



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Química

DANIEL MARTINS SILVA

**CONTROLADOR PREDITIVO ECONÔMICO  
COM APROXIMAÇÃO LINEAR DA FUNÇÃO  
ECONÔMICA**

Campinas

2018

DANIEL MARTINS SILVA

**CONTROLADOR PREDITIVO ECONÔMICO  
COM APROXIMAÇÃO LINEAR DA FUNÇÃO  
ECONÔMICA**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Química da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientadora: Luz Adriana Alvarez Toro

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À  
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO DANIEL  
MARTINS SILVA E ORIENTADA PELA  
PROFA. DRA. LUZ ADRIANA ALVAREZ  
TORO.

Campinas

2018

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** FAPESP, 16/22075-0

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-3404-9956>

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

Si38c Silva, Daniel Martins, 1993-  
Controle preditivo econômico com aproximação linear da função econômica /  
Daniel Martins Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Luz Adriana Alvarez Toro.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade  
de Engenharia Química.

1. Controle preditivo. 2. Otimização. 3. Controle de processos químicos. 4.  
Tempo real (Sistema operacional). I. Alvarez Toro, Luz Adriana, 1982-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Química. III.  
Título.

#### Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Economic model predictive control with a linear approximation of the economic function

**Palavras-chave em inglês:**

Predictive control

Optimization

Control of chemical processes

Real time (Operating system)

**Área de concentração:** Engenharia Química

**Titulação:** Mestre em Engenharia Química

**Banca examinadora:**

Luz Adriana Alvarez Toro [Orientador]

Flávio Vasconcelos da Silva

Darci Odloak

**Data de defesa:** 08-11-2018

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Química

Tese de doutorado defendida por **Daniel Martins Silva** e aprovada em **08 de novembro de 2018** pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Profa. Dra. Luz Adriana Alvarez Toro - Presidente  
Faculdade de Engenharia Química – UNICAMP

Prof. Dr. Flávio Vasconcelos da Silva  
Faculdade de Engenharia Química – UNICAMP

Prof. Dr. Darci Odloak  
Escola Politécnica – USP

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

## **AGRADECIMENTOS**

À Profa. Luz Alvarez por me introduzir ao conceito de controle preditivo, me orientar em todo o desenvolvimento desta dissertação e por toda a compreensão e paciência que teve comigo em meus momentos de dificuldade.

Aos Professores Darci Odloak e Flávio Vasconcelos da Silva por aceitarem ser membros de minha banca examinadora e, conseqüentemente, reservarem um pouco de seu tempo para ler e discutir sobre a minha dissertação.

À minha família por sempre me encorajar e me apoiar sempre.

Às agências de fomento FAPESP (Proc. 16/22075-0) e FAEPEX/PRP/Unicamp (Proc. 2638-17) pelo apoio financeiro.

## Resumo

O propósito desta dissertação é desenvolver um controlador preditivo econômico baseado em modelo (EMPC) com baixo tempo de execução sem perda significativa de desempenho econômico. O baixo esforço computacional é obtido pela sua formulação quadrática com os termos reguladores do controlador acrescidos por uma aproximação linear da função econômica, cujos coeficientes angulares são recalculados a cada execução. A inserção das propriedades econômicas em um MPC pelo gradiente da função econômica é uma estratégia conhecida dentro da linha de pesquisa sobre EMPC's que permite negligenciar as restrições não lineares causadas por essa função. O uso de uma aproximação da função econômica, entretanto, permite ao controlador convergir a soluções subótimas como resultado de diferentes soluções mínimas entre a função econômica original e a simplificada. A diferenciação entre as soluções ótimas e subótimas é feita tanto pela resolução numérica do problema econômico quanto pela comparação com os resultados de uma estratégia de controle que contenha esse problema. O fato de o controlador proposto não convergir sempre à solução ótima não inviabiliza a sua aplicação, pois ele resulta de uma aproximação que traz ganho de esforço computacional. Isso é verificado nos gráficos das simulações presentes nesse documento, onde o controlador proposto convergiu à solução ótima na maioria dos subcenários e apresentou tempo de execução, geralmente, menor que o dos demais controladores implementados.

O controlador proposto tem garantia de viabilidade recursiva dentre os requisitos estipulados pelo critério de estabilidade de Lyapunov. Todas as suas simulações, entretanto, apresentaram estabilidade assintótica e convergência, o que indica uma possível existência de tais propriedades. Além do controlador proposto, três outros controladores foram implementados para a análise do desempenho econômico e do esforço computacional. Eles permitiram comparar o desempenho econômico e o esforço computacional do controlador proposto com um EMPC não linear e uma estratégia de controle robusta. Três casos de estudo presentes em artigos da literatura sobre EMPC foram simulados diversas vezes sob diferentes fontes de incerteza para a realização de tais análises.

## **Abstract**

The aim of this dissertation is to develop an economic model predictive control (EMPC) with low computational time while keeping a decent economic performance. The first is obtained by a quadratic formulation composed by regulatory terms and a linear approximation from the economic function. The partial derivatives of the economic function are calculated with the measured variables at each discrete time in order to obtain such approximation. The use of a gradient-based strategy to insert economic properties inside a MPC problem is a well-known line of research that enables the disregard of the nonlinear economic constraints. This approach, however, can only guarantee convergence to suboptimal solutions because the economic optimal solution between the original and the approximated formulations may differ. The suboptimal solutions are identified either by numerical solution of a nonlinear economic problem or analysis of the steady-state achieved by a control strategy solving it. The lack of guarantee of convergence to the optimal solution does not make the proposed controller inapplicable, as it is a consequence of reducing the computational burden. Besides, it is confirmed by the simulations in this document as the proposed controller converged to the optimal solution for most subscenarios while showing the smallest computation time amongst their majority.

The proposed controller has guarantee of recursive feasibility amongst the conditions related to the Lyapunov criterion for stability. However, all simulations with this controller presented asymptotic stability and convergence which indicates that these properties may be guaranteed by their formulations. They were just not achieved by the methodology applied. Besides the main controller, three others were implemented to evaluate its economic performance and computational effort in comparison with a nonlinear EMPC and RTO+MPC strategy. Three cases of study found in the literature of EMPC were simulated numerous times under different uncertainties during these analyses.

## Lista de Figuras

Figura 1: Estrutura clássica da integração do MPC com a RTO. ....	27
Figura 2: Estrutura da integração do MPC com a RTO em três camadas. ....	29
Figura 3. Evolução da função econômica durante a sintonia de $m$ do Controlador 1 para o Caso 1. $m = 3$ (—), $m = 5$ (—), $m = 7$ (—) e $m = 10$ (—). ....	66
Figura 4. Evolução da função econômica durante a sintonia de $R$ do Controlador 1 para o Caso 1. $R = 0,5$ (—), $R = 1$ (—), $R = 5$ (—) e $R = 10$ (—). ....	66
Figura 5. Evolução da função econômica durante a sintonia de $Q$ do Controlador 1 para o Caso 1. $Q = \text{diag}[1 \ 1]$ (—), $Q = \text{diag}[10 \ 10]$ (—), $Q = \text{diag}[50 \ 50]$ (—) e $Q = \text{diag}[100 \ 100]$ (—). ....	67
Figura 6. Evolução da função econômica durante a sintonia de $P_{eco}$ do Controlador 1 para o Caso 1. $P_{eco} = 1$ (—), $P_{eco} = 5$ (—), $P_{eco} = 10$ (—) e $P_{eco} = 20$ (—). ....	67
Figura 7. Evolução da variável manipulada em função do tempo para o Caso 1: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). ....	68
Figura 8. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 1: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). ....	69
Figura 9. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 1: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). ....	69
Figura 10. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 1: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). ....	70
Figura 11. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 1: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limite inferior da região de controle da variável controlada (—). ....	71

Figura 12. Evolução da variável manipulada em função do tempo para o Caso 1: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limite inferior da variável manipulada (—).	72
Figura 13. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 1: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	72
Figura 14. Análise de estabilidade assíntota do Caso 1 no subcenário com $\mathbf{p} = [1 \ 2]$ e $[C_{A_{min}} \ C_{B_{min}}] = [0 \ 0]$ . Condição inicial 1 (—), condição inicial 2 (—), condição inicial 3 (—) e condição inicial 4 (—).	73
Figura 15. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 1: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	75
Figura 16. Evolução da função econômica durante a sintonia de $m$ do Controlador 1 para o Caso 2. $m = 3$ (—), $m = 5$ (—), $m = 7$ (—) e $m = 10$ (—).	79
Figura 17. Evolução da função econômica durante a sintonia de $R$ do Controlador 1 para o Caso 2. $R = 0,01$ (—), $R = 0,1$ (—), $R = 1$ (—) e $R = 10$ (—).	80
Figura 18. Evolução da função econômica durante a sintonia de $\mathbf{Q}$ do Controlador 1 para o Caso 2. $\mathbf{Q} = \text{diag}[1 \ 0,01]$ (—), $\mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 0,03]$ (—), $\mathbf{Q} = \text{diag}[7 \ 0,07]$ (—) e $\mathbf{Q} = \text{diag}[10 \ 0,1]$ (—).	81
Figura 19. Evolução da função econômica durante a sintonia de $P_{eco}$ do Controlador 1 para o Caso 1. $P_{eco} = 1$ (—), $P_{eco} = 3$ (—), $P_{eco} = 5$ (—) e $P_{eco} = 10$ (—).	81
Figura 20. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 2: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—) e limite inferior da região de controle da variável controlada (—).	82
Figura 21. Evolução da variável manipulada em função do tempo para o Caso 2: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—) e limite superior da variável manipulada (—).	83

Figura 22. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 2: Cenário 1. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	83
Figura 23. Evolução das variáveis do Caso 2: Cenário 1 simulado na referência. [Adaptado de Heidarinejad et al. (2013)].	83
Figura 24. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 2: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	85
Figura 25. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 2: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limite inferior da região de controle da variável controlada (—).	86
Figura 26. Evolução da variável manipulada em função do tempo para o Caso 2: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) da variável manipulada.	86
Figura 27. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 2: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	86
Figura 28. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 2: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	88
Figura 29. Ilustração da planta de nível de quatro tanques do Caso 3 [Adaptado de D’Jorge et al. (2017)].	88
Figura 30. Evolução da função econômica durante a sintonia de $m$ do Controlador 1 para o Caso 3. $m = 3$ (—), $m = 5$ (—), $m = 7$ (—) e $m = 10$ (—).	94
Figura 31. Evolução da função econômica durante a sintonia de $\mathbf{R}$ do Controlador 1 para o Caso 3. $\mathbf{R} = \text{diag}[1\ 1]$ (—), $\mathbf{R} = \text{diag}[3\ 3]$ (—), $\mathbf{R} = \text{diag}[5\ 5]$ (—) e $\mathbf{R} = \text{diag}[10\ 10]$ (—).	95

Figura 32. Evolução da função econômica durante a sintonia de $\mathbf{Q}$ do Controlador 1 para o Caso 3. $\mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 3 \ 3 \ 3]$ (—), $\mathbf{Q} = \text{diag}[5 \ 5 \ 5 \ 5]$ (—), $\mathbf{Q} = \text{diag}[7 \ 7 \ 7 \ 7]$ (—) e $\mathbf{Q} = \text{diag}[10 \ 10 \ 10 \ 10]$ (—).....	95
Figura 33. Evolução da função econômica durante a sintonia de $P_{eco}$ do Controlador 1 para o Caso 3. $P_{eco} = 0,5$ (—), $P_{eco} = 1$ (—), $P_{eco} = 2$ (—) e $P_{eco} = 3$ (—).....	96
Figura 34. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1a. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).	97
Figura 35. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1a. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) da região de controle das variáveis controladas. ....	98
Figura 36. Evolução das variáveis manipuladas em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1a. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) das variáveis manipuladas. ....	99
Figura 37. Análise de estabilidade assíntota do Caso 3: Cenário 1a com $\mathbf{p} = [0,5 \ 100]$ . Condição inicial 1 (—), condição inicial 2 (—), condição inicial 3 (—) e condição inicial 4 (—).....	101
Figura 38. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1a. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). ....	102
Figura 39. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1b. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) da região de controle das variáveis controladas. ...	103
Figura 40. Evolução das variáveis manipuladas em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1b. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) das variáveis manipuladas. ....	104

Figura 41. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1b. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). .....	104
Figura 42. Evolução das variáveis controladas do Caso 3: Cenário 1 durante o experimento da referência [Adaptado de D’Jorge et al. (2017)]. .....	105
Figura 43: Evolução das variáveis manipuladas do Caso 3: Cenário 1 durante o experimento da referência [Adaptado de D’Jorge et al. (2017)]. .....	106
Figura 44: Evolução da função econômica do Caso 3: Cenário 1 durante o experimento da referência [Adaptado de D’Jorge et al. (2017)]. .....	106
Figura 45. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 3: Cenário 1b. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). .....	108
Figura 46. Evolução das variáveis manipuladas em função do tempo para o Caso 3: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limite superior (—) da variável manipulada. ....	108
Figura 47. Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o Caso 3: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) da região de controle da variável controlada. ....	109
Figura 48. Evolução da função econômica em função do tempo para o Caso 3: Cenário 2. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). .....	110
Figura 49. Análise de estabilidade assíntota do Caso 3: Cenário 3 com $\gamma_a = 0,45$ . Condição inicial 1 (—), condição inicial 2 (—), condição inicial 3 (—) e condição inicial 4 (—) .....	111
Figura 50. Evolução do esforço computacional em função do tempo para o Caso 3: Cenário 3. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—). .....	113

## Lista de Tabelas

Tabela 1. Valores dos parâmetros e dos limites das variáveis do processo do Caso 1.....	63
Tabela 2. Ponto mínimos da função econômica presentes no Caso 1 .....	65
Tabela 3. Parâmetros de sintonia de cada um dos controladores implementados ao Caso 1 ...	68
Tabela 4. Resultados numéricos do Caso 1: Cenário 1 .....	70
Tabela 5. Valores de $\mathbf{p}$ no Caso 1: Cenário 2.....	71
Tabela 6. Resultados numéricos do Caso 1: Cenário 2 .....	74
Tabela 7. Valores dos parâmetros e dos limites das variáveis do processo do Caso 2.....	76
Tabela 8. Ponto mínimos da função econômica presentes no Caso 2 .....	79
Tabela 9. Parâmetros de sintonia de cada um dos controladores implementados ao Caso 2 ...	82
Tabela 10. Resultados numéricos do Caso 2: Cenário 1 .....	84
Tabela 11. Valores de $Q_{reat}$ em função dos intervalos de tempo do Caso 2: Cenário 2.....	85
Tabela 12. Resultados numéricos do Caso 2: Cenário 2 .....	87
Tabela 13. Valores dos parâmetros e dos limites das variáveis do processo do Caso 3.....	90
Tabela 14. Ponto mínimos da função econômica presentes no Caso 3: Cenário 1 .....	93
Tabela 15. Ponto mínimos da função econômica presentes no Caso 3: Cenário 2 .....	94
Tabela 16. Parâmetros de sintonia de cada um dos controladores implementados ao Caso 3 .	97
Tabela 17. Valores de $\mathbf{p}$ para o Caso 3: Cenário 1 .....	97
Tabela 18. Resultados numéricos do Caso 3: Cenário 1a.....	101
Tabela 19. Resultados numéricos do Caso 3: Cenário 1b .....	107
Tabela 20. Valores de $\gamma_a$ e regiões de controle para o Cenário 3 do Caso 2.....	110
Tabela 21. Resultados numéricos do Caso 3: Cenário 3 .....	113

## Lista de Símbolos

### Abreviações

DMC	Controle preditivo por matriz dinâmica ( <i>Dynamic Matrix Control</i> )
DRTO	Otimização dinâmica em tempo real ( <i>Dynamic Real-Time Optimization</i> )
EMPC	Controle preditivo baseado em modelo com propriedades econômicas ( <i>Economic Model Predictive Control</i> )
IHMPC	Controle preditivo baseado em modelo com horizonte infinito ( <i>Infinite Horizon Model Predictive Control</i> )
LQR	Regulador quadrático linear ( <i>Linear Quadratic Regulator</i> )
MPC	Controle preditivo baseado em modelo ( <i>Model Predictive Control</i> )
NLP	Problema de otimização não linear ( <i>Nonlinear Programming</i> )
OPOM	Modelo de predição orientado à saída ( <i>Output Predictive Oriented Model</i> )
QP	Problema de otimização quadrático ( <i>Quadratic Programming</i> )
RTO	Otimização em tempo real ( <i>Real-Time Optimization</i> )

### Símbolos romanos

<b>A</b>	Matriz do estado do modelo de espaço estado em tempo discreto
<i>Area</i>	Área da seção transversal de todos os tanques
$a_i$	Coefficiente de descarga do tanque $i$
$b_{i,j,k}$	Coefficientes do numerador do modelo de função de transferência
<b>B</b>	Matriz da entrada do modelo de espaço estado em tempo discreto
<b>C</b>	Matriz da saída do modelo de espaço estado em tempo discreto.
$C_{Af}$	Concentração molar do componente A na vazão de entrada do reator
$C_A$	Concentração molar do componente A no reator
$C_{Bf}$	Concentração molar do componente B na vazão de entrada do reator
$C_B$	Concentração molar do componente B no reator

$C_p$	Calor específico do fluido no reator
$d$	Gradiente da função econômica
$d_{i,j}^0$	Coefficiente estático do modelo de resposta ao degrau
$d_{i,j,l}^d$	Coefficiente dinâmico do modelo de resposta ao degrau
$D^0$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$D^d$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$E$	Energia de ativação
$F$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$F_{in}$	Vazão de entrada volumétrica do reator
$F_k$	Função econômica simplificada
$f_{eco}$	Função econômica
$\overline{f_{eco}}$	Função econômica média
$G$	Hessiana da função econômica
$g$	Restrições de desigualdade
$g_r$	Aceleração da gravidade
$h$	Restrições de igualdade do processo
$I_{ny}$	Matriz identidade de tamanho $\mathbb{R}^{ny \times ny}$
$I_{nax1}$	Vetor coluna de tamanho $\mathbb{R}^{na}$
$J_k$	Função objetivo no instante $k$
$K_f$	Filtro de Kalman
$K_p$	Ganho estático do processo
$k$	Variável de tempo discreto
$k_0$	Constante de Arrhenius
$k_r$	Coefficiente da taxa de reação
$l$	Custo da função objetivo a cada instante discreto do horizonte de predição

$m$	Horizonte de controle do MPC
$N$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$N_p$	Horizonte de predição do MPC
$N_{st}$	Tempo discreto de estabilização do modelo de resposta ao degrau
$na$	Ordem da dinâmica do sistema no modelo de função de transferência
$P$	Matriz da predição da covariância contida no cálculo do Filtro de Kalman
$P_u$	Matriz peso do erro das variáveis manipuladas no MPC estático
$P_y$	Matriz peso do erro das variáveis controladas no MPC estático
$N_p$	Horizonte de predição do MPC
$p$	Vetor custo presente na função econômica
$P_{eco}$	Peso escalar do termo econômico na função objetivo
$\overline{P_{eco}}$	Matriz peso do termo econômico na função objetivo
$Q$	Matriz peso das variáveis de saída do processo
$\overline{Q}$	Matriz peso do termo dinâmico do OPOM na função objetivo
$Q_{reat}$	Quantidade de calor transferido entre o reator e uma camisa de resfriamento
$q_a$	Vazão volumétrica fornecida por uma bomba A
$q_b$	Vazão volumétrica fornecida por uma bomba B
$r$	<i>Setpoint</i> da saída do processo condicionado por restrições da saída no instante
$r_{i,j,k}$	Polos estáveis do modelo de função de transferência
$R$	Matriz peso dos esforços de controle do processo
$R_{gas}$	Constante dos gases ideais
$R_u$	Matriz peso das variáveis de entrada do processo
$S$	Matriz peso das variáveis de folga
$S_{DMC}$	Coefficientes do modelo de resposta ao degrau
$s$	Variável do domínio de Laplace

$T$	Temperatura do reator
$T_f$	Temperatura da vazão de entrada do reator
$t$	Variável de tempo contínuo
$\mathbf{u}$	Variáveis de entrada do processo
$\mathbf{u}_{min}$	Limite inferior das variáveis de entrada do processo
$\mathbf{u}_{max}$	Limite superior das variáveis de entrada do processo
$\mathbf{u}_{sp}$	<i>Setpoints</i> das variáveis de entrada do processo
$\mathbf{u}^*$	Solução ótima de entrada calculada pelo problema de otimização da camada
RTO	Otimização em tempo real ( <i>Real-Time Optimization</i> )
$\mathbf{u}^\#$	Solução das variáveis de entrada da função objetivo no instante $k$
$\mathbf{u}_k$	Valores posicionais das variáveis manipuladas no horizonte de controle
$\mathbf{u}_s$	Valor das variáveis manipuladas do processo no estado estacionário
$\mathbf{u}_0$	Condição inicial das variáveis manipuladas
$V$	Volume do reator
$V_{min}$	Volume mínimo de água acumulada nos tanques do <b>Caso 3</b>
$w_u$	Coefficiente angular da função econômica simplificada em relação à variável $\mathbf{u}$
$w_y$	Coefficiente angular da função econômica simplificada em relação à variável $\mathbf{y}$
$\mathbf{x}$	Variável de estado do processo
$\mathbf{x}_k$	Vetor com os incrementos do estado do processo no horizonte de predição
$\mathbf{x}^d$	Componente estável do estado do OPOM
$\mathbf{x}^s$	Componente integrador do estado do OPOM
$\mathbf{y}$	Variáveis de saída do processo
$\mathbf{y}_s$	Valor das variáveis controladas do processo em um estado estacionário
$\mathbf{y}_0$	Condição inicial das variáveis controladas
$\mathbf{y}_{max}$	Limite superior das variáveis de entrada do processo

$y_{min}$	Limite inferior das variáveis de saída do processo
$y_{sp}$	<i>Setpoints</i> das saídas no controlador MPC
$y_{sp}^{\#}$	Solução dos <i>setpoints</i> das variáveis controladas na função objetivo no instante
$\overline{y_{sp}}$	Vetor de tamanho $p$ com os <i>setpoints</i> da saída no controlador MPC
$y^{\#}$	Solução das variáveis de saída da função objetivo
$y^*$	Solução ótima de saída calculada pelo problema de otimização da camada RTO
$z_i$	Nível de cada tanque $i$

### Símbolos gregos

$\delta_k$	Variável de folga
$\delta_k^*$	Solução das variáveis de folga da função objetivo no instante $k$
$\Delta H$	Entalpia da reação $A \rightarrow B$
$\Delta u$	Vetor de esforço de controle
$\Delta u^*$	Solução das variáveis de saída da função objetivo no instante $k$
$\Delta \bar{u}_k$	Esforço de controle total no horizonte de controle $m$ para um instante $k$
$\Delta u_k$	Vetor com os incrementos da variável de entrada na faixa de $k$ até $m - 1$
$\Psi$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$\Phi$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$\varepsilon_i$	Matriz definida pelo modelo OPOM
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de igualdade
$\mu$	Multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de desigualdade
$\gamma_a$	Razão de escoamento para a vazão da bomba $q_a$
$\gamma_b$	Razão de escoamento para a vazão da bomba $q_b$
$\rho$	Massa específica do fluido no reator
$\mathcal{L}$	Operador lagrangeano
$\varepsilon_i$	Matriz definida pelo modelo OPOM

## Sumário

1	Introdução .....	21
2	Controle preditivo .....	23
2.1	Controle preditivo baseado em modelo.....	23
2.1.2	Regulador quadrático linear .....	23
2.1.3	Controle preditivo por matriz dinâmica .....	24
2.2	Integração entre otimização em tempo real e controle preditivo baseado em modelo ...	26
2.3	Controle preditivo baseado em modelo com propriedades econômicas (EMPC).....	32
2.4	Controle preditivo baseado em modelo com gradiente da função econômica.....	33
2.5	Controle preditivo baseado em modelo com horizonte infinito.....	35
2.5.1	Modelo de previsão orientado à saída.....	35
2.5.2	Estratégia de controle por zonas .....	40
2.6	Garantia de estabilidade .....	41
3	Proposta de controlador preditivo com objetivo econômico.....	45
3.1	Base de desenvolvimento.....	45
3.1.1	Análise de viabilidade .....	46
3.2	Desenvolvimento do controle preditivo com objetivo econômico .....	48
3.2.1	Análise de viabilidade .....	50
4	Metodologia .....	52
4.1	Escolha dos processos químicos presentes na literatura para simulação .....	52
4.2	Simulação do processo.....	52
4.3	Identificação do modelo linear.....	52
4.4	Definição dos controladores da simulação.....	54
4.5	Análise da função econômica.....	56
4.5.1	Condições de Karush-Kuhn-Tucker.....	56
4.5.2	Aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker .....	59

4.6	Simulação de cenários.....	59
5	Aplicações em estudos de caso .....	62
5.1	Caso 1: CSTR isotérmico.....	62
5.1.1	Obtenção de modelo linear .....	63
5.1.2	Estudo da função econômica.....	64
5.1.3	Sintonia .....	65
5.1.4	Simulação do Cenário 1 .....	68
5.1.5	Simulação do Cenário 2 .....	71
5.2	Caso 2: CSTR não-isotérmico.....	75
5.2.1	Obtenção de modelo linear .....	76
5.2.2	Estudo da função econômica.....	77
5.2.3	Sintonia .....	79
5.2.4	Simulação do Cenário 1 .....	82
5.2.5	Simulação do Cenário 2 .....	85
5.3	Caso 3: planta de tanques interligados .....	88
5.3.1	Obtenção de modelo linear .....	90
5.3.2	Estudo da função econômica.....	91
5.3.3	Sintonia .....	94
5.3.4	Simulação do Cenário 1a .....	97
5.3.5	Simulação do Cenário 1b .....	102
5.3.6	Simulação do Cenário 2 .....	108
6	Conclusões e recomendações para futuros trabalhos.....	114
6.1	Conclusões .....	114
6.2	Recomendações para trabalhos futuros.....	115
7	Bibliografia .....	117

## 1 Introdução

Em um cenário industrial cada vez mais competitivo, a manutenção das variáveis do processo em um ponto operacional pode não representar mais a melhor estratégia de controle. Alguns processos não tem o ótimo econômico em um ponto de operação, mas em uma trajetória (Muller et al., 2014). Além disso, aplicações industriais, geralmente, estão sujeitas a perturbações, logo processos operados no estado estacionário não se mantêm nesse ponto continuamente (Santander et al., 2016). Por fim, a função econômica depende de fatores externos, portanto, o estado estacionário ótimo econômico é variável. O controle operacional da planta deve contabilizar, então, tanto o estado transiente quanto o estacionário para maximizar o lucro de sua operação (Engell, 2007).

A otimização econômica em um ambiente dinâmico, entretanto, é consideravelmente mais difícil do que em um ambiente de produção continua com mudanças esporádicas. A estrutura de controle é, geralmente, implementada em várias camadas de otimização, porém a responsável por contabilizar o fator econômico é executada com menor frequência. Assim sendo, mudanças no ótimo econômico demoram mais a serem percebidas, o que gera uma perda econômica associada a essa defasagem de tempo na atuação do controlador em direção à nova solução ótima.

Uma alternativa para resolver esse problema seria realizar a otimização econômica e a otimização de controle em um único problema de otimização de um controlador (Zanin et al., 2002). Embora essa abordagem resolva a defasagem de atuação do controlador, ela foi, inicialmente, formulada como um problema de otimização não linear (NLP, *Nonlinear Programming*), o que eleva o seu período de otimização e, conseqüentemente, inviabiliza a sua aplicação em tempo real em processos que requerem um menor tempo de amostragem.

A integração da otimização econômica e de controle em uma única camada vem sendo desenvolvida pela comunidade acadêmica de controle por mais de uma década. Diversos trabalhos propõem alternativas de controladores com garantia de estabilidade, mas sem contabilizar o esforço computacional da NLP ou a complexidade de implementação (Amrit et al., 2011; Angeli et al., 2012; Heidarinejad et al., 2012; Santander et al., 2016). A popularização do controle preditivo baseado em modelo (MPC, *Model predictive control*) no meio industrial ocorreu, exatamente, pela sua simplicidade e baixa carga computacional (Ying e Joseph, 1999).

Outras linhas de pesquisa buscam alternativas para resolver o problema do esforço computacional ao manter o MPC como um problema de otimização quadrático (QP, *Quadratic Programming*). Dentre elas, vale ressaltar a estratégia de substituir a função econômica na função objetivo do controlador pelo seu gradiente (Alvarez e Odloak, 2012, 2014; Alamo et al., 2014) e a estratégia de modelar a função objetivo e as equações diferenciais das variáveis controladas em funções de Laguerre (Liu e Cui, 2018). A primeira estratégia é onde se encontra o desenvolvimento deste trabalho enquanto a segunda apresenta publicações recentes que ainda abordam desse assunto. Ambas atribuem garantia de estabilidade e baixo custo computacional ao controlador, porém elas inserem parâmetros ao problema de otimização que podem dificultar a sua implementação.

O objetivo deste trabalho é, portanto, desenvolver um controlador com propriedades econômicas herdadas de seu gradiente, que tenha baixo custo computacional, simplicidade maior que outras opções presentes na literatura e garantia de viabilidade.

Este documento se encontra estruturado da seguinte forma. A **Seção 2** contextualiza o desenvolvimento do controle preditivo econômico desde a concepção inicial do MPC até as estratégias aplicadas ao controlador proposto neste documento. Em sequência, a **Seção 3** propõe a formulação de um controle preditivo econômico a partir de um algoritmo base e analisa ambos matematicamente em respeito à sua viabilidade. A **Seção 4**, por outro lado, detalha toda a metodologia aplicada nas escolhas e simulações dos casos de estudo, enquanto que a **Seção 5** apresenta os três diferentes casos de estudo escolhidos, apresenta os resultados de suas simulações e, por fim, os discute acerca do desempenho econômico e do esforço computacional do controlador proposto. Finalmente, a **Seção 6** conclui o trabalho e sugere possíveis continuidades.

## 2 Controle preditivo

### 2.1 Controle preditivo baseado em modelo

O controle preditivo baseado em modelo se refere a todos os algoritmos de controle ótimo em que as variáveis de entrada de uma planta são manipuladas de acordo com as saídas futuras previstas por um modelo do processo. O controlador, com o auxílio dos dados de entrada e de saída medidos em determinado instante, é capaz de prever o comportamento futuro da planta em função de suas variáveis manipuladas (Qin e Badgwell, 2003). Essa propriedade o permite minimizar o erro futuro, o esforço de controle ou outra propriedade de interesse a partir da minimização de uma função objetivo. A otimização dessa função objetivo é feita a cada instante de amostragem, cujos períodos são definidos por um usuário ou por limitação instrumental.

O MPC é uma técnica amplamente usada na indústria química devido a sua capacidade de controlar sistemas multivariáveis com restrições operacionais, a sua facilidade de inclusão em uma estrutura de controle e ao seu esforço computacional, geralmente, compatível com sua implementação em tempo real (Mayne, 2014). A combinação dessas três propriedades e o amplo desenvolvimento do método permitem que ele seja aplicado em uma alta gama de processos (Qin e Badgwell, 2003).

#### 2.1.2 Regulador quadrático linear

A idealização do conceito de MPC foi feita por Kalman (1960) com o desenvolvimento do regulador quadrático linear (LQR, *Linear Quadratic Regulator*) (Qin e Badgwell, 2003), apresentado nas **Equações 1-3**. Esse controlador já tinha algumas propriedades em sua formulação que viriam a se tornar populares na aplicação industrial como o modelo linear no espaço de estados descrito em tempo discreto (**Equações 2 e 3**) para representar o comportamento do sistema e uma função objetivo quadrática (**Equação 1**) com dois termos regulatórios (Kalman, 1960). O baixo esforço computacional de um QP com modelo linear e a simplicidade da calibração de suas matrizes peso viabilizam o seu uso em controles regulatórios de processos com baixo tempo de amostragem.

$$\min_{\mathbf{u}_k} J_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{x}(k+j|k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+j|k) + \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R}_u(k+j|k) \mathbf{u}(k+j|k)] \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k|k) \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k) \quad (3)$$

Onde  $\mathbf{u}_k = [\mathbf{u}(k|k) \quad \mathbf{u}(k+1|k) \quad \dots \quad \mathbf{u}(k+\infty|k)]^T$  são as ações do controlador calculadas no horizonte de predição pelos dados do instante  $k$ . Além disso,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes do modelo de espaço estado que precisam ser identificadas, enquanto que  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}_u$  são, respectivamente, as matrizes peso das saídas e das entradas na função objetivo. Todas as variáveis da formulação do LQR são escritas como variáveis desvio.

Embora Kalman (1960) atribua garantia de estabilidade e controlabilidade ao LQR, ele teve pouco impacto no desenvolvimento das tecnologias de controle (Qin e Badgwell, 2003). O controlador fica limitado em seguir o *setpoint* usado no cálculo da variável desvio, o que cria a necessidade de re-identificar os parâmetros do modelo de predição sempre que o *setpoint* for alterado. Além disso, o controlador usa horizonte de predição infinito, uma propriedade pouco fundamentada na época e que impossibilitaria a aplicação prática devido ao limite finito do cálculo numérico.

Segundo diversos autores, a falta de restrições na formulação do problema de otimização e a desconsideração de incerteza no modelo (robustez) e de não linearidades do processo limitaram a divulgação do LQR dentro da comunidade de controle de processos da época (Richalet et al., 1976; Garcia et al., 1989). Apesar de haver processos compatíveis com a sua formulação, os integrantes da comunidade que o conheceram consideraram o método impraticável. O LQR foi, entretanto, bem difundido em segmentos da indústria com sistemas físicos identificáveis na forma de modelo de espaço estado pelo seu modelo fenomenológico (Qin e Badgwell, 2003).

### 2.1.3 Controle preditivo por matriz dinâmica

A popularização do conceito de MPC na indústria de controle de processos ocorreu somente na década de 70 com o desenvolvimento do controle preditivo por matriz dinâmica (DMC, *Dynamic Matrix Control*) pela Shell Oil e sua divulgação à comunidade acadêmica (Qin e Badgwell, 2003). O aumento do preço do barril de petróleo com a crise do petróleo de 1973 incentivou as empresas do segmento a buscarem alternativas que otimizassem seus processos. Como resultado dessa busca, Cutler e Ramaker, dois engenheiros da Shell Oil, desenvolveram em 1973 um controlador multivariável mais simples que o LQR proposto por Kalman e o nomearam de DMC. Diferente de seu predecessor, o DMC utiliza um modelo de resposta ao

degrau (**Equações 4 e 5**) capaz de representar o comportamento dinâmico de sistemas mais complexos (Cutler e Ramaker, 1980). Embora esse modelo tenha um número maior de parâmetros a serem identificados, sua identificação empírica é mais fácil do que a do modelo de espaço estado, logo ela é mais acessível para as indústrias que dispõem de bancos de dados sobre os seus processos (Ogunnaike e Ray, 1994). Outro diferencial positivo de sua modelagem está no uso de um horizonte de predição finito (Qin e Badgwell, 2003), logo ele não requer tratativas matemáticas para viabilizar o cálculo numérico.

$$\mathbf{y}(k+j|k) = \mathbf{y}_{pf}(k+j|k) + \sum_{i=0}^{\min(j,m-1)} \mathbf{S}_{DMC}(i)\Delta\mathbf{u}(k+j|k) \quad j = 1, \dots, N_p \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{pf}(k+j|k) &= \mathbf{y}_{pf}(k+j|k-1) + \mathbf{S}_{DMC}(j)\Delta\mathbf{u}(k-1) \\ &+ [\mathbf{y}(k|k) - \mathbf{y}_{pf}(k|k-1) - \mathbf{S}_{DMC}(1)\Delta\mathbf{u}(k-1)] \quad j = 1, \dots, N_{st} \end{aligned} \quad (5)$$

Onde  $\mathbf{y}_{pf}$  são as predições de saída da resposta livre,  $\mathbf{S}_{DMC} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  são os parâmetros do modelo de resposta ao degrau,  $N_p$  é o horizonte de predição,  $m$  é o horizonte de controle e  $N_{st}$  é o tempo discreto necessário para um processo voltar ao estado estacionário após a perturbação de um degrau unitário.

O DMC idealizado inicialmente e apresentado à comunidade acadêmica em 1979 ainda não lidava com restrições operacionais (Cutler e Ramaker, 1979), porém o seu algoritmo foi aprimorado nesse sentido e uma versão com restrições de entrada e de saída foi posteriormente divulgada à comunidade acadêmica na década de 80 (Garcia e Morshedi, 1986). Nessa versão, o DMC minimiza uma função objetivo quadrática (**Equação 6**) trazendo as variáveis controladas do processo o mais próximo possível de um *setpoint* fornecido ao controlador enquanto satisfaz as restrições de suas variáveis (**Equações 7 e 8**). A simplicidade, melhor representação de sistemas não lineares e aplicação comprovada deste método atraíram a atenção tanto da comunidade acadêmica quanto da indústria para o conceito do MPC, o que impulsionou o seu desenvolvimento (Qin e Badgwell, 2003). O DMC ainda é aplicado atualmente em alguns processos, principalmente, em refinarias de petróleo e plantas petroquímicas, porém formulações de MPC's com modelo de espaço estado e de MPC's com modelos não lineares o substituíram dentre as estratégias de MPC mais populares em aplicações industriais (Ogunnaike e Ray, 1994; Qin e Badgwell, 2003). Como desvantagem de seu modelo de resposta ao degrau, o DMC é inaplicável em plantas instáveis, é altamente dependente do

número de coeficientes de resposta a degrau ( $\mathbf{S}_{DMC}$ ) para ser eficiente e é ineficiente para lidar com perturbações diferentes de um degrau e incertezas no modelo (Lundström et al., 1995).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \overline{\mathbf{y}}_{sp}) \\ = \sum_{j=1}^{N_p} \left( \mathbf{y}(k+j|k) - \overline{\mathbf{y}}_{sp}(k+j|k) \right)^T \mathbf{Q} \left( \mathbf{y}(k+j|k) - \overline{\mathbf{y}}_{sp}(k+j|k) \right) \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \end{aligned} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{k-1} + \sum_{i=0}^j \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(k+j|k) = \mathbf{y}_{pf}(k+j|k) + \sum_{i=1}^{\min(j, m-1)} \mathbf{S}_{DMC}(i) \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \quad j = 1, \dots, N_p \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{pf}(k+j|k) = \mathbf{y}_{pf}(k+j|k-1) + \mathbf{S}_{DMC}(j) \Delta \mathbf{u}(k-1) \\ + [\mathbf{y}(k|k) - \mathbf{y}_{pf}(k|k-1) - \mathbf{S}_{DMC}(1) \Delta \mathbf{u}(k-1)] \quad j = 1, \dots, N_{st} \end{aligned} \quad (10)$$

Onde  $\overline{\mathbf{y}}_{sp} = [\overbrace{\mathbf{y}_{sp} \ \dots \ \mathbf{y}_{sp}}^{N_p}]$  é um vetor de tamanho  $\mathbb{R}^{n_y \cdot N_p}$  com os *setpoints* das variáveis controladas,  $\Delta \mathbf{u}_k = [\Delta \mathbf{u}(k|k)^T \ \Delta \mathbf{u}(k+1|k)^T \ \dots \ \Delta \mathbf{u}(k+m-1|k)^T]^T$  são os esforços de controle calculados no horizonte de controle  $m$  em um dado instante  $k$  e  $\mathbf{R}$  é a matriz peso do esforço de controle na função objetivo.

