operação de *meet* e *join* sob a ordem parcial formada por esse conjunto junto à relação binária domina. Se existisse uma operação *meet*, que denotaríamos por  $\wedge$ , então  $M_1 \wedge M_2 \succeq M_1$  e  $M_1 \wedge M_2 \succeq M_2$ , onde  $M_1 \wedge M_2$  é um emparelhamento fracamente estável formado pela operação *meet*. No entanto, isso é impossível, pois sabemos que esta instância possui apenas dois emparelhamentos fracamente estáveis e que nenhum deles domina o outro.

Quando justificamos a importância de conhecer a estrutura algébrica das instâncias de um problema, argumentamos que isso era importante principalmente para problemas onde buscamos um emparelhamento estável específico ou até mesmo para listar todos os emparelhamentos estáveis. Coincidência ou não, os problemas de encontrar um emparelhamento fracamente estável de arrependimento mínimo ou igualitário para uma instância do SMT é NP-difícil [53]. Além disso, temos que não se conhece um algoritmo razoável

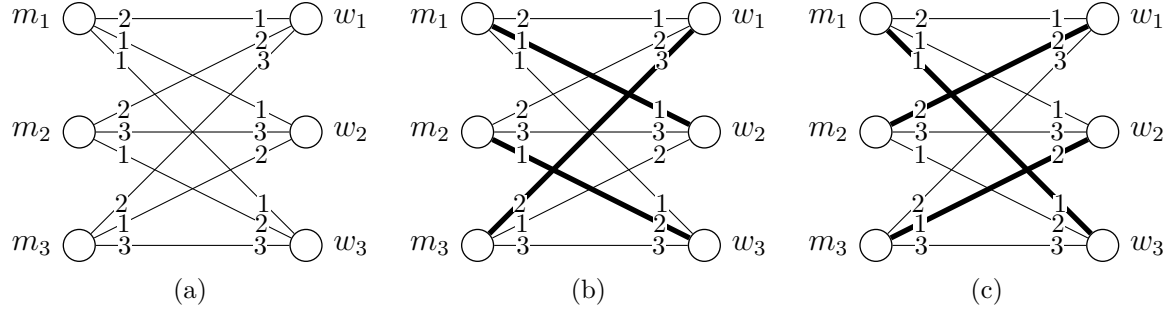


Figura 4.6: Instância do SMT que não possui uma estrutura de reticulado sob o critério de dominância “natural”, apresentada por Roth [58] (a). Únicos emparelhamentos fracamente estáveis admitidos por esta instância (b) (c)

para se listar todos os emparelhamentos fracamente estáveis de uma instância do SMT (tome como base por razoável um algoritmo  $O(n^4 + |\mathcal{M}|n)$ , onde  $n$  é o tamanho da instância e  $\mathcal{M}$  é o conjunto de todos os seus emparelhamentos fracamente estáveis).

## 4.2 Estabilidade Forte

Nesta seção estudaremos os problemas de emparelhamentos estáveis sob o critério de estabilidade forte. As definições de pares bloqueantes para o SMT, SMTI e HRT são apresentadas a seguir.

**Definição 4.6** (Par bloqueante - SMT sob o critério de estabilidade forte). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMT, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  bloqueia  $M$  se um dos dois seguintes grupos de condições são satisfeitos:*

- (i)  $w \succ_m M(m)$ ;
- (ii)  $m \succ_w M(w)$  ou  $m =_w M(w)$ ;

ou

- (i)  $w \succ_m M(m)$  ou  $w =_m M(m)$ ;
- (ii)  $m \succ_w M(w)$ .

**Definição 4.7** (Par bloqueante - SMTI sob o critério de estabilidade forte). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMTI, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  bloqueia  $M$  se um dos dois seguintes grupos de condições são satisfeitos:*

- (i)  $m$  e  $w$  são mutuamente aceitáveis;

- (ii)  $m$  não está emparelhado em  $M$  ou  $w \succ_m M(m)$ ;
- (iii)  $w$  não está emparelhada em  $M$ , ou  $m \succ_w M(w)$  ou  $m =_w M(w)$ ;

ou

- (i)  $m$  e  $w$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $m$  não está emparelhado em  $M$ , ou  $w \succ_m M(m)$  ou  $w =_m M(m)$ ;
- (iii)  $w$  não está emparelhada em  $M$  ou  $m \succ_w M(w)$ .

**Definição 4.8** (Par bloqueante - HRT sob o critério de estabilidade forte). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do HRT, dizemos que um par  $(r, h) \notin M$  bloqueia  $M$  se um dos dois seguintes grupos de condições são satisfeitos:*

- (i)  $r$  e  $h$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $r$  não está emparelhado em  $M$ , ou  $h \succ_r M(r)$  ou  $h =_r M(r)$ ;
- (iii)  $h$  não está cheio em  $M$  ou existe um residente  $r'$  em  $M(h)$  tal que  $r \succ_h r'$ ;

ou

- (i)  $r$  e  $h$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $r$  não está emparelhado em  $M$  ou  $h \succ_r M(r)$ ;
- (iii)  $h$  não está cheio em  $M$ , ou existe um residente  $r'$  em  $M(h)$  tal que  $r \succ_h r'$ , ou  $r =_h r'$ .

**Definição 4.9** (Estabilidade forte). *Dizemos que um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMT/SMTI/HRT é **fortemente estável** para  $I$  se e somente se nenhum par  $(a, b) \notin M$  bloqueia  $M$ , de acordo com as definições de pares bloqueantes apresentadas para os respectivos problemas nas definições 4.6, 4.7 e 4.8.*

Pela definição, não é difícil perceber que todo emparelhamento fortemente estável é também fracamente estável. Dos três emparelhamentos fracamente estáveis apresentados na Figura 4.2 para a instância da Figura 4.1, apenas os emparelhamentos das Figuras 4.2a e 4.2c são fortemente estáveis. Isso ocorre porque o emparelhamento apresentado na Figura 4.2b é bloqueado fortemente pelos pares  $(r_2, h_1)$  e  $(r_6, h_2)$ .

No restante dessa seção veremos que nem sempre existe uma solução para uma instância do SMT quando se considera o critério de estabilidade forte. Apresentaremos um algoritmo que determina tal existência e, em caso positivo, apresenta a solução. Também veremos que existe uma versão do Teorema dos Hospitais Rurais para instâncias do HRT sobre esse critério e que o conjunto de emparelhamentos fortemente estáveis de uma instância do SMT apresenta uma estrutura de reticulado distributivo.

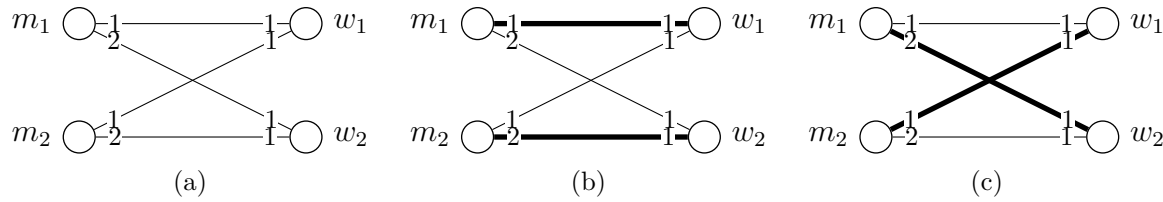


Figura 4.7: Exemplo de uma instância do SMT que não admite um emparelhamento fortemente estável

### 4.2.1 Determinando a Existência de uma Solução

Ao contrário dos problemas estudados anteriormente, uma instância do SMT nem sempre admite um emparelhamento fortemente estável. A Figura 4.7a apresenta uma dessas instâncias. As Figuras 4.7b e 4.7c apresentam os únicos emparelhamentos possíveis para essa instância e, como podemos ver, o emparelhamento apresentado na Figura 4.7b é bloqueado pelo par  $(m_2, w_1)$  enquanto o emparelhamento da Figura 4.7c é bloqueado pelo par  $(m_1, w_1)$ .

Determinar a existência de uma solução quando se considera o critério de estabilidade forte foi proposto inicialmente por Irving [26], que apresentou um algoritmo de complexidade  $O(n^4)$  que determina se uma dada instância do SMT de tamanho  $n$  admite ou não um emparelhamento fortemente estável e, caso ela admita, mostra tal emparelhamento. Posteriormente, Manlove [49] estendeu esse algoritmo para o SMTI, mantendo a complexidade de  $O(n^4)$ . Irving *et al.* [32] apresentaram um algoritmo de mesmo comportamento para o HRT e com complexidade  $O(m^2)$ , onde  $m$  é o número de pares aceitáveis. Os resultados mais recentes são de Kavitha *et al.* [41], que apresentaram um algoritmo  $O(mn)$  para o SMTI e  $O(Cm)$  para o HRT, onde  $C$  é a soma das capacidades de todos os hospitais.

A seguir, apresentaremos o algoritmo dado por Irving *et al.* [32] para o problema HRT sob o critério de estabilidade forte, o qual chamaremos de *HRT-Strong*. Apesar do algoritmo apresentado por Kavitha *et al.* [41] possuir uma ideia semelhante ao que vamos apresentar, ele é, de certa forma, mais complexo porque precisa garantir certas propriedades que permitem uma análise mais justa. Como o nosso foco primário é resolver o problema, tais análises não seriam extremamente vantajosas, principalmente porque a complexidade de ambos não é tão discrepante.

O *HRT-Strong* não garante que, em cada iteração, um emparelhamento está sendo mantido. Por isso, chamaremos de **associação** o “emparelhamento” entre um hospital e um residente que acontece durante a execução. Outras definições extras são necessárias para o entendimento deste algoritmo e são dadas a seguir.

Dizemos que um residente  $r$  que pertence à lista de um hospital  $h$  está **dominado**

em  $h$  se existem  $c(h)$  ou mais residentes associados a  $h$  tais que  $h$  prefere todos eles a  $r$ . Note que  $r$  pode estar associado ou não a  $h$ . Considere, por exemplo, um hospital  $h$  cuja lista de preferências é dada por  $\mathbf{r}_1, (r_2, \mathbf{r}_3), (\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, r_7), r_6, (r_8, \mathbf{r}_9)$ , os residentes associados a  $h$  estão em negrito e a capacidade de  $h$  é 3. Nesse exemplo, os residentes  $r_6, r_8$  e  $r_9$  estão dominados em  $h$ . Note que  $r_7$  não está dominado em  $h$  pois existem apenas dois residentes associados a  $h$  tais que  $h$  prefere todos eles a  $r_7$ , a saber,  $r_1$  e  $r_3$ .

Um **grafo de associações**  $G_A = (V_A, E_A)$  é tal que  $V_A = R \cup H$  e  $E_A = \{rh : r \in R, h \in H, \text{ e } h \text{ está associado a } r\}$ . Esse grafo é construído, portanto, sobre a associação da iteração atual. Um residente  $r$  associado a um hospital  $h$  é **limite** para  $h$  se  $h$  não está cheio ou se  $r$  não está na cauda da lista de preferências de  $h$ . A ideia dos residentes limites de um hospital é que tais residentes estão mais “seguros” do que os outros residentes e não terão suas associações rompidas nessa iteração. Com essas duas definições podemos finalmente definir o **grafo reduzido de associações**  $G_R(V_R, E_R)$ , que é construído da seguinte forma. Inicialmente,  $V_R = V_A$ ,  $E_R = E_A$  e  $c'(h) = c(h)$  para todo hospital  $h$ . Para todo residente  $r$  que é limite de algum hospital  $h$ , remova  $r$  e suas arestas incidentes. Em todo hospital  $h$  para o qual  $r$  era um limite, faça  $c'(h) = c'(h) - 1$ . Ao final, remova todo hospital  $h$  que não possuir arestas incidentes ou que  $c'(h) = 0$ .

Definimos a **deficiência** de um conjunto  $X \subset V_R \setminus H$  de residentes como sendo o tamanho de  $X$  menos a soma de todos os  $c'(h)$  tal que  $h$  está na vizinhança de  $X$ . Assim, um valor positivo de deficiência indica que existem mais residentes do que vagas em hospitais. O **conjunto crítico**  $Z$  de residentes é tal que seu valor de deficiência é máximo dentre todos os possíveis conjuntos de residentes em  $V_R \setminus H$  e sua cardinalidade é mínima. Esse conjunto indica que as associações às quais seus residentes pertencem na iteração atual não poderão existir em um emparelhamento fortemente estável.

Enquanto existir um residente que ainda não está associado e cuja lista de preferências não está vazia, um desses residentes deve iniciar uma associação com todos os hospitais que estão na cabeça da sua lista de preferências. Se algum desses hospitais ficar cheio ou lotado, então deve-se remover todas as associações que envolvem residentes que estão dominados na lista desse hospital, remover tais residentes da lista de preferências desse hospital e remover o hospital da lista de preferências de tais residentes.

Sobre a associação resultante das ações descritas acima, construímos o grafo reduzido  $G_R$  e encontramos o conjunto crítico  $Z$  de residentes. Para cada hospital  $h$  da vizinhança de  $Z$  em  $G_R$ , que é denotada por  $\mathcal{N}(Z)$ , deve-se remover todas as associações atuais que envolvam residentes que estão na cauda de  $h$  e remover os pares que envolvem  $h$  e tais residentes.

Os passos descritos nos dois parágrafos acima são repetidos pelo *HRT-Strong* até que o conjunto crítico de uma associação fique vazio. Depois disso, o algoritmo constrói o grafo  $G_A$  da última associação e encontra um emparelhamento viável  $M$  em  $G_A$ . Um empare-

lhamento  $M$  é **viável** se todo residente estiver emparelhado a um hospital para o qual ele é um limite e se  $M$  tem cardinalidade máxima. Qualquer que seja o emparelhamento viável encontrado, se ele não for fortemente estável, então não existe um emparelhamento fortemente estável para a instância dada.

O Algoritmo 5 apresenta um pseudocódigo para o *HRT-Strong* e a Figura 4.8 apresenta um exemplo de sua execução.

Os Lemas 4.4 a 4.8 e o Teorema 4.6 provam a corretude do *HRT-Strong*. Neles, chamaremos de **par fortemente estável** um par  $(r, h) \in R \times H$  que pertence a um emparelhamento fortemente estável.

**Lema 4.4** (Irving *et al.* [32]). *Nenhum par fortemente estável é removido durante a execução do algoritmo HRT-Strong.*

*Demonstração.* Suponha que o par  $(r, h)$  é o primeiro par fortemente estável removido durante alguma execução do algoritmo e seja  $M'$  um emparelhamento fortemente estável no qual  $r$  é emparelhado a  $h$ . Há dois casos a serem considerados, uma vez que o algoritmo pode fazer essa remoção em dois momentos.

No primeiro caso, suponha que  $(r, h)$  foi removido porque algum outro residente, digamos  $r'$ , tornou-se associado a  $h$ , e porque  $r$  é dominado na lista de  $h$ . Seja  $R'$  o conjunto de residentes associados a  $h$  neste ponto da execução, isto é,  $h$  está na cabeça das listas de preferências de qualquer residente de  $R'$ . Note que  $|R'| \geq c(h)$ . Note também que nenhum emparelhamento fortemente estável pode ter um residente de  $R'$  emparelhado a um hospital que ele prefere a  $h$ , pois nesse caso haveria um outro par fortemente estável que foi removido antes de  $(r, h)$ . Em  $M'$ , pelo menos um dos residentes de  $R'$ , digamos  $r''$ , não pode ser emparelhado a  $h$  (porque  $r$  foi e, em um emparelhamento, no máximo  $c(h)$  residentes podem ser emparelhados ao hospital  $h$ ). Dessa forma, (i)  $r''$  está desemparelhado em  $M'$ , ou (ii)  $r''$  prefere  $h$  a  $M'(r'')$ , ou (iii)  $r''$  é indiferente entre  $h$  e  $M'(r'')$ . Em qualquer caso,  $(r'', h)$  bloquearia  $M'$ , o que é uma contradição.

No segundo caso, suponha que  $(r, h)$  foi removido porque  $h$  estava associado a um residente do conjunto crítico  $Z$  em algum momento e, naquele momento,  $r$  estava na cauda de  $h$ . Daqui em diante, as listas de preferências se referem às listas de tal momento. Seja  $Z'$  o conjunto de residentes de  $Z$  que foram emparelhados em  $M'$  a hospitais que estão na cabeça de suas listas de preferências, e seja  $H'$  o conjunto de hospitais de  $\mathcal{N}(Z)$  que estão emparelhados em  $M'$  a pelo menos um residente da sua cauda. Logo,  $h \in H'$  e, portanto,  $H' \neq \emptyset$ . Qualquer residente de  $Z$  não pode ser emparelhado em  $M'$  a um hospital que ele prefere a qualquer membro da cabeça de sua lista, pois caso contrário haveria um par fortemente estável que foi removido antes de  $(r, h)$ . Assim, qualquer residente  $r^*$  em  $Z$  que está associado a  $h$  deve estar em  $Z'$ , caso contrário  $(r^*, h)$  bloquearia  $M'$ . Logo,  $Z' \neq \emptyset$ .



---

**Algoritmo 5** Algoritmo *HRT-Strong*

---

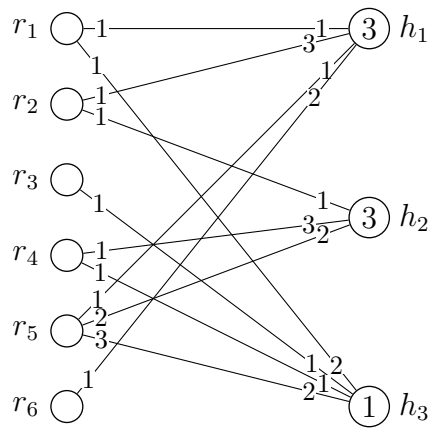
**Entrada:** Uma instância  $I$  do HRT**Saída:** Um emparelhamento fortemente estável  $M$ , se ele existe

```

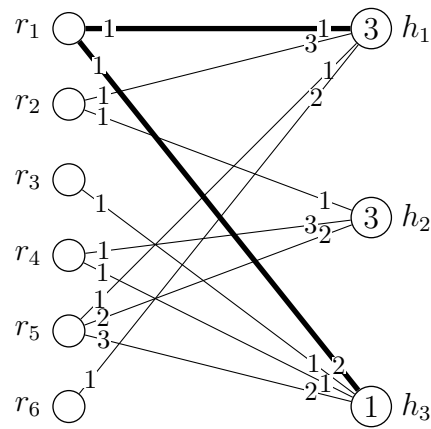
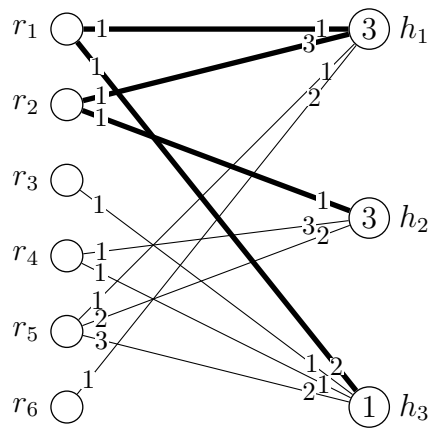
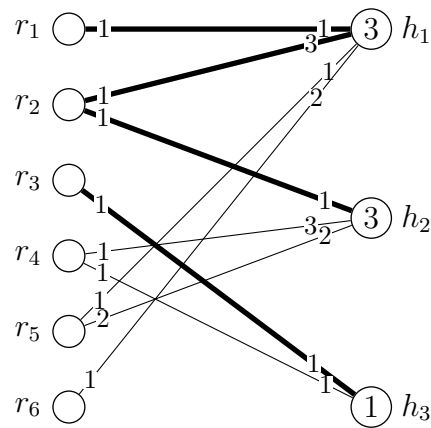
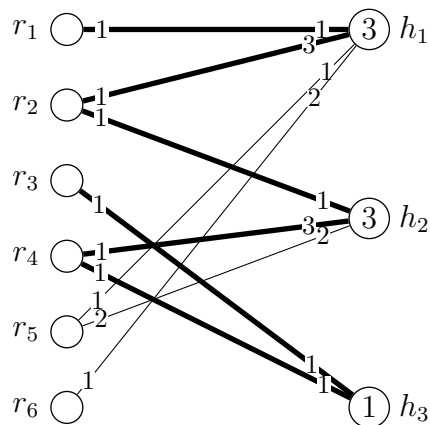
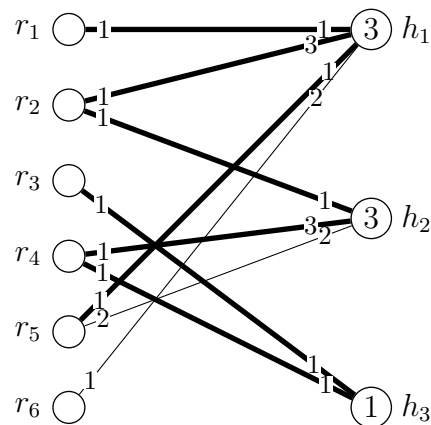
1:  $M \leftarrow \emptyset$ 
2: Repita
3:   Enquanto existir um residente  $r$  que não está associado e cuja lista de preferências não seja vazia Faça
4:     Para todo hospital  $h$  na cabeça de  $r$  Faça
5:        $M \leftarrow M \cup \{(r, h)\}$ 
6:       Se  $h$  está cheio ou  $h$  está lotado Então
7:         Para todo residente  $r'$  dominado na lista de  $h$  Faça
8:           Se  $(r', h) \in M$  Então
9:              $M \leftarrow M \setminus \{(r', h)\}$ 
10:          Fim Se
11:          Remova o par  $(r', h)$ 
12:        Fim Para
13:      Fim Se
14:    Fim Para
15:  Fim Enquanto
16:  Seja  $G_R$  o grafo reduzido de associações
17:  Seja  $Z$  o conjunto crítico de residentes
18:  Para todo  $h \in \mathcal{N}(Z)$  Faça
19:    Para todo residente  $r$  na cauda de  $h$  Faça
20:      Se  $(r, h) \in M$  Então
21:         $M \leftarrow M \setminus \{(r, h)\}$ 
22:      Fim Se
23:      Remova o par  $(r, h)$ 
24:    Fim Para
25:  Fim Para
26:  Até  $Z = \emptyset$ 
27:  Seja  $G_A$  o grafo de associações
28:  Seja  $M$  um emparelhamento viável em  $G_A$ 
29:  Se  $M$  não é fortemente estável Então
30:    Não existe um emparelhamento fortemente estável
31:  Devolve  $\emptyset$ 
32: Senão
33:    $M$  é um emparelhamento fortemente estável
34:  Devolve  $M$ 
35: Fim Se

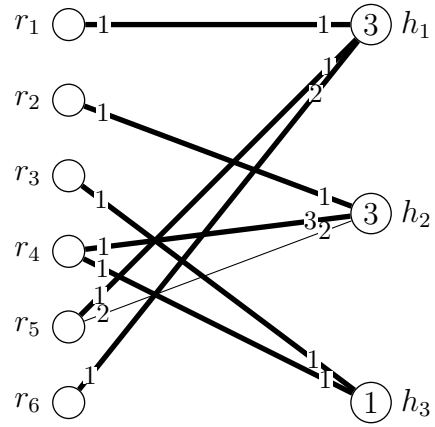
```

---

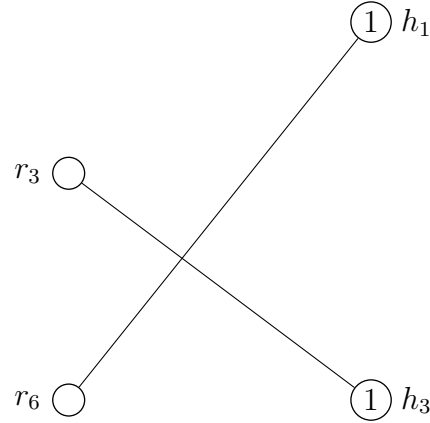


(a) Instância do HRT

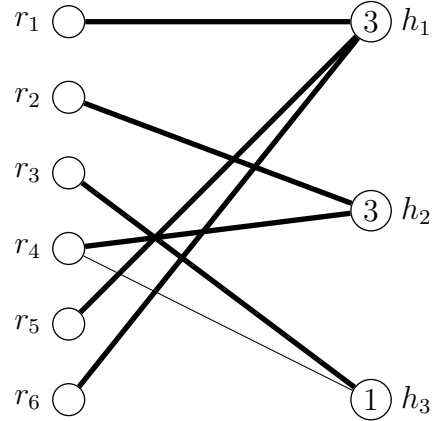
(b)  $r_1$  inicia associações com todos os elementos na cabeça de sua lista de preferências ( $h_1$  e  $h_3$ )(c)  $r_2$  inicia associações com os hospitais  $h_1$  e  $h_2$ (d)  $r_3$  inicia associação com  $h_3$ , tornando  $r_1$  e  $r_5$  dominados em  $h_3$ . Os pares  $(r_1, h_3)$  e  $(r_5, h_3)$  são removidos e os emparelhamentos desfeitos(e)  $r_4$  inicia associações com  $h_2$  e  $h_3$ (f)  $r_5$  inicia associação com  $h_1$ Figura 4.8: Exemplo de uma execução do *HRT-Strong* sobre uma instância do HRT



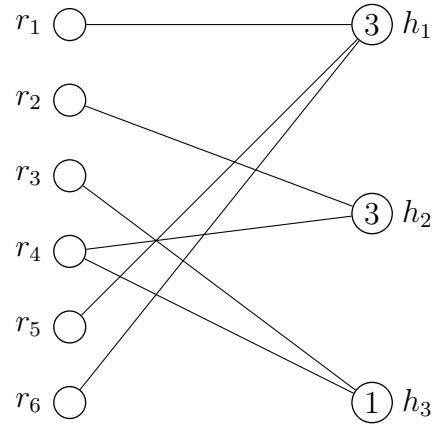
(g)  $r_6$  inicia uma associação com  $h_1$ , tornando  $r_2$  dominado em  $h_1$ . Assim, o par  $(r_2, h_1)$  é removido



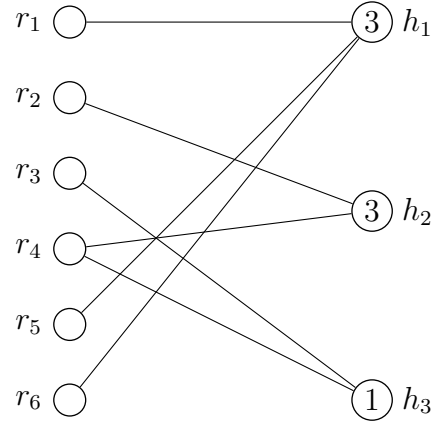
(i) Grafo  $G_R$ , para o qual  $Z = \emptyset$



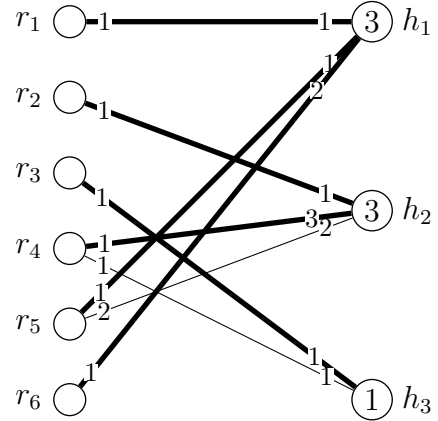
(k) Emparelhamento viável no grafo de associações final



(h) Grafo  $G_A$  das associações resultantes (o laço das linhas 3-15 terminou)



(j) Grafo de associações final  $G_A$  (o laço das linhas 2-26 terminou)



(l) O emparelhamento gerado é fortemente estável

Figura 4.8: Exemplo de uma execução do *HRT-Strong* sobre uma instância do HRT (continuação)

Vamos provar que  $\mathcal{N}(Z \setminus Z')$  não está contido em  $\mathcal{N}(Z) \setminus H'$ . Suponha inicialmente que tal afirmação vale. Nesse caso,

$$|Z \setminus Z'| - \sum_{h \in \mathcal{N}(Z \setminus Z')} c(h) \geq |Z \setminus Z'| - \sum_{h \in \mathcal{N}(Z) \setminus H'} c(h) = |Z| - \sum_{h \in \mathcal{N}(Z)} c(h) - (|Z'| - \sum_{h \in H'} c(h)).$$

No entanto,  $|Z'| - \sum_{h \in H'} c(h) \leq 0$ , porque todo residente em  $Z'$  é emparelhado em  $M'$  a um hospital de  $H'$ . Assim,  $Z \setminus Z'$  tem um valor de deficiência maior ou igual à deficiência de  $Z$ , contrariando o fato de que  $Z$  é um conjunto crítico. Desta forma, temos que a afirmação é verdadeira. Deve existir um residente  $r_1 \in Z \setminus Z'$  e um hospital  $h_1 \in H'$  tal que  $r_1$  estava associado a  $h_1$ . Como ou  $r_1$  não está emparelhado em  $M'$  ou ele prefere  $h_1$  a  $M'(r_1)$  e  $h_1$  é indiferente entre  $r_1$  e pelo menos um membro de  $M'(h_1)$ , o par  $(r, h_1)$  bloqueia  $M'$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Lema 4.5** (Irving *et al.* [32]). *Todo residente que está associado a um hospital no grafo de associação final  $G_A$  deve estar emparelhado em qualquer emparelhamento viável  $M$ .*

*Demonstração.* O resultado é verdade para qualquer residente que é limite, por definição. Considere os outros residentes associados em  $G_A$ . Qualquer número  $x$  de residentes devem ser coletivamente adjacentes em  $G_A$  a um subconjunto de hospitais tais que a soma de suas capacidades seja pelo menos  $x$ ; caso contrário, um desses  $x$  residentes estaria em um conjunto crítico  $Z$  e, portanto,  $Z \neq \emptyset$ . Por uma simples extensão do teorema de Philip Hall [21], temos que todos esses residentes são emparelhados em qualquer emparelhamento de cardinalidade máxima em  $G_A$  e, assim, eles devem estar emparelhados em qualquer emparelhamento viável  $M$ .  $\square$

**Lema 4.6** (Irving *et al.* [32]). *Seja  $M$  um emparelhamento viável no grafo de associações final  $G_A$ . Se (i) algum hospital  $h$  que nunca ficou cheio durante as iterações tem menos elementos em  $M$  do que associações em  $G_A$ , ou (ii) algum hospital  $h$  que ficou cheio durante a execução não está cheio em  $M$ , então nenhum emparelhamento fortemente estável existe.*

*Demonstração.* Suponha que  $M'$  é um emparelhamento fortemente estável para a instância. Todo residente associado a um hospital no grafo de associações final  $G_A$  deve ser associado a um hospital em  $M$  (pelo Lema 4.5) e qualquer residente não associado em  $G_A$  deve ter sua lista de preferências vazia e, desta forma, pelo Lema 4.4, nenhum par fortemente estável. Assim, temos que  $|M'| \leq |M|$ .

