

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ANDRÉ FENILI
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 26/02/97.

João Maurício Rosário
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Sobre a Modelagem e Dinâmica de
Estruturas Flexíveis de Rastreamento
(Pequenas e Grandes Deflexões)

Autor: **André Fenili**
Orientador: **João Maurício Rosário**

02/97

7406102

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	7/UNICAMP
	F357s
V.	EA.
TOMBO BC/	30649
PROC.	281197
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	28/05/97
N.º CPD	

CM-00099452-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F357s Fenili, André
Sobre a modelagem e dinâmica de estruturas flexíveis
de rastreamento (pequenas e grandes deflexões) / André
Fenili.--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: João Maurício Rosário.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Perturbação (Matemática). 2. Sistemas de
parâmetros distribuídos. 3. Hamilton-Jacobi, Equações.
4. Projeto estrutural. I. Rosário, João Maurício. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**Sobre a Modelagem e Dinâmica de
Estruturas Flexíveis de Rastreamento
(Pequenas e Grandes Deflexões)**

Autor: André Fenili

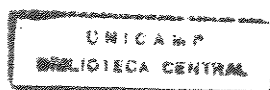
Orientador: João Maurício Rosário

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 1997
S.P. - Brasil



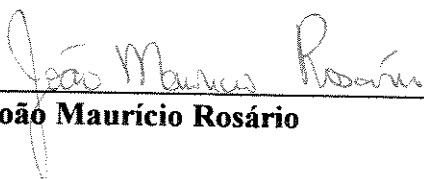
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Sobre a Modelagem e Dinâmica de
Estruturas Flexíveis de Rastreamento
(Pequenas e Grandes Deflexões)**

Autor: **André Fenili**

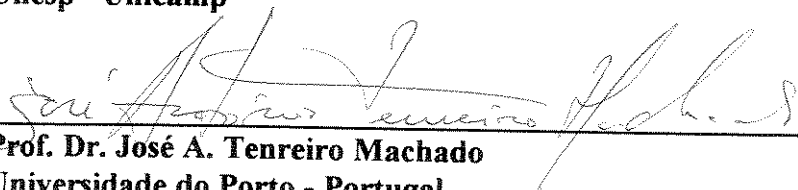
Orientador: **João Maurício Rosário**



Prof. Dr. João Maurício Rosário
Unicamp



Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Unesp - Unicamp



Prof. Dr. José A. Tenreiro Machado
Universidade do Porto - Portugal

Campinas, 26 de fevereiro de 1997

Dedicatória :

Dedico este trabalho a todos aqueles que vêem beleza na matemática, na engenharia,...

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pela compreensão e por todas as cartas que eu não escrevi durante todo o tempo em que passei desenvolvendo este trabalho.

Agradeço a todas as minhas amigas e amigos por terem me suportado durante a confecção deste trabalho. Agradeço por todas as suas idéias e palavras de admiração e conforto.

Agradeço ao meu orientador pelo apoio desde o início e pela confiança.

Agradeço ao Prof. Dr. José Manoel Balthazar pela força, pelas idéias e pelas portas abertas.

Agradeço ao Prof. Dr. Dean T. Mook da Universidade Virginia Tech, por ter jogado lenha nova na fogueira e por tudo o que discutimos no pouco tempo em que estivemos juntos até esta data.

E agradeço à Fapesp, pelo apoio financeiro e por acreditar em meu trabalho.

“Por mim se vai das dores à morada,
“Por mim se vai ao padecer eterno,
“Por mim se vai à gente condenada.

“Moveu Justiça o Autor meu sempiterno,
“Formado fui por divinal possança,
“Sabedoria suma e amor supremo.

“No existir, sem nenhum a mim se avança,
“Não sendo eterno, e eu eternal perduro:
“Deixai, ó vós que entraís, toda a esperança!”

Estas palavras, em leteriro escuro,
Eu vi, por cima de uma porta escrito.
“Seu sentido” — disse eu — “Mestre me é duro.”

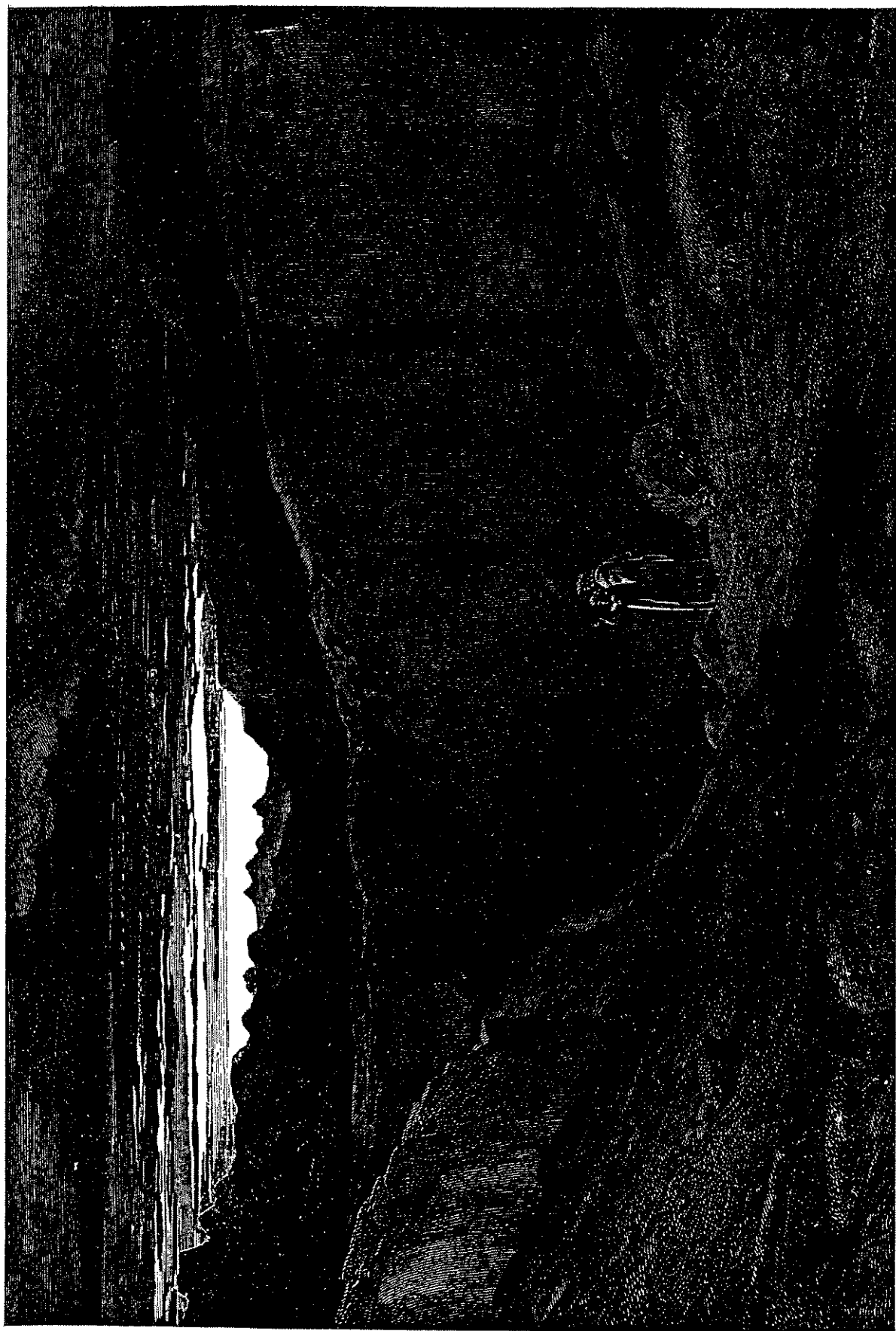
Tomou Virgílio, no lugar perito :
— “Aqui deixar convém toda suspeita;
Todo ignóbil sentir seja proscrito.

“Eis a estância, que eu disse, às dores feita,
Onde hás de ver atormentada gente,
Que da razão à perda está sujeita.”

Pela mão me travando diligente,
Com ledo gesto e coração me erguia,
E aos mistérios guiou-me incontinente.

Dante Alighieri

A Divina Comédia, O Inferno - Canto III



Sumário

1 Introdução.....	25
1.1 - O estudo de estruturas flexíveis e suas aplicações.....	25
1.2 - Aspectos referentes a modelamento de estruturas flexíveis.....	26
2 Considerações iniciais e procedimentos de cálculo.....	31
2.1 - Introdução.....	31
2.2 - Condições de contorno e perfil de torque.....	32
2.3 - Propriedades geométricas do protótipo experimental.....	36
2.4 - Fluxogramas : procedimentos de cálculo para a obtenção das equações do movimento.....	37
2.4.1 - Obtenção das equações adimensionalizadas do movimento (infinitos graus de liberdade).....	38
2.4.2 - Obtenção das equações adimensionalizadas discretizadas do movimento (n graus de liberdade).....	39
2.5 - Conclusão.....	40
3 Equações do movimento para uma estrutura flexível de rastreamento de membro único considerando pequenas deflexões.....	41
3.1 - Introdução.....	41
3.2 - Vetores posição e velocidade.....	42
3.3 - Lagrangeano e trabalho das forças não conservativas.....	44
3.4 - Aplicação do Princípio de Hamilton Estendido.....	46

3.5 - O método dos modos assumidos e as equações discretizadas do movimento.....	50
3.6 - Determinação dos fatores de forma.....	53
3.7 - Estudo de caso : primeiras considerações.....	56
3.8 - Observações finais e conclusões.....	59
4 Equações do movimento para uma estrutura flexível de rastreamento de membro único considerando grandes deflexões.....	61
4.1 - Introdução.....	61
4.2 - Modelo geométrico e os vetores posição e velocidade.....	62
4.3 - Energia cinética da estrutura flexível de rastreamento considerando grandes deflexões.....	67
4.4 - Energia de deformação da estrutura flexível de rastreamento considerando grandes deflexões.....	68
4.5 - Determinação de $d\phi$, dl e ε_{axial}	70
4.6 - Aplicação do Princípio de Hamilton Estendido.....	74
4.7 - Adimensionalização das equações do movimento para a estrutura flexível de rastreamento considerando grandes deflexões.....	81
4.8 - Separação de variáveis e determinação dos campos de deslocamento.....	97
4.9 - Determinação dos fatores de forma.....	108
4.10 - Equações adimensionais do movimento para a estrutura flexível de rastreamento considerando pequenas deflexões.....	110
4.11 - Observações finais e conclusões.....	112
5 Análise comparativa das respostas considerando pequenas deflexões e grandes deflexões (estudo de casos).....	113
5.1 - Pequenas deflexões e grandes deflexões : contribuições.....	113
5.2 - Equações do movimento para truncamento no primeiro modo: pequenas deflexões (estudo de caso).....	115
5.3 - Equações do movimento para truncamento no primeiro modo: grandes deflexões (estudo de caso).....	118
5.4 - Equações do movimento para estrutura rígida (estudo de caso).....	121
5.5 - Simulação das equações do movimento : rígido, pequenas deflexões e grandes deflexões.....	122
5.6 - Conclusões.....	147
6 Protótipo experimental	
6.1 - Introdução.....	148
6.2 - Posicionamento de sensores.....	151

6.3 - Ensaaios experimentais.....	153
6.4 - Conclusões.....	154
7 Conclusões e sugestões para trabalhos próximos.....	156
Referências bibliográficas.....	159
Apêndices.....	163
A Equações dinâmicas do motor.....	164
A.1 - Modelo do motor e equações dinâmicas.....	164
B Técnicas de perturbação.....	168
B.1 - Introdução.....	168
B.2 - O método das múltiplas escalas.....	171
C Projeto do manipulador flexível.....	175
C.1 - Modelo geométrico.....	175
C.2 - Viga de alumínio : cálculos de inércia.....	176
C.3 - Engaste : cálculos de inércia.....	178
C.4 - Suporte 1 : cálculos de inércia.....	181
C.5 - Suporte 2 : cálculos de inércia.....	183
C.6 - Carga transportada : cálculos de inércia.....	184
C.7 - Inércia total da carga do motor.....	186
C.8 - Estimativa de torque necessário e perfis de velocidade e aceleração angulares.....	186
C.9 - Cálculo do sistema de transmissão.....	190
C.9.1 - Transmissão através de engrenagens cilíndricas (dois eixos).....	190
C.9.2 - Transmissão através de engrenagens cilíndricas (mais de dois eixos).....	191
C.9.3 - Transmissão através de par sem fim - coroa.....	195
C.9.4 - Transmissão através de engrenagens cilíndricas e par sem fim - coroa.....	197
C.10 - Cálculo da relação I_b / I_s	200
C.11 - Dimensionamento do sistema de transmissão : considerações iniciais.....	201
C.12 - Parâmetros dos elementos da transmissão e fórmulas principais.....	201
C.12.1 - Primeira redução.....	202
C.12.2 - Segunda redução.....	202
C.12.3 - Novos valores para M_{TOTAL} e T_{MOTOR}	203

C.12.4 - Determinação dos diâmetros dos eixos.....	204
C.12.5 - Eixo 1 : Dimensionamento.....	205
C.12.6 - Eixo 2 : Dimensionamento.....	209
C.12.7 - Eixo 3 : Dimensionamento.....	213
C.13 - Escolha do rolamento : cálculo da capacidade de carga dinâmica.....	217
C.14 - Considerações finais e conclusões.....	219

D Integradores numéricos - Runge-Kutta de 4ª ordem e previsor-corretor de Adams-Moulton : programas.....	220
---	------------

Resumo

FENILI, André, *Sobre a modelagem e dinâmica de estruturas flexíveis de rastreamento (pequenas e grandes deflexões)*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 190p. Dissertação (Mestrado)

Neste trabalho desenvolve-se dois modelos para estruturas flexíveis de rastreamento de membro único: um modelo para pequenas deflexões e um modelo para grandes deflexões. Tanto para um modelo quanto para o outro, utilizou-se o Princípio de Hamilton Estendido para se obter as equações dinâmicas do movimento. Estas equações são posteriormente adimensionalizadas de tal forma que um pequeno parâmetro adimensional de perturbação ϵ possa ser obtido. Este parâmetro irá multiplicar todas as não linearidades de cada modelo e será o único parâmetro a se variar quando se pretende estudar casos diversos. Este pequeno parâmetro adimensional é utilizado para se verificar o grau de acoplamento entre as equações dinâmicas do movimento. Simulações são realizadas entre pequenas e grandes deflexões e comparadas entre si e com o modelo para o mesmo sistema aonde não se considera flexibilidade nenhuma. No estudo do comportamento da estrutura flexível de rastreamento realizado neste trabalho, o truncamento para a discretização das equações do movimento (método dos modos assumidos) deu-se no primeiro modo próprio do sistema viga engastada-livre.

Palavras Chave

Estrutura flexível, Rastreamento, Adimensionalização, Perturbação, Manipuladores flexíveis.

Abstract

FENILI, André, *Sobre a modelagem e dinâmica de estruturas flexíveis de rastreamento (pequenas e grandes deflexões)*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997. 190p. Dissertação (Mestrado)

In this work two models are developed to slewing flexible structures with just one link : a model considering small deflections and a model considering great deflections. For both models, the Extended Hamilton's Principle is utilized so one can obtain the governing equations of motion. These equations are then nondimensionalized so one can obtain a small nondimensional perturbation parameter ϵ . This parameter appears multiplying all the nonlinearities in each model and will be the only parameter one must vary when involved in the study of different cases. This small nondimensional parameter is utilized to verify the degree of coupling between the dynamical equations of motion. Simulations are realized between small and great deflections and compared one with another and with the model to the very same system where no flexibility is considered. In the study of the behavior of the flexible structure in slewing motion realized in this work, the truncation utilized for the discretization of the equations of motion (assumed modes method) is done in the first mode of vibration of the system beam constrained-free.

Key Words

Flexible structure, Slewing, Nondimensionalization, Perturbation, Flexible manipulators.

Lista de figuras

2.1 - Perfil prescrito de torque.....	33
2.2 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor).....	34
2.3 - Estrutura flexível robótica de rastreamento.....	35
2.4 - Propriedades geométricas da estrutura flexível representativa do braço do manipulador flexível.....	37
2.5 - Fluxograma da obtenção das equações adimensionalizadas do movimento (infinitos gdl).....	38
2.6 - Fluxograma da obtenção das equações adimensionalizadas do movimento (n gdl).....	39
3.1 - Estrutura flexível de rastreamento (planar).....	43
3.2 - Os três primeiros modos de vibrar do sistema viga engastada-livre analisado.....	58

4.1 - Modelo representativo da deformação do membro flexível.....	63
4.2 - Componentes do vetor deslocamento de um elemento infinitesimal qualquer em A sobre o membro flexível após a deflexão.....	65
4.3 - Transformação do sistema de referência móvel para o sistema de referência inercial.....	67
4.4 - Ilustração de um elemento da viga antes e após a deformação.....	79
5.1 - Dimensões utilizadas nas simulações - altura : 0.030, 0.01905, 0.010 ; base : 0.025, 0.01207, 0.007 (respectivamente).....	123
5.2 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor cc) para o caso 1 ($\epsilon = 0.0000361690$)....	126
5.3 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de corpo rígido ($\epsilon = 0.0000361690$).....	127
5.4 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de pequenas deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).....	128
5.5 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de grandes deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).....	129
5.6 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).....	130

5.7 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).....	131
5.8 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões e o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo o método de integração predictor-corrector de Adams-Moulton ($\epsilon = 0.0000361690$).....	132
5.9 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor cc) para o caso 2 ($\epsilon = 0.0000093339$)....	133
5.10 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de corpo rígido ($\epsilon = 0.0000093339$).....	134
5.11 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de pequenas deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).....	135
5.12 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de grandes deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).....	136
5.13 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).....	137
5.14 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).....	138

5.15 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões e o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo o método de integração previsor-corretor de Adams-Moulton ($\epsilon = 0.0000093339$).....	139
5.16 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor cc) para o caso 3 ($\epsilon = 0.0000028356$)..	140
5.17 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de corpo rígido ($\epsilon = 0.0000028356$).....	141
5.18 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de pequenas deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).....	142
5.19 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de grandes deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).....	143
5.20 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).....	144
5.21 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).....	145
5.22 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões e o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo o método de integração previsor-corretor de Adams-Moulton ($\epsilon = 0.0000028356$).....	146

6.1 - Sistema de transmissão e posicionamento dos encoders.....	150
6.2 - Conjunto completo.....	150
6.3 - Sistema de transmissão.....	151
6.4 - Posicionamento dos sensores (extensômetros) : o.....	152
6.5 - Montagem dos extensômetros.....	153
A.1 - Modelo para o motor dc controlado por armadura.....	165
C.1 - Conjunto completo : manipulador flexível.....	176
C.2 - Viga de alumínio (braço).....	177
C.3 - Engaste.....	179
C.4 - Suporte para o engaste.....	181
C.5 - suporte para a peça mostrada em 6.4.....	183
C.6 - Carga a ser transportada (disco).....	185
C.7 - Perfis prescritos de velocidade e aceleração angular do braço.....	188
C.8 - Montagem do manipulador incluindo sistema de trasnmissão por engrenagens.....	191
C.9 - Montagem do manipulador incluindo sistema de trasnmissão por engrenagens e um eixo intermediário.....	192

C.10 - Transmissão considerando parafuso sem fim-coroa.....	196
C.11 - Sistema de transmissão incluindo par de engrenagens (primeira redução) e sem-fim coroa (segunda redução).....	199
C.12 - Eixo 1 : esforços.....	205
C.13 - Diagrama de momentos fletores para o eixo 1.....	208
C.14 - Eixo 2 : esforços.....	209
C.15 - Diagrama de momentos fletores para o eixo 2.....	212
C.16 - Eixo 3 : esforços.....	213
C.17 - Diagrama de momentos fletores para o eixo 3.....	216

Lista de tabelas

3.1 - Autovalores para o sistema manipulador flexível.....	55
3.2 - valorse para a_i	56
C.1 - Transmissão através de par de engrenagens de dentes retos - Resultados.....	190
C.2 - Diâmetros primitivos das engrenagens considerando um eixo intermediário.....	193
C.3 - Diâmetros primitivos das engrenagens considerando dois eixos intermediários.....	194
C.4 - Diâmetros primitivos das engrenagens considerando três eixos intermediários.....	194
C.5 - Dados dos elementos da transmissão para a primeira redução.....	202
C.6 - Dados dos elementos da transmissão para a segunda redução.....	202
C.7- Especificações para escolha dos rolamentos.....	218
C.8 - Propriedades dos rolamentos escolhidos.....	218

Lista de símbolos

\vec{R} = posição de qualquer ponto ao longo da estrutura em relação ao sistema de referência inercial (pequenas deflexões) ;

$\dot{\vec{R}}$ = velocidade de qualquer ponto ao longo da estrutura em relação ao sistema de referência inercial (pequenas deflexões) ;

\vec{r}_{xy} = posição de qualquer ponto ao longo da estrutura em relação ao sistema de referência móvel (grandes deflexões) ;

\vec{r}_{XY} = posição de qualquer ponto ao longo da estrutura em relação ao sistema de referência inercial (grandes deflexões) ;

$\dot{\vec{r}}_{xy} = \vec{v}_{rel}$ = velocidade de qualquer ponto ao longo da estrutura em relação ao sistema de referência móvel (grandes deflexões) ;

$\dot{\vec{r}}_{XY} = \vec{v}_{XY}$ = velocidade de qualquer ponto ao longo da estrutura em relação ao sistema de referência inercial (grandes deflexões) ;

ρ = densidade do material por unidade de comprimento (Kg / m) ;

i = versor na direção do eixo das abscissas inercial ;

j = versor na direção do eixo das ordenadas inercial ;

i_x = versor na direção do eixo das abscissas móvel (local) ;

j_y = versor na direção do eixo das ordenadas móvel (local) ;

T, EC = energia cinética da estrutura de rastreamento ;

V, EP = energia potencial da estrutura de rastreamento ;

L = lagrangeano ;

L = comprimento da estrutura de rastreamento (tipo viga) ;

r = raio de giração da secção transversal da viga ;
 v = deflexão transversal da estrutura ;
 u = deslocamento longitudinal de qualquer ponto sobre a estrutura após deformação ;
 \bar{x} = vetor posição do elemento sobre a estrutura na condição não deformada ;
 θ = rotação da estrutura em torno do eixo de rastreamento ;
 W_{nc} = trabalho das forças não conservativas ;
 T = torque utilizado para movimentar a estrutura de rastreamento ;
 M = momento fletor interno à estrutura ;
 N_g, n = relação de transmissão ($N_g : 1$) ;
 ϕ_i = modo de vibrar do sistema livre e não amortecido ($i = 1, 2, 3, \dots$) ;
 ϕ = deflexão angular ;
 w, w_i, w_i = frequência natural do sistema livre e não amortecido em rad/s ($i = 1, 2, 3, \dots$) ;
 f_{eqi} = frequência natural do sistema livre e não amortecido em Hz ($i = 1, 2, 3, \dots$) ;
 f_T = frequência natural associada à vibração transversal de uma viga engastada-livre (sistema livre e não amortecido) ;
 T_T = período de oscilação associado à vibração transversal de uma viga engastada-livre (sistema livre e não amortecido) ;
 T = período de oscilação do sistema livre e não amortecido (tempo característico) ;
 μ = raio de curvatura ;
 ϵ = pequeno parâmetro de perturbação ;
 q_i = coordenada generalizada ;
 m_i = massa do corpo i ;
 α = aceleração angular do braço (associado ao movimento de corpo rígido) ;
 $W_{BRAÇO}$ = velocidade angular do braço (associado ao movimento de corpo rígido) ;
 W_{MOTOR} = velocidade angular do motor ;
 D_i = diâmetro primitivo das engrenagens ;
 F_R = esforço radial sobre o eixo do sistema de transmissão ;
 F_T = esforço tangencial sobre o eixo do sistema de transmissão ;
 F_A = esforço axial sobre o eixo do sistema de transmissão ;
 T = torque sobre os elementos da transmissão ;

SF = sem fim ;

T_{SF} = torque sobre o sem fim ;

E_i = engrenagem i ;

P_{Ei} = peso da engrenagem i ;

m_{Ei} = massa da engrenagem i ;

d_i = diâmetro do eixo i ;

C = capacidade de carga dinâmica do rolamento ;

Capítulo 1

Introdução

1.1 - O estudo de estruturas flexíveis e suas aplicações

Em alguns tipos de indústria, não é economicamente viável empregar os manipuladores tradicionais estruturalmente rígidos. A indústria aeroespacial é um bom exemplo aonde a massa do manipulador é um fator crítico quando se determina custos e planeja-se operar em grandes espaços de trabalho [1].

Por outro lado, pode ser necessário projetar-se manipuladores que operem em um largo espaço de trabalho. Em muitos casos, um robô longo o suficiente é a melhor solução [2]. Estes robôs longos, contudo, são notórios por apresentarem comportamento vibracional. Assim sendo, questões envolvendo a flexibilidade da estrutura não podem ser desprezadas.

Aliado a isso, percebe-se que a crescente busca pela qualidade de produtos e alta produtividade nos dias de hoje tem motivado a crescente automatização de inúmeros processos industriais. Os robôs utilizados nestes processos precisam, por conseguinte, ser cada vez mais rápidos e precisos. A fim de garantir estas propriedades e também o fato de poderem ser

transportados com maior facilidade dentro da própria indústria (por exemplo, para manutenção), os manipuladores industriais tendem a ser cada vez mais leves e delgados.

Outras vantagens desta classe de manipuladores flexíveis consiste no fato de exigirem atuadores (motores) menores, devido ao baixo consumo de energia que requerem e possuírem considerável razão carga manuseada / braço.

A corrida espacial, por razões semelhantes, também motiva o constante aperfeiçoamento destes sistemas extremamente mais complexos do que os que vinham sendo utilizados desde então neste campo.

Em sistemas mecânicos operando em altas velocidades, movimentos elásticos oscilatórios são inevitáveis [3]. O controle de tais sistemas, portanto, acaba se tornando um outro campo de extensas pesquisas. Caso os modelos sejam utilizados em simulação e para o projeto do controlador (como geralmente o são), devido aos limites da banda de operação atuador/sensor, é mais razoável trabalhar com um modelo truncado representando o sistema nas frequências mais baixas. Para este fim, o sistema necessita ser aproximado por um modelo de dimensão finita o qual ignore os modos de alta frequência [4]. Embora tudo o que se faça neste trabalho vise futuramente ao projeto de um sistema de controle, o controle de tais sistemas não será tratado neste trabalho.

É bem conhecido que o controle de posição da ponta de um manipulador flexível, mesmo que este possua apenas um único membro flexível não é um problema trivial ([5], [6], [7]).

1.2 - Aspectos referentes a modelamento de estruturas flexíveis

Teoricamente, o modelamento de uma estrutura de rastreamento qualquer é similar ao modelamento de um manipulador robótico de membro único movendo-se no plano horizontal (o plano aonde ocorre o movimento de rastreamento) e é atualmente também uma área de pesquisa no campo da robótica e em um vasto número de problemas que podem ser classificados como problemas de rastreamento [8].

Um dos primeiros e mais importantes passos no estudo do comportamento de um sistema físico consiste na determinação de um modelo associado a este sistema. O modelo será tanto melhor quanto melhor conseguir representar todos os fenômenos que ocorrem com este sistema, ou, pelo menos, os mais significativos e determinantes de seu comportamento dinâmico.

Na classe de sistemas que se pretende estudar, devido a altas velocidades de operação e ao reduzido peso da estrutura, pode ser impreciso tratar certos membros do mesmo como rígidos. O efeito da flexibilidade no comportamento dinâmico de sistemas mecânicos tem sido o objeto de numerosas investigações (por exemplo, [9-11]). Percebe-se um crescente número de trabalhos nesta área a cada dia.

Diferentes abordagens, tais como o método de elementos finitos, o Hamiltoniano e o Newtoniano, têm sido empregados para modelar manipuladores com membros não rígidos [12].

Neste trabalho será utilizada uma abordagem analítica através do método do Hamiltoniano, método este que fornece naturalmente as condições de contorno necessárias ao problema.

O estudo de materiais leves que poderão compor estas estruturas também constitui um campo de estudos nesta área. Por exemplo, Christensen e Lee [13], desenvolveram um modelo de elementos finitos para a análise de estruturas flexíveis sob grandes deflexões elásticas acopladas com movimentos de translação e rotação de corpo rígido. Materiais muito moles foram considerados de forma a se obter grandes deformações elásticas. Sua maior preocupação consistiu em comparar resultados lineares e não lineares.

Muitos modelos com diferentes graus de complexidade têm sido apresentados na literatura. Alguns ou todos os termos correspondentes a efeitos de Coriolis, cisalhamento, torsão, deslocamento axial, gravidade e rigidez centrífuga têm sido negligenciados. Uma derivação detalhada da dinâmica para manipuladores flexíveis de cadeia cinemática aberta é apresentada em [12].

Neste trabalho, dois modelos diferentes são apresentados para estruturas flexíveis de rastreamento de membro único. O esquema geral dos cálculos, passo a passo, para a obtenção das equações dinâmicas do movimento para esta classe de sistemas é apresentado no capítulo 2 em forma de fluxogramas. O mesmo capítulo apresenta também algumas considerações feitas durante o equacionamento e o perfil de torque prescrito utilizado inicialmente nas simulações do comportamento do sistema.

O trabalho todo pode ser dividido em três grandes partes : modelamento (que cobre os capítulos 3 e 4), simulação (que cobre o capítulo 5) e projeto (incluindo a construção de um protótipo, que cobre o capítulo 6 e apêndice C).

No primeiro modelo, conforme apresentado no capítulo 3, considera-se pequenas deflexões (ou pequenas curvaturas). Neste caso consideram-se também apenas deslocamentos transversais.

No segundo modelo, conforme apresentado no capítulo 4, considera-se grandes deflexões (ou grandes curvaturas). Neste modelo, portanto, inclui-se também deslocamentos longitudinais.

No primeiro caso, a curvatura é considerada linear. No segundo caso, a curvatura é expressa por uma expressão não linear incluindo termos cúbicos. O primeiro caso é o mais frequentemente encontrado na literatura.

Quando a nova expressão para a curvatura é considerada, na verdade, o que se faz é incluir efeitos não lineares ao sistema. Várias podem ser as fontes de não linearidades em um sistema : propriedades não lineares para o material da estrutura (tais como o módulo de elasticidade), esforços não lineares atuando sobre a estrutura, ...

A inclusão de não linearidades torna o sistema menos receptivo a modelamento, análise e identificação. Contudo, a maior parte dos sistemas físicos encontrados na prática são, de fato, não lineares. Mesmo sistemas que podem ser representados por modelos lineares tendem a

exibir comportamento não linear sob certas condições. Em tais casos, cabe ao engenheiro a decisão de incluir ou não os efeitos não lineares em seu modelo.

No capítulo 5, um estudo comparativo é realizado entre os dois diferentes modelos. O comportamento do sistema para cada um dos modelos foi obtido resolvendo-se as equações dinâmicas através de dois integradores diferentes : Runge-Kutta de 4ª ordem e previsor-corretor de Adams-Moulton.

O que se pretende neste trabalho é verificar até que ponto um modelo mais simples (mas ainda não linear) de tal classe de sistemas poderá vir a influenciar na resposta do sistema, uma vez que se pode estar desprezando termos que poderão vir a se mostrar importantes no comportamento do mesmo, em uma análise mais completa. Logicamente, esta análise poderá ser tão completa quanto se queira, pagando-se o preço por isso.

Embora nos capítulos 3 e 4 as equações dinâmicas sejam obtidas para estruturas flexíveis de rastreamento quaisquer apresentando determinadas condições de contorno (ou seja, engastadas em uma extremidade e livres na outra), este trabalho encontra uma aplicação para tal estudo em robótica. Estas mesmas estruturas bem poderiam ser pás de helicóptero, painéis solares em satélites, antenas, pás de turbinas, ...

No capítulo seguinte (capítulo 6) comenta-se sobre o protótipo experimental construído visando aplicações em robótica (manipulador flexível de rastreamento) e sobre alocamento de sensores para obtenção de dados experimentais. Este protótipo foi desenvolvido baseando-se em cálculos desenvolvidos no apêndice C e observações colhidas ao longo deste trabalho.

No apêndice A, apresenta-se o modelo para o atuador (motor de corrente contínua) que será utilizado para movimentar a estrutura de rastreamento e obtem-se as suas equações dinâmicas.