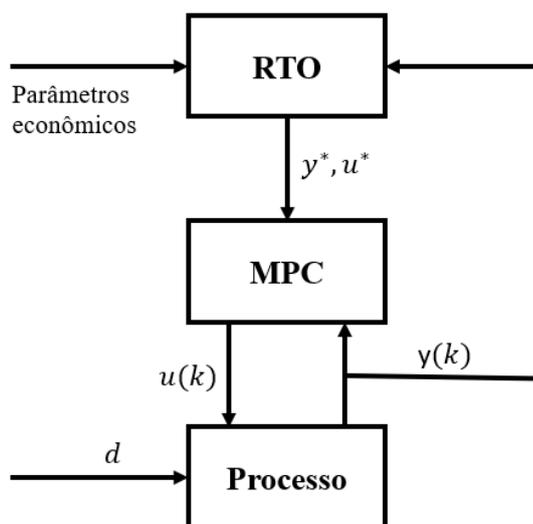
O DMC é capaz de levar ou manter o sistema em um *setpoint*, porém essa ação isoladamente não garante o ganho econômico do processo (Ying e Joseph, 1999). O *setpoint* precisa ser baseado em propriedades econômicas para que a ação do DMC gere uma otimização econômica. Uma forma de garantir essa propriedade é inserir o MPC em uma estrutura hierárquica de controle, onde ele recebe o *setpoint* em cascata de uma camada superior responsável pela avaliação e otimização das propriedades econômicas do processo.

## 2.2 Integração entre otimização em tempo real e controle preditivo baseado em modelo

O desenvolvimento do MPC nas últimas décadas trouxe alternativas com estabilidade e robustez para esta técnica de controle avançado (Alamo et al., 2014). A popularização do

método, entretanto, é consequência, principalmente, de sua boa adequação a uma estrutura hierárquica de controle com uma otimização em tempo real (RTO, *Real-Time Optimization*). Somando isso à sua capacidade de rejeitar perturbações e alterar a resposta da planta mesmo com incertezas e um modelo linear tornam o MPC em uma opção viável de regulador (Ellis et al., 2014).

A função da RTO na estrutura de controle é receber os objetivos de produção, parâmetros de custo e restrições operacionais para realizar a otimização econômica do processo a partir de um modelo estático rigoroso e não linear. Uma vez com a otimização resolvida, a RTO fornece os *targets* calculados para as camadas de controle abaixo, dentre as quais se encontra o MPC (Engell, 2007). A integração entre este último com a RTO, entretanto, pode acontecer indiretamente, o que é a abordagem mais comum na indústria (Ying e Joseph, 1999). As configurações mais comuns da integração entre a RTO e o MPC são apresentados nas Figuras 1 e 2.

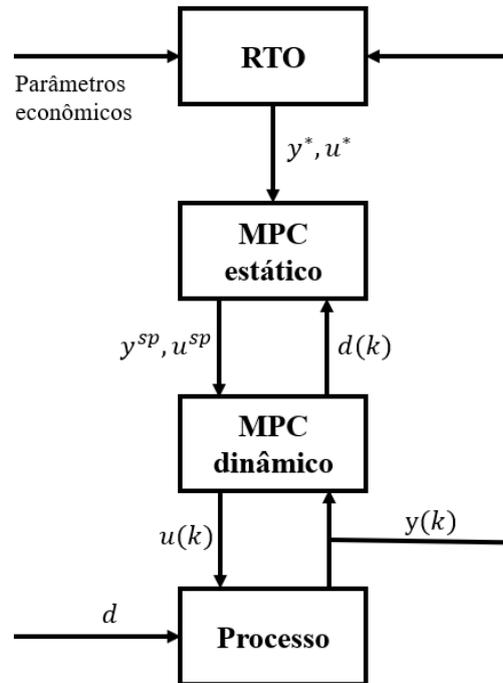


**Figura 1:** Estrutura clássica da integração do MPC com a RTO.

A configuração de duas camadas apresentada na Figura 1 é conhecida como a abordagem clássica, no entanto, ela se encontra em desuso. A RTO recebe os parâmetros econômicos, calcula o ótimo econômico com base em seu modelo rigoroso não linear e fornece os *targets* ao MPC. O MPC, por sua vez, recebe esses *targets* e atua sobre o sistema para levá-lo o mais próximo possível da solução ótima enquanto cumpre as restrições operacionais de seu modelo de predição. O problema de tal abordagem é que ambas as camadas usam modelos diferentes dos processos e isso gera algumas desvantagens. Os *targets* calculados pela RTO podem ser infactíveis para o modelo linear do MPC devido a perturbações ou incerteza de modelagem, o

que faria o MPC levar o sistema a uma solução subótima com *offset* causado pelas suas restrições. Uma outra causa de *offset* seria a inactibilidade do *setpoint* calculado pela RTO com o modelo rígido no estado estacionário para o modelo linear dinâmico do MPC. Nesse caso, a atuação do MPC em direção ao ponto mais próximo possível do *setpoint* pode não representar a melhor solução econômica conforme as suas restrições. Uma outra desvantagem da abordagem de duas camadas seria a possível atuação conservadora do MPC entre execuções da RTO causada por perturbações que levem as saídas do sistema até as suas restrições. Nestes intervalos, a função econômica pode sofrer alterações próprias ou causados pelas perturbações que mudarão a solução ótima, mas que serão percebidas pelo MPC apenas após a próxima atualização de *target* da RTO (Ying e Badgwell, 1999). Embora a integração da RTO com o MPC em duas camadas apresente algumas falhas, ela é melhor adequada para a integração da otimização dinâmica em tempo real (DRTO, *Dynamic Real-Time Optimization*) com o MPC. A DRTO realiza a otimização da função econômica com um modelo dinâmico rigoroso, que apresenta maior compatibilidade com o modelo dinâmico linear do MPC. O desafio da implementação da DRTO está na dificuldade ou impossibilidade da formulação da função econômica e do modelo rígido do processo em equações diferenciais (Mayne, 2014). Em situação viável, a integração da DRTO com o MPC elimina a causa de *offset* por inactibilidade do *setpoint* causado por divergência de modelos entre camadas.

A configuração de três camadas apresentada na **Figura 2** é a abordagem convencional usada em aplicações industriais. Assim como na configuração de duas camadas, a RTO recebe os parâmetros econômicos, calcula o ótimo econômico com base em seu modelo rigoroso não linear e fornece os *targets* à sua camada abaixo na estrutura de controle. A camada intermediária, também conhecida como MPC estático, recebe os *targets* da RTO e calcula uma solução ótima aproximada factível ao MPC dinâmico da camada abaixo a partir de um modelo estático linear do processo. Ambas as camadas, tem as mesmas restrições operacionais, portanto, a solução ótima calculada pelo MPC estático será também factível para o MPC dinâmico. Isso resolve o problema de *offset* e reduz a atuação conservadora do MPC dinâmico.



**Figura 2:** Estrutura da integração do MPC com a RTO em três camadas.

A principal função do MPC estático é compatibilizar os *targets* fornecidos pela RTO com os *setpoints* recebidos pelo MPC dinâmico, porém propriedades econômicas podem ser inseridas nesta camada. Nessa abordagem, o MPC estático se torna uma aproximação da RTO capaz de identificar alterações no ótimo econômico causadas por perturbações, o que melhora o desempenho do controlador entre execuções da RTO (González e Odloak, 2009; Marchetti et al., 2014). O MPC dinâmico nessa configuração recebe os *setpoints* factíveis do MPC estático e atua sobre o processo. Entre execuções da RTO, a camada estática executa sequencialmente com a camada dinâmica, onde a primeira é responsável por calcular o ponto ótimo aproximado, enquanto que a segunda é responsável pela manutenção do sistema dentro das restrições operacionais e envio do sistema na direção do *setpoint* recebido.

Uma característica comum de ambas configurações é o fato de toda a não linearidade do processo ficar contida no problema de otimização da RTO, razão pela qual o seu período de execução se encontra na faixa de horas a dias dependendo da complexidade do processo. Os MPC's, por outro lado, utilizam um problema linear ou quadrático e um modelo linear do processo, logo sua carga computacional é menor e tem período de execução na faixa de segundos a horas (Ying e Joseph, 1999). Embora o comportamento das plantas industriais seja, geralmente, não linear, a identificação de modelos não lineares é difícil, enquanto que a identificação de modelos lineares é uma prática consolidada e de fácil implementação. Os

modelos lineares podem não ser capazes de representar o comportamento da planta operacional por conta própria, mas em combinação, eles são capazes de ajustar bem o comportamento da planta. Essa técnica, denominada de multimodelo, é normalmente aplicada em processos com pontos operacionais dispersos pelo seu domínio, cenário possível dependendo das relações entre as variáveis do processo e a sua função econômica. A situação mais comum, entretanto, é os pontos operacionais se encontrarem próximos entre si, o que dispensa a necessidade de utilizar múltiplos modelos (Ferramosca et al., 2017).

O problema de otimização rigorosa do processo, presente na RTO, é apresentado nas **Equações 11-15**.

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{u}} f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (11)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) < \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max} \quad (15)$$

Onde  $f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u}): \mathbb{R}^{ny} \times \mathbb{R}^{nu} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função econômica do processo,  $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}): \mathbb{R}^{ny} \times \mathbb{R}^{nu} \rightarrow \mathbb{R}^{ni}$  representa o modelo não linear do processo em estado estacionário composto por  $ni$  equações e  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{u}): \mathbb{R}^{ny} \times \mathbb{R}^{nu} \rightarrow \mathbb{R}^{ndes-ny-nu}$  representa todas as restrições não lineares de desigualdade. A constante  $ndes$  é designada para a quantidade total de restrições de desigualdade, incluindo as restrições lineares.

A opção de definir separadamente as restrições das variáveis controladas (**Equação 14**) e manipuladas (**Equação 15**) em relação às demais restrições de igualdade (**Equação 13**) e desigualdade (**Equação 12**) do problema permite concentrar a sua não linearidade nessas últimas equações. A não linearidade do problema econômico (**Equações 11-15**) fica contida, geralmente, no modelo estacionário do processo (**Equação 13**) e, em alguns casos particulares, na função econômica (**Equação 11**) e/ou na sua região factível (**Equação 12**).

Na configuração de integração com três camadas, a solução do problema de otimização da RTO ( $\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*$ ) é enviado ao MPC estático. Este controlador então usa um modelo de entrada-saída (**Equação 19**), compatível com o modelo do MPC dinâmico, para calcular um *setpoint* factível pelas restrições do processo (**Equações 17 e 18**). Esse cálculo é feito pela resolução do problema de otimização das **Equações 16-19**.

$$\min_{\mathbf{u}_{sp}, \mathbf{y}_{sp}} J_k(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = (\mathbf{y}_{sp} - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{P}_y (\mathbf{y}_{sp} - \mathbf{y}^*) + (\mathbf{u}_{sp} - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{P}_u (\mathbf{u}_{sp} - \mathbf{u}^*) \quad (16)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{sp} \leq \mathbf{u}_{max} \quad (18)$$

$$\mathbf{y}_{sp} - \mathbf{y}(k + \infty|k) = \mathbf{K}_p (\mathbf{u}_{sp} - \mathbf{u}(k - 1)) \quad (19)$$

Onde  $\mathbf{P}_y$  e  $\mathbf{P}_u$  são as matrizes peso das variáveis de saída e de entrada, respectivamente. Além disso,  $\mathbf{y}(k + \infty|k)$  é a predição da saída do processo no estado estacionário gerada pela camada dinâmica do controlador e correspondente à última ação de controle aplicada na planta no instante  $k - 1$ . Por fim,  $\mathbf{K}_p$  é a matriz de ganhos estático do processo.

A camada do MPC dinâmico recebe os *setpoints* de sua camada superior e conduz as variáveis manipuladas e controladas a seus valores respeitando os limites operacionais. As restrições de saída, entretanto, podem ser violáveis se o MPC dinâmico não tiver uma restrição na forma de  $\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}(k + j|k) \leq \mathbf{y}_{max}$ . O controlador, geralmente, usa um modelo linear de espaço estado incremental ([Equações 23 e 24](#)), identificado em condições operacionais normais do processo. A formulação do problema do MPC dinâmico é apresentada nas [Equações 20-24](#).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{y}_{sp}, \mathbf{u}_{sp}) & \quad (20) \\ &= \sum_{j=1}^{N_p} [(\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp})^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp})] \\ &+ [(\mathbf{u}(k + m - 1|k) - \mathbf{u}_{sp})^T \mathbf{R}_u (\mathbf{u}(k + m - 1|k) - \mathbf{u}_{sp})] \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k + j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k + j|k) \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k + j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{k-1} + \sum_{i=1}^j \Delta \mathbf{u}(k + i|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (22)$$

$$\mathbf{x}(k + 1|k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (23)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k) \quad (24)$$

Embora o método de integração da RTO com o MPC tenha formulações com garantia de estabilidade e aplicação comprovada, o período de execução da RTO é muito maior que o das

camadas de MPC, portanto, haverá sempre uma defasagem entre o esforço de controle ótimo e o implementado pelo controlador quando o sistema sofrer perturbações entre execuções da RTO. A perda de desempenho econômico frente a essa situação torna a estratégia de integração entre a RTO e o MPC pouco eficaz em sistemas com perturbações contínuas, o que demanda alternativas que eliminem ou reduzam essa defasagem de atuação do controlador em direção à solução ótima. Além disso, a solução ótima calculada pelo modelo estático da RTO pode não ser a solução ótima de cenários transientes, visto que processos industriais estão sujeitos a perturbações contínuas e podem nunca atingir um estado estacionário.

### 2.3 Controle preditivo baseado em modelo com propriedades econômicas (EMPC)

Uma abordagem para reduzir a defasagem da solução do controlador em relação à solução ótima econômica foi, inicialmente, proposta por Zanin e colaboradores (2002). Eles propuseram a integração do objetivo econômico dentro da função objetivo do MPC em uma única camada, o que permitiria ao controlador identificar mudanças no ótimo econômico a cada execução, eliminando assim o *offset* causado por comunicação entre as diferentes camadas da estrutura de controle. A formulação do MPC proposto é apresentada nas [Equações 25-34](#).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_s, \mathbf{u}_s} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^{N_p} (\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{r}) \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + P_{eco} f_{eco}(\mathbf{y}_s, \mathbf{u}_s) \end{aligned} \quad (25)$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (26)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (27)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_s \leq \mathbf{y}_{max} \quad (28)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_s \leq \mathbf{u}_{max} \quad (29)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}_s, \mathbf{u}_s) = \mathbf{0} \quad (30)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}(k-1) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \quad (31)$$

$$\mathbf{y}(k+j|k) = \mathbf{y}_{pf}(k+j|k) + \sum_{i=1}^{\min(j, m-1)} \mathbf{S}_{DMC}(i) \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \quad j = 1, \dots, N_p \quad (32)$$

$$\mathbf{y}_{pf}(k+j|k) = \mathbf{y}_{pf}(k+j|k-1) + \mathbf{S}_{DMC}(j)\Delta\mathbf{u}(k-1) \quad (33)$$

$$+ [\mathbf{y}(k|k) - \mathbf{y}_{pf}(k|k-1) - \mathbf{S}_{DMC}(1)\Delta\mathbf{u}(k-1)] \quad j = 1, \dots, N_{st}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{y}_{min} \leftrightarrow \mathbf{y}(k+j|k) \leq \mathbf{y}_{min} \\ \mathbf{r} = \mathbf{y}_{max} \leftrightarrow \mathbf{y}(k+j|k) \geq \mathbf{y}_{max} \\ \mathbf{r} = 0 \leftrightarrow \mathbf{y}_{min} < \mathbf{y}(k+j|k) < \mathbf{y}_{max} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad (34)$$

Onde  $P_{eco}$  é o peso escalar do termo econômico da otimização,  $\mathbf{h}(\mathbf{y}_s, \mathbf{u}_s): \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  representa o modelo estacionário rígido do processo e  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n_y}$  representa um vetor com os *setpoints* condicionais do problema.

A integração do problema econômico com o problema de controle em uma única camada de controle veio a ser conhecida, posteriormente, como controle preditivo econômico baseado em modelo (EMPC, *Economic Model Predictive Control*). Embora o controlador proposto por Zanin tenha sido aplicado em uma unidade de craqueamento catalítico e apresente desempenho satisfatório (Odloak e Moro 1995), ele não tem garantia de estabilidade e considera a função econômica apenas no estado estacionário. Além disso, houve um aumento da complexidade do problema de otimização do MPC e, conseqüentemente, da carga computacional. O seu problema de otimização se tornou um NLP pela inserção da restrição do modelo estático rigoroso (Equação 30) e da inserção da função econômica na função objetivo (Equação 25) apesar do modelo de predição ainda ser linear de resposta ao degrau (Equações 32 e 33). Diversos autores, posteriormente, desenvolveram alternativas do controlador de Zanin mantendo a estrutura NLP do MPC, porém adicionando garantia de estabilidade ou garantia de robustez (Ferramosca et al., 2010; Amrit et al., 2011; Diehl et al., 2011; Angeli et al., 2012). A principal desvantagem desse tipo de abordagem está na resolução da otimização dentro do tempo de amostragem do processo (Hinojosa et al., 2017). Esses trabalhos contam com o desenvolvimento de hardware e software mais eficientes para viabilizar a sua aplicação, no entanto, também é necessário criar alternativas de soluções aproximadas com cálculos mais rápidos (Jäschke et al., 2014).

## 2.4 Controle preditivo baseado em modelo com gradiente da função econômica

Dentre as propostas feitas para reduzir o esforço computacional do EMPC, a ideia de De Souza et al. (2010), foi uma das que tiveram maior destaque na comunidade acadêmica. Em seu artigo, o termo NLP foi reduzido a um QP pelo uso do gradiente da função econômica na função objetivo do controlador ao invés da função econômica diretamente. Como o controlador não utiliza mais os valores da função econômica, as restrições rígidas do estado estacionário podem

ser negligenciadas, assim eliminando as fontes de não linearidade do EMPC proposto por Zanin (De Souza et al., 2010). Além disso, ele usa um modelo no espaço de estados na forma incremental (**Equações 39-43**) para prever o comportamento do sistema. A formulação do EMPC proposto com gradiente da função econômica é apresentada nas **Equações 35-43**.

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^{N_p} (\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{r}) \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + (\mathbf{d} + \mathbf{G} \Delta \bar{\mathbf{u}})^T \overline{\mathbf{P}}_{eco} (\mathbf{d} + \mathbf{G} \Delta \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (35)$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (36)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (37)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (38)$$

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (39)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k) \quad (40)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{y}_{min} \leftrightarrow \mathbf{y}(k+j|k) \leq \mathbf{y}_{min} \\ \mathbf{r} = \mathbf{y}_{max} \leftrightarrow \mathbf{y}(k+j|k) \geq \mathbf{y}_{max} \\ \mathbf{r} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{y}_{min} < \mathbf{y}(k+j|k) < \mathbf{y}_{max} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad (41)$$

$$\mathbf{d} = \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{K}_p + \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{u}} \quad (42)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_p^T \frac{\partial^2 f_{eco}}{(\partial \mathbf{y})^2} \mathbf{K}_p + \frac{\partial^2 f_{eco}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{y}} \mathbf{K}_p + \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{(\partial \mathbf{u})^2} \right) + \mathbf{K}_p \frac{\partial^2 f_{eco}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{u}} + \frac{\partial^2 f_{eco}}{(\partial \mathbf{u})^2} \quad (43)$$

Onde  $\mathbf{d}$  é o gradiente da função econômica,  $\mathbf{G}$  é a sua hessiana,  $\Delta \bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}(k+m-1|k) - \mathbf{u}(k|k)$  é o esforço de controle total da previsão e  $\overline{\mathbf{P}}_{eco}$  é a matriz peso do termo econômico da otimização.

O EMPC das **Equações 35-43** também não tem garantia de estabilidade e essa propriedade nem sequer foi analisada por De Souza et al. (2010). O seu desempenho, entretanto, apresentou resultados promissores, visto que o EMPC das **Equações 35-43** teve um desempenho semelhante ao do EMPC das **Equações 25-34** (De Souza et al., 2010), porém com uma redução da carga computacional. Embora o esforço computacional não tenha sido analisado, é esperado que a resolução de um QP seja mais rápida do que a resolução de um NLP. Diversos autores, posteriormente, aprimoraram o uso do gradiente da função econômica em EMPC's com garantia de estabilidade (Alamo et al., 2012; Alamo et al., 2014; Alvarez e Odloak, 2014).

Embora o EMPC com gradiente da função econômica possa obter soluções subótimas, o seu baixo custo computacional pode viabilizar a sua aplicação industrial, pois o seu período de execução tende a ser melhor adequado ao tempo de amostragem do sistema. Além disso, o desempenho econômico do EMPC tende a ser superior ao do MPC integrado com a RTO em diversas camadas para sistemas sujeitos a muitas perturbações. Até recentemente, uma limitação a sua implementação prática era a falta de formulações dessa estratégia de controle com garantia de robustez, porém esse problema foi resolvido com o uso de múltiplos modelos para prever o comportamento do processo (D’Jorge et al., 2017).

## 2.5 Controle preditivo baseado em modelo com horizonte infinito

O uso de horizonte infinito para garantir estabilidade ao processo independente dos parâmetros de sintonia do controlador foi idealizado em 1960 (Kalman, 1960) na primeira concepção do MPC. O principal problema dessa abordagem estava no fato de que os algoritmos computacionais têm limitação finita de execução e o tamanho dos horizontes de controle e de predição adotados afetam diretamente o seu esforço computacional (Mayne, 2014). Formulações de MPC’s com horizonte infinito e quantidade finita de variáveis solucionadas existem desde 1993 (Rawlings e Muske). Nesse trabalho, o horizonte infinito da função objetivo do controlador é reduzido pela definição de um custo terminal, obtido com a solução da equação de Lyapunov. Embora a estabilidade do controlador seja demonstrada para o caso regulatório, não há análise do caso de sistemas com perturbações não mensuráveis e não há garantia de eliminação do *offset*, pois o modelo de espaço estado adotado está na forma posicional (Equações 2 e 3) ao invés da forma incremental (Equações 23 e 24).

### 2.5.1 Modelo de predição orientado à saída

Visando conseguir um MPC com garantia de estabilidade sem *offset*, Odloak (2004) formulou um modelo de espaço estado incremental baseado na resposta de um processo estável sem tempo morto a perturbações na forma de degrau. O modelo de predição orientado à saída (OPOM, *Output Predictive Oriented Model*) proposto nesse trabalho separa a resposta do sistema em um termo estático e um termo dinâmico, o que possibilita a redução do número infinito de variáveis por suposições de sistema estável.

Considere que um sistema multivariável com  $nu$  entradas,  $ny$  saídas tenha as dinâmicas de saída identificadas por funções de transferência de ordem  $na$  no formato da Equação 44.

$$G_{i,j}(s) = \frac{b_{i,j,0} + b_{i,j,1}s + \dots + b_{i,j,nb}s^{nb}}{(s - r_{i,j,1})(s - r_{i,j,2}) \dots (s - r_{i,j,na})} \quad (44)$$

Onde  $na > nb$ , e  $r_{i,j,l}$  são polos estáveis distintos para  $l = 1, 2, \dots, na$ .

A resposta em degraus do sistema pode ser obtida pela expansão em frações parciais conforme as [Equações 44 e 45](#).

$$S_{DMC_{i,j}}(s) = \frac{G_{i,j}(s)}{s} = \frac{d_{i,j}^0}{s} + \frac{d_{i,j,1}^d}{(s - r_{i,j,1})} + \frac{d_{i,j,2}^d}{(s - r_{i,j,2})} + \dots + \frac{d_{i,j,na}^d}{(s - r_{i,j,na})} \quad (45)$$

$$S_{DMC_{i,j}}(k) = d_{i,j}^0 + d_{i,j,1}^d e^{r_{i,j,1}kT_s} + d_{i,j,2}^d e^{r_{i,j,2}kT_s} + \dots + d_{i,j,na}^d e^{r_{i,j,na}kT_s} \quad (46)$$

Onde  $d_{i,j}^0$  e  $d_{i,j,l}^d$  são os coeficientes do modelo de resposta ao degrau para  $l = 1, 2, \dots, na$  e  $T_s$  é o tempo de amostragem do processo.

Seguindo o modelo no espaço de estados incremental ([Equações 23 e 24](#)), as matrizes do OPOM são definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(k|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k|k) \\ \mathbf{x}^d(k|k) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F} \mathbf{N} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\mathbf{I}_{ny} \quad \Psi]$$

$$\mathbf{F} = \text{diag}(e^{r_{1,1,1}T_s} \dots e^{r_{1,1,na}T_s} \dots e^{r_{1,nu,1}T_s} \dots e^{r_{1,nu,na}T_s} \dots e^{r_{ny,1,1}T_s} \dots e^{r_{ny,nu,1}T_s} \dots e^{r_{ny,nu,na}T_s})$$

$$\mathbf{D}^d = \text{diag}(d_{1,1,1}^d \dots d_{1,1,na}^d \dots d_{1,nu,1}^d \dots d_{1,nu,na}^d \dots d_{ny,1,1}^d \dots d_{ny,1,na}^d \dots d_{ny,nu,1}^d \dots d_{ny,nu,na}^d)$$

$$\mathbf{D}^0 = \begin{bmatrix} \overbrace{d_{1,1}^0 \dots d_{1,nu}^0}^{nu} \\ \vdots \\ d_{ny,1}^0 \dots d_{ny,nu}^0 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ny} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{I}_{nax1} \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{nu} \\ 0 \quad \mathbf{I}_{nax1} \quad 0 \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad 0 \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \mathbf{I}_{nax1} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, ny,$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \overbrace{\Phi \quad \dots \quad \mathbf{0}}^{ny} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{0} \quad \dots \quad \Phi \end{bmatrix}, \Phi = \overbrace{[1 \quad \dots \quad 1]}^{nu \cdot na}$$

Onde  $\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^{ny}$  é o termo estático do estado,  $\mathbf{x}^d \in \mathbb{R}^{nd}$  é o termo dinâmico do estado e  $nd = ny \cdot nu \cdot na$ . Além disso,  $\mathbf{I}_{ny}$  é uma matriz identidade de tamanho  $\mathbb{R}^{ny \times ny}$ ,  $\mathbf{I}_{nax1} \in \mathbb{R}^{na}$  é um vetor coluna preenchido por 1 em todas as suas posições e os demais parâmetros  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{nd \times nd}$ ,  $\mathbf{D}^d \in \mathbb{R}^{nd \times nd}$ ,  $\mathbf{D}^0 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$ ,  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{nd \times nu}$  e  $\Psi \in \mathbb{R}^{ny \times nd}$  são matrizes do modelo OPOM.

O modelo de espaço estado na forma incremental com o OPOM é representado, portanto, pelas [Equações 47 e 48](#).

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F} \mathbf{N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (47)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \Psi] \mathbf{x}(k|k) \quad (48)$$

O OPOM foi originalmente formulado como um MPC regulatório com garantia de estabilidade.

O seu problema de otimização é apresentado nas **Equações 49-54**.

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{y}_{sp}) &= \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \delta_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \delta_k] \quad (49) \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + \delta_k^T \mathbf{S} \delta_k \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \delta_k - \mathbf{y}_{sp} = \mathbf{0} \quad (50)$$

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (51)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (52)$$

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F} \mathbf{N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (53)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \Psi] \mathbf{x}(k|k) \quad (54)$$

Onde  $\delta_k$  são variáveis de folga e  $\mathbf{S}$  é a matriz peso dessas variáveis.

A restrição terminal da **Equação 50** foi inserida para garantir a limitação da função objetivo.

Todos os polos  $r_{i,j,l}$  de um sistema estável são negativos definidos, portanto,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{F}^j = \mathbf{0}$ .

Aplicando esse limite ao modelo de predição do estado (**Equação 53**) tem-se que

$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}^d(\mathbf{k} + \mathbf{j}|\mathbf{k}) = \mathbf{0}$ , logo a variável de saída  $\mathbf{y}$  é composta apenas pelo termo estático  $\mathbf{x}^s$  no

estado estacionário. As variáveis de folga  $\delta_k$  são adicionadas à restrição terminal (**Equação**

**50**) para garantir a sua viabilidade. A matriz peso  $\mathbf{S}$  é definida com ordem de grandeza superior

aos demais pesos da função objetivo (**Equação 49**) para minimizar as variáveis de folga.

Conseqüentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \mathbf{0}$  se o *setpoint* for alcançável pelo modelo de predição no estado

estacionário e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = -(\mathbf{y}(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp})$  se ele for inalcançável. Dessa forma, as

variáveis de saída  $\mathbf{y}$  são atraídas pela restrição terminal (**Equação 50**) para o ponto mais

próximo do *setpoint*  $\mathbf{y}_{sp}$  dentro da região factível.

O problema de otimização (**Equações 49-54**) pode ser solucionado numericamente pela

redução do horizonte de predição infinito ao horizonte de controle  $m$  com o desenvolvimento

dos termos dinâmicos e estáticos do OPOM dentro da função objetivo (**Equação 49**).

Primeiramente, separa-se o somatório do horizonte de predição da **Equação 49** como:

$$\begin{aligned}
\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\delta}_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{y}_{sp}) & \quad (55) \\
&= \sum_{j=1}^m [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] \\
&+ \sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + \boldsymbol{\delta}_k^T \mathbf{S} \boldsymbol{\delta}_k
\end{aligned}$$

O somatório de  $j \in [m+1, \infty) | j \in \mathbb{N}$  da [Equação 55](#) pode ser expandido com a substituição da [Equação 48](#) para:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] & \quad (56) \\
&= \sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{x}^s(k+j|k) + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}^s(k+j|k) \\
&+ \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]
\end{aligned}$$

Como  $\Delta \mathbf{u}(k+j|k) = \mathbf{0} \forall j \geq m | j \in \mathbb{N}$ , então  $\mathbf{x}^s(k+j|k) = \mathbf{x}^s(k+m|k) \forall j \geq m | j \in \mathbb{N}$  pela [Equação 47](#). Substituindo tal igualdade na [Equação 56](#), chega-se a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] \\
&= \sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{x}^s(k+m|k) + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}^s(k+m|k) \\
&+ \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]
\end{aligned}$$

Que pode ser simplificada com a substituição da restrição terminal ([Equação 50](#)) para:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] \\
&= \sum_{j=m+1}^{\infty} [\boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+j|k)]^T \mathbf{Q} [\boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+j|k)]
\end{aligned}$$

Cujo somatório de  $j \in [m+1, \infty) | j \in \mathbb{N}$  é simplificado pela [Equação 47](#) como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m+1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \boldsymbol{\Psi} \mathbf{F}^j \mathbf{x}^d(k+m|k) \right)^T \mathbf{Q} \mathbf{F}^j \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+m|k)
\end{aligned} \tag{57}$$

A suposição de que o sistema é estável garante a convergência da [Equação 57](#), pois  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{F}^j = \mathbf{0}$ . O somatório infinito da [Equação 57](#) pode então ser reduzido pela sua reformulação como uma equação de Lyapunov conforme:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left( \boldsymbol{\Psi} \mathbf{F}^j \mathbf{x}^d(k+m|k) \right)^T \mathbf{Q} \mathbf{F}^j \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}^d(k+m|k) \\
& = \left( \mathbf{x}^d(k+m|k) \right)^T \bar{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{x}^d(k+m|k) \right)
\end{aligned} \tag{58}$$

Onde  $\bar{\mathbf{Q}}$  é obtida pela resolução da seguinte equação de Lyapunov:

$$\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{F}$$

Substituindo a [Equação 58](#) na [Equação 55](#) é possível obter enfim a seguinte função objetivo com horizonte de predição finito:

$$\begin{aligned}
& \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\delta}_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{y}_{sp}) \\
& = \sum_{j=1}^m [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_k] \\
& \quad + \left( \mathbf{x}^d(k+m|k) \right)^T \bar{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{x}^d(k+m|k) \right) \\
& \quad + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + \boldsymbol{\delta}_k^T \mathbf{S} \boldsymbol{\delta}_k
\end{aligned} \tag{59}$$

A principal vantagem do MPC com horizonte infinito (IH MPC, *Infinite Horizon Model Predictive Control*) proposto por Odloak (2004) é a garantia de estabilidade obtida pelo uso de horizonte de predição infinito com restrição terminal. Esse trabalho, entretanto, aborda apenas um conjunto específico de processos: estáveis sem tempo morto. Posteriormente, alguns trabalhos expandiram a garantia de estabilidade da abordagem do IH MPC com OPOM para sistemas integradores (González et al., 2007), sistemas com tempo morto (Santoro e Odloak, 2012) e EMPC's (Alvarez e Odloak, 2014). Além disso, outros trabalhos baseados nessa abordagem conseguiram garantia de robustez em sistemas estáveis (Alvarez e Odloak, 2010) e em sistemas instáveis (Martins e Odloak, 2016).

### 2.5.2 Estratégia de controle por zonas

Manter a variável controlada em um valor exato do *setpoint* pode não ser o objetivo de um controlador, mas sim mantê-la em uma região operacional (Maciejowski, 2002). Essa abordagem, denominada de controle por zonas, é aplicada, geralmente, em duas condições distintas. Ou o valor da saída não é importante e seu valor deve ser mantido em uma faixa por razões operacionais como, por exemplo, o nível de um reator, ou há mais variáveis controladas do que manipuladas. No segundo caso, a estratégia de controle por zonas é implementada, pois não há graus de liberdade suficientes para realizar o controle das variáveis de saída com *setpoints* fixos (Alvarez, 2012).

Um método simples de realizar o controle por zonas, implementado nos EMPC's apresentados na Seções 2.3 e 2.4, é a penalização da distância entre a saída e o *setpoint* apenas quando a saída estiver fora da zona de controle, situação na qual o *setpoint* será o limite mais próximo da variável controlada. Quando a saída se encontrar dentro da zona de controle, o erro de predição é condicionado a zero, geralmente, pela alteração da matriz peso  $Q$ . Embora essa abordagem forneça um desempenho aceitável, ela não tem garantia de estabilidade, pois o problema de otimização é modificado sempre que a saída cruza um dos seus limites da zona de controle, o que pode afetar a convergência, estabilidade e viabilidade do sistema (Alvarez, 2012).

Uma outra implementação da estratégia de controle por zona foi proposta por González e Odloak (2009) de forma a preservar a garantia de estabilidade do sistema. Em seu trabalho, um IHMPC com modelo de predição OPOM (Equações 66 e 67) é usado em uma configuração integrada com a RTO para manter a saída do sistema em uma faixa operacional, enquanto a variável manipulada é atuada em direção ao *setpoint* recebido da RTO. O controle por zonas é feito ao considerar o *setpoint* da saída  $y_{sp}$  como uma variável do problema de otimização. A formulação desse IHMPC é fornecida nas Equações 60-67.

$$\begin{aligned}
\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{y,k}, \delta_{u,k}, \mathbf{y}_{sp}} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{sp}) & \quad (60) \\
= \sum_{j=1}^m [\mathbf{x}^s(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \delta_{y,k}]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}^s(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \delta_{y,k}] \\
+ (\mathbf{x}^d(k+m|k))^T \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{x}^d(k+m|k)) \\
+ \sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{sp} - \delta_{u,k}]^T \mathbf{R}_u [\mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{sp} - \delta_{u,k}] \\
+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + \delta_{y,k}^T \mathbf{S}_y \delta_{y,k} + \delta_{u,k}^T \mathbf{S}_u \delta_{u,k}
\end{aligned}$$

Sujeito a:

$$\mathbf{u}(k+m-1|k) - \delta_{u,k} - \mathbf{u}_{sp} = \mathbf{0} \quad (61)$$

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \delta_{y,k} - \mathbf{y}_{sp} = \mathbf{0} \quad (62)$$

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (63)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (64)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (65)$$

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F}_N \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (66)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \Psi] \mathbf{x}(k|k) \quad (67)$$

Onde  $\delta_{y,k}$  são as variáveis de folga da saída e  $\delta_{u,k}$  são as variáveis de folga da entrada. O controle por zona é definido pela restrição da [Equação 65](#) junto com a adição de  $\mathbf{y}_{sp}$  como variável na função objetivo ([Equação 60](#)).

Essa formulação permite ao sistema violar a região de controle no estado transiente, o que aumenta a região factível de sua solução, sem que o controlador seja alterado ao cruzar os limites da zona de controle. Isso abriu caminho para o desenvolvimento de novos MPC integrados com a RTO com garantia de estabilidade ([Alvarez et al., 2009](#); [Alvarez e Odloak, 2010](#)) e novos EMPC's ([Alvarez e Odloak, 2014](#)).

## 2.6 Garantia de estabilidade

O sucesso do MPC no meio industrial aconteceu pela simplicidade e facilidade de controlar sistemas multivariáveis com restrições operacionais de maneira eficiente. Inicialmente, o

problema de otimização do MPC não tinha garantia de estabilidade, mas o uso de um horizonte de controle excessivamente longo garantia essa propriedade ao processo. Consequentemente, a propriedade de garantia de estabilidade não recebeu muita atenção da comunidade industrial, enquanto que a comunidade acadêmica a investigava empiricamente (Mayne, 2014).

No ano 2000, entretanto, um artigo condicionando a estabilidade nominal ao critério de Lyapunov criou um consenso na comunidade acadêmica sobre a forma de investigar essa propriedade (Mayne et al., 2000). Esse trabalho analisou e obteve a estabilidade nominal do MPC em sistemas lineares e não lineares pela adição de condições terminais ao problema de otimização (Mayne, 2014).

A estabilidade nominal pela definição de Lyapunov é garantida pelo cumprimento de três propriedades: viabilidade recursiva, convergência e cumprimento do critério de Lyapunov.

Dado um problema de otimização com a seguinte formulação:

$$\min_{\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k} J_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{m-1} l(\mathbf{x}(k+j+1|k), \mathbf{u}(k+j|k)) \quad (68)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad (69)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad (70)$$

Onde  $l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  é o custo associado a cada instante  $k+j$  no horizonte de controle  $m$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}): \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{des}}$  engloba todas as restrições de desigualdade,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}): \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  representa qualquer forma de restrição de igualdade do problema e  $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}(k+1|k) \quad \mathbf{x}(k+2|k) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(k+m|k)]$ . Os domínios de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  definidos pelas restrições do problema (Equações 69 e 70) são denominados, respectivamente, de  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{U}$ .

