

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR Robson  
Pederiva E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 28, 12, 92  
h 16  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

## Identificação Paramétrica de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente

*Robson Pederiva*

Publicação FEM  
42/92

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Mecânica

TESE DE: DOUTORADO

TÍTULO DA TESE: IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA DE SISTEMAS  
MECÂNICOS EXCITADOS ESTOCASTICAMENTE

AUTOR: ROBSON PEDERIVA

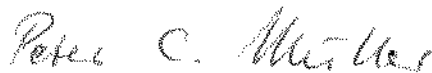
ORIENTADOR: PROF. DR. HANS INGO WEBER.†

APROVADA POR:



---

PROF. DR. HANS INGO WEBER, PRESIDENTE.



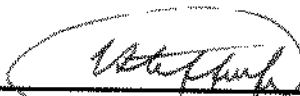
---

PROF. DR. PETER CHRISTIAN MÜLLER.



---

PROF. DR. AGENOR DE TOLEDO FLEURY.



---

PROF. DR. VALDER STEFFEN JÚNIOR.



---

PROF. DR. WAGNER CARADORI DO AMARAL.

CAMPINAS, 28 DE DEZEMBRO DE 1992.

*à Nilda e Marcelo,*

# Agradecimentos

Este trabalho foi realizado dentro de um programa tipo "sandwich", compreendendo uma parte realizada na Bergische Universität GH Wuppertal, Alemanha, junto ao Fachbereich Sicherheitstechnische Regelungs- und Messtechnik, sob orientação do Prof. Dr. rer. nat. Peter C. Müller. A outra parte, sob orientação do Prof. Dr. Ing. Hans Ingo Weber, foi realizada na Universidade Estadual de Campinas, junto ao Departamento de Projeto Mecânico.

Herrn Prof. Müller möchte ich meinem herzlichen Dank ausdrücken für die Übernahme und die Unterstützung während der Durchführung dieser Arbeit, sowie für die wertvolle Anregungen und Diskussionen.

Den Institutskollegen möchte ich für die Hilfsbereitschaft während meinen Aufenthalt in Deutschland danken.

Ao Prof. Weber os meus agradecimentos pela orientação, pela sua amizade e pelo seu empenho em me proporcionar condições para a realização deste programa.

Gostaria também de expressar meus agradecimentos:

- Ao Engo. Waldemar Scudeller Junior, pela sempre pronta ajuda na compilação do texto final.

- Ao Alexandre das Eyra Gil e à Luzia Gomes Ferreira Pavani, pela participação na digitação do texto.

- Ao Armando Arruda pela confecção cuidadosa dos desenhos.

- Aos amigos Loir A. Moreira, Rodmar Cardinali, Milton Dias Jr. e Luiz Roberto Xavier Ribeiro, pelo companheirismo e constante incentivo.

Finalmente, gostaria de agradecer ao DAAD pelo financiamento da parte alemã do programa "sandwich", assim como, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Robson Pederiva

# Resumo

Considera-se neste trabalho a identificação paramétrica de sistemas mecânicos excitados estocasticamente. São desenvolvidos dois métodos básicos para o tratamento destes sistemas. Um método baseia-se na equação matricial de Ljapunov, enquanto o outro, baseia-se na matriz fundamental do sistema. Estes procedimentos de estimação de parâmetros se restringem à utilização apenas das variáveis de estado medidas. A medição direta das excitações de caráter estocástico é dispensada. Excitações estocásticas do tipo ruído colorido são modeladas por meio de um sistema dinâmico excitado por ruído branco.

Apresenta-se uma análise numérica para diferentes casos estudados em um sistema rotativo com seis graus de liberdade.

# Abstract

The parameter identification of mechanical systems, excited by stochastic forces, is considered. Two basic methods are derived to deal with such systems. One method is based on the Ljapunov matrix equation and the other, on the fundamental matrix of the system. Both parameter estimation procedures are oriented to use only the measured state variables. The direct measurement of the stochastic excitation is not necessary. Stochastic excitation in coloured noise form is modeled by a dynamical system excited by white noise. The numerical analysis is presented for a rotor system with six degrees of freedom. Different measurement configurations are considered in the studied cases.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação do Problema . . . . .	2
1.2	Método por Correlações . . . . .	2
1.3	Objetivos do Trabalho . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Descrição Entrada-Saída Para Sistemas Mecânicos</b>	<b>6</b>
2.1	Equação de Estado . . . . .	7
2.2	Observabilidade e Controlabilidade . . . . .	9
2.3	Formas Normais da Equação de Estado . . . . .	10
2.4	Discretização da Equação de Estado no Tempo . . . . .	13
2.5	Transformação de Volta para o Modelo em Tempo Contínuo . . . . .	14
2.6	Identificação de Sistemas Mecânicos . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Sistemas Dinâmicos Excitados Estocasticamente</b>	<b>18</b>
3.1	Resposta de Sistemas Dinâmicos Excitados Estocasticamente . . . . .	19
3.2	Ruído Colorido como Sinal de Excitação . . . . .	21
3.3	Representação Alternativa de um Sistema Excitado por Ruído Colorido . . . . .	22
3.4	Transformação Inversa . . . . .	25
3.4.1	Medição do Vetor de Estado Completo . . . . .	25
3.4.2	Diminuição do Número de Variáveis Medidas. . . . .	30
3.5	Comentários . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Identificação através da Matriz Fundamental de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente</b>	<b>36</b>
4.1	Medição do Vetor de Estado sem Perturbações e Excitação Tipo Ruído Branco . . . . .	36
4.2	Medição dos Deslocamentos sem Perturbações e Excitação Tipo Ruído Branco . . . . .	37
4.3	Excitação do Tipo Ruído Colorido . . . . .	42
4.4	Comentários . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Identificação através da Equação Matricial de Ljapunov de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente</b>	<b>48</b>
5.1	Medição do Vetor de Estado sem Perturbações e Excitação Tipo Ruído Branco . . . . .	48

5.2	Medição dos Deslocamentos Sem Perturbações e Excitação do Tipo Ruído Branco . . . . .	50
5.3	Excitação do Tipo Ruído Colorido . . . . .	54
5.4	Comentários . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Alguns Aspectos Práticos na Realização da Identificação</b>	<b>61</b>
6.1	Estimação das Correlações na Prática . . . . .	61
6.1.1	Ruídos de Medida . . . . .	61
6.1.2	Estimadores . . . . .	64
6.2	Escolha das Defasagens no Tempo para Correlações . . . . .	65
6.3	Estudo de Casos . . . . .	66
6.3.1	Rotor com Seis Graus de Liberdade . . . . .	67
6.3.2	Medição de Todos Deslocamentos . . . . .	72
6.3.3	Medição de 4 Variáveis de Estado . . . . .	74
6.3.4	Medição de Parte do Vetor de Estado e Excitação Colorida . . . . .	78
6.3.5	Comentários . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Resultados de Simulação Numérica</b>	<b>85</b>
7.1	Procedimento de Cálculo . . . . .	85
7.2	Medição de Todos os Deslocamentos . . . . .	88
7.3	Medição dos Deslocamentos Lineares . . . . .	94
7.4	Excitação Colorida . . . . .	96
7.5	Comentários . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>102</b>
<b>A</b>	<b>Sistemas Rotativos</b>	<b>107</b>
A.1	Excitação Harmônica . . . . .	107



## Lista de Tabelas

7.1	Desvios padrão relativos com aproveitamento do conhecimento sobre os parâmetros. . . . .	89
7.2	Desvios padrão relativos (%) para diferentes configurações do sistema filtro. Correlações com desvio padrão relativo $d = 0,1\%$ . . . . .	91
7.3	Desvios padrão relativos (%) para diferentes configurações da matriz de entradas do sistema filtro . . . . .	91
7.4	Desvios padrão relativos para identificação baseada na matriz fundamental. . . . .	93
7.5	Desvios padrão relativos (%) para identificação de um sistema mecânico de 2 graus de liberdade. . . . .	94
7.6	Desvios padrão relativos das estimativas com aproveitamento do conhecimento sobre os parâmetros. . . . .	95
7.7	Desvios padrão relativos para diferentes configurações do sistema filtro. Correlações com desvio padrão relativo $d = 0,1\%$ . . . . .	95
7.8	Desvio padrão porcentual em função da dispersão das correlações. . . . .	97
7.9	Desvio padrão porcentual em função das características do filtro de forma. Correlação supostas em dispersão $d = 0,01\%$ . . . . .	97

# Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática do problema de identificação . . . . .	17
3.1	Diagrama de blocos de um sistema mecânico excitado por ruído colorido. .	22
3.2	Diagrama de blocos do sistema mecânico excitado por ruído colorido e com perturbações nas medidas. . . . .	23
5.1	Esquema do procedimento de identificação pela equação de Ljapunov. . . .	59
6.1	Esquema para aplicação do filtro às medidas com perturbações desconhecidas.	63
6.2	Sistema mecânico com 6 graus de liberdade . . . . .	68
6.3	Relações entre coordenadas no plano do rotor. . . . .	69
7.1	Distribuição dos valores $100(\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)/r_{x_i x_j}(\tau_i) - 1)$ , de uma determinada correlação $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$ , com desvio padrão relativo $d$ . . . . .	87
7.2	Distribuição dos valores percentuais de correlações e de parâmetros estimados em torno dos valores verdadeiros. . . . .	90
7.3	Funções de transferência para diferentes sistemas filtro. . . . .	92
7.4	Funções de transferência para diferentes sistemas filtro de forma. . . . .	98

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo do comportamento dinâmico de máquinas hidráulicas constitui-se em um tema de grande interesse atualmente no Brasil. Sua relevância provém do fato de serem as usinas hidroelétricas as maiores responsáveis pelo fornecimento da energia elétrica disponível no país.

A pesquisa desta temática envolve diferentes problemas da área de dinâmica de máquinas. É de interesse, desde o estudo de elementos isolados, como por exemplo, mancais da máquina, o estator, a turbina, até o estudo do sistema global máquina-estrutura-fundação. A determinação de modelos matemáticos, que sejam adequados à representação do comportamento dinâmico das partes girantes da máquina, constitui-se em uma das subáreas de interesse. Estes modelos são importantes para um melhor conhecimento do sistema, fornecendo dados qualitativos e quantitativos a respeito de seu comportamento dinâmico. A modelagem matemática mostra-se relevante, tanto na fase de projeto, quando permite a avaliação do desempenho futuro do equipamento, como na fase de operação. Através da observação constante de seu comportamento dinâmico, em conjunto com os conhecimentos do modelo matemático, pode-se avaliar as conseqüências de possíveis mudanças no seu comportamento. Dada a complexidade deste tipo de sistema, faz-se necessária a adaptação de técnicas de identificação às características do problema em si, tanto na fase de determinação de modelos, como para a estimação de seus parâmetros.

Na modelagem de máquinas hidráulicas aparecem condições bem particulares, que exigem mudanças nos procedimentos e formulações clássicas de identificação de sistemas. Um grande problema, por exemplo, constitui-se da própria grandeza do sistema em si, que permite poucas possibilidades de aplicação de uma excitação externa controlada. Soma-se a isto, a impossibilidade de medição de determinadas perturbações estocásticas, por exemplo: a excitação provocada pela atuação da água junto às pás da turbina, resultando em um movimento acoplado entre o líquido e o sistema mecânico. Outro problema se relaciona a impossibilidade de operação da máquina em diferentes rotações. O acesso aos pontos para medição de grandezas físicas também pode se tornar bastante restrito.

Estes problemas sugerem, por si só, diversas linhas de pesquisa a serem aprofundadas. Neste trabalho enfoca-se principalmente o caso relativo à dificuldade de conhecimento do processo de excitação de caráter estocástico presente no sistema.

## 1.1 Apresentação do Problema

Muitos autores trabalham na identificação de sistemas rotativos com diferentes métodos e sob diferentes condições de contorno [43, 57, 42, 33, 34, 26, 6, 7, 8] dentre outros. Eles se diferenciam basicamente em métodos no domínio da frequência e métodos no domínio do tempo.

De uma maneira genérica, assume-se um determinado modelo matemático e realiza-se a estimação de seus parâmetros por meio de operações matemáticas envolvendo as variáveis medidas. Zeller [57] desenvolve a identificação de um sistema rotativo com a informação da resposta em frequência do sistema. Esta informação é conseguida com a ajuda da excitação harmônica, que para estes sistemas é disponível através da excitação natural pelo desbalanceamento. Nordmann [34] e Massmann [26] tratam do problema de identificação utilizando a resposta em frequência. Um sistema rotativo é excitado por meio de um martelo de excitação, de onde se obtém a força impulsiva aplicada ao sistema. Fritzen [15] também trabalha no domínio da frequência e propõe um procedimento de estimação por variáveis instrumentais, onde a influência de perturbações não controláveis nas medidas é considerada. Schwarz [43] identifica os parâmetros físicos de um sistema rotativo por um método de variáveis instrumentais aplicado no domínio do tempo. Neste caso são consideradas as medições das excitações e dos deslocamentos com perturbações. Burrows & Stanway [8] trabalham com um método de ajuste por mínimos quadrados para a identificação dos parâmetros de um mancal hidrodinâmico, a partir de dados no domínio do tempo.

Outros trabalhos de diversos autores são reunidos de forma bastante abrangente por Schwarz [43] e por Natke [31]. Nestas referências encontram-se diferentes enfoques do problema de identificação de sistemas.

Apesar do grande número de trabalhos existentes, que tratam da identificação de sistemas mecânicos, normalmente assume-se que tanto a excitação esteja disponível para medição, como também que, para qualquer ponto do sistema, possa ser realizada a medição da grandeza física desejada. No caso real pode-se encontrar grandes dificuldades com estas hipóteses.

Roether [39] procura contornar um desses problemas tratando da flexibilidade nas configurações de medidas. Apresenta um procedimento que permite a mistura entre medições de grandezas de deslocamento, velocidade e aceleração. O método consiste basicamente na transformação das coordenadas originais do sistema, para uma base de coordenadas que possam ser acessadas.

Quanto ao problema da não medição das excitações, pode-se trabalhar somente com as grandezas de saída do sistema. Este assunto é tratado na próxima seção.

## 1.2 Método por Correlações

Muitos autores trabalham com a hipótese de que a excitação possa ser considerada de caráter estocástico. Os procedimentos para a identificação de sistemas mecânicos excitados estocasticamente diferenciam-se basicamente segundo dois conceitos: métodos

que trabalham com modelos discretizados no tempo e em outra direção, métodos que tratam de modelos em tempo contínuo e baseiam-se na equação matricial de Ljapunov.

Kozin [24], Wedig [55, 56] e Weber & Schiehlen [54] apresentam métodos baseados na matriz de correlações entre as variáveis de estado medidas (deslocamentos e velocidades),

$$\mathbf{P} = \varepsilon\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\}. \quad (1.1)$$

Apesar da não necessidade de medição das excitações, não é possível generalizar-se a identificação para qualquer sistema mecânico, somente baseando-se na matriz de correlações (1.1) [54]. Neste caso é proposto a utilização de um filtro aplicado às variáveis de estado medidas. Com isto, possibilita-se o aproveitamento de mais informações contidas nos dados medidos [55, 56, 54].

Um outro problema é encontrado quando se considera perturbações nas medidas, pois com (1.1) obtém-se uma estimativa incorreta para a matriz de correlações. Como consequência não se tem nenhuma consistência para a identificação paramétrica.

Em [37] é proposto um método para aplicação em sistemas mecânicos, que apresenta consistência para o estimador, mesmo na presença de perturbações de medidas.

Isto é possibilitado por uma estimativa da matriz de correlações com defasagem no tempo,

$$\mathbf{R}(\tau) = \varepsilon\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t + \tau)\}. \quad (1.2)$$

Estes métodos utilizam-se de informações de todas as variáveis de estado (deslocamentos e velocidades). Em [36] é proposto um procedimento, no qual a identificação paramétrica é possível somente com as medições dos deslocamentos, através da inclusão de um filtro.

Em [24, 55, 54, 37, 36] fundamentam-se os procedimentos de identificação sobre a equação matricial de Ljapunov, o que lhes confere uma propriedade interessante. Eles estabelecem uma ligação direta entre os parâmetros físicos e as matrizes de correlações. Neste caso, não são utilizados modelos discretizados no domínio do tempo.

Schwarz [43] trata de um método por variável instrumental para a identificação de sistemas mecânicos no domínio do tempo, em particular, sistemas rotativos. É identificado inicialmente um modelo discretizado no tempo. Transforma-se, então, este modelo em um modelo em tempo contínuo, o qual contém os parâmetros físicos de interesse.

Uma desvantagem deste método consiste na determinação indireta dos parâmetros. Devido ao procedimento de identificação de um modelo discretizado no tempo, determina-se os parâmetros físicos através de uma transformação numérica, que leva o modelo identificado para um modelo em tempo contínuo. Dessa maneira, qualquer informação conhecida a princípio a respeito dos parâmetros, dificilmente pode ser utilizada para incrementar a precisão do processo de identificação.

Kallenbach [22] propõe um método, que trabalha com um modelo em tempo contínuo e com variáveis instrumentais sobre a equação matricial de Ljapunov. Uma identificação

direta dos parâmetros de interesse é assim possibilitada. Entretanto, necessita-se também das medições das excitações.

Tse & Weinert [53] e Kubrusly & Lucena [25] dispensam a medição das excitações e identificam, para um modelo discretizado no tempo, uma forma normal do sistema. Todavia, a partir desta forma identificada, nem sempre é possível a obtenção dos parâmetros físicos.

Pode-se encarar a classificação dos métodos, independentemente se trabalham com modelos discretizados ou não, no domínio do tempo, de uma forma diferente. Uma classe de procedimentos fornece os parâmetros baseada na equação matricial de Ljapunov. A estes procedimentos denomina-se, neste trabalho, *identificação através da equação matricial de Ljapunov*.

A outra classe engloba os métodos que trabalham com modelos discretizados no tempo. No contexto deste trabalho, a transformação entre um modelo discretizado no tempo para um em tempo contínuo, significa uma transformação numérica, que é processada sobre a matriz fundamental do sistema. Estes métodos serão denominados posteriormente, *identificação através da matriz fundamental*.

### 1.3 Objetivos do Trabalho

O trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de procedimentos de identificação paramétrica de sistemas mecânicos excitados estocasticamente, onde somente seja possível o acesso às variáveis de estado do sistema, com ou sem perturbações de medidas. É assumido que as medições das excitações de caráter estocástico não sejam possíveis de serem realizadas. Deseja-se utilizar em contrapartida, dependendo das possibilidades, informações das grandezas de estado medidas, assim como, qualquer conhecimento prévio da estruturação interna da matriz dinâmica do sistema mecânico.

A análise é desenvolvida para dois conceitos diferentes: Identificação através da equação de Ljapunov e Identificação através da matriz fundamental.

O presente trabalho é subdividido em capítulos da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresenta-se de forma resumida definições, conceitos e formas normais utilizadas posteriormente, assim como trata dos problemas relativos à transformação de um modelo contínuo para um modelo discretizado no tempo e sua transformação inversa.

O Capítulo 3 apresenta a derivação da equação matricial de Ljapunov na sua forma estendida. É analisado o caso de sistemas excitados estocasticamente por forças aleatórias, tipo ruído colorido. Um procedimento de identificação é apresentado no Capítulo 4, segundo a formulação baseada na matriz fundamental do sistema. Assume-se, então, diferentes condições sobre o sinal de excitação. Inicialmente, trata-se do caso em que a excitação possa ser considerada como do tipo ruído branco e posteriormente estende-se os conceitos ao caso de ruído colorido. Analisa-se também diferentes configurações de medidas das variáveis de estado.

O problema de identificação de sistemas, baseado na equação matricial de Ljapunov é o tema do Capítulo 5. Aqui procede-se às mesmas análises de casos contidas no Capítulo 4.

No Capítulo 6 apresenta-se alguns problemas de ordem prática na estimação das correlações entre sinais medidos. Também é analisado um caso de estudo, que se constitui em um sistema rotativo com 6 graus de liberdade. Trata-se de 3 situações diferentes para a configuração de medidas do vetor de estados.

Os resultados de simulação numérica deste rotor são apresentados no Capítulo 7. Nesse capítulo procura-se ressaltar as diferenças entre diversos procedimentos, atentando-se principalmente à sensibilidade dos resultados finais, em função de dispersões nas estimativas das correlações entre as variáveis medidas.

Finalmente, o Capítulo 8 traz as conclusões gerais sobre o trabalho, assim como sugestões para posteriores análises.

## Capítulo 2

# Descrição Entrada-Saída Para Sistemas Mecânicos

Considera-se a classe de sistemas mecânicos que possam ser descritos através de uma equação diferencial linear não homogênea.

Ao se fazer o equilíbrio das várias forças que atuam sobre os corpos que compõem o sistema, obtém-se esta equação diferencial, que relaciona parâmetros físicos, aqui entendidos como rigidezes, amortecimentos, massas, etc., às variáveis do sistema (deslocamentos, velocidades e acelerações).

À determinação destes parâmetros, baseando-se na observação das variáveis e das forças externas, denomina-se identificação paramétrica do sistema.

O termo identificação de sistemas por si só tem caráter bem mais abrangente, compreendendo, dentre outras coisas, a determinação do modelo mais adequado ao sistema. Esses modelos podem ser matemáticos ou simplesmente empíricos [13].

Para a determinação dos parâmetros de um modelo, faz-se necessário o desenvolvimento de algoritmos que operem as variáveis do sistema e as forças externas, fornecendo estimativas para os valores dos parâmetros de um modelo, que no caso do presente trabalho, é uma equação diferencial.

Esses algoritmos são desenvolvidos geralmente para computadores digitais e portanto, os sinais correspondentes às variáveis medidas devem ser discretizados, possibilitando o seu tratamento num ambiente digital.

A aquisição dessas variáveis pelo computador, se dá normalmente através de um conversor analógico-digital, que permite o acesso aos sinais em instantes determinados de tempo. Os vetores, correspondentes às variáveis, são representados no computador por uma sequência de valores observados nos diferentes instantes de tempo. Dessa forma, tem-se os sinais discretizados no domínio do tempo.

A equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema é contínua no domínio do tempo. Dessa forma, é necessário obter-se um modelo que descreva as relações entrada-saída para o sistema, que seja compatível com o tipo de dados disponíveis, ou seja, discretizados no domínio do tempo.

A transformação da equação diferencial contínua no tempo para um modelo discreti-



zado no tempo é baseado no cálculo da matriz fundamental do sistema. Os parâmetros deste novo modelo constituem-se de combinações dos parâmetros físicos de interesse.

A grande maioria dos métodos de identificação de parâmetros trabalha com modelos discretizados, ou seja, procedem à identificação paramétrica destes modelos e depois através de uma transformação inversa, retorna-se ao modelo contínuo no tempo, caso haja interesse nos parâmetros físicos.

Este capítulo trata destas operações e também da descrição de um sistema mecânico por diferentes bases de coordenadas.

Estes procedimentos, embora colocados aqui num contexto diferente, encontram grande aplicação nos tratamentos a serem conduzidos mais adiante neste trabalho.

## 2.1 Equação de Estado

Seja um sistema mecânico estável que possa ser descrito pela equação diferencial

$$\mathbf{M}\ddot{\xi}(t) + \mathbf{P}\dot{\xi}(t) + \mathbf{Q}\xi(t) = \mathbf{S}u(t) \quad (2.1)$$

onde

$\mathbf{M}$  é uma matriz quadrada de ordem  $f$  denominada matriz de massa,  
 $\mathbf{P}$  é uma matriz  $(f, f)$  correspondente às forças proporcionais à velocidade,  
 $\mathbf{Q}$  é uma matriz  $(f, f)$  correspondente às forças proporcionais ao deslocamento,  
 $\mathbf{S}$  é uma matriz  $(f, p)$  de entradas,  
 $u(t)$  é um vetor  $p$ -dimensional das excitações ou entradas,  
 $\xi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$  e  $\ddot{\xi}(t)$  são vetores  $f$  dimensionais correspondentes aos deslocamentos, velocidades e acelerações respectivamente. O ponto sobre as variáveis em (2.1) indica derivação em relação ao tempo.

Considera-se o vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$  composto por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.2)$$

A equação (2.1) pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (2.3)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \mathbf{I}_{(f,f)} \\ \mathbf{A}_{1(f,f)} & \mathbf{A}_{2(f,f)} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,p)} \\ \mathbf{B}_{1(f,p)} \end{bmatrix}.$$

Assim,  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada de ordem  $n = 2f$  e é denominada matriz do sistema.  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $(n, p)$  de entradas. A submatriz  $\mathbf{I}$  significa matriz identidade.

Associada à equação do sistema (2.3) escreve-se a equação de medidas

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{y}(t)$  é um vetor  $m$ -dimensional das variáveis medidas e  $\mathbf{C}$  é uma matriz  $(m, n)$  de medidas.

A solução da equação do sistema (2.3) é dada por [44]

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_o)\mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2.5)$$

com  $\mathbf{x}_o = \mathbf{x}(t_o)$ .

A matriz fundamental  $\Phi(t, t_o)$  satisfaz a seguinte equação matricial diferencial homogênea,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_o) = \mathbf{A}\Phi(t, t_o), \quad (2.6)$$

com a condição inicial

$$\Phi(t_o, t_o) = \mathbf{I}. \quad (2.7)$$

A matriz fundamental possui as seguintes propriedades,

$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_o) = \Phi(t_2, t_o), \quad \forall t_o, t_1, t_2, \quad (2.8)$$

$$\Phi^{-1}(t, t_o) = \Phi(t_o, t), \quad \forall t, t_o. \quad (2.9)$$

A solução para a matriz fundamental  $\Phi(t, t_o)$  é indicada através da função exponencial matricial.

$$\Phi(t, t_o) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}. \quad (2.10)$$

A função exponencial matricial (2.10) pode ser representada por uma série de potência convergente,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}. \quad (2.11)$$

Na prática existem diferentes formas de se calcular esta exponencial. Algumas soluções são mais estáveis, mais precisas que outras, do ponto de vista numérico. Em [28] encontra-se uma descrição abrangente de métodos e uma discussão de vantagens e desvantagens de cada um deles.

## 2.2 Observabilidade e Controlabilidade

Seja um sistema dinâmico invariante no tempo, descrito por

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(t), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t), \quad (2.13)$$

onde  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  é um vetor  $n$ -dimensional,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  é um vetor  $p$ -dimensional e o vetor de medidas  $\mathbf{y}(t)$  tem dimensão  $(m, 1)$ . As matrizes do sistema tem dimensões coerentes com as definidas para os vetores.

Monta-se a partir de (2.12) e (2.13) a matriz de observabilidade

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{A}})^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{A}})^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

**Teorema 1** *O sistema (2.12) é dito completamente observável, se e somente se posto  $\mathbf{\Omega} = n$ .*

O teorema 1 indica que, se existem  $n$  linhas linearmente independentes em (2.14), a dinâmica do sistema em análise pode ser observada completamente a partir das variáveis medidas  $\mathbf{y}(t)$  [44].

**Definição 1** *Um sistema completamente observável é chamado exatamente observável, se e só se, as primeiras  $n$  linhas da matriz de observação  $\mathbf{\Omega}$  em (2.14) forem linearmente independentes [46].*

Desta forma, para um determinado sistema, define-se condições sobre a matriz de medidas para garantia da observabilidade do mesmo. Pode-se conduzir um tratamento parecido também para outro conceito. Este relaciona-se à controlabilidade do sistema, que define se, a partir de uma dada matriz de entradas  $\bar{\mathbf{B}}$ , é possível influenciar em toda a dinâmica do sistema.

A partir das matrizes  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  monta-se a matriz

$$\mathbf{\Xi} = \left[ \bar{\mathbf{B}} : \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} : (\bar{\mathbf{A}})^2\bar{\mathbf{B}} : \dots : (\bar{\mathbf{A}})^{n-1}\bar{\mathbf{B}} \right]. \quad (2.15)$$

**Teorema 2** *O sistema (2.12) é dito completamente controlável, se e somente se [44]*

$$\text{posto } \mathbf{\Xi} = n$$

As demonstrações dos teoremas 1 e 2 podem ser encontradas em textos relativos a sistemas dinâmicos [44, 49].

Não é de interesse do presente trabalho aprofundar-se mais nestes conceitos, pois da forma com que são apresentados nesta seção, são suficientes para a análise dos passos futuros do trabalho.

## 2.3 Formas Normais da Equação de Estado

Sistemas dinâmicos descritos na forma das equações (2.12) e (2.13) podem também ser representados de diferentes maneiras com a mudança de coordenadas do vetor de estado. A essas diferentes formas denomina-se *formas normais* da equação de estado, ou seja, formas com diferentes bases de coordenadas.

Com outras bases de coordenadas, a descrição entrada-saída do sistema é alterada e assim também as matrizes do sistema, de entrada e de medidas.

Escolhendo-se adequadamente uma nova base de coordenadas, pode-se conseguir outras matrizes  $A^*$ ,  $B^*$  e  $C^*$  com estruturação interna particular. Num procedimento de identificação escolhe-se determinadas bases, através de transformação de coordenadas, que conferem a essas matrizes, estruturas simples, do ponto de vista da elaboração de algoritmos para estimação dos parâmetros.

Sistemas mecânicos descritos como em (2.3) e (2.4) já possuem uma estrutura interna especial das matrizes dinâmica e de medidas.

Ao longo deste trabalho utiliza-se intensamente esta particularidade inerente a sistemas mecânicos. Em alguns casos tratados nos capítulos seguintes, esta estrutura específica pode desaparecer. Entretanto, é possível obter-se uma forma normal especial, aplicando-se uma transformação de coordenadas. A estrutura desta transformação é objeto desta seção.