No apêndice B apresenta-se uma possível maneira de se resolver equações dinâmicas não lineares analiticamente e obter-se expressões para o modulamento da amplitude e da fase do comportamento oscilatório. Trata-se do método das múltiplas escalas. Neste mesmo apêndice justifica-se por qual razão optou-se por não utilizá-lo nesta altura do trabalho. Trata-se de uma

poderosa ferramenta quando se lida com sistemas fracamente não lineares e por esta razão é apresentada aqui.

No apêndice C inicia-se o projeto de um manipulador robótico flexível. Inicialmente estuda-se o sistema de transmissão mais conveniente para a presente aplicação, tendo-se em vista as dimensões necessárias e o número de eixos intermediários. O sistema de transmissão adotado envolve o par sem-fim / coroa. Na sequência, projeta-se este sistema de transmissão. O projeto foi realizado no sentido de superdimensionar o sistema, visando futuro manuseio de cargas (dentro de uma determinada faixa de peso) assim como a possibilidade de se trabalhar com estruturas mais pesadas valendo-se do mesmo sistema de transmissão mecânica. Trata-se de uma primeira abordagem, sujeita a futuras modificações.

No apêndice D apresenta-se os programas em Pascal desenvolvidos para a integração das equações dinâmicas do movimento obtidas nos capítulos 3 e 4.

Capítulo 2

Considerações iniciais e procedimentos de cálculo

2.1 - Introdução

Algumas considerações devem ser feitas antes de se iniciar o equacionamento e posterior análise do comportamento de estruturas dinâmicas em geral. Estas considerações dizem respeito às condições de contorno associadas ao sistema em estudo e ao tipo de excitação externa atuando sobre o mesmo, caso exista, e são importantes pois irão afetar diretamente a dinâmica da estrutura. Outras considerações dizem respeito ao modelamento da própria estrutura (pequenas deflexões ou grandes deflexões, teoria de viga de Euler-Bernoulli ou teoria de viga de Timoshenko,...).

O modelo escolhido deverá reproduzir o mais fielmente possível o sistema real. As considerações acerca do modelamento da estrutura em si (contínuo) serão tratados nos dois capítulos subsequentes (capítulos 3 e 4).

Neste sentido, antes de se iniciar o equacionamento da estrutura flexível de rastreamento, faz-se algumas considerações acerca das condições de contorno adotadas, os perfis da excitação externa que serão utilizados na análise e também como serão os procedimentos de cálculo que se pretende seguir neste trabalho.

2.2 - Condições de contorno e perfis de torque e potencial (tensão no motor)

O sistema proposto para a aplicação e verificação do equacionamento desenvolvido nos capítulos 3 e 4 é apresentado de maneira bem sucinta na figura 2.3. Trata-se de uma estrutura flexível que será rotacionada em torno de um eixo (rastreamento) por um motor de corrente contínua através de um sistema de transmissão. A extremidade conectada ao eixo de rastreamento será considerada como engastada ao mesmo. Considera-se aqui que a inércia do braço (viga de alumínio, neste trabalho) seja consideravelmente maior que a inércia do resto do sistema (motor + transmissão).

A condição de contorno engastada em uma extremidade irá afetar todo o equacionamento do sistema e determinar os modos que se irá escolher na expansão das variáveis de deflexão quando, mais adiante, buscar-se-á discretizar as equações do movimento. A condição desta extremidade é, portanto, de extrema importância na avaliação do comportamento do sistema, uma vez que pode alterar significativamente os modos adotados. Considerações a este respeito são tratadas com um maior número de detalhes em [14].

O sistema projetado neste trabalho, caso não fosse considerado qualquer tipo de transmissão mecânica, apresentaria para a razão I_b / I_s (inércia do braço / inércia do servo-sistema) estimada um valor que aproximaria a condição de contorno na extremidade conectada ao motor para pinado-livre (ver apêndice C). O sistema de rastreamento considerado, porém, possui uma elevada relação de transmissão entre o motor e a estrutura flexível. Existe, portanto, pequena ou nenhuma interação (descontinuidade ou, em inglês, *slope*) entre o movimento da haste e o eixo do motor na conexão entre ambos. Desta forma, assumir condição de contorno como engastada nesta extremidade torna-se apropriado [14].

Nas simulações realizadas, o perfil de torque para o sistema (excitação externa atuando sobre a estrutura) deverá ser obtido através do equacionamento do motor tratado no apêndice A.

Um perfil de torque geralmente encontrado na literatura (*prescribed torque*), encontra-se representado na figura 2.1. Este perfil, em muitos estudos, poderá ser considerado como a entrada (*input*) do sistema dinâmico que se pretende analisar.

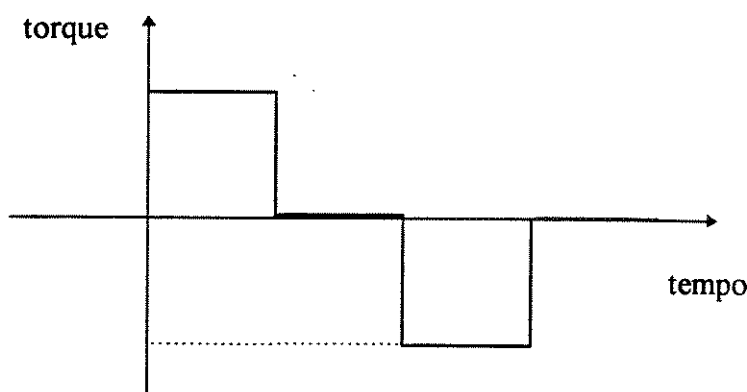


Figura 2.1 - Perfil prescrito de torque

Este perfil é típico de muitas situações práticas, tais como mover um objeto inercial de uma localidade para outra [15].

Em um modelo matemático desacoplado, no qual o efeito dos movimentos elásticos no movimento de corpo rígido é negligenciado, o pulso mostrado na figura 2.1 conduzirá a um perfil trapezoidal de velocidade angular, tal como estudado por Kojima [16]. Este pode ser um ótimo parâmetro para se determinar o grau de acoplamento entre as equações do movimento para a classe de sistemas dinâmicos em questão.

No estudo que se desenvolve neste trabalho, com a inclusão da equação do motor às equações dinâmicas para o manipulador flexível desenvolvidas nos capítulos 3 e 4, a entrada considerada nas simulações passa a seguir um perfil de potencial semelhante ao apresentado na figura 2.2.

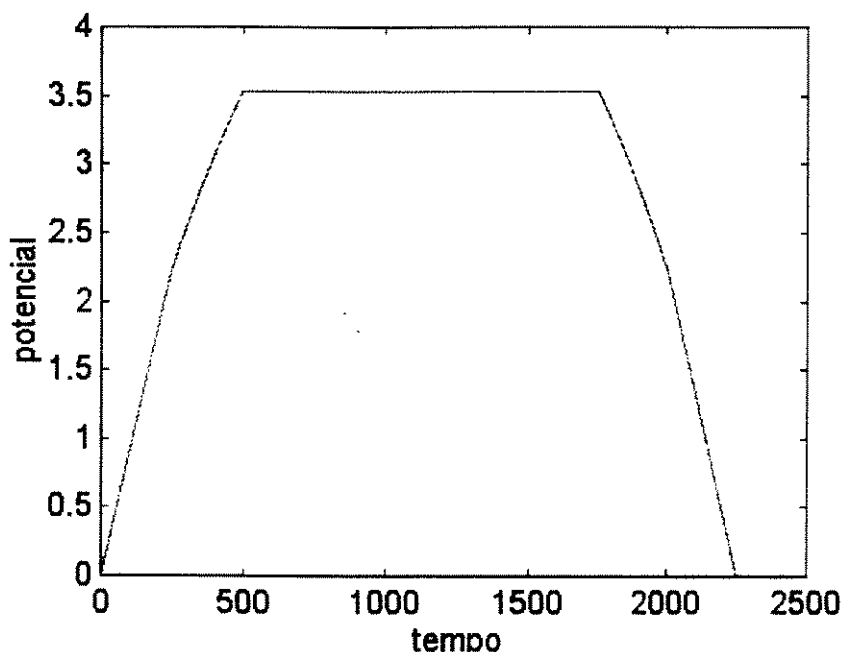


Figura 2.2 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor)

O perfil proposto para o potencial deverá gerar um perfil de torque semelhante ao apresentado na figura 2.1.

O acoplamento entre as equações do movimento será verificado através de um pequeno parâmetro adimensional (ϵ) que multiplica todas as não linearidades do sistema e será introduzido no capítulo 4.

Considerações acerca do torque atuando sobre este tipo de sistema devem ser cuidadosamente feitas. Intuitivamente, sabe-se que, quando o torque é aplicado ao eixo de

rastreamento, a curvatura dos modos flexíveis ocorre devido à aceleração angular do movimento do corpo rígido [8] e este comportamento está ligado a forças de inércia atuando ao longo da estrutura.

Neste caso, o movimento de corpo rígido (deslocamento angular θ) é considerado como não conhecido *a priori*. Este movimento de corpo rígido, caso conhecido, poderia ser prescrito ao invés do torque ou do potencial no motor. Ter-se-ia, então, uma variável a menos no problema. Contudo, trata-se de um estudo a parte e este perfil de deslocamento teria que ser posteriormente otimizado de acordo com algum critério.

A estrutura flexível de rastreamento à qual o modelamento e estudo da dinâmica ocupa a maior e mais significativa parte deste trabalho aparece na figura 2.3 com a designação *manipulador flexível*. Conforme mencionado anteriormente, esta é a aplicação que se pretende dar, neste trabalho, ao estudo geral de estruturas flexíveis iniciado.

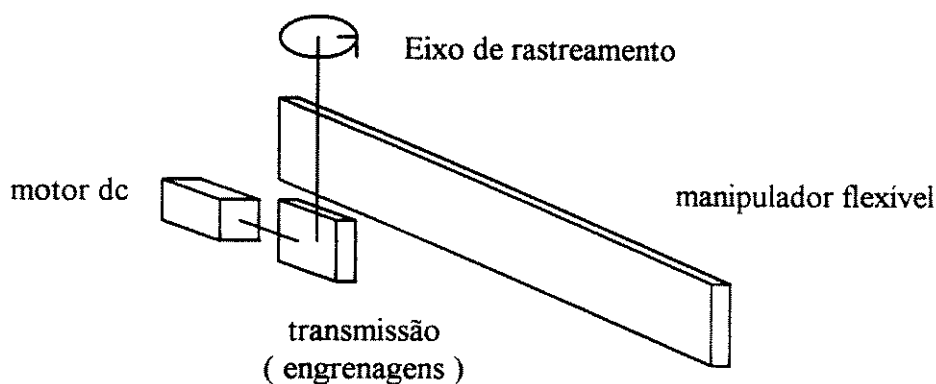


Figura 2.3 - Estrutura flexível robótica de rastreamento

No caso de mais de um membro flexível (ainda em movimento de rastreamento), não apenas a natureza de parâmetro distribuído da dinâmica do sistema (sistemas contínuos) é uma

complicação, mas também as condições de contorno móveis na extremidade de cada membro conectado ao anterior representam grandes dificuldades. É comum, também, estudar-se sistemas aonde somente um de muitos membros pode ser considerado flexível.

No caso de manipuladores que se deslocam no plano vertical, a influência dos esforços gravitacionais ao longo da estrutura deverá ser igualmente considerado. Esta consideração será um complicador a mais no equacionamento dinâmico do sistema.

2.3 - Propriedades geométricas do protótipo experimental

O braço do modelo do manipulador flexível que será utilizado nas simulações da dinâmica do sistema (capítulo 4) com o propósito de verificação do equacionamento desenvolvido nos capítulos 3 e 4 é confeccionado em alumínio (densidade igual a 2700 kg/m^3 , $E = 0.70 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$), de secção reta retangular (mas não muito fina), e possui as dimensões especificadas na figura 2.4. Estas são as dimensões do protótipo experimental projetado e construído.

A secção reta da haste foi escolhida retangular de tal forma que o movimento de rastreamento da estrutura ficasse restrito ao plano do movimento (plano horizontal xy).

No caso da secção reta ser simétrica (quadrada, circular,...) ou no caso em que seja incluída carga excessiva na extremidade livre do braço (a viga se deforma inicialmente em um plano (vertical) e rotaciona em torno de um eixo perpendicular a outro plano), um equacionamento tridimensional seria necessário. Este estudo vai além do escopo da investigação aqui realizada.

Neste trabalho, carga na extremidade livre será considerada apenas para fins de projeto do manipulador flexível (apêndice C), visando a continuidade desta pesquisa. Na prática, o sistema construído (protótipo) trata-se de um sistema espacial (tridimensional).

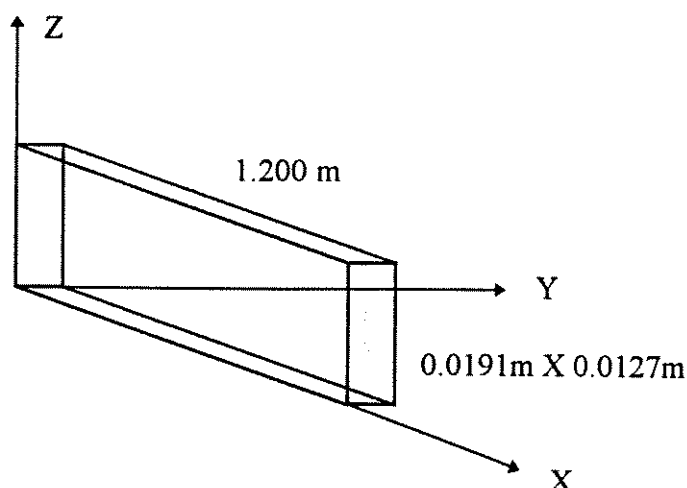


Figura 2.4 - Propriedades geométricas da estrutura flexível representativa do braço do manipulador flexível (o sistema acima é analisado no plano XY).

Estes dados serão extremamente importantes no projeto do sistema de transmissão para o manipulador flexível tratado adiante.

2.4 - Fluxogramas : procedimentos de cálculo para a obtenção das equações do movimento

Nos fluxogramas que seguem, buscou-se ilustrar o problema do equacionamento de estruturas flexíveis de rastreamento planares da forma mais geral possível, levando-se em consideração tanto os deslocamentos longitudinais quanto os deslocamentos transversais, geralmente associados a grandes curvaturas.

Apesar da divisão em itens (2.4.1 e 2.4.2), ambos os fluxogramas se completam para quem for trabalhar com simulações.

2.4.1 - Obtenção das equações adimensionalizadas do movimento (infinitos gdl)

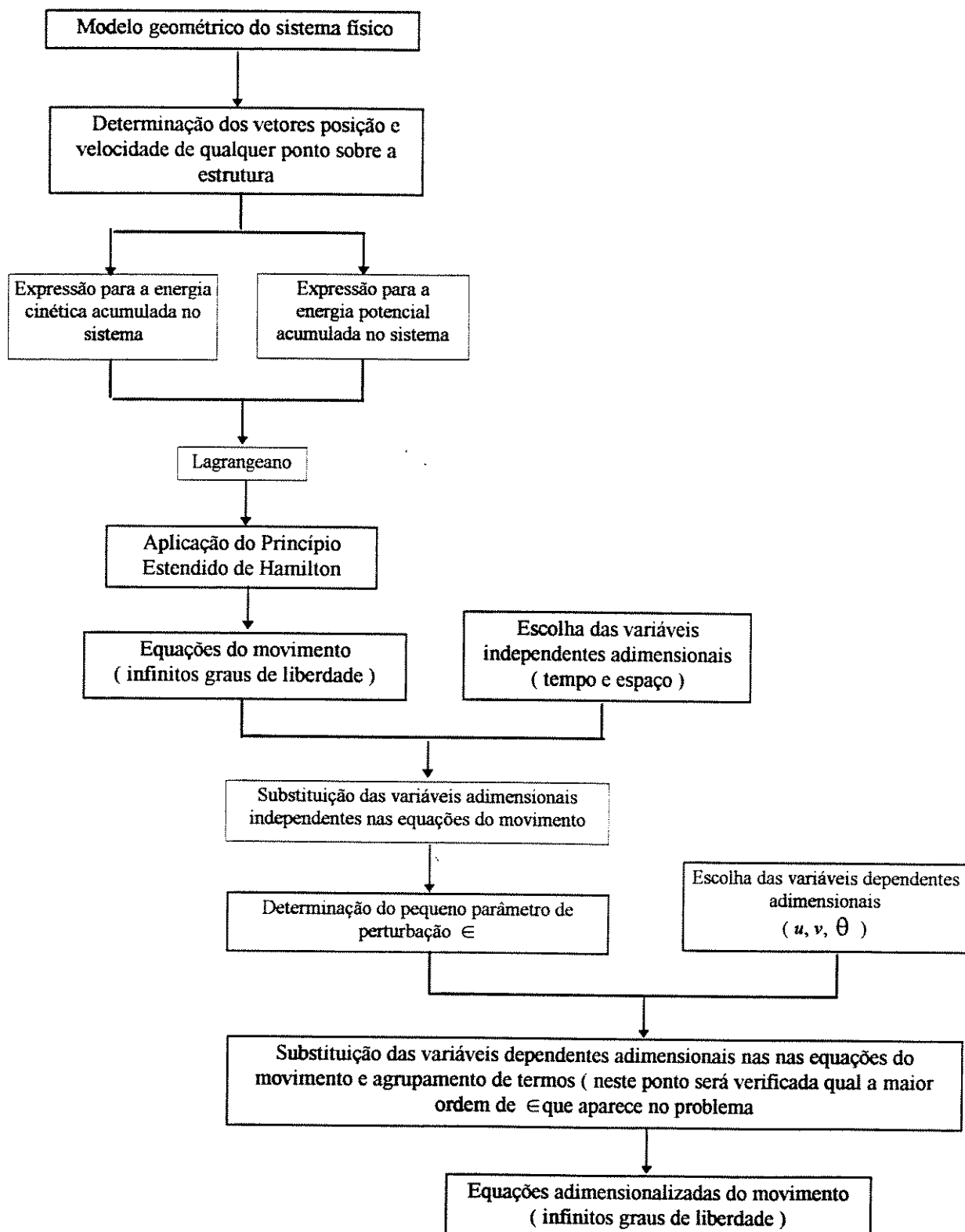


Figura 2.5 - Fluxograma da obtenção das equações adimensionalizadas do movimento (infinitos gdl)

2.4.2 - Obtenção das equações adimensionalizadas discretizadas do movimento (n graus de liberdade)

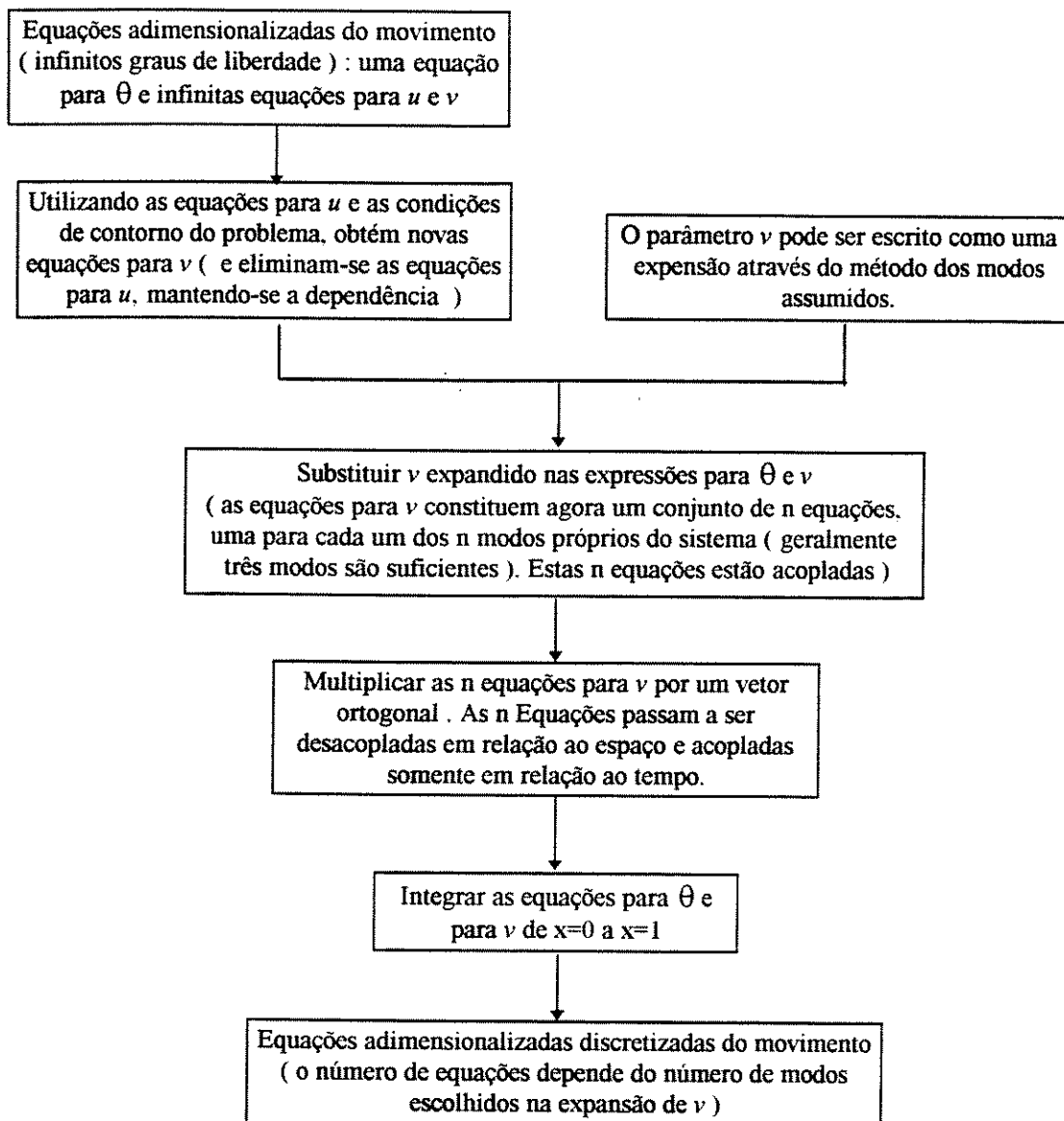


Figura 2.6 - Fluxograma da obtenção das equações adimensionalizadas discretizadas do movimento (n gdl)

2.4.5 - Conclusão

Muitas considerações diferentes daquelas discutidas neste capítulo poderiam ter sido feitas acerca das condições de contorno, conforme pode ser verificado em [14]. Algumas destas poderiam aumentar em muito o grau de complexidade da análise aqui desenvolvida. O engastamento total é uma condição de contorno às vezes difícil de ser reproduzida na prática.

Por se tratar de um trabalho de pesquisa e, portanto, de carácter iterativo, as considerações aqui propostas poderão ser sempre reavaliadas e, caso seja necessário, redefinidas. Estas considerações dependerão igualmente das condições em que será construído o protótipo experimental (o tipo de engastamento que se conseguirá garantir na prática, carga na extremidade livre ou não,...).

Além do problema de se definir adequadamente as condições de contorno, em uma análise mais acurada, por exemplo, a influência do amortecimento e excitação provocados pelo ar sobre a estrutura flexível poderia ser considerada, dependendo das dimensões da mesma. Este efeito se agrava para estruturas (do tipo das estudadas neste trabalho) que apresentam secção reta transversal muito fina e larga. Uma verificação cuidadosa precisaria, então, ser feita para verificar se esta influência é significativa ou não. Neste trabalho, devido às dimensões da estrutura que se pretende estudar (simular e construir), este efeito foi negligenciado.

Capítulo 3

Equações do movimento para uma estrutura flexível de rastreamento de membro único considerando pequenas deflexões

3.1 - Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos flexíveis, por ser um tópico complexo e abrangente, é tratado de inúmeras e díspares maneiras na literatura, conforme pôde ser verificado nos capítulos 1 e 2.

Pretende-se abordar inicialmente sistemas contínuos flexíveis de rastreamento considerando-se pequenas deflexões. Para tal, muitas simplificações, como poderão ser verificadas no decorrer do texto, serão adotadas. Trata-se de um primeiro modelo planar para um sistema físico complexo. Modelos com as simplificações apresentadas neste capítulo (a maior parte ou todas) podem ser comumente encontrados na literatura. Um modelo mais completo (e também mais complexo) e original para o mesmo tipo de sistema será tratado no próximo capítulo.

Sob certas circunstâncias, a abordagem aqui apresentada poderá se mostrar ideal. Algumas destas circunstâncias : estruturas (tipo viga) não muito longas, secções retas não muito finas,... Mas o quão longa pode ser a estrutura ou o quão fina pode ser sua secção reta ? Sem maiores cuidados, pode-se estar lidando com problemas tipicamente espaciais (tridimensionais). Por exemplo, uma estrutura muito fina e muito longa poderá apresentar torção, um efeito não considerado em um modelo planar mas que estará acontecendo no modelo físico real.

O método utilizado tanto neste capítulo quanto no próximo para se obter as equações do movimento é conhecido como Princípio Estendido de Hamilton. Este método trabalha com a energia acumulada e/ou dissipada em um sistema dinâmico durante a sua evolução no tempo.

3.2 - Vetores posição e velocidade

Considere-se uma estrutura flexível de rastreamento sujeita a pequenas deflexões e conduzida por um torque aplicado ao eixo de rastreamento, movimentando-se no plano, conforme mostra a figura 3.1.

A posição de qualquer ponto P ao longo da estrutura, em termos do sistema de referência inercial, XY, é definida como:

$$\vec{R} = (x \cos \Theta - v \sin \Theta) \mathbf{i} + (x \sin \Theta + v \cos \Theta) \mathbf{j} \quad (3.1)$$

aonde \mathbf{i} e \mathbf{j} representam os versores ao longo dos eixos do sistema de referência inercial, X e Y, respectivamente, e aonde x , v e Θ encontram-se definidos na mesma figura 3.1.

Neste modelo, em relação ao sistema de coordenada local que rotaciona juntamente com a estrutura, qualquer ponto sobre a mesma move-se verticalmente para uma nova posição após a deflexão (paralelamente ao eixo y). Para pequenas curvaturas, os deslocamentos longitudinais podem ser negligenciados.

A velocidade de qualquer ponto ao longo da estrutura pode, por conseguinte, ser escrita como :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} = & (\dot{x} \cos\Theta - x \sin\Theta \dot{\Theta} - v \cos\Theta \dot{\Theta} - \dot{v} \sin\Theta) \mathbf{i} + \\ & + (\dot{x} \sin\Theta + x \cos\Theta \dot{\Theta} + \dot{v} \cos\Theta - v \sin\Theta \dot{\Theta}) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.2)$$

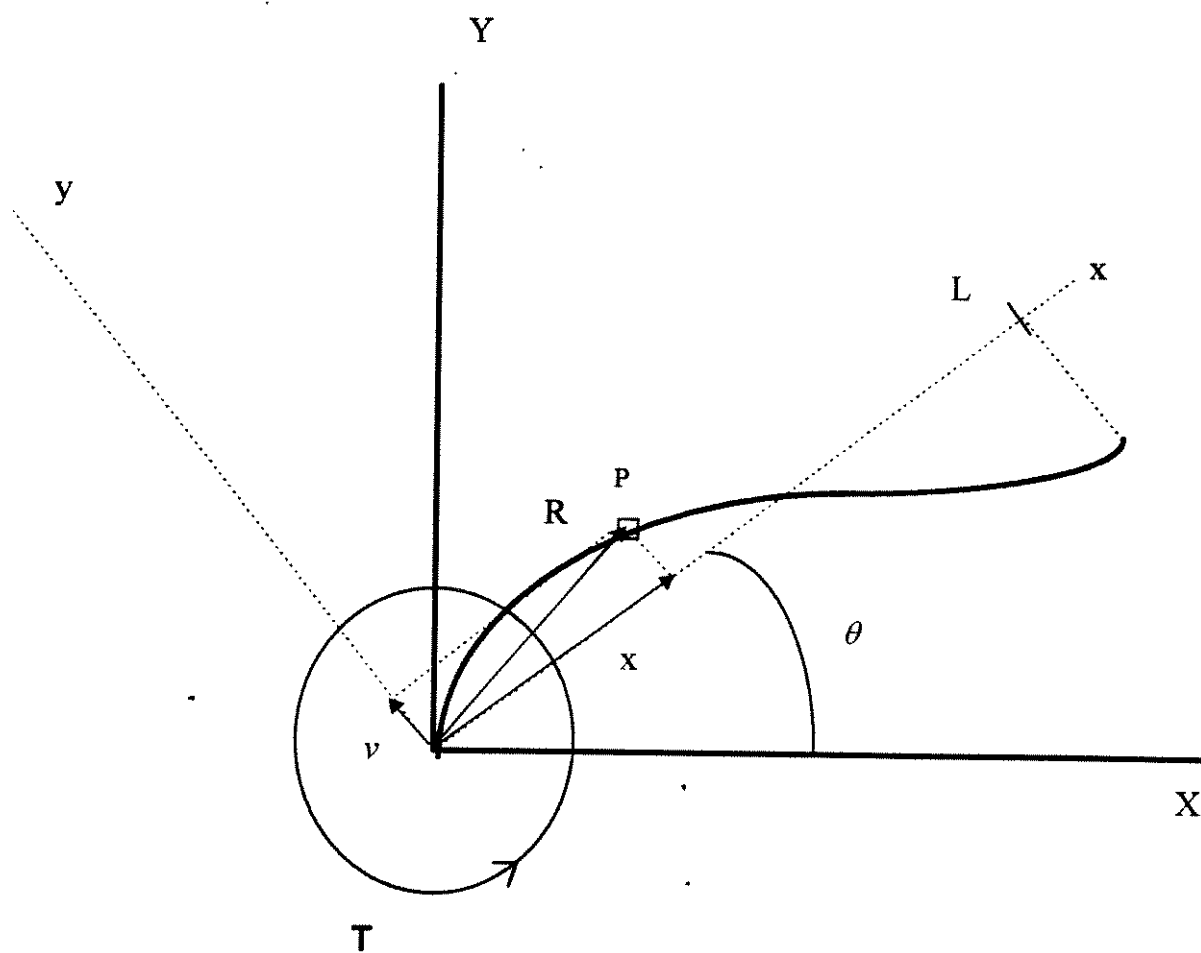


Figura 3.1 - Estrutura flexível de rastreamento (planar)

Para se determinar a expressão da energia cinética acumulada durante o movimento de rastreamento de tal estrutura, necessita-se obter o módulo ao quadrado da velocidade, ou seja, a norma ao quadrado da equação (3.2).

O módulo de (3.2) pode ser escrito como :

$$|\dot{\vec{R}}| = [(\dot{x} \cos\Theta - x \sin\Theta \dot{\Theta} - v \cos\Theta \dot{\Theta} - \dot{v} \sin\Theta)^2 + (\dot{x} \sin\Theta + x \cos\Theta \dot{\Theta} + \dot{v} \cos\Theta - v \sin\Theta \dot{\Theta})^2]^{1/2}$$

ou :

$$|\dot{\vec{R}}| = (\dot{x}^2 \dot{\Theta}^2 + 2x \dot{v} \dot{\Theta} - 2\dot{x} v \dot{\Theta} + v^2 \dot{\Theta}^2 + \dot{v}^2 + \dot{x}^2)^{1/2} \quad (3.3)$$

Desta forma, agrupando termos e elevando cada lado da igualdade ao quadrado, obtém-se :

$$|\dot{\vec{R}}|^2 = (\dot{v} + x \dot{\Theta})^2 + (\dot{x} - v \dot{\Theta})^2$$

De acordo com o modelo adotado, $\dot{x} = 0$. Então :

$$|\dot{\vec{R}}|^2 = (\dot{v} + x \dot{\Theta})^2 + (v \dot{\Theta})^2 \quad (3.4)$$

3.3 - Lagrangeano e trabalho das forças não conservativas

A energia cinética (EC) é encontrada multiplicando-se a massa infinitesimal, ρdx , aonde ρ representa a densidade do material da estrutura por unidade comprimento, pela norma ao quadrado da velocidade, equação (3.4), e integrando-se sobre o comprimento da estrutura. A parcela correspondente à energia potencial sobre o sistema é representada pela energia de deformação transversal da estrutura (EP). Ou seja :

$$EC = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx \quad (3.5)$$

$$EP = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (3.6)$$

Neste primeiro modelo, a curvatura devido à flexibilidade do sistema será representada apenas por v'' . Esta consideração encontra respaldo na maior parte da literatura consultada.