A viabilidade recursiva define que se o problema de otimização (Equações 68-70) tiver uma solução ótima viável  $(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*)$  em um dado instante  $k$ , então também haverá uma solução ótima viável  $(\mathbf{x}_{k+j}^*, \mathbf{u}_{k+j}^*)$  em todos os instantes seguintes  $k+j \forall j \in \mathbb{N}$  contanto que o sistema permaneça sem perturbações. Essa propriedade está associada às restrições do problema de otimização (Equações 69 e 70), visto que elas determinam o domínio do problema de otimização. A formulação matemática da viabilidade recursiva é apresentada a seguir:

$$\left\{ \begin{aligned} &\exists (\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U}) \left| (\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*) = \arg \min_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})} J_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \exists (\mathbf{x}_{k+j}^*, \mathbf{u}_{k+j}^*) \right. \\ &\left. \in (\mathbb{X}, \mathbb{U}) \left| (\mathbf{x}_{k+j}^*, \mathbf{u}_{k+j}^*) = \arg \min_{(\mathbf{x}_{k+j}, \mathbf{u}_{k+j}) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})} J_{k+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \forall j \in \mathbb{N} \right. \right\} \quad (71) \end{aligned}$$

O critério de Lyapunov define a estabilidade local de um sistema não linear. Três condições referentes à função objetivo do problema de otimização definem esse critério: ela deve ser positiva definida, assintoticamente estável e decrescente em toda a sua trajetória.

A função objetivo é positiva definida se o seu valor for positivo em todo o domínio  $(\mathbb{X}, \mathbb{U})$  do problema de otimização. Essa propriedade é geralmente assegurada pelo uso de termos quadráticos ou modelagem condizente. A sua formulação matemática é apresentada na seguinte equação:

$$J_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0 \forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U}) \quad (72)$$

A condição de assintoticamente estável determina que a função objetivo ([Equação 68](#)) convergirá sempre ao mesmo ponto ótimo  $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)$  independente da condição inicial  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})$ . Além disso, o sistema será mantido nesse ponto de equilíbrio  $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)$  até a ocorrência de novas perturbações. Uma formulação matemática possível para essa propriedade é apresentada a seguir:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \arg \min_{(\mathbf{x}_{k+j}, \mathbf{u}_{k+j}) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})} J_{k+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U}) \quad (73)$$

A condição de decrescente em toda a trajetória define a derivada negativa da função objetivo em relação ao tempo. Esta propriedade é geralmente assegurada pela convergência do problema de otimização de minimização. Uma formulação possível para esta propriedade em tempo discreto é apresentada abaixo:

$$J_{k+j}(\mathbf{x}_{k+j+1}, \mathbf{u}_{k+j+1}) \leq J_{k+j}(\mathbf{x}_{k+j}, \mathbf{u}_{k+j}) \forall j \in \mathbb{N} \quad (74)$$

Embora o critério de estabilidade Lyapunov tenha sido bastante difundido dentro da área do MPC, ele é melhor adequado para MPC's reguladores do que EMPC's. A propriedade de decrescente em toda a sua trajetória pode não ser satisfeita para um EMPC, pois o mínimo da função econômica e, conseqüentemente, da função objetivo pode ocorrer no estado transiente. Os MPC's reguladores seguem um *setpoint* e estabilizam no valor mais próximo deste *target*, que será o mínimo global da função objetivo, pois ela é composta somente por termos reguladores que estarão em seu valor mínimo. O mínimo da função econômica e, conseqüentemente, do termo econômico da função objetivo, entretanto, pode ocorrer no estado transiente.

A convergência é definida pelo direcionamento do sistema a um estado estacionário finito  $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})$ , tal que o valor da função objetivo neste ponto seja menor do que o seu valor inicial. Essa definição está contida na união das condições de assintoticamente estável (**Equação 73**) e decrescente em toda a trajetória (**Equação 74**). Sua formulação é apresentada abaixo:

$$\min_{(\mathbf{x}_{k+\infty}, \mathbf{u}_{k+\infty}) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})} J_{k+\infty}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) = \alpha \leq \min_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \in (\mathbb{X}, \mathbb{U})} J_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) | \alpha \in \mathbb{R} \quad (75)$$

### 3 Proposta de controlador preditivo com objetivo econômico

#### 3.1 Base de desenvolvimento

O MPC econômico desenvolvido neste trabalho foi baseado no **Controlador 3** de Alvarez e Odloak (2014) como seu algoritmo base. A formulação deste EMPC, apresentada nas **Equações 76-83**, é constituída pelos termos regulatórios de um IHMPC regulador com modelo de predição OPOM (**Equações 82 e 83**) acrescidos de um termo econômico  $P_{eco}F_k$  na função objetivo (**Equação 76**) e de propriedades utilizadas no controle por zonas das variáveis controladas. Este último é realizado pela adição de  $\mathbf{y}_{sp,k}$  como variável do problema de otimização e pela inclusão de uma restrição limitando o seu domínio (**Equação 79**) conforme a estratégia proposta em González e Odloak (2009).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) & \quad (76) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k] \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + P_{eco}F_k + \delta_k^T \mathbf{S} \delta_k \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (77)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (78)$$

$$\mathbf{y}(k+\infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k = \mathbf{0} \quad (79)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp,k} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (80)$$

$$F_k = -\mathbf{w}_y \mathbf{y}(k+\infty|k) - \mathbf{w}_u \mathbf{u}(k+m-1|k) \quad (81)$$

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F} \mathbf{N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (82)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \mathbf{\Psi}] \mathbf{x}(k|k) \quad (83)$$

Onde  $F_k$  é uma aproximação linear da função econômica em todo o domínio do problema de otimização e  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  são as constantes lineares da aproximação linear referentes a  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente.

O controlador base (**Equações 76-83**) foi adicionado em Alvarez e Odloak (2014) apenas para a comparação de seu resultado com o dos demais controladores nas simulações do processo. A convenção de sinais adotada em sua função econômica aproximada foi feita por conhecimento

heurístico. Supondo que a minimização da função econômica seja obtida pelo aumento de  $\mathbf{u}$ , então  $\mathbf{w}_u$  deverá ser positivo. No caso inverso, onde o ganho econômico é obtido pela redução de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}_u$  deverá ser negativo. A mesma razão é seguida para  $\mathbf{y}$  e sua respectiva constante linear  $\mathbf{w}_y$ . A convenção de sinais da **Equação 81** está, portanto, associando o sinal do esforço de controle total  $\Delta \bar{\mathbf{u}}_k$  e a variação total da saída  $\Delta \bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}(k + \infty | k) - \mathbf{y}(k | k)$  com o sinal de suas respectivas derivadas na função econômica.

A estratégia de controle por zonas foi feita para ampliar a região factível do problema de otimização pela adição de variáveis de folga e pela adição do *setpoint*  $\mathbf{y}_{sp,k}$  dentre as variáveis do problema, o que atribui garantia de viabilidade ao controlador. O uso de um horizonte de predição infinito com a adição da restrição terminal (**Equação 79**), por outro lado, asseguram a convergência do sistema a uma solução finita. O horizonte infinito garante a existência de uma solução ótima dentro do horizonte de predição, enquanto a restrição terminal (**Equação 79**) força o controlador a atuar na direção de um estado estacionário. O critério de estabilidade de Lyapunov, entretanto, é descumprido na condição de positivo definido. Isso acontece quando o termo econômico da função objetivo (**Equação 76**) é negativo e de módulo maior que o somatório dos demais termos. Uma vez que o valor da função objetivo negativo não está limitado ao domínio dos números positivos, então a formulação do controlador base (**Equações 76-83**) não tem garantia de estabilidade. Os seus resultados promissores apresentados em Alvarez e Odloak (2014), entretanto, motivaram a sua escolha como base do desenvolvimento deste trabalho.

### 3.1.1 Análise de viabilidade

A análise de viabilidade do controlador base (**Equações 76-83**), considerando que o modelo do processo seja igual ao modelo da planta, é apresentada no **Teorema 1**, que garante tal propriedade ao controlador a partir de algumas suposições.

**Teorema 1.** O problema de otimização das **Equações 76-83** sempre terá uma solução factível, contanto que a condição inicial seja factível.

**Prova.** Em razão da restrição posicional da variável manipulada (**Equação 78**), suponha que a condição  $\mathbf{u}(k - 1) \in \mathbb{U}$  sempre seja verdadeira. Essa suposição garante que a solução  $\mathbf{u}(k + j | k) = \mathbf{u}(k - 1) \forall j = 0, 1, \dots, m - 1$  satisfaz a restrição da **Equação 78** para todo  $\{\mathbf{u}_{min} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R} | \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{max}\}$ . Colocando essa solução em sua forma incremental para se adequar às variáveis do problema de otimização (**Equações 76-83**), tem-se  $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ .

O vetor  $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$  também é uma solução factível para a restrição de esforço de controle (**Equação 77**), visto que  $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$  é a origem do domínio do problema de otimização para qualquer definição de  $\Delta \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R}$ .

O cumprimento da restrição terminal (**Equação 79**) independe da condição inicial em razão da adição das variáveis de folga  $\delta_k \in \mathbb{R}$ . A inexistência de um domínio finito para essas variáveis permite que o seu valor seja definido pelo rearranjo da restrição terminal (**Equação 79**) como:

$$\delta_k = \mathbf{y}(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \quad (84)$$

Que garante, portanto, a satisfação incondicional da restrição terminal (**Equação 79**).

Uma análise de casos com a **Equação 84** permite verificar que  $\delta_k \neq \mathbf{0}$  quando o *setpoint* econômico  $\mathbf{y}_{sp,k}$  for inactível para o modelo de predição e  $\delta_k = \mathbf{0}$  quando ele for factível, visto que tal propriedade é definida pela igualdade  $\mathbf{y}_{sp,k} = \mathbf{y}(k + \infty|k)$ .

A matriz peso das variáveis de folga  $\mathbf{S}$  tem ordem de grandeza bem acima das demais matrizes pesos na função objetivo (**Equação 76**), logo a função objetivo busca minimizar a variável de folga  $\delta_k$  pela minimização da diferença entre  $\mathbf{y}_{sp,k}$  e  $\mathbf{y}(k + \infty|k)$  conforme a **Equação 84**. A condição de  $\mathbf{y}_{sp,k} \neq \mathbf{y}(k + \infty|k)$ , entretanto, pode ocorrer em duas situações: alguma variável manipulada do sistema se encontra no limite de sua restrição posicional (**Equação 78**) ou o horizonte de controle  $m$  não é grande o suficiente para trazer o sistema à  $\mathbf{y}_{sp,k}$  enquanto satisfaz as restrições de esforço de controle (**Equação 77**). Conseqüentemente,  $\mathbf{y}_{sp,k} \neq \mathbf{y}(k + \infty|k)$  existe apenas quando alguma restrição do problema de otimização estiver ativa.

Uma vez que o *setpoint*  $\mathbf{y}_{sp,k}$  pode se diferenciar do modelo de predição, então o cumprimento da restrição da saída no estado estacionário (**Equação 80**) independe das condições iniciais do problema de otimização. Por fim, a **Equação 84** permite definir  $\mathbf{y}_{sp,k}$  como uma variável independente e  $\delta_k$  como uma variável dependente de  $\mathbf{y}_{sp,k}$ .

Como as **Equações 81-83** são restrições livres de igualdade, que não afetam a viabilidade do problema de otimização do controlador base (**Equações 76-83**), então a seguinte solução viável:

$$\{\Delta \mathbf{u}_k^\# = \mathbf{0}, \mathbf{y}_{sp,k}^\#, \delta_k^\# = \mathbf{y}^\#(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k}^\#\} \forall \mathbf{y}_{sp,k}^\# | \mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp,k}^\# \leq \mathbf{y}_{max}$$

Satisfará as restrições do problema de otimização (**Equações 76-83**) para qualquer  $\{\Delta \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_{min} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R}, \mathbf{y}_{min} \in \mathbb{R}, \mathbf{y}_{max} \in \mathbb{R} | \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{max}, \mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{max}\}$  quando a condição inicial  $\mathbf{u}(k - 1) \in \mathbb{U}$  for verdadeira.

A garantia de viabilidade é, portanto, obtida, visto que haverá pelo menos uma solução factível para o problema de otimização no instante  $k$  contanto que a suposição de  $\mathbf{u}(k-1) \in \mathbb{U}$  seja satisfeita.

### 3.2 Desenvolvimento do controle preditivo com objetivo econômico

Ao analisar detalhadamente todos os termos do controlador base ([Equações 76-83](#)), foi possível identificar possíveis melhorias em sua formulação para melhorar o seu desempenho econômico e ampliar sua aplicabilidade.

O uso de  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  constantes significa que uma única aproximação linear da função econômica é utilizada em todo o domínio de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  do problema de otimização. A precisão dessa abordagem, entretanto, depende da não linearidade da função econômica. Uma forma de diminuir essa imprecisão sem aumentar a carga computacional é realizar uma aproximação linear da função econômica a cada instante de tempo discreto  $k$ . Nesse caso, a otimização econômica do sistema é inserida no controlador pelas derivadas parciais da função econômica em relação a  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  nos seus respectivos pesos  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  ([Equações 91 e 92](#)). Como as derivadas parciais precisam ser calculáveis pela estrutura quadrática do controlador independente da formulação da função econômica para que não haja um aumento do esforço computacional, elas são calculadas pelas variáveis medidas do sistema a cada execução. As posições de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ , entretanto, foram mantidas no estado estacionário em sua multiplicação com os seus respectivos coeficientes  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  para manter a contabilização da otimização econômica em todo o horizonte de controle  $m$ . O EMPC proposto é apresentado nas [Equações 85-94](#).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) & \quad (85) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k] \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) + P_{eco} F_k + \delta_k^T \mathbf{S} \delta_k \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (86)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (87)$$

$$\mathbf{y}(k+\infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k = \mathbf{0} \quad (88)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp,k} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (89)$$

$$F_k = \mathbf{w}_y \mathbf{y}(k + \infty|k) + \mathbf{w}_u \mathbf{u}(k + m - 1|k) \quad (90)$$

$$\mathbf{w}_y = \left. \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{y}} \right|_k \quad (91)$$

$$\mathbf{w}_u = \left. \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{k-1} \quad (92)$$

$$\mathbf{x}(k + 1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F} \mathbf{N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (93)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \Psi] \mathbf{x}(k|k) \quad (94)$$

A convenção de sinais adotada na **Equação 90** foi invertida em relação à utilizada na **Equação 81**. Essa alteração busca associar os sinais de  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  com a variação da função econômica, porém ela causa uma inversão de suas relações com as variáveis  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente, conforme pode ser observado pelas **Equações 91 e 92**. Suponha que  $\mathbf{w}_y \leq \mathbf{0}$ , então a minimização da função objetivo (**Equação 85**) atua no sentido de aumentar  $\mathbf{y}(k + \infty|k)$ . Como  $\mathbf{w}_y$  é a derivada parcial de  $f_{eco}$  em função de  $\mathbf{y}$ ,  $df_{eco} \leq 0$  ocorre para  $d\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ , o que simboliza o sinal inverso da variação de  $\mathbf{y}$  em relação à  $\mathbf{w}_y$ . Em um caso onde  $\mathbf{w}_y \geq \mathbf{0}$ , a minimização da função objetivo (**Equação 85**) atuará no sentido de reduzir o valor de  $\mathbf{y}(k + \infty|k)$ , o que é caracterizado por  $d\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ , logo  $d\mathbf{y}$  apresenta novamente o sinal inverso ao de  $\mathbf{w}_y$ . O resultado da análise de sinais entre  $\mathbf{w}_y$  e  $d\mathbf{y}$  pode ser abrangido para  $\mathbf{w}_u$  e  $d\mathbf{u}$  por similaridade entre as **Equações 91 e 92**. Assim sendo, a inversão de sinais na **Equação 90** garante a atuação do controlador no sentido da redução da função econômica  $f_{eco}$ .

Um contraponto da aproximação linear da função econômica a cada instante discreto ocorre quando o mínimo global da função econômica acontece no estado transiente. Esse fato além de permitir a existência do mínimo da função objetivo do controlador proposto (**Equação 85**) no estado transiente, possibilita o aumento da função econômica e, conseqüentemente, da função objetivo entre os instantes  $k$  e  $k + 1$ . Isso significa que o controlador descumprir não apenas a condição de positivo definido do critério de estabilidade Lyapunov, mas também a condição de decrescente em toda a trajetória.

O controlador proposto (**Equações 85-94**) tem, portanto, garantia de viabilidade assegurada com base teórica, pois ele se difere do controlador base (**Equações 76-83**) apenas por duas restrições livres de igualdade (**Equações 91 e 92**). A mudança nos pesos  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  da função econômica simplificada  $F_k$ , entretanto, permite a existência de intervalos crescentes da função objetivo do controlador proposto (**Equação 85**). Uma vez que o termo econômico da função

objetivo ainda pode ser negativo, então o controlador proposto (**Equações 85-94**) descumpre ao menos duas condições do critério de estabilidade de Lyapunov. Consequentemente, ele não tem garantia de estabilidade no sentido de Lyapunov, porém isso não inviabiliza que ele tenha estabilidade assíntota. Todos os cenários de simulação do controlador proposto (**Equações 85-94**) convergiram sempre a estados estacionários, que em sua maioria eram a solução ótima. Além disso, um ponto de equilíbrio foi observado nas soluções subótimas pela simulação de seu subcenário múltiplas vezes a partir de diferentes condições iniciais. Dessa forma, os resultados das simulações do controlador proposto (**Equações 85-94**) indicaram que ele possa ser assintoticamente estável.

### 3.2.1 Análise de viabilidade

A garantia de viabilidade do controlador proposto (**Equações 85-94**) pode ser provada pelos mesmos princípios utilizados no **Teorema 1** para o controlador base (**Equações 76-83**), porém com uma diferente numeração das equações. Essa análise é apresentada no **Teorema 2**.

**Teorema 2.** O problema de otimização das **Equações 85-94** sempre será ter a solução factível desde que a sua condição inicial também seja viável.

**Prova.** Suponha que a condição  $\mathbf{u}(k - 1) \in \mathbb{U}$  seja sempre verdadeira. Segundo o **Teorema 1**, essa suposição garante a existência de pelo menos uma solução viável de seguinte forma ao controlador base (**Equações 76-83**):

$$\{\Delta \mathbf{u}_k^\# = \mathbf{0}, \mathbf{y}_{sp,k}^\#, \delta_k^\# = \mathbf{y}^\#(k + \infty | k) - \mathbf{y}_{sp,k}^\#\}$$

Essa solução, entretanto, deve ter sua viabilidade avaliada para as restrições do controlador proposto (**Equações 86-94**).

A restrição de esforço de controle (**Equação 86**) é satisfeita, pois  $\Delta \mathbf{u}_k^\# = \mathbf{0}$  se encontra na origem de seu domínio para qualquer  $\Delta \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R}$ .

A restrição posicional da variável manipulada (**Equação 87**) é satisfeita para  $\Delta \mathbf{u}_k^\# = \mathbf{0}$ , pois  $\mathbf{u}(k + j | k) = \mathbf{u}(k - 1) \forall j = 0, 1, \dots, m - 1$  é uma solução viável.

A definição da variável  $\mathbf{y}_{sp,k}^\#$  como uma variável independente conforme apresentado na solução  $\{\Delta \mathbf{u}_k^\# = \mathbf{0}, \mathbf{y}_{sp,k}^\#, \delta_k^\# = \mathbf{y}^\#(k + \infty | k) - \mathbf{y}_{sp,k}^\#\}$  garante o cumprimento de sua restrição da estratégia de controle por zonas (**Equação 89**).

A restrição terminal (**Equação 88**), por outro lado, define a igualdade  $\delta_k^\# = \mathbf{y}^\#(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k}^\#$ , conforme a **Equação 84**, logo a definição dessa igualdade na solução garante a satisfação dessa restrição.

Por fim, todas as cinco restrições de igualdade das **Equações 90-94** são restrições livres de igualdade que não afetam a viabilidade do controlador. Dessa forma,  $\{\Delta \mathbf{u}_k^\# = \mathbf{0}, \mathbf{y}_{sp,k}^\#, \delta_k^\# = \mathbf{y}^\#(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k}^\#\}$  também será sempre uma solução válida para o problema de otimização do controlador proposto (**Equações 85-94**) para qualquer  $\{\Delta \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_{min} \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_{max} \in \mathbb{R}, \mathbf{y}_{min} \in \mathbb{R}, \mathbf{y}_{max} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{max}, \mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{max}\}$  contanto que  $\mathbf{u}(k - 1)$  seja viável.

## 4 Metodologia

### 4.1 Escolha dos processos químicos presentes na literatura para simulação

O desempenho do controlador proposto foi avaliado em simulações de processos químicos presentes em trabalhos científicos sobre EMPC. Essa opção foi feita com o propósito de viabilizar a análise gráfica do desempenho do controlador proposto (**Equações 85-94**) e a verificação da convergência do sistema ao estado estacionário ótimo. Embora esse método não seja muito preciso, ele implica na adição de um controlador não implementado à análise de desempenho do controlador proposto.

Os processos químicos simulados neste trabalho, além de estarem presentes em publicações recentes relacionadas ao EMPC, precisam ter seu comportamento dinâmico representável por modelos lineares. Diversos EMPC's de publicações recentes utilizaram modelos fenomenológicos não lineares do processo em sua simulação como consequência da formulação não linear de seus controladores. Dessa forma, é necessário verificar se a dinâmica desses modelos fenomenológicos se ajusta bem a modelos lineares. A definição de um ajuste satisfatório é feita quando o modelo linear apresenta um perfil dinâmico semelhante ao modelo fenomenológico e apresenta um erro percentual máximo de 15% em relação aos seus valores estáticos.

### 4.2 Simulação do processo

Os comportamentos dinâmicos de todos os processos presentes neste trabalho foram simulados em pela resolução numérica de modelos fenomenológicos de formulação geral:

$$\frac{dy}{dt} = h(y, u) \quad (95)$$

A resolução da **Equação 95** foi feita pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg a cada instante de tempo discreto  $k$ . Suas soluções representam o comportamento dinâmico real da planta para todas as simulações dos casos de estudo. Dessa forma, é suposto que o modelo fenomenológico representa perfeitamente o comportamento dinâmico do sistema.

### 4.3 Identificação do modelo linear

A identificação dos modelos lineares utilizados pelos controladores nas simulações deste trabalho foi realizada de acordo com a seguinte sequência de tarefas:

1. Os processos encontrados em artigos recentes sobre EMPC's foram, inicialmente, simulados com as equações diferenciais do modelo fenomenológico sujeito a todos os parâmetros e condições fornecidas por alguma de suas referências de origem.
2. Ajustes de precisão nos valores informados para os seus parâmetros foram feitos, quando necessário, para garantir que o sistema simulado pelo modelo fenomenológico convirja ao mesmo estado estacionário ótimo informado na literatura.
3. O processo foi então simulado a partir do estado estacionário ótimo até a inserção de perturbação em forma de degrau no instante  $t = t_0$  em algum componente da variável manipulada  $\mathbf{u}$  para gerar os dados do comportamento dinâmico do processo. Os dados entre o instante  $t = t_0$  e o instante  $t = t_1$ , quando o sistema estabiliza em um estado estacionário, são armazenados para a obtenção dos modelos lineares dos comportamentos dinâmicos das saídas do processo em relação à variável manipulada perturbada.
4. Modelos lineares de função de transferência (**Equação 44**) com  $na \leq 2$  foram identificados pelos dados armazenados em  $t_0 \leq t \leq t_1$  e simulados sobre as mesmas condições do modelo fenomenológico para verificar o ajuste de seu comportamento dinâmico ao modelo fenomenológico. Essa análise é feita visualmente pela plotagem sobreposta dos dados obtidos com o modelo linear e com o modelo fenomenológico. Essa plotagem também permite verificar a diferença estática existente entre os modelos.
5. A análise do perfil do modelo linear gera três caminhos possíveis. Se o comportamento dinâmico da simulação do modelo linear se ajustou bem ao comportamento do modelo fenomenológico e o ganho estático do modelo linear alcançou erro percentual máximo de 15% em relação ao modelo fenomenológico, então a linearização foi considerada satisfatória e voltou-se à etapa 3 para perturbações em outros componentes da variável manipulada  $\mathbf{u}$ . Se o modelo linear não cumpriu alguma condição, mas indicou que a satisfação dessa condição é possível, então realizou-se um ajuste fino sobre os parâmetros  $r_{i,j,k}$  e  $b_{i,j,k}$  do modelo linear e voltou-se ao início da etapa 5. O modelo fenomenológico foi considerado inapto para ser usado neste trabalho quando foi notado que o seu perfil dinâmico é irrepresentável por um modelo linear para o seu domínio. Por outro lado, o modelo fenomenológico foi considerado apto para ser inserido neste trabalho quando todas as suas dinâmicas foram bem ajustadas por modelos lineares.

#### 4.4 Definição dos controladores da simulação

O controlador proposto neste trabalho (**Equações 85-94**) é denominado como **Controlador 1** no prosseguimento deste documento em suas simulações dos casos de estudo.

O uso da entrada  $\mathbf{u}(k + m - 1|k)$  e da saída  $\mathbf{y}(k + \infty|k)$  no termo econômico do **Controlador 1** (**Equação 90**) agrega o ganho econômico ao estado estacionário, porém o negligencia durante o horizonte de controle  $m$ . O ótimo econômico pode ser um ponto operacional, porém a otimização econômica na trajetória cria uma oportunidade de melhorar o desempenho econômico. Dessa forma, o **Controlador 2**, apresentado nas **Equações 96-105**, foi implementado e simulado para analisar empiricamente o efeito da consideração da saída ao final do horizonte de controle  $\mathbf{y}(k + m|k)$  na função econômica simplificada. Tal análise foi feita considerando a convergência e o desempenho econômico do **Controlador 2** em comparação ao **Controlador 1**, cujas formulações se diferem apenas pela posição de  $\mathbf{y}$  em  $F_k$ .

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_k} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) & \quad (96) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k] \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k + j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k + j|k) + P_{eco} F_k + \delta_k^T \mathbf{S} \delta_k \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k + j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (97)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k + j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (98)$$

$$\mathbf{y}(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_k = \mathbf{0} \quad (99)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp,k} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (100)$$

$$F_k = \mathbf{w}_y \mathbf{y}(k + m|k) + \mathbf{w}_u \mathbf{u}(k + m - 1|k) \quad (101)$$

$$\mathbf{w}_y = \left. \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{y}} \right|_k \quad (102)$$

$$\mathbf{w}_u = \left. \frac{\partial f_{eco}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{k-1} \quad (103)$$

$$\mathbf{x}(k + 1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{F} \mathbf{N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (104)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \Psi] \mathbf{x}(k|k) \quad (105)$$

O controlador proposto por Zanin e colaboradores ([Equações 25-34](#)), denominado neste documento como **Controlador 3**, foi usado nas simulações dos casos de estudo com o objetivo de avaliar a diferença do esforço computacional entre um controlador de estrutura NLP e o **Controlador 1**, que tem estrutura quadrática. Embora o **Controlador 3** resolva um problema de otimização NLP, ele utiliza um modelo de predição linear de resposta ao degrau, portanto, o seu esforço computacional não é tão alto quanto outras opções presentes na literatura com modelos não lineares de predição compostos, geralmente, por equações diferenciais. Apesar da implementação do **Controlador 3** ter sido feita com o objetivo de analisar o esforço computacional, ela permitiu também a sua inclusão nas análises de desempenho econômico.

Por fim, uma estrutura hierárquica de controle com a integração da RTO com o MPC em três camadas, conforme o esquema ilustrado na [Figura 2](#), foi implementada e simulada. Essa abordagem, denominada de **Controlador 4** no restante do documento, é o método de controle mais comum em aplicações práticas, logo o objetivo de sua implementação é avaliar tanto o seu desempenho econômico quanto o seu esforço computacional em relação ao **Controlador 1**. A camada da RTO ([Equações 11-15](#)) foi executada em intervalos fixos definidos pelo tempo de resposta máximo observado durante a etapa de obtenção de modelo linear. A camada do MPC estático ([Equações 16-19](#)) obtém  $K_p$  pelo parâmetro  $D_0$  do modelo OPOM ([Equação 47](#)). A camada do MPC dinâmico, entretanto, tem uma formulação diferente da apresentada nas [Equações 20-24](#). O MPC dinâmico foi formulado com uso de horizonte de predição infinito e modelo OPOM, adição de restrição terminal e estratégia de controle por zonas para que sua formulação se assemelhe aos **Controladores 1 e 2**. Ela é apresentada nas [Equações 106-112](#).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}} J_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{sp}) & \quad (106) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k})^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}) \right] \\ &+ \left[ (\mathbf{u}(k+m-1|k) - \mathbf{u}_{sp})^T \mathbf{R}_u (\mathbf{u}(k+m-1|k) - \mathbf{u}_{sp}) \right] \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathbf{u}(k+j|k)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$-\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (107)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (108)$$

$$\mathbf{y}(k + \infty|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{0} \quad (109)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp,k} \leq \mathbf{y}_{max} \quad (110)$$

$$\mathbf{x}(k + 1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^d \mathbf{FN} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \quad (111)$$

$$\mathbf{y}(k|k) = [\mathbf{I}_{ny} \quad \boldsymbol{\Psi}] \mathbf{x}(k|k) \quad (112)$$

Como  $\mathbf{y}_{sp,k}$  é adicionado como uma variável ao problema de otimização pela estratégia de controle por zona, o MPC dinâmico segue apenas o *target*  $\mathbf{u}_{sp}$  calculado pelo MPC estático.

#### 4.5 Análise da função econômica

As funções econômicas de cada um dos processos simulados neste trabalho foram analisadas para conferir quando o controlador proposto ([Equações 85-94](#)) leva o sistema ao estado estacionário ótimo mesmo com a aproximação linear da função econômica. A determinação dos pontos mínimos da função econômica de cada subcenário presente nos casos de estudo foi feita pela aplicação e resolução das condições de Karush-Kuhn-Tucker para cada problema econômico, que é definido conforme a camada RTO do **Controlador 4**. Essas condições fornecem uma forma de analisar soluções subótimas que possam vir a ocorrer com o **Controlador 1**.

##### 4.5.1 Condições de Karush-Kuhn-Tucker

As condições de Karush-Kuhn-Tucker permitem encontrar ou qualificar os pontos críticos de um NLP a partir da formulação e subsequente resolução de um problema de otimização com uma função objetivo rotacionada, denominada operador lagrangeano. Esse problema dual engloba tanto as restrições de desigualdade do problema econômico primal quanto restrições de otimalidade.

Primeiramente, é necessário rearranjar o problema de otimização da RTO ([Equações 11-15](#)) como:

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{u}} f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (113)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0} \quad (114)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (115)$$

Onde  $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  ainda representa o modelo estático rígido do processo, porém o termo  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  abrange todas as restrições operacionais de desigualdade ao invés de apenas as restrições não lineares de  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ .

O operador lagrangeano  $\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}): \mathbb{R}^{nx} \times \mathbb{R}^{nu} \times \mathbb{R}^{ni} \times \mathbb{R}^{ndes} \rightarrow \mathbb{R}$  do problema de otimização das **Equações 113-115** pode ser definido como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{ni} \lambda_i h_i(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{ndes} \mu_i g_i^*(\mathbf{y}, \mathbf{u})$$

Que escrito em forma vetorial se torna:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu} \mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (116)$$

Supondo que tanto a função econômica  $f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  quanto as restrições  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  sejam continuamente diferenciáveis em qualquer  $\{(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \in (\mathbb{Y}, \mathbb{U}): \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^{ny}, \mathbb{U} \in \mathbb{R}^{nu}\}$ , então a solução  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  será um ponto crítico se a primeira derivada de  $\mathcal{L}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  for nula, ou seja,  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$ . Substituindo a **Equação 116** em tal igualdade, tem-se:

$$\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{h}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\mu} \nabla \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0} \quad (117)$$

A **Equação 117** deve ser válida para qualquer quantidade de restrições de igualdade e de desigualdade. Em um caso apenas com restrições de desigualdade, a **Equação 117** se torna:

$$\begin{aligned} \nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\mu} \nabla \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) &= \mathbf{0} \\ \nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) &= -\boldsymbol{\mu} \nabla \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \end{aligned} \quad (118)$$

A **Equação 118** pode então ser analisada em dois casos distintos. No primeiro caso, suponha que existe algum componente  $i$  da restrição  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  tal que  $g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = 0$ , logo o gradiente  $\nabla g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  apontará para fora da sua curva de nível, o que é expressado vetorialmente por  $\nabla g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) > \mathbf{0}$ . No segundo caso, suponha que o ponto  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  se encontra dentro do domínio definido por  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) < \mathbf{0}$ , logo o ponto crítico terá  $\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ , o que resulta em  $\boldsymbol{\mu} \nabla \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$  pela **Equação 118**.

A solução de um problema primal de minimização (**Equações 113-115**) tem  $\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \leq \mathbf{0}$ , que deve ser satisfeita tanto para  $g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = 0$  quanto para  $g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) < 0$ . Dessa forma, a **Equação 118** define  $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$  pela possibilidade do gradiente  $\nabla g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) > \mathbf{0}$ .

A restrição do domínio de  $\boldsymbol{\mu}$  em  $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$  pela sua relação com o gradiente  $\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  é obtida pela aplicação de um problema de minimização à **Equação 118**. Em um caso de maximização da função econômica, o gradiente  $\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \geq \mathbf{0}$  substituído à **Equação 118** define  $\boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{0}$ , pois o gradiente  $\nabla g_i^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) > \mathbf{0}$  é mantido para os pontos contidos nas curvas nível das restrições de desigualdade. Ampliando a análise do domínio de  $\boldsymbol{\mu}$  para um ponto de sela em  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$ , este ponto terá  $\left(\frac{df_{eco}}{dy_i}\right)_{(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)} \geq 0$  e  $\left(\frac{df_{eco}}{dy_j}\right)_{(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)} \leq 0$  para componentes  $i$  e  $j$  tal que

$i \neq j$ , o que aplicado à **Equação 118** gera a presença de componentes  $\mu_i \leq 0$  e  $\mu_j \geq 0$  no vetor  $\mu$ .

Além da condição de  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = \mathbf{0}$ , o ponto  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  será um mínimo local apenas se houver  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) \in (\mathbb{Y}', \mathbb{U}')$ ,  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \in (\mathbb{Y}', \mathbb{U}') | (\mathbb{Y}', \mathbb{U}') \subset (\mathbb{Y}, \mathbb{U})$  tal que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mu) \leq \mathcal{L}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}, \mu)$$

$$f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\lambda}h(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) + \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \leq f_{eco}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) + \boldsymbol{\lambda}h(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) + \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$$

Que pela **Equação 115** é simplificada para:

$$f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) + \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \leq f_{eco}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) + \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$$

E rearranjada como:

$$f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) - f_{eco}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) \leq \mu(\mathbf{g}^*(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) - \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)) \quad (119)$$

A definição do problema de minimização primal de que  $\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) \leq \mathbf{0}$  garante que o lado esquerdo da desigualdade da **Equação 119** seja negativo definido quando  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$  é um mínimo local. Além disso, esse lado tem limite superior em  $\mathbf{0}$  no ponto  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) = (\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$ , logo a **Equação 119** se desenvolve como:

$$\mathbf{0} \leq \mu(\mathbf{g}^*(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) - \mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)) \quad (120)$$

A **Equação 120** deve ser satisfeita tanto para  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$  quanto para  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) < \mathbf{0}$ , sendo que o primeiro caso define  $\mathbf{0} \leq \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$ , onde  $\mu \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{g}^*(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) \leq \mathbf{0}$  são definidos, respectivamente, pela aplicação do problema de minimização à **Equação 118** e pela **Equação 114**. A satisfação da **Equação 120** fica, portanto, condicionada a:

$$\mathbf{0} = \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (121)$$

Que também representa a solução da **Equação 118** quando  $\nabla f_{eco}(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$  é alcançável.

A **Equação 121** é chamada de restrição de complementaridade e ela é uma das três condições de otimalidade definidas pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker. A **Equação 117**, que define as condições de primeira ordem de um ponto crítico, e a restrição do sinal de  $\mu \geq \mathbf{0}$ , que define o tipo de ponto crítico como mínimo local, são as outras duas.

Por fim, é possível definir o seguinte problema de otimização dual de minimização da função econômica conforme as condições de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mu} \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = f_{eco}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}h(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (122)$$

Sujeito a:

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = \mathbf{0} \quad (123)$$

$$\mathbf{0} = \mu \mathbf{g}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (124)$$

$$\mu \geq 0 \quad (125)$$

$$g^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad (126)$$

Onde as restrições de igualdade  $h(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  estão contidas na restrição da primeira derivada do operador lagrangeano (**Equação 123**) pelas derivadas parciais de  $\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mu)$  em relação aos multiplicadores  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\mu$ , respectivamente.

#### 4.5.2 Aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker

Todo os mínimos locais do problema econômico primal (**Equações 113-115**) são também soluções mínimas do problema dual baseado nas condições de Karush-Kuhn-Tucker (**Equações 122-126**), logo ambos os problemas são passíveis de serem usados no cálculo destes extremos. Neste trabalho, entretanto, calculou-se os pontos mínimos de cada um dos subcenários apenas pela resolução do problema dual (**Equações 122-126**) para assim conferir os seus respectivos valores dos multiplicadores de Lagrange  $\mu$ . A busca por todos os pontos mínimos de cada um dos subcenários dos casos de estudo foi feita pela resolução deste problema múltiplas vezes a partir de diferentes estimativas iniciais diferentes. Essa abordagem apenas permitiu conferir que todos os problemas econômicos neste trabalho são convexos, visto que todos os subcenários apresentaram apenas uma solução mínima conforme pode ser observado na **Seção 5**.

A inserção das condições de Karush-Kuhn-Tucker neste trabalho, entretanto, foi feita para qualificar estados estacionários obtidos pelo **Controlador 1** (**Equações 85-94**) que sejam diferentes das soluções mínimas do problema econômica. A aplicação deste estado estacionário divergente em um sistema definido pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (**Equações 123 e 124**) permitiu caracterizá-lo. Se o sistema das **Equações 123 e 124** apresentar solução factível, então este estado estacionário será um ponto crítico da função econômica, cujo tipo é definido pelo multiplicador de lagrange  $\mu$ . Caso não haja solução factível, o estado estacionário não será um ponto crítico do problema econômico e será definido como uma solução subótima causada pela divergência entre a função econômica NLP e a sua formulação simplificada.