Seja um sistema dinâmico de ordem  $n$ , exatamente observável e descrito pelas equações (2.12) e (2.13)

Escolhe-se então, na matriz de observabilidade  $\Omega$  em (2.14), as primeiras  $n$  linhas para a montagem da matriz de transformação  $T$ . Sendo o sistema exatamente observável, a matriz  $T$  não é singular, e assim a sua inversa  $T^{-1}$  existe.

Operando-se a transformação de coordenadas

$$x^* = T \bar{x} \quad (2.16)$$

sobre o sistema (2.12) e (2.13), obtém-se

$$\dot{x}^*(t) = A^* x^*(t) + B^* u(t) \quad (2.17)$$

e

$$y^*(t) = C^* x^*(t). \quad (2.18)$$

Em (2.17) e (2.18) valem as seguintes relações

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{T} \bar{\mathbf{B}}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{C}^* = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.21)$$

As matrizes  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{C}^*$  possuem então as seguintes estruturas internas especiais [46].

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m, m)} & \mathbf{I}_{(n-m, n-m)} \\ \mathbf{A}_{1(m, m)}^* & \mathbf{A}_{2(m, n-m)}^* \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(m, m)} & \vdots & \mathbf{0}_{(m, n-m)} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

A demonstração desta propriedade baseia-se no fato da matriz de transformação ser formada pelas primeiras  $n$  linhas da matriz de observação e a partir das relações (2.19) e (2.21) chega-se às estruturas especiais (2.22) e (2.23).

A nova matriz de entradas  $\mathbf{B}^*$  não apresenta, em contrapartida, nenhuma estrutura interna particular.

Quando  $m = f$  em (2.22), a estrutura interna de  $\mathbf{A}^*$  é idêntica a de sistemas mecânicos descritos em (2.3). Nota-se, portanto, que da própria modelagem destes sistemas, já obtém-se uma forma normal especial.

Aplica-se este tipo de transformação de coordenadas ao sistema descrito em (2.3) e (2.4) considerando uma matriz de medidas dos deslocamentos dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(f, f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(f, f)} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , formada a partir das primeiras  $n$  linhas da matriz de observabilidade (2.14) será, portanto,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(f, f)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{(f, f)} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

ou seja, o sistema permanece inalterado. Este fato vem salientar mais uma vez a propriedade inerente para sistemas mecânicos, quanto à estrutura.

Caso a submatriz  $\mathbf{I}$  em (2.24) fosse de ordem maior que  $f$ , a observabilidade exata do sistema não seria mais garantida e a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , formada a partir das primeiras  $n$  linhas em (2.14), seria singular. Este fato vem demonstrar que medidas de deslocamentos e das correspondentes velocidades são redundantes e observam subespaços semelhantes em sistemas mecânicos.

Este fato já foi salientado em [43], onde demonstra-se que apenas com as medições dos deslocamentos em sistemas mecânicos, pode-se garantir a observabilidade completa do sistema. Em [39] esta análise é mais abrangente, permitindo a montagem do vetor  $y(t)$  a partir de medidas alternativas de deslocamento, velocidade ou aceleração para cada ponto do sistema mecânico considerado.

Para os casos em que a submatriz  $I$  em (2.24) tenha ordem menor que  $f$ , ou que a matriz  $C$  tenha estrutura interna genérica, nada se pode concluir em princípio, com respeito a observabilidade exata ou não do sistema.

Esta análise dependerá das estruturas internas das submatrizes  $A_1$  e  $A_2$  em (2.3), no caso de sistemas mecânicos.

Em todo o desenvolvimento futuro deste trabalho utiliza-se a forma (2.22) e (2.23) para a derivação dos algoritmos de identificação paramétrica. Dessa maneira, busca-se estimar os parâmetros das submatrizes  $A_1^*$  e  $A_2^*$ . Como já foi discutido, caso sejam feitas medições de todos os deslocamentos para um sistema mecânico do tipo descrito em (2.3) e (2.4), essas matrizes são as mesmas que contêm os parâmetros físicos  $A_1$  e  $A_2$ . Entretanto, caso haja uma variação na estrutura da matriz de medidas, como por exemplo, com medidas alternadas de velocidades e deslocamentos, ou mesmo uma variação na matriz do sistema, as submatrizes  $A_1^*$  e  $A_2^*$  podem não apresentar uma relação tão simples com as matrizes de (2.3) e (2.4). Neste caso, deve-se proceder a uma transformação inversa, ou seja, partir de uma estrutura estimada na forma (2.22), (2.23) e voltar ao sistema original através da transformação inversa a (2.16).

Esta matriz de transformação não é conhecida também, dado que ela própria depende da matriz do sistema  $\bar{A}$ . Contudo, sabe-se a sua regra de formação a partir da matriz de observabilidade (2.14).

Sabe-se também que a partir de (2.19),

$$T\bar{A} = A^*T. \quad (2.26)$$

A matriz de transformação  $T$  é formada a partir das primeiras  $n$  linhas da matriz (2.14) e tem relação com  $\bar{A}$ . A matriz  $A^*$  pressupõe-se estimada de alguma maneira por métodos de identificação paramétrica.

Deve-se trabalhar agora sobre a equação (2.26) e extrair daí relações que permitam a determinação única dos parâmetros da matriz  $\bar{A}$  original.

Estas relações podem ser lineares ou não lineares nos parâmetros físicos, dependendo do nível de redução no número de parâmetros que se obtém com a aplicação da transformação (2.16).

Em [38] este problema é tratado como *reconstrução da forma original* e se analisa diferentes casos.

Esta temática será tratada amplamente no capítulo 3. Serão observadas limitações quanto ao número de medidas mínimas necessárias para que a reconstrução do sistema original ainda seja possível, apenas através de relações lineares nos parâmetros.

No capítulo 6 apresenta-se a análise de um caso em que, através da utilização da estruturação interna das submatrizes  $A_1$  e  $A_2$ , pode-se diminuir ainda mais o número

mínimo de medidas e com isto aumentar a concentração de parâmetros na forma (2.22).

## 2.4 Discretização da Equação de Estado no Tempo

Até agora tratou-se somente da análise de sistemas descritos em tempo contínuo. Entretanto, como já foi salientado, para a utilização de computadores digitais no processamento dos sinais, muitas vezes torna-se necessária a descrição de sistemas de forma discretizada no tempo.

Considera-se o intervalo de tempo de análise compreendido entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , onde

$$t_k = t(k\Delta t), \quad k = 0(1)n, \quad (2.27)$$

sendo  $\Delta t$  o tempo de discretização do sinal medido.

O vetor de entradas  $u(t)$  em (2.3) é assumido constante no intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  de forma que

$$u(t) = u(t_k) = u(k) \quad \text{para } t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (2.28)$$

A solução do sistema neste intervalo é dada por (2.5)

$$x(t_{k+1}) = e^{A\Delta t}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)}B u(s) ds. \quad (2.29)$$

Pode-se reescrever a equação (2.29) da seguinte forma [1]

$$x(t_{k+1}) = F x(t_k) + G u(t_k) \quad (2.30)$$

e a equação de medidas

$$y(t_{k+1}) = C x(t_k), \quad (2.31)$$

onde

$$F = e^{A\Delta t} \quad (2.32)$$

e

$$G = \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-s)} ds B. \quad (2.33)$$

No caso em estudo, em que a matriz  $A$  do sistema é regular [1],

$$G = A^{-1}(F - I)B. \quad (2.34)$$

Observa-se que, devido às operações não lineares em (2.32) e (2.33), a estruturação interna especial da matriz  $\mathbf{A}$  para sistemas mecânicos é deteriorada. Entretanto, pode-se retornar a essa estruturação aplicando ao novo sistema discretizado, a transformação de similaridade descrita na seção 2.3, dado que a matriz de medidas  $\mathbf{C}$  não é alterada pela operação de discretização.

Para a obtenção das matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  em (2.30) necessita-se do cálculo da matriz fundamental (2.32). Como já foi salientado, existem diversas formas de se calcular numericamente esta exponencial matricial. Diversos métodos são descritos em [28]. Bons resultados podem ser obtidos a partir do algoritmo *scaling & squaring* descrito detalhadamente em [28].

O algoritmo baseia-se no fato de que a aproximação por série de potência,

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^k}{k!} \quad (2.35)$$

apresenta erros e custos computacionais crescentes para  $\|\mathbf{A}\|\Delta t$  também crescente. Aqui  $\|\mathbf{A}\|$  representa a norma da matriz  $\mathbf{A}$ . A idéia é de se representar a função exponencial matricial como

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = (e^{\mathbf{A}\Delta t/a})^a, \quad (2.36)$$

e de se escolher  $a$  como uma potência de dois para a qual a função exponencial escalada possa ser calculada eficientemente.

O inteiro  $a$  é escolhido como a menor potência de dois que satisfaça [28]

$$\|\mathbf{A}\Delta t\|/a \leq 1. \quad (2.37)$$

Satisfeitas as condições (2.36) e (2.37) o algoritmo não deve apresentar problemas numéricos.

A manutenção das propriedades de controlabilidade e observabilidade do sistema descrito por um modelo discretizado no tempo, depende basicamente da escolha do tempo de discretização em conjunto com os autovalores do sistema [43, 38, 1]. As condições necessárias e suficientes são satisfeitas pela escolha de um tempo de discretização máximo, que satisfaça também a transformação de retorno ao modelo em tempo contínuo. Esta transformação é tratada a seguir.

## 2.5 Transformação de Volta para o Modelo em Tempo Contínuo

O problema que se coloca agora é o do retorno à forma contínua no tempo. Parte-se de um modelo discretizado (2.30) e (2.31) que, por exemplo, tenha sido identificado através de um método específico de identificação de sistemas. Deseja-se retornar à forma contínua



no tempo para a determinação dos parâmetros físicos de interesse, presentes no modelo contínuo.

Formalmente este retorno se dá, partindo de (2.32), pela operação

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \ln \mathbf{F}. \quad (2.38)$$

Devido ao fato de ter-se assumido que a entrada do sistema é constante por partes e sendo a matriz  $\mathbf{A}$  do sistema, regular, pode-se escrever para a matriz de entrada  $\mathbf{B}$  [43]:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F} - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}. \quad (2.39)$$

Nota-se de (2.38) e (2.39) que o problema central é a determinação da matriz  $\mathbf{A}$ . Novamente aqui, pode-se determinar  $\mathbf{A}$  a partir de uma aproximação por série sobre a matriz logarítmica em (2.38). Entretanto, existem algoritmos opcionais que apresentam vantagens em precisão e tempo de convergência. Em [52] sugere-se a utilização da relação

$$\ln \mathbf{F} = 2 \operatorname{arctanh} \mathbf{V} = \ln[(\mathbf{I} + \mathbf{V})(\mathbf{I} - \mathbf{V})^{-1}], \quad (2.40)$$

de onde obtém-se

$$\mathbf{V} = (\mathbf{F} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (2.41)$$

O cálculo numérico da matriz logarítmica é obtido da série

$$\ln \mathbf{F} = 2 \operatorname{arctanh} \mathbf{V} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \mathbf{V}^{2k+1}. \quad (2.42)$$

Para que a série (2.42) seja convergente é necessário impor determinadas condições de contorno sobre os autovalores da matriz  $\mathbf{F}$ . Os autovalores de  $\mathbf{F}$  estão correlacionados aos autovalores de  $\mathbf{A}$  através do tempo de discretização  $\Delta t$  [43]. De Schwarz e Roether [43, 38] extrai-se como condição para o tempo de discretização máximo

$$\Delta t_{max} < \min\{i\} \frac{\pi}{2\omega_i} \quad (2.43)$$

onde  $\omega_i$  é a  $i$ -ésima frequência natural de interesse.

Alguns autores [48] sugerem, como condição adicional, que a norma espectral

$$\|\mathbf{A}\Delta t\| < 0,5, \quad (2.44)$$

o que garante também a estabilidade numérica, devido a erros de arredondamento.

Caso  $\mathbf{F}$  seja uma matriz com estruturação interna especial, por exemplo, segundo a forma normal descrita em 2.3, através da transformação para o modelo contínuo, não observa-se mais esta forma na matriz  $\mathbf{A}$ .

Entretanto, retorna-se à forma normal especial, aplicando-se sobre as matrizes obtidas, a transformação de coordenadas descrita em 2.3.

## 2.6 Identificação de Sistemas Mecânicos

O problema de identificação de sistemas mecânicos, como formulado por [43] pode ser apresentado simplificadaamente da forma ilustrada na figura 2.1. Considera-se um sistema mecânico excitado por uma entrada  $u(t)$  medida, cuja resposta  $y(t)$  também possa ser medida. Presentes na entrada, ao lado de  $u(t)$  medido, estão as perturbações não mensuráveis  $w(t)$ . Também ao lado das saídas medidas  $y(t)$ , tem-se perturbações não controladas  $v(t)$ . Procura-se, então, um modelo matemático que se ajuste, o melhor possível, ao modelo real, segundo um determinado critério. O modelo obtido contém estimativas para os parâmetros reais.

O procedimento de identificação é descrito de uma forma bastante genérica por [38] e compreende os seguintes passos:

1. Modelagem teórica do sistema mecânico
2. Determinação do número mínimo de medições
3. Escolha da configuração de medições para o sistema específico.
4. Determinação do tipo de forma normal a ser identificada no domínio do tempo discreto.
5. Identificação paramétrica a partir dos sinais de entrada e saída discretizados no tempo.
6. Transformação inversa, modelo discretizado no tempo para modelo em tempo contínuo.
7. Reconstrução do sistema original a partir da forma normal identificada.

Esta metodologia foi intensamente analisada e apresenta resultados bastante satisfatórios na obtenção de estimativas consistentes dos parâmetros reais.

Embora este procedimento seja comprovadamente eficaz, inclusive para sistemas excitados estocasticamente, ele pressupõe a necessidade de medição das excitações  $u(t)$ . Esta medição, para alguns tipos de sistemas, pode não ser de fácil realização, como por exemplo, excitações de caráter aleatório atuantes na estrutura de uma aeronave em vôo, ou no contato água-turbina em uma máquina hidráulica, como já salientado anteriormente.

Nestes casos, tem-se acesso muitas vezes às saídas do sistema, o qual pressupostamente é excitado por forças de caráter aleatório.

A descrição das relações dinâmicas, assim como a análise de possíveis procedimentos especiais de identificação, que não utilizam as medições das excitações do sistema, é objeto dos capítulos subsequentes.

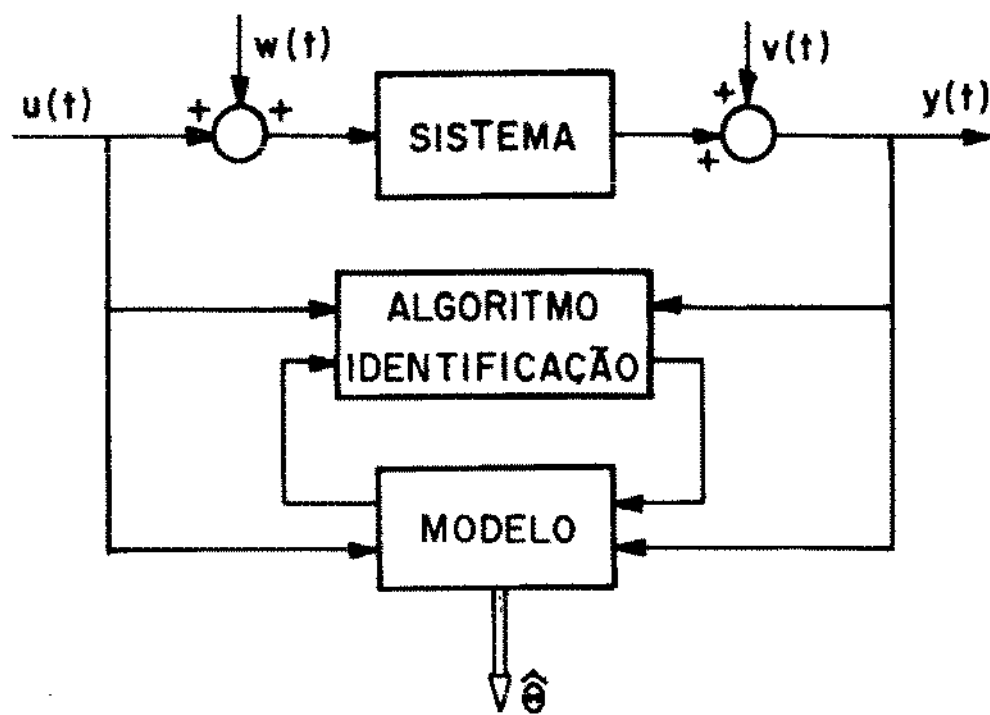


Figura 2.1: Representação esquemática do problema de identificação

## Capítulo 3

# Sistemas Dinâmicos Excitados Estocasticamente

No capítulo anterior foram apresentados alguns tópicos importantes relativos à identificação paramétrica de sistemas mecânicos. No final do capítulo apresenta-se um procedimento básico que engloba uma classe ampla de métodos no domínio do tempo. Uma das características desta classe diz respeito a hipótese de acesso por meio de medições, tanto às respostas do sistema em estudo, como às excitações presentes no mesmo. Outra característica relaciona-se à operação de transformação numérica de um modelo discretizado no tempo para um modelo contínuo no tempo. Muitos problemas em Engenharia podem ser formulados envolvendo a resposta dinâmica de um sistema linear excitado por um processo estocástico. Estes problemas podem ser tratados também através dos procedimentos clássicos descritos no capítulo anterior. Entretanto, existem formas alternativas para a caracterização de um processo deste tipo que podem apresentar vantagens em relação à sistemática já vista. Por exemplo, dependendo do tipo de excitação, a necessidade de medição direta da mesma pode ser dispensada. Para determinados sistemas, esta vantagem se coloca como uma condição necessária, dada a impossibilidade física de acesso às forças de excitação.

Neste capítulo analisa-se a resposta de sistemas dinâmicos lineares excitados por processo estocástico. A princípio assume-se que a excitação seja um processo tipo ruído branco. Esta hipótese é uma idealização teórica não verificada em sistemas reais. Dessa forma, estende-se numa segunda etapa, a análise para processos do tipo ruído colorido como excitação. Estas excitações são obtidas a partir de um filtro, ou seja, da resposta de um sistema dinâmico excitado por ruído branco.

Trata-se também no final do capítulo da obtenção de modelos com características especiais através de transformação de coordenadas.

### 3.1 Resposta de Sistemas Dinâmicos Excitados Estocasticamente

Considera-se um sistema que possa ser descrito na forma da equação (2.3), ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (3.1)$$

O vetor  $\mathbf{u}(t)$  é assumido como sendo um processo estocástico do tipo ruído branco, com as seguintes características,

$$\varepsilon\{\mathbf{u}(t)\} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon\{\mathbf{u}(t_1)\mathbf{u}^T(t_2)\} = \mathbf{R}_{uu}(t_1, t_2) = \mathbf{\Psi}_{uu}(t_1)\delta(t_1 - t_2), \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{R}_{uu}$  é a matriz de correlação do ruído  $\mathbf{u}(t)$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ ,  $\mathbf{\Psi}_{uu}(t_1)$  é uma matriz de intensidade do ruído e  $\delta$  é uma função delta de Dirac.

A condição imposta ao sinal de entrada é de difícil observação para sistemas reais, dado que, segundo a equação (3.3) não deve haver correlação entre dois instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ . Esta condição será modificada em tratamento posterior, permitindo que  $\mathbf{u}(t)$  seja caracterizado por um processo ruído colorido, ou seja, correlato no tempo.

A solução da equação dinâmica (2.3) é representada por (2.5). Calculando-se o valor médio dos dois lados da equação (2.5), obtém-se

$$\mathbf{m}_x(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{m}_x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, s)\mathbf{B}\mathbf{m}_u(s)ds. \quad (3.4)$$

Este resultado pode ser considerado também como solução da equação diferencial

$$\dot{\mathbf{m}}_x(t) = \mathbf{A}\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{B}\mathbf{m}_u(t), \quad (3.5)$$

que pode ser obtida diretamente de (2.3).

Para o cálculo da matriz de correlações

$$\mathbf{R}_{xx}(t, t + \tau) = \mathbf{R}_{xx}(\tau) = \varepsilon\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t + \tau)\}, \quad (3.6)$$

substitui-se a equação (2.5) e assumindo que não haja correlação entre  $\mathbf{x}(t_0)$  e  $\mathbf{u}(t)$  para  $t \geq t_0$ , obtém-se [27]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}(\tau) = & \Phi(t, t_0) \mathbf{R}_{xx}(t_0) \Phi^T(t + \tau, t_0) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t+\tau} \Phi(t_1, s_1) \mathbf{B} \mathbf{R}_{uu}(s_1, s_2) \mathbf{B}^T \Phi^T(t + \tau, s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utilizando-se as regras de integração para a função delta de Dirac e sob a hipótese de que  $\mathbf{u}(t)$  é um ruído branco, a relação (3.7) torna-se

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) = \Phi(t, t_0) \mathbf{R}_{xx}(t_0) \Phi^T(t + \tau, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{B} \Psi_{uu}(s) \mathbf{B}^T \Phi^T(t + \tau, s) ds, \quad (3.8)$$

para  $\tau > 0$ .

Diferenciando-se a relação (3.8) chega-se à *Equação Matricial de Ljapunov* generalizada [2, 27],

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{xx}(\tau) + \mathbf{R}_{xx}(\tau) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \Psi_{uu}(t) \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} = \dot{\mathbf{R}}_{xx}(\tau). \quad (3.9)$$

Considera-se agora que o vetor de entradas  $\mathbf{u}(t)$  seja um processo aleatório estacionário no sentido amplo, assim

$$\Psi_{uu}(t) = \Psi_{uu} = \text{constante}, \quad (3.10)$$

e dessa forma para algum tempo de funcionamento do sistema (estado estacionário), a resposta  $\mathbf{x}(t)$  será, então, um processo estacionário também. Com isso, a derivada no tempo da matriz de correlação em (3.9) é nula, tornando-se a equação:

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{xx}(\tau) + \mathbf{R}_{xx}(\tau) \mathbf{A}^T = -\mathbf{B} \Psi_{uu} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau}. \quad (3.11)$$

Para  $\tau < 0$  a equação (3.11) torna-se

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{xx}(\tau) + \mathbf{R}_{xx}(\tau) \mathbf{A}^T = -e^{-\mathbf{A} \tau} \mathbf{B} \Psi_{uu} \mathbf{B}^T. \quad (3.12)$$

Para  $\tau = 0$ , da equação (3.11) obtém-se

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{xx}(0) + \mathbf{R}_{xx}(0) \mathbf{A}^T = -\mathbf{B} \Psi_{uu} \mathbf{B}^T, \quad (3.13)$$

que se constitui base de formulação de algoritmos de identificação por alguns autores [24, 55, 56, 54].

A partir da equação (3.8) pode-se verificar a validade da seguinte relação entre matrizes de correlação para diferentes defasagens no tempo  $\tau_i, \tau_j$  [27],

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau_j) = \mathbf{R}_{xx}(\tau_i) \Phi^T(\tau_j, \tau_i) \quad \text{para} \quad \tau_j \geq \tau_i, \quad (3.14)$$

com

$$\Phi^T(\tau_j, \tau_i) = e^{\mathbf{A}^T(\tau_j - \tau_i)}. \quad (3.15)$$

Deve-se atentar para o fato de que as equações (3.9), (3.14) e suas derivadas são válidas somente-se  $\mathbf{u}(t)$  for um processo ruído branco.

## 3.2 Ruído Colorido como Sinal de Excitação

Se  $\mathbf{u}(t)$  é um ruído não branco, pode-se modelar  $\mathbf{u}(t)$  como sendo a saída de um sistema dinâmico semelhante, na forma, ao da equação (2.3), o qual é excitado por uma entrada tipo ruído branco. Pela composição desta equação dinâmica com a equação do sistema sob estudo, obtém-se um modelo aumentado que tem como entrada um ruído branco. Assim sendo, as relações derivadas até aqui continuam válidas com matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  diferentes. A seguir é apresentado detalhadamente este procedimento.

Seja um sistema dinâmico descrito pela equação

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{R}\mathbf{z}(t) + \mathbf{S}\mathbf{w}(t), \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{z}(t)$  é um vetor de estado  $t$ -dimensional,  $\mathbf{R}$  é uma matriz  $(t, t)$  regular e  $\mathbf{S}$  é uma matriz  $(t, s)$  de entradas.

O vetor de entradas  $s$ -dimensional  $\mathbf{w}(t)$  é um processo ruído branco com as seguintes características,

$$\varepsilon\{\mathbf{w}(t)\} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t + \tau)\} = \mathbf{R}_{ww}(t) = \Psi_{ww}\delta(\tau). \quad (3.18)$$

O processo  $\mathbf{u}(t)$  de entrada na equação dinâmica (2.3) é um processo colorido, que é gerado a partir de

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}_u \mathbf{z}(t), \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{H}_u$  representa uma matriz  $(p, t)$ .

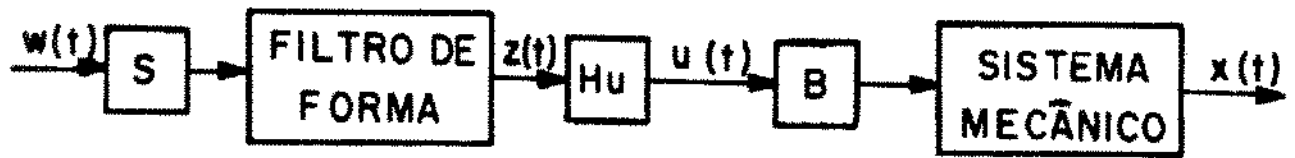


Figura 3.1: Diagrama de blocos de um sistema mecânico excitado por ruído colorido.

Reescreve-se agora uma nova equação dinâmica com o vetor de estado

$$\mathbf{x}^*(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

a partir das equações (2.3), (3.16) e (3.19) para obter-se

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^* \mathbf{w}(t), \quad (3.21)$$

com

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{B}\mathbf{H}_u \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

A equação (3.21) representa um sistema excitado por um processo ruído branco, onde está incorporado o sistema dinâmico que gera a excitação  $\mathbf{u}(t)$  do sistema mecânico. A matriz dinâmica  $\mathbf{A}^*$  é quadrada de ordem  $(n + t)$  e  $\mathbf{B}^*$  é uma matriz  $(n + t, s)$ .

O diagrama de blocos da figura 3.1 representa, de forma mais clara, a geração do processo  $\mathbf{u}(t)$  através da saída de um sistema dinâmico, aqui denominado, *filtro de forma*.

### 3.3 Representação Alternativa de um Sistema Excitado por Ruído Colorido

Foi visto anteriormente que considerando-se processos de excitação tipo ruído colorido, surge uma equação dinâmica do processo como um todo e um novo vetor de estado aumentado. A nova forma da matriz dinâmica presente na equação (3.21) não apresenta mais a característica típica de sistemas mecânicos vista no capítulo 2. Entretanto, esta forma especial pode ser recuperada pela transformação de coordenadas como a descrita na seção 2.3. Esta transformação envolve também a matriz de medidas do sistema, ou seja, a forma como este novo sistema aumentado é observado.



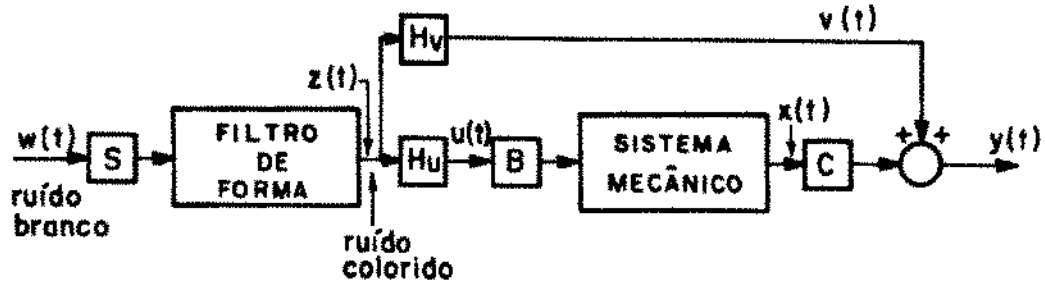


Figura 3.2: Diagrama de blocos do sistema mecânico excitado por ruído colorido e com perturbações nas medidas.

Considera-se agora que somente uma parte do novo vetor de estado (3.20) é medida. A parte observada corresponde às  $m$  variáveis do vetor  $\mathbf{x}(t)$  perturbadas por um ruído  $\mathbf{v}(t)$  não medido, não branco e gerado da saída  $\mathbf{z}(t)$  do filtro de forma (3.16).

A equação

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{H}_v \mathbf{z}(t), \quad (3.23)$$

descreve a maneira como  $\mathbf{v}(t)$  é obtido, através da matriz de acoplamento  $\mathbf{H}_v$  de dimensão  $(m, t)$ .

Assim sendo as variáveis medidas são descritas da seguinte forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*(t), \quad (3.24)$$

com

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{H}_v \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde  $\mathbf{C}$  tem dimensão  $(m, n)$ .

O diagrama de blocos da figura 3.2 ilustra de forma mais clara estas relações.

Para a obtenção de forma normal do tipo descrito em 2.3, monta-se a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , a partir das primeiras  $(n + t)$  linhas da matriz

$$\Omega = \begin{bmatrix} C^* \\ \dots \\ C^* A^* \\ \dots \\ C^* (A^*)^2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ C^* (A^*)^{n+t-1} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para o caso em que  $t = n$ , a matriz de transformação torna-se, atentando-se para as equações (3.22) e (3.25),

$$T = \begin{bmatrix} C & H_v \\ CA & CBH_u + H_v R \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

A matriz de transformação deve ser regular, ou seja, as primeiras  $(n + t)$  linhas da matriz  $\Omega$  em (3.26) devem ser linearmente independentes. Esta condição se traduz na necessidade de que o sistema aumentado seja exatamente observável.

