

Este exemplar corresponde à redação final  
da tese defendida por Wagner Palmieri e  
aprovada pela comissão julgadora em 17/08/90

*mmr*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE  
MATERIAIS

Tese de: Mestrado

PALMIERI

Título da Tese: *Simulação da solidificação de lingotes cilíndricos de aço  
médio-carbono através de método numérico.*

Autor: Wagner Palmieri *W.P.*

Orientador: Rezende Gomes dos Santos *R.G.S.*

E-109

Aprovado por:

*mmr*

Prof. Dr. Rezende Gomes dos Santos, Presidente

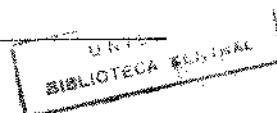
*Amauri*

Prof. Dr. Amauri Garcia

*Alain*

Prof. Dr. Alain Isore

*20/08/90*



Dedico à

Denise, minha grande  
companheira.

## AGRADECIMENTOS

. A Deus, pois “é por intermédio de Cristo que temos tal confiança nEle; não que por nós mesmos sejamos capazes de pensar alguma coisa, pelo contrário a nossa suficiência vem de Deus...” (II Cor. 3: 4 e 5).

. Ao Prof. Dr. Rezende Gomes dos Santos, pela amizade e orientação.

. A Eletrometal, pela oportunidade concedida e pelo constante apoio oferecido.

. A Unicamp (Dept. de Materiais), como sendo a instituição onde pude desenvolver este trabalho.

. Ao Prof. Dr. Amauri Garcia, por sua solicitude.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático computacional, o qual foi aplicado no estudo da solidificação de lingotes de aço médio-carbono em moldes cilíndricos de ferro fundido. O método numérico utilizado foi o de diferenças finitas explícito.

Inicialmente, os resultados obtidos através da aplicação do modelo desenvolvido foram comparados com resultados experimentais obtidos através da fundição de um pequeno lingote cilíndrico de aço, analisando-se assim sua aplicabilidade.

Posteriormente, o modelo foi adaptado para a análise da solidificação de grandes lingotes cilíndricos, a fim de se estudar a influência de parâmetros de fundição sobre perfis térmicos no interior do metal, durante o processo de solidificação e resfriamento do mesmo.

Foi analisado também a influência do isolamento e utilização de pó exotérmico na cabeça quente.

## ABSTRACT

This work presents the development of a computational mathematics model, which was applied to study of medium carbon ingots steel solidification in cylindrical cast iron mold. The numerical method utilized was the Finite-Difference Method.

Firstly, the results obtained with the application of the numerical model was compared with experimental results obtained by solidification of a small cylindrical steel ingot, analysing the reliability of the model.

Subsequently, the model was adapted to analysing the solidification of a greater cylindrical ingot and the objective was to correlate solidification parameters with ingot thermal profiles, during solidification and cooling process.

The influence of insulation and exothermic powder practice on thermal profiles was also studied.

## ÍNDICE

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	01
1.1. A importância da solidificação na metalurgia	01
1.2. O uso da computação no estudo da solidificação	02
1.3. Objetivos	03
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	05
2.1. Introdução	05
2.2. Considerações gerais sobre a análise do processo de solidificação	05
2.3. Princípios gerais dos métodos numéricos	07
2.4. Síntese dos principais trabalhos	08
<b>3. METODOLOGIA</b>	29
3.1. Técnicas gerais de solução	29
3.2. Métodos numéricos: comparação entre FEM e FDM	31
3.3. Comparação entre FDM explícito e implícito	37
3.4. Métodos de diferenças finitas explícito	38
3.5. Métodos de cálculo do calor latente	51
3.6. Considerações complementares	53
<b>4. EQUACIONAMENTO</b>	55
4.1. Equações do metal	56
4.2. Equações do molde	67
<b>5. DESCRIÇÃO DA ETAPA EXPERIMENTAL</b>	77
<b>6. RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	88
<b>7. APLICAÇÃO</b>	119
7.1. Influência do uso do pó exotérmico	120
7.2. Influência da temperatura inicial do metal líquido	121
7.3. Espessura do molde	121
7.4. Influência da altura da cabeça-quente	122
7.5. Influência das dimensões do lingote	123
7.6. Influência da condutibilidade do isolante na cabeça-quente	123

7.7. Influência do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde na temperatura da superfície do metal .....	124
7.8. Influência da variação da espessura do molde na temperatura da superfície do metal .....	124
8. CONCLUSÕES .....	139
9. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO	141
10. BIBLIOGRAFIA .....	142
Apêndice 1 - Simbologia Geral .....	148

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. A Importância da Solidificação na Metalurgia

Quase todos os processos de fabricação metalúrgicos envolvem em pelo menos uma de suas etapas, processos de solidificação. A solidificação na metalurgia é aplicada na conformação dos metais, seja esta conformação final, como no caso das peças fundidas, ou intermediária, como no caso de lingotes para posterior conformação mecânica. Envolvem também o fenômeno da solidificação os processos de soldagem por fusão, sendo, neste caso, a solidificação restrita à região da solda.

Mas a solidificação não é importante somente devido à conformação de metais. Durante o processo de solidificação ocorre a formação da estrutura bruta da peça metálica, seja ela lingote ou peça fundida, e esta estrutura bruta de fusão influencia diretamente a qualidade da peça obtida. Quando a peça obtida é em lingote, é conveniente que a estrutura da fusão facilite a deformação do mesmo na direção e sentido desejados. Se o produto da solidificação é uma peça fundida, a estrutura de fusão deve propiciar ao mesmo, o melhor comportamento mecânico possível, em função de sua utilização posterior.

Sendo as propriedades do produto metalúrgico fortemente influenciadas pelo processo de solidificação é, portanto, de grande importância prática a análise dos fatores envolvidos na mudança de fase de metal líquido para sólido que atuam diretamente nesse processo.

A solidificação é determinada basicamente pela taxa de resfriamento do metal líquido, ou seja, pela variação da temperatura com o tempo, na região de solidificação. E a taxa de resfriamento é definida em função do gradiente de temperatura (que é a taxa de variação da temperatura em função da posição) e da velocidade de avanço da frente de solidificação no interior do metal. Sabe-se que o gradiente de temperatura e a velocidade de solidificação são alguns dos fatores mais importantes de controle da estrutura e propriedades dos metais solidificados.

Algumas das maneiras de se controlar a taxa de resfriamento são através do uso de resfriadores localizados, quando se trabalha com moldes com baixa condutibilidade térmica (como é o caso dos moldes de areia, aplicados normalmente nas fundições), utilização de moldes metálicos permanentes



com maior condutibilidade térmica (usados normalmente para a fabricação de lingotes), uso de isolantes em regiões onde se requer uma taxa de resfriamento menor, refrigeração total do molde quando se requer uma maior taxa de resfriamento, e manipulação do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde, que pode ser maior ou menor, permitindo uma extração mais ou menos eficiente de calor. Em particular, o fluxo de calor na interface, metal/molde, é determinada por uma maior ou menor resistência a esse fluxo nessa região, e essa resistência é devida basicamente à formação de um "GAP" entre o metal e o molde e este "GAP" é formado devido à movimentos relativos do metal e do molde. Ou seja, durante a solidificação, normalmente o molde é sujeito à expansão térmica e o metal à contração térmica, o que causa um afastamento entre ambos. Com a formação do "GAP" a tendência da resistência à transferência de calor na interface é aumentar. Mas o coeficiente de transferência de calor pode ser manipulado através de elementos como a geometria, acabamento superficial do molde, uso de recobrimento superficial do molde e outros, que permitem um certo controle sobre o mesmo. Essa resistência interfacial ao fluxo de calor é, em geral, mais efetiva no caso de moldes metálicos e para dimensões menores. O fato é que, através de um conveniente monitoramento dos parâmetros de solidificação, pode-se obter um produto com propriedades e características mais próximas às especificações estabelecidas.

## 1.2. O Uso da Computação no Estudo da Solidificação

Como foi dito anteriormente, um conveniente controle dos parâmetros de solidificação garante um produto com melhor qualidade. A questão que cabe agora é: como determinar quantitativamente esses parâmetros? Normalmente esses parâmetros são determinados através do empirismo e da experiência individual do fundidor, com pouco ou nenhum embasamento científico. Ou seja, o método adotado é o da tentativa e erro, que é composto pela fase de desenho e fabricação do modelo e molde de fundição, fundição da peça metálica, realização de testes mecânicos e inspeções metalográficas e comparação dos resultados com o padrão requerido. Estando os resultados fora das especificações estabelecidas, inicia-se tudo de novo, e este ciclo é realizado até que se obtenha um produto dentro das especificações. Obviamente este método é caro e anti-producente.

Métodos computacionais têm sido amplamente utilizados em vários campos da indústria e sua aplicação no modelamento da solidificação dos metais tem recebido crescente atenção, para a determinação dos parâmetros de solidificação, através do uso de métodos numéricos aplicados na solução do problema da transferência de calor nos metais durante o processo. A aplicação desses métodos computacionais na solidificação tem permitido a quantificação dos parâmetros de interesse de forma mais rápida, econômica e eficiente que o método da tentativa e erro.

Ao desenvolver-se um modelo matemático computacional para ser aplicado no estudo da solidificação, deve-se manter um compromisso entre complexidade do programa, tempo de processamento, espaço de memória, precisão necessária, etc. e a representatividade do fenômeno físico real, levando em conta as simplificações que devem ser feitas para a obtenção do mesmo.

Basicamente, um modelo matemático aplicado à solidificação deve tratar de três fenômenos: a condução de calor no metal (líquido e sólido), a liberação do calor latente durante a mudança de fase e a transferência de calor nas interfaces do metal com o molde, do metal com o ambiente e do molde com o ambiente. Quanto maior for o rigor acadêmico aplicado a estes três fenômenos, melhor serão os resultados obtidos.

No entanto é importante salientar que, a título de teste de precisão de acurácia, todo modelo desenvolvido para a solidificação deve ter seus resultados comparados com resultados obtidos experimentalmente.

### 1.3. Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um modelo matemático computacional para ser aplicado no estudo da solidificação de lingotes aços-carbono em moldes cilíndricos de ferro fundido.

A primeira etapa do trabalho consiste no desenvolvimento do modelo em si, englobando a escolha de um determinado método numérico para a solução das equações diferenciais envolvidas, determinação das simplificações necessárias e das condições de contorno a serem utilizadas, e uma pesquisa bibliográfica suficiente para levantar os dados necessários para a aplicação do modelo.

A segunda etapa do trabalho é constituída pela obtenção experimental de perfis térmicos em determinados pontos do metal e do molde durante a

solidificação, comparação e discussão destes resultados experimentais com resultados obtidos através da aplicação do modelo computacional.

A terceira etapa consiste na aplicação do modelo desenvolvido a sistemas de lingotamento em escala de dimensões industriais, com o intuito de avaliação e aperfeiçoamento destes sistemas industriais.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1. Introdução**

Este capítulo contém a descrição, em ordem cronológica, de alguns trabalhos desenvolvidos, desde 1945 até a atualidade, na área de aplicação de métodos numéricos no estudo da solidificação.

Nos trabalhos citados a seguir, pode-se encontrar uma grande variedade de modelos computacionais aplicados a diversos tipos de ligas metálicas, diversas formas geométricas, diversos conjuntos metal/molde e utilizando diferentes tipos de métodos numéricos.

Foram analisados principalmente os trabalhos desenvolvidos para aço-carbono, já que é esse tipo de liga de interesse neste trabalho. Mesmo tendo sido consultado um número significativo de trabalhos científicos nesta área, encontrou-se basicamente duas dificuldades quanto à obtenção de dados para serem utilizados no desenvolvimento do modelo:

- A pouca existência de dados concernentes ao sistema metal/molde, quanto a valores de coeficientes de transmissão de calor na interface metal/molde, molde/atmosfera e metal/atmosfera, durante a solidificação.
- A divergência dos valores apresentados para as propriedades físicas do aço-carbono e ferro fundido.

Por outro lado, os trabalhos consultados foram importantes para a definição das simplificações efetuadas e condições de contorno utilizadas.

### **2.2. Considerações Gerais sobre a Análise do Processo de Solidificação**

A solidificação tem seu início quando o metal líquido alcança condições termodinâmicas necessárias para que ocorra a mudança de estado. No processo de solidificação, tem-se um gradiente de temperatura entre o metal e o meio extrator de calor, sendo portanto o calor latente transferido por um ou mais mecanismos de transmissão de calor, sendo que esta transferência ocorre em regime transiente.

Os mecanismos de transferência de calor provavelmente presentes em um sistema onde se tem a solidificação de um metal líquido superaquecido vazado em um molde cuja espessura da parede é pequena quando compa-

rada com as dimensões do lingote em questão, são:

- . condução e convecção de calor no metal líquido enquanto permanece o superaquecimento.

- . condução de calor na camada de metal solidificada.

- . considerando que o contato do metal com o molde seja imperfeito, devido à contração do metal na solidificação e/ou imperfeições na superfície interna do molde, tem-se a transferência de calor nesta interface por condução, convecção e radiação.

- . condução de calor nas paredes do molde.

- . convecção, radiação e condução de calor da superfície externa do molde e metal para o meio ambiente.

Faz-se necessário então, para o estudo do fenômeno da transferência de calor na solidificação, um equacionamento matemático que considere todos estes mecanismos de transmissão de calor que atuam simultaneamente, equacionando este composto por equações diferenciais com condições de contorno não lineares.

A condução é a forma de transferência de calor mais presente e atuante na solidificação, pois esta rege a transmissão de calor no interior do molde, do metal sólido e parcialmente no metal líquido (quando há superaquecimento), e as equações básicas que descrevem este fenômeno de transporte de energia (em sistemas unidirecionados e radiais) são:

- . placa plana:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{d.c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- . cilindro:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{d.c} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

- . esfera:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{d.c} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Obs.: a simbologia geral encontra-se no apêndice 1, no final da tese.

Para a solução destas equações, pode-se utilizar métodos analíticos, que são métodos cujas soluções são exatas, mas que envolvem simplificações de ordem físicas ou métodos numéricos, cujas soluções são aproximadas, mas que podem ser aplicadas a casos mais gerais.

### 2.3. Princípios Gerais de Métodos Numéricos

Antes de iniciar a análise de alguns dos principais trabalhos desenvolvidos na área de aplicação de métodos numéricos no estudo da solidificação de metais e ligas, faz-se necessário introduzir rapidamente alguns conceitos, objetivando uma melhor compreensão do que será apresentado a seguir, com a ressalva de que estes conceitos serão melhor e mais exaustivamente definidos no capítulo 3.

Para o estudo da transferência de calor em uma determinada peça, existem basicamente dois métodos mais significativos que podem ser aplicados. O método analítico e o método numérico. O método analítico consiste na utilização de expressões matemáticas analíticas como solução das equações diferenciais que regem os fenômenos de transferência de calor no sistema metal/molde. Estas expressões matemáticas são obtidas às custas de simplificações físicas impostas ao modelo. O método numérico consiste no desenvolvimento e utilização de um modelo matemático a partir de um certo método de aproximação ao sistema físico em questão. Estes métodos de aproximação podem ser:

1) O método de elementos finitos, onde a peça submetida à transferência de calor, é dividida em pequenos volumes (quando a análise é tridimensional) ou áreas (quando a análise é bidimensional) sendo analisado cada elemento constituinte do sistema separadamente e a sua influência sobre os elementos vizinhos;

2) O método de diferenças finitas onde a peça é dividida em malhas, sendo que após cada intervalo finito de tempo determina-se a temperatura em cada malha, levando-se em conta a temperatura neste ponto e nos pontos adjacentes no instante anterior. Para garantir que o resultado

apresentado por este método numérico convirja para o resultado exato das equações diferenciais que descrevem a transferência de calor na peça, faz-se necessário adotar certos critérios de convergência que serão melhor descritos no capítulo 3, sendo que também os resultados devem apresentar uma certa estabilidade, ou seja, não podem ser ou tender à oscilações. De modo geral, quanto menor o tamanho da malha e o intervalo de tempo, melhores e mais precisos serão os resultados.

Quando se trata do estudo da transferência de calor em peças metálicas durante a solidificação, outro item importante que deve ser considerado no desenvolvimento do modelo é a liberação de calor latente, sendo que para metais puros isto ocorre a uma temperatura constante e para ligas metálicas, em uma faixa de temperatura.

## 2.4. Síntese dos Principais Trabalhos

A seguir, são apresentados resumidamente alguns dos principais trabalhos desenvolvidos para o estudo da transferência de calor em sistemas metal/molde.

Podem-se considerar como precursores dos métodos numéricos aplicados à transmissão de calor em peças metálicas, os métodos gráficos descritos por Schmidt, onde a temperatura em um determinado ponto da peça e em um determinado instante é obtida pelo ponto médio de uma reta que liga os valores de temperatura em duas posições vizinhas (anterior e posterior), em um gráfico de temperatura  $x$  posição da peça (1).

*Dusimberre* (2), em 1945, desenvolveu um dos primeiros trabalhos de aplicação de métodos numéricos para a solução do problema da condução de calor, para contornar as limitações das soluções analíticas conhecidas. São apresentados, no trabalho, algumas razões pelas quais os métodos numéricos têm sua aplicabilidade geral, tanto no caso da transmissão de calor, quanto em outras áreas da engenharia, e são elas:

- O modelo usado pode ser desenvolvido para se obter a solução com maior ou menor rapidez, obtendo-se assim uma menor ou maior precisão, respectivamente.

- São estabelecidos critérios, no desenvolvimento do modelo, para se assegurar a sua convergência.

- Um método pode ser desenvolvido para levar em conta as variações

de condutibilidade técnica e capacidade calorífica com a temperatura.

O seu método foi desenvolvido para a análise do fluxo unidimensional de calor, sendo a peça em estudo uma placa plana. Durante a solidificação, a determinação do calor latente liberado foi simplificado através do uso de uma grandeza denominada calor específico equivalente, que é a razão entre calor latente e o calor específico do material.

Utilizou-se neste trabalho, o método de diferenças finitas, sendo que duas suposições foram feitas: o intervalo de tempo tomado foi suficientemente pequeno, para que o erro introduzido por se negligenciar o efeito causado na malha em questão pelas malhas que não são imediatamente vizinhas, seja desprezível e o comprimento da malha foi suficientemente pequeno para que a determinação da temperatura no centro da malha possa ser estendida à malha toda. As equações de cálculo da temperatura no interior da peça, assim como na sua superfície livre, foram desenvolvidas a partir de balanços de energia entre as malhas. O autor definiu um módulo de controle da convergência e estabilidade dos resultados que é diretamente proporcional à relação entre o quadrado do comprimento da malha e o intervalo de tempo, sendo que o mesmo deve ser maior ou igual a 2 para que o método seja estável e convergente.

Com este trabalho, Dusimberre apresentou uma solução para o problema da condução de calor para sistemas onde as soluções analíticas inexistem, apesar de que, em sua época, a resolução via método numérico fosse extremamente trabalhosa, devido ao fato de não ser possível utilizar computadores e portanto, todas as operações serem realizadas manualmente.

Posteriormente, *Sarjant e Slack* (3) aplicaram o método de diferenças finitas na solidificação e reaquecimento de lingotes de aço. O objetivo da sua aplicação foi a determinação da história térmica dos lingotes destinados à laminação, encontrando assim o melhor tempo e condições de reaquecimento e melhor temperatura de saturação, para obter-se uma maior eficiência térmica e melhor comportamento mecânico, durante a laminação.

O fluxo de calor foi considerado bidimensional. As aproximações em diferenças finitas da condução de calor, foram deduzidas a partir de expansões em série de Taylor aplicada às derivadas parciais da equação diferencial que representa o fenômeno. O critério de estabilidade foi definido utilizando-se o método de estabilidade estudado por *Price* (4). As variações das propriedades térmicas com a temperatura, foram contabilizadas através do uso



da "escala de temperatura modificada" sugerida por *Eyres* (5). Adotou-se uma única temperatura para a solidificação do aço e o calor latente foi adicionado ao calor específico nessa temperatura. Existe uma imprecisão na consideração de que a solidificação do aço ocorre à temperatura constante, e esta consideração levou a um distanciamento entre os resultados numéricos e experimentais.

Algumas outras simplificações adotadas pelos autores foram: A variação da densidade com a temperatura foi negligenciada, considerou-se vazamento instantâneo, as correntes convectivas no líquido foram desprezadas, o molde perde calor uniformemente e somente 10% do calor perdido do lingote (antes da desmoldagem) se dá pela superfície do molde e por fim, após o carregamento do lingote no forno poço, a temperatura na superfície é uniforme e no reaquecimento o fluxo de calor longitudinal foi negligenciado.

Quanto à interface metal/molde, antes da formação do "GAP", o contato foi considerado perfeito e após a formação, a transferência do calor foi considerada somente por radiação, sendo a convecção e condução desprezadas.

O modelo foi testado, comparando-se seus resultados com os resultados experimentais, e segundo os autores, ambos estão bem próximos.

*R. W. Ruddle* (1) analisou os métodos matemáticos aproximados como propostas para a solução dos problemas de transferência de calor em uma peça metálica. O primeiro método apresentado foi o método gráfico de Schmidt (já citado). Posteriormente, *Ruddle* descreveu os métodos numéricos de *Dusimberre* e de *Sarjant e Slack*, sendo o segundo bem semelhante ao primeiro, só que aplicado à solidificação e reaquecimento de lingote. Este trabalho tem o valor de ser uma revisão do que já se tinha produzido até àquela época quanto às soluções matemáticas propostas para a resolução do problema de transmissão de calor.

*B. Carnahan* (6), apresentou a teoria da solução das equações diferenciais parciais, aplicadas a vários ramos da engenharia, inclusive da solidificação. Foi apresentado o equacionamento básico dos métodos de diferenças finitas implícito e explícito (e a condição da convergência deste último), sendo a diferença entre estes dois que no método explícito, o cálculo de uma incógnita depende de valores de variáveis obtidas no instante anterior, enquanto que no método implícito todas as incógnitas são calculadas simultaneamente, em um dado instante. O autor também mostra que

o método de diferença finita implícito é sempre convergente e quando o mesmo é aplicado para o fluxo de calor unidirecional, o sistema é resolvido através do método gaussiano de eliminação. São discutidas também as estabilidades de ambos os métodos, sendo demonstrado que o método implícito é sempre estável enquanto que o método explícito tem a sua estabilidade relacionada a um certo critério. É apresentado também o método de Crank-Nicolson, que é um método de diferenças finitas sempre estável e que converge com um erro de discretização menor que o método implícito e explícito. Este trabalho traz também uma série de procedimentos possíveis, para que o método explícito torne-se estável incondicionalmente.

*Perkins e Irving* (7) desenvolveram três modelos computacionais para o estudo e determinação da transferência bidimensional de calor, na solidificação de aço em lingotamento contínuo. Os métodos matemáticos usados no trabalho foram: método de diferença finita explícito normal, método explícito de Dufort-Frenkel e o método implícito de Peaceman-Rachford. Após testes realizados com os três métodos, os autores concluíram que o método de diferença finita explícito é o melhor método, para este tipo de sistema. O calor latente foi incorporado ao modelo, principalmente calculando-se as temperaturas ignorando-se o mesmo, e então corrigindo-se através da multiplicação da taxa de queda da temperatura pela razão  $C/(C + L)$ , na faixa sólido-líquido de temperatura. Quanto às propriedades físicas do aço, Perkins e Irving demonstraram que o uso da condutividade e capacidade calorífica constantes ou variáveis com a temperatura, causam pouca diferença no resultado obtido, durante solidificação e resfriamento.

Os resultados calculados foram comparados com os resultados experimentais no que se refere às temperaturas superficiais do metal e espessura da camada sólida e a concordância entre ambos foi considerada satisfatória.

*Davies, Stoke e Westby* (8) publicaram um trabalho cujo objetivo foi o de calcular a distribuição de calor no metal durante solidificação, a partir da adaptação de um programa desenvolvido inicialmente para a determinação do calor contido e distribuição de temperatura em regiões de solda. Para a simplificação dos cálculos, adotou-se como bidimensional o fluxo de calor. O método utilizado foi o de diferenças finitas explícito, e a condutibilidade térmica foi considerada variável com a temperatura, conforme tratamento proposto por *Sarjant e Slack* (3). As simplificações básicas adotadas foram: imediatamente após o término do vazamento a temperatura do metal

é igual à temperatura de vazamento e sua distribuição é homogênea e a temperatura inicial do molde é igual à temperatura ambiente. Analisou-se a solidificação de um lingote de seção retangular cujo o metal foi o aço com 0,6% de carbono, vazado em molde de areia. Outra suposição realizada é a de que o contato metal/molde é perfeito, não havendo portanto resistência térmica nesta interface. Os resultados obtidos através do modelo foram comparados experimentalmente, e uma das justificativas dos autores para o distanciamento entre ambos, foi a incerteza quanto à representatividade dos dados usados.

*Hartog, Rabenberg e Willemse* (9) propuseram-se relacionar um modelo matemático construído para a simulação do processo de solidificação com um caso prático comum. Ou seja, o objetivo do trabalho foi a determinação, através de simulação numérica, da taxa de reaquecimento e estado térmico desejado, para uma boa laminação do lingote de aço-carbono.

O modelo foi desenvolvido para fluxo bidimensional de calor. O método utilizado foi o de diferença finita implícito, pois este é estável para qualquer valor de intervalo de tempo e tamanho de malha. As propriedades físicas do aço foram consideradas variáveis com a temperatura, sendo que os autores reconheceram que as mesmas não são bem conhecidas, à elevadas temperaturas. O coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde foi considerado variável com o tempo. Para a determinação do calor latente liberado durante solidificação, para o que é básico conhecer a forma de redistribuição do soluto no líquido, os autores supuseram que esta forma de redistribuição do soluto no líquido pode ser descrita pela regra da alavanca, quando se trata de aço-carbono. Da comparação de resultados calculados com os experimentais, os autores concluíram que o modelo pode fornecer um "quadro preciso" da posição da frente de solidificação e dos campos térmicos no lingote, durante o processo e por fim, o modelo matemático mostrou que um tempo de resfriamento mínimo requerido, antes que o lingote seja reenformado para laminação, corresponde ao tempo de resfriamento necessário para estabelecer-se a independência entre o tempo de solidificação e o tempo de reaquecimento do mesmo, nos fornos poços.

Em trabalho realizado com alumínio, *Pehlke e Jeyarajan* (10) desenvolveram um modelo matemático com o objetivo de simular a solidificação de uma peça axissimétrica, com um resfriador colocado em uma das extremidades. Nesta simulação, levou-se em conta o "GAP" formado na interface

metal/molde e estudou-se a influência do uso de materiais diferentes, como resfriadores. Foi estudado também o efeito e influência da geometria dos resfriadores sobre a solidificação do metal.

O método numérico utilizado foi o de direção alternada implícito, com fluxo bidimensional de calor. O programa desenvolvido apresenta uma particularidade que é a de considerar o alumínio solidificando-se em uma faixa de temperatura e não à temperatura de solidificação, podendo-se concluir que quanto mais estreita for a faixa de temperaturas, durante a solidificação, aplicada ao alumínio, maior será a precisão dos resultados.

O coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde foi considerado variável, em função da distribuição de temperatura nesta interface. O programa foi testado para vários valores de coeficiente de transferência de calor.

Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais.

Sully (11) estudou a transferência de calor na interface metal/molde, a partir de um modelo matemático de simulação juntamente com resultados experimentais. Nas suas realizações experimentais, Sully utilizou vários conjuntos metal/molde e diferentes geometrias. O trabalho teve por objetivo propor uma descrição das mudanças de condições na interface metal/molde.

O autor afirma que o coeficiente de transmissão de calor usado para descrever o grau de resistência térmica na interface, é essencialmente variável com o tempo, e que considerá-lo constante em uma simulação matemática da solidificação pode resultar em graves imprecisões. Mas Sully afirma também que, em casos onde o tempo total de solidificação é bem maior que o tempo necessário para que o coeficiente alcance a estabilidade, este coeficiente pode ser considerado constante na simulação.

Segundo o autor, a formação de uma camada sólida no lingote que dá início ao processo de geração de "GAP" na interface metal/molde ocorrerá somente quando esta camada sólida for suficientemente espessa para suportar a pressão metalostática do metal líquido.

Algumas outras conclusões do trabalho foram: o fluxo de calor na interface metal/molde antes do aparecimento do "GAP" é regido por condução, e após o seu aparecimento, por radiação (preponderantemente), e a geometria do sistema metal/molde influencia decisivamente no valor do coeficiente de transferência de calor sendo que o tipo de material do molde e metal

nem tanto.

*Nishida et al* (12) desenvolveram um trabalho objetivando a determinação do tempo de solidificação de uma peça. Esta determinação se deu através de um modelo matemático construído a partir do método de diferenças finitas.

Na simulação utilizou-se um parâmetro adimensional de resistência térmica na interface metal/molde, partindo-se do princípio que o fluxo total de calor, do metal para o molde, depende sobretudo da condição de transferência de calor na interface, no caso de moldes metálicos.

Na execução de modelo, as simplificações básicas efetuadas foram: a forma de transferência de calor no metal líquido se dá somente por condução; o fluxo de calor no interior da peça é unidimensional; o vazamento considerado instantâneo e a resistência ao fluxo de calor na interface metal/molde, assim como as propriedades físicas do metal e molde, foram consideradas constantes.

O modelo foi aplicado para placa plana, esfera e cilindro e não foi testado experimentalmente.

*T. W. Clyne* (13) apresentou um modelo matemático que simula a solidificação e o fluxo de calor, no caso de solidificação direcional de liga de Al-Cu. O modelo foi desenvolvido para ligas que se solidificam dentro de uma faixa restrita de temperatura. Na construção do modelo, o método utilizado foi o de diferenças finitas. Como o caso é de solidificação direcional, considerou-se o fluxo de calor unidirecional. Pressupôs-se também que as propriedades físicas do metal são constantes.

Na determinação do calor latente liberado durante a solidificação, o autor adotou que a forma como o soluto se distribui no líquido é bem representada matematicamente pela modificação de Clyne e Kurz aplicada à equação de Brody e Flemings.

No estudo do fluxo de calor na massa líquida, levou-se em conta a condução e convecção como formas de transferência de calor, excluindo o caso do líquido interdendrítico, onde a forma de transferência de calor adotada foi somente a condução. Clyne concluiu que a introdução da convecção como forma de transmissão de calor no líquido, em princípio, retarda o início da solidificação, pois o calor no metal líquido é rapidamente transmitido para a superfície, no entanto, após o início da solidificação, o crescimento da camada sólida é acelerado pela presença da convecção

devido à maior eficiência de transferência de calor.

O objetivo básico do trabalho de *Imafuku e Chijiwa* (14) foi o de apresentar um modelo que possa prever quantitativamente a ocorrência de cavidades, de contração e porosidades, no processo de solidificação de peças de aço em moldes de areia. Mas os autores afirmam que é impossível fazer uma análise detalhada do fluxo de metal líquido, durante a solidificação, pois quando este é vazado a sua viscosidade tem elevado número de Reynolds e no final da solidificação, baixo número de Reynolds. Junto a isto, durante a solidificação, a forma dos contornos das estruturas dendrítica é complexa e o fluxo é sempre acompanhado pelo surgimento de superfície livre (cavidades de contração).

Três aspectos teóricos foram estudados pelos autores, e são eles: Uma formulação de avaliação do calor latente liberado na solidificação, uma formulação para a predição da cavidade de contração e uma avaliação quantitativa da resistência ao fluxo de calor na interface metal/molde. Os dois primeiros aspectos foram desenvolvidos neste trabalho e o terceiro em trabalho anterior (15).

Sendo impossível analisar precisamente o fluxo de metal líquido na geração de uma cavidade de contração, algumas simplificações foram feitas: o metal líquido move-se para baixo com a força gravitacional; a velocidade de movimentação do metal líquido é maior que a de solidificação; o volume da cavidade de contração é igual ao volume de contração do metal devido à solidificação e o metal líquido tem total fluidez na região sólido-líquido, até que a fração de sólido atinja uma fração crítica, cujo valor adotado pelos autores foi de 0,67.

Uma correta avaliação da evolução da fração sólida com a temperatura foi fundamental, pois a determinação do calor latente liberado durante a solidificação assim como o próprio método de previsão dos defeitos de contração e porosidades dependem dele, e como a liga estudada foi o aço-carbono, os autores lançaram mão da regra da alavanca para determinação da fração de sólido.

O modelo, que utilizou o método de elementos finitos, foi comparado experimentalmente e os resultados de previsão de defeitos de contração e porosidades foram considerados bons.

Em posterior trabalho, *Imafuku e Chijiwa* (16) utilizaram o modelo apresentado na referência 14 para estudo da solidificação, na fundição de

duas peças específicas utilizadas em motores marítimos à diesel. O modelo não foi utilizado somente para previsão dos defeitos como porosidades e cavidades de contração, próprios de um processo de solidificação, mas também para tornar mais eficiente e otimizar o uso de resfriadores, cabeça-quente e pós exotérmicas na fundição. O estudo foi realizado no sentido de se estabelecer qual a influência de certas mudanças em alguns dos parâmetros de fundição, durante simulação, a fim de forçar o posicionamento destes defeitos na região da cabeça-quente onde não é afetado o rendimento do processo e qualidade do produto. O critério básico adotado para a detecção de um possível defeito de contração em função dos resultados obtidos da simulação, foi o de levantamento de isoterma no interior da peça, em determinados instantes de tempo próximos ao final da solidificação, tendo-se assim uma perspectiva da região onde provavelmente aparecerá o defeito.

*Rader e Haine* (17) apresentaram um trabalho onde, a partir de um programa já existente (Thermal) de análise da transferência bidimensional de calor, estudaram a eficiência de cabeças-quentes e pós-exotérmicas na fundição de grandes lingotes cilíndricos ( $22 \frac{1}{2}$  pol de diâmetro). O metal em questão foi o aço baixo carbono e baixa liga, fundido em molde de areia.

As simplificações básicas adotadas foram: sendo um lingote de grandes dimensões, a resistência térmica na interface metal/molde foi desconsiderada; o vazamento do metal se deu instantaneamente; a convecção como forma de transmissão de calor no líquido foi desprezada assim como fenômenos de contração e expansão e mudanças físico-químicas no material isolante.

As conclusões obtidas quanto ao uso de pó exotérmico e isolamento lateral (cabeça-quente) foram de que obtêm-se maior qualidade e menor segregação quanto maior for a quantidade de pó utilizada, e quanto mais rápido for colocado o pó sobre o metal, após vazamento.

*Ho e Pehlke* (18) pesquisaram a determinação do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde. Apresentou-se, neste trabalho, duas maneiras independentes de determinação deste coeficiente, considerando-se a geometria do sistema cilíndrico e o fluxo de calor unidimensional: 1) solução numérico-computacional, através do tratamento do problema da condução de calor por um modelo matemático que utiliza o método de estimativa não-linear juntamente com o método de diferenças finitas; 2) medidas experimentais do "GAP" formado na interface, que evolui con-

forme a solidificação avança, utilizando-se dispositivos colocados no metal e molde.

Os autores consideraram basicamente duas formas de transferência de calor na interface metal/molde, após a formação do "GAP": radiação, cuja participação aumenta com o aumento da temperatura e condução pelo gás que preenche o "GAP", tendo sido portanto desprezada a convecção.

O modelo matemático desenvolvido ataca o problema inverso da condução de calor, onde a partir do conhecimento dos perfis térmicos de alguns pontos interiores do metal, determina-se a temperatura e fluxo de calor na superfície. Por isto, foi necessário um levantamento termométrico experimental para viabilizar-se a aplicação do modelo. O método utilizado para determinar o calor latente liberado durante solidificação foi o método da entalpia, que segundo os autores, pode ser aplicado tanto a metais puros quanto a ligas. As propriedades físicas foram consideradas variáveis com a temperatura.

Os resultados obtidos através do modelo matemático e pela medição experimental do "GAP" apresentaram alguma distância entre si, sendo que os autores relacionaram esta distância com a consideração da temperatura homogênea no metal após vazamento e o desprezo às forças convectivas do líquido.

*Hong, Umeda e Kimura* (19) desenvolveram um modelo matemático, para a simulação da solidificação, composto por dois métodos numéricos: o BEM (boundary element method) e o método de diferenças finitas.

No BEM, as equações governantes do problema são reduzidas a um conjunto de equações aplicadas ao contorno, sendo que estas equações diferenciais são resultantes de discretizações semelhantes às utilizadas no método de elementos finitos. No entanto, os nós do sistema são definidos somente na superfície externa, não necessitando determinar incógnitas internas, pois o problema matemático é reduzido somente à região do contorno. Conforme os autores, conhecendo-se todos os valores na superfície, qualquer variável interna pode ser calculada como uma função dos valores das variáveis no contorno. A grande vantagem do BEM é uma redução no número de incógnitas que governam o problema e portanto no tempo de CPU necessário. Neste trabalho, a solidificação e fluxo de calor no metal é simulado pelo método de diferenças finitas e a transmissão de calor no molde pelo BEM.



O metal analisado foi o aço com 0,2% C, tendo o molde seção retangular. Foram usados moldes de areia e de ferro fundido. As propriedades físicas foram consideradas constantes. O calor latente liberado durante solidificação foi calculado pelo método de calor específico equivalente.

Os resultados obtidos com este modelo foram comparados com resultados obtidos com o uso somente do método de diferenças finitas, e a aproximação foi considerada boa.

Posteriormente, os mesmos autores publicaram um trabalho (20), onde o BEM foi aplicado a todo sistema e não somente ao molde, visando uma maior simplificação do problema. No desenvolvimento do modelo, dois problemas básicos tiveram de ser abordados: o tratamento do calor latente liberado na solidificação e o tratamento da interface metal/molde com contato imperfeito.

Na resolução da quantificação do calor latente liberado, o método adotado foi o da recuperação da temperatura (2). Segundo os autores, possivelmente, este é o único método de cálculo do calor latente que pode ser aplicado juntamente com o BEM. Quanto à interface metal/molde, esta região foi considerada como um só sistema, com propriedades heterogêneas.

Este modelo foi desenvolvido para propriedades físicas constantes. Se as propriedades físicas forem consideradas variáveis, são necessárias algumas modificações no modelo.

Novamente, seus resultados foram comparados com outros obtidos pelo método de diferenças finitas e a aproximação entre ambos foi muito boa.

A desvantagem do BEM é que este precisa de um grande espaço de memória comparado com o de diferenças finitas.

Vários trabalhos de aplicação de métodos numéricos em lingotamento contínuo foram também publicados. E entre eles, está um de *Jacobi et al.* (21), que desenvolveu um modelo para avaliar o resfriamento secundário do aço em lingotamento contínuo. O seu modelo pressupõe o fluxo unidimensional de calor, tendo o resfriamento secundário sido simulado com vários tipos de meios refrigerantes, tais como ar, nitrogênio, vapor d'água e mistura ar-água. Todos os resultados foram comparados com resfriamento na presença de ar com radiação e convecção natural. Estudou-se também a influência da densidade de spray (mistura ar-água) e velocidade de descarga do meio refrigerante.

*Laki, Beech e Davies* também desenvolveram um modelo matemático

voltado para o estudo da solidificação em lingotamento contínuo (22). A região analisada foi a zona do menisco, formado na parte superior do lingote, onde simulou-se através do método de diferença finita, o fluxo bidimensional de calor.

Os autores consideraram a condutibilidade térmica variável, tendo sido pressuposto que a mesma varia linearmente com a temperatura. Considerou-se também que o vazamento é instantâneo e que o coeficiente de transferência convectiva de calor na interface metal/atmosfera, na região do menisco, é constante.

Na determinação da fração sólida, os autores utilizaram a regra da alavanca, para aço-carbono e o modelo de distribuição de Scheil, para aços austeníticos.

*Thomas, Samarasekera e Brimacombe* publicaram um trabalho de comparação entre três métodos numéricos (23). Estes métodos numéricos foram aplicados para duas etapas do processamento térmico de um lingote de aço: a solidificação em lingoteira de ferro fundido e reaquecimento no forno poço, antes da laminação.

Os métodos utilizados foram o de elementos finitos, o método matricial de Onaka e o método de diferenças finitas implícito de direção alternada (de Peaceman e Rachford). Estes métodos foram escolhidos porque são melhores aplicáveis à formas geométricas complexas e ao estudo de distribuição de tensões.

O modelo foi desenvolvido para moldes e lingotes, com seção retangular, com fluxo bidimensional de calor e propriedades físicas constantes.

Segundo os autores, como estes métodos são sempre estáveis, a sua precisão pode ser melhorada com o refinamento do tamanho da malha e diminuição do intervalo de tempo. Das conclusões obtidas no trabalho, cita-se que para geometrias mais simples, o método de Peaceman-Rachford é o de menor custo e com precisão similar ao método de elementos finitos, e que o método matricial tem maior precisão que o método de elementos finitos.

*Ho e Pehlke* apresentaram um estudo (24) que muito contribuiu para o entendimento do fenômeno da transferência de calor na interface metal/molde.

Utilizou-se um modelo matemático baseado na estimativa não linear de *Beck* (25) e em uma formulação implícita do método da entalpia para o

cálculo do calor latente. Neste método de diferenças finitas implícito para o tratamento do calor latente, considerou-se o super-aquecimento do líquido e as propriedades físicas variáveis com a temperatura.

Na região da interface metal/molde aplicou-se malhas com comprimentos menores que para o interior do metal, para aumentar-se a precisão dos resultados, pois as mudanças de temperatura nesta região são muito rápidas, principalmente no início da solidificação.

Os autores apresentaram dois estágios de transferência de calor na interface: o primeiro, imediatamente após o vazamento onde a transmissão de calor se dá devido ao contato direto do metal com rugosidades existentes na superfície do molde (pois o metal líquido não molha completamente esta superfície) e condução pelo gás que preenche os espaços vazios entre o metal e o molde. Um aumento de pressão metalostática na interface faz com que a transferência de calor seja mais eficiente. A transferência de calor nos pontos de contato metal/molde é bem maior que pela condução pelo gás, mas com o passar do tempo, a tendência é o aparecimento de uma camada de óxido entre o metal e o molde, diminuindo assim o fluxo de calor nestes pontos. O segundo, após a formação do "GAP" entre o metal e o molde, onde ambos estão completamente afastados um do outro. Os fatores que influenciavam a formação do "GAP", segundo os autores são: interações superficiais entre metal e molde, transformações nos materiais do metal e do molde e efeito de geometria. Após a formação do "GAP" a radiação passa a ser uma forma preponderante à condução pelo gás, na transferência de calor, devido ao aumento da distância entre o metal e molde.