#### 4.6 Simulação de cenários

O desempenho econômico do **Controlador 1** foi avaliado, primeiramente, pela simulação de cenários idênticos aos encontrados na literatura para os processos utilizados nos casos de estudo. Cada caso de estudo teve, portanto, um cenário de simulação com condições iniciais e perturbações definidas por uma referência. A simulação desse cenário, denominado como **Cenário 1** em cada caso de estudo, permite comparar o desempenho econômico do

**Controlador 1** a um controlador não implementado a partir de uma análise gráfica. Ela permite avaliar o comportamento dinâmico do sistema e fornece uma base para a sintonia de cada um dos controladores implementados ao mesmo processo. Além disso, no **Caso 2**, há resultados numéricos que também foram comparados.

Além de um cenário retirado da literatura, cada caso de estudo também foi, posteriormente, simulado sobre subcenários com variações na função econômica, adições de perturbações no sistema e/ou alterações nas zonas de controle. Esse cenário com fontes adicionais de incerteza, denominado de **Cenário 2**, foi simulado para avaliar computacionalmente a estabilidade assintota do **Controlador 1** e a viabilidade recursiva de todos os controladores. A estabilidade assintota foi aferida, inicialmente, pela convergência do sistema a um estado estacionário ótimo, cuja propriedade de ponto de equilíbrio é pressuposta. Caso o sistema convirja para uma solução subótima que não seja um ponto crítico da função econômica, então uma análise da estabilidade assintota é feita por múltiplas simulações de seu respectivo subcenário sob diferentes condições iniciais. A convergência de todas as simulações dessa análise à mesma solução subótima a caracteriza como um ponto de equilíbrio desse subcenário. A viabilidade recursiva, por outro lado, foi aferida por indicadores presentes nas simulações que são modificados se o problema de otimização apresentar solução inviável em uma dada execução. Embora o **Controlador 1** não tenha sequer garantia de convergência nominal, essa análise junto com a da função econômica confere ao menos alguma confiabilidade ao controlador.

Por fim, as análises de esforço computacional são realizadas pela realização sequencial das simulações de todos os controladores para cada cenário definido. A execução sequencial é necessária para reduzir os ruídos causados por programas executando em segundo plano. Além disso, todas as simulações foram realizadas em um mesmo computador com processador AMD FX-8320 3,50 GHz para incertezas nos valores absolutos entre diferentes casos de estudo. O esforço computacional foi caracterizado como o tempo de resolução dos problemas de otimização dos controladores a cada instante de tempo discreto  $k$ . Além disso, um esforço computacional total foi denominado como o tempo total de simulação obtido em um cenário para um dado controlador.

Como os processos são simulados a partir da resolução do modelo fenomenológico dos processos, utilizou-se um filtro de Kalman para calcular e atualizar os estados dos controladores implementados. Este filtro foi calculado por:

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{APC}^T(\mathbf{I}_{ny} + \mathbf{CPC}^T) \quad (127)$$

Onde o valor de  $\mathbf{P}$  é calculado pela seguinte equação implícita:

$$\mathbf{P} = \mathbf{APA}^T - \mathbf{APC}^T(\mathbf{I}_{ny} + \mathbf{CPC}^T)\mathbf{CPA}^T + \mathbf{I}_{nx} \quad (128)$$

A **Equação 128** é resolvida na primeira execução do controlador, o que causará em um inevitável pico de esforço computacional. Os parâmetros  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  são retirados do modelo de espaço estado incremental (**Equações 23 e 24**) presente nos **Controladores 1, 2 e 4**. Os seus estados foram atualizados a cada instante  $k$  pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) = & \mathbf{Ax}(k|k) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k|k) \\ & + \mathbf{K}_f[\mathbf{y}(k|k) - \mathbf{C}(\mathbf{Ax}(k|k) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k|k))] \end{aligned} \quad (129)$$

A **Equação 129**, entretanto, requer a definição de um estado inicial para começar os cálculos de atualização do estado a cada instante  $k$ . Embora nem sempre as simulações comecem no estado estacionário, o estado inicial de todas as simulações foi definido por  $\mathbf{x}_0^s = \mathbf{y}_0$  e  $\mathbf{x}_0^d = \mathbf{0}$ , o que significa um fator adicional de incerteza quando a simulação começar no estado transiente.

O uso de modelos fenomenológicos para representar o comportamento dinâmico do processo, por outro lado, foi uma fonte de incerteza presente em todas as simulações dos casos de estudo. Uma vez que a presença de incertezas significa a aplicação do **Controlador 1** em um sistema real. Isso prejudica pouco os resultados das simulações, visto que não se provou nem garantia de estabilidade e nem garantia de convergência para esse controlador em um cenário nominal.

## 5 Aplicações em estudos de caso

### 5.1 Caso 1: CSTR isotérmico

O primeiro processo estudado neste trabalho foi um reator CSTR isotérmico onde ocorre uma reação teórica de primeira ordem  $A \rightarrow B$ . Suas equações dinâmicas são obtidas pelo balanço de massa dos componentes A e B, apresentados nas [Equações 130 e 131](#), respectivamente. Esse processo foi encontrado em diversos artigos na literatura sobre EMPC ([Olanrewaju e Maciejowski, 2017](#); [Griffith et al., 2017](#); [Alessandretti et al., 2016](#); [Liu e Liu, 2016](#); [Zanon et al., 2014](#); [Jäschke et al., 2014](#); [Grüne e Stieler, 2014](#); [Grüne, 2013](#); [Amrit et al., 2011](#); [Diehl et al., 2011](#)).

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (C_{Af} - C_A) - k_r C_A \quad (130)$$

$$\frac{dC_B}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (C_{Bf} - C_B) + k_r C_A \quad (131)$$

Onde  $C_A$  e  $C_B$  são as concentrações molares de A e B [mol/L], respectivamente,  $F_{in}$  é a vazão volumétrica [L/min],  $V$  é o volume do reator [L] e  $k_r$  é a coeficiente da taxa de reação [ $\text{min}^{-1}$ ].

Esse processo foi encontrado na literatura com duas funções econômicas distintas e diferentes conjuntos de parâmetros. Este trabalho utilizou uma função econômica ([Equação 132](#)) baseada na formulação proposta em [Diehl et al. \(2011\)](#), porém com a adição de um custo variável  $p$  multiplicando cada um de seus termos. Essa variável foi adicionada para avaliar a atuação do **Controlador 1** em cenários com diferentes pontos operacionais. A formulação da função econômica ([Equação 132](#)), entretanto, ainda busca maximizar o lucro, que é calculado pela diferença entre o lucro relativo ao preço do produto B e o custo de separação de B em função da vazão  $F_{in}$ .

$$f_{eco} = -(2p(1)F_{in}C_B - 0,5p(2)F_{in}) \quad (132)$$

Seguindo a base de [Diehl et al. \(2011\)](#), a variável manipulada do processo é a vazão volumétrica  $F_{in}$ , as suas variáveis controladas são as concentrações de saída dos componentes A e B e o tempo de amostragem é fixado em 0,5 min. Os valores dos parâmetros e dos limites das restrições do processo são apresentados na [Tabela 1](#).

**Tabela 1.** Valores dos parâmetros e dos limites das variáveis do processo do **Caso 1**.

Variável	Valor	Parâmetro	Valor
$F_{in_{min}}$ (L/min)	0	$C_{Af}$ (mol/L)	1,0
$F_{in_{max}}$ (L/min)	20	$C_{Bf}$ (mol/L)	0
$\Delta F_{in_{min}}$ (L/min)	-5	$k_r$ (L/(mol·min))	1,2
$\Delta F_{in_{max}}$ (L/min)	5	$V$ (L)	10
$C_{A_{min}}$ (mol/L)	0	-	-
$C_{B_{min}}$ (mol/L)	0	-	-

O **Caso 1** não tem limite superior das variáveis controladas, porém tal valor é necessário no cálculo numérico dos **Controladores 1, 2 e 4** pelas restrições de *setpoints* (**Equações 89, 100 e 110**, respectivamente) impostas pela estratégia de controle por zona. Dessa forma, os valores  $C_{A_{max}} = 10^8$  mol/L e  $C_{B_{max}} = 10^8$  mol/L foram arbitrados para o cálculo numérico.

### 5.1.1 Obtenção de modelo linear

O trabalho de Diehl et al. (2011) apresenta um estudo do processo pela sua simulação a partir de diferentes condições iniciais, porém com o sistema sempre convergindo ao mesmo estado estacionário  $([C_{As} \ C_{Bs}], F_{in_s}) = ([0,5 \ 0,5], 12)$ . O mínimo global da função econômica ocorre exatamente nesse ponto  $f_{eco}([C_{As} \ C_{Bs}], F_{in_s}) = f_{eco_s} = -6$  para  $\mathbf{p} = [1 \ 1]$ , valor com o qual a função econômica (**Equação 132**) se equivale àquela apresentada em Diehl et al. (2011).

A identificação do modelo linear foi realizada, portanto, no entorno do estado estacionário ótimo  $([C_{As} \ C_{Bs}], F_{in_s}) = ([0,5 \ 0,5], 12)$ . Uma perturbação em forma de degrau  $F_{in}$  com amplitude 4 L/min foi inserida sobre o sistema em regime permanente em um dado  $t = t_0$ . Os dados no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_{final}$  foram então usados na identificação de um modelo de funções de transferência. Por fim, o modelo identificado e o modelo fenomenológico foram simulados em condições idênticas de degraus sucessivos entre  $8 \leq F_{in} \leq 16$  L/min para averiguar a necessidade de ajuste fino no modelo. A obtenção do modelo de funções de transferência da **Equação 133** alcançou erro percentual máximo de 5% no ajuste do comportamento estático do processo.

$$\begin{bmatrix} C_A(s) \\ C_B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05692 \\ s + 2,765 \\ -0,05692 \\ s + 2,765s \end{bmatrix} F_{in}(s) \quad (133)$$

### 5.1.2 Estudo da função econômica

O problema primal da função econômica do **Caso 1** (**Equação 132**) é definido pelas regiões delimitadas conforme a **Tabela 1** e pelo modelo fenomenológico (**Equações 130 e 131**) como:

$$\min_{C_A, C_B, F_{in}} f_{eco}(C_A, C_B, F_{in}, \mathbf{p}) = -(2p(1)F_{in}C_B - 0,5p(2)F_{in}) \quad (134)$$

Sujeito a:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_{in}}{V}(C_{Af} - C_A) - k_r C_A = 0 \quad (135)$$

$$\frac{dC_B}{dt} = \frac{F_{in}}{V}(C_{Bf} - C_B) + k_r C_A = 0 \quad (136)$$

$$0 \leq C_A \quad (137)$$

$$0 \leq C_B \quad (138)$$

$$0 \leq F_{in} \leq 20 \quad (139)$$

Aplicando o método das condições de Karush-Kuhn-Tucker (**Equações 122-126**) ao problema primal definido acima (**Equações 134-139**), tem-se:

$$\min_{C_A, C_B, F_{in}, \lambda, \mu} \mathcal{L}(C_A, C_B, F_{in}, \lambda, \mu, \mathbf{p}) \quad (140)$$

$$\begin{aligned} &= -2p(1)C_B F_{in} + 0,5p(2)F_{in} + \lambda_1 \left( \frac{F_{in}}{V}(C_{Af} - C_A) - k_r C_A \right) \\ &+ \lambda_2 \left( \frac{F_{in}}{V}(C_{Bf} - C_B) + k_r C_A \right) + \mu_1(-C_A + C_{Amin}) \\ &+ \mu_2(-C_B + C_{Bmin}) + \mu_3(F_{in} - 20) + \mu_4(-F_{in}) \end{aligned}$$

Sujeito às **Equações 137-139** acrescidas por:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_1} = \frac{dC_A}{dt} = \frac{F_{in}}{V}(C_{Af} - C_A) - k_r C_A = 0 \quad (141)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda_2} = \frac{dC_B}{dt} = \frac{F_{in}}{V}(C_{Bf} - C_B) + k_r C_A = 0 \quad (142)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_A} = -\lambda_1 \left( \frac{F_{in}}{V} + k \right) + \lambda_2 k_r - \mu_1 = 0 \quad (143)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_B} = -2F_{in} - \lambda_2 \left( \frac{F_{in}}{V} \right) - \mu_2 = 0 \quad (144)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{in}} = -2C_B + 0,5 + \frac{\lambda_1(C_{Af} - C_A)}{V} + \frac{\lambda_2(C_{Bf} - C_B)}{V} + \mu_3 - \mu_4 = 0 \quad (145)$$

$$\mu_1(-C_A + C_{Amin}) = 0 \quad (146)$$

$$\mu_2(-C_B + C_{Bmin}) = 0 \quad (147)$$

$$\mu_3(u - 20) = 0 \quad (148)$$

$$\mu_4(-u) = 0 \quad (149)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad (150)$$

Embora a **Tabela 1** defina os valores de  $C_{Amin}$  e  $C_{Bmin}$ , os seus valores numéricos não foram inseridos nas **Equações 140, 146 e 147**, pois eles são variáveis no **Caso 1: Cenário 2**.

A resolução do problema econômico dual (**Equações 137-150**) foi feita para todos os valores de  $\mathbf{p}$ ,  $C_{Amin}$  e  $C_{Bmin}$  utilizados nas simulações do **Caso 1**. A **Tabela 2** apresenta todos os extremos mínimos encontrados, assim como os valores de  $\mu_i$  diferentes de 0, cujos sinais caracterizam os pontos críticos. A não existência de  $\mu_i \neq 0$  significa que o ponto mínimo ocorre no interior do domínio do problema.

**Tabela 2.** Ponto mínimos da função econômica presentes no **Caso 1**.

$C_A$ (mol/L)	$C_B$ (mol/L)	$F_{in}$ (L/min)	$f_{eco}$	$\mathbf{p}$	$[C_{Amin} \ C_{Bmin}]$	$\mu_i \neq 0$
0,5	0,5	12	-6	[1 1]	[0 0]	–
0,293	0,707	4,971	-2,06	[1 2]	[0 0]	–
0	1	0	0	[0,5 2]	[0 0]	–
0,2	0,8	3	0,6	[0,5 2]	[0,2 0,2]	6,75

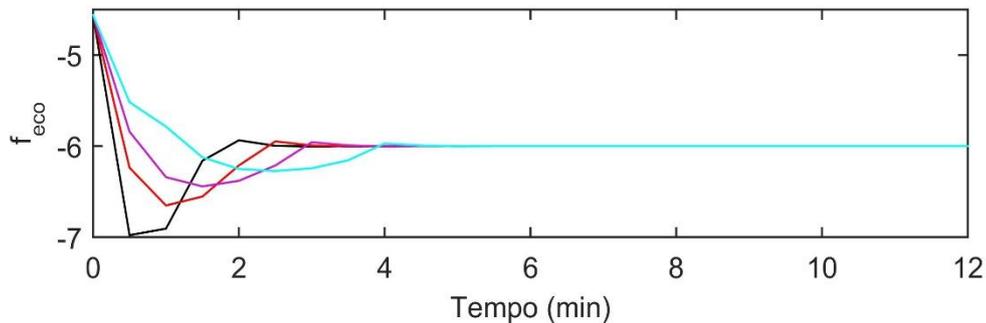
A **Tabela 2** mostra que o ponto  $([C_A \ C_B], F_{in}) = ([0,5 \ 0,5], 12)$  é realmente o mínimo global para  $\mathbf{p} = [1 \ 1]$ . Ela também permite observar que o valor de  $\mu_i \neq 0$  é alterado apenas após a variação da zona de controle, embora a solução de  $\mathbf{p} = [0,5 \ 2]$  para  $[C_{Amin} \ C_{Bmin}] = [0 \ 0]$  já se encontre em seu limite. Isso acontece, pois o ponto  $([C_A \ C_B], F_{in}) = ([0 \ 1], 0)$  representa o mínimo global do problema econômico irrestrito, ou seja, sem as restrições das **Equações 137-139**, logo  $\nabla f_{eco}([C_A \ C_B], F_{in}, \mathbf{p}) = \nabla f_{eco}([0 \ 1], 0, [0,5 \ 2]) = \mathbf{0}$ .

### 5.1.3 Sintonia

Somente a sintonia do controlador proposto neste trabalho (**Controlador 1**) é apresentada nesta seção para exemplificar a metodologia utilizada, entretanto, vale ressaltar que todos os controladores implementados (**Controladores 1-4**) passaram pelo mesmo procedimento, porém com matrizes peso diferentes a cada etapa.

O **Cenário 1** do **Caso 1**, que será detalhado na **Seção 5.1.4**, foi simulado diversas vezes sobre o **Controlador 1** definido por um conjunto arbitrário de parâmetros de sintonia  $\{\mathbf{Q} = \text{diag}[1 \ 1]; R = 1; P_{eco} = 20; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]\}$  fixo, enquanto se variou o valor de  $m$

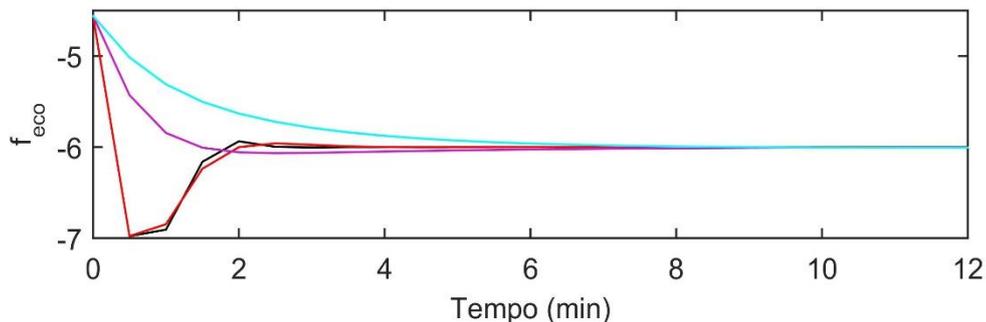
entre  $\{3; 5; 7; 10\}$  a cada simulação. A **Figura 3** apresenta os gráficos da evolução da função econômica durante essas simulações.



**Figura 3.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $m$  do **Controlador 1** para o **Caso 1**.

$m = 3$  (—),  $m = 5$  (—),  $m = 7$  (—) e  $m = 10$  (—).

A menor integral da função econômica aconteceu com  $m = 3$  conforme pode ser observado pela **Figura 3** pelo seu menor tempo de resposta. O valor de  $m = 3$  foi então fixado como valor ótimo junto de  $\mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]$ , que não foi contabilizado na sintonia, enquanto foram feitas simulações com os parâmetros arbitrários  $\{\mathbf{Q} = \text{diag}[1 \ 1]; P_{eco} = 20\}$  fixos e variações de  $R$  entre  $\{0,5; 1; 5; 10\}$ . A **Figura 4** apresenta os gráficos de sintonia de  $R$  para o **Caso 1**.

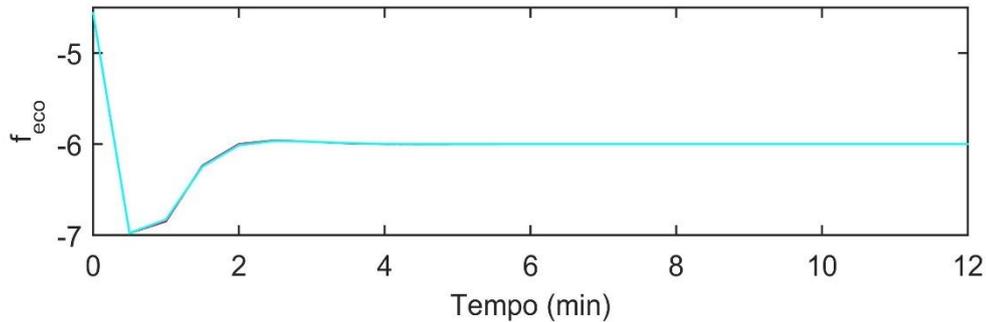


**Figura 4.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $R$  do **Controlador 1** para o **Caso 1**.

$R = 0,5$  (—),  $R = 1$  (—),  $R = 5$  (—) e  $R = 10$  (—).

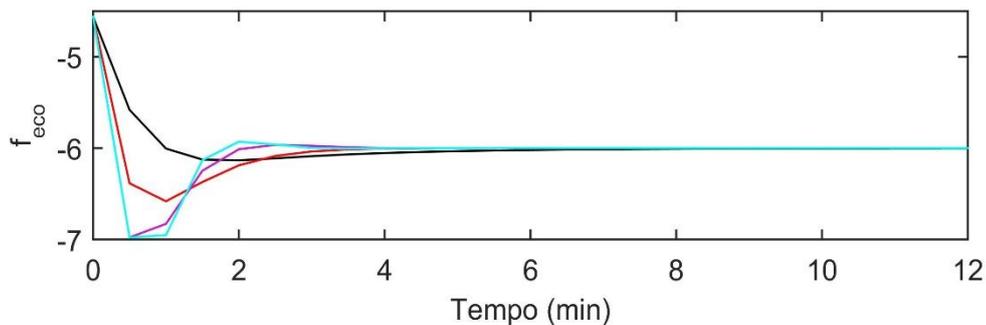
A **Figura 4** dificulta a determinação gráfica da sintonia ótima entre os casos de  $R = 0,5$  e  $R = 1$ , pois seus perfis econômicos são bem semelhantes, porém os dados numéricos da função econômica média  $\overline{f_{eco}}$  mostram que  $R = 0,5$  foi quem obteve o melhor desempenho. Embora este valor esteja no extremo da faixa analisada para  $R$ , estudos em valores em  $R < 0,5$  foram negligenciados, pois não houve expectativa de ganho expressivo nessa região, uma vez que as respostas das simulações com  $R = 0,5$  e  $R = 1$  já se encontram praticamente sobrepostas. Dessa forma, os valores sintonizados  $\{m = 3; R = 0,5; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]\}$  foram fixados junto com o valor arbitrário  $P_{eco} = 20$  enquanto se realizou diversas simulações variando a

matriz peso  $\mathbf{Q}$  entre  $\{diag[1\ 1], diag[10\ 10], diag[50\ 50], diag[100\ 100]\}$ . A **Figura 5** apresenta os gráficos da sintonia de  $\mathbf{Q}$  para o **Caso 1**.



**Figura 5.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $\mathbf{Q}$  do **Controlador 1** para o **Caso 1**.  $\mathbf{Q} = diag[1\ 1]$  (—),  $\mathbf{Q} = diag[10\ 10]$  (—),  $\mathbf{Q} = diag[50\ 50]$  (—) e  $\mathbf{Q} = diag[100\ 100]$  (—).

A **Figura 5** denota que a variação da matriz peso  $\mathbf{Q}$  tem pouca influência sobre a atuação do controlador, visto que um aumento de 100 vezes em seu valor não tira a sobreposição de seus perfis econômicos sobrepostos. O valor de  $\mathbf{Q} = diag[1\ 1]$  foi considerado como o valor ótimo de sintonia, pois o seu caso apresentou o menor  $\overline{f_{eco}}$  e valores inferiores de  $\mathbf{Q}$  foram negligenciados pela mesma razão da sintonia de  $\mathbf{R}$ . Finalmente, simulou-se o **Controlador 1** sobre os valores sintonizados  $\{m = 3; R = 0,5; \mathbf{S} = diag[10^8\ 10^8]; \mathbf{Q} = diag[1\ 1]\}$  enquanto se variou o último parâmetro  $P_{eco}$  entre  $\{1; 5; 10; 20\}$ . A **Figura 6** apresenta os gráficos dessa sintonia.



**Figura 6.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $P_{eco}$  do **Controlador 1** para o **Caso 1**.

$P_{eco} = 1$  (—),  $P_{eco} = 5$  (—),  $P_{eco} = 10$  (—) e  $P_{eco} = 20$  (—).

A **Figura 6** apresenta novamente dois perfis econômicos praticamente sobrepostos com o melhor desempenho econômico, entretanto, o valor de  $\overline{f_{eco}}$  definiu  $P_{eco} = 10$  como a sintonia ótima. Assim sendo, a sintonia ótima do **Controlador 1** para o **Caso 1** é finalizada com  $\{m = 3; \mathbf{S} = diag[10^8\ 10^8]; R = 0,5; \mathbf{Q} = diag[1\ 1]; P_{eco} = 10\}$ .

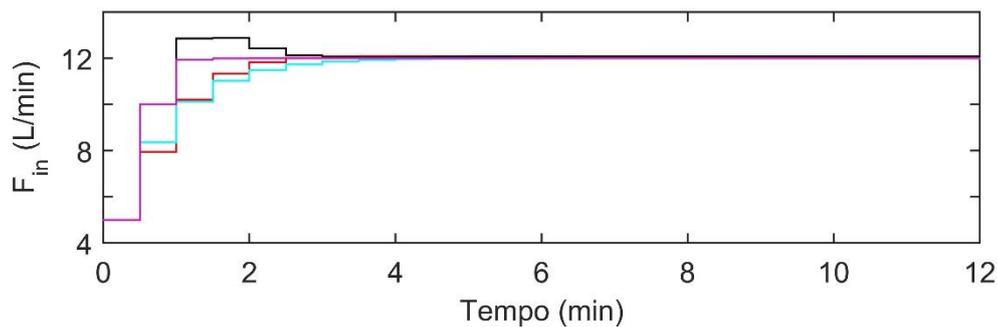
Após a realização do mesmo procedimento para os demais controladores implementados, chegou-se aos valores de sintonia apresentados na **Tabela 3**.

**Tabela 3.** Parâmetros de sintonia de cada um dos controladores implementados ao **Caso 1**.

Parâmetro	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$m$	3	5	2	3
$N_p$	-	-	15	-
$Q$	$diag[1 \ 1]$	$diag[1 \ 1]$	$diag[1 \ 1]$	$diag[1 \ 1]$
$R$	0,5	1	0,1	1
$P_{eco}$	10	10	30	-
$S$	$diag[10^8 \ 10^8]$	$diag[10^8 \ 10^8]$	-	$diag[10^8 \ 10^8]$
$P_y$	-	-	-	$diag[1 \ 1]$
$P_u$	-	-	-	1
$R_u$	-	-	-	30

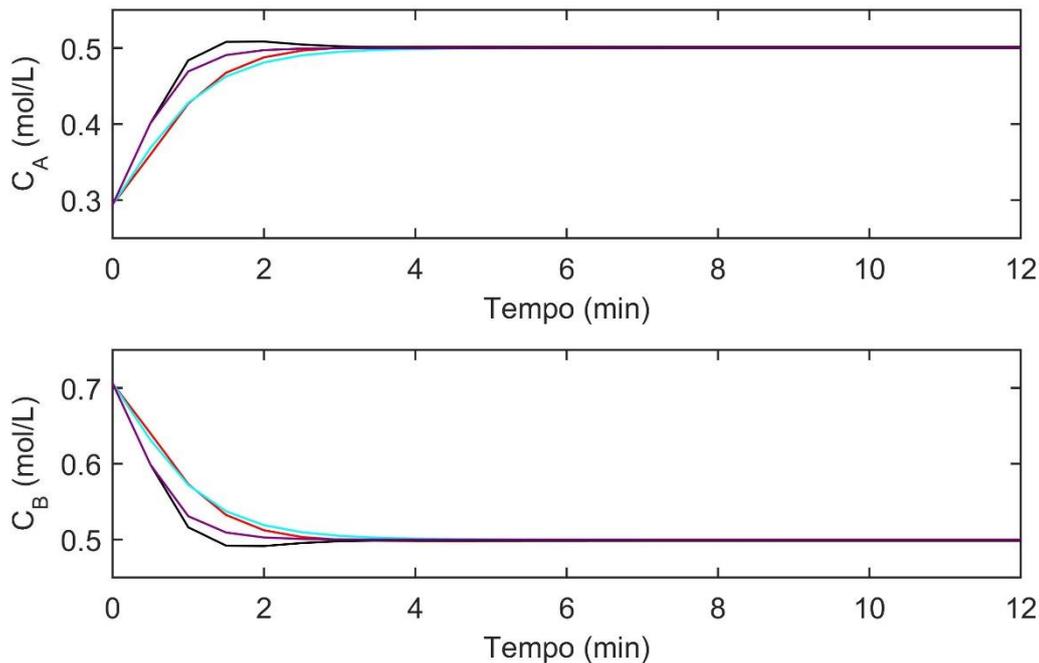
#### 5.1.4 Simulação do Cenário 1

Considerando a disparidade de condições iniciais encontradas na literatura, arbitrou-se a condição inicial  $([C_{A_0} \ C_{B_0}], F_{in_0}) = ([0,2941 \ 0,7059], 5)$  para a simulação de todos os controladores no **Caso 1: Cenário 1**. Esse ponto é um estado estacionário não ótimo, logo os controladores devem convergir o sistema ao ponto ótimo  $([C_{A_s} \ C_{B_s}], F_{in_s}) = ([0,5 \ 0,5], 12)$  para  $\mathbf{p} = [1 \ 1]$ . Os resultados das simulações do **Caso 1** sobre tais condições são apresentados nas **Figuras 7-9**.



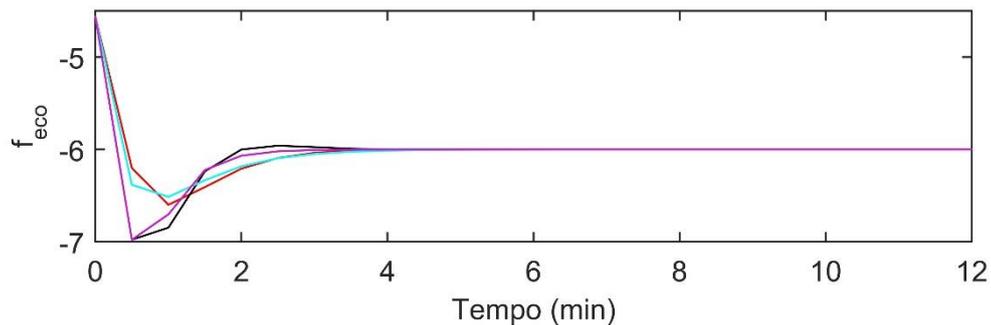
**Figura 7.** Evolução da variável manipulada em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 1**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).



**Figura 8.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 1.**

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).



**Figura 9.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 1.**

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

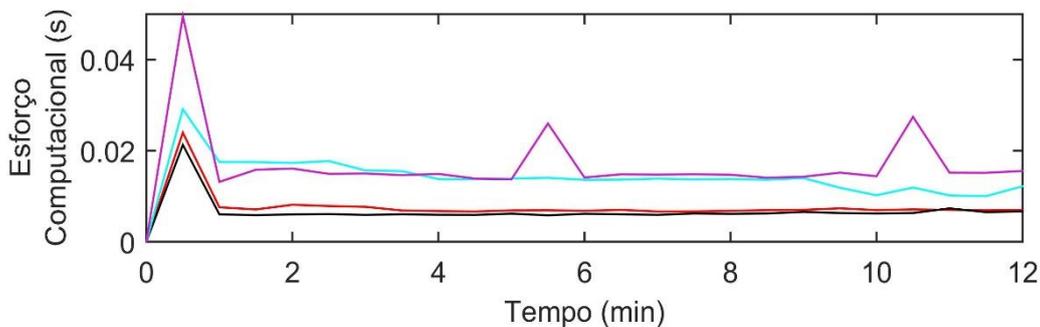
As **Figuras 7 e 8** e evidenciam que todos os controladores simulados foram capazes de direcionar o processo ao estado estacionário ótimo  $([C_{A_s} \ C_{B_s}], F_{in_s}) = ([0,5 \ 0,5], 12)$  apresentado na **Tabela 2**. A **Figura 9**, por outro lado, mostra que o mínimo econômico deste sistema ocorre no estado transiente, uma vez que todos os controladores tiveram o mínimo global da trajetória de sua função econômica em  $0 \leq t \leq 2$  min. Dessa forma, o desempenho econômico ligeiramente inferior dos **Controladores 2 e 3** pode ser atribuído aos seus esforços de controle mais conservadores conforme observado na **Figura 7**. Embora essa última conclusão se aplique ao **Controlador 2** no **Caso 1** em razão de sua sintonia, o **Controlador 3** tem essa propriedade definida em sua formulação, visto que o seu esforço de controle mais conservador também foi observado nos demais casos de estudo. Uma justificativa plausível

para tal comportamento seria a consideração da função econômica apenas no estado estacionário, o que negligencia o seu comportamento no estado transiente. Essa hipótese é melhor justificada com os resultados do **Caso 2: Cenário 2**. O **Controlador 1**, por outro lado, obteve ganho econômico no estado transiente mesmo considerando as posições finais das variáveis  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  em seu termo  $F_k$  (Equação 115), pois os termos  $\mathbf{w}_y$  e  $\mathbf{w}_u$  são as derivadas parciais das variáveis medidas a cada instante  $k$ , o que inclui o estado transiente. A Tabela 4 apresenta os valores da função econômica média  $\overline{f_{eco}}$  e do esforço computacional total encontrados nas simulações de cada controlador para o **Caso 1: Cenário 1**.

**Tabela 4.** Resultados numéricos do **Caso 1: Cenário 1**.

Propriedade	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$\overline{f_{eco}}$	-6,022	-6,005	-6,007	-6,022
Esforço computacional total (s)	0,164	0,187	0,348	0,412

A Tabela 4 confirma que os **Controladores 1 e 4** conseguiram um desempenho econômico ligeiramente superior ao dos demais controladores conforme é indicado pela Figura 9. Além disso ela permite observar um esforço computacional total menor para os **Controladores 1 e 2**, cujo problema de otimização tem formulação quadrática. A Figura 10 com os dados do esforço computacional em função do tempo de simulação permite identificar a causa dessa diferença.



**Figura 10.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 1**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

Os **Controladores 1 e 2** resolvem seus respectivos problemas de otimização, geralmente, na metade do tempo gasto pelos demais controladores, conforme pode ser observado na Figura 10. Isso condiz com os dados apresentados na Tabela 4. O pico inicial de esforço computacional presente em todos os controladores é causado pelo cálculo e definição de todos os seus parâmetros internos, o que inclui uma estimativa inicial mais distante da solução ótima para os problemas NLP dos **Controladores 3 e 4**. Os demais picos presentes na simulação do

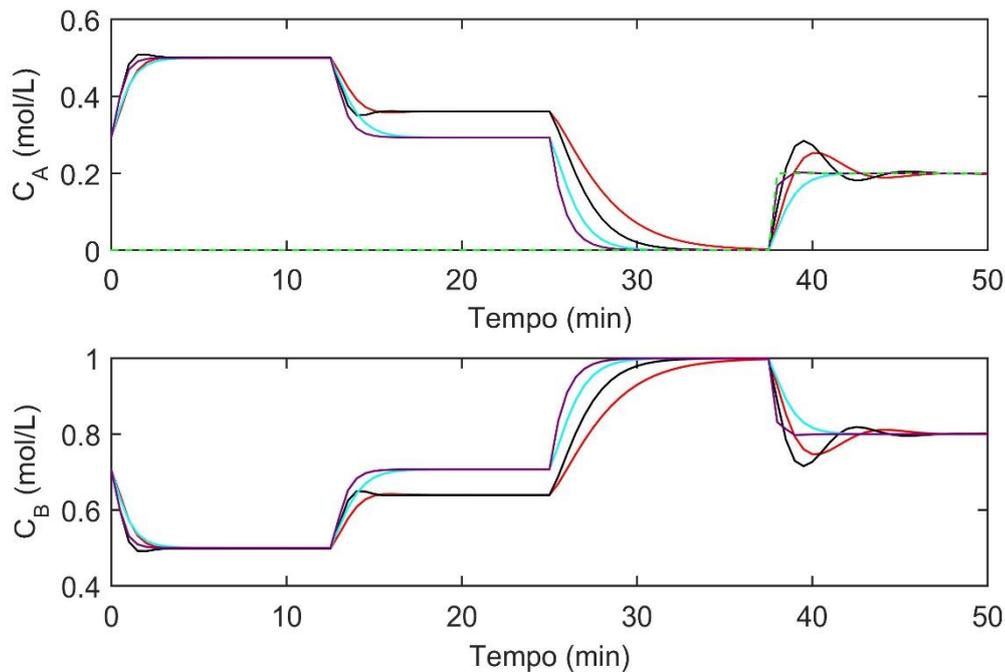
**Controlador 4** são causados pela execução de RTO a cada 5 minutos. Embora o esforço computacional de todas as simulações tenha se mantido na faixa de 0,007 a 0,05 segundos, o que viabilizaria a sua aplicação em tempo real, a diferença percentual entre os controladores pode ser importante. O **Caso 1** tem apenas uma variável manipulada e duas variáveis controladas, o que simboliza um caso simples. A diferença proporcional de esforço computacional proporcionada aos **Controladores 1 e 2**, entretanto, pode se tornar mais relevante conforme se aumenta a complexidade do sistema.

### 5.1.5 Simulação do Cenário 2

As condições iniciais do **Cenário 1** foram mantidas no **Cenário 2**, incluindo o vetor  $\mathbf{p}$ , porém seus valores foram posteriormente perturbados conforme os dados da **Tabela 5**. Além disso, o limite inferior da zona de controle  $[C_{A_{min}} \ C_{B_{min}}]$  foi alterado de  $[0 \ 0]$  para  $[0,2 \ 0,2]$  no instante  $t = 37,5$  min e mantido até o final da simulação em  $t = 50$  min. As **Figuras 11-13** apresentam os resultados das simulações desse cenário.

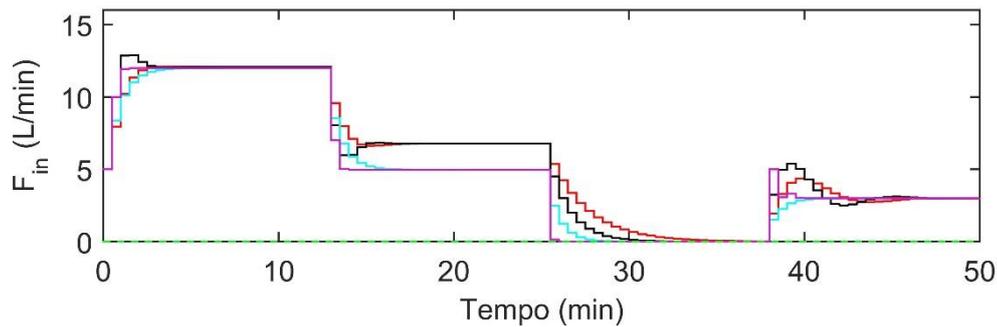
**Tabela 5.** Valores de  $\mathbf{p}$  no **Caso 1: Cenário 2**.