Uma comprovação genérica desta condição é bastante difícil de ser conduzida, pois além do não conhecimento prévio dos elementos das matrizes do sistema mecânico, não se tem conhecimento especialmente das matrizes do filtro de forma e das matrizes de acoplamento  $H_u$  e  $H_v$ .

Com a condução da transformação sobre a forma de estado estendida (3.21), (3.24) chega-se à nova representação

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_0 \tilde{x}(t) + B_0 w(t), \quad (3.28)$$

$$y(t) = C_0 \tilde{x}(t), \quad (3.29)$$

com

$$A_{0(n+t, n+t)} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{(j,j)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_{01(m,m)} & \vdots & A_{02(m,j)} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$B_{0(n+t, s)} = \begin{bmatrix} S_{01(j,s)} \\ \dots \\ S_{02(m,s)} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C}_{0(m,n+t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(m,m)} & : & \mathbf{0}_{(m,j)} \end{bmatrix}, \quad j = n + t - m. \quad (3.31)$$

O novo vetor de estado  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ,  $(n + t)$ -dimensional é dividido em duas partes

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{m(m,1)} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{x}}' \end{Bmatrix}, \quad (3.32)$$

onde  $\tilde{\mathbf{x}}_m(t)$  é um vetor  $m$ -dimensional, que devido às equações (3.24) e (3.27) é o próprio vetor de medidas  $\mathbf{y}(t)$ .

Com esta nova representação de estado tem-se novamente a estruturação interna especial da forma normal do tipo descrito em 2.3.

O trabalho tem por objetivo a identificação da matriz  $\mathbf{A}_0$ , a partir da observação das medidas  $\mathbf{y}(t)$ , através de métodos descritos nos capítulos subsequentes. A estimação dos elementos das submatrizes  $\mathbf{A}_{01}$  e  $\mathbf{A}_{02}$  contudo, não fornece diretamente os parâmetros físicos procurados, contidos nas submatrizes da matriz dinâmica  $\mathbf{A}$  do sistema mecânico (2.3).

Os parâmetros estimados estão relacionados aos parâmetros procurados através da transformação de variáveis  $\mathbf{T}$ . Conhecida a estrutura desta matriz de transformação, pode-se retornar à forma original (3.21) pela operação inversa. Esta temática será abordada separadamente mais adiante.

## 3.4 Transformação Inversa

O problema a ser abordado neste momento, consiste em verificar as condições necessárias para que seja possível retornar-se ao sistema original (3.21), a partir da identificação da matriz  $\mathbf{A}_0$  constante na equação (3.28). As possibilidades de solução estão rigidamente ligadas à estrutura da matriz de medidas  $\mathbf{C}$  em (3.24), pois ela é responsável pela forma com que a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  é montada.

Uma formulação geral na forma matricial em blocos seria bastante complicada para se derivar e não se poderia visualizar as operações facilmente. Por esta razão analisa-se diferentes casos limites, para os quais o problema da transformação inversa e a correspondente determinação de uma única matriz  $\mathbf{A}$  (2.3) ainda é possível.

### 3.4.1 Medição do Vetor de Estado Completo

Inicialmente considera-se que o vetor de estado do sistema mecânico  $\mathbf{x}(t)$  possa ser completamente acessado, ou seja, na equação (3.25) tem-se

$$m = n, \quad \mathbf{C} = \mathbf{I}_{(n,n)} \quad (3.33)$$

No processo de transformação inversa, a ordem  $t$  do processo gerador dos ruídos ocupa uma posição decisiva, pois a construção da matriz de transformação, a partir da matriz  $\Omega$  (3.26), depende também da ordem do filtro de forma.

Tem-se agora dois casos importantes a serem analisados. Primeiro, quando a ordem do filtro  $t$  é menor ou igual ao número de graus de liberdade  $f$  e num segundo caso quando  $f < t \leq n$ .

**A: Caso  $0 \leq t \leq f$**

A partir da matriz  $\Omega$  em (3.26) com (3.22), pode-se montar a matriz de transformação correspondente na forma

$$\mathbf{T}_{(n+t, n+t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{H}_{v1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{H}_{v2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{E}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{(t,t)} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{H}_{v1}$ ,  $\mathbf{H}_{v2}$  e  $\mathbf{U}$  são matrizes desconhecidas e

$$\mathbf{E}_{(t,f)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(t,t)} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

A partir da transformação de similaridade (2.16) sabe-se que a matriz estimada  $\mathbf{A}_0$  satisfaz a relação

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{TAT}^{-1}, \quad (3.36)$$

e com isto

$$\mathbf{TA} = \mathbf{A}_0\mathbf{T}. \quad (3.37)$$

A equação (3.37) contém as relações necessárias para a determinação dos parâmetros procurados da matriz  $\mathbf{A}$ .

Reescrevendo-se a equação (3.37) na forma expandida, chega-se a

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{H}_{v1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{H}_{v2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(t,t)} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{U}_{(t,t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{BH}_{v1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{1(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{2(f,f)} & \vdots & \mathbf{BH}_{v2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{(t,t)} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(t,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{01(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{02(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{03(f,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{H}_{v1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{H}_{v2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{(t,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(t,t)} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{U}_{(t,t)} \end{bmatrix}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

A partir de  $\mathbf{A}_0$ , constrói-se três submatrizes  $\mathbf{A}_{01}$ ,  $\mathbf{A}_{02}$  e  $\mathbf{A}_{03}$  de forma que, a primeira linha deste bloco de matrizes, se inicie a partir da  $(f+1)$ -ésima linha da matriz total  $\mathbf{A}_0$ . As submatrizes  $\mathbf{A}_{01}$  e  $\mathbf{A}_{02}$  são matrizes quadradas de ordem  $f$  e  $\mathbf{A}_{03}$  é uma matriz  $(f, t)$ . As partes da matriz  $\mathbf{A}_0$  que não interessam para a resolução deste problema são representadas com o símbolo  $\otimes$ . As primeiras  $t$  multiplicações de linhas em (3.38) representam simples identidades. O segundo grupo de relações envolvendo a  $(t+1)$ -ésima até a  $f$ -ésima linhas não apresentam relações entre os parâmetros procurados.

A partir das seguintes  $f$  multiplicações em bloco, obtém-se

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{01}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{02} + \tilde{\mathbf{A}}_{03}, \quad (3.40)$$

com

$$\tilde{\mathbf{A}}_{03(f,f)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{03(f,t)} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

As equações (3.39) e (3.40) contêm informações suficientes para a determinação de todas as matrizes  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  (2.3). É interessante notar que, apesar da condição de que a excitação seja um ruído colorido, os parâmetros físicos podem ser encontrados ainda diretamente na matriz  $\mathbf{A}_0$  e em posições bem determinadas.

As últimas  $t$  multiplicações também contêm outras relações lineares entre os parâmetros procurados e os elementos conhecidos de  $\mathbf{A}_0$ . Daí, nota-se uma determinada redundância na formulação geral. A dimensão desta redundância depende da matriz de medidas  $\mathbf{C}$  e da ordem  $t$  do filtro de forma.

Interessante salientar que se  $t = 0$ , recai-se diretamente no problema de excitação tipo ruído branco com  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  e portanto  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ .

No limite superior, ou seja,  $t = f$ , as relações de identidade, detectadas nas multiplicações envolvendo a  $(t + 1)$ -ésima até a  $f$ -ésima linhas, desaparecem.

Surgem, além das  $f$  multiplicações mostradas em (3.39) e (3.40), mais  $f$  multiplicações envolvendo relações com os parâmetros procurados.

**B: Caso  $f \leq t \leq n$**

A matriz de transformação assume, neste caso, a seguinte estrutura

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} & & & \vdots & \\ & & \mathbf{I}_{(n,n)} & \vdots & \mathbf{H}_{v(n,t)} \\ & & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{1(f,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \overline{\mathbf{A}}_{1(t-f,f)} & \vdots & \overline{\mathbf{A}}_{2(t-f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{2(t-f,t)} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

As submatrizes  $\overline{\mathbf{A}}_1$  e  $\overline{\mathbf{A}}_2$  são obtidas a partir das primeiras  $(t - f)$  linhas das matrizes  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

Analisa-se também, neste caso, a forma expandida para a equação (3.37):

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} & & & \vdots & \\ & \mathbf{I}_{(n,n)} & & \vdots & \mathbf{H}_{v(n,t)} \\ & & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{1(f,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \bar{\mathbf{A}}_{1(t-f,f)} & \vdots & \bar{\mathbf{A}}_{2(t-f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{2(t-f,t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{B}\mathbf{H}_{v1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{1(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{2(f,f)} & \vdots & \mathbf{B}\mathbf{H}_{v2} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & \mathbf{0}_{(t,n)} & & \vdots & \mathbf{R}_{(t,t)} \\ & & & \vdots & \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} & & & \vdots & \\ & \mathbf{0}_{(t,n)} & & \vdots & \mathbf{I}_{(t,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \otimes & \otimes & \otimes & \vdots & \otimes \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{A}_{01(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{02(f,f)} & \vdots & \bar{\mathbf{A}}_{03(f,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \otimes & \otimes & \otimes & \vdots & \otimes \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \vdots & \\ & \mathbf{I}_{(n,n)} & & \vdots & \mathbf{H}_{v(n,t)} \\ & & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{1(f,t)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \bar{\mathbf{A}}_{1(t-f,f)} & \vdots & \bar{\mathbf{A}}_{2(t-f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{2(t-f,t)} \end{bmatrix}. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

As submatrizes  $\mathbf{A}_{01}$  e  $\mathbf{A}_{02}$  são quadradas de ordem  $f$  e a submatriz  $\bar{\mathbf{A}}_{03}$  tem a forma

$$\bar{\mathbf{A}}_{03(f,t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{03(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{04(f,t-f)} \end{bmatrix}.$$

Da multiplicação em blocos em (3.43) obtém-se

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{01} + \tilde{\mathbf{A}}_{04} \mathbf{A}_1, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{02} + \mathbf{A}_{03} + \tilde{\mathbf{A}}_{04} \mathbf{A}_2, \quad (3.45)$$

com

$$\tilde{\mathbf{A}}_{04(f,f)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{04(f,t-f)} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

A determinação de  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  segue com

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{04}]^{-1} \mathbf{A}_{01}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{A}_2 = [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{04}]^{-1} [\mathbf{A}_{02} + \mathbf{A}_{03}]. \quad (3.48)$$

As multiplicações a partir da  $(t+1)$ -ésima até a  $n$ -ésima linha, também contêm relações lineares com os parâmetros das matrizes  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ , contudo não são em número suficientes para a determinação única de todos os parâmetros. As últimas  $t$  multiplicações contêm apenas relações não lineares com os parâmetros desconhecidos, o que para uma formulação geral se torna difícil.

O problema para o caso em que  $f \leq t \leq 2f$  apresenta-se também aqui, como no caso anterior, hiperdeterminado, ou seja, tem-se mais relações lineares do que as necessárias para a determinação única dos parâmetros procurados das matrizes  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

Para o caso em que  $t = f$ , recai-se no problema discutido anteriormente. No caso extremo em que  $t = n$ , não se tem mais nenhuma equação linear redundante, pois em (3.43) se obterá exatamente  $f$  relações de multiplicação, lineares nos parâmetros, o que seria suficiente para a solução do problema.

Desta forma, pode-se concluir que na medição do vetor de estado completo, pode-se permitir, no máximo, que a ordem do filtro de forma seja igual a ordem do sistema mecânico, ou seja,  $t = n$ .

Por outro lado, da análise feita nos dois casos, nota-se que se a ordem do filtro de forma for menor que  $n$ , aparecem mais equações lineares do que as necessárias para a determinação dos parâmetros. Existe desta forma, uma certa redundância na medição das  $n$  variáveis de estado do sistema mecânico.

### 3.4.2 Diminuição do Número de Variáveis Medidas.

A redundância presente na análise da seção anterior pode ser utilizada, não mais com o intuito de se aumentar a ordem  $t$  do processo de ruído, mas sim para tentar diminuir a quantidade de grandezas físicas a serem medidas.

Assume-se que a matriz  $\mathbf{C}$  presente na equação (3.25) possua a seguinte estrutura

$$\mathbf{C}_{(m,2f)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(m,m)} & : & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

com  $f \leq m \leq 2f$ .

A seguir procura-se determinar as limitações do problema da transformação inversa, no sentido de se obter o número mínimo necessário de variáveis medidas, para uma dada ordem  $t$  do processo gerador do ruído.

Para se visualizar melhor esta questão, escreve-se a equação (3.37) com a matriz de transformação regular



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} & & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{I}_{(m,m)} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{H}_{v(m,t)} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{1(f,t)} & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ \overline{\mathbf{A}}_{1(l,f)} & \vdots & \overline{\mathbf{A}}_{2(l,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{2(l,t)} & \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

na forma expandida

$$\begin{bmatrix} & & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{I}_{(m,m)} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{H}_{v(m,t)} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{1(f,t)} & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ \overline{\mathbf{A}}_{1(l,f)} & \vdots & \overline{\mathbf{A}}_{2(l,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{2(l,t)} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{BH}_{v1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{1(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{2(f,f)} & \vdots & \mathbf{BH}_{v2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \mathbf{0}_{(t,n)} & & \vdots & \mathbf{R}_{(t,t)} \\ & & & \vdots & \end{bmatrix} = \quad (3.51)$$

$$= \begin{bmatrix} & & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0}_{(k,m+f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(k,k)} \\ & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & \mathbf{A}_{01(f,m+f)} & \vdots & \mathbf{A}_{02(f,k)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \otimes & \otimes & \otimes & \vdots & \otimes \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{I}_{(m,m)} & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{H}_{v(m,t)} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{1(f,t)} & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \\ \overline{\mathbf{A}}_{1(l,f)} & \vdots & \overline{\mathbf{A}}_{2(l,f)} & \vdots & \mathbf{U}_{2(l,t)} & \end{bmatrix}$$

com

$$k = (2f + t) - m$$

e

$$l = k - f.$$

Em (3.51) as submatrizes  $\overline{\mathbf{A}}_1$  e  $\overline{\mathbf{A}}_2$  tem dimensões  $(l, f)$  e são obtidas das primeiras  $(k - f)$  linhas das matrizes  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

Como já foi salientado anteriormente, necessita-se de  $f$  multiplicações em linha em (3.51) para obter-se equações lineares suficientes para a obtenção dos parâmetros procurados.

Isto significa que se forem descartadas as últimas  $l$  multiplicações em linha, que não são lineares nos parâmetros, as matrizes  $A_1$  e  $A_2$  devem ser obtidas das  $f$  linhas anteriores. Ao mesmo tempo, as primeiras  $m$  multiplicações em linha se traduzem em relações triviais de identidade sem ligação com os parâmetros.

Para que estas condições sejam satisfeitas, a matriz  $A_0$  identificada deve possuir uma estrutura especial. A dimensão  $k$  deve ser igual a  $m$ .

Com isto procura-se em (3.51) fazer com que as primeiras  $m$  multiplicações em linha conttenham somente relações de identidades triviais. As submatrizes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas somente com base nas  $f$  multiplicações a partir da  $(m+1)$ -ésima linha, ou seja, sem redundância.

A condição  $k = m$  se traduz em

$$m = f + t/2 \quad \text{para} \quad 0 < t \leq 2f. \quad (3.52)$$

De maneira geral, para a solução do problema, a relação

$$m \geq f + t/2 \quad \text{para} \quad 0 < t \leq 2f. \quad (3.53)$$

deve ser respeitada.

Para o caso particular  $t = 2f$ , que já foi comentado anteriormente, necessita-se  $2f$  medidas de acordo com a equação (3.49), para que o sistema ainda possa ser determinado exatamente, o que está de acordo com a análise do caso B.

Quando  $t = 0$ , situação em que a entrada do sistema mecânico é diretamente um ruído branco por exemplo, são suficientes  $f$  medidas para a determinação das matrizes  $A_1$  e  $A_2$ .

Portanto, a redundância de medição contida na utilização de mais de  $f$  medidas é utilizada para permitir uma complexidade maior ao processo gerador dos ruídos coloridos.

Para uma dada ordem  $t$  do processo ruído, tem-se com (3.53) uma condição necessária para o número mínimo  $m$  de medidas.

### 3.5 Comentários

Após os tratamentos de diferentes condições e modelos nos itens anteriores, deve-se salientar alguns aspectos de grande importância.

- A matriz de transformação  $T$  obtida a partir da equação (3.26) deve ser regular. Associada a esta condição tem-se a necessidade de que o sistema seja exatamente observável.

Para preencher estes requisitos não basta que a condição (3.53) seja satisfeita, mas que a matriz  $C$  possua uma estruturação interna adequada a cada problema particular. A título de exemplo, analisa-se o caso de um sistema mecânico excitado por

ruído branco e sem perturbações nas medidas. Da condição (3.53) extrai-se que há necessidade de  $f$  medidas. Seja, então, uma matriz de medidas em (3.25) na forma

$$C = \begin{bmatrix} I_{(f,f)} & 0_{(f,f)} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Com  $H_v = 0$ , tem-se a matriz de transformação

$$T = \begin{bmatrix} I_{(f,f)} & 0_{(f,f)} \\ 0_{(f,f)} & I_{(f,f)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C^* \\ C^* A_0^* \end{Bmatrix}. \quad (3.55)$$

O sistema é exatamente observável e a matriz  $T$  é regular em (3.55). Dessa maneira, o sistema satisfaz a todas as condições e daí extrai-se que a nova matriz  $A_0$  é idêntica à matriz  $A$  do sistema mecânico.

Entretanto, se a matriz de medidas com  $f$  variáveis tivesse a seguinte forma, para  $f$  par,

$$C = \begin{bmatrix} I_{(f/2,f/2)} & 0 & 0 & 0_{(f/2,f/2)} \\ 0 & 0_{(f/2,f/2)} & I_{(f/2,f/2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

ter-se-ia, a partir de (3.26), a seguinte matriz de transformação

$$T = \begin{bmatrix} I_{(f/2,f/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{(f/2,f/2)} & I_{(f/2,f/2)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{(f/2,f/2)} & 0 & I_{(f/2,f/2)} & 0 \\ \overline{A}_{1(f/2,f)} & & \overline{A}_{2(f/2,f)} & \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

A matriz  $T$  em (3.57) não é regular e o sistema com a matriz de medidas (3.56) não é exatamente observável.

Este resultado ilustra as conclusões já apresentadas em [43, 39] sobre a redundância em se medir a velocidade correspondente ao deslocamento de um determinado ponto do sistema.

Estas medições redundantes não acrescentam informações sobre o sistema mecânico e sim sobre o sistema de filtro de forma. Este fato pode ser visto quando analisa-se, por exemplo, a equação (3.34) onde as linhas correspondentes à parte de  $C^*A^*$  somente são linearmente independentes por diferenças nas matrizes  $H_{v_2}$  e  $U$ .

Então pode-se concluir que, se esta redundância é capaz de observar o sistema filtro de forma, ela pode ser utilizada de forma ótima, caso contrário não.

- Nota-se que de (3.51) ainda restam relações não lineares nos parâmetros, que não foram utilizadas para a análise genérica do problema da transformação inversa. Entretanto, dependendo da estruturação interna das matrizes  $A_1$  e  $A_2$ , estas relações ainda podem aparecer de uma forma simplificada para utilização. De qualquer maneira, isto dependerá do problema particular em questão. Havendo a possibilidade de se trabalhar também com as estruturas internas de  $A_1$  e  $A_2$ , pode-se, inclusive, diminuir ainda mais o número de medidas necessárias para a identificação das matrizes do sistema. Esta temática será abordada no capítulo 6 através da análise de um sistema mecânico específico.

Até o momento, assumiu-se que a matriz de medidas  $C$  em (3.25) é da forma

$$C_{(n,n)} = \begin{bmatrix} I_{(m,m)} & : & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, que se pode ter acesso sempre às primeiras  $m$  grandezas de estado. Esta condição não restringe a generalidade do problema, tendo em vista que a partir de uma estrutura qualquer da matriz  $C$ , é possível obter-se novamente esta estruturação especial, através da utilização da transformação de coordenadas descrita na seção 2.3. Esta operação foi objeto de análise por Rother [39], permitindo diferentes configurações de medida, inclusive com combinações de medições de deslocamentos, velocidades e acelerações.

- Na análise conduzida a partir da seção 3.2, assumiu-se um determinado modelo para o sistema total, que incluiu um mecanismo de geração de ruídos coloridos e um mecanismo de atuação de perturbação às medidas. Contudo, uma análise exatamente análoga pode ser refeita levando-se em consideração outros modelos, assim como outros mecanismos de interligação entre os mesmos. Nesse caso dever-se-ia reanalisar todas as implicações no problema da transformação de um modelo estimado na forma das equações (3.28) e (3.29) para o sistema mecânico (2.3), como feito a partir da seção 3.4.
- Neste trabalho coloca-se o problema de identificação paramétrica de um modelo na forma das equações (3.28) e (3.29). Portanto, assume-se que, tanto a ordem do sistema mecânico em questão, quanto a do sistema filtro de forma gerador das perturbações, sejam conhecidas. A verificação prática destas hipóteses é de caráter bastante complexo e implica não somente na determinação da ordem do sistema

global (sistema+filtro), como também na estruturação interna da matriz de observação. Alguns autores propõem métodos para determinação da ordem de um sistema genérico excitado por ruído branco, baseados na análise do determinante de uma matriz de correlações [53, 25, 18]. Para cada variável medida, verifica-se qual o grau de correlação desta variável para uma ordem crescente da matriz de correlações.

É possível desta maneira, determinar como cada variável observa o sistema e assim se verificar as hipóteses assumidas.

Não faz parte do escopo deste trabalho esta investigação, atendo-se, entretanto, mais à proposta de um procedimento de identificação, que será tratado em seguida.

## Capítulo 4

# Identificação através da Matriz Fundamental de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente

O procedimento apresentado a seguir, baseia-se na utilização da relação (3.14), que possibilita a estimação da matriz fundamental a partir da estimação das matrizes de correlação dos sinais medidos.

Através do conhecimento da matriz fundamental do sistema, pode-se obter, por uma transformação numérica, a matriz dinâmica do sistema descrito pela equação (2.3). Esta transformação foi tratada anteriormente na seção 2.5.

Analisa-se, neste capítulo, diferentes configurações de medidas e finalmente a influência de um ruído de medição do tipo aditivo.

### 4.1 Medição do Vetor de Estado sem Perturbações e Excitação Tipo Ruído Branco

Primeiramente, para elucidação do procedimento em análise, trata-se do caso ideal, no qual o vetor de estado possa ser inteiramente medido sem perturbações externas. Pelo conhecimento dos estados do sistema é possível, então, estimar as matrizes de correlações para diferentes defasagens temporais  $\tau_i$ . Denomina-se a matriz estimada de correlações do vetor  $\mathbf{x}(t)$  para defasagem  $\tau_i$  por,

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}(\tau_i). \quad (4.1)$$

A partir das estimativas (4.1) pode-se trabalhar sobre a relação (3.14) e obter-se

$$\hat{\Phi}^T(\tau_j, \tau_i) = \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(\tau_i) \hat{\mathbf{R}}_{xx}(\tau_j) \quad \text{para} \quad \tau_j \geq \tau_i, \quad (4.2)$$

onde  $\hat{\Phi}(\tau_j, \tau_i)$  indica a estimativa da matriz fundamental.

O estimador  $\hat{\Phi}(\tau_j, \tau_i)$  (4.2) converge para o valor real da matriz fundamental  $\Phi(\tau_j, \tau_i)$ , se  $\hat{R}_{xx}(\tau_i)$  também convergir para  $R_{xx}(\tau_i)$  [17], e se  $R_{xx}(\tau_i)$  for uma matriz regular.

As equações (2.10) e (2.11) explicitam a relação entre a matriz fundamental e a matriz do sistema **A** procurada.

A determinação da matriz **A** a partir da matriz fundamental torna-se possível através da operação numérica descrita na seção 2.5.

O problema é resolvido pela escolha adequada do tempo de discretização máximo de acordo com a equação (2.43).

## 4.2 Medição dos Deslocamentos sem Perturbações e Excitação Tipo Ruído Branco

A solução aparentemente simples do problema de identificação apresentado anteriormente é custeada pela forte imposição sobre as medidas. Exige-se a medição do vetor de estado completo, o que normalmente na prática não é possível.

Verifica-se, contudo, uma redundância na observação do vetor de estado completo (deslocamentos e velocidades) no caso de sistemas mecânicos na forma da equação (2.3), como já referido anteriormente.

À representação de estado (2.3) associa-se uma matriz de medidas dos estados na forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (4.3)$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{O}_{(f,f)} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Das equações (4.3) e (4.4) nota-se que somente as primeiras  $f$  variáveis de estado, ou seja, os deslocamentos, são observados.

Para a obtenção de um estimador da matriz fundamental do sistema, somente com a utilização das variáveis medidas  $\mathbf{y}(t)$ , faz-se necessária a condução de uma transformação sobre a notação (2.3).

Seja, então, uma matriz de transformação com a seguinte estrutura

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Se a matriz fundamental  $\Phi(\tau_j, \tau_i)$  é da forma genérica

$$\Phi(\tau_j, \tau_i) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\tau_j, \tau_i) & \Phi_2(\tau_j, \tau_i) \\ \Phi_3(\tau_j, \tau_i) & \Phi_4(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

com as equações (4.4) e (4.5) obtém-se:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I_{(f,f)} & 0 \\ \Phi_{1(f,f)}(\tau_j, \tau_i) & \Phi_{2(f,f)}(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Esta transformação de similaridade pode ser realizada, se a condição

$$\text{posto } \bar{T} = n = 2f \quad (4.8)$$

for satisfeita.

Esta condição se traduz na regularidade da submatriz  $\Phi_2(\tau_j, \tau_i)$ , o que, contudo é muito difícil de se provar, dado que a matriz fundamental é obtida numericamente a partir da matriz dinâmica do sistema.

Aplicando-se a transformação (4.7), chega-se a um novo vetor de estado

$$\bar{x}(t) = \bar{T}x(t) \quad (4.9)$$

e a uma nova representação de estado do sistema (2.3),

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad (4.10)$$

$$y(t) = C\bar{x}(t), \quad (4.11)$$

com

$$\bar{A} = \bar{T}A\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{1(f,f)} & \bar{A}_{2(f,f)} \\ \bar{A}_{3(f,f)} & \bar{A}_{4(f,f)} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\bar{B} = \bar{T}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1(f,p)} \\ \bar{B}_{2(f,p)} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e

$$\bar{x}(t) = \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \vdots \\ \xi^*(t) \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$



O novo vetor de estado  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  possui em suas primeiras  $f$  componentes, o vetor das grandezas de deslocamento  $\xi(t)$  inalterado, enquanto o vetor  $\xi^*(t)$  não mais representa as velocidades do sistema.

O objetivo da utilização da forma (4.10) e (4.11) é de se obter uma estruturação especial da matriz fundamental. O próximo passo, portanto, é de se verificar o que ocorre com a matriz  $\Phi(\tau_j, \tau_i)$ .

Através do teorema de Cayley-Hamilton pode-se escrever a matriz fundamental  $\Phi(\tau_j, \tau_i)$  como um polinômio matricial em  $\mathbf{A}$  [29], ou seja,

$$\Phi(\tau_j, \tau_i) = \alpha_0 \mathbf{I}_{(n,n)} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{(n-1)}. \quad (4.15)$$

Demonstra-se facilmente com (4.15) que uma transformação sobre a matriz  $\mathbf{A}$  implica na mesma transformação sobre  $\Phi(\tau_j, \tau_i)$  e assim

$$\bar{\Phi}(\tau_j, \tau_i) = e^{\bar{\mathbf{A}}(\tau_j - \tau_i)} = \bar{\mathbf{T}} \Phi(\tau_j, \tau_i) \bar{\mathbf{T}}^{-1}. \quad (4.16)$$

Desenvolvendo-se a transformação  $\bar{\mathbf{T}}$ , equação (4.7), sobre  $\Phi(\tau_j, \tau_i)$  de acordo com o exposto na seção 2.3, chega-se então à matriz fundamental  $\bar{\Phi}(\tau_j, \tau_i)$  para o novo sistema de coordenadas,

$$\bar{\Phi}(\tau_j, \tau_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \mathbf{I}_{(f,f)} \\ \bar{\Phi}_{1(f,f)}(\tau_j, \tau_i) & \bar{\Phi}_{2(f,f)}(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Reescreve-se em seguida a equação (3.14) na forma expandida para a nova representação de estado (4.9) e (4.17),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_j) & \mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_j) \\ \mathbf{R}_{\xi^*\xi}(\tau_j) & \mathbf{R}_{\xi^*\xi^*}(\tau_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) & \mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_i) \\ \mathbf{R}_{\xi^*\xi}(\tau_i) & \mathbf{R}_{\xi^*\xi^*}(\tau_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\Phi}_1^T(\tau_j, \tau_i) \\ \mathbf{I} & \bar{\Phi}_2^T(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Efetuando-se as multiplicações, chega-se às seguintes relações matriciais

$$\mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_j) = \mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_i), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_j) = \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \bar{\Phi}_1^T(\tau_j, \tau_i) + \mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_i) \bar{\Phi}_2^T(\tau_j, \tau_i), \quad (4.20)$$

$$\mathbf{R}_{\xi^*\xi}(\tau_j) = \mathbf{R}_{\xi^*\xi^*}(\tau_i), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{R}_{\xi^* \xi^*}(\tau_j) = \mathbf{R}_{\xi^* \xi}(\tau_i) \bar{\Phi}_1^T(\tau_j, \tau_i) + \mathbf{R}_{\xi^* \xi^*}(\tau_i) \bar{\Phi}_2^T(\tau_j, \tau_i). \quad (4.22)$$

Tendo em vista que se tem acesso somente aos deslocamentos do sistema, só é possível obter estimativas para as matrizes  $\mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i)$ .