Zeng e Pehlke (26) desenvolveram um modelo matemático para cálculo das perdas de temperatura do metal líquido, nos sistemas de canais de alimentação utilizados em fundição. Este modelo calcula também a evolução da temperatura no molde e metal durante a solidificação do metal.

O sistema estudado consiste de um molde de areia com um alimentador superior de geometria cilíndrica no qual vazou-se uma liga de zinco e cobre. O coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde utilizado na simulação foi determinado experimentalmente.

O método usado na construção do modelo foi o de diferenças finitas. As simplificações iniciais para a execução do programa foram: o fluxo de calor foi adotado bidimensional (radial e axial); estimou-se que o calor que o líquido perde nos canais de alimentação é igual ao calor perdido

quando o mesmo flui por um tubo equivalente de superfície lisa; não ocorre solidificação durante a passagem do metal líquido pelo canal; o líquido preenche toda a cavidade do molde com uma temperatura uniforme não havendo convecção.

Neste modelo, a temperatura do metal é determinada em dois passos: o primeiro consiste no cálculo da perda de temperatura do metal líquido ao passar pelo canal de alimentação e o segundo consiste no cálculo das temperaturas do metal no interior do molde durante a solidificação.

Os resultados obtidos matematicamente foram comparados com os obtidos experimentalmente, e segundo os autores, tiveram uma boa concordância.

*Dantzig e S.C. Lu* (27) apresentaram um método que se propõe a simular o fluxo de calor no molde e metal, durante resfriamento, a partir da aplicação das condições de contorno na interface metal/molde.

O método consiste em se representar fisicamente a superfície do metal por um conjunto de figuras geométricas mais simples, como uma superfície plana ou cilíndrica, e analisar o fluxo de calor por ela. Segundos os autores, a determinação da curvatura efetiva destas superfícies geométricas equivalentes é fundamentada fisicamente, pois a extensão desta superfície, próxima de cada ponto que influencia na transferência de calor, é estimada em função da difusividade térmica e do tempo transcorrido. Este método foi introduzido em um modelo de elementos finitos.

Em trabalho posterior (28), *Dantzig e Wiese* apresentaram a validade do método resumidamente descrito acima, através de sua aplicação na simulação da solidificação de algumas ligas em diferentes moldes, comparando seus resultados com resultados experimentais.

*Kubo e Pehlke* (29) construíram um modelo matemático para simulação da formação de porosidades em metais fundidos.

Na visão dos autores, os motivos principais da formação de poros durante a solidificação são: ausência de líquido interdendrítico e rejeição de gases no interior do líquido.

No modelo matemático utilizou-se tanto o método de diferenças finitas explícito como o implícito, tendo sido usado em diferentes etapas do processo de solidificação e formação de porosidades. Adotou-se as seguintes equações matemáticas para a descrição do fenômeno: equação da condução de calor, equação da conservação para o balanço de massa, equação de mo-

vimento de fluxo interdendrítico e equação da conservação de gás contido no metal.

As ligas estudadas foram o aço-carbono e a liga alumínio-cobre (4,5%), e quanto à determinação da fração sólida com a temperatura, para o aço os autores consideraram a regra da alavanca e para a liga de alumínio, a equação de Scheil.

Outras pressuposições dos autores foram o fluxo bidimensional do calor, as propriedades físicas dos materiais constantes e coeficiente de transferência na interface metal/molde também constante.

Os autores estudaram ainda a influência da porcentagem de gás no metal, transferência de calor na interface metal/molde e as dimensões do sistema, na formação de porosidades.

*Sharma et al.* (30) apresentaram um estudo de determinação, via simulação numérica, de valores do coeficiente de transferência de calor na interface. O sistema estudado foi alumínio vazado em lingoteira de ferro fundido.

Na simulação numérica de determinação do coeficiente de transferência de calor, foi usado valores de "GAP" de ar obtidos experimentalmente (31).

Os autores consideraram três fatores como básicos para a determinação deste coeficiente: a resistência térmica no contato metal/molde, uso de cobrimentos superficiais do molde e o tamanho do "GAP" formado.

Algumas das conclusões que os autores chegaram foi que este coeficiente decresce com o tempo devido ao aumento do "GAP" e que o valor deste coeficiente não é uniforme ao longo da interface metal/molde.

*Weinberg et al* (32) construíram um modelo matemático com o propósito específico de previsão do aparecimento de porosidades na região do eixo central da placa de aço fundida em moldes de areia. O modelo consistiu na aplicação do método de diferenças finitas explícito, determinando-se os perfis sólidos e líquidos no metal, ao longo de toda solidificação.

A partir da posição dos perfis sólidos e líquidos, a fração de sólido pôde ser determinada em qualquer ponto da peça, utilizando-se. A liberação uniforme de calor latente.

Estes resultados da fração sólida associados com a fluidez capilar do metal líquido (baseada na lei de Darcy) e com dados de permeabilidade, possibilitaram então o cálculo da pressão local necessária para preenchimento dos vazos de contração. Assim sendo, através da comparação entre

as pressões locais necessárias e as pressões reais do sistema pôde-se prever o surgimento ou não de poros.

Os resultados obtidos foram comparados com resultados publicados por *Bishop e Pellini* (33) e a aproximação entre eles foi considerada boa. Esta concordância, segundo os autores, indica que as porosidades axi-centrais da placa são associadas com o fluxo insuficiente de líquido interdendrítico, na alimentação da cavidade de contração e também que a lei de Darcy é aplicável neste caso, embora a mesma descreva fluxos sob condições de estado permanente, o que não é o caso durante a solidificação.

*Sharma et al.* (34) novamente avaliaram a solidificação do alumínio em lingoteira de ferro fundido, apresentando um modelo matemático capaz de determinar a distribuição das temperaturas no metal e no molde, assim como o tempo total de solidificação.

O modelo baseou-se no método de diferenças finitas com fluxo bidimensional de calor.

O efeito do aumento na transferência de calor devido ao movimento convectivo e de turbulência do metal líquido no vazamento foi contabilizado pelo autor através de um acréscimo concedido à condutibilidade térmica do metal nos primeiros dez segundos após o vazamento.

O modelo foi comparado experimentalmente e conforme o autor este pode ser considerado bem representativo da realidade.

O modelamento matemático pode ser útil também no desenvolvimento de moldes metálicos permanentes. Os moldes permanentes são feitos para a reutilização, e no caso de algumas linhas de fundição, eles podem ser usados várias vezes, no mesmo dia. No desenvolvimento de um projeto de molde permanente, é fundamental considerar-se alguns parâmetros que influenciam na solidificação, como tempo de solidificação, tempo de ejeção do molde, localização e espessura no uso de cobrimentos no molde e localização e fluxo em canais de refrigeração.

Para diminuir custos e aumentar eficiência, todos estes parâmetros, e sua influência sobre a solidificação, podem ser previstos antes de se fazer o próprio molde, através do uso de um "software" que simule a solidificação. *Kevin Kearns* (35) apresentou um "software" contruído pela Abex Corp. Research Center, denominado CAST (Computer-Aided Solidification Technique), que faz tal simulação.

Este modelo só considera o fluxo de calor por condução não considerando

a convecção no líquido e perda térmica durante o vazamento. O ciclo de utilização do molde é dividido em três fases, na simulação: solidificação parcial do metal, abertura do molde e retirada da peça para início de novo ciclo.

Os resultados são apresentados em um desenho gráfico, a cada intervalo de tempo, onde pode-se visualizar áreas com maior potencial de ocorrência de defeitos de solidificação.

*Nishida, Droste e Engler* (36) estudaram o processo de formação do "GAP" na interface metal/molde durante a solidificação e determinação do coeficiente de transferência de calor nesta interface.

Os autores propuseram dois métodos de determinação do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde. O primeiro, através da simulação matemática, pelo uso do método de diferenças finitas explícito, determinando-se assim as temperaturas na região da interface; e o segundo, por um cálculo aproximado utilizando-se os gradientes de temperatura do molde e metal determinados experimentalmente.

Para uma melhor compreensão da variação do coeficiente de transferência de calor na interface, fez-se necessário considerar as variações dimensionais do molde e da peça metálica, e segundo os autores, logo após o vazamento o molde experimenta uma modificação dimensional rápida devido à sua expansão térmica, mas uma variação significativa na dimensão da peça metálica só ocorre após a formação de uma camada sólida na sua superfície.

*Hou e Pehlke* (37) simularam a solidificação do aço médio-carbono em molde de areia, com secção quadrada. O modelo matemático baseou-se no método de direção alternada implícito e foi testado experimentalmente.

Entre as simplificações efetuadas pelos pesquisadores, cita-se a consideração do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde e as propriedades do metal, constantes.

No trabalho experimental de levantamento termométrico, a tomada de temperatura foi feita à meia altura, pois segundo os autores, desta forma o pé e a cabeça da peça não influem nos gradientes térmicos medidos.

As comparações entre os resultados apresentados pelo modelo e os resultados obtidos experimentalmente mostraram, conforme os autores, que o modelo pode ser aplicado para a simulação da solidificação do aço.

*Rollet e Lewis* (38) estudaram a solidificação de ligas de urânio, vaza-

das no interior da câmara de VIM (Vacuum Induction Melting), através da simulação numérica. Para isto, utilizaram um modelo denominado ABAQUS, que baseia-se no método de elementos finitos.

O objetivo do estudo foi obter a previsão do comportamento da solidificação desta liga. Os autores apresentaram cinco casos desenvolvidos. Os três primeiros avaliaram alguns parâmetros que influenciam na solidificação de uma calota (Concha hemisférica) com uma "cabeça-quente" polar. O quarto caso simulou a solidificação do urânio na forma cilíndrica e o último, verificou a habilidade do modelo de prever a ocorrência e localização de defeitos de contração.

Outro trabalho que utilizou o método de elementos finitos para a simulação da solidificação foi o de *Beffel, Wilkes e Pehlke* (39).

O modelo matemático construído foi aplicado para fluxo bi e tridimensional de calor e em diversas geometrias e ligas, tais como, o ferro fundido em geometria cilíndrica; alumínio com 13% de silício em geometria cilíndrica; aço para peças ferroviárias e fundição de placas por cera perdida.

O modelo pôde ser aplicado a diversas geometrias devido à versatilidade geométrica do método de elementos finitos.

Os resultados obtidos com o modelo foram comparados com resultados experimentais, e algumas justificativas foram apresentadas pelos autores, para as discrepâncias entre eles, tais como, o fato de se ter pressuposto densidade constante sendo que esta é variável com a temperatura; uso de um valor médio para o coeficiente de transferência de calor na interface enquanto este é na verdade função do tempo; incerteza na posição dos termopares, erro de definição das malhas e incerteza nas condições de contorno.

*S. Abis* (40) estudou a solidificação do alumínio puro, na forma de uma placa retangular com um disco no centro, utilizando o método matemático de elementos finitos. Seus objetivos principais foram os de obter informações prévias a respeito da microestrutura do metal e otimizar o projeto do molde e condições iniciais de fundição.

O autor considerou a condutibilidade térmica e a capacidade calorífica do metal como funções não lineares da temperatura e estas foram contabilizadas pelo programa computacional através da técnica apresentada em (41), sendo que a função da capacidade calorífica levou em conta a energia envolvida na mudança de fase. O fluxo de calor foi tratado tridimensional-



mente.

Conforme o autor, duas informações importantes podem ser obtidas através da simulação: a distribuição da temperatura no interior da peça para qualquer instante e a relação temperatura/tempo para qualquer ponto da peça.

Normalmente, quando se faz a simulação da solidificação para geometria complexa, usa-se o método de elementos finitos (FEM) em detrimento do de diferenças finitas explícito, devido à sua maior flexibilidade. Mas alguns outros métodos de diferenças finitas podem ser empregados no tratamento da solidificação em geometrias irregulares, tais como o GFD (General Finite Difference Method).

*Ho e Pehlke* (42) compararam os métodos FEM e GFD, aplicando-se à geometrias irregulares. Nos dois primeiros exemplos do trabalho, avaliou-se a precisão e estabilidade de cada um. No terceiro exemplo, a capacidade do GFD quanto à previsão dos perfis de temperatura e o tempo de solidificação de uma peça foi analisada.

A descrição e equacionamento de ambos os métodos, para o estudo da solidificação, foram detalhadamente apresentados pelos autores.

O primeiro exemplo foi o da solidificação de um lingote de aço de secção quadrada. Deste primeiro caso os autores concluíram que o uso de uma densidade maior de malhas em regiões onde as mudanças de temperatura são rápidas, garantem uma maior precisão, tanto para o GFD quanto para o FEM. Os autores concluíram que o FEM é mais preciso na fase de solidificação propriamente dita, enquanto que o GFD é mais preciso em temperaturas abaixo da temperatura final de solidificação.

O segundo exemplo foi o do aquecimento de um lingote de aço, sem mudança de fase. A conclusão foi que ambos os métodos são bons para este caso.

O terceiro exemplo tratou da solidificação de uma peça axissimétrica de alumínio, cujo o contorno assemelhava-se a uma curva parabólica. Neste caso, o FEM não conseguiu prever o patamar de solidificação enquanto que o GDF sim.

Os resultados apresentados pelo GDF foram comparados com resultados experimentais, e houve diferenças entre eles. Os autores atribuíram estas diferenças, em parte, ao uso das propriedades físicas e coeficientes de transferência de calor constantes.

*Brimacombe et al.* (43) construíram um modelo matemático de determinação da distribuição de temperaturas no processamento térmico do lingote, desde a solidificação ao reaquecimento para deformação. O método numérico adotado foi o FEM, que é mais preciso para o caso de lingotes com superfície corrugada e na determinação de tensões térmicas geradas.

Três etapas do ciclo térmico foram consideradas: solidificação e resfriamento no molde; resfriamento do lingote ao ar e reaquecimento no forno poço. Para cada uma destas etapas, adotou-se as condições de contorno mais adequadas possíveis.

Para verificar-se a acertividade do programa computacional, os seus resultados foram comparados com resultados obtidos analítica e experimentalmente, já publicados, e conforme os autores o modelo conta com razoável grau de acerto.

No trabalho posterior (44), os autores determinaram as distribuições de tensões internas geradas termicamente, com base nos resultados de distribuição de temperaturas já obtidos.

*Bennon e Incropera* (45) estudaram a evolução da macrosegregação em materiais binários, através da solidificação de  $NH_4Cl - H_2O$ .

A simulação foi feita através de um modelo que adotou o método de diferenças finitas, baseado no controle elíptico de volume, descrito em (46). Para a representação do fenômeno da macrosegregação, os autores utilizaram equações de conservação de energia e momento.

Observações experimentais qualitativas, publicadas anteriormente, foram usadas para interpretar e confirmar tendências na macrosegregação em ligas binárias, preditas pela simulação.

*Lawrence E. Smiley* apresentou, em artigo publicado (47), um "software" utilizado na simulação da solidificação de peças fundidas, cuja vantagem principal, é a possibilidade de seu uso em microcomputador da linha PC-AT. O nome do "software" é ENTEKCAD, desenvolvido pela ENTEK CIENTIFIC CORP.

A característica básica que permite ao programa ser executado em microcomputador, é que usa-se durante a simulação, elevados valores de coeficientes de transferência de calor na interface metal/molde e menores valores de superaquecimento. A verdade é que a partir destes pressupostos, os resultados determinados afastam-se dos reais, mas que segundo o autor, ainda concordam com a experiência de fundição.

*Berry e Pehlke* (48) apresentaram a crescente aplicação dos computadores no modelamento da solidificação, em escalas macroscópicas, que caracteriza-se pela simulação da movimentação das frentes de solidificação. Este artigo deteve-se mais no uso de métodos de elementos finitos, que é mais aplicado no caso de geometrias complexas.

*Hwang e Stoehr* (49) descreveram como o computador pode ser aplicado no estudo do fluxo de metal através do sistema de canais de vazamento e cavidades do molde, pois conforme os autores, o conhecimento do fluxo do metal durante o vazamento não é importante somente por si só, mas porque afeta o fluxo de calor durante e depois do vazamento. As técnicas computacionais normalmente usadas foram divididas em duas categorias técnicas de balanço de energia baseados nas equações de BERNOULLI e SAINT-VENANT e técnicas de balanço de momento baseadas nas equações de NAVIER STOKES.

*Rappaz e Stefanescu* (50) apresentaram o desenvolvimento de modelos matemáticos para o estudo da evolução da macro e microestrutura durante a solidificação. O artigo apresentou o equacionamento matemático para o modelamento macroscópico da estrutura colunar e estrutura equiaxial (modelamento macro e microscópico).

### 3. METODOLOGIA

O problema da transferência de calor na solidificação é do tipo transiente, ou seja, o fluxo de calor varia com o tempo, estando a solidificação relacionada com uma mudança de fase sólido-líquido e a movimentação de uma fronteira. A solidificação para um metal puro ocorre a uma temperatura constante e a interface sólido-líquido é caracterizada por uma superfície. Já para uma liga metálica, onde a solidificação se dá numa faixa de temperatura, a temperatura na qual se inicia a solidificação é denominada "líquidus" e aquela na qual termina a solidificação, "sólidus". Assim, entre a região sólida e líquida há uma região semisólida denominada zona pastosa.

No caso específico de ligas, a liberação do calor latente ocorre em toda a região pastosa, em regime transiente, o que dificulta ainda mais a solução do problema.

Vários métodos e modelos já foram propostos para solucionar geral ou especificamente, exata ou aproximadamente este problema.

Esta seção ocupa-se em descrever sucintamente alguns destes métodos e modelos e apresentar os critérios utilizados na escolha do método utilizado especificamente neste trabalho, bem como todas as pressuposições e condições de contorno adotados na aplicação do método.

#### 3.1 Técnicas gerais de solução:

Basicamente, as técnicas gerais de solução do problema da transferência de calor são das seguintes naturezas:

- Analíticas: - exatas
- aproximadas
- Numéricas

Cada uma delas será definida e discutida abaixo.

##### 3.1.1 Soluções analíticas exatas:

As soluções analíticas exatas caracterizam-se por "não incorporarem

nenhuma aproximação de caráter matemático, embora um certo número de hipóteses físicas tenham de ser adotadas para permitir a solução do problema” (51). Ou seja, as soluções analíticas exatas primam-se por um rigoroso tratamento matemático em detrimento de sua representatividade do sistema físico real, devido às hipóteses fundamentais que necessariamente são adotadas, tornando a sua aplicação restrita às situações idealizadas.

Algumas destas hipóteses que simplesmente inviolabilizam a aplicação generalizada das soluções analíticas exatas são: a temperatura da interface metal/molde permanece constante durante a solidificação; o metal solidifica com uma interface sólido/líquido macroscopicamente plana; a unidimensionalidade do fluxo de calor e a exigência de os sistemas serem semi-infinitos (1). Existem algumas soluções analíticas exatas desenvolvidas para o caso da solidificação de placas planas, como por exemplo a de Garcia e Prates (52), que considera uma resistência ao fluxo de calor na interface metal/molde constante. Já para o caso de peças cilíndricas, existe apenas uma solução analítica exata (53), e esta solução trata da solidificação de um meio infinito com geometria cilíndrica com uma linha absorvedora de calor colocada axialmente (raio = 0), meio este posicionado em uma massa líquida de temperatura  $T_i$ . A linha absorvedora de calor é ativada a  $t = 0$  (instante inicial) e absorve calor continuamente para tempos  $t > 0$ . A frente de solidificação movimenta-se, então, radialmente. Segundo o autor, a solução exata para o problema descrito acima é obtida da solução da equação de condução de calor através de uma função integral exponencial.

Como as soluções analíticas devem correlacionar a temperatura com o tempo e a posição da frente de solidificação, sua grande vantagem é a possibilidade de parametrização do problema, ou seja, a possibilidade de se visualizar a influência da variação de uma ou outra variável sobre a temperatura.

### *3.1.2 Soluções analíticas aproximadas:*

As soluções analíticas aproximadas consistem na “imposição de uma expressão matemática para representar o perfil térmico da camada de metal sólido, para então derivar-se uma expressão para a cinética de solidificação” (51).

Estas soluções não são muito utilizadas devido ao fato de serem limitadas a moldes refrigerados e como normalmente tem-se a necessidade do uso

da computação para suas soluções, acaba-se optando diretamente pelos métodos numéricos.

### *3.1.3 Métodos Numéricos:*

Atualmente, os “métodos numéricos” têm sido a técnica geral mais aplicada na solução do problema da transferência de calor, pois os mesmos permitem a análise de sistemas mais reais de solidificação, devido à sua grande flexibilidade. Os métodos numéricos permitem trabalhar com fluxos de calor multidimensionais, geometrias e dimensões do sistema metal/molde variadas e complexas, propriedades físicas variáveis com a temperatura, resistência de interface metal/molde variável, etc. Com o desenvolvimento tecnológico na área de computação, a utilização dos métodos numéricos tem sido facilitada mais e mais.

Os métodos numéricos baseiam-se na solução das equações diferenciais de condução em regime transiente pela aproximação das mesmas por equações de diferenças ou elementos finitos que são resolvidas a cada intervalo de tempo. Esta aproximação se dá através da divisão do sistema em malhas, onde a cada instante a temperatura no centro de cada malha é calculada através das equações de diferenças ou elementos finitos.

A desvantagem dos métodos numéricos frente aos métodos analíticos é que não permitem a parametrização do problema.

Os métodos numéricos permitem a solução de problemas que são impossíveis de serem resolvidos analiticamente.

Como o sistema em estudo neste trabalho é caracterizado pelo fluxo de calor multidimensional, apresenta dimensões finitas, geometria cilíndrica, e resistência na interface metal/molde variável, etc., optou-se pela técnica dos métodos numéricos, a fim de se obter uma solução representativa.

### **3.2 Métodos numéricos: comparação entre FEM e FDM:**

Antes de entrar propriamente na definição e apresentação das características do método de diferenças finitas (Finite difference method – FDM) e do método de elementos finitos (Finite element method – FEM) é importante conceituar quais as principais propriedades que os métodos numéricos devem apresentar. A análise destas propriedades permite a avaliação do método a ser empregado.

Essas propriedades são:

- Estabilidade numérica
- Consistência numérica
- Convergência
- Precisão
- Eficiência

### *3.2.1 Propriedades dos métodos numéricos:*

#### A- Estabilidade Numérica:

Um esquema de discretização de uma equação diferencial (como o FEM ou FDM) é caracterizado como instável se a sua solução aplicada a cada nó, apresenta resultados que comportam-se oscilatoriamente, e que gradualmente, através de um efeito de “amplificação”, tem essa oscilação aumentada. Portanto, um esquema de discretização é estável quando não apresenta esta oscilação (54).

T.M. Shih apresenta (54) dois critérios matemáticos de estabilidade que são usados para testar a estabilidade numérica de equações discretizadas que governam sistemas transientes. O primeiro é o método Matricial (matrix method) (55,56) e o outro é o método de Von Neumann (57,58), e segundo o autor, ambos os critérios podem ser utilizados para problemas bidimensionais.

#### B- Consistência Numérica:

Uma equação discretizada é dita consistente com a equação diferencial original se o erro de Truncamento aproxima-se de zero quando o tamanho da malha e o intervalo do tempo tendem a zero. Já que consideramos a consistência a partir do erro de truncamento proveniente da expansão em série de Taylor esta é uma propriedade basicamente da FDM (a razão ficará clara no item 3.4.).

Segundo Shih, com método de diferenças finitas, podemos obter esquemas estáveis mas inconsistentes, instáveis e consistentes e estáveis e consistentes.

#### C- Convergência:

Provavelmente esta seja a mais importante propriedade dos métodos numéricos, pois, se as duas primeiras propriedades são principalmente de

esquemas de diferenças finitas envolvendo expansão em série de Taylor, a convergência é uma propriedade necessária a todos os métodos numéricos.

Suponhamos que  $\phi_{J,k}^{(n)}$  seja a solução obtida com a equação discretizada para um determinado nó e que  $\phi(J\Delta x, K\Delta y, N\Delta t)$  seja a solução exata para aquele ponto. Um dado esquema numérico é dito convergente se (54):

$$| \phi(J\Delta x, K\Delta y, N\Delta t) - \phi_{J,k}^{(n)} | \rightarrow O$$

com

$$\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow O$$

Na escolha de um certo método, deve-se levar em consideração a sua capacidade de convergência e a "velocidade" com que converge, pois um método pode convergir muito lentamente e por isto deixar de ser interessante.

#### D- Precisão:

Basicamente, a precisão pode ser avaliada pela aproximação que existe entre a solução obtida da equação discretizada e a solução exata, logo a análise da precisão de um certo método numérico é direta quando o problema tem solução analítica exata, mas quando não tem (e este é o caso da grande maioria dos problemas de solidificação) deve-se adotar critérios para assegurá-la:

. Para FDM: Shih (54) apresenta dois critérios. O primeiro é simplesmente diminuir o tamanho da malha (decréscimo na distância entre os nós). Este critério nem sempre é desejado pelo acréscimo que causa no tempo de CPU (Unidade central de processamento). Então Shih apresenta o segundo critério que é uma escolha apropriada da razão entre intervalo de tempo e tamanho de malha.

Logo, com um correto manuseamento dessa razão pode-se obter uma boa precisão sem elevar muito o tempo de CPU e memória disponível necessária.

. Para FEM: segundo Shih, a precisão de um esquema de elementos finitos é melhorada se a taxa de convergência para uma dada função de interpolação é elevada.

#### E- Eficiência:



Um algoritmo computacional pode ser definido como eficiente se o mesmo requer pouca reserva de memória e pequeno tempo de CPU. A reserva de memória inclui especificações de dados e instruções e o tempo de CPU é proporcional ao número e “comprimento” das instruções. Esta propriedade é difícil de ser traduzida por um simples critério, pois a mesma deve ser analisada algoritmo por algoritmo.

### *3.2.2 Definição do método de diferenças finitas (FDM):*

O método de diferenças finitas é o método numérico que tem sido mais utilizado, para a solução aproximada de equações diferenciais. E isto porque a forma de discretização é relativamente simples e facilmente inteligível. O método de diferenças finitas é definido como aquele cuja discretização da equação diferencial em questão é realizada através de um procedimento de aproximação no qual um meio contínuo é substituído por uma rede de malhas de pontos, cuja distância uns dos outros é discreta, e o campo de incógnitas é aplicado somente nestes pontos discretos. As derivadas parciais da equação diferencial são aproximados por diferenças finitas obtidas pela expansão em série de Taylor. Dependendo do erro de truncamento consequente da expansão em série de Taylor, os esquemas de diferenças finitas são divididos em dois grupos: os de segunda ordem, quando o erro de truncamento na aproximação é de segunda ordem, ou de ordem mais elevada, quando o problema exige maior precisão e portanto o erro de truncamento tem de ter uma ordem mais elevada. As equações de diferenças finitas podem ser obtidas também por aproximação geométrica e por conservação de energia, mas a vantagem do uso da expansão em série de Taylor é a visualização da ordem do erro introduzido ao se discretizar as derivadas parciais (54,59).

No item 3.4 a expansão em série de Taylor e a aproximação geométrica serão utilizadas para discretizar as derivadas parciais da equação de condução térmica.

### *3.2.3 Definição do método de elementos finitos (FEM):*

O nome “método de elementos finitos” foi introduzido, pela primeira vez, por pesquisadores em mecânica estrutural aplicada ao estudo de corpos sujeitos à carregamentos externos. Quando não foi possível encontrar soluções analíticas para geometrias complexas, dividiu-se estes corpos em

pequenos volumes, chamados elementos finitos e estudou-se a atuação das cargas em cada um destes elementos e a interação de uns com os outros. Posteriormente, este método de divisão de um corpo em diversos elementos de volume (elementos finitos) foi aplicado em outras áreas, como a solidificação, por exemplo. Só que neste caso, a equação que rege o fenômeno de transporte de calor no corpo é uma equação diferencial e por isto, na aplicação do FEM ao estudo da solidificação de um corpo, faz-se necessário o uso de métodos variacionais (Variational Methods) ou métodos dos resíduos ponderados (Method of Weighted Residuals), que se adequam à equação diferencial para a sua solução, utilizando-se a subdivisão em elementos finitos. Para maiores detalhes sobre estes métodos ver as referências 23, 39, 42, 54, 60, 61, 62. Portanto, no FEM, o domínio espacial é dividido em um número de subdomínios chamados elementos, e um conjunto de funções é determinado para aproximar a variável dependente. Estes elementos podem assumir a forma geométrica de triângulos, blocos ou retângulos distorcidos de dimensões diferentes. Na divisão do domínio deve-se conhecer muito bem o problema, as características físicas e sobretudo o próprio método de elementos finitos para uma escolha apropriada das geometrias e dimensões utilizadas. No FEM pode-se usar, para um mesmo corpo, dimensões diferentes de elementos (39, 42, 54).

#### *3.2.4 Comparação entre FDM e FEM:*

Este item ocupa-se da análise comparativa de ambos os métodos numéricos usando-se algumas características próprias dos mesmos, ficando claro que esta abordagem comparativa tem somente o objetivo de apontar algumas das vantagens e desvantagens dos métodos, não sendo portanto exaustiva e conclusiva (23, 39, 42, 54).

##### **A- Facilidade de entendimento:**

O método de diferenças finitas é um dos mais usados devido à fácil compreensão da discretização das equações diferenciais por expansão em série de Taylor (como já foi dito) enquanto que o método de elementos finitos em tratamentos matemático da equação diferencial, através do uso do método como o de Galerkin ou método variacional, é de compreensão mais difícil, devido à sua complicação inerente.

#### B-Divisão do domínio:

No FDM o corpo ou domínio físico em estudo é substituído por uma rede de malhas onde faz-se necessário que as malhas tenham a mesma dimensão, e normalmente elas são quadradas. Para o FEM, a flexibilidade da divisão do domínio é bem maior podendo as malhas terem dimensões diferentes. Isto é vantajoso no sentido que, nas regiões onde a velocidade de solidificação é maior ou tem-se variações mais rápidas no gradiente térmico, pode-se utilizar malhas menores onde obtem-se uma maior precisão e portanto um modelamento mais detalhado.

#### C-Fluência de resultados (Smoothness):

Uma das diferenças mais marcantes entre os dois métodos, no que se refere a resultados é a fluência (smoothness) com que a solução aproximada da equação diferencial é obtida. No FEM, a solução aproximada através de todo o domínio é obtida automaticamente com a determinação das variáveis nos nós das malhas. No FDM, a solução é estritamente discreta, ou seja, determina-se o valor das incógnitas somente nos pontos da rede e não através do domínio todo.

#### D- Instabilidade numérica:

O método de elementos finitos é incondicionalmente estável e por isto é preferível aos esquemas de diferenças finitas explícitos que geralmente são submetidos a um critério de estabilidade. O critério de estabilidade para FDM explícito será discutido na seção 3.4.

#### E- Precisão:

A precisão do FDM pode ser analisada através da magnitude do erro de truncamento da expansão em série de Taylor e a precisão do FEM, pela taxa de convergência de sua função de interpolação. Portanto, é fácil comparar a precisão de esquemas de diferenças finitas entre si e de elementos finitos entre si, mas fica difícil comparar a precisão de um esquema de diferenças finitas com um de elementos finitos, sem conhecer-se a solução exata da equação diferencial.

#### F- Aplicação para geometrias irregulares:

Devido ao fato de no FEM as malhas poderem assumir dimensões e

geometrias com muito maior flexibilidade que para o FDM, o primeiro é mais aplicado no tratamento de problemas com geometrias irregulares.

G- Tempo de CPU e espaço de memória:

Normalmente, para um mesmo problema de transferência de calor, o esquema de diferenças finitas ocupa menos tempo de CPU e espaço de memória que esquemas de elementos finitos.

No presente trabalho, optou-se pelo método de diferenças finitas pelos seguintes motivos:

- . A geometria do sistema é simples e conhecida (geometria cilíndrica) e o problema da transferência de calor fica bem descrito pela discretização em diferenças finitas.
- . Facilidade na compreensão e desenvolvimento do método.

### 3.3 Comparação entre FDM explícito e implícito:

A seguir será apresentada uma comparação entre o método de diferenças finitas explícito e o implícito (6, 54).

O método de diferenças finitas explícito é o mais tradicionalmente utilizado e se caracteriza pelo fato que a variável incógnita dependente é expressa explicitamente em função dos valores desta variável para a malha em questão e suas vizinhas, tomados no instante anterior. Ou seja:

Se  $\phi$  é a variável incógnita dependente em questão,  $i$  é o índice que indica a posição da malha e  $n$ , o instante de tempo imediatamente anterior, a sua representação em diferenças finitas, considerando-a unidimensional:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial V^2} \Rightarrow \frac{\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n}}{\Delta t} = \frac{\phi_{i-1,n} - 2\phi_{i,n} + \phi_{i+1,n}}{(\Delta V)^2}$$

onde:

$v \rightarrow$  variável independente.

$n \rightarrow$  instante anterior.

$t \rightarrow$  tempo.

$n+1 \rightarrow$  tempo em questão.

$i+1, i-1 \rightarrow$  índices das malhas vizinhas.

*Obs.:* A forma como se chega a estas equações discretizadas esta mostrada na seção 3.4.

O método de diferenças finitas implícito é um método o qual a variável incógnita dependente da malha em questão e de suas vizinhas são expressas implicitamente em função das mesmas calculadas para o mesmo instante, e portanto, as equações que determinam os valores destas variáveis devem ser resolvidas simultaneamente e conforme Carnahan (6), o sistema de equações é resolvido pelo método Gaussiano de eliminação. Equacionando a definição do FDM implícito:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial V^2} \Rightarrow \frac{\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n}}{\Delta t} = \frac{\phi_{i-1,n+1} - 2\phi_{i,n+1} + \phi_{i+1,n+1}}{(\Delta V)^2}$$

O FDM implícito é incondicionalmente convergente e estável enquanto que o FDM explícito, a estabilidade e convergência são condicionalmente função da relação  $\frac{\Delta T}{\Delta V^2}$  (relação intervalo de tempo-tamanho da malha). Por outro lado, o FDM implícito exige uma quantidade de trabalho computacional (tempo de CPU e tamanho de memória) maior que o FDM explícito, devido à necessidade da solução simultânea das equações de um sistema.

Sendo assim, optou-se pelo FDM explícito neste trabalho, devido à sua maior simplicidade e eficiência computacional, garantindo-se no entanto sua convergência e estabilidade ao escolher adequadamente os valores de tamanho da malha e intervalo de tempo.

### 3.4 Método de diferenças finitas explícito:

Neste ítem serão apresentados alguns aspectos específicos ligados diretamente ao método numérico escolhido para a construção do modelo matemático que simula a solidificação de um lingote cilíndrico de aço médio carbono em lingoteira de ferro fundido.

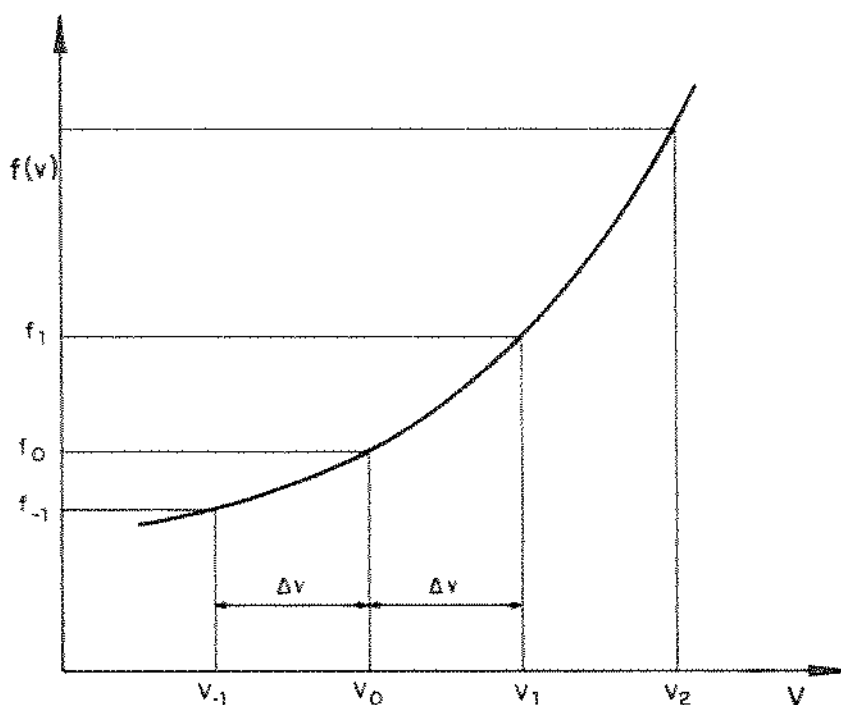
#### 3.4.1 Discretização das derivadas parciais da equação diferencial de condução (59):

Será mostrado agora duas maneiras de discretização por diferenças finitas explícito das derivadas parciais, que compõem a equação diferencial da condução térmica. As maneiras são: aproximação geométrica e expansão em série de Taylor, sendo que esta discretização pode ser feita também por

balanço de energia, como já foi afirmado anteriormente.

#### A. Aproximação geométrica:

Consideremos uma função  $f(v)$ , sendo  $v$  a variável independente, sendo que esta função  $f(v)$  descreve uma certa curva contínua que pode ser aproximada por pontos e a derivada desta função em um determinado ponto, pode ser determinada a partir de valores da função em pontos vizinhos:



Determinando a derivada no ponto  $v = v_0$ :

$$f'(v) = f'(v_0)$$

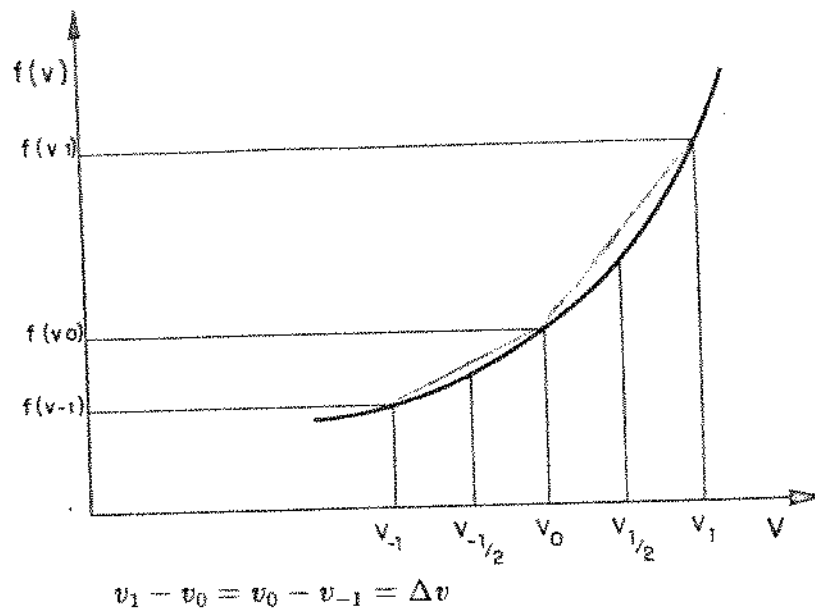
Como foi afirmado:

$$f'(v_0) \cong f(v_{-1}, v_1, v_2, \dots)$$

Logo a derivada em  $v_0$  depende do comportamento da função, para cada

ponto vizinho:

Sendo assim:



Logo, generalizando:

$$v_i = v_0 + i\Delta v$$

e:

$$f_i = f_v|_{v=v_i} = f(v_i)$$

Para valores intermediários:

$$f_{-1/2} = f(v)|_{v=v_{-1/2}} = f_{v_{-1/2}} = f_{(v_0 - 1/2\Delta v)}$$

Na discretização por diferenças finitas, faz-se com que a curva da função aproxime-se a um conjunto de retas finitas, unindo-se um ponto ao outro:

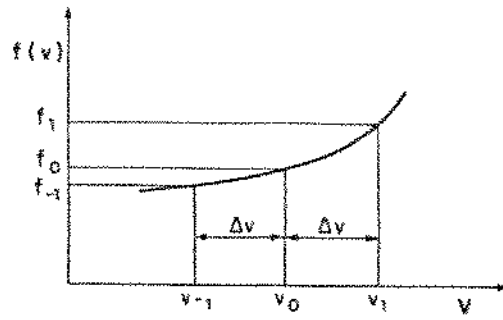
Então:

$$\frac{df_{(v_{1/2})}}{dv} = \frac{\Delta f_{(v_{1/2})}}{\Delta v} = \frac{f_{(v_1)} - f_{(v_0)}}{v_1 - v_0} = \frac{f_1 - f_0}{\Delta v}$$

$$\frac{df_{(v_{-1/2})}}{dv} = \frac{\Delta f_{(v_{-1/2})}}{\Delta v} = \frac{f_{(v_0)} - f_{(v_{-1})}}{v_0 - v_{-1}} = \frac{f_0 - f_{-1}}{\Delta v}$$

Sendo assim as duas equações anteriores podem ser consideradas como aproximação da derivada para o ponto  $v = v_0$ .

Mas, pode-se fazer também:



$$\frac{df(v_0)}{dv} = \frac{f(v_1) - f(v_{-1})}{\Delta v} = \frac{f_1 - f_{-1}}{\Delta v}$$

, denominada diferença central.

Então:

$$\frac{df}{dv} \Big|_{v=v_0} = f'_v \Big|_{v=v_0} = \frac{f_1 - f_{-1}}{\Delta v} \quad (3.1)$$

Para a determinação da derivada segunda de  $f(v)$ , usa-se o mesmo procedimento:

$$\frac{d^2 f}{dv^2} = \frac{d}{dv} \left( \frac{df}{dv} \right) \Big|_{v=v_0}$$

$$\frac{d^2 f}{dv^2} = \frac{\frac{df}{dv} \Big|_{v=v_{1/2}} - \frac{df}{dv} \Big|_{v=v_{-1/2}}}{\Delta v} = \frac{f'_{1/2} - f'_{-1/2}}{\Delta v}$$

Logo, tem-se:

$$\frac{d^2 f}{dv^2} \Big|_{v=v_0} = \frac{\frac{f_1 - f_0}{\Delta v} - \frac{f_0 - f_{-1}}{\Delta v}}{\Delta v}$$

Portanto:

$$\frac{d^2 f}{dv^2} \Big|_{v=v_0} = f''(v) \Big|_{v=v_0} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{(\Delta v)^2} \quad (3.2)$$

Sendo assim, as equações (3.1) e (3.2) permitem que uma equação diferencial com derivadas parciais de primeira e segunda ordem seja discretizada (ou aproximada) a uma equação algébrica de fácil resolução.