Intervalo	$\mathbf{p}$
$0 \leq t < 12,5$	$[1 \ 1]$
$12,5 \leq t < 25$	$[1 \ 2]$
$25 \leq t \leq 50$	$[0,5 \ 2]$



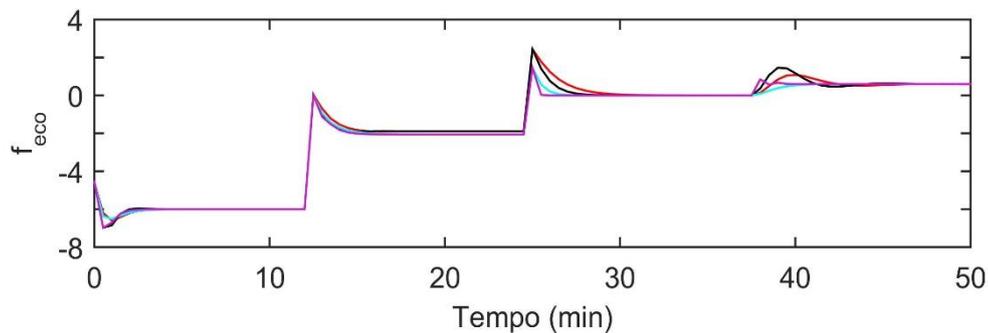
**Figura 11.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 2**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limite inferior da região de controle da variável controlada (—).



**Figura 12.** Evolução da variável manipulada em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 2.**

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limite inferior da variável manipulada (—).



**Figura 13.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 2.**

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

As **Figuras 11 e 12** mostram a convergência dos **Controladores 1 e 2** a soluções diferentes durante o subcenário do intervalo  $12,5 \leq t \leq 25$  min. O estado estacionário obtido  $([C_{A_s} \ C_{B_s}], F_{in_s}) = ([0,3607 \ 0,6393], 6,769)$  é uma solução subótima, visto que ele não está contido na **Tabela 2**. Como todos os seus demais subcenários convergiram aos mínimos locais da função econômica NLP, aplicou-se apenas esse ponto ao sistema definido pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker das **Equações 141-149**. Uma vez que este ponto é um estado estacionário que se encontra no interior da região definida pela **Tabela 1**, então as dinâmicas do modelo (**Equações 130 e 131**) e  $\mu = \mathbf{0}$  permitem simplificar esse sistema para:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_A} = -\lambda_1 \left( \frac{F_{in}}{V} + k_r \right) + \lambda_2 k_r - \mu_1 = 0 \quad (151)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_B} = -2F_{in} - \lambda_2 \left( \frac{F_{in}}{V} \right) - \mu_2 = 0 \quad (152)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{in}} = -2C_B + 0,5 + \frac{\lambda_1 (C_{Af} - C_A)}{V} + \frac{\lambda_2 (C_{Bf} - C_B)}{V} + \mu_3 - \mu_4 = 0 \quad (153)$$

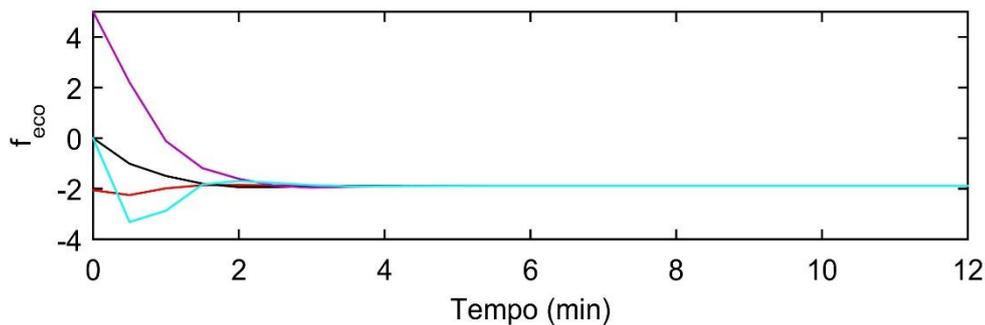
A **Equação 152** tem a solução única  $\lambda_2 = -4V = -40$ , que ao substituir na **Equação 151** gera a solução única:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2 k_r}{\frac{F_{in}}{V} + k_r} = \frac{-40 \cdot 1,2}{\frac{6,769}{10} + 1,2} = -12,787$$

Que deve satisfazer também a **Equação 153** para que o ponto  $([C_{A_s} C_{B_s}], F_{in_s}) = ([0,3607 \ 0,6393], 6,769)$  seja caracterizado como crítico. A substituição dos valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  nessa igualdade geram:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{in}} = -2 \cdot 0,6393 + 0,5 - \frac{12,787(1 - 0,3607)}{10} - \frac{20(0 - 0,6393)}{10} = -0,3175 \quad (154)$$

A divergência da **Equação 154** em relação à **Equação 153** prova que o sistema definido pelas **Equações 151-153** não apresenta solução viável para o estado estacionário  $([C_{A_s} C_{B_s}], F_{in_s}) = ([0,3607 \ 0,6393], 6,769)$ , o que significa que ele não é um ponto crítico da função econômica. A estabilidade assintota desse ponto, entretanto, pode ser analisada por múltiplas simulações desse subcenário a partir de diferentes condições iniciais. A **Figura 14** apresenta os perfis econômicos resultantes dessa análise do **Controlador 1** no subcenário do **Caso 1: Cenário 2** com  $\mathbf{p} = [1 \ 2]$  e  $[C_{A_{min}} C_{B_{min}}] = [0 \ 0]$ .



**Figura 14.** Análise de estabilidade assintota do **Caso 1** no subcenário com  $\mathbf{p} = [1 \ 2]$  e  $[C_{A_{min}} C_{B_{min}}] = [0 \ 0]$ . Condição inicial 1 (—), condição inicial 2 (—), condição inicial 3 (—) e condição inicial 4 (—).

Onde as condições iniciais 1, 2 e 3 da **Figura 14** são, respectivamente, as soluções ótimas  $([C_{A_0} C_{B_0}], F_{in_0}) = ([0,5 \ 0,5], 12)$ ,  $([C_{A_0} C_{B_0}], F_{in_0}) = ([0,293 \ 0,707], 4,971)$  e  $([C_{A_0} C_{B_0}], F_{in_0}) = ([0 \ 1], 20)$  do **Caso 1**, presentes na **Tabela 2**, enquanto a condição inicial 4 é o ponto máximo  $([C_{A_0} C_{B_0}], F_{in_0}) = ([0,625 \ 0,375], 20)$ .

Embora o **Controlador 1** não seja assintoticamente estável, todas as simulações do **Caso 1** com  $\mathbf{p} = [1 \ 2]$  e  $[C_{A_{min}} C_{B_{min}}] = [0 \ 0]$  convergiram ao mesmo ponto de equilíbrio  $([C_{A_s} C_{B_s}], F_{in_s}) = ([0,3607 \ 0,6393], 6,769)$  a partir de condições iniciais espalhadas em todo o seu domínio, inclusive a solução ótima  $([C_{A_0} C_{B_0}], F_{in_0}) = ([0,293 \ 0,707], 4,971)$ ,

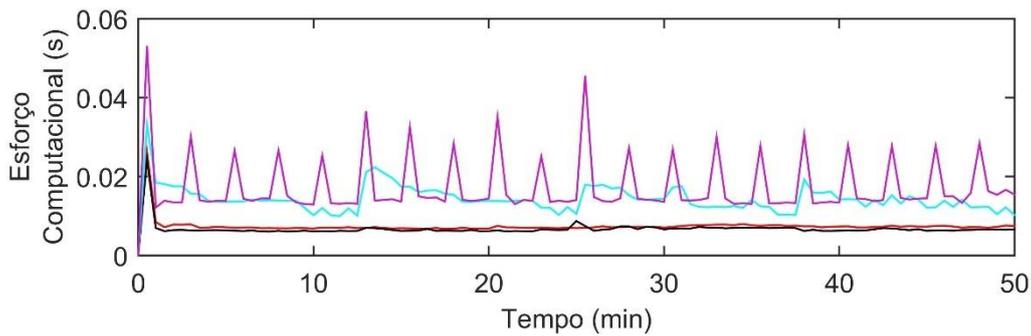
conforme pode ser observado na **Figura 14**. A divergência do ponto de equilíbrio em relação ao ponto mínimo da função econômica é justificável pela divergência da função econômica simplificada em relação à sua formulação original. Dessa forma, a **Figura 14** indica a existência de estabilidade assíntota do **Controlador 1** para o **Caso 1**, porém ela não garante a sua existência na formulação do controlador.

A **Figura 13** mostra que o **Controlador 1** apresenta o maior tempo de resposta para os dois últimos dois subcenários do **Cenário 2** diferentemente do que ocorre no **Cenário 1**. Uma explicação para isso seria o maior distanciamento do ponto nominal de linearização, porém outros fatores também podem influenciar essa diferença de atuação do controlador. A **Tabela 6** apresenta os valores da função econômica média  $\overline{f_{eco}}$  e do esforço computacional total encontrados nas simulações de cada controlador para o **Caso 1: Cenário 2**.

**Tabela 6.** Resultados numéricos do **Caso 1: Cenário 2**.

Propriedade	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$\overline{f_{eco}}$	-1,700	-1,672	-1,792	-1,795
Esforço computacional total (s)	0,693	0,777	1,484	1,823

A **Tabela 6** comprova que os **Controladores 1 e 2** tem um desempenho econômico pior tanto pela convergência a uma solução subótima em  $12,5 \leq t \leq 25$  min quanto pelo maior tempo de resposta nos subcenários posteriores. Além disso, a razão de esforço computacional total entre os controladores se manteve praticamente constante em relação ao **Caso 1: Cenário 1**, com um pequeno aumento apenas ao **Controlador 4**, que pode ser atribuída à maior quantidade de execuções da RTO. Essa conclusão é verificada pelo gráfico da evolução do esforço computacional em função do tempo apresentado na **Figura 15**. Além disso, essa figura demonstra que o tempo de resolução do problema de otimização não linear aumenta conforme sua estimativa inicial se distancia da solução real, o que pode ser verificado nos instantes em que  $p$  é alterado. Por fim, o esforço computacional se mantém em uma faixa teoricamente aplicável em tempo real, assim como ocorreu com o **Caso 1: Cenário 1**.



**Figura 15.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 1: Cenário 2**. **Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

## 5.2 Caso 2: CSTR não-isotérmico

O segundo processo estudado neste trabalho também considera uma reação  $A \rightarrow B$  teórica em um reator CSTR. A diferença entre os **Casos 1 e 2** se encontra na cinética de reação e na aferição da variação de temperatura do reator. O processo do **Caso 2** trata de uma reação  $A \rightarrow B$  de segunda ordem em um reator não isotérmico, enquanto que o **Caso 1** trata de uma reação  $A \rightarrow B$  de primeira ordem em um reator isotérmico. A dinâmica do reator não isotérmico deste caso de estudo pode ser representada pelo balanço de massa do componente A ([Equação 155](#)) e pelo balanço de energia do reator ([Equação 156](#)). Diferentemente do processo do **Caso 1**, entretanto, o **Caso 2** foi encontrado apenas em publicações sobre EMPC's não lineares com o domínio das variáveis controladas em forma elipsoidal ([Zhang et al., 2014](#); [Heidarinejad et al., 2012](#); [Heidarinejad et al., 2013](#)). O seu domínio foi então aproximado para um formato retangular de forma neste trabalho para viabilizar a aplicação dos **Controladores 1, 2 e 4** sobre esse processo. O **Controlador 3** e a camada RTO do **Controlador 4** também utilizaram o mesmo domínio retangular para compatibilizar todos os cenários simulados.

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 \quad (155)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 + \frac{Q_{reat}}{\rho C_p V} \quad (156)$$

Onde  $k_0$  é a constante de Arrhenius [ $\text{h}^{-1}$ ],  $E$  é a energia de ativação [ $\text{kJ}/\text{kmol}$ ],  $R_{gas}$  é a constante dos gases ideais [ $\text{kJ}/(\text{kmol}\cdot\text{K})$ ],  $T_f$  é a temperatura da vazão de entrada do reator [ $\text{K}$ ],  $\Delta H$  é a entalpia da reação  $A \rightarrow B$  [ $\text{kJ}/\text{kmol}$ ],  $Q_{reat}$  é a quantidade de calor transferido por unidade de tempo entre o reator e uma camisa de resfriamento [ $\text{kJ}/\text{h}$ ],  $\rho$  é a massa específica do fluido no reator [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] e  $C_p$  é o calor específico do fluido no reator [ $\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ].

A função econômica (**Equação 157**) obtida em Heidarinejad et al. (2013) visa maximizar a produção do componente B pela taxa de consumo do componente A. Essa é uma forma indireta de maximizar a concentração do componente B na saída do reator, visto que ela não é uma das variáveis medidas do processo.

$$f_{eco}(C_A, T, C_{Af}) = -k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 \quad (157)$$

Usando os dados de Heidarinejad et al. (2013) como base da definição do **Caso 2**, definiu-se a concentração de entrada do componente A no reator  $C_{Af}$  como a variável manipulada do processo, a concentração de saída do componente A  $C_A$  e a temperatura do reator  $T$  como as variáveis controladas e o tempo de amostragem como 0,01 h. Os valores dos parâmetros e dos limites das restrições do processo são apresentados na **Tabela 7**. Embora  $Q_{reat}$  seja considerado um parâmetro em Heidarinejad et al. (2013), ele foi considerado como uma perturbação medida nesse caso de estudo, cujo valor é alterado no **Caso 2: Cenário 2**.

**Tabela 7.** Valores dos parâmetros e dos limites das variáveis do processo do **Caso 2**.

Variável	Valor	Parâmetro	Valor
$C_{Af_{min}}$ (kmol/m <sup>3</sup> )	0	$T_f$ (K)	300
$C_{Af_{max}}$ (kmol/m <sup>3</sup> )	20	$V$ (m <sup>3</sup> )	1
$\Delta C_{Af_{min}}$ (kmol/m <sup>3</sup> )	-5	$k_0$ (h <sup>-1</sup> )	13,93
$\Delta C_{Af_{max}}$ (kmol/m <sup>3</sup> )	5	$C_p$ (kJ/(kg·K))	0,231
$C_{A_{min}}$ (kmol/m <sup>3</sup> )	0	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000
$C_{A_{max}}$ (kmol/m <sup>3</sup> )	4	$F_{in}$ (m <sup>3</sup> /h)	5
$T_{min}$ (K)	297	$E$ (kJ/kmol)	5000
$T_{max}$ (K)	297	$\Delta H$ (kJ/kmol)	11500
-	-	$R_{gas}$ (kJ/(kmol·K))	8,314

### 5.2.1 Obtenção de modelo linear

Enquanto que as simulações do processo do **Caso 1** encontradas na literatura convergem sempre ao mesmo ponto ótimo para cada função econômica, o processo do **Caso 2** é encontrado com diferentes conjuntos de parâmetros e de domínios de  $C_A$  e  $T$ . Além disso, muitas de suas simulações contêm restrições integrais de entrada ou de saída inseridas no controlador, o que é inaplicável ao **Controlador 1** sem transformar a sua estrutura quadrática em não linear.

O trabalho de Heidarinejad et al. (2013), entretanto, contém uma simulação deste processo sem as restrições integrais, cujos resultados são, portanto, comparáveis aos dos **Controladores 1, 2,**

**3 e 4.** Dessa forma, o ponto de normalização  $([C_{A_s} \quad T_s], C_{Af_s}) = ([2 \quad 350], 4)$  foi definido a partir de Heidarinejad et al. (2013).

A identificação do modelo linear foi feita com uma perturbação em forma de degrau sobre  $C_{Af}$  de amplitude  $1,5 \text{ kmol/m}^3$  inserida ao sistema em  $t = t_0$ . Uma vez com um modelo identificado pelos dados no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_{final}$ , perturbações de degraus sucessivos foram introduzidas em uma faixa de  $2,5 \leq C_{Af} \leq 5,5 \text{ kmol/m}^3$  para avaliar a necessidade de ajuste fino. O modelo de funções de transferência (**Equação 158**) foi, por fim, identificado com erro percentual estático máximo de 1%.

$$\begin{bmatrix} C_A(s) \\ T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,965s + 0,3087 \\ s^2 + 9,411s + 0,6126 \\ -27,52s - 3020 \\ s^2 + 25,67s + 104,7 \end{bmatrix} C_{Af}(s) \quad (158)$$

### 5.2.2 Estudo da função econômica

O problema primal da função econômica do **Caso 2** (**Equação 157**) é definido pelos limites da **Tabela 7** e pelo modelo fenomenológico (**Equações 155 e 156**) como:

$$\min_{C_A, T, C_{A,f}} f_{eco}(C_A, T, C_{A,f}) = -k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 \quad (159)$$

Sujeito a:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 = 0 \quad (160)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 + \frac{Q_{reat}}{\rho C_p V} = 0 \quad (161)$$

$$0 \leq C_A \leq 4 \quad (162)$$

$$T_{min} \leq T \leq 410 \quad (163)$$

$$0,5 \leq C_{Af} \leq 7,5 \quad (164)$$

Aplicando o método das condições de Karush-Kuhn-Tucker ao problema primal das **Equações 159-164**, tem-se:

$$\begin{aligned}
\min_{C_A, T, C_{Af}, \lambda, \mu} \mathcal{L}(C_A, T, C_{Af}, \lambda, \mu) & \quad (165) \\
& = -k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 + \lambda_1 \left( \frac{F_{in}}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 \right) \\
& + \lambda_2 \left( \frac{F_{in}}{V} (T_f - T) - \frac{\Delta H k_0}{\rho c_p} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) C_A^2 + \frac{Q_{reat}}{\rho c_p V} \right) \\
& + \mu_1 (-C_A) + \mu_2 (-T + T_{min}) + \mu_3 (C_A - 4) + \mu_4 (T - 410) \\
& + \mu_5 (-C_{Af} + 0,5) + \mu_6 (C_{Af} - 7,5)
\end{aligned}$$

Sujeito às **Equações 162-164** acrescidas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_A} & = -2k_0 C_A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) + \lambda_1 \left( -\frac{F_{in}}{V} - 2k_0 C_A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right) \\
& + \lambda_2 \left( -\frac{2\Delta H k_0}{\rho c_p} C_A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right) - \mu_1 + \mu_3 = 0 \quad (166)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} & = -\frac{k_0 E C_A^2}{R_{gas} T^2} e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} + \lambda_1 \left( \frac{k_0 E C_A^2}{(RT^2)} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right) \\
& + \lambda_2 \left( -\frac{F_{in}}{V} - \frac{\Delta H k_0 E}{\rho c_p RT^2} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right) - \mu_2 + \mu_4 = 0 \quad (167)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{Af}} = \lambda_1 \left( \frac{F_{in}}{V} \right) - \mu_5 + \mu_6 = 0 \quad (168)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \frac{dC_A}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 = 0 \quad (169)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \frac{dT}{dt} = \frac{F_{in}}{V} (T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho c_p} k_0 e^{-\left(\frac{E}{R_{gas}T}\right)} C_A^2 + \frac{Q_{reat}}{\rho c_p V} = 0 \quad (170)$$

$$\mu_1 (-C_A) = 0 \quad (171)$$

$$\mu_2 (-T + T_{min}) = 0 \quad (172)$$

$$\mu_3 (C_A - 4) = 0 \quad (173)$$

$$\mu_4 (T - 410) = 0 \quad (174)$$

$$\mu_5 (-C_{Af} + 0,5) = 0 \quad (175)$$

$$\mu_6 (C_{Af} - 7,5) = 0 \quad (176)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (177)$$

Como  $T_{min}$  varia no **Cenário 2**, os seus valores não foram inseridos nas **Equações 163, 165 e 172**. A resolução do problema definido pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (**Equações 162-177**) foi feita

para todos os valores de  $Q_{reat}$  e  $T_{min}$  utilizados nas simulações do **Caso 2**, o que resultou nas soluções apresentadas na **Tabela 8**.

**Tabela 8.** Ponto mínimos da função econômica presentes no **Caso 2**.

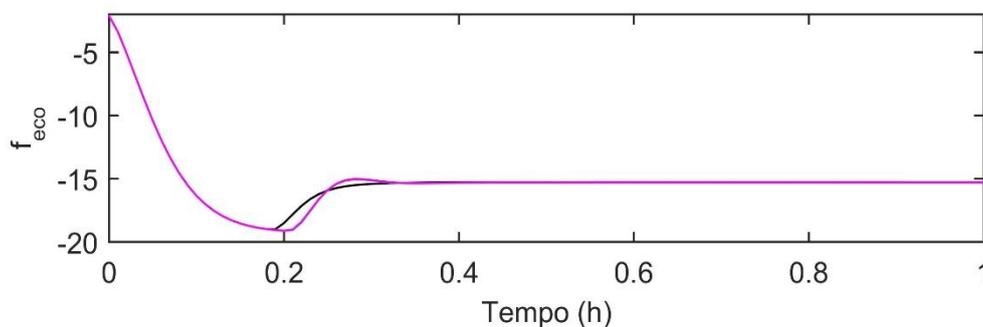
$C_A$ (kmol/h)	$T$ (K)	$C_{Af}$ (kmol/h)	$f_{eco}$	$Q_{reat}$ (kJ/h)	$T_{min}$ (K)	$\mu_i \neq 0$
2,887	297	5,9577	-15,3448	173000	297	0,7207
2,5901	297	5,0573	-12,3361	138400	297	0,6587
3,2862	297	7,2577	-19,8578	224900	297	0,8138
2,7106	330	6,0193	-16,5435	224900	330	0,6418

A **Tabela 8** mostra que o mínimo da função econômica (**Equação 157**) ocorre sempre no limite inferior da variável controlada  $T$ , ou seja, em  $T = T_{min}$ . Embora esse limite determine a solução ótima, os demais componentes dos estados estacionários são alterados a cada nova perturbação em  $Q_{reat}$ . Essa tabela mostra que o valor de  $\mu_i \neq 0$  depende de todo o sistema e não apenas de sua respectiva variável  $i$ , uma vez que  $\mu_i$  é definido por um sistema contendo as condições de Karush-Kuhn-Tucker.

### 5.2.3 Sintonia

O mesmo procedimento de sintonia do **Caso 1** é realizado para o **Caso 2** e todos os demais casos de estudos presentes nesse documento. Novamente, apenas a sintonia do **Controlador 1** é apresentada, pois ele é o foco deste trabalho e esses gráficos demonstram a independência entre uma possível estabilidade assintota e os parâmetros de sintonia do controlador.

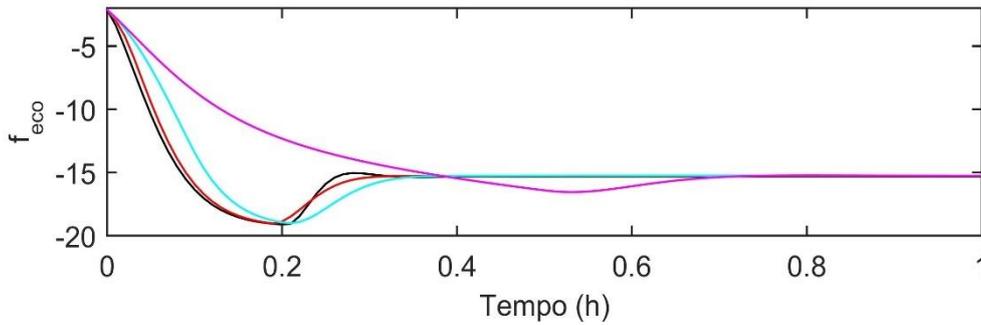
Inicialmente, simulou-se o **Cenário 1** do **Caso 2** diversas vezes sobre o **Controlador 1** definido com um conjunto arbitrário de parâmetros  $\{Q = diag[1 \ 0,01]; R = 0,01; P_{eco} = 5; S = diag[10^8 \ 10^8]\}$  fixos, enquanto se variava o valor de  $m$  entre  $\{3; 5; 7; 10\}$ . A **Figura 16** apresenta a evolução da função econômica durante essas simulações da sintonia de  $m$ .



**Figura 16.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $m$  do **Controlador 1** para o **Caso 2**.

$m = 3$  (—),  $m = 5$  (—),  $m = 7$  (—) e  $m = 10$  (—).

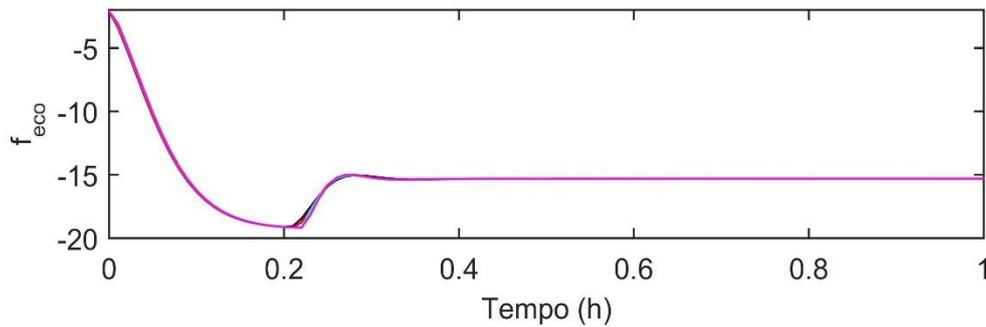
A **Figura 16**, entretanto, só mostra o pior desempenho da simulação com  $m = 3$ . A análise de  $\overline{f_{eco}}$ , por outro lado, permitiu definir o valor ótimo de  $m = 5$ . Posteriormente, manteve-se o conjunto sintonizado  $\{m = 5; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]\}$  e os parâmetros arbitrários  $\{\mathbf{Q} = \text{diag}[1 \ 0,01]; P_{eco} = 5\}$  fixos em simulações enquanto variou-se  $R$  entre  $\{0,01; 0,1; 1; 10\}$ . A **Figura 17** apresenta os gráficos da sintonia do parâmetro  $R$  para o **Caso 2**.



**Figura 17.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $R$  do **Controlador 1** para o **Caso 2**.

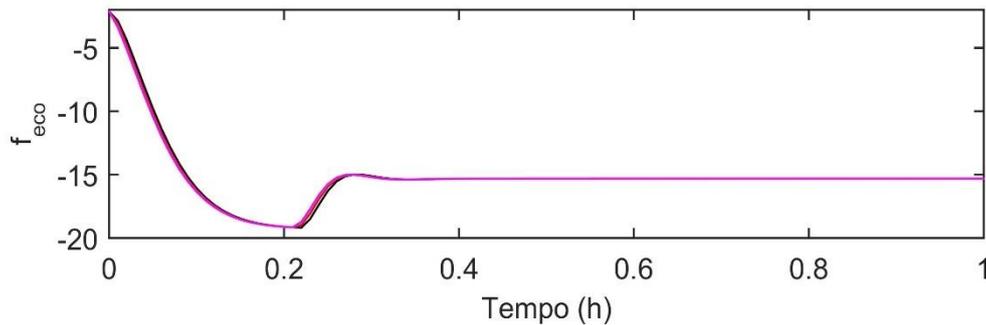
$R = 0,01$  (—),  $R = 0,1$  (—),  $R = 1$  (—) e  $R = 10$  (—).

A **Figura 17** mostra os casos  $R = 0,01$  e  $R = 0,1$  com aproximadamente o mesmo tempo de resposta e perfil praticamente sobreposto. A análise de  $\overline{f_{eco}}$  entra novamente como determinante da sintonia do valor ótimo. Nesse caso, ela determinou o valor ótimo no extremo inferior  $R = 0,01$ , que foi considerado a sintonia ótima pelo mesmo motivo apresentado para esse parâmetro no **Caso 1**. O constante uso de  $\overline{f_{eco}}$  como determinante da sintonia ótima acontece, pois ele fornece uma sintonia ótima mais precisa. O valor numérico de  $\overline{f_{eco}}$  foi a real condição fundamental inserida no algoritmo de sintonia. Os gráficos apresentados nas seções de sintonia apenas ilustram o comportamento de cada etapa de sintonia e demonstram a independência da convergência e estabilidade assíntota do **Controlador 1** em relação a seus parâmetros de sintonia. Prosseguindo com a sintonia do **Controlador 1** para o **Caso 2**, os valores de  $\{m = 5; R = 0,01; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]\}$  foram fixados junto com o valor arbitrário de  $P_{eco} = 5$  enquanto simulou-se o **Cenário 1** diversas vezes com variações do valor de  $\mathbf{Q}$  entre  $\{\text{diag}[1 \ 0,01], \text{diag}[3 \ 0,03], \text{diag}[7 \ 0,07], \text{diag}[10 \ 0,1]\}$ . A **Figura 18** apresenta os gráficos da sintonia do parâmetro  $\mathbf{Q}$  para o **Caso 2**.



**Figura 18.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $\mathbf{Q}$  do **Controlador 1** para o **Caso 2**.  $\mathbf{Q} = \text{diag}[1 \ 0,01]$  (—),  $\mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 0,03]$  (—),  $\mathbf{Q} = \text{diag}[7 \ 0,07]$  (—) e  $\mathbf{Q} = \text{diag}[10 \ 0,1]$  (—).

A **Figura 18** apresenta novamente uma baixa influência da matriz peso  $\mathbf{Q}$  sobre a resposta do controlador. Essa situação, entretanto, não existe no **Caso 3** onde há violação da saída no estado transiente. A análise de  $\overline{f_{eco}}$  determinou o valor ótimo  $\mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 0,03]$ , o que permite enfim fixar os valores de  $\{m = 5; R = 0,01; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]; \mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 0,03]\}$  para a sintonia de  $P_{eco}$ , cujos valores foram variados entre  $\{1; 3; 5; 10\}$ . A **Figura 19** apresenta os gráficos da sintonia do parâmetro  $P_{eco}$  para o **Caso 2**.



**Figura 19.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $P_{eco}$  do **Controlador 1** para o **Caso 2**.  
1.  $P_{eco} = 1$  (—),  $P_{eco} = 3$  (—),  $P_{eco} = 5$  (—) e  $P_{eco} = 10$  (—).

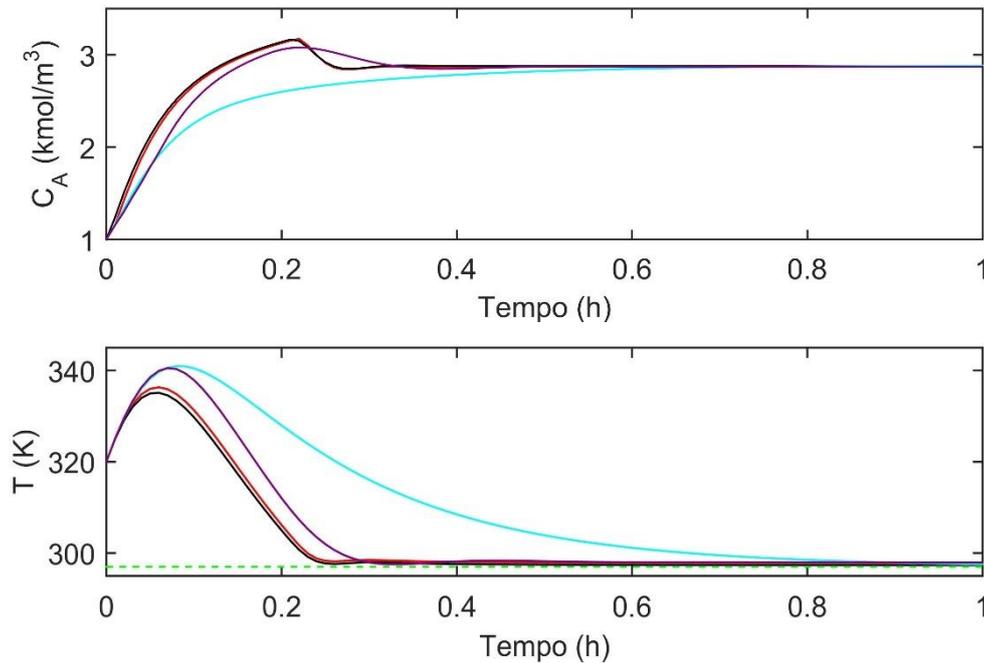
A **Figura 19** apresenta uma situação em que o peso  $P_{eco}$  tem pouca influência sobre o perfil econômico, porém os valores de  $\overline{f_{eco}}$  definiram  $P_{eco} = 10$  como o seu valor ótimo, assim permitindo a definição da sintonia ótima do **Controlador 1** para o **Caso 2** como  $\{m = 5; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8]; R = 0,01; \mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 0,03]; P_{eco} = 10\}$ . A **Tabela 9** apresenta os valores de sintonia de cada um dos controladores implementados para o **Caso 2**.

**Tabela 9.** Parâmetros de sintonia de cada um dos controladores implementados ao **Caso 2**.

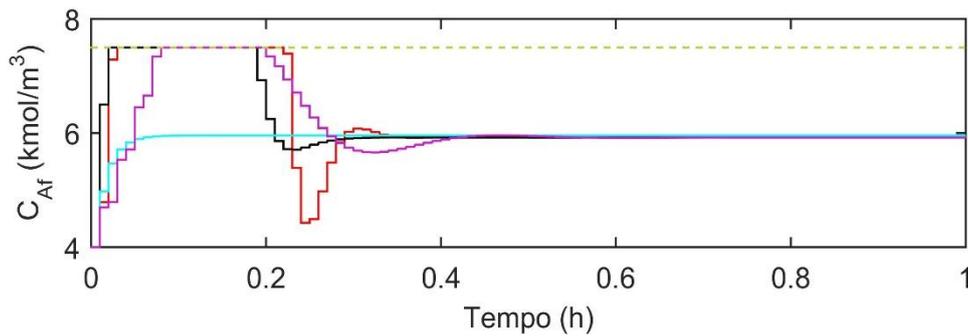
Parâmetro	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$m$	5	5	2	5
$N_p$	-	-	10	-
$Q$	$diag[3 \ 0,03]$	$diag[10 \ 0,1]$	$diag[1 \ 0,01]$	$diag[1 \ 0,01]$
$R$	0,01	0,01	1	0,1
$P_{eco}$	10	3	3	-
$S$	$diag[10^8 \ 10^8]$	$diag[10^8 \ 10^8]$	-	$diag[10^8 \ 10^8]$
$P_y$	-	-	-	$diag[1 \ 1]$
$P_u$	-	-	-	1
$R_u$	-	-	-	1

### 5.2.4 Simulação do Cenário 1

O primeiro cenário do **Caso 2** considerou o valor de  $Q_{reat} = 173000$  kJ/h ao longo de toda a simulação conforme o seu valor definido como parâmetro em Heidarinejad et al. (2013). Além disso, o **Cenário 1** começa no mesmo ponto do estado transiente  $\left( [C_{A_0} \ T_{f_0}], C_{Af_0} \right) = ([0 \ 320], 4)$ . Os resultados das simulações do **Caso 2** para os controladores implementados são apresentados nas **Figuras 20-22**.

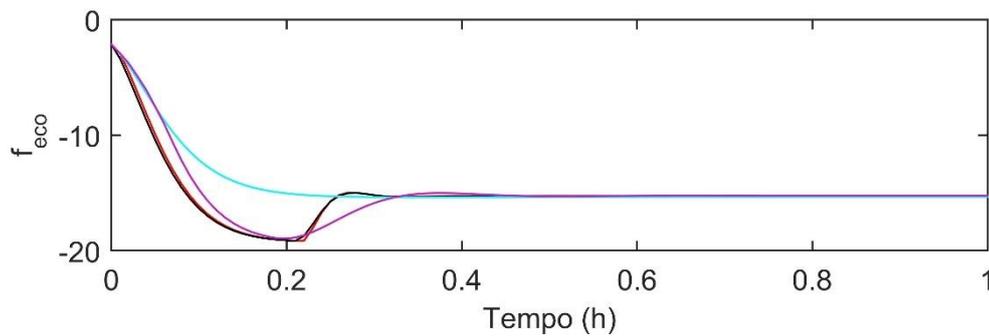
**Figura 20.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 1**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—) e limite inferior da região de controle da variável controlada (—).



**Figura 21.** Evolução da variável manipulada em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 1**.

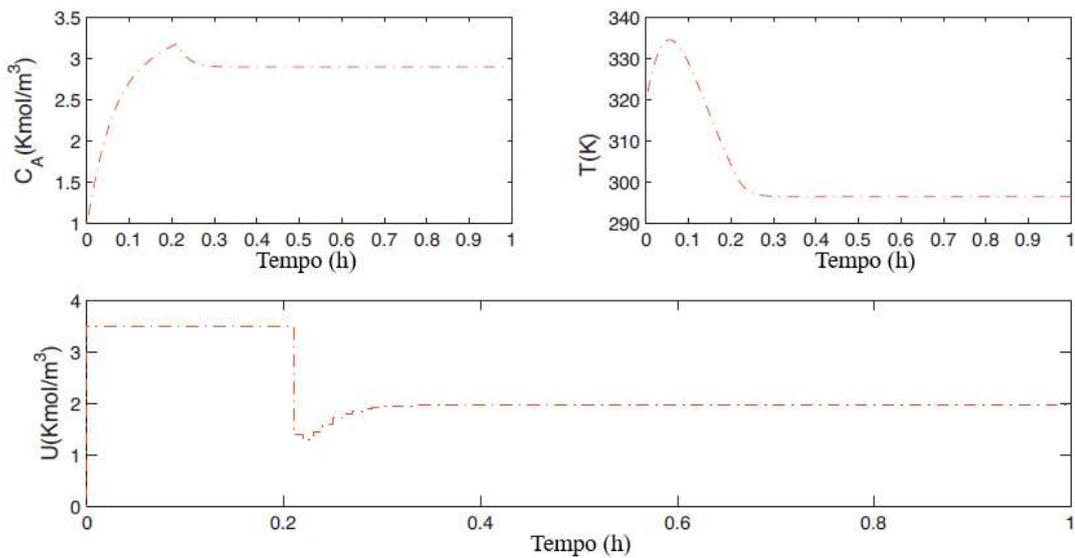
**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—) e limite superior da variável manipulada (—).



**Figura 22.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 1**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

Enquanto que a **Figura 23** apresenta os resultados encontrados em Heidarinejad et al. (2013) para a simulação de seu controlador sem restrições integrais.



**Figura 23.** Evolução das variáveis do **Caso 2: Cenário 1** simulado na referência. [Adaptado de Heidarinejad et al. (2013)].