O lagrangeano da estrutura, considerando-se um único membro flexível, torna-se, portanto :

$$L = EC - EP$$

ou :

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (3.7)$$

Caso houvessem outras estruturas conectadas a esta (como vários membros de um manipulador robótico), o lagrangeano do sistema seria a somatória das energias acumuladas em cada uma destas.

Assumir-se-á aqui que o trabalho das forças externas não conservativas (neste caso, o trabalho realizado pelo torque (T) gerado pelo motor) pode ser expresso simplesmente por :

$$W_{nc} = T\theta \quad (3.8)$$

Considera-se também, neste trabalho, que não haja significativa interação entre atuador (servo-motor) e estrutura no engaste, de tal forma que esta possa ser desprezada. Esta interação, caso seja significativa, torna-se responsável por uma descontinuidade dos modos do sistema na origem (engaste). Ou seja, este efeito afeta de forma significativa os modos de vibrar da estrutura. Estes modos serão de extrema importância, como será visto mais adiante, na discretização das equações do movimento.

Para que a interação seja desprezada, a relação I_b / I_s (inércia do braço (corpo rígido) sobre inércia do servo-sistema (motor + sistema de transmissão)) deve ser maior que 10. Este é o caso para o manipulador projetado neste trabalho, como pode verificado no apêndice C.

A condição de contorno para a estrutura a ser analisada neste trabalho pode, então, ser considerada como engastada-livre.

A interação entre o torque do motor e os modos de vibrar da estrutura é muito bem discutida nos trabalhos de Garcia [14].

3.4 - Aplicação do Princípio de Hamilton Estendido

De acordo com o Princípio de Hamilton Estendido ([17], [18], [19], [20]):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W_{nc}) dt = 0 \quad (3.9)$$

com $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$.

Substituindo (3.7) e (3.8) no primeiro termo de (3.9), obtém-se :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W_{nc}) dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v})^2 + (\dot{\theta}v)^2] dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'')^2 dx + T\dot{\theta} \right\} dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v})\delta(\dot{\theta}x + \dot{v}) + (\dot{\theta}v)\delta(\dot{\theta}v)] dx - EI \int_0^L (v'')\delta(v'') dx + T\delta\dot{\theta} \right\} dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v})(x\delta\dot{\theta} + \dot{\theta}\delta x + \delta\dot{v}) + (\dot{\theta}v)(v\delta\dot{\theta} + \dot{\theta}\delta v)] dx - EI \int_0^L (v'')\delta(v'') dx + T\delta\dot{\theta} \right\} dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v})\delta\dot{v} + (\dot{v}\dot{\theta} + x\dot{\theta}^2)\delta x + (\dot{\theta}v^2 + \dot{\theta}x^2 + \dot{v}x)\delta\dot{\theta} + (\dot{\theta}^2v)\delta v] dx - \right. \\
&\quad \left. - EI \int_0^L (v'')\delta(v'') dx + T\delta\dot{\theta} \right\} dt
\end{aligned}$$

Fazendo a integração por partes dos termos multiplicados por $\delta\dot{v}$, $\delta\dot{\theta}$ e $\delta v''$ (e posteriormente $\delta v'''$) e eliminando-se os termos multiplicados por δx (uma vez que não ocorre variação neste parâmetro), obtem-se :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W_{nc}) dt &= \rho \int_0^L [(\dot{\theta}x + \dot{v})\delta v]_{t_1}^{t_2} dx - \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\ddot{\theta}x + \dot{\theta}\dot{x} + \ddot{v})\delta v dx dt + \\
&+ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}v^2 + \dot{\theta}x^2 + \dot{v}x)\delta\dot{\theta}]_{t_1}^{t_2} dx - \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\ddot{\theta}v^2 + 2\dot{\theta}\dot{v} + \ddot{\theta}x^2 + 2\dot{\theta}x\dot{x} + \ddot{v}x + \dot{v}\dot{x})\delta\dot{\theta} dx dt + \\
&+ \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\dot{\theta}^2v)\delta v dx dt - \int_{t_1}^{t_2} [EI(v'')\delta v']_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} [EI(v''')\delta v]_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI(v'')\delta v dx dt + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} (T\delta\dot{\theta}) dt
\end{aligned}$$

Resultando :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W_{nc}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (\rho(\dot{\theta}^2 v - \ddot{\theta} x - \ddot{v}) - E I v''') \delta v + \int_0^L \rho(-\ddot{\theta} v^2 - 2\dot{\theta} v \dot{v} - \ddot{\theta} x^2 - \ddot{v} x) \delta \theta \right\} dx + T \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} dt \quad (3.10)$$

mais os termos de contorno :

$$\int_0^L \{ [\rho(\dot{\theta} x + \dot{v})] \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} \} dt \quad (3.11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [(E I v''') \delta v \Big|_0^L] dt \quad (3.12)$$

$$\int_0^L [\rho(\dot{\theta} v^2 + \dot{\theta} x^2 + \dot{v} x) \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2}] dt \quad (3.13)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [E I v'' \delta v' \Big|_0^L] dt \quad (3.14)$$

Como δv e $\delta \theta$ são considerados nulos nos tempos t_1 e t_2 , as expressões (3.11) e (3.13) se cancelam, justificando (3.9). De acordo com a mesma expressão (3.9), as expressões (3.12) e (3.14) podem ser reescritas como :

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ [E I v'''] \delta v \Big|_{x=0} + [E I v'''] \delta v \Big|_{x=L} \} dt = 0 \quad (3.15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ [E I v'' \delta v']_{x=0} + E I v'' \delta v' \Big|_{x=L} \} dt = 0 \quad (3.16)$$

Em $x = 0$, devido à condição de engastamento da estrutura, tem-se que $\delta v(0,t) = 0$ e $\delta v'(0,t) = 0$. Devido ao mesmo fato, em $x = 0$:

$$v(0,t) = 0$$

$$v'(0,t) = 0$$

Portanto, para satisfazer (3.15) e (3.16) :

$$EIv'''(L,t) = 0 \quad (3.17)$$

$$EIv''(L,t) = 0 \quad (3.18)$$

que são condições de contorno para o problema em estudo.

Assim sendo, as seguintes equações do movimento de rastreamento são obtidas de (3.10), aplicando (3.9) :

$$\int_0^L \left\{ \rho[\ddot{\theta}v^2 + 2\dot{\theta}\dot{v} + \ddot{\theta}x^2 + \ddot{v}x] \right\} dx = T \quad (3.19a)$$

$$\rho[\dot{\theta}^2 v - \ddot{\theta}x - \ddot{v}] - EIv^{iv} = 0 \quad (3.19b)$$

mais as condições de contorno:

$$v(0,t) = 0$$

$$v'(0,t) = 0$$

$$EIv''(L,t) = 0$$

$$EIv'''(L,t) = 0$$

A equação (3.19a) representa a equação do movimento relacionada ao comportamento de corpo rígido da estrutura (rotação em torno do eixo de rastreamento) e a equação (3.19b) representa a equação do movimento relacionada ao comportamento flexível da estrutura associado a pequenas deflexões na direção y do sistema de referência móvel (local).

3.5 - O método dos modos assumidos e as equações discretizadas do movimento

O método dos modos assumidos, também conhecido como método de Ritz, pode ser entendido como um método que busca resolver o problema de se trabalhar com os infinitos graus de liberdade de um sistema contínuo. O método consiste em discretizar o sistema composto pelas equações do movimento do sistema valendo-se de uma expansão. Desta maneira, o sistema poderá ser trabalhado como possuindo n graus de liberdade. De outra forma, a variável relacionada ao comportamento flexível da estrutura $v(x,t)$ pode ser reescrita de forma discretizada através da expansão :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (3.20)$$

aonde n representa o número de modos (ou fatores de forma) adotado na discretização e considerado suficiente para representar satisfatoriamente o comportamento dinâmico da estrutura [19].

Cada uma das funções $\phi_i(x)$ que aparece em (3.20) representa cada um dos modos próprios do sistema. As variáveis $q_i(t)$ são os parâmetros do sistema que se pretende determinar daqui por diante, através das equações (3.19) discretizadas.

A expressão (3.20) será, então, substituída nas expressões (3.19a) e (3.19b), resultando :

$$\rho \ddot{\theta} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_i \phi_j q_i q_j \right) + 2\rho \dot{\theta} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_i \phi_j q_i \dot{q}_j \right) + \rho \ddot{\theta} x^2 + \rho x \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{q}_i = T \quad (3.21)$$

$$\rho \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \phi_i q_i - \rho \ddot{\theta} x - \rho \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{q}_i - EI \sum_{i=1}^N \phi_i^{iv} q_i = 0 \quad (3.22)$$

Integrando (3.21) de $x = 0$ a $x = L$ e fazendo :

$$I_b = \int_0^L \rho x^2 dx$$

$$I_i = \int_0^L \rho x \phi_i(x) dx$$

$$\psi_{ij} = \int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx$$

Obtem-se:

$$I_b \ddot{\Theta} + \sum_{i=1}^n I_i \ddot{q}_i + \ddot{\Theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_{ij} q_i q_j + 2\dot{\Theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_{ij} q_i \dot{q}_j = T$$

aonde, I_b representa o momento de inércia de corpo rígido da estrutura em torno do eixo de rotação, q_i e q_j representam variáveis temporais de deflexão e I_i representa cada um dos momentos de inércia da estrutura em relação ao eixo em torno do qual ocorre a deflexão (ou a inércia associada a cada um dos modos escolhidos).

O mesmo tipo de procedimento é aplicado à equação (3.22). Neste caso, multiplica-se, antes da integração, toda a expressão por um autovetor ortogonal ϕ_i a fim de se desacoplar as variáveis espaciais ϕ_i , resultando :

$$\rho \dot{\Theta}^2 \sum_{i=1}^N \phi_i \phi_i q_i - \rho \ddot{\Theta} \phi_i x - \rho \sum_{i=1}^N \phi_i \phi_i \ddot{q}_i - EI \sum_{i=1}^N \phi_i^{iv} \phi_i q_i = 0$$

Integrando-se de $x = 0$ a $x = L$ e fazendo :

$$\xi_{it} = \int_0^L \rho \phi_i \phi_t dx$$

$$\zeta_t = \int_0^L \rho x \phi_t$$

$$o_{it} = \int_0^L EI \phi_i \phi_t dx$$

obtem-se:

$$\ddot{\theta} \zeta_t + \sum_{i=1}^N \xi_{it} \ddot{q}_i + \left(\sum_{i=1}^N o_{it} w_i^2 - \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \xi_{it} \right) q_i = 0$$

Desta forma, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais discretizadas do movimento para a estrutura flexível de rastreamento e de membro único considerando-se pequenas deflexões:

$$\ddot{\theta} \left(I_b + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_{ij} q_i q_j \right) + \sum_{i=1}^n I_i \ddot{q}_i + 2\dot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_{ij} q_i \dot{q}_j = \mathbf{T} \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_{it} \ddot{q}_i + \ddot{\theta} \zeta_t + \left(\sum_{i=1}^N o_{it} w_i^2 - \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \xi_{it} \right) q_i = 0 \quad (3.24)$$

mais as condições de contorno:

$$EI \sum_{i=1}^n \phi_i(0) q_i(t) = 0 \quad (3.25a)$$

$$EI \sum_{i=1}^n \phi_i'(0) q_i(t) = 0 \quad (3.25b)$$

$$EI \sum_{i=1}^n \phi_i''(L) q_i(t) = 0 \quad (3.25c)$$

$$EI \sum_{i=1}^n \phi_i^{(4)}(L) q_i(t) = 0 \quad (3.25d)$$

O parâmetro $\phi_i(x)$ será discutido a seguir. As equações do movimento para um sistema qualquer (estudo de caso) poderão, então, ser facilmente obtidas. Estas equações são apresentadas no capítulo 5 deste trabalho com as simulações tanto para este caso quanto para o caso que será tratado no próximo capítulo (grandes deflexões).

Na equação 3.23, a fim de que o conjunto completo *motor-transmissão mecânica-estrutura flexível* possa ser estudado, o parâmetro T (que poderia ser o perfil de torque 2.1 sem a inclusão das equações do motor cc) deverá ser substituído por $N_g T_M$, aonde N_g representa a relação de transmissão dada por $N_g : 1$ e T_M representa o torque gerado pelo motor de corrente contínua, especificado no apêndice A através das equações do motor.

As equações 3.23 e 3.24 serão adimensionalizadas no próximo capítulo. As equações completas *motor-transmissão mecânica-estrutura flexível* serão apresentadas no capítulo 5.

3.6 - Determinação dos fatores de forma

Os fatores de forma (ou modos próprios) e as frequências naturais para o braço do manipulador flexível podem ser verificados analiticamente a partir da solução da equação da viga engastada-livre, sem amortecimento de qualquer espécie e livre de esforços externos dada por (3.26).

$$\phi^{(4)} - w^2 \phi = 0 \quad (3.26)$$

Esta equação pode ser verificada em muitas referências, por exemplo, [14] e [20].

Resolvendo-se a equação da viga (3.26) com as condições de contorno de acordo com o modelo adotado, obtém-se uma equação transcendental do tipo [14]:

$$1 + \cos(x)\cosh(x) - \frac{\left(\frac{\rho L^3}{I_S}\right)}{x^3} (\cos(x)\sinh(x) - \sin(x)\cosh(x)) = 0 \quad (3.27)$$

aonde $x = a_i L$ representa cada uma das raízes da expressão acima e $I_S = I_M N_G^2$ representa a inércia efetiva atuando na estrutura conectada (engastada) ao sistema de transmissão, I_M representa a inércia do motor e N_G a relação de transmissão considerada entre o motor e a carga do motor, no caso, a estrutura flexível de rastreamento.

Com os valores de $a_i L$ pode-se determinar a frequência natural do sistema em rad/s através da expressão [14] :

$$w_i = (a_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \quad [\text{rad/s}] \quad (3.28)$$

Obtendo-se w_i , a conversão da frequência natural em Hz deverá ser efetuada através de:

$$\text{freq}_i = 0.1592 w_i \quad [\text{hz}] \quad (3.29)$$

Desta maneira será determinada a frequência natural para o braço flexível sem carga na extremidade livre e levando-se em consideração as características do motor de corrente contínua e o sistema de transmissão.

O sistema completo constituído da estrutura flexível de rastreamento (por exemplo, um manipulador robótico) associado a uma carga na extremidade livre (por exemplo, um objeto sendo transportado pelo manipulador) deverá ser analisado em um trabalho futuro de doutoramento. Nesta situação, a análise torna-se muito mais complexa e o sistema não poderá mais ser analisado no plano. Muitos efeitos então desconsiderados, poderão torna-se preponderantes (torção, pré-deformação devido ao manuseio de cargas,...).

Os valores encontrados para a_i (através dos valores de $a_i L$ determinados através das raízes da expressão (3.27)) devem ser inseridos na expressão para os modos (autovetores) a seguir [14].

$$\phi_N(x) = A_i [\cos(a_i x) - \cosh(a_i x) + \alpha_N (\sin(a_i x) + \sinh(a_i x)) + \gamma_N (\sin(a_i x) - \sinh(a_i x))] \quad (3.30)$$

aonde:

A_i = constante de normalização

$$\alpha_N = \frac{\rho L^3}{(a_i L)^3 I_S}$$

$$\gamma_N = \frac{\sin(a_i L) - \sinh(a_i L) + \alpha_N (\cosh(a_i L) - \cos(a_i L))}{\cos(a_i L) + \cosh(a_i L)}$$

Os valores obtidos para as três primeiras raízes da equação (3.27) e as respectivas frequências naturais em Hz são mostrados na tabela 3.1.

$a_i L$	frequência natural (Hz)
1.8780	1.7194
4.6943	10.7430
7.8548	28.8613

Tabela 3.1 : Autovalores para o sistema manipulador flexível

3.7 - Estudo de caso : primeiras considerações

Sejam os valores da frequência natural obtidos através da solução da equação transcendental e que constam na segunda coluna da tabela 3.1.

Fazendo $L = 1.2$ m, por exemplo, obtém-se os valores para a_i que constam na tabela 3.2. Este valor para o comprimento da estrutura flexível de rastreamento é aquele com o qual se pretende trabalhar ao longo de todo este trabalho.

O protótipo experimental tratado no capítulo 6 e apêndice C será confeccionado com este mesmo comprimento L .

i	$a_i L$	a_i
1	1.8780	1.5650
2	4.6943	3.9119
3	7.8548	6.5457

Tabela 3.2 - Valores para a_i

O estudo do comportamento de estruturas flexíveis poderia ser feito variando-se o comprimento da estrutura. Neste trabalho, manteve-se o comprimento constante e buscou-se

variar a secção reta transversal. Em vistas do pequeno parâmetro adimensional de perturbação ϵ , que será apresentado no próximo capítulo e está ligado à adimensionalização das equações do movimento, estas alterações irão representar um maior ou menor acoplamento entre as equações do movimento.

As expressões analíticas para os fatores de forma para os três primeiros modos do sistema são escritas a seguir e plotadas na sequência.

$$\begin{aligned}\phi_1(x) = A_1 [& \cos(1.5650x) - \cosh(1.5650x) + 0.003363 (\sin(1.5650x) + \sinh(1.5650x)) - \\ & - 0.731968 (\sin(1.5650x) - \sinh(1.5650x))] \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned}\phi_2(x) = A_2 [& \cos(3.9119x) - \cosh(3.9119x) + 0.000215 (\sin(3.9119x) + \sinh(3.9119x)) - \\ & - 1.018242 (\sin(3.9119x) - \sinh(3.9119x))] \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned}\phi_3(x) = A_3 [& \cos(6.5457x) - \cosh(6.5457x) + 0.000046 (\sin(6.5457x) + \sinh(6.5457x)) - \\ & - 0.999179 (\sin(6.5457x) - \sinh(6.5457x))] \end{aligned} \quad (3.31c)$$

Para os gráficos a seguir, as constantes de normalização A_i foram consideradas iguais a 1.

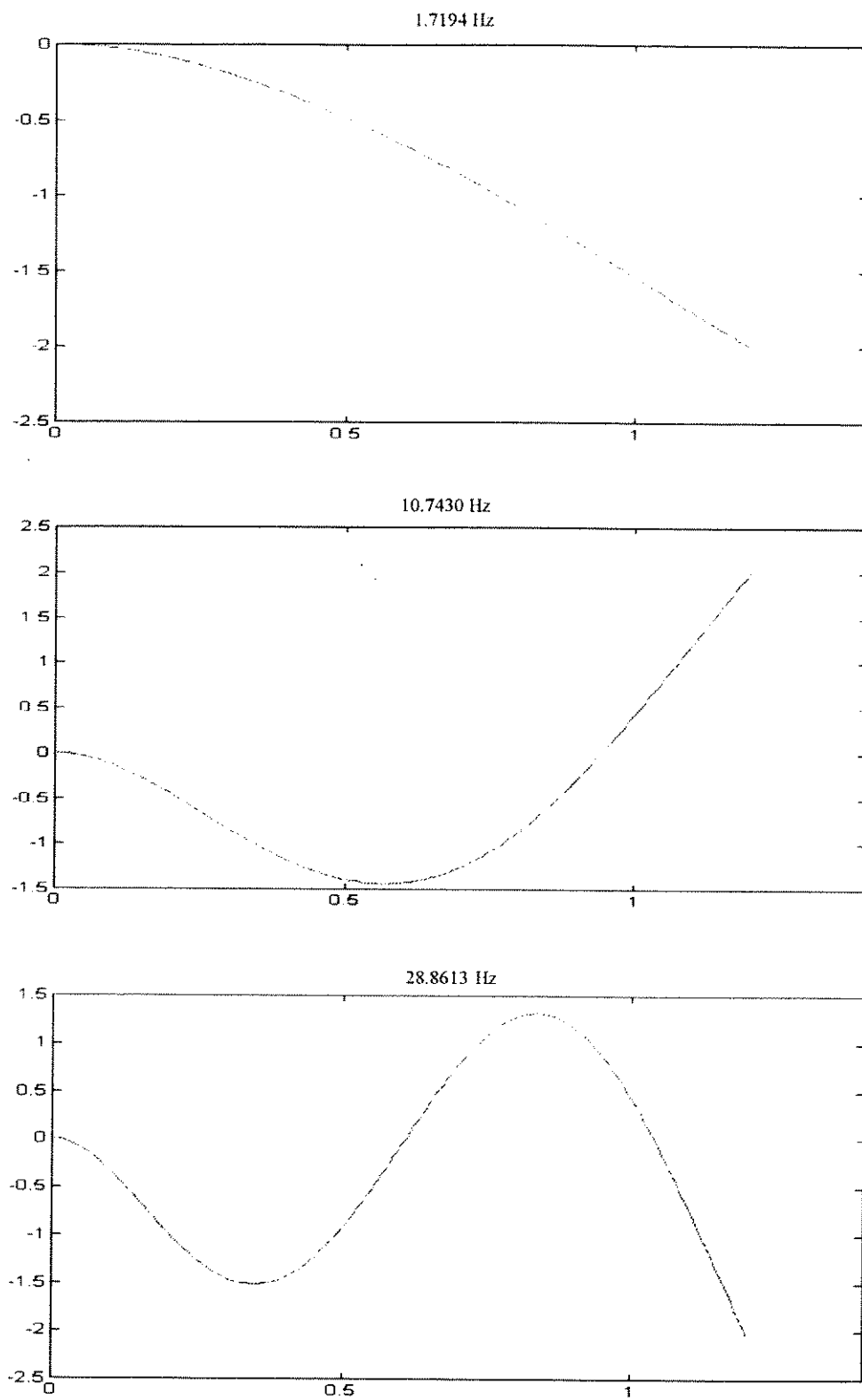


Figura 3.2 : Os três primeiros modos de vibrar do sistema viga engastada-livre analisado

3.8 - Observações finais e conclusões

A teoria desenvolvida neste capítulo leva em consideração pequenas deflexões apresentando uma expressão simples para a curvatura. Esta teoria pode ser uma boa aproximação para alguns casos (braços não muito longos ou não muito finos) e é frequentemente encontrada na literatura (por exemplo, [21], [22], [23], [24]).

No entanto, a teoria que considera grandes deflexões pretende ser muito mais geral para aplicações aeroespaciais (braços posicionadores de satélites, painéis solares de satélites, antenas,...) assim como para o estudo de pás de helicóptero e pás de turbinas, por exemplo. Esta teoria é desenvolvida no capítulo 4 deste trabalho.

Não foi discutido neste trabalho o tipo de material que poderia estar envolvido na confecção da estrutura flexível. Por razões óbvias, buscar-se-á trabalhar com materiais bem conhecidos na engenharia e que possuam propriedades constantes ao longo da estrutura, como é o caso dos materiais metálicos (aço, alumínio,...). O alumínio geralmente é escolhido por ser mais leve.

Simulações são efetuadas no capítulo 5 (para pequenas e grandes deflexões) e resultados são comparados. Até que ponto o equacionamento desenvolvido para pequenas deflexões mostra-se eficaz ? Quais foram as considerações feitas a mais e quais as diferenças verificadas no comportamento do sistema ?

Os modos de vibrar que aparecem na figura 3.2 servirão como base para posicionamento de sensores para aplicações futuras. A idéia será fixá-los nos locais aonde ocorram as maiores deflexões na estrutura. Esses sinais poderão ser utilizados em um futuro sistema de controle para este sistema.

O fato de posteriormente alterar-se o tipo de material da estrutura e o formato de sua secção reta não alterará em nada os fatores de forma obtidos ou o raciocínio desenvolvido neste

capítulo. Logicamente, as frequências naturais poderão ser maiores ou menores e o braço mais ou menos pesado.

No caso deste trabalho, o sistema de transmissão foi superdimensionado e poderá suportar algumas mudanças neste sentido. A carga a ser posteriormente utilizada na extremidade livre deverá ser, portanto, ajustada para este mesmo sistema de transmissão, de acordo com as propriedades da estrutura flexível escolhida.

Finalmente, a secção reta retangular da barra de alumínio irá também garantir que o movimento de deflexão da estrutura durante o movimento (sem carga na extremidade livre) ocorra somente no plano de rastreamento. O problema poderá, então, ser tratado como planar. Uma secção muito fina, porém, acarretará problemas, conforme mencionado anteriormente. O mesmo problema tratado como tridimensional aumentaria em muito a complexidade da análise aqui apresentada.

Capítulo 4

Equações do movimento para uma estrutura flexível de rastreamento de membro único considerando grandes deflexões

4.1 - Introdução

O modelo para a estrutura flexível de rastreamento apresentado neste capítulo é tratado de forma a obter-se equações dinâmicas adimensionalizadas do movimento que descrevam o comportamento de uma classe de sistemas que apresentem as mesmas condições de contorno e características geométricas. Para este fim, é desenvolvido aqui um procedimento diferente e mais forte para o estudo de sistemas dinâmicos não lineares.

Além do caráter de generalidade (as equações serão válidas para uma classe de sistemas, conforme mencionado anteriormente), a adimensionalização das equações do movimento proposta aqui permitirá que se trabalhe com um menor número de parâmetros associado ao problema, assim como deverá permitir uma melhor compreensão do mesmo.

Esta adimensionalização tornar-se-á cada vez mais importante e necessária quanto mais complexo for o modelo.

Novamente, à semelhança do capítulo anterior, o Princípio Estendido de Hamilton será utilizado para a obtenção das equações do movimento.

As equações do movimento obtidas no capítulo 3 (para pequenas deflexões) são adimensionalizadas no final deste capítulo a fim de que possam ser comparadas com as equações do movimento obtidas neste. Os procedimentos para adimensionalização serão apresentados neste capítulo. Perceber-se-á como é transparente a diferença entre os graus de complexidade dos dois modelos.

4.2 - Modelo geométrico e os vetores posição e velocidade

O modelo proposto neste trabalho para a estrutura de rastreamento sob grandes deformações parte do pressuposto de que qualquer elemento infinitesimal localizado ao longo da estrutura irá ocupar, após a deflexão, uma nova posição no plano (no caso particular da análise bidimensional) tendo alteradas tanto a sua abscissa quanto a sua ordenada em relação ao sistema de referência móvel xy .

Em se tratando de pequenas deflexões, conforme visto anteriormente, geralmente supõe-se que apenas a ordenada y do elemento irá se alterar após a deformação da estrutura, sendo que a abscissa x do elemento permanece inalterada. Neste caso, a curvatura será considerada linear e a estrutura não acumularia energia de deformação longitudinal. Este fato simplifica em muito a análise de estruturas flexíveis, como pode ser observado no capítulo 3, embora, em alguns casos, pode estar contribuindo para o desenvolvimento de um modelo não condizente com a realidade (caso de estruturas muito longas ou muito finas, por exemplo).

O modelo geométrico para a estrutura flexível de rastreamento considerando-se grandes deflexões encontra-se ilustrado na figura 4.1. Dois sistemas de referência são mostrados nesta figura : um sistema de referência inercial (X,Y) e um sistema de referência que rotaciona junto com a estrutura (x,y), também denominado sistema de referência local.

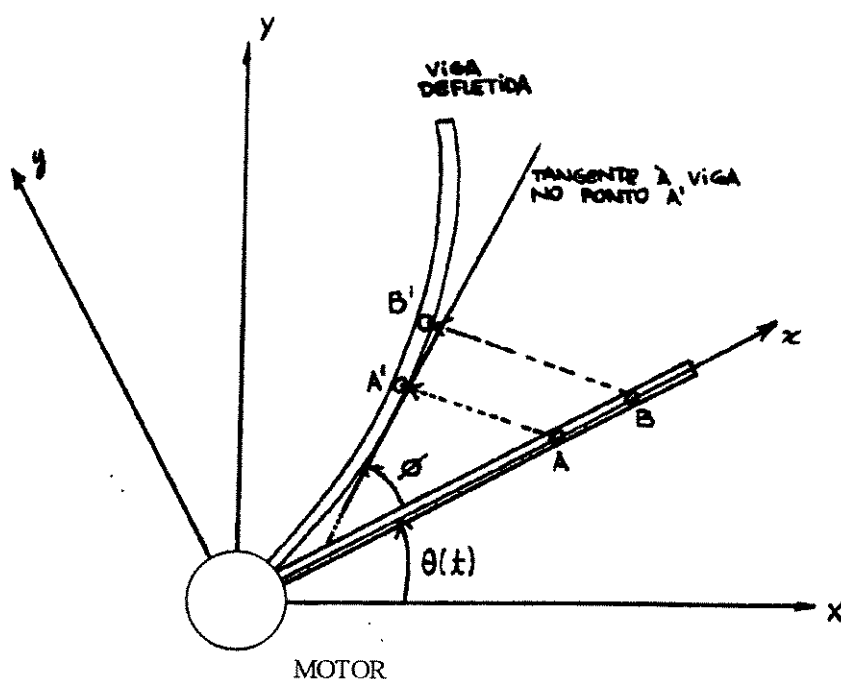


Figura 4.1 - Modelo representativo da deformação do membro flexível

A variável $\theta(t)$ representa a posição do motor de corrente contínua conectado à extremidade engastada do manipulador e, conseqüentemente, a posição de corpo rígido do manipulador. O sistema de coordenadas xy acompanha o movimento de corpo rígido do manipulador e serve como sistema de coordenada local para a determinação dos parâmetros associados à curvatura do membro flexível (deslocamentos transversal e longitudinal).

Para a modelagem desta estrutura de rastreamento adota-se o modelo de viga do tipo Euler-Bernoulli.

O modelo de viga de Euler-Bernoulli leva em consideração apenas a inércia transversal e a elasticidade no sentido de deflexão para o contínuo. Neste modelo de viga, negligencia-se esforços de cisalhamento e a inércia de rotação da secção transversal, uma vez que as secções planas permanecem planas após a deflexão. O modelo de Euler-Bernoulli é satisfatório para baixas frequências e grandes comprimentos de onda [20].

O modelamento da interação entre a estrutura de rastreamento (viga) e o motor torna-se extremamente importante pois determina a condição de contorno efetiva da viga na

extremidade não livre e, logo, o comportamento dinâmico do sistema acoplado *motor - estrutura de rastreamento*.

Seja ,novamente, a figura 4.1. Durante o movimento de rastreamento (em inglês *slewing*) considerado, com a deflexão da viga, um elemento infinitesimal qualquer sobre a estrutura em A move-se para A'. O mesmo ocorre com um elemento infinitesimal qualquer sobre B, deslocando-se para B'.

O intervalo AB e o intervalo A'B' serão utilizados mais adiante para a obtenção de relações geométricas importantes entre as condições não defletida e defletida da estrutura.

Os componentes do deslocamento do elemento infinitesimal sobre A' no sistema de referência que rotaciona com a viga são representados pelas quantidades $-u(x,t)$ e $v(x,t)$ nas direções de x e y , respectivamente, conforme ilustrado na figura 4.2.

Portanto, a posição de A' relativa ao sistema de referência móvel (xy) é dada pela relação:

$$\vec{r}_{xy} = (x - u)\vec{i}_x + v\vec{j}_y \quad (4.1)$$

que pode ser verificada pela mesma figura 4.2.

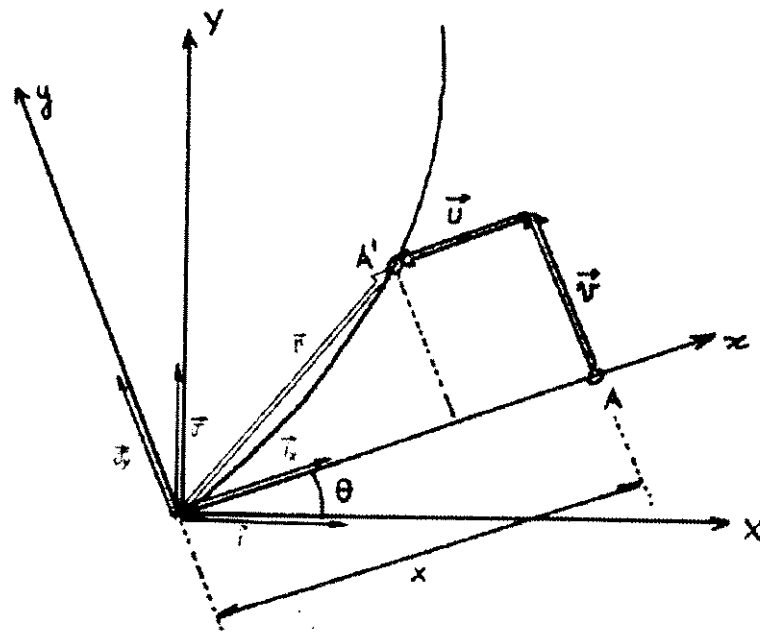


Figura 4.2 - Componentes do vetor deslocamento de um elemento infinitesimal qualquer em A sobre o membro flexível após a deflexão

A velocidade de A' relativa ao sistema de referência móvel pode ser encontrada derivando-se (4.1) em relação ao tempo, ou seja :

$$\dot{\vec{r}}_{xy} = \left[\frac{d(x-u)}{dt} \right] \vec{i}_x + \left[\frac{d(v)}{dt} \right] \vec{j}_y$$

resultando:

$$\dot{\vec{r}}_{xy} = (\dot{x} - \dot{u}) \vec{i}_x + \dot{v} \vec{j}_y = v_{rel}$$

A quantidade \dot{x} é igual a 0, pois a posição inicial de um elemento qualquer sobre A (ver figura 4.2) medido ao longo do eixo x do sistema de referência móvel é uma constante. Então:

$$\vec{v}_{rel} = -\dot{u} \vec{i}_x + \dot{v} \vec{j}_y \quad (4.2)$$

As quantidades *vetor deslocamento* e *vetor velocidade relativa* deverão, então, ser transformados do sistema de referência local (xy) para um sistema de referência inercial global (XY).