Supondo que

$$\tau_j = \tau_i + n\Delta t \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.23)$$

sendo  $n\Delta t$  o intervalo de tempo entre as duas defasagens  $\tau_i$  e  $\tau_j$ , pode-se reescrever a equação (4.20) para  $n = 1$  da seguinte forma

$$\mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_i + \Delta t) = \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \bar{\Phi}_1^T(\Delta t, 0) + \mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_i) \bar{\Phi}_2^T(\Delta t, 0) \quad (4.24)$$

e a equação (4.19) para  $n = 1$  e  $n = 2$  como segue,

$$\mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i + \Delta t) = \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i), \quad (4.25)$$

$$\mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i + 2\Delta t) = \mathbf{R}_{\xi\xi^*}(\tau_i + \Delta t). \quad (4.26)$$

Substituindo-se (4.25) e (4.26) em (4.24) chega-se à equação

$$\mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i + 2\Delta t) = \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \bar{\Phi}_1^T(\Delta t, 0) + \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i + \Delta t) \bar{\Phi}_2^T(\Delta t, 0), \quad (4.27)$$

que contém agora somente relações entre as matrizes  $\mathbf{R}_{\xi\xi}$  que podem ser estimadas e as matrizes desconhecidas  $\bar{\Phi}_1(\Delta t, 0)$  e  $\bar{\Phi}_2(\Delta t, 0)$ .

Com a escolha de diferentes  $\tau_i$ 's pode-se montar um estimador para as matrizes  $\bar{\Phi}_1(\Delta t, 0)$  e  $\bar{\Phi}_2(\Delta t, 0)$ .

Por exemplo, adotando-se  $i = 1$  e  $i = 2$  e com a seguinte simplificação de notação

$$\tau_i + n\Delta t = \tau_{(i+n)}, \quad (4.28)$$

obtem-se a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1^T(\Delta t, 0) \\ \hat{\Phi}_2^T(\Delta t, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_1) & \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_2) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_2) & \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_3) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_4) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Tendo-se a matriz fundamental  $\bar{\Phi}(\Delta t, 0)$  estimada, por exemplo, pela equação (4.29), coloca-se a questão de como retornar a matriz do sistema  $\mathbf{A}$ .

O primeiro passo nesta direção é de se obter a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  a partir da matriz

$$\bar{\Phi}(\Delta t, 0) = \exp(\bar{\mathbf{A}}\Delta t)$$

pela transformação numérica descrita na seção 2.5.

A relação existente entre as matrizes  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\mathbf{A}$  diz respeito à matriz de transformação  $\bar{\mathbf{T}}$  em (4.7) que, contudo, é desconhecida a princípio.

Entretanto, analisa-se a equação (4.12)

$$\bar{\mathbf{T}} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{T}} \quad (4.30)$$

na forma expandida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \Phi_1(\tau_j, \tau_i) & \Phi_2(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_2 \\ \bar{\mathbf{A}}_3 & \bar{\mathbf{A}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \Phi_1(\tau_j, \tau_i) & \Phi_2(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

com todas as submatrizes de ordem  $(f, f)$ .

A matriz de transformação é formada por apenas duas submatrizes desconhecidas, ou seja  $\Phi_1(\tau_j, \tau_i)$  e  $\Phi_2(\tau_j, \tau_i)$ . Pelas multiplicações em (4.31) e após rearranjo chega-se às relações

$$\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 \Phi_1(\tau_j, \tau_i) = \mathbf{O}, \quad (4.32)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_2 \Phi_2(\tau_j, \tau_i) = \mathbf{I}. \quad (4.33)$$

Das relações (4.32) e (4.33) segue-se

$$\Phi_2(\tau_j, \tau_i) = \bar{\mathbf{A}}_2^{-1} \quad (4.34)$$

e

$$\Phi_1(\tau_j, \tau_i) = -\bar{\mathbf{A}}_2^{-1} \bar{\mathbf{A}}_1. \quad (4.35)$$

Monta-se dessa maneira a matriz de transformação (4.7)

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -\bar{\mathbf{A}}_2^{-1} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_2^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Aplicando-se, portanto, sobre o sistema (4.10), (4.11) a transformação inversa à (4.9), com  $\bar{\mathbf{T}}$  na forma (4.36), obtém-se a matriz  $\mathbf{A}$  dos parâmetros procurados.

A inversa da matriz  $\bar{\mathbf{T}}$  descrita em (4.36) é

$$\bar{\mathbf{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

ou seja, a operação de aplicação da transformação inversa, para obtenção dos parâmetros físicos contidos em  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ , é equivalente à transformação de variáveis sobre o novo sistema  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  (equações 4.12 e 4.13), na forma descrita em 2.3, para obtenção de uma forma normal reduzida.

Dessa maneira, obtida uma estimativa para a matriz  $\bar{\Phi}(\Delta t, 0)$ , processa-se uma operação numérica para a obtenção de  $\bar{\mathbf{A}}$ , que não se encontra na forma normal especial característica da matriz  $\mathbf{A}$ . Aplica-se a transformação de coordenadas de acordo com a seção 2.3, para obtenção da matriz dinâmica do sistema  $\mathbf{A}$ .

Estas operações são análogas às utilizadas por Schwarz [43] e por Roether [38], onde analisou-se a identificação de sistemas mecânicos por um modelo discretizado no tempo e medição de entradas e saídas do sistema.

A mesma metodologia foi aplicada aqui, entretanto para um problema diferente. Fundamentalmente, neste caso, não são utilizadas medições das entradas e nem de um modelo explícito discretizado no tempo. Diretamente a partir das estimativas das matrizes de correlações segue-se a determinação dos elementos da matriz fundamental. Dessa forma, todo o tratamento é feito em tempo contínuo.

Entretanto, a transformação da matriz fundamental para uma matriz dinâmica do sistema permanece como dificuldade. Esta dificuldade não reside no fato da operação numérica em si, mas sim na falta de domínio sobre as combinações de parâmetros dela advindos. Esta falta de controle impede, por exemplo, que quaisquer informações obtidas sobre os parâmetros (posições de zeros, parâmetros conhecidos) possam ser utilizadas completamente já na fase de estimação da matriz fundamental, o que seria altamente desejável.

### 4.3 Excitação do Tipo Ruído Colorido

Trata-se, nesta seção, do sistema representado de forma genérica pelas equações (3.28) e (3.29). Esta formulação, como foi visto, pode representar um sistema excitado, por exemplo, por uma sequência do tipo ruído colorido. O objetivo será determinar as submatrizes  $\mathbf{A}_{01}$  e  $\mathbf{A}_{02}$ , a partir das medições das primeiras  $m$  variáveis de estado (3.31).

Na seção anterior verificou-se a necessidade de se trabalhar com uma forma diferente da equação de estado, com o intuito de se obter uma matriz fundamental com estruturação interna especial.

Para a obtenção desta forma normal especial procede-se à transformação de coordenadas

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{\tilde{x}}(t). \quad (4.38)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  é construída a partir das primeiras  $(n + t)$  linhas da matriz

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \dots \\ \mathbf{C}_0 \Phi_0(\tau_j, \tau_i) \\ \dots \\ \mathbf{C}_0 \Phi_0^2(\tau_j, \tau_i) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \mathbf{C}_0 \Phi_0^{n-t-1}(\tau_j, \tau_i) \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Devido à estrutura da matriz  $\mathbf{C}_0$  em (3.31), a realização da transformação (4.38) não implica em alterações nas primeiras  $m$  variáveis de estado no novo sistema de coordenadas.

A nova matriz fundamental é obtida com

$$\bar{\Phi}_0(\tau_j, \tau_i) = \bar{\mathbf{T}}\Phi_0(\tau_j, \tau_i)\bar{\mathbf{T}}^{-1}. \quad (4.40)$$

Esta matriz satisfaz também, como (4.16), a relação

$$\bar{\Phi}_0(\tau_j, \tau_i) = e^{\bar{\mathbf{A}}_0(\tau_j - \tau_i)} = e^{(\bar{\mathbf{T}}\mathbf{A}_0\bar{\mathbf{T}}^{-1})(\tau_j - \tau_i)}. \quad (4.41)$$

De acordo com a seção 2.3, a matriz fundamental passa a ter a seguinte estrutura interna especial com a operação (4.40),

$$\bar{\Phi}_0(\tau_j, \tau_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(j,m)} & & \mathbf{I}_{(j,j)} \\ \dots & \dots & \dots \\ & \bar{\Phi}_{01(m,n+t)}(\tau_j, \tau_i) & \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

sendo  $j = n + t - m$ .

O procedimento que se segue consiste na estimação da submatriz  $\bar{\Phi}_{01}(\tau_j, \tau_i)$  e então, a partir desta, a obtenção da matriz  $\mathbf{A}_0$ .

A relação fundamental (3.14) é válida também aqui, pois através da modelagem do ruído colorido, em combinação com a representação de estado estendida (3.22), obtém-se uma formulação onde a excitação permanece como um ruído branco.

Dessa maneira, para a nova representação de estado  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , tem-se

$$\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau_j) = \mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau_i) \bar{\Phi}_0^T(\tau_j, \tau_i) \quad \text{para } \tau_j \geq \tau_i. \quad (4.43)$$

O novo vetor de estados  $\bar{x}(t)$  possui em suas primeiras  $m$  variáveis, as mesmas variáveis de estado  $\tilde{x}_m(t)$  do vetor  $\tilde{x}(t)$ , (3.32).

A matriz de correlações  $\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}}$  possui, assim, a seguinte estrutura,

$$\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i)_{(m,m)} & \mathbf{R}_1(\tau_i)_{(m,j)} \\ \mathbf{R}_2(\tau_i)_{(j,m)} & \mathbf{R}_3(\tau_i)_{(j,j)} \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Em (4.44) é possível se obter estimativas somente da submatriz  $\mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i)$ .

Reescreve-se a equação (4.43) na forma expandida, observando-se as equações (4.42) e (4.44)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_j)_{(m,m)} & \mathbf{R}_1(\tau_j)_{(m,j)} \\ \mathbf{R}_2(\tau_j)_{(j,m)} & \mathbf{R}_3(\tau_j)_{(j,j)} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i)_{(m,m)} & \mathbf{R}_1(\tau_i)_{(m,j)} \\ \mathbf{R}_2(\tau_i)_{(j,m)} & \mathbf{R}_3(\tau_i)_{(j,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(m,j)} & \vdots \\ \vdots & \bar{\Phi}_{01(n+t,m)}^T(\tau_j, \tau_i) \\ \mathbf{I}_{(j,j)} & \vdots \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Da multiplicação das primeiras  $m$  linhas em (4.45) com as primeiras  $j$  colunas do lado direito, percebe-se a existência de relações de identidade que conferem à submatriz  $\mathbf{R}_1(\tau_i)_{(m,j)}$  uma estrutura especial.

Para se visualizar melhor estas relações considera-se o caso em que  $j = km$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) e reescreve-se somente uma parte da equação (4.45) com uma reestruturação da submatriz  $\mathbf{R}_1(\tau_i)_{(m,j)}$ ,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_j) & \mathbf{R}_{1(1)}(\tau_j) & \cdots & \mathbf{R}_{1(k-1)}(\tau_j) & \mathbf{R}_{1(k)}(\tau_j) \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i) & \mathbf{R}_{1(1)}(\tau_i) & \cdots & \mathbf{R}_{1(k-1)}(\tau_i) & \mathbf{R}_{1(k)}(\tau_i) \end{bmatrix} \times \\
& \times \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(m,m)} & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \mathbf{I}_{(m,m)} & & & & \vdots \\ & \mathbf{I} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mathbf{I}_{(m,m)} & \vdots \end{bmatrix} \bar{\Phi}_{01(n+t,m)}^T(\tau_j, \tau_i). \tag{4.46}
\end{aligned}$$

com todas as submatrizes quadradas de ordem  $m$ , excetuando-se  $\bar{\Phi}_{01}^T(\tau_j, \tau_i)$ .

Da equação (4.46) extrai-se

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_j) = \mathbf{R}_{1(1)}(\tau_i), \tag{4.47}$$

$$\mathbf{R}_{1(1)}(\tau_j) = \mathbf{R}_{1(2)}(\tau_i), \tag{4.48}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{R}_{1(k-1)}(\tau_j) = \mathbf{R}_{1(k)}(\tau_i), \tag{4.49}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i) & \mathbf{R}_{1(1)}(\tau_i) & \cdots & \mathbf{R}_{1(k-1)}(\tau_i) & \mathbf{R}_{1(k)}(\tau_i) \end{bmatrix} \bar{\Phi}_{01}^T(\tau_j, \tau_i) = \mathbf{R}_{1(k)}(\tau_j) \tag{4.50}$$

Considerando  $\tau_j = \tau_i + n\Delta t$ , tem-se por exemplo para  $n = 1$

$$\mathbf{R}_{1(1)}(\tau_i) = \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i + \Delta t), \tag{4.51}$$

$$\mathbf{R}_{1(2)}(\tau_i) = \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i + 2\Delta t), \tag{4.52}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{R}_{1(k-1)}(\tau_i) = \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i + (k-1)\Delta t), \tag{4.53}$$

$$\mathbf{R}_{1(k)}(\tau_i) = \mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}(\tau_i + k\Delta t). \tag{4.54}$$

Substituindo-se (4.51) a (4.54) em (4.50) e chamando-se  $\mathbf{R}_{\tilde{x}_m \tilde{x}_m}$  por  $\tilde{\mathbf{R}}$ ,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}(\tau_i) & \tilde{\mathbf{R}}(\tau_i + \Delta t) & \tilde{\mathbf{R}}(\tau_i + 2\Delta t) & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}(\tau_i + k\Delta t) \end{bmatrix}_{(m,n+t)} \bar{\Phi}_{01(n+t,m)}^T(\Delta t, 0) = \\
& = \tilde{\mathbf{R}}(\tau_i + (k+1)\Delta t). \tag{4.55}
\end{aligned}$$

A equação (4.55) indica uma relação para estimação da matriz  $\bar{\Phi}_{01}(\Delta t, 0)$ , a partir da estimação das matrizes de correlações das medidas de ordem  $m$  com diferentes defasagens no tempo. Como  $j = km$ , é necessário escolher  $(k - 1)$  diferentes  $\tau_i$ 's para a montagem de um sistema de equações mínimo para a determinação de  $\bar{\Phi}_{01}(\Delta t, 0)$ . Entretanto, pode-se escolher mais pontos para obter-se um sistema hiperdeterminado, possibilitando a estimação por um critério de minimização de erro, por exemplo, mínimos quadrados.

O desenvolvimento das equações, feito sob a consideração de que a grandeza  $j$  fosse um múltiplo inteiro do número de medidas  $m$ , foi unicamente para simplificar a visualização de todos os passos até a obtenção da equação do estimador. Para o caso em que  $j$  não seja um múltiplo inteiro de  $m$ , um desenvolvimento análogo pode ser conduzido sem maiores problemas.

Novamente aqui, como feito na seção 4.2, a partir da determinação de  $\bar{\Phi}_{01}(\Delta t, 0)$  obtém-se a matriz  $\bar{A}_0$  por uma operação numérica e reduzindo-se esta matriz por uma transformação análoga à realizada sobre a matriz  $\Phi_0(\tau_j, \tau_i)$ , chega-se à matriz  $A_0$ .

Entretanto, o problema ainda continua com a obtenção da matriz  $A$  do sistema mecânico, através da transformação inversa descrita em detalhes na seção 3.4.

## 4.4 Comentários

- A identificação paramétrica da matriz  $A$  realizada pelo procedimento da Matriz Fundamental foi tratada nas seções 4.1 a 4.3. Foram consideradas diferentes condições sobre o vetor de medidas. O desenvolvimento feito em 4.3 abrange um modelo mais geral e aplica-se também aos casos descritos em 4.1 e 4.2.

A sequência abaixo descreve todos os passos envolvidos no procedimento de identificação descrito neste capítulo.

1. Escolha de um vetor de medidas  $y(t)$  adequado para a observação do sistema mecânico em análise, observando as equações (3.26) e (3.53).
  2. Estimação da matriz fundamental  $\bar{\Phi}_0(\Delta t, 0)$  (equação 4.42) de acordo com o estimador (4.55).
  3. Transformação numérica da forma descrita na seção 2.5 para obtenção da matriz  $\bar{A}_0$ .
  4. Aplicação da transformação de coordenadas da forma descrita na seção 2.3, para obtenção da matriz  $A_0$  com a matriz de medidas  $C_0$  (equação 3.31).
  5. Transformação inversa da matriz  $A_0$  para a matriz  $A$ , de acordo com o desenvolvimento feito na seção 3.4.
- Importante salientar que, devido à transformação numérica envolvida no passo 3, perde-se o controle sobre os parâmetros físicos, ou combinação deles em  $A_0$ . Dessa



maneira, mesmo que se tenha conhecimento de algum elemento da matriz  $\mathbf{A}_0$ , dificilmente esta informação pode ser utilizada no passo 2, correspondente à estimação da matriz  $\overline{\Phi}_0(\Delta t, 0)$ .

- Nos trabalhos de Schwarz [43] e de Roether [38], onde trata-se da identificação de sistemas mecânicos a partir de medições das entradas e saídas do sistema, também é utilizada a transformação descrita no passo 3. Neste caso entretanto, trabalha-se com um modelo discretizado no tempo. A matriz dinâmica do sistema discretizado é  $\mathbf{F}$ , ou seja, a matriz fundamental de acordo com a equação (2.32). A passagem de  $\mathbf{F}$  estimada para a matriz  $\mathbf{A}$  envolve, portanto, a mesma transformação numérica.

Na formulação desenvolvida neste capítulo não se tem necessidade de utilizar um modelo discretizado no tempo, como foi visto. Devido ao caráter aleatório do sinal de excitação, foi possível dispensar a sua observação direta e aplicar a relação (3.14).

## Capítulo 5

# Identificação através da Equação Matricial de Ljapunov de Sistemas Mecânicos Excitados Estocasticamente

Pelo procedimento de identificação baseado na estimativa inicial da matriz fundamental, visto no capítulo anterior, tem-se a grande desvantagem de acesso aos parâmetros físicos somente por via indireta. Esta condição dificulta enormemente a utilização de quaisquer informações a respeito de parâmetros conhecidos de antemão. Para sistemas excitados estocasticamente pode-se, todavia, trabalhar também com a Equação Matricial de Ljapunov (3.11) que, em contrapartida, relaciona diretamente a matriz dinâmica do sistema mecânico com as matrizes de correlações de medidas de saída e e também com características do sinal de entrada.

Este conceito já foi utilizado por outros autores [24, 55, 54], entretanto, de forma um pouco restrita. Neste capítulo trata-se do problema inicial de excitação tipo ruído branco e depois estende-se a análise para sistemas genéricos na forma das equações (3.28) e (3.29) como já foi feito no capítulo anterior.

### 5.1 Medição do Vetor de Estado sem Perturbações e Excitação Tipo Ruído Branco

É proposto em [37] para esta situação, a direta análise da equação (3.11) aplicada para sistemas mecânicos na forma da equação (2.3), ou seja,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) & \mathbf{R}_{\xi\xi'}(\tau_i) \\ \mathbf{R}_{\xi\xi'}(\tau_i) & \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) & \mathbf{R}_{\xi\xi'}(\tau_i) \\ \mathbf{R}_{\xi\xi'}(\tau_i) & \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} = \\
= - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \Psi_{uu} \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}^T \tau_i}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Na equação (5.1) todas as submatrizes são quadradas de ordem  $f$ . A partir das multiplicações em blocos e devido à especial estruturação das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  para sistemas mecânicos, chega-se às relações,

$$\mathbf{R}_{\xi\xi'}(\tau_i) + \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

$$\mathbf{R}_{\xi\xi'}(\tau_i) + \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \mathbf{A}_1^T + \mathbf{R}_{\xi\xi}(\tau_i) \mathbf{A}_2^T = \mathbf{0}. \tag{5.3}$$

A equação matricial (5.2) representa apenas uma relação de identidade e não contém nenhuma ligação com os parâmetros das submatrizes  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$ .

Contudo, a equação matricial (5.3) apresenta uma ligação direta entre as matrizes de correlações e os parâmetros do sistema mecânico. Esta relação é básica para a derivação de uma função de estimação.

Com a escolha de diferentes  $\tau_i$ 's, tem-se um número suficiente de equações para a estimativa direta da matriz  $\mathbf{A}$ .

Por exemplo, com a estimativa das correlações para duas defasagens temporais  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , monta-se uma equação mínima do estimador

$$\hat{\Theta} = -\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{Y}}, \tag{5.4}$$

com

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1^T \\ \hat{\mathbf{A}}_2^T \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_1) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_2) \end{bmatrix},$$

e

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_1) & \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_1) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_2) & \hat{\mathbf{R}}_{\xi\xi}(\tau_2) \end{bmatrix}.$$

Apesar da solução simples para o problema, foi assumido que não só o ruído de excitação é do tipo branco, mas também que se tem acesso a todas as variáveis de estado

(deslocamentos e velocidades). Esta condição pode se refletir complicada para sistemas reais. Sabe-se também que existe uma redundância de informação nas medidas de deslocamentos e correspondentes velocidades, como visto em tratamentos anteriores. Esta redundância é objeto de exploração da próxima seção.

## 5.2 Medição dos Deslocamentos Sem Perturbações e Excitação do Tipo Ruído Branco

É proposto em [22] um procedimento para obtenção da equação do estimador com medições apenas dos deslocamentos. Neste procedimento, opera-se uma transformação de coordenadas para obtenção de uma forma normal especial e, a partir dessa forma, com as medições também das excitações, chega-se ao estimador.

A formulação apresenta, contudo, uma desvantagem. Esta se constitui na necessidade de se estimar juntamente com os parâmetros procurados, algumas correlações a princípio desconhecidas. Este fato pode tornar o método bastante trabalhoso, quando se analisa sistemas de ordem maiores.

Procura-se evitar este problema no método aqui proposto. Apresenta-se um procedimento para a obtenção de uma equação de estimação, através do qual, as matrizes  $A_1$  e  $A_2$  procuradas são calculadas a partir somente das matrizes de correlações estimáveis.

Propõe-se a utilização de um filtro associado as medições, que tem a função de correlacionar instantes diferentes de tempo e com isto possibilitar a estimação dos parâmetros, mesmo com um número reduzido de medidas.

A escolha da ordem do filtro, assim como, da estrutura interna de suas matrizes de entrada e do sistema, tem influência na forma final das funções de estimação obtidas. Sendo a ordem do sistema filtro muito pequena, não se garante a obtenção de relações suficientes para a montagem dos estimadores. Por outro lado, se a ordem do filtro é muito grande, pode-se ter problemas numéricos na obtenção dos resultados finais da estimação.

É possível derivar-se funções de estimação, que não contenham parâmetros do sistema filtro, a partir de escolhas adequadas de suas matrizes características. Este fato poderá ser observado pelo desenvolvimento que se segue.

Considera-se, então, um sistema de 3ª ordem, controlável, assintoticamente estável, denominado *filtro*, representado da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{N} \mathbf{f}(t) + \mathbf{P} \mathbf{y}(t), \quad (5.5)$$

com

$$\mathbf{f}^T(t) = \left\{ \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix} \right\}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(1,f)} \\ \mathbf{0}_{(1,f)} \\ \mathbf{P}_{(1,f)} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Na equação (5.5),  $\mathbf{y}(t)$  representa o vetor  $f$  dimensional de medidas do sistema dinâmico (2.3) é dado por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(f,f)} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Substituindo-se (5.8) e (5.9) em (5.5), obtém-se

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{N}\mathbf{f}(t) + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (5.10)$$

Juntando-se a equação (5.10) com a equação (2.3) pode-se reescrever a equação de estado expandida

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{f}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(n,n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{C} & \mathbf{N}_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(n,p)} \\ \mathbf{0}_{(3,p)} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (5.11)$$

Escreve-se então a equação (3.11) para este caso,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \mathbf{0}_{(n,3)} \\ \mathbf{A}_{1(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{2(f,f)} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}_{(1,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,f)} & \vdots & 0 \ 1 \ 0 \\ \mathbf{0}_{(1,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(1,f)} & \vdots & 0 \ 0 \ 1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_1 \ \dots \ \tilde{\mathbf{c}}_f & \vdots & \mathbf{0}_{(1,f)} & \vdots & n_1 \ n_2 \ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\xi(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\xi\dot{\xi}(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\xi f(f,3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{\dot{\xi}\xi(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\dot{\xi}\dot{\xi}(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\dot{\xi} f(f,3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{r}_{\eta_1 \xi(1,f)} & \vdots & \mathbf{r}_{\eta_1 \dot{\xi}(1,f)} & \vdots & \\ \mathbf{r}_{\eta_2 \xi(1,f)} & \vdots & \mathbf{r}_{\eta_2 \dot{\xi}(1,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{ff(3,3)} \\ \mathbf{r}_{\eta_3 \xi(1,f)} & \vdots & \mathbf{r}_{\eta_3 \dot{\xi}(1,f)} & \vdots & \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\xi(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\xi\dot{\xi}(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\xi f(f,3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{\dot{\xi}\xi(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\dot{\xi}\dot{\xi}(f,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{\dot{\xi} f(f,3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{r}_{\eta_1 \xi(1,f)} & \vdots & \mathbf{r}_{\eta_1 \dot{\xi}(1,f)} & \vdots & \\ \mathbf{r}_{\eta_2 \xi(1,f)} & \vdots & \mathbf{r}_{\eta_2 \dot{\xi}(1,f)} & \vdots & \mathbf{R}_{ff(3,3)} \\ \mathbf{r}_{\eta_3 \xi(1,f)} & \vdots & \mathbf{r}_{\eta_3 \dot{\xi}(1,f)} & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{1(f,f)}^T & \vdots & \mathbf{0}_{(f,2)} & \vdots \\ & & & & \tilde{\mathbf{c}}_f \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{I}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{A}_{2(f,f)}^T & \vdots & \mathbf{0}_{(f,3)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & & & & 0 \ 0 \ n_1 \\ \mathbf{0}_{(3,n)} & & & \vdots & 1 \ 0 \ n_2 \\ & & & & 0 \ 1 \ n_3 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \mathbf{0}_{(f,f)} & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{0}_{(n,3)} \\ \mathbf{D}_{1(f,f)} & \vdots & \mathbf{D}_{2(f,f)} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & \mathbf{0}_{(3,n)} & & \vdots & \mathbf{0}_{(3,3)} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Do lado direito da equação (5.12) as submatrizes  $\mathbf{D}_1$  e  $\mathbf{D}_2$  são desconhecidas, pois relacionam elementos da matriz de entrada  $\mathbf{B}$  de (2.3) com elementos da matriz fundamental. Não foi indicado na equação (5.12), mas todas as correlações se referem a uma defasagem no tempo de  $\tau_i$ .

Pela multiplicação envolvendo as últimas 3 linhas da equação (5.12) extrai-se as seguintes relações

$$\mathbf{r}_{\eta_2 \xi}(\tau_i) + \mathbf{r}_{\eta_1 \dot{\xi}}(\tau_i) = \mathbf{0}_{(1,f)} \tag{5.13}$$

$$\mathbf{r}_{\eta_3 \xi}(\tau_i) + \mathbf{r}_{\eta_2 \dot{\xi}}(\tau_i) = \mathbf{0}_{(1,f)} \tag{5.14}$$

$$\mathbf{r}_{\eta_2\xi}(\tau_i) + \left\{ \mathbf{r}_{\eta_1\xi}(\tau_i); \mathbf{r}_{\eta_1\xi}(\tau_i) \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{(1,f)}. \quad (5.15)$$

Substituindo-se (5.13) e (5.14) em (5.15),

$$\left\{ \mathbf{r}_{\eta_1\xi}(\tau_i) \quad ; \quad -\mathbf{r}_{\eta_2\xi}(\tau_i) \right\} \boldsymbol{\Theta}_{(n,f)} = \mathbf{r}_{\eta_3\xi}(\tau_i), \quad (5.16)$$

onde

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix}.$$

A equação (5.16) envolve vetores de correlações entre as saídas do sistema filtro e as medidas dos deslocamentos do sistema mecânico. Estes vetores podem, portanto, serem estimados. A matriz  $\boldsymbol{\Theta}$  é a matriz dos parâmetros procurados. Como em (5.16) os vetores tem dimensão  $(1, f)$ , para a estimação completa da matriz de parâmetros  $\boldsymbol{\Theta}$  são necessárias, no mínimo, as estimações das correlações para  $n$  diferentes defasagens no tempo  $\tau_i$ .

O estimador seria da forma,

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{Y}}, \quad (5.17)$$

com

$$\hat{\mathbf{Z}}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{\eta_1\xi}(\tau_1) & ; & -\hat{\mathbf{r}}_{\eta_2\xi}(\tau_1) \\ \hat{\mathbf{r}}_{\eta_1\xi}(\tau_2) & ; & -\hat{\mathbf{r}}_{\eta_2\xi}(\tau_2) \\ \vdots & ; & \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{\eta_1\xi}(\tau_n) & ; & -\hat{\mathbf{r}}_{\eta_2\xi}(\tau_n) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

e

$$\hat{\mathbf{Y}}_{(n,f)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{\eta_3\xi}(\tau_1) \\ \hat{\mathbf{r}}_{\eta_3\xi}(\tau_2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{\eta_3\xi}(\tau_n) \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Uma outra possibilidade seria a escolha de diferentes pares de matrizes  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}$  em (5.5), ou seja, diferentes sistemas filtro. Dessa forma se obteria também novas equações em (5.16), para a montagem de um estimador para  $\boldsymbol{\Theta}$ . Neste caso, entretanto, o trabalho

numérico seria muito maior, pois envolveria o cálculo dos vetores de estado para diferentes sistemas filtro.