Mas, este tipo de discretização não apresenta qual o erro introduzido nesta aproximação.

#### B. Expansão em Série de Taylor:

Antes de mais nada, faz-se necessário definir algumas características da função para que ela possa ser expandida em série de Taylor:

A função  $f(v)$  possui todas as derivadas até à ordem  $(n + 1)$  em um intervalo contendo o ponto  $v = a$ , sendo possível encontrar um polinômio  $y = P_n(v)$  de grau não maior que  $n$ , tal que o valor em  $v = a$  é igual a  $f(v)$  neste ponto, e as derivadas até a ordem  $n$  iguais às derivadas da função  $f(v)$  neste ponto ( $P_n(a) = f(a), P'_n(a) = f'(a), P''_n(a) = f''(a), \dots, P^n_n(a) = f^n(a)$ ).

Então o polinômio definido aqui é uma aproximação da função  $f(v)$ , e este polinômio em qualquer ponto  $v$ , para ser igual à função  $f(v)$ , será o seu valor aplicado no ponto  $a$  mais um acréscimo, que deve ser função da diferença  $(v - a)$ .

Para a forma geral:

$$P_n(v) = C_0 + C_1(v - a) + C_2(v - a)^2 + C_3(v - a)^3 + \dots + C_n(v - a)^n \quad (3.3)$$

onde:

$$C_0 = P_n(a)$$

$C_1, C_2, \dots, C_n \rightarrow$  coef. ctes. não conhecidos.

Derivando a equação (3.3):

$$P'_n(v) = C_1 + 2C_2(v - a) + 3C_3(v - a)^2 + \dots + nC_n(v - a)^{n-1} \quad (3.4)$$

$$P''_n(v) = 2C_2 + 3 \cdot 2 \cdot C_3(v - a) + \dots + n(n-1) \cdot C_n(v - a)^{n-2} \quad (3.5)$$

.

.

.

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ P_n^n(v) &= n.n - 1.n - 2...2.1.C_n \quad (3.6) \end{aligned}$$

Logo os coeficientes não conhecidos podem ser determinados substituindo  $v$  por  $a$ .

$$\begin{aligned} C_0 &= P_n(a) = f(a) \\ C_1 &= P_n'(a) = f'(a) \\ C_2 &= \frac{P_n''(a)}{2!} = \frac{f''(a)}{2!} \\ C_3 &= \frac{P_n'''(a)}{3!} = \frac{f'''(a)}{3!} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ C_n &= \frac{P_n^n(a)}{n!} = \frac{f^n(a)}{n!} \end{aligned}$$

Sendo assim, a equação (3.3) fica:

$$P_n(v) = f(a) + \frac{(v-a)}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(v-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(v-a)^n}{n!} \cdot f^n(a). \quad (3.7)$$

O erro de aproximação:

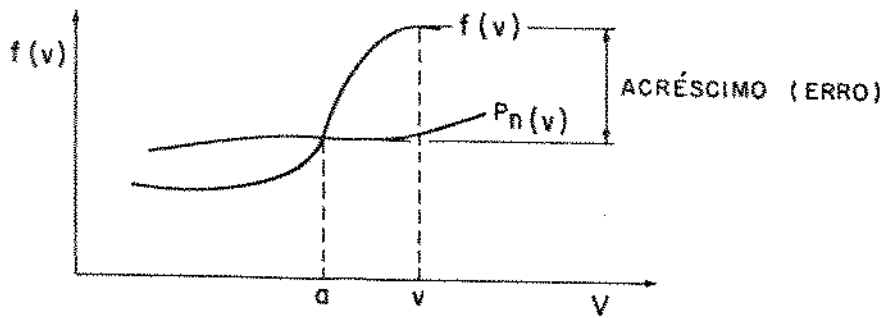
$$R_n(v) = P_n(v) - f(v)$$

Sendo assim:

$$f(v) = f(a) + \frac{(v-a)}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(v-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(v-a)^n}{n!} \cdot f^n(a) - R_n(v). \quad (3.8)$$

Para a determinação do erro, pode-se colocá-lo na seguinte forma:

$$R_n(v) = \frac{(v-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot Q(v)$$



Para um dado valor de  $v$ :

$$Q(v) = Q \rightarrow \text{valor determinado.}$$

Tomando a função auxiliar abaixo, aplicada a um ponto  $t$  entre  $v$  e  $a$  (neste caso  $t$  é qualquer, não significando tempo):

$$F(t) = f(v) - f(t) - (v-t).f'(t) - \frac{(v-t)^2}{2!}.f''(t) - \frac{(v-t)^3}{3!}.f'''(t) - \dots - \frac{(v-t)^n}{n!}.f^{(n)}(t) - \frac{(v-t)^{n+1}}{(n+1)!}.Q \quad (3.9)$$

As derivadas de (3.9) em relação a  $T$ :

$$\begin{aligned} F'(t) = & -f'(t) + \frac{1}{1!}.f'(t) - \frac{(v-t)}{1!}.f''(t) + \frac{2(v-t)}{2!}.f''(t) - \frac{(v-t)^2}{2!}.f'''(t) + \\ & + \frac{3(v-t)^2}{3!}.f'''(t) - \frac{(v-t)^3}{3!}.f^{(4)}(t) + \dots + \frac{n(v-t)^{n-1}}{n!}.f^{(n)}(t) - \frac{(v-t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t) + \\ & + \frac{(n+1)(v-t)^n}{(n+1).(n!)}Q \end{aligned}$$

Logo:

$$F'(t) = -\frac{(v-t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t) + \frac{(v-t)^n}{n!}.Q \quad (3.10)$$

Sendo assim:

$$\text{para } t = v \rightarrow F(v) = 0$$

$$\text{para } t = a \rightarrow F(a) = 0$$

Segundo o Teorema de Rolle, existe então um valor entre  $v$  e  $a$ , onde  $F'(\varepsilon) = 0$ :

Então, para este ponto (da equação 3.10):

$$-\frac{(v-\varepsilon)^n}{n!}f(\varepsilon)^{n+1} + \frac{(v-\varepsilon)^n}{n!}.Q = 0$$

portanto:

$$Q = f^{(n+1)}(\varepsilon) \Rightarrow Rn(v) = \frac{(v-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(\varepsilon)$$

, estando  $\varepsilon$  entre  $a$  e  $v$ .

Aplicando a expansão em série de Taylor para a discretização de derivadas parciais de primeira e segunda ordem e fazendo:

$a = v_0$  e  $v = v_1$ , e truncando a série após a derivada segunda:

$$f(v) = f_1 = f_0 + (v_1 - v_0).f'_0 + \frac{\Delta v^2}{2!}.f''_0 + \frac{\Delta v^3}{3!}.f'''_{0-1}$$

Aplicando a expansão entre  $a = v_0$  e  $v = v - 1$ :

$$f(v) = \bar{f}_{-1} = f_0 + (v_{-1} - v_0).f'_0 + \frac{\Delta v^2}{2!}.f''_0 - \frac{\Delta v^3}{3!}.f'''_{-1-0}$$

Subtraindo uma equação da outra:

$$f_1 - f_{-1} = 2\Delta v.f'_0 + \frac{\Delta v^3}{3!}(f'''_{0,1} + f'''_{-1,0})$$

, e dividindo por  $2\Delta v$ :

$$\begin{aligned}\frac{f_1 - f_{-1}}{2\Delta v} &= f'_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta v^2}{3!} (f'''_{0,1} + f'''_{-1,0}) \Rightarrow \frac{df}{dv} \Big|_{v=v_0} = \\ &= \frac{f_1 - f_{-1}}{2\Delta v} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta v^2}{3!} (f'''_{0,1} + f'''_{-1,0})}_{\text{erro}} \quad (3.11)\end{aligned}$$

Sendo assim, para os pontos  $\varepsilon_{0,1}$  e  $\varepsilon_{-1,0}$  onde as derivadas terceiras são determinadas, o erro é da ordem de  $\Delta v^2$ .

A aproximação da derivada primeira:

$$\frac{df}{dv} \Big|_{v=v_0} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2\Delta v} \quad (3.12)$$

Para a determinação da derivada segunda em relação a  $v$ , trunca-se a expansão no termo de terceira ordem e aplica-a no intervalo  $(0 \rightarrow 1)$  e  $(-1 \rightarrow 0)$ , somando as duas equações resultantes e dividindo o resultado por  $\Delta v^2$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{(\Delta v)^2} &= f''_0 + \frac{\Delta v^2}{4!} (f^{iv}_{0,1} + f^{iv}_{-1,0}) \Rightarrow \frac{d^2 f}{dv^2} \Big|_{v=v_0} = \\ &= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{(\Delta v)^2} - \underbrace{\frac{\Delta v^2}{4!} (f^{iv}_{0,1} + f^{iv}_{-1,0})}_{\text{erro}} \quad (3.13)\end{aligned}$$

Novamente, o erro é da ordem de  $\Delta v^2$ , e a derivada segunda é então, aproximada por:

$$\frac{d^2 f}{dv^2} \Big|_{v=v_0} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{(\Delta v)^2} \quad (3.14)$$

Quando a variável  $v$  é igual a tempo, tem-se a necessidade de ajustar a equação da derivada, pois neste caso conhece-se a  $f(t)$  somente no instante em questão ( $v = v_0 = t_0$ ) e no instante anterior ( $v = v_{-1} = t_{-1}$ ), obviamente não conhecendo-a no instante posterior onde  $v = v_1 = t_1$ , logo faz-se:

$$(v - a) = t_{-1} - t_0 = t_{i-1} - t_i$$

sendo  $i \rightarrow$  instante em questão.

Então; aplicando a expansão em série de Taylor

$$f_{i-1} = f_i - \Delta t \cdot f'_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \cdot f''_{i-1,i}$$

sendo o truncamento na derivada de primeira ordem.

$$f'_i = \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta t} + \underbrace{\frac{\Delta t}{2} f''_{i-1,i}}_{\text{erro}} \quad (3.15)$$

A aproximação é:

$$\frac{df}{dt} \Big|_{t=t_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta t} \quad (3.16)$$

Tendo então sido obtidas as discretizações, ou equações discretizadas por diferenças finitas das derivadas parciais de primeira e segunda ordem, podendo estas serem aplicadas para qualquer sistemas de coordenadas (eq. 3.12 e 3.14) e a equação discretizada por diferenças finitas da derivada parcial de primeira ordem em relação ao tempo (eq. 3.16), as mesmas serão usadas no capítulo 4 para a discretização da equação de condução de calor em um lingote e lingoteira de geometria cilíndrica, utilizando-se o sistema cilíndrico de coordenada, para o fluxo de calor bidimensional.

#### 3.4.2 Propriedades do FDM explícito:

Nesta seção serão analisadas quatro importantes propriedades dos métodos numéricos, que são: estabilidade, consistência, convergência e precisão, análise esta dirigida especificamente ao modelo de simulação da solidificação deste trabalho, desenvolvido a partir do método de diferenças finitas explícito.

A- Estabilidade:

Shih apresenta (54) dois métodos matemáticos de teste de estabilidade de um dado método numérico de resolução de equações diferenciais. São eles:

método matricial e de Von Neumann que são métodos bastante complexos. Carnahan (6) menciona uma terceira forma de se testar a estabilidade de FDM explícito. Este seria um teste intuitivo aplicado às equações discretizadas das derivadas parciais das equações diferenciais de condução e transferência de calor, do modelo. Dusinger (2) utilizou este teste também. O teste compõem-se em avaliar o coeficiente multiplicador da variável dependente temperatura de uma dada malha, no instante anterior, já que o que se quer determinar no final é a temperatura (da mesma malha) no instante em questão. Intuitivamente, deduz-se que, para uma certa malha, a sua temperatura no instante anterior deve contribuir positivamente para a sua temperatura no instante presente, logo este coeficiente deve ser sempre maior (ou pelo menos) igual a zero.

Para o modelo deste trabalho, o coeficiente multiplicador da temperatura traz sempre em si o número de Fourier, e é a necessidade deste coeficiente ser maior ou igual a zero que define o limite superior do número de Fourier, que por sua vez define o limite superior do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) e tamanho de malha, pois:

$$F_0 = a \cdot \frac{\Delta t}{\Delta r^2}; F_0 \rightarrow \text{número de Fourier.}$$

Os coeficientes multiplicadores da temperatura e condições de estabilidade:

1. Para as malhas internas do cilindro (metal e molde):

$$\left(\frac{1}{2F_0} - 2\right) \cdot T_{(i,j)}$$

- condição de estabilidade nas malhas internas do metal e molde:

$$\frac{1}{2F_0} - 2 \geq 0 \Rightarrow F_0 \leq 1/4$$

2. Para as malhas centrais do metal e do molde:

$$(1/F_0 - 6) \cdot T_{(i,j)}$$

- condição de estabilidade nas malhas centrais do metal e molde:

$$\frac{1}{F_0} - 6 \geq 0 \Rightarrow F_0 \leq 1/6$$

3. Das outras regiões de contorno do metal, o menor valor de  $F_0$  necessário para se garantir a estabilidade é:

malha do canto superior do lingote:

coeficiente multiplicador.

$$\left( \frac{1}{4F_0} - 1 - \frac{\mathbf{T} \cdot \varepsilon \cdot \Delta r}{2 \cdot K} - \frac{B_i}{2} \right) \cdot T_{(i,j)}$$

condição de estabilidade para esta malha:

$$F_0 \leq \frac{1}{4 + 2 \cdot \mathbf{T} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\Delta r}{k} + 2 \cdot B_i}$$

4. Das outras regiões de contorno do molde, o menor valor de  $F_0$  necessário para se garantir a estabilidade é:

Malha do canto superior interno do molde:

coef. multiplicador:

$$\left( \frac{1}{4F_0} - 1 - \frac{B_{im}}{2} \right) \cdot T_{(i,j)}$$

condição de estabilidade:

$$F_0 \leq \frac{1}{4 + 2B_{im}}$$



onde:

$\tau \rightarrow$  constante de Stefan-Boltzman

$\varepsilon \rightarrow$  emissividade,

$k \rightarrow$  coef.de condutibilidade do metal

$B_i \rightarrow$  número de Biot para o metal

$$B_i = h \cdot \frac{\Delta r}{K}$$

$B_{im} \rightarrow$  número de Biot para o molde

$$B_{im} = h \cdot \frac{\Delta r}{K_m}$$

$K_m \rightarrow$  coef. de condutibilidade do molde

$h \rightarrow$  coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde.

Sendo assim, ao tomar-se o menor valor de  $F_0$  necessário, garante-se a estabilidade para as demais regiões do sistema metal/molde.

Apesar de as temperaturas do metal serem obtidas através da determinação da entalpia, para cada malha e a cada instante, estas condições de estabilidade continuam valendo. Esta equações permitem uma escolha conveniente de intervalo de tempo e tamanho de malha que assegurem a estabilidade.

#### B- Consistência:

Conforme a definição de consistência dada no item 3.2.1, o método numérico é consistente se o erro de truncamento aproxima-se de zero quando o intervalo de tempo e o tamanho da malha ( $\Delta v \rightarrow$  geral ou  $\Delta r \rightarrow$  sistema cilíndrico) tendem a zero. Ao analisarmos as equações 3.11, 3.13 e 3.15, que mostram a expressão do erro para cada discretização, nota-se que se  $\Delta v \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , o erro de cada uma das equações também tendem a zero. Logo, o método de diferenças finitas explícito é consistente (6).

### C- Convergência:

Segundo o Teorema de Lax (6, 54), se um certo método numérico é estável e consistente, este método é consequentemente convergente. O FDM explícito é naturalmente consistente. Como a estabilidade do método é assegurada (através do teste intuitivo apresentado anteriormente) por uma escolha correta de intervalo de tempo de tamanho de malha, então o método é convergente.

### D-Precisão:

Segundo Shih (54), a precisão do FDM explícito pode ser melhorada se o valor do número de Fourier for tomado o menor possível, mesmo se a estabilidade já for garantida. Neste sentido então, para o modelo em questão estipulou-se que o valor máximo do número de Fourier adotado deve ser menor ou igual a  $1/8$ , mesmo que a estabilidade seja garantida com  $F_0$  acima disto, a fim de se ter uma melhor precisão de resultados.

## 3.5 Métodos de cálculo do calor latente (19,20):

Durante a solidificação do metal, tem-se a liberação do calor latente que atua no sistema como uma fonte de calor interna do lingote e este calor liberado deve ser contabilizado no cálculo da temperatura do metal. São descritos abaixo os métodos de contabilização deste calor latente:

### 1. Método da recuperação da temperatura:

Este método consiste da transformação do calor latente em um número equivalente de graus obtidos pela divisão do valor do calor latente pelo calor específico. A temperatura em cada nó é calculada na ausência do calor latente, e após cada intervalo de tempo o valor da temperatura que fica abaixo da temperatura de solidificação é recomposto para a temperatura de solidificação até a mesma estar completa. Este processo de recuperação é efetuado até que a soma das diferenças entre a temperatura calculada e a de solidificação atinja o valor do número equivalente de graus definido acima. Este método é conveniente para o estudo da solidificação de metais puros.

### 2. Método do calor específico equivalente:

O calor latente de solidificação é convertido para calor específico, guardadas as unidades devidas, e adicionado ao termo de calor específico na faixa de temperatura onde a solidificação ocorre. Em termos algébricos:

$$d(c - L \frac{\partial f_s}{\partial T}) \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T \rightarrow$$

equação da condução de calor, onde há a geração de calor devido à liberação de calor latente.

$d \rightarrow$  densidade

$c \rightarrow$  calor específico

$L \rightarrow$  calor latente

$f_s \rightarrow$  fração de sólido

$T \rightarrow$  temperatura

$t \rightarrow$  tempo

$K \rightarrow$  condutibilidade térmica (constante).

então:

$$C_E = C - L \frac{\partial f_s}{\partial T}; C_E \rightarrow$$

calor específico equivalente.

Logo:

$$dC_E \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T$$

Assumindo uma distribuição linear do calor latente na faixa de temperatura, onde a solidificação ocorre:

$$C_E = C + \frac{L}{T_{LIQ} - T_{SOL}}$$

Este método é conveniente para o estudo da solidificação de ligas.

### 3. Método da entalpia:

Segundo Kimura et. al (22) este método é bem adequado aos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos, e é este método utilizado neste trabalho. Este método de contabilização do calor latente está descrito no capítulo 4. As relações entre H(entalpia) e T adotadas foram aquelas apresentadas nas referências (8,43). Este método permite tratar convenientemente tanto a solidificação de metais puros quanto ligas.

### 3.6 Considerações Complementares:

Faz-se necessário ainda, neste capítulo que trata da metodologia do modelo, explicitar alguns pressupostos básicos adotados para a simulação da solidificação. São eles:

#### A- Temperatura inicial do metal:

Adotada igual à temperatura de vazamento menos 50°C. Esta subtração foi adotada devido às perdas térmicas no vazamento do metal líquido (28).

#### B-Cálculo da fração sólida:

Considerou-se liberação uniforme de calor latente, conforme equação abaixo (32):

$$f_s = \frac{T_{LIQ} - T}{T_{LIQ} - T_{SOL}}$$

#### C- Coeficiente de transferência de calor convectivo:

Na superfície do molde, assumiu-se o coeficiente de transferência convectiva de calor como sendo função da temperatura, conforme a equação abaixo (63):

$$\frac{h_{molde/Atm} \cdot L}{K_f} = 0,13 \left[ L^3 \cdot \frac{df^2 \cdot g \cdot \beta_i}{\mu f^2} \cdot \Delta T \cdot \left( \frac{Cp_f \cdot \mu_f}{K_f} \right) \right]^{0,33}$$

$h_{molde/Atm} \rightarrow$  coef. transf. convec. calor.

$L \rightarrow$  para supr. verticais: altura. (63)

$K_f \rightarrow$  cond. do fluido

$d_f \rightarrow$  densidade do fluido

$g \rightarrow$  aceleração da gravidade

$\mu_f \rightarrow$  viscosidade do fluido

$Cp_f \rightarrow$  cap. calorífica do fluido

$\beta_f \rightarrow$  coeficiente de expansão volumétrica.

A equação acima é válida para convecção natural turbulenta, que é o caso na solidificação do metal em molde permanente (30).

E- Coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde (h):

Como é difícil encontrar valores práticos de coeficiente de transferência de calor aplicáveis ao problema em questão, estes valores foram determinados a partir de resultados experimentais do trabalho. Os mesmos foram obtidos através do ajuste da curva  $T_{xt}$  para pontos específicos da lingoteira e metal calculada pelo modelo, tomando-se como referência as curvas obtidas experimentalmente.

#### 4. EQUACIONAMENTO

Este capítulo tem por objetivo apresentar todas as equações utilizadas para a descrição e abordagem do problema da solidificação de um lingote de aço médio carbono em lingoteira de ferro fundido, assim como todas as hipóteses e simplificações adotadas bem como as condições de contorno, utilizadas em suas deduções.

As regiões do sistema metal/molde para as quais foi necessário o equacionamento estão mostradas abaixo:

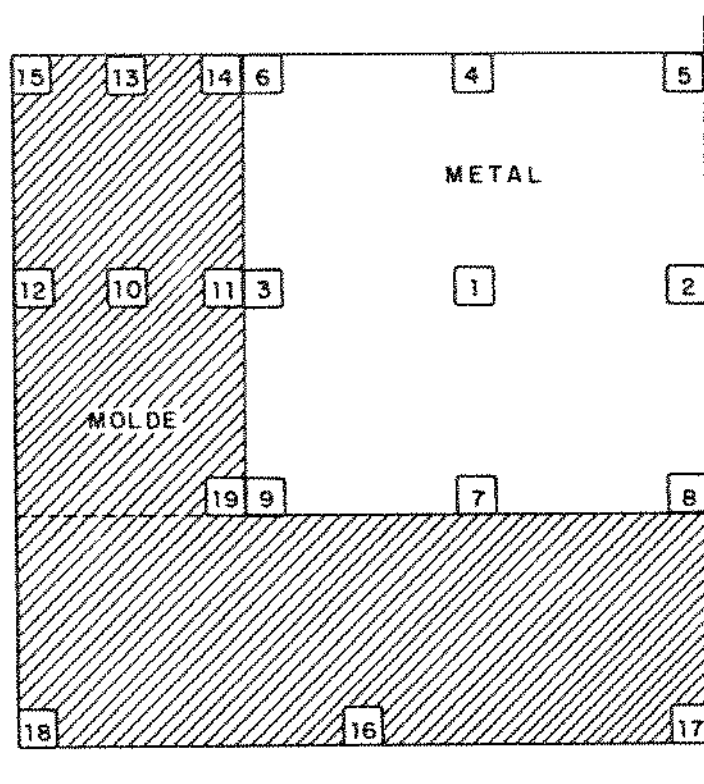


FIG. 4.1

Os números das figuras 4.1 indicam posições para as quais será desenvolvido o equacionamento específico.

## 4.1 Equações do metal

### 1. Equacionamento da posição 1:

A equação básica de condução de calor no metal, com uma fonte interna de calor é (50):

$$\nabla[K(T).\nabla T] + Q = d.C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

onde:

$K \rightarrow$  condutibilidade térmica

$t \rightarrow$  tempo

$Q \rightarrow$  calor gerado na fonte

$d \rightarrow$  densidade

$C_p \rightarrow$  capacidade calorífica

$T \rightarrow$  temperatura

Na solidificação,  $Q$  é gerado pela liberação do calor latente durante a mudança de fase, portanto:

$$Q = d.L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (50)$$

$L \rightarrow$  calor latente

$f_s \rightarrow$  fração de sólido

Considerando  $K$  e  $C_p$  constantes, ou seja, não variáveis com a temperatura (7, 13, 19, 20, 28, 29, 34, 37).

Tem-se:

$$K \nabla^2 T + Q = d.C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

, então:

$$(dC_p - d.L \frac{\partial f_s}{\partial T}) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (4.2)$$

Sendo:

$$H(T) = \int_0^T [d.C_p \cdot dT + d.L(1 - f_s)] \quad (50)$$

$H \rightarrow$  entalpia

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= d.C_p \frac{\partial T}{\partial t} - d.L \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (4.3) \\ \partial H / \partial t &= K \nabla^2 T, \end{aligned}$$

, em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.4)$$

E em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} \right) \quad (4.5)$$

$r \rightarrow$  coord. radial

$z \rightarrow$  coord. axial

$\Theta \rightarrow$  coord. angular

*Obs.:* Como o sistema metal/molde é cilíndrico, o sistema de coordenadas adotado será o cilíndrico.



Será considerada a transferência de calor somente nas direções radial e axial. Pressupõe-se que não haja gradientes térmicos angulares na solidificação de um lingote cilíndrico (17, 39). Isto é razoável, pois no sistema em questão não há nenhum sumidouro térmico que justifique uma transferência angular de calor. Esta simplificação, além de ser sustentável fisicamente, facilita os trabalhos de cálculo necessários. Logo:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.6)$$

Como foi adotado o método de diferenças finitas explícito, têm-se:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H'(i, j) - H(i, j)}{\Delta t} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1)}{(-\Delta r)^2} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T(i, j+1) - T(i, j-1)}{-2 \cdot \Delta r} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j)}{\Delta z^2} \quad (4.10)$$

$i \rightarrow$  Índice que indica, na matriz, a linha do nó.

$j \rightarrow$  Índice que indica, na matriz, a coluna do nó.

$i+1, i-1 \rightarrow$  malha abaixo e acima da malha em questão, respectivamente.

$j+1, j-1 \rightarrow$  malha a direita e a esquerda da malha em questão, respectivamente.

$H'(i, j) \rightarrow$  entalpia da malha  $(i, j)$  no instante em questão.

$H(i, j) \rightarrow$  entalpia da malha  $(i, j)$  no instante anterior.

$T(i, j) \rightarrow$  temperatura da malha  $(i, j)$  no instante anterior

$\Delta t \rightarrow$  intervalo de tempo.

$\Delta z$  e  $\Delta r \rightarrow$  dimensões vertical e horizontal da malha.

Assume-se:

$$\Delta z = \Delta r$$

Neste trabalho, considerou-se como única forma de transferência de calor no metal líquido, a condução. Ou seja, desconsiderou-se a convecção no metal líquido (13, 17, 34, 37, 43).

Sendo assim, a equação que descreve o fluxo de calor no interior do metal, antes, durante e após a solidificação é:

$$\begin{aligned} \frac{H'(i,j) - H(i,j)}{\Delta t} = K & \left[ \frac{T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j)}{\Delta r^2} + \right. \\ & + \frac{T(i,j-1) - T(i,j+1)}{2r_i \Delta r} + \\ & \left. + \frac{T(i,j+1) - 2T(i,j) + T(i,j-1)}{\Delta r^2} \right] \\ H'(i,j) = \frac{K \Delta t}{\Delta r^2} & \left[ \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_i}\right) T(i,j+1) + \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_i}\right) \right. \\ & \left. T(i,j-1) + T(i+1,j) + T(i-1,j) - 4T(i,j) \right] + H(i,j) \quad (4.11) \end{aligned}$$

onde:  $r_i \rightarrow$  raio do cilindro, para a malha em questão.

## 2. Equacionamento da Posição 2

No caso das malhas centrais, no interior do metal, têm-se:

$r_i = 0$ , o que inviabiliza a utilização da equação anterior.

Mas, para resolver este problema, usa-se o artifício da regra de L'Hopital:

Sabe-se que, para  $r \rightarrow 0$ :

$$f(r) = 0 \text{ e } \rho(r) = 0 \Rightarrow r \rightarrow 0$$

Sendo  $f(r)$  e  $\rho(r) \rightarrow$  funções da variável  $r$ .

Diz a regra que:

$$\frac{f(r)}{\rho(r)} = \frac{f'(r)}{\rho'(r)}$$

Fazendo:

$$f(r) = \frac{\partial T}{\partial r} e \rho(r) = r$$

tem-se:

$$\frac{f(r)}{\rho(r)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}.$$

Portanto, para malhas centrais:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \left( 2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{H'(i,j) - H(i,j)}{\Delta t} &= K \left\{ 2 \cdot \left[ \frac{T(i,j+1) - 2T(i,j) + T(i,j-1))}{\Delta r^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T(i+1,j) - 2T(i,j) + T(i-1,j))}{\Delta r^2} \right\} \\ H'(i,j) &= \frac{K \cdot \Delta t}{\Delta r^2} [T(i+1,j) + T(i-1,j) + 4T(i,j-1) - 6T(i,j)] + H(i,j) \quad (4.12) \end{aligned}$$

pois, devido à axissimetria da peça:

$$T(i,j+1) = T(i,j-1)$$

### 3. Equacionamento da posição 3:

Para a dedução da equação da posição 3, que representa o fluxo de calor nas malhas da superfície lateral do metal, utilizou-se o método do balanço de energias.

Abaixo, está representado o esquema do fluxo de calor:

K - CONDUÇÃO  
N - TRANSF. NEWTONIANA DE  
CALOR NA INTERFACE

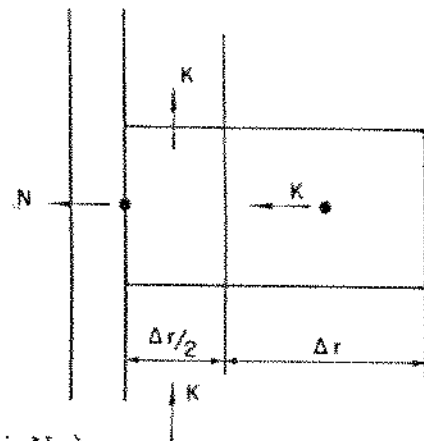


FIG. 4.2

O balanço de energia:

$$-K.A \frac{\partial T}{\partial r} - K \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - h.A.(T(i,1) - T_m(i, N_m)) + \\ + \frac{m}{2} \cdot L \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{m}{2} \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$A \rightarrow$  área da superfície da malha.

$h \rightarrow$  coef. de transferência de calor metal/molde.

$N_m \rightarrow$  índice que indica a última coluna de malha do molde (na interface metal/molde).

$T_m \rightarrow$  temperatura do molde.

Logo:

$$-K.A \cdot \frac{[T(i,1) - T(i,2)]}{\Delta r} - K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T(i,1) - T(i+1,1)]}{\Delta r} + \\ + K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T(i-1,1) - T(i,1)]}{\Delta r} - h.A.[T(i,1) - T_m(i, N_m)] = A \cdot \frac{\Delta r}{2} \left[ d.C \frac{\partial T}{\partial t} - \right. \\ \left. - d.L \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t} \right] = \frac{\Delta r}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H'(i,1) = \frac{2.K.\Delta t}{\Delta r^2} [T(i,2) + 1/2.T(i+1,1) + 1/2.T(i-1,1) + \\ + Bi.T_m(i, N_m) - (2 + Bi)T(i,1)] + H(i,1) \quad (4.13)$$

onde:  $Bi = \frac{h.\Delta r}{K}$  (no. de Biot para o metal)

#### 4. Equacionamento da posição 4

As equações 4.14 a 4.19 serão deduzidas a partir da simplificação de sua forma geométrica, de malhas que compõem um sistema cilíndrico para malhas retangulares, utilizando-se o método de balanço de energia.

Para as equações da superfície superior (4.14, 4.15 e 4.16), a forma de transferência de calor do metal para a atmosfera considerada foi a radiação, negligenciando-se portanto a convecção (21).

Isto é justificável pelo fato que quanto maior a temperatura da superfície livre, maior é a preponderância, como forma de transmissão de calor, da radiação sobre a convecção.

O esquema do balanço energético nestas malhas é mostrado a seguir:

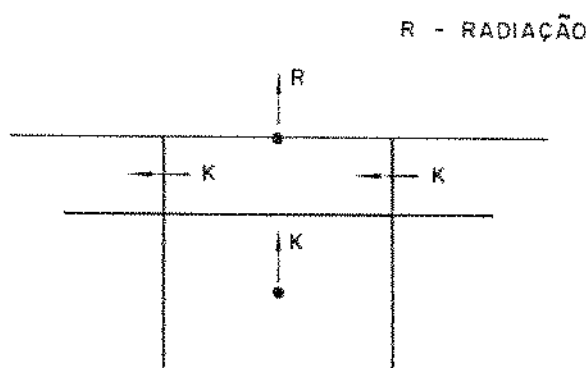


FIG. 4.3

O balanço de energias:

$$\begin{aligned}
 & -K.A.\frac{\partial T}{\partial z} - K.\frac{A}{2}.\frac{\partial T}{\partial r} + K.\frac{A}{2}.\frac{\partial T}{\partial r} - \tau.\varepsilon.A.(T(1,j)^4 - T_A^4) + \\
 & + \frac{m}{2}.L.\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{m}{2}.C.\frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow -K.A.\frac{[T(1,j) - T(2,j)]}{\Delta r} - K.\frac{A}{2}.\frac{[T(1,j) - T(1,j+1)]}{\Delta r} + \\
 & + K.\frac{A}{2}.\frac{[T(1,j-1) - T(1,j)]}{\Delta r} - \tau.\varepsilon.A.[T(1,j)^4 - T_A^4] = \frac{A}{2}.\Delta r.\frac{\partial H}{\partial t} \\
 & H'(1,j) = \frac{2.K.\Delta t}{\Delta r^2} [1/2T(1,j+1) + 1/2T(1,j-1) + T(2,j) + \\
 & + \frac{\Delta r.\tau.\varepsilon}{K}.T_A^4 - \frac{\Delta r.\tau.\varepsilon}{K}.T(1,j)^4 - 2T(1,j)] + H(1,j) \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

$\tau \rightarrow$  constante de Stefan-Boltsman

$\varepsilon \rightarrow$  emissividade

$T_A \rightarrow$  temperatura ambiente

Para aços:

$$\varepsilon = 0,9$$

$$\tau = 5,67 \cdot 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4} \quad (43).$$

Tem-se adotado fator de forma para a radiação igual a 1 (64).

#### 5. Equacionamento da posição 5:

É o mesmo balanço de energia da equação 4.14, só que devido à simetria (por ser a malha central):

$$T(1, j+1) = T(1, j-1)$$

Então a equação fica assim:

$$H'(1, j) = \frac{2.K.\Delta t}{\Delta r^2} [T(1, j-1) + T(2, j) + \\ + \frac{\Delta r.T.\varepsilon}{K}.T_A^4 - \frac{\Delta r.T.\varepsilon}{K}.T(1, j)^4 - 2.T(1, j)] + H(1, j) \quad (4.15)$$

#### 6. Equacionamento da posição 6:

No canto da superfície superior do metal, têm-se  $\frac{1}{4}$  de malha, cujo nó caracterizará o comportamento térmico desta região, à qual, experimenta como formas de transmissão de calor: condução (calor proveniente das regiões internas do metal), transferência newtoniana na interface metal/molde e radiação para a atmosfera.

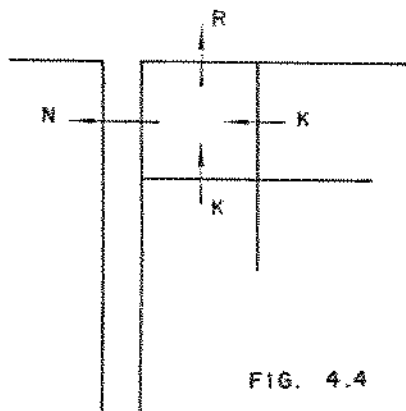


FIG. 4.4

Balanço de energia:

$$\begin{aligned}
 & -K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(1,1) - T_m(1, nm)] - \tau \cdot \epsilon \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(1,1)^4 - T_A^4] + \\
 & \quad + \frac{m}{4} \cdot L \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{m}{4} \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow -K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T(1,1) - T(2,1)]}{\Delta r} - K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T(1,1) - T(1,2)]}{\Delta r} - \\
 & \quad - h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(1,1) - T_m(1, nm)] - \\
 & \quad - \tau \cdot \epsilon \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(1,1)^4 - T_A^4] = \frac{A}{4} \cdot \Delta r \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \\
 & H'(1,1) = \frac{4 \cdot K \cdot \Delta t}{\Delta r^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} T(1,2) + \frac{1}{2} T(2,1) + \frac{\tau \cdot \epsilon \cdot \Delta r}{2K} \cdot T_A^4 + \frac{Bi}{2} \cdot T_m(1, Nm) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\tau \cdot \epsilon \cdot \Delta r}{2K} \cdot T(1,1)^4 - \left(1 + \frac{Bi}{2}\right) \cdot T(1,1) \right] + H(1,1) \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

#### 7. Equacionamento da posição 7:

No equacionamento das posições 7 a 9 considerou-se o contato entre o metal e o molde perfeito, ou seja, é como se a malha da interface metal/molde no pé do lingote fosse composta de dois materiais heterogêneos: aço e ferro fundido, não havendo nenhuma resistência térmica entre eles. Esta simplificação é razoável devido ao fato que o peso que o lingote exerce sobre a base é tal que garante-se um contato bem íntimo entre eles.

Sendo assim, foi necessário considerar a condutividade térmica do metal ( $K$ ) e da lingoteira ( $K_m$ ).

O esquema de transmissão de calor:

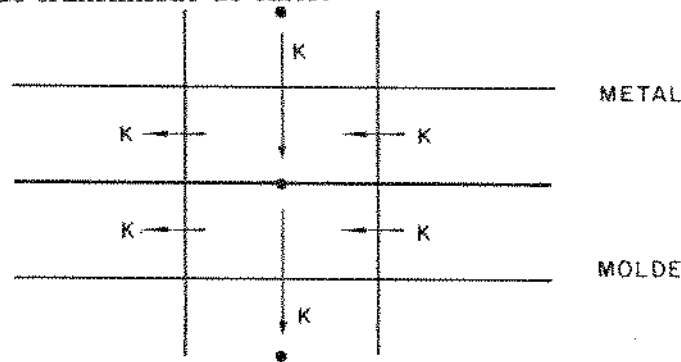


FIG. 4.5

O balanço de energia:

$$\begin{aligned}
& -K.A.\frac{\partial T}{\partial z} + K_m.A.\frac{\partial T}{\partial z} - K.\frac{A}{2}.\frac{\partial T}{\partial r} - K_m.\frac{A}{2}.\frac{\partial T}{\partial r} + \\
& + K.\frac{A}{2}.\frac{\partial T}{\partial r} + K_m.\frac{A}{2}.\frac{\partial T}{\partial r} + m.L.\frac{\partial f_s}{\partial t} = m.C.\frac{\partial T}{\partial t}. \\
& -K.A.\frac{[T(M,j) - T(M-1,j)]}{\Delta r} + K_m.A.\frac{[T_m(M+1, N_m + j - 1) - T(M,j)]}{\Delta r} \\
& -K.\frac{A}{2}.\frac{[T(M,j) - T(M,j+1)]}{\Delta r} - K_m.\frac{A}{2}.\frac{[T(M,j) - T(M,j+1)]}{\Delta r} \\
& + (K.\frac{A}{2} + K_m.\frac{A}{2}).\frac{[T(M,j-1) - T(m,j)]}{\Delta r} = A.\Delta r.\frac{\partial H}{\partial t}. \\
H'(M,j) = & \frac{\Delta t}{\Delta r^2} [K.T(M-1,j) + K_m.T_m(M+1, N_m + j - 1) + (\frac{K}{2} + \\
& + \frac{K_m}{2}).T(M,j+1) + (\frac{K}{2} + \\
& + \frac{K_m}{2}).T(M,j-1) - (2K + 2K_m).T(M,j)] + H(M,j) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Considerou-se:

$M \rightarrow$  última linha de malhas do lingote (da cabeça para o pé).

$N_m \rightarrow$  última coluna de malhas da lingoteira (da superfície exterior para a interior).

Para facilidade de dedução, a densidade e capacidade calorífica de malha foi considerada única para toda a malha.

#### 8. Equacionamento da posição 8

Para a malha central inferior, vale a simetria:

$$T(M, j+1) = T(M, j-1)$$

Logo:

$$H'(M,j) = \frac{\Delta T}{\Delta r^2} [K.T(M-1,j) + K_m.T_m(M+1, N_m + j - 1) +$$



$$+(K + K_m)T(M, j - 1) - (2K - 2K_m)T(M, j)] + H(M, j). \quad (4.18)$$

#### 9. Equacionamento da posição 9

Para o equacionamento da posição no. 9, considerou-se 1/2 da malha sendo que a mesma é caracterizada pelo contato perfeito entre metal e base da lingoteira e transferência newtoniana na interface metal/parede da lingoteira. Para simplificação de dedução, não foi contabilizado o calor que flui horizontalmente na malha abaixo do nó.

Esquema representativo:

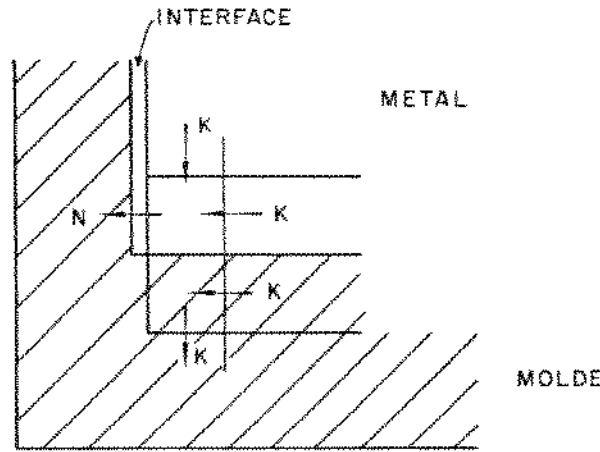


FIG. 4.6

Balanco de energia:

$$\begin{aligned} & -K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \\ & -h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(M, 1) - T_m(M, N_m)] + \frac{m}{2} \cdot L \cdot \frac{\partial f_s}{\partial t} = m \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\ & -K \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T(M, 1) - T(M, 2)]}{\Delta r} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T(M, 1) - T(M, 2)]}{\Delta r} - K \cdot \frac{A}{2} \cdot \\ & \cdot \frac{[T(M, 1) - T(M - 1, 1)]}{\Delta r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(M + 1, N_m) - T(M, 1)]}{\Delta r} - \\ & -h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(M, 1) - T_m(M, N_m)] = \frac{A}{2} \cdot \Delta r \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H'(M,1) = & \frac{2\Delta t}{\Delta r^2} \left[ \frac{K}{2} \cdot T(M,2) + \frac{K_m}{2} \cdot T(M,2) + \frac{K}{2} \cdot T(M-1,1) + \right. \\
& + \frac{K_m}{2} \cdot T_m(M+1, N_m) + \frac{h \cdot \Delta r}{2} \cdot T_m(M, N_m) - \\
& \left. - (K + K_m + \frac{h \cdot \Delta r}{2}) T(M,1) \right] + H(M,1). \quad (419)
\end{aligned}$$

#### 4.2 Equações do molde:

Para poder-se prever os perfis térmicos no interior do lingote, durante a solidificação, é fundamental conhecer também o comportamento térmico do molde durante o mesmo período. E para isso faz-se necessário resolver o problema da transmissão de calor no interior e contornos do molde, como foi feito para o metal.