No sistema de referência inercial, o vetor posição do elemento da viga sobre A' (equação (4.1)) será escrito como:

$$\vec{r}_{xy} = [(x - u)\cos\theta - v\sin\theta]\vec{i} + [(x - u)\sin\theta + v\cos\theta]\vec{j} \quad (4.3)$$

ou seja, projetam-se os vetores que possuem direção dada pelos versores \vec{i}_x e \vec{j}_y (no sistema de coordenadas móvel) nas direções orientadas pelos versores \vec{i} e \vec{j} (do sistema de coordenadas inercial).

A figura 4.3 ilustra a transformação entre os sistemas de coordenadas adotados.

A velocidade do elemento sobre A', portanto, no referencial inercial torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{xy} = \vec{v}_{xy} = & [(\dot{x} - \dot{u})\cos\theta - \dot{\theta}(x - u)\sin\theta - \dot{v}\sin\theta - v\cos\theta\dot{\theta}]\vec{i} + \\ & + [(\dot{x} - \dot{u})\sin\theta + \dot{\theta}(x - u)\cos\theta + \dot{v}\cos\theta - v\sin\theta\dot{\theta}]\vec{j} \end{aligned} \quad (4.4)$$

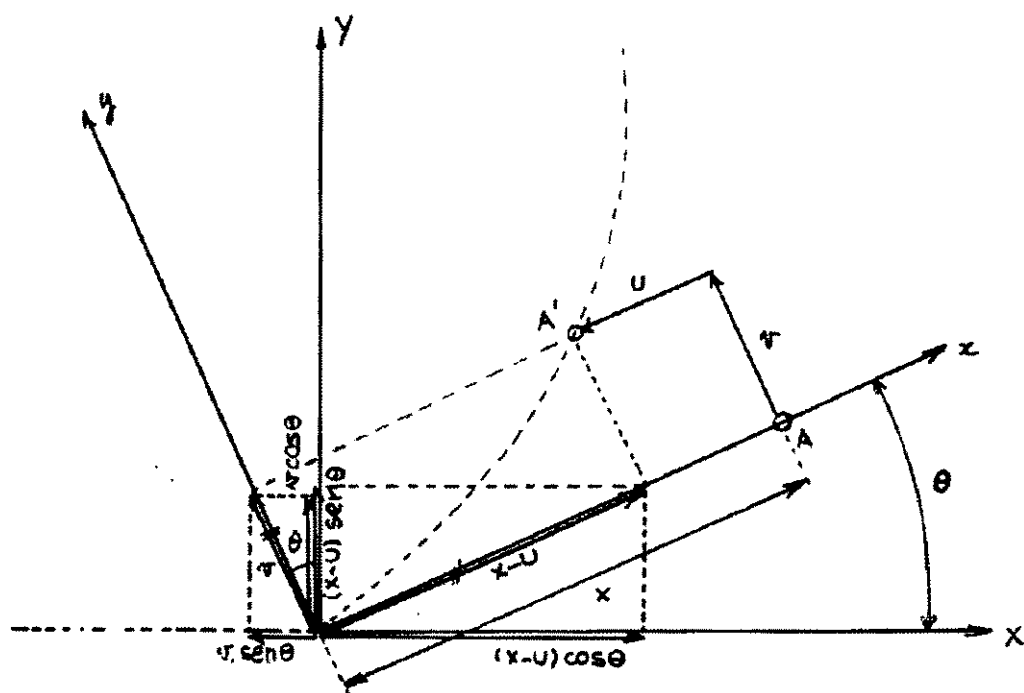


Figura 4.3 - Transformação do sistema de referência móvel para o sistema de referência inercial

4.3 - Energia cinética da estrutura flexível de rastreamento considerando grandes deflexões

A energia cinética acumulada pela estrutura flexível durante o seu movimento de rastreamento é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L |\vec{v}_{AX}|^2 dx \quad (4.5)$$

aonde ρ representa a densidade do material por unidade de comprimento (assumida como sendo constante ao longo de todo o comprimento da viga) e L representa o comprimento original da viga.

Assim, substituindo (4.4) em (4.5) :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L [(-\dot{u} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta + u \dot{\theta} \sin \theta - \dot{v} \sin \theta - v \cos \theta \dot{\theta})^2 + \\ + (-\dot{u} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta - u \dot{\theta} \cos \theta + \dot{v} \cos \theta - v \sin \theta \dot{\theta})^2] dx$$

Realizando as operações de potencialização e agrupando os termos semelhantes, obtém-se :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L (\dot{u}^2 + v^2 \dot{\theta}^2 + \dot{v}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 - 2ux \dot{\theta} + u^2 \dot{\theta}^2 + 2x \dot{\theta} \dot{v} - 2v \dot{\theta} \dot{v} + 2\dot{u} v \dot{\theta}) dx \quad (4.6)$$

A expressão (4.6) pode ser reescrita como :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \{ (\dot{\theta} v + \dot{u})^2 + [\dot{\theta}(x - u) + \dot{v}]^2 \} dx \quad (4.7)$$

4.4 - Energia de deformação da estrutura flexível considerando grandes deflexões

A energia total de deformação (transversal + longitudinal) acumulada pela estrutura flexível após a deflexão é dada por:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.8)$$

que pode ser reescrita como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

ou

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L M \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

e finalmente:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L M d\phi + \frac{1}{2} \int_0^L N \varepsilon_{axial} dx \quad (4.9)$$

Onde M representa o momento interno, relacionado à deflexão angular ϕ por:

$$M = \frac{EI}{\mu} = \frac{EI}{\left(\frac{dl}{d\phi}\right)} = EI \left(\frac{d\phi}{dl}\right) \quad (4.10)$$

Nas expressões 4.9 e 4.10:

ϕ = ângulo entre a tangente à viga defletida e o eixo x do sistema de referência móvel ;

dl = elemento do comprimento de arco ao longo da viga defletida (distância entre A' e B' da viga deformada) ;

ε_{axial} = deformação axial (mudança no comprimento / comprimento original).

A deformação axial (ε_{axial}) é dada por:

$$\varepsilon_{axial} = \frac{dl - dx}{dx} \quad (4.11)$$

Os pontos A e B na figura 4.1 são separados pela distância infinitesimal dx sobre a posição não defletida da viga. Nesta posição, a deflexão angular ϕ é constante ao longo de todo o comprimento da viga e, portanto, $u = v = 0$ para todo x . Neste caso, no referencial inercial :

$$\vec{r}_{XY} = (x \cos \theta) \vec{i} + (x \sin \theta) \vec{j}$$

Na expressão da energia total de deformação, N representa a força interna axial, dada por:

$$N = ES\epsilon_{axial} \quad (4.12)$$

aonde:

E = módulo de elasticidade transversal da viga ;

I = momento de inércia de área da secção reta em torno do eixo neutro ;

S = a área da secção reta transversal.

4.5 - Determinação de $d\phi$, dl e ϵ_{axial}

Seja a figura (4.4) :

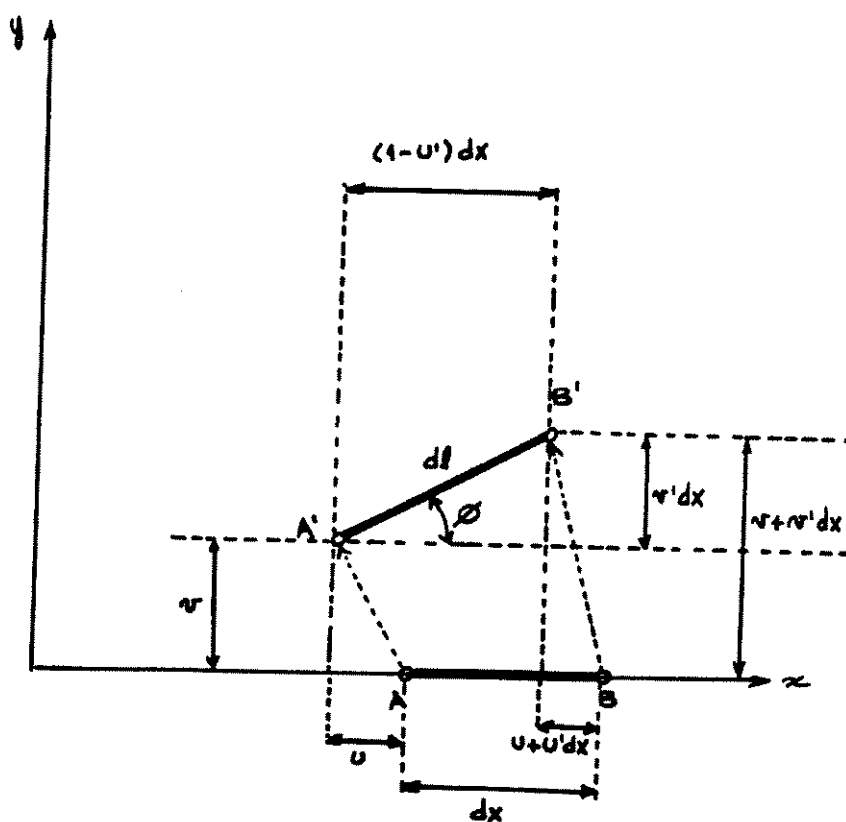


Figura 4.4 - Ilustração de um elemento da viga antes e após a deformação

De acordo com a figura 4.4, pode-se dizer que:

$$dl = [(1-u')^2 + v'^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$dl = (1 - 2u' + u'^2 + v'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

Expandindo dl em série de Taylor resulta :

$$dl = (1 - u' + \frac{1}{2} v'^2 + \dots) dx \quad (4.13)$$

E a expressão 4.11 pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_{axial} = \frac{[(1 - u' + \frac{1}{2} v'^2 + \dots) - 1] dx}{dx}$$

ou :

$$\boxed{\varepsilon_{axial} = -u' + \frac{1}{2} v'^2 + O(v'^4)} \quad (4.14)$$

Observa-se que a expansão (4.14) aumenta em potências pares de v , ou seja, as potências ímpares são omitidas.

De acordo com a mesma figura 4.4, ainda pode-se concluir que:

$$\sin \phi = \frac{v'}{[(1-u')^2 + v'^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{v'}{(1-2u'+u'^2+v'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin \phi = v' [1 - 2u' + \frac{1}{2} v'^2 + \dots]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sin \phi = v' (1 + u' - \frac{1}{2} v'^2 + \dots)$$

$$\sin \phi = v' + u' v' - \frac{1}{2} v'^3 + O(v^5)$$

Para se chegar a uma expressão para ϕ , a fim de que $d\phi$ possa ser substituído na expressão da energia total de deformação, expande-se $\sin \phi$ de acordo com:

$$\sin \phi = \phi - \frac{1}{6} \phi^3 + \dots = v' + u' v' - \frac{1}{2} v'^3 + \dots$$

ou :

$$\phi - \frac{1}{6} \phi^3 + \dots = v' + u' v' - \frac{1}{2} v'^3 + \dots \quad (4.15)$$

Seja :

$$\phi = v' + \phi_1 \quad (4.16)$$

aonde ϕ_1 é uma pequena correção para v' .

Então, substituindo (4.16) em (4.15) :

$$(v' + \phi_1) - \frac{1}{6} (v' + \phi_1)^3 + \dots = v' + u' v' - \frac{1}{2} v'^3 + \dots$$

$$v' + \phi_1 - \frac{1}{6} (v'^3 + 3v'^2 \phi_1 + 3v' \phi_1^2 + \phi_1^3) + \dots = v' + u' v' - \frac{1}{2} v'^3 + \dots$$

Desprezando termos de ordem superior :

$$\phi_1 = u' v' - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) v'^3$$

$$\phi_1 = u' v' - \frac{1}{3} v'^3 + O(v^4)$$

Substituindo ϕ_1 em (4.16) :

$$\phi = v' + u' v' - \frac{1}{3} v'^3 + O(v'^4) \quad (4.17)$$

Assim sendo,

$$d\phi = (v'' + u'' v' + u' v'' - v'^2 v'') dx$$

(4.18)

Algumas substituições podem, então, ser feitas:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{d\phi}{dl} = \frac{v'' + u'' v' + u' v'' - v'^2 v'' + O(v'^4)}{1 - u' + \frac{1}{2} v'^2 + O(v'^4)} = (v'' + u'' v' + u' v'' - v'^2 v'')(1 + u' - \frac{1}{2} v'^2)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\mu} = v'' + 2u' v'' + u'' v' - \frac{3}{2} v'^2 v'' + u' u'' v' - \frac{1}{2} u' v'^3 + u'^2 v'' - \frac{3}{2} u' v'^2 v'' + \frac{1}{2} v'^4 v'' \quad (4.19)$$

Em uma análise de estruturas flexíveis considerando pequena curvatura, faz-se :

$$\frac{1}{\mu} = v''$$

aonde μ é o raio de curvatura. Neste capítulo, porém, serão considerados os quatro primeiros termos de (4.19).

Desta forma, valendo-se de (4.18) e (4.19) :

$$\frac{d\phi}{\mu} = \frac{1}{\mu} d\phi$$

$$\frac{d\phi}{\mu} = (v'' + 2u'v'' + u''v' - \frac{3}{2}v'^2v''')(v'' + u''v' + u'v'' - v'^2v''')dx$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{\mu} = & (v''^2 + 2u''v'v'' + 3u'v''^2 - \frac{5}{2}v'^2v''^2 + 3u'u''v'v'' + 2u'^2v''^2 - \\ & - \frac{7}{2}u'v'^2v''^2 + u''^2v'^2 - \frac{5}{2}u''v'^3v'' - \frac{3}{2}v'^4v''^2)dx \end{aligned}$$

(4.20)

Serão considerados apenas os quatro primeiros termos em (4.20). Assim,

$$\frac{d\phi}{\mu} = (v''^2 + 2u''v'v'' + 3u'v''^2 - \frac{5}{2}v'^2v''^2)dx \quad (4.21)$$

Finalmente, substituindo (4.10), (4.12), (4.14) e (4.21) em (4.9) :

$$V = \frac{1}{2} \left\{ EI \int_0^L [(v'')^2 + 2u''v'v'' + 3u'v''^2 - \frac{5}{2}(v')^2(v'')^2] dx + EA \int_0^L (-u' + \frac{1}{2}v'^2)^2 dx \right\}$$

(4.22)

4.6 - Aplicação do Princípio de Hamilton Estendido

Seja o lagrangeano L, dado por:

$$L = T - V \quad (4.23)$$

e seja o Princípio de Hamilton Estendido, que postula que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W_{nc}) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} [(T - V) + W_{nc}] dt = 0 \quad (4.24)$$

com

$$\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0 \quad (4.25)$$

Assim sendo, aplicando-se o primeiro variacional à expressão da energia cinética e notando que $\delta x = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_0^L \{ (\dot{\theta} v + \dot{u})^2 + [\dot{\theta}(x - u) + \dot{v}]^2 \} dx \right\} dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta} v + \dot{u}) \delta(\dot{\theta} v + \dot{u}) + (\dot{\theta} x - \dot{\theta} u + \dot{v}) \delta(\dot{\theta} x - \dot{\theta} u + \dot{v})] dx \right\} dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta} v + \dot{u})(v \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta v + \delta \ddot{u}) + (\dot{\theta} x - \dot{\theta} u + \dot{v})(x \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta x - u \delta \dot{\theta} - \dot{\theta} \delta u + \delta \dot{v})] dx \right\} dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L [(\dot{\theta}^2 v + \dot{\theta} \dot{u}) \delta v + (\dot{\theta} v + \dot{u}) \delta \ddot{u} - (\dot{\theta}^2 x - \dot{\theta}^2 u + \dot{\theta} \dot{v}) \delta u + (\dot{\theta} x - \dot{\theta} u + \dot{v}) \delta \dot{v} + \right. \\
 &\quad \left. + (\dot{\theta} v^2 + \dot{\theta} u^2 + \dot{u} v - \dot{v} u + \dot{\theta} x^2 - 2 \dot{\theta} u x + \dot{v} x) \delta \dot{\theta}] dx \right\} dt
 \end{aligned}$$

aonde os termos multiplicados por δx já foram eliminados.

Fazendo a integração por partes dos termos multiplicados por $\delta \ddot{u}$, $\delta \dot{v}$ e $\delta \dot{\theta}$:

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L (\dot{\theta}^2 v + \dot{\theta} \dot{u}) \delta v dx \right\} dt - \int_0^L [\rho (\dot{\theta} v + \dot{u}) \delta \dot{u}]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L (\ddot{\theta} v + \dot{\theta} \dot{v} + \ddot{u}) \delta u dx \right\} dt - \\
 &- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2 u + \dot{\theta} \dot{v}) \delta u dx \right\} dt + \int_0^L [(\dot{\theta} x - \dot{\theta} u + \dot{v}) \delta v]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L (\ddot{\theta} x + \dot{\theta} \dot{x} - \ddot{\theta} u - \dot{\theta} \dot{u} + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{v}) \delta v dx \right\} dt + \int_0^L [(\dot{\theta} v^2 + \dot{\theta} u^2 + \dot{u} v - \dot{v} u + \dot{\theta} x^2 - 2 \dot{\theta} u x + \dot{v} x) \delta \dot{\theta}]_{t_1}^{t_2} dx - \\
 &- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L (\ddot{\theta} v^2 + 2 \dot{\theta} \dot{v} + \ddot{\theta} u^2 + 2 \dot{\theta} \dot{u} + \ddot{u} v - \dot{v} u + \ddot{\theta} x^2 - 2 \ddot{\theta} u x - 2 \dot{\theta} \dot{u} x + \ddot{v} x) \delta \theta dx \right\} dt
 \end{aligned}$$

Resultando :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \left[\int_0^L (\dot{\theta}^2 v + 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}x + \ddot{\theta}u - \dot{v}) \delta v + \int_0^L (-\ddot{\theta}v - 2\dot{\theta}\dot{v} - \ddot{u} - \dot{\theta}^2 x + \dot{\theta}^2 u) \delta u + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^L (-\ddot{\theta}v^2 - 2\dot{\theta}v\dot{v} - \ddot{\theta}u^2 - 2\dot{\theta}u\dot{u} - \ddot{u}v + \dot{v}u - \ddot{\theta}x^2 + 2\ddot{\theta}ux + 2\dot{\theta}\dot{u}x - \dot{v}x) \delta \theta \right] dx \right\} dt
\end{aligned} \quad (4.26)$$

mais os termos de contorno :

$$\int_0^L [\rho(\dot{\theta}v + \dot{u}) \delta u]_{t_1}^{t_2} dx \quad (4.27a)$$

$$\int_0^L [\rho(\dot{\theta}x + \dot{\theta}u + \dot{v}) \delta v]_{t_1}^{t_2} dx \quad (4.27b)$$

$$\int_0^L [(\dot{\theta}v^2 + \dot{\theta}u^2 + \dot{u}v - \dot{v}u + \dot{\theta}x^2 - 2\dot{\theta}ux + \dot{v}x) \delta \theta]_{t_1}^{t_2} dx \quad (4.27c)$$

aonde as expressões multiplicadas por \dot{x} já foram eliminadas tanto em (4.26) quanto em (4.27a,b,c).

Mas a variação nos tempos t_1 e t_2 são definidas como nulas [(4.25)], ou seja :

$$\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = \delta v(t_1) = \delta v(t_2) = \delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2) = 0$$

Desta forma, as expressões (4.27) se anulam.

Neste ponto cabe lembrar que, em $t = 0$, considera-se que :

$$\theta(0) = 0 \quad (4.28a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (4.28b)$$

De maneira análoga, aplicando o primeiro variacional à expressão da energia total de deformação obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt = \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \frac{1}{2} \left[EI \int_0^L v'''^2 + 2u'' v' v'' + 3u' v''^2 - \frac{5}{2} v'^2 v''^2 \right] dx + \frac{1}{2} EA \int_0^L (-u' + \frac{1}{2} v'^2)^2 dx \right\} dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{ EI [2v'' \delta v'' + 2v' v'' \delta u'' + 2u'' v'' \delta v' + 2u' v' \delta v'' + 3v''^2 \delta u' + 6u' v'' \delta v'' - 5v' v''^2 \delta v' - 5v'^2 v'' \delta v''] + \\
& + EA [2u' \delta u' - (v')^2 \delta u' - 2u' v' \delta v' + v'^3 \delta v'] \} dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [EI (2v'' + 2u'' v' + 6u' v'' - 5v'^2 v'') \delta v'' + (EI (2u'' v'' - 5v' v''^2) + \\
& + EA(-2u' v' + v'^3)) \delta v' + EI(2v' v'') \delta u'' + (EI(3v''^2) + EA(2u' - v'^2)) \delta u'] dx \} dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes os termos em $\delta v''$, $\delta v'$, $\delta u''$ e $\delta u'$, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{ EI [-2v''' - 2u''' v' - 2u'' v'' - 6u' v''' - 6u' v''^2 + 10v' v''^2 + 5v'^2 v'''] \delta v' + \\
& + [EI (-2u''' v'' - 2u'' v''' + 5v''^3 + 10v' v'' v''') + EA(2u' v' + 2u' v'' - 3v'^2 v'')] \delta v + \\
& + [EI (-2v''^2 - 2v' v''') \delta u' + \\
& + [EI (-6v'' v''') + EA(-2u'' + 2v' v'')] \delta u \} dx \} dt
\end{aligned}$$

(4.29)

mais os termos de contorno :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ EI (2v'' + 2u'' v' + 6u' v'' - 5v'^2 v'') \delta v' \Big|_0^L + \\
& + [EI (2u' v'' - 5v' v''^2) + EA(-2u' v' + v'^3)] \delta v \Big|_0^L + \\
& + 2EI v' v'' \delta u' \Big|_0^L + [3EI v''^2 + EA(2u' - v'^2)] \delta u \Big|_0^L \} dt
\end{aligned}$$

(4.30)

De acordo com (4.24), (4.30) pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ [EI (2v'' + 2u''v' + 6u'v'' - 5v'^2v'') \delta v']_{x=0} + \\
& [EI (2v'' + 2u''v' + 6u'v'' - 5v'^2v'') \delta v']_{x=L} \} dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ [(EI (2u'v'' - 5v'v''^2) + EA(-2u'v' + v'^3)) \delta v]_{x=0} + \\
& [(EI (2u'v'' - 5v'v''^2) + EA(-2u'v' + v'^3)) \delta v]_{x=L} \} dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ [2EIv'v'' \delta u']_{x=0} + [2EIv'v'' \delta u']_{x=L} \} dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ [(3EIv''^2 + EA(2u' - v'^2)) \delta u]_{x=0} + \\
& [(3EIv''^2 + EA(2u' - v'^2)) \delta u]_{x=L} \} dt = 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Em $x = 0$, devido à condição de engastamento da estrutura, tem-se que $\delta u(0,t) = \delta u'(0,t) = \delta v(0,t) = \delta v'(0,t) = 0$. Portanto, para satisfazer (4.31) :

$$EI[v''(L,t) + u''(L,t)v'(L,t) + 3u'(L,t)v''(L,t) - \frac{5}{2}v'(L,t)^2v''(L,t)] = 0 \tag{4.32a}$$

$$EI[u''(L,t)v''(L,t) - \frac{5}{2}v'(L,t)v''(L,t)^2] + EA[-u'(L,t)v'(L,t) + \frac{1}{2}v'(L,t)^3] = 0 \tag{4.32b}$$

$$EIv'(L,t)v''(L,t) = 0 \tag{4.32c}$$

$$\frac{3}{2}EIv''(L,t)^2 + EA(u'(L,t) - \frac{1}{2}v'(L,t)^2) = 0 \tag{4.32d}$$

que representam condições de contorno adicionais para o problema.

Faz-se novamente a integração por partes, agora nos termos multiplicados por $\delta v'$ e $\delta u'$ em (4.29), resultando na expressão final para o primeiro variacional da energia total de deformação, V :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} V dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \{ [EI (2v^{iv} + 2u^{iv}v' + 10u^{''' }v'' + 14u''v^{''' } + \right. \\
&\quad + 6u'v^{iv} - 10v^{''3} - 30v'v''v^{''' } - 5v'^2v^{iv}) + \\
&\quad + EI (-2u^{''' }v'' - 2u''v^{''' } + 5v^{''3} + 10v'v''v^{''' }) + \\
&\quad + EA (2u'v' + 2u'v'' - 3v'^2v'')] \delta v \\
&\quad + [EI(4v''v^{''' } + 2v''v^{''' } + 2v'v^{iv}) + \\
&\quad + EI(-6v''v^{''' }) + EA(-2u'' + 2v'v'')]] \delta u \} dx \Big] dt
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

mais os termos de contorno adicionais:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ EI (-2v^{''' } - 2u^{''' }v' - 2u''v'' - 6u''v'' - 6u'v^{''' } + 10v'v''^2 + \\
&\quad + 5v'^2v^{''' }) \delta v \Big|_0^L + EI (-2v''^2 - 2v'v^{''' }) \delta u \Big|_0^L \} dt
\end{aligned}$$

os quais, de acordo com (4.24), podem ser reescritos como :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ EI (-2v^{''' } - 2u^{''' }v' - 2u''v'' - 6u''v'' - 6u'v^{''' } + 10v'v''^2 + \\
&\quad + 5v'^2v^{''' }) \delta v \Big|_{x=0} + [EI (-2v^{''' } - 2u^{''' }v' - 2u''v'' - 6u''v'' - 6u'v^{''' } + \\
&\quad + 10v'v''^2 + 5v'^2v^{''' }) \delta v \Big|_{x=L} \} dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \{ [EI (-2v''^2 - 2v'v^{''' }) \delta u \Big|_{x=0} + \\
&\quad + [EI (-2v''^2 - 2v'v^{''' }) \delta u \Big|_{x=L} \} dt = 0
\end{aligned}$$

Em $x = 0$, devido à condição de engastamento da estrutura, tem-se que $\delta u(0,t) = \delta v(0,t) = 0$. Portanto :

$$\begin{aligned}
&EI[-v^{''' }(L,t) - u^{''' }(L,t)v'(L,t) - 4u''(L,t)v''(L,t) - 3u'(L,t)v^{''' }(L,t) + \\
&\quad + 5v'(L,t)v''(L,t)^2 + \frac{5}{2}v'(L,t)^2v^{''' }(L,t)] = 0
\end{aligned}
\tag{4.34a}$$

$$EI[-v''(L,t)^2 - v'(L,t)v^{''' }(L,t)] = 0
\tag{4.34b}$$

Estas novas condições de contorno devem ser adicionadas às condições de contorno (4.32) obtidas anteriormente.

O trabalho dos esforços não conservativos consiste no trabalho desenvolvido pelo torque gerado pelo motor de corrente contínua para movimentar a carga a ele conectada, ou seja, a estrutura flexível de rastreamento, através do sistema de transmissão. Assim,

$$W_{nc} = T \theta$$

E o primeiro variacional do trabalho não conservativo torna-se :

$$\delta W_{nc} = T \delta \theta \quad (4.35)$$

Separando-se os termos em δv , δu e $\delta \theta$ nas expressões (4.26), (4.33) e (4.35) e utilizando a condição necessária para que o hamiltoniano (4.24) se anule, obtém-se as seguintes equações do movimento para o manipulador flexível de membro único e contínuo :

$$\int_0^L \left\{ \rho(-\ddot{\theta}v^2 - 2\dot{\theta}\dot{v} - \ddot{\theta}u^2 - 2\dot{\theta}u\dot{u} - \ddot{u}v + \ddot{v}u - \ddot{\theta}x^2 + 2\ddot{\theta}ux + \right. \\ \left. + 2\dot{\theta}\dot{u}x - \ddot{v}x) \right\} dx = T \quad (4.36a)$$

$$\rho(\ddot{\theta}^2 v + 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}x + \ddot{\theta}u - \ddot{v}) - EI(v^{iv} + u^{iv}v' + 4u'''v'' + 6u''v''' + 3u'v^{iv} - \\ - \frac{5}{2}v'^3 - 10v'v''v''' - \frac{5}{2}v'^2v^{iv}) - EA(u'v' + u'v'' - \frac{3}{2}v'^2v'') = 0 \quad (4.36b)$$

$$\rho(-\ddot{\theta}v - 2\dot{\theta}\dot{v} - \ddot{u} - \ddot{\theta}x + \ddot{\theta}^2u) - EI(v'v^{iv}) - EA(-u'' + v'v'') = 0 \quad (4.36c)$$

mais as condições de contorno :

$$\theta(0) = 0 \quad (4.37a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (4.37b)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (4.37c)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (4.37d)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (4.37e)$$

$$EI \left[\frac{1}{2} v''(L,t)^2 - v''(L,t)^2 - v'(L,t) v''''(L,t) \right] + EA(u'(L,t) - \frac{1}{2} v'(L,t)^2) = 0 \quad (4.37f)$$

$$EI \left[\frac{5}{2} v'(L,t) v''(L,t)^2 - v''''(L,t) - u''''(L,t) v'(L,t) - 3u''(L,t) v''(L,t) - \right. \\ \left. - 3u'(L,t) v''''(L,t) + \frac{5}{2} v'(L,t)^2 v''''(L,t) \right] + EA \left[-u'(L,t) v'(L,t) + \frac{1}{2} v'(L,t)^3 \right] = 0 \quad (4.37g)$$

$$EI[v'(L,t) v''(L,t)] = 0 \quad (4.37h)$$

$$EI[v''(L,t) + u''(L,t) v'(L,t) + 3u'(L,t) v''(L,t) - \frac{5}{2} v'(L,t)^2 v''(L,t)] = 0 \quad (4.37i)$$

4.7 - Adimensionalização das equações do movimento para a estrutura flexível de rastreamento considerando grandes deflexões

O primeiro passo no processo de adimensionalização das equações do movimento consiste em definir as novas variáveis independentes, ou seja, a variável espaço adimensional (x^*) e a variável tempo adimensional (t^*).

A variável espaço adimensional será definida como:

$$x = Lx^* \quad \text{ou} \quad x^* = \frac{1}{L}x$$

aonde L representa um comprimento característico do tipo de sistema em análise, por exemplo, o comprimento original da viga (não defletida).

Pode-se escrever também que :

$$dx = L dx^*$$

e, portanto $\int_0^L dx$ passa a $\int_0^1 L dx^*$.

A variável tempo adimensional será definida como:

$$t = T t^* \quad \text{ou} \quad t^* = \frac{1}{T} t$$

aonde T é um tempo característico do tipo de sistema em análise e que será definido posteriormente. Ver-se-á mais adiante que este tempo característico será considerado como o período de oscilação do sistema livre e não amortecido.

Desta forma, as derivadas parciais nas equações (4.36) podem ser reescritas em função das novas variáveis independentes.

Seja a variável dependente v (deslocamento transversal da viga flexível) e suas derivadas em relação ao espaço e ao tempo.

A derivada primeira de v em relação a x^* fica :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)$$

mas :

$$\frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{1}{L}$$

então, na nova variável independente :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \quad (4.38)$$

Da mesma maneira, a derivada segunda de v em relação a x^* fica :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \right]$$

Seja :

$$\kappa = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)$$

Então :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial x^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right) = \frac{1}{L} \frac{\partial \kappa}{\partial x^*} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \right]$$

Portanto :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) = \frac{1}{L^2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right]$$

E finalmente :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \quad (4.39)$$

De maneira análoga às derivadas primeira e segunda, segue que a derivada terceira de v em relação a x^* será :

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{1}{L^3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) \quad (4.40)$$

e a derivada quarta de v em relação a x^* será :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \quad (4.41)$$

O mesmo procedimento pode ser empregado para u e suas derivadas espaciais. Basta substituir v por u nas expressões (4.38)-(4.41).