Este procedimento básico desenvolvido nesta seção pode ser estendido a sistemas mais gerais, onde as restrições quanto ao tipo de excitação não sejam tão fortes. Esta generalização será tratada em detalhes em seguida.

É importante notar-se que as relações básicas para a obtenção da equação (5.16) assentam-se sobre a forma do sistema filtro. A estrutura interna das matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{P}$  em (5.5) foi fundamental para gerar as relações de igualdade (5.13) e (5.14) utilizadas em (5.15).

Devido a ordem do sistema filtro escolhido ( $t = 3$ ), na equação do estimador (5.15) não aparecem os parâmetros  $n_i$  ( $i = 1(1)3$ ) da matriz dinâmica do filtro (5.7). Seria possível trabalhar-se com a ordem  $t = 2$ , mas neste caso, os parâmetros do filtro apareceriam necessariamente na forma final do estimador.

A ordem do sistema filtro pode ser maior, desde que mantida a forma das matrizes. Aumentando-se a ordem do filtro, obtém-se outras relações do tipo (5.16). No caso estudado limitou-se à ordem mínima do filtro para se chegar a uma relação básica.

### 5.3 Excitação do Tipo Ruído Colorido

Seja um sistema dinâmico descrito na forma das equações (3.28) e (3.29), que já contemplam o modelo do *filtro de forma*, gerador das excitações tipo ruído colorido. As componentes do vetor de estado medidas serão as entradas de um sistema filtro de ordem  $q$ , assintoticamente estável, controlável, da forma

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{N} \mathbf{f}(t) + \mathbf{P} \mathbf{y}(t), \quad (5.20)$$

com

$$\mathbf{f}^T(t) = \{\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_q\}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \cdots & n_q \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Associando-se as equações (5.20) e (3.28) numa única representação de estado, obtém-se o sistema expandido



$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e \mathbf{w}(t), \quad (5.24)$$

$$\mathbf{x}_e = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \cdots \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0(n+t,n+t)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{C}_0 & \mathbf{N}_{(g,q)} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{o(n+t,s)} \\ \mathbf{0}_{(g,s)} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Reescreve-se a equação (3.11) para o sistema (5.24) e obtém-se

$$\mathbf{A}'\mathbf{R}' + \mathbf{R}'\mathbf{A}'^T = \mathbf{Q}', \quad (5.28)$$

onde

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(j,m)} & \vdots & \mathbf{I}_{(j,j)} & \vdots & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \mathbf{0}_{(n+t,q)} \\ \mathbf{A}_{01(m,m)} & \vdots & \mathbf{A}_{02(m,j)} & \vdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ \mathbf{0}_{(q-1,m)} & \vdots & & \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \mathbf{O}_{(g,j)} & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ & & & & & n_1 & n_2 & n_3 & \cdots & n_q \\ \tilde{\mathbf{c}}_{(1,m)} & \vdots & & \vdots & & & & & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & \vdots & \mathbf{R}_{\tilde{x}\tilde{f}}(\tau_i) \\ & & & & & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{r}_{\eta_1 \tilde{x}_m} & \vdots & \mathbf{r}_{1,1} & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{r}_{1,k} & \vdots \\ \mathbf{r}_{\eta_2 \tilde{x}_m} & \vdots & \mathbf{r}_{2,1} & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{r}_{2,k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{r}_{\eta_q \tilde{x}_m} & \vdots & \mathbf{r}_{q,1} & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{r}_{q,k} & \vdots \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(n+t,n+t)} & \vdots & \mathbf{0}_{(n+t,q)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}_{(q,n+t)} & \vdots & \mathbf{0}_{(q,q)} \end{bmatrix}.$$

Na equação (5.28),  $\mathbf{D}$  representa uma matriz desconhecida relacionada ao processo de entradas do sistema. As matrizes  $\mathbf{r}$  tem dimensão  $(1, m)$ , com exceção feita às matrizes  $\mathbf{r}_{i,k}$ , ( $i = 1, q$ ) que tem dimensão  $(1, m_e)$ , com

$$m_e = (k+2)m - (n+t) \quad (5.29)$$

para um  $k$  inteiro que satisfaça

$$k < \frac{n+t}{m} \leq k+1 \quad (5.30)$$

Dessa maneira, se

$$k = \frac{n+t-m}{m} = \frac{j}{m}, \quad (5.31)$$

é um número inteiro,  $m_e = m$ .

Para facilidade de análise, assume-se que a relação (5.31) forneça um valor inteiro para  $k$ . Esta consideração não restringe o tratamento geral dado a seguir.

Observando-se as últimas  $q$  linhas na equação (5.28), extrai-se as seguintes relações para as primeiras  $m$  colunas multiplicadas.

$$\mathbf{r}_{\eta_2 \tilde{x}_m}(\tau_i) + \mathbf{r}_{1,1}(\tau_i) = 0 \quad (5.32)$$

$$\mathbf{r}_{\eta_3 \tilde{x}_m}(\tau_i) + \mathbf{r}_{2,1}(\tau_i) = 0 \quad (5.33)$$

$\vdots$

$$\mathbf{r}_{\eta_q \tilde{x}_m}(\tau_i) + \mathbf{r}_{(q-1),1}(\tau_i) = 0 \quad (5.34)$$

Das equações (5.32) a (5.34) notam-se relações de igualdade entre as matrizes  $\mathbf{r}_{i,1}$ , ( $i = 1, (q-1)$ ) e as primeiras  $m$  colunas da matriz de correlações, ou seja

$$\mathbf{r}_{1,1}(\tau_i) = -\mathbf{r}_{\eta_2 \bar{x}_m}(\tau_i), \quad (5.35)$$

$$\mathbf{r}_{2,1}(\tau_i) = -\mathbf{r}_{\eta_3 \bar{x}_m}(\tau_i), \quad (5.36)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_{(q-1),1}(\tau_i) = -\mathbf{r}_{\eta_q \bar{x}_m}(\tau_i). \quad (5.37)$$

Para as seguintes  $m$  colunas multiplicadas, obtém-se

$$\mathbf{r}_{2,1}(\tau_i) + \mathbf{r}_{1,2}(\tau_i) = 0, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{r}_{3,1}(\tau_i) + \mathbf{r}_{2,2}(\tau_i) = 0, \quad (5.39)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_{(q-1),1}(\tau_i) + \mathbf{r}_{(q-2),2}(\tau_i) = 0. \quad (5.40)$$

Dessa forma com (5.35) a (5.40),

$$\mathbf{r}_{1,2}(\tau_i) = -\mathbf{r}_{2,1}(\tau_i) = \mathbf{r}_{\eta_3 \bar{x}_m}(\tau_i), \quad (5.41)$$

$$\mathbf{r}_{2,2}(\tau_i) = -\mathbf{r}_{3,1}(\tau_i) = \mathbf{r}_{\eta_4 \bar{x}_m}(\tau_i), \quad (5.42)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_{(q-2),2}(\tau_i) = -\mathbf{r}_{(q-1),1}(\tau_i) = \mathbf{r}_{\eta_q \bar{x}_m}(\tau_i). \quad (5.43)$$

Estendendo-se esta análise, nota-se que

$$\mathbf{r}_{2,(k-1)}(\tau_i) + \mathbf{r}_{1,k}(\tau_i) = 0, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{r}_{3,(k-1)}(\tau_i) + \mathbf{r}_{2,k}(\tau_i) = 0, \quad (5.45)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_{(q-k+1),(k+1)}(\tau_i) + \mathbf{r}_{(q-k),k}(\tau_i) = 0. \quad (5.46)$$

Levando-se em conta as igualdades obtidas anteriormente,

$$\mathbf{r}_{1,k}(\tau_i) = (-1)^k \mathbf{r}_{\eta_{k+1} \bar{x}_m}(\tau_i), \quad (5.47)$$

$$\mathbf{r}_{2,k}(\tau_i) = (-1)^k \mathbf{r}_{\eta_{k+2} \bar{x}_m}(\tau_i), \quad (5.48)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_{(q-k),k}(\tau_i) = (-1)^k \mathbf{r}_{\eta_q \bar{x}_m}(\tau_i). \quad (5.49)$$

Finalmente, a partir das multiplicações das  $m$  colunas que envolvem as matrizes  $\mathbf{A}_{01}^T$  e  $\mathbf{A}_{02}^T$ , tem-se

$$\mathbf{r}_{2,k}(\tau_i) + \{\mathbf{r}_{\eta_1 \hat{x}_m} \mathbf{r}_{1,1} \cdots \mathbf{r}_{1,k}\} \Theta_0 = \mathbf{0}, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{r}_{3,k}(\tau_i) + \{\mathbf{r}_{\eta_2 \hat{x}_m} \mathbf{r}_{2,1} \cdots \mathbf{r}_{2,k}\} \Theta_0 = \mathbf{0}, \quad (5.51)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_{(q-k),k}(\tau_i) + \{\mathbf{r}_{\eta_{(q-k-1)} \hat{x}_m} \mathbf{r}_{(q-k-1),1} \cdots \mathbf{r}_{(q-k-1),k}\} \Theta_0 = \mathbf{0}, \quad (5.52)$$

sendo

$$\Theta_{0(n+i,m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{01}^T \\ \mathbf{A}_{02}^T \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

As correlações, que podem ser obtidas através de estimação, são as que envolvem as variáveis medidas  $\hat{x}_m$  e as saídas do sistema filtro  $\eta_i$  ( $i = 1, q$ ). A substituição das equações (5.47) a (5.49) em (5.50) a (5.52) possibilitam a montagem de estimadores para a matriz  $\Theta_0$ . Exemplificadamente, utilizando-se somente a equação (5.50), obtém-se

$$\begin{aligned} & (-1)^k \mathbf{r}_{\eta_{k+2} \hat{x}_m}(\tau_i) + \\ & + \left\{ \mathbf{r}_{\eta_1 \hat{x}_m}(\tau_i) : (-1)^1 \mathbf{r}_{\eta_2 \hat{x}_m}(\tau_i) : (-1)^2 \mathbf{r}_{\eta_3 \hat{x}_m}(\tau_i) : \cdots : (-1)^k \mathbf{r}_{\eta_{k+1} \hat{x}_m}(\tau_i) \right\} \Theta_0 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Tomando-se a equação (5.52) por base, monta-se outras relações para a obtenção de  $\Theta_0$ . Existe uma condição sobre a ordem mínima do sistema filtro. Esta condição implica na existência da igualdade (5.49). Na condição mais crítica tem-se que

$$q - k = 2, \quad (5.55)$$

representada pela equação (5.48). Esta equação foi necessária para a derivação de pelo menos uma equação do estimador (5.54).

A ordem mínima do sistema filtro, relaciona-se, portanto, ao número  $k$  (5.31, ou seja, à multiplicidade que existe entre o número de medidas  $m$  e a ordem do sistema.

De (5.55), tem-se que a ordem do filtro deve satisfazer

$$q \geq k + 2, \quad (5.56)$$

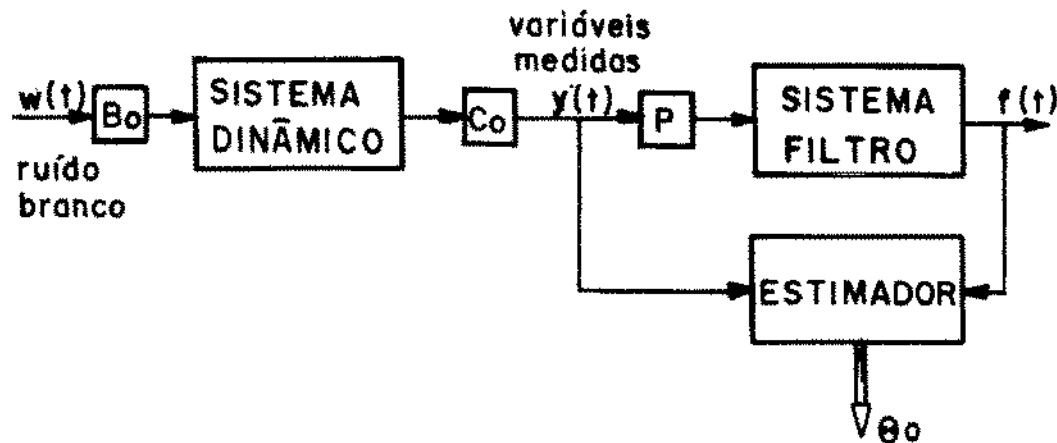


Figura 5.1: Esquema do procedimento de identificação pela equação de Ljapunov.

com

$$k = j/m. \quad (5.57)$$

Analisando-se o caso tratado na seção anterior, onde  $k = 1$  e  $q = 3$ , nota-se que com a substituição destes valores em (5.54), chega-se à equação básica do estimador (5.16).

A matriz de parâmetros  $\Theta_0$  possui  $m$  colunas a serem estimadas. Assim, são necessárias, no mínimo,  $m$  equações na forma da equação (5.54) para a determinação de todos os parâmetros. Isto é possível com a escolha de diferentes  $\tau_i^j$ s, ou aumentando-se a ordem  $q$  do sistema filtro.

## 5.4 Comentários

- Neste capítulo analisou-se o procedimento de identificação paramétrica do sistema (2.3) fundamentado na Equação Matricial de Ljapunov. Na seção 5.3 tratou-se do caso geral com a identificação de um modelo descrito pelas equações (3.28) e (3.29). De uma maneira genérica, é necessário utilizar-se um sistema filtro acoplado às grandezas medidas. O estimador é montado a partir das correlações entre essas medidas e as grandezas de saída do filtro. A figura 5.1 ilustra esta situação.

Os passos envolvidos neste procedimento de identificação podem ser resumidos como segue,

1. Escolha de uma configuração de medidas adequada para a observação do sistema mecânico em análise, observando as equações (3.26) e (3.53).
2. Escolha do sistema filtro  $N$  e  $P$  (5.20) e estimação das correlações necessárias para a montagem do estimador (5.54)

3. Estimação dos parâmetros da matriz  $\mathbf{A}_0$  de acordo com (5.54).
  4. Transformação inversa da matriz  $\mathbf{A}_0$  para a matriz  $\mathbf{A}$ , de acordo com o desenvolvimento feito na seção 3.4.
- É importante frisar o acesso direto aos parâmetros da matriz  $\mathbf{A}_0$ , o qual possibilita o aproveitamento de qualquer informação sobre os parâmetros já na fase de estimação. Parâmetros conhecidos, posições de zeros, simetrias podem ser agora aproveitados, em contraponto ao procedimento de identificação via Matriz Fundamental.
  - A saída  $f(t)$  do filtro pode ser obtida por simulação numérica em computador, garantindo precisão na obtenção das variáveis do filtro.
  - O estimador (5.54) não envolve explicitamente os parâmetros do filtro. Esta é uma forma estrutural mais simples do que a proposta em [36], onde os parâmetros do filtro deveriam ser incorporados na equação de estimação. Equações deste tipo também podem ser adicionadas ao estimador obtido aqui. Entretanto, por questões de simplicidade operacional, optou-se por não incluí-las. Em [36] propõe-se também que a ordem do sistema filtro seja igual à ordem do sistema mecânico, para o caso de medição de todos os deslocamentos. Isto pode acarretar problemas numéricos para sistemas de ordem elevada. Segundo o procedimento aqui proposto, neste caso, a ordem mínima necessária é  $q = 3$ , para qualquer ordem do sistema mecânico em estudo (seção 5.2).

## Capítulo 6

# Alguns Aspectos Práticos na Realização da Identificação

Até agora foi visto como se apresenta o problema de identificação paramétrica de sistemas mecânicos do ponto de vista de concepção dos métodos.

Neste capítulo pretende-se analisar alguns aspectos relevantes no que se refere à aplicação destes métodos na prática. Um aspecto bastante importante diz respeito à estimação das correlações, dado que todos os procedimentos até aqui tratados envolvem este cálculo. Dentre outros fatores, destaca-se também a escolha das defasagens no tempo  $\tau_i/s$  para o cálculo das correlações.

Outro aspecto analisado neste capítulo refere-se ao passo número 1 proposto, tanto no método descrito no capítulo 4, como no método do capítulo 5. Esta etapa sugere a escolha adequada da configuração de medidas para a realização da identificação.

Como pode-se ver mais adiante, é possível controlar a transformação de coordenadas que leva a um sistema do tipo descrito em (3.28) e (3.29) e assim aproveitar ao máximo quaisquer informações acerca dos parâmetros do sistema mecânico de interesse.

### 6.1 Estimação das Correlações na Prática

A literatura fornece uma extensa gama de estudos de procedimentos para a estimação da correlação entre variáveis medidas em sistemas reais [5, 21, 4, 51, 32]. Nesta seção procura-se compactar estas informações disponíveis e direcioná-las ao problema em estudo aqui.

#### 6.1.1 Ruídos de Medida

Um dos primeiros aspectos a ser avaliado na estimação das correlações refere-se à adição de ruídos às medições. Em sistemas reais é praticamente impossível evitar a aparição de ruídos nas medições de grandezas físicas.

O tipo de perturbação nas medidas depende de diversos fatores: por exemplo, da qualidade do equipamento de medida, da qualidade do transdutor, do tipo de grandeza a

ser medida, etc.

Trata-se nesta seção das perturbações que atuam de forma aditiva às variáveis de estado.

Adiciona-se à equação de medidas (2.4) uma perturbação  $v(t)$  da seguinte forma,

$$y(t) = C x(t) + v(t). \quad (6.1)$$

Para o cálculo de matrizes de correlações entre as variáveis medidas tem-se a relação

$$R_{yy}(\tau_i) = \varepsilon \{y(t)y^T(t + \tau_i)\}, \quad (6.2)$$

que pode ser reescrita com (6.1) como

$$R_{yy}(\tau_i) = \varepsilon \{[C x(t) + v(t)][C x(t + \tau_i) + v(t + \tau_i)]^T\}. \quad (6.3)$$

Separando-se os termos em (6.3) obtém-se

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau_i) = & \varepsilon \{C x(t)x^T(t + \tau_i)C^T\} + \varepsilon \{v(t)v^T(t + \tau_i)\} + \\ & + \varepsilon \{C x(t)v^T(t + \tau_i)\} + \varepsilon \{v(t)x^T(t + \tau_i)C^T\}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

ou seja,

$$R_{yy}(\tau_i) = C R_{xx}(\tau_i)C^T + R_{vv}(\tau_i) + C R_{xv}(\tau_i) + R_{vx}(\tau_i)C^T. \quad (6.5)$$

Considerando que não exista correlação entre o vetor de entradas do sistema e o vetor de perturbações  $v(t)$ , ou seja,

$$\varepsilon \{u(t_1) v^T(t_2)\} = R_{uv}(t_1, t_2) = 0 \quad (6.6)$$

para quaisquer  $t_1$  e  $t_2$ .

A equação (6.5) simplifica-se, então, na forma [53, 37],

$$R_{yy}(\tau_i) = C R_{xx}(\tau_i)C^T + R_{vv}(\tau_i). \quad (6.7)$$

Com a escolha de  $\tau_i$  de tal forma que



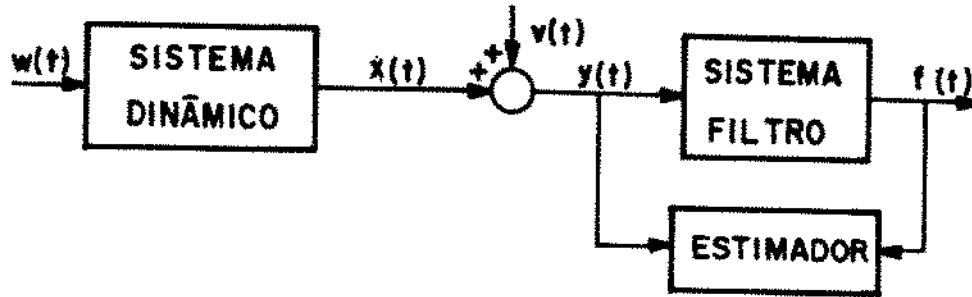


Figura 6.1: Esquema para aplicação do filtro às medidas com perturbações desconhecidas.

$$\mathbf{R}_{vv}(\tau_i) = \mathbf{0}, \quad (6.8)$$

a matriz de correlações das medidas  $\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)$  refere-se exatamente à matriz de correlações das variáveis de estado  $\mathbf{x}(t)$ .

A condição (6.8) é satisfeita imediatamente se o ruído  $\mathbf{v}(t)$  for do tipo ruído branco.

Nos casos estudados no capítulo 4, onde foi tratada a identificação paramétrica através da Matriz Fundamental, o estimador envolve correlações diretas entre variáveis de estado. A análise feita sobre ruídos de medição aplica-se bem a estes casos.

No procedimento visto no capítulo 5, entretanto, são necessárias as estimativas de correlações entre as variáveis de estado e as saídas do sistema filtro.

Esquemáticamente tem-se com a equação (6.1) a situação visualizada na figura 6.1.

A perturbação  $\mathbf{v}(t)$  adicionada às variáveis de estado também faz parte da entrada do sistema filtro.

Esta condição faz com que a variável  $\mathbf{f}(t)$  seja composta por duas partes. Uma parte correspondente às entradas  $\mathbf{x}(t)$ , e outra à perturbação  $\mathbf{v}(t)$ .

Por esta razão, na presença de ruído de medição, em geral

$$\mathbf{R}_{fy}(\tau_i) \neq \mathbf{R}_{fx}(\tau_i). \quad (6.9)$$

A equação (6.9) faz com que seja necessário um cuidado maior na aplicação do método de identificação descrito no capítulo 5. A não permissão de perturbações nas medidas impõem restrições maiores neste procedimento em comparação com o descrito no capítulo 4.

Entretanto, trabalhando-se com um modelo de sistema mais completo, pode-se incorporar ao mesmo, a dinâmica das perturbações de medida, chegando-se a um sistema mais geral do tipo (3.28), (3.29).

Neste caso, pela equação (3.31), as variáveis medidas  $\mathbf{y}(t)$  são as variáveis  $\tilde{\mathbf{x}}_m(t)$  sem perturbações, e portanto,

$$\mathbf{R}_{fy}(\tau_i) = \mathbf{R}_{f\hat{x}_m}(\tau_i). \quad (6.10)$$

Desta forma, deve-se ter em mente que na aplicação da identificação paramétrica através da Equação Matricial de Ljapunov, as perturbações de medida devem estar incorporadas ao modelo dinâmico.

### 6.1.2 Estimadores

Em sistemas reais, as variáveis medidas  $\mathbf{y}(t)$  tratadas até agora, são obtidas através de algum sistema de medição. Este sistema inclui transdutores, circuitos de condicionamento, amplificadores e medidores.

Considera-se que estes dados estejam digitalizados, e dessa maneira, tem-se acesso a pontos do sinal medido espaçados igualmente por  $\Delta t$ . O intervalo de tempo entre dois pontos  $\Delta t$  é chamado *tempo de discretização*.

O sinal  $y_1(t)$ , por exemplo, será representado por uma sequência  $y_1(k)$ , onde  $k$  representa o instante  $t_k$ , ou seja,

$$t_k = k \cdot \Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.11)$$

A matriz de correlação  $\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)$  pode ser estimada diretamente pela equação [5, 21]

$$\hat{\mathbf{R}}_{yy}(\tau_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-i} \mathbf{y}(k) \mathbf{y}^T(k+i), \quad (6.12)$$

no caso em que o valor médio do vetor  $\mathbf{y}(k)$  seja nulo.

Na equação (6.12),  $N$  representa o número total de pontos medidos e

$$\tau_i = i \Delta t \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.13)$$

Para  $N$  tendendo a infinito, o estimador (6.12) tende ao valor verdadeiro  $\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)$  com variância decrescente e proporcional a  $1/N$  [5, 21].

Alguns autores sugerem estimadores para a matriz de correlações a partir da obtenção da densidade espectral dos sinais medidos [4, 32, 35].

Às estimativas das densidades espectrais, aplica-se a transformada de Fourier inversa para se obter estimativas de correlações circulares [4].

A estas correlações circulares, devem ser aplicados fatores de correção para obtenção dos valores reais  $\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)$ .

Para a estimativa das funções de densidade espectral tem-se uma extensa literatura disponível, [4, 32, 35] dentre outros.

Tendo em vista o número de operações matemáticas envolvidas em (6.12) comparado ao procedimento de obtenção, via densidade espectral, afirma-se em [4, 35] que o estimador (6.12) é bem mais lento do ponto de vista computacional.

Embora esta desvantagem seja grande, a simplicidade de implementação, assim como a facilidade de obtenção de um procedimento recursivo para este estimador transformam-se em grandes atrativos.

Assim, dependendo do tipo de aplicação dada ao problema de identificação de parâmetros, pode-se optar diferentemente dentre os métodos discutidos anteriormente.

## 6.2 Escolha das Defasagens no Tempo para Correlações

Os procedimentos de identificação de parâmetros desenvolvidos nos capítulos 4 e 5 baseiam-se fundamentalmente na estimação das matrizes de correlações para diferentes defasagens no tempo  $\tau_i$ . Em princípio, pode-se escolher diferentes  $\tau_i$ 's para a montagem dos estimadores (4.55) e (5.54). Contudo, existem alguns aspectos a serem considerados na escolha destas defasagens no tempo. A seguir, faz-se uma análise do comportamento da matriz de correlações em função de  $\tau_i$ .

Analisa-se a equação (3.14)

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau_i) = \mathbf{R}_{xx}(0)e^{\mathbf{A}^T \tau_i} \quad \text{para } \tau_i \geq 0. \quad (6.14)$$

Pode-se reescrever esta equação como

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau_i) = \mathbf{R}_{xx}(0)\mathbf{T} \left[ \mathbf{T}^{-1} e^{\mathbf{A}^T \tau_i} \mathbf{T} \right] \mathbf{T}^{-1}. \quad (6.15)$$

Se  $\mathbf{T}$  é a matriz modal do sistema, então tem-se [29]

$$\mathbf{T}^{-1} e^{\mathbf{A}^T \tau_i} \mathbf{T} = e^{\mathbf{\Lambda}^T \tau_i} \quad (6.16)$$

e

$$e^{\mathbf{\Lambda}^T \tau_i} = \text{diag} \{ e^{\lambda_l \tau_i} \}. \quad (6.17)$$

Em (6.17)  $\lambda_l$  representa o  $l$ -ésimo autovalor do sistema, na forma

$$\lambda_l = \delta_l \pm i\omega_l, \quad (6.18)$$

com  $\delta_l < 0$ ,  $l = 1(1)n$ , para sistemas assintoticamente estáveis.

A matriz exponencial em (6.17) pode ser representada como

$$e^{\Lambda \tau_i} = \text{diag} \left\{ e^{\delta_l \tau_i} (\cos w_l \tau_i \pm i \sin w_l \tau_i) \right\}. \quad (6.19)$$

A matriz (6.19) contém uma parte decrescente com o aumento de  $\tau_i$ , ou seja,

$$\text{para } \tau_i \rightarrow \infty, \quad e^{\Lambda \tau_i} \rightarrow \text{matriz singular}. \quad (6.20)$$

De (6.14) e (6.20) pode-se concluir que para  $\tau_i$  grande, a matriz  $\mathbf{R}_{xx}(\tau_i)$  também tende à singularidade,

$$\det\{\mathbf{R}_{xx}(\tau_i)\} \rightarrow 0. \quad (6.21)$$

Nota-se, por esta análise, que as defasagens no tempo  $\tau_i$  devem ser escolhidas com base nos modos mais amortecidos, pois a contribuição destes desaparece para  $\tau_i$  menores.

Como não se sabe, a princípio, os valores dos amortecimentos, as defasagens  $\tau_i$ 's devem ser escolhidas as menores possíveis.

No caso de estimação de correlações com sinais discretizados no tempo,  $\tau_i$  será um múltiplo do tempo de discretização  $\Delta t$ . Assim sendo, o experimento deve ser planejado desde o início na escolha adequada de  $\Delta t$ , de tal forma, que todas as correlações envolvidas no estimador dos parâmetros ainda contenham informações relevantes sobre o sistema.

### 6.3 Estudo de Casos

Nesta seção trata-se do primeiro passo para a identificação paramétrica de um sistema mecânico. Este constitui-se no planejamento da configuração de medidas adequada a cada caso estudado. A partir da definição das medidas a serem efetuadas, obtém-se uma forma normal do sistema, de acordo com o proposto em (3.28), (3.29). Esta forma será, então, finalmente identificada.

Como objeto de estudo, propõe-se um sistema definido por um rotor modelado com seis graus de liberdade. Este modelo possui diversos parâmetros conhecidos, o que poderá salientar melhor a diferença entre os procedimentos de identificação quanto ao aproveitamento destas informações disponíveis.

### 6.3.1 Rotor com Seis Graus de Liberdade

O sistema mecânico sob estudo, constitui-se de um rotor acoplado a um motor por um eixo flexível. Entre o motor e o rotor existe um mancal de massa  $m_1$  suspenso elasticamente. A figura 6.2 ilustra o sistema estudado.

Os graus de liberdade se traduzem nas translações  $y_1$  e  $z_1$  do mancal, nas translações  $y_2$  e  $z_2$  do rotor e nas rotações  $\varphi_2$  e  $\psi_2$  do rotor. O motor de acionamento é considerado como estando engastado.

O eixo possui diâmetro constante ao longo de todo o comprimento e sua massa não é considerada na modelagem.

O rotor de massa  $m_2$  tem momento de inércia transversal  $I_2$  e momento de inércia polar  $I_{2p}$ . Considera-se também que os efeitos dos momentos de inércia da estrutura do mancal sejam desprezíveis.