Suponha que a condição (i) é satisfeita. Então algum hospital  $h'$  que nunca ficou cheio ou lotado satisfaz  $|M(h')| < d_{G_A}(h')$ , onde  $d_{G_A}(h')$  é o grau do vértice  $h'$  em  $G_A$ , isto é,

o número de residentes associados a  $h'$ . Como  $h'$  nunca ficou cheio ou lotado, segue que  $d_{G_A}(h') < c(h')$ . Note que  $|M(h)| \leq \min\{d_{G_A}(h), c(h)\}$  para todo  $h \in H$ . Assim,

$$|M| = \sum_{h \in H} |M(h)| < \sum_{h \in H} \min\{d_{G_A}(h), c(h)\}. \quad (4.1)$$

Agora suponha que  $|M'(h)| \geq \min\{d_{G_A}(h), c(h)\}$  para todo  $h \in H$ . Então,  $|M'| > |M|$  conforme (4.1), o que é uma contradição. Assim,  $|M'(h'')| < \min\{d_{G_A}(h''), c(h'')\}$  para algum  $h'' \in H$  e, portanto,  $h''$  não está cheio em  $M'$  e algum residente  $r'$  está associado  $h''$  em  $G_A$  mas não está emparelhado a  $h''$  em  $M'$ . Pelo Lema 4.4,  $r'$  não está emparelhado a um hospital em  $M'$  que ele prefere a  $h''$ . Logo,  $(r', h'')$  bloqueia  $M'$ , o que é uma contradição.

Agora suponha que a condição (ii) é satisfeita. Sejam  $H_1$  e  $H_2$  os conjuntos de hospitais que ficaram cheios ou lotados durante a execução e de hospitais que não ficaram cheios ou lotados durante a execução, respectivamente. Então, algum  $h' \in H_1$  satisfaz  $|M(h')| < c(h')$ . A condição (i) não pode ser satisfeita, pois, caso contrário,  $M'$  não existiria. Assim,  $|M(h)| = d_{G_A}(h) < c(h)$  para todo  $h \in H_2$ . Note que  $|M(h)| \leq c(h)$  para todo  $h \in H_1$ . Então,

$$|M| = \sum_{h \in H_1} |M(h)| + \sum_{h \in H_2} |M(h)| < \sum_{h \in H_1} c(h) + \sum_{h \in H_2} d_{G_A}(h). \quad (4.2)$$

Agora suponha que  $|M'(h)| \geq c(h)$  para todo  $h \in H_1$  e  $|M'(h)| \geq d_{G_A}(h)$  para todo  $h \in H_2$ . Dessa forma,  $|M'| > |M|$  conforme (4.2), o que é uma contradição. Assim, ou  $|M'(h'')| < c(h'')$  para algum  $h'' \in H_1$  ou então  $|M'(h'')| < d_{G_A}(h'')$  para algum  $h'' \in H_2$ . No segundo caso, chega-se a uma contradição similar à condição (i). No primeiro caso,  $h''$  não é cheio em  $M'$ . Como  $h''$  ficou cheio ou lotado, existe algum residente  $r'$  que foi associado a  $h''$  durante a execução do algoritmo, mas não é emparelhado a  $h''$  em  $M'$ . Pelo Lema 4.4,  $r'$  não está emparelhado a um hospital em  $M'$  que ele prefere a  $h''$ . Assim,  $(r', h'')$  bloqueia  $M'$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Lema 4.7** (Irving et al. [32]). *Suponha que, no grafo de associações final  $G_A$ , um residente é limite para dois hospitais diferentes. Então, não existe um emparelhamento fortemente estável para aquela instância.*

*Demonstração.* Suponha que um emparelhamento fortemente estável existe para a instância. Seja  $M$  um emparelhamento viável em  $G_A$ ,  $H_1$  o conjunto de hospitais cheios ou lotados em  $G_A$ ,  $H_2 = H \setminus H_1$  e  $d_{G_A}(h)$  o grau do vértice  $h$  em  $G_A$ , isto é, o número de residentes associados a  $h$ . Em  $G_A$ , seja  $R_1$  o conjunto de residentes que são limites para um ou mais hospitais e  $R_2$  o restante dos residentes. Note que, para cada  $h \in H_2$ , qualquer residente

associado a  $h$  em  $G_A$  é limite para  $h$  e, assim, pertence a  $R_1$ . Pelo Lema 4.5, temos que

$$|M| = |R_1| + |R_2|, \quad (4.3)$$

e pelo Lema 4.6, temos que

$$|M| = \sum_{h \in H_1} c(h) + \sum_{h \in H_2} d_{G_A}(h). \quad (4.4)$$

Se algum residente é limite para mais do que um hospital, então, considerando como as capacidades são reduzidas quando os residentes de  $R_1$  são removidos na derivação de  $G_R$  a partir de  $G_A$ , segue que

$$\sum_{h \in H_1} (c(h) - c'(h)) + \sum_{h \in H_2} d_{G_A}(h) > |R_1|. \quad (4.5)$$

Combinando (4.3), (4.4) e (4.5), temos que

$$\sum_{h \in H_1} c'(h) < |R_2|.$$

Como nenhum membro de  $H_2$  pertence a  $G_R$ , os residentes de  $R_2$  são coletivamente adjacentes a apenas hospitais de  $H_1$ , e assim a inequação anterior é suficiente para estabelecer que o conjunto crítico não é vazio, o que é uma contradição.  $\square$

**Lema 4.8** (Irving *et al.* [32]). *Seja  $M$  um emparelhamento viável no grafo de associações final. Se  $M$  não é um emparelhamento fortemente estável, então não existe emparelhamento fortemente estável para aquela instância.*

*Demonstração.* Suponha que  $M$  não é fortemente estável e seja  $(r, h)$  um par bloqueante para  $M$ .

Primeiro, vamos supor que  $r$  prefere  $h$  a  $M(r)$  ou que  $r$  não está emparelhado em  $M$ . Então,  $(r, h)$  foi removido em algum momento durante a execução do algoritmo, o que acontece apenas se  $h$  ficou cheio. Se  $h$  também está cheio em  $M$ , então  $h$  prefere qualquer residente de  $M(r)$  a  $r$ , já que  $r$  é um sucessor de qualquer entrada não removida de sua lista, contrariando assim o fato de  $(r, h)$  ser um par bloqueante. Se  $h$  não está cheio em  $M$ , como  $h$  ficou cheio durante a execução, temos pelo Lema 4.6 que essa instância não admite nenhum emparelhamento fortemente estável e a prova segue.

Suponha agora que  $r$  é indiferente entre  $h$  e  $M(r)$ . Vamos considerar os casos em que  $h$  está cheio ou não em  $M$ .

Primeiro suponha que  $h$  não está cheio em  $M$ . Se  $h$  ficou cheio em algum momento durante a execução, então, pelo Lema 4.6, não existe nenhum emparelhamento fortemente estável para essa instância e a prova segue. Se  $h$  nunca ficou cheio durante a execução

do algoritmo, então  $r$  deve ser limite para  $h$  e, como  $r$  não está emparelhado a  $h$  em  $M$ , pela definição de emparelhamento viável,  $r$  também deve ser limite para  $M(r)$ . Então,  $r$  é limite para dois hospitais e, pelo Lema 4.7, não existe um emparelhamento fortemente estável para essa instância.

Suponha agora que  $h$  está cheio em  $M$ . Para que  $(r, h)$  seja um par bloqueante,  $h$  deve preferir  $r$  a pelo menos um dos residentes emparelhados a ele em  $M$ . Nesse caso, temos que  $r$  é limite para  $h$  e como  $r$  não está emparelhado a  $h$  em  $M$ ,  $r$  também deve ser limite para  $M(r)$ . Então, novamente temos que  $r$  é um limite para dois hospitais e, pelo Lema 4.7, nenhum emparelhamento fortemente estável existe para essa instância.  $\square$

**Teorema 4.6** (Irving *et al.* [32]). *Para uma dada instância do HRT, o algoritmo HRT-strong determina se um emparelhamento fortemente estável existe. Se tal emparelhamento fortemente estável existe, então todas as possíveis execuções do algoritmo encontram um no qual cada residente é emparelhado a um hospital tão bom quanto qualquer outro hospital que ele poderia ser emparelhado em qualquer emparelhamento fortemente estável e qualquer residente que não foi emparelhado pelo algoritmo não é emparelhado em nenhum emparelhamento fortemente estável.*

*Demonstração.* Diretamente dos Lemas 4.4 a 4.8.  $\square$

### 4.2.2 Teorema dos Hospitais Rurais

Nesta seção mostraremos que o Teorema dos Hospitais Rurais, introduzido na Seção 3.5, também vale para uma instância do HRT se a mesma admitir uma solução para o problema de encontrar um emparelhamento fortemente estável.

**Lema 4.9** (Irving *et al.* [32]). *Para uma dada instância do HRT, seja  $M$  um emparelhamento fortemente estável obtido pelo algoritmo HRT-Strong e seja  $M'$  qualquer outro emparelhamento fortemente estável para a mesma instância. Se um hospital  $h$  não está cheio em  $M'$ , então todo residente emparelhado a  $h$  em  $M$  também é emparelhado a  $h$  em  $M'$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $r$  é emparelhado a  $h$  em  $M$  mas não em  $M'$ . Então  $(r, h)$  bloqueia  $M'$ , uma vez que  $h$  não está cheio em  $M'$  e  $r$  não pode preferir qualquer um dos seus parceiros estáveis a  $h$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Teorema 4.7** (Irving *et al.* [32]). *Para uma dada instância  $I$  do HRT:*

- (i) *Cada hospital é emparelhado com o mesmo número de residentes em qualquer emparelhamento fortemente estável de  $I$ ;*

- (ii) Os mesmos residentes são emparelhados em todos os emparelhamentos fortemente estáveis;
- (iii) Qualquer hospital que não está cheio em algum emparelhamento fortemente estável de  $I$  é emparelhado ao mesmo conjunto de residentes em qualquer outro emparelhamento fortemente estável de  $I$ .

*Demonstração.* Seja  $M$  o emparelhamento fortemente estável obtido pelo algoritmo *HRT-strong* e seja  $M'$  um emparelhamento fortemente estável tal que  $M' \neq M$ .

Para o item (i), note que qualquer residente  $r$  que não foi emparelhado em  $M$  não pode ser emparelhado em  $M'$ , uma vez que  $r$  deve ter uma lista vazia. Dessa forma,  $(r, h)$  foi removido para todo  $h$  que acha  $r$  aceitável e, pelo Lema 4.4, nenhum par fortemente estável é removido durante a execução do algoritmo. Disto segue que  $|M'| \leq |M|$ . Pelo Lema 4.9, qualquer hospital que está cheio em  $M$  também está cheio em  $M'$  e qualquer hospital que não está cheio em  $M$  está emparelhado em  $M'$  a pelo menos a mesma quantidade de residentes que ele está emparelhado em  $M$ . Disto segue que  $|M'| \geq |M|$ . Combinando esta inequação com a anterior, temos que  $|M'| = |M|$ . Dessa igualdade e do Lema 4.9 temos que todo hospital é emparelhado ao mesmo número de residentes em  $M$  e  $M'$ .

Provamos acima  $|M| = |M'|$  e que qualquer residente que não é emparelhado em  $M$  não pode ser emparelhado em  $M'$ . Logo, o mesmo conjunto de residentes é emparelhado em  $M$  e  $M'$  e o item (ii) vale.

Seja  $h$  um hospital que não está cheio em  $M'$ . Então, pelo Lema 4.9, todo residente emparelhado a  $h$  em  $M$  também deve estar emparelhado a  $h$  em  $M'$ , o que nos leva a  $M(h) \subseteq M'(h)$ . Pelo item (i) dessa prova, temos que  $|M(h)| = |M'(h)|$ . Logo,  $M(h) = M'(h)$  e o item (iii) também é verdadeiro.

Como  $M'$  é um emparelhamento fortemente estável arbitrário, esses resultados valem para qualquer emparelhamento fortemente estável.  $\square$

### 4.2.3 Reticulado Distributivo

Vimos na Seção 3.8 a necessidade de entender a estrutura algébrica das soluções de uma instância do HR. O conjunto não vazio de emparelhamentos fortemente estáveis para uma instância do SMT/SMTI/HRT sob o critério de estabilidade forte também apresenta uma estrutura de reticulado distributivo, conforme indicado por Manlove [50]. Veremos nessa seção tal resultado apenas para o SMT.

Dados dois emparelhamentos fortemente estáveis  $M$  e  $M'$  de uma instância  $I$  do SMT, construímos um grafo bipartido de arestas coloridas denotado por  $M \oplus M'$  como segue: crie um vértice para cada pessoa de  $I$ , adicione uma aresta vermelha entre duas pessoas se elas estão emparelhadas em  $M$  mas não em  $M'$  e adicione uma aresta azul ligando



duas pessoas se elas estão emparelhadas em  $M'$  mas não em  $M$ . Dizemos que um circuito  $C$  em  $M \oplus M'$  é um circuito alternante se cada vértice de  $C$  é incidido por uma aresta vermelha e por uma aresta azul. Como todo emparelhamento fortemente estável para uma instância do SMT é completo, temos que cada componente do grafo  $M \oplus M'$  é um circuito alternante.

**Lema 4.10** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT, e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos fortemente estáveis em  $I$ . Suponha que para alguma pessoa  $p$  em  $I$ ,  $(p, q) \in M$  e  $(p, q') \in M'$ , onde  $q \neq q'$ , e  $q' \succeq_p q$ . Então, existe um circuito alternante em  $M \oplus M'$  envolvendo  $p$ ,  $q$  e  $q'$  tal que, para algum  $r > 1$ , há  $r$  pessoas  $p_1, \dots, p_r$  em  $I$ , todas do mesmo sexo, e  $r$  pessoas  $q_1, \dots, q_r$  em  $I$ , todas do sexo oposto, onde:*

- (i)  $p_1 = p$ ,  $q_1 = q$  e  $q_2 = q'$ ;
- (ii)  $(p_i, q_i) \in M$  ( $1 \leq i \leq r$ ) e  $(p_i, q_{i+1}) \in M'$  ( $1 \leq i \leq r$ );
- (iii) *Caso (a): Se  $q' =_p q$ , então (1)  $p_i =_{p_i} p_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) e (2)  $p_i =_{q_i} p_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq r$ ).  
Caso (b): Se  $q' \succ_p q$ , então (1)  $q_{i+1} \succ_{p_i} q_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) e (2)  $p_i \succ_{q_i} p_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq r$ ), onde  $p_0 = p_r$ ,  $p_{r+1} = p_1$  e  $q_{r+1} = q_1$ .*

*Demonstração.* Considere o grafo  $M \oplus M'$ . Neste grafo, os vértices  $p, q, q'$  pertencem a mesma componente conexa  $G'$  de  $M \oplus M'$ .

**Afirmção:** *Existe uma sequência  $\langle p_j \rangle_{j \geq 1}$  de pessoas em  $G'$ , todas do mesmo sexo, e uma sequência  $\langle q_j \rangle_{j \geq 1}$  de pessoas em  $G'$ , todas do sexo oposto, tal que, para cada  $i \geq 1$ : (a)  $p_i q_i$  é uma aresta vermelha e  $p_i q_{i+1}$  é uma aresta azul; e (b)  $q_{i+1} \succeq_{p_i} q_i$ .*

Vamos provar a afirmação por indução em  $i$ . Para o caso base, onde  $i = 1$ , temos claramente que a afirmação vale com  $p_1 = p$ ,  $q_1 = q$  e  $q_2 = q'$ . Para o passo de indução, suponha que a afirmação seja verdadeira para  $i = k$ , onde  $k > 1$ . Mostraremos que a afirmação também é verdadeira para  $i = k + 1$ . Temos que a pessoa  $q_{k+1}$  é incidente a uma aresta vermelha  $p_{k+1} q_{k+1}$ , tal que  $p_{k+1} \succeq_{q_{k+1}} p_k$ , caso contrário, o par  $(p_k, q_{k+1})$  bloquearia  $M$ . Temos também que a pessoa  $p_{k+1}$  é incidente a uma aresta azul, digamos  $p_{k+1} q_{k+2}$ , tal que  $q_{k+2} \succeq_{p_{k+1}} q_{k+1}$ , caso contrário, o par  $(p_{k+1}, q_{k+1})$  bloquearia  $M'$ . Isto completa a prova da afirmação.

Dado que  $G'$  é um circuito,  $q_{r+1} = q$ ,  $p_{r+1} = p$  e  $q_{r+2} = q'$  para algum  $r > 1$ . Note também que, para cada  $i \geq 2$ ,  $p_i \succeq_{q_i} p_{i-1}$ , caso contrário o par  $(p_{i-1}, q_i)$  bloquearia  $M$ . O restante da prova é dividido em dois casos.

No caso (a), temos que  $p$  é indiferente entre  $q'$  e  $q$ . Uma indução similar à acima (trocando as cores vermelho e azul, e interpretando os índices de cada  $p_i$  e  $q_j$  apropriadamente) estabelece que para cada  $i \geq 1$ ,  $q_i \succeq_{p_i} q_{i+1}$  e  $p_{i-1} \succeq_{q_i} p_i$ . Assim,  $p_1, \dots, p_r$  e  $q_1, \dots, q_r$  satisfazem a propriedade

No caso (b), temos que  $p$  prefere  $q'$  a  $q$ . Semelhante ao caso (a), temos que uma indução similar à prova da afirmação estabelece que para cada  $i \geq 1$ ,  $q_i \succ_{p_i} q_{i+1}$  e  $p_{i-1} \succ_{q_i} p_i$ . Assim,  $p_1, \dots, p_r$  e  $q_1, \dots, q_r$  satisfazem a propriedade

□

Da mesma forma que fizemos na Seção 3.8, podemos estender o conceito de preferência para os emparelhamentos de uma instância do SMT. Sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos para uma instância  $I$  do SMT. Dizemos que uma pessoa  $p$  **prefere**  $M$  a  $M'$ , denotado por  $M \succ_p M'$ , se e somente se  $p$  prefere  $M(p)$  a  $M'(p)$ . Dizemos que uma pessoa  $p$  é **indiferente** entre dois emparelhamentos  $M$  e  $M'$ , denotado por  $M =_p M'$ , se  $M(p) = M'(p)$  ou se  $p$  é indiferente entre  $M(p)$  e  $M'(p)$ .

**Teorema 4.8** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos fortemente estáveis em  $I$ . Suponha que  $(m, w) \in M$  e que  $(m, w) \notin M'$ . Então: (i) se  $m$  prefere  $M$  a  $M'$ , então  $w$  prefere  $M'$  a  $M$  e se  $w$  prefere  $M$  a  $M'$ , então  $m$  prefere  $M'$  a  $M$ ; ou (ii) ambos  $m$  e  $w$  são indiferentes entre  $M$  e  $M'$ .*

*Demonstração.* Pelo caso (a) do item (iii) do Lema 4.10,  $m$  é indiferente entre  $M$  e  $M'$  se e somente se  $w$  é indiferente entre  $M$  e  $M'$ . Agora, suponha que  $m$  prefere  $M$  a  $M'$ . Se  $w$  prefere  $M$  a  $M'$ , então  $(m, w)$  bloqueia  $M'$ . Assim, como  $w$  não é indiferente entre  $M$  e  $M'$ ,  $w$  prefere  $M'$  a  $M$ . Finalmente, suponha que  $m$  prefere  $M'$  a  $M$ . Então, pelo caso (b) do item (iii) do Lema 4.10  $w$  prefere  $M$  a  $M'$ . □

Seja  $\mathcal{M}$  o conjunto de emparelhamentos fortemente estáveis para uma dada instância do SMT. Definimos uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $\mathcal{M}$  da seguinte maneira:  $M \sim M'$ , onde  $M, M' \in \mathcal{M}$ , se e somente se para todo homem  $m$  de  $I$ ,  $m$  é indiferente entre  $M$  e  $M'$ . Denotamos por  $\mathcal{C}$  o conjunto das classes de equivalência de  $\mathcal{M}$  e por  $[M]$  a classe de equivalência contendo  $M \in \mathcal{M}$ . Note que essa relação de equivalência é transitiva, ou seja, se  $M, M', M'' \in \mathcal{M}$  e  $M \sim M'$  e  $M' \sim M''$ , então  $M \sim M''$ .

Dizemos que um emparelhamento fortemente estável  $M$  **domina** um emparelhamento fortemente estável  $M'$ , o que é denotado por  $M \succeq M'$ , se, para todo homem  $m$ ,  $m$  prefere  $M$  a  $M'$  ou é indiferente entre eles.

Podemos estender essa relação de dominância definida anteriormente para os elementos de  $\mathcal{M}$  para as classes de equivalência. Dadas duas classes de equivalência  $[M], [M'] \in \mathcal{C}$ , dizemos que  $[M]$  **domina**  $[M']$ , o que é denotado por  $[M] \succeq [M']$ , se e somente se  $M \succeq M'$ . Não é difícil perceber que  $(\mathcal{C}, \succeq)$  é um conjunto parcialmente ordenado.

Os Lemas 4.11 e 4.12 nos ajudam a definir as operações de *meet* e *join* para o poset  $(\mathcal{C}, \succeq)$ . Porém, antes de apresentarmos os lemas, precisamos de outras definições. Sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos fortemente estáveis para uma instância do SMT. Seja

$U_{in}(M, M')$  o conjunto dos homens que são indiferentes entre os emparelhamentos fortemente estáveis  $M$  e  $M'$  (possivelmente  $U_{in}(M, M') = \emptyset$ ). Pelo caso (a) do Lema 4.10, existe um conjunto  $W_{in}(M, M')$ , tal que  $|W_{in}(M, M')| = |U_{in}(M, M')|$ , onde cada mulher desse conjunto é indiferente entre  $M$  e  $M'$ .

**Lema 4.11** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT, e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos fortemente estáveis em  $I$ . Seja  $M^*$  o conjunto de pares ordenados de homens e mulheres definidos da seguinte forma: para cada homem  $m \in U_{in}(M, M')$ ,  $m$  tem em  $M^*$  a mesma parceira de  $M$ , e para cada homem  $m \notin U_{in}(M, M')$ ,  $m$  tem em  $M^*$  a melhor mulher entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ . Então,  $M^*$  é um emparelhamento fortemente estável.*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que  $M^*$  é um emparelhamento. Suponha que os homens  $m$  e  $m'$  tenham a mesma parceira  $w$  em  $M^*$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $(m, w) \in M$  e  $(m', w) \in M'$ . Então,  $m$  prefere  $M$  a  $M'$  ou é indiferente entre eles e  $m'$  prefere  $M'$  a  $M$ . O Teorema 4.8 aplicado ao par  $(m, w)$  implica que  $w$  prefere  $M'$  a  $M$  ou é indiferente entre eles. Porém, aplicando o mesmo teorema ao par  $(m', w)$ , temos que  $w$  prefere  $M$  a  $M'$ , o que é uma contradição. Assim, concluímos que  $M^*$  é um emparelhamento.

Agora, suponha por contradição que o emparelhamento  $M^*$  é bloqueado por algum par  $(m, w)$ . Primeiro, suponha que  $m$  prefere  $w$  a  $M^*(m)$ . Então  $w$  prefere  $m$  a  $M^*(w)$  ou é indiferente entre eles. Temos também que  $m$  prefere  $w$  a  $M(m)$  e a  $M'(m)$ . Se  $M^*(w) = M(w)$ , então  $(m, w)$  bloqueia  $M$  e, se  $M^*(w) = M'(w)$ , então  $(m, w)$  bloqueia  $M'$ . Como  $M^*(w) \in \{M(w), M'(w)\}$ , temos então uma contradição.

Suponha agora que  $m$  é indiferente entre  $w$  e  $M^*(m)$ . Como  $(m, w)$  é um par bloqueante, temos que  $w$  prefere  $m$  a  $M^*(w)$ . Note que ou  $m$  prefere  $w$  a  $M(m)$  ou é indiferente entre elas, e que ou  $m$  prefere  $w$  a  $M'(m)$  ou é indiferente entre elas. Se  $M^*(w) = M(w)$ , então  $(m, w)$  bloqueia  $M$ . Se  $M^*(w) = M'(w)$ , então  $(m, w)$  bloqueia  $M'$ . Novamente,  $M^*(w) \in \{M(w), M'(w)\}$ , e assim temos uma contradição. Logo,  $M^*$  é fortemente estável. □

Denotamos por  $M \wedge M'$  o emparelhamento fortemente estável no qual cada homem  $m \in U_{in}(M, M')$  recebe a sua parceira de  $M$  e cada homem  $m \notin U_{in}(M, M')$  recebe a melhor de suas parceiras entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ .

**Lema 4.12** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos fortemente estáveis em  $I$ . Seja  $M^*$  o conjunto de pares ordenados de homens e mulheres definidos como segue: para cada homem  $m \in U_{in}(M, M')$ ,  $m$  tem em  $M^*$  a mesma parceira de  $M$ , e para cada homem  $m \notin U_{in}(M, M')$ ,  $m$  tem em  $M^*$  a pior mulher entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ . Então,  $M^*$  é um emparelhamento fortemente estável.*

*Demonstração.* Claramente, cada mulher em  $W_{in}(M, M')$  tem o mesmo parceiro em  $M^*$  que ela tem em  $M$ . Se cada homem  $m \notin U_{in}(M, M')$  recebe a pior de suas parceiras entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ , então, pelo Teorema 4.8, cada mulher  $w \notin W_{in}(M, M')$  recebe o melhor dos seus parceiros entre  $M(w)$  e  $M'(w)$ . O restante da prova é essencialmente o igual à prova do Lema 4.11 com os papéis dos homens e das mulheres trocados.  $\square$

Denotamos por  $M \vee M'$  o emparelhamento fortemente estável no qual cada homem  $m \in U_{in}(M, M')$  recebe a sua parceira de  $M$  e cada homem  $m \notin U_{in}(M, M')$  recebe a pior de suas parceiras entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ .

O lema a seguir, demonstra algumas propriedades sobre os emparelhamentos formados pelas operações  $\wedge$  e  $\vee$  que serão úteis para provar que  $(\mathcal{C}, \supseteq)$  possui uma estrutura de reticulado distributivo.

**Lema 4.13** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT e seja  $\mathcal{M}$  o conjunto dos emparelhamentos fortemente estáveis de  $I$ . Então, para qualquer  $X, Y, Z \in \mathcal{M}$ , temos que:*

$$(i) \ X \wedge X = X$$

$$(ii) \ X \vee X = X$$

$$(iii) \ X \wedge Y \sim Y \wedge X$$

$$(iv) \ X \vee Y \sim Y \vee X$$

$$(v) \ X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$$

$$(vi) \ X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$$

$$(vii) \ X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

$$(viii) \ X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

Onde  $\sim$  é a relação de equivalência sobre  $\mathcal{M}$  definida anteriormente.

*Demonstração.* As afirmações de (i) - (iv) são triviais a partir da definição.

Para demonstrar (v), seja  $m$  um homem qualquer e seja  $R = X \wedge (Y \wedge Z)$  e  $S = (X \wedge Y) \wedge Z$ . Se  $m$  não é indiferente entre nenhum par dentre os possíveis pares que  $X, Y, Z$  podem formar, então é fácil perceber que  $R(m) = S(m)$ . Suponha que  $m$  é indiferente entre  $X, Y$  e  $Z$ . Então,  $R(m) = X(m) = S(m)$ . Agora, suponha que  $m$  é indiferente entre dois elementos de  $X, Y, Z$ , que chamaremos de  $A$  e  $B$ , onde  $A \in \{X, Y\}$  e  $B \in \{Y, Z\}$ , sem perda de generalidade. Seja  $C$  tal que  $\{A, B, C\} = \{X, Y, Z\}$ . Se  $m$

prefere  $C$  a  $A$  e  $B$ , então  $R(m) = C(m) = S(m)$ . Caso contrário,  $m$  prefere  $A$  e  $B$  a  $C$ , e então  $R(m) = A(m) = S(m)$ .