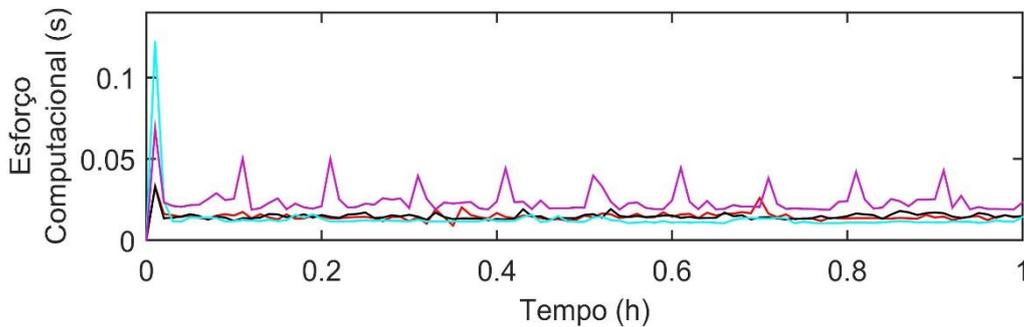
As **Figuras 20 e 21** mostram que os **Controlares 1 e 2** apresentaram perfis bastante semelhantes aos encontrados pelas simulações do EMPC não linear de Heidarinejad et al. (2013), conforme pode ser observado na **Figura 23**. Além disso, todos os controladores implementados convergiram à solução ótima  $([C_A T], C_{Af}) = ([2,887\ 297], 5,9577)$ , conferindo assim com os resultados da **Tabela 8**. O **Controlador 3**, entretanto, tem uma atuação bem mais conservadora que os demais. Embora a sua formulação contenha uma otimização econômica no estado estacionário, apenas  $u_s$  influencia a variável manipulada em direção ao ótimo econômico pelas restrições das **Equações 29-31**. O termo do erro futuro, por outro lado, apenas mantém  $y$  na zona de controle, logo não a predição do erro em relação  $y_s$  não é contabilizada nesse cenário. A camada RTO do **Controlador 4** também otimiza a função econômica no estado estacionário, porém o MPC estático identifica a inviabilidade da solução recebida pela camada superior e calcula um *target* viável ao MPC dinâmico contabilizando tanto  $y^*$  quanto  $u^*$ . A **Figura 22** mostra que o mínimo da função econômica ocorreu novamente no estado transiente, logo o esforço de controle mais agressivo dos **Controladores 1 e 2** lhes garante um melhor desempenho econômico, conforme é observado na **Tabela 10**, que contém os resultados numéricos das simulações dos controladores implementados para o **Caso 2: Cenário 1**.

**Tabela 10.** Resultados numéricos do **Caso 2: Cenário 1**.

Propriedade	<b>Controlador 1</b>	<b>Controlador 2</b>	<b>Controlador 3</b>	<b>Controlador 4</b>
$\overline{f_{eco}}$	-15,13	-15,06	-14,36	-14,92
Esforço computacional total (s)	1,463	1,275	1,150	2,022

Embora a **Tabela 10** confirme o melhor desempenho econômico dos **Controladores 1 e 2**, eles ainda foram inferiores ao do controlador de Heidarinejad et al. (2013), que obteve  $\overline{f_{eco}} = -15,26$  para o mesmo cenário. Uma explicação para essa diferença é a maior atuação dele nos instantes  $t = 0$  e  $t \approx 0,2$  h, que acontece pela inexistência de pesos regulatórios em sua função objetivo. Apesar de ter melhor desempenho econômico, é esperado que o controlador de Heidarinejad et al. (2013) tenha maior esforço computacional, visto que ele é definido por um problema não linear com modelo de predição não linear. Ao contrário do que era previsto, entretanto, o **Controlador 3** apresentou um esforço computacional total menor do que os **Controladores 1 e 2** com estrutura quadrática. Além disso, o ganho proporcional de esforço computacional entre os **Controladores 1 e 2** em relação ao **Controlador 4** é reduzido em

relação ao **Caso 1**. A **Figura 24** apresenta o gráfico do esforço computacional em função do tempo, que fornece uma melhor análise dessa propriedade.



**Figura 24.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 2**. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).

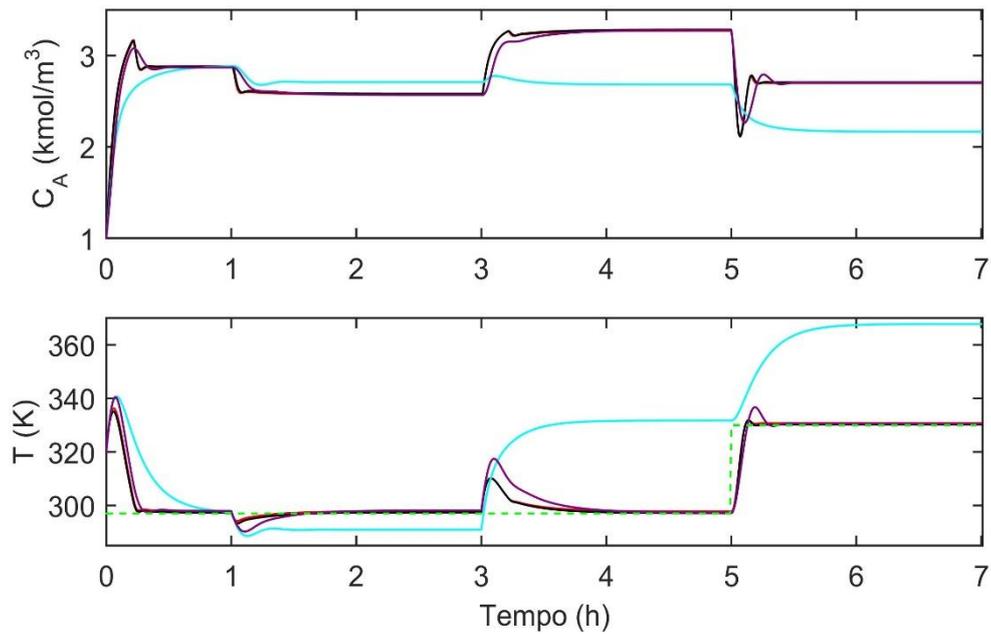
A **Figura 24** indica que o menor esforço computacional total do **Controlador 3** ocorre pela sua menor linha de base. Os **Controladores 1 e 2**, por sua vez, demoram aproximadamente de 15 a 30% menos tempo para resolver os seus problemas de otimização do que as camadas de MPC do **Controlador 4**. Isso significa que a razão entre o esforço computacional total dos **Controladores 1 e 4** seria ainda maior se a RTO não fosse executada a cada 0,1 h. Os resultados desse cenário mostram, portanto, que a estratégia de aproximação da função econômica do **Controlador 1** pode não ser tão eficaz na redução do esforço computacional, uma vez que o **Caso 2** contém o mesmo número de variáveis que o **Caso 1**, mas apresenta um perfil divergente.

### 5.2.5 Simulação do Cenário 2

O segundo cenário de simulações do **Caso 2** manteve as condições iniciais do **Cenário 1**, porém adicionou perturbações em forma de degrau ao valor de  $Q_{reat}$ , conforme os intervalos da **Tabela 11**. Além disso, similarmente ao **Caso 1**, o limite inferior da zona de controle  $[C_{Amin} \ T_{min}]$  foi alterada de  $[0 \ 297]$  para  $[0 \ 330]$  no intervalo final da simulação  $5 \leq t \leq 7$  h. As **Figuras 25-27** apresentam os resultados obtidos para esse cenário de simulações.

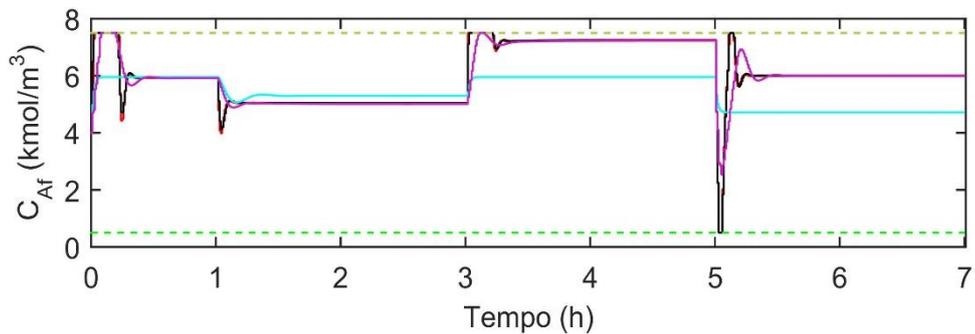
**Tabela 11.** Valores de  $Q_{reat}$  em função dos intervalos de tempo do **Caso 2: Cenário 2**.

Intervalo	$Q_{reat}$ (kJ/h)
$0 \leq t < 1$	173000
$1 \leq t < 3$	138400
$3 \leq t \leq 7$	224900



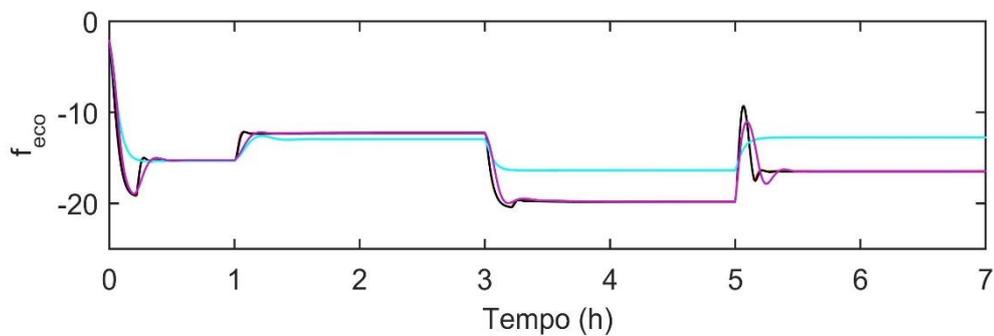
**Figura 25.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 2.**

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limite inferior da região de controle da variável controlada (—).



**Figura 26.** Evolução da variável manipulada em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 2.**

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limites superior (—) e inferior (—) da variável manipulada.



**Figura 27.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 2.**

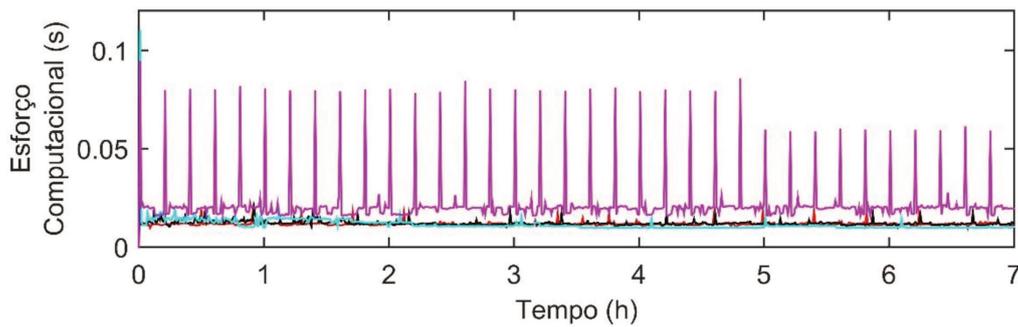
**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

As **Figuras 25-27** denotam a necessidade do **Controlador 3** por um modelo rígido preciso do estado estacionário para eliminar o *offset*. Ele foi o único dos controladores implementados incapaz de trazer o sistema às soluções ótimas da **Tabela 8** após a presença de perturbação não medida em  $Q_{reat}$ . Essa falha afeta, inclusive, a sua capacidade de trazer o sistema de volta à zona de controle, visto que o sistema convergiu a um estado estacionário fora dessa região durante o intervalo  $1 \leq t < 3$  h. Como o seu modelo estático não identifica a perturbação, a solução ótima calculada pelo controlador varia a cada execução conforme as variáveis medidas são alteradas em razão da perturbação. O termo do erro futuro, entretanto, alcançará um equilíbrio com o termo econômico, que pode ocorrer fora da zona de controle como foi o caso do estado estacionário obtido no intervalo  $1 \leq t < 3$  h. A camada RTO do **Controlador 4** sofre a mesma falha, porém o controle regulatório do MPC dinâmico é capaz de lidar com a incerteza presente no sistema. Enquanto o **Controlador 3** apresenta *offset* em todos os subcenários após a perturbação em  $Q_{reat}$ , os demais controladores implementados foram capazes de lidar com essa incerteza ao trazer o sistema à sua nova solução ótima. As simulações do **Caso 2** indicam, portanto, a existência de estabilidade assintótica para o **Controlador 1**. A **Tabela 12** apresenta os resultados numéricos de  $\overline{f_{eco}}$  e do esforço computacional total encontrados para o **Caso 2: Cenário 2**.

**Tabela 12.** Resultados numéricos do **Caso 2: Cenário 2**.

Propriedade	<b>Controlador 1</b>	<b>Controlador 2</b>	<b>Controlador 3</b>	<b>Controlador 4</b>
$\overline{f_{eco}}$	-15,97	-15,91	-14,09	-15,88
Esforço computacional total (s)	8,401	8,104	7,883	15,288

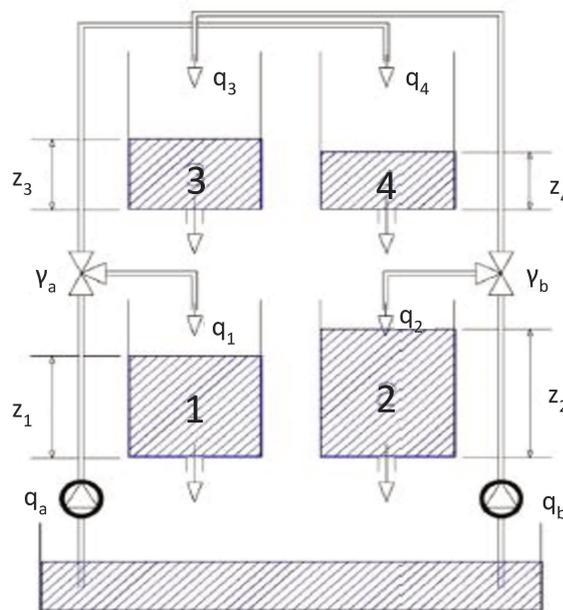
A **Tabela 12** confirma os desempenhos econômicos semelhantes entre os **Controladores 1, 2 e 4**, com leve superioridade para o **Controlador 1**. Além disso, a razão de esforço computacional total entre os **Controladores 1, 2 e 3** é mantida em relação ao observado no **Cenário 1**. A diferença do esforço computacional do **Controlador 4**, por outro lado, é justificada pela maior quantidade de execuções da RTO conforme pode ser observado na **Figura 28**, que mostra o gráfico da evolução do esforço computacional em função do tempo para **Caso 2: Cenário 2**. Dessa forma, o **Caso 2** apresenta um outro processo em que todos os controladores implementados são resolvidos em um período considerado aplicável em tempo real.



**Figura 28.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 2: Cenário 2**. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—) e Controlador 4 (—).

### 5.3 Caso 3: planta de tanques interligados

O terceiro processo deste trabalho foi uma planta de nível com quatro tanques interligados. Um reservatório de água abaixo dos tanques tem o seu fluido bombeado a partir de duas tubulações, cada uma com uma bomba centrífuga. A tubulação com a bomba centrífuga denominada  $q_a$  segue para os tanques 1 e 4, enquanto a outra tubulação com a bomba centrífuga denominada  $q_b$  segue para os tanques 2 e 3. As razões do fluxo das tubulações para seus respectivos tanques de saída são reguladas por uma válvula de três vias conectada a cada tubulação. Por convenção, a válvula de três vias do fluxo de  $q_a$  é denominada como  $\gamma_a$  e a válvula de três vias do fluxo de  $q_b$  é denominada como  $\gamma_b$ . Por fim, o tanque 4 escoar para o tanque 2 por energia potencial, assim como o tanque 3 escoar para o tanque 1. O sistema descrito é ilustrado na **Figura 29**.



**Figura 29.** Ilustração da planta de nível de quatro tanques do **Caso 3** [Adaptado de D'Jorge et al. (2017)].

A dinâmica do processo descrito no parágrafo anterior é formulada pelos balanços de massa global de cada um dos tanques (**Equações 178-181**). Ao contrário do **Caso 2**, esse processo foi encontrado, principalmente, em diversos artigos de EMPC's com modelo de predição linear (D'Jorge et al., 2017; Ferramosca et al., 2017; Limon et al., 2014).

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{a_1}{Area} \sqrt{2g_r z_1} + \frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{\gamma_a}{Area} \frac{q_a}{3600} \quad (178)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{a_2}{Area} \sqrt{2g_r z_2} + \frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{\gamma_b}{Area} \frac{q_b}{3600} \quad (179)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = -\frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{(1 - \gamma_b)}{Area} \frac{q_b}{3600} \quad (180)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -\frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{(1 - \gamma_a)}{Area} \frac{q_a}{3600} \quad (181)$$

Onde  $z_i$  e  $a_i$  são o nível [m] e os coeficientes de descarga [m<sup>2</sup>] de cada tanque  $i$  tal que  $i = 1,2,3,4$ . Além disso,  $Area$  é a área da seção transversal [m<sup>2</sup>] dos tanques,  $g_r$  é a aceleração da gravidade [m/s<sup>2</sup>], enquanto  $\gamma_a$  e  $\gamma_b$  são as razões de escoamento definidas para as vazões  $q_a$  e  $q_b$  [m<sup>3</sup>/h], respectivamente.

A função econômica (**Equação 182**) foi retirada de D'Jorge et al. (2017). A sua formulação contém um vetor  $\mathbf{p}$  que foi adicionado para alterar a razão entre os seus custos durante um cenário experimental da planta de nível esquematizada na **Figura 29**. A função econômica busca minimizar um custo energético associado às vazões da bomba enquanto se maximiza o volume de água nos tanques inferiores 1 e 2. Essa maximização é inserida na função econômica por um denominador para garantir que ela seja positiva definida em todo o seu domínio independente da definição de  $\mathbf{p}$ .

$$f_{eco}(z_1, z_2, z_3, z_4, q_a, q_b, \mathbf{p}) = (q_a^2 + p(1)q_b^2) + \frac{p(2)V_{min}}{Area(z_1 + z_2)} \quad (182)$$

Onde  $V_{min}$  é o volume mínimo de água acumulada nos tanques [m<sup>3</sup>]

Seguindo a base de D'Jorge et al. (2017), as variáveis manipuladas são as vazões das bombas  $q_a$  e  $q_b$ , as suas variáveis controladas são os níveis de cada um dos tanques  $z_i$  e o tempo de amostragem é 10 s. Os valores dos parâmetros e dos limites das restrições do processo são apresentados na **Tabela 13**. A razão de escoamento  $\gamma_a$ , entretanto, foi considerada uma perturbação ao contrário do parâmetro que é considerado em D'Jorge et al. (2017).

**Tabela 13.** Valores dos parâmetros e dos limites das variáveis do processo do **Caso 3**.

Variável	Valor	Parâmetro	Valor
$q_{a_{min}}$ (m)	0	$a_1$ (m <sup>2</sup> )	$1,310 \cdot 10^{-4}$
$q_{b_{min}}$ (m)	0	$a_2$ (m <sup>2</sup> )	$1,507 \cdot 10^{-4}$
$q_{a_{max}}$ (m)	3,26	$a_3$ (m <sup>2</sup> )	$9,267 \cdot 10^{-5}$
$q_{b_{max}}$ (m)	4	$a_4$ (m <sup>2</sup> )	$8,816 \cdot 10^{-5}$
$\Delta q_{a_{min}} = \Delta q_{b_{min}}$ (m)	-2,5	Area (m <sup>2</sup> )	0,06
$\Delta q_{a_{max}} = \Delta q_{b_{max}}$ (m)	2,5	$\gamma_b$	0,4
$z_{i_{min}} \forall i = 1,2,3,4$ (m)	0	$V_{min}$ (m <sup>3</sup> )	1,2
$z_{1_{max}} = z_{2_{max}}$ (m)	1,36	-	-
$z_{3_{max}} = z_{4_{max}}$ (m)	1,3	-	-

Vale ressaltar que os resultados de D’Jorge et al. (2017) contém ruídos em suas medições, o que é uma fonte de incerteza inevitável em um cenário experimental. Dessa forma, a comparação de desempenho entre os controladores implementados e o da referência é condicionada a um cenário de simulação com adição artificial de ruído.

### 5.3.1 Obtenção de modelo linear

Como a função econômica do **Caso 3** foi retirada de um artigo que utiliza um EMPC robusto com múltiplos modelos lineares (D’Jorge et al., 2017), foi necessário escolher um de seus pontos nominais para a identificação do modelo linear. O ponto  $([z_{1_s} \ z_{2_s} \ z_{3_s} \ z_{4_s}], [q_{a,s} \ q_{b,s}]) = ([0,350 \ 0,416 \ 0,293 \ 0,523], [1,452 \ 1,333])$ , relativo ao estado estacionário quando  $\mathbf{p} = [5 \ 10]$ , foi arbitrariamente escolhido com esse fim. Vale ressaltar que este ponto é ligeiramente diferente do informado em D’Jorge et al. (2017), pois nenhum estado estacionário foi alcançado com os parâmetros informados aplicados ao modelo fenomenológico (Equações 178-181). As incertezas presentes na estimativa dos coeficientes de descarga da planta experimental, entretanto, justificam a divergência encontrada. Dessa forma, a identificação do modelo linear foi feita em volta do ponto nominal  $([z_{1_s} \ z_{2_s} \ z_{3_s} \ z_{4_s}], [q_{a_s} \ q_{b_s}]) = ([0,350 \ 0,416 \ 0,293 \ 0,523], [1,452 \ 1,333])$ , definido no estado estacionário do modelo fenomenológico (Equações 178-181).

A identificação do modelo linear foi feita, primeiramente, por uma perturbação em degrau de amplitude  $1,0 \text{ m}^3/\text{h}$  sobre a variável manipulada  $q_a$  a um dado instante  $t = t_0$ , enquanto  $q_b = 1,333 \text{ m}^3/\text{h}$  foi mantido constante. Uma vez com as dinâmicas das variáveis controladas em função de  $q_a$  identificadas, simulou-se o processo sujeito a degraus sucessivos de  $q_a$  em

$0,452 \leq q_a \leq 2,452 \text{ m}^3/\text{h}$  com  $q_b = 1,333 \text{ m}^3/\text{h}$  constante para identificar a necessidade de ajuste fino. Ao término da modelagem das dinâmicas do sistemas referentes à variável  $q_a$ , iniciou-se outra simulação no ponto nominal e inseriu-se então uma perturbação em forma de degrau com amplitude  $1,0 \text{ m}^3/\text{h}$  em  $q_b$  para  $q_a = 1,452 \text{ m}^3/\text{h}$ . Após a modelagem inicial das dinâmicas do processo referentes à  $q_b$ , simulou-se o processo sobre degraus sucessivos simultâneos em  $q_b$  na faixa de  $0,333 \leq q_b \leq 2,333 \text{ m}^3/\text{h}$  para avaliar a necessidade de ajuste fino nos modelos dessa variável. O modelo de funções de transferência (**Equação 183**) identificado obteve, por fim, um erro percentual estático máximo de 8%.

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \\ z_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,001876}{s + 0,01064} & \frac{0,001086}{s + 0,003703} \\ \frac{0,001086}{s + 0,002743} & \frac{0,002207}{s + 0,01064} \\ 0 & \frac{0,003429}{s + 0,008095} \\ \frac{0,003772}{s + 0,005262} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a(s) \\ q_b(s) \end{bmatrix} \quad (183)$$

### 5.3.2 Estudo da função econômica

O problema da função econômica do **Caso 2** (**Equação 182**) definido pelo domínio da **Tabela 13** e pelo modelo fenomenológico (**Equações 178-181**) como:

$$\min_{z_1, z_2, z_3, z_4, q_a, q_b} f_{eco}(z_1, z_2, z_3, z_4, q_a, q_b, \mathbf{p}) = (q_a^2 + p(1)q_b^2) + \frac{p(2)V_{min}}{Area(z_1 + z_2)} \quad (184)$$

Sujeito a:

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{a_1}{Area} \sqrt{2g_r z_1} + \frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{\gamma_a}{Area} \frac{q_a}{3600} = 0 \quad (185)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{a_2}{Area} \sqrt{2g_r z_2} + \frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{\gamma_b}{Area} \frac{q_b}{3600} = 0 \quad (186)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = -\frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{(1 - \gamma_b)}{Area} \frac{q_b}{3600} = 0 \quad (187)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -\frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{(1 - \gamma_a)}{Area} \frac{q_a}{3600} = 0 \quad (188)$$

$$0,2 \leq z_1 \leq 1,36 \quad (189)$$

$$0,2 \leq z_2 \leq 1,36 \quad (190)$$

$$0,2 \leq z_3 \leq 1,3 \quad (191)$$

$$0,2 \leq z_4 \leq 1,3 \quad (192)$$

$$0 \leq q_a \leq 3,26 \quad (193)$$

$$0 \leq q_b \leq 3,26 \quad (194)$$

O problema das **Equações 184-194** foi então aplicado às condições de Karush-Kuhn-Tucker resultando em:

$$\begin{aligned}
& \min_{z_1, z_2, z_3, z_4, q_a, q_b, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(z_1, z_2, z_3, z_4, q_a, q_b, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) & (195) \\
& = (q_a^2 + p(1)q_b^2) + \frac{p(2)V_{min}}{Area(z_1 + z_2)} \\
& + \lambda_1 \left( -\frac{a_1}{Area} \sqrt{2g_r z_1} + \frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{\gamma_A q_a}{Area \cdot 3600} \right) \\
& + \lambda_2 \left( -\frac{a_2}{Area} \sqrt{2g_r z_2} + \frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{\gamma_B q_b}{Area \cdot 3600} \right) \\
& + \lambda_3 \left( -\frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{(1 - \gamma_B) q_b}{Area \cdot 3600} \right) \\
& + \lambda_4 \left( -\frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{(1 - \gamma_A) q_a}{Area \cdot 3600} \right) + \mu_1(-z_1 + z_{1min}) \\
& + \mu_2(-z_2 + z_{2min}) + \mu_3(-z_3 + z_{3min}) + \mu_4(-z_4 + z_{4min}) \\
& + \mu_5(z_1 - z_{1max}) + \mu_6(z_2 - z_{2max}) + \mu_7(z_3 - z_{3max}) \\
& + \mu_8(z_4 - z_{4max}) + \mu_9(-q_a) + \mu_{10}(-q_b) + \mu_{11}(q_a - 3,26) \\
& + \mu_{12}(q_b - 4)
\end{aligned}$$

Sujeito às **Equações 189-194** acrescidas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = -\frac{p(2)V_{min}}{Area \cdot (z_1 + z_2)^2} - \lambda_1 \left( \frac{a_1 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_1}} \right) - \mu_1 + \mu_5 = 0 \quad (196)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = -\frac{p(2)V_{min}}{Area \cdot (z_1 + z_2)^2} - \lambda_2 \left( \frac{a_2 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_2}} \right) - \mu_2 + \mu_6 = 0 \quad (197)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_3} = \lambda_1 \left( \frac{a_3 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_3}} \right) - \lambda_3 \left( \frac{a_3 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_3}} \right) - \mu_3 + \mu_7 = 0 \quad (198)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_4} = \lambda_2 \left( \frac{a_4 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_4}} \right) - \lambda_4 \left( \frac{a_4 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_4}} \right) - \mu_4 + \mu_8 = 0 \quad (199)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 2q_a + \lambda_1 \left( \frac{\gamma_A}{(Area \cdot 3600)} \right) + \lambda_4 \left( \frac{(1 - \gamma_A)}{(Area \cdot 3600)} \right) - \mu_9 + \mu_{11} = 0 \quad (200)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 2p(1)q_b + \lambda_2 \left( \frac{\gamma_B}{(Area \cdot 3600)} \right) + \lambda_3 \left( \frac{(1 - \gamma_B)}{(Area \cdot 3600)} \right) - \mu_{10} + \mu_{12} = 0 \quad (201)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \frac{dz_1}{dt} = -\frac{a_1}{Area} \sqrt{2g_r z_1} + \frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{\gamma_A q_a}{Area \cdot 3600} = 0 \quad (202)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \frac{dz_2}{dt} = -\frac{a_2}{Area} \sqrt{2g_r z_2} + \frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{\gamma_b}{Area} \frac{q_b}{3600} = 0 \quad (203)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = \frac{dz_3}{dt} = -\frac{a_3}{Area} \sqrt{2g_r z_3} + \frac{(1-\gamma_b)}{Area} \frac{q_b}{3600} = 0 \quad (204)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_4} = \frac{dz_4}{dt} = -\frac{a_4}{Area} \sqrt{2g_r z_4} + \frac{(1-\gamma_a)}{Area} \frac{q_a}{3600} = 0 \quad (205)$$

$$\mu_1(-z_1 + z_{1min}) = 0 \quad (206)$$

$$\mu_2(-z_2 + z_{2min}) = 0 \quad (207)$$

$$\mu_3(-z_3 + z_{3min}) = 0 \quad (208)$$

$$\mu_4(-z_4 + z_{4min}) = 0 \quad (209)$$

$$\mu_5(z_1 - z_{1max}) = 0 \quad (210)$$

$$\mu_6(z_2 - z_{2max}) = 0 \quad (211)$$

$$\mu_7(z_3 - z_{3max}) = 0 \quad (212)$$

$$\mu_8(z_4 - z_{4max}) = 0 \quad (213)$$

$$\mu_9(-q_a) = 0 \quad (214)$$

$$\mu_{10}(-q_b) = 0 \quad (215)$$

$$\mu_{11}(q_a - 3,26) = 0 \quad (216)$$

$$\mu_{12}(q_b - 4) = 0 \quad (217)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (218)$$

A resolução do problema econômico dual (**Equações 189-218**) foi feita para todas as combinações de  $\gamma_a$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{z}_{min}$  e  $\mathbf{z}_{max}$  presentes no **Caso 3**. Devido a limitações espaciais, os pontos mínimos do **Cenário 1** do **Caso 3** são apresentados na **Tabela 14**

**Tabela 14.** Ponto mínimos da função econômica presentes no **Caso 3: Cenário 1**.

$\mathbf{p}$	$z_1$ (m)	$z_2$ (m)	$z_3$ (m)	$z_4$ (m)	$q_a$ (m <sup>3</sup> /h)	$q_b$ (m <sup>3</sup> /h)	$f_{eco}$	$\mu_i \neq 0$
[5 10]	0,262	0,335	0,200	0,458	1,359	1,101	11,262	22,81
[0,5 100]	1,159	1,030	1,300	0,876	1,880	2,808	16,612	1,28
[5 100]	0,416	0,723	0,200	1,300	2,289	1,101	28,862	[2,60 5,20]

Enquanto os pontos mínimos do **Cenário 2** do **Caso 3** são apresentados na **Tabela 15**, onde  $z_{min_i}$  representa o limite inferior de  $z_{min_i} \forall i = 1,2,3,4$ .

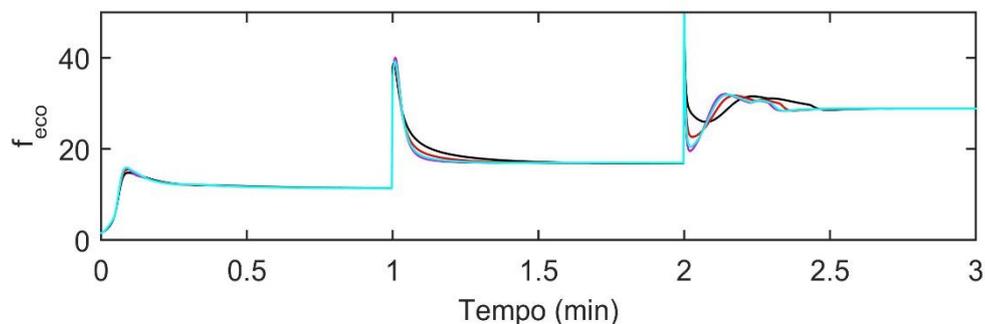
**Tabela 15.** Ponto mínimos da função econômica presentes no **Caso 3: Cenário 2.**

$z_{\min i}$ (m)	$z_{\max}$ (m)	$\gamma_a$	$z_1$ (m)	$z_2$ (m)	$z_3$ (m)	$z_4$ (m)	$q_a$ (m <sup>3</sup> /h)	$q_b$ (m <sup>3</sup> /h)	$f_{eco}$	$\mu_i \neq 0$
0,2	[1,36 1,36 1,3 1,3]	0,3	1,290	1,287	0,200	1,300	2,289	1,101	28,86	[2,6 5,2]
0,2	[1 1 1 1]	0,3	0,403	0,617	0,239	1,000	2,008	1,205	30,91	8,3
0,4	[1 1 1 1]	0,3	0,541	0,713	0,400	1,000	2,008	1,558	32,11	[12,9 4,9]
0,4	[1 1 1 1]	0,45	0,996	0,713	0,400	1,000	2,556	1,558	30,37	[18,9 0,6]

As **Tabelas 14 e 15** mostram que todas as soluções mínimas da função econômica (**Equação 182**) ocorreram em algum limite das variáveis controladas  $z_3$  e  $z_4$ , porém as demais variáveis são diferentes para cada subcenário presente no **Caso 3**. Assim como nos casos anteriores, os valores de  $\mu_i \neq 0$  variam a cada solução mínima, porém sempre com seus valores contidos em  $\mu \geq 0$ .

### 5.3.3 Sintonia

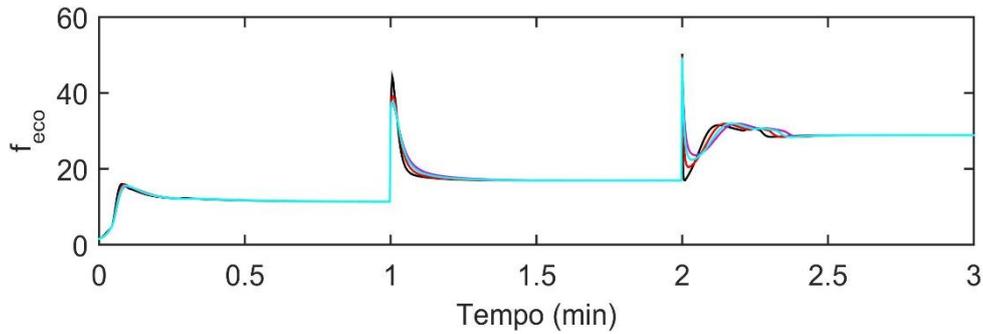
O **Cenário 1** do **Caso 1**, que será detalhado na próxima seção, foi simulado múltiplas vezes com o **Controlador 1** calibrado arbitrariamente com  $\{Q = \text{diag}[7 \ 7 \ 7 \ 7]; R = [3 \ 3]; P_{eco} = 1; S = \text{diag}[10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8]\}$  fixo, enquanto se variou o valor de  $m$  entre  $\{3; 5; 7; 10\}$ . A **Figura 30** apresenta os gráficos da evolução da função econômica durante essas simulações.

**Figura 30.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $m$  do **Controlador 1** para o **Caso 3**.

$m = 3$  (—),  $m = 5$  (—),  $m = 7$  (—) e  $m = 10$  (—).

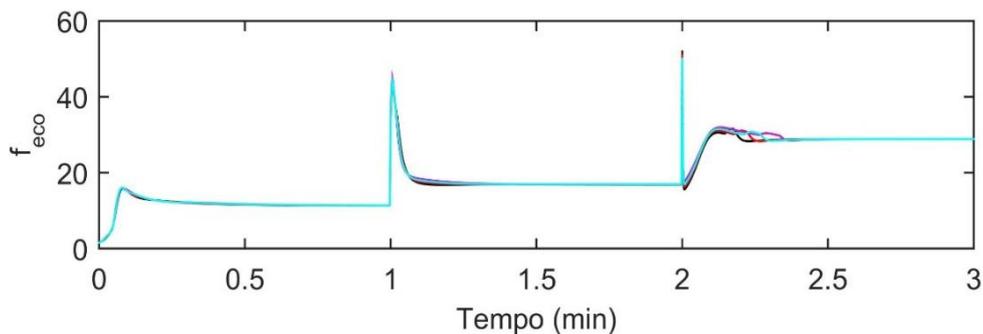
Ao contrário dos casos de estudo anteriores, a sintonia do **Caso 3** considera um fator adicional além do desempenho econômico. O **Cenário 1** de sua simulação proporciona a violação da zona de controle no estado transiente, logo definiu-se um limite máximo de  $\pm 0,1$  m nessa violação para que os parâmetros de sintonia tenham o seu desempenho econômico avaliado. Embora a **Figura 30** mostre um desempenho econômico semelhante entre as simulações com  $m = 7$  e  $m = 10$ , somente o segundo conseguiu manter as variáveis controladas dentro da faixa estipulada. Dessa forma, a sintonia ótima foi definida com  $m = 7$ , o que também é conferido

pelo menor valor de  $\overline{f_{eco}}$  obtido em sua simulação. Assim sendo, fixou-se os parâmetros sintonizados  $\{m = 7; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8]\}$  junto com os parâmetros arbitrários  $\{\mathbf{Q} = \text{diag}[7 \ 7 \ 7 \ 7]; P_{eco} = 1\}$ , enquanto se variou  $\mathbf{R}$  entre  $\{\text{diag}[1 \ 1]; \text{diag}[3 \ 3]; \text{diag}[5 \ 5]; \text{diag}[7 \ 7]\}$ . A **Figura 31** apresenta os gráficos dessa sintonia do parâmetro  $\mathbf{R}$ .



**Figura 31.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $\mathbf{R}$  do **Controlador 1** para o **Caso 3**.  $\mathbf{R} = \text{diag}[1 \ 1]$  (—),  $\mathbf{R} = \text{diag}[3 \ 3]$  (—),  $\mathbf{R} = \text{diag}[5 \ 5]$  (—) e  $\mathbf{R} = \text{diag}[10 \ 10]$  (—).

A **Figura 31** mostra que o aumento de  $\mathbf{R}$  reduziu progressivamente o desempenho econômico, visto que ele aumenta o tempo de resposta do sistema, logo a sintonia ótima de  $\mathbf{R}$  foi definida em  $\mathbf{R} = \text{diag}[1 \ 1]$ . A próxima etapa de sintonia foi então realizada por simulações com  $\{m = 7; \mathbf{R} = \text{diag}[1 \ 1]; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8]; P_{eco} = 1\}$  constantes, enquanto se variou  $\mathbf{Q}$  entre  $\{\text{diag}[3 \ 3 \ 3 \ 3], \text{diag}[5 \ 5 \ 5 \ 5], \text{diag}[7 \ 7 \ 7 \ 7], \text{diag}[10 \ 10 \ 10 \ 10]\}$  a cada simulação. A **Figura 32** apresenta os gráficos da sintonia de  $\mathbf{Q}$  para o **Caso 3**.