A equação de movimento que descreve o comportamento dinâmico do sistema pode ser escrita na forma geral como

$$\mathbf{M}\ddot{\xi}(t) + \mathbf{P}\dot{\xi}(t) + \mathbf{Q}\xi(t) = \mathbf{S}u(t) + \mathbf{H}n(t). \quad (6.22)$$

No plano do rotor tem-se as seguintes relações entre as coordenadas do centro de gravidade e do eixo,

$$z_{cg} = z_{eixo} + \varepsilon \cos \alpha, \quad (6.23)$$

$$y_{cg} = y_{eixo} + \varepsilon \sin \alpha, \quad (6.24)$$

com

$$\alpha = \Omega t + \beta. \quad (6.25)$$

Estas relações podem ser melhor visualizadas pela figura 6.3.

Considera-se que o rotor esteja girando a uma velocidade angular  $\Omega$  constante e que os deslocamentos angulares do rotor satisfaçam

$$\psi_{2_{eixo}} = \psi_{2_{cg}}, \quad (6.26)$$

$$\varphi_{2_{eixo}} = \varphi_{2_{cg}}. \quad (6.27)$$

Assume-se ainda que no plano do mancal, os deslocamentos do eixo e do centro de gravidade do mancal sejam idênticos.

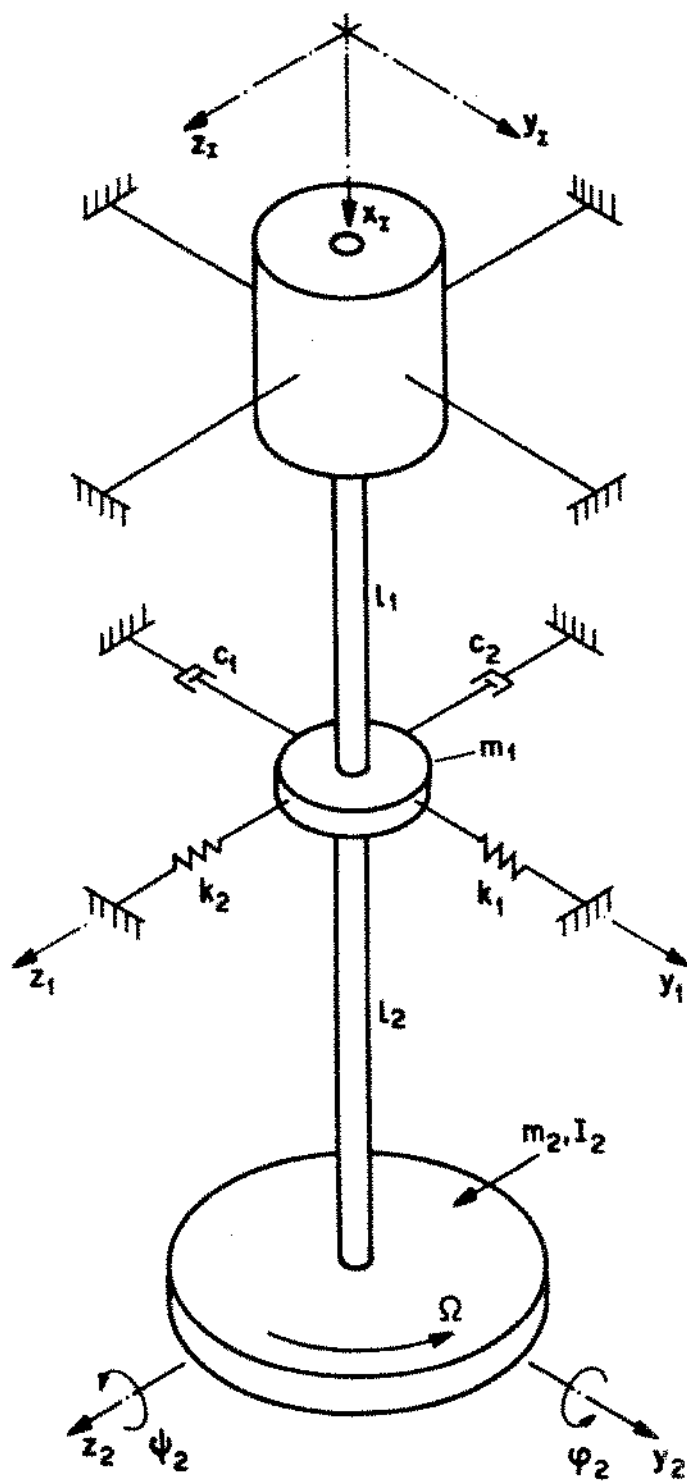


Figura 6.2: Sistema mecânico com 6 graus de liberdade

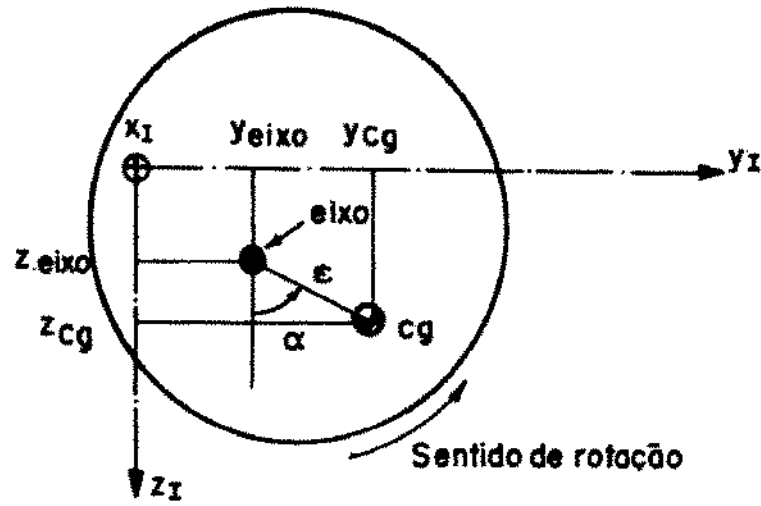


Figura 6.3: Relações entre coordenadas no plano do rotor.

A partir de (6.23) a (6.27) pode-se escrever o vetor de deslocamento  $\xi(t)$  em (6.22) nas coordenadas do eixo da seguinte forma

$$\xi^T(t) = \{ y_1 \ y_2 \ \psi_2 \ z_1 \ z_2 \ \varphi_2 \} . \quad (6.28)$$

Com o sistema de coordenadas (6.28) chega-se às matrizes da equação (6.22)

$$\mathbf{M} = \text{diag} \{ m_1 \ m_2 \ I_2 \ m_1 \ m_2 \ I_2 \} . \quad (6.29)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \Omega I_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega I_{2p} & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (6.30)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} K_1 + 6(A+B) & -6A & 3Al_2 & \vdots & & & & \\ & -6A & 6A & -3Al_2 & \vdots & & & \\ & 3Al_2 & -3Al_2 & 4Al_2^2 & \vdots & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & \vdots & K_2 + 6(A+B) & -6A & -3Al_2 \\ & & & & \vdots & -6A & 6A & 3Al_2 \\ & & & & \vdots & -3Al_2 & 3Al_2 & 4Al_2^2 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_2 \varepsilon \Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & m_2 \varepsilon \Omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Em (6.31)

$$A = \frac{2EI}{l_2^3} \quad e \quad (6.33)$$

$$B = \frac{2EI}{l_1^3}, \quad (6.34)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material do eixo e  $I$  o momento de inércia de área da secção transversal.

O vetor de excitações  $\mathbf{n}(t)$  é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \beta) \\ \cos(\Omega t + \beta) \end{Bmatrix}. \quad (6.35)$$

As excitações  $\mathbf{u}(t)$  são do tipo aleatória, neste caso consideradas monovariáveis, e estão presentes ao lado das excitações harmônicas (6.35).

Para o caso real de máquinas hidráulicas, ressaltado na introdução, a excitação aleatória pode aparecer nas coordenadas lineares e angulares do rotor da turbina, através da interação fluído-estrutura. Podem aparecer também excitações de carácter estocástico nas coordenadas do mancal, pela influência da vibração de máquinas vizinhas propagada através das estruturas de suporte dos mancais.

Os valores numéricos das variáveis que aparecem nas equações (6.29) a (6.34) são atribuídos da seguinte forma:



Parâmetro	Valor	Unidade
$m_1$	15	kg
$m_2$	10	kg
$I_2$	0,25	kg m <sup>2</sup>
$I_{2p}$	0,50	kg m <sup>2</sup>
$l_1 = l_2$	0,4	m
$K_1$	90.000	N/m
$K_2$	120.000	N/m
$C_1$	30.000	kg/s
$C_2$	37.500	kg/s
$A$	50.000	N/m
$B$	50.000	N/m
$\Omega$	60	rad/s

Finalmente, supõe-se que a matriz  $\mathbf{S}$  das entradas aleatórias em (6.22) possua a seguinte característica

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

sendo  $s_i$  ( $i = 1, 6$ ) valores constantes.

Estas variáveis indicam com que intensidade as excitações aleatórias atuam sobre cada coordenada do sistema de equações.

A estas variáveis atribui-se os seguintes valores numéricos

Variável	Valor
$s_1$	1,2
$s_2$	1,0
$s_3$	1,0
$s_4$	1,2
$s_5$	1,0
$s_6$	1,0

Esses valores numéricos podem variar, tendo em vista que no processo de identificação esta matriz  $\mathbf{S}$  não é levada em consideração para os procedimentos propostos. Entretanto, deve-se salientar a sua importância sobre a resposta do sistema. Dependendo da configuração de  $\mathbf{S}$  em (6.36) pode-se ter um modo do sistema menos excitado e dessa forma, sua contribuição é menos significativa na resposta final.

Este fato faz com que os parâmetros físicos relacionados àquele determinado modo só possam ser estimados com menor precisão.

Na aplicação de um procedimento de identificação como o proposto neste trabalho, assume-se que a matriz de entradas aleatórias seja tal que, toda a dinâmica do sistema

possa ser completamente excitada. Em teoria de sistemas, define-se este conceito a partir da condição de controlabilidade ou não do sistema, de acordo com o já exposto no capítulo 2.

Apesar da garantia dada sobre a controlabilidade do sistema, resta saber se a excitação por si só é capaz de fornecer uma resposta rica em diferentes faixas de frequência. Para esta caracterização, conceitua-se *persistent excitation* [38], ou seja, riqueza da excitação, que é definida a partir da capacidade do sinal de excitação, em atuar sobre todos os modos de interesse do problema. Exemplificadamente, pode-se ter um sistema controlável, excitado por uma força senoidal com frequência constante. A resposta deste sistema a esta excitação conterà informações limitadas àquela única frequência. Esta temática é tratada extensamente em [20] e [38].

No presente trabalho, como não se tem controle sobre o processo de excitação, presume-se que tanto o sistema seja controlável, como que as forças aleatórias sejam capazes de excitar suficientemente todas as frequências de interesse. Assim, a resposta conterà informações sobre toda a dinâmica do sistema em estudo.

O sistema mecânico, definido nesta seção, será objeto de trabalho para verificação do desempenho dos métodos de identificação paramétrica propostos.

Nas seções seguintes, procura-se estudar a configuração adequada do sistema de medição, para diferentes condições de contorno sobre o problema em questão.

### 6.3.2 Medição de Todos Deslocamentos

Numa primeira situação, considera-se que todos os deslocamentos  $\xi(t)$  (6.28), possam ser medidos sem a interferência de perturbações. O sistema na forma da equação (6.22) é excitado por um ruído do tipo branco  $u(t)$  ao lado das excitações harmônicas  $n(t)$ .

Reescrevendo a equação (6.22) na forma de estado, obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) + \mathbf{E} n(t), \quad (6.37)$$

onde o vetor de estado é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}(t) \end{Bmatrix}. \quad (6.38)$$

Em (6.37), as matrizes de entradas são obtidas a partir de

$$\mathbf{B}_{(12,1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(6,1)} \\ \vdots \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_{(12,2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(6,2)} \\ \vdots \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix}.$$

A equação de medidas torna-se

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(6,6)} & \mathbf{0}_{(6,6)} \end{bmatrix} x(t). \quad (6.39)$$

A matriz dinâmica  $\mathbf{A}$  em (6.37) e a matriz de medidas em (6.39) já se encontram na forma normal especial descrita genericamente pelas equações (3.28) e (3.29). Neste caso a matriz  $\mathbf{A}_0$  é a própria matriz  $\mathbf{A}$  do sistema, com  $t = 0$  e  $m = 6$ .

Nos procedimentos propostos para identificação nos capítulos 4 e 5, prevê-se a estimação inicial da matriz  $\mathbf{A}_0$  para, então, se chegar à matriz do sistema mecânico. Para o caso particular tratado aqui não é necessária a transformação inversa para a matriz  $\mathbf{A}$ .

A matriz dinâmica em (6.37), possui a seguinte estrutura interna, levando-se em consideração o conhecimento dos valores numéricos dos parâmetros físicos relacionados ao eixo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & \mathbf{0}_{(6,6)} & \vdots & & \mathbf{I}_{(6,6)} & \\ & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ & k_{11} & k_{12} & k_{13} & \vdots & c_{11} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & -k_{22} & k_{22} & k_{23} & \vdots & \mathbf{0}_{(3,3)} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & -k_{32} & k_{32} & k_{33} & \vdots & & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -p \\ & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & \vdots & k_{44} & k_{12} & -k_{13} & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & c_{44} & 0 & 0 \\ & \mathbf{0}_{(3,3)} & \vdots & -k_{22} & k_{22} & -k_{23} & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & k_{32} & -k_{32} & k_{33} & \vdots & 0 & 0 & p & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

com

Parâmetro	Valor	Unidade
$k_{11}$	-46.000	$s^{-2}$
$k_{12}$	20.000	$s^{-2}$
$k_{13}$	-4.000	$m/s^2$
$k_{22}$	-30.000	$s^{-2}$
$k_{23}$	6.000	$m/s^2$
$k_{32}$	240.000	$s^{-2}$
$k_{33}$	-128.000	$m/s^2$
$k_{44}$	-48.000	$s^{-2}$
$c_{11}$	-2.000	$s^{-1}$
$c_{44}$	-2.500	$s^{-1}$
$p$	120	$s^{-1}$

Os parâmetros nulos em (6.40) poderiam ser aproveitados convenientemente para melhoria da qualidade das estimativas dos parâmetros desconhecidos.

Pelo método apresentado no capítulo 4, obtém-se a matriz  $A$  através da transformação numérica inversa, partindo-se da matriz fundamental. A estrutura especial de (6.40), com diversos zeros é de difícil utilização, tendo em vista a natureza numérica da operação. Por outro lado, pelo método descrito no capítulo 5, esta estrutura pode ser utilizada na fase de estimação, pelo fato do procedimento proposto correlacionar diretamente a matriz  $A$  às matrizes de correlações estimadas.

No capítulo 7 esta diferença será tratada por exemplos numéricos destes casos.

### 6.3.3 Medição de 4 Variáveis de Estado

Embora para o problema apresentado na seção anterior, a identificação paramétrica pareça uma operação simples, ele se baseia em condições bastante restritivas. Pressupõe-se, por exemplo, que a excitação seja um ruído branco e que os deslocamentos angulares  $\varphi_2$  e  $\psi_2$  devam ser medidos.

Para sistemas reais, estas grandezas físicas não são de fácil medição, implicando em dispositivos especiais que sempre encarecem os experimentos.

Tendo em vista que a matriz do sistema possui muitos parâmetros conhecidos, parte-se do princípio de que uma forma reduzida deste sistema também não apresentaria uma estrutura muito complicada.

Tendo isto em mente, deve-se procurar uma configuração de medidas dentro do vetor de estado (6.28) que não inclua medições dos deslocamentos angulares, nem de suas velocidades.

Ainda considera-se, neste caso, que a excitação seja um ruído branco, e que todas as variáveis medidas não sofram a influência de perturbações nas medições.

A configuração de medidas deve satisfazer também a outros requisitos. Ela deve permitir a observação exata do sistema, ou seja, satisfazer a condição imposta sobre a regularidade da matriz de transformação  $T$ , montada de acordo com a seção 2.3.

Assim sendo, o conhecimento da estrutura interna da matriz do sistema é fundamental.

Seja uma equação de medidas do tipo

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (6.41)$$

aplicada ao sistema (6.37).

Supõe-se uma matriz de medidas igual a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & : & 0 & : & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & : & 0 & : & 0 \\ 0 & : & 0 & : & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & : & 0 & 1 & 0 & : & 0 & : & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

com  $m = 4$  e  $t = 0$  em (3.25).

As submatrizes nulas em (6.42) tem dimensão  $(1, 3)$ . De acordo com (6.42) e (6.38) as variáveis medidas são  $\dot{y}_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $\dot{z}_1(t)$  e  $z_2(t)$ , ou seja, velocidades do mancal e deslocamentos lineares do rotor.

A partir da equação (3.26) monta-se a matriz de transformação com (6.40) e (6.42)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & : & 0 & : & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & : & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & : & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & : & 0 & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & : & 0 & : & c_{11} & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & : & 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & k_{44} & k_{12} & -k_{13} & : & 0 & : & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & : & 0 & : & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots \\ t_{9,1} & t_{9,2} & t_{9,3} & : & 0 & : & t_{9,7} & k_{12} & k_{13} & : & 0 \\ -k_{22} & k_{22} & k_{23} & : & 0 & : & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & t_{11,4} & t_{11,5} & t_{11,6} & : & 0 & : & t_{11,10} & k_{12} & -k_{13} \\ 0 & 0 & : & -k_{22} & k_{22} & -k_{23} & : & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

onde

$$\begin{aligned}
t_{9,1} &= c_{11}k_{11} & t_{11,4} &= c_{44}k_{44} \\
t_{9,2} &= c_{11}k_{12} & t_{11,5} &= c_{44}k_{12} \\
t_{9,3} &= c_{11}k_{13} & t_{11,6} &= -c_{44}k_{13} \\
t_{9,7} &= k_{11} + c_{11}^2 & t_{11,10} &= k_{44} + c_{44}^2 .
\end{aligned}$$

Aplicando-se a transformação (6.43) sobre o sistema, obtém-se uma nova descrição de estado

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_0 \mathbf{n}(t) , \quad (6.44)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(4,4)} & : & \mathbf{0}_{(4,8)} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) , \quad (6.45)$$

com o novo vetor de estados

$$\tilde{\mathbf{x}}^T = \left\{ \dot{y}_1(t) \quad y_2(t) \quad \dot{z}_1(t) \quad z_2(t) \quad : \quad \tilde{\mathbf{x}}'_{(1,8)} \right\} . \quad (6.46)$$

Em (6.44) as estruturas internas de  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{E}_0$  são genericamente ocupadas por parâmetros desconhecidos. Entretanto, a matriz  $\mathbf{A}_0$  ainda apresenta alguns parâmetros conhecidos. Resolvendo-se analiticamente a operação

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} , \quad (6.47)$$

obtém-se a seguinte matriz

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} & & & & : & & & & & & & & & & \\ & & & & : & & & & & & & & & & \\ & & & & : & & & & & & & & & & \\ & & & & : & & & & & & & & & & \\ & & & & : & & & & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & : & a_{1,5} & 0 & a_{1,7} & a_{1,8} & : & a_{1,9} & a_{1,10} & a_{1,11} & 0 & \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & : & a_{2,5} & 0 & 0 & 0 & : & a_{2,9} & 0 & 0 & 0 & \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & : & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} & 0 & : & a_{3,9} & 0 & a_{3,11} & a_{3,12} & \\ 0 & 0 & a_{4,3} & 0 & : & 0 & 0 & a_{4,7} & 0 & : & 0 & 0 & a_{4,11} & 0 & \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Apesar da intensa combinação de parâmetros resultante da operação (6.48), ainda observa-se muitas posições ocupadas por zeros em (6.48).

Para o problema estudado, o eixo flexível que une o rotor ao motor de acionamento apresenta uma geometria bastante simples. Em sistemas reais normalmente isto não ocorre. Entretanto, para estes sistemas tem-se mais conhecimento de características de rigidez do eixo, do que dos mancais, onde se somam também características das estruturas de montagem destes mancais.

Baseado nisto, assume-se que as características de rigidez do eixo sejam conhecidas a princípio e que o problema de identificação paramétrica resume-se na estimação dos parâmetros  $k_{11}$ ,  $k_{44}$ ,  $c_{11}$  e  $c_{44}$  que envolvem as características dos mancais.

Na forma (6.48) necessita-se, primeiramente, localizar onde aparecem estes parâmetros e com a estimação dos  $a_{ij}$ 's determina-se, então, as características do mancal.

Com a ajuda de (2.26), nota-se ainda as seguintes igualdades na matriz  $\mathbf{A}_0$ :

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} a_{1,3} = -120k_{44} \\ a_{1,7} = -120c_{44} \\ a_{1,8} = -2,4 \times 10^6 \\ a_{1,9} = c_{11} \\ a_{1,11} = 120 \end{cases} , \\ & \bullet \begin{cases} a_{2,1} = 1,5k_{11} - 2 \times 10^4 \\ a_{2,5} = 1,5c_{11} \\ a_{2,9} = -1,5 \end{cases} , \\ & \bullet \begin{cases} a_{3,1} = 120k_{11} \\ a_{3,5} = 120c_{11} \\ a_{3,6} = 2,4 \times 10^6 \\ a_{3,8} = -120 \\ a_{3,11} = c_{44} \end{cases} , \\ & \bullet \begin{cases} a_{4,3} = 1,5k_{44} - 2 \times 10^4 \\ a_{4,7} = 1,5c_{44} \\ a_{4,11} = -1,5 \end{cases} . \end{aligned}$$

As unidades destes parâmetros resultam da combinação dos elementos de (6.40) e representam relações coerentes. Os elementos restantes apresentam combinações não lineares nos parâmetros desconhecidos do mancal com os parâmetros do eixo. Assim sendo, eles são considerados desconhecidos na fase de estimação e são de difícil aproveitamento para obtenção dos parâmetros procurados.

Das relações existentes nas 2ª e 4ª linhas da matriz de parâmetros em (6.48) percebe-se que a obtenção de  $k_{11}$ ,  $c_{11}$  e  $k_{44}$ ,  $c_{44}$  é praticamente direta a partir da estimação de  $a_{2,1}$ ,  $a_{2,5}$  e  $a_{4,3}$ ,  $a_{4,7}$ .

A diminuição drástica no número de parâmetros a serem estimados, comparado ao modelo genérico para a matriz  $\mathbf{A}_0$ , melhora a precisão do resultado final.

Se por um lado isto é válido para o método baseado na Equação de Ljapunov, por outro lado, todo este conhecimento é de difícil utilização pelo método baseado na Matriz Fundamental.

### 6.3.4 Medição de Parte do Vetor de Estado e Excitação Colorida

Nesta seção analisa-se o caso em que a excitação seja do tipo colorido e modelada a partir de um sistema dinâmico como idealizado na seção 3.3.

Apesar da inclusão da descrição do filtro de forma na matriz total do sistema, deve-se ainda evitar as medições dos deslocamentos angulares do rotor e suas respectivas velocidades.

Considera-se um sistema dinâmico de 2ª ordem, gerador das excitações coloridas, na forma descrita em (3.16),

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{R} \mathbf{z}(t) + \mathbf{S} \mathbf{w}(t), \quad (6.49)$$

com

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Supondo que as entradas  $\mathbf{u}(t)$  em (6.37) sejam

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}_u \mathbf{z}(t) \quad (6.51)$$

com

$$\mathbf{H}_u = \mathbf{I}_{(2,2)}. \quad (6.52)$$

A matriz de entradas do sistema mecânico tem a seguinte estrutura,



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(6,2)} \\ \dots \\ b_1 \ 0 \\ 0 \ b_2 \\ b_3 \ 0 \\ 0 \ b_4 \\ b_5 \ 0 \\ 0 \ b_6 \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

A partir de (6.49), (6.51) e (6.53) associados ao sistema (6.37) tem-se uma nova descrição do sistema total

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{x}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{w}(t) + \mathbf{E}^* \mathbf{n}(t), \quad (6.54)$$

com

$$\mathbf{x}^*(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dots \\ \mathbf{z}(t) \end{Bmatrix}, \quad (6.55)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(12,1)} \\ \dots \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(12,2)} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(2,2)} \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

A nova matriz do sistema  $\mathbf{A}^*$  terá a seguinte estrutura

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & \mathbf{A}_{(12,12)} & & \vdots & \mathbf{B} & \\ & & & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & 0 & 1 \\ & \mathbf{0}_{(12,12)} & & \vdots & & \\ & & & \vdots & r_1 & r_2 \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

Define-se, finalmente, uma estrutura para as perturbações de medida  $\mathbf{v}(t)$  como já analisado na seção 3.3.

Seja válida a seguinte relação

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{H}_v \mathbf{z}(t), \quad (6.58)$$

com

$$\mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \\ d_3 & 0 \\ 0 & d_4 \\ d_5 & 0 \\ 0 & d_6 \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

A equação de medidas para o sistema (6.54) é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*(t),$$

$$\mathbf{C}^* = \left[ \mathbf{C}_{(6,12)} \quad \vdots \quad \mathbf{H}_{v_{(6,2)}} \right]. \quad (6.60)$$

A submatriz  $\mathbf{C}$  em (6.60) indica as variáveis do sistema mecânico a serem medidas. Além das medições supostas na seção anterior, acrescenta-se também a medição dos deslocamentos  $y_1(t)$  e  $z_1(t)$  do mancal. Dessa forma, obtém-se a seguinte matriz de medidas  $\mathbf{C}^*$ .

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & d_1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & d_3 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & d_4 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & d_5 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & d_6 \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

Para se conseguir uma forma especial para a matriz  $\mathbf{A}^*$ , processa-se uma transformação de coordenadas. A matriz de transformação  $\mathbf{T}$  é montada a partir da estrutura descrita em (3.26).

A matriz de transformação torna-se, então,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \\
k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \otimes \\
0 & 0 & 0 & k_{44} & k_{12} & -k_{13} & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & \otimes \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \otimes \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \otimes & \otimes \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \otimes \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \otimes & \otimes \\
t_{13,1} & t_{13,2} & t_{13,3} & 0 & 0 & 0 & t_{13,7} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & \otimes & \otimes \\
0 & 0 & 0 & t_{14,4} & t_{14,5} & t_{14,6} & 0 & t_{14,10} & k_{12} & -k_{13} & 0 & \otimes & \otimes
\end{bmatrix} \quad (6.62)$$

sendo

$$\begin{aligned}
t_{13,1} &= c_{11}k_{11} & t_{14,4} &= c_{44}k_{44} \\
t_{13,2} &= c_{11}k_{12} & t_{14,5} &= c_{44}k_{12} \\
t_{13,3} &= c_{11}k_{13} & t_{14,6} &= -c_{44}k_{13} \\
t_{13,7} &= k_{11} + c_{11}^2 & t_{14,10} &= k_{44} + c_{44}^2
\end{aligned}$$

As submatrizes  $\otimes$  em (6.60) indicam a ocupação por elementos que são combinações dos parâmetros das matrizes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{H}_u$ ,  $\mathbf{H}_v$  e  $\mathbf{B}$ .

Considerando que os parâmetros de rigidez relativos ao eixo sejam conhecidos, a princípio, com a aplicação da transformação (6.60), observa-se a seguinte estrutura para a matriz reduzida  $\mathbf{A}_0$ ,

Answer is

$$\begin{array}{ll} \bullet \left\{ \begin{array}{l} a_{1,7} = -1,5 \\ a_{1,12} = -a_{1,2} \end{array} \right. & \bullet \left\{ \begin{array}{l} a_{2,8} = -1,5 \\ a_{2,11} = -a_{2,1} \end{array} \right. , \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} a_{3,7} = 1 \\ a_{3,11} = -a_{3,1} \\ a_{3,12} = -a_{3,2} \end{array} \right. & \bullet \left\{ \begin{array}{l} a_{4,8} = 1 \\ a_{4,11} = -a_{4,1} \\ a_{4,12} = -a_{4,2} \end{array} \right. \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} a_{5,3} = 3,2 \times 10^8 \\ a_{5,8} = -pc_{44} \\ a_{5,10} = -2,4 \times 10^6 \\ a_{5,13} = c_{11} \\ a_{5,14} = p \end{array} \right. & \bullet \left\{ \begin{array}{l} a_{6,4} = 3,2 \times 10^8 \\ a_{6,7} = pc_{11} \\ a_{6,8} = 2,4 \times 10^6 \\ a_{6,13} = -p \\ a_{6,14} = c_{44} \end{array} \right. . \end{array}$$
$$k_{11} = (a_{1,5} - 0,3 \times 10^5)/1,5, \quad (6.64)$$

$$k_{44} = (a_{2,6} - 0,3 \times 10^5)/1,5, \quad (6.65)$$

$$c_{11} = (a_{1,1} + a_{1,11})/1,5, \quad (6.66)$$

$$c_{44} = (a_{2,2} + a_{2,12})/1,5. \quad (6.67)$$

Os parâmetros das 3ª e 4ª linhas não apresentam nenhuma relação com as características de mancal procuradas.

A partir das estimativas dos parâmetros somente das 2 primeiras linhas em (6.63) pode-se, portanto, chegar aos parâmetros relacionados ao mancal com (6.64) a (6.67).

### 6.3.5 Comentários

- Foi observado neste capítulo, que a condição (3.53), imposta sobre o número mínimo de medidas para um sistema mecânico genérico, não foi satisfeita. No capítulo 3 tratou-se do problema de transformação inversa, sem levar-se em consideração as possibilidades de exploração de parâmetros do sistema, conhecidos a princípio.

Dependendo do grau deste conhecimento, pode-se conseguir simplificações significativas para o problema como um todo.

Uma das mais importantes, talvez seja a possibilidade de redução do número de medidas necessárias para caracterização completa do sistema.