De maneira análoga à efetuada em relação à variável independente espacial, em relação à variável independente temporal pode-se chegar a expressões como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) \quad (4.47)$$

As derivadas parciais dos parâmetros dependentes não adimensionalizados em relação aos novos parâmetros independentes adimensionalizados (expressões (4.38) - (4.47) deverão, nesta altura, ser introduzidas nas equações do movimento (4.36).

Desta forma, as equações (4.36) serão transformadas em :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \rho \left[-\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v^2 - 2 \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \frac{1}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) v - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u^2 - 2 \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) u - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) v + \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) u - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L^2 x^{*2} + 2 \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u L x^* + \right. \\ \left. + 2 \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) L x^* - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) L x^* \right] \right\} L dx^* = T \end{aligned} \quad (4.48a)$$

$$\rho \left[-\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L x^* + \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u + 2 \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v \Big] - EI \left[\frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) + \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}} \right) \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) + \right. \\
& + 4 \frac{1}{L^3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) + 6 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \frac{1}{L^3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) + 3 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) - \\
& - 10 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \frac{1}{L^3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \frac{1}{L^6} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \Big] - \\
& - EA \left[- \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.48b}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \left[- \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v - 2 \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \frac{1}{T} \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 L x^* + \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 u \right] - \\
& - EI \left[2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - EA \left[- 2 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) + 2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.48c}$$

Colocando-se termos em evidência nas equações (4.48), obtém-se :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{ \frac{\rho}{T^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) v - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) u - \right. \right. \\
& - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) v + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) u - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L^2 x^{*2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u L x^* + \\
& \left. \left. + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) L x^* - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) L x^* \right] \right\} L dx^* = T
\end{aligned}
\tag{4.49a}$$

$$\frac{\rho}{T^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L x^* + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{EI}{L^4} \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) + 4 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) + 6 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) + \right. \\
& + 3 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) - 10 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \\
& - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \left. - \frac{EA}{L^2} \left[-\frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \right] \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.49b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{T^2} \left[-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 L x^* + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 u \right] - \\
& - \frac{EI}{L^4} \left[2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{EA}{L^2} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) + 2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.49c}$$

Desta forma, todos os termos dentro dos colchetes em cada uma das expressões 4.49 passam a ter dimensão de metro (m), com exceção da primeira expressão (4.49a), que passa a ter dimensão de m².

Multiplica-se, então, cada uma das expressões (4.49) por $\frac{L^4}{EI}$, obtendo-se :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{ \frac{\rho L^4}{EIT^2} \left[-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) v - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) u - \right. \right. \\
& - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) v + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) u - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L^2 x^{*2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u L x^* + \\
& \left. \left. + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) L x^* - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) L x^* \right] \right\} L dx^* = T \frac{L^4}{EI}
\end{aligned}
\tag{4.50a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho L^4}{EI T^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L x^* + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v \right] - \\
& - \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) + 4 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) + 6 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) + \right. \\
& + 3 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) - 10 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \\
& - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \left. \right] - \frac{AL^2}{I} \left[- \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

(4.50b)

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho L^4}{EI T^2} \left[- \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 L x^* + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 u \right] - \\
& - \left[2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{AL^2}{I} \left[- 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) + 2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

(4.50c)

Os termos $\frac{\rho L^4}{EI T^2}$ e $\frac{AL^2}{I}$ que aparecem multiplicando o primeiro e o último colchetes

nas expressões 4.50, respectivamente, são adimensionais, pois :

$$\frac{\rho L^4}{EI T^2} = \frac{[kg / m][m^4]}{[N / m^2][m^4][s^2]} = [1]$$

$$\frac{AL^2}{I} = \frac{[m^2][m^2]}{[m^4]} = [1]$$

Então, fazendo :

$$\frac{\rho L^4}{EI T^2} = 1$$

pode-se dizer que $T^2 = \frac{\rho L^4}{EI}$. Logo,

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}}$$

que representa o período de oscilação do sistema linear livre de esforços e não amortecido.

As equações (4.50) serão, então, reescritas como :

$$\int_0^1 \left\{ \left[-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) v^2 - 2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t^*}\right) v - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) u^2 - 2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t^*}\right) u - \right. \right. \\ \left. -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}}\right) v + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}}\right) u - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) L^2 x^{*2} + 2\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) u L x^* + \right. \\ \left. + 2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t^*}\right) L x^* - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}}\right) L x^* \right] \right\} L dx^* = T \frac{L^4}{EI} \quad (4.51a)$$

$$\left[-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}}\right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) L x^* + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) u + 2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t^*}\right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right) v \right] - \\ - \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}}\right) + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right) + 4\frac{1}{L}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}\right) + 6\frac{1}{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}}\right) + \right. \\ \left. + 3\frac{1}{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}}\right) - 10\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}}\right) - \frac{5}{2}\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}\right)^3 - \right. \\ \left. - \frac{5}{2}\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right)^2\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}}\right) \right] - \frac{AL^2}{I} \left[-\frac{1}{L}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x^*}\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}}\right) \right] = 0$$

(4.51b)

$$\left[-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}}\right) v - 2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t^*}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}}\right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)^2 L x^* + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*}\right)^2 u \right] -$$

$$- \left[2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{AL^2}{I} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) + 2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0 \quad (4.51c)$$

Seja a frequência natural para a vibração transversal de uma viga engastada-livre (sistema linear, não amortecido e sem a influência de esforços externos) dada por:

$$f_T = \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \quad (4.52)$$

Consequentemente, o período associado a esta frequência será dado por:

$$T_T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \quad (4.53)$$

O período T_T será o tempo característico T que adimensionalizará a variável independente tempo, conforme visto anteriormente.

Da equação (4.52), o parâmetro pequeno de perturbação ϵ para o problema em análise estará associado com o termo $\frac{AL^2}{I}$.

Este termo pode ser reescrito como :

$$\frac{AL^2}{I} = \frac{AL^2}{Ar^2} = \frac{L^2}{r^2} = \frac{1}{\epsilon}$$

aonde r representa o raio de giração da área da secção reta (S) e L representa o comprimento da viga não deformada. Para uma viga típica, $\epsilon \ll 1$.

Portanto :

$$\boxed{\epsilon = \frac{r^2}{L^2}}$$

(4.54)

O próximo passo no sentido da adimensionalização das equações do movimento, agora, consistirá em definir as novas variáveis dependentes v , u e θ , as quais deverão ser substituídas nas equações (4.51), aqui reescritas incluindo o parâmetro ϵ :

$$\int_0^1 \left\{ \left[-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) v - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) u - \right. \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) v + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) u - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L^2 x^{*2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u L x^* + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) L x^* - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) L x^* \right] \right\} L dx^* = \Upsilon \frac{L^4}{EI}$$

(4.55a)

$$\left[-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) L x^* + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) u + 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t^*} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) v \right] - \\ - \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^{*4}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) + 4 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^{*3}} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) + 6 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) + \right. \\ \left. + 3 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) - 10 \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{1}{\epsilon} \left[-\frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x^*} \right) + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0$$

(4.55b)

$$\left[-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^{*2}} \right) v - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 L x^* + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} \right)^2 u \right] -$$

$$-\left[2\frac{1}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^{*4}}\right)\right] - \frac{1}{\epsilon}\left[-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^{*2}}\right) + 2\frac{1}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}\right)\right] = 0$$

(4.55c)

Sejam as variáveis dependentes dimensionais definidas em função das variáveis dependentes adimensionais como :

$$v = \epsilon L v^* \quad \text{ou} \quad v = \left(\frac{r^2}{L}\right) v^* \quad (4.56)$$

$$u = \epsilon^2 L u^* \quad \text{ou} \quad u = \frac{r^4}{L^3} u^* \quad (4.57)$$

$$\theta = \epsilon \theta^* \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{r^2}{L^2} \theta^* \quad (4.58)$$

Substituindo (4.56) - (4.58) em (4.55a)-(4.55c) :

$$\int_0^1 \left\{ \left[-\left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) \left(\frac{r^4}{L^2} \right) v^{*2} - 2 \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial t^*} \right) \left(\frac{r^2}{L} \right) v^* - \right. \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) \left(\frac{r^8}{L^6} u^{*2} \right) - 2 \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial t^*} \right) \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) \left(\frac{r^2}{L} v^* \right) + \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right) - \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) L^2 x^{*2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right) L x^* + 2 \left[\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right] \left[\frac{\partial \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial t^*} \right] L x^* - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial t^{*2}} \right] L x^* \right] \Bigg\} L dx^* = \Upsilon \frac{L^4}{EI}
\end{aligned}$$

(4.59a)

$$\begin{aligned}
& \left[- \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial t^{*2}} \right] - \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \right] L x^* + \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \right] \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right) + \right. \\
& + 2 \left[\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right] \left[\frac{\partial \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial t^*} \right] + \left[\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right] \left[\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right] \left(\frac{r^2}{L} v^* \right) \Bigg] - \left[\left[\frac{\partial^4 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*4}} \right] \right. \\
& + \frac{1}{L} \left[\frac{\partial^4 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^{*4}} \right] \left[\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^*} \right] + + 4 \frac{1}{L} \left[\frac{\partial^3 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^{*3}} \right] \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right] + \\
& 6 \frac{1}{L} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^{*2}} \right] \left[\frac{\partial^3 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*3}} \right] + + 3 \frac{1}{L} \left[\frac{\partial \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^*} \right] \left[\frac{\partial^4 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*4}} \right] - \\
& \left. 10 \frac{1}{L^2} \left[\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^*} \right] \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right] \left[\frac{\partial^3 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*3}} \right] - \frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right]^3 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{2} \frac{1}{L^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^4 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{1}{L} \left[-\frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^4 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^{*4}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

(4.59b)

$$\begin{aligned}
& \left[-\left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) \left(\frac{r^2}{L} v^* \right) - 2 \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial t^{*2}} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right)^2 L x^* + \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L^2} \theta^* \right)}{\partial t^*} \right)^2 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right) - 2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{L} \left[-2 \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^4}{L^3} u^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) + 2 \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{r^2}{L} v^* \right)}{\partial x^{*2}} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

(4.59c)

As expressões (4.59) podem ser reescritas como :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{ \left[-\left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) v^{*2} - 2 \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) v^* - \right. \right. \\
& - \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) u^{*2} - 2 \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \right) u^* - \\
& \left. - \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \right) v^* + \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} \right) u^* - \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) x^{*2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) u^* x^* + 2 \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \right) x^* - \left(\frac{r^2}{1} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} \right) x^* \Big] \Big\} L dx^* = \\
& = \mathbf{T} \frac{L^4}{EI}
\end{aligned} \tag{4.60a}$$

$$\begin{aligned}
& \left[- \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} \right) - \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) x^* + \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) u^* + \right. \\
& + 2 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \right) + \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) v^* \Big] - \\
& - \left[\left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \right) + \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^4 u^*}{\partial x^{*4}} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + 4 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*3}} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) + \right. \\
& + 6 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v^*}{\partial x^{*3}} \right) + 3 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \right) - \\
& - 10 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial^3 v^*}{\partial x^{*3}} \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right)^3 - \\
& - \frac{5}{2} \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \right) \Big] - \frac{1}{\epsilon} \left[- \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \right. \\
& + \frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*3}} \right) \Big] = 0
\end{aligned}$$

(4.60b)

$$\begin{aligned}
& \left[- \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^{*2}} \right) v^* - 2 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) - \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \right) - \right. \\
& - \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right)^2 x^* + \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{r^4}{L^4} \right) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right)^2 u^* \Big] - \\
& - \left[2 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \right) \right] - \frac{1}{\epsilon} \left[- 2 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right) + \right. \\
& + 2 \left(\frac{r^2}{L} \right) \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) \Big] = 0
\end{aligned}$$

(4.60c)

Em (4.60a)-(4.60c), substitui-se $\left(\frac{r^2}{L^2}\right)$ por ϵ , $\left(\frac{r^4}{L^4}\right)$ por ϵ^2 e assim por diante. As expressões resultantes deverão ser multiplicadas por $\frac{1}{r^2 L}$ (primeira expressão) ou por $\frac{L}{r^3}$ (segunda e terceira expressões) a fim de se eliminar os termos comuns e obter-se a expressão final.

Os parâmetros adimensionais serão, a partir daqui, por simplicidade, retratados sem o asterisco (*).

As equações do movimento (4.36) adimensionalizadas tornam-se, então :

$$\int_0^1 \left\{ -\ddot{\theta} x^2 - \ddot{v} x + \epsilon^2 \left(-\ddot{\theta} v^2 - 2 \dot{\theta} \dot{v} v - \ddot{u} v + \ddot{v} u + 2 \ddot{\theta} u x + \dot{\theta} \dot{u} x \right) - \epsilon^4 \left(\ddot{\theta} u^2 + 2 \dot{\theta} \dot{u} u \right) \right\} dx = T \frac{L}{EI} \frac{1}{\epsilon} = T_{ADIM} \quad (4.61a)$$

$$\ddot{v} + v^{IV} + \ddot{\theta} x + \epsilon^2 \left(-\dot{\theta}^2 v - 2 \dot{\theta} \dot{u} - \ddot{\theta} u + u^{IV} v' + 4 u''' v'' + 6 u'' v''' + 3 u' v^{IV} - 10 v' v'' v''' - \frac{5}{2} v''^3 - \frac{5}{2} v'^2 v^{IV} \right) - \epsilon \left(-v'' u' - \dot{v}' u'' + \frac{3}{2} v'^2 v'' \right) = 0 \quad (4.61b)$$

$$\epsilon \left(\ddot{u} + \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta} v + 2 \dot{\theta} \dot{v} - 2 v' v^{IV} \right) + \epsilon^3 \left(\dot{\theta}^2 u \right) - 2 \left(u' - \frac{1}{2} v'^2 \right)' = 0 \quad (4.61c)$$

Na primeira das equações (4.61), o termo de $O(\epsilon^4)$ será desconsiderado, assim como, na terceira das equações (4.61) o termo $\dot{\theta}^2 u$ será desconsiderado por ser de $O(\epsilon^3)$. Resultando :

$$\int_0^1 \left\{ -\ddot{\theta} x^2 - \ddot{v} x + \epsilon^2 \left(-\ddot{\theta} v^2 - 2\dot{\theta}\dot{v}v - \ddot{u}v + \ddot{v}u + 2\ddot{\theta}ux + \dot{\theta}\dot{u}x \right) \right\} dx = \mathbf{T}_{\text{ADM}} \quad (4.62a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + v^{iv} + \ddot{\theta}x + \epsilon^2 \left(-\dot{\theta}^2 v - 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}u + u^{iv}v' + 4u'''v'' + 6u''v''' + 3u'v^{iv} - \right. \\ & \left. - 10v'v''v''' - \frac{5}{2}v''^3 - \frac{5}{2}v'^2v^{iv} \right) - \epsilon \left(-v''u' - v'u'' + \frac{3}{2}v'^2v'' \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.62b)$$

$$\epsilon \left(\ddot{u} + \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta}v + 2\dot{\theta}\dot{v} - 2v'v^{iv} \right) - 2 \left(u' - \frac{1}{2}v'^2 \right)' = 0 \quad (4.62c)$$

mais as condições de contorno adimensionalizadas :

$$\theta(0) = 0 \quad (4.63a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (4.63b)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (4.63c)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (4.63d)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (4.63e)$$

$$u'(1,t) - \frac{1}{2}v'(1,t)^2 + \epsilon \left[-\frac{1}{2}v''(1,t)^2 - 2v'(1,t)v'''(1,t) \right] = 0 \quad (4.63f)$$

$$\begin{aligned} & -2v'''(1,t) + \epsilon \left[-2u'(1,t)v'(1,t) + v'(1,t)^3 \right] + \epsilon^2 \left[5v'(1,t)v''(1,t)^2 - \right. \\ & \left. - 2u'''(1,t)v'(1,t) - 6u''(1,t)v''(1,t) - 6u'(1,t)v'''(1,t) + \right. \\ & \left. + 5v'(1,t)^2v'''(1,t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.63g)$$

$$\epsilon [v'(1,t)v''(1,t)] = 0 \quad (4.63h)$$

$$v''(1,t) + \epsilon^2 [u''(1,t)v'(1,t) + 3u'(1,t)v''(1,t) - \frac{5}{2}v'(1,t)^2v''(1,t)] = 0 \quad (4.63i)$$

4.8 - Separação de variáveis e determinação dos campos de deslocamento

Da equação do movimento (4.62c) segue que:

$$\left(u' - \frac{1}{2} v'^2 \right)' = \frac{1}{2} \in (-\ddot{u} - \dot{\theta}^2 x - \ddot{\theta} v - 2\dot{\theta}\dot{v} + 2v'v'') \quad (4.63)$$

$$\left(u' - \frac{1}{2} v'^2 \right)' = 0(\epsilon) \quad (4.64)$$

Portanto:

$$u' - \frac{1}{2} v'^2 = F(t) + 0(\epsilon) \quad (4.65)$$

A inclusão da função exclusiva do tempo, o termo $F(t)$, advém do fato de o mesmo desaparecer quando se deriva (4.65) em relação ao espaço para se obter (4.64).

Contudo, as condições de contorno em δu [(4.63f)] :

$$u'(1,t) - \frac{1}{2} v'(1,t)^2 = \in \left[\frac{1}{2} v''(1,t)^2 + 2v'(1,t)v'''(1,t) \right] \quad (4.66)$$

requerem que $F(t)=0$, pois não depende de nenhuma função exclusiva da variável independente tempo. Caso $F(t)=0$, então, tanto $\left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)$ quanto $\left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)'$ serão $0(\epsilon)$.

Logo:

$$u' - \frac{1}{2} v'^2 = 0(\epsilon) \quad (4.67)$$

Resultando:

$$u'' = v'v'' + O(\epsilon) \quad (4.68)$$

$$u''' = v''^2 + v'v''' + O(\epsilon) \quad (4.69)$$

$$u^{iv} = 3v''v''' + v'v^{iv} + O(\epsilon) \quad (4.70)$$

Substituindo as expressões (4.67) - (4.70) na equação do movimento (4.62b), obtém-se:

$$\ddot{v} + v^{iv} + \ddot{\theta}x + \epsilon^2 \left[-\dot{\theta}^2 v - 2\dot{\theta}\dot{u} - \ddot{\theta}u + 3v'v''v''' + \frac{3}{2}v''^3 \right] - \epsilon \left[v' \left(-u' + \frac{1}{2}v'^2 \right) \right]' = 0 \quad (4.71)$$

O último termo é realmente de $O(\epsilon^2)$ porque $\left(-u' + \frac{1}{2}v'^2 \right) = O(\epsilon)$, ou seja, utilizando (4.66):

$$\begin{aligned} -\epsilon \left[v' \left(-u' + \frac{1}{2}v'^2 \right) \right] &= \epsilon \left[v' \left(u' - \frac{1}{2}v'^2 \right) \right] = \\ &= \epsilon \{ v' [\epsilon [\frac{1}{2}v''(1,t)^2 + 2v'(1,t)v'''(1,t)] \} = \\ &= \epsilon^2 \{ v' [\frac{1}{2}v''(1,t)^2 + 2v'(1,t)v'''(1,t)] \} \end{aligned}$$

Seja a condição de contorno (4.63i) reproduzida a seguir :

$$v''(1,t) + \epsilon^2 [u''(1,t)v'(1,t) + 3u'(1,t)v''(1,t) - \frac{5}{2}v'(1,t)^2v''(1,t)] = 0$$

Substituindo as derivadas de u de acordo com (4.67) e (4.68) obtém-se :

$$v''(1,t) + \epsilon^2 [v'(1,t)^2v''(1,t) + \frac{3}{2}v'(1,t)^2v''(1,t) - \frac{5}{2}v'(1,t)^2v''(1,t)] = 0$$

$$v''(1,t) + \epsilon^2 \left[(v'(1,t)^2 + \frac{3}{2} v'(1,t)^2 - \frac{5}{2} v'(1,t)^2) v''(1,t) \right] = 0 \quad (4.72)$$

$$\text{mas: } v'(1,t)^2 + \frac{3}{2} v'(1,t)^2 - \frac{5}{2} v'(1,t)^2 = 0$$

Então :

$$v''(1,t) = 0 \quad (4.73)$$

Seja a condição de contorno (4.63g) reproduzida a seguir :

$$\begin{aligned} -v'''(1,t) + \epsilon \left[-u'(1,t)v'(1,t) + \frac{1}{2} v'(1,t)^3 \right] + \epsilon^2 \left[-\frac{\tau}{2} \dot{\theta} u(1,t) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} v'(1,t)v''(1,t)^2 - u'''(1,t)v'(1,t) - 3u''(1,t)v''(1,t) - 3u'(1,t)v'''(1,t) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Novamente, substituindo u e suas derivadas [(4.67) - (4.70)] :

$$\begin{aligned} -v'''(1,t) + \epsilon \left[-\frac{1}{2} v'(1,t)^3 + \frac{1}{2} v'(1,t)^3 \right] + \epsilon^2 \left[-\frac{\tau}{2} \dot{\theta} u(1,t) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} v'(1,t)v''(1,t)^2 - v'(1,t)v''(1,t)^2 - v'(1,t)^2 v'''(1,t) - \right. \\ \left. - 3v'(1,t)v''(1,t)^2 - \frac{3}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) + \frac{5}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -v'''(1,t) + \epsilon^2 \left[-\frac{\tau}{2} \dot{\theta} u(1,t) + \frac{5}{2} v'(1,t)v''(1,t)^2 - \right. \\ \left. - v'(1,t)v''(1,t)^2 - v'(1,t)^2 v'''(1,t) - 3v'(1,t)v''(1,t)^2 - \frac{3}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -v'''(1,t) + \epsilon^2 \left[\frac{5}{2} v'(1,t)v''(1,t)^2 - v'(1,t)v''(1,t)^2 - v'(1,t)^2 v'''(1,t) - \right. \\ \left. - 3v'(1,t)v''(1,t)^2 - \frac{3}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) + \frac{5}{2} v'(1,t)^2 v'''(1,t) \right] = 0 \end{aligned}$$

ou :

$$v'''(1,t) + \epsilon^2 \left(\frac{3}{2} v'(1,t) v'''(1,t)^2 \right) = 0$$

A qual é satisfeita se:

$$v'''(1,t) = 0 \quad (4.74)$$

De acordo com (4.67) sabe-se que:

$$u' = \frac{1}{2} v'^2 + O(\epsilon) \quad (4.75)$$

A deflexão $v(x,t)$ pode ser escrita como uma expansão da seguinte forma :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad (4.76)$$

Aonde $\phi_i(x)$ representa cada um dos modos naturais lineares não amortecidos do sistema (ou seja, os modos normais do problema linearizado) e $q_i(t)$ representa cada uma das coordenadas generalizadas de deflexão.

A forma destes modos pode ser obtida analiticamente caso o problema seja simples ou numericamente caso o problema seja complicado em geometria, condições de contorno e composição.

Substituindo (4.76) nas equações governantes do movimento e utilizando a propriedade de ortogonalidade dos modos $\phi_i(x)$, obtem-se um conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias não lineares para $q_i(t)$. O problema temporal é usualmente resolvido utilizando-se um método de perturbação tal como o método do balanço harmônico, a técnica de Lindstedt-Poincaré, o método da média ou o método das múltiplas escalas.

Tomando como base a equação (4.71), pode-se escrever a equação do problema linearizado fazendo-se $\epsilon = 0$. Para uma viga engastada, tem-se também $\theta = 0$. Portanto, obtem-se a equação comumente encontrada na literatura:

$$\ddot{v} + v^{iv} = 0 \quad (4.77)$$

Substituindo v em (4.77) pela expansão em (4.76), obtém-se:

$$\ddot{q}_i(t) \phi_i(x) + q_i(t) \phi^{iv}(x) = 0$$

ou:

$$\ddot{q}_i(t) \phi_i(x) = -q_i(t) \phi^{iv}(x)$$

$$-\frac{\ddot{q}_i(t)}{q_i(t)} \phi_i(x) = \phi^{iv}(x) \quad (4.78)$$

De acordo com (4.78), $-\frac{\ddot{q}_i(t)}{q_i(t)}$ é uma constante. Seja esta constante igual a w_i^2 , aonde

w_i representa cada uma das frequências naturais do problema linearizado.

Assim,

$$w_i^2 \phi_i(x) = \phi^{iv}(x)$$

ou:

$$\phi^{iv}(x) - w_i^2 \phi_i(x) = 0 \quad (4.79)$$

As funções $\phi_i(x)$ são soluções do problema de autovalores e autovetores (4.79), aonde, para um problema engastado-livre:

$$\phi_i(0) = 0 \quad (4.80a)$$

$$\phi_i'(0) = 0 \quad (4.80b)$$

$$\phi_i''(1) = 0 \quad (4.80c)$$

$$\phi_i'''(1) = 0 \quad (4.80d)$$

Assim, utilizando (4.75) e expandindo v através da expressão (4.76):

$$u' = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N [q_i(t) \phi_i(x)]' \right\}^2 + O(\epsilon)$$

$$u' = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N [q_i(t) \phi_i'(x)] \right\}^2 + O(\epsilon)$$

$$u' = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \phi_i' \phi_j' \right\} + O(\epsilon)$$

Integrando em relação a x :

$$u = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \left[\int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi \right] \right\} + O(\epsilon) + G(t) \quad (4.81)$$

Derivando a expressão acima em relação ao tempo:

$$\dot{u} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{q}_i q_j R_{ij}(x) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \dot{q}_j R_{ij}(x) \right\}$$

mas, como $ij = ji$:

$$\ddot{u} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \dot{q}_j R_{ij} \quad (4.82)$$

aonde :

$$R_{ij}(x) = \int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi = R_{ji}(x) \quad (4.83)$$

Derivando (4.82) em relação ao tempo :

$$\ddot{u} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{q}_i \dot{q}_j R_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \ddot{q}_j R_{ij} \quad (4.84)$$

Para $u(0) = 0$, $G(t) = 0$

Portanto, seja:

$$\left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' = \left[\ddot{u} + \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta} v + 2\dot{\theta} \dot{v} - v' v'' \right] \quad (4.85)$$

Substituindo (4.76) e (4.84) em (4.85):

$$\begin{aligned} \left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)' = & \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_i q_j + \dot{q}_i \dot{q}_j) R_{ij} + \dot{\theta}^2 x + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N (\ddot{\theta} q_i + 2\dot{\theta} \dot{q}_i) \phi_i 0 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \phi_i' \phi_j'' \right\} + 0(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Onde, de acordo com (4.79) considera-se que:

$$\phi_i^{iv} = w_i^2 \phi_i$$

Integrando (4.86) de 0 a x , obtém-se :

$$\begin{aligned} -u' + \frac{1}{2} v'^2 = & \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_i q_j + \dot{q}_i \dot{q}_j) S_{ij}(x) + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 x^2 + \sum_{i=1}^N (\ddot{\theta} q_i + 2\dot{\theta} \dot{q}_i) V_i(x) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_j^2 q_i q_j W_{ij}(x) - H(t) \right\} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Aonde $H(t)$ é escolhido tal que $-u' + \frac{1}{2} v'^2 = 0$ em $x = 1$, pois em (4.73) mostrou-se que $v'' = 0$ em $x = 1$ e em (4.74) mostrou-se que $v''' = 0$ em $x = 1$.

Pode-se incorporar $H(t)$ nas definições de S_{ij} , V_i e W_{ij} , pois quando $x = 1$, deve-se ter $S_{ij}(1) = V_i(1) = W_{ij}(1) = 0$, a fim de que as condições de contorno sejam satisfeitas.

Então:

$$\begin{aligned} S_{ij}(x) &= \int_0^x R_{ij}(\eta) d\eta - \int_0^1 R_{ij}(\eta) d\eta \\ S_{ij}(x) &= -\int_x^1 \left[\int_0^\eta \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi \right] d\eta \end{aligned} \quad (4.88)$$

Portanto, $S_{ij}(1) = 0$.

$$\begin{aligned} V_i(x) &= \int_0^x \phi_i(\xi) d\xi - \int_0^1 \phi_i(\xi) d\xi \\ V_i(x) &= -\int_x^1 \phi_i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.89)$$

Portanto, $V_i(1)=0$

$$W_{ij}(x) = \int_0^x \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi - \int_0^1 \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi$$

$$W_{ij}(x) = - \int_x^1 \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi \quad (4.90)$$

Portanto, $W_{ij}(1) = 0$

Sejam as equações (4.62a) e (4.71) reproduzidas a seguir:

$$\int_0^1 \left\{ -\ddot{\theta} x^2 - \ddot{v} x + \epsilon^2 \left(-\ddot{\theta} v^2 - 2\dot{\theta} \dot{v} v - \ddot{u} v + \ddot{v} u + 2\ddot{\theta} u x + \dot{\theta} \dot{u} x \right) \right\} dx = \mathbf{T}_{ADIM}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + v^{iv} + \ddot{\theta} x + \epsilon^2 \left[-\ddot{\theta}^2 v - 2\dot{\theta} \ddot{u} - \ddot{\theta} \dot{u} + 3v' v'' v''' + \frac{3}{2} v''^3 \right] - \\ & - \epsilon v'' \left(-u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) - \epsilon v' \left(-u' + \frac{1}{2} v' \right)' = 0 \end{aligned}$$

Substituindo (4.76), (4.81), (4.82), (4.83), (4.86) e (4.87) em (4.62a) e (4.71):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ -\ddot{\theta} x^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ddot{q}_i \phi_i \right) x + \epsilon^2 \left[-\ddot{\theta} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \phi_i \phi_j \right) - 2 \dot{\theta} \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \phi_i \right) \left(\sum_{i=1}^N q_i \phi_i \right) - \right. \right. \\ & - \left(\sum_{i=1}^N q_i \phi_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{q}_i \dot{q}_j R_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \ddot{q}_j R_{ij} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \ddot{q}_i \phi_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} q_i q_j R_{ij} \right) + \\ & \left. \left. + 2\ddot{\theta} x \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} q_i q_j R_{ij} \right) + \dot{\theta} x \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \dot{q}_j R_{ij} \right) \right] \right\} dx = \mathbf{T}_{ADIM} \end{aligned}$$

(4.91a)

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N (\ddot{q}_i + w_i^2 q_i) \phi_i + \ddot{\theta} x + \epsilon^2 \left[-\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N q_i \phi_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[2\dot{\theta} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i q_j + \frac{1}{2} q_i \dot{q}_j \right) + \ddot{\theta} \left(\frac{1}{2} q_i q_j \right) \right] R_{ij} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_i q_j q_k \left[3\phi_i' \phi_j'' \phi_k''' + 3\phi_i'' \phi_j' \phi_k''' \right] - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_i q_j q_k \left[w_j^2 W_{ij} \phi_k'' + w_j^2 \phi_i' \phi_j' \phi_k' \right] - \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N q_i (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k) \left[S_{jk} \phi_i'' + R_{jk} \phi_i' \right] - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\ddot{\theta} q_i q_j + 2\dot{\theta} \dot{q}_i \dot{q}_j \right] \left(\phi_i'' V_j + \phi_i' \phi_j' \right) - \\
& \left. - \sum_{i=1}^N \dot{\theta}^2 q_i \left(\frac{1}{2} x^2 \phi_i'' + x \phi_i' \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.91b}$$

Multiplica-se, então, a expressão (4.91b) por ϕ_i , valendo-se da propriedade de ortogonalização dos modos. Desta maneira, as equações (4.91b) ficarão desacopladas em relação à variável espacial ϕ_i e acopladas somente em relação às variáveis temporais q_i .