##### 1. Equacionamento da posição 10

O molde, durante a solidificação, não passa por mudança de estado, ou seja, fusão. Portanto na equação genérica da condução de calor o termo  $Q$  é zero. Então a equação geral reduz-se a (50):

$$\nabla[K_m(T) \cdot \nabla T] = d_m \cdot C_m(T) \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (4.20)$$

Da mesma forma que para o metal, as propriedades físicas do molde (condutibilidade térmica ( $K_m$ ), densidade ( $d_m$ ) e capacidade calorífica ( $C_m$ )) são tomadas constantes.

Como o molde é cilíndrico também será adotado coordenadas cilíndricas, com fluxo de calor radial e axial. Não se considerará fluxo angular pelas mesmas razões citadas para o caso do lingote.

Então a equação de condução de calor fica:

$$d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = K_m \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.21)$$

Para o modelo matemático aplicado à lingoteira também adotou-se o método de diferenças finitas explícito:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T'_m(i,j) - T_m(i,j)}{\Delta t} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_m(i,j+1) - 2T_m(i,j) + T_m(i,j-1)}{(-\Delta r)^2} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_m(i, j+1) - T_m(i, j-1)}{-2\Delta r} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_m(i+1, j) - 2T_m(i, j) + T_m(i-1, j)}{\Delta z^2} \quad (4.25)$$

Fazendo:  $\Delta z = \Delta r$ , tem-se a equação de condução de calor no interior do molde:

$$\begin{aligned} d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = K_m & \left[ \frac{T_m(i, j+1) - 2T_m(i, j) + T_m(i, j-1)}{\Delta r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{T_m(i, j+1)}{2r_i \cdot \Delta r} + \frac{T_m(i, j-1)}{2r_i \cdot \Delta r} + \frac{T_m(i+1, j) - 2T_m(i, j) + T_m(i-1, j)}{\Delta r^2} \right] \\ T_m^t(i, j) = F_o & \left[ \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_i}\right) T_m(i, j+1) + \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_i}\right) T_m(i, j-1) + T_m(i+1, j) + \right. \\ & \left. + T_m(i-1, j) + \left(\frac{1-4F_o}{F_o}\right) \cdot T_m(i, j) \right] \quad (4.26) \end{aligned}$$

onde:

$T_m^t(i, j) \rightarrow$  temperatura da malha  $(i, j)$  do molde no instante em questão.

$T_m(i, j) \rightarrow$  temperatura da malha  $(i, j)$  do molde no instante anterior.

$F_o \rightarrow$  no. de Fourier.

$$F_o = \frac{K_m}{d_m \cdot C_m} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

$r_i \rightarrow$  raio do cilindro, para a malha em questão.

## 2. Equacionamento da posição 11:

Esta equação como todas as restantes do molde foram deduzidas através balanço de energia, considerando-se o estado transiente de fluxo de calor. Por simplificação, considerou-se na interface uma superfície plana separando os dois meios.

O esquema de transferência de calor para a interface molde/metal:

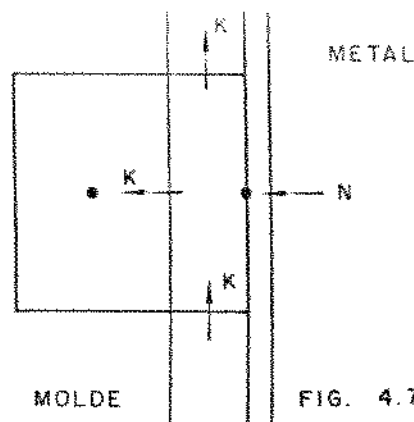


FIG. 4.7

O balanço de energia:

$$\begin{aligned}
 -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K_m \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + h \cdot A \cdot [T(i, 1) - T_m(i, N_m)] &= \frac{m}{2} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\
 -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(i, N_m) - T_m(i+1, N_m)]}{\Delta r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(i-1, N_m) - T_m(i, N_m)]}{\Delta r} \\
 + K_m \cdot A \cdot \frac{[T_m(i, N_m-1) - T_m(i, N_m)]}{\Delta r} + h \cdot A \cdot [T(i, 1) - T_m(i, N_m)] &= \\
 &= \frac{A}{2} \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T'_m(i, N_m) &= 2 \cdot F_o \cdot [1/2 \cdot T_m(i+1, N_m) + 1/2 \cdot T_m(i-1, N_m) + T_m(i, N_m-1) + \\
 &+ Bim \cdot T(i, 1) + (\frac{1}{2F_o} - 2 - Bim) T_m(i, N_m)] \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

onde:

$Bim \rightarrow$  no. de Biot para o molde.

$$Bim = \frac{h \cdot \Delta r}{K_m}$$

### § Equacionamento da posição 12:

Neste item será desenvolvida a equação de fluxo de calor para malhas da superfície externa do molde.

Considerou-se que, para facilidade de cálculos, a transferência de calor do molde para a atmosfera se dá somente por convecção natural, pois a temperatura máxima que alcança a sua parede externa ( $\cong 600^\circ C$ ) não foi considerada suficiente para que a radiação fosse preponderante.

Esta simplificação atuou no sentido de facilitar os cálculos.

O esquema representativo da transmissão de calor:

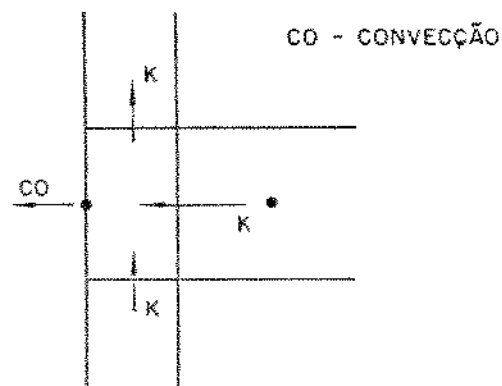


FIG. 4.8

O balanço de energia:

$$\begin{aligned}
 & -K_m \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - h_{atm} \cdot A \cdot [T_m(i, 1) - T_A] = \\
 & \quad = \frac{m}{2} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\
 & -K_m \cdot A \cdot \frac{[T_m(i, 1) - T_m(i, 2)]}{\Delta r} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(i, 1) - T_m(i+1, 1)]}{\Delta r} + K_m \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(i-1, 1) - T_m(i, 1)]}{\Delta r} - h_{atm} \cdot a \cdot [T_m(i, 1) - T_A] = \frac{A}{2} \cdot \\
 & \quad \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\
 & T'_m(i, 1) = 2 \cdot F_o \cdot [T_m(i, 2) + 1/2 \cdot T_m(i+1, 1) + 1/2 \cdot \\
 & \quad \cdot T_m(i-1, 1) + Bimat \cdot T_A + \\
 & \quad + (\frac{1}{2F_o} - 2 - Bimat) \cdot T_m(i, 1)] \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

onde:

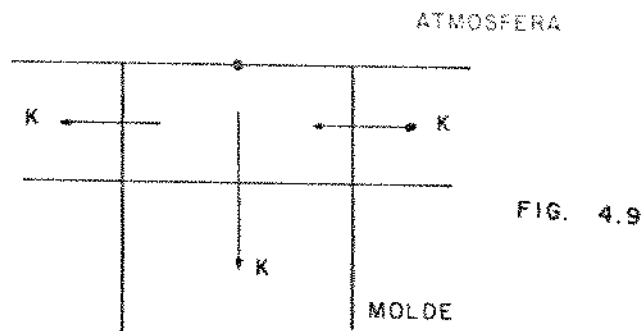
$$Bimat = \frac{h_{atm} \cdot \Delta r}{K_m}$$

$h_{atm} \rightarrow$  coef. de transferência de calor convectivo na interface molde/atmosfera.

#### 4. Equacionamento da posição 18:

Na dedução da equação de fluxo térmico, para a região superficial superior do molde, decidiu-se desconsiderar qualquer troca térmica com a atmosfera. Isto porque, a espessura da lingoteira é pequena, comparada com o diâmetro do lingote, e supôs-se que o calor perdido nesta superfície pode ser desprezado.

Esquema de fluxo de calor:



O balanço de energia:

$$\begin{aligned}
 & -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + K_m \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{m}{2} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\
 & -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(1, j) - T_m(1, j+1)]}{\Delta r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \\
 & \frac{[T_m(1, j-1) - T_m(1, j)]}{\Delta r} + K_m \cdot A \cdot \frac{[T_m(2, j) - T_m(1, j)]}{\Delta r} = \\
 & = \frac{A}{2} \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\
 & T'_m(1, j) = 2 \cdot F_o \cdot [T_m(2, j) + 1/2 T_m(1, j+1) + 1/2 T_m(1, j-1) + \\
 & + (\frac{1}{2F_o} - 2) T_m(1, j)]. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

5. *Equacionamento da posição 14:*

Equação do fluxo de calor do canto superior interno de lingoteira.

Esquema:

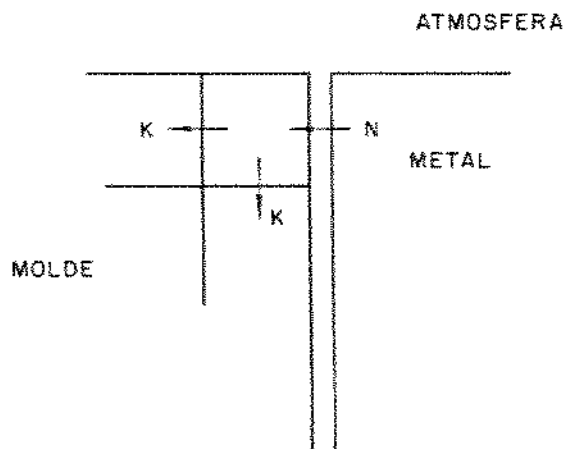


FIG. 4.10

Balanço energético:

$$+K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T_m(1, 1) - T_m(1, N_m)] = \frac{m}{4} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
& + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(1, N_m - 1) - T_m(1, N_m)]}{\Delta r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(2, N_m) - T_m(1, N_m)]}{\Delta r} + \\
& + h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(1, 1) - T_m(1, N_m)] = \\
& = \frac{A}{4} \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_m'(1, N_m) = 4 \cdot F_o [1/2 T_m(1, N_m - 1) + 1/2 \cdot T_m(2, N_m) + \frac{Bi_m}{2} T(1, 1) + \\
+ (\frac{1}{4F_o} - 1 - \frac{Bi_m}{2}) T_m(1, N_m)] \quad (4.30)
\end{aligned}$$

#### 6. Equacionamento da posição 15:

O esquema representativo do fluxo de calor na malha (1,1), ou seja, malha do canto superior externo do molde, está colocado abaixo:

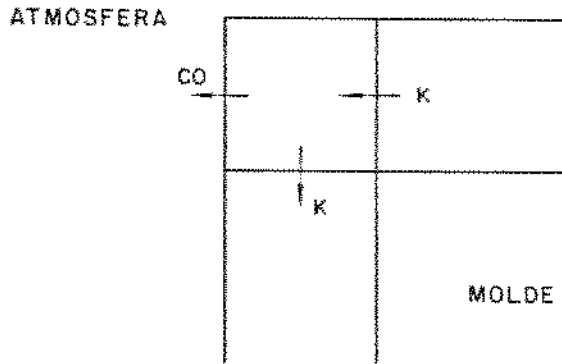


FIG. 4.11

Balanco energético:

$$-K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - h_{atm} \cdot \frac{A}{2} [T_m(1, 1) - T_A] = \frac{m}{4} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot$$

O desenvolvimento da equação:

$$-K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(1, 1) - T_m(1, 2)]}{\Delta r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot$$

$$\frac{[T_m(2,1) - T_m(1,1)]}{\Delta r} - h_{atm} \cdot \frac{A}{2} \cdot [T_m(1,1) - T_A] =$$

$$= \frac{A}{4} \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

$$T'_m(1,1) = 4\dot{F}_o \cdot [1/2 \cdot T_m(1,2) + 1/2 T_m(2,1) + \frac{Bimat}{2} \cdot T_A +$$

$$+ (\frac{1}{4F_o} - 1 - 1/2 Bimat) \cdot T_m(1,1)] \quad (4.31)$$

7. *Equacionamento da posição 16:*

Nas deduções das equações 16 a 18, considerou-se que a base está isolada inferiormente. Isto é justificável pela razão que a base está em contato com o solo, e a transmissão de calor é muito mais significativa pelo próprio molde que pelo solo.

Esquema:

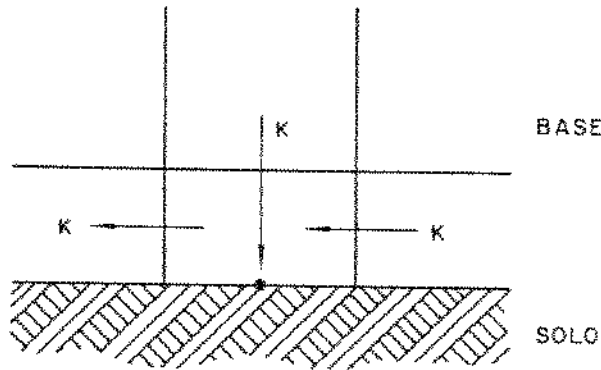


FIG. 4.12

O balanço de energia:

$$-K_m \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{m}{2} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

A dedução da equação de determinação da temperatura do molde nesta região está abaixo:



$$\begin{aligned}
& -K_m \cdot A \cdot \frac{[T_m(Mm, j) - T_m(Mm - 1, j)]}{\Delta r} - K_m \cdot \\
& \quad \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(Mm, j) - T_m(Mm, j + 1)]}{\Delta r} \\
& + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(Mm, j - 1) - T_m(Mm, j)]}{\Delta r} = \frac{A}{2} \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
T_m'(Mm, j) = 2 \cdot F_o \cdot [T_m(Mm - 1, j) + 1/2 \cdot T_m(Mm, j + 1) + 1/2 T_m(Mm, j - 1) + \\
+ (\frac{1}{2F_o} - 2) T_m(Mm, j)]. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$Mm \rightarrow$  índice que indica a última linha de malhas do molde, de cima para baixo.

#### 8. Equacionamento da posição 17:

Devido 'a simetria, para a malha central:

$$\begin{aligned}
T_m(Mm, j + 1) &= T_m(Mm, j - 1) \\
T_m'(Mm, j) &= 2F_o [T_m(Mm - 1, j) + T_m(Mm, j - 1) + \\
&+ (\frac{1}{2F_o} - 2) T_m(Mm, j)] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

#### 9. Equacionamento da posição 18:

O balanço energético e dedução da equação de determinação da temperatura na malha do canto inferior externo está a seguir:

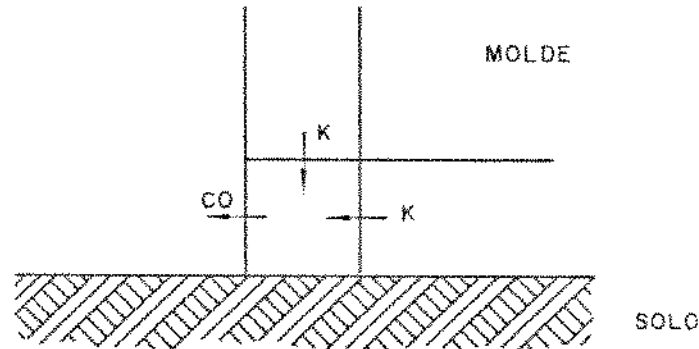


FIG. 4.13

$$\begin{aligned}
& -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - h_{atm} \cdot \frac{A}{2} \cdot [T_m(Mm, 1) - T_A] = \frac{m}{4} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\
& -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(Mm, 1) - T_m(Mm, 2)]}{\Delta r} - K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(Mm, 1) - T_m(Mm - 1, 1)]}{\Delta r} \\
& - h_{atm} \cdot \frac{A}{2} \cdot [T_m(mm, 1) - T_A] = \frac{A}{4} \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
T'_m(Mm, 1) = & 4 \cdot F_o \cdot [1/2 T_m(Mm, 2) + 1/2 \cdot T_m(Mm - 1, 1) + \frac{Bimat}{2} \cdot T_A + \\
& + (1/4 F_o - 1 - \frac{Bimat}{2}) T_m(Mm, 1)].
\end{aligned}$$

10. Equacionamento da posição 19:

Equação de fluxo de calor para a malha em contato com o canto inferior do lingote.

Esquema do fluxo de calor:

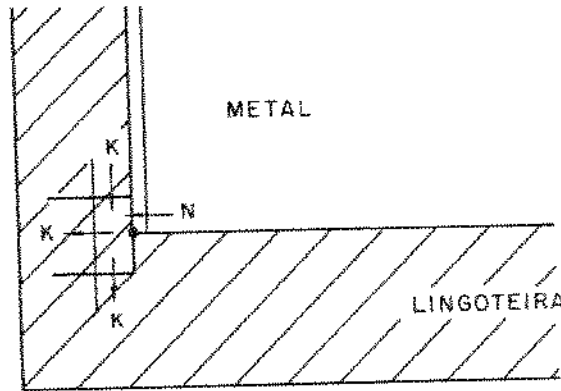


FIG. 4.14

Balanco de energia:

$$-K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + K_m \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(M, 1) - T_m(M, N_m)] = \frac{m}{2} \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
& -K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(M, N_m) - T_m(M-1, N_m)]}{\Delta r} + K_m \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{[T_m(M+1, N_m) - T_m(M, N_m)]}{\Delta r} \\
& + K_m \cdot A \cdot \frac{[T_m(M, N_m-1) - T_m(M, N_m)]}{\Delta r} + h \cdot \frac{A}{2} \cdot [T(M, 1) - T_m(M, N_m)] = \\
& = \frac{A}{2} \cdot \Delta r \cdot d_m \cdot C_m \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$T'_m(M, N_m) = 2F_o[1/2T_m(M-1, N_m) + 1/2T_m(M+1, N_m) + T_m(M, N_m-1)] + \frac{Bim}{2}.$$

$$T(M, 1) + \left[ \left( \frac{1}{2F_o} - 2 - \frac{Bim}{2} \right) T_m(M, N_m) \right] \quad (4.35)$$

Sendo assim, para descrever o comportamento térmico do lingote e lingoteira, a cada instante de tempo durante a solidificação e resfriamento do metal, para o sistema cilíndrico metal/molde, com fluxo de calor bidimensional, utilizando-se o método de diferenças finitas explícito, são necessárias 19 equações.

## 5. DESCRIÇÃO DA ETAPA EXPERIMENTAL

A etapa experimental deste trabalho tem por objetivo testar o modelo computacional desenvolvido para simulação da solidificação do aço médio-carbono em molde permanente. Este teste foi realizado através da comparação de perfis térmicos levantados termometricamente durante a solidificação de um lingote de pequenas dimensões em molde de ferro fundido, perfis estes levantados para partes interiores do lingote e da lingoteira, com resultados obtidos com a aplicação do modelo matemático ao sistema metal/molde, para os mesmos pontos interiores do lingote e da lingoteira. Por meio desse teste, procurou-se visualizar a aproximação relativa dos resultados obtidos através da simulação com os resultados obtidos experimentalmente. E através desta aproximação relativa, definir modificações no programa no sentido que o modelo apresente resultados mais próximos possíveis da realidade. Por isso, a fase experimental deste trabalho foi feita em etapas, onde, a cada levantamento de dados, comparou-se e ajustou-se o modelo, a fim de depurá-lo. O depuramento ou melhoria deste modelo fez-se necessária devido à sua posterior aplicação para sistemas metal/molde em escala industrial. Os resultados obtidos, bem como a discussão dos mesmos, estão no capítulo 6.

Como já foi dito, a geometria do sistema estudado é cilíndrica, e por isso o molde utilizado possui geometria cilíndrica. O mesmo foi fabricado no setor de fundição da aciaria da Eletrometal. O material utilizado foi ferro fundido. Ele apresenta uma leve conicidade, para a facilitação da desmoldagem do lingote. A placa de base utilizada tem geometria retangular e também é de ferro fundido. As dimensões do molde e placa de base são mostradas na *(figura 5.1)*. A parte interna do molde foi jateada, esmerilhada e lixada, antes da sua utilização, obtendo-se com este tratamento um acabamento superficial regular. A superfície da placa de base que entrou em contato com o metal também foi jateada, esmerilhada e lixada. A *(figura 5.2)* mostra a lingoteira e placa de base.

O equipamento utilizado para realizar a fusão e vazamento do aço foi um forno VIM da Leybold-Heraeus, com capacidade de 7 kg, do Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento da Eletrometal. Este forno possui um cadinho basculante de dimensões aproximadas de 80 mm de diâmetro por 200 mm de altura. O cadinho, envolto por um bobina de indução, está

montado dentro da câmara de vácuo do forno, onde há espaço livre para a montagem da lingoteira (*figura 5.3*). O sistema de potência, fabricado pela EMA, garante ao forno uma frequência máxima de 10 KHz, uma voltagem máxima de 300 V e uma potência máxima possível de 10 KW (*figura 5.4*). A temperatura do metal líquido dentro do cadinho, é tomada por um termopar móvel do tipo S (Platina Rhodio 10% - Platina), instalado dentro da câmara do forno e protegido por um tubo de quartzo de 105 mm de comprimento por 8 mm de diâmetro, ligado a um registrador digital.

As temperaturas em partes interiores do molde e do metal foram lidas utilizando-se termopares tipo K (Chromel-Alumel) e tipo S (Platina Rhodio 10% - Platina), respectivamente. No interior do lingote, tomou-se a temperatura em dois pontos distintos, à mesma altura: no centro do lingote e à meia distância entre o centro e a superfície do lingote (*figura 5.5*). Os termopares utilizados na leitura das temperaturas no interior do metal têm 0,5 mm de diâmetro e foram protegidos da corrosão imposta pelo metal líquido por um tubo de quartzo de 150 mm de comprimento por 6 mm de diâmetro, tubos estes sustentados por um suporte apoiado nas bordas superiores da lingoteira, conforme mostra a *figura 5.5*. Para evitar a descentralização do suporte dos termopares na montagem da lingoteira, foram feitos furos-guias neste suporte, sendo que na montagem, os mesmos ficaram coincidentes com marcas feitas previamente na borda da lingoteira, indicando assim a posição correta do suporte. O suporte foi feito com uma espessura de 25 mm, que lhe garantiu um peso suficiente para que não se movimentasse devido as correntes convectivas do metal líquido, logo após o vazamento. A fixação do tubo com o termopar no suporte foi feita através do uso de massa plástica. Com relação ao molde, a tomada de temperaturas foi à meia distância entre a sua superfície exterior e interior e a meia altura. O termopar usado foi um com proteção mineral, com um diâmetro de aproximadamente 1 mm. O esquema da tomada de temperaturas no molde está na *figura 5.6*. Os termopares do metal e do molde foram ligados, através dos devidos cabos de compensação, a registradores CR 650 - Recorder, de um canal, fabricado pela JJ Instruments. O registro foi feito por meios gráficos, e a conversão das milivoltagens registradas para temperaturas em °C foi efetuada seguindo tabelas padronizados, levando-se em consideração a temperatura ambiente. Tanto para o registro das temperaturas do molde quanto do metal, adotou-se como fundo de escala 40 mv. A velocidade de

registro adotada foi de 10 mm/s. Em cada etapa experimental, ao montar-se o sistema de termometria, os registradores foram calibrados. A *figura 5.7* mostra os registradores utilizados.

O aço estudado neste trabalho foi o 1045 (com designação E-1045, da Eletrometal). Os tarugos carregados no cadinho para fusão tinham 230 mm de comprimento, provenientes dos canais de fundição, com diâmetro aproximado de 70 mm. Estes canais foram provenientes da corrida 205.140, da aciaria da Eletrometal e a sua composição química aproximada é:

	<i>C</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>Si</i>	<i>Mn</i>	<i>Al</i>	<i>Cr</i>	<i>Mo</i>	<i>Ni</i>	<i>V</i>	<i>Cu</i>
%	0.4779	0.008	0.010	0.27	0.90	0.03	0.18	0.01	0.08	0.05	0.06

cujas temperaturas líquidas e sólidas podem ser calculadas por (43):

$$T_{liq} = 1537 - 88(\%C) - 25(\%S) - 5(\%Cu) - 8(\%Si) - 5(\%Mn) - 4(\%Ni) - 1.5(\%Cr) - 18(\%Ti) - 2(\%V) - 30(\%P) \cong 1487^{\circ}C \quad (5.1)$$

$$T_{sol} = 1535 - 200(\%C) - 12.3(\%Si) - 6.8(\%Mn) - 124.5(\%P) - 183.9(\%S) - 4.3(\%Ni) - 1.4(\%Cr) - 4.1(\%Al) \cong 1427^{\circ}C \quad (5.2)$$

A fusão foi realizada à pressão atmosférica e não sob vácuo, pois não houve necessidade de proteção à oxidação, já que a ocorrência deste fenômeno praticamente não influencia no tipo de dado que se quis obter.

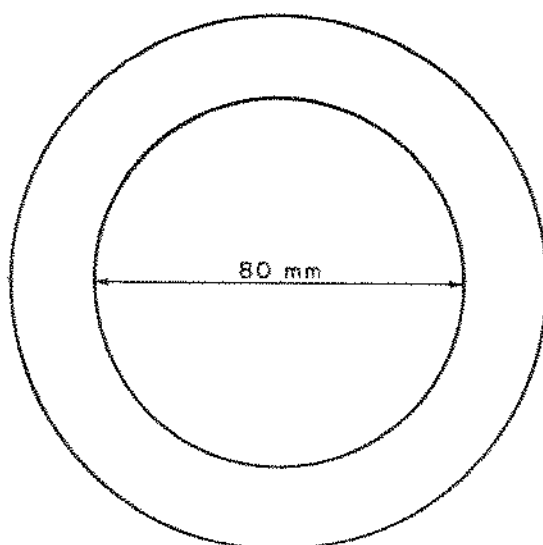
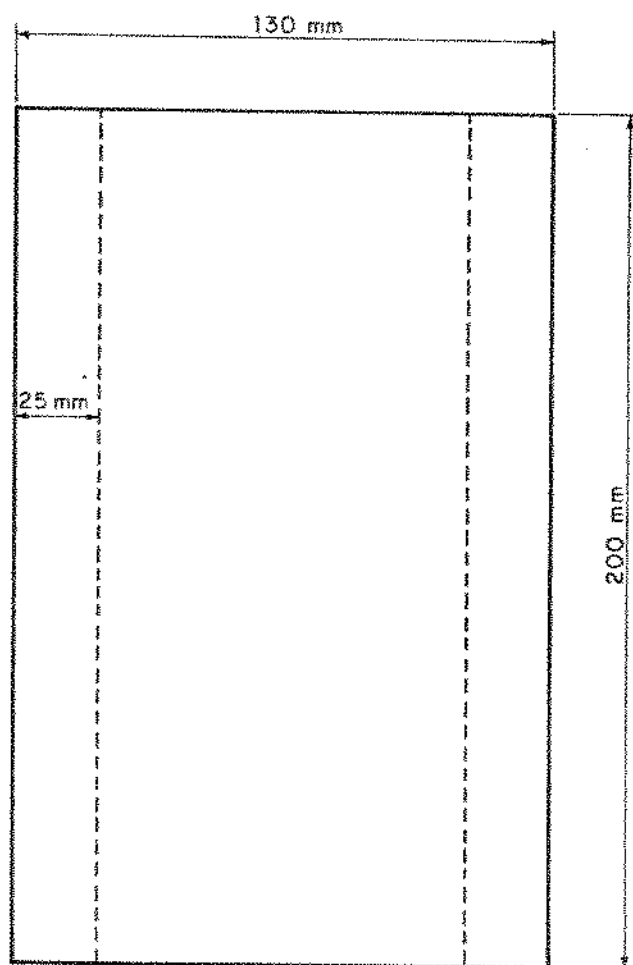


FIG. 5.1 - A

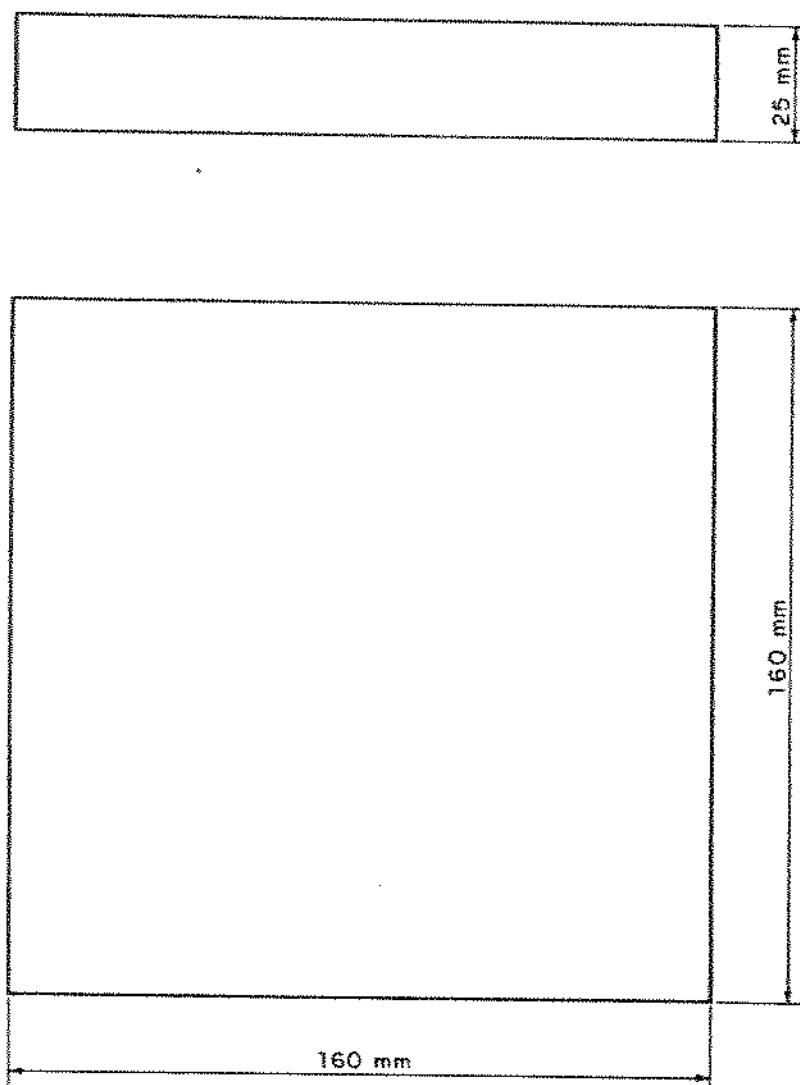


FIG. 5.1 - B



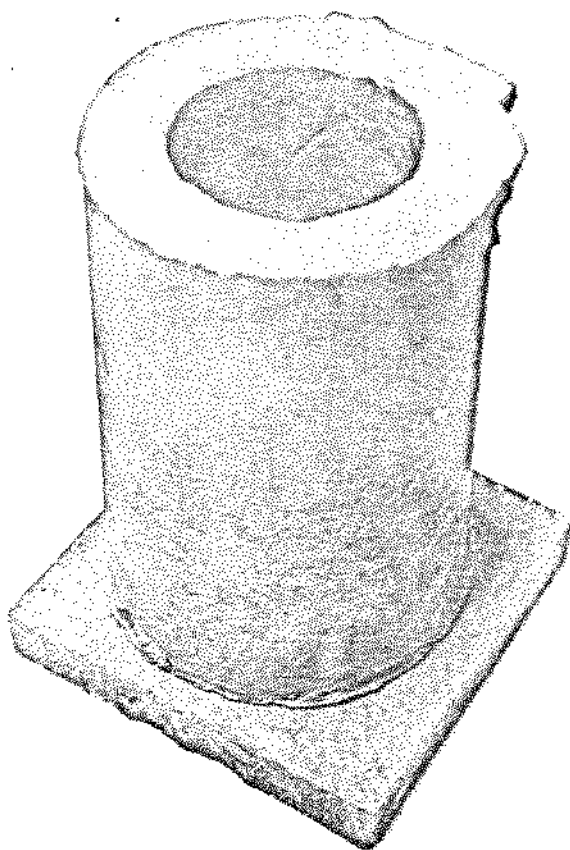


FIG. 5.2

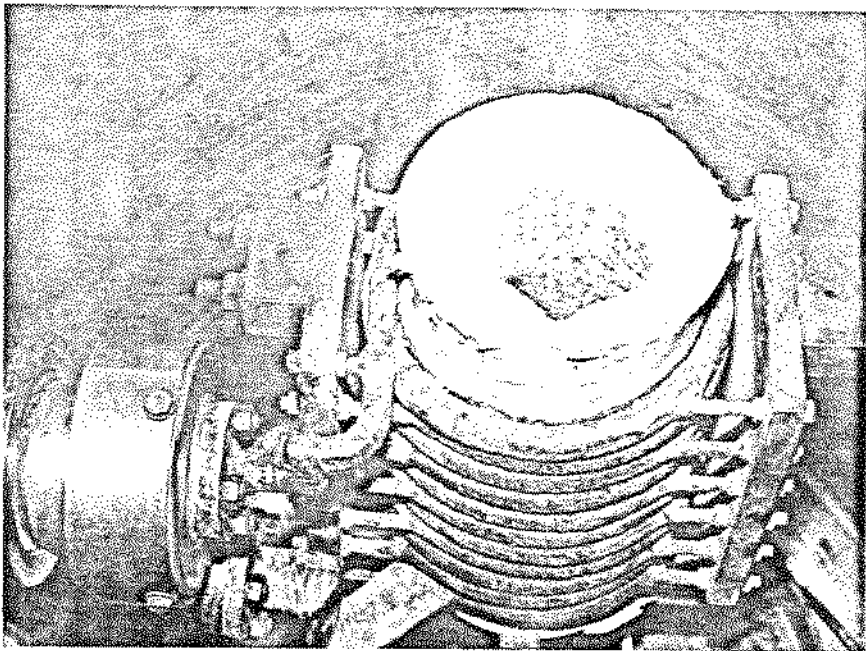


FIG. 5.3

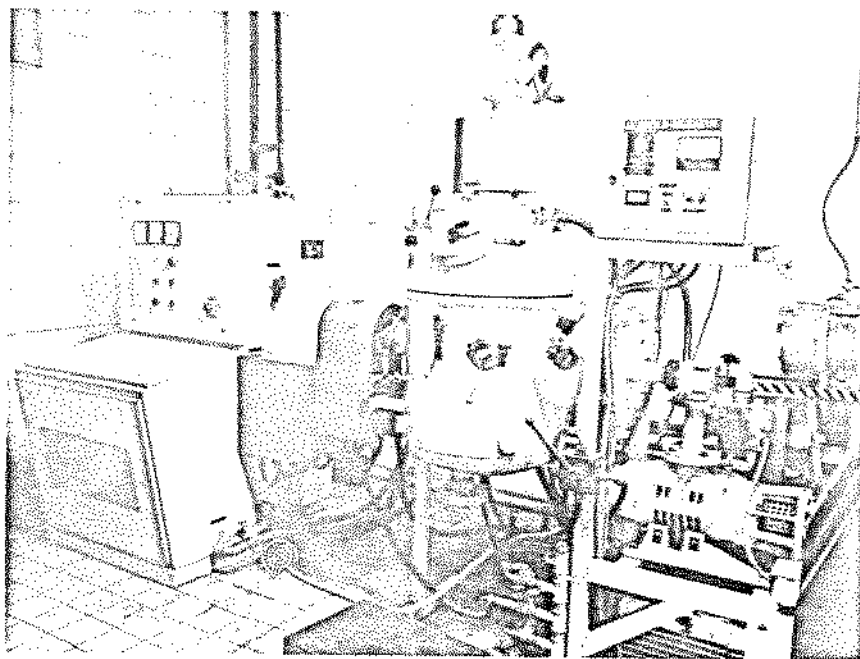


FIG. 5.4

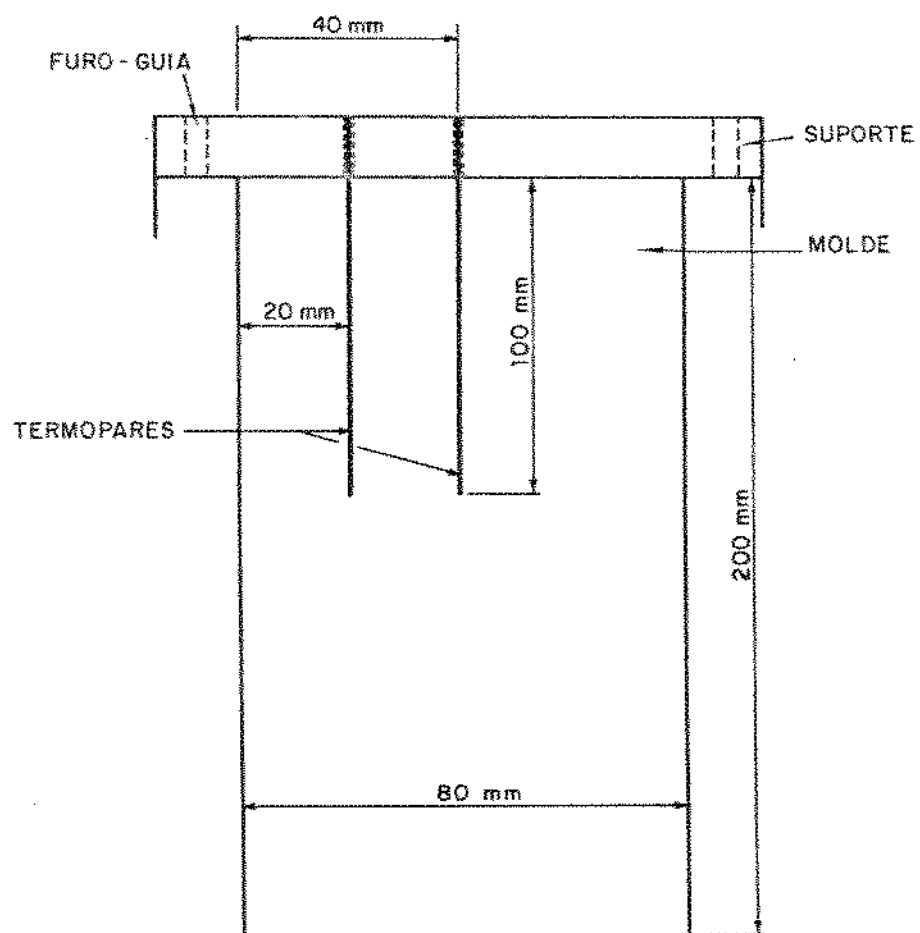


FIG. 5.5

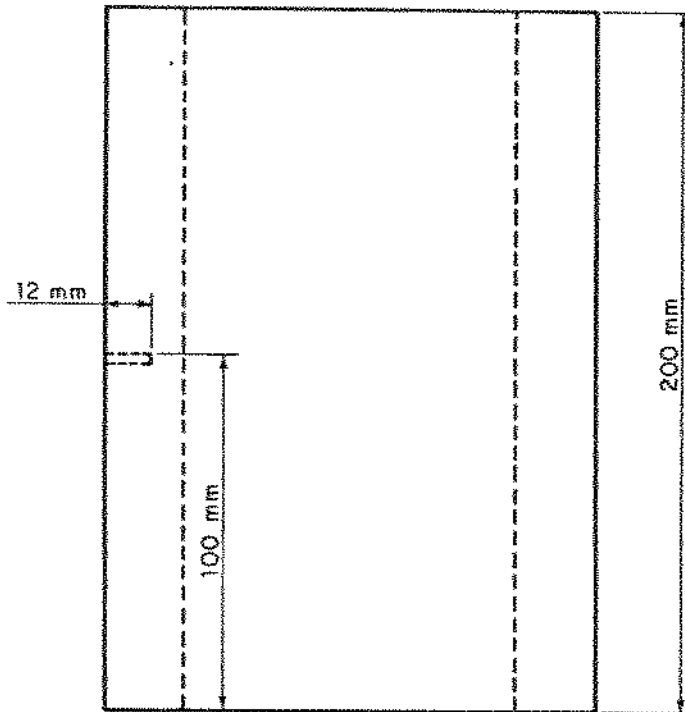


FIG. 5.6

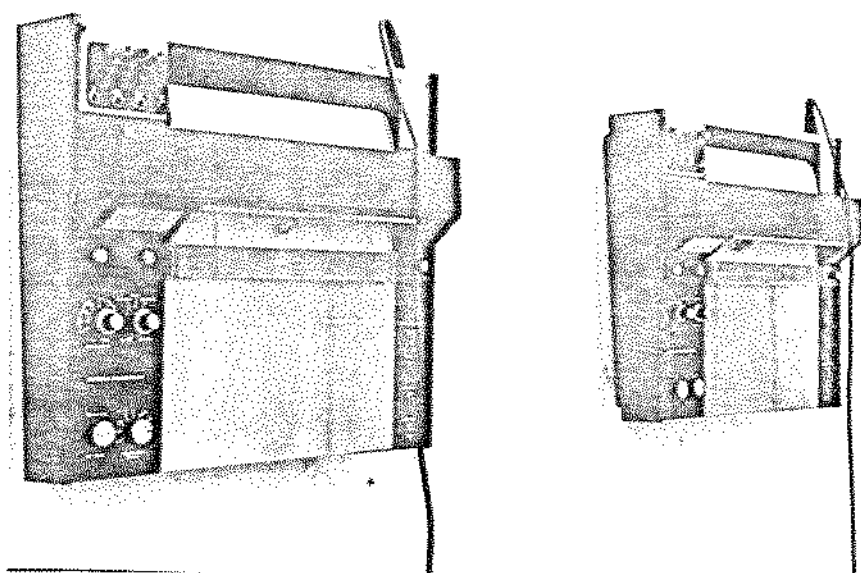


FIG. 5.7

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos nas experiências realizadas no laboratório físico da Eletrometal e resultados obtidos através da aplicação do modelo desenvolvido. Os resultados obtidos experimentalmente foram tomados como referencial para a avaliação, comprovação e melhoria do modelo matemático desenvolvido para a simulação da solidificação de aço médio - carbono em lingoteiras cilíndricas. Sendo assim, a partir de um depuramento do modelo, pôde-se obter resultados de perfis térmicos, razoavelmente ajustados aos obtidos experimentalmente.