Outro ponto importante é a identificação dos parâmetros conhecidos já na matriz  $A_0$ , que é estimada.

Como se poderá notar no capítulo 7, o conhecimento de parâmetros da matriz a ser estimada  $A_0$  é de vital importância para a precisão dos resultados finais.

- O sistema mecânico descrito na seção 6.3.1 foi concebido a partir de uma bancada experimental existente no Departamento de Projeto Mecânico da Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP. Esta bancada foi construída com recursos da Fundação Volkswagen da Alemanha em convênio com o Institut B für Mechanik da Universidade de Stuttgart. Este estudo teórico faz parte de um primeiro passo para a aplicação experimental dos métodos de identificação tratados nos capítulos 4 e 5.
- A equação 6.22 pressupõe que ao lado das excitações aleatórias, estejam presentes também excitações do tipo harmônicas causadas pelo desbalanceamento do rotor. Este tipo de excitação não foi tratado neste trabalho. Interessa-se pela resposta do sistema mecânico correspondente à excitação do tipo aleatória. Faz-se necessário, portanto, uma adaptação dos procedimentos tratados até aqui.

Considera-se que a parte harmônica da resposta possa ser filtrada e que reste somente a parte correspondente à excitação aleatória.

O enfoque principal deste trabalho centraliza-se nos procedimentos de aproveitamento das estruturas internas das matrizes do sistema mecânico em associação aos métodos de identificação paramétrica desenvolvidos nos capítulos 4 e 5.

Entretanto, apresenta-se no Apêndice A, um tratamento desta situação e propõe-se, em primeira análise, a filtragem da parte harmônica pela escolha adequada de defasagens de tempo no cálculo das correlações.

Do ponto de vista teórico, isto é perfeitamente possível. Contudo, a verificação experimental destes procedimentos deverá ser conduzida futuramente para a análise dos problemas de ordem prática que venham a ocorrer.

## Capítulo 7

# Resultados de Simulação Numérica

Neste capítulo analisa-se, através de simulações numéricas, diferentes situações nas quais os procedimentos de identificação descritos nos capítulos 4 e 5 são testados. O sistema estudado é o rotor descrito na seção 6.3.

A análise é subdividida basicamente em três etapas. Na primeira etapa considera-se, tanto que a excitação seja do tipo ruído branco, como que a medição de todos os deslocamentos seja possível. Neste caso, estuda-se também diferentes configurações para o filtro utilizado no método baseado na Equação Matricial de Ljapunov.

Numa segunda etapa, considera-se o caso em que são medidos apenas quatro deslocamentos do sistema, de acordo com o modelo descrito na seção 6.3.3. Finalmente, na terceira e última etapa, trata-se do caso descrito em 6.3.4, onde, tanto as perturbações de medidas, quanto as excitações são do tipo ruído colorido.

Neste caso verifica-se também a influência dos parâmetros do filtro de forma, gerador das excitações.

### 7.1 Procedimento de Cálculo

Para a montagem dos estimadores de parâmetros descritos nos capítulos 4 e 5, são necessárias as estimativas de diferentes matrizes de correlações.

Estas matrizes podem ser obtidas por cálculo numérico, a partir de uma dada estrutura conhecida do sistema, ou seja, das matrizes dinâmica e de entradas.

O cálculo destas correlações constitui-se na solução da Equação Matricial de Ljapunov. Utilizou-se para este cálculo uma subrotina desenvolvida a partir do algoritmo de Bartels-Stewart [3] e baseia-se nos programas computacionais *Linpac* e *Eispac* [11, 50].

As diferentes matrizes de correlações para diferentes defasagens no tempo foram obtidas a partir da relação (3.14), ou seja, da multiplicação da matriz de correlação para uma determinada defasagem pela matriz fundamental do sistema.

Esta matriz fundamental também é calculada numericamente com o auxílio do algoritmo *Scaling and Squaring* descrito na seção 2.4.

Obtidas as matrizes de correlações, procede-se à montagem dos estimadores de acordo com cada situação considerada.

Em todos os casos estudados a seguir, montou-se um sistema hiperdeterminado de equações para a estimação de parâmetros. Na solução deste sistema, utilizou-se um método computacional baseado na decomposição *QR* e em pacotes computacionais conhecidos.

Todos os cálculos foram realizados numa estação de trabalho do tipo *SPARCstation* de fabricação *SUN Micro Systems* e em dupla precisão. Os programas foram escritos em linguagem FORTRAN. Tanto na solução da equação de Ljapunov, como na solução do sistema de equações, foram utilizadas subrotinas de programação dos pacotes computacionais *Linpac* e *Einspack*.

Do ponto de vista teórico, como já visto ao longo do texto, a partir do conhecimento exato das correlações, obtém-se naturalmente os parâmetros procurados. Entretanto, as correlações não podem ser obtidas na prática com precisão infinita. Pequenos desvios na estimação das correlações em relação aos valores verdadeiros, podem ter influência bastante grande na estimação final dos parâmetros.

Esta sensibilidade dos parâmetros, a dispersões nas correlações, está diretamente relacionada aos procedimentos de estimação utilizados e consequentemente, aos métodos de identificação.

Objetiva-se com este capítulo, analisar as diferenças entre os procedimentos de identificação paramétrica apresentados, sob o aspecto da sensibilidade destes a desvios na estimação das correlações.

Para tanto, assume-se que os valores estimados de cada correlação sejam dispersos em torno do valor verdadeiro por uma distribuição do tipo normal.

O gráfico da figura 7.1 ilustra a distribuição dos valores de uma determinada correlação estimada  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$ , entre as variáveis  $x_i$  e  $x_j$ .

Considera-se que a correlação estimada  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$ , seja o valor de correlação, obtido a partir de uma perturbação aleatória sobre o valor verdadeiro calculado. Esta perturbação aleatória tem média zero e distribuição normal com desvio padrão variável para os diferentes casos.

O valor médio da distribuição daí resultante será o valor verdadeiro  $r_{x_i x_j}(\tau_i)$ , calculado pelos métodos numéricos já citados. O outro fator de caracterização da distribuição será, ao longo do texto, o desvio padrão relativo, calculado a partir de

$$d = \frac{(\hat{\sigma})^{1/2}}{|r_{x_i x_j}(\tau_i)|} \times 100, \quad (7.1)$$

$\hat{\sigma}$  é a estimativa da variância para a série de valores  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$ ,  
onde  $r_{x_i x_j}(\tau_i)$  é o valor verdadeiro da correlação entre as variáveis  $x_i$  e  $x_j$ ,  
 $d$  é o desvio padrão relativo (em porcentagem).

A estimativa para a variância  $\hat{\sigma}$ , é obtida por [5].

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (r_{x_i x_j}(\tau_i) - \hat{r}_{x_i x_j}^{(k)}(\tau_i))^2, \quad (7.2)$$



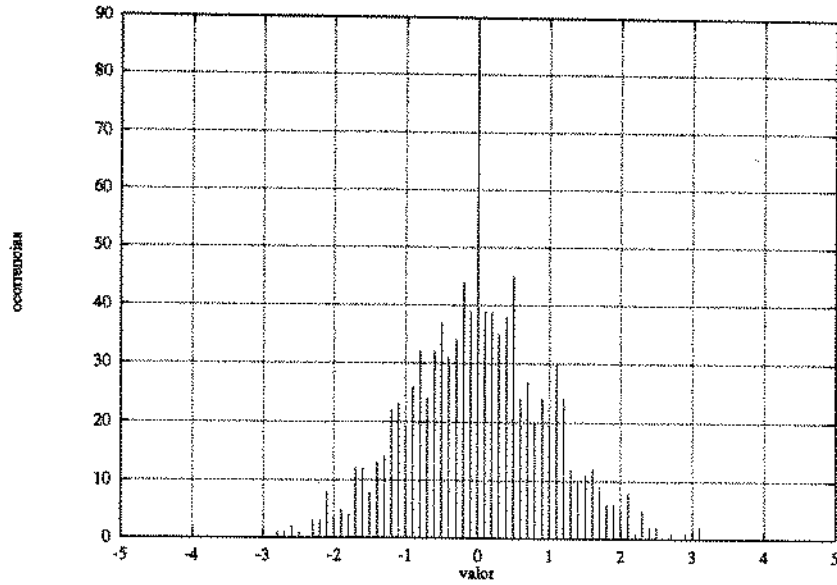


Figura 7.1: Distribuição dos valores  $100(\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)/r_{x_i x_j}(\tau_i) - 1)$ , de uma determinada correlação  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$ , com desvio padrão relativo  $d$ .

onde o subíndice  $k$  representa o  $k$ -ésimo valor de  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$  de uma série de  $N$  valores gerados.

Para uma boa caracterização da distribuição, foram gerados 1000 valores de  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$  aleatórios para cada situação analisada.

Partindo-se, então, de valores de correlações distribuídos segundo ilustra a figura 7.1, obtém-se uma série de valores estimados para os parâmetros físicos de interesse.

Esta série de 1000 valores também é caracterizada nas próximas seções pelo valor do desvio padrão relativo (em porcentagem). O valor médio da série é o valor verdadeiro do parâmetro, a menos que ocorra problemas de precisão computacional na obtenção das estimativas. Para o cálculo da estimativa dos desvios padrões relativos das séries de parâmetros obtidos, recorre-se às formas análogas das expressões (7.1) e (7.2).

De uma maneira geral, os resultados apresentados nas seções subsequentes foram obtidos a partir de um tempo de discretização considerado de

$$\Delta t = 1 \text{ ms} . \quad (7.3)$$

Na montagem das equações de estimação dos parâmetros nos diferentes casos, utilizou-se sempre 12 diferentes defasagens no tempo  $\tau_i$ , o que sempre garantiu a formação de um sistema de equações hiperdeterminado para os estimadores. Nos casos em que essa condição não foi seguida, salienta-se esse valor ao lado dos resultados.

O sistema mecânico, objeto de estudo, é o rotor descrito na seção 6.3, observado sob diferentes configurações de medidas. Em geral, considera-se que, a menos dos parâmetros físicos relacionados aos mancais, todos os outros parâmetros sejam conhecidos. Portanto, tem-se interesse em estimar-se os parâmetros  $k_{11}$ ,  $k_{44}$ ,  $c_{11}$  e  $c_{44}$  da formulação (6.40).

## 7.2 Medição de Todos os Deslocamentos

Este caso em análise corresponde ao descrito na seção 6.3.2. Assume-se que o sistema seja excitado por ruído branco e que as medições não sofram perturbações não controláveis.

Para a identificação paramétrica do sistema, baseado na formulação pela equação de Ljapunov, necessita-se da utilização de um filtro às medidas. Considera-se um sistema filtro com as seguintes características,

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{N} \mathbf{f}(t) + \mathbf{P} \mathbf{y}(t) , \quad (7.4)$$

com

$$\mathbf{f}^T(t) = \left\{ \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{matrix} \right\} . \quad (7.5)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} , \quad (7.6)$$

e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} . \quad (7.7)$$

Adota-se os seguintes valores numéricos para as constantes de (7.6) e (7.7),

$$\bullet \begin{cases} n_1 = -0,1 \times 10^{15} \\ n_2 = -0,7 \times 10^9 \\ n_3 = -0,2 \times 10^8 \\ n_4 = -70,0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} p_1 = 1,0 \\ p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0. \end{cases}$$

Com estes parâmetros o sistema filtro possui como autovalores,

$$\begin{cases} \lambda_{1,2}^f = -7,19 \pm 3,16 \times 10^3 i \\ \lambda_{3,4}^f = -27,8 \pm 3,16 \times 10^3 i \end{cases}$$

Os autovalores do sistema mecânico descrito na seção 6.3.1 são por sua vez

<i>Equação de Ljapunov</i>				
desvios padrão relativos (%)				
Correlações	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
0,5	5,02	1,73	0,68	0,22
1,0	10,05	3,46	1,35	0,44

Tabela 7.1: Desvios padrão relativos com aproveitamento do conhecimento sobre os parâmetros.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{1,2} = -3,10 \pm 3,49 \times 10^2 i \\ \lambda_{3,4} = -4,49 \pm 2,63 \times 10^2 i \\ \lambda_{5,6} = -1,12 \pm 9,14 \times 10^1 i \\ \lambda_{7,8} = -0,24 \pm 5,71 \times 10^1 i \\ \lambda_9 = -1,98 \times 10^3 \\ \lambda_{10} = -2,48 \times 10^3 \\ \lambda_{11} = -1,31 \times 10^1 \\ \lambda_{12} = -1,13 \times 10^1. \end{array} \right.$$

A tabela 7.1 mostra os valores dos desvios padrão relativos, obtidos da série de valores estimados para os parâmetros  $k_{11}$ ,  $k_{44}$ ,  $c_{11}$  e  $c_{44}$ . Nesta estimação, utilizou-se o procedimento baseado na Equação Matricial de Ljapunov. Foi considerado também todo o conhecimento acerca dos valores dos outros parâmetros do sistema, na solução do sistema da equações.

Foram tratados dois casos, ou seja, duas possíveis dispersões para os valores das correlações estimadas.

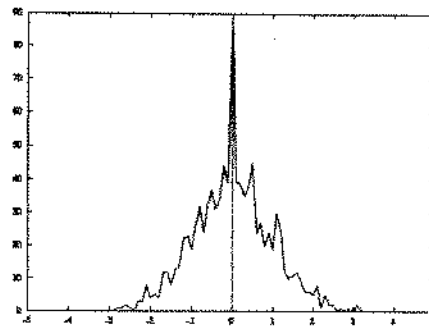
Extraí-se da tabela 7.1, por exemplo, que os desvios padrão relativos para os valores do parâmetro  $k_{11}$  estimado, são cerca de 10 vezes maiores que o desvio padrão considerado para as correlações. Por outro lado, o parâmetro  $k_{44}$  apresenta menor dispersão em torno do valor verdadeiro.

Na figura 7.2 encontram-se representadas as distribuições das séries de valores para uma determinada correlação e para os quatro parâmetros estimados.

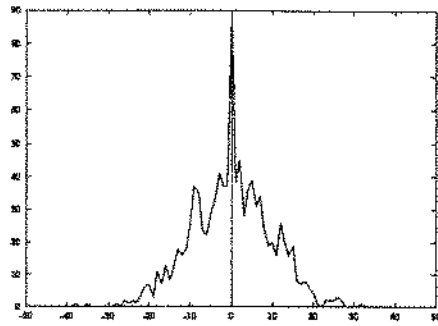
Da figura 7.2 e da tabela 7.1 nota-se ainda que as estimativas das rigidezes são mais dispersas comparadas às dos amortecimentos. A sensibilidade de cada parâmetro à pequenas variações nos valores das correlações, depende fundamentalmente do sistema em estudo, associado às estruturas do processo de excitação e do filtro utilizado.

Quando da aplicação do procedimento de identificação baseado na equação de Ljapunov, faz-se necessário a escolha de uma configuração para as matrizes do sistema filtro. A estrutura das matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{P}$  foram fixadas na forma das equações (7.6) e (7.7). Entretanto, os parâmetros  $n_i$  ( $i = 1(1)4$ ) e  $p_j$  ( $j = 1(1)6$ ) podem ser variados.

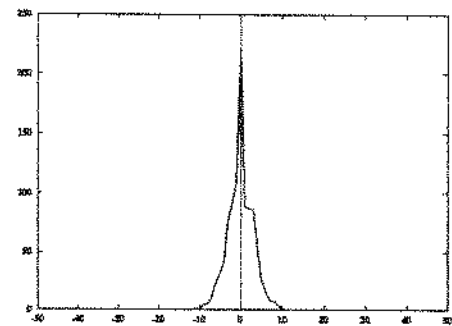
Analisa-se, a seguir, a sensibilidade das estimativas dos parâmetros em função da escolha de diferentes matrizes  $\mathbf{N}$  para o filtro. Na tabela 7.2, estes diferentes filtros são



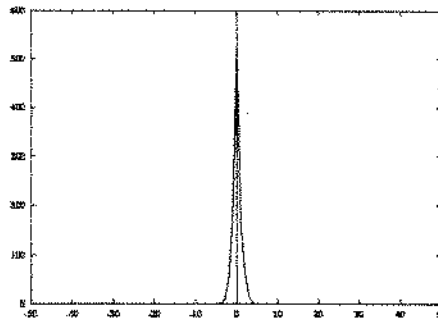
a) Correlação  $\hat{r}_{x_i x_j}(\tau_i)$



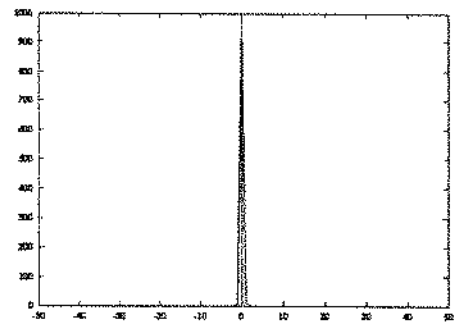
b)  $\hat{k}_{11}$



c)  $\hat{k}_{44}$



d)  $\hat{c}_{11}$



e)  $\hat{c}_{44}$

Figura 7.2: Distribuição dos valores percentuais de correlações e de parâmetros estimados em torno dos valores verdadeiros.

Sistema Filtro	Autovalores	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
1	$\lambda_{1,2}^f = -7,19 \pm 3,16 \times 10^3 i$ $\lambda_{3,4}^f = -27,8 \pm 3,16 \times 10^3 i$	1,00	0,35	0,14	0,044
2	$\lambda_{1,2}^f = -7,19 \pm 1,0 \times 10^3 i$ $\lambda_{3,4}^f = -27,8 \pm 1,0 \times 10^3 i$	0,95	0,39	0,12	0,043
3	$\lambda_{1,2}^f = -7,19 \pm 3,16 \times 10^2 i$ $\lambda_{3,4}^f = -27,8 \pm 3,15 \times 10^2 i$	0,44	0,50	0,045	0,046
4	$\lambda_{1,2}^f = -7,19 \pm 9,97 \times 10^1 i$ $\lambda_{3,4}^f = -27,8 \pm 9,61 \times 10^1 i$	0,48	0,25	0,19	0,20
5	$\lambda_{1,2}^f = -0,72 \pm 3,16 \times 10^1 i$ $\lambda_{3,4}^f = -2,78 \pm 3,15 \times 10^1 i$	4,18	0,32	0,49	0,57
6	$\lambda_{1,2}^f = -0,72 \pm 9,97 i$ $\lambda_{3,4}^f = -2,78 \pm 9,61 i$	3,37	0,51	2,86	0,61
7	$\lambda_{1,2}^f = -0,72 \pm 3,08 i$ $\lambda_{3,4}^f = -2,78 \pm 1,51 i$	2,23	0,44	6,3	0,67

Tabela 7.2: Desvios padrão relativos (%) para diferentes configurações do sistema filtro. Correlações com desvio padrão relativo  $d = 0,1\%$ .

caracterizados pelos seus autovalores. Os resultados apresentados na tabela referem-se a um desvio padrão relativo  $d = 0,1\%$  para as correlações.

A escolha de diferentes configurações para a matriz de entradas  $\mathbf{P}$  em (7.7) também exerce influência sobre a sensibilidade das estimativas dos parâmetros.

Os resultados desta influência para diferentes matrizes de entradas são apresentados na tabela 7.3. Na primeira coluna da tabela encontram-se os elementos  $p_i$  considerados diferentes de zero para cada configuração de  $\mathbf{P}$ . Em outras palavras, escolhe-se alternadamente cada uma das variáveis medidas, para servir de entrada do sistema filtro. As correlações consideradas tem desvio padrão relativo  $d = 0,1\%$  e o sistema filtro é o mesmo que em (7.6) e (7.7).

	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
$p_1 = 1$	1,00	0,35	0,14	0,044
$p_2 = 1$	0,55	8,60	0,27	1,40
$p_3 = 1$	0,44	2,44	0,15	0,25
$p_4 = 1$	0,33	1,10	0,05	0,12
$p_5 = 1$	5,30	0,64	1,31	0,27
$p_6 = 1$	1,48	0,55	0,24	0,14

Tabela 7.3: Desvios padrão relativos (%) para diferentes configurações da matriz de entradas do sistema filtro

Nota-se pela análise das tabelas 7.2 e 7.3 que a escolha de diferentes configurações do sistema filtro tem influência sobre a sensibilidade das estimativas a dispersões nos valores

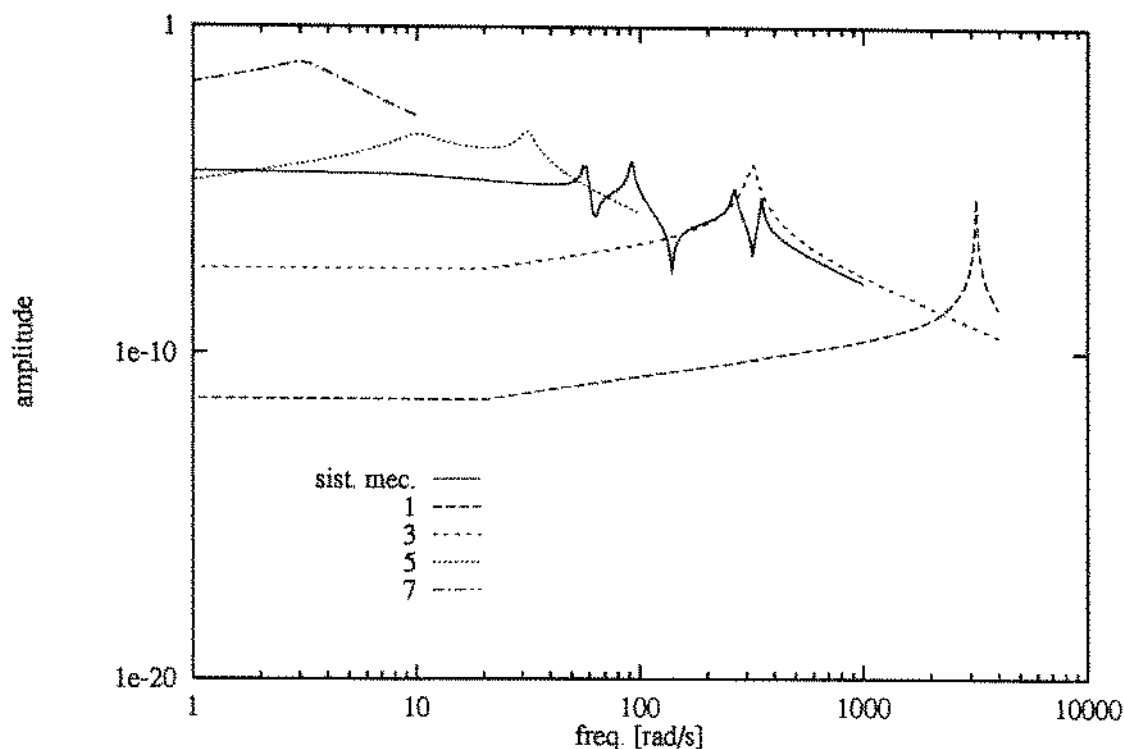


Figura 7.3: Funções de transferência para diferentes sistemas filtro.

das correlações.

A intensidade desta influência, por sua vez, relaciona-se diretamente ao próprio sistema mecânico que se deseja identificar, ou seja, existe uma associação entre parâmetros do sistema e do filtro. O sistema filtro pode atenuar ou amplificar determinadas faixas de frequência das variáveis que passam pelo filtro.

Como o próprio sistema mecânico não é conhecido a princípio, torna-se bastante difícil fazer uma escolha ótima dos parâmetros do filtro. Entretanto, como indicação, deve-se escolher sistemas que não afetem bruscamente a grandeza medida utilizada como entrada. Por exemplo, um sistema pouco amortecido, certamente amplificará demasiadamente determinadas componentes em frequência, distorcendo a variável medida.

Finalmente, a figura 7.3 ilustra, de forma qualitativa, as funções de transferência para alguns sistemas filtro (1,3,5 e 7), considerados na tabela 7.2. A matriz de entradas  $\mathbf{P}$  possui  $p_1 = 1$  e  $p_i = 0$  ( $i = 2(1)6$ ). As funções de transferência referem-se à variável de saída  $\eta_1(t)$  do filtro. Para efeito de comparação, apresenta-se na mesma figura a função de transferência entre a entrada ligada ao parâmetro  $s_1$  (6.36) e deslocamento do mancal  $z_1(t)$  em (6.28) para o caso do sistema mecânico (6.22).

Como foi visto até agora, a escolha dos parâmetros do sistema filtro exerce alguma influência sobre as dispersões das estimativas, quando se aplica o procedimento de identificação baseado na equação de Ljapunov.

<i>Matriz Fundamental</i>				
desvio padrão relativo (%)				
Correlações	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
$5,0 \times 10^{-9}$	0,28	0,83	0,32	0,87
$1,0 \times 10^{-8}$	0,56	1,66	0,64	1,74

Tabela 7.4: Desvios padrão relativos para identificação baseada na matriz fundamental.

Pelo procedimento de identificação, baseado na matriz fundamental do sistema, não há necessidade de utilização de sistema filtro. Aplica-se agora este método, para o caso aqui considerado, e obtém-se os resultados constantes na tabela 7.4. As estimativas basearam-se na utilização de 6 diferentes  $\tau_i$ 's para as correlações.

Nota-se claramente, por comparação das tabelas 7.1 e 7.4, as grandes diferenças nas sensibilidades das estimativas, em relação às dispersões nas correlações. Pelo procedimento baseado na matriz fundamental, pequenas dispersões nos valores das correlações já causam grandes variações no valor dos parâmetros.

Deve-se salientar, primeiramente, a grande influência da transformação numérica, que leva a matriz fundamental identificada à matriz do sistema mecânico, onde encontram-se os parâmetros físicos de interesse. Esta operação numérica é bastante sensível a pequenas variações na matriz fundamental.

Devido à necessidade de aplicação desta transformação numérica, perde-se também o controle sobre os parâmetros e em consequência, torna-se muito difícil a utilização do conhecimento acerca de alguns parâmetros do sistema.

Assim é necessário, estimar todos os parâmetros da matriz fundamental, e em consequência, da matriz do sistema mecânico com parâmetros físicos, independentemente de alguns já serem conhecidos ou não. Para sistemas com matrizes de ordem elevada e esparsas com diversos zeros, esta condição se configura em grande desvantagem.

Para sistemas de ordem menor, devido ao número reduzido de parâmetros envolvidos, as dispersões dos resultados tendem a ser menores.

Para efeito de ilustração, considera-se o caso estudado em [54], onde a matriz do sistema mecânico, é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2,2)} & \vdots & \mathbf{I}_{(2,2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{11} & k_{12} & \vdots & c_{11} & c_{12} \\ k_{21} & k_{22} & \vdots & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

e as matrizes de entradas e de medidas por

<i>Matriz Fundamental</i>				
desvio padrão relativo (%)				
Correlações	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
0,1	0,62	0,45	2,07	0,86
0,5	3,11	2,25	10,33	4,31

Tabela 7.5: Desvios padrão relativos (%) para identificação de um sistema mecânico de 2 graus de liberdade.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = [\mathbf{I}_{(2,2)} : \mathbf{0}_{(2,2)}] \quad (7.9)$$

com

$$\bullet \begin{cases} k_{11} = -3600 \, s^{-2} \\ k_{12} = k_{21} = 1000 \, s^{-2} \\ k_{22} = -5000 \, s^{-2} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} c_{11} = -12 \, s^{-1} \\ c_{12} = c_{21} = -9 \, s^{-1} \\ c_{22} = -24 \, s^{-1} \end{cases}.$$

Trabalhando-se com  $\Delta t = 10 \, ms$  e com matrizes de correlações para 6 diferentes  $\tau_i$ 's, obtém-se as dispersões constantes na tabela 7.5.

Os parâmetros estimados, neste caso, variam menos e permitem maiores dispersões nas estimativas das correlações.

Comparando-se os dois procedimentos de identificação, aplicados ao caso do sistema mecânico com 6 graus de liberdade, pode-se concluir pelo melhor desempenho do método baseado na equação de Ljapunov. Este permite maiores dispersões sobre os valores de correlação estimados para níveis de dispersão nos parâmetros equivalentes para os dois casos.

## 7.3 Medição dos Deslocamentos Lineares

Nesta seção analisa-se numericamente o caso estudado de forma teórica em 6.3.3, ou seja, excitação tipo ruído branco e medição somente dos deslocamentos lineares.

Como foi visto, devido a eliminação de mais duas medições (deslocamentos angulares do rotor nas duas direções) em relação ao caso anterior, o sistema deve sofrer uma transformação de coordenadas para adaptação à forma normal (3.28). Com isto, ocorre uma



combinação entre os diferentes parâmetros físicos e a consequente redução no número de parâmetros do sistema final.

Estima-se, agora, os parâmetros da forma normal (6.48), onde considera-se conhecidos, além das posições dos zeros, os parâmetros que não se relacionam a  $k_{11}$ ,  $k_{44}$ ,  $c_{11}$  e  $c_{44}$ .

Tendo-se estimado os parâmetros desconhecidos na forma normal (6.48), obtém-se diretamente os parâmetros de mancal procurados.

A tabela 7.6 ilustra a relação entre dispersões nas correlações estimadas e nos parâmetros, quando a configuração do filtro é na forma das equações (7.6) e (7.7).

<i>Equação de Ljapunov</i>				
Desvios Padrão Relativos (%)				
Correlações	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
0,5	2,31	3,10	0,24	0,26
1,0	4,63	6,21	0,49	0,51

Tabela 7.6: Desvios padrão relativos das estimativas com aproveitamento do conhecimento sobre os parâmetros.

Na tabela 7.7 apresentam-se os resultados obtidos quando é feita uma variação nos parâmetros do sistema filtro analogamente ao exposto na tabela 7.2.