A seguir, integra-se, (4.91a) e (4.91b) de $x = 0$ a $x = 1$, obtendo-se as expressões finais para as equações governantes do movimento para as coordenadas generalizadas temporais θ e q_i :

$$\begin{aligned}
& \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \Xi_i \ddot{q}_i + \epsilon^2 \left[\ddot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_{ij} (q_i q_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{ijk} \left(\dot{q}_i \dot{q}_j q_k + \frac{1}{2} q_i q_j \ddot{q}_k \right) - \right. \\
& \left. - \dot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} (\dot{q}_i q_j) \right] = \mathbf{T}_{ADIM}
\end{aligned} \tag{4.92a}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_i + w_i^2 q_i + \alpha_i \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[-\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{it} q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\varphi_{ijt} \dot{\theta} q_i \dot{q}_j + \lambda_{ijt} \ddot{\theta} q_i q_j \right) - \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk} q_i (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk} q_i q_j q_k \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.92b}$$

aonde:

$$\Xi_i = \int_0^1 3(x\phi_i) dx \quad (4.93)$$

$$\mathcal{G}_{ij} = \int_0^1 3(\phi_i\phi_j - xR_{ij}) dx \quad (4.94)$$

$$A_{ijk} = \int_0^1 3(\phi_k R_{ij}) dx \quad (4.95)$$

$$\Delta_{ij} = \int_0^1 3(2\phi_i\phi_j - xR_{ij}) dx \quad (4.96)$$

$$\alpha_\ell = \int_0^1 x\phi_\ell dx \quad (4.97)$$

$$\beta_\ell = \int_0^1 \left(\phi_i + x\phi_i' + \frac{1}{2}x^2\phi_i'' \right) \phi_\ell dx \quad (4.98)$$

$$\wp_{ij\ell} = \int_0^1 (2R_{ij} + 2\phi_i'\mathbf{V}_j + 2\phi_i'\phi_j') \phi_\ell dx \quad (4.99)$$

$$\lambda_{ij\ell} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}R_{ij} + \phi_i'\mathbf{V}_j + \phi_i'\phi_j' \right) \phi_\ell dx \quad (4.100)$$

$$\Lambda_{ijk} = \int_0^1 (S_{jk}\phi_i'' + R_{jk}\phi_i') \phi_\ell dx \quad (4.101)$$

$$\Gamma_{ijk\ell} = \int_0^1 \left[3\phi_i'\phi_j''\phi_k''' + \frac{3}{2}\phi_i'\phi_j''\phi_\ell'' + w_j^2(\phi_i'\phi_j\phi_k' + W_{ij}\phi_k'') \right] \phi_\ell dx \quad (4.102)$$

mais as condições de contorno :

$$\theta(0) = 0 \quad (4.103a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (4.103b)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (4.103c)$$

$$v'(0,t) = 0 \quad (4.103d)$$

$$v'''(1,t) = 0 \quad (4.103e)$$

$$v''(1,t) = 0 \quad (4.103f)$$

Na expressão 4.92a, o parâmetro T_{ADIM} será substituído, no próximo capítulo, por $N_g T_M$, aonde N_g representa a relação de transmissão entre o atuador e a estrutura ($N_g : 1$) e T_M representa o torque adimensionalizado gerado no motor e expresso através das equações dinâmicas do motor de corrente contínua desenvolvidas no apêndice A. As equações completas *motor-transmissão mecânica-estrutura flexível* considerando grandes deflexões serão então obtidas e utilizadas para simulação.

4.9 - Determinação dos fatores de forma

Os fatores de forma (modos próprios) e as frequências naturais para o manipulador flexível podem ser verificados analiticamente a partir da solução da equação da viga (4.79).

Resolvendo-se a equação da viga com as condições de contorno de acordo com o modelo adotado, ou seja :

$$\phi(0) = 0 \quad (4.104a)$$

$$\phi'(0) = 0 \quad (4.104b)$$

$$\phi''(L) = 0 \quad (4.104c)$$

$$\phi'''(L) = 0 \quad (4.104d)$$

obtém-se uma equação transcendental do tipo :

$$\phi_i(x) = \cosh(a_i x) - \cos(a_i x) - \alpha_i (\sinh(a_i x) - \sin(a_i x)) \quad (4.105)$$

aonde:

$$\alpha_i = \frac{\cosh(a_i L) + \cos(a_i L)}{\sinh(a_i L) + \sin(a_i L)} \quad (4.106)$$

que representa a equação dos autovalores do sistema livre e não amortecido.

A substituição de (4.105) e (4.106) nas condições de contorno (4.104) leva a :

$$\cos(a_i L) \cosh(a_i L) + 1 = 0 \quad (4.107)$$

aonde $a_i L$ representa cada uma das raízes da expressão acima e está associado aos autovalores do sistema livre e não amortecido. O número de raízes da equação (4.107) é infinito. Geralmente trabalha-se apenas com os três primeiros modos próprios do sistema e, pode-se mostrar, utilizando-se uma técnica de tentativa e erro, por exemplo, que as três primeiras raízes desta equação são dadas por:

$$a_1 = \frac{1.88}{L} \quad (4.108a)$$

$$a_2 = \frac{4.69}{L} \quad (4.108b)$$

$$a_3 = \frac{7.85}{L} \quad (4.108c)$$

Com os valores de $a_i L$ pode-se determinar a frequência natural do sistema em rad/s através da expressão:

$$w_i = (a_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} \quad (4.109)$$

aonde μ representa a densidade do material da viga por unidade de comprimento.

Obtendo-se w_i , a conversão da frequência natural em Hz deverá ser efetuada através de:

$$\text{freq}_i = 0.1592 w_i \quad (4.110)$$

Desta maneira serão determinadas as frequências naturais para o braço do manipulador flexível modelado como viga engastada livre.

O sistema completo constituído do braço associado a uma carga na extremidade livre deverá ser analisado em um trabalho futuro de doutoramento. Nesta situação, a análise torna-se muito mais complexa e o sistema não poderá mais ser analisado no plano.

Os valores encontrados para a_i (através dos valores de $a_i L$ determinados pela expressão (4.107) ou diretamente através das expressões (4.108)) devem ser inseridos na expressão (4.105) para os modos (autovetores).

4.10 - Equações adimensionais do movimento para a estrutura flexível de rastreamento considerando pequenas deflexões

No capítulo 3 foram desenvolvidas as equações do movimento para o mesmo sistema considerando-se pequenas deflexões [(3.19a) e (3.19b)]. Estas equações são reproduzidas a seguir :

$$\int_0^1 \left\{ \rho [\ddot{\theta} v^2 + 2\dot{\theta} \dot{v} + \ddot{\theta} x^2 + \ddot{v} x] \right\} dx = T \quad (4.111)$$

$$\rho [\dot{\theta}^2 v - \ddot{\theta} x - \ddot{v}] - EI v^{iv} = 0 \quad (4.112)$$

mais as condições de contorno:

$$EIv'''(L,t) = 0 \quad (4.113a)$$

$$EIv'' = 0 \quad (4.113b)$$

Seguindo o mesmo procedimento efetuado para grandes deformações, as equações (4.111) e (4.112) na forma adimensionalizada tornam-se :

$$\int_0^1 \left\{ \ddot{\theta} x^2 + x\ddot{v} + \epsilon^2 [v^2 \ddot{\theta} + 2v\dot{v}\dot{\theta}] \right\} dx = T_{ADM} \quad (4.114a)$$

$$\ddot{v} + x\ddot{\theta} + v''' - \epsilon^2 [v\dot{\theta}^2] = 0 \quad (4.114b)$$

Fazendo a expansão para $v(x,t)$ em (4.114a) e (4.114b), multiplicando (4.114b) por um modo ortogonal e integrando (4.114a) e (4.114b) de $x = 0$ a $x = 1$, obtém-se :

$$\ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \Xi_i \ddot{q}_i + \epsilon^2 [2\dot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathfrak{I}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathfrak{I}_{ij} q_i q_j] = T_{ADM} \quad (4.115a)$$

$$\ddot{q}_\ell + w_\ell^2 q_\ell + \alpha_\ell \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N X_{i\ell} q_i] = 0 \quad (4.115b)$$

aonde:

$$\Xi_i = \int_0^1 3(x\phi_i) dx \quad (4.116)$$

$$\mathfrak{I}_{ij} = \int_0^1 3\phi_i \phi_j dx \quad (4.117)$$

$$\alpha_\ell = \int_0^1 x\phi_\ell dx \quad (4.118)$$

$$X_{i\ell} = \int_0^1 \phi_i \phi_\ell dx \quad (4.119)$$

mais as condições de contorno adimensionalizadas :

$$v'''(1,t) = 0 \quad (4.120a)$$

$$v''(1,t) = 0 \quad (4.120b)$$

4.11 - Observações finais e conclusões

A teoria desenvolvida neste capítulo, da maneira como foi aqui apresentada, não é encontrada na literatura. Geralmente omite-se passos e/ou deixa-se indicado os procedimentos utilizados. Pelo cuidado empregado no desenvolvimento deste trabalho, contudo, paga-se um preço. Haja visto o número de páginas necessário para que se desenvolva a teoria com o maior número de detalhes possível.

A maior complexidade da teoria desenvolvida neste capítulo em relação àquela desenvolvida no capítulo 3 é transparente. Perceba-se que para se chegar às equações finais, tanto para pequenas quanto para grandes deflexões, os mesmos passos básicos foram seguidos (e estes podem ser verificados nos fluxogramas do capítulo 2).

É importante (e interessante), no entanto, notar que se trata do mesmo sistema modelado de duas formas diferentes, com considerações diversas. O modelo adotado pode ser o mais complexo que se possa imaginar, porém, fica a questão : é necessário complicar tanto ?

Em alguns tipos de sistemas, modelos simplificados podem fazer com que efeitos não lineares possam passar despercebidos ou pode fazer com que não consigam ser explicados.

No próximo capítulo busca-se entender um pouco mais acerca desta questão.

Capítulo 5

Análise comparativa das respostas considerando pequenas deflexões e grandes deflexões (estudo de casos)

5.1 - Pequenas deflexões e grandes deflexões : contribuições

Quando são feitas as considerações inclusas no capítulo 4, em oposição àquelas feitas no capítulo 3, termos são adicionados às equações do movimento para a estrutura flexível de rastreamento encontradas neste último. Estes termos são adicionados devido às novas considerações feitas para a curvatura da estrutura flexível (acrescentando não linearidades quadráticas e cúbica) e devido à inclusão da deformação longitudinal u ao modelo para grandes deflexões.

Comparando-se as equações para θ para pequenas deflexões (3.19a ou 4.111) com as equações para θ considerando grandes deflexões (4.36a), observa-se que, nesta última, aparecem os seguintes termos adicionais:

$$\in^2 \left\{ \ddot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathfrak{g}_{ij}^* (q_i q_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{ijk} \left(\dot{q}_i \dot{q}_j q_k + \frac{1}{2} q_i q_j \ddot{q}_k \right) - \dot{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^* (\dot{q}_i q_j) \right\} \quad (5.1)$$

aonde :

$$\mathfrak{g}_{ij}^* = - \int_0^1 3x R_{ij} dx$$

$$\Delta_{ij}^* = - \int_0^1 x R_{ij} dx$$

e A_{ijk} é o mesmo parâmetro definido anteriormente no capítulo 3.

Da mesma maneira, comparando-se as equações para v considerando pequenas deflexões (3.19b ou 4.112) e considerando grandes deflexões (4.36b), observa-se, nesta última, em comparação à primeira, a inclusão dos termos :

$$\in^2 \left\{ -\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^N \beta_{i\ell}^* q_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\wp_{ij\ell} \dot{\theta} q_i \dot{q}_j + \lambda_{ij\ell} \ddot{\theta} q_i q_j \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Lambda_{ijk\ell} q_i \left(\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \ddot{q}_k \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk\ell} q_i q_j q_k \right\} = 0 \quad (5.2)$$

aonde :

$$\beta_{i\ell}^* = \int_0^1 \left(x \phi_i' + \frac{1}{2} x^2 \phi_i'' \right) \phi_\ell dx$$

e $\wp_{ij\ell}$, $\lambda_{ij\ell}$, Λ_{ijk} e $\Gamma_{ijk\ell}$ são os mesmos parâmetros definidos anteriormente no capítulo 4.

5.2 - Equações do movimento para truncamento no primeiro modo : pequenas deflexões

Considerando apenas um modo na expansão de v e pequenas deflexões, obtém-se as seguintes equações do movimento :

$$\ddot{\theta} + \Xi_1 \ddot{q}_1 + \epsilon^2 [2 \mathfrak{I}_{11} \dot{\theta} \dot{q}_1 q_1 + \mathfrak{I}_{11} \ddot{\theta} q_1^2] = T_{ADM} \quad (5.3)$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [\dot{\theta}^2 X_{11} q_1] = 0 \quad (5.4)$$

aonde:

$$\Xi_1 = \int_0^l 3(x\phi_1) dx \quad (5.5)$$

$$\mathfrak{I}_{11} = \int_0^l 3\phi_1^2 dx \quad (5.6)$$

$$\alpha_1 = \int_0^l x\phi_1 dx \quad (5.7)$$

$$X_{11} = \int_0^l \phi_1^2 dx \quad (5.8)$$

mais as condições de contorno :

$$EI v'''(L, t) = 0 \quad (5.9)$$

$$EI v''(L, t) = 0 \quad (5.10)$$

Os parâmetros (5.5) - (5.8) não dependem das propriedades físicas e/ou geométricas de um sistema específico, valendo para uma classe de sistemas que possuam as mesmas condições de

contorno do problema em questão. Estes parâmetros são funções dos fatores de forma da estrutura em análise. A grande vantagem aqui é que estes mesmos parâmetros só precisam ser calculados uma única vez e pode-se estudar uma gama de sistemas afins. As propriedades geométricas de um sistema específico entrarão no equacionamento via parâmetro adimensional ϵ (para relembrar : $\epsilon = \frac{r^2}{L^2}$, aonde r = raio de giração da secção transversal da viga (estrutura flexível) e L = comprimento da viga (ao longo da sua maior extensão)) e via frequência natural do sistema livre e não amortecido w_l .

Utilizando os fatores de forma definidos nos capítulos 3 e 4, os parâmetros (5.5) - (5.8) podem ser reescritos como :

$$\Xi_1 = 1.293830$$

$$\Im_{11} = 1.734040$$

$$\alpha_1 = 0.431275$$

$$X_{11} = 0.578013$$

E as equações (5.3) e (5.4) tornam-se :

$$\ddot{\theta} + 1.293830\ddot{q}_1 + \epsilon^2 [3.468080\dot{\theta}\dot{q}_1q_1 + 1.734040\ddot{\theta}q_1^2] = T_{ADIM}$$

$$\ddot{q}_1 + w_l^2 q_1 + 0.431275\ddot{\theta} - \epsilon^2 [0.578013\dot{\theta}^2 q_1] = 0$$

Com a inclusão do motor, o termo T_{ADIM} será substituído por :

$$T_{ADIM} = T_{BRAÇO} \frac{L}{EI} \frac{1}{\epsilon}$$

$$T_{\text{ADIM}} = N_g T_{\text{MOTOR}} \frac{L}{EI} \frac{1}{\epsilon}$$

$$T_{\text{ADIM}} = N_g \left[\frac{K_M}{R_A N_g} U - \frac{K_M K_B}{R_A N_g} \dot{\theta}_{\text{MOTOR}} \right] \frac{L}{EI} \frac{1}{\epsilon}$$

$$T_{\text{ADIM}} = \left(\frac{K_M L}{R_A EI \epsilon} \right) U - \left(\frac{K_M K_B N_g L}{R_A EI \epsilon} \right) \dot{\theta}_{\text{BRAÇO}}$$

Desta forma, as equações do movimento para o sistema *motor-transmissão mecânica-estrutura flexível (pequenas deflexões)* tornam-se :

$$\ddot{\theta} + 1.293830 \ddot{q}_1 + \epsilon^2 [3.468080 \dot{\theta} \dot{q}_1 q_1 + 1.734040 \ddot{\theta} q_1^2] = \left(\frac{K_M L}{R_A EI \epsilon} \right) U - \left(\frac{K_M K_B N_g L}{R_A EI \epsilon} \right) \dot{\theta}_{\text{BRAÇO}} \quad (5.11)$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + 0.431275 \ddot{\theta} - \epsilon^2 [0.578013 \dot{\theta}^2 q_1] = 0 \quad (5.12)$$

Na equação do motor aqui apresentada negligenciou-se o termo $J N_g \ddot{\theta}_{\text{MOTOR}}$.

O parâmetro U que aparece em (5.11) representa o perfil de potencial para o motor do tipo proposto na figura 2.2.

5.3 - Equações do movimento para truncamento no primeiro modo: grandes deflexões

Sejam as equações finais do movimento. Considerando apenas um modo e grandes deflexões :

$$\ddot{\theta} + \Xi_1 \ddot{q}_1 + \epsilon^2 \left[\vartheta_{11} \ddot{\theta} q_1^2 + A_{111} \left(\dot{q}_1^2 q_1 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{q}_1 \right) - \Delta_{11} \dot{\theta} \dot{q}_1 q_1 \right] = T_{ADIM} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + \alpha_1 \ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[-\beta_{11} \dot{\theta}^2 q_1 - \wp_{111} \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 + \lambda_{111} \ddot{\theta} q_1^2 + \Gamma_{1111} q_1^3 - \right. \\ \left. - A_{1111} \left(\dot{q}_1^2 q_1 + q_1^2 \ddot{q}_1 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

aonde:

$$\Xi_1 = \int_0^1 3(x\phi_1) dx \quad (5.15)$$

$$\vartheta_{11} = \int_0^1 3(\phi_1 \phi_1 - x R_{11}) dx \quad (5.16)$$

$$A_{111} = \int_0^1 3(\phi_1 R_{11}) dx \quad (5.17)$$

$$\Delta_{11} = \int_0^1 3(2\phi_1 \phi_1 - x R_{11}) dx \quad (5.18)$$

$$\alpha_1 = \int_0^1 x \phi_1 dx \quad (5.19)$$

$$\beta_{11} = \int_0^1 \left(\phi_1'^2 + x \phi_1' \phi_1 + \frac{1}{2} x^2 \phi_1'' \phi_1 \right) dx \quad (5.20)$$

$$\rho_{111} = \int_0^1 \left(2R_{11} \phi_1 + 2\phi_1'' \phi_1 V_1 + 2\phi_1' \phi_1'^2 \right) dx \quad (5.21)$$

$$\lambda_{11} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} R_{11} \phi_1 + \phi_1'' \phi_1 V_1 + \phi_1' \phi_1'^2 \right) dx \quad (5.22)$$

$$\Lambda_{111} = \int_0^1 \left(S_{11} \phi_1'' \phi_1 + R_{11} \phi_1' \phi_1 \right) dx \quad (5.23)$$

$$\Gamma_{1111} = \int_0^1 \left[3\phi_1' \phi_1'' \phi_1''' \phi_1 + \frac{3}{2} \phi_1''^3 \phi_1 + w_1^2 (\phi_1'^2 \phi_1'^2 + W_{11} \phi_1'' \phi_1) \right] dx \quad (5.24)$$

mais as condições de contorno :

$$\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$$

$$u(0,t) = v(0,t) = v'(0,t) = 0$$

$$v''(L,t) = 0$$

$$v'''(L,t) = 0$$

Da mesma maneira que o discutido no item 5.2 , os parâmetros (5.15) - (5.24) podem ser reescritos como :

$$\Xi_1 = 1.293830$$

$$\mathcal{G}_1 = -0.372553$$

$$A_{111} = 2.881820$$

$$\Delta_{11} = 1.361490$$

$$\alpha_1 = 0.431275$$

$$\beta_{11} = 1.627820$$

$$\varphi_{111} = 3.842440$$

$$\lambda_{111} = 1.440920$$

$$\Lambda_{111} = 1.616860$$

$$\Gamma_{1111} = -12.2261 + w_1^2 (2.09352)$$

E as expressões (5.13) e (5.14) apresentam-se como :

$$\ddot{\theta} + 1.293830\ddot{q}_1 + \epsilon^2 \left[-0.372553\ddot{\theta} \dot{q}_1^2 + 2.881820 \left(\dot{q}_1^2 q_1 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{q}_1 \right) - 1.361490 \dot{\theta} \dot{q}_1 q_1 \right] = \mathbf{T}_{ADIM}$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + 0.431275\ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[-1.627820 \dot{\theta}^2 q_1 - 3.842440 \dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 - 1.440920 \ddot{\theta} q_1^2 + (-12.2261 + w_1^2 (2.09352)) q_1^3 - 1.616860 (\dot{q}_1^2 q_1 + q_1^2 \ddot{q}_1) \right] = 0$$

As equações do movimento para o sistema *motor-transmissão mecânica-estrutura flexível (grandes deflexões)* tornam-se :

$$\ddot{\theta} + 1.293830\ddot{q}_1 + \epsilon^2 \left[-0.372553\ddot{\theta} \dot{q}_1^2 + 2.881820 \left(\dot{q}_1^2 q_1 + \frac{1}{2} q_1^2 \ddot{q}_1 \right) - 1.361490 \dot{\theta} \dot{q}_1 q_1 \right] = \left(\frac{K_M L}{R_A EI \epsilon} \right) U - \left(\frac{K_M K_B N_g L}{R_A EI \epsilon} \right) \dot{\theta}_{BRAÇO} \quad (5.23)$$

$$\ddot{q}_1 + w_1^2 q_1 + 0.431275\ddot{\theta} + \epsilon^2 \left[-1.627820\dot{\theta}^2 q_1 - 3.842440\dot{\theta} q_1 \dot{q}_1 - 1.440920\ddot{\theta} q_1^2 + \right. \\ \left. + (-12.2261 + w_1^2(2.09352))q_1^3 - 1.616860(\dot{q}_1^2 q_1 + q_1^2 \ddot{q}_1) \right] = 0 \quad (5.24)$$

Valem as mesmas observações feitas para o equacionamento considerando pequenas deflexões.

5.4 - Equação do movimento para estrutura rígida

Um outro caso que pode ser comparado aos casos dos itens (5.2) e (5.3) diz respeito ao modelo da estrutura tratada como rígida. Para este caso, a equação do movimento torna-se :

$$I_{zz} \ddot{\theta} = T \quad (5.25)$$

aonde I_{zz} representa a inércia de corpo rígido da viga (braço) em torno do eixo do eixo de rastreamento. Adimensionalizando 5.25 :

$$\ddot{\theta} = T_{\text{BRAÇO}} \frac{L}{EI} \frac{1}{\epsilon} \frac{\rho L^3}{I_{zz}}$$

$$\ddot{\theta} = T_{\text{ADIM}} \frac{\rho L^3}{I_{zz}}$$

e incluindo o motor, tem-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{\rho L^3}{I_{zz}} \left\{ \left(\frac{K_M L}{R_A EI \epsilon} \right) U - \left(\frac{K_M K_B N_g L}{R_A EI \epsilon} \right) \dot{\theta}_{\text{BRAÇO}} \right\}$$

5.5 - Simulação das equações do movimento : rígido, pequenas deflexões e grandes deflexões

As equações (5.11)-(5.12), (5.23)-(5.24) e (5.25) tentou-se numa primeira abordagem resolver numericamente valendo-se do recurso de diagramas de blocos do software SIMULINK™. A utilização do referido software visou a obtenção de primeiros resultados acerca do comportamento do sistema.

Devido à complexidade da malha para grandes deflexões (considerando truncamento em apenas um modo !), ao acumulo de erros quando se considerava tempos grandes de simulação e à lentidão da simulação (passos da ordem de 10^{-5} eram necessários) este recurso foi abandonado. Em uma análise futura, quando se considerasse truncamento no segundo modo, a análise através deste software (SIMULINK™) seria praticamente impossível.

Em vista desta dificuldade, programou-se dois métodos numéricos de integração em pascal. Os métodos programados foram : Runge-Kutta de 4ª ordem e previsor-corretor de Adams-Moulton. Devido às características das equações do movimento encontradas, um método de integração tipo previsor-corretor era necessário. Como métodos deste tipo não se inicializam sozinhos, o método de Runge-Kutta foi desenvolvido justamente para fornecer os três primeiros pontos. Uma vez que se dispunha de ambos os métodos, os mesmos foram utilizados e as soluções obtidas foram comparadas para os diferentes métodos.

Vários tipos de secções retas foram utilizadas nas simulações. Desta forma, tentou-se trabalhar com casos extremos de estruturas aparentemente não tão flexíveis (caso 1) e estruturas aparentemente muito flexíveis (caso 3). No caso 2 avaliou-se o comportamento da estrutura utilizadas no protótipo experimental.

Na figura 5.1 apresenta-se as dimensões utilizadas nas simulações para a geometria da viga de alumínio (braço do manipulador flexível).

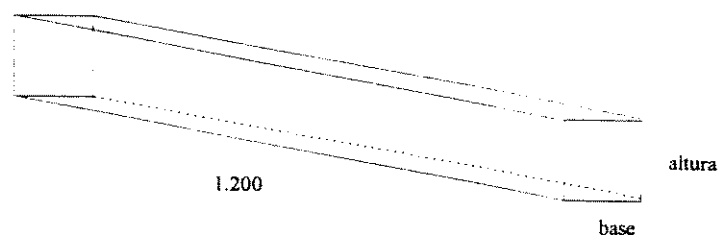


Figura 5.1 - Dimensões utilizadas nas simulações -

altura : 0.030, 0.01905, 0.010 ; base :

0.025, 0.01207, 0.007 (respectivamente).

As simulações foram realizadas valendo-se dos dois modelos apresentados neste trabalho para a flexibilidade da estrutura de rastreamento (pequenas deflexões e grandes deflexões) e ainda valendo-se de um modelo aonde a flexibilidade da estrutura não é considerada (caso rígido). Este último modelo, extremamente mais simples, será utilizado para a comparação do deslocamento angular para os três casos.

Em vista das dimensões da secção transversal, três valores para o pequeno parâmetro de perturbação ϵ são considerados : $\epsilon = 0.0000361690$, $\epsilon = 0.0000093339$, $\epsilon = 0.0000028356$.

Basicamente três tipos de gráficos são apresentados para cada um dos casos citados: inicialmente apresenta-se o perfil de potencial utilizado para o caso em análise (quanto maior a inércia do braço, maior o torque necessário e, consequentemente, maior a tensão necessária no acionador), então compara-se o deslocamento angular do braço para cada um dos modelos estudados e através de cada um dos métodos de integração mencionados e finalmente compara-se a variável de deflexão temporal $q_1(t)$ para cada um dos modelos que considera a flexibilidade do

sistema e novamente para cada um dos métodos de integração. Para o caso rígido foi utilizado apenas o método de Runge-Kutta.

Para o caso 1 (mais rígido dos três casos), a teoria de pequenas deflexões fornece resultados satisfatórios para o deslocamento angular da estrutura, não importando o método de integração utilizado. Para o modelo de grandes deflexões, o método de integração predictor-corretor fornece resultados díspares em relação ao método de integração de Runge-Kutta de 4ª ordem.

A amplitude do parâmetro θ , segundo o predictor-corretor, para este caso, é desprezível em relação à amplitude obtida pelo outro método de integração (Runge-Kutta). O resultado do predictor-corretor aparece na figura 5.5 como uma linha sobre o eixo das abscissas. A forma exata desta curva não foi plotada aqui.

Para a variável de deflexão $q_1(t)$ os resultados foram extremamente diferentes em amplitude e forma quando se compara cada um dos modelos entre si. Para pequenas deflexões os dois métodos de integração fornecem resultados próximos. Isso não ocorre para grandes deflexões. As amplitudes obtidas para $q_1(t)$ para os dois modelos envolvendo flexibilidade são plotadas uma contra a outra na figura 5.8. As amplitudes fornecidas para o modelo de grandes deflexões são desprezíveis em comparação àquelas fornecidas pelo modelo para pequenas deflexões. Cabe lembrar que trata-se do mesmo sistema modelado por teorias diferentes (considerando pequenas ou grandes curvaturas).

Para o caso 2 (utilizando valores do protótipo experimental), praticamente não houve alterações nos resultados fornecidos pelo modelo de pequenas deflexões, não importando o método de integração utilizado. As oscilações na curva $\theta \times$ tempo aumentaram.

Para o modelo de grandes deflexões os resultados tornaram-se melhores que os obtidos no caso 1. Os modelos para pequena se grandes deflexões comparados entre si fornecem novamente

resultados díspares. O sistema, agora, é mais flexível que no caso anterior (menor relação entre espessura e comprimento da viga).

Para o caso 3, o mais flexível de todos, os resultados para o modelo de pequenas deflexões se alteram para a variável de deflexão $q_1(t)$, embora os dois métodos de integração voltem a concordar aparentemente bem.

Para o modelo de grandes deflexões os resultados tornam-se melhores ainda. A diferença entre os dois modelos torna-se menos agravante.

Se os resultados do método de Runge-Kutta forem comparados para ambos os modelos os resultados parecem concordar melhor que quando se compara os resultados via previsor-corretor.

No caso da integração via Runge Kutta de 4ª ordem, ocorrem diferenças de amplitude e frequência entre a resposta fornecida pelo modelo de pequenas e grandes deflexões para $q_1(t)$, embora estas mesmas respostas sejam mais próximas.