Podemos provar a validade de (vi) de forma similar à demonstração de (v).

Para provar (vii), seja  $m$  um homem qualquer e sejam  $R = X \wedge (Y \vee Z)$  e  $S = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ . Se  $m$  não é indiferente entre nenhum par dentre os possíveis pares que  $X, Y, Z$  podem formar, é fácil verificar que  $m$  é emparelhado em  $R$  e  $S$  a  $Z(m)$  se  $Y \succ_m Z \succ_m X$ , ou é emparelhado a  $Y(m)$  se  $Z \succ_m Y \succ_m X$ , ou é emparelhado a  $X(m)$  em todos os outros casos. Agora, suponha que  $m$  é indiferente apenas entre  $Y$  e  $Z$ . Se  $m$  prefere  $X$  a  $Y$ , então  $R(m) = X(m) = S(m)$ . Caso contrário,  $m$  prefere  $Y$  a  $X$  e  $R(m) = Y(m) = S(m)$ . Se  $m$  é indiferente entre  $X, Y$  e  $Z$ , ou  $m$  é indiferente apenas entre  $X$  e  $Y$  ou  $m$  é indiferente apenas entre  $X$  e  $Z$ , então  $R(m) = X(m) = S(m)$ .

A prova da validade de (viii) é similar à de (vii).  $\square$

O teorema a seguir apresenta o resultado principal desta seção.

**Teorema 4.9** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT e  $\mathcal{M}$  o conjunto dos emparelhamentos fortemente estáveis em  $I$ . Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto das classes de equivalência de  $\mathcal{M}$  sob a relação de equivalência  $\sim$  e seja  $\succeq$  a relação de dominância entre as classes de equivalência de  $\mathcal{C}$ . Então,  $(\mathcal{C}, \succeq)$  forma um reticulado distributivo finito com  $[M \wedge M']$  representando a operação meet de  $[M]$  e  $[M']$  e  $[M \vee M']$  a operação join para as classes de equivalência  $[M]$  e  $[M'] \in \mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* Primeiro, note que pelos Lemas 4.11 e 4.12, temos que  $[M \wedge M'], [M \vee M'] \in \mathcal{C}$ .

Pela definição de  $\wedge$ , temos que  $M \wedge M' \succeq M$  e que  $M \wedge M' \succeq M'$ . Logo  $[M \wedge M'] \succeq [M]$  e  $[M \wedge M'] \succeq [M']$ . Se existe um emparelhamento fortemente estável  $M^*$  tal que  $M^* \succeq M$  e  $M^* \succeq M'$ , então cada homem em  $M^*$  está emparelhado em  $M^*$  a uma mulher tão boa quanto a que ele possui em  $M$  e  $M'$ . Portanto, temos que  $M^* \succeq M \wedge M'$  e, assim  $[M^*] \succeq [M \wedge M']$ . Então, concluímos que  $[M \wedge M']$  constitui uma operação de *meet* para  $[M]$  e  $[M']$ .

Pela definição de  $\vee$ , temos que  $M \succeq M \vee M'$  e que  $M' \succeq M \vee M'$ . Logo,  $[M] \succeq [M \vee M']$  e  $[M'] \succeq [M \vee M']$ . Se existe um emparelhamento fortemente estável  $M^*$  tal que  $M \succeq M^*$  e  $M' \succeq M^*$ , então cada homem em  $M^*$  possui uma mulher no máximo tão boa quanto a pior mulher que ele foi emparelhado em  $M$  e  $M'$ . Assim, podemos concluir que  $M \vee M' \succeq M^*$  e que  $[M \vee M'] \succeq [M^*]$ . Logo,  $[M \vee M']$  constitui uma operação de *join* para  $[M]$  e  $[M']$ .

Portanto, pelo Lema 4.13, temos que  $(\mathcal{C}, \succeq)$  é um reticulado distributivo.  $\square$

### 4.3 Super Estabilidade

Nesta seção estudaremos os problemas de emparelhamentos estáveis sob o critério de super estabilidade. As definições de pares bloqueantes para tais problemas são apresentadas a seguir. Também utilizaremos, nos problema que envolvem hospitais e residentes, a mesma definição de hospital cheio e não cheio em um emparelhamento que foi definida na Seção 4.2.

**Definição 4.10** (Par bloqueante - SMT sob o critério de super estabilidade). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMT, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  bloqueia  $M$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $w \succ_m M(m)$  ou  $w =_m M(m)$ ;
- (ii)  $m \succ_w M(w)$  ou  $m =_w M(w)$ .

**Definição 4.11** (Par bloqueante - SMTI sob o critério de super estabilidade). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMTI, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  bloqueia  $M$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $m$  e  $w$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $m$  não está emparelhado em  $M$  ou  $w \succ_m M(m)$  ou  $w =_m M(m)$ ;
- (iii)  $w$  não está emparelhada em  $M$ , ou  $m \succ_w M(w)$  ou  $m =_w M(w)$ .

**Definição 4.12** (Par bloqueante - HRT sob o critério de super estabilidade). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do HRT, dizemos que um par  $(r, h) \notin M$  bloqueia  $M$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $r$  e  $h$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $r$  não está emparelhado em  $M$ , ou  $h \succ_r M(r)$  ou  $h =_r M(r)$ ;
- (iii)  $h$  não está cheio em  $M$  ou existe um residente  $r'$  em  $M(h)$  tal que  $r \succ_h r'$  ou  $r =_h r'$ .

**Definição 4.13** (Super estabilidade). *Dizemos que um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do SMT/SMTI/HRT é **super estável** para  $I$  se e somente se nenhum par  $(a, b) \notin M$  bloqueia  $M$ , de acordo com as definições de pares bloqueantes apresentadas para os respectivos problemas nas definições 4.10, 4.11 e 4.12.*

Pela definição de super estabilidade, não é difícil perceber que todo emparelhamento super estável é fortemente estável e, por transitividade, é também fracamente estável, uma vez que todo emparelhamento fortemente estável é fracamente estável. Dos três emparelhamentos fracamente estáveis apresentados na Figura 4.2, apenas o emparelhamento da Figura 4.2c é super estável. Isso ocorre porque o emparelhamento fortemente estável apresentado na Figura 4.2a é bloqueado pelo par bloqueante  $(r_6, h_1)$ .

No restante desta seção, veremos que, assim como acontece no critério de estabilidade forte, nem sempre existe uma solução para uma instância do SMT quando se considera o critério de super estabilidade. Também apresentaremos um algoritmo que determina essa existência e, em caso positivo, apresenta a solução. Veremos que existe uma versão do Teorema dos Hospitais Rurais para instâncias do HRT sob o critério de super estabilidade e que o conjunto de emparelhamentos super estáveis de uma instância do SMT apresenta uma estrutura de reticulado distributivo.

### 4.3.1 Determinando a Existência de uma Solução

Uma instância do SMT nem sempre admite um emparelhamento super estável, o que pode ser visto pelo simples fato de que esse tipo de emparelhamento é também um emparelhamento fortemente estável e, como visto na Seção 4.2, emparelhamentos fortemente estáveis não são admitidos por todas as instâncias do SMT.

Decidir se uma solução existe ou não quando se considera o critério de super estabilidade foi inicialmente estudado por Irving [26], que apresentou um algoritmo  $O(n^2)$  para o SMT, onde  $n$  é o tamanho da instância. Posteriormente, Manlove [49] estendeu esse algoritmo para o SMTI, mantendo a complexidade de  $O(n^2)$  e Irving *et al.* [31] apresentaram um algoritmo  $O(m)$  para o HRT, onde  $m$  é o número de pares aceitáveis.

A seguir apresentaremos o algoritmo dado por Irving *et al.* [31], que encontra um emparelhamento super estável para uma instância do HRT se ele existir. Chamaremos tal algoritmo de *HRT-Super*. Da mesma forma como ocorre para o *HRT-Strong*, o *HRT-Super* não necessariamente mantém um emparelhamento durante sua execução e, portanto, também chamamos aqui de associação o “emparelhamento” entre um hospital e um residente.

Note que, pela definição de pior agente, pode existir mais do que um pior residente para um hospital. Por exemplo, considere a lista de preferências do hospital  $h_1$  como sendo  $r_1, (r_3, r_4), (r_2, r_5, r_6)$  e suponha que  $h_1$  está associado, em uma determinada iteração do algoritmo, a  $r_1, r_4, r_2$  e  $r_5$ . Nesse caso, ambos  $r_2$  e  $r_5$  são os piores residentes de  $h_1$  que estão associados a ele. Note que  $r_6$  também é um pior residente para  $h_1$  (não associado a ele).

Em cada iteração do algoritmo, um residente que não está associado a nenhum hospital e cuja lista de preferências não está vazia inicia uma associação com todos os hospitais que



estão na cabeça da sua lista de preferências. Se algum desses hospitais ficar lotado, então deve-se remover todos os residentes que estão na cauda da lista desse hospital, remover esse hospital das listas de tais residentes e romper o emparelhamento de tais residentes com esse hospital, quando houver. Se algum desses hospitais estiver/ficar cheio, deve-se remover de sua lista de preferências todos os residentes que estiverem nas entradas à direita da entrada que contém o(s) seu(s) pior(res) residente(s) e deve-se remover esse hospital das listas de tais residentes.

Quando todos os residentes que não estiverem associados a algum hospital tiverem sua lista de preferências vazia, o algoritmo irá verificar se a associação resultante é um emparelhamento super estável ou não. Se a associação final possui um residente associado a mais de um hospital ou se ela possui um hospital que não está cheio mas ficou cheio em algum momento durante a execução, então não existe um emparelhamento super estável para a instância dada. Caso contrário, a associação final é tal emparelhamento.

O Algoritmo 6 apresenta o pseudocódigo do *HRT-Super* e a Figura 4.9 apresenta um exemplo de sua execução. Nela, identificaremos os hospitais que ficaram cheios em algum momento da execução escrevendo o seu identificador em negrito.

Irving *et al.* [31] afirmam que através da escolha de estruturas de dados adequadas podemos implementar o *HRT-Super* em  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de pares aceitáveis. Como o SM também é um caso particular do HRT, e aquele possui um limitante inferior de  $\Omega(m)$  [56], temos que o *HRT-Super* é um algoritmo ótimo.

Os Lemas 4.14 a 4.19 e o Teorema 4.10 provam a corretude do *HRT-Super*. Neles, chamaremos de **par super estável** um par  $(r, h) \in R \times H$  que pertence a um emparelhamento super estável.

**Lema 4.14** (Irving *et al.* [31]). *Se  $HRT-Super$  afirma que  $M$  é um emparelhamento super estável, então  $M$  é um emparelhamento.*

*Demonstração.* Claramente, nenhum hospital está lotado em  $M$ . Além disso, nenhum residente está emparelhado a mais de um hospital, caso contrário o algoritmo teria reportado que não existe um emparelhamento super estável.  $\square$

**Lema 4.15** (Irving *et al.* [31]). *Se o par  $(r, h)$  é removido durante a execução do  $HRT-Super$ , então este par não pode bloquear qualquer emparelhamento super estável gerado pelo algoritmo.*

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento gerado pelo *HRT-Super* e suponha que o par  $(r, h)$  foi removido durante a execução do algoritmo. Note que, para qualquer par  $(r', h') \in M$ , temos que  $r'$  pertence à lista de preferências de  $h'$  ao final da execução assim como  $h'$  pertence à lista de  $r'$ . Se  $h$  está cheio em  $M$ , então  $h$  prefere qualquer residente de  $M(h)$  a  $r$ , pois  $r$  necessariamente sucede, na lista de preferências de  $h$ , qualquer residente



---

**Algoritmo 6** Algoritmo *HRT-Super*

---

**Entrada:** Uma instância  $I$  do HRT**Saída:** Um emparelhamento super estável  $M$ , se ele existir

```

1:  $M \leftarrow \emptyset$ 
2: Para todo  $h \in H$  Faça
3:    $cheio[h] \leftarrow \text{Falso}$ 
4: Fim Para
5: Enquanto existir um residente  $r$  que não está associado em  $M$  e cuja lista de
   preferências atual não se encontra vazia Faça
6:   Para todo hospital  $h$  na cabeça da lista de  $r$  Faça
7:      $M \leftarrow M \cup \{(r, h)\}$ 
8:     Se  $h$  está lotado Então
9:       Para todo residente  $r'$  na cauda de  $h$  Faça
10:        Se  $(r', h) \in M$  Então
11:           $M \leftarrow M \setminus \{(r', h)\}$ 
12:        Fim Se
13:        remova o par  $(r', h)$ 
14:      Fim Para
15:    Fim Se
16:    Se  $h$  está cheio Então
17:       $cheio[h] \leftarrow \text{Verdadeiro}$ 
18:      Seja  $r$  um dos piores residentes associados a  $h$ 
19:      Para todo sucessor  $r'$  de  $r$  na lista de preferências de  $h$  Faça
20:        remova o par  $(r', h)$ 
21:      Fim Para
22:    Fim Se
23:  Fim Para
24: Fim Enquanto
25: Se (algum residente  $r$  está associado a mais de um hospital) ou (existe um hospital
    $h$  que não está cheio e  $cheio[h] = \text{Verdadeiro}$ ) Então
26:   Não existe um emparelhamento super estável para  $I$ 
27:   Devolve  $\emptyset$ 
28: Senão
29:    $M$  é um emparelhamento super estável
30:   Devolve  $M$ 
31: Fim Se

```

---

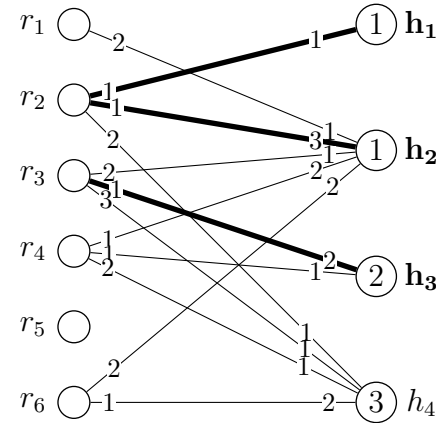
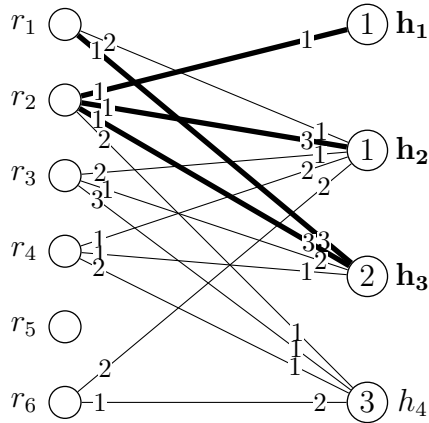
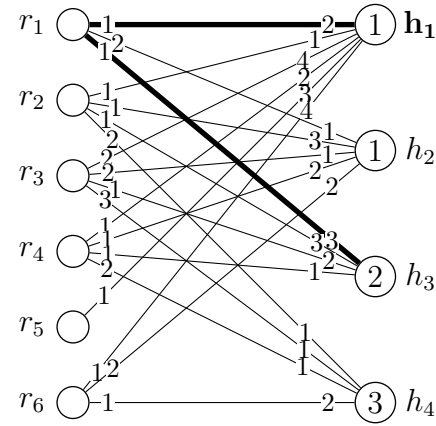
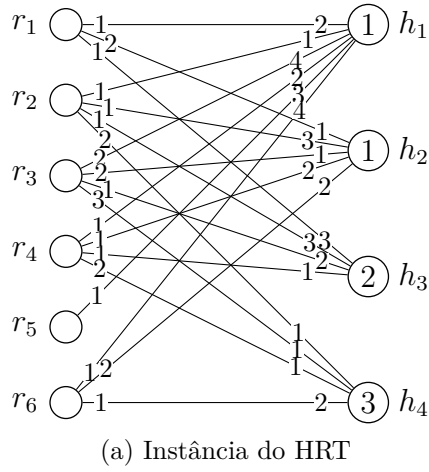
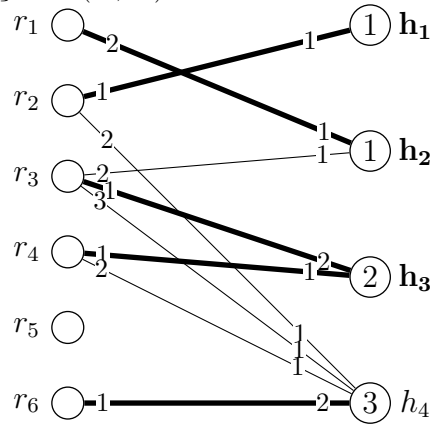
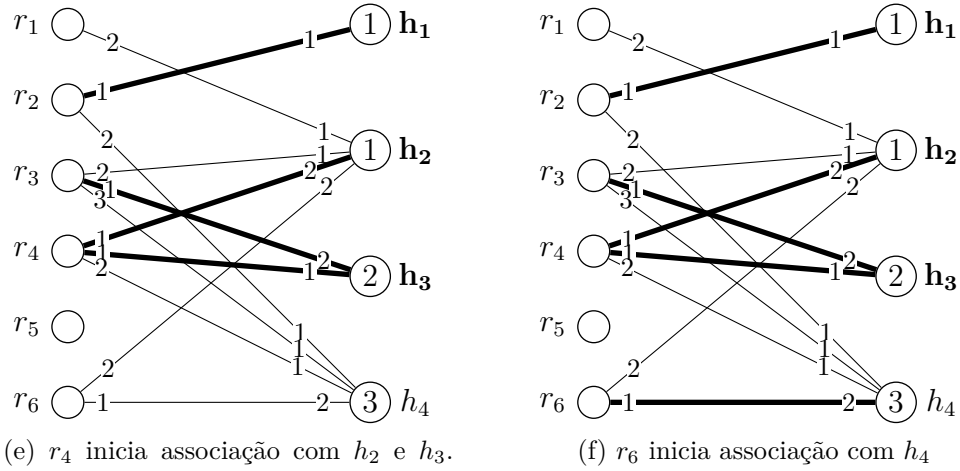


Figura 4.9: Exemplo de uma execução do *HRT-Super* sobre uma instância do HRT



(g)  $r_1$  inicia associação com  $h_2$ , que fica lotado. Os pares  $(r_4, h_2)$  e  $(r_6, h_2)$  são removidos e suas associações são rompidas. Como não existe mais um residente que não esteja associado a um hospital cuja lista de preferências não esteja vazia, o laço das linhas 5-24 termina. Como não existe um residente que está associado a mais do que um hospital e todo hospital que ficou cheio durante a execução do algoritmo se encontra cheio na associação obtida ao término do laço, ela é um emparelhamento super estável

Figura 4.9: Exemplo de uma execução do *HRT-Super* sobre uma instância do HRT (continuação)

que não foi removido. Assim,  $(r, h)$  não bloqueia  $M$  neste caso. Agora suponha que  $h$  não está cheio em  $M$ . Como o par  $(r, h)$  é removido durante alguma iteração do laço das linhas 5-24,  $h$  teria ficado cheio em algum momento. Assim, o algoritmo teria reportado que não existe um emparelhamento super estável ao invés de gerar  $M$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Lema 4.16** (Irving *et al.* [31]). *Se o algoritmo HRT-Super afirma que  $M$  é um emparelhamento super estável para a instância  $I$  de entrada, então  $M$  é um emparelhamento super estável para  $I$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 4.14, o conjunto  $M$  é um emparelhamento para a instância de entrada. Suponha, por contradição, que  $M$  é bloqueado por um par  $(r, h)$ . Então,  $r$  e  $h$  são mutuamente aceitáveis e, assim,  $r$  pertence à lista original de  $h$  e  $h$  à de  $r$ . Pelo Lema 4.15, o par  $(r, h)$  não pode ter sido removido. Temos então que o par  $(r, h)$  está contido nas listas de preferências resultantes da execução.

Vamos chamar tal lista resultante da execução do algoritmo de listas reduzidas. Como a lista reduzida de  $r$  não está vazia, temos que  $r$  está emparelhado a algum hospital  $h'$  em  $M$ . Como  $(r, h)$  é um par bloqueante, temos que  $h \neq h'$ . Se  $r$  prefere  $h$  a  $h'$ , então o par  $(r, h)$  foi removido, uma vez que  $h'$  está na cabeça da lista de preferências de  $r$ , o que é uma contradição. Assim, temos que  $r$  é indiferente entre  $h$  e  $h'$ , o que indica que  $r$  propôs a  $h$  durante a execução. Dessa forma,  $(r, h) \in M$ , caso contrário o par  $(r, h)$  teria sido removido, o que contraria o fato de  $M$  ser um emparelhamento. Como todos os casos levaram a contradições, temos que  $(r, h)$  não bloqueia  $M$ .  $\square$

**Lema 4.17** (Irving *et al.* [31]). *Nenhum par super estável é removido durante a execução do algoritmo HRT-Super.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que, durante uma execução do algoritmo, um par super estável  $(r, h)$  é removido. Sem perda de generalidade, suponha que  $(r, h)$  foi o primeiro par super estável removido. Seja  $M$  um emparelhamento super estável tal que  $(r, h) \in M$ .

Suponha primeiro que o algoritmo removeu  $r$  porque  $h$  se tornou lotado em algum momento durante a execução e, neste momento,  $r$  estava na cauda de  $h$ . Seja  $M'$  a associação mantida pelo algoritmo no momento imediatamente anterior à remoção dos pares  $(r', h)$  tais que  $r'$  está na cauda de  $h$  (linha 8). Como  $h$  está lotado, temos que  $|M'(h)| > c(h)$ . Como  $M$  é um emparelhamento,  $|M(h)| \leq c(h)$ . Logo, existe um residente  $r' \in M'(h)$  tal que  $(r', h) \notin M$ . Temos também que ou  $h$  prefere  $r'$  a  $r$  ou é indiferente entre eles. Como  $(r', h) \in M'$ , temos que no momento da remoção  $h$  está na cabeça da lista de  $r'$ . Dessa forma, não existe um emparelhamento super estável no qual  $r'$  está emparelhado a um hospital  $h'$  tal que  $r'$  prefere  $h'$  a  $h$ , pois isso contraria o fato de

que  $(r, h)$  é o primeiro par super estável removido pelo algoritmo. Logo, temos que, em  $M$ , ou  $r'$  não está emparelhado ou está emparelhado a um hospital  $h'$  tal que  $r'$  prefere  $h$  a  $h'$  ou é indiferente entre eles. Em qualquer um desses casos,  $(r', h)$  bloqueia o suposto emparelhamento super estável  $M$ .

Suponha agora que o par  $(r, h)$  foi removido como resultado de  $h$  estar cheio. Seja  $M'$  a associação mantida pelo algoritmo no momento imediatamente anterior à remoção dos pares  $(r', h)$  tais que  $r'$  sucede o pior residente associado a  $h$  (linha 17). Como  $h$  está cheio, temos que  $M'(h) = c(h)$  e, como  $(r, h)$  está sendo removido, temos que  $(r, h) \notin M'$ . Como  $(r, h) \in M$  e  $|M(h)| \leq c(h)$ , temos que existe um residente  $r' \in M'(h)$  tal que  $(r', h) \notin M$ . Além disso, temos que  $h$  prefere  $r'$  a  $r$ . No momento em que  $(r, h)$  foi removido,  $h$  estava na cabeça da lista de preferências de  $r'$ , já que  $(r', h) \in M'$ . Dessa forma, nenhum emparelhamento super estável pode conter  $r'$  emparelhado a um hospital  $h'$  tal que  $r'$  prefere  $h'$  a  $h$ , pois isso contraria o fato de que  $(r, h)$  é o primeiro par super estável removido durante a execução. Desta forma, temos que o par  $(r', h)$  bloqueia o suposto emparelhamento super estável  $M$ .  $\square$

**Lema 4.18** (Irving *et al.* [31]). *Se ao término do laço das linhas 5-24 do HRT-Super algum residente está associado a mais de um hospital, então a instância  $I$  de entrada não admite um emparelhamento super estável.*

*Demonstração.* Seja  $M'$  a associação ao término desse laço. Suponha por contradição que existe um emparelhamento super estável  $M$  para  $I$ . Vamos mostrar que existe um hospital  $h \in H$  tal que  $|M(h)| < |M'(h)|$ .

Suponha por contradição que a afirmação anterior não vale. Logo,

$$\sum_{h \in H} |M(h)| \geq \sum_{h \in H} |M'(h)|. \quad (4.6)$$

Se um residente  $r$  não está associado a um hospital em  $M'$ , então sua lista de preferências deve estar vazia. Pelo Lema 4.17,  $r$  é não emparelhado em qualquer emparelhamento super estável. Seja  $R'$  o conjunto dos residentes que estão associados a algum hospital em  $M'$  e  $R$  o conjunto dos residentes que estão emparelhados a algum hospital em  $M$ . Devemos ter que  $|R| \leq |R'|$ . Assim,

$$\sum_{h \in H} |M(h)| = |R| \leq |R'| < \sum_{h \in H} |M'(h)|,$$

devido ao fato de algum residente estar associado a mais de um hospital em  $M'$ , o que contraria (4.6). Desta forma, temos que existe um hospital  $h$  tal que  $|M(h)| < |M'(h)|$ . Assim,  $h$  não está cheio em  $M$ , uma vez que nenhum hospital em  $M'$  está lotado. Em particular, existe um residente  $r$  tal que  $r \in M'(h)$  e  $r \notin M(h)$ . Pelo Lema 4.17,  $r$  não

pode estar emparelhado a um hospital  $h'$  em  $M$  tal que  $r$  prefere  $h'$  a  $h$ . Logo, o par  $(r, h)$  bloqueia o suposto emparelhamento super estável  $M$ .  $\square$

**Lema 4.19** (Irving *et al.* [31]). *Se algum hospital  $h$  tornar-se cheio durante o laço das linhas 5-24 do HRT-Super e ao término desse laço  $h$  se encontrar não cheio, então a instância  $I$  de entrada não admite um emparelhamento super estável.*

*Demonstração.* Seja  $M'$  a associação ao término do laço. Suponha por contradição que existe um emparelhamento super estável  $M$  para  $I$ . Logo, pelo Lema 4.18, nenhum residente pode estar emparelhado a mais de um hospital em  $M'$ . Seja  $h'$  um hospital que ficou cheio durante a execução do laço e que ao término do laço se encontra não cheio em  $M'$ . Então, existe um residente  $r'$  que estava associado a  $h'$  em algum ponto durante a execução do laço, mas que não está associado a  $h'$  em  $M'$ . Assim, temos que o par  $(r', h')$  foi removido durante as iterações do laço e, pelo Lema 4.17,  $(r', h') \notin M$ .

**Afirmção 1:** *Se um hospital  $h$  não está cheio em  $M$ , então todo residente associado a  $h$  em  $M'$  está emparelhado a  $h$  em  $M$ .*

Se algum residente  $r$  está associado a  $h$  em  $M'$  mas não está emparelhado a  $h$  em  $M$ , então o par  $(r, h)$  bloqueia  $M$ , pois  $h$  não está cheio, e, pelo Lema 4.17,  $r$  não pode estar emparelhado em  $M$  a um hospital que ele prefere a  $h$ . Dessa forma, a Afirmção 1 é verdadeira.

**Afirmção 2:** *Para cada  $h \in H$ ,  $|M(h)| = |M'(h)|$ .*

Pela primeira afirmação temos que qualquer hospital que está cheio em  $M'$  também está cheio em  $M$  e que qualquer hospital que não está cheio em  $M'$  preenche tantas vagas em  $M$  quanto em  $M'$ . Assim,  $|M(h)| \geq |M'(h)|$  para todo  $h \in H$ .

Seja  $R$  o conjunto de residentes emparelhados a algum hospital em  $M$  e  $R'$  o conjunto de residentes associados a algum hospital em  $M'$ .

Qualquer residente  $r$  que não esteja associado em  $M'$  tem sua lista de preferências vazia e, pelo Lema 4.17, temos que  $r$  não pode pertencer a nenhum emparelhamento super estável. Assim,  $|R| \leq |R'|$ . Além disso,

$$\sum_{h \in H} |M(h)| = |R| \leq |R'| = \sum_{h \in H} |M'(h)|.$$

Logo,  $|M(h)| = |M'(h)|$  para todo  $h \in H$  e a Afirmção 2 é verdadeira.

Desta forma,  $(r', h')$  bloqueia  $M$ , uma vez que  $h'$  não está cheio em  $M$  (pela Afirmção 2) e que, pelo Lema 4.17,  $r'$  não pode estar emparelhado a um hospital em  $M$  que ele prefere a  $h'$ .  $\square$

**Teorema 4.10** (Irving *et al.* [31]). *Para uma dada instância do HRT, o algoritmo HRT-Super determina se um emparelhamento super estável existe ou não. Se tal emparelhamento existir, qualquer execução do algoritmo encontra um emparelhamento super estável*

no qual (i) cada residente emparelhado é emparelhado a um hospital tão bom quanto qualquer hospital que ele poderia ser emparelhado em qualquer outro emparelhamento super estável; e (ii) cada residente não emparelhado não é emparelhado em nenhum emparelhamento super estável.