Uma das maiores dificuldades encontradas no desenvolvimento do modelo computacional foi a inexistência de dados referentes às propriedades do sistema metal/molde, tais como a variação do coeficiente de transferência de calor na interface lingote - lingoteira, variação de condutibilidade e capacidade calorífica. Um outro problema, no que tange aos dados bibliográficos, foi a falta de concordância quanto aos valores das propriedades físicas do aço e ferro fundido, apresentados nos diversos trabalhos consultados. Esta ausência de concordância, levou a adoção dos resultados experimentais como o ponto de convergência para a escolha dos valores de propriedades físicas.

Os valores das propriedades físicas assumidas para execução do programa estão apresentados na tabela abaixo (19, 22,23, 28, 43):

	Cond.Térmica J/m.s.K.	Densidade Kg/m <sup>3</sup>	Calor Específico J/Kg.K
aço-carbono	30.0	7400.0	682.0
Ferro fundido	46.0	7000.0	840.0

Tabela 1: Tabela 6.1

De acordo com as equações 5.1 e 5.2, as temperaturas líquidas e sólidas da liga são 1487°C e 1427°C respectivamente. Mas na contabilização da liberação do calor latente durante a solidificação utilizou-se um conjunto de curvas de variação de Entalpia com temperatura de um aço com 0,6% C, pois foi o único conjunto de dados encontrado na literatura, assim os valores das temperaturas líquidas e sólidas foram ligeiramente alterados

(1490°C e 1415°C respectivamente) para ficarem compatíveis com dados de entalpia X temperatura.

A temperatura de vazamento do aço foi de 1600°C, mas para levar em conta perdas térmicas durante o vazamento, o valor de referência da temperatura inicial do metal, para a execução do modelo foi de 1550°C.

A temperatura inicial do molde foi determinada pela leitura direta através do termopar. Isto foi necessário devido ao fato de a lingoteira ter sido montada dentro da câmara do forno VIM utilizado e por isso estar sujeito a um pré-aquecimento por causa do calor proveniente do cadinho. A temperatura inicial média do molde, no momento do vazamento, considerada como dado para o programa foi de 182°C. A temperatura ambiente média adotada foi de 35°C.

Na aplicação do modelo para a simulação da solidificação do metal em geometria cilíndrica, dividiu-se tanto o lingote quanto o molde em malhas quadradas de lado igual a 2mm. Sendo assim, para as dimensões do lingote, lingoteira e base apresentados no capítulo de descrição da etapa experimental, considerando o tamanho da malha em questão, trabalhou-se na simulação numérica com 41 malhas horizontais e 101 malhas verticais para o lingote, 13 malhas horizontais e 105 malhas verticais para a parede da lingoteira e 65 malhas horizontais e 11 malhas verticais para a base do molde.

Serão apresentados, a seguir, os resultados experimentais obtidos durante a solidificação dos lingotes de aço em lingoteiras cilíndricas de ferro fundido.

A figura 6.1 mostra dois perfis térmicos levantados para um mesmo ponto na lingoteira, situado a meia altura e a meia espessura da parede da mesma, conforme figura 5.6. Estes perfis térmicos foram levantados em corridas distintas (corridas A e B).

A diferença máxima entre as curvas obtidas experimentalmente para o molde é de aproximadamente 40°C, o que significa uma dispersão máxima de aproximadamente 5%, em relação à temperatura média neste momento.

Nota-se nas curvas uma tendência de elevação mais intensa da temperatura do molde até aproximadamente 70 segundos a partir do vazamento, e então uma desaceleração contínua da elevação. Esta variação de inclinação da curva pode ser explicada devido a uma tendência de equalização térmica entre o metal líquido e o molde no início do processo, somado à liberação



do calor latente durante a solidificação e um elevado coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde, fazendo com que a temperatura do molde cresça muito rapidamente. Com a diminuição do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde causada pela contração do lingote e expansão do molde, avanço e término da solidificação no interior do lingote e maior homogeneização térmica do molde, o acréscimo de temperatura do molde desacelera-se.

Pode-se ver que são decorridas aproximadamente 10 segundos até que a temperatura no ponto onde levantou-se esses perfis térmicos comece a subir consideravelmente, após o vazamento do metal.

A figura 6.2 mostra o perfil térmico médio obtido a partir de três vazamentos distintos, para o ponto a meia altura e  $1/4$  de diâmetro (ou a meia distância entre o centro e a superfície) do lingote, conforme figura 5.5. Acompanhando o perfil térmico médio para o ponto em questão estão algumas das temperaturas determinadas experimentalmente (corridas B, C e D), o que nos dá uma idéia da ordem de grandeza da dispersão dos resultados. A diferença máxima observada entre a curva média e os resultados experimentais é de 3,5%.

Vê-se que até 30 segundos não está mostrado o registro de temperatura. Isto porque, até este tempo registrou-se um aumento de temperatura no ponto em questão. Este aumento de temperatura, que vai da temperatura do meio antes do vazamento até à temperatura do metal líquido 30 segundos após o vazamento, está relacionado com a equalização térmica entre o conjunto tubo de quartzo de proteção/termopar e o metal líquido. Por este motivo não tem sentido apresentar-se a curva registrada até 30 segundos, pois a mesma está relacionada com uma limitação do sistema termométrico e não com o processo de resfriamento e solidificação do metal. Este mesmo critério é aplicado para o registro do perfil térmico tomado no meio do lingote, que será mostrado mais adiante.

Pode-se notar que o perfil térmico não apresenta uma mudança brusca de inclinação no início, durante ou após o térmico da solidificação. Isto se explica pelo fato que no ponto colocado à meia distância do centro e superfície do lingote, tem-se à frente dele (em direção ao centro) a continuação da solidificação e portanto liberação do calor latente o que amortiza a queda de temperatura neste ponto.

A figura 6.3 é uma representação, em maior escala, da região do perfil

térmico, tomado no ponto a  $1/4$  do centro do lingote, onde ocorre a solidificação. Esta região ou porção da curva foi enfocada de tal maneira a fim de que se possa, com uma maior nitidez, tentar definir o início e fim da solidificação, determinando assim o tempo total gasto para a liga se solidificar, nesse ponto. Mas pode-se perceber que não há uma mudança muito brusca na inclinação da curva, ficando portanto muito difícil definir com a exatidão os pontos de início e fim da solidificação, sendo portanto a determinação destes pontos aproximada. Posto isto, pode-se dizer que a solidificação do aço 1045, no ponto a  $1/4$  do centro do lingote inicia-se em torno de 90 segundos e termina com 131 segundos após o vazamento do metal, sendo portanto o tempo total de solidificação, para este ponto, de aproximadamente 41 segundos.

A figura 6.4 mostra o perfil térmico médio tomado, durante a solidificação e resfriamento do metal, no ponto central do lingote, ou seja, à meia altura e meio diâmetro do lingote, conforme fig. 5.5.

Como mostrado na figura 6.2, juntamente com o perfil térmico médio, estão representados também algumas das temperaturas determinadas experimentalmente, as quais definiram o perfil médio (corridas A, C e D). As diferenças entre estas temperaturas são mais acentuadas no período do processo onde o metal permanece em um patamar de temperatura antes de iniciar-se a solidificação. Após o início da solidificação, a dispersão dos pontos se torna menor. A diferença máxima entre temperatura determinada experimentalmente e a curva média é de 2,3%, sendo portanto da mesma ordem de grandeza da dispersão no caso do perfil levantado no ponto a  $1/4$  do centro.

Como já foi colocado acima, o registro também é mostrado somente a partir de 30 segundos após o vazamento.

No caso do perfil térmico referente ao resfriamento e solidificação do aço, no centro do lingote, nota-se uma mudança mais nítida na inclinação da curva, que no caso apresentado na fig. 6.2, no término da solidificação. Isto se dá devido ao fato que a região central do lingote é uma das últimas porções do metal a se solidificarem, não havendo portanto um reaquecimento devido à transferência do calor latente liberado em outras regiões.

A figura 6.5 tem o mesmo objetivo da figura 6.3, ou seja, através do uso de uma escala maior, tentar determinar aproximadamente as mudanças de inclinação do perfil que revelem o ponto inicial e final da solidificação,

obtendo assim o tempo aproximado de solidificação do aço no centro do lingote. Então, através da figura 6.5, pode-se dizer que a solidificação no centro do lingote inicia-se a 141 segundos e termina a aproximadamente 165 segundos após o vazamento do metal líquido, o que indica um tempo aproximado de solidificação de 24 segundos.

Os resultados experimentais permitem algumas observações. A primeira é que as dispersões entre as temperaturas levantadas experimentalmente tanto para o molde quanto para o lingote (temperaturas tomadas no centro e a 1/4 do centro) foram da mesma ordem de grandeza, ou seja, de 2 a 5%, o que parece representar uma boa aproximação entre os resultados obtidos experimentalmente. Isto indica boa repetitividade experimental do sistema termométrico utilizado. Mas esta dispersão de 2 a 5% pode talvez ser explicada por alguma imprecisão no posicionamento dos termopares, imprecisão ou erro de calibração dos registradores de temperatura, tanto do cadinho quanto do molde e da lingoteira ou erro na aferição dos termopares utilizados, erros e imprecisões estas que não teriam sido detectados durante a realização das experiências. Deve-se comentar também que, segundo os dados experimentais mostrados na figura 6.3 e 6.5, nota-se que o tempo de solidificação no centro foi menor que 1/4 de centro do lingote, o que é um resultado razoável, pois como já foi dito, a solidificação do metal a 1/4 da região central se dá com a presença do calor gerado à sua frente (em direção ao centro) devido à continuação da solidificação, o que desacelera o resfriamento neste ponto, o que não ocorre nas regiões centrais do lingote.

A seguir serão mostrados e perfis térmicos obtidos através do uso do modelo computacional comparados com as curvas experimentais, tomando-se os mesmos pontos do molde e do lingote. Os valores do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde foram variados, a fim de se determinar qual ou quais valores deste coeficiente produzem uma melhor aproximação entre os resultados calculados e experimentais.

As figuras 6.6 a 6.8 mostram os perfis térmicos calculados juntamente com os experimentais, para um coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde igual a  $1500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Na figura 6.6 nota-se que o perfil térmico calculado para o molde está bem acima dos experimentais, indicando um aquecimento bem mais rápido que o real. As figuras 6.7 e 6.8 mostram que a solidificação calculada do metal, a 1/4 do centro e no centro do lingote, é mais rápida que o indicado através das curvas experi-

mentais. Esses resultados nos levam a concluir que o valor do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde deve ser inferior a  $1500 \text{ W/m}^2.\text{K}$ .

As figuras 6.9 a 6.11 mostram os perfis térmicos da evolução da temperatura durante a solidificação para o molde e lingote, com o coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde igual a  $800 \text{ W/m}^2.\text{K}$ . Nota-se, pela figura 6.9, que o aquecimento do molde não foi tão intenso, para este valor de  $h$ , quanto para  $h$  igual a  $1500 \text{ W/m}^2.\text{K}$ , mas ainda assim, o perfil se mostra acima dos perfis térmicos obtidos experimentalmente. Nas figuras 6.10 e 6.11 também confirma-se a tendência de a solidificação do lingote não ocorrer tão rapidamente quanto para  $h$  igual a  $1500 \text{ W/m}^2.\text{K}$ , mas ainda assim, mais rápido do que o real.

Para o coeficiente de transferência de calor igual a  $600 \text{ W/m}^2.\text{K}$ , nota-se uma maior aproximação entre os resultados experimentais e os calculados. A figura 6.12 mostra que o perfil térmico calculado para o molde se mantém próximo, e mesmo dentro de uma faixa de temperatura definida pelos perfis obtidos experimentalmente até aproximadamente 115 segundos após o vazamento, sendo que após este instante, a temperatura calculada cresce mais acentuadamente que as temperaturas experimentais. Este fato é um indício de que o coeficiente de transferência de calor não é constante e sim variável, sendo decrescente com o tempo, o que já é esperado teoricamente. Determina-se que a diferença máxima registrada entre a curva calculada e a temperatura média obtida experimentalmente, a 200s, é de 14%. A figura 6.13 mostra que para o ponto posicionado a  $1/4$  do centro do lingote, com  $h$  igual a  $600 \text{ W/m}^2.\text{K}$ , o perfil térmico calculado revela uma solidificação mais rápida que a que ocorre experimentalmente, sendo que conforme avança o resfriamento a diferença entre um e outro aumenta, o que reforça a idéia do coeficiente variável, sendo que a 213 segundos esta diferença máxima registrada é de 7,5%, em relação ao perfil médio.

A figura 6.14 mostra os perfis térmicos calculado e experimental para o centro, onde também é notada uma maior aproximação entre as duas curvas, que nos dois casos anteriores. A diferença máxima registrada entre as curvas é de aproximadamente 6,6%, a 213 segundos sendo que esta diferença tende a aumentar com o avanço do resfriamento. A razão já citada acima, é que na realidade o coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde decresce, o que não foi considerado neste cálculo, pois

tomou-se  $h$  constante. Fica claro, observando o perfil térmico calculado, que o término da solidificação é bem recriado pela mudança brusca na inclinação da curva, o que neste caso ocorre a 174s.

Ao considerar-se o fato que o coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde é na realidade variável e não constante, lançou-se mão, na simulação computacional, da solidificação, de uma variação discreta, de um do mesmo. Diversas sequências de valores foram utilizadas, e a variação que apresentou melhores resultados ao comparar-se os perfis térmicos calculados com as curvas experimentais está apresentada na figura 6.15 (linha cheia). A linha tracejada mostra a curva  $h \times t$  média, obtida em função da discretização do coeficiente de transferência de calor que foi utilizada na simulação.

A figura 6.16 mostra o perfil térmico para o molde ao usar-se  $h$  variável, comparado com os perfis experimentais. Pode-se perceber que a curva calculada está bem mais próxima dos reais, sendo que a diferença máxima entre a curva calculada e o valor médio experimental é de 8%, logo a aproximação entre o perfil obtido da simulação e os experimentais é maior que para  $h$  igual a  $600\text{W/m}^2\cdot\text{K}$ .

É visível também, através da figura 6.17, que ao usar-se coeficiente de transferência de calor variável, obtém-se um perfil térmico para o ponto a 1/4 do centro, mais próximo do real, que para  $h$  constante e igual a  $600\text{W/m}^2\cdot\text{K}$ . Pode-se notar que com a variação de  $h$  utilizada, a diferença entre as duas curvas não aumenta significativamente com o decorrer do resfriamento como ocorre para  $h$  igual a  $600\text{W/m}^2\cdot\text{K}$ , e isto se dá devido ao decréscimo imposto ao coeficiente de transferência de calor, conforme fig. 6.15. O início da solidificação, nesta simulação, é a 60s e o término a 125s, com resultados de início e fim de solidificação um pouco mais próximos dos resultados aproximados determinados experimentalmente. A diferença máxima registrada entre as duas curvas é de 4,9% a 240s, que é menor que os 7,5% registrados como diferença máxima, com  $h$  igual a  $600\text{W/m}^2\cdot\text{K}$ , para o ponto a 1/4 do centro do lingote.

A figura 6.18 mostra o perfil térmico calculado, juntamente com o perfil térmico obtido experimentalmente, para o centro do lingote, ao utilizar-se  $h$  variável. O início da solidificação, conforme a simulação, se dá aos 113 segundos e o término da solidificação, marcado por uma forte mudança na inclinação da curva obtida por simulação, se dá aos 182 segundos, após

vazamento.

Vê-se que a faixa de solidificação dos perfis construídos por simulação, tanto para  $h$  igual a  $600 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  quanto  $h$  variável, é maior que o da curva experimental, ou seja, a solidificação conforme a simulação inicia-se mais cedo e termina depois, em relação à solidificação real. Isto pode ser explicado, em parte, pelo fato que o aço utilizado experimentalmente (1045) tem temperatura líquidus e sólíus diferentes dos da liga que serviu como base para os dados bibliográficos de entalpia em função da temperatura que foi o aço 1060, sendo que as temperaturas líquidus e sólíus do aço 1045, calculados pelas equações (5.1, 5.2), ficam em torno de  $1487^\circ\text{C}$  e  $1427^\circ\text{C}$  respectivamente, e as temperaturas líquidus e sólíus do aço 1060 obtidos na referência (8) são de  $1490^\circ\text{C}$  e  $1415^\circ$ , respectivamente. Com isso a solidificação simulada inicia-se antes e completa-se depois que a solidificação experimental.

A diferença máxima registrada para a simulação da solidificação no centro do lingote, utilizando-se  $h$  variável, entre o perfil calculado e o perfil médio experimental é de 4,7% aos 182 segundos de processo, logo, ao comparar-se com a diferença máxima para o ponto central do lingote, entre a curva calculada e experimental, utilizando-se  $h$  igual a  $600 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ , vê-se que a curva calculada com  $h$  variável está mais próxima da curva experimental.

Analizando-se todos os resultados obtidos nas simulações realizadas, concluiu-se que os cálculos efetuados com o coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde variável, conforme variação discretizada mostrada na figura 6.15, apresentam melhores resultados a nível de aproximação com o perfil térmico médio experimental, sendo que no lingote, nos dois pontos estudados, a diferença máxima registrada ficou em torno de 5%. Logo, pode-se afirmar que para o lingote e lingoteira estudados, obtêm-se melhores resultados considerando-se o  $h$  variável e que a curva média representativa de  $hXt$  dá-nos uma idéia da real variação do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde em função do tempo. Pode-se dizer também que o modelo matemático desenvolvido para a simulação da solidificação de aço médio-carbono com transferência bidimensional de calor é bom, pois uma diferença entre resultados simulados e reais de 5% pode ser considerada pequena.

Mas, esta diferença tem as suas possíveis causas geradoras, das quais

algumas delas são listadas abaixo:

- . As propriedades físicas do ferro fundido e aço foram consideradas constantes, enquanto é sabido que as mesmas variam com a temperatura.
- . Os valores das propriedades físicas adotadas da literatura são fornecidas para aços carbono em geral e não para aços 1045, especificamente.
- . A variação do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde é desconhecida de fato, sendo portanto aproximada a variação utilizada.
- . Os dados da relação entre entalpia e temperatura não são específicos para o aço 1045.
- . A incerteza do pressuposto de que a liga perde 50°C de sua temperatura durante vazamento.

E por fim as figuras 6.19 a 6.21 mostram os perfis térmicos calculados para o molde e lingote utilizando-se  $h$  igual a 1500, 800, 600 W/m<sup>2</sup>.K e variável. Estes gráficos mostram como, para lingotes de pequenas dimensões, o  $h$  tem efeito preponderante sobre a solidificação sendo que diferentes valores para o mesmo produzem profundas modificações no processo de solidificação da liga.

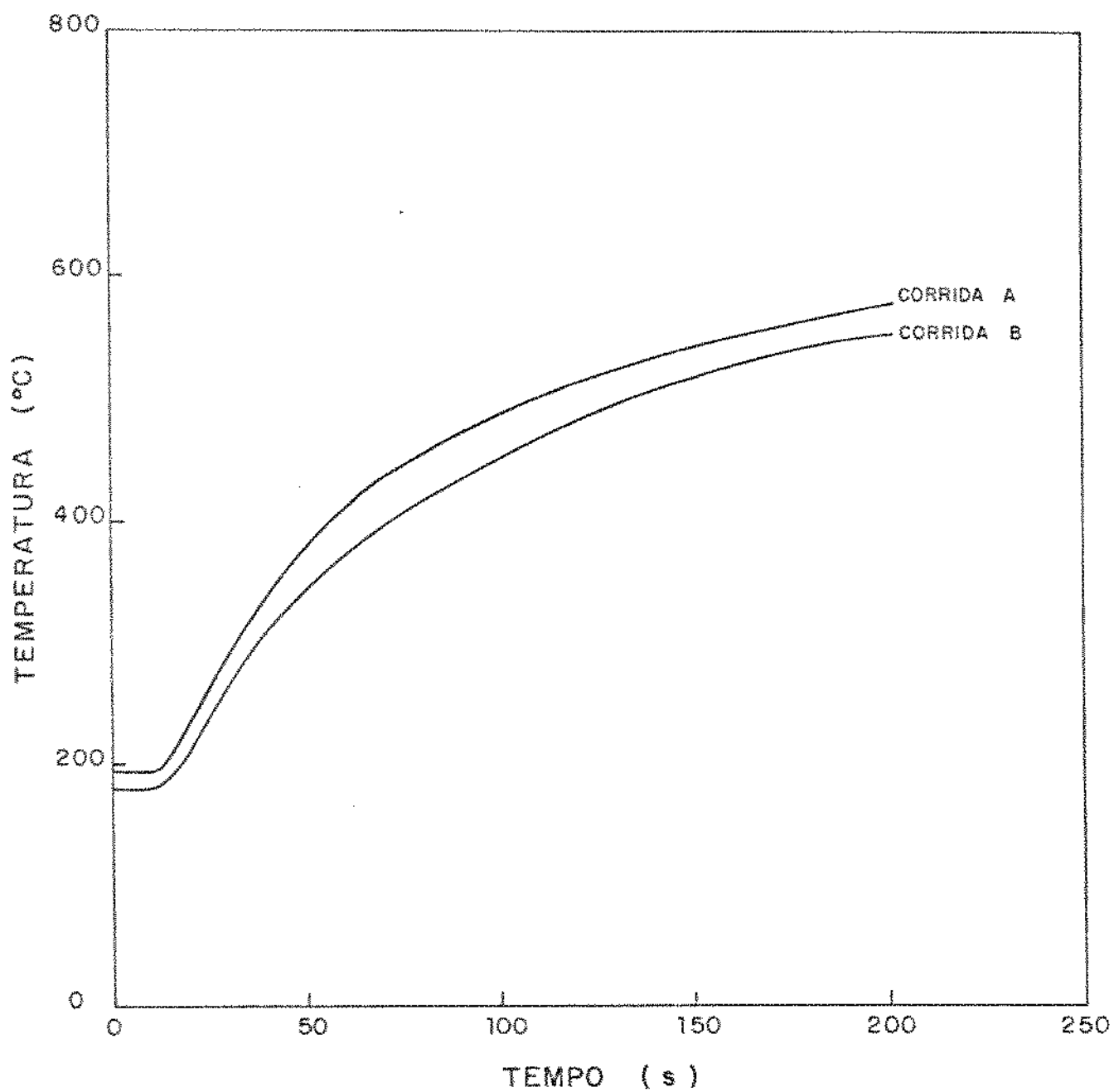
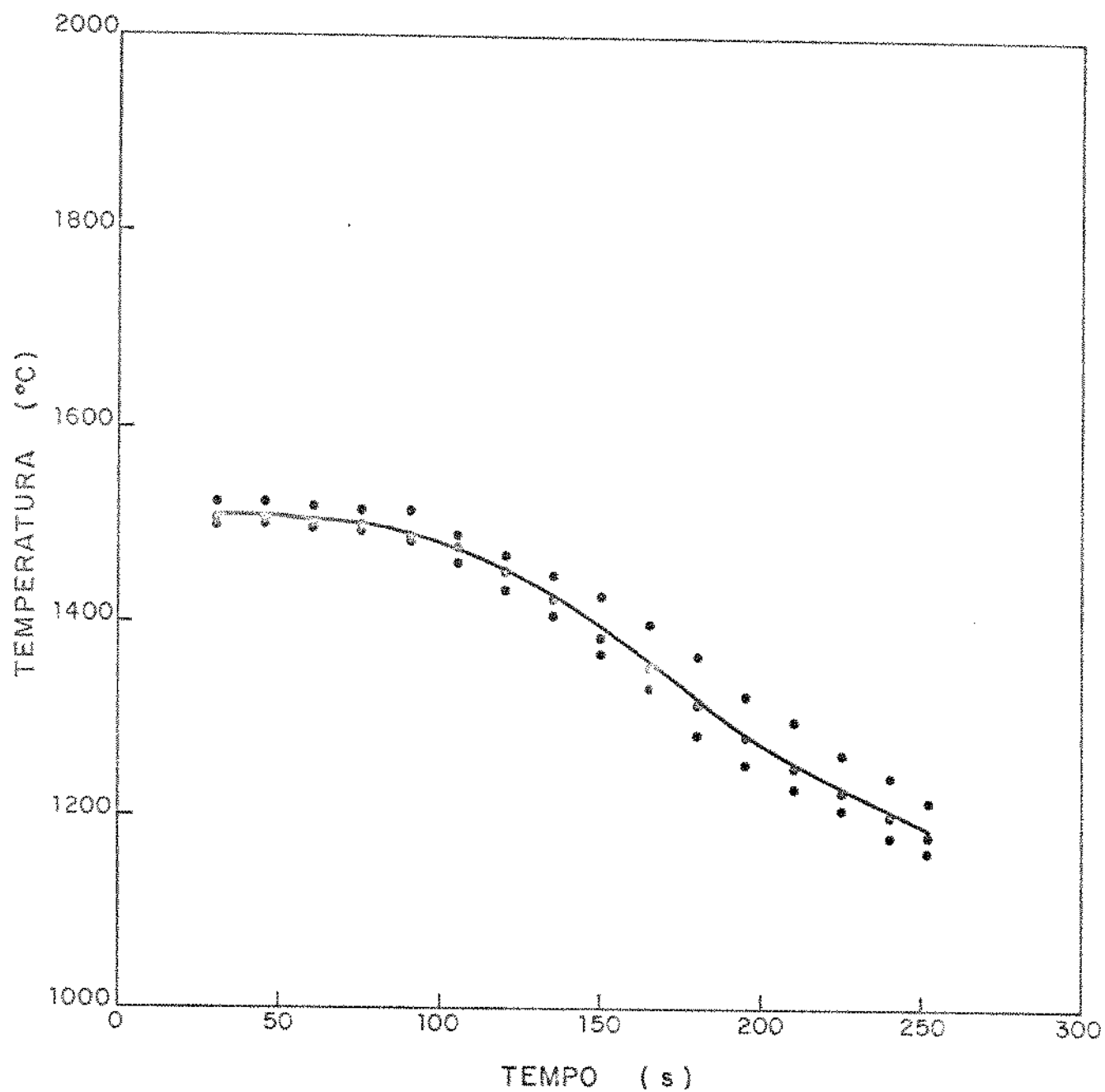


Figura 6.1 - Perfis térmicos do interior do molde (A meia altura e meia espessura da parede).





*Figura 6.2 - Perfil térmico médio para o ponto a meia altura e meia distância entre o centro e superfície do lingote.*

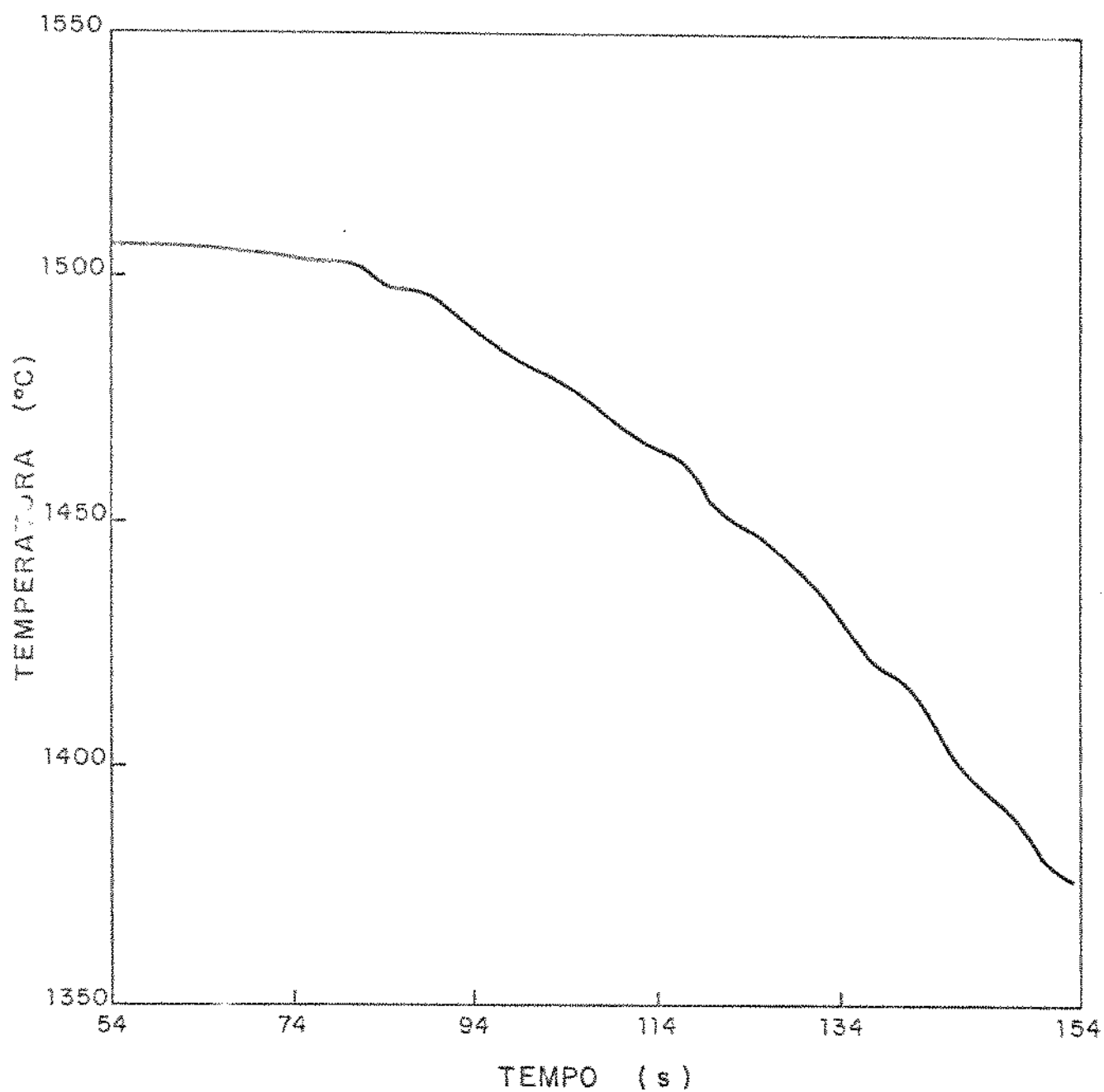


Figura 6.8 - Perfil térmico tomado a 1/4 de centro do lingote - porção onde ocorre solidificação.

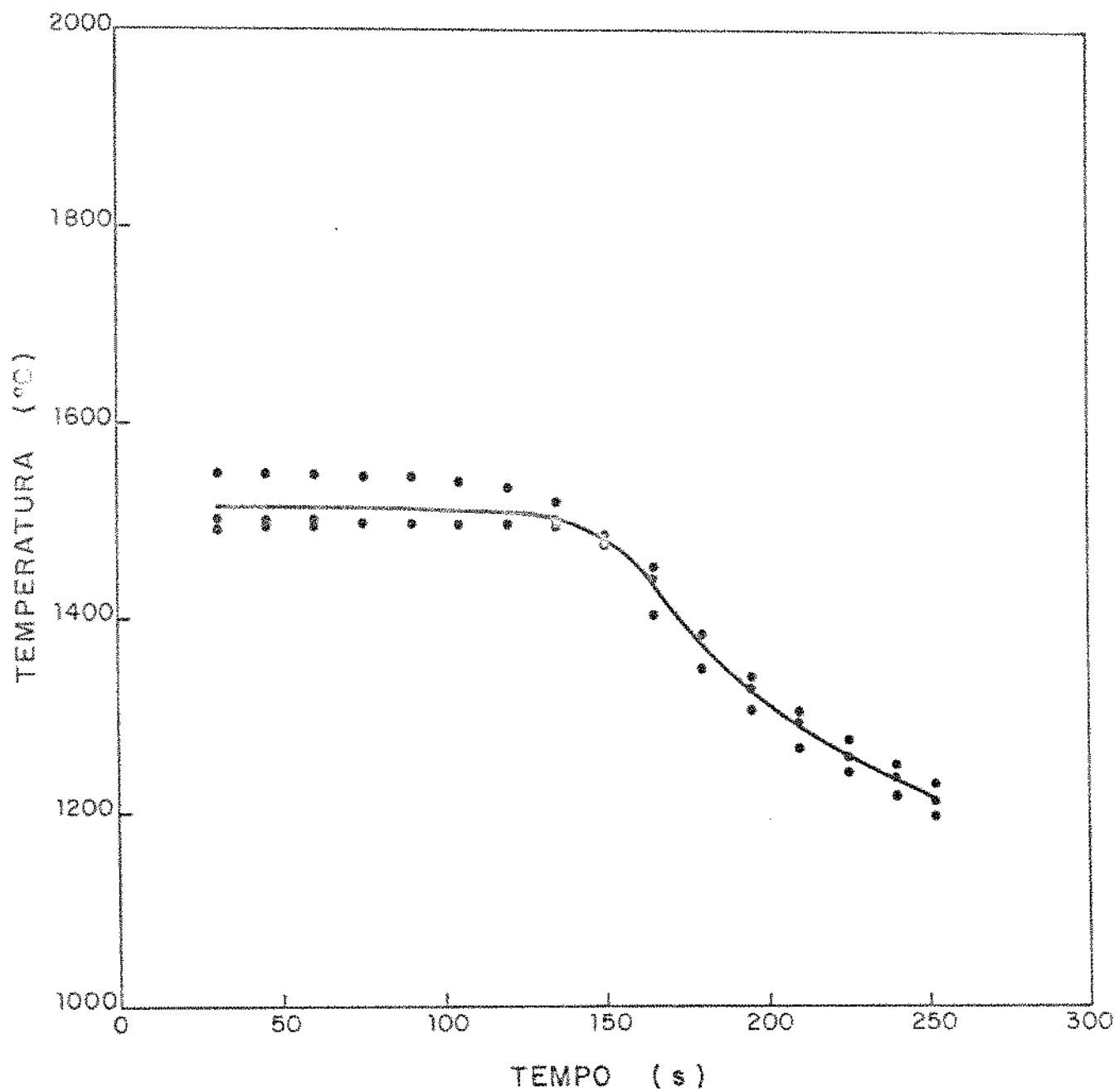


Figura 6.4 - Perfil térmico médio para o ponto central do lingote.

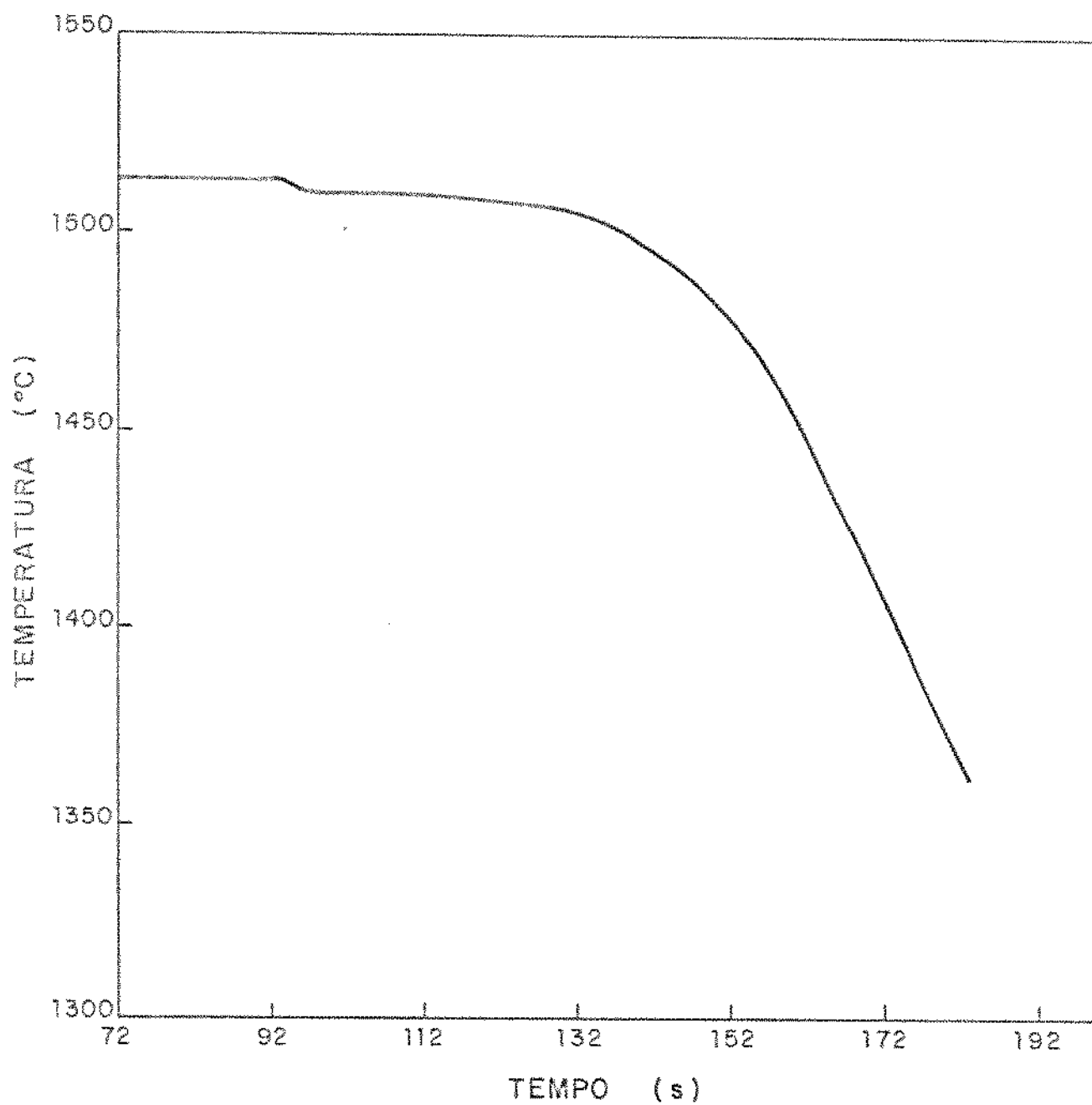


Figura 6.5 - Perfil térmico tomado no centro do lingote - porção onde ocorre a solidificação.

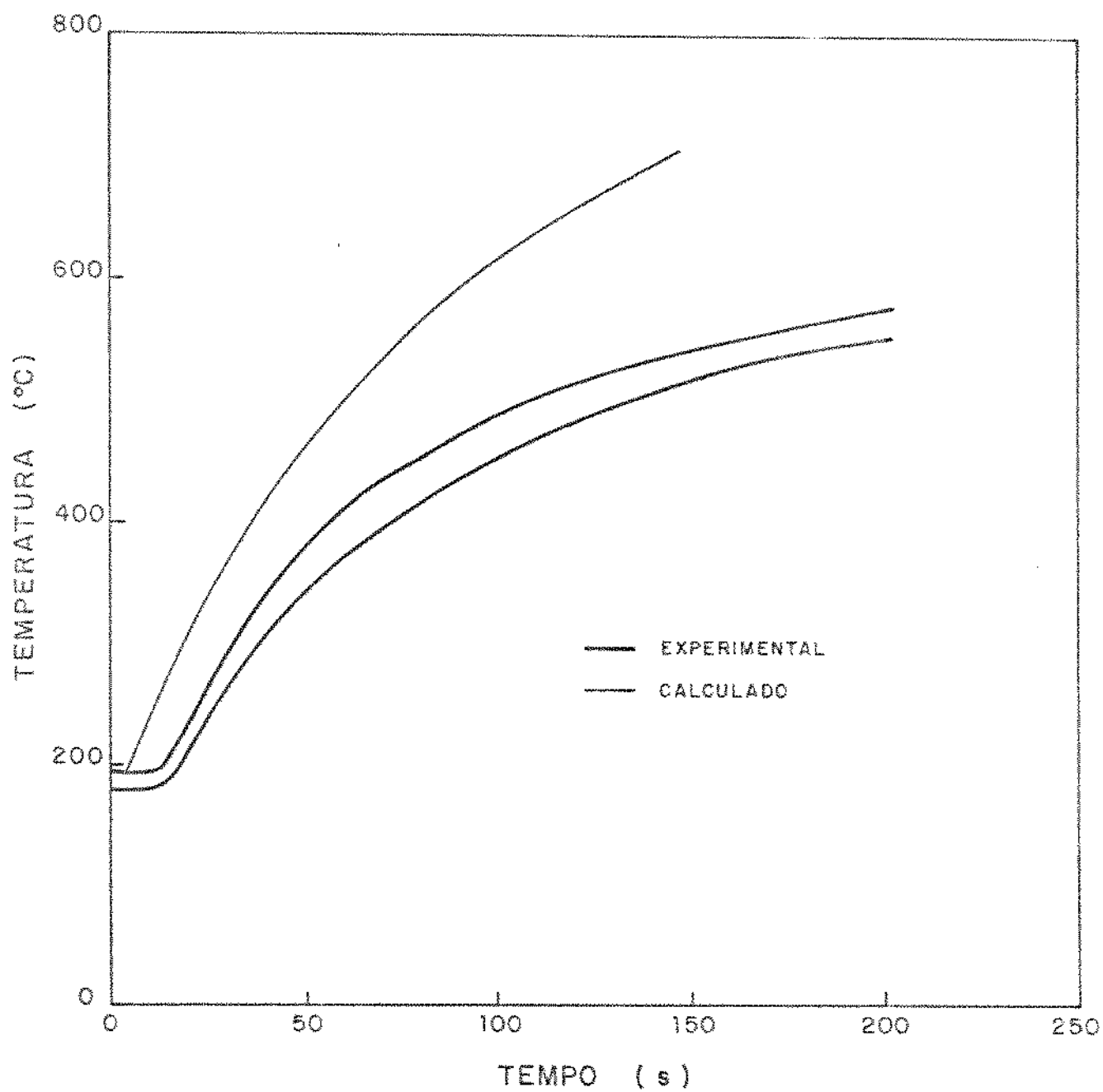


Figura 6.6 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado para o molde, com  $h$  igual a  $1.500 \text{ W/in}^2\cdot\text{K}$ .