CASO 1

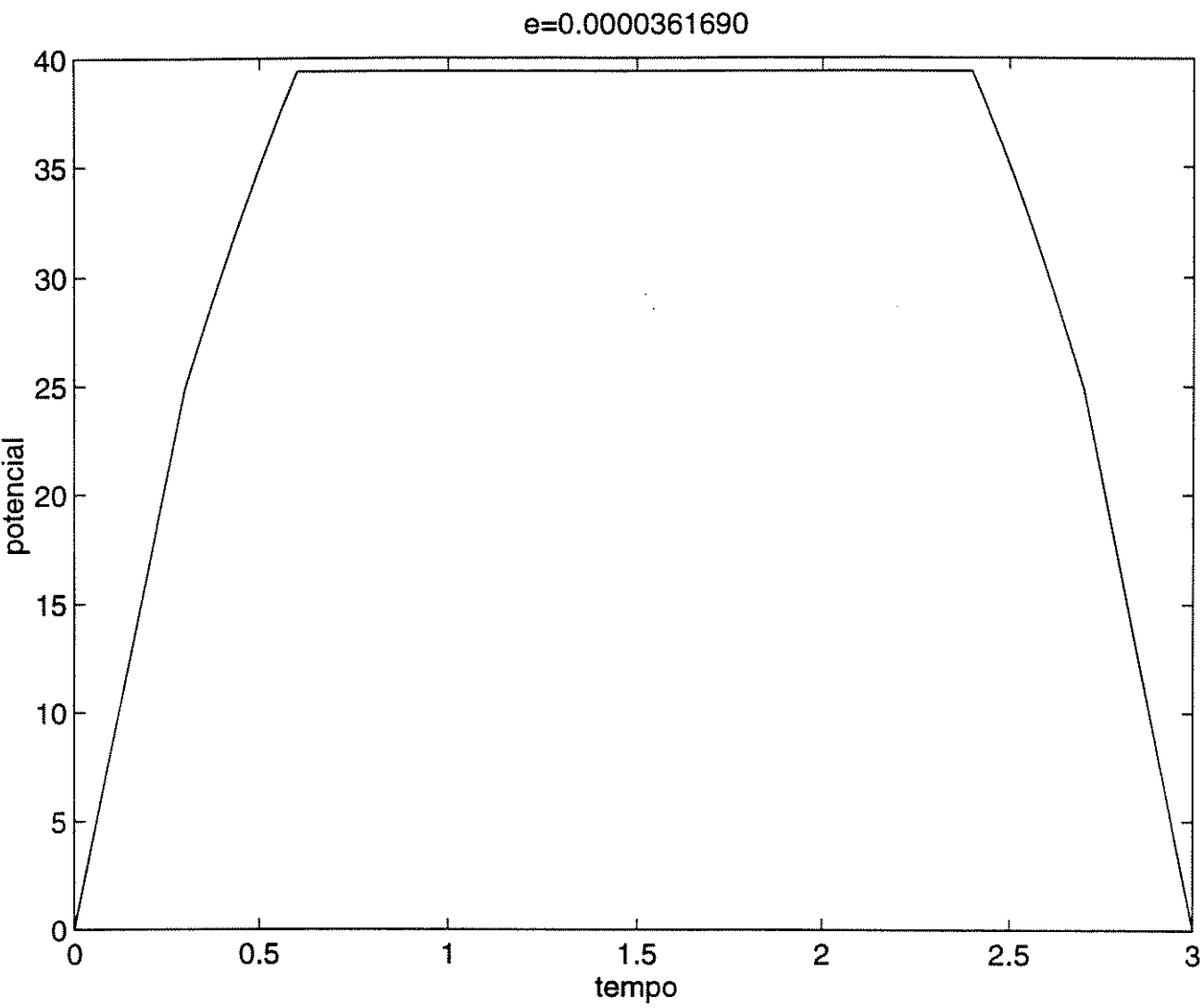


Figura 5.2 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor cc) para o caso 1
($\epsilon = 0.0000361690$)

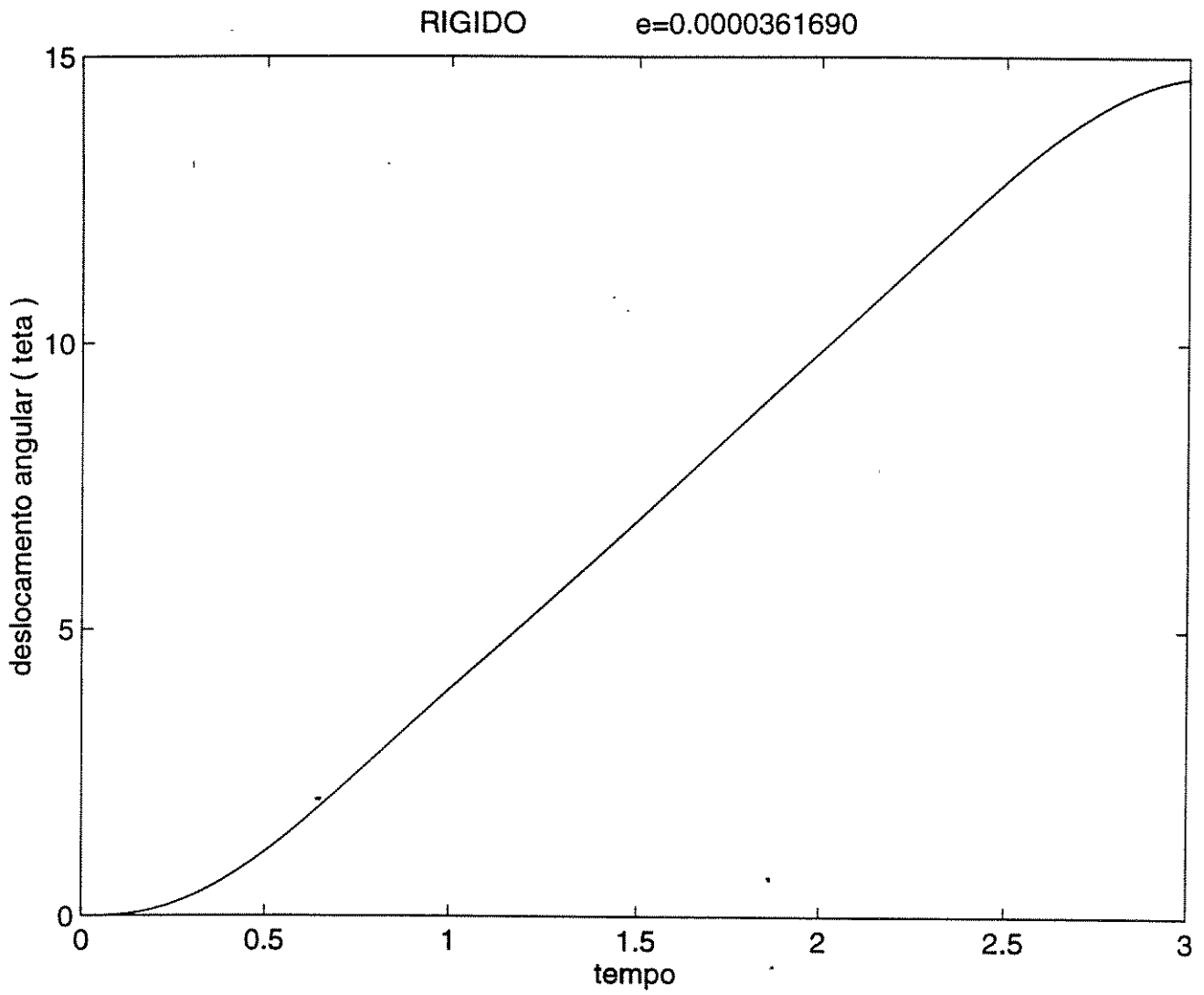


Figura 5.3 - Deslocamento angular (teta) considerando o modelo de corpo rígido
($\epsilon = 0.0000361690$)

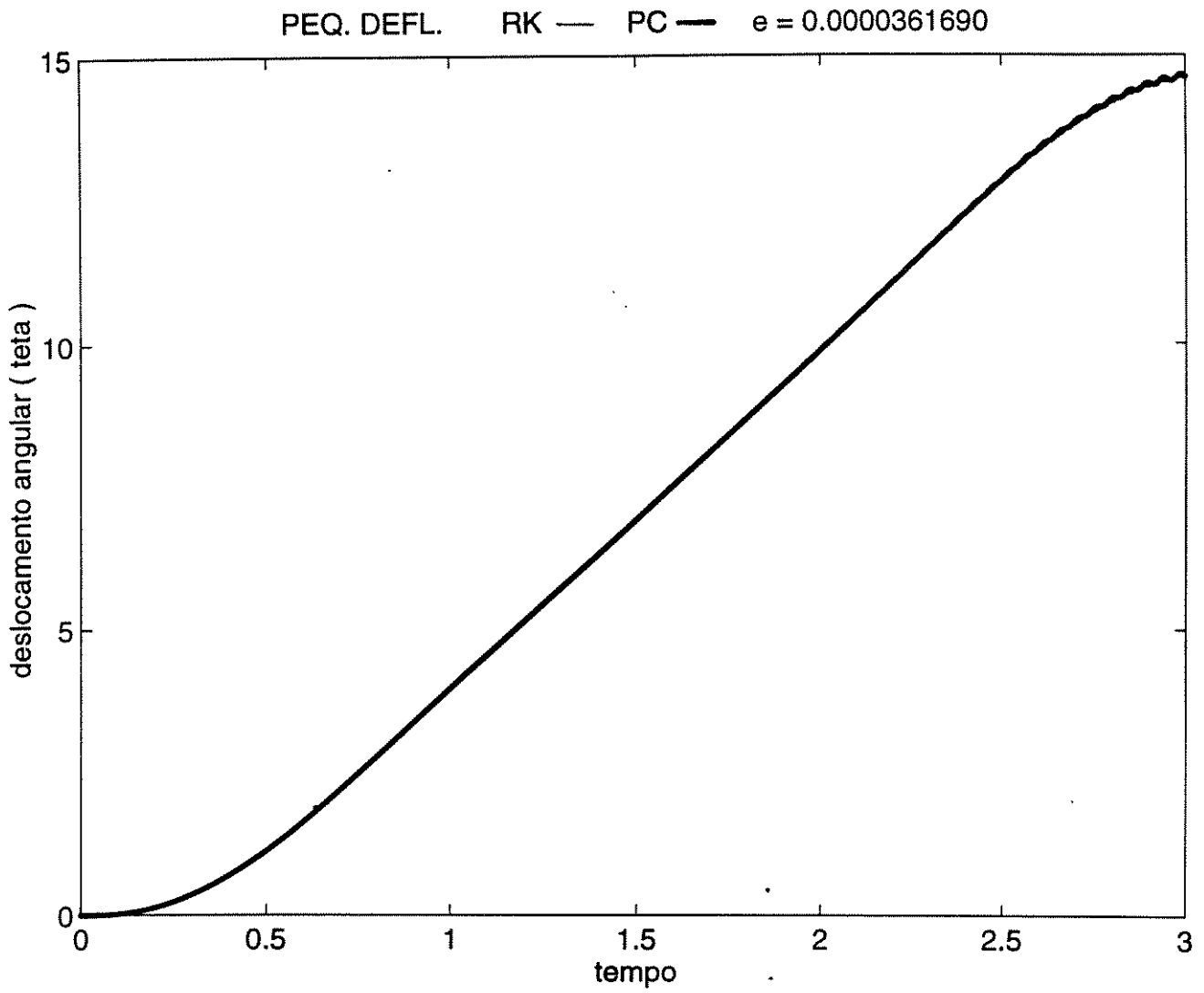


Figura 5.4 - Deslocamento angular (teta) considerando o modelo de pequenas deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).

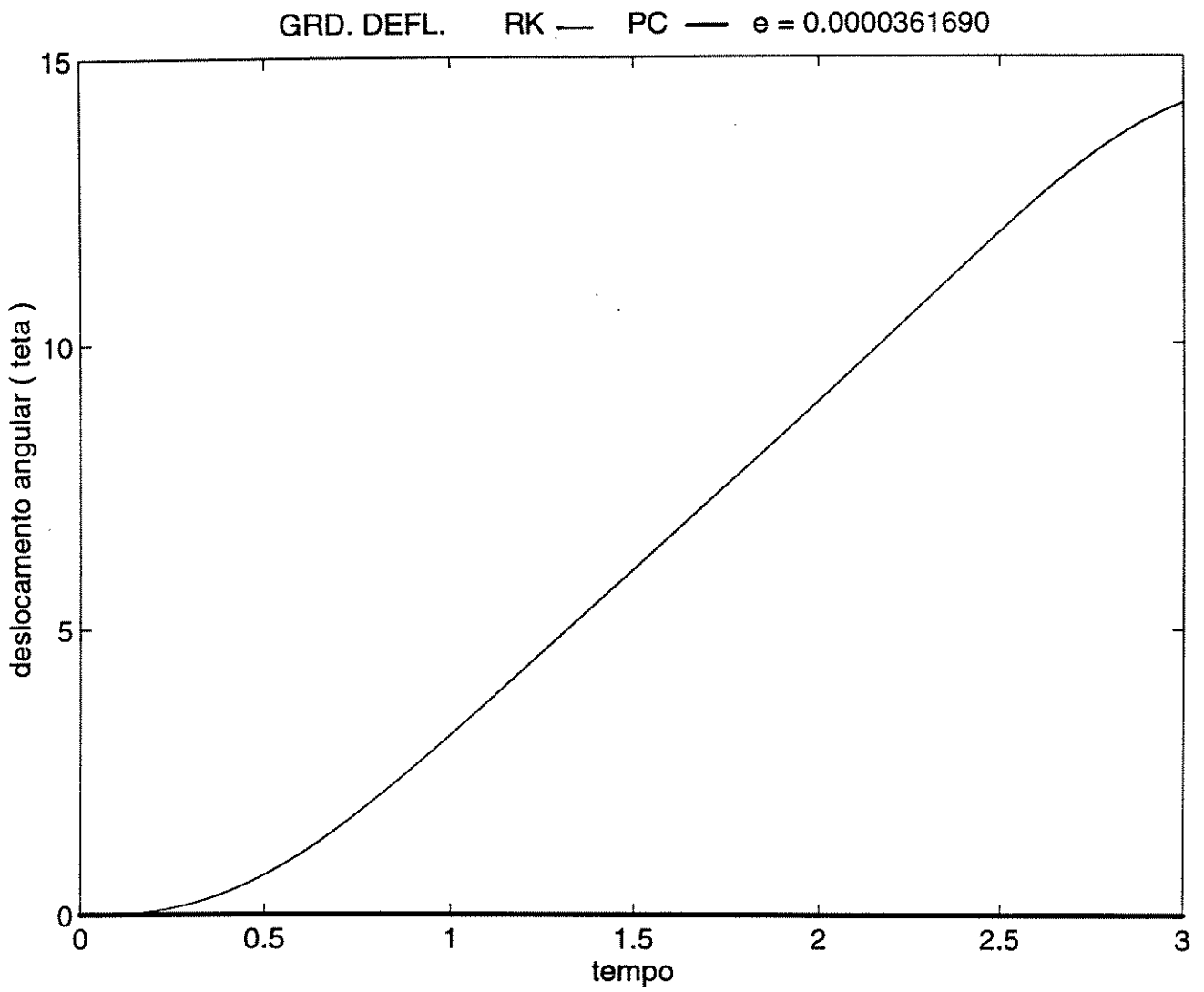


Figura 5.5 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de grandes deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).

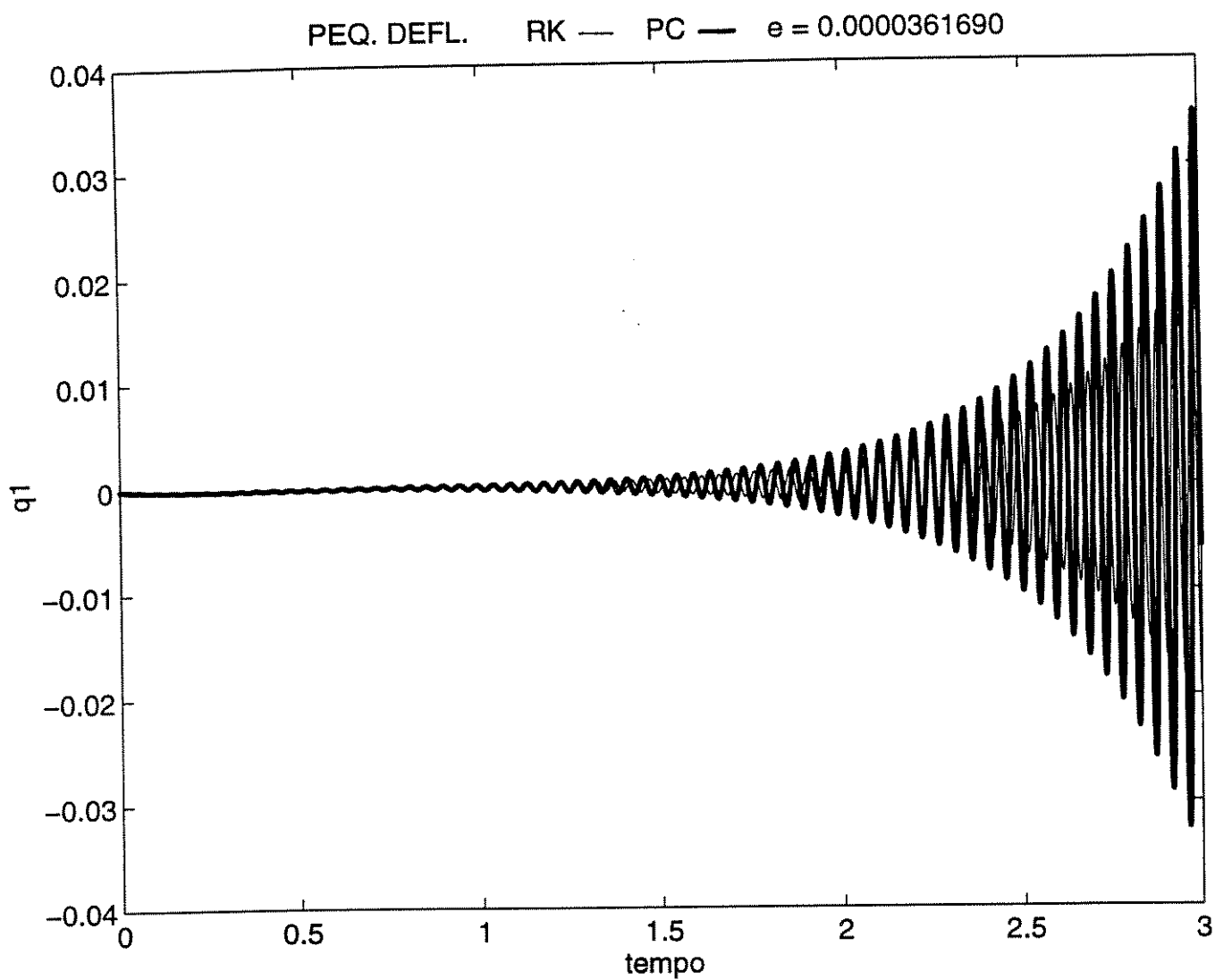


Figura 5.6 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).

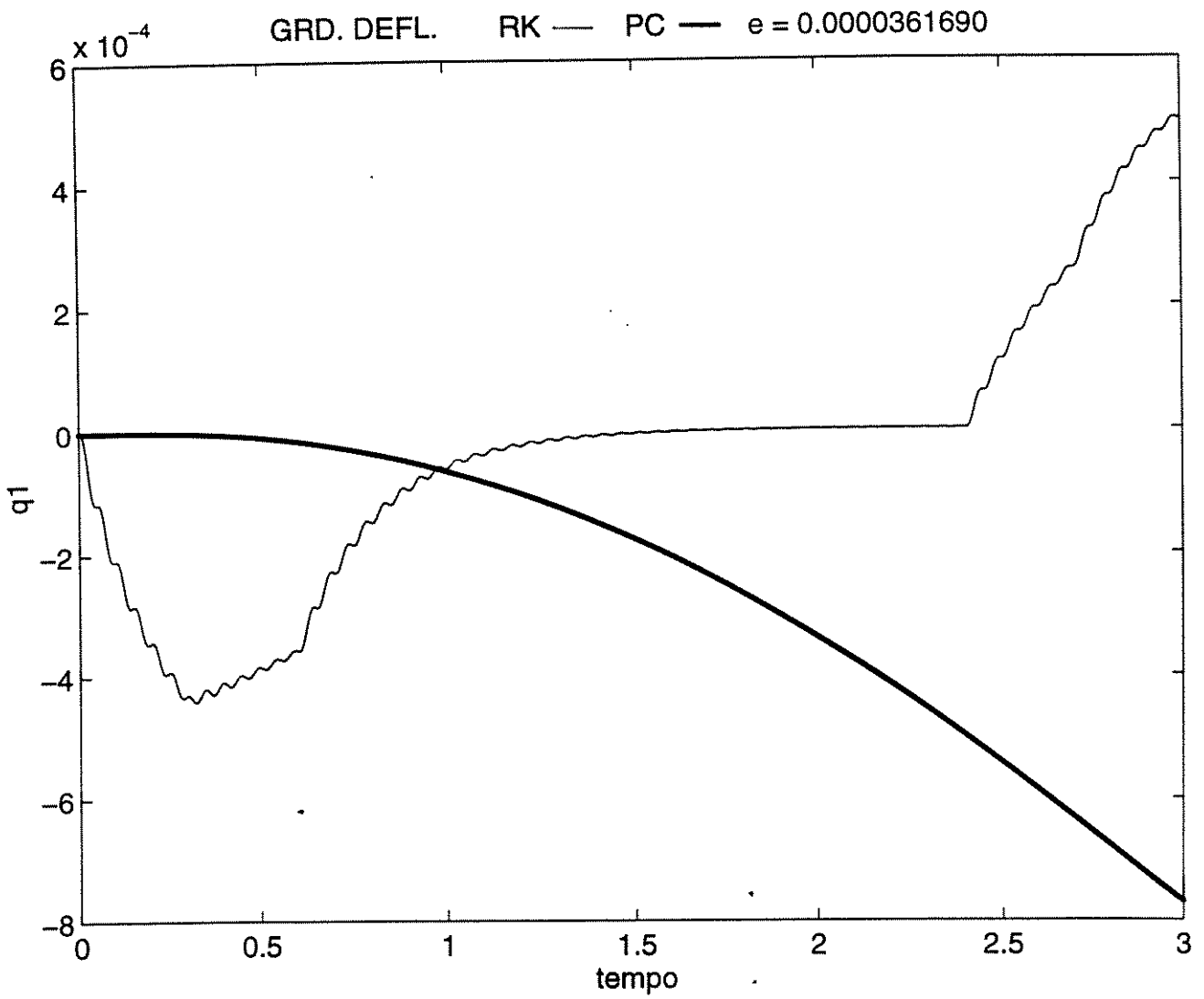


Figura 5.7 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000361690$).

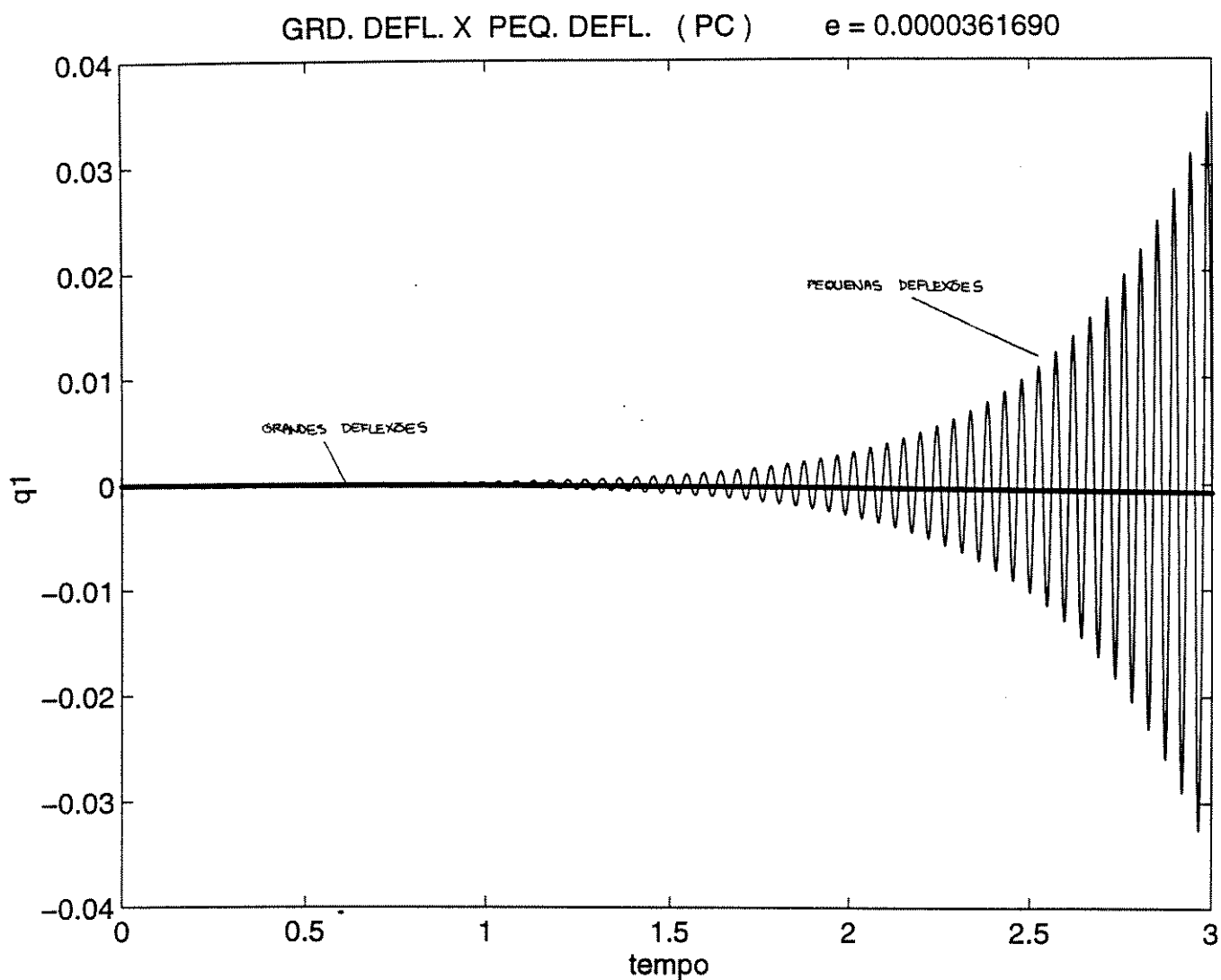


Figura 5.8 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões e o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo o método de integração previsor-corretor de Adams-Moulton ($\epsilon = 0.0000361690$).

CASO 2

$\epsilon = 0.0000093339$

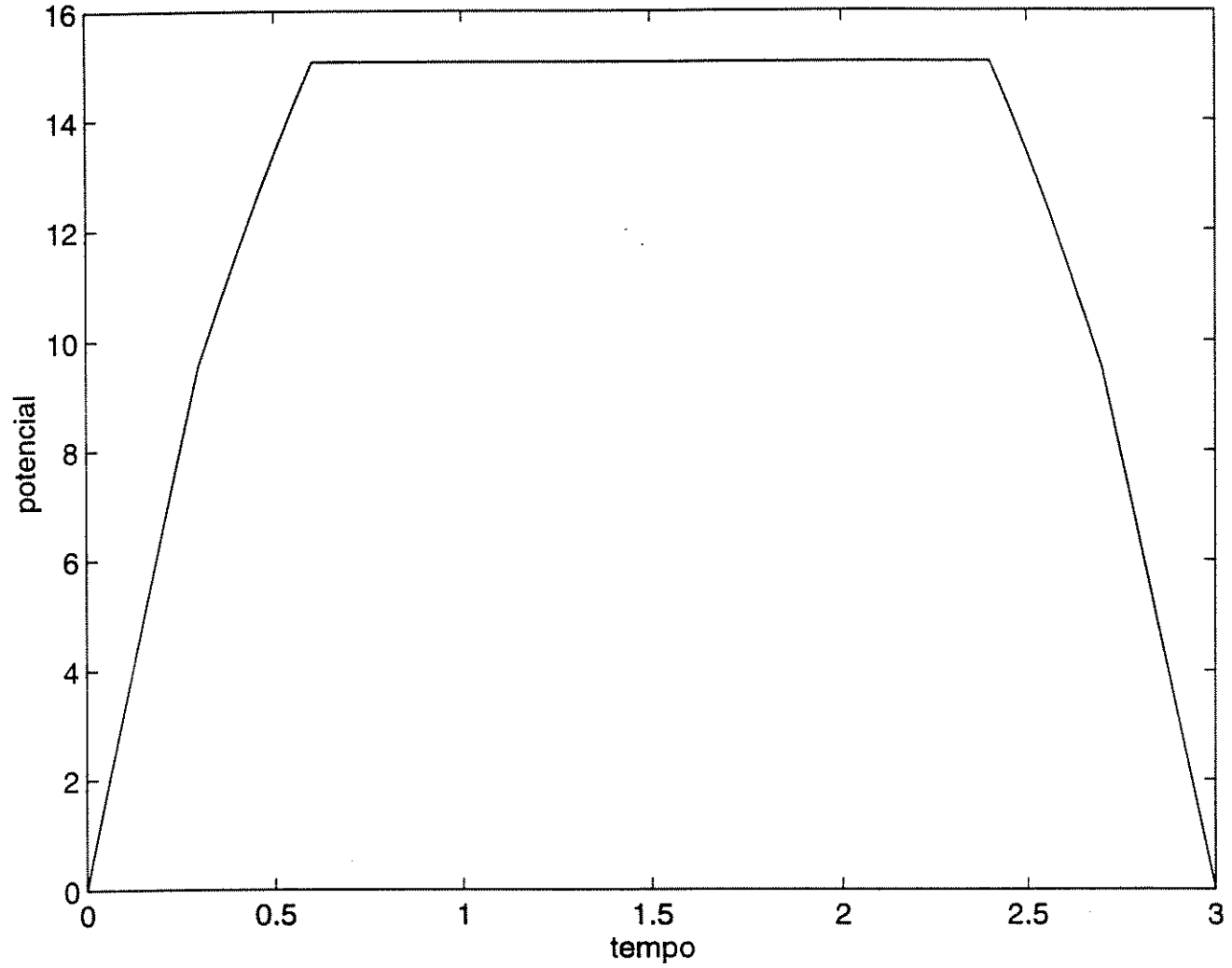


Figura 5.9 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor cc) para o caso 2
($\epsilon = 0.0000093339$)

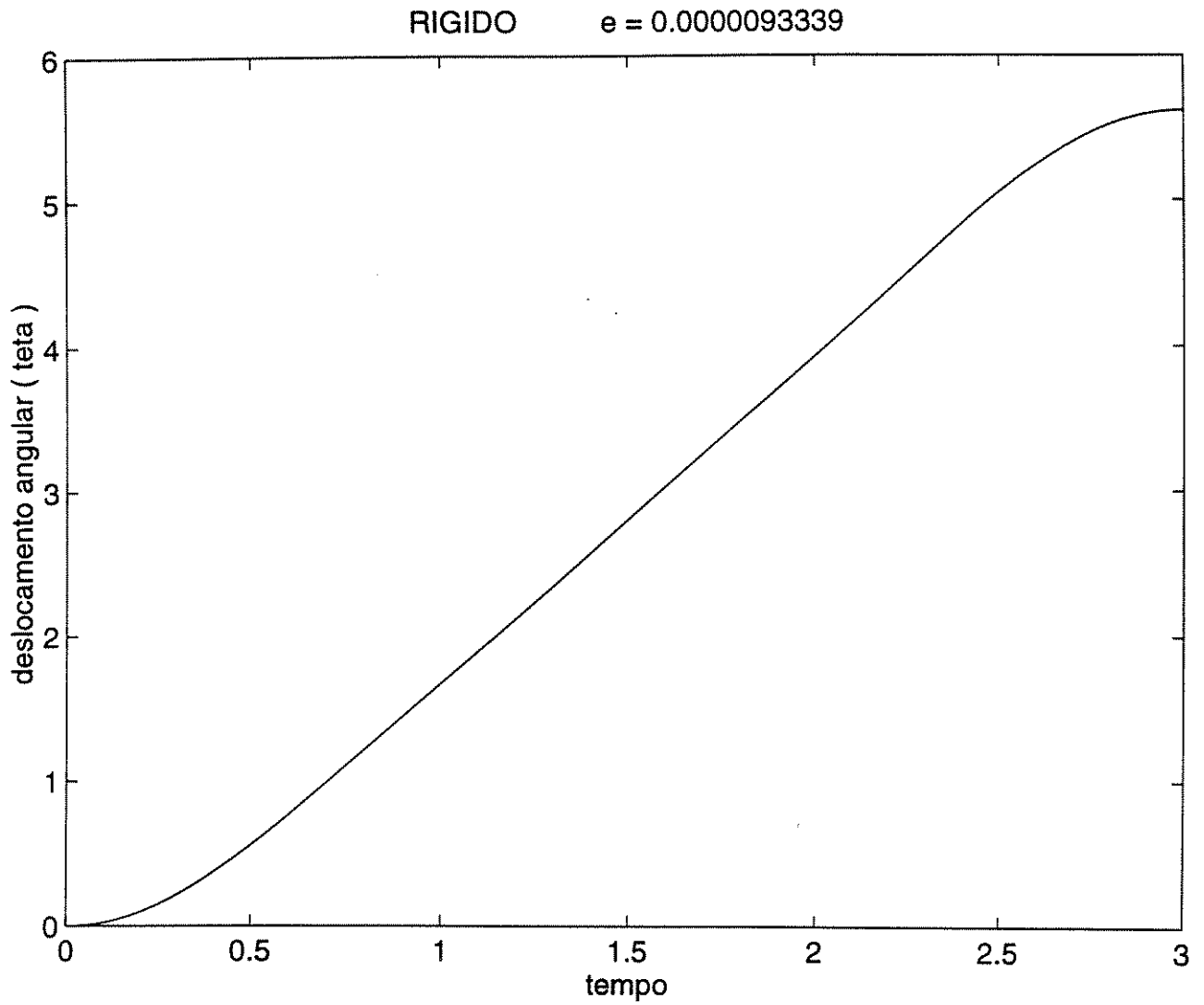


Figura 5.10 - Deslocamento angular (teta) considerando o modelo de corpo rígido
($e = 0.0000093339$)

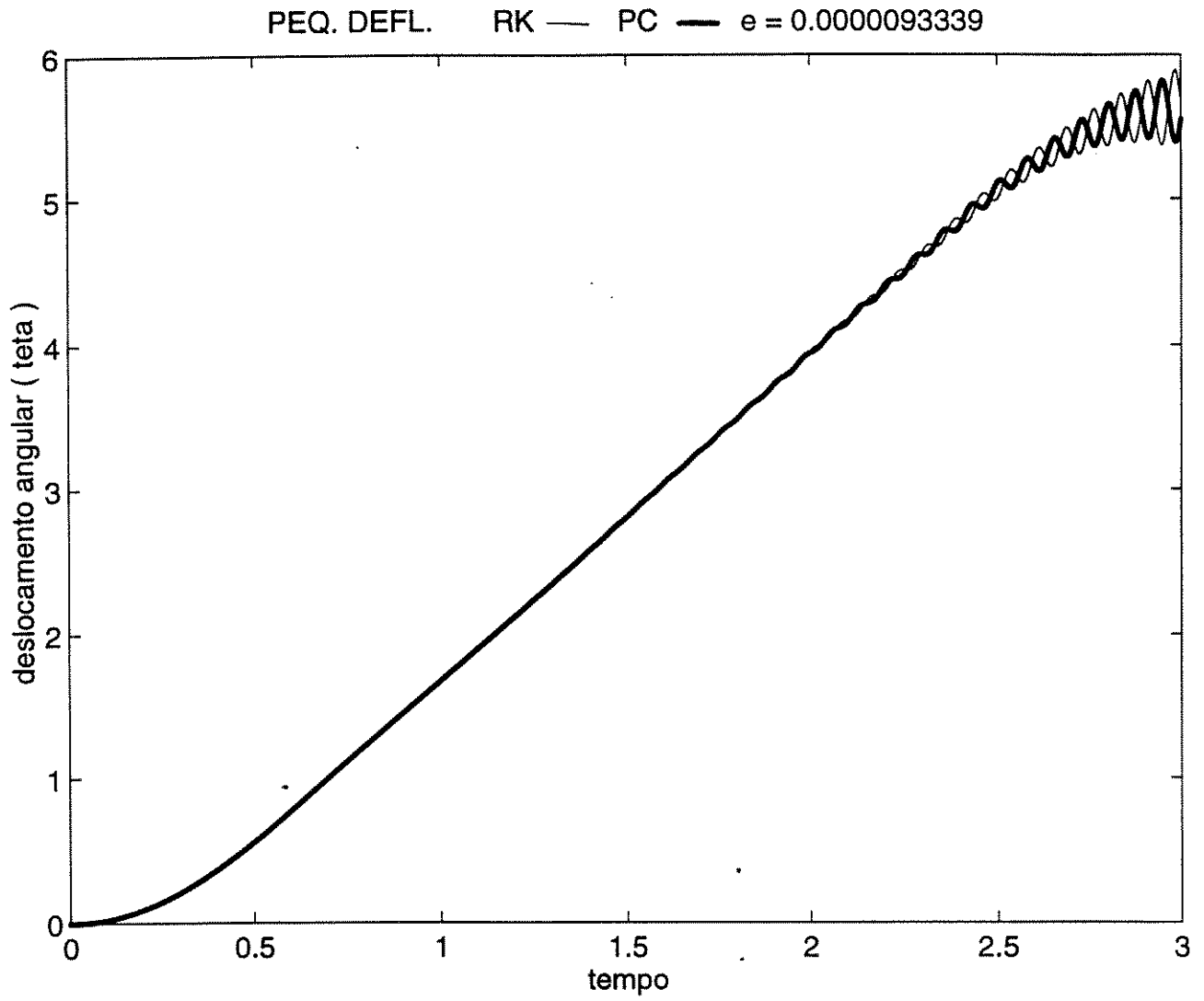


Figura 5.11 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de pequenas deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).