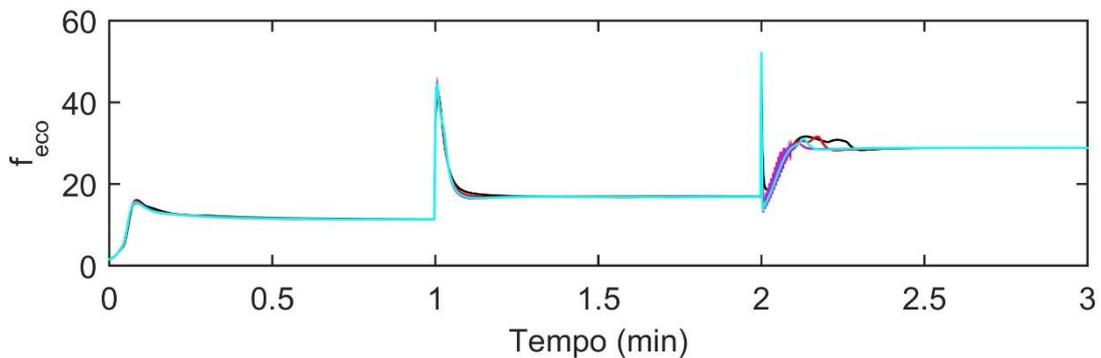


**Figura 32.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $\mathbf{Q}$  do **Controlador 1** para o **Caso 3**.

$\mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 3 \ 3 \ 3]$  (—),  $\mathbf{Q} = \text{diag}[5 \ 5 \ 5 \ 5]$  (—),  $\mathbf{Q} = \text{diag}[7 \ 7 \ 7 \ 7]$  (—) e  $\mathbf{Q} = \text{diag}[10 \ 10 \ 10 \ 10]$  (—).

A **Figura 32** mostra uma maior influência do peso  $\mathbf{Q}$  sobre a resposta do sistema em comparação ao que foi encontrado nas sintonias desse parâmetro dos **Casos 1 e 2**. Isso acontece, pois os casos de estudos anteriores contêm todo o seu comportamento dinâmico dentro da zona de controle independente da sintonia, enquanto que o **Caso 3** a violou sempre em  $z_3$  e  $z_4$  durante

$0 \leq t \leq 0,25$  h e em  $z_4$  durante  $2 \leq t \leq 2,25$  h. A minimização dessas violações no erro futuro gera, portanto, um contrapeso na atuação do controlador em direção ao ótimo econômico. No caso dos valores de  $\mathbf{Q}$  analisados, a zona de controle estipulada foi sempre respeitada, logo a sintonia ótima foi definida pelo valor de  $\overline{f_{eco}}$  como  $\mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 3 \ 3 \ 3]$ . Por fim, manteve-se os valores de  $\{m = 7; \mathbf{R} = \text{diag}[1 \ 1]; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8]; \mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 3 \ 3 \ 3]\}$  fixos e determinou-se a sintonia de  $P_{eco}$  variando-se o seu valor entre  $\{0,5; 1; 2; 3\}$ . A **Figura 33** apresenta os gráficos da sintonia dessa sintonia de  $P_{eco}$  para o **Caso 3**.



**Figura 33.** Evolução da função econômica durante a sintonia de  $P_{eco}$  do **Controlador 1** para o **Caso 3**.  $P_{eco} = 0,5$  (—),  $P_{eco} = 1$  (—),  $P_{eco} = 2$  (—) e  $P_{eco} = 3$  (—).

A **Figura 33** indica que a sintonia ótima aconteceu com  $P_{eco} = 3$ , porém a sua simulação apresentou um esforço de controle excessivo conforme pode ser observado pela oscilação de sua função econômica antes de atingir o estado estacionário do último subcenário em  $t \cong 2,15$  h. Uma vez que as variáveis manipuladas do processo são vazões volumétricas geradas por bombas, a sintonia ótima de  $P_{eco}$  foi definida em  $P_{eco} = 2$  como forma de resguardar os seus tempos de vida útil, que é desconsiderado no cálculo da função econômica. Assim sendo, a sintonia ótima do **Controlador 1** para o **Caso 3** foi definida por  $\{m = 7; \mathbf{S} = \text{diag}[10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8]; \mathbf{R} = \text{diag}[1 \ 1]; \mathbf{Q} = \text{diag}[3 \ 3 \ 3 \ 3]; P_{eco} = 2\}$ .

A realização do mesmo procedimento para os demais controladores implementados gerou os valores de sintonia para o **Caso 3** apresentados na **Tabela 16**.

**Tabela 16.** Parâmetros de sintonia de cada um dos controladores implementados ao **Caso 3**.

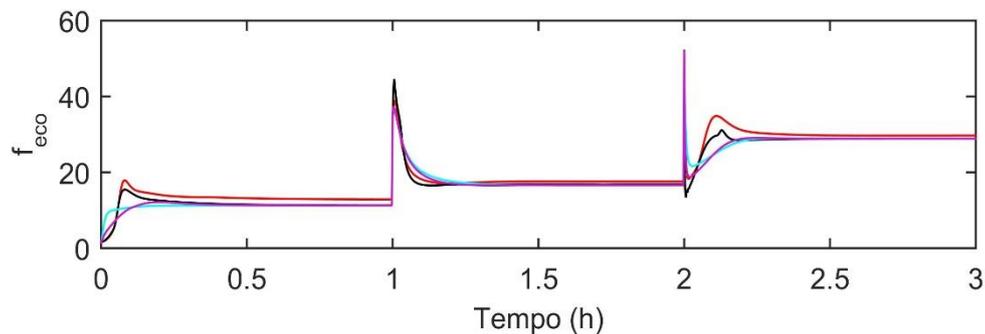
Parâmetro	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$m$	7	5	3	3
$N_p$	-	-	35	-
$Q$	$diag[3 \ 3 \ 3 \ 3]$	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
$R$	$diag[1 \ 1]$	$diag[2 \ 2]$	$diag[1 \ 1]$	$diag[1 \ 1]$
$P_{eco}$	2	1	10	-
$S$	$10^8 \cdot diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	$10^8 \cdot diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	-	$10^8 \cdot diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
$P_y$	-	-	-	$diag[1 \ 1 \ 1 \ 1]$
$P_u$	-	-	-	$diag[1 \ 1]$
$R_u$	-	-	-	$diag[1 \ 1]$

### 5.3.4 Simulação do Cenário 1a

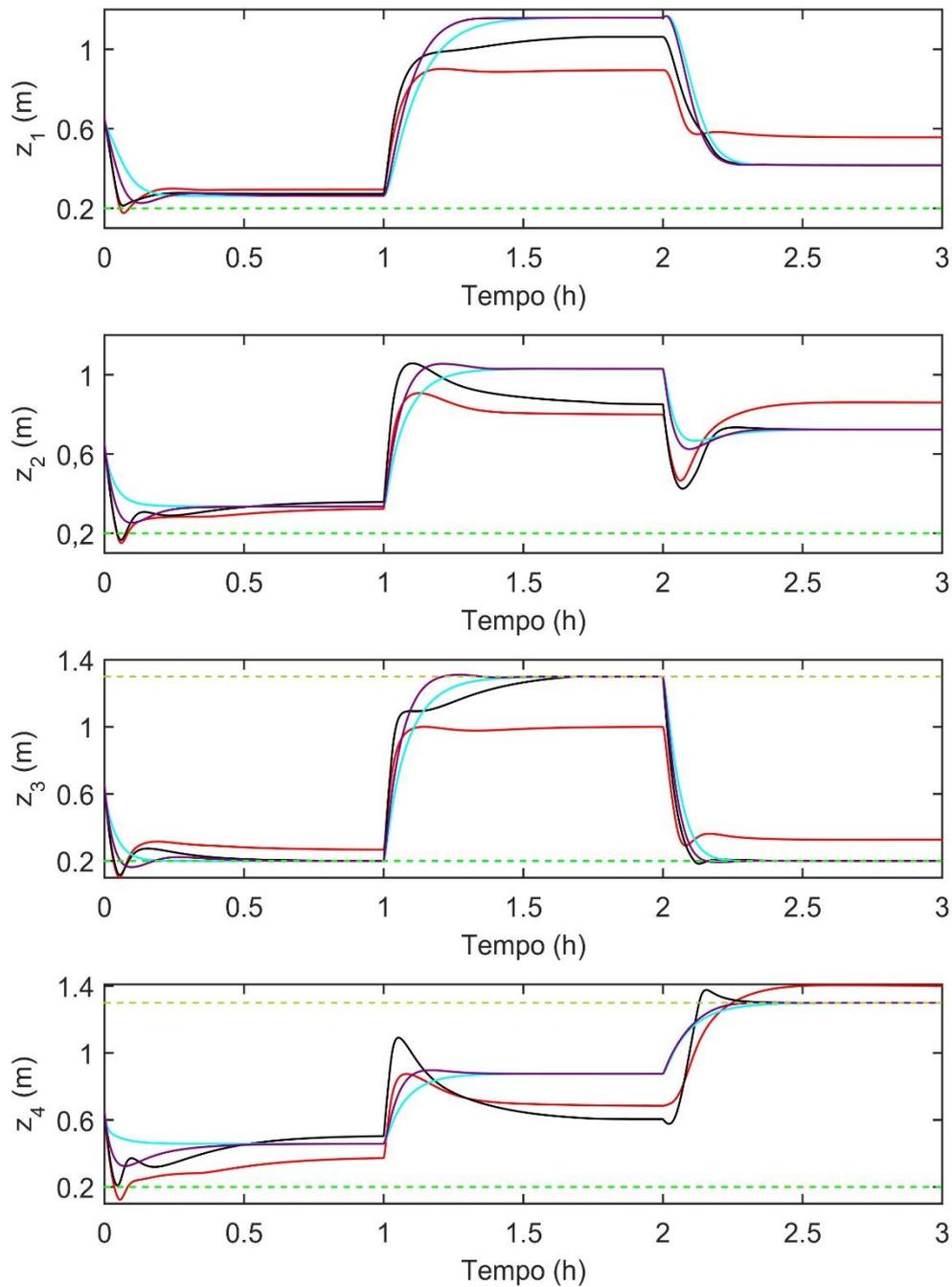
No primeiro cenário do **Caso 3**, definiu-se a razão de escoamento  $\gamma_a = 0,3$ , enquanto se variou  $p$ , conforme os intervalos da **Tabela 17**, assim gerando um cenário semelhante ao encontrado em D’Jorge et al. (2017), porém sem a presença de ruídos. A definição de um cenário sem essa incerteza foi feita para precisar as soluções ótimas obtidas por cada um dos controladores implementados. Além disso, ela possibilita uma análise do efeito dos ruídos sobre o desempenho econômico dos controladores pela comparação dos seus resultados. Os resultados das simulações do **Cenário 1a** do **Caso 3** são apresentados nas **Figuras 34-36**.

**Tabela 17.** Valores de  $p$  para o **Caso 3: Cenário 1**.

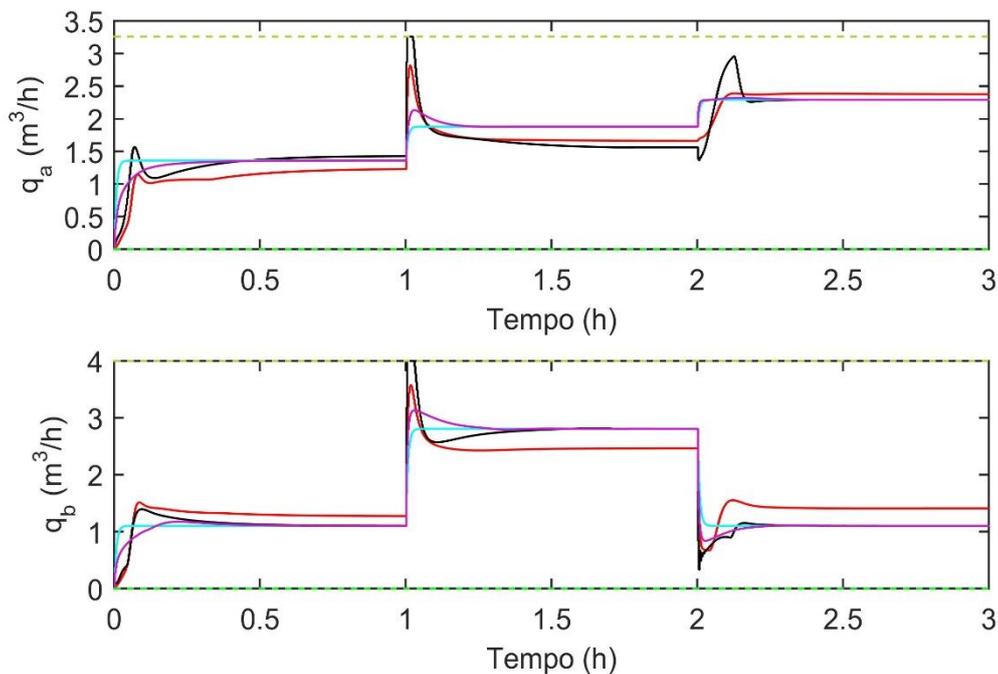
Intervalo	$p$
$0 \leq t < 1$	[5 10]
$1 \leq t < 2$	[0,5 100]
$2 \leq t \leq 3$	[5 100]

**Figura 34.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1a**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).



**Figura 35.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1a.** Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) da região de controle das variáveis controladas.



**Figura 36.** Evolução das variáveis manipuladas em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1a**. **Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limites superior (—) e inferior (—) das variáveis manipuladas.

As **Figuras 35** e **36** mostram que a modificação da posição de  $\mathbf{y}$  na **Equação 101** do **Controlador 2** acaba com a sua convergência, pois sua resposta convergiu a um estado estacionário fora da zona de controle para  $\mathbf{p} = [5 \ 100]$ . Isso prova a inexistência da garantia de convergência e estabilidade assintota desse controlador, enquanto que o **Controlador 1** levou o sistema às soluções ótimas para  $\mathbf{p} = [5 \ 10]$  e  $\mathbf{p} = [5 \ 100]$ , e a uma solução subótima para  $\mathbf{p} = [0,5 \ 100]$ , conforme pode ser visto pela **Tabela 14**, mesmo sem garantia de convergência. Além disso, a **Figura 34** mostra que a solução subótima  $([z_{1s} \ z_{2s} \ z_{3s} \ z_{4s}], [q_{a_s} \ q_{b_s}]) = ([1,063 \ 0,851 \ 1,300 \ 0,605], [1,562 \ 2,808])$  obtida no subcenário com  $\mathbf{p} = [0,5 \ 100]$  é apenas ligeiramente superior à solução ótima da **Tabela 14**, alcançada pelos **Controladores 3** e **4**. Dessa forma, é necessário caracterizar esse ponto pela sua substituição nas condições de Karush-Kuhn-Tucker do **Caso 3** definidas pelas **Equações 196-217**. Como a solução subótima é um estado estacionário contido apenas no limite superior de  $\mathbf{z}_3$ , esse sistema pode ser simplificado para:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = -\frac{p(2)V_{min}}{Area \cdot (z_1 + z_2)^2} - \lambda_1 \left( \frac{a_1 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_1}} \right) = 0 \quad (219)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = -\frac{p(2)V_{min}}{Area \cdot (z_1 + z_2)^2} - \lambda_2 \left( \frac{a_2 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_2}} \right) = 0 \quad (220)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_3} = \lambda_1 \left( \frac{a_3 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_3}} \right) - \lambda_3 \left( \frac{a_3 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_3}} \right) + \mu_7 = 0 \quad (221)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_4} = \lambda_2 \left( \frac{a_4 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_4}} \right) - \lambda_4 \left( \frac{a_4 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_4}} \right) = 0 \quad (222)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 2q_a + \lambda_1 \left( \frac{\gamma_A}{(Area \cdot 3600)} \right) + \lambda_4 \left( \frac{(1 - \gamma_A)}{(Area \cdot 3600)} \right) = 0 \quad (223)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 2p(1)q_b + \lambda_2 \left( \frac{\gamma_B}{(Area \cdot 3600)} \right) + \lambda_3 \left( \frac{(1 - \gamma_B)}{(Area \cdot 3600)} \right) = 0 \quad (224)$$

A **Equação 219** tem a solução única:

$$\lambda_1 = -\frac{p(2)V_{min}}{(z_1 + z_2)^2} \left( \frac{\sqrt{2z_1}}{a_1 \sqrt{g_r}} \right) = -\frac{100 \cdot 0,012}{(1,063 + 0,851)^2} \left( \frac{\sqrt{2 \cdot 1,063}}{1,310 \cdot 10^{-4} \sqrt{9,81}} \right) = -1164$$

Enquanto que a **Equação 220** tem a solução única:

$$\lambda_2 = -\frac{p(2)V_{min}}{(z_1 + z_2)^2} \left( \frac{\sqrt{2z_2}}{a_2 \sqrt{g_r}} \right) = -\frac{100 \cdot 0,012}{(1,063 + 0,851)^2} \left( \frac{\sqrt{2 \cdot 0,851}}{1,507 \cdot 10^{-4} \sqrt{9,81}} \right) = -905,4$$

Substituindo a solução de  $\lambda_1$  na **Equação 223**, tem-se:

$$\lambda_4 = -\left( 2q_a + \lambda_1 \left( \frac{\gamma_A}{(Area \cdot 3600)} \right) \right) \left( \frac{Area \cdot 3600}{1 - \gamma_A} \right)$$

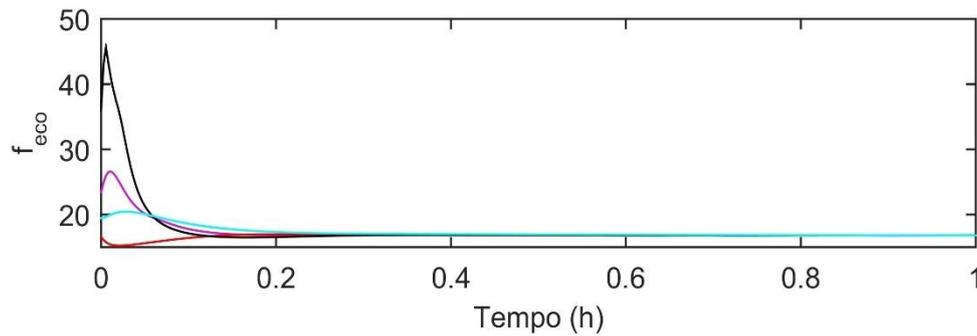
$$\lambda_4 = -\left( 2 \cdot 1,562 - 1164 \left( \frac{0,3}{(0,06 \cdot 3600)} \right) \right) \left( \frac{0,06 \cdot 3600}{1 - 0,3} \right) = -465$$

A **Equação 224**, entretanto, é satisfeita apenas quando:

$$\lambda_2 \left( \frac{a_4 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_4}} \right) - \lambda_4 \left( \frac{a_4 \sqrt{g_r}}{Area \sqrt{2z_4}} \right) = 0 \therefore \lambda_2 = \lambda_4$$

O que diverge das soluções encontradas para os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  calculadas pelas **Equações 219, 220 e 223** anteriormente. Dessa forma, o ponto  $([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_s} \ q_{b_s}]) = ([1,063 \ 0,851 \ 1,300 \ 0,605], [1,562 \ 2,808])$  não é um ponto crítico da função econômica, visto que a sua substituição no sistema das **Equações 219-224** não possui solução viável.

A estabilidade assintota do **Controlador 1** foi então analisada por múltiplas simulações do **Caso 3** com  $p = [0,5 \ 100]$  a partir de diferentes condições iniciais. A **Figura 37** apresenta as evoluções da função econômica em função do tempo para essas simulações.



**Figura 37.** Análise de estabilidade assintota do **Caso 3: Cenário 1a** com  $\mathbf{p} = [0,5 \ 100]$ . Condição inicial 1 (—), condição inicial 2 (—), condição inicial 3 (—) e condição inicial 4 (—).

Onde as condições 1, 2, 3 e 4 são as respectivas soluções ótimas  $([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_0} \ q_{b_0}]) = ([0,262 \ 0,335 \ 0,200 \ 0,458], [1,359 \ 1,101])$ ,  $([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_0} \ q_{b_0}]) = ([1,159 \ 1,030 \ 1,300 \ 0,876], [1,880 \ 2,808])$ ,  $([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_0} \ q_{b_0}]) = ([0,996 \ 0,713 \ 0,400 \ 1,000], [2,556 \ 1,558])$  e  $([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_0} \ q_{b_0}]) = ([0,416 \ 0,723 \ 0,200 \ 1,300], [2,289 \ 1,101])$  obtidas pelas **Tabelas 14 e 15**.

Assim como aconteceu com a análise de estabilidade assintótica da solução subótima do **Caso 1**, o **Controlador 1** trouxe o sistema sempre ao mesmo ponto de equilíbrio. A **Figura 37** mostra que esse comportamento aconteceu até mesmo com a simulação partindo do mínimo global  $([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_0} \ q_{b_0}]) = ([1,159 \ 1,030 \ 1,300 \ 0,876], [1,880 \ 2,808])$  para o subcenário com  $\mathbf{p} = [1 \ 2]$ . A solução subótima e a respectiva solução ótima desse subcenário se encontram no limite superior da zona de controle de uma das variáveis controladas do processo, o que representa um cenário de  $\nabla f_{eco}$  diferente do encontrado na análise do **Caso 1**. Ambas as soluções subótimas indicam, portanto que o **Controlador 1** seria assintoticamente estável.

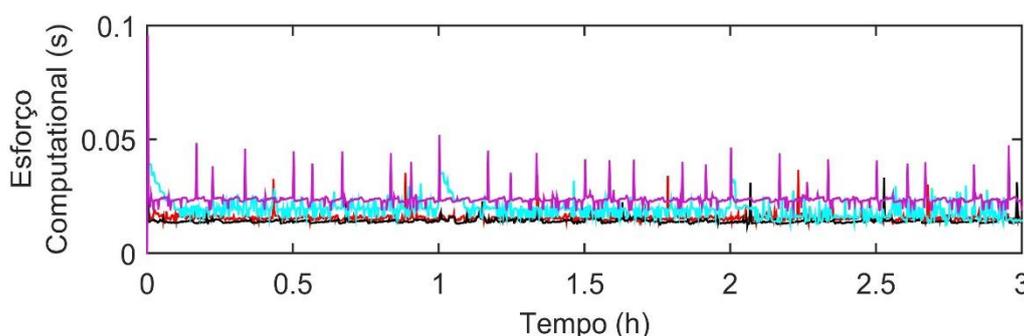
A **Tabela 18** apresenta os resultados numéricos de  $\overline{f_{eco}}$  e do esforço computacional total de cada uma das simulações realizadas para o **Caso 3: Cenário 1a**.

**Tabela 18.** Resultados numéricos do **Caso 3: Cenário 1a**.

Propriedade	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$\overline{f_{eco}}$	19,135	20,333	19,059	18,941
Esforço computacional total (s)	15,31	16,82	20,71	25,64

Assim como era esperado pela [Figura 34](#), a [Tabela 18](#) explicita o pior desempenho econômico do **Controlador 2**. Além disso, esta tabela mostra que o **Controlador 1** obteve um desempenho ligeiramente inferior ao dos **Controladores 3 e 4**, mesmo com o seu estado estacionário subótimo em  $1 \leq t < 2$  h, mas conseguiu um menor esforço computacional que os **Controladores 3 e 4**.

A [Figura 38](#), com o perfil do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1a**, mostra que o maior esforço computacional do **Controlador 3** foi causado tanto pela sua maior linha de base quanto pelo seu tempo de execução mais devagar após cada alteração na função econômica. O primeiro é explicado pelo uso de um horizonte de predição  $N_p$  bem maior que o dos **Casos 1 e 2**, o que foi necessário para garantir a viabilidade do controlador durante todo o cenário de simulação. O **Controlador 3** apresenta alguns instantes sem solução viável caso ele seja simulado com horizonte de predição  $N_p < 35$  neste cenário. Os degraus positivos existentes nos esforços computacionais, por outro lado, são explicados pelo súbito distanciamento entre a estimativa inicial e a solução do problema não linear causado pela variação de  $p$ .

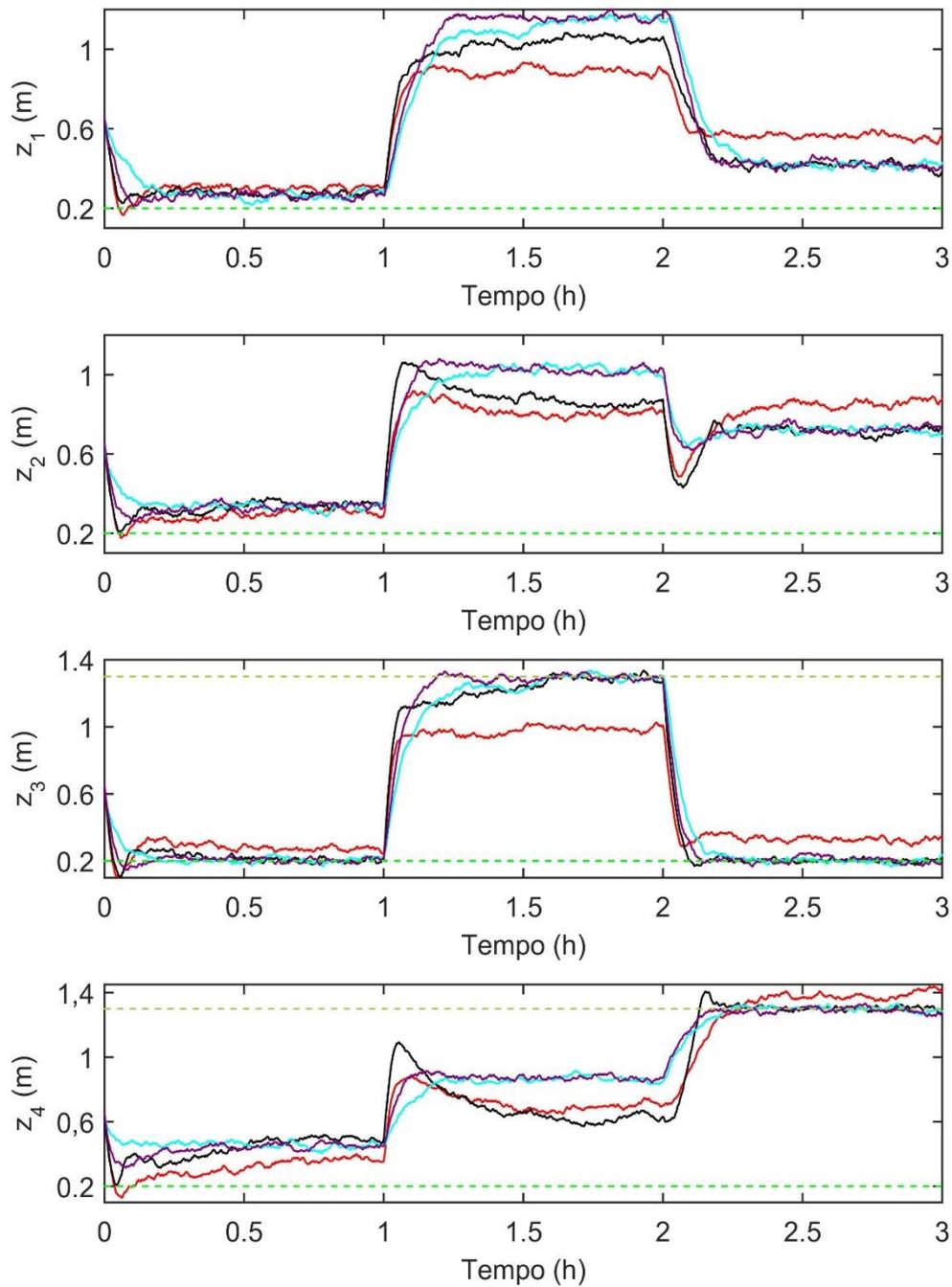


**Figura 38.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1a**.

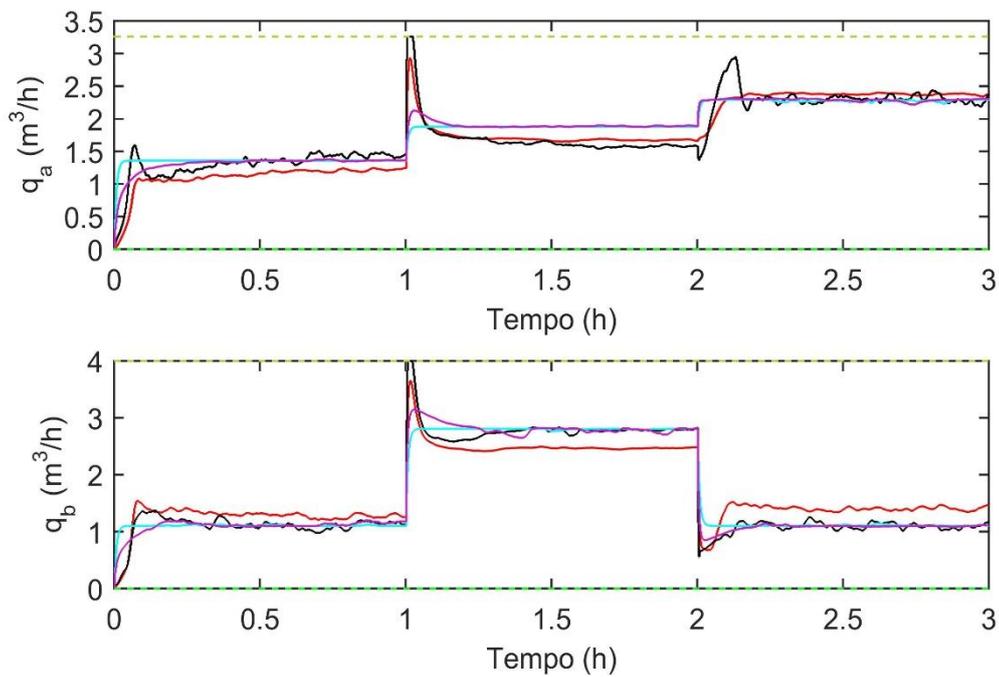
**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

### 5.3.5 Simulação do Cenário 1b

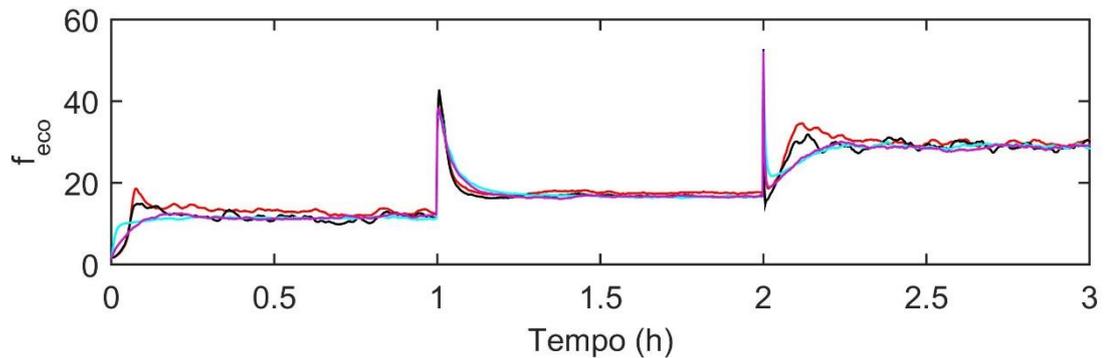
O segundo cenário de simulações do **Caso 1** é idêntico ao **Cenário 1a**, porém com a adição de um ruído artificial de  $\mp 0,01$  m na medição de todas as suas variáveis controladas gerada. Esse cenário foi simulado com o objetivo de comparar os resultados dos controladores implementados com os de D’Jorge et al. (2017) As [Figuras 39-41](#) apresentam os resultados das simulações dos controladores implementados, enquanto que as [Figuras 42-44](#) apresentam os resultados fornecidos nesse artigo.



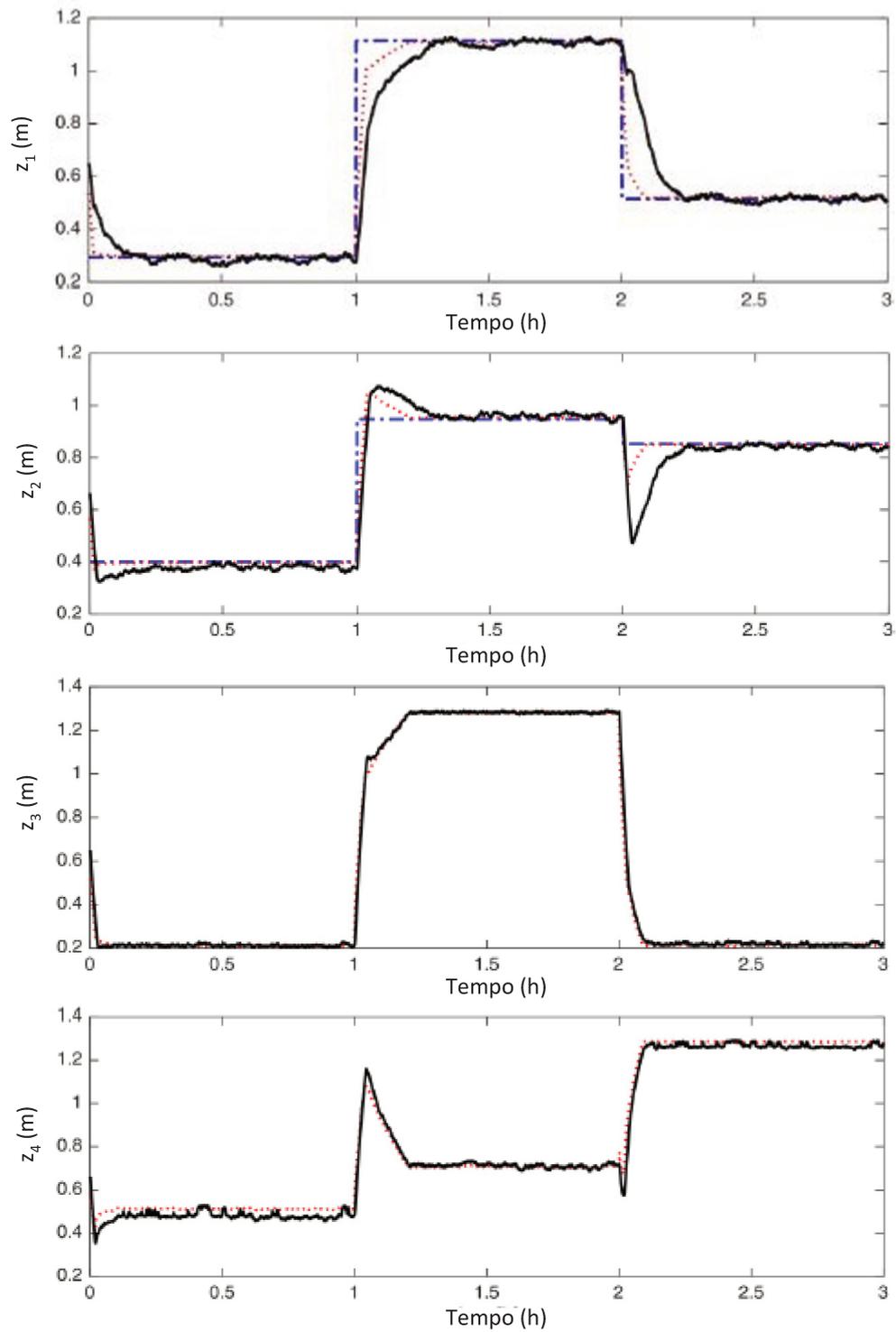
**Figura 39.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1b**. **Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limites superior (—) e inferior (—) da região de controle das variáveis controladas.



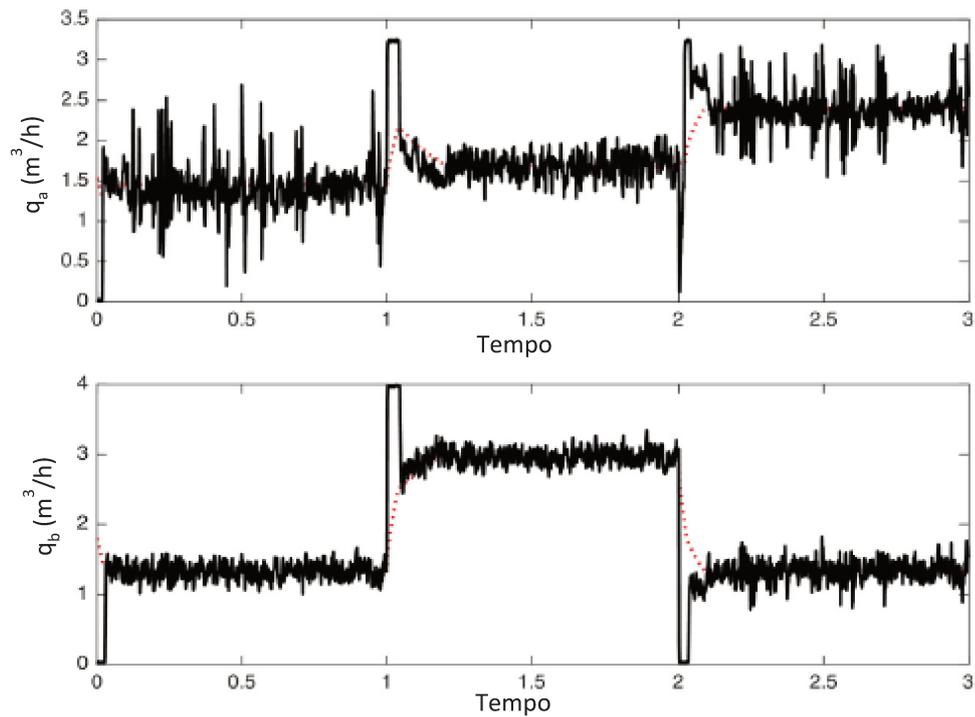
**Figura 40.** Evolução das variáveis manipuladas em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1b**. **Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—) e limites superior (—) e inferior (—) das variáveis manipuladas.



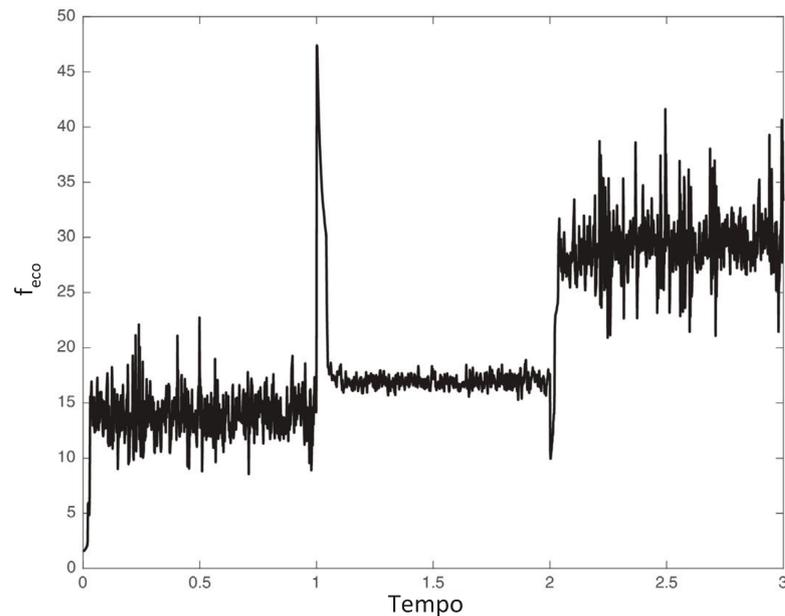
**Figura 41.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1b**. **Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).