*Demonstração.* Diretamente dos Lemas 4.14 a 4.19. □

### 4.3.2 Teorema dos Hospitais Rurais

Nesta seção, mostraremos que o Teorema dos Hospitais Rurais, introduzido na Seção 3.5, também vale sobre uma instância do HRT se a mesma admitir uma solução considerando-se o critério de super estabilidade.

**Lema 4.20** (Manlove [51]). *Seja  $I$  uma instância do HRT e  $M$  um emparelhamento para  $I$ . Então,  $M$  é super estável para  $I$  se e somente se  $M$  é estável em qualquer instância  $I'$  do HR obtida através da quebra de empates em  $I$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $M$  é um emparelhamento super estável para  $I$  e que o par  $(r, h) \in R \times H$  bloqueia  $M$  em  $I'$ . Então, ou  $r$  não está emparelhado, ou  $r$  prefere  $h$  a  $M(r)$  ou  $r$  é indiferente entre  $h$  e  $M(h)$ , considerando  $I$ . Similarmente, ainda considerando  $I$ , ou  $h$  não está cheio, ou  $h$  prefere  $r$  a ao menos um residente de  $M(h)$  ou  $h$  é indiferente entre  $r$  e ao menos um residente de  $M(h)$ . Assim, temos que  $(r, h)$  bloqueia  $M$  em  $I$ , contrariando a super estabilidade de  $M$ .

Inversamente, suponha que  $M$  é um emparelhamento estável em qualquer instância do HR obtida através da quebra de empates em  $I$ . Suponha por contradição que  $M$  não é um emparelhamento super estável para  $I$ . Então, temos que deve existir um par  $(r, h) \in R \times H$  que bloqueia  $M$ . Vamos construir uma instância  $I'$  do HR através da quebra de empates de  $I$  da seguinte forma. Se  $r$  é indiferente entre  $h$  e  $M(r)$  em  $I$ , quebre os empates de  $r$  de forma que  $r$  prefira  $h$  a  $M(h)$  em  $I'$ . Se  $r$  não é indiferente entre  $h$  e  $M(r)$ , quebre os empates de  $r$  de uma maneira arbitrária. Similarmente, se  $h$  é indiferente entre  $r$  e o pior residente  $r'$  de  $M(h)$  (qualquer um deles, no caso de haver mais de um), então quebre os empates de  $h$  de forma que  $h$  prefira  $r$  a  $r'$ . Caso contrário, quebre os empates de  $h$  de uma maneira arbitrária. Quebre todos os outros empates de  $I$  de maneira arbitrária. Temos então que  $(r, h)$  bloqueia  $M$  em  $I'$ , contrariando a hipótese de que  $M$  é estável em qualquer instância do HR obtida através da quebra de empates de  $I$ . □

**Teorema 4.11** (Manlove [51]). *Seja  $I$  uma instância do HRT que admite um emparelhamento super estável. Então:*

- (i) *Cada hospital é emparelhado ao mesmo número de residentes em qualquer emparelhamento super estável;*

- (ii) *Exatamente os mesmos residentes não são emparelhados em qualquer emparelhamento super estável;*
- (iii) *Qualquer hospital que não está cheio em um emparelhamento super estável é emparelhado exatamente aos mesmos residentes em qualquer emparelhamento super estável.*

*Demonstração.* Sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos super estáveis para  $I$ . Seja  $I'$  uma instância do HR obtida através da quebra dos empates em  $I$ . Então, pelo Lema 4.20, temos que  $M$  e  $M'$  são estáveis em  $I'$ . Pelo Teorema 3.5 (o Teorema dos Hospitais Rurais do HR), temos que cada hospital em  $I'$  é emparelhado ao mesmo número de residentes em  $M$  e  $M'$  e que qualquer hospital que não está cheio em  $M$  está emparelhado a exatamente o mesmo conjunto de residentes em  $M$  e  $M'$ .  $\square$

O Teorema dos Hospitais Rurais não vale sobre uma instância que considera o critério de estabilidade fraca, porque, conforme visto na Seção 4.1.2, os emparelhamentos fracamente estáveis podem ter cardinalidades diferentes. No entanto, quando a instância admite um emparelhamento super estável, o Teorema 4.12 mostra que ele passa a valer.

**Teorema 4.12.** *Seja  $I$  uma instância do HRT que admite um emparelhamento super estável  $M$ . Então:*

- (i) *Cada hospital é emparelhado ao mesmo número de residentes em qualquer emparelhamento fracamente estável;*
- (ii) *Exatamente os mesmos residentes não são emparelhados em qualquer emparelhamento fracamente estável;*
- (iii) *Qualquer hospital que não está cheio em um emparelhamento fracamente estável é emparelhado exatamente aos mesmos residentes em qualquer emparelhamento fracamente estável.*

*Demonstração.* Sejam  $M'$  e  $M''$  dois emparelhamentos fracamente estáveis para  $I$ . Pelo Teorema 4.1, existe uma instância  $I'$  ( $I''$ ) do HR obtida através da quebra de empates em  $I$  tal que  $M'$  ( $M''$ ) é um emparelhamento estável em  $I'$  ( $I''$ ). Seja  $R^*$  o conjunto de residentes que não foram emparelhados a nenhum hospital no emparelhamento super estável  $M$ . Pelo Lema 4.20,  $M$  é um emparelhamento estável para  $I'$  e  $I''$ . Aplicando o Teorema 3.5 dos Hospitais Rurais a  $I'$  temos que, para todo hospital  $h$ , (i)  $|M'(h)| = |M(h)|$ , (ii) o conjunto de residentes que não foram emparelhados a nenhum hospital no emparelhamento  $M'$  é idêntico ao conjunto de residentes que não foram emparelhados a nenhum hospital em  $M$ , e (iii) para cada hospital  $h$  que não está cheio em  $M'$ ,  $M'(h) = M(h)$ .



Note que chegamos a conclusões semelhantes sobre os emparelhamentos  $M''$  e  $M$  quando aplicamos o mesmo teorema a  $I''$ . Assim, temos que (i) o número de residentes emparelhados a um hospital  $h$  em  $M'$  e  $M''$  é o mesmo, (ii) os mesmos residentes não são emparelhados em  $M'$  e  $M''$  e (iii) qualquer hospital que não está cheio em  $M'$  é emparelhado aos mesmos residentes em  $M'$  e  $M''$ . Como  $M'$  e  $M''$  foram escolhidos arbitrariamente, temos que o resultado vale para todos os emparelhamentos fracamente estáveis de  $I$ .  $\square$

### 4.3.3 Reticulado Distributivo

Nesta seção, vamos mostrar que o conjunto de emparelhamentos super estáveis de uma instância do SMT também forma um reticulado distributivo. Esse resultado também é válido para o conjunto de emparelhamentos super estáveis de uma instância do HRT [51], mas por questões de simplicidade e espaço, vamos provar apenas para o SMT.

**Lema 4.21** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT, e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos super estáveis para  $I$ . Se  $M(p) \neq M'(p)$  para alguma pessoa  $p$ , então  $p$  não pode ser indiferente entre  $M(p)$  e  $M'(p)$ .*

*Demonstração.* Seja  $M(p) = q$  e  $M'(p) = q'$ . Suponha por contradição que  $q =_p q'$ . Como todo emparelhamento super estável é fortemente estável, podemos aplicar o caso (a) do item (iii) do Lema 4.10 e assim temos que  $q'$  é indiferente entre  $M(q')$  e  $M'(q') = p$ . Logo, temos que o par  $(p, q')$  bloqueia o emparelhamento  $M$ , o que é uma contradição.  $\square$

Da mesma forma que fizemos nas Seções 3.8 e 4.2.3, vamos estender o conceito de preferência para os emparelhamentos de uma instância do SMT. Sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos para uma instância  $I$  do SMT. Dizemos que uma pessoa  $p$  **prefere**  $M$  a  $M'$  se e somente se  $p$  prefere  $M(p)$  a  $M'(p)$ . Dizemos que uma pessoa  $p$  é **indiferente** entre um emparelhamento  $M$  e  $M'$  se  $M(p) = M'(p)$  ou se  $p$  é indiferente entre  $M(p)$  e  $M'(p)$ . Dizemos que  $M$  **domina**  $M'$ , denotado por  $M \succeq M'$ , se e somente se para todo homem  $m \in U$  temos que  $m$  prefere  $M$  a  $M'$  ou é indiferente entre eles.

**Teorema 4.13** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos super estáveis em  $I$ . Suponha que  $(m, w) \in M$  e  $(m, w) \notin M'$ . Então ou  $m$  ou  $w$  prefere  $M$  a  $M'$  e o outro prefere  $M'$  a  $M$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 4.21, nem  $m$  nem  $w$  são indiferentes entre  $M$  e  $M'$ . Como  $M$  e  $M'$  também são fortemente estáveis, temos que o resto do resultado segue pelo Teorema 4.8.  $\square$

É fácil modificar os Lemas 4.11 e 4.12 para estabelecer resultados análogos para o critério de super estabilidade. Por isso, omitiremos suas provas. Desta forma, temos o seguinte lema.

**Lema 4.22** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT, e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos super estáveis em  $I$ . Seja  $M^*$  o conjunto de pares ordenados de homens e mulheres definido dando a cada homem  $m$  a sua melhor parceira entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ . Então  $M^*$  é um emparelhamento super estável.*

Denotamos por  $M \wedge M'$  o emparelhamento super estável no qual cada homem  $m$  recebe a melhor mulher entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ .

**Lema 4.23** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT, e sejam  $M$  e  $M'$  dois emparelhamentos super estáveis em  $I$ . Seja  $M^*$  o conjunto de pares ordenados de homens e mulheres definido dando a cada homem  $m$  a sua pior parceira entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ . Então  $M^*$  é um emparelhamento super estável.*

Denotamos por  $M \vee M'$  o emparelhamento super estável no qual cada homem  $m$  recebe a pior mulher entre  $M(m)$  e  $M'(m)$ .

Vamos agora apresentar o resultado principal desta seção.

**Teorema 4.14** (Manlove [50]). *Seja  $I$  uma instância do SMT, e seja  $\mathcal{M}$  o conjunto de todos os emparelhamentos super estáveis de uma instância  $I$ . Então  $(\mathcal{M}, \succeq)$  forma um reticulado distributivo, com  $M \wedge M'$  representando a operação *meet* de  $M$  e  $M'$  e  $M \vee M'$  representando a operação *join* de  $M$  e  $M'$ , onde  $M, M' \in \mathcal{M}$ .*

*Demonstração.* Pelos Lemas 4.22 e 4.23, temos que  $M \wedge M' \in \mathcal{M}$  e  $M \vee M' \in \mathcal{M}$ . A prova de que  $M \wedge M'$  define uma operação de *meet* para  $(\mathcal{M}, \succeq)$  e que  $M \vee M'$  define uma operação de *join* para  $(\mathcal{M}, \succeq)$  segue de forma análoga à parte correspondente da prova do Teorema 4.9. Claramente, temos que as operações *meet* e *join* são idempotentes, comutativas e associativas. A prova de que essas operações também são transitivas segue de forma análoga a do Lema 4.13. Assim, temos que  $(\mathcal{M}, \succeq)$  forma um reticulado distributivo.  $\square$

## 4.4 Resumo Geral do Capítulo

Neste capítulo, vimos os problemas do Casamento Estável com Empates (SMT), Hospitais/Residentes com Empates (HRT) e Casamento Estável com Empates e Listas Incompletas (SMTI). A Figura 4.10 apresenta a relação entre tais problemas juntamente com o SM, HR e SMI. A Figura 4.11 apresenta a relação entre os três critérios de estabilidade que foram apresentados.

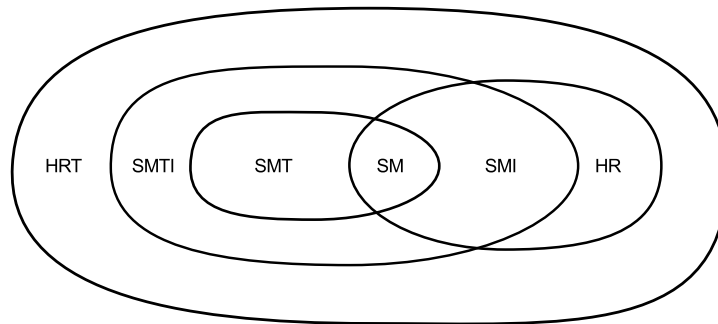


Figura 4.10: Hierarquia de generalizações dos problemas SM, HR, SMI, SMT, HRT e SMTI

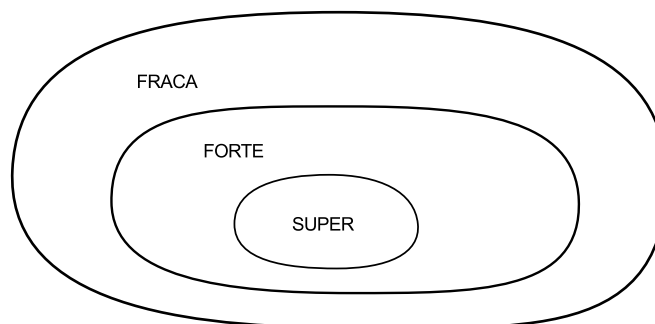


Figura 4.11: Hierarquia de generalizações dos três critérios de estabilidade que surgem quando indiferença é permitido

Vimos problemas nos quais os agentes podem fornecer listas de preferências que classifiquem grupos de agentes, indicando sua indiferença para com os agentes de um mesmo grupo. Com isso, pudemos estender o critério de estabilidade para as formas fraca, forte e super.

Sob o critério da estabilidade fraca, vimos que sempre existe uma solução para o HRT, o que implica que sempre existe uma solução para o SMT e para o SMTI, mas que essas soluções podem possuir cardinalidades diferentes, exceto para o SMT. Encontrar um emparelhamento fracamente estável de cardinalidade máxima, no entanto, é difícil mesmo sob diversas restrições.

Sob os critérios de estabilidade forte e super, vimos que uma instância nem sempre possui uma solução. Vimos um algoritmo para o HRT que determina se uma solução existe e, se ela existir, a encontra. Logo, tal algoritmo também vale para o SMT e para o SMTI. Vimos também que o Teorema dos Hospitais Rurais é válido para instâncias do HRT que admitem solução sob esses dois critérios e, portanto, é válido para SMT e SMTI.

# Capítulo 5

## Outros Problemas de Estabilidade

Neste capítulo abordaremos os principais resultados referentes a outros três problemas relacionados aos problemas que vimos até aqui. Mostraremos também como encontrar uma solução para eles.

### 5.1 Problema do Casamento Estável Poligâmico

Nesta seção, abordaremos a versão poligâmica do SM, conhecida como **Problema do Casamento Estável Poligâmico** (MM, de *Many-to-Many stable matching*).

No MM desejamos encontrar uma forma de casar um conjunto de  $n_1$  homens com um conjunto de  $n_2$  mulheres. Porém, diferente do SM, os casamentos podem ser poligâmicos, ou seja, cada homem e cada mulher podem possuir mais do que um cônjuge, mas não mais do que uma certa quantidade máxima de cônjuges. Dessa forma, definimos que a **família** de uma pessoa  $p$  é o conjunto de todos os cônjuges de  $p$ .

Na literatura, podemos encontrar duas versões principais do MM. Na primeira, muito popular entre os economistas [8, 12, 46, 54], a lista de preferências de cada pessoa  $p$  contém todas as famílias que  $p$  considera aceitável. Um dos problemas dessa definição, e o que a torna desinteressante para a comunidade de cientistas da computação, é que a entrada pode ser muito grande, uma vez que cada homem pode fornecer uma lista de preferências com até  $2^{n_2} - 1$  famílias. Isso faz com que apenas instâncias muito pequenas sejam tratáveis na prática. Na segunda versão, mais popular entre os cientistas da computação [6, 13, 15], a lista de preferências de cada pessoa  $p$  contém todas as pessoas que  $p$  considera aceitável (da mesma forma que ocorre em uma instância do SMI). Nesta dissertação, abordaremos apenas esta última.

Formalmente, uma instância  $I$  do MM consiste de um conjunto  $U$  de  $n_1$  homens e um conjunto  $W$  de  $n_2$  mulheres onde cada pessoa  $p$  fornece uma lista de preferências que classifica um subconjunto de pessoas do sexo oposto de acordo com o desejo de emparelhar-

se a ela e  $p$  pode se emparelhar a no máximo  $g(p)$  pessoas, o seu **grau poligâmico** (capacidade). Note que o HR é um caso restrito do MM, no qual, para todo homem  $m$ ,  $g(m) = 1$ .

Um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do MM é um conjunto de pares ordenados  $(m, w) \in U \times W$  de forma que para qualquer  $m \in U$  temos que  $|\{(m, w') : (m, w') \in M \text{ e } w' \in W\}| \leq g(m)$  e  $|\{(m', w) : (m', w) \in M \text{ e } m' \in U\}| \leq g(w)$ , ou seja, nenhuma pessoa é emparelhada a uma quantidade maior de pessoas do sexo oposto do que o seu grau poligâmico.

**Definição 5.1** (Par bloqueante). *Dado um emparelhamento  $M$  para uma instância  $I$  do MM, dizemos que um par  $(m, w) \notin M$  **bloqueia**  $M$ , ou é um par **bloqueante** de  $M$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $m$  e  $w$  são mutuamente aceitáveis;
- (ii)  $|M(m)| < g(m)$  ou  $w \succ_m w'$ , onde  $(m, w') \in M$ ;
- (iii)  $|M(w)| < g(w)$  ou  $m \succ_w m'$ , onde  $(m', w) \in M$ .

**Definição 5.2** (Família estável). *Dado um emparelhamento estável  $M$  para uma instância  $I$  do MM, chamamos de **família estável** o conjunto  $M(p)$  de todas as pessoas emparelhadas à pessoa  $p$  em  $M$ .*

A Figura 5.1 ilustra uma instância do MM como um grafo de preferências e apresenta um dos seus emparelhamentos estáveis, utilizando uma notação similar à do HR. A única diferença é que os vértices de ambas as partes contêm um número inteiro inscrito que indica o seu grau de poligâmico.

### 5.1.1 Principais Resultados

Nesta seção faremos uma breve revisão bibliográfica dos resultados existentes para o MM.

**Teorema 5.1** (Baiou e Balinski [4]). *Toda instância do MM possui um emparelhamento estável.*

O próximo teorema é a versão do Teorema dos Hospitais Rurais, apresentado na Seção 3.5, para o MM.

**Teorema 5.2** (Baiou e Balinski [4]). *Para uma dada instância do MM:*

- (i) *Cada pessoa é emparelhada ao mesmo número de pessoas em qualquer emparelhamento estável;*

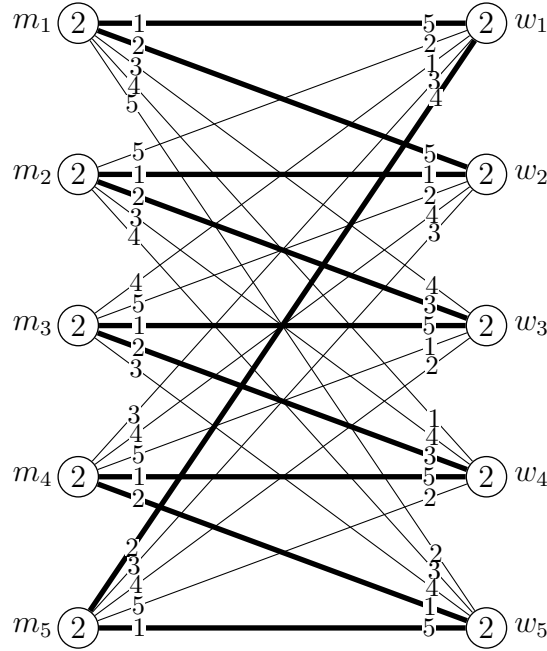


Figura 5.1: Exemplo de uma instância do MM junto com um dos seus emparelhamentos estáveis

- (ii) *Exatamente as mesmas pessoas não são emparelhadas em qualquer emparelhamento estável;*
- (iii) *Qualquer pessoa  $p$  que está emparelhada a menos do que  $g(p)$  pessoas em um emparelhamento estável é emparelhada precisamente com o mesmo conjunto de pessoas em todos os emparelhamentos estáveis.*

**Corolário 5.1** (Baiou e Balinski [4]). *Se  $M$  e  $M'$  são emparelhamentos estáveis para uma instância  $I$  do MM, então para toda pessoa  $p \in U \cup W$  temos que ou  $M(p) = M'(p)$  ou a pior pessoa emparelhada a  $p$  em  $M$  é diferente da pior pessoa emparelhada a  $p$  em  $M'$ .*

Dizemos que uma pessoa  $p$  **prefere um emparelhamento estável**  $M$  a um emparelhamento estável  $M'$ , e denotamos por  $M \succ_p M'$ , se  $p$  prefere a pior pessoa emparelhada a ele em  $M$  à pior pessoa emparelhada a ele em  $M'$ . Caso contrário, temos que  $M(p) = M'(p)$  e, neste caso, dizemos que  $p$  é **indiferente** entre  $M$  e  $M'$ .

Um emparelhamento estável  $M$  **domina** outro emparelhamento estável  $M'$ , o que é denotado por  $M \succeq M'$ , se e somente se para todo homem  $m \in U$  temos que ou  $M(m) = M'(m)$  ou  $M \succ_m M'$ .

**Teorema 5.3** (Baiou e Balinski [4]). *O conjunto de emparelhamentos estáveis de uma instância do MM juntamente com a ordem parcial  $\succeq$  formam um reticulado distributivo.*

Podemos facilmente adaptar o algoritmo de Gale-Shapley para uma instância do MM, conforme será visto na Seção 5.1.2. Chamaremos tal algoritmo de MM-GS.

Um algoritmo  $\phi$  que produz um emparelhamento estável  $M$  sob uma instância  $I$  do MM é **eficiente para os homens** se não existe um emparelhamento  $M'$  (estável ou não) tal que todo homem  $m \in U$  prefere  $M'$  a  $M$ .

**Teorema 5.4** (Baiou e Balinski [4]). *MM-GS (orientado aos homens) é eficiente para os homens.*

Seja  $I$  uma instância do MM. Dizemos que  $I^m$  é uma **instância melhor** para o homem  $m$  se a diferença entre  $I$  e  $I^m$  é que para ao menos uma mulher  $w$  existe algum  $m'$  tal que  $m' \succ_w m$  em  $I$  mas  $m \succ_w m'$  em  $I^m$ . Um algoritmo  $\phi$  é **monótono para os homens** se ou  $\phi(I^m) \succ_m \phi(I)$  ou  $m$  é indiferente entre  $\phi(I^m)$  e  $\phi(I)$ , onde  $\phi(I)$  representa o emparelhamento estável gerado pela execução do algoritmo  $\phi$  sobre a instância  $I$ .

**Teorema 5.5** (Baiou e Balinski [4]). *MM-GS (orientado aos homens) é o único algoritmo monótono para os homens.*

Seja  $I$  uma instância na qual cada agente forneceu suas listas de preferências de acordo com as suas reais preferências. Suponha que um conjunto de homens  $U' \subset U$  decidiu forjar falsas listas de preferências na esperança de que consigam melhores emparelhamentos. Seja  $I'$  uma instância cuja única diferença em relação à  $I$  é que as listas de preferências dos homens de  $U'$  são tais listas falsas. Um algoritmo  $\phi$  é à **prova de estratégia masculina** se, para qualquer  $U' \subset U$ , sempre existe pelo menos um homem  $m \in U'$  tal que ou  $m$  é indiferente entre  $\phi(I')$  e  $\phi(I)$  ou  $\phi(I) \succ_m \phi(I')$  (em ambos os casos, considerando as listas de preferências reais).

**Teorema 5.6** (Baiou e Balinski [4]). *MM-GS (orientado aos homens) é o único mecanismo à prova de estratégia masculina.*

Eirínakis *et al.* [13] apresentaram diversos resultados algorítmicos para o MM, que resumizamos no teorema a seguir.

**Teorema 5.7** (Eirínakis *et al.* [13]). *Seja  $I$  uma instância do MM,  $n = \max\{|U|, |W|\}$  e  $\mathcal{M}$  o conjunto de todos os emparelhamento estáveis para  $I$ . Então:*

- (i) *Existe um algoritmo capaz de encontrar todos os pares estáveis de  $I$  em tempo  $O(n^2)$ ;*
- (ii) *Existe um algoritmo capaz de encontrar todas as famílias estáveis de  $I$  em tempo  $O(n^2)$ ;*
- (iii) *Existe um algoritmo capaz de enumerar todas as soluções de  $I$  em tempo  $O(n^2 + n|\mathcal{M}|)$  e espaço  $O(n^2)$ ;*



- (iv) Existe um algoritmo capaz de encontrar um emparelhamento estável igualitário (visto na Seção 3.7) em tempo  $O(n^3 \log^2 n)$ .

O **Problema do Casamento Estável Poligâmico com Empates** (MMT, de *Many-to-Many stable matching with Ties*) é a extensão do MM que permite que as listas de preferências contenham empates entre os agentes. Como discutimos no Capítulo 4, quando permitimos empates nas listas de preferências podemos adaptar o critério de estabilidade de três formas: fraca, forte e super.

O MMT sob o critério de estabilidade forte foi estudado por Malhotra [48]. Como o SMT é um caso particular do MMT e sabemos que nem toda instância do SMT possui um emparelhamento fortemente estável, temos que esse resultado segue diretamente para o MMT. Porém, Malhotra [48] forneceu um algoritmo capaz de determinar se uma instância  $I$  do MMT possui um emparelhamento fortemente estável e, caso possua, ele produz uma. Além disso, caso a instância possua um emparelhamento fortemente estável, esse algoritmo encontra aquele no qual cada homem é emparelhado ao melhor conjunto de mulheres que ele poderia ser emparelhado em qualquer emparelhamento fortemente estável. Outros resultados fornecidos por Malhotra [48] são sumarizados no teorema a seguir.

**Teorema 5.8** (Malhotra [48]). *Seja  $I$  uma instância do MMT que possui ao menos um emparelhamento fortemente estável. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Toda pessoa é emparelhada ao mesmo número de pessoas em qualquer emparelhamento estável;*
- (ii) *Se uma pessoa  $p$  é emparelhada a um número de pessoas menor do que  $g(p)$  em um emparelhamento estável, então temos que  $p$  é emparelhada ao mesmo conjunto de pessoas em qualquer emparelhamento fortemente estável;*
- (iii) *O conjunto dos emparelhamentos fortemente estáveis para  $I$  forma um reticulado distributivo.*

### 5.1.2 Encontrando uma Solução

Nesta seção descreveremos uma generalização do algoritmo de Gale-Shapley para instâncias do MM, o qual chamaremos de MM-GS. A versão que descreveremos será orientada aos homens, ou seja, os homens farão as propostas enquanto as mulheres farão as rejeições. Como uma instância do MM é simétrica, a versão orientada às mulheres do MM-GS pode ser facilmente desenvolvida através da troca dos papéis entre os homens e as mulheres, ou seja, as mulheres fazem as propostas enquanto os homens fazem as rejeições.

Naturalmente, o algoritmo envolve uma sequência de propostas de emparelhamento feita pelos homens às mulheres. Uma proposta leva a um emparelhamento entre um

homem e uma mulher, que pode ser quebrado posteriormente. Dizemos que um par  $(m, w)$ ,  $m \in U$  e  $w \in W$ , é removido quando  $m$  é removido da lista de preferências de  $w$  e  $w$  é removida da lista de preferências de  $m$ . Dizemos que uma pessoa  $p$  está **insaturada** (**saturada**) se o número de pessoas emparelhadas a  $p$  é menor (igual) a  $g(p)$ .

Inicialmente, todos os homens e mulheres não estão emparelhados. Enquanto existir um homem  $m$  insaturado que não está emparelhado a todas as mulheres da sua lista,  $m$  irá propor um emparelhamento a  $w$ , onde  $w$  é a mulher de maior preferência para  $m$  que não está emparelhada a ele. Se  $w$  estiver saturada, então ela irá romper o emparelhamento com o pior homem emparelhado a ela e iniciará um emparelhamento com  $m$ . Se  $w$  tornar-se saturada, então o algoritmo irá remover das listas de preferências todos os pares  $(m', w)$ , onde  $m'$  sucede, na lista de preferências de  $w$ , o pior homem emparelhado a  $w$ .

O Algoritmo 7 apresenta um pseudo-código para o MM-GS. Não é difícil perceber que sua complexidade de tempo é  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de pares aceitáveis. Como o SM também é um caso particular do MM, e aquele possui um limitante inferior de  $\Omega(m)$  [56], temos que o *MM-GS* é um algoritmo ótimo.

A Figura 5.2 apresenta uma possível execução sua sobre uma instância do MM.