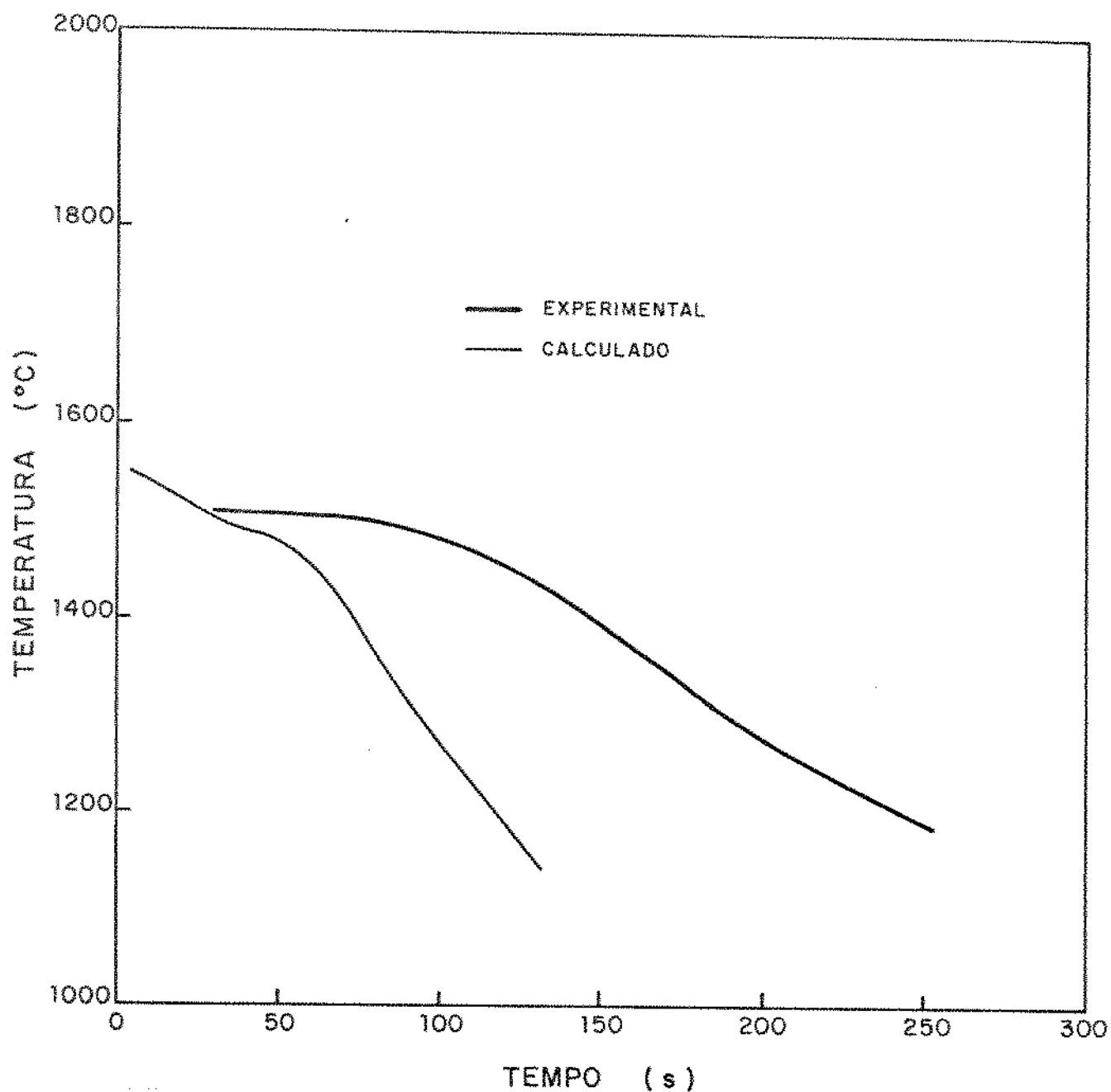


Figura 6.7 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o ponto a meia distância entre a superfície e o centro do metal, para  $h$  igual a  $1.500 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

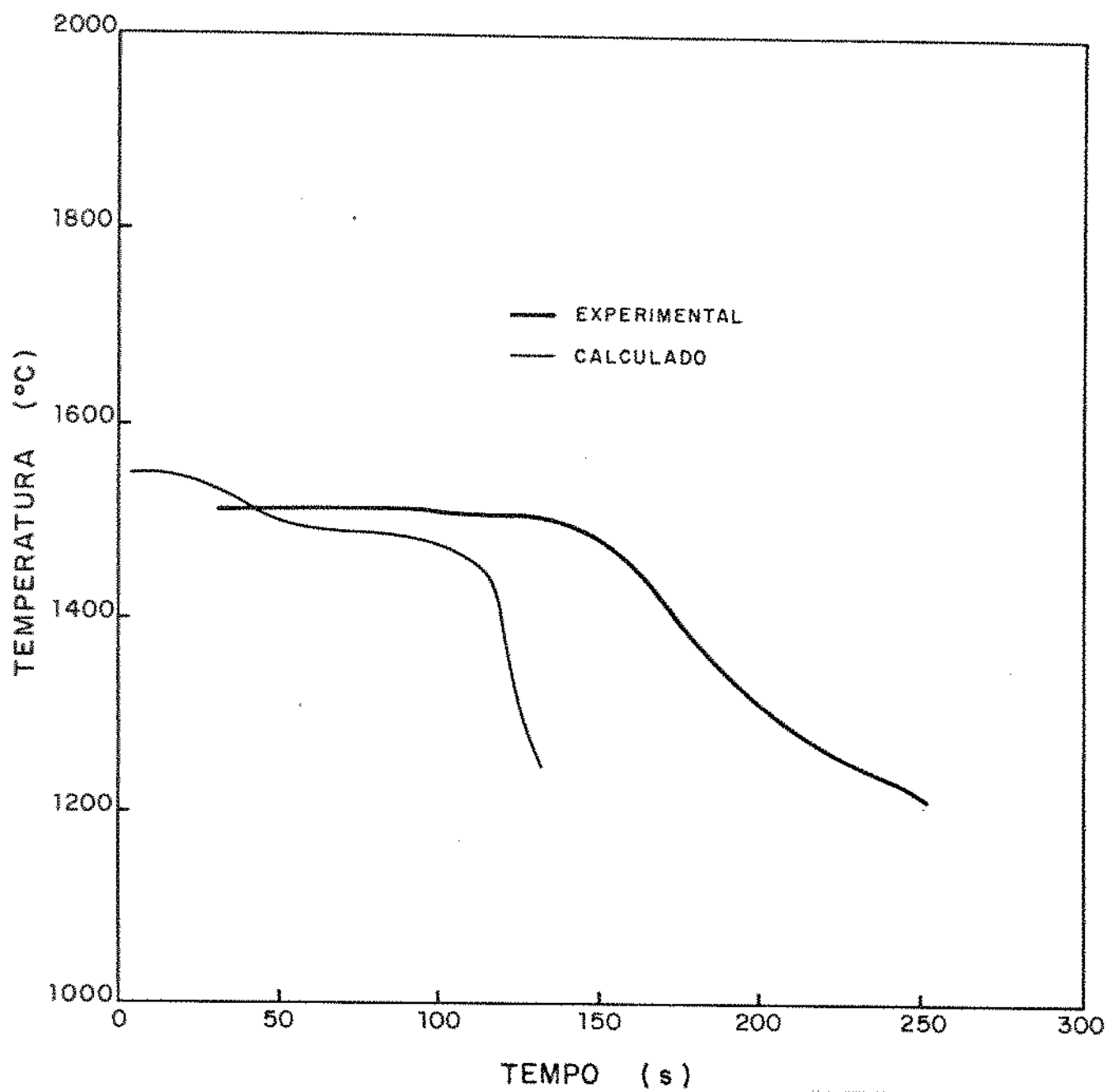


Figura 6.8 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o centro do lingote, com  $h$  igual a  $1.500 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

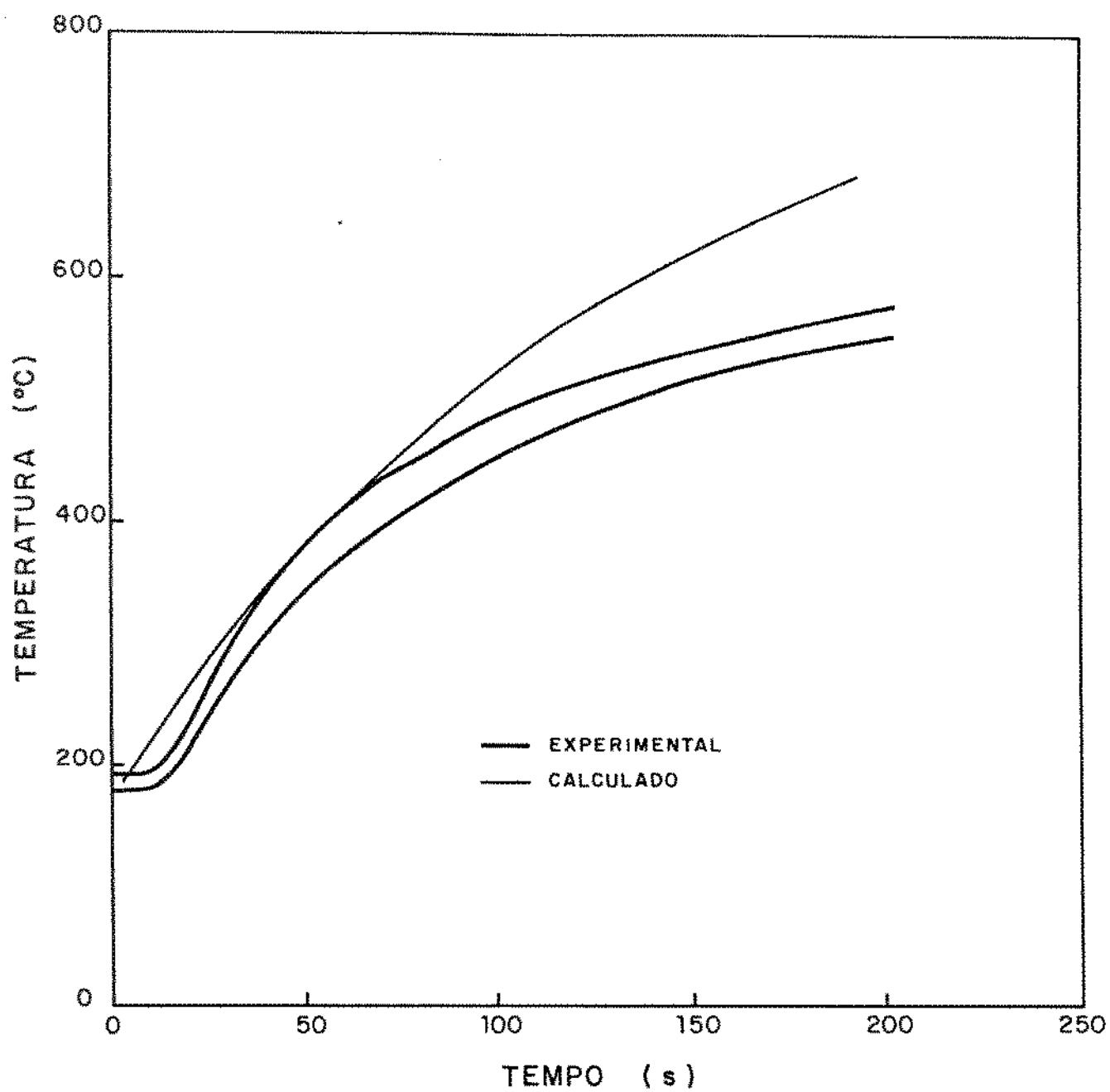


Figura 6.9 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o molde, com  $h$  igual a  $800 \text{ W/m}^2\text{K}$ .



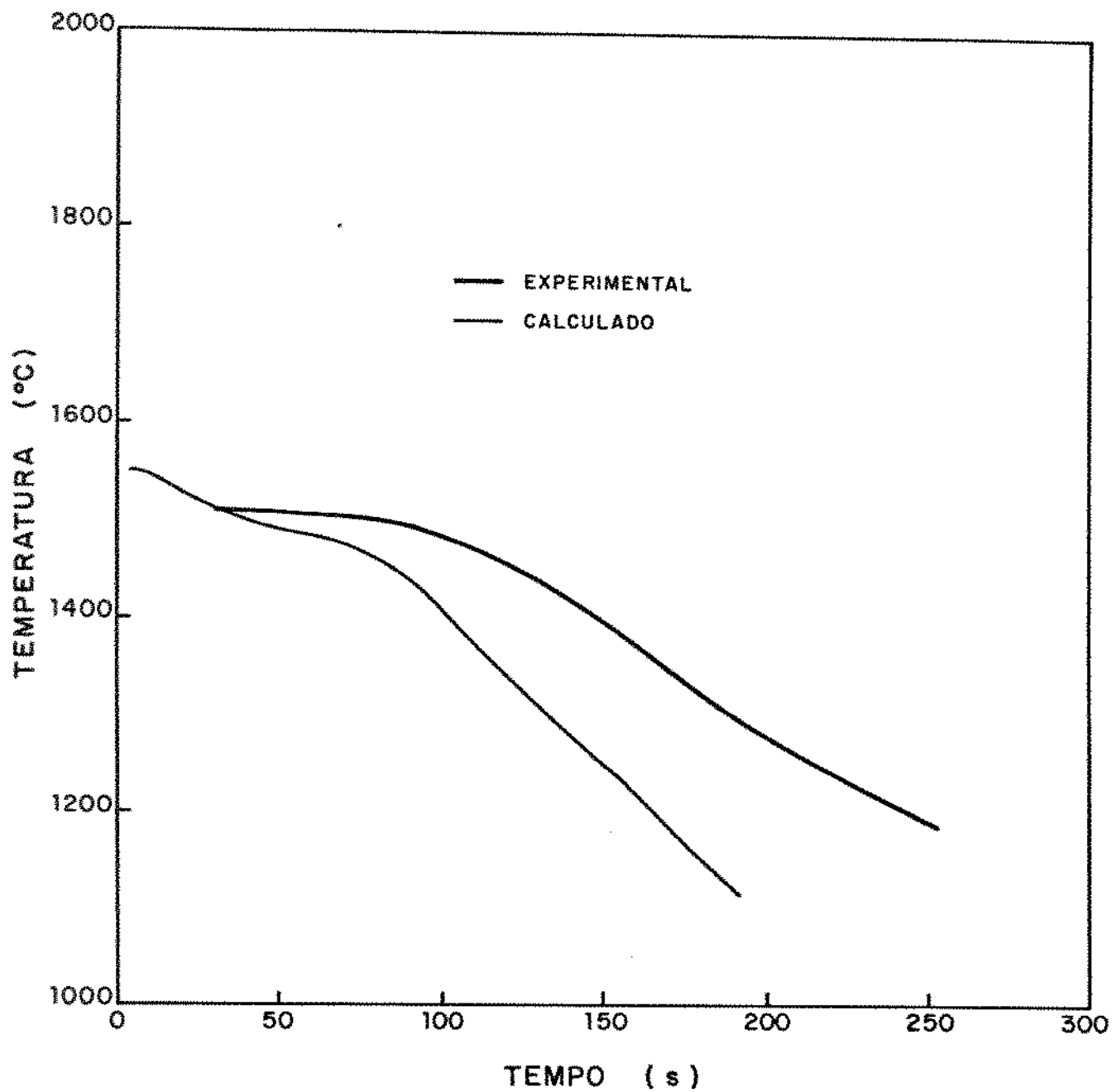
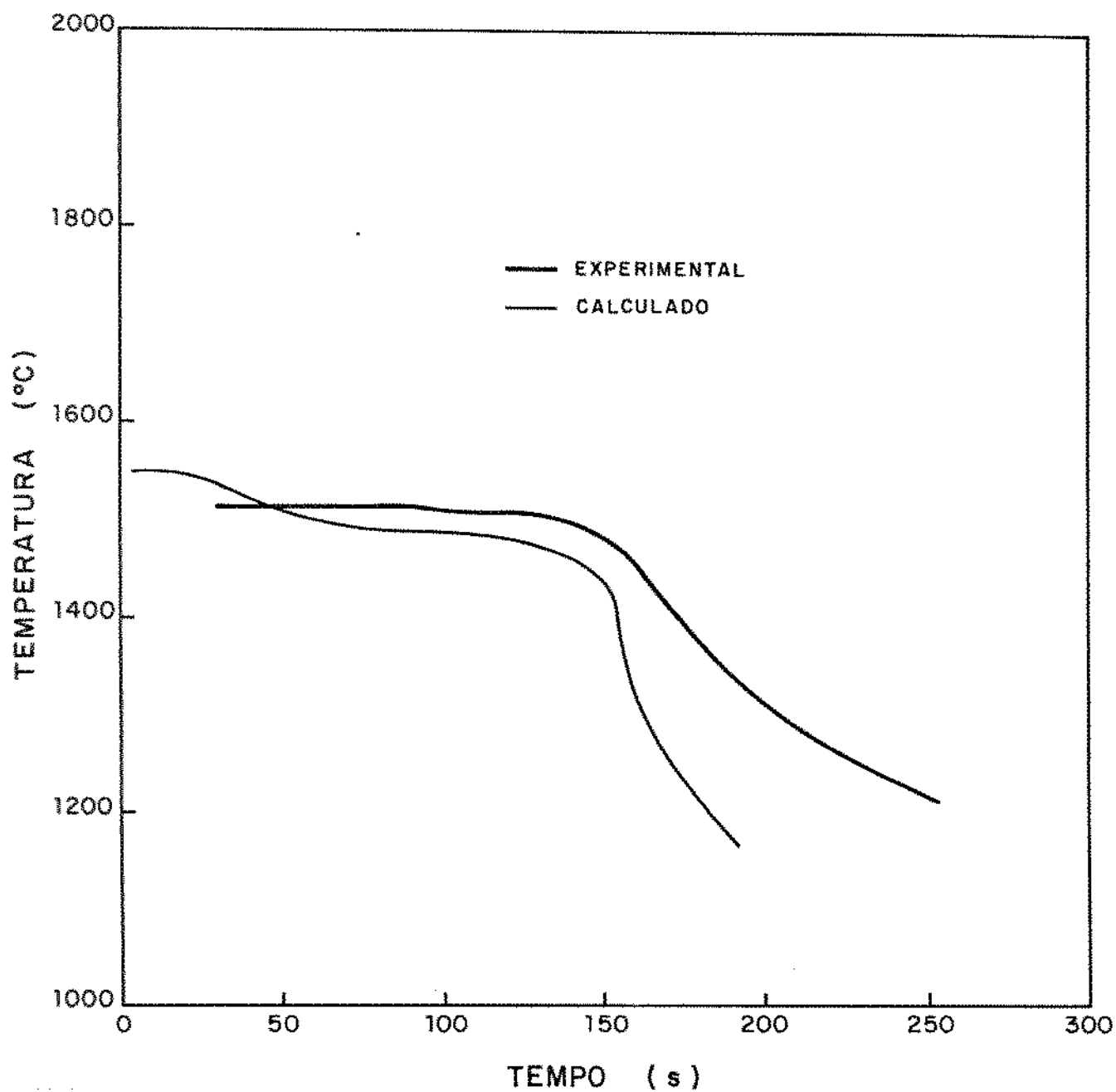


Figura 6.10 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o ponto a meia distância entre o centro e superfície do metal, com  $h$ , igual a  $800 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .



*Figura 6.11* - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o centro do lingote com  $h$  igual a  $800 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

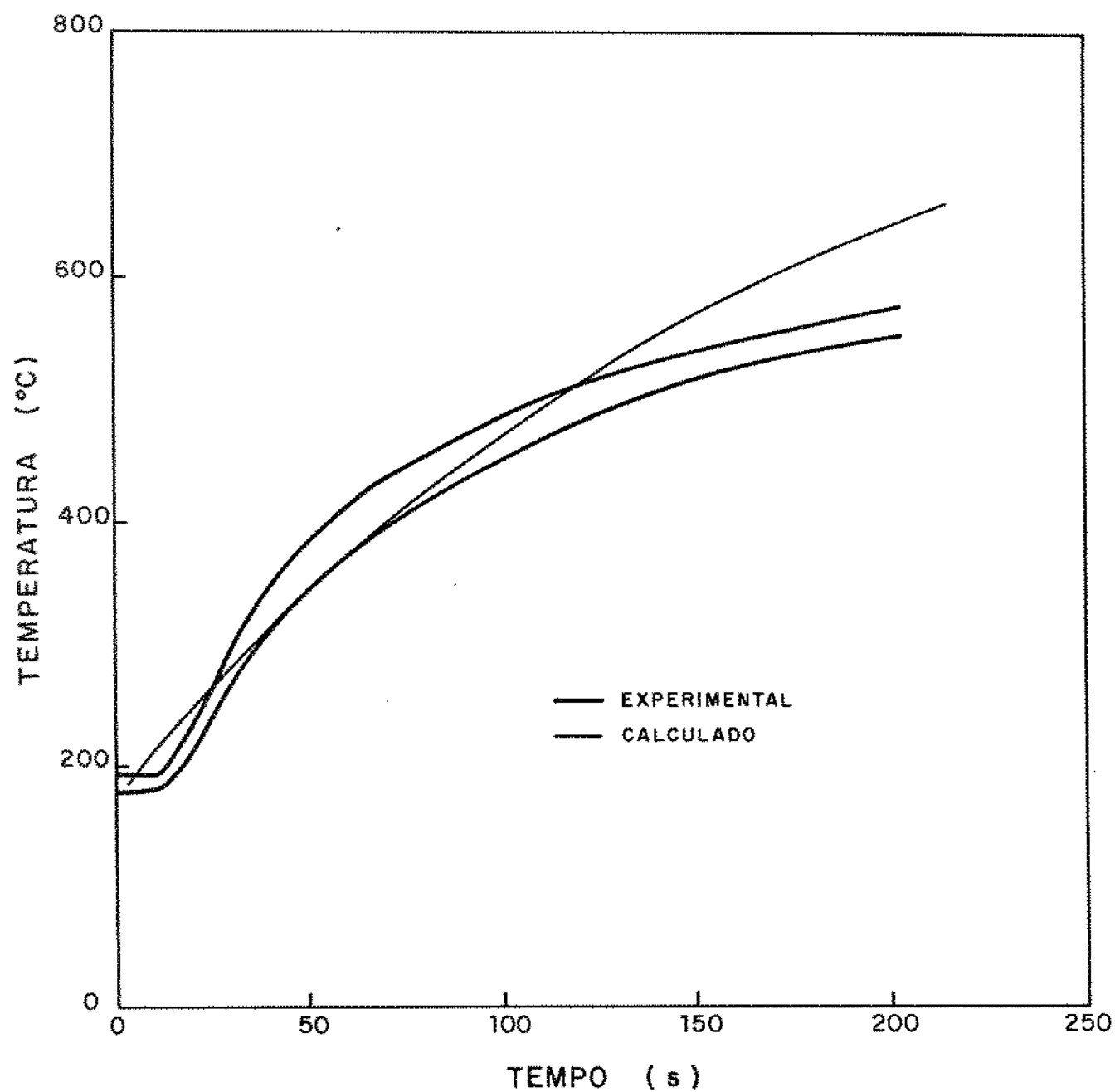


Figura 6.12 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o molde com  $h$  igual a  $600 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

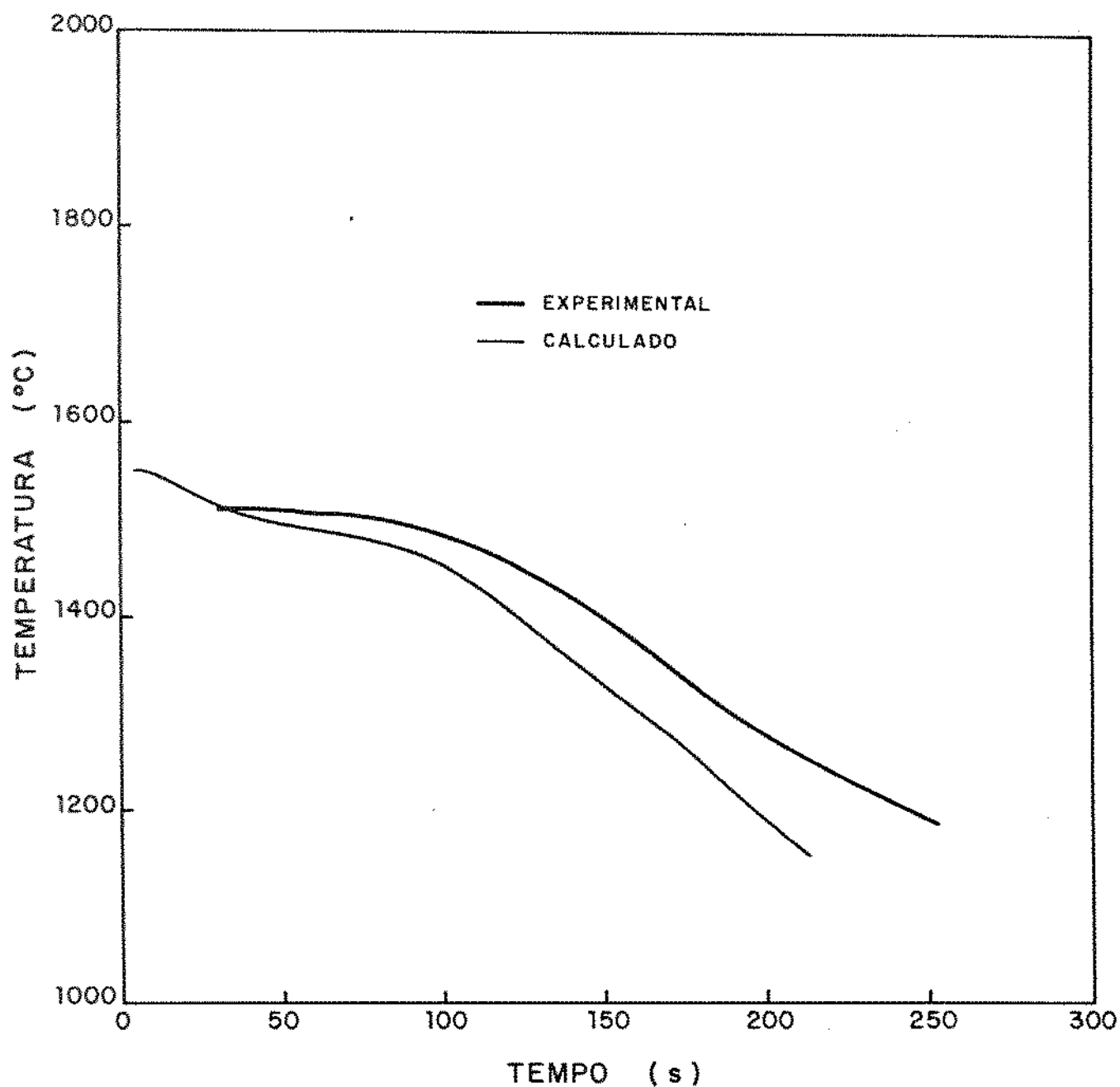


Figura 6.13 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado, para o ponto a meia distância entre o centro e a superfície, com  $h$  igual a  $600 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

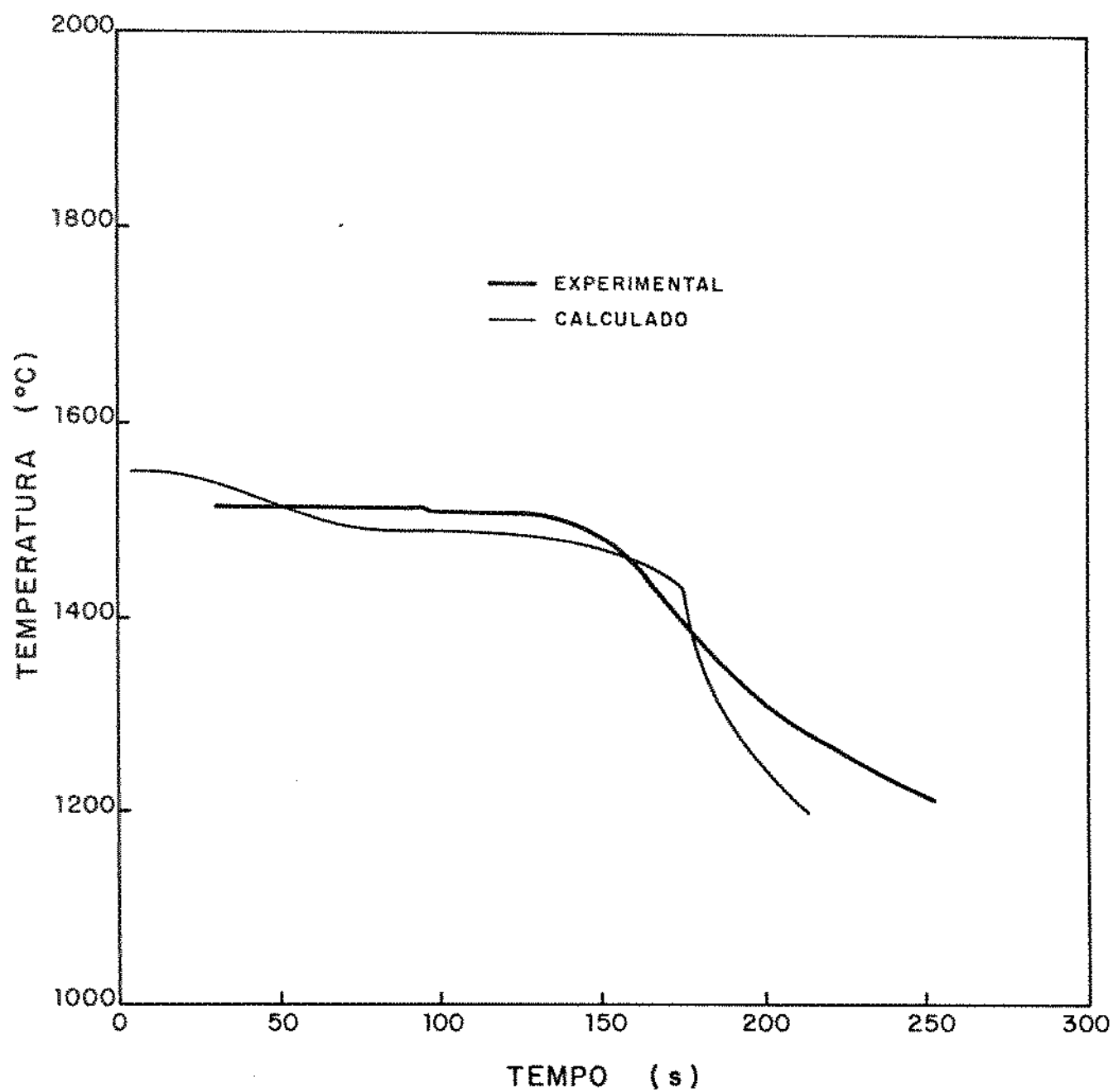


Figura 6.14 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado para o centro do lingote, com  $h$  igual a  $600 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

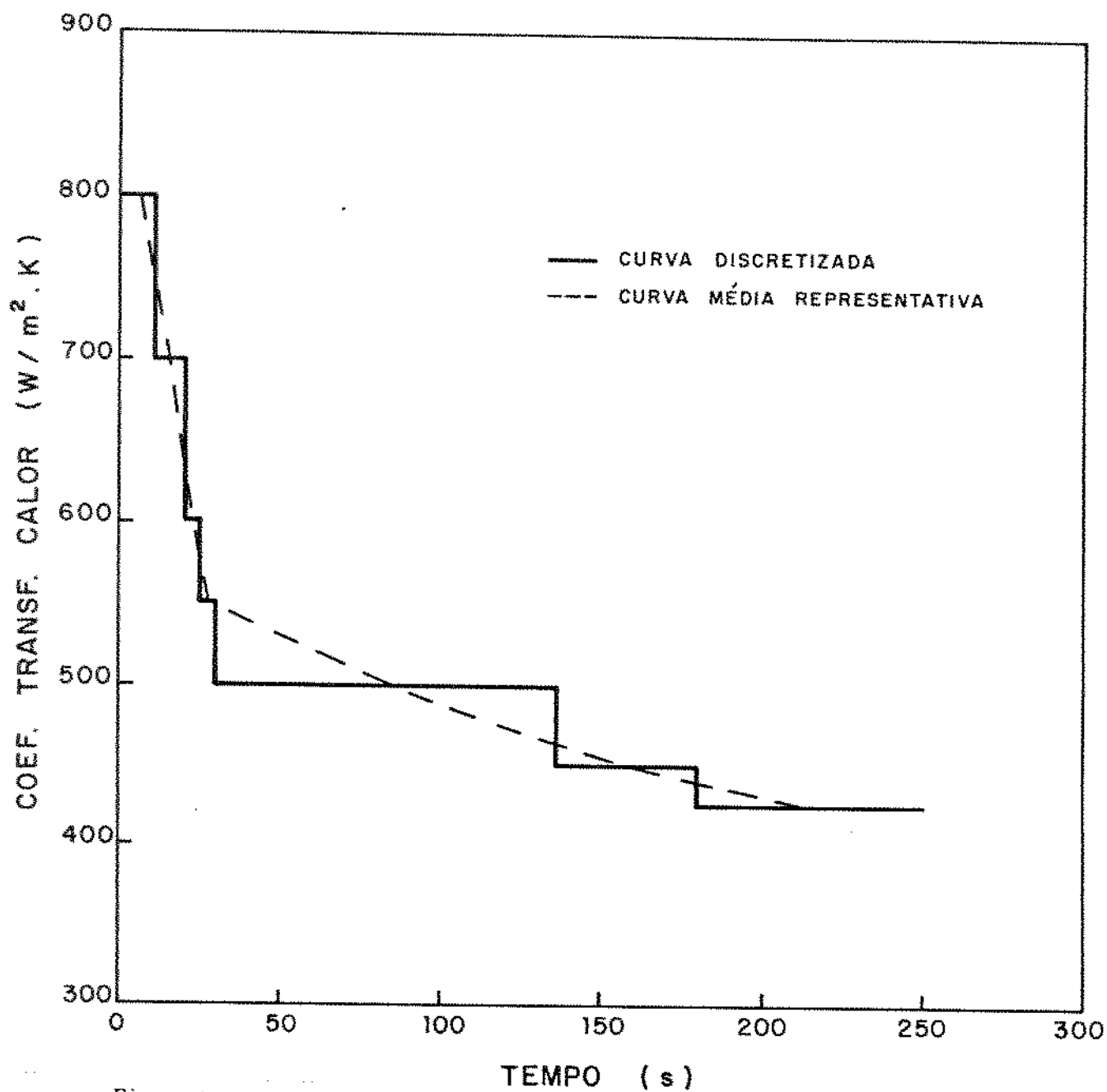


Figura 6.15 - Variação do coeficiente de transferência de calor (h) em função do tempo.

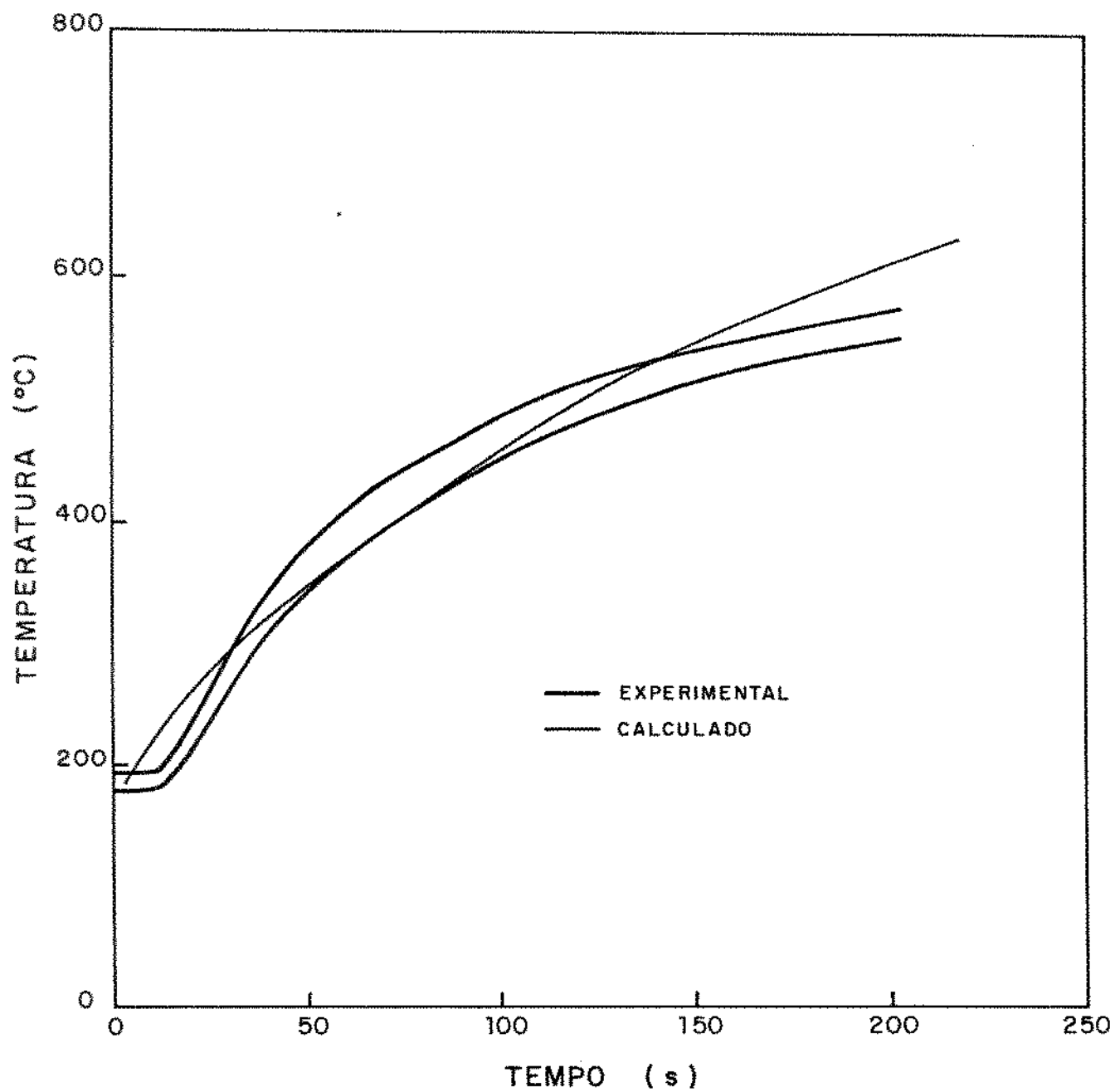


Figura 6.16 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado para o molde, com  $h$  variável.

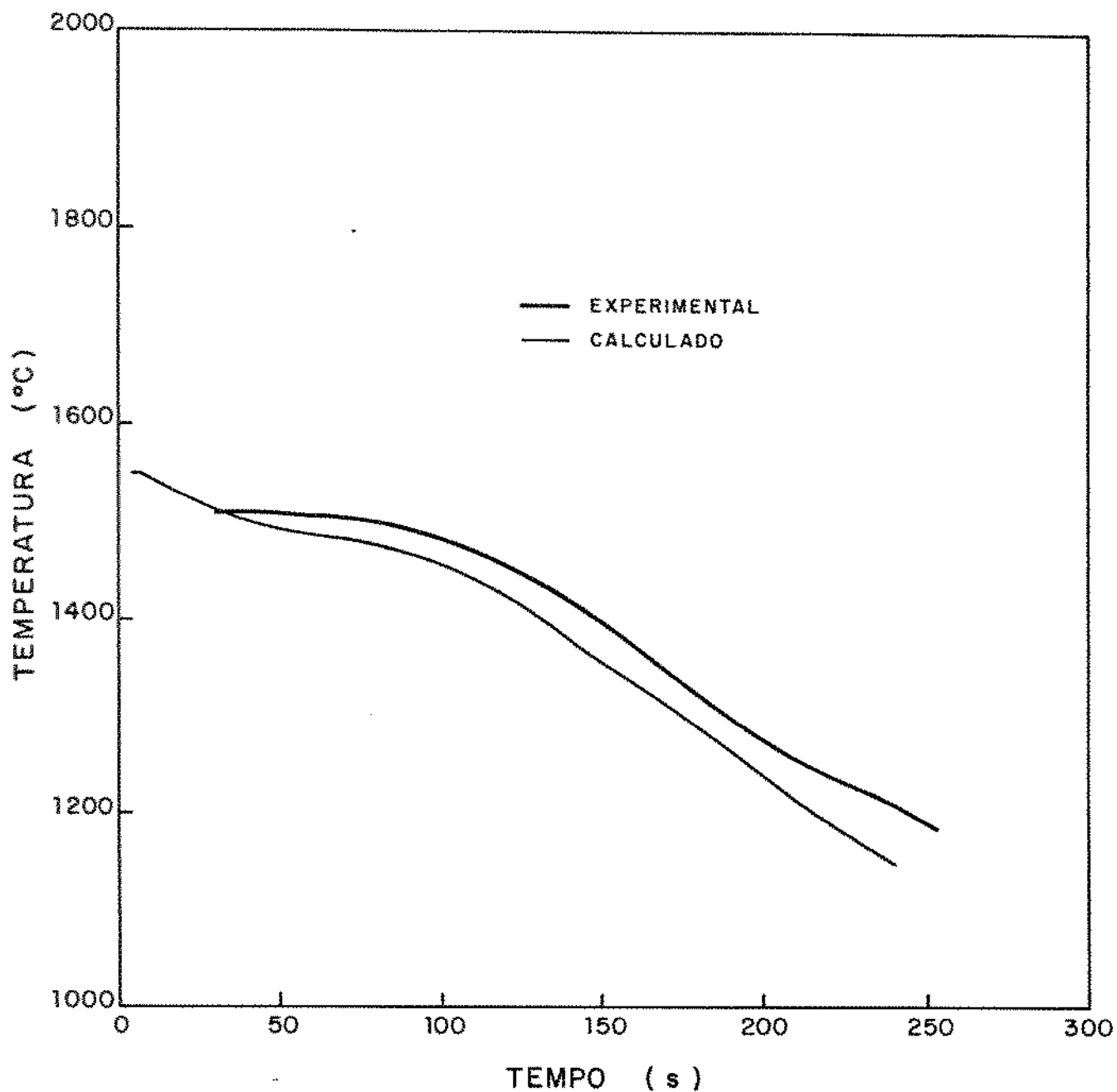


Figura 6.17 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado para o ponto a meia distância entre o centro e a superfície do metal, com  $h$  variável.