**Figura 42.** Evolução das variáveis controladas do **Caso 3: Cenário 1** durante o experimento da referência [Adaptado de D'Jorge et al. (2017)].



**Figura 43:** Evolução das variáveis manipuladas do **Caso 3: Cenário 1** durante o experimento da referência [Adaptado de D’Jorge et al. (2017)].



**Figura 44:** Evolução da função econômica do **Caso 3: Cenário 1** durante o experimento da referência [Adaptado de D’Jorge et al. (2017)].

Uma análise das respostas do sistema para os cenários simulados com e sem ruído artificial foi feita pela comparação das **Figuras 39-41** com as **Figuras 34-36**. Essa análise evidencia que todos os controladores implementados lidaram bem com a adição de uma outra fonte de incerteza, visto que os estados estacionários alcançados são os mesmos. Além disso, os perfis

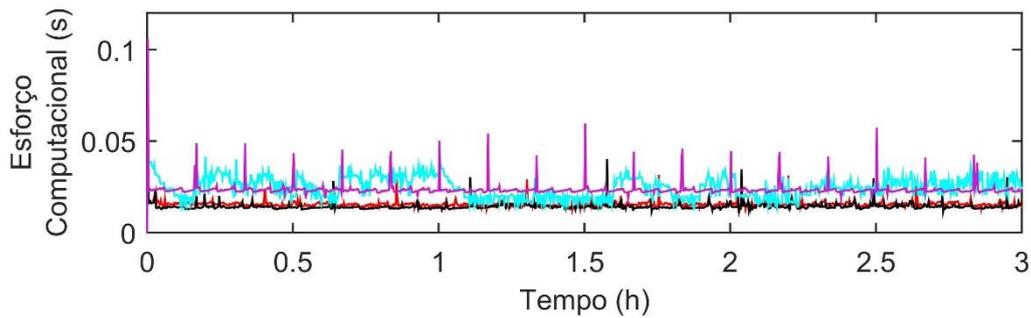
dinâmicos de todas as suas variáveis são semelhantes, incluindo os tempos de resposta e esforço de controle em cada subcenário. Ademais, a **Figura 41** permite observar também que o **Controlador 1** mantém o processo em torno da mesma solução subótima  $([z_{1_s} \ z_{2_s} \ z_{3_s} \ z_{4_s}], [q_{a_s} \ q_{b_s}]) = ([1,063 \ 0,851 \ 1,300 \ 0,605], [1,562 \ 2,808])$  no subcenário com  $\mathbf{p} = [0,5 \ 100]$ .

A análise dos resultados dos controladores implementados e do controlador de D’Jorge et al. (2017), apresentados, respectivamente, nas **Figuras 39-41** e nas **Figuras 42-44**, por outro lado, apresentou um fato interessante. O **Controlador 1** apresentou um perfil dinâmico bastante semelhante ao do EMPC robusto proposto em D’Jorge et al. (2017), o que é consequência de ambos os controladores utilizarem modelos lineares de predição linear e inserirem a otimização econômica no MPC pelo gradiente da função econômica. Além disso, o EMPC da referência levou o sistema à mesma solução subótima que o **Controlador 1** no subcenário com  $\mathbf{p} = [0,5 \ 100]$ , o que é condizente com sua formulação. A principal diferença entre eles está na atuação do controlador frente a uma possível violação da zona de controle. O EMPC de D’Jorge et al. (2017) não usa uma estratégia de controle por zonas, logo ele contém uma atuação mais agressiva em alguns instantes para evitar a violação das restrições de saída. A **Tabela 19** apresenta os valores da função econômica média  $\overline{f_{eco}}$  e do esforço computacional total das simulações dos controladores implementados para o **Caso 2: Cenário 1b**.

**Tabela 19.** Resultados numéricos do **Caso 3: Cenário 1b**.

Propriedade	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$\overline{f_{eco}}$	19,204	20,254	19,052	18,960
Esforço computacional total (s)	15,42	16,74	26,61	25,43

A comparação entre os resultados das **Tabelas 18 e 19** mostra que o desempenho econômico de todos os controladores é praticamente idêntico ao do cenário sem ruído. Todas as simulações deste trabalho lidam com incerteza tanto no ajuste do modelo de predição linear ao comportamento real do processo quanto pela atualização de estados a partir das variáveis medidas. Dessa forma, o ruído é inserido apenas como uma fonte adicional de incerteza que pouco afeta o desempenho econômico e o esforço computacional. Este último, inclusive, também obteve um perfil semelhante ao do **Cenário 1a** conforme pode ser observado pela comparação das **Figuras 38 e 45**.

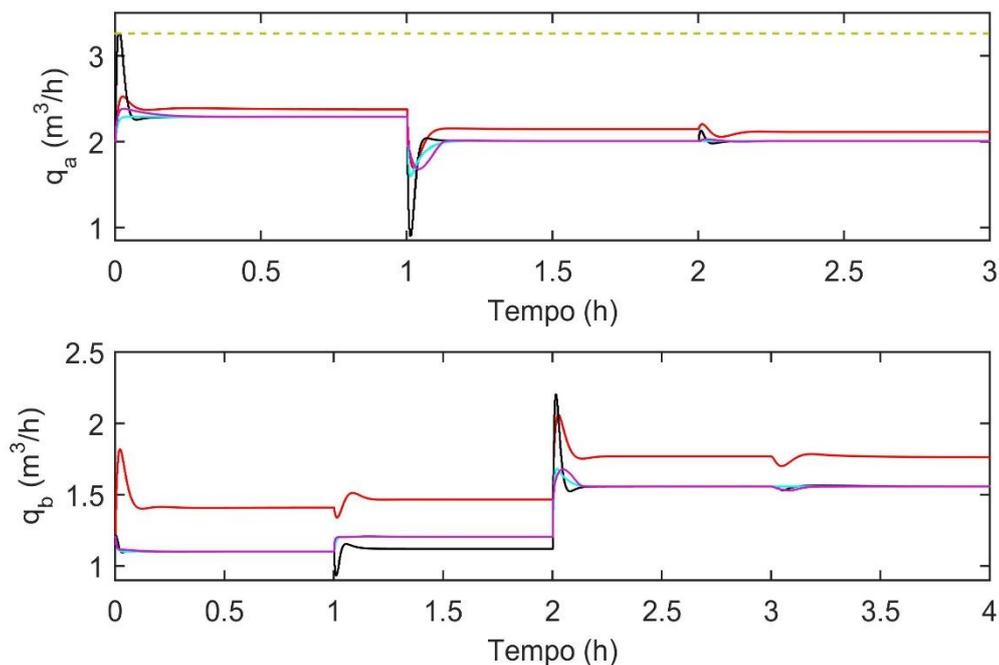


**Figura 45.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 1b**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

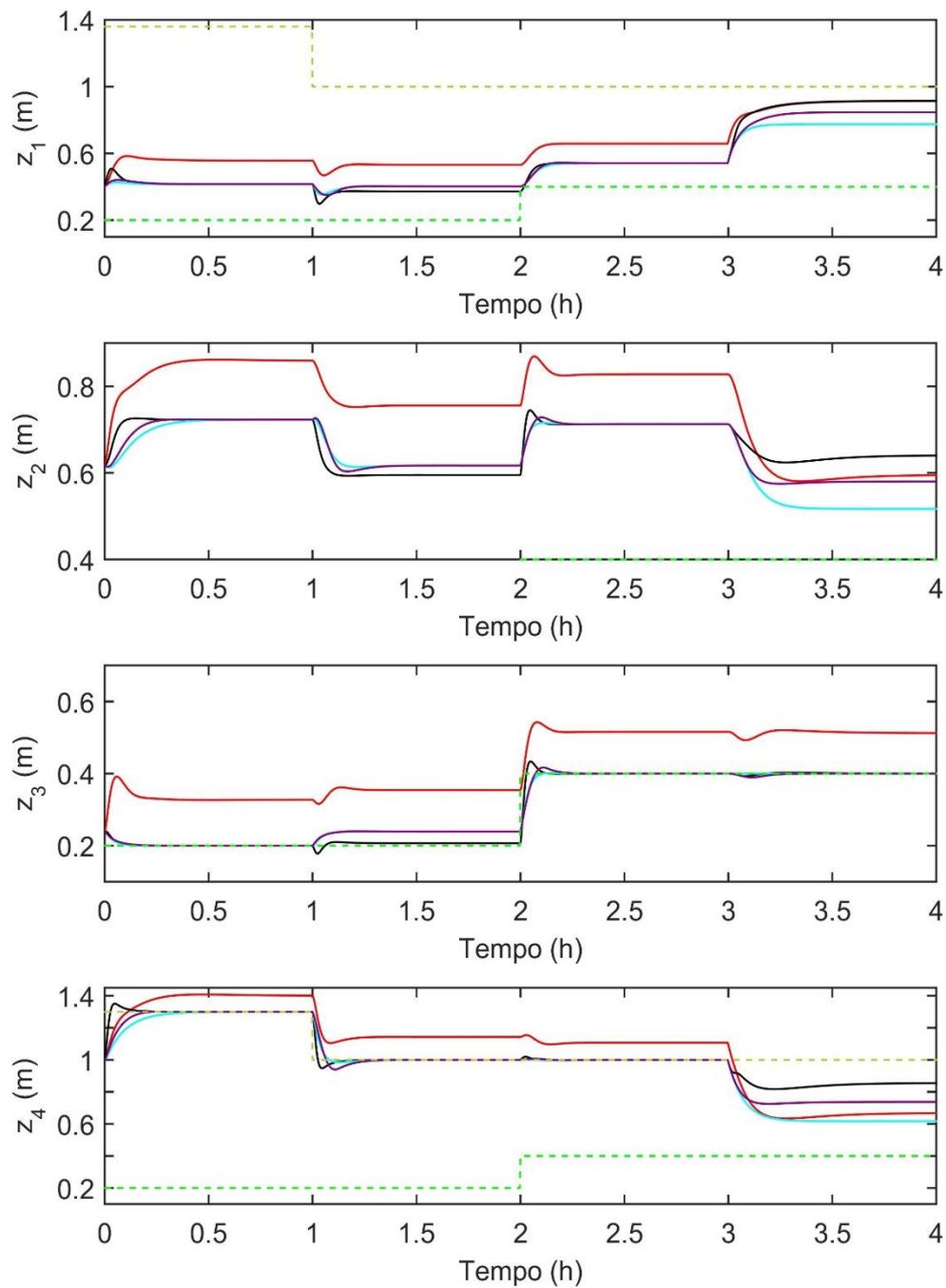
### 5.3.6 Simulação do Cenário 2

O outro cenário de simulações do **Caso 3** parte da mesma condição inicial dos **Cenários 1 e 2**, porém com  $\mathbf{p} = [5 \ 100]$  ao invés de  $\mathbf{p} = [5 \ 10]$ . Além disso, variou-se a sua zona de controle e a perturbação  $\gamma_a$  conforme os intervalos informados na **Tabela 20**. As **Figuras 46-48** apresentam os resultados das simulações de cada controlador implementado nesse cenário.

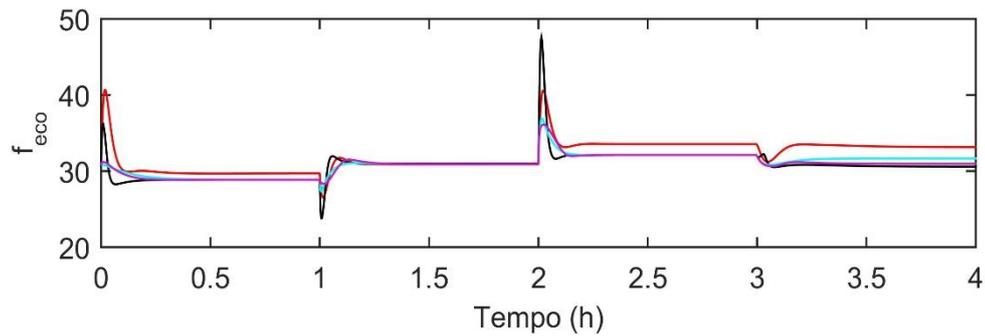


**Figura 46.** Evolução das variáveis manipuladas em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 2**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—), **Controlador 4** (—) e limite superior (—) da variável manipulada.



**Figura 47.** Evolução das variáveis controladas em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 2**. Controlador 1 (—), Controlador 2 (—), Controlador 3 (—), Controlador 4 (—) e limites superior (—) e inferior (—) da região de controle da variável controlada.



**Figura 48.** Evolução da função econômica em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 2**.

**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

**Tabela 20.** Valores de  $\gamma_a$  e regiões de controle para o **Cenário 3** do **Caso 2**.

Intervalo	$\gamma_a$	$z_{min}$	$z_{max}$
$0 \leq t < 1$	0,3	[0,2 0,2 0,2 0,2]	[1,36 1,36 1,3 1,3]
$1 \leq t < 2$	0,3	[0,2 0,2 0,2 0,2]	[1 1 1 1]
$2 \leq t < 3$	0,3	[0,4 0,4 0,4 0,4]	[1 1 1 1]
$3 \leq t \leq 4$	0,45	[0,4 0,4 0,4 0,4]	[1 1 1 1]

A **Figura 47** mostra a contínua convergência do **Controlador 2** fora da zona de controle quando o **Caso 3** está sujeito a  $p = [5 \ 100]$ . Além disso, o subcenário definido em  $3 \leq t \leq 4$  h gerou novamente um *offset* no **Controlador 3** devido à perturbação não-medida  $\gamma_a$ , porém o controlador simplesmente a ignorou e não exerceu qualquer esforço de controle conforme é observável na **Figura 46**. Esse subcenário também gerou uma situação inesperada, o **Controlador 1** convergiu o processo a um estado estacionário economicamente menor do que o alcançado pelo **Controlador 4**. Ambos os controladores foram incapazes de trazer o processo à solução ótima exposta na **Tabela 15**, porém o **Controlador 1** foi quem mais se aproximou dela com a solução subótima  $(([z_{1_s} \ z_{2_s} \ z_{3_s} \ z_{4_s}], [q_{a,s} \ q_{b,s}]) = ([0,915 \ 0,640 \ 0,400 \ 0,855], [2,363 \ 1,558])$ . Além disso, o **Controlador 1** convergiu o sistema às demais soluções ótimas fornecidas pela **Tabela 15** em seus respectivos subcenários.

Substituindo a solução subótima  $(([z_{1_s} \ z_{2_s} \ z_{3_s} \ z_{4_s}], [q_{a,s} \ q_{b,s}]) = ([0,915 \ 0,640 \ 0,400 \ 0,855], [2,363 \ 1,558])$  em um sistema das **Equações 219-224** definido pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker, tem-se a seguinte a seguinte solução única  $\lambda_1$  gerada pela **Equação 219**:

$$\lambda_1 = -\frac{p(2)V_{min}}{(z_1 + z_2)^2} \left( \frac{\sqrt{2z_1}}{a_1\sqrt{g_r}} \right) = -\frac{100 \cdot 0,012}{(0,915 + 0,640)^2} \left( \frac{\sqrt{2 \cdot 0,915}}{1,310 \cdot 10^{-4} \sqrt{9,81}} \right) = -1636$$

Que pode ser substituída na **Equação 223** para calcular o valor de  $\lambda_4$  como:

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= -\left(2q_a + \lambda_1 \left(\frac{\gamma_A}{(Area \cdot 3600)}\right)\right) \left(\frac{Area \cdot 3600}{1 - \gamma_A}\right) \\ &= -\left(2 \cdot 2,363 - 1636 \left(\frac{0,45}{(0,06 \cdot 3600)}\right)\right) \left(\frac{0,06 \cdot 3600}{1 - 0,45}\right) = -517\end{aligned}$$

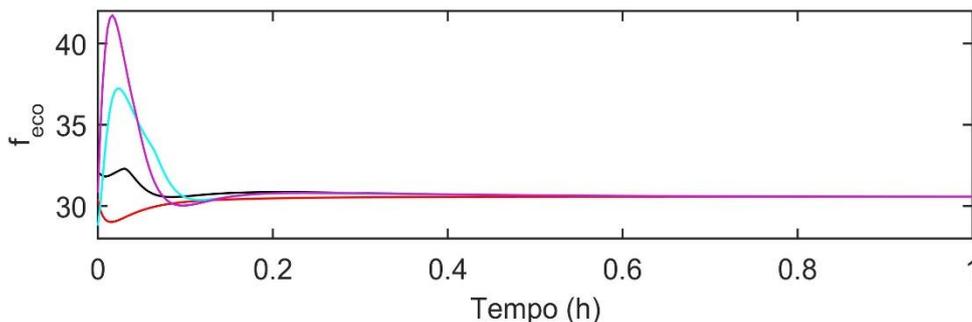
A substituição deste ponto na **Equação 220**, por outro lado, gera:

$$\lambda_2 = -\frac{p(2)V_{min}}{(z_1 + z_2)^2} \left(\frac{\sqrt{2z_2}}{a_2\sqrt{g_r}}\right) = -\frac{100 \cdot 0,012}{(0,915 + 0,640)^2} \left(\frac{\sqrt{2 \cdot 0,640}}{1,507 \cdot 10^{-4}\sqrt{9,81}}\right) = -1189,5$$

Que deveria ser igual à  $\lambda_4$  para satisfazer a **Equação 222**, pois:

$$\lambda_2 \left(\frac{a_4\sqrt{g_r}}{Area\sqrt{2z_4}}\right) - \lambda_4 \left(\frac{a_4\sqrt{g_r}}{Area\sqrt{2z_4}}\right) = 0 \therefore (\lambda_2 - \lambda_4) \left(\frac{a_4\sqrt{g_r}}{Area\sqrt{2z_4}}\right) = 0$$

Uma vez que  $\lambda_2 \neq \lambda_4$ , então a substituição da solução subótima  $([z_{1s} \ z_{2s} \ z_{3s} \ z_{4s}], [q_{as} \ q_{bs}]) = ([0,915 \ 0,640 \ 0,400 \ 0,855], [2,363 \ 1,558])$  não resulta em uma solução comum para as **Equações 219, 220, 222 e 223**, o que a caracteriza como um ponto não crítico da função econômica. Dessa forma, uma análise para determinar se esta solução é um ponto de equilíbrio do **Controlador 1** para o **Caso 3** com  $\mathbf{p} = [5 \ 100]$ ,  $\gamma_a = 0,45$ ,  $\mathbf{z}_{min} = [0,4 \ 0,4 \ 0,4 \ 0,4]$  e  $\mathbf{z}_{max} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$  foi feita a partir de múltiplas simulações desse subcenário a partir de diferentes condições iniciais. Os perfis econômicos de todas condições iniciais testadas são apresentados na **Figura 49**.



**Figura 49.** Análise de estabilidade assintótica do **Caso 3: Cenário 3** com  $\gamma_a = 0,45$ . Condição inicial 1

(—), condição inicial 2 (—), condição inicial 3 (—) e condição inicial 4 (—)

Onde as condições iniciais 1, 2, 3 e 4 são as respectivas soluções ótimas  $([z_{10} \ z_{20} \ z_{30} \ z_{40}], [q_{a0} \ q_{b0}]) = ([0,541 \ 0,713 \ 0,400 \ 1,000], [2,008 \ 1,558])$ ,  $([z_{10} \ z_{20} \ z_{30} \ z_{40}], [q_{a0} \ q_{b0}]) = ([0,996 \ 0,713 \ 0,400 \ 1,000], [2,556 \ 1,558])$ ,  $([z_{10} \ z_{20} \ z_{30} \ z_{40}], [q_{a0} \ q_{b0}]) = ([1,290 \ 1,287 \ 0,200 \ 1,300], [2,289 \ 1,101])$  e

$([z_{1_0} \ z_{2_0} \ z_{3_0} \ z_{4_0}], [q_{a_0} \ q_{b_0}]) = ([0,403 \ 0,617 \ 0,239 \ 1,000], [2,008 \ 1,205])$  obtidas pela **Tabela 15**.

A **Figura 49** mostra novamente que as soluções subótimas do **Controlador 1** acontecem sempre em pontos de equilíbrio que também atraem, inclusive, a solução ótima econômica. Todas as análises de estabilidade assíntota, cujos gráficos são apresentados nas **Figuras 14, 37 e 49**, apresentaram uma resposta inversa em simulações iniciadas no estado estacionário ótimo. Isso sugere que o **Controlador 1** pode convergir o sistema a soluções subótimas apenas quando o mínimo global da função econômica ocorrer no estado transiente, porém mais análises sobre o assunto seriam necessárias para uma afirmação conclusiva.

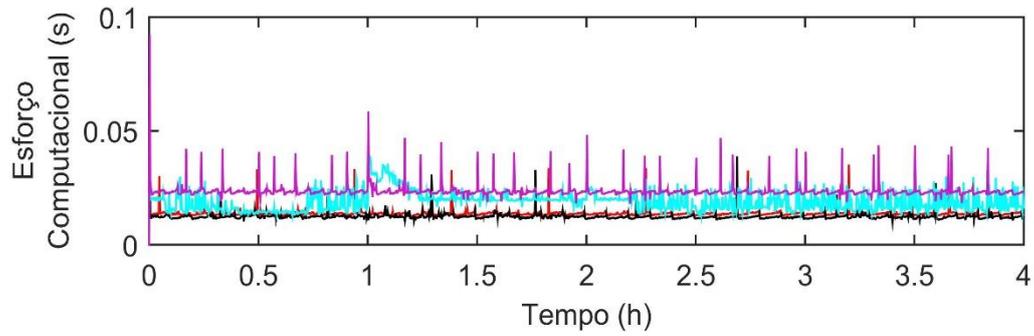
Todas as simulações do **Controlador 1** presentes nesse documento apresentaram, portanto, estabilidade assíntota, embora nenhuma fundamentação matemática acerca desta propriedade tenha sido feita. Os gráficos de sintonia mostraram que os estados estacionários finais do **Controlador 1** independem de seus parâmetros de sintonia, enquanto que as análises de estabilidade assíntota provaram que todas as soluções subótimas existentes aconteceram em pontos de equilíbrio que independem da condição inicial. Por fim, o **Controlador 1** levou o sistema ao estado estacionário ótimo econômico na maioria dos subcenários dos casos de estudo.

A **Tabela 21**, com os valores numéricos de  $\overline{f_{eco}}$  e esforço computacional total, confirmam o melhor desempenho econômico do **Controlador 1** no **Caso 3: Cenário 3** devido ao seu ganho obtido com a solução subótima em  $3 \leq t \leq 4$  h. Além disso, essa tabela mostra que os controladores implementados mantiveram a sua razão de esforço computacional total em relação aos cenários anteriores do **Caso 3**.

A **Figura 50** com o perfil de esforço computacional obtido na simulação de cada controlador, permite observar que o aumento do número de variáveis do **Caso 3** gerou um aumento significativo sobre os intervalos de esforço computacional. O aumento de duas vezes do número de variáveis controladas e manipuladas entre o **Caso 1** e o **Caso 3** gerou um aumento proporcional de duas vezes sobre o tempo de resolução dos controladores. Embora o período de execução dos controladores do **Caso 3** ainda se encontre em uma faixa aplicável em tempo real de 0,015 a 0,1 s, essa conclusão significa que o **Controlador 1** tende a se tornar mais relevante conforme se aumenta o número de variáveis do sistema.

**Tabela 21.** Resultados numéricos do **Caso 3: Cenário 3.**

Propriedade	Controlador 1	Controlador 2	Controlador 3	Controlador 4
$\overline{f_{eco}}$	30,76	32,00	30,96	30,82
Esforço computacional total (s)	17,94	19,85	27,31	33,97



**Figura 50.** Evolução do esforço computacional em função do tempo para o **Caso 3: Cenário 3**.  
**Controlador 1** (—), **Controlador 2** (—), **Controlador 3** (—) e **Controlador 4** (—).

## 6 Conclusões e recomendações para futuros trabalhos

### 6.1 Conclusões

Essa dissertação propõe a formulação de um controlador preditivo econômico, cuja otimização econômica é incorporada ao seu problema pelo gradiente da função econômica. O controlador proposto, denominado de **Controlador 1** a partir da **Seção 4.4**, tem uma estrutura quadrática com horizonte de predição infinito, restrição terminal, variáveis de folga, controle por zona das variáveis controladas e modelo de predição linear. A incorporação do problema econômico em sua estrutura quadrática é feita pelo cálculo do gradiente da função econômica baseado nas variáveis medidas do sistema a cada tempo de amostragem. As derivadas parciais que compõem o gradiente são então multiplicadas pela suas respectivas variáveis no horizonte de predição do estado estacionário. Dessa forma, o controlador proposto segue o sentido do gradiente da função econômica, que é uma constante para o problema de otimização. A multiplicação da derivada parcial de uma variável medida pelo seu valor em um instante futuro é caracterizada como uma aproximação linear da função econômica, cujo coeficiente angular é recalculado a cada execução do controlador.

O horizonte de predição infinito do controlador proposto é reduzido ao horizonte de controle finito pela restrição terminal acrescida pelo modelo OPOM conforme a metodologia de Odloak (2004). A viabilidade de ambos os problemas regulatórios e econômicos em uma camada de otimização é assegurada pelo controle por zona das variáveis de saída, que foi feito de acordo com a estratégia proposta por González e Odloak (2009). Essa propriedade aumenta o número de dimensões de sua solução, assim como a adição de variáveis de folga. Ambas as propriedades juntas atribuem garantia de viabilidade recursiva ao controlador proposto, contanto algumas suposições sejam satisfeitas. O controlador proposto, entretanto, não tem garantia de estabilidade no sentido de Lyapunov, visto que a sua função objetivo pode ser tanto negativa quanto crescente. Embora a condição de assintoticamente estável não tenha sido provada matematicamente para o **Controlador 1**, os resultados de suas simulações indicam a existência de tal propriedade. Apesar disso, uma afirmação conclusiva não pode ser feita mesmo com as averiguações dos pontos de equilíbrio feitas pelas múltiplas simulações a partir de diferentes condições iniciais. Vale ressaltar que o **Controlador 1** lidou bem com todas as fontes de incerteza presentes nas simulações e conseguiu direcionar o processo à solução ótima calculada pelo problema econômico NLP na maioria dos subcenários e mesmo suas soluções subótimas ainda agregaram ganho econômico. Isso resultou em um desempenho econômico, quantificado

numericamente pela função econômica média, bem semelhante ao da estrutura integrada de RTO com MPC do **Controlador 4**, porém com a vantagem do esforço computacional para o **Controlador 1**, que leva de 25 a 60% menos tempo para resolver suas camadas de otimização. Embora essa diferença percentual não seja relevante nas simulações em valores absolutos, ela pode ser um diferencial em sistemas mais complexos, que necessitem de um baixo tempo de amostragem.

Além da estrutura hierárquica da RTO integrada com o MPC, o controlador de formulação não linear **Controlador 3** também foi implementado para avaliar, principalmente, a redução do esforço computacional obtida pelo controlador proposto ao se adotar a estratégia de aproximar a função econômica pelo seu gradiente. Nessa análise, o **Controlador 1** obteve, geralmente, um tempo de execução inferior, embora o **Caso 2** tenha indicado que o esforço computacional do controlador não linear pode ter menor esforço computacional com a redução de seu horizonte de predição. Em relação ao desempenho econômico, o **Controlador 1** apresentou melhor desempenho geral e maior confiabilidade, visto que ele ainda atua em direção a uma solução subótima quando o sistema sofre perturbações não-medidas.

## 6.2 Recomendações para trabalhos futuros

Embora o controlador proposto tenha resultados promissores, assim como a base de seu desenvolvimento, ambos não têm garantia de estabilidade e contém espaço para o aperfeiçoamento do desempenho econômico. Assim sendo, algumas possibilidades de prosseguimento deste trabalho são detalhadas abaixo em tópicos.

- Procura de métodos alternativos de estabilidade que possam atribuir garantia de estabilidade assíntota ao controlador proposto. As suas simulações apresentaram diversos indicadores da existência dessa propriedade, porém ela não foi provada. Além de buscar formas de solidificar uma base matemática para a sua formulação, outra alternativa seria entender as razões que o permitem convergir a soluções subótimas e eliminá-las, se possível.
- Implementação da estratégia de múltiplos modelos lineares ao controlador proposto. Isso agregaria garantia de robustez ao controlador e melhoraria o seu desempenho econômico pela maior precisão de seus modelos lineares. O contraponto dessa estratégia, no entanto, seria o aumento do esforço computacional causado pelo cálculo de um número maior de equações e variáveis a cada execução.

- O uso do gradiente da função econômica calculado sobre as variáveis medidas apresenta uma forma de reduzir o custo computacional, mas ela ainda contém a imprecisão de considerar o gradiente constante a cada execução do controlador. Uma abordagem mais precisa seria calcular o gradiente da função econômica sobre as variáveis no horizonte de predição. Isso, inevitavelmente, aumentaria a carga computacional, pois a estrutura do controlador passaria a ser não linear, porém o seu desempenho e o seu esforço computacional podem ser superiores ao de um controlador que considere apenas o valor real da função econômica no estado estacionário. Além dessa comparação evidente, um controlador com essa abordagem também pode ser comparado ao **Controlador 1** deste documento para verificar o efeito da extensão do gradiente da função econômica sobre as variáveis preditas do controlador.
- A redução do horizonte infinito gerada pelo modelo OPOM do **Controlador 1** é baseada na suposição de que o sistema é estável, o que garante que termo dinâmico tenderá a zero após o horizonte de controle. Essa suposição, entretanto, não é válida em processos com dinâmicas mais complexas, que tenham polos integradores e/ou instáveis. Dessa forma, a formulação do **Controlador 1** poderia ser desenvolvida de forma a alcançar um controlador com maior aplicabilidade.

## 7 Bibliografia

ALAMO, T.; FERRAMOSCA, A.; GONZÁLEZ, A.H.; LIMON, D.; ODLOAK, D. A gradient-based strategy for integrating Real Time Optimizer (RTO) with Model Predictive Control (MPC). *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 17, p. 33-38, 2012.

ALAMO, T.; FERRAMOSCA, A.; GONZÁLEZ, A.H.; LIMON, D.; ODLOAK, D. A gradient-based strategy for the one-layer RTO+MPC controller. *Journal of Process Control*, v. 24, n. 4, p. 435-447, 2014.

ALESSANDRETTI, A.; AGUIAR, A.P.; JONES, C.N. On convergence and performance certification of a continuous economic model predictive control scheme with time varying performance index. *Automatica*, v. 68, p. 305-313, 2016.

ALVAREZ, L. A.; FRANCISCHINELLI, E.; SANTORO, B.; ODLOAK, D. Stable model predictive control for integrating systems with optimizing targets. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 48, p. 9141-9150, 2009.

ALVAREZ, L. A.; ODLOAK, D. Robust integration of real time optimization with linear model predictive control. *Computers & Chemical Engineering*, v. 34, p. 1937-1944, 2010.

ALVAREZ, L. A. *Strategies with guarantee of stability for the integration of Model Predictive Control and Real Time Optimization*. 2012. 174 f. Tese (Doutorado em Engenharia Química) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

ALVAREZ, L.A.; ODLOAK, D. Integration of RTO with MPC through the gradient of a convex function, *IFAC Proceedings Volumes*, v. 8, n. 1, p. 268-273, 2012.

ALVAREZ, L.A.; ODLOAK, D. Reduction of the QP-MPC Cascade Structure to a Single Layer MPC, *Journal of Process Control*, v. 24, n. 10, p. 1627–1638, 2014.

AMRIT, R.; RAWLINGS, J. B.; ANGELI, D. Economic optimization using model predictive control with a terminal cost, *Annual Reviews in Control*, v. 35, p. 178-186, 2011.

ANGELI, D.; AMRIT, R.; RAWLINGS, J.B. On average performance and stability of economic model predictive control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 7, p. 1615-1626, 2012.

CUTLER, C.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control – a computer control algorithm. *AIChE national meeting*, Houston, 1979.

CUTLER, C.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control – a computer control algorithm. *In Proceedings of the joint automatic control conference*, 1980.

DE SOUZA, G.; ODLOAK, D.; ZANIN, A.C. Real time optimization (RTO) with model predictive control (MPC). *Computers & Chemical Engineering*, v. 34, n. 12, p. 1999-2006, 2010.

DIEHL, M.; AMRIT, R.; RAWLINGS, J.B. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 3, p. 703-707, 2011.

D'JORGE, A.; FERRAMOSCA, A.; GONZÁLEZ, A. H. A robust gradient-based MPC for integrating real time optimizer (RTO) with control. *Journal of Process Control*, v. 54, p. 65-80, 2017.

ELLIS, M.; DURAND, H.; CHRISTOFIDES, P. D. A tutorial review of economic model predictive control methods. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 1156-1178, 2014.

ENGELL, S. Feedback control for optimal process operation, *Journal of Process Control*, v. 17, n. 3, p. 203-219, 2007.

FERRAMOSCA, A.; RAWLINGS, J. B.; LIMON, D.; CAMACHO, E. F.; Economic MPC for a changing economic criterion, *Proceedings of the IEEE-Conference on Decision and Control*, p. 6131-6136, 2010.

FERRAMOSCA, A.; GONZÁLEZ, A. H.; LIMON, D. Offset-free multi-model economic model predictive control for changing economic criterion. *Journal of Process Control*, v. 54, p. 1-13, 2017.

GARCIA, C. E.; MORSHEDI, A. M. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC), *Chemical Engineering Communications*, v. 43, p. 73-87, 1986.

GARCIA, C. E.; PRETT, D. M.; MORARI, M. Model predictive control: Theory and practice – a survey. *Automatica*, v. 25, n. 3, p. 335-348, 1989.

GONZÁLEZ, A. H.; MARCHETTI, J.; ODLOAK, D. Extended robust model predictive control of integrating systems. *AIChE Journal*, v. 53, n. 7, p. 1758-1769, 2007.

GONZÁLEZ, A. H.; ODLOAK, D. A stable MPC with zone control. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 1, p. 110-122, 2009.

GRIFFITH, D. W.; ZAVALA, V. M.; BIEGLER, L. T. Robustly stable economic NMPC for non-dissipative stage costs. *Journal of Process Control*, v. 57, p. 116-126, 2017.

GRÜNE, L. Economic receding horizon control without terminal constraints. *Automatica*, v. 49, p. 725-734, 2013.

GRÜNE, L.; STIELER, M. Asymptotic stability and transient optimality of economic MPC without terminal conditions. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 1187-1196, 2014.

HEIDARINEJAD, M.; LIU, J.; CHRISTOFIDES, P. D. Economic model predictive control of nonlinear process systems using Lyapunov techniques, *AIChE Journal*, v. 58, p. 855-870, 2012.

HEIDARINEJAD, M.; LIU, J.; CHRISTOFIDES, P. D. Algorithms for improved fixed-time performance of Lyapunov-based economic model predictive control of nonlinear systems. *Journal of Process Control*, v. 23, p. 404-414, 2013.

HINOJOSA, A. I.; FERRAMOSCA, A.; GONZÁLEZ, D.; ODLOAK, D. One-layer gradient-based MPC+RTO of a propylene/propane splitter. *Computers and Chemical Engineering*, v. 106, p. 160-170, 2017.

JÄSCHKE, J.; YANG, X.; BIEGLER, L. T. Fast economic model predictive control based on NLP-sensitivities. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 1260-1272, 2014.

KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. *Bulletin de la Societe Mathematique Mexicana*, v. 5, p. 102-119, 1960.

LIMON, D.; PEREIRA, M.; DE LA PEÑA, D. M.; ALAMO, T.; GROSSO, J. M. Single-layer economic model predictive control for periodic operation. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 1207-1224, 2014.

LIU, S.; LIU, J. Economic model predictive control with extended horizon. *Automatica*, v. 73, p. 180-192, 2016.

LIU, X.; CUI, J. Economic model predictive control of boiler-turbine system. *Journal of Process Control*, v. 66, p. 59-67, 2018.

LUNDSTRÖM, P.; LEE, J. H.; MORARI, M.; SKOGESTAD, S. Limitations of dynamic matrix control. *Computers & Chemical Engineering*, v. 19, n. 4, p. 409-421, 1995.

MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive Control with Constraints*. Londres: Prentice Hall, 2002, 352 p.

MARCHETTI, A. G.; FERRAMOSCA, A.; GONZÁLEZ, A. H. Steady-state target optimization designs for integrating real-time optimization and model predictive control. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 129-145, 2014.

MARTINS, M. A. F.; ODLOAK, D. A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. *Automatica*, v. 67, p. 132-143, 2016.

MAYNE, D. Q.; RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. O. M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, v. 34, p. 789-814, 2000.

MAYNE, D. Q. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, v. 50, p. 2967-2986, 2014.

MORO, L. F.; ODLOAK, D. Constrained multivariable control of fluid catalytic cracking converters. *Journal of Process Control*, v. 5, n. 1, p. 29-39, 1995.

MULLER, M. A.; ANGELI, D.; ALLGOWER, F. Transient average constraints in economic model predictive control. *Automatica*, v. 50, p. 2943-2950, 2014.

ODLOAK, D. Extended robust model predictive control. *AIChE Journal*, v. 50, p. 1824-1836, 2004.

OGUNNAIKE, B. A.; RAY, W. H. *Process Dynamics, Modeling and Control*. Nova York: Oxford University Press, 1994. 1260 p.

OLANREWAJU, O.; MACIEJOWSKI, J. M.; Implications of discretization on dissipativity and economic model predictive control. *Journal of Process Control*, v. 49, p. 1-8, 2017.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 7, p. 733-764, 2003.

RAWLINGS, J. B.; MUSKE, K. R. The stability of constrained receding horizon. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, p. 1512-1516, 1993.

RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J. L.; PAPON, J. Algorithmic control of industrial processes. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> IFAC symposium on identification and system parameter estimation*, p. 1119-1167, 1976.

SANTANDER, O.; ELKAMEL, A.; BUDMAN, H. Economic model predictive control of chemical processes with parameter uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, v. 95, p. 10-20, 2016.

SANTORO, B. F. *Controle preditivo de horizonte infinito para sistemas integradores e com tempo morto*. 2011, 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

YING, C.; JOSEPH, B. Performance and stability analysis of LP-MPC and QP-MPC cascade control systems. *AIChE Journal*, v. 45, n. 7, p. 1521-1534, 1999.

ZANIN, A.C.; GOUVÊA, M.T.; ODLOAK, D. Integrating real-time optimization into the model predictive controller of the FCC system, *Control Engineering Practice*, v. 10, n. 8, p. 819-831, 2002.

ZANON, M.; GROS, S.; DIEHL, M. Indefinite linear MPC and approximated economic MPC for nonlinear systems. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 1273-1281, 2014.

ZHANG, J.; LIU, S.; LIU, J. Economic model predictive control with triggered evaluations: State and output feedback. *Journal of Process Control*, v. 24, p. 1197-1206, 2014.