---

**Algoritmo 7** Algoritmo de Gale-Shapley para o MM (MM-GS)

---

**Entrada:** Uma instância do MM

**Saída:** Um emparelhamento estável  $M$  para  $I$

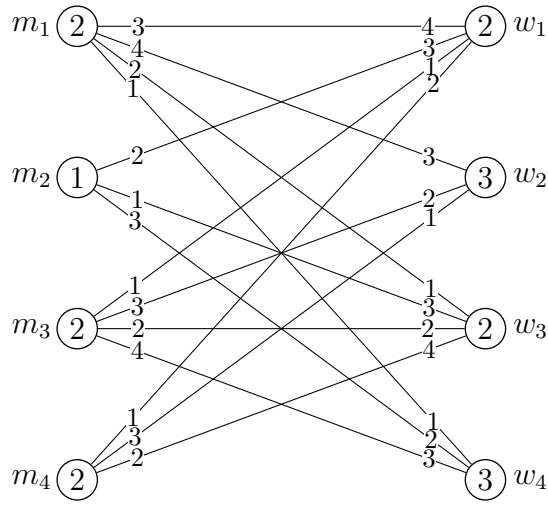
```

1:  $M \leftarrow \emptyset$ 
2: Enquanto (existir um homem  $m$  que não está saturado em  $M$ ) e ( $m$  possui uma
   mulher  $w$  em sua lista de preferências tal que  $(m, w) \notin M$ ) Faça
3:   Seja  $w$  a melhor mulher para  $m$  tal que  $(m, w) \notin M$ 
4:   Se  $w$  está saturada Então
5:     Seja  $m'$  o pior homem para  $w$  tal que  $(m', w) \in M$ 
6:      $M \leftarrow M \setminus \{(m', w)\}$ 
7:   Fim Se
8:    $M \leftarrow M \cup \{(m, w)\}$ 
9:   Se  $w$  está saturada Então
10:    Seja  $p$  o pior homem para  $w$  tal que  $(p, w) \in M$ 
11:    Para todo  $m'$  tal que  $p \succ_w m'$  Faça
12:      Remova o par  $(m', w)$ 
13:    Fim Para
14:   Fim Se
15: Fim Enquanto
16: Devolve  $M$ 

```

---

Os Lemas 5.1 e 5.2 e o Teorema 5.9 provam a corretude do MM-GS, isto é, que tal algoritmo produz um emparelhamento estável.



(a) Instância do MM

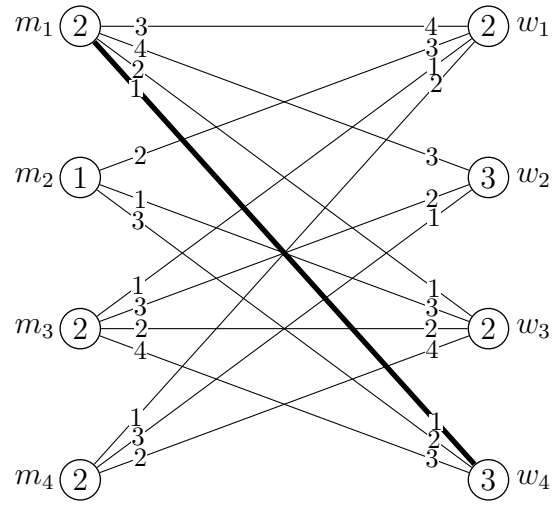
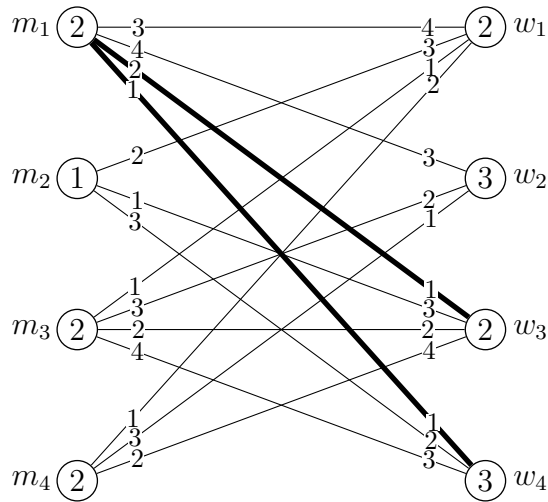
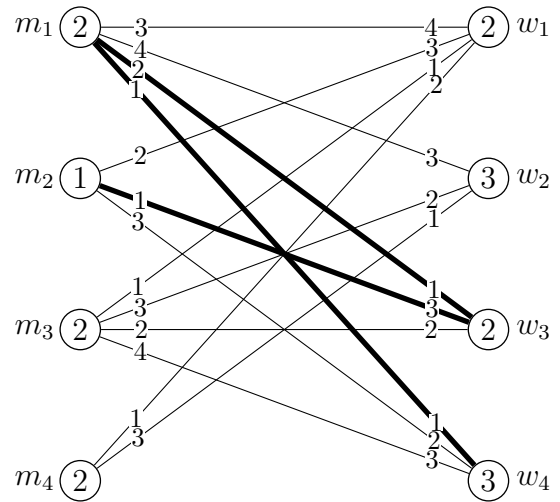
(b)  $m_1$  inicia um emparelhamento com  $w_4$ (c)  $m_1$  inicia um emparelhamento com  $w_3$ (d)  $m_2$  inicia um emparelhamento com  $w_3$ . Como  $w_3$  torna-se saturada, isso leva à remoção de todos os sucessores de  $m_2$  na lista de  $w_3$ . Assim, o par  $(m_4, w_3)$  é removido

Figura 5.2: Possível execução do MM-GS sobre uma instância do MM

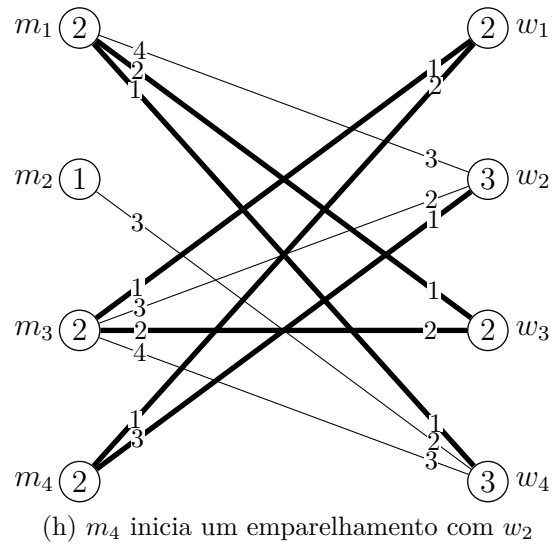
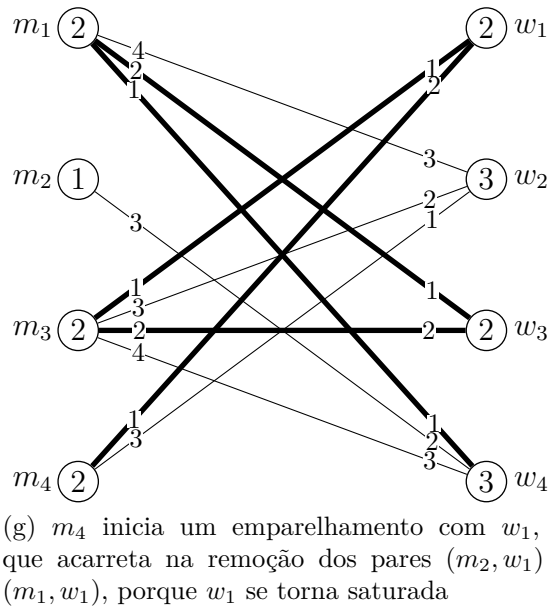
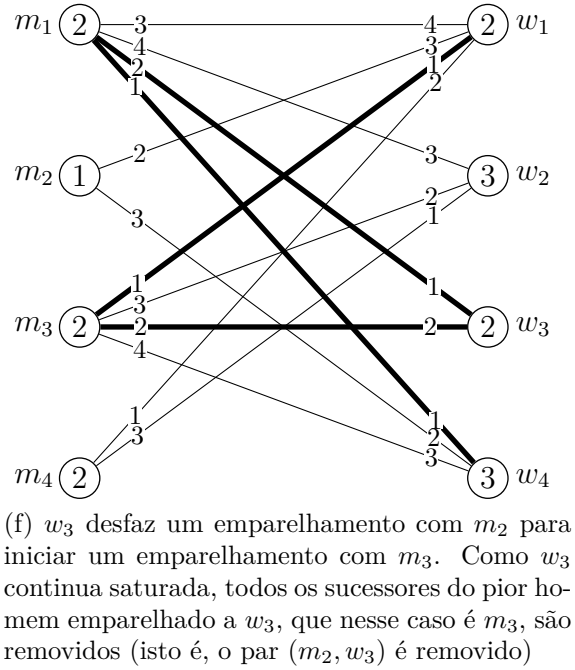
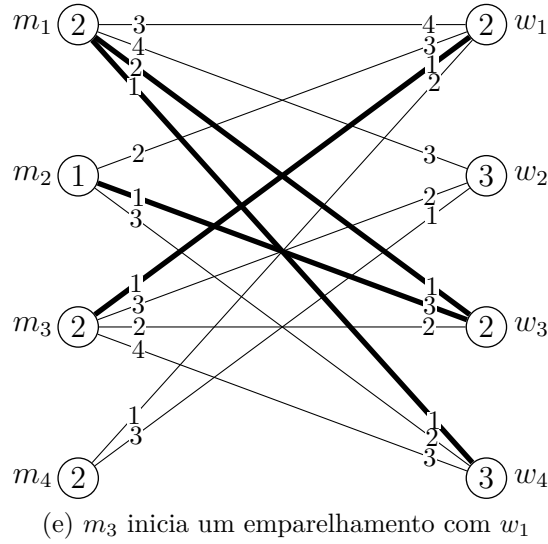
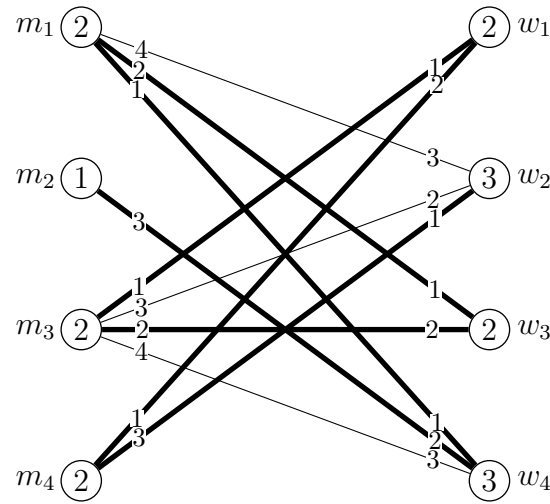


Figura 5.2: Possível execução do MM-GS sobre uma instância do MM (continuação)



(i)  $m_2$  inicia um emparelhamento com  $w_4$ . Como nenhum outro homem que não esteja saturado possui uma mulher ao qual não está emparelhado, o algoritmo encerra o seu laço principal e retorna o emparelhamento produzido

Figura 5.2: Possível execução do MM-GS sobre uma instância do MM (continuação)

**Lema 5.1.** *Para uma dada instância  $I$  do MM, todas as possíveis execuções do MM-GS terminam com as mesmas listas de preferências.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que duas execuções,  $E$  e  $E'$ , do MM-GS resultam em listas de preferências distintas ao seu término. Sem perda de generalidade, suponha que o par  $(m, w)$  está contido nas listas de preferências resultantes da execução  $E$  mas não nas listas resultantes da execução  $E'$  e que  $(m, w)$  foi o primeiro par removido por  $E'$  que não foi removido por  $E$ . No momento em que  $E'$  removeu o par  $(m, w)$ ,  $w$  estava emparelhada a um conjunto  $S'$ ,  $|S'| = g(w)$ , de homens que  $w$  prefere a  $m$ ; caso contrário, o par  $(m, w)$  não teria sido removido das listas de preferências. Seja  $M$  o emparelhamento gerado ao término da execução  $E$ . Como o par  $(m, w)$  não foi removido durante a execução  $E$ , temos que o número de homens emparelhados a  $w$  em  $M$  que ela prefere a  $m$  é menor do que  $g(w)$ . Então, existe um homem  $m' \in S'$  tal que  $(m', w) \notin M$ . Como  $(m, w)$  não foi removido por  $E$ , temos que  $(m', w)$  também não foi, pois  $m' \succ_w m$ . Durante  $E$ ,  $m'$  nunca chegou a propor a  $w$ , caso contrário ela teria aceitado. Então,  $m'$  está emparelhado, em  $M$ , a um conjunto  $R$  de  $g(m')$  mulheres que ele prefere a  $w$ . No momento em que  $m'$  propôs a  $w$  em  $E'$ ,  $m'$  não estava saturado e  $w$  era a melhor mulher em sua lista que não estava emparelhada a ele. Isto significa que existe uma mulher  $w' \in R$  tal que o par  $(m', w')$  foi removido durante a execução  $E'$ . Por definição de  $R$ , temos que  $(m', w') \in M$  e, portanto, esse par pertence às listas de preferências resultantes da execução  $E$ . No

entanto, isso contraria o fato de que  $(m, w)$  foi o primeiro par removido na execução  $E'$  e que não foi removido na execução  $E$ .  $\square$

**Lema 5.2.** *Se um par  $(m, w)$  não está presente nas listas de preferências resultantes da execução do MM-GS, então:*

- (i)  $(m, w)$  não é um par estável;
- (ii)  $w$  prefere todos os homens da sua lista a  $m$ ;
- (iii)  $(m, w)$  não pode bloquear nenhum emparelhamento estável cujos pares estão contidos em tais listas resultantes.

*Demonstração.* Para provarmos a propriedade (i), suponha por contradição que uma execução  $E$  do MM-GS removeu um par estável  $(m, w)$ . Sem perda de generalidade, suponha que esse foi o primeiro par estável removido em tal execução. No momento em que  $E$  remove  $(m, w)$ ,  $w$  está saturada por um conjunto  $S$  de homens que ela prefere a  $m$ . Seja  $M$  um emparelhamento estável tal que  $(m, w) \in M$ . Então, existe um homem  $m' \in S$  tal que  $(m', w) \notin M$ . No momento em que  $E$  removeu o par  $(m, w)$ ,  $m'$  estava emparelhado a  $w$ . Seja  $R$  o conjunto de mulheres emparelhadas a  $m'$  no momento em que o algoritmo removeu o par  $(m, w)$ . Note que  $w \in R$ . Pelo funcionamento do algoritmo, as mulheres de  $R$  são as  $|R|$  primeiras mulheres da lista atual de  $m'$ . Além disso, como  $(m, w)$  foi o primeiro par estável removido durante  $E$ , temos que não existe uma mulher  $w'$  que  $m'$  prefere a qualquer mulher de  $R$  e que  $(m', w')$  é um par estável. Como  $|M(m') \cap R| < |R| \leq g(m')$ , pois  $w \notin M(m')$  e  $w \in R$ , temos que o suposto emparelhamento estável  $M$  é bloqueado pelo par  $(m', w)$ . Assim, temos que o MM-GS não remove nenhum par estável.

A propriedade (ii) é trivial e a (iii) é consequência da anterior.  $\square$

**Teorema 5.9.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *O emparelhamento produzido ao término da execução do MM-GS é estável;*
- (ii) *No emparelhamento citado acima, um homem  $m$  é emparelhado às suas  $g(m)$  melhores parceiras estáveis ou a um conjunto menor do que  $g(m)$  parceiras estáveis. No último caso, nenhuma outra mulher é emparelhada a  $m$  em qualquer emparelhamento estável.*

*Demonstração.* Para provarmos a propriedade (i), primeiro observe que, pelo item (iii) do Lema 5.2, o emparelhamento gerado pelo algoritmo não pode ser bloqueado por nenhum par que não está presente nas listas de preferências resultantes da execução do algoritmo. Como cada homem  $m$  ou está emparelhado às primeiras  $g(m)$  mulheres de sua lista resultante ou, no caso de estar emparelhado a menos de  $g(m)$  mulheres, está emparelhado a

todas as mulheres dessa lista, temos também que nenhum par presente nas listas de preferências pode ser um par bloqueante. Assim, o emparelhamento gerado pelo algoritmo é estável.

A primeira parte da propriedade (ii) foi discutida anteriormente. Se um homem  $m$  está emparelhado a todas as mulheres da sua lista de preferências resultante (pois ele está emparelhado a um número de mulheres menor ou igual a  $g(m)$ ), então, pelo item (i) do Lema 5.2, nenhuma mulher que não está presente nessa lista de preferências pode formar um par estável com  $m$ .  $\square$

Devido ao item (ii) do Teorema 5.9, é natural nos referirmos ao emparelhamento estável gerado pelo algoritmo MM-GS (orientado aos homens) como **ótimo para os homens**.

## 5.2 Problema da Alocação Estável

O **Problema da Alocação Estável** (SA, de *Stable Allocation*) foi proposto por Baiou e Balinski [5]. Diferente dos problemas de estabilidade que vimos até agora, no SA não estamos interessados em como emparelhar pares, mas sim em como alocar horas de trabalho. Desejamos encontrar uma alocação estável entre um conjunto de tarefas e um conjunto de máquinas, onde cada tarefa requer uma certa quantidade de tempo de processamento e cada máquina tem uma certa quantidade de tempo de processamento a oferecer.

O SA também é conhecido como o **Problema do Transporte Ordinal**. Neste caso, os conjuntos envolvidos representam fornecedores e compradores e, ao invés de termos um valor unitário por unidade de transporte, temos listas de preferências onde cada fornecedor (comprador) classifica os compradores (fornecedores) de acordo com a sua preferência.

Formalmente, uma instância  $I$  do SA consiste em um conjunto  $\mathcal{I}$  de tarefas e um conjunto  $\mathcal{J}$  de máquinas onde cada agente  $p$  fornece uma lista de preferências que classifica todos os agentes do tipo oposto de acordo com o desejo de relacionar-se a eles (tarefas desejam ser processadas e máquinas desejam processar). Além disso, cada tarefa  $i \in \mathcal{I}$  possui um tempo  $s(i) \geq 0$  necessário para ser processada, cada máquina  $j \in \mathcal{J}$  possui um tempo  $s(j) \geq 0$  de processamento disponível e  $i$  pode executar na máquina  $j$  por um máximo de tempo  $\pi(i, j)$ .

Dizemos que a instância  $I$  do SA é **discreta** se  $s(i) \in \mathbb{Z}$ ,  $s(j) \in \mathbb{Z}$  e  $\pi(i, j) \in \mathbb{Z}$  para toda tarefa  $i \in \mathcal{I}$  e toda máquina  $j \in \mathcal{J}$ .

**Definição 5.3** (Alocação). *Dizemos que  $M : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **alocação** para uma instância  $I$  do SA se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $M(i, \mathcal{J}) \leq s(i)$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ ;

$$\begin{array}{l}
i_1 (3000) : j_1, j_2, j_3 \\
i_2 (4000) : j_1, j_2, j_3 \\
i_3 (10000) : j_3, j_2, j_1 \\
j_1 (3001) : i_3, i_2, i_1 \\
j_2 (8998) : i_1, i_2, i_3 \\
j_3 (5000) : i_1, i_2, i_3
\end{array}
\quad \pi = \begin{bmatrix} 3000 & 3000 & 3000 \\ 1 & 4000 & 4000 \\ 3001 & 8998 & 5000 \end{bmatrix}
\quad M = \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 \\ 3001 & 1998 & 5000 \end{bmatrix}$$

(a)
(b)

Figura 5.3: Exemplo de uma instância do SA e sua alocação estável (adaptado de [5])

(ii)  $M(\mathcal{I}, j) \leq s(j)$  para todo  $j \in \mathcal{J}$ ;

(iii)  $M(i, j) \leq \pi(i, j)$  para todo  $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ .

**Definição 5.4** (Par bloqueante). *Seja  $M$  uma alocação para uma instância  $I$  do SA. Dizemos que um par  $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$  é um **par bloqueante** de  $M$ , ou **bloqueia** a alocação  $M$ , se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i)  $M(i, j) < \pi(i, j)$ ;

(ii)  $M(i, \mathcal{J}) < s(i)$  ou  $M(i, j') > 0$  para algum  $j'$  tal que  $j \succ_i j'$ ;

(iii)  $M(\mathcal{I}, j) < s(j)$  ou  $M(i', j) > 0$  para algum  $i'$  tal que  $i \succ_j i'$ .

**Definição 5.5** (Alocação estável). *Uma alocação  $M$  para uma instância  $I$  do SA é **estável** se e somente se  $M$  não admite um par bloqueante, ou seja, não existe um par  $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$  capaz de bloquear  $M$ . Caso contrário, dizemos que  $M$  é **instável**.*

Convencionaremos que nas representações de instâncias do SA,  $i_k$  é uma tarefa e  $j_k$  é uma máquina, onde  $k \in \mathbb{Z}$ . A Figura 5.3a apresenta um exemplo de uma instância do SA representada por meio de listas de preferências na qual  $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, i_3\}$  e  $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, j_3\}$ . No começo da lista de cada agente  $p$ , após seu identificador, existe um valor entre parênteses que representa  $s(p)$ . Ela também descreve  $\pi$  como uma matriz, na qual a  $k$ -ésima linha representa a tarefa  $i_k$  e a  $\ell$ -ésima coluna representa a máquina  $j_\ell$ . Uma alocação estável para essa instância é apresentada na Figura 5.3b, onde, de forma análoga à matriz  $\pi$ , a  $k$ -ésima linha indica a quantidade de tempo que a tarefa  $i_k$  foi alocada a cada máquina e a  $\ell$ -ésima coluna indica a quantidade de tempo que a máquina  $j_\ell$  vai processar cada tarefa.



### 5.2.1 Principais Resultados

Baiou e Balinski [5] generalizaram o algoritmo de Gale-Shapley para uma instância do SA, o qual denotaremos aqui por SA-GS, e observaram que ele sempre era capaz de produzir uma alocação estável inteira para uma instância discreta.

**Teorema 5.10** (Baiou e Balinski [5]). *Existe uma alocação estável inteira para qualquer instância discreta do SA.*

Infelizmente, eles também observaram que o algoritmo poderia gastar um número exponencial de passos até convergir em uma alocação estável. Para tratar o problema, Baiou e Balinski [5] também apresentaram um algoritmo alternativo, chamado de *Algoritmo Indutivo*, que sempre era capaz de encontrar uma alocação estável para uma instância do SA em  $O(n^3)$ , onde  $n$  é o número total de agentes. Com esse algoritmo, foi possível derivar o resultado a seguir.

**Teorema 5.11** (Baiou e Balinski [5]). *Toda instância  $I$  do SA possui ao menos uma alocação estável.*

Saber se o SA-GS convergia em uma alocação estável em um tempo finito para uma instância irracional é uma questão que ficou em aberto até que Dean *et al.* [11] publicaram o resultado a seguir.

**Teorema 5.12** (Dean *et al.* [11]). *O algoritmo SA-GS termina após um número finito de iterações mesmo quando a instância do problema é irracional.*

A importância desse resultado se deve ao fato de que, em geral, o algoritmo de Gale-Shapley é muito rápido, executando muitas vezes em tempo sub-polinomial.

Em muitos problemas de emparelhamentos estáveis, os agentes são emparelhados ao mesmo número de agentes em qualquer emparelhamento estável. O SA apresenta um resultado semelhante, como mostrado a seguir.

**Teorema 5.13** (Baiou e Balinski [5]). *Se  $M$  e  $M'$  são alocações estáveis para uma instância  $I$  do SA, então:*

- (i)  $M(i, \mathcal{J}) = M'(i, \mathcal{J})$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ ;
- (ii)  $M(\mathcal{I}, j) = M'(\mathcal{I}, j)$  para todo  $j \in \mathcal{J}$ .

Seja  $M$  uma alocação para uma instância  $I$  do SA. Dadas uma tarefa  $i \in \mathcal{I}$  e uma máquina  $j \in \mathcal{J}$ , denotamos por  $i(M)$  a pior máquina alocada por  $M$  para  $i$  tal que  $M(i, i(M)) > 0$  e por  $j(M)$  a pior tarefa alocada por  $M$  para  $j$  tal que  $M(j(M), j) > 0$ .

Como cada agente em  $I$  é alocado à mesma quantidade de tempo em qualquer alocação estável, de acordo com o Teorema 5.13, é natural dizer que uma tarefa  $i$  **prefere** uma alocação estável  $M$  a uma alocação estável  $M'$ , o que é denotado por  $M \succ_i M'$ , se e somente se (i)  $i(M) \neq i(M')$  e  $i(M) \succ_i i(M')$  ou (ii)  $i(M) = i(M') = j$  e  $M(i, j) < M'(i, j)$ . De forma análoga, é natural dizer que uma máquina  $j$  **prefere** uma alocação estável  $M$  a uma alocação estável  $M'$ , o que é denotado por  $M \succ_j M'$ , se e somente se (i)  $j(M) \neq j(M')$  e  $j(M) \succ_j j(M')$  ou (ii)  $j(M) = j(M') = i$  e  $M(i, j) < M'(i, j)$ . Também é natural dizer que  $i \in \mathcal{I}$  ( $j \in \mathcal{J}$ ) é **indiferente** entre as alocações estáveis  $M$  e  $M'$ , o que é denotado por  $M =_i M'$  ( $M =_j M'$ ) se  $M(i, j) = M'(i, j)$  para todo  $j \in \mathcal{J}$  ( $i \in \mathcal{I}$ ).

**Teorema 5.14** (Baiou e Balinski [5]). *Sejam  $M$  e  $M'$  alocações estáveis para uma instância  $I$  do SA. Se  $i \in \mathcal{I}$  ( $j \in \mathcal{J}$ ) prefere  $M$  a  $M'$ , então para todo  $j \in \mathcal{J}$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) tal que  $M(i, j) \neq M'(i, j)$ ,  $j$  ( $i$ ) prefere  $M'$  a  $M$ .*

Dizemos que uma alocação estável  $M$  **domina** uma alocação estável  $M'$ , e denotamos por  $M \succeq M'$ , se  $M \succ_i M'$  ou  $M =_i M'$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ .

**Teorema 5.15** (Baiou e Balinski [4]). *O conjunto de alocações estáveis de uma instância do SA juntamente com a ordem parcial  $\succeq$  forma um reticulado distributivo.*

Seja  $I$  uma instância qualquer do SA. Se  $s(\mathcal{I}') - \pi(U_{\mathcal{I}'}) = s(\mathcal{J}') - \pi(U_{\mathcal{J}'}) > 0$  onde  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$  (com ao menos um desses subconjuntos sendo próprio) e  $U_{\mathcal{I}'} \subset \{(i, j) : i \in \mathcal{I}', j \notin \mathcal{J}'\}$  e  $U_{\mathcal{J}'} \subset \{(i, j) : i \notin \mathcal{I}', j \in \mathcal{J}'\}$ . Então, temos que  $I$  é uma instância **degenerada**. Uma instância  $I$  não degenerada é **fortemente não degenerada** se  $s(\mathcal{I}) \neq s(\mathcal{J})$ .

**Teorema 5.16** (Baiou e Balinski [5]). *A ordem parcial  $\succeq$  sobre o conjunto de alocações estáveis de uma instância não degenerada é uma ordem total.*

**Teorema 5.17** (Baiou e Balinski [5]). *Uma instância  $I$  do SA fortemente não degenerada possui apenas uma alocação estável.*

Dizemos que uma alocação  $M$  para uma instância  $I$  do SA é **não preemptiva** se e somente se cada tarefa ou não é alocada ou é alocada totalmente a uma única máquina, ou seja, para cada par  $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$  temos que ou  $M(i, j) = 0$  ou  $M(i, j) = s(i)$ . Não é difícil perceber que nem toda instância do SA admite uma alocação não preemptiva. A instância apresentada na Figura 5.4, por exemplo, admite apenas a alocação estável apresentada na Figura 5.4b, que, como podemos perceber, é preemptiva.

Dean *et al.* [10] foram os primeiros a estudar o problema de encontrar uma alocação não preemptiva para uma instância do SA. Na tentativa de encontrar uma solução, eles relaxaram um pouco as restrições e permitiram que cada máquina  $j$  possa ser alocada a

$$\begin{array}{ll}
i_1 (1) : j_1, j_2 & \\
i_2 (2) : j_1, j_2 & \\
j_1 (2) : i_1, i_2 & \\
j_2 (2) : i_1, i_2 & 
\end{array}
\quad \pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
\quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)
(b)

Figura 5.4: Instância do SA (a) que possui apenas a alocação estável apresentada na em (b), que, como podemos perceber, é preemptiva (retirado de [10])

uma quantidade de tempo um pouco maior do que  $s(j)$ . Dizemos que uma máquina  $j$  está **congestionada** em uma alocação  $M$  se  $M(\mathcal{I}, j) > s(j)$ . Definimos o congestionamento de uma máquina congestionada  $j$  como sendo  $C = M(\mathcal{I}, j) - s(j)$ . O resultado que os autores chegaram foi de que sempre é possível encontrar uma alocação estável não preemptiva onde cada máquina está congestionada por um valor máximo de  $\max\{s(i) : i \in \mathcal{I}\}$ .

### 5.2.2 Encontrando uma Solução

Nesta seção vamos apresentar o algoritmo proposto por Dean e Munshi [9], que denotaremos por DM-SA, para o SA. Este algoritmo é capaz de produzir uma alocação estável para qualquer instância do SA em  $O(n^2 \log n)$ , onde  $n$  é o número de agentes. Atualmente, este é o algoritmo com o melhor limite assintótico para esse problema. Veremos que ele utiliza a ideia de caminhos aumentadores do problema de fluxo máximo em redes para produzir uma alocação estável.