Dos dados da tabela 7.7, nota-se que o comportamento das dispersões dos resultados é mais estável e menos sensível às variações do sistema filtro, quando comparado ao caso mostrado na tabela 7.2.

Filtro	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
1	0,46	0,62	0,05	0,05
2	0,47	0,61	0,05	0,05
3	0,52	0,50	0,05	0,05
4	0,27	0,08	0,07	0,07
5	0,45	0,03	0,06	0,06
6	0,43	0,03	0,06	0,07
7	0,45	0,03	0,06	0,07

Tabela 7.7: Desvios padrão relativos para diferentes configurações do sistema filtro. Correlações com desvio padrão relativo  $d = 0,1\%$ .

## 7.4 Excitação Colorida

Analisa-se numericamente o caso descrito em 6.3.4. O sistema é excitado por um ruído colorido e as medidas são perturbadas também por ruído colorido.

Para a caracterização do filtro de forma gerador destas excitações, considera-se um sistema de 2ª ordem na forma (6.49), com

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{onde} \quad \begin{cases} r_1 = -0,9 \times 10^7 \\ r_2 = -0,6 \times 10^4 \\ s_1 = 1,0 \\ s_2 = 1,0. \end{cases}$$

As matrizes, de acoplamento  $\mathbf{H}_u$  da excitação e  $\mathbf{H}_v$  das perturbações nas medidas, são da forma

$$\mathbf{H}_u = 10^6 \mathbf{I}_{(2,2)} \quad (7.10)$$

e

$$\mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \\ d_3 & 0 \\ 0 & d_4 \\ d_5 & 0 \\ 0 & d_6 \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

com os seguintes valores numéricos,

$$\begin{cases} d_1 = 1,0 \\ d_2 = 2,0 \\ d_3 = 3,0 \\ d_4 = 3,0 \\ d_5 = 4,0 \\ d_6 = 5,0. \end{cases}$$

A tabela 7.8 traz os desvios padrão percentuais em função da dispersão dos valores das correlações estimadas. Considera-se que somente os parâmetros relacionados ao mancal do sistema descrito em 6.3.1 sejam desconhecidos.

Comparando-se estes resultados aos casos estudados anteriormente, extrai-se uma maior sensibilidade do processo de identificação em relação as dispersões nas correlações.

Como já foi discutido anteriormente, a forma como o sistema é excitado, influencia o resultado final da identificação. No caso tratado aqui, o sistema é excitado por um ruído, que é modelado a partir de um sistema dinâmico de 2ª ordem, que por sua vez é excitado

Correlações	Equação de Ljapunov			
	$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
0,1	5,16	2,18	0,19	0,065
0,5	23,46	10,96	0,92	0,32

Tabela 7.8: Desvio padrão porcentual em função da dispersão das correlações.

por ruído branco. Os parâmetros deste sistema são responsáveis diretamente, portanto, pelas características do ruído colorido de excitação do sistema mecânico. A variação deles provoca uma variação na forma com que o sistema mecânico é excitado.

A tabela 7.9 traz alguns resultados de uma análise destas variações, ou seja, os valores dos desvios padrão percentuais dos parâmetros estimados, como função da escolha de diferentes parâmetros para o sistema filtro de forma.

Filtro de Forma	Autovalores	Equação de Ljapunov			
		$k_{11}$	$k_{44}$	$c_{11}$	$c_{44}$
1	$\lambda_{1,2}^{ff} = -0,3 \times 10^4$	0,52	0,23	0,019	0,007
2	$\lambda_{1,2}^{ff} = -0,45 \pm 0,779 \times 10^4 i$	0,40	0,22	0,016	0,0062
3	$\lambda_1^{ff} = -0,27 \times 10^4$ $\lambda_2^{ff} = -0,30 \times 10^3$	2,54	0,54	0,091	0,02
4	$\lambda_{1,2}^{ff} = -0,9 \times 10^3$	1,51	7,13	0,053	0,25
	Desvios da média	0,85 %	7,08%	0,03%	0,25%

Tabela 7.9: Desvio padrão porcentual em função das características do filtro de forma. Correlação supostas em dispersão  $d = 0,01\%$ .

A influência do processo de excitação pode ser facilmente visualizada por esta tabela. O filtro de forma determina as faixas de frequência do sistema que serão mais excitadas. Parâmetros relacionados a determinadas faixas de frequência pouco excitadas podem ser estimados com erros maiores. A tabela 7.9 mostra o caso do sistema filtro de forma 4, no qual, para uma dispersão nas correlações de  $d = 0,01\%$ , as estimativas dos parâmetros apresentam problemas de desvios das médias em relação aos valores reais.

A figura 7.4 mostra qualitativamente a função de transferência para o sistema mecânico. Esta possui as mesmas características da apresentada anteriormente na figura 7.3. Conjuntamente, para efeito de comparação, apresentam-se as funções de transferência para os sistemas filtro de forma da tabela 7.9. Considerou-se para a matriz de entradas  $S$  (6.50) do filtro de forma,  $s_1 = 1$  e  $s_2 = 0$ . No gráfico aparecem as funções relativas à resposta da variável  $z_2(t)$  (6.49).

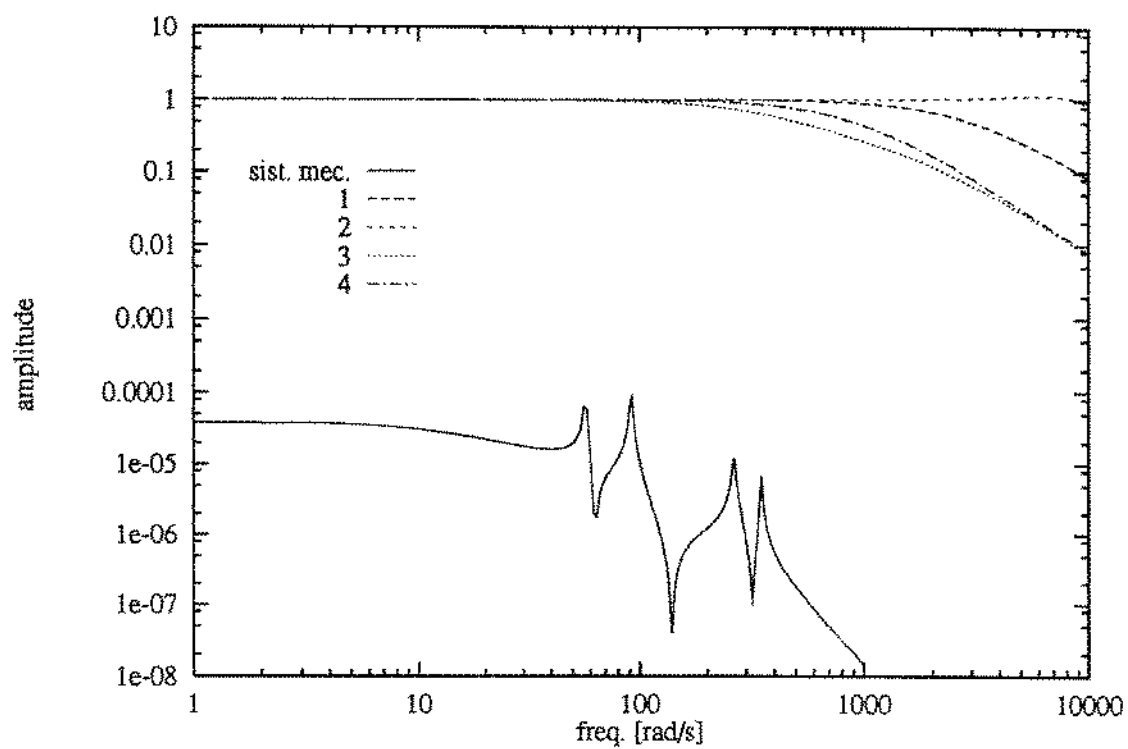


Figura 7.4: Funções de transferência para diferentes sistemas filtro de forma.

## 7.5 Comentários

Da análise numérica de diferentes casos considerados neste capítulo, pode-se verificar algumas tendências gerais que são salientadas a seguir.

- As dispersões nas estimações dos parâmetros são crescentes para algoritmos que não utilizam informações sobre os parâmetros.
- Apesar da verificação de que as características do filtro, para o procedimento da equação de Ljapunov, influenciam nas dispersões das estimativas, estas se mostraram bem menores quando comparadas às fornecidas pelo método da matriz fundamental.
- A forma como as excitações aleatórias do tipo ruído colorido atuam sobre o sistema, assim como a sua característica em frequência, influenciam significativamente nos resultados finais do processo de identificação.

## Capítulo 8

### Conclusões

Ao longo do trabalho tratou-se da identificação paramétrica de sistemas mecânicos excitados estocasticamente. Considerou-se somente as medições das variáveis de estado, ou seja, não foram utilizadas medições das excitações estocásticas.

Foram derivados procedimentos para a identificação paramétrica, os quais são fundamentados em dois diferentes conceitos. Um deles, baseia-se na equação matricial de Ljapunov, enquanto o outro, utiliza a matriz fundamental do sistema.

Foi proposto um procedimento para a inclusão de um ruído colorido, que pode se apresentar como excitação do processo, e também como perturbações de medidas do tipo aditivas. O ruído colorido é modelado por um filtro de forma. As saídas deste sistema configuram-se como entradas do sistema mecânico, assim como, perturbações de medidas.

Foram analisados diferentes casos e mostrou-se, como a identificação paramétrica de sistemas mecânicos ainda é possível, apesar do não conhecimento do sinal de excitação. As redundâncias de medidas (deslocamentos e algumas velocidades), possibilitam contornar-se o problema do não conhecimento da excitação. A ordem do sistema dinâmico utilizado na modelagem do ruído colorido, influencia significativamente na configuração da matriz de medidas do sistema.

Da análise dos dois procedimentos de identificação desenvolvidos, pode-se ressaltar as principais características de ambos de uma forma geral.

- Os dois procedimentos permitem a identificação paramétrica de sistemas mecânicos sem medições dos sinais de excitação.
- Os dois procedimentos levam aos parâmetros de um modelo em tempo contínuo. Utiliza-se para isso, estimativas das matrizes de correlação. A estimação destas matrizes caracteriza-se como um problema por si só, e não é tratado neste trabalho.

O método baseado na equação matricial de Ljapunov possui uma grande vantagem, quando comparado ao método da matriz fundamental, pois a ligação entre os parâmetros procurados e as matrizes de correlações estimadas é direta. Isto possibilita:

- a completa utilização de conhecimento prévio sobre os parâmetros do sistema,

- menor trabalho numérico, pois não necessita da transformação entre a matriz fundamental e a matriz do sistema.
- Com isto, a sua implementação em computador torna-se mais simples.

Uma desvantagem deste procedimento em relação ao método baseado na matriz fundamental, se constitui na necessidade de inclusão da dinâmica das perturbações de medidas no modelo do sistema a ser identificado, mesmo para perturbações do tipo ruído branco.

O método baseado na matriz fundamental fornece estimadores, que relacionam diretamente as correlações estimadas aos parâmetros da matriz fundamental. Esta característica pode conferir a este procedimento uma grande vantagem quando o interesse da identificação for por um modelo do sistema mecânico discretizado no tempo.

A partir da experiência numérica adquirida em aplicações dos dois procedimentos, pode-se ressaltar a importância da utilização do conhecimento prévio sobre os parâmetros na precisão dos resultados finais. Esta utilização torna-se mais importante para sistemas de ordem elevada.

O método baseado na matriz fundamental possui uma vantagem em relação ao método da equação de Ljapunov, ou seja, não necessita da aplicação de filtro às medidas. Os parâmetros da matriz fundamental são estimados diretamente a partir das matrizes de correlações estimadas. Por outro lado, o aproveitamento de informações prévias sobre os parâmetros torna-se bem mais difícil neste caso.

Dos resultados numéricos apresentados no capítulo 7, pode-se extrair, de uma maneira geral, para os casos estudados, que

- o método baseado na equação de Ljapunov mostrou uma menor sensibilidade dos resultados a dispersões nas estimativas das correlações,
- os resultados obtidos pelo método da matriz fundamental são mais sensíveis a dispersões nas correlações, para sistemas de ordem mais elevada.

A forma com que o ruído é modelado, assim como as estruturas de ligação entre a excitação e o sistema, influenciam significativamente na sensibilidade dos resultados finais em relação a dispersões no valor das correlações.

Para o prosseguimento das análises realizadas neste trabalho, sugere-se inicialmente,

- aplicação prática dos métodos a sistemas rotativos, onde pode-se estudar o efeito da excitação harmônica causada pelo desbalanceamento,
- análise de métodos para a determinação experimental da ordem e da estrutura para sistemas mecânicos.

# Bibliografia

- [1] ACKERMANN, J.: *Abtastregelung*, Springer Verlag, Berlin (1983).
- [2] ARNOLD, L.: *Stochastische Differentialgleichungen - Theorie und Anwendung*, R. Oldenbourg Verlag (1973).
- [3] BARTELS, R.H.; STEWART, G.W.: *Solution of the Matrix Equation  $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$* , Comm. of the Assoc. for Comp. Math. 15 (1972), 820-826.
- [4] BENDAT, J.S.; PIERSOL, A.G.: *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley & Sons (1971).
- [5] BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M.: *Time Series Analysis - Forecasting and Control*, Holden-Day (1970).
- [6] BURROWS, C.R.; SAHINKAYA, M.N.: *Frequency Domain Estimation of Linearized Oil-Film Coefficients*, Trans. ASME, J. Lubr. Tech., Vol 104 (1982), 210 - 215.
- [7] BURROWS, C.R.; SAHINKAYA, M.N.: *Parameter Estimation of Multibode Rotor-Bearing Systems*, Proc. R. Soc. Lond., A379 (1982), 367 - 387.
- [8] BURROWS, C. R.; STANWAY, R.: *Identification of Journal Bearing Characteristics*, ASME Journal of Dynamic Syst. Meas. and Control. Vol 99 (1977), 167 - 173.
- [9] CHATFIELD, C.: *Analyse von Zeitreihen*, Hanser Verlag (1982).
- [10] DAHLQUIST, G.; BJÖRCK, A.: *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974).
- [11] DONGARRA, J.J.; MOLER, C.B.; BUNCH, J.R.; STEWART, G.W.: *LINPACK User's Guide*, SIAM, Philadelphia (1979).
- [12] EIBER, A.: *Ein Verfahren zur Parameterbestimmung von Rotorsystemen*, Fortschr. Ber. VDI-Z. Reihe 11, no. 111 (1989).
- [13] EYKHOFF, P.: *System Identification, Parameter and State Estimation*, John Wiley & Sons (1974).
- [14] FÁBIÁN, L.: *Zufallsschwingungen und ihre Behandlung*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1973).



- [15] FRITZEN, C.P.: *Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems*, 10th ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, Cincinnati (1985).
- [16] GASCH, R.; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1975).
- [17] GOLDBERGER, A.S.: *Economic Theory*, New York, John Wiley (1966).
- [18] GUIDORZI, R.: *Invariants and Canonical Forms for Systems Structural and Parametric Identification*, Automatica, Vol 17, no.1 (1981), 117 - 133.
- [19] HENDERSON, H.V.; SEARLE, S.R.: *On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices*, SIAM Review, Vol. 23, no 1 (1981) 53 - 60.
- [20] HOVEROCK, L.L.; STENART, G.W.: *Input Requirements and Parametric Errors for System Identification under Periodic Excitation*, J. Dyn. Syst. Meas. and Control, Vol. 94 (1972), 296 - 302.
- [21] JENKINS, G.M.; WATTS, D.G.: *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day (1968)
- [22] KALLENBACH, R.G.: *A Covariance Method for Identification of Linear Time-Continuous Systems*, Preprints IFAC-Congress Identification and System Parameter Estimation, York, UK (1985).
- [23] KENNEDY JR., W.J.; GENTLE J.E.: *Statistical Computing*, Marcel Dekker, New York - Basel (1980).
- [24] KOZIN, F.; KOZIN, C.H.: *A Moment Technique for System Parameter Identification*, Shock and Vibr. Bull. 8 (1968).
- [25] KUBRUSLY, C.S.; LUCENA, A.P.: *A Comparison of three Correlation Techniques for System Identification*, Int. J. Systems Sci. Vol. 14, no. 1 (1983), 31 - 57.
- [26] MASSMANN, H.; NORDMANN, R.: *Experimentelle Ermittlung dynamischer Koeffizienten für Turbulente Dichtspalte in Turbopumpen*, VDI-Bericht 536, VDI-Verlag, Düsseldorf (1984), 171 - 190.
- [27] MELSA, J.L.; SAGE, A.P.: *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*, Prentice-Hall (1973).
- [28] MOLER, C.; VAN LOAN, C.: *Nineteen Dubious ways to Compute the Exponential of a Matrix*, SIAM Review, Vol. 20, , no 4 (1978) 801 - 836.
- [29] MÜLLER, P.C.; SCHIEHLEN, W.O.: *Lineare Schwingungen*, Wiesbaden, Akademische Verlagsgesellschaft (1976).

- [30] MÜLLER, P.C.: *Allgemeine lineare Theorie für Rotorsysteme ohne oder mit kleinen Unsymmetrien*, Ing.-Arch. 51 (1981) 61 - 74.
- [31] NATKE, H.G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig (1983).
- [32] NEWLAND, D.E.: *Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman, London-New York (1975).
- [33] NORDMANN, R.: *Identification of Modal Parameters of Rotors with Nonconservative Effects*, Udine CISM-Cursos sobre Structural Identification and Parameter Estimation, Notas de Aula (1982).
- [34] NORDMANN, R.; MASSMANN, H.: *Identification of Stiffness, Damping and Mass Coefficients for Annular Seals*, Conference "Vibrations in Rotating Machinery", IMechE., C280/84, York (1984).
- [35] OTNES, R.K.; ENOCHSON, L.: *Digital Time Series Analysis*, John Wiley, New York (1972).
- [36] PEDERIVA, R.: *Identifikation stochastisch erregter mechanischer Systeme mittels Messung von Lagegrößen*, Z. Angew. Math. Mech. 67 (1987).
- [37] ROETHER, F.; PEDERIVA, R.: *Identifikation mechanischer Systeme mittels Korrelationsanalyse*, Z. Angew. Math. Mech. 66 (1986).
- [38] ROETHER, F.: *Identifikation mechanischer Systeme mit zeitdiskreten Parameterschätzmethoden*, Forschr. Ber. VDI-Z. Reihe 8, no. 114 (1986).
- [39] ROETHER, F.: *Parameteridentifikation mechanischer Systeme mit flexiblen Sensor-konfigurationen*, Z. Angew. Math. Mech. 67 (1987).
- [40] SAGE, A.P.; MELSA, J.L.: *System Identification*, New York-London, Academic Press (1971).
- [41] SANDWEG, G.: *Die theoretisch-experimentelle Untersuchung des Bewegungsverhaltens eines zweigliedrigen Rotors unter Einsatz eines Hybridrechnersystems*, Dissertation TU München (1973).
- [42] SCHLEGEL, V.: *Zur Parameteridentifikation von Turboläufnern aus dem Schwingungsverhalten*, Fortschr. Ber. VDI-Z. Reihe 11, no. 35 (1981).
- [43] SCHWARZ, R.G.: *Identifikation mechanischer Mehrkörpersysteme*, Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 8 no. 30 (1980).
- [44] SCHWARZ, H.: *Optimale Regelung linearer Systeme*, B.I. Wissenschaftsverlag (1976).

- [45] SCHWEITZER, G.; SCHIEHLEN, W.O.; MÜLLER, P.C.; HÜBNER, W.; LÜCKEL, J.; SANDWEG, G.; LUTENSCHLAGER, R.: *Kreiselverhalten eines elastisch gelagerten Rotors*, Ing.-Arch. 41 (1972) 110 - 140.
- [46] SHAFI, B.; CARROLL, R.L.: *Comments on "On the Application of Matrix Generalized Inverses to the Design of Observer for Time-Varying and Time-Invariant Linear Systems"*, IEEE Trans. AC Vol. 29, no 12 (1984).
- [47] SINHA, N.K.; LASTMAN, G.J.: *Identification of Continuous-Time Multivariable Systems from Sampled Data*, Int. J. Control 35 (1982), 117-126.
- [48] SINHA, N.K.; ROZSA, P.: *Some Canonical Forms for Linear Multivariable Systems*, Int. J. Contr. Vol. 23 (1976), 865 - 883.
- [49] SKELTON, R.E.: *Dynamic Systems Control-Linear Systems Analysis and Synthesis*, John Wiley & Sons (1988).
- [50] SMITH, B.T.; BOYLE, J.M.; GARROW, B.S.; IKEBE, Y.; KLEMA, V.C.; MOLER, C.B.: *Matrix Eigensystems Routines - EISPACK Guide*, Lect. Notes in Computer Science 6, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1974).
- [51] STEARNS, S.D.: *Digitale Verarbeitung analoger Signale*, R. Oldenbourg Verlag, München Wien (1988).
- [52] STRMCNIK, S.; BREMSAK, F.: *Some New Transformation Algorithms in the Identification of Continuous-Time Multivariable Systems Using Discrete Identification Methods*, Proc. IFAC Symp. Ident. and Syst. Par. Est., Darmstadt, Pergamon (1979), 400-405.
- [53] TSE, E.; WEINERT, H.L.: *Structure Determination and Parameter Identification for Multivariable Stochastic Linear Systems*, IEEE Trans. AC (1975), 603 - 613.
- [54] WEBER, H.I.; SCHIEHLEN, W.O.: *Parameter Identifizierung mit quadratischer Mittelwerten*, Institutsbericht IB-5, Inst. B für Mechanik, Universität Stuttgart (1982).
- [55] WEDIG, W.: *Stochastic Identification of Stiffness and Damping Matrices*, Udine CISM-Cursos sobre Structural Identification and Parameter Estimation, Notas de Aula (1982).
- [56] WEDIG, W.: *Fast Algorithms in Parameter Identification of Dynamic Systems*, Proc. of the IUTAM-Symposium on Random Vibrations and Reliability, Akademie Verlag, Berlin (1983).
- [57] ZELLER, K.: *Automatische Bestimmung der Parameter von Rotorsystemen*, Dissertation TU München (1975).

- [58] ZURMÜHL, R.; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1984).

# Apêndice A

## Sistemas Rotativos

No tratamento desenvolvido ao longo do trabalho, considerou-se a identificação de sistemas mecânicos excitados estocasticamente. A estruturação interna das matrizes foram totalmente utilizadas. Com isto atingiu-se não somente a diminuição do número necessário de medidas, mas também, através da redundância nas medições de  $m$  ( $m > f$ ) coordenadas de estado, a modelagem com uma entrada tipo ruído colorido.

Todas estas conclusões são válidas também para sistemas rotativos. Entretanto, encontram-se para esta classe de sistemas algumas particularidades.

Primeiramente encontra-se juntamente com o sinal de entrada, a inevitável excitação pelo desbalanceamento. Esta diferença é de grande importância, pois pela análise realizada no trabalho, pressupõe-se apenas processos estocásticos como excitação.

Neste ponto necessita-se adaptar a formulação anterior a este novo problema. Este é o objeto deste apêndice.

### A.1 Excitação Harmônica

Na equação (2.1) para sistemas mecânicos genéricos de múltiplos corpos, pode-se acrescentar ao lado do processo estocástico de excitação  $u(t)$ , uma outra excitação harmônica como feito em (6.22),

$$\mathbf{M}\ddot{\xi}(t) + \mathbf{P}\dot{\xi}(t) + \mathbf{Q}\xi(t) = \mathbf{S}u(t) + \mathbf{H}\mathbf{n}(t) \quad (\text{A.1})$$

com

$$\mathbf{n}(t) = \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t + \beta) \\ \sin(\Omega t + \beta) \end{Bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{H}_{(f,2)}$  corresponde à matriz de entrada para o vetor  $\mathbf{n}(t)_{(2,1)}$  do sinal harmônico com frequência  $\Omega$ . Os outros termos na equação (A.1) são definidos como em (6.22).

A equação (A.1) pode ser reformulada e representada como,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{n}(t) \quad (\text{A.2})$$

com

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix}.$$

As estruturas internas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , assim como as dimensões, permanecem inalteradas com relação a (2.3).

Sendo  $\mathbf{u}(t)$  não correlato com  $\mathbf{n}(t)$ , ou seja,

$$\mathbf{R}_{un}(\tau_i) = \mathbf{0}, \quad \forall i. \quad (\text{A.3})$$

A resposta do sistema dinâmico pode ser composta de uma superposição da resposta à excitação estocástica  $\mathbf{x}_u(t)$  e da resposta à excitação harmônica  $\mathbf{x}_n(t)$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{x}_n(t). \quad (\text{A.4})$$

Pela estabilidade assintótica do sistema mecânico homogêneo (A.1), obtém-se a resposta estacionária

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{q}_1 \cos \Omega t + \mathbf{q}_2 \sin \Omega t, \quad (\text{A.5})$$

sendo  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  vetores contendo amplitudes.

Considera-se que as coordenadas medidas sejam perturbadas pelo ruído  $\mathbf{v}(t)$ ,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{q}_1 \cos \Omega t + \mathbf{q}_2 \sin \Omega t + \mathbf{v}(t), \quad (\text{A.6})$$

onde não existe correlação entre  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$ , assim como entre  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{n}(t)$ .

A matriz de correlações  $\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)$  torna-se,

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau_i) = \varepsilon \left\{ \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^T(t + \tau_i) \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Substitui-se a equação (A.6) em (A.7) para obter

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau_i) = \varepsilon \left\{ [\mathbf{x}_u(t) + \mathbf{q}_1 \cos \Omega t + \mathbf{q}_2 \sin \Omega t + \mathbf{v}(t)] [\mathbf{x}_u^T(t + \tau_i) + \mathbf{q}_1^T \cos \Omega(t + \tau_i) + \mathbf{q}_2^T \sin \Omega(t + \tau_i) + \mathbf{v}^T(t + \tau_i)] \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Multiplicam-se os termos em (A.8) e sob a consideração de não existência de correlação entre  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{n}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{n}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}(\tau_i) = & \mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_i) + \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T \varepsilon \{ \cos \Omega t \cos \Omega(t + \tau_i) \} + \\ & + \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^T \varepsilon \{ \cos \Omega t \sin \Omega(t + \tau_i) \} + \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1^T \varepsilon \{ \sin \Omega t \cos \Omega(t + \tau_i) \} + \\ & + \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T \varepsilon \{ \sin \Omega t \sin \Omega(t + \tau_i) \} + \mathbf{R}_{vv}(\tau_i). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Em (A.9), se  $\mathbf{v}(t)$  é um processo ruído branco, a matriz de correlações  $\mathbf{R}_{vv}(\tau)$  desaparece para todo  $\tau_i > 0$ .

As esperanças matemáticas constantes em (A.9) podem ser calculadas por integração. Por exemplo

$$\varepsilon \{ \cos \Omega t \cos \Omega(t + \tau_i) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \Omega t \cos \Omega(t + \tau) dt. \quad (\text{A.10})$$

Com o cálculo dos diversos termos de (A.9) pelo procedimento (A.10) obtém-se

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau_i) = \mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_i) + \mathbf{Q}_1 \cos \Omega \tau_i + \mathbf{Q}_2 \sin \Omega \tau_i, \quad (\text{A.11})$$

com

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T),$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^T - \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1^T).$$

Nota-se na relação (A.11), pela análise feita na seção 6.2, que a matriz de correlações  $\mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_i)$  tenderá à matriz singular quando  $\tau_i$  for grande. Contudo, os termos correspondentes ao cosseno e ao seno não desaparecerão.

Nas seções tratadas ao longo do trabalho, utilizou-se apenas das correlações correspondentes à resposta do sistema a uma excitação estocástica. Através da escolha adequada

das defasagens no tempo  $\tau_i$ 's, para o cálculo das correlações, pode-se voltar ao problema original, apesar do desconhecimento da excitação harmônica.

Isto é possível através da filtragem da parte harmônica presente na matriz de correlações  $\mathbf{R}_{yy}(\tau_i)$ .

Esta filtragem é efetuada através de uma combinação de duas matrizes de correlações para diferentes defasagens no tempo  $\tau_i$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}(\tau_i) \pm \mathbf{R}_{yy}(\tau_j) = & \mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_i) \pm \mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_j) + \\ & + \mathbf{Q}_1(\cos \Omega \tau_i \pm \cos \Omega \tau_j) + \mathbf{Q}_2(\sin \Omega \tau_i \pm \sin \Omega \tau_j), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde  $i \neq j$ .

Escolhe-se, agora, o par  $i, j$ , de forma que as relações

$$\cos \Omega \tau_i \pm \cos \Omega \tau_j = 0 \quad (\text{A.13})$$

e

$$\sin \Omega \tau_i \pm \sin \Omega \tau_j = 0, \quad (\text{A.14})$$

sejam satisfeitas simultaneamente. Isto é possível com

$$\tau_j = \tau_i + n \frac{\pi}{\Omega}, \text{ onde } n = \begin{cases} 1, 2, 5, \dots, N & \text{para soma} \\ 2, 4, 6, \dots, N+1 & \text{para diferença.} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Desta forma, consegue-se fazer com que a parte harmônica desapareça da equação (A.12),

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau_i) \pm \mathbf{R}_{yy}(\tau_j) = \mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_i) \pm \mathbf{R}_{x_u x_u}(\tau_j). \quad (\text{A.16})$$

As funções de estimação, derivadas ao longo dos capítulos 4 e 5, são lineares nas matrizes de parâmetros. O procedimento de filtragem da parte harmônica possibilita a exclusão automática do efeito de uma excitação desconhecida, causada por desbalanceamento em uma rotação conhecida  $\Omega$ .

Pode-se imaginar que a filtragem de excitações desconhecidas periódicas também possam ser realizadas de forma análoga, desde que se conheça as frequências destas excitações.