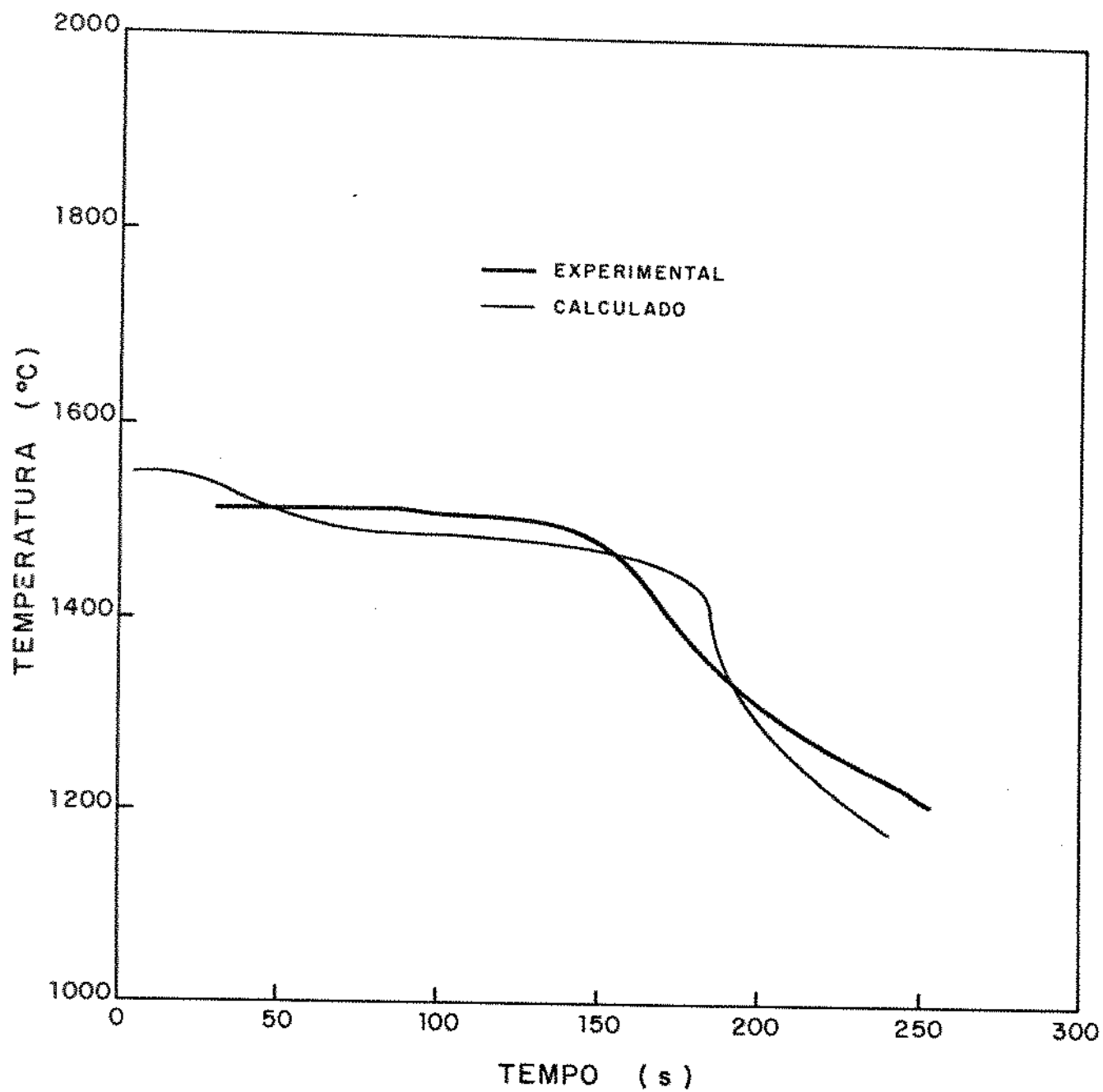


Figura 6.18 - Comparação entre perfis térmicos experimentais e calculado para o centro do lingote, com  $h$  variável.

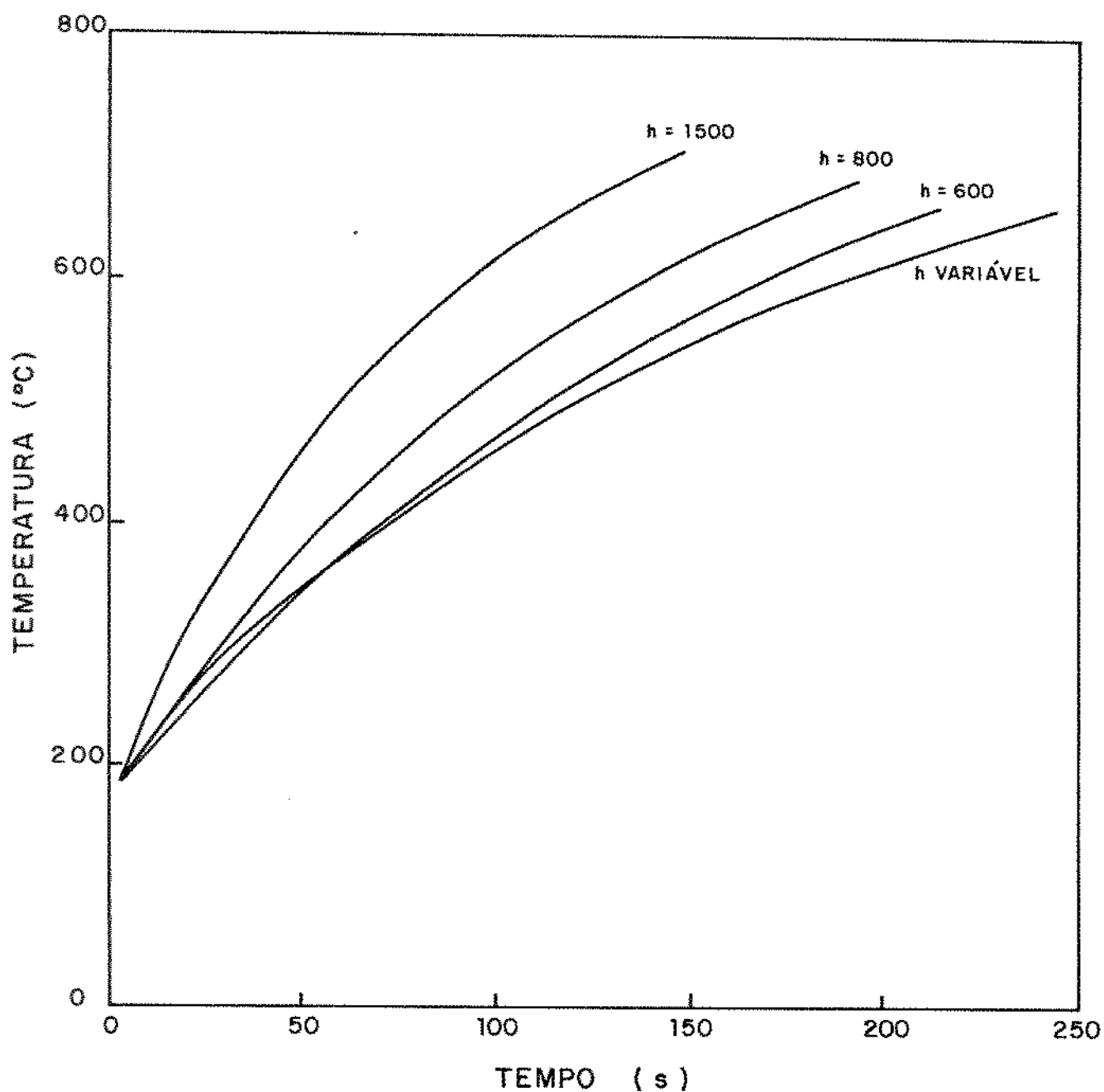


Figura 6.11 - Influência do  $h$  na evolução térmica do molde, durante solidificação.

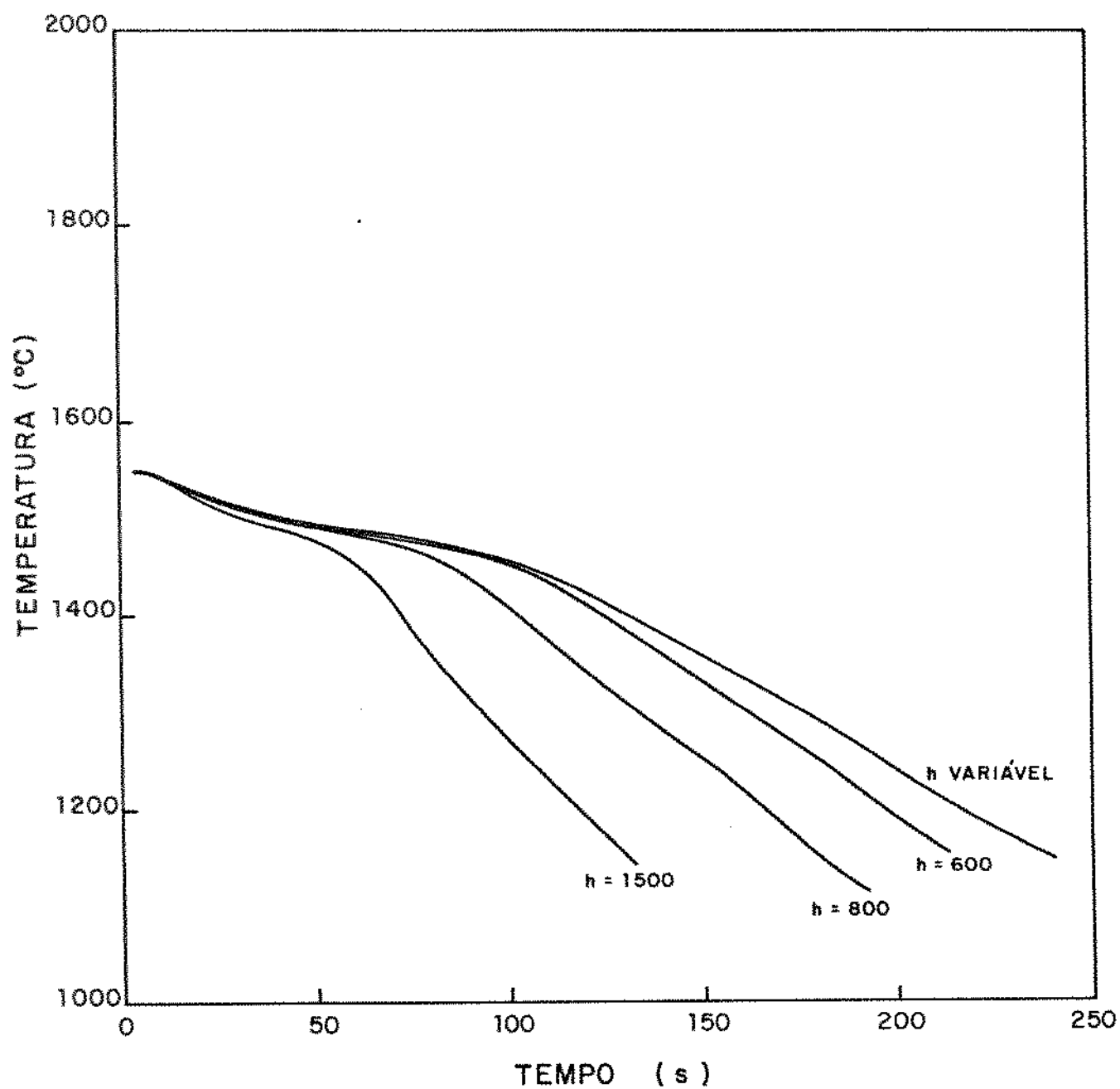


Figura 6.20 - Influência do  $h$  sobre o comportamento térmico do metal (ponto a meia distância entre centro e superfície), durante solidificação.

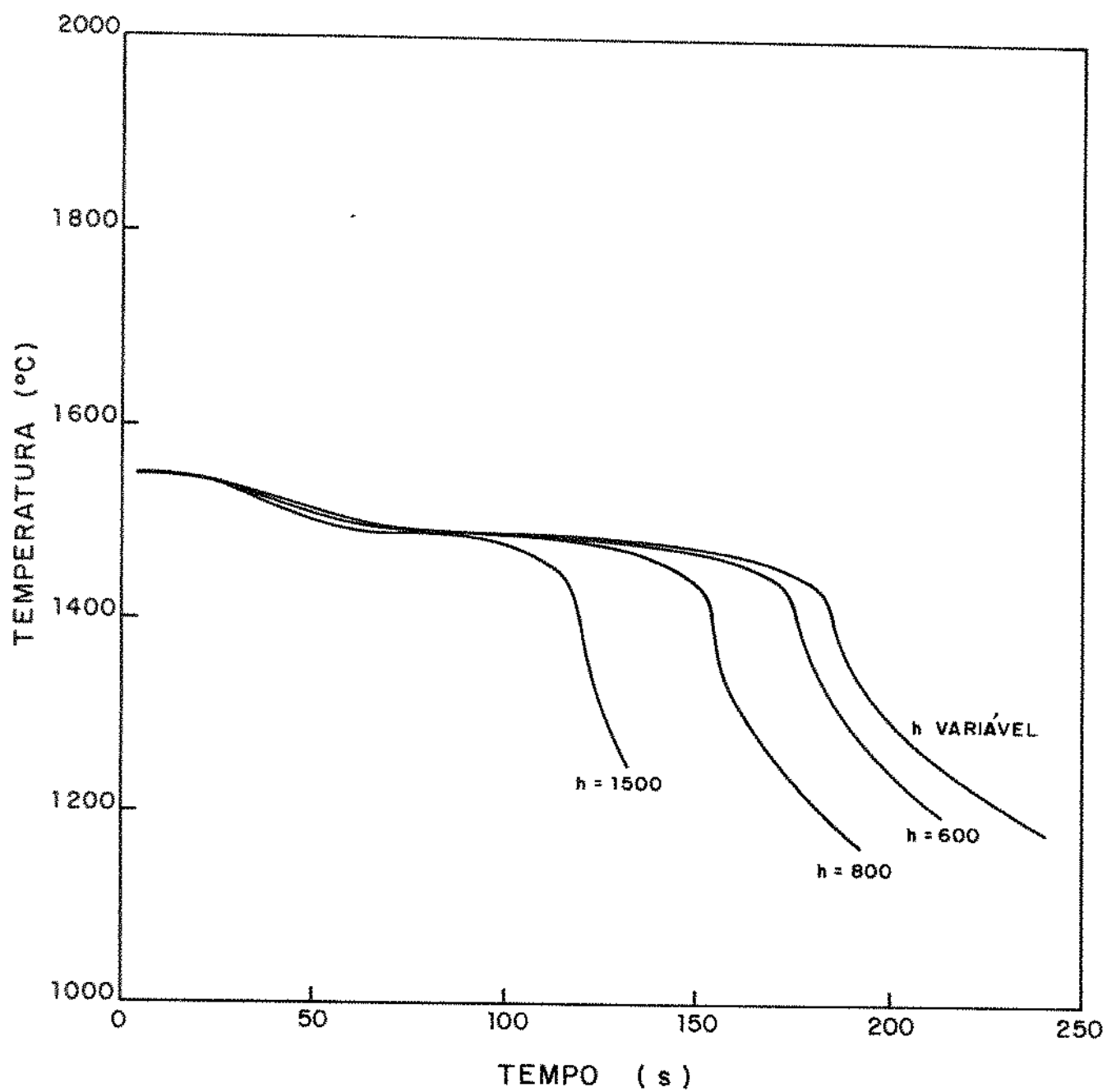


Figura 6.21 - Influência do  $h$  sobre o comportamento térmico do metal (centro), durante solidificação.

## 7. APLICAÇÃO

Este capítulo apresenta um exemplo de aplicação do modelo matemático desenvolvido para simulação da solidificação, em sistemas metal/molde com dimensões industriais.

Para a aplicação do programa computacional em sistemas maiores, poucas modificações foram necessárias, e estas modificações se deveram não simplesmente à inadequação do programa na simulação da solidificação para moldes e lingotes com maiores diâmetros e comprimentos, mas sim à particularidades do processo que não foram contempladas anteriormente, como o uso de isolante lateral e pó exotérmico na cabeça-quente.

O sistema estudado apresenta as seguintes dimensões: o diâmetro médio do lingote igual a 690 mm; a altura igual a 3.360mm; e o molde tem espessura média de 180 mm e altura igual a 3.690 mm, considerando os 330 mm da base (ver figura 7.1).

Este lingote tem as suas dimensões próximas ao eletrodo fundido na aciaria da Eletrometal para refusão em ESR (Eletroslag Refining) cujo produto da refusão é um lingote de 32 polegadas médio, de seção circular.

O tamanho de malha utilizada na simulação foi de 15 mm, o que resulta, na aplicação do modelo para a solidificação do lingote, em 47 malhas na horizontal e 225 malhas na vertical.

Inicialmente, o programa foi utilizado para analisar a influência da variação do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde, na solidificação do metal, para sistemas com dimensões desta ordem.

O programa foi executado, utilizando-se valores do coeficiente de transferência de calor iguais a 1500 J/s.m<sup>2</sup>.K, 800 J/s.m<sup>2</sup>.K, 600 J/s.m<sup>2</sup>.K e também considerando a sua variação. Estes valores de coeficiente são valores razoáveis do ponto de vista prático.

A figura 7.2 mostra a variação da temperatura, no centro do lingote, durante a solidificação e posterior resfriamento, utilizando os vários valores de  $h$ .

Comparando esta figura com a figura 6.21, nota-se que a influência do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde, para lingotes grandes, é bem menor que no caso de lingotes pequenos, pois a diferença entre os perfis para os vários valores de  $h$  é maior no segundo do que no

primeiro caso, o que já era esperado (11, 17).

O fato de uma peça grande imprimir uma maior resistência à transmissão de calor por condução (devido às suas próprias dimensões) pode explicar o fenômeno constatado acima, sendo neste caso, a condução a forma de transferência de calor preponderante.

Portanto, como o comportamento da solidificação é pouco influenciado por  $h$ , neste caso, optou-se por usar um coeficiente de valor intermediário ( $h = 600 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ) nas execuções subsequentes.

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos com as aplicações do modelo no estudo da solidificação do sistema descrito anteriormente. Foram variados certos parâmetros de fundição, para analisar assim a influência de cada um deles na solidificação do lingote de aço.

### 7.1 Influência do uso de pó exotérmico

O pó exotérmico é um artifício utilizado em fundição para diminuir-se a ocorrência de rechupes, a partir da manutenção de uma maior quantidade de metal líquido no topo de lingote, durante o processo de solidificação.

A implementação do pó exotérmico nos cálculos realizados, foi feita com base em dados apresentados por Rader e Haines (17).

A Figura 7.3 mostra a comparação das curvas da temperatura líquidus e sólidus, decorridos 6000s após o vazamento, para o sistema no qual foi usado um isolamento lateral de 240mm no topo da lingoteira e isolamento ideal cobrindo a parte superior da mesma com aquelas obtidas quando o pó exotérmico substitui o isolamento ideal na parte superior da lingoteira. O pó exotérmico é colocado logo após o vazamento do metal líquido.

Nota-se que para ambos os casos, a curva da temperatura sólidus tem praticamente a mesma forma. Mas as curvas líquidus são bem diferentes. A curva da temperatura líquidus, para o caso em que a parte superior do lingote é apenas isolada, está numa posição superior àquela obtida com o uso do pó exotérmico apresentando, portanto, uma menor quantidade de metal líquido. Isto mostra que o modelo é capaz de prever a influência do uso de pó exotérmico na manutenção de uma maior quantidade de metal líquido, na parte superior da lingoteira, que diminuirá a tendência de surgimento de rechupes primários e secundários. Nas execuções subsequentes considerou-se a presença de pó exotérmico.

## 7.2 Influência da temperatura inicial do metal líquido

A temperatura inicial do metal líquido na lingoteira depende diretamente da temperatura de vazamento, ou seja, uma maior temperatura de vazamento define uma maior temperatura inicial e vice-versa.

Na aplicação do modelo, considerou-se que a temperatura do metal líquido na lingoteira é homogênea, e para a execução do programa, adotou-se duas temperaturas: 1500°C e 1600°C.

A temperatura inicial do metal líquido influencia diretamente algumas características do lingote tais como estrutura, segregações e defeitos de contração.

A Figura 7.4 mostra as curvas de temperatura líquidus e sólidas para ambos os casos, decorridos 5400s de solidificação.

Pode-se notar que para uma temperatura inicial de 1500°C tem-se após 5400s, um poço de metal líquido menos profundo que para 1600°C, sendo maior a possibilidade de ocorrer defeitos de contração.

Por outro lado, através da análise das formas de curvas de temperaturas sólidas, nota-se que para temperatura inicial igual a 1600°C, tem-se uma solidificação mais lenta e portanto uma maior incidência de segregações e uma estrutura mais grosseira, que para temperatura inicial igual a 1500°C.

Os resultados apresentados mostram que o modelo desenvolvido permite a análise da influência da temperatura inicial do metal líquido na lingoteira nos perfis sólidas e líquidas, ao longo do tempo.

## 7.3 Espessura do molde

Sabe-se que para o lingotamento em moldes metálicos, a maior parte do calor perdido pelo metal líquido durante a solidificação é absorvida pelo molde. Portanto a sua espessura influencia diretamente no maior ou menor tempo de solidificação. Ou seja, quando maior a espessura do molde, menor é o tempo de solidificação, o que significa uma estrutura mais refinada e menor índice de segregação. Esta relação é verdadeira até uma certa espessura crítica a partir da qual, qualquer incremento na mesma não mais influenciará no tempo de solidificação. A partir desta espessura o molde é denominado semi-infinito.

A Figura 7.5 mostra os perfis das isotermais líquidas e sólidas para espessuras de molde igual a 240mm e 120mm, decorridos 6600s desde o início da solidificação.

Nota-se a existência de uma zona pastosa bem maior para o caso da lingoteira com menor espessura, em decorrência a uma solidificação mais lenta, o que ocasionará uma estrutura final mais grosseira e uma maior ocorrência de segregações.

Pode-se obter, através da simulação numérica, o tempo necessário para que a solidificação atinja o centro do lingote. Para uma espessura de molde igual a 240mm, este tempo é de 6050s, enquanto que para uma espessura de molde igual a 120mm este tempo é de 6825s. Portanto, para o segundo caso, o tempo de solidificação é 12,8% maior que para o primeiro caso.

Além do programa computacional permitir a determinação do tempo de solidificação total e dos perfis sólidos e líquidos, é possível determinar-se também a espessura crítica. Basta efetuar-se simulações subseqüentes variando-se a espessura do molde através de pequenos incrementos, partindo-se de uma espessura bem pequena. Ao determinar-se uma espessura onde o tempo de solidificação não mais varie significativamente, em simulações posteriores, obtém-se a espessura crítica.

#### **7.4 Influência da altura da cabeça-quente**

A fim de se manter uma maior quantidade de metal líquido no topo do lingote para evitar o aparecimento de defeitos de contração, utiliza-se um isolamento lateral cujo comprimento define a altura da cabeça-quente.

Em todas as simulações anteriores considerou-se esta altura (ou comprimento da posição isolada) igual a 240mm e a condutibilidade do isolamento igual a zero, ou seja, isolante ideal.

Para a avaliação da influência da altura da cabeça-quente na profundidade do poço líquido, foram realizadas simulações com comprimento do isolante igual a 330mm e 150mm, considerando-se seu isolamento ideal.

A Figura 7.6 mostra os perfis sólidos e líquidos para estes dois casos, após 6000s de solidificação.

Vê-se que o modelo matemático é capaz de revelar a influência da altura da cabeça-quente nos perfis térmicos do metal. Para um isolante com comprimento igual a 150mm nota-se que o poço de metal líquido é bem menos profundo que para o isolante com 330mm de comprimento, o que faz aumentar o risco da ocorrência de defeitos de contração como rechupes primários e secundários.



### 7.5 Influência das dimensões do lingote

As dimensões do diâmetro e altura do lingote influenciam preponderantemente no tempo de solidificação e portanto na qualidade da peça quanto a presença de porosidades e rechupes, segregações e morfologia da estrutura.

Sabe-se que para uma mesma quantidade de massa metálica, quanto maior a relação altura/diâmetro do lingote, menor será o tempo de solidificação, pois mais eficiente será a extração lateral de calor que rege a solidificação de um lingote.

As Figuras 7.7 e 7.8 mostram os perfis sólidos e líquidos para dois lingotes diferentes, após 4200s. O primeiro tendo uma relação altura/diâmetro maior que o segundo. O que se vê, através dos resultados obtidos da simulação numérica, é que no primeiro caso o material tem maior propensão à ocorrência de defeitos de contração devido à grande profundidade do perfil sólido. No segundo caso, a ocorrência de defeitos de contração é menor porque o processo de solidificação é caracterizado por uma maior proximidade entre o perfil sólido e líquido, mas como a solidificação é mais lenta, obtém-se um material onde as segregações são mais fortes e a estrutura mais grosseira.

O tempo para que a frente de solidificação atingisse o centro do lingote para a primeira relação altura/diâmetro foi 4290s e a para a segunda relação 8580s.

Portanto, através deste programa computacional, pode-se fazer uma previsão da influência nos perfis térmicos do metal de modificações dimensionais do lingote.

### 7.6 Influência da condutibilidade do isolante da cabeça-quente

Até agora tem-se considerado que o isolamento lateral da cabeça-quente comporta-se idealmente. Mas sabe-se que não é assim. Ou seja, ao utilizar-se isolantes diferentes com condutibilidades diferentes, obtém-se poços de metal líquido no topo do lingote com morfologias diferentes.

Por isto, o programa computacional foi modificado no sentido de considerar esta condutibilidade, a fim de poder prever os perfis sólido e líquido, em função da mesma.

As Figuras 7.9 a 7.11 mostram estes perfis para diferentes valores de condutibilidade do isolante, após 6000s de processo.

Nota-se de fato, que, quanto maior a condutibilidade do isolante, menor

é o poço de metal líquido no topo do lingote, e portanto maior a tendência da ocorrência de defeitos de contração.

Os resultados apresentados mostram que o modelo matemático permite uma previsão da influência do valor da condutibilidade do isolante nos perfis térmicos do metal, durante solidificação.

Pode-se também obter com o modelo matemático, o estado térmico do metal desde os períodos iniciais até o final da solidificação, obtendo-se assim uma previsão da evolução da solidificação do metal com o tempo. As Figuras 7.12 a 7.17 mostram esta evolução com o tempo, para condutibilidade do isolante da cabeça-quente igual a  $0,12 \text{ w/m.k}$ .

### **7.7 Influência do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde na temperatura da superfície do metal**

Este modelo proporciona também a possibilidade de análise da influência do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde na temperatura da superfície do lingote.

A Figura 7.18 mostra a evolução da temperatura durante o processo em um ponto na superfície do lingote, à meia altura do mesmo, para várias condições de resistência térmica na interface. No caso do coeficiente variável, adotou-se a mesma variação da Figura 7.2.

Nota-se, conforme a previsão apresentada pelo modelo matemático, que quanto maior o valor do coeficiente, mais rápido será o resfriamento do metal na superfície, e também que há uma tendência de se atingir uma temperatura constante após algum tempo.

Pode-se ver também que quanto maior o valor do coeficiente, maior a tendência do reaquecimento da superfície do lingote, a partir de um determinado instante. Isto pode ser explicado pelo fato que quanto maior  $h$ , mais rápido será o aquecimento do molde e portanto a sua saturação térmica, o que faz com que a temperatura na superfície do metal fique mais susceptível ao calor proveniente das regiões centrais do lingote.

Comparando-se as figuras 7.2 e 7.18, nota-se que a influência de  $h$  na solidificação do metal decresce da superfície para o centro.

### **7.8. Influência da variação da espessura do molde na temperatura da superfície do metal**

Já foi mostrado como a espessura do molde pode influenciar nos perfis

térmicos das temperaturas sólidos e líquidos e no tempo total de solidificação. Agora será vista a sua influência na temperatura da superfície do metal.

A Figura 7.19 mostra a variação da temperatura na superfície do lingote (à meia altura) com o tempo, para várias espessuras de molde.

É visível que quanto menor a espessura do molde maior é o reaquecimento da superfície do metal, com o decorrer do processo, após um rápido resfriamento inicial. Isto se dá devido à maior rapidez com que o molde alcança um estado de saturação térmica, para espessuras menores.

A influência da variação da espessura do molde no comportamento térmico do metal diminui a medida que essa espessura aumenta. Isto porque, quanto maior a espessura do molde, maior a tendência do mesmo de se comportar como sendo semi-infinito, situação a partir da qual, incrementos na espessura não influenciam mais no comportamento térmico do metal.

A partir do conjunto de resultados provenientes da execução computacional do modelo matemático, podem ser obtidas curvas de temperatura x tempo para qualquer posição do lingote e do molde e isothermas no interior do metal e do molde para qualquer instante.

É importante salientar que foram mostrados neste capítulo apenas alguns dos exemplos de aplicação do modelo, tendo o mesmo uma extensa gama de possibilidades de aplicação.

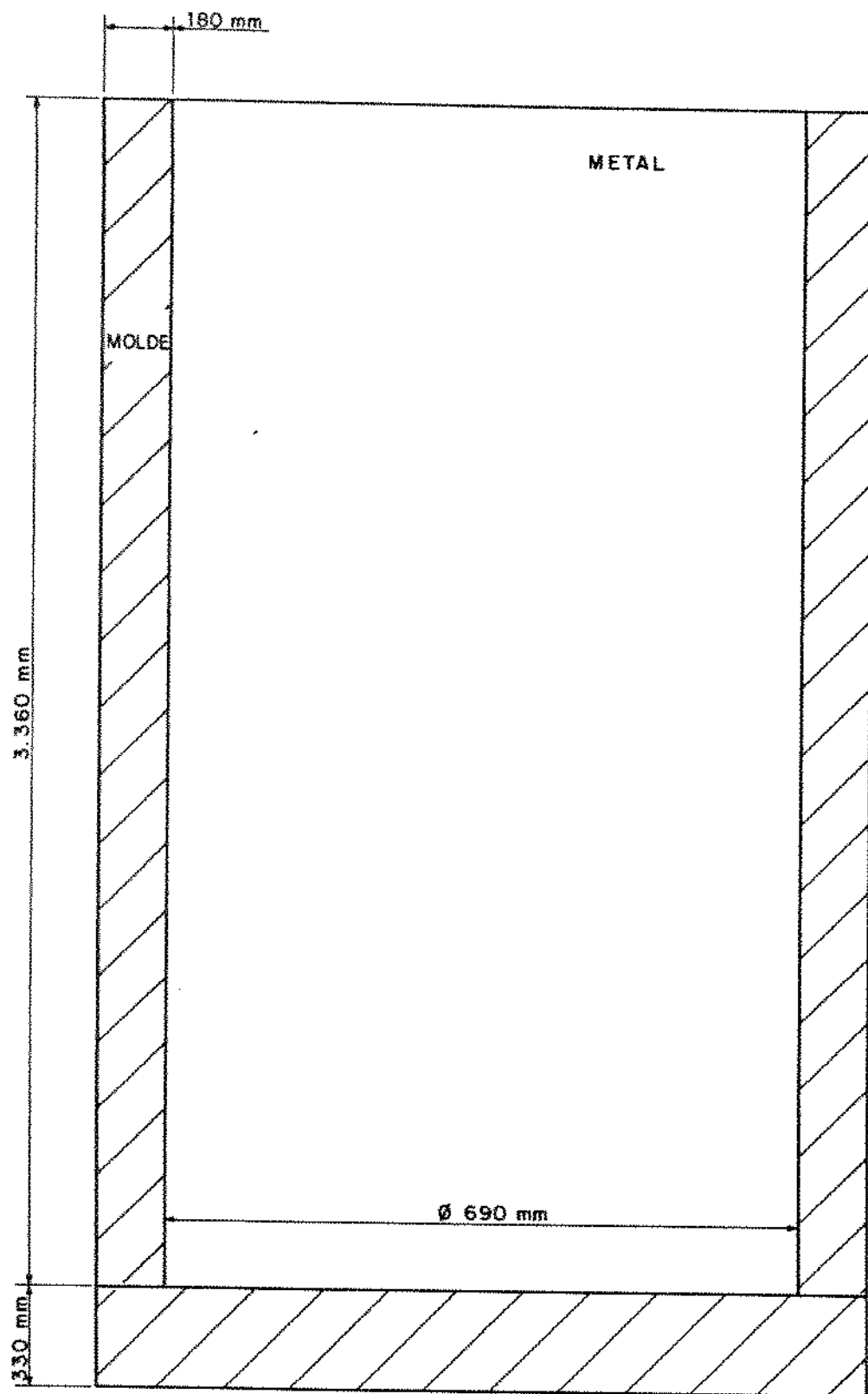


Figura 7.1 - Sistema metal/molde.

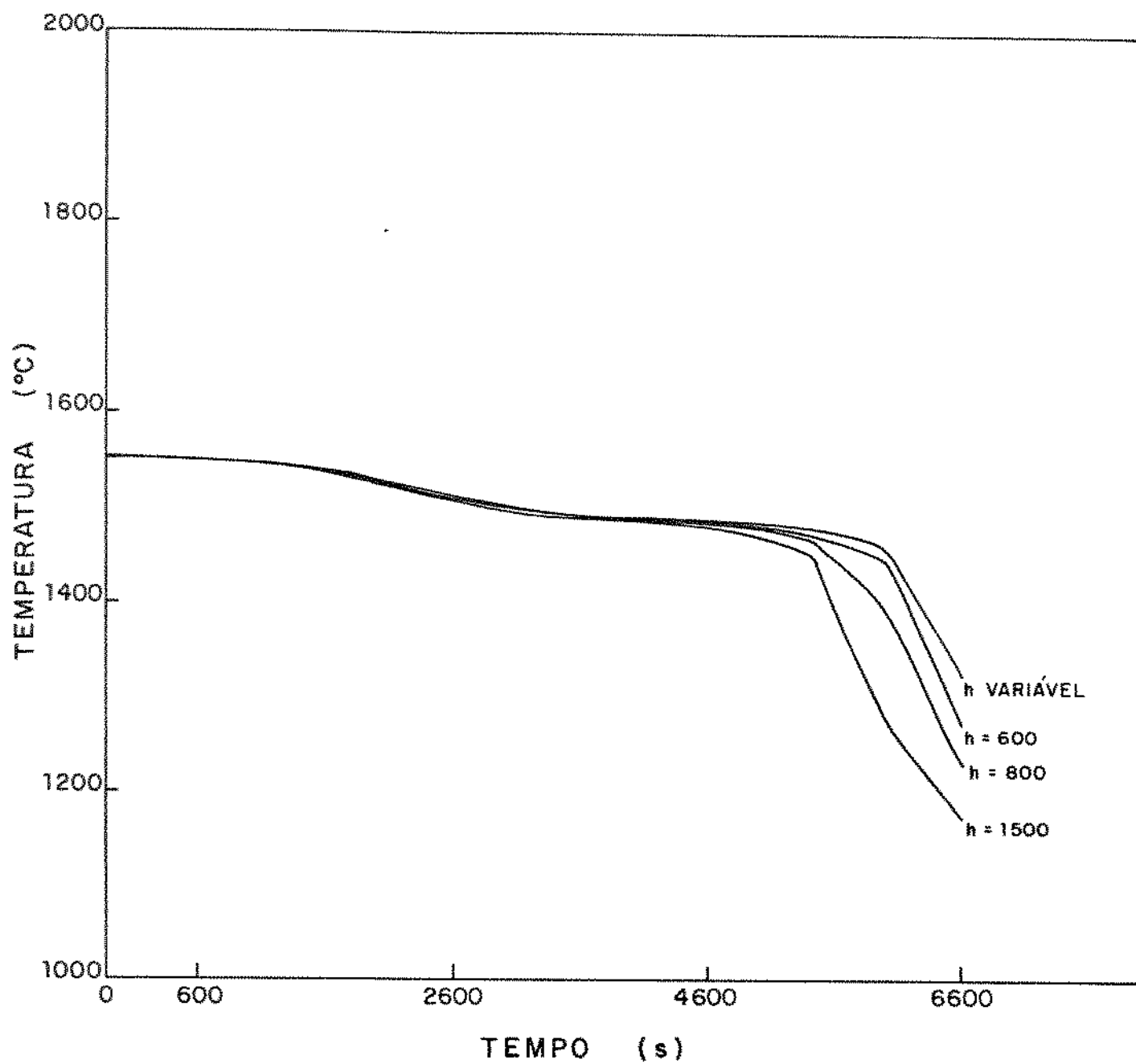


Figura 7.2 - Perfis térmicos para o centro do lingote.

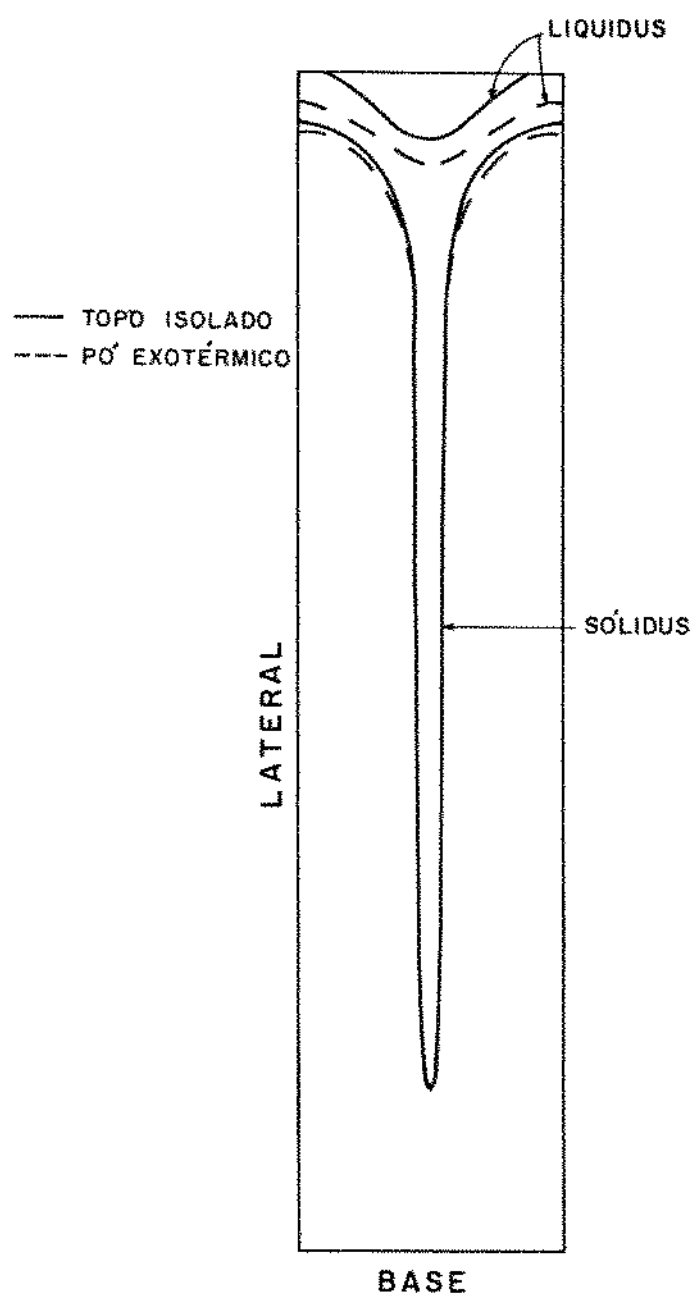


Figura 7.3 - Influência do pó exotérmico.

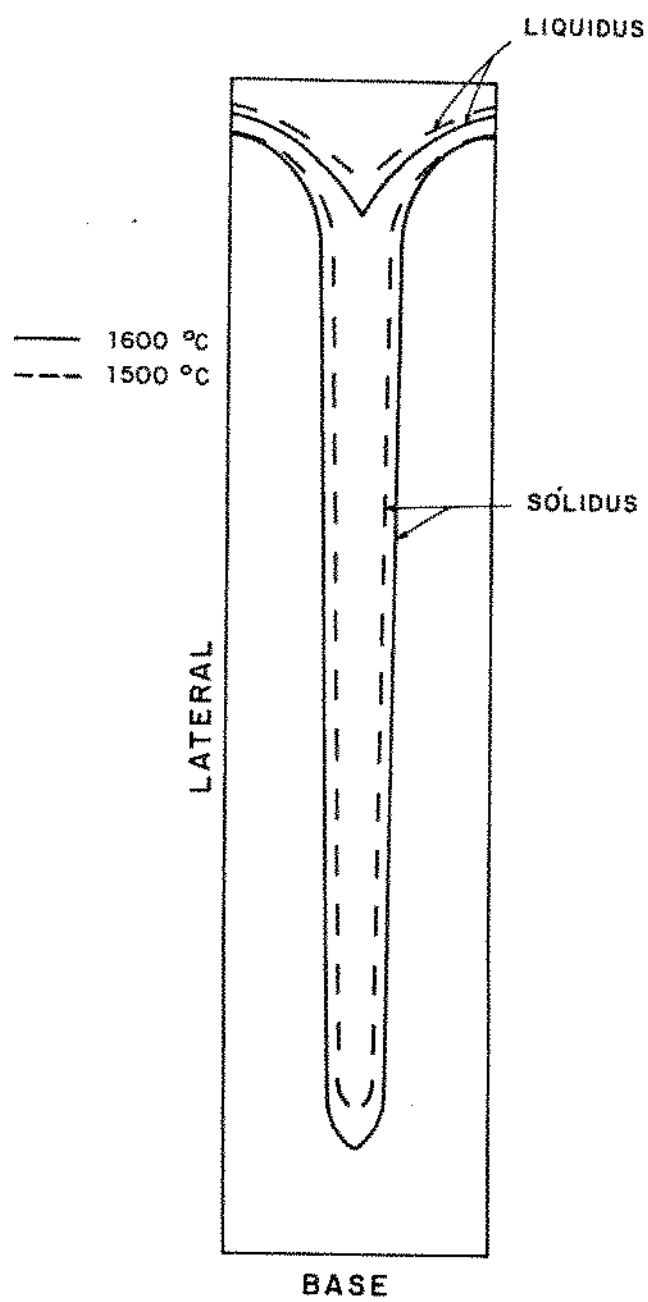


Figura 7.4 - Influência da temperatura inicial de solidificação.