Inicialmente o algoritmo faz uma normalização da instância de entrada  $I'$ , gerando uma nova instância  $I$ . No processo de normalização, temos a adição de uma tarefa *dummy*  $i_d$  e de uma máquina *dummy*  $j_d$ . Logo,  $\mathcal{I} = \mathcal{I}' \cup \{i_d\}$  e  $\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cup \{j_d\}$ . Para cada tarefa  $i \in \mathcal{I}$ , definimos  $s$  da seguinte forma:

$$s(i) = \begin{cases} s'(i) & \text{se } i \neq i_d \\ \sum_{j \in \mathcal{J}'} s'(j) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Dizemos que um elemento  $i \in \mathcal{I}$  ( $j \in \mathcal{J}$ ) está **saturado** em uma alocação  $M$  se  $\sum_{j \in \mathcal{J}} M(i, j) = s(i)$  ( $\sum_{i \in \mathcal{I}} M(i, j) = s(j)$ ). Note que, pela definição de  $s(i_d)$ , temos que a tarefa *dummy* sozinha tem a capacidade de saturar todas as máquinas de  $\mathcal{J}'$ .

Para cada tarefa  $j \in \mathcal{J}$ , definimos  $s$  da seguinte forma:

$$s(j) = \begin{cases} s'(j) & \text{se } j \neq j_d \\ \sum_{i \in \mathcal{I}} s(i) - \sum_{j \in \mathcal{J}'} s'(j) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Para cada tarefa  $i \in \mathcal{I}$  e máquina  $j \in \mathcal{J}$ , definimos  $\pi$  da seguinte forma:

$$\pi(i, j) = \begin{cases} \pi'(i, j) & \text{se } i \in \mathcal{I}' \text{ e } j \in \mathcal{J}' \\ \min(s(i), s(j)) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

As listas de preferências de  $I$  são construídas conforme descrito a seguir. Primeiro,  $i_d$  ( $j_d$ ) fornece uma lista de preferências qualquer entre os elementos de  $\mathcal{J}'$  ( $\mathcal{I}'$ ). Para todo  $i \in \mathcal{I}'$  ( $j \in \mathcal{J}'$ ), a lista de preferências de  $i$  ( $j$ ) é igual à sua lista em  $\mathcal{I}'$ . Por fim, a tarefa *dummy*  $i_d$  é adicionada ao final das listas de todas as máquinas  $j \in \mathcal{J}$  e a máquina *dummy*  $j_d$  é adicionada ao final das listas de todas as tarefas  $i \in \mathcal{I}$ .

Dada uma alocação  $M$ , dizemos que uma máquina  $j$  **está aceitando** uma tarefa  $i$  se  $M(i, j) < s(j)$  ou se existe uma tarefa  $i'$  tal que  $i \succ_j i'$  e  $M(i', j) > 0$ . Denotamos por  $p_i$  a melhor máquina para a tarefa  $i$  tal que  $M(i, p_i) < \pi(i, p_i)$  e  $p_i$  está aceitando a máquina  $i$ , e por  $r_j$  a pior tarefa para a máquina  $j$  tal que  $M(r_j, j) > 0$ . O DM-SA utiliza um grafo  $G(M)$  tal que  $G(M) = (\mathcal{I} \cup \mathcal{J}, E)$ , onde  $E = \{ip_i : i \in \mathcal{I}\} \cup \{r_jj : j \in \mathcal{J}\}$ . Uma **aumentação** ao longo de um caminho/circuito  $P$  do grafo  $G(M)$  consiste em incrementar em um valor  $\gamma$  a alocação de cada aresta do tipo  $ip_i \in E(P)$  e decrementar, também em  $\gamma$ , o valor de cada aresta  $r_jj \in E(P)$ . Como cada aresta  $ij \in E(G(M))$  representa um par constituído de uma tarefa e uma máquina, utilizaremos a sentença “incrementar/decrementar a alocação de uma aresta  $ij$ ” como sinônimo para “incrementar/decrementar a alocação entre uma máquina  $i$  e uma tarefa  $j$ ”.

Após normalizar a instância de entrada, gerando assim  $I$ , o algoritmo DM-SA satura todas as máquinas de  $\mathcal{J} \setminus \{j_d\}$  com a tarefa *dummy*, gerando assim uma primeira alocação  $M$ . Não é difícil perceber que  $G(M)$  é uma árvore. De forma geral, em cada iteração, o DM-SA constrói uma nova alocação  $M$  fazendo uma aumentação em um caminho de  $G(M')$ , onde  $M'$  é a alocação produzida na iteração anterior.

**Lema 5.3** (Dean e Munshi [9]). *Para qualquer alocação  $M$  que pode ser obtida ao longo da execução do DM-SA,  $G(M)$  consiste em uma coleção de componentes disjuntos, sendo que um deles é uma árvore na qual a máquina *dummy* é a raiz e os outros componentes contêm um único circuito cada.*

*Demonstração.* Considere qualquer componente conexa  $C$  de  $G(M)$  onde  $\mathcal{I}^*$  e  $\mathcal{J}^*$  são suas tarefas e máquinas, respectivamente. Pela construção do grafo, se a máquina *dummy* pertence à componente  $C$ , então  $C$  tem  $|\mathcal{I}^*| + |\mathcal{J}^*| - 1$  arestas e, portanto, é uma árvore. Caso contrário,  $C$  tem  $|\mathcal{I}^*| + |\mathcal{J}^*|$  arestas e consiste em uma árvore com uma aresta adicional e, portanto, contém um circuito.  $\square$

Dizemos que um caminho/circuito  $P$  é **alternante** em  $G(M)$  se cada vértice  $v \in V(P)$  é incidido por no máximo uma aresta do tipo  $ip_i$  de  $P$  e no máximo uma aresta do tipo

$r_j j$  de  $P$ .

**Lema 5.4.** *Seja  $P = (i = i_0, j_0, i_1, j_1, \dots, i_{k-1}, j_{k-1}, i_k, j_k = j_d)$  o único caminho na componente árvore do grafo  $G(M)$  entre a tarefa  $i$  e a máquina dummy  $j_d$ . Então,  $P$  é um caminho alternante e toda aresta  $i_\ell j_\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ , é do tipo  $ip_i$  e toda aresta  $i_\ell j_{\ell-1}$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ , é do tipo  $r_j j$ .*

*Demonstração.* Pela construção de  $G(M)$  sabemos que  $i_k j_k$  deve ser do tipo  $ip_i$ , pois  $j_k = j_d$  e  $j_d$  não possui nenhuma aresta do tipo  $r_j j$  incidente a ele. Como cada tarefa possui apenas uma aresta do tipo  $ip_i$  incidente a ela, temos que  $i_k j_{k-1}$  deve ser do tipo  $r_j j$ . Temos também que cada máquina possui apenas uma aresta do tipo  $r_j j$  incidente a ela e, assim,  $i_{k-1} j_{k-1}$  deve ser do tipo  $ip_i$ . Aplicando esse raciocínio indutivamente temos que toda aresta  $i_\ell j_\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ , é do tipo  $ip_i$  e toda aresta  $i_\ell j_{\ell-1}$  é do tipo  $r_j j$ .  $\square$

**Lema 5.5.** *Seja  $A$  uma componente de  $G(M)$  que possui um circuito  $C$ . Então,  $C$  é um circuito alternante.*

*Demonstração.* Como  $C$  é um circuito e não existem arestas entre duas tarefas ou duas máquinas, temos que  $|V(C) \cap \mathcal{I}| = |V(C) \cap \mathcal{J}|$ . Como cada tarefa pode possuir no máximo uma aresta do tipo  $ip_i$  incidente a ela, temos que o número máximo de arestas do tipo  $ip_i$  em  $C$  é  $n = |V(C) \cap \mathcal{I}| = |V(C) \cap \mathcal{J}|$ . Temos também que cada máquina pode possuir no máximo uma aresta do tipo  $r_j j$  incidente a ela. Logo, o número máximo de arestas do tipo  $r_j j$  também é igual a  $n$ . Como cada aresta de  $C$  é ou do tipo  $ip_i$  ou do tipo  $r_j j$  e  $C$  possui  $2n$  arestas, temos que  $C$  possui  $n$  arestas do tipo  $ip_i$  e  $n$  arestas do tipo  $r_j j$ .

Agora, suponha por contradição que  $C$  não é um circuito alternante. Então ou existe um caminho  $P = (i_k, j_k, i_{k+1})$  em  $C$ , onde  $i_k j_k$  e  $i_{k+1} j_k$  são arestas do tipo  $ip_i$ , ou existe um caminho  $P' = (j_{k-1}, i_k, j_k)$  em  $C$ , onde  $i_k j_{k-1}$  e  $i_k j_k$  são do tipo  $r_j j$ . Se o primeiro caso ocorrer temos que  $C$  poderia ter no máximo  $n - 1$  arestas do tipo  $r_j j$ , afinal  $j$  não estaria contribuindo com nenhuma aresta do tipo  $r_j j$ . No entanto, isso contraria o fato de  $C$  possuir  $n$  arestas do tipo  $r_j j$ . Um argumento semelhante pode ser aplicado ao segundo caso e, assim, temos que  $C$  é um circuito alternante.  $\square$

Definimos a **capacidade residual** de uma aresta  $ij \in E(G(M))$ , denotada por  $\tau(ij)$ , como

$$\tau(ij) = \begin{cases} \pi(i, j) - M(i, j) & \text{se } ij \text{ é uma aresta do tipo } ip_i \\ M(i, j) & \text{se } ij \text{ é uma aresta do tipo } r_j j \end{cases}.$$

Dado um caminho/circuito  $P$  em  $G(M)$ , definimos o **valor residual mínimo** de  $P$  como se sendo  $\tau(P) = \min\{\tau(ij) : ij \in E(P)\}$ .

Especificamente, em cada iteração do DM-SA, o algoritmo escolhe uma tarefa  $i$  não saturada que pertence a uma componente  $C$  de  $G(M)$ . Se  $C$  é uma árvore, então o algoritmo faz uma aumentação no único caminho de  $i$  a  $j_d$  em  $C$ . Se  $C$  possui um circuito, então o algoritmo faz uma aumentação no único circuito de  $C$ . Quando a aumentação é feita no caminho  $P = (i, \dots, j_d)$ , temos que o valor  $\gamma$  aumentado ao longo de  $P$  é  $\gamma = \min(s(i) - M(\mathcal{J}, i), \tau(P))$ . Note que, após a aumentação no caminho  $P$ , pelo menos um dos seguintes casos deve ocorrer: (i)  $i$  fica saturado, (ii) uma aresta  $i'p_{i'} \in E(P)$  fica saturada ( $M(i', p_{i'}) = \pi(i', p_{i'})$ ), ou (iii) uma aresta  $r_{j'}j'$  passa a ter alocação igual a zero. Quando a aumentação é feita em um circuito  $P$ , temos que o valor  $\gamma$  aumentado ao longo do circuito  $P$  é igual a  $\gamma = \tau(P)$ . Note que, após a aumentação no circuito  $P$ , pelo menos um dos seguintes casos deve ocorrer: (i) uma aresta  $i'p_{i'} \in E(P)$  fica saturada, ou (ii) uma aresta  $r_{j'}j'$  passa a ter alocação igual a zero.

Devido à forma que a aumentação é realizada em uma caminho/circuito  $P$ , qualquer máquina saturada  $j \in V(P)$  continuará saturada mesmo após a aumentação. Além disso, como a primeira ação do algoritmo após a normalização da instância é saturar todas as máquinas de  $\mathcal{J} \setminus \{j_d\}$  com a tarefa *dummy*, temos que essas máquinas permanecerão saturadas durante todo o restante da execução.

O algoritmo continua o processo iterativo descrito anteriormente até que não exista mais uma tarefa que não esteja saturada.

Vamos agora fazer um paralelo entre a aumentação realizada pelo DM-SA em um caminho/circuito  $P$  e uma sequência de propostas e rejeições realizadas pelo algoritmo de Gale-Shapley. Suponha que  $P$  é um caminho  $P = (i_0, j_0, i_1, \dots, i_k, j_d)$ . Pelo Lema 5.4, sabemos que  $P$  é alternante. Logo, temos que  $j_0 = p_{i_0}$ .

Quando a alocação da aresta  $i_0j_0$  é aumentada por um valor  $\gamma$ , é como se  $i_0$ , que pode aumentar sua alocação, estivesse “propondo” para  $j_0$ , que é a melhor máquina que está aceitando  $i_0$ . Após “aceitar” a proposta de  $i_0$ ,  $j_0$  está  $\gamma$  unidades de tempo além da sua oferta de processamento, então  $j_0$  “rejeita” uma quantidade  $\gamma$  de tempo de processamento da pior tarefa que está alocada a ela, que no caso é  $i_1 = j_r$ . Em seguida,  $j_1$  “propõe” essas  $\gamma$  unidades de tempo que  $j_0$  rejeitou para a melhor máquina que a está aceitando, e assim sucessivamente, até chegarmos na máquina *dummy*, que não rejeita nenhuma tarefa.

**Lema 5.6.** *A alocação  $M$  gerada ao término do algoritmo DM-SA para a instância transformada  $I$  é estável.*

*Demonstração.* Como  $s(\mathcal{I}) = s(\mathcal{J})$  e toda tarefa de  $\mathcal{I}$ , como último recurso, pode ser alocada à máquina *dummy*, o algoritmo sempre para. Ao seu término, para toda tarefa  $i$ ,  $s(i) = M(i, \mathcal{J})$ , e, para toda máquina  $j$ ,  $s(j) = M(\mathcal{I}, j)$ .

Assim, para um par  $(i, j)$ ,  $i \in \mathcal{I}$  e  $j \in \mathcal{J}$  ser bloqueante, deve existir uma máquina  $j'$  e uma tarefa  $i'$  tal que  $M(i, j') > 0$ ,  $M(i', j) > 0$ ,  $j \succ_i j'$  e  $i \succ_j i'$ .

Se  $j \succ_i j'$  e  $M(i, j') > 0$ , então  $j'$  virou  $p_i$  durante a execução, pois a alocação de uma aresta  $(i, j)$  só aumenta quando  $j = p_i$  e inicialmente  $M(i, j) = 0$  para todo  $i \in \mathcal{I}$  e  $j \in \mathcal{J}$ .

Seja  $i' = r_j$  no momento em que  $j' = p_i$ . Como  $j' = p_i$ , então  $j$  não estava aceitando  $i$ . Logo,  $i' = i$  ou  $i' \succ_j i$ . No decorrer da execução do algoritmo,  $r_j$  pode apenas se tornar tarefas cujas preferências são maiores para  $j$ . Assim, temos que não existe uma tarefa  $i'$  para a qual  $i \succ_j i'$  e  $M(i', j) > 0$  e, portanto,  $M$  é estável para  $I$ .  $\square$

Por fim, o algoritmo transforma a alocação estável  $M$  para a instância normalizada  $I$  em uma alocação estável  $M'$  para a instância original de entrada fazendo com que  $M'(i, j) = M(i, j)$  para cada par  $(i, j) \in \mathcal{I}' \times \mathcal{J}'$ .

**Lema 5.7.** *Se  $M$  é uma alocação estável para  $I$ , então  $M'$ , tal que  $M'(i, j) = M(i, j)$  para cada par  $(i, j) \in \mathcal{I}' \times \mathcal{J}'$ , é uma alocação estável para  $I'$ .*

*Demonstração.* Qualquer possível par bloqueante  $(i, j)$ , com  $i \in \mathcal{I}'$  e  $j \in \mathcal{J}'$ , que possa surgir na transformação de  $M$  para  $M'$  deve ter ou  $i$  alocado à máquina *dummy* ou  $j$  alocado à tarefa *dummy* (ou ambos) em  $M$ .

Suponha que  $M(i, j_d) > 0$ . Como  $(i, j)$  não bloqueia  $M$ , não existe uma tarefa  $i'$ , com  $i \succ_j i'$ , tal que  $M(i', j) > 0$ . Como  $i \succ_j i_d$ , temos que  $j$  não está alocada à tarefa *dummy* em  $M$ . Assim,  $M'(\mathcal{I}', j) = s'(j)$  e não existe uma tarefa  $i'$  tal que  $i \succ_j i'$  e  $M'(i', j) > 0$ .

Podemos utilizar um raciocínio análogo para o caso em que  $M(i_d, j) > 0$  e assim chegar à conclusão de que, se  $M$  é estável para  $I$ , então  $M'$  é estável para  $I'$ .  $\square$

O Algoritmo 8 apresenta um pseudo-código para o DM-SA e a Figura 5.5 ilustra uma execução do mesmo sobre a instância do SA mostrada na Figura 5.5a. Nessa figura, os números inteiros nas arestas dos grafos  $G(M)$  indicam suas capacidades residuais. As arestas sólidas são do tipo  $ip_i$  enquanto as tracejadas são do tipo  $r_jj$ . A última iteração do algoritmo gera a alocação mostrada na Figura 5.5l. Note que para transformar tal alocação em uma alocação estável para a instância original, basta que sejam removidas a primeira linha e a primeira coluna de  $M$ .

## 5.3 Problema do Fluxo Estável

Nesta seção, vamos apresentar o **Problema do Fluxo Estável** (SF, de *Stable Flow*) que aplica o conceito de estabilidade a uma rede de fluxos. Embora a maioria dos problemas de emparelhamentos em grafos bipartidos possam ser facilmente modelados por uma rede de fluxos, o conceito de estabilidade para um fluxo de rede foi proposto apenas em 2009 por Fleiner [16], mais de 40 anos após o surgimento do primeiro problema de emparelhamento estável em grafos bipartidos.

---

**Algoritmo 8** Algoritmo de Dean e Munshi [9] para o SA (DM-SA)

---

**Entrada:** Uma instância  $I'$  do SA

**Saída:** Uma alocação estável  $M'$  para  $I'$

- 1: Gera  $I$  a partir de  $I'$
  - 2: **Enquanto**  $M(i_d, \mathcal{J}) < s(i_d)$  **Faça**
  - 3:      $M(i_d, p_{i_d}) \leftarrow s(p_{i_d})$
  - 4: **Fim Enquanto**
  - 5: **Enquanto** existe uma tarefa  $i$  tal que  $M(i, \mathcal{J}) < s(i)$  **Faça**
  - 6:     Construa  $G(M)$
  - 7:     Seja  $A$  a componente de  $G(M)$  tal que  $i \in V(A)$
  - 8:     **Se**  $A$  é uma árvore **Então**
  - 9:         Seja  $P = (i, p_i = j, r_j, \dots, j_d)$  o único caminho de  $i$  a  $j_d$  em  $A$
  - 10:          $\gamma \leftarrow \min(\tau(P), s(i) - M(i, \mathcal{J}))$
  - 11:         **Senão**
  - 12:             Seja  $P = (i, p_i = j, r_j, \dots, j', r_{j'} = i)$  o único circuito em  $A$
  - 13:              $\gamma \leftarrow \tau(P)$
  - 14:         **Fim Se**
  - 15:         **Para todo** aresta  $ip_i \in E(P)$  **Faça**
  - 16:              $M(i, p_i) \leftarrow M(i, p_i) + \gamma$
  - 17:         **Fim Para**
  - 18:         **Para todo** aresta  $r_j j \in E(P)$  **Faça**
  - 19:              $M(r_j, j) \leftarrow M(r_j, j) - \gamma$
  - 20:         **Fim Para**
  - 21: **Fim Enquanto**
  - 22: **Para todo**  $(i, j) \in \mathcal{I}' \times \mathcal{J}'$  **Faça**
  - 23:      $M'(i, j) \leftarrow M(i, j)$
  - 24: **Fim Para**
  - 25: **Devolve**  $M'$
-



$i_1$  (10) :  $j_2, j_3, j_1$   
 $i_2$  (7) :  $j_1, j_2, j_3$   
 $i_3$  (8) :  $j_3, j_1, j_2$   
 $j_1$  (6) :  $i_1, i_2, i_3$   
 $j_2$  (5) :  $i_1, i_2, i_3$   
 $j_3$  (7) :  $i_3, i_2, i_1$

$$\pi' = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Instância de entrada  $I'$  na qual  $\mathcal{I}' = \{i_1, i_2, i_3\}$  e  $\mathcal{J}' = \{j_1, j_2, j_3\}$ .

$i_0$  (18) :  $j_1, j_2, j_3, j_0$

$i_1$  (10) :  $j_2, j_3, j_1$

$i_2$  (7) :  $j_1, j_2, j_3$

$i_3$  (8) :  $j_3, j_1, j_2$

$j_0$  (25) :  $i_1, i_2, i_3, i_0$

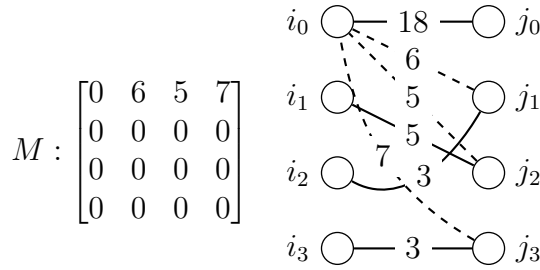
$j_1$  (6) :  $i_1, i_2, i_3$

$j_2$  (5) :  $i_1, i_2, i_3$

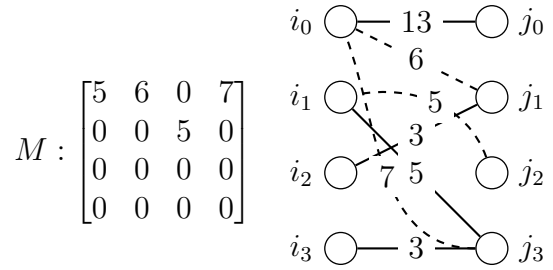
$j_3$  (7) :  $i_3, i_2, i_1$

$$\pi = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 5 & 7 \\ 10 & 5 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

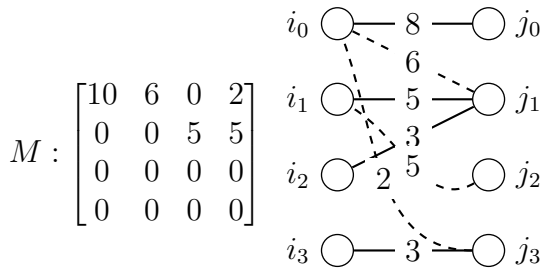
(b) Instância normalizada  $I$ . Denotamos a tarefa *dummy* por  $i_0$  e a máquina *dummy* por  $j_0$ . Com relação a matriz  $\pi$ , agora a  $k$ -ésima linha da matriz representa a tarefa  $i_{k-1}$  e a  $\ell$ -ésima coluna da matriz representa a máquina  $j_{\ell-1}$ .



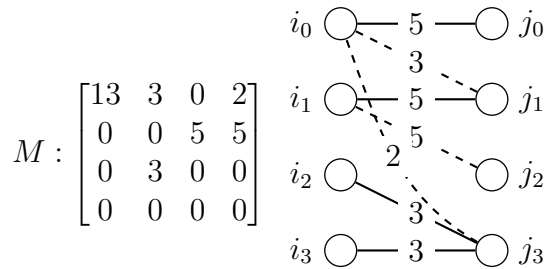
(c) Alocação inicial  $M$  à esquerda e  $G(M)$  à direita. Na matriz de alocação, a  $k$ -ésima linha representa a tarefa  $i_{k-1}$  e a  $\ell$ -ésima coluna a máquina  $j_{\ell-1}$ .



(d) Alocação  $M$  na primeira iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentação de valor  $\gamma = 5$  ao longo do caminho  $P = (i_1, j_2, i_0, j_0)$ .

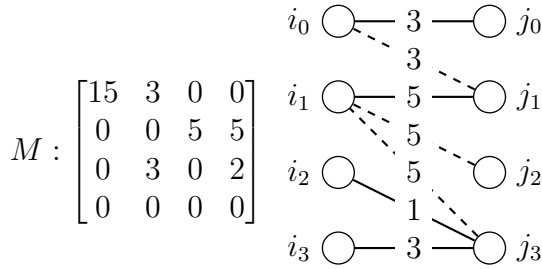


(e) Alocação  $M$  na segunda iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentação de valor  $\gamma = 5$  ao longo do caminho  $P = (i_1, j_3, i_0, j_0)$ .

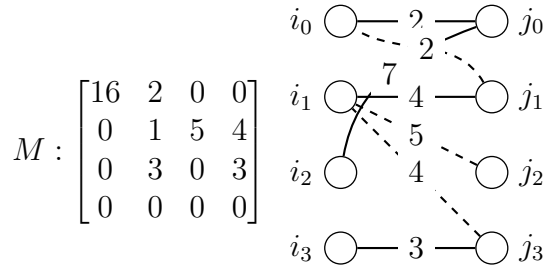


(f) Alocação  $M$  na terceira iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentação de valor  $\gamma = 3$  ao longo do caminho  $P = (i_2, j_1, i_0, j_0)$ .

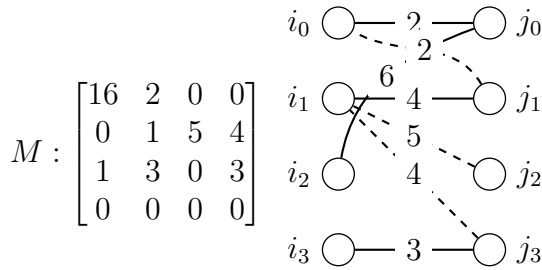
Figura 5.5: Exemplo de uma das possíveis execuções do DM-SA sobre uma instância do SA



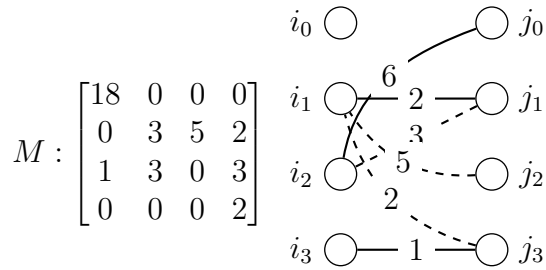
(g) Alocação  $M$  na quarta iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentoção de valor  $\gamma = 2$  ao longo do caminho  $P = (i_2, j_3, i_0, j_0)$



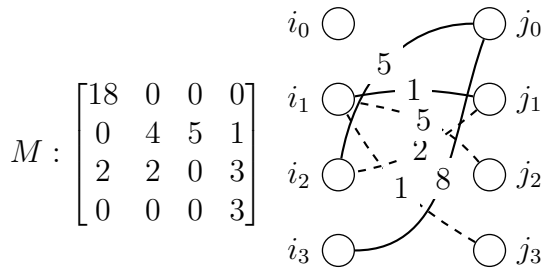
(h) Alocação  $M$  na quinta iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentoção de valor  $\gamma = 1$  ao longo do caminho  $P = (i_2, j_3, i_1, j_1, i_0, j_0)$



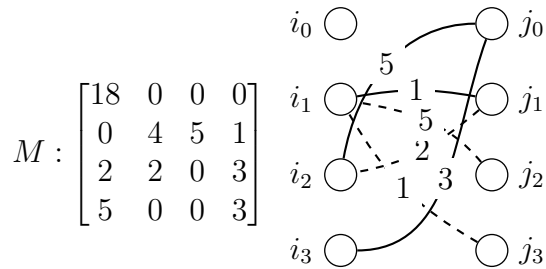
(i) Alocação  $M$  na sexta iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentoção de valor  $\gamma = 1$  ao longo do caminho  $P = (i_2, j_0)$



(j) Alocação  $M$  na sétima iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior fazendo-se uma aumentoção de valor  $\gamma = 2$  ao longo do caminho  $P = (i_3, j_3, i_1, j_1, i_0, j_0)$



(k) Alocação  $M$  na oitava iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior, fazendo-se uma aumentoção de valor  $\gamma = 1$  ao longo do caminho  $P = (i_3, j_3, i_1, j_1, i_2, j_0)$



(l) Alocação  $M$  na nona iteração e  $G(M)$ , criados a partir da alocação anterior, fazendo-se uma aumentoção de valor  $\gamma = 5$  ao longo do caminho  $P = (i_3, j_0)$

Figura 5.5: Exemplo de uma das possíveis execuções do DM-SA sobre uma instância do SA (continuação)

Definimos formalmente uma instância  $I$  do SF como um quintupla  $I = (D, s, t, L, \pi)$ , onde:

- $D$  é um digrafo que modela a rede de fluxos;
- $s$  e  $t$  são vértices distintos de  $V(D)$  tais que  $s$  não possui nenhum arco de entrada e  $t$  não possui nenhum arco de saída;
- $L$  contém as listas de preferências que cada vértice  $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$  fornece sobre todos os seus arcos de entrada e sobre todos os seus arcos saída, isto é, cada vértice fornece duas listas de preferências, uma de entrada e outra de saída;
- $\pi : A(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  indica a quantidade máxima de fluxo  $\pi(uv)$  que pode passar pelo arco  $uv \in A(D)$ .

Dizemos que um vértice  $v \in V(D)$  **prefere** um arco de entrada (saída)  $a$  a um arco de entrada (saída)  $a'$ , denotando por  $a \succ_v^{in} a'$  ( $a \succ_v^{out} a'$ ), se e somente se  $a$  precede  $a'$  na lista de preferências de entrada (de saída) de  $v$ .

**Definição 5.6** (Fluxo). *Dizemos que  $f : A(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  é um **fluxo** para uma instância  $I = (D, s, t, L, \pi)$  do SF se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $f(uv) \leq \pi(uv)$  para todo arco  $uv \in A(D)$  (condição de capacidade);
- (ii)  $\sum_{uv \in A(D)} f(uv) = \sum_{vw \in A(D)} f(vw)$  para cada  $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$  (lei de Kirchhoff).

Dado um fluxo  $f$  para uma instância  $I$  do SF, dizemos que um arco  $a \in A(D)$  está **insaturado** em  $f$  se e somente se  $f(a) < \pi(a)$ . Caso contrário, dizemos que  $a$  está **saturado**.

**Definição 5.7** (Caminho bloqueante). *Seja  $f$  um fluxo para uma instância  $I$  do SF. Dizemos que um caminho orientado  $P = (v_1, a_1, \dots, a_{k-1}, v_k)$  em  $D$  é um **caminho bloqueante** se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) Cada arco  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , é insaturado;
- (ii)  $v_1 \in \{s, t\}$  ou existe um arco  $a' = v_1 u$  tal que  $f(a') > 0$  e  $a_1 \succ_{v_1}^{out} a'$ ;
- (iii)  $v_k \in \{s, t\}$  ou existe um arco  $a'' = w v_k$  tal que  $f(a'') > 0$  e  $a_{k-1} \succ_{v_k}^{in} a''$ .

**Definição 5.8** (Fluxo estável). *Um fluxo  $f$  de uma instância  $I$  do SF é **estável** se e somente se  $f$  não admite um caminho bloqueante. Caso contrário, dizemos que  $f$  é **instável**.*

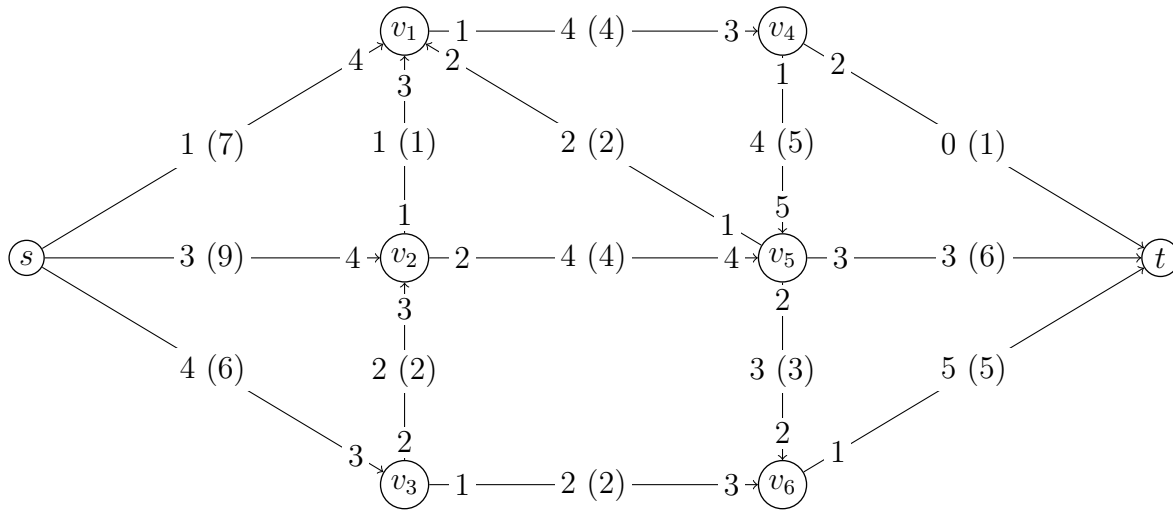


Figura 5.6: Exemplo de uma instância do SF junto com seu fluxo estável

A Figura 5.6 apresenta um exemplo de uma instância  $I$  do SF juntamente com um fluxo estável. Ela exibe o digrafo  $D$ , onde  $V(D) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, t\}$ . As duas listas de preferências fornecidas por cada vértice  $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$  sobre cada arco  $a$  incidente a  $v$  são denotadas no próprio digrafo através da atribuição de um número inteiro ao arco  $a$  que é escrito próximo ao vértice  $v$ . Na figura, temos que um vértice  $v$  prefere um arco  $a$  de entrada (de saída) a um arco  $a'$  de entrada (de saída), ou seja  $a \succ_v^{in} a'$  ( $a \succ_v^{out} a'$ ), se e somente se o número atribuído por  $v$  a  $a$  é menor do que o número atribuído por  $v$  a  $a'$ . Por exemplo, podemos ver na imagem que  $v_5$  atribuiu valor 1 ao arco  $v_5v_1$  e valor 2 ao arco  $v_5v_6$ . Logo, temos que  $v_5v_1 \succ_{v_5}^{out} v_5v_6$ . Note que, apesar de  $v_5$  ter atribuído o valor 3 ao arco  $v_5t$  e valor 4 ao arco  $v_2v_5$ , isso não significa que  $v_5$  prefere  $v_5t$  a  $v_2v_5$ , pois temos que  $v_2v_5$  é um arco de entrada e  $v_5t$  um arco de saída. Por fim, temos que o valor de  $\pi$  e do fluxo estável  $f$  para cada arco  $a \in A(D)$  são denotados por um número real localizado no centro do arco, sendo que o valor de  $\pi$  é colocado dentro de parênteses.

O problema de fluxo estável em redes é útil para modelar mercados nos quais os agentes agem como produtores e consumidores ao mesmo tempo, não necessariamente do mesmo produto. Os vértices do digrafo são então utilizados para representar os agentes atuantes e os arcos, junto com as listas de preferências sobre eles, para representar a preferência em fazer negócio com cada um dos possíveis fornecedores/consumidores. O conceito de fluxo é utilizado para abstrair e controlar as transações entre os agentes, garantindo, através da lei de Kirchhoff, que um agente que produz, por exemplo, aço não compre mais minério de ferro do que o necessário para abastecer os seus consumidores e nem venda mais do que o seu estoque de matéria prima permite produzir. Por fim, temos que o conceito de estabilidade é utilizado para garantir que não existe uma indeterminação nas

transações, causada por um acordo mais vantajoso entre pelo menos dois agentes e um caminho insaturado entre eles.

### 5.3.1 Principais Resultados

Além de introduzir o SF, Fleiner [16] demonstrou que toda instância possui uma solução. Ele obteve tal resultado fazendo uma redução do SF para o SA, o que será visto na próxima seção. Outros resultados encontrados por Fleiner [16] são sumarizados no teorema a seguir.

**Teorema 5.18** (Fleiner [16, 17]). *Seja  $I$  uma instância qualquer do SF. Então:*

- (i)  *$I$  possui um fluxo estável;*
- (ii) *Se  $\pi : A(D) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , então existe um fluxo estável  $f$  tal que, para qualquer arco  $a \in A(D)$ ,  $f(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ;*
- (iii) *Se  $f$  e  $f'$  são fluxos estáveis para  $I$ , então para qualquer arco  $a \in A(D)$  incidente ao vértice  $s$  ou  $t$  temos que  $f(a) = f'(a)$ ;*
- (iv) *O conjunto de fluxos estáveis  $\mathcal{M}$  possui uma estrutura de reticulado distributivo.*

Cseh *et al.* [7] apresentaram uma generalização do algoritmo de Gale-Shapley para o SF, que chamaremos de SF-GS. Como tal algoritmo sempre encontra um fluxo estável, ele nos fornece uma prova alternativa ao item (i) do Teorema 5.18.

O SF-GS é um algoritmo *Preflow-Push*, ou seja, ele inunda a rede permitindo que alguns vértices tenham excessos e aos poucos vai balanceando o fluxo em cada vértice. Dizemos que um vértice  $w$  **recusou** o fluxo de um arco  $vw$  e que  $v$  teve o fluxo de  $vw$  **recusado** se, em algum momento durante a execução do algoritmo,  $w$  reduziu por um valor  $\epsilon > 0$  o fluxo de  $vw$ , onde  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Um vértice  $v$  **atingiu o limite de escoamento** se todo arco de saída de  $v$  teve o fluxo recusado. Dizemos que  $vw$  é o **melhor arco de saída (de entrada)** para  $v$  ( $w$ ) se e somente se não existe um arco  $vw'$  ( $v'w$ ) tal que  $vw' \succ_v^{out} vw$  ( $v'w \succ_w^{in} vw$ ). Dizemos que  $vw$  é o **pior arco de saída (de entrada)** para  $v$  ( $w$ ) se e somente se não existe um arco  $vw'$  ( $v'w$ ) tal que  $vw \succ_v^{out} vw'$  ( $vw \succ_w^{in} v'w$ ). Denotamos por  $p_v$  o melhor arco de saída  $vw$  para  $v$  tal que o fluxo de  $vw$  é menor do que  $\pi(vw)$  e  $vw$  nunca teve o fluxo recusado por  $w$ . Denotamos por  $r_v$  o pior arco de entrada  $wv$  para  $v$  tal que o fluxo de  $wv$  é maior do que zero. Dado um fluxo  $f$ , definimos o **excedente** de um vértice  $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$ , denotado por  $ex(v, f)$ , como a quantidade de fluxo que entra em  $v$  menos a quantidade de fluxo que deixa  $v$ , e dizemos que  $v$  é **ativo** se  $ex(v, f) > 0$ . Dadas essas definições, o Algoritmo 9 apresenta um pseudo-código para o SF-GS.

**Algoritmo 9** Algoritmo de Gale-Shapley para o SF**Entrada:** Uma instância  $I = (D, s, t, L, \pi)$  do SF**Saída:** Um fluxo estável  $f$ 


---

```

1: Para todo  $uv \in A(D)$  Faça
2:    $f(uv) \leftarrow 0$ 
3: Fim Para
4: Para todo  $sv \in A(D)$  Faça
5:    $f(sv) \leftarrow \pi(sv)$  ▷ Satura os arcos que saem de  $s$ 
6: Fim Para
7: Enquanto existir um vértice  $v$  ativo Faça
8:   Se  $v$  atingiu o limite de escoamento Então
9:      $f(r_v) \leftarrow \max(f(r_v) - ex(v, f), 0)$ 
10:  Senão
11:    Seja  $p_v$  igual a  $vw$ 
12:    Se  $w$  não atingiu o limite de escoamento ou  $w = t$  ou  $v \succ_w^{in} r_w$  Então
13:       $f(vw) \leftarrow \min(f(vw) + ex(v, f), \pi(vw))$ 
14:    Fim Se
15:  Fim Se
16: Fim Enquanto
17: Devolve  $f$ 

```

---

**Teorema 5.19** (Cseh et al. 7). *Dada uma instância  $I$  do SF, o SF-GS encontra um fluxo estável  $f$  para  $I$ . Além disso, se  $\pi$  é uma função inteira, então o SF-GS produz  $f$  em  $O(\sum_{a \in A(D)} \pi(a))$  e, para todo  $a \in A(D)$ ,  $f(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .*

Cseh et al. [7] também estenderam o conceito de estabilidade para fluxos ao longo do tempo [47], o que ficou conhecido como **Problema do Fluxo Estável ao Longo do Tempo** (SFT, de *Stable Flow over Time*), e provaram que toda instância de tal problema possui uma solução.

Formalmente, definimos uma instância do SFT como uma sétupla  $(D, s, t, L, \pi, \tau, T)$ , onde:

- $D, s, t, L$  e  $\pi$  são definidos de forma análoga ao SF;
- $\tau : A(D) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  indica o tempo necessário  $\tau(uv)$  para se transmitir o fluxo ao longo do arco  $uv$ ;
- Um horizonte de tempo  $T \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Definição 5.9** (Fluxo ao longo do tempo). *As funções  $f_a : \{0, 1, \dots, T-1\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  para cada arco  $a \in A(D)$  formam um **fluxo ao longo do tempo**, também chamado de **fluxo dinâmico**, com uma linha de horizonte  $T$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $f_{uv}(\theta) = 0$  para  $\theta \geq T - \tau(uv)$  (esta condição garante que um fluxo enviado por um vértice  $u$  através de um arco  $uv$  tem tempo suficiente para chegar a  $v$ );
- (ii)  $f_{uv}(\theta) \leq \pi(uv)$  para todo arco  $uv \in A(D)$  e  $\theta \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$  (esta condição garante que a condição de capacidade vale durante todo o período de tempo);
- (iii)  $\sum_{uv \in A(D)} \sum_{\xi \leq \theta - \tau(uv)} f_{uv}(\xi) = \sum_{vw \in A(D)} \sum_{\xi \leq \theta} f_{vw}(\xi)$  para todo  $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$  e  $\theta \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$  (essa condição garante que a conservação de fluxo é respeitada durante cada momento de tempo).

**Definição 5.10** (Caminho bloqueante de um fluxo ao longo do tempo). *Um caminho orientado  $W = (v_1, a_1, \dots, a_{k-1}, v_k)$  é um **caminho bloqueante de um fluxo ao longo do tempo**  $f$  se, em certo momento de tempo  $0 \leq \theta \leq T - 1$ , as seguintes condições valem:*

- (i) *Cada arco  $a_i$  é insaturado no momento  $\theta + \sum_{j=1}^{i-1} \tau(a_j)$ ;*
- (ii)  *$v_1 = s$  ou existe um arco  $a' = v_1 u$  tal que  $f_{a'}(\theta) > 0$  e  $a_1 \succ_{v_1}^{out} a'$ ;*
- (iii)  *$v_k = t$  ou existe um arco  $a'' = w v_k$  tal que  $f_{a''}(\theta + \sum_{j=1}^{k-1} \tau(a_j) - \tau(a'')) > 0$  e  $a_{k-1} \succ_{v_k}^{in} a''$ .*

Dizemos que um fluxo ao longo do tempo  $f$  é **estável** para uma instância do SFT se e somente se  $f$  não admite um caminho bloqueante ao longo do tempo.

**Teorema 5.20** (Cseh et al. [7]). *Toda instância  $I$  do SFT admite um fluxo estável ao longo do tempo.*

Király e Pap [42] propuseram o **Problema do Fluxo Estável com Multiprodutos** (SMF, de *Stable Multicommodity Flows*), que estende a noção de estabilidade para uma rede onde os agentes negociam diversos produtos e classificam os produtores e consumidores de acordo com cada produto.

Formalmente, definimos uma instância do SMF como uma ócupla  $(D, Q, \Pi, \pi, S, T, L, \ell)$ , onde:

- $D$  é o digrafo que modela a rede de fluxos;
- $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$  é o conjunto dos produtos negociados;
- $\Pi : A(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  é a função que determina a quantidade máxima total de fluxo  $f(a)$  que pode passar pelo arco  $a$ ;

- $\pi : A(D) \times Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  é uma função que determina a quantidade máxima  $\pi(a, p)$  de fluxo de um produto  $q \in Q$  que pode passar por  $a \in A(D)$ ;
- $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq V(D)$  é um subconjunto de vértices tais que para cada arco de entrada  $a$  de  $s_i \in S$ ,  $\pi(a, i) = 0$ ;
- $T = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq V(D)$  é um subconjunto de vértices tais que para cada arco de saída  $a$  de  $t_i \in T$ ,  $\pi(a, i) = 0$ ;
- $L$  contém as listas de preferências que cada vértice  $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$  fornece sobre todos os seus arcos de entrada e sobre todos os seus arcos de saída em relação aos produtos de  $Q$ , isto é, cada vértice fornece  $2|Q|$  listas de preferências, sendo  $|Q|$  de entrada e outras  $|Q|$  de saída, cada uma classificando os arcos incidentes a  $v$ ;
- $\ell$  contém as listas de preferências que cada arco  $a \in A(D)$  fornece sobre todos os produtos de  $Q$ ;

**Definição 5.11** (Fluxo de multiprodutos). *Uma função  $f : A(D) \times Q \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  é um **fluxo de multiprodutos** para uma instância  $I$  do SMF se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $f(a, q) \leq \pi(a, q)$  para qualquer  $q \in Q$  e  $a \in A(D)$ ;
- (ii)  $\sum_{q \in Q} f(a, q) \leq \Pi(a)$  para qualquer  $a \in A(D)$ ;
- (iii)  $\sum_{uv \in A(D)} f(uv, q) = \sum_{vw \in A(D)} f(vw, q)$  para qualquer  $q \in Q$  e  $v \in V(D) \setminus \{s_q, t_q\}$ .

**Definição 5.12** (Caminho bloqueante para um fluxo de multiprodutos). *Um caminho orientado  $P = (v_1, a_1, \dots, a_{k-1}, v_k)$  é um **caminho bloqueante para um fluxo de multiprodutos**  $f$  com respeito ao produto  $q$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) Para cada arco  $a_i$  em  $P$  temos que  $f(a_i, q) < \pi(a_i, q)$ ;
- (ii)  $v_1 = s_q$  ou existe um arco  $a' = v_1 u$  para o qual  $f(a', q) > 0$  e  $v_1$  prefere o arco de saída  $a_1$  a um arco de saída  $a'$  com relação ao produto  $q$ ;
- (iii)  $v_k = t_q$  ou existe um arco  $a'' = w v_k$  para o qual  $f(a'', q) > 0$  e  $v_k$  prefere o arco de entrada  $a_{k-1}$  a um arco de entrada  $a''$  com relação ao produto  $q$ ;
- (iv) Se  $\sum_{q \in Q} f(a_i, q) = \Pi(a_i)$  para um arco  $a_i$  de  $Q$ , então existe um produto  $q'$  tal que  $f(a_i, q') > 0$  e o arco  $a_i$  prefere o produto  $q$  ao produto  $q'$ .



**Teorema 5.21** (Király e Pap [42]). *Toda instância do SMF admite um fluxo de multiprodutos estável.*

**Teorema 5.22** (Király e Pap [42]). *É PPAD-difícil encontrar um fluxo de multiprodutos estável para uma instância do SMF, mesmo se  $D$  for acíclico.*

### 5.3.2 Encontrando uma Solução

Nessa seção vamos apresentar como reduzir o SF para o SA. Para simplificar a notação, vamos redefinir o SA utilizando grafos.

**Definição 5.13.** *Uma instância do SA consiste em uma quádrupla  $(G, L, s, \pi)$ , onde:*

- $G$  é um multigrafo bipartido, no qual os vértices de uma das partes representam as tarefas e os vértices da outra parte representam as máquinas;
- $L$  contém as listas de preferências que cada vértice  $v \in V(G)$  fornece sobre todas as arestas incidentes a ele;
- $s : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ;
- $\pi : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .

**Definição 5.14.** *Um vértice  $v \in V(G)$  **prefere** uma aresta  $e$  a uma aresta  $e'$ , denotando por  $e \succ_v e'$ , se  $e$  precede  $e'$  na lista de preferências de  $v$ .*

**Definição 5.15.** *Dizemos que uma função  $M : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  é uma **alocação** para uma instância  $I$  do SA se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $M(\delta(v)) \leq s(v)$  para todo vértice  $v \in V(G)$ ;
- (ii)  $M(uv) \leq \pi(uv)$  para toda aresta  $uv \in E(G)$ .

**Definição 5.16.** *Dada uma alocação  $M$  para uma instância do SA, dizemos que uma aresta  $uv \in E(G)$  **bloqueia**  $M$ , ou é uma **aresta bloqueante** de  $M$ , se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $M(uv) < \pi(uv)$ ;
- (ii)  $M(\delta(v)) < s(v)$  ou existe uma aresta  $vw \in E(G)$  tal que  $M(vw) > 0$  e  $vu \succ_v vw$ ;
- (iii)  $M(\delta(u)) < s(u)$  ou existe uma aresta  $uz \in E(G)$  tal que  $M(uz) > 0$  e  $vu \succ_u uz$ .

Da definição apresentada na Seção 5.2, podemos ver que uma alocação  $M$  para uma instância  $I$  do SA é estável se e somente se nenhuma aresta de  $E(G)$  bloqueia  $M$ . Uma outra maneira equivalente de definir uma alocação estável para o SA com a notação de grafos é dada na Definição 5.17.

Seja  $(u, e^{\succ}) = \{e' : e' \succ_u e \vee e' = e\}$  onde  $u \in V(G)$  e  $e \in E(G)$ . Dada uma alocação  $M$  para uma instância  $I$  do SA, dizemos que uma aresta  $e = uv \in E(G)$  está **dominada em  $u$**  por  $M$  se  $M((u, e^{\succ})) = s(u)$  e dizemos que  $e$  está **dominada em  $v$**  por  $M$  se  $M((v, e^{\succ})) = s(v)$ . Dizemos ainda que uma aresta  $e$  está **saturada** pela alocação  $M$  se  $M(e) = \pi(e)$ .

**Definição 5.17.** *Uma alocação  $M$  para uma instância  $I$  do SA é **estável** se e somente se para cada aresta  $e \in E(G)$ ,  $e$  está saturada em  $M$  ou é dominada por  $M$  em um dos seus extremos.*

É importante notar que, da forma como o SA foi definido na Seção 5.2, seria direto utilizar um grafo simples para redefinir a notação. No entanto, sempre é possível reduzir uma instância na qual  $G$  é um multigrafo para uma na qual  $G$  é um grafo simples. Permitir que  $G$  seja um multigrafo irá facilitar a descrição da redução do SF para o SA posteriormente.

A seguir, vamos descrever a redução de uma instância  $I' = (G', O', s', \pi')$  do SA, onde  $G'$  é um multigrafo, para uma instância  $I = (G, O, s, \pi)$  do SA, onde  $G$  é um grafo simples.

Inicialmente, fazemos  $V(G) = V(G')$  e  $s = s'$ . Para cada aresta  $e = uv \in E(G')$ , adicionamos ao grafo  $G$  a estrutura apresentada na Figura 5.7. Isso adicionará seis novos vértices a  $V(G)$ ,  $u_0^e, u_1^e, u_2^e, v_0^e, v_1^e$  e  $v_2^e$ , e trocará uma aresta de  $E(G)$  por oito. Definimos  $s(w) = \pi'(uv)$  para todo vértice  $w \in \{u_0^e, u_1^e, u_2^e, v_0^e, v_1^e, v_2^e\}$  e  $\pi(f) = \pi'(uv)$  para toda aresta  $f \in \{uu_0^e, u_0^e u_1^e, u_0^e u_2^e, u_1^e v_2^e, u_2^e v_1^e, v_0^e v, v_0^e v_1^e, v_0^e v_2^e\}$ . Na Figura 5.7 também é possível observar a lista de preferências de cada vértice  $v$  sobre  $\delta(v)$ , onde  $\delta(v)$  é o conjunto das arestas incidentes a  $v$ , em uma representação igual à do grafo de preferências. Assim, temos que originalmente  $e$  é a  $i$ -ésima melhor aresta para  $u$  e a  $j$ -ésima melhor aresta para o vértice  $v$ . Após essa transformação,  $uu_0^e$  passa a ser a  $i$ -ésima melhor aresta para  $u$  e  $v_0^e v$  passa a ser a  $j$ -ésima aresta para  $v$ .

**Lema 5.8.** *Se  $M$  é uma alocação estável para uma instância  $I = (G, O, s, \pi)$  do SA construída a partir de uma instância  $I' = (G', O', s', \pi')$  do SA conforme mencionado acima, onde  $G'$  é um multigrafo, então  $M(uu_0^e) = M(v_0^e v)$  e  $M(u_0^e u_1^e) = M(v_2^e v_0^e)$  para todo  $e \in E(G')$ .*

*Demonstração.* Seja  $S = \{u_0^e, u_1^e, u_2^e, v_0^e, v_1^e, v_2^e\}$  e  $R = \{u_0^e u_1^e, u_0^e u_2^e, u_1^e v_2^e, u_2^e v_1^e, v_0^e v_1^e, v_0^e v_2^e\}$ . Pela construção de  $I$ , temos que  $s(w) = \pi'(uv)$ , para todo  $w \in S$ , e  $\pi(f) = \pi'(uv)$ , para toda aresta  $f \in R$ . Como  $M$  é uma alocação estável para  $I$ , então toda aresta  $e \in E(G)$

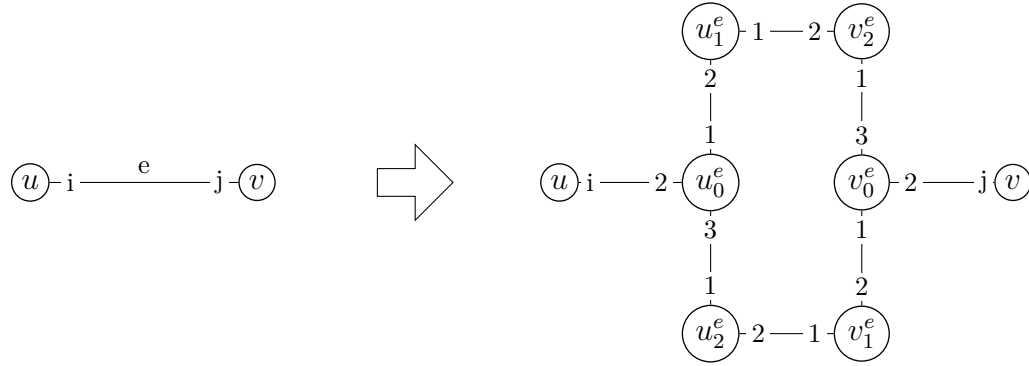


Figura 5.7: Estrutura utilizada para reduzir uma instância do SA que contém arestas paralelas para uma que não contém

ou está saturada por  $M$  ou está dominada por  $M$  em um dos seus extremos. Logo, temos que  $M(\delta(w)) = \pi'(uv)$  para todo  $w \in S$ . Com isso, temos o sistema linear

$$\begin{aligned} M(uu_0^e) + M(u_0^e u_1^e) + M(u_0^e u_2^e) &= \pi'(uv) \\ M(u_0^e u_1^e) + M(u_1^e v_2^e) &= \pi'(uv) \\ M(u_1^e v_2^e) + M(v_0^e v_2^e) &= \pi'(uv) \\ M(v_0^e v) + M(v_0^e v_1^e) + M(v_0^e v_2^e) &= \pi'(uv) \\ M(u_2^e v_1^e) + M(v_0^e v_1^e) &= \pi'(uv) \\ M(u_0^e u_2^e) + M(u_2^e v_1^e) &= \pi'(uv), \end{aligned}$$

cujas soluções é

$$\begin{aligned} M(uu_0^e) &= M(v_0^e v) \\ M(v_0^e v_1^e) &= M(u_0^e u_2^e) = \pi'(uv) - M(u_0^e u_1^e) - M(v_0^e v) \\ M(u_2^e v_1^e) &= M(u_0^e u_1^e) + M(v_0^e v) \\ M(u_0^e u_1^e) &= M(v_0^e v_2^e) \\ M(u_1^e v_2^e) &= \pi'(uv) - M(u_0^e u_1^e). \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.23.** *Seja  $I' = (G', O', s', \pi')$  uma instância do SA, onde  $G'$  é um multigrafo, e  $I = (G, O, s, \pi)$  a instância do SA gerada conforme descrito anteriormente. Se  $M$  é uma alocação estável para  $I$ , então  $M'$  tal que  $M'(e) = M(uu_0^e)$  para toda aresta  $e = uv \in E(G')$  é uma alocação estável para  $I'$ .*

*Demonstração.* Não é difícil perceber que  $M'$  é uma alocação para  $I'$ . Para mostrar que

$M'$  é estável, basta provar que toda aresta  $e \in E(G')$  está ou saturada ou dominada por  $M'$ . Seja  $e = uv \in E(G')$ . Se  $M'(e) = \pi'(e)$ , a prova segue. Suponha agora que  $M'(e) < \pi'(e)$ . Como  $M'(uv) = M(uu_0^e) = M(v_0^e v) < \pi(uu_0^e) = \pi'(uv)$  e  $M$  é estável para  $I$ , temos que  $uu_0^e$  deve ser dominada em um dos seus extremos por  $M$ . Suponha que  $uu_0^e$  é dominada em  $u$  por  $M$ . Então,  $M((u, (uu_0^e)^\succeq)) = M'((u, e^\succeq)) = \pi'(e)$ . Logo, temos que  $e$  é dominada em  $u$  por  $M'$ . Suponha agora que  $uu_0^e$  é dominada por  $M$  em  $u_0^e$ . Sabemos que  $M(u_0^e u_1^e) > 0$ , pois  $M(uu_0^e) < \pi'(e)$ . Pelo Lema 5.8, temos que  $M(u_0^e u_1^e) = M(v_0^e v_2^e)$  e  $M(uu_0^e) = M(v_0^e v)$ . Pelo fato de  $M(v_0^e v) < \pi'(v_0^e v)$ ,  $M(v_0^e v_2^e) > 0$  e  $v_0^v \succ_{v_0^e} v_0^e v_2^e$ , temos que a aresta  $v_0^e v$  deve ser dominada em  $v$  por  $M$ , ou seja,  $M((v, (v_0^e v)^\succeq)) = s(v) = M'((v, e^\succeq))$  e, assim, temos que  $e$  é dominada em  $v$  por  $M'$ .  $\square$

Como para cada aresta  $e \in E(G')$  é adicionado um número constante de arcos e vértices temos que a complexidade de tempo dessa redução é  $O(|E(G')|)$ .

Veremos agora uma redução do SF para o SA, que foi originalmente apresentada por Fleiner [16] e que permitiu concluir que toda instância do SF possui um fluxo estável. Vamos construir uma instância  $I' = (G', L', s', \pi')$  do SA a partir de uma instância  $I = (D, L, s, t, \pi)$  do SF conforme descrito a seguir. Para cada vértice  $v \in V(D)$ , calcule

$$T(v) = \min \left( \sum_{xv \in A(D)} \pi(xv), \sum_{(vx) \in A(D)} \pi(vx) \right),$$

isto é,  $T(v)$  é o mínimo da capacidade total dos arcos de entrada e saída e, portanto, é um limitante superior da quantidade de fluxo que pode circular pelo vértice  $v$ . Vamos definir  $q(v) = T(v) + 1$  para qualquer  $v \in V(D)$ .