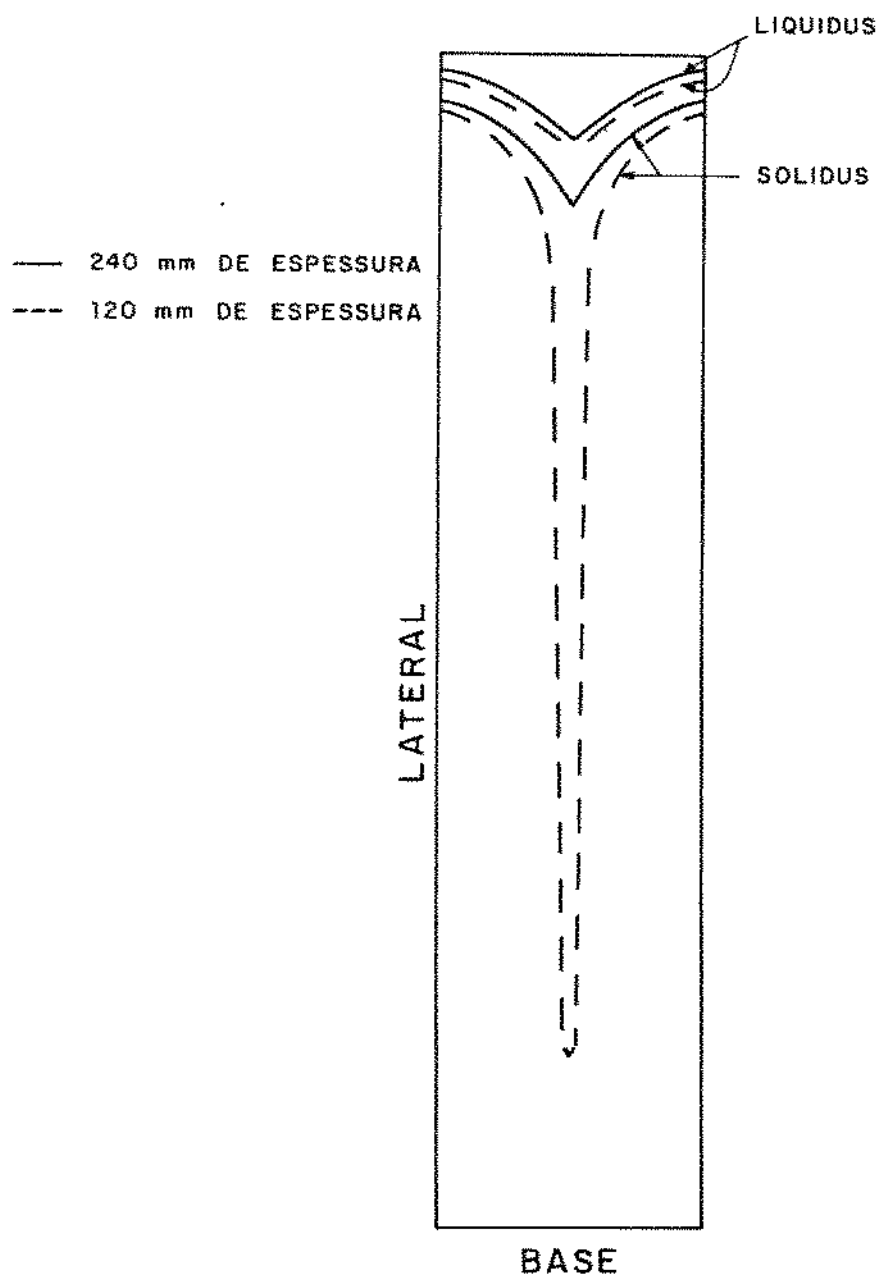


Figura 7.5 - Influência da espessura do molde.



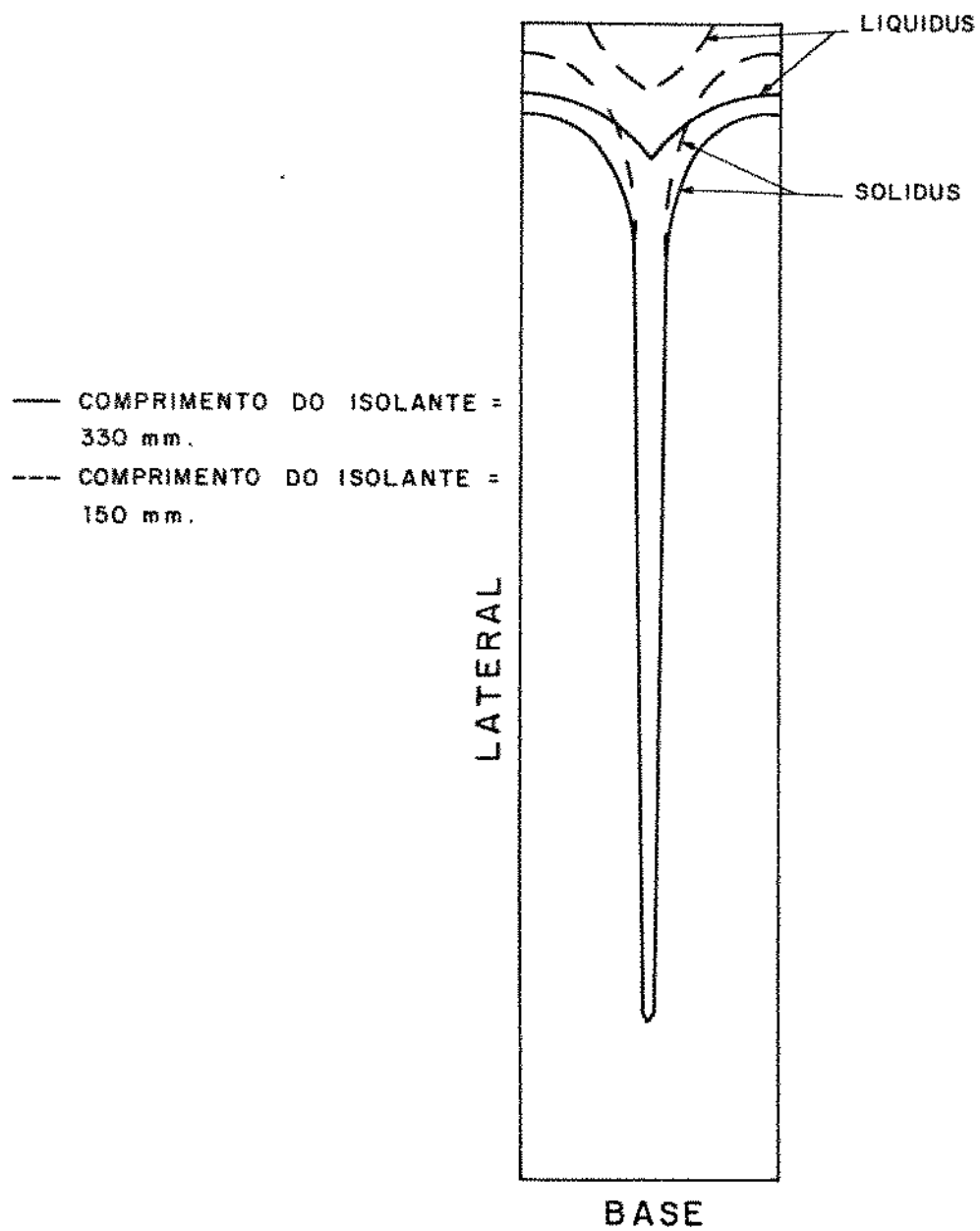


Figura 7.6 - Influência da altura da cabeça quente.

DIÂMETRO MÉDIO = 570 mm  
ALTURA = 4920 mm

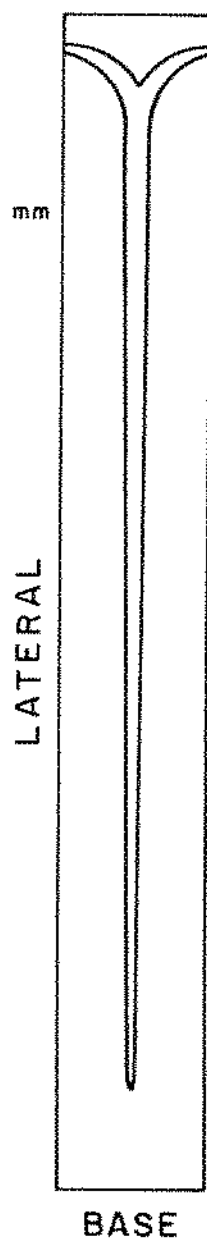
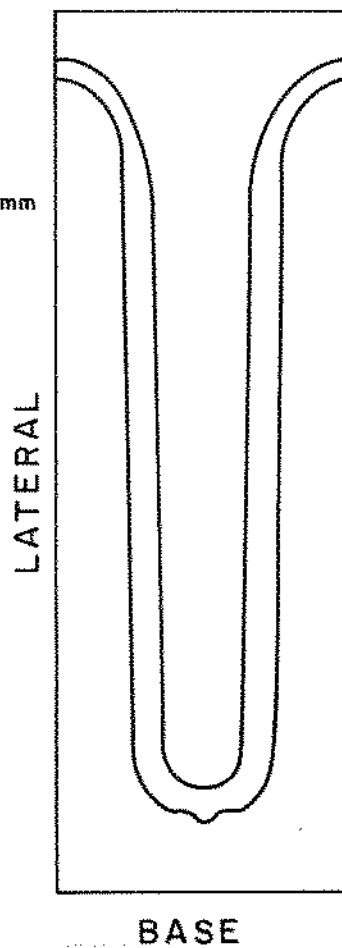


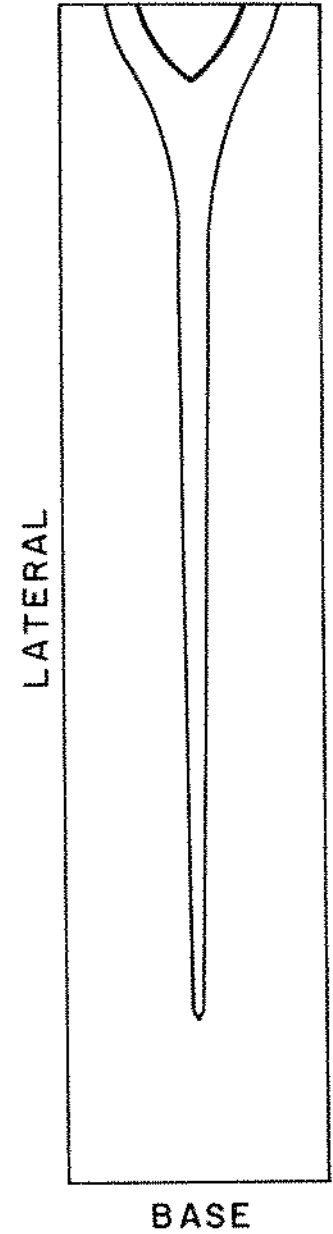
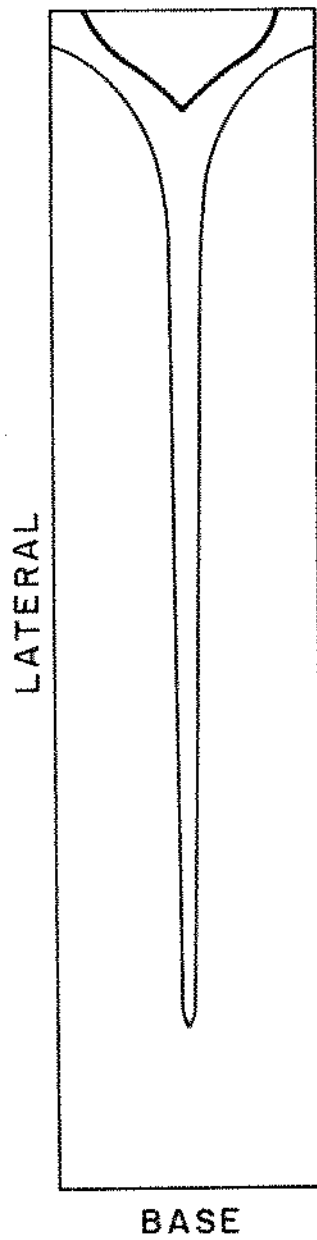
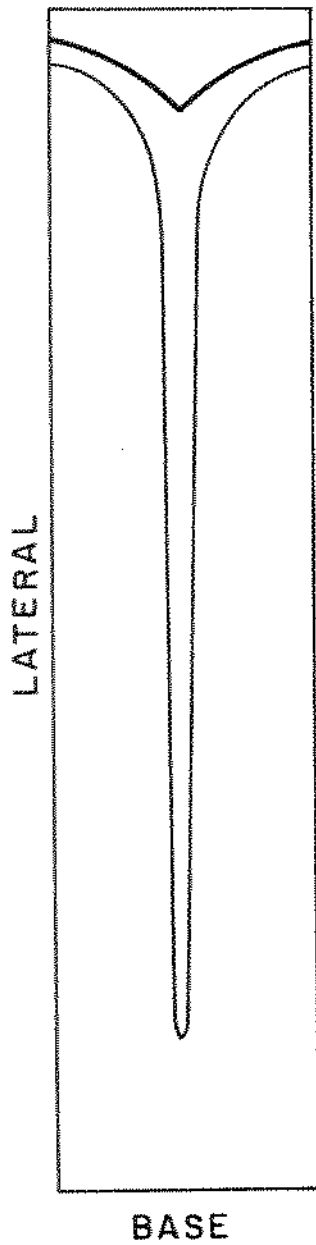
Figura 7.7 - Influência das dimensões do lingote.

DIÂMETRO MÉDIO = 810 mm  
ALTURA = 2430 mm



*Figura 7.8 - Influência das dimensões do lingote.*

— LIQUIDUS  
— SOLIDUS

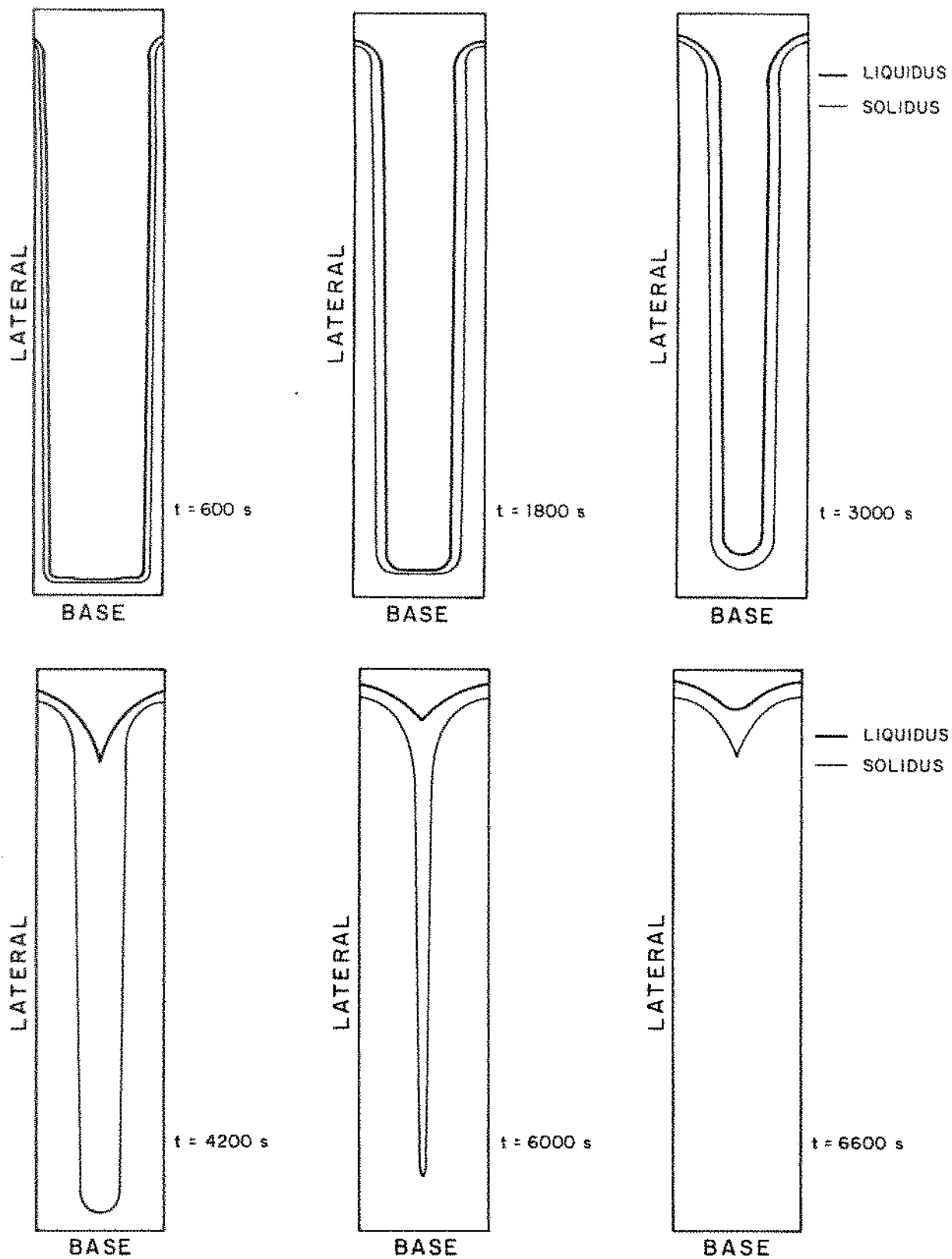


$K_{\text{ISOLANTE}} = 0,12 \text{ W/m.K}$

$K_{\text{ISOLANTE}} = 1,0 \text{ W/m.K}$

$K_{\text{ISOLANTE}} = 5,0 \text{ W/m.K}$

*Figuras 7.9 a 7.11 - Influência da condutibilidade do isolante.*



Figuras 7.12 a 7.17 - Evolução da solidificação.

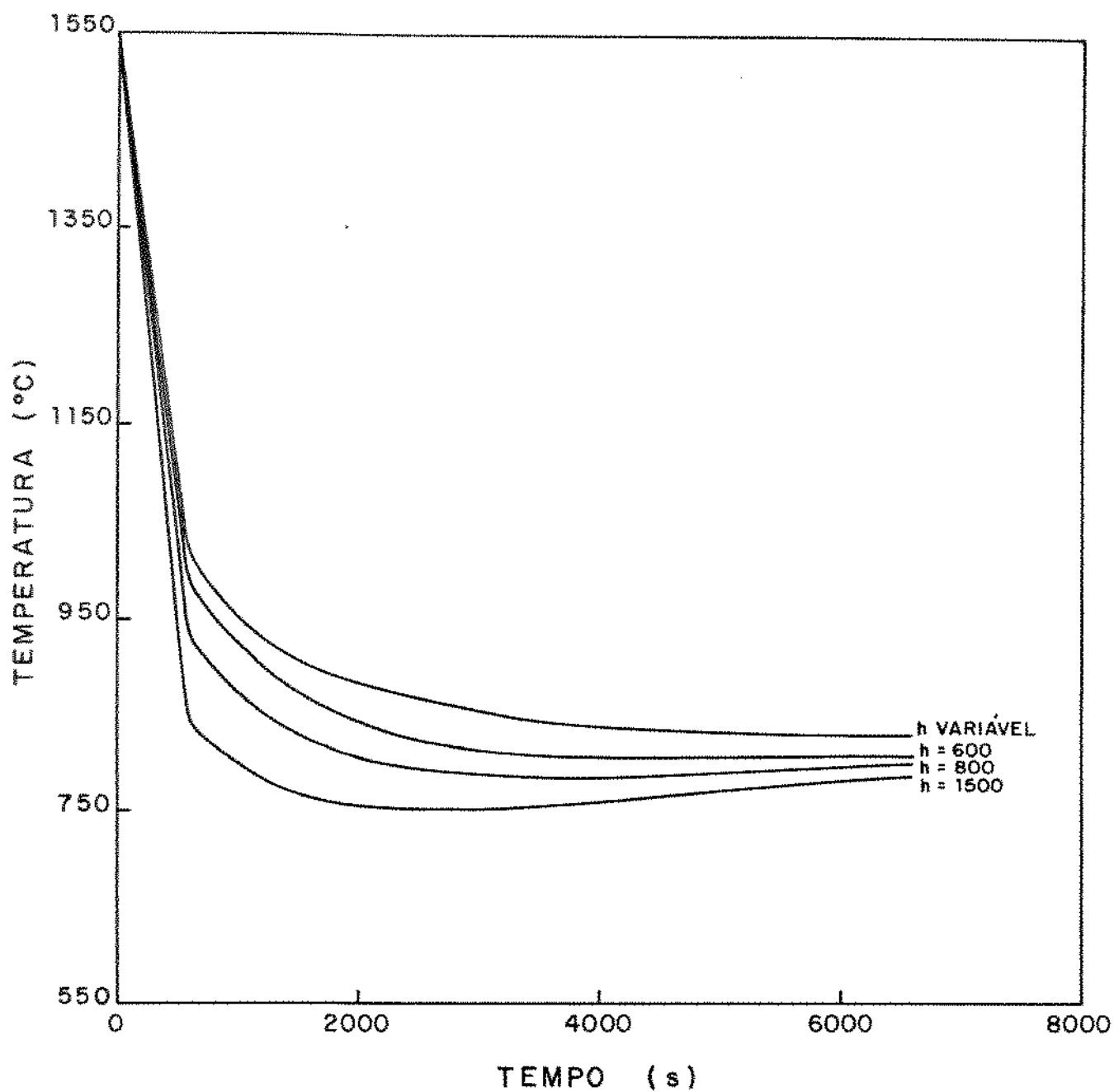


Figura 7.18 - Influência do h na temperatura da superfície do metal – ponto a 1/2 altura do lingote.

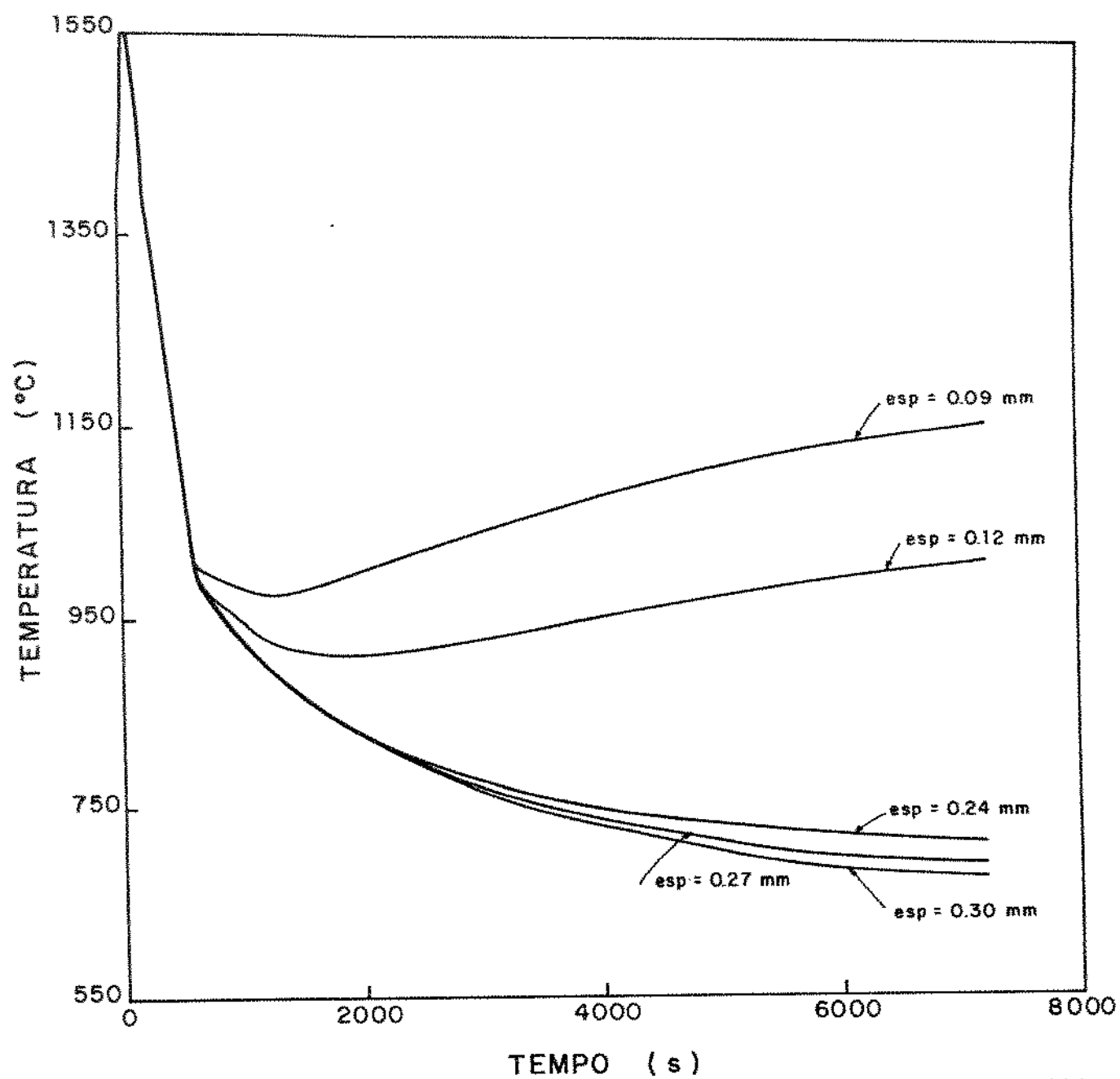


Figura 7.19 - Efeito da variação da espessura do molde sobre a temperatura da superfície do lingote.

## 8. CONCLUSÕES

O modelo permite a simulação completa de um processo de solidificação de aços em molde cilíndrico e maciço de ferro fundido, levando-se em conta como formas de transferência de calor a condução no interior do metal líquido, metal sólido e molde, contato imperfeito na interface metal/molde e convecção na superfície do molde. Considerou-se o fluxo de calor axial e radial. O modelo permite que se considere o uso de pós exotérmicos e isolantes na cabeça-quente. O modelo permite também analisar a influência da modificação de qualquer parâmetro do sistema metal/molde sobre a solidificação.

Algumas das aplicações utilizadas permite-nos as seguintes conclusões:

- As técnicas experimentais utilizadas para determinação dos perfis de temperatura do aço e do molde, durante o processo de resfriamento e solidificação, mostraram uma boa repetitividade pois as diferenças de resultados obtidos separadamente foram pequenos (de 2 a 4%).

- Os resultados obtidos através da aplicação do modelo matemático, para o caso de lingotes cilíndricos, mostraram uma boa concordância com os obtidos experimentalmente, donde pode-se concluir que o modelo representa com boa precisão o comportamento térmico real do lingote, durante resfriamento e solidificação (5%).

- O modelo matemático desenvolvido pode ser aplicado a quaisquer dimensões de lingote cilíndrico, desde que sejam resguardadas, na escolha do tamanho da malha e do intervalo de tempo, as propriedades de consistência, convergência e estabilidade do mesmo. Uma maior precisão ficará por conta da capacidade do computador utilizado, de modo a permitir menores intervalos de tempo e tamanhos de malhas.

- No caso do estudo da solidificação de lingotes com grandes dimensões, a resistência térmica à transferência de calor na interface metal/molde tem uma influência menos significativa no processo de solidificação do metal que para casos onde as dimensões do lingote são menores. No caso de grandes lingotes, a influência do coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde decresce da sua superfície para o centro.

- O modelo desenvolvido permite avaliar a influência da utilização de pó



exotérmico, em função da máxima temperatura que o mesmo atingirá em contato com o metal líquido e do tempo no qual liberará calor, na maior ou menor tendência da surgimento de defeitos de contração.

- A influência que a temperatura inicial do metal líquido exerce sobre as variações de temperatura no sistema metal/molde, ao longo do processo pode ser determinada pelo modelo matemático.

- Através do modelo matemático, pode-se analisar o efeito, sobre o comportamento térmico do metal e tempo total de solidificação, da espessura da lingoteira. Pode-se determinar também a sua espessura crítica.

- O programa computacional desenvolvido pode ser aplicado na análise do isolamento utilizado na cabeça-quente do lingote, quanto a altura do isolante e sua condutibilidade térmica, e sua influência sobre os perfis térmicos do metal nesta região.

- No projeto de novos lingotes, este programa pode ser aplicado para mostrar qual o efeito das relações diâmetros do lingote/altura do lingote no comportamento térmico do metal, durante a sua solidificação e resfriamento.

- O modelo permite determinar a variação da temperatura com o tempo em qualquer ponto no interior do lingote e molde.

## 9. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DO TRABALHO

Segue-se agora, algumas sugestões para continuidade e aperfeiçoamento deste trabalho:

1- Monitoramento térmico de um lingote de maiores dimensões (2 toneladas) para a determinação da distribuição real de temperaturas, no interior do metal, imediatamente após o vazamento, sendo que estes dados serão utilizados em execuções posteriores.

2- Aplicação do modelo desenvolvido para análise da solidificação de outros tipos de aços.

3- Avaliar a aplicabilidade deste modelo na análise da solidificação de um lingote que tenha superfície corrugada (de interesse prático), através da comparação entre resultados experimentais e calculados e propor eventuais modificações.

4- Aplicação do modelo desenvolvido para previsão de microestrutura e defeitos de solidificação.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 RUDDLE, R.W., *The Solidification of Castings*. 2a. ed. Londres. Inst. of metals, 1957.
- 2 DUSINBERRE, G.M., Numeral Methods for Transient Heat Flow. *Transaction of the A.S.M.E.*, New York, 703-712, nov. 1945.
- 3 SARJANT, R.J., e SLACK, M.R., Internal Temperature Distribution in the Cooling and Reheating. *Journal of the Iron and Steel Institute*, 428-444, Ago. 1945.
- 4 PRICE, P.H., e SLACK, M.R. *Brit. J. Appl. Phys.*, 3: 379-384, 1952.
- 5 EYRES, N.R., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 240(A): 1-57, 1946.
- 6 CARNAHAN, B. e LUTHER, H.A. e WILKES, J., *Applied Numerical Methods*. Ed. J. Wiley, 1969.
- 7 PERKINS, A. e IRVING, W.R., Two Dimensional Heat Transfer Model for Continuous Casting of Steel. *The Metals Society*, London, 187-199, Fev. 1973.
- 8 DAVIES, V. de L. e STOKKE, S. e WESTBY, O., Numerical Computation of Heat and Temperature Distribution in Castings. *The British Foundryman*, 66:305-313, Nov. 1973.
- 9 HARTOG, H.W. e RABENBERG, J.M. e WILLEENSE, J., Application of a Mathematical Model in the Study of the Ingot Solidification Process. *Ironmaking and Steelmaking*, 2: 134-144, 1975.
- 10 JEYARAJAN, A. e PEHLKE, R.D., Computer Simulation of Solidification of a Casting with a Chill. *AFS Transactions*, 647-652, 1976.
- 11 SULLY, L.J.D., The Thermal Interface Between Castings and Chill Molds. *AFS Transactions*, 735-744, 1976.

- 12 NISHIDA, Y. e IMAI, T. e MATSUBARA, H., Numerical Analysis of Solidification of Cast Iron in Metal Molds. *The British Foundryman*, 70: 304-310, Out. 1977.
- 13 CLYNE, T.W., The Use of Heat Flow Modeling to Explore Solidification Phenomena. *Metall. Transactions*, 13(B): 471-478, Set. 1982.
- 14 IMAFUKU, I. e CHIJIWA, K., A Mathematical Model for Shrinkage Cavity Prediction in Steel Castings. *AFS Transactions*, 527-540, 1983.
- 15 IMAFUKU, I., A Study on the Estimation of the Generated Shrinkage Cavity in Steel Casting, n° 2, Theoretical Approach Part 2. *Japan Soc. Meth. Engineers*, 69-96, Mar. 1982.
- 16 IMAFUKU, I. e CHIJIWA, K., Application and Consideration of the Shrinkage Cavity Prediction Method. *AFS Transactions*, 463-474, 1983.
- 17 RADER, L.A. e HAINES, D.R., Computer Simulation of Experimental Riser Studies. *AFS Transactions*, 89-94, 1983.
- 18 HO, K. e PEHLKE, R.D., Transient Methods for Determination of Metal-Mold Interfacial Heat Transfer. *AFS Transactions*, 689-698, 1983.
- 19 HONG, C.P. e UMEDA, T. e KIMURA, Y., Numerical Models for Casting Solidification: Part I. The Coupling of the Boundary Element and Finite Difference Methods for Solidification Problems. *Metall. Transactions*, 15(B): 91-99, Mar. 1984.
- 20 HONG, C.P. e UMEDA, T. e KIMURA, Y., Numerical Models for Casting Solidification: Part II. Application of the Boundary Method for Solidification Problems. *Metall. Transactions*, 15(B): 101-107, Mar. 1984.
- 21 JACOBI, H. e KAESTLE, G. e WÜNNENBERG, K., Heat Transfer in Cyclic Secondary Cooling During Solidification of Steel. *Ironmaking and Steelmaking*, 11(3): 132-145, 1984.

- 22 LAKI, R.S. e BEECH J. e DAVIES, G.J., Curved - Boundary heat Transfer Model and its Application to Meniscus Zone During Casting. *Ironmaking and Steel Making*, 11(5): 283-290, 1984.
- 23 THOMAS, B.G. e SAMARASEKERA, I.V. e BRIMACOMBE, J.K., Comparison of Numerical Modeling Techniques for Complex, Two-dimensional, Transient Heat-conduction problems. *Metall. Trans.*, 15(B): 307-318, jun. 1984.
- 24 HO, K. e PEHLKE, R.D., Mechanisms of Heat Transfer at a Metal-Mold Interface. *AFS Transactions*, 587-598, 1984.
- 25 BECH, J.V., Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem. *Int. Journal Heat Mass Transfer*, 13: 703-716, 1970.
- 26 ZENG, X.C. e PEHLKE, R.D., Numerical Simulation of Solidification for a Copper - Base Alloy Castings. *AFS Trans.*, 479-488, 1984.
- 27 DANTZIG, J.A. e LU, S.C., Modeling of the Heat Flow in Sand Casting: Part I. The Boundary Curvature Method. *Metall. Transf.*, 16(B): 195-201, jun. 1985.
- 28 DANTZIG, J.A. e WIESE, J.W., Modeling of Heat Flow in sand Castings. Part II. Applications of the Boundary Curvature Method. *Metall. Trans.*, 16(B): 203-209, jun. 1985.
- 29 KUBO, K. e PEHLKE, R.D., Mathematical Modeling of Porosity Formation in Solidification. *Metall. Trans.*, 16(B): 359-366, jun. 1985.
- 30 SHARMA, G.K. et al., Variations of the Heat Transfer Coefficients During Solidification of Casting in Metallic Moulds. *The British Found.*, 465-468, nov. 1985.
- 31 SHARMA, G.K. et. al., Experimental Investigation of ther Influence of Casting Parameters on the Formation and Distribution of Air GAP During the Solidification of Casting in Metallic Molds. *AFS Transactions*, 29-33, 1985.

- 32 MINAKAWA, S. e SAMARASEKERA, I.V. e WEINBERG, F., Centerline Porosity in Plate Casting. *Metall. Trans.*, 16(B): 823-829, dez. 1985.
- 33 BISHOP, H.F. e PELLINI, W.S., *AFS Transactions*, 58: 185, 1950.
- 34 ISAAC, J. e REDDY, G.P. e SHARMA, G.K., Numerical Simulation of Solidification of Casting in Metallic Molds. *AFS. Transaction*, 123-132, 1985.
- 35 KEARNS, K.J., Computer Simulation of the Permanent Mold Process. *Modern Casting*, 29-23, out. 1986.
- 36 NISHIDA, Y. e DROSTE, W. e ENGLER, S., The Air-GAP Formation Process at the Casting-Mold Interface and the Heat Transfer Mechanism Through the GAP. *Metall. Trans.*, 17(B): 833-844, dez. 1986.
- 37 HOU, T.X. e PEHLKE, R.D., Computation of Solidification of a Steel Casting in a Sand Mold. *AFS Transaction*, 477-484, 1986.
- 38 ROLLETT, A.D. e LEWIS, H.D., Casting Simulation in Vacuum Induction Melting. *AFS Transactions*, 349-372, 1986.
- 39 BEFFEL, M.J. e WILKES, J.O. e PEHLKE, R.D., Finite Element Simulation of Casting Processes. *AFS Transactions*, 757-764, 1986.
- 40 ABIS, S., Numerical Simulation of Solidification in an Aluminium Casting. *Metall. Trans.*, 17(B): 209-215, mar. 1986.
- 41 LEMMON, E.C., *Numerical Methods in Heat Transfer*. Chichester, John Wiley and Sons, 1985.
- 42 HO, K. e PEHLKE, R.D., Comparison of Finite Element and General Finite Difference Methods for Transient Heat Flow. *Materials Science and Technology*, 3: 466-476, jun. 1987.
- 43 THOMAS, B.G. e SAMARASEKERA, I.V. e BRIMACOMBE, J.K., Mathematical Model of the Thermal Processing of Steel Ingots: Part I. Heat Flow Model. *Metall Trans.*, 18(B): 119-129, mar. 1987.

- 44 THOMAS, B.G. e SAMARASEKERA, I.V. e BRIMACOMBE, J.K., Mathematical Model of the Thermal Processing of Steel Ingots: Part II. Stress Model. *Metall. Trans.*, 18(B): 131-147, mar. 1987.
- 45 BENNON, W.D. e INCROPERA, F.P., The Evolution of Macro-Segregation in Statically Cast Binary Ingots. *Metall. Trans.*, 18(B): 611-616, set. 1987.
- 46 PATANKAR, S.V., *Numerical Heat Transfer*, 4: 409-425, 1981.
- 47 SMILEY, L.E., Solidification Modeling on a PC: A Foundryman's Approach. *Modern Casting*, 32-33, jan. 1987.
- 48 BERRY, J.T. e PEHLKE, R.D., Modeling of Solidification Heat Transfer. *Metals Handbook*, 858-866, 1988.
- 49 HWANG, W.S. e STOEHR, R.A., Modeling of Fluid Flow. *Metals Handbook*, 867-876, 1988.
- 50 RAPPAZ, M. e STEFANESCU, D.M., Modeling of Microstructural Evolution. *Metals Handbook*, 883-891, 1988.
- 51 GARCIA, A., *Solidificação dos Metais*, UNICAMP, Apostila de Curso.
- 52 GARCIA, A. e PRATES, M., Mathematical Model for the unidirectional Solidification of Metals: I. Cooled Molds. *Metall. Trans.*, 9(B): 449-457, set. 1978.
- 53 ÖZISIK, M.N., *Heat Conduction*, Ed. Wiley, 1980.
- 54 SHIH, T.M., *Numerical Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- 55 RICHTMYER, R.D. e MORTON, K.N., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Cap. 4, New York, Wiley-Interscience, 1967.
- 56 AMES, W.F., *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Cap. 2, New York, Academic, 1977.

- 57 NEUMANN, J. von, Proposal and Analysis of a Numerical Method for the Treatment of Hydrodynamical Shock Problems. *Nath. Def. Res. Committee Rept.*, AM-551, mar. 1944.
- 58 O'BRIEN, G.G. e HYMAN, M.A. e KAPLAN, S., A Study of the Numerical Solution of Partial Differential Equations, *J. Math. Phys.*, 29: 223-251, 1951.
- 59 SANTOS, R.G., *Métodos Numéricos Aplicados a Solidificação*. UNICAMP, Apostila de Curso.
- 60 GALLAGHER, R.H., *Finite Element Analysis, Fundamentals*. Prentice Hall, 1975.
- 61 NORRIE, D.H. e de VRIES, G., *Finite Element Bibliography*. New York, Plenum, 1976.
- 62 ZIENKEWICZ, O.C., *The Finite Element Method*, pp. 20-21, Londres, McGraw-Hill, 1977.
- 63 McADAMS, W.H., *Heat Transmission*, Ed. McGraw-Hill, pp. 166-180, 1954.
- 64 JAKOB, M. e HAWKINS, G.A., *Elements of Heat Transfer*, Ed. John Wiley and Sons.



## APÊNDICE 1

Simbologia geral:

$a$  - difusibilidade ( $m^2/s$ ).

$A$  - área da seção da malha ( $m^2$ ).

$Bi$  - Número de Biot para metal/molde.

$Bim$  - Número de Biot para molde/metal.

$Bimat$  - Número de Biot para molde/atmosfera.

$C, C_p$  - Capacidade calorífica do metal ( $J/Kg.K$ ).

$C_m$  - Capacidade calorífica do molde ( $J/Kg.K$ ).

$d$  - Densidade do metal ( $Kg/m^3$ ).

$d_m$  - Densidade do molde ( $Kg/m^3$ ).

$F_o$  - Número de Fourier.

$f_s$  - Fração de sólido.

$H$  - Entalpia ( $J/Kg$ ).

$h$  - Coeficiente de transferência de calor na interface metal/molde ( $W/m^2.K$ ).

$h_{atm}$  - Coeficiente de transferência convectiva de calor na interface molde/atmosfera ( $W/m^2.K$ ).

$i, j$  - Índices de posicionamento (linha e coluna respectivamente) da malha.

$K, K(T)$  - Condutibilidade térmica do metal ( $J/m.s.K$ ).

$K_m, K_m(T)$  - Condutibilidade térmica do molde ( $J/m.s.K$ ).

$L$  - Calor latente ( $J/Kg$ ).

$M$  - Número total de malhas na vertical (linhas) do lingote.

$Mm$  - Número total de malha na vertical (linhas) do molde.

$m$  - Massa ( $Kg$ ).

$N$  - Número total de malhas na horizontal (colunas) do lingote.

$Nm$  - Número total de malhas na horizontal (colunas) do molde.

$n$  - Índice do instante de tempo.

$Q$  - Calor liberado na solidificação ( $J/s$ ).

$r_i \Delta_r$  - Raio do cilindro; tamanho da malha para cilindro e esfera ( $m$ ).

$T, T'$  - Temperatura do metal ( $K, ^\circ C$ ).

$T_m, T'_m$  - Temperatura do molde ( $K, ^\circ C$ ).

$t, \Delta t$  - Tempo; intervalo de tempo ( $s$ ).

$T_L$  - Temperatura líquido ( $^\circ C$ ).

$T_s$  - Temperatura sólidos ( $^{\circ}\text{C}$ ).

$V$  - variável independente qualquer.

$x, y, z, i\Delta x$  - Coordenadas cartesianas; tamanho da malha para a placa plana (m).

Alfabeto Grego:

$\tau$  - Constante de Stefan-Boltzman.

$\varepsilon$  - Emissividade.

Sistema de unidades adotado: Sistema Internacional.