Para cada vértice  $v \in V(D)$  adicione os vértices  $v^{\mathcal{I}}$  e  $v^{\mathcal{J}}$  a  $V(G')$ . Para cada arco  $uv \in A(D)$  adicione as arestas  $u^{\mathcal{J}} v^{\mathcal{I}}$  a  $E(G')$ . Para cada vértice  $v \in V(G') \setminus \{s, t\}$  adicione duas arestas paralelas ligando  $v^{\mathcal{I}}$  a  $v^{\mathcal{J}}$  (para distinguirmos entre elas, chamaremos uma de  $v^{\mathcal{I}} v^{\mathcal{J}}$  e a outra de  $v^{\mathcal{J}} v^{\mathcal{I}}$ ). Seja  $\pi'(v^{\mathcal{I}} v^{\mathcal{J}}) = \pi'(v^{\mathcal{J}} v^{\mathcal{I}}) = q(v)$ ,  $\pi'(u^{\mathcal{J}} v^{\mathcal{I}}) = \pi(uv)$  e  $s'(v^{\mathcal{I}}) = s'(v^{\mathcal{J}}) = q(v)$ . Construimos as listas de preferências que formam o conjunto  $L'$  da seguinte maneira. Para cada vértice  $u^{\mathcal{J}}$  temos que uma aresta  $u^{\mathcal{J}} v^{\mathcal{I}}$  precede uma aresta  $u^{\mathcal{J}} w^{\mathcal{I}}$  na lista de preferências de  $u^{\mathcal{J}}$  se e somente se o arco  $uv$  precede o arco  $uw$  na lista de preferências de saída do vértice  $u$ . Além disso, temos que para qualquer aresta  $e$  incidente ao vértice  $u^{\mathcal{J}}$ ,  $u^{\mathcal{J}} u^{\mathcal{I}} \succ_{u^{\mathcal{J}}} e$  e  $e \succ_{u^{\mathcal{J}}} u^{\mathcal{I}} u^{\mathcal{J}}$ . Para cada vértice  $u^{\mathcal{I}}$  temos que uma aresta  $v^{\mathcal{J}} u^{\mathcal{I}}$  precede uma aresta  $w^{\mathcal{J}} u^{\mathcal{I}}$  na lista de preferências de  $u^{\mathcal{I}}$  se e somente se o arco  $vu$  precede o arco  $wu$  na lista de preferências de entrada do vértice  $u$ . Além disso, temos que para qualquer aresta  $e$  incidente ao vértice  $u^{\mathcal{I}}$ ,  $u^{\mathcal{I}} u^{\mathcal{J}} \succ_{u^{\mathcal{I}}} e$  e  $e \succ_{u^{\mathcal{I}}} u^{\mathcal{J}} u^{\mathcal{I}}$ .

**Lema 5.9.** *Seja  $I = (D, L, s, t, \pi)$  uma instância do SF e  $I' = (G', L', s', \pi')$  a instância do SA construída segundo as instruções acima. Então,  $f$  é um fluxo estável para  $I$  se e*

somente se  $M$  é uma alocação estável para  $I'$  tal que  $f(uv) = M(u^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}})$  vale para cada arco  $uv \in A(D)$ .

*Demonstração.* Seja  $M'$  uma alocação estável em  $G'$ . Então, nenhuma das arestas  $v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}$  representa um par bloqueante. Logo, ou  $M'(v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}) = \pi'(v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}) = q(v)$  ou  $v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}$  deve ser dominada em  $v^{\mathcal{J}}$ . No primeiro caso, temos que  $v^{\mathcal{I}}$  e  $v^{\mathcal{J}}$  têm uma alocação no valor de  $s'(v^{\mathcal{I}}) = s'(v^{\mathcal{J}}) = q(v)$ . No segundo caso, claramente  $v^{\mathcal{J}}$  é alocado por uma quantidade  $s'(v^{\mathcal{J}})$  de tempo e  $v^{\mathcal{I}}$  é alocado por uma quantidade  $s'(v^{\mathcal{I}})$  de tempo, caso contrário a aresta  $v^{\mathcal{J}}v^{\mathcal{I}}$  bloquearia a alocação. Isto garante que a lei de Kirchhoff vale para  $f$  em todo vértice diferente de  $s$  e de  $t$ . A condição de capacidade é satisfeita trivialmente e, assim, temos que  $f$  é um fluxo para  $I$ . Observe que, pela maneira que escolhemos  $q$ , os vértices  $s^{\mathcal{I}}$ ,  $s^{\mathcal{J}}$ ,  $t^{\mathcal{I}}$  e  $t^{\mathcal{J}}$  não são saturados e, assim, nenhuma aresta é dominada neles.

Suponha por contradição que o caminho  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  bloqueia o fluxo  $f$ . Como  $P$  é insaturado em  $f$ , cada aresta  $v_i^{\mathcal{J}}v_{i+1}^{\mathcal{I}}$  de  $G'$  deve ser dominada em  $v_i^{\mathcal{J}}$  ou em  $v_{i+1}^{\mathcal{I}}$  por  $M'$ . Se  $P$  bloqueia  $f$ , então ou  $v_1 \in \{s, t\}$  ou existe um arco  $v_1u$  com fluxo positivo tal que  $v_1v_2 \succ_{v_1}^{out} v_1u$ . Em ambos os casos, a aresta  $v_1^{\mathcal{J}}v_2^{\mathcal{I}}$  tem que ser dominada em  $v_2^{\mathcal{I}}$  por  $M'$ , o que implica que  $M'(v_1^{\mathcal{J}}v_2^{\mathcal{I}}) > 0$ . Como o arco  $v_2v_3$  é insaturado em  $f$ , segue que  $v_2^{\mathcal{J}}v_3^{\mathcal{I}}$  deve ser dominado em  $v_3^{\mathcal{I}}$  por  $M'$ , o que implica que  $M'(v_2^{\mathcal{J}}v_3^{\mathcal{I}}) > 0$ . Temos então que o arco  $v_3v_4$  é insaturado em  $f$ . Então, a aresta  $v_3^{\mathcal{J}}v_4^{\mathcal{I}}$  tem que ser dominada em  $v_4^{\mathcal{I}}$  por  $M'$  e assim por diante. No final temos que  $v_{k-1}^{\mathcal{J}}v_k^{\mathcal{I}}$  é dominada em  $v_k^{\mathcal{I}}$  por  $M'$ . Sabemos que  $v_k \notin \{s, t\}$ , pois  $s$  e  $t$  são insaturados em  $M'$ . Pela definição de caminho bloqueante, deve existir um arco  $wv_k$  com fluxo positivo e  $v_{k-1}v_k \succ_{v_k}^{in} wv_k$ , o que faz com que  $v_{k-1}^{\mathcal{J}}v_k^{\mathcal{I}}$  não possa ser dominada em  $v_k^{\mathcal{I}}$  por  $M'$ . Temos então que nenhum caminho bloqueia  $f$ .

Inversamente, seja  $f$  um fluxo estável de  $I$ . Vamos construir uma alocação estável para  $I'$  a partir de  $f$ . Nosso único trabalho é em determinar os valores de  $M'(v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}})$  e  $M'(v^{\mathcal{J}}v^{\mathcal{I}})$ , pois os outros valores são determinados diretamente por  $f$ , de forma que  $M'(u^{\mathcal{J}}v^{\mathcal{I}}) = f(uv)$ . Seja  $S$  o conjunto de vértices  $u \in V(D)$  tais que existe um caminho  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k = u)$  insaturado em  $f$  e que não é dominado em  $v_1$  por  $f$ . Como  $f$  é estável, temos que  $s, t \notin S$ . Para determinar  $M'$  para cada vértice  $v \neq s, t$ , atribua o restante de  $q(v)$  a  $v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}$  ou a  $v^{\mathcal{J}}v^{\mathcal{I}}$ , de acordo com o fato de  $v$  pertencer ou não a  $S$ . Faça a atribuição da seguinte forma:

$$M'(v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}) = \begin{cases} q(v) - \sum_{x \in V(D)} f(vx) & \text{se } v \in S \\ 0 & \text{se } v \notin S \end{cases} \quad (5.1)$$

$$M'(v^{\mathcal{J}}v^{\mathcal{I}}) = \begin{cases} q(v) - \sum_{x \in V(D)} f(xv) & \text{se } v \notin S \\ 0 & \text{se } v \in S \end{cases} \quad (5.2)$$

Pela definição de  $q$ , ambos  $M'(v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}})$  e  $M'(v^{\mathcal{J}}v^{\mathcal{I}})$  são não negativos. Assim, se  $v \neq s, t$ ,

a alocação total de  $v^{\mathcal{I}}$  e  $v^{\mathcal{J}}$  é  $q(v)$ , pela lei de Kirchhoff. O valor total de  $s^{\mathcal{I}}$ ,  $s^{\mathcal{J}}$  e  $t^{\mathcal{I}}$ ,  $t^{\mathcal{J}}$  é menor do que  $q(s)$  e  $q(t)$ , respectivamente, pela escolha de  $q$ . Assim, temos que  $M'$  é uma alocação para  $G'$ .

Agora vamos mostrar que  $M'$  é estável. Suponha que  $M'(v^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}) < \pi'(v^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}) = \pi(vu)$  vale. Se existe um caminho  $P$  insaturado em  $f$  que não é dominado por  $f$  em seu vértice inicial e termina no arco  $vu$ , então  $u \in S$  e, assim,  $M'(u^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}) = 0$ . Se alguma aresta  $w^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}$ , tal que  $v^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}} \succ_{u^{\mathcal{I}}} w^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}$ , tem uma alocação positiva, então  $P$  bloquearia  $f$ , contrariando a sua estabilidade. Como  $u^{\mathcal{I}}$  está alocada por uma quantidade  $s'(u^{\mathcal{I}})$  de tempo, a aresta  $v^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}$  é dominada em  $u^{\mathcal{I}}$  por  $M'$ . O último caso é quando todo caminho insaturado em  $f$  que termina no arco  $vu$  é dominado no seu vértice inicial por  $f$ . Temos então que  $v \notin S$  e  $M'(v^{\mathcal{I}}v^{\mathcal{J}}) = 0$ . Além disso, o caminho  $vu$  deve ser dominado em  $v$  por  $f$ . Assim,  $v \notin \{s, t\}$  e  $v^{\mathcal{J}}u^{\mathcal{I}}$  é dominado em  $v^{\mathcal{J}}$  por  $M'$  e temos que  $M'$  é uma alocação estável para  $I'$ .  $\square$

**Teorema 5.24.** *Seja  $I$  uma instância do SF. Então, sempre existe um fluxo estável  $f$ . Se a função de capacidade da rede  $\pi$  é inteira, então existe um fluxo estável inteiro.*

*Demonstração.* Seja  $I'$  uma instância para o SA gerada conforme mencionado anteriormente. Existe uma alocação estável para o  $I'$ , pelo Teorema 5.11, e, assim, existe um fluxo estável para  $I$ . Se  $\pi$  é inteira, então  $s'(v^{\mathcal{I}})$ ,  $s'(v^{\mathcal{J}})$  e  $\pi'$  também são. Assim,  $I'$  é uma instância discreta e, pelo Teorema 5.10, existe uma alocação estável inteira  $M$  em  $I'$  que descreve um fluxo estável inteiro  $f$  em  $I$ .  $\square$

## 5.4 Resumo Geral do Capítulo

Neste capítulo, vimos os problemas do Casamento Estável Poligâmico (MM), Alocação Estável (SA) e Fluxo Estável (SF). A Figura 5.8 apresenta a relação entre tais problemas juntamente com o SM, HR, SMI, SMT, HRT e SMTI.

Dois dos três problemas apresentados não são exatamente sobre emparelhamentos estáveis, mas possuem uma relação muito próxima com os outros problemas. Para cada problema, apresentamos os resultados principais existentes e mostramos como podemos encontrar uma solução para uma dada instância.

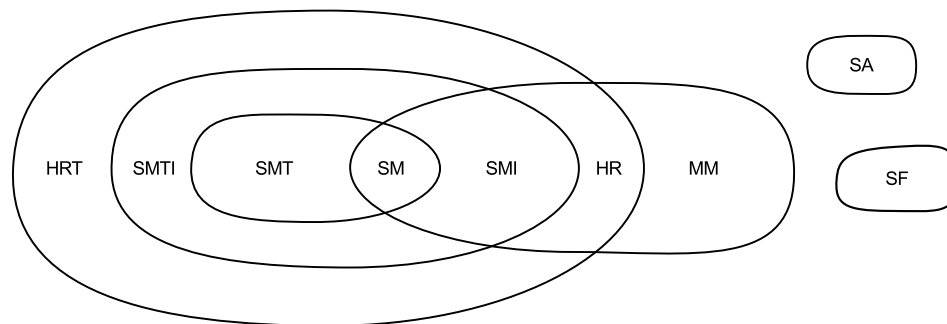


Figura 5.8: Hierarquia de generalizações dos problemas SM, HR, SMI, SMT, HRT, SMTI, MM, SA e SF





# Capítulo 6

## Conclusões

O produto final desse trabalho de mestrado foi um *survey* atualizado e em português dos problemas de emparelhamentos estáveis. Ele permite que estudiosos de outras áreas possam ter acesso à uma única fonte de conteúdo que mantém os principais resultados dessa área e, conseqüentemente, facilita a compreensão de tais resultados.

Todos os algoritmos apresentados possuem pseudo-códigos e exemplos de execuções passo a passo. Todas as notações foram padronizadas e algumas das provas apresentadas também foram reescritas para se adaptar a essas modificações.

Os tópicos discutidos foram apresentados da forma mais completa possível, mesmo considerando que nos limitamos a problemas bipartidos apenas (com exceção do SF que, no entanto, possui uma redução para um problema bipartido).

Com relação a trabalhos futuros, entendemos que várias direções podem existir. Os problemas descritos a seguir apresentam algumas delas.

**Problema 6.1.** *Existe um algoritmo razoável para gerar todos os emparelhamentos fracamente estáveis de uma instância do SMT?*

**Problema 6.2.** *Existe uma relação binária  $\vdash$  sobre os elementos do conjunto de emparelhamentos fracamente estáveis  $\mathcal{M}$  de uma instância do SMT tal que  $(\mathcal{M}, \vdash)$  forma um reticulado distributivo?*

**Problema 6.3.** *Dada uma instância do SMT sob o critério da estabilidade forte, existe um algoritmo de tempo polinomial para:*

- *encontrar um emparelhamento fortemente estável de arrependimento mínimo?*
- *encontrar um emparelhamento fortemente estável igualitário?*

**Problema 6.4.** *Dada uma instância do SMT sob o critério da estabilidade forte, existe um algoritmo razoável para listar todos os emparelhamento estáveis?*

**Problema 6.5.** *Dean et al. [10] mostraram que sempre existe uma alocação estável não preemptiva onde cada máquina está congestionada por um valor máximo de  $\max\{s(i) : i \in \mathcal{I}\}$ . Uma questão que permanece sem resposta é se seriam as mesmas máquinas que estão congestionadas em qualquer alocação estável. Se sim, elas estão congestionadas pela mesma quantidade em qualquer alocação? Se sim, elas são alocadas às mesmas tarefas em qualquer alocação estável?*

**Problema 6.6.** *Investigar o problema de alocação estável permitindo indiferença nas listas de preferências.*

**Problema 6.7.** *A ideia geral por trás da estabilidade sempre foi encontrar uma configuração na qual os agentes não tenham incentivos para modificá-la. Porém, a noção de estabilidade dada na Definição 5.8 para uma instância do SF possui uma vulnerabilidade: dado um fluxo estável  $f$  para uma instância  $I$  do SF, se  $D$  possuir um circuito orientado  $C$  onde todos os arcos de  $A(C)$  são insaturados em  $f$ , então é possível que os vértices de  $V(C)$  aumentem o fluxo  $f$  utilizando esse circuito. Dizemos que um fluxo  $f$  é **completamente estável** se  $f$  é estável e não possui nenhum circuito orientado insaturado. O processo de aumentar o fluxo de um circuito  $C$  insaturado até que um arco desse circuito se torne saturado pode gerar um caminho bloqueante. De fato, existem instâncias que não admitem um fluxo completamente estável.*

*Assim, temos o seguinte problema: dada uma instância  $I$  do SF, é possível determinar em tempo polinomial se  $I$  admite um fluxo completamente estável?*

**Problema 6.8.** *Existe um algoritmo de tempo polinomial para encontrar um fluxo estável ao longo do tempo?*

**Problema 6.9.** *O problema de encontrar um fluxo de multiprodutos estável para uma instância do SMF permanece PPAD-difícil mesmo se a quantidade de produtos de  $L$  for limitado por uma constante?*

Problemas de estabilidade em fluxo de redes são recentes e provavelmente existirão várias publicações na área nos próximos anos. Ainda há muitos resultados de problemas em emparelhamentos estáveis que não possuem um resultado para o problema de fluxos, tais como aqueles envolvendo justiça ou resultados estruturais como rotações e reticulado. Além disso, até o momento, não foi publicado nenhum estudo que aborde problema de fluxos em rede permitindo indiferença na lista de preferências.

# Referências Bibliográficas

- [1] Japan Residency Matching Program. <http://www.jrmp.jp/>. Acesso: 29/03/2014.
- [2] National Resident Matching Program. <http://www.nrmp.org/>. Acesso: 29/03/2014.
- [3] Scottish Foundation Allocation Scheme. <http://www.nes.scot.nhs.uk/sfas>. Acesso: 29/03/2014.
- [4] Mourad Baiou e Michel Balinski. Many-to-many Matching: Stable Polyandrous Polygamy (or Polygamous Polyandry). *Discrete Applied Mathematics*, 101(1-3):1–12, 2000.
- [5] Mourad Baiou e Michel Balinski. Erratum: The Stable Allocation (or Ordinal Transportation) Problem. *Mathematics of Operations Research*, 27(4):662–680, 2002.
- [6] Vipul Bansal, Aseem Agrawal, e Varun S. Malhotra. Polynomial Time Algorithm for an Optimal Stable Assignment with Multiple Partners. *Theoretical Computer Science*, 379(3):317–328, 2007.
- [7] Ágnes Cseh, Jannik Matuschke, e Martin Skutella. Stable Flows over Time. In *MATCH-UP 2012: the Second International Workshop on Matching Under Preferences*, page 63, 2012.
- [8] Marilda Antonia de Oliveira Sotomayor. Three Remarks on the Many-to-many Stable Matching Problem. *Mathematical Social Sciences*, 38(1):55–70, 1999.
- [9] Brian C. Dean e Siddharth Munshi. Faster Algorithms for Stable Allocation Problems. *Algorithmica*, 58:59–81, 2010. ISSN 0178-4617.
- [10] Brian C. Dean, Michel X. Goemans, e Nicole Immorlica. The Unsplittable Stable Marriage Problem. In Gonzalo Navarro, Leopoldo Bertossi, e Yoshiharu Kohayakawa, editors, *Fourth IFIP International Conference on Theoretical Computer Science-TCS 2006*, volume 209 of *IFIP International Federation for Information Processing*, pages 65–75. Springer US, 2006.

- [11] Brian C. Dean, Michel X. Goemans, e Nicole Immorlica. Finite Termination of “Augmenting Path” Algorithms in the Presence of Irrational Problem Data. In Yossi Azar e Thomas Erlebach, editors, *Algorithms – ESA 2006*, volume 4168 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 268–279. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [12] Federico Echenique e Jorge Oviedo. A Theory of Stability in Many-to-many Matching Markets. *Theoretical Economics*, 1(2):233–273, 2006.
- [13] Pavlos Eirinakis, Dimitrios Magos, Ioannis Mourtos, e Panayiotis Miliotis. Finding All Stable Pairs and Solutions to the Many-to-Many Stable Matching Problem. *INFORMS Journal on Computing*, 24(2):245–259, 2012.
- [14] Tomás Feder. A New Fixed Point Approach for Stable Networks and Stable Marriages. *Journal of Computer and System Sciences*, 45(2):233–284, 1992.
- [15] Tamás Fleiner. On the Stable B-matching Polytope. *Mathematical Social Sciences*, 46(2):149–158, 2003.
- [16] Tamás Fleiner. On Stable Matchings and Flows. Technical Report TR-2009-11, Egerváry Research Group, Budapest, 2009.
- [17] Tamás Fleiner. On Stable Matchings and Flows. In Dimitrios Thilikos, editor, *Graph Theoretic Concepts in Computer Science*, volume 6410 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 51–62. Springer Berlin / Heidelberg, 2010.
- [18] David Gale e Lloyd Stowell Shapley. College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.
- [19] Dan Gusfield. Three Fast Algorithms for Four Problems in Stable Marriage. *SIAM Journal on Computing*, 16(1):111–128, 1987.
- [20] Dan Gusfield e Robert W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Foundations of Computing. MIT Press, 1989.
- [21] Philip Hall. On Representatives of Subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, 1-10(1):26–30, 1935.
- [22] Magnús Halldórsson, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Yasufumi Morita. Inapproximability Results on Stable Marriage Problems. In *LATIN 2002: Theoretical Informatics*, pages 554–568. Springer, 2002.

- [23] Magnús M. Halldórsson, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Hiroki Yanagisawa. Improved Approximation of the Stable Marriage Problem. In Giuseppe Battista e Uri Zwick, editors, *Algorithms - ESA 2003*, volume 2832 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 266–277. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [24] Magnús M. Halldórsson, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Hiroki Yanagisawa. Randomized Approximation of the Stable Marriage Problem. *Theoretical Computer Science*, 325:439–465, 2004.
- [25] Joseph Douglas Horton e Kyriakos Kilakos. Minimum Edge Dominating Sets. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(3):375–387, 1993.
- [26] Robert W. Irving. Stable Marriage and Indifference. *Discrete Applied Mathematics*, 48(3):261–272, 1994.
- [27] Robert W. Irving e Paul Leather. The Complexity of Counting Stable Marriages. *SIAM Journal on Computing*, 15(3):655–667, 1986.
- [28] Robert W. Irving e David F. Manlove. Approximation Algorithms for Hard Variants of the Stable Marriage and Hospitals/residents Problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 16:279–292, 2008.
- [29] Robert W. Irving e David F. Manlove. Finding Large Stable Matchings. *J. Exp. Algorithmics*, 14:2:1.2–2:1.30, 2010.
- [30] Robert W. Irving, Paul Leather, e Dan Gusfield. An Efficient Algorithm for the “Optimal” Stable Marriage. *Journal of the ACM*, 34(3):532–543, 1987.
- [31] Robert W. Irving, David F. Manlove, e Sandy Scott. The Hospitals/Residents Problem with Ties. In *Proceedings of the 7th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT’2000)*, pages 259–271, London, UK, UK, 2000. Springer-Verlag.
- [32] Robert W. Irving, David F. Manlove, e Sandy Scott. Strong Stability in the Hospitals/Residents Problem. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS’2003)*, pages 439–450, London, UK, UK, 2003. Springer-Verlag.
- [33] Robert W. Irving, David F. Manlove, e Sandy Scott. The Stable Marriage Problem with Master Preference Lists. *Discrete Applied Mathematics*, 156(15):2959–2977, 2008.

- [34] Robert W. Irving, David F. Manlove, e Gregg O'Malley. Stable Marriage with Ties and Bounded Length Preference Lists. *Journal of Discrete Algorithms*, 7(2):213–219, 2009.
- [35] K. Iwama e S. Miyazaki. A survey of the stable marriage problem and its variants. In *Proceedings of the International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society (ICKS'2008)*, pages 131–136, Washington, DC, USA, 2008. IEEE Computer Society.
- [36] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Kazuya Okamoto. A  $(2 - c^{\frac{\log N}{N}})$ -Approximation Algorithm for the Stable Marriage Problem. In Torben Hagerup e Jyrki Katajainen, editors, *Algorithm Theory - SWAT 2004*, volume 3111 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 349–361. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [37] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Naoya Yamauchi. A  $(2 - c^{\frac{1}{\sqrt{N}}})$ -Approximation Algorithm for the Stable Marriage Problem. In Xiaotie Deng e Ding-Zhu Du, editors, *Algorithms and Computation*, volume 3827 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 902–914. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [38] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Naoya Yamauchi. A 1.875-Approximation Algorithm for the Stable Marriage Problem. In *Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'2007)*, pages 288–297, Philadelphia, PA, USA, 2007. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [39] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Hiroki Yanagisawa. A 25/17-Approximation Algorithm for the Stable Marriage Problem with One-Sided Ties. In Mark Berg e Ulrich Meyer, editors, *Algorithms – ESA 2010*, volume 6347 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 135–146. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [40] Akiko Kato. Complexity of the Sex-equal Stable Marriage Problem. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):1–19, 1993.
- [41] Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, Dimitrios Michail, e Katarzyna E. Paluch. Strongly Stable Matchings in Time  $O(nm)$  and Extension to the Hospitals-residents Problem. *ACM Transactions on Algorithms*, 3(2), 2007.
- [42] Tamás Király e Júlia Pap. Stable Multicommodity Flows. *Algorithms*, 6(1):161–168, 2013.
- [43] Zoltán Király. Better and Simpler Approximation Algorithms for the Stable Marriage Problem. In Dan Halperin e Kurt Mehlhorn, editors, *Algorithms - ESA 2008*,

- volume 5193 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 623–634. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [44] Zoltán Király. Linear Time Local Approximation Algorithm for Maximum Stable Marriage. *Algorithms*, 6(3):471–484, 2013.
- [45] Donald Ervin Knuth. *Mariages Stables et leurs Relations avec D’autres Problèmes Combinatoires: Introduction à L’analyse Mathématique des Algorithmes*. Collection de la Chaire Aisenstadt. Presses de l’Université de Montréal, 1976.
- [46] Fuhito Kojima e M. Utku Ünver. Random Paths to Pairwise Stability in Many-to-many Matching Problems: a Study on Market Equilibration. *International Journal of Game Theory*, 36(3-4):473–488, 2008.
- [47] Jr. Lester Randolph Ford e Delbert Ray Fulkerson. Constructing Maximal Dynamic Flows from Static Flows. *Operations Research*, 6(3):419–433, 1958.
- [48] Varun S. Malhotra. On the Stability of Multiple Partner Stable Marriages with Ties. In Susanne Albers e Tomasz Radzik, editors, *Algorithms – ESA 2004*, volume 3221 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 508–519. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [49] David F. Manlove. Stable Marriage with Ties and Unacceptable Partners. Technical Report TR-1999-29, University of Glasgow, Department of Computing Science, 1999.
- [50] David F. Manlove. The Structure of Stable Marriage with Indifference. *Discrete Applied Mathematics*, 122(1-3):167–181, 2002.
- [51] David F. Manlove. *Algorithmics of Matching Under Preferences*. Series on Theoretical Computer Science. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [52] David F. Manlove, Robert W. Irving, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Yasufumi Morita. Hard Variants of Stable Marriage. Technical Report TR-1999-43, University of Glasgow, School of Computing Science, 1999.
- [53] David F. Manlove, Robert W. Irving, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, e Yasufumi Morita. Hard Variants of Stable Marriage. *Theoretical Computer Science*, 276(1-2): 261–279, 2002.
- [54] Ruth Martínez, Jordi Massó, Alejandro Neme, e Jorge Oviedo. An Algorithm to Compute the Full Set of Many-to-many Stable Matchings. *Mathematical Social Sciences*, 47(2):187–210, 2004.

- [55] Eric McDermid. A  $3/2$ -Approximation Algorithm for General Stable Marriage. In Susanne Albers, Alberto Marchetti-Spaccamela, Yossi Matias, Sotiris Nikolettseas, e Wolfgang Thomas, editors, *Automata, Languages and Programming*, volume 5555 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 689–700. Springer Berlin / Heidelberg, 2009.
- [56] Cheng Ng e Daniel S. Hirschberg. Lower Bounds for the Stable Marriage Problem and its Variants. *SIAM Journal on Computing*, 19(1):71–77, 1990.
- [57] Katarzyna Paluch. Faster and Simpler Approximation of Stable Matchings. In Roberto Solis-Oba e Giuseppe Persiano, editors, *Approximation and Online Algorithms*, volume 7164 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 176–187. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [58] Alvin Elliot Roth. The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory. *Journal of Political Economy*, 92(6):991, 1984.
- [59] Canadian Resident Matching Service. The Match Algorithm. <http://www.carms.ca/>. Acesso: 29/03/2014.
- [60] Georgios K. Stathopoulos. Variants of Stable Marriage Algorithms, Complexity and Structural Properties. Master’s thesis, University of Athens, 2011.
- [61] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2001. ISBN 9780130144003.
- [62] Hong Xu e Baochun Li. Egalitarian Stable Matching for VM Migration in Cloud Computing. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS’2011)*, pages 631–636, 2011.
- [63] Hiroki Yanagisawa. *Approximation Algorithms for Stable Marriage Problems*. PhD thesis, Informatics Kyoto University, 2007.
- [64] Mihalis Yannakakis e Fanica Gavril. Edge Dominating Sets in Graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(3):364–372, 1980.