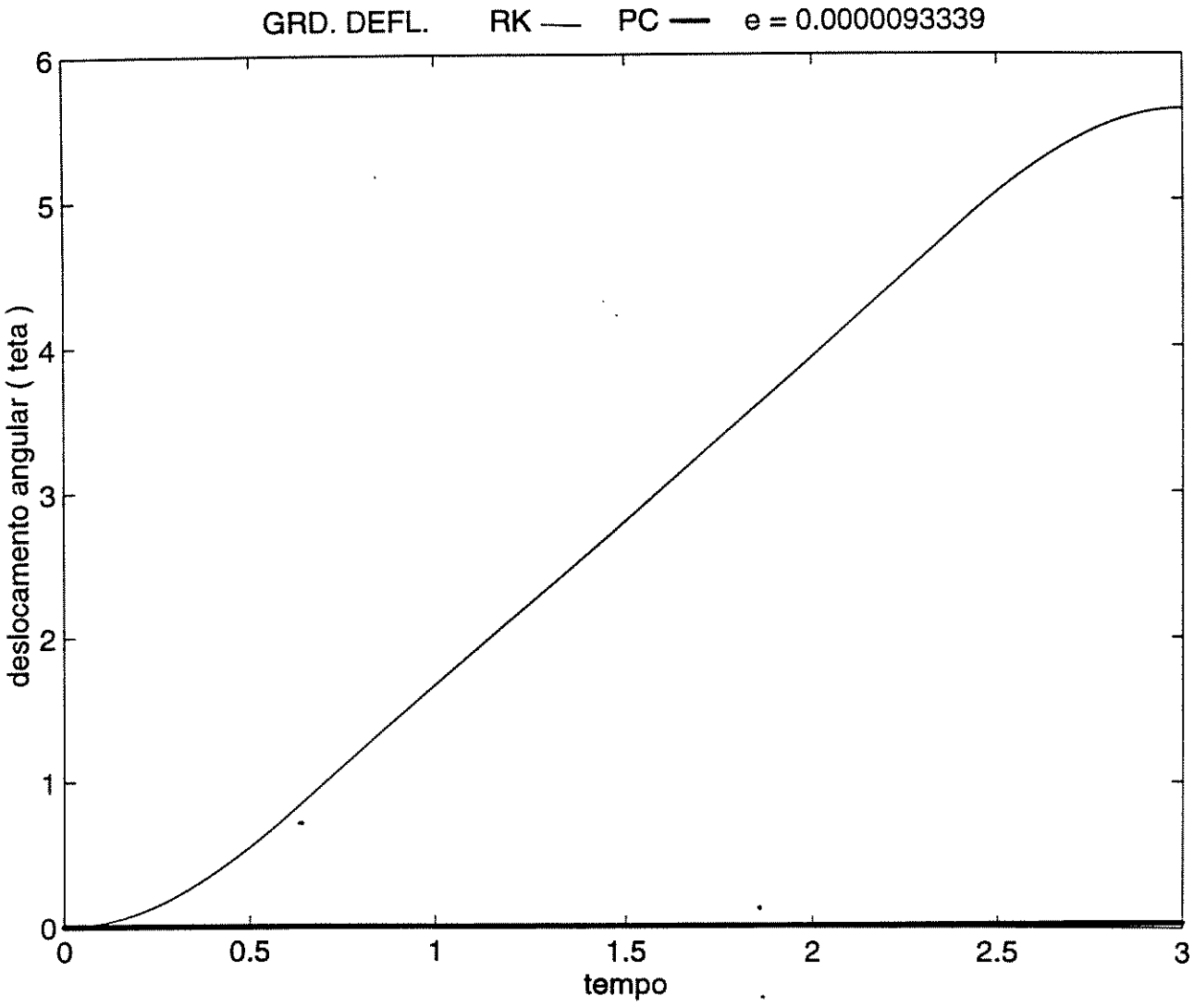


Figura 5.12 - Deslocamento angular (teta) considerando o modelo de grandes deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).

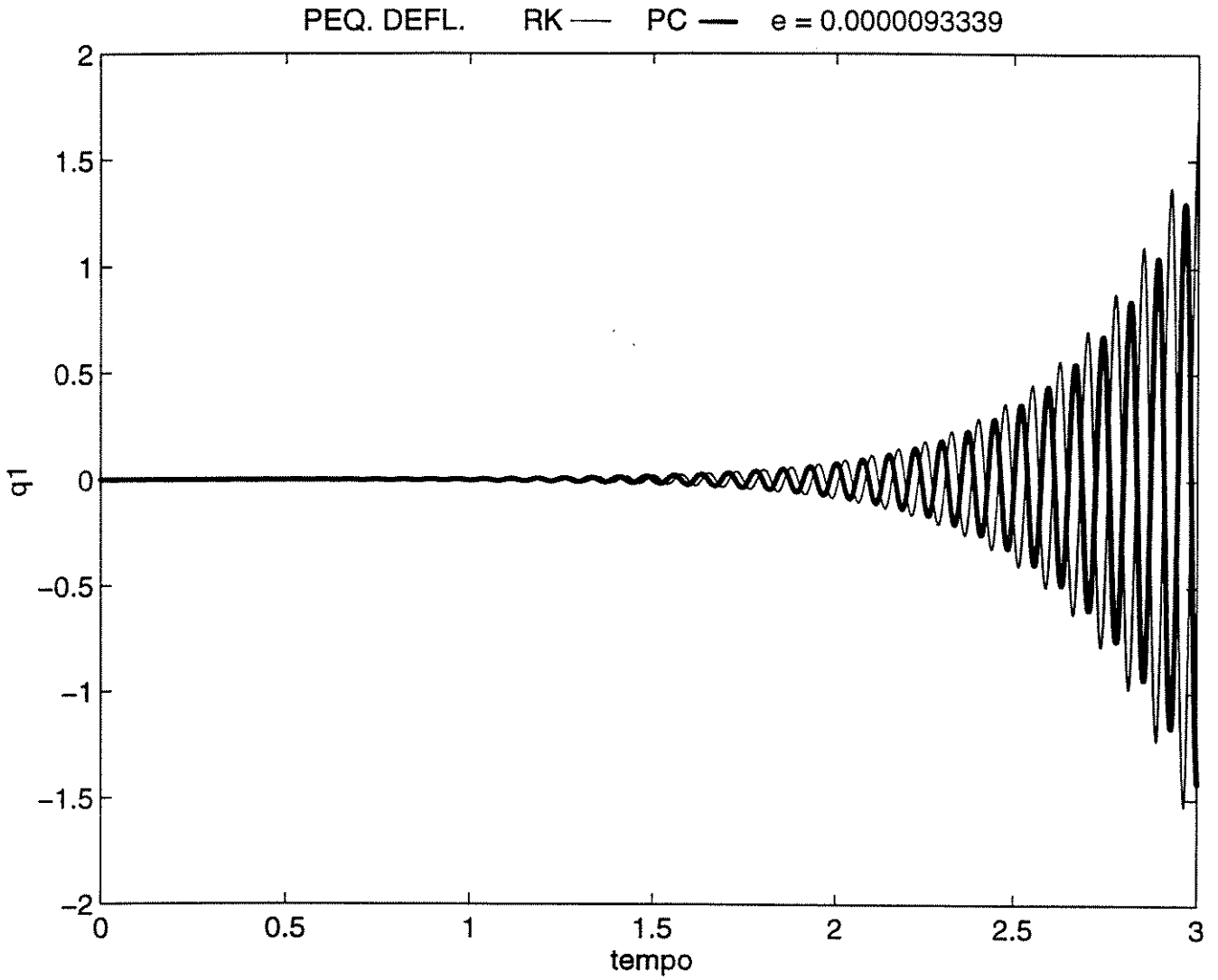


Figura 5.13 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).

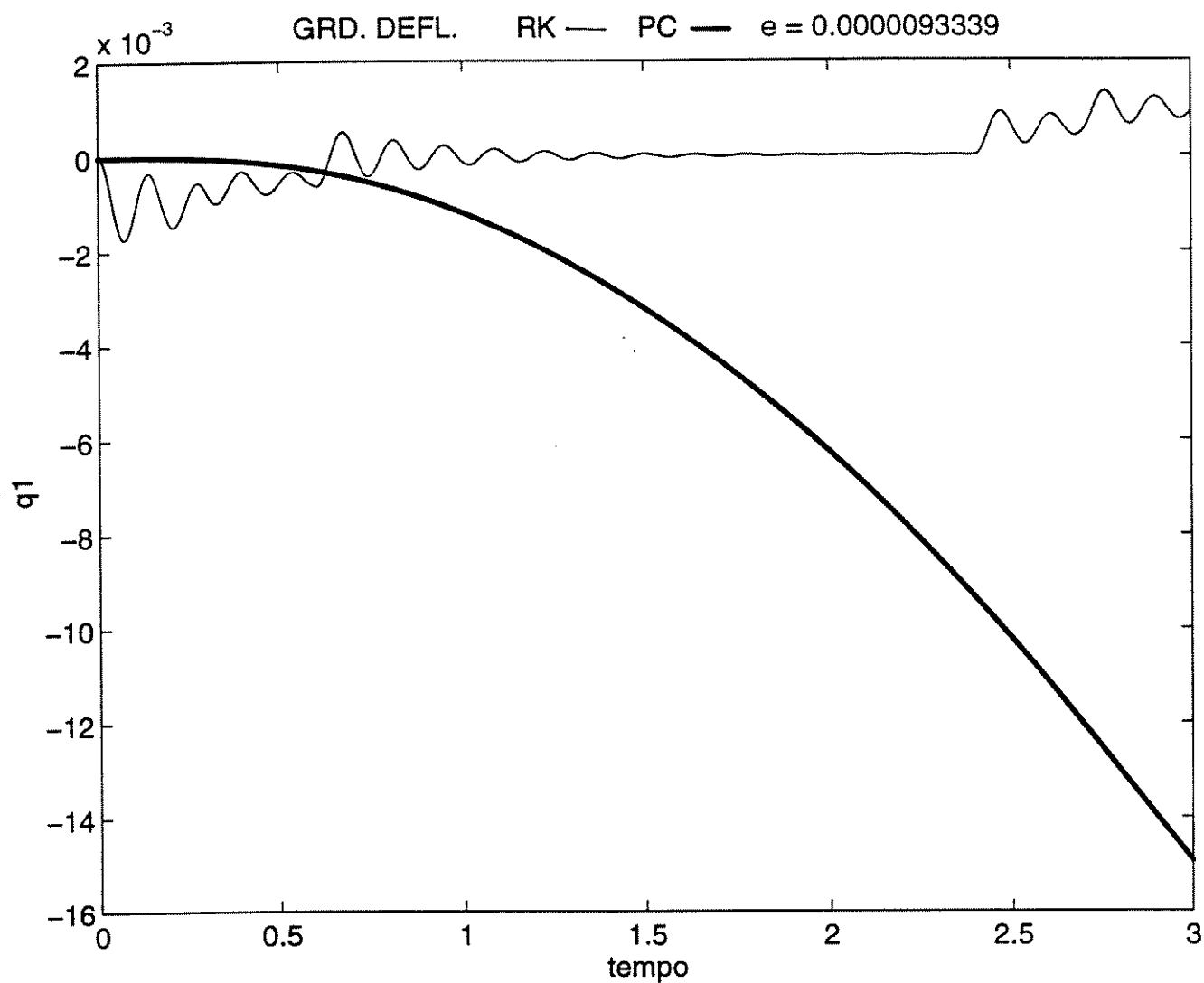


Figura 5.14 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000093339$).

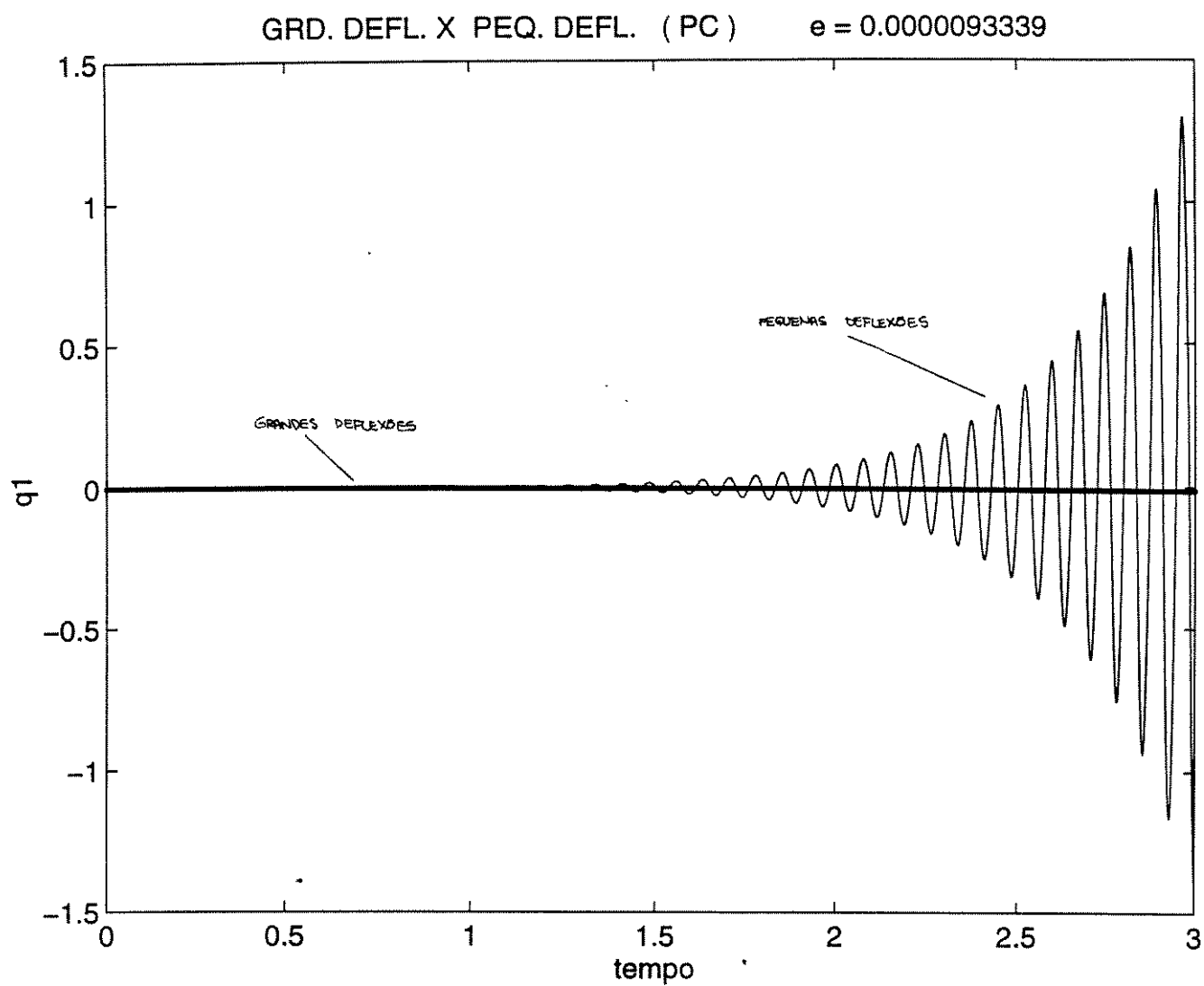


Figura 5.15 - Oscilação da ponta do braço ($Q1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões e o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo o método de integração predictor-corretor de Adams-Moulton ($\epsilon = 0.0000093339$).

CASO 3

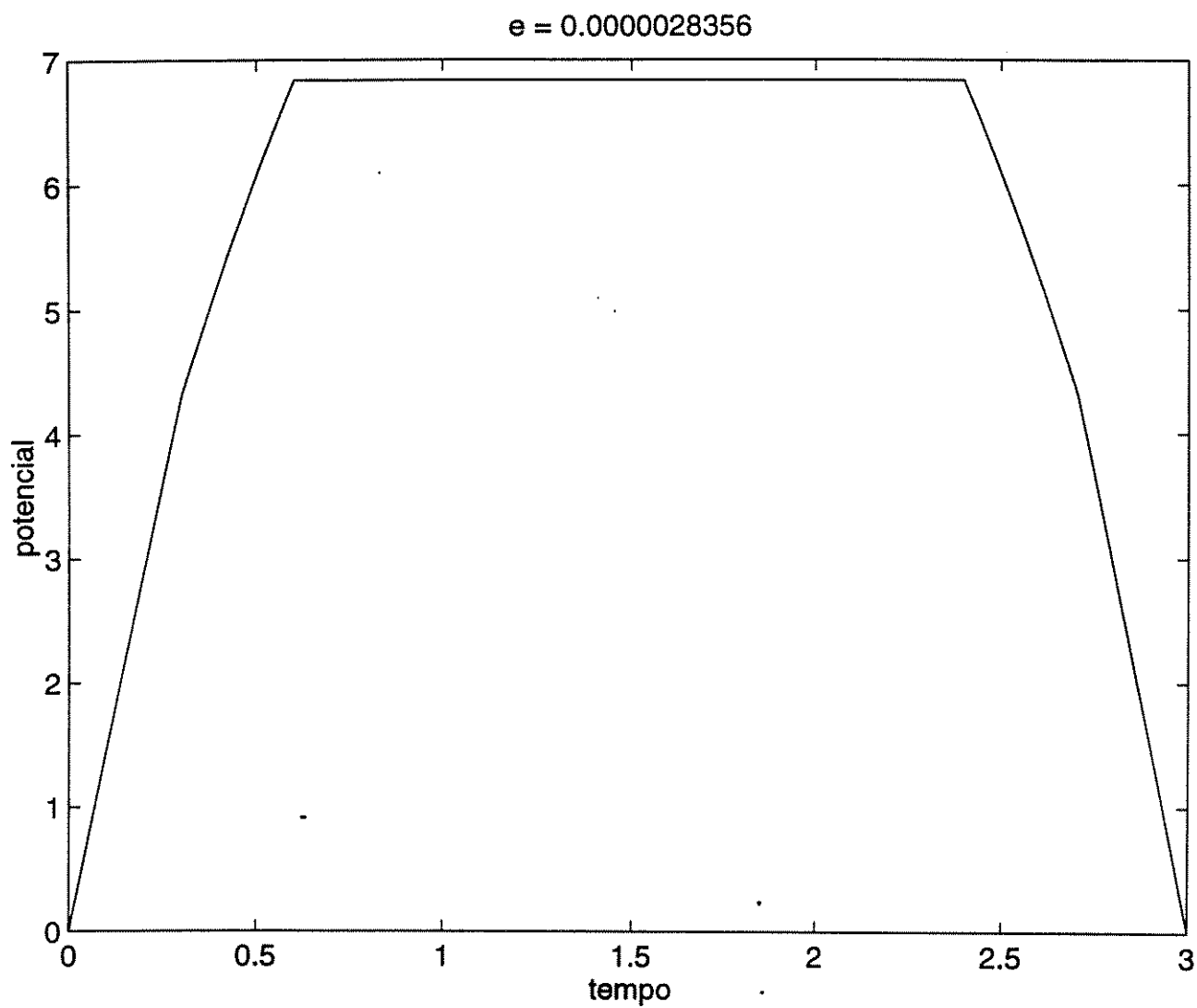


Figura 5.16 - Perfil prescrito de potencial (tensão no motor cc) para o caso 3
($\epsilon = 0.0000028356$)

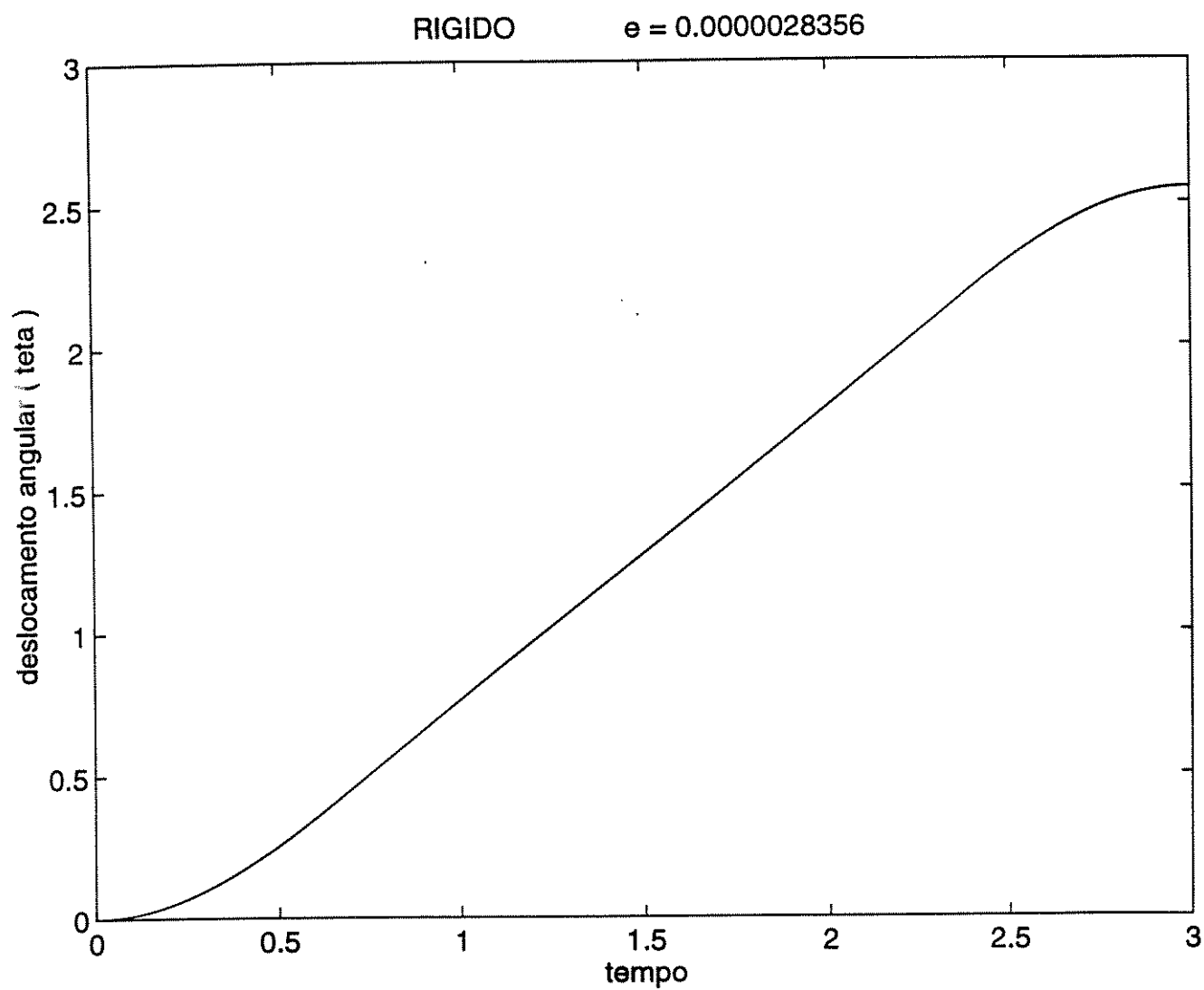


Figura 5.17 - Deslocamento angular (teta) considerando o modelo de corpo rígido
($e = 0.0000028356$).

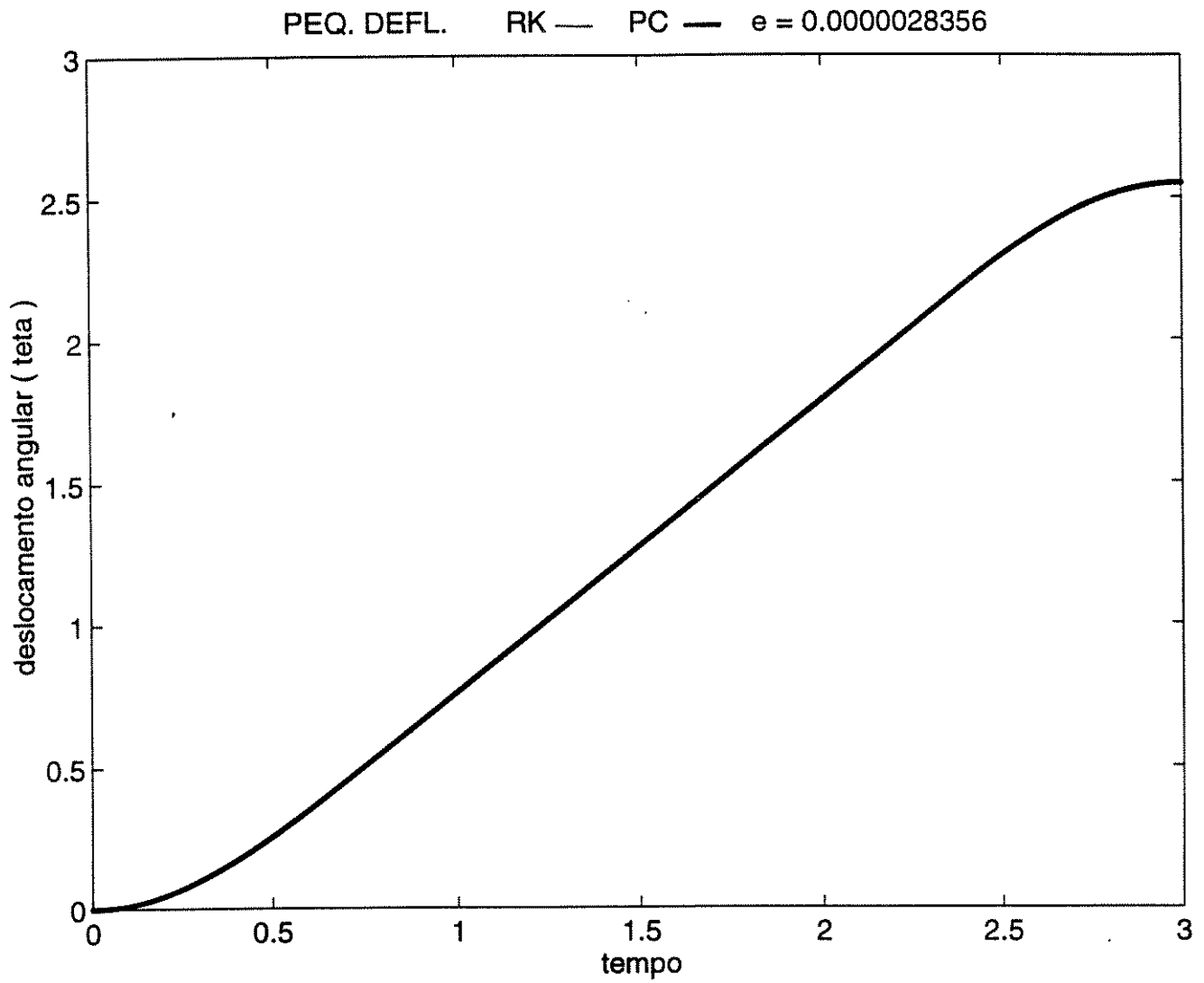


Figura 5.18 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de pequenas deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).

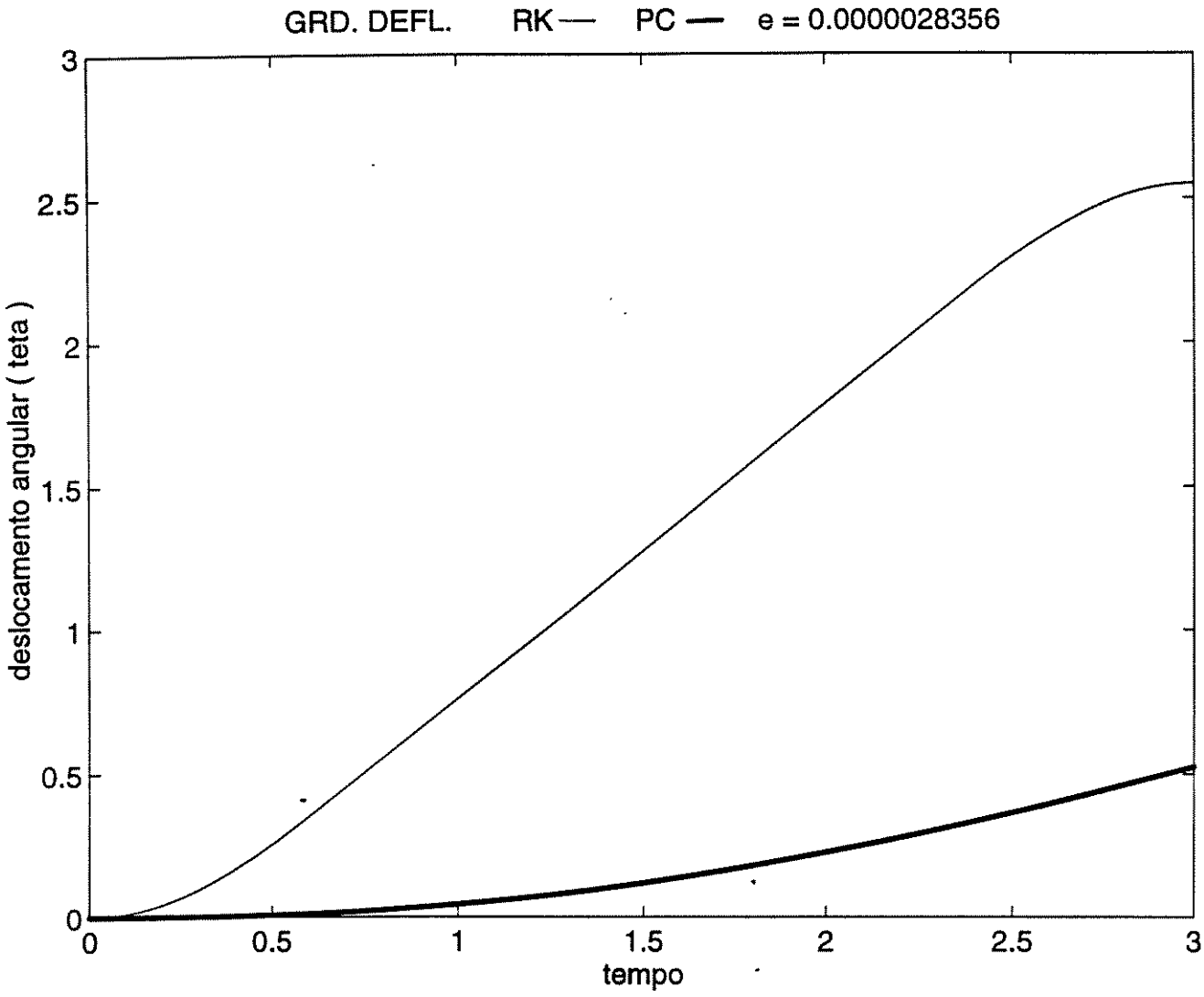


Figura 5.19 - Deslocamento angular (θ) considerando o modelo de grandes deflexões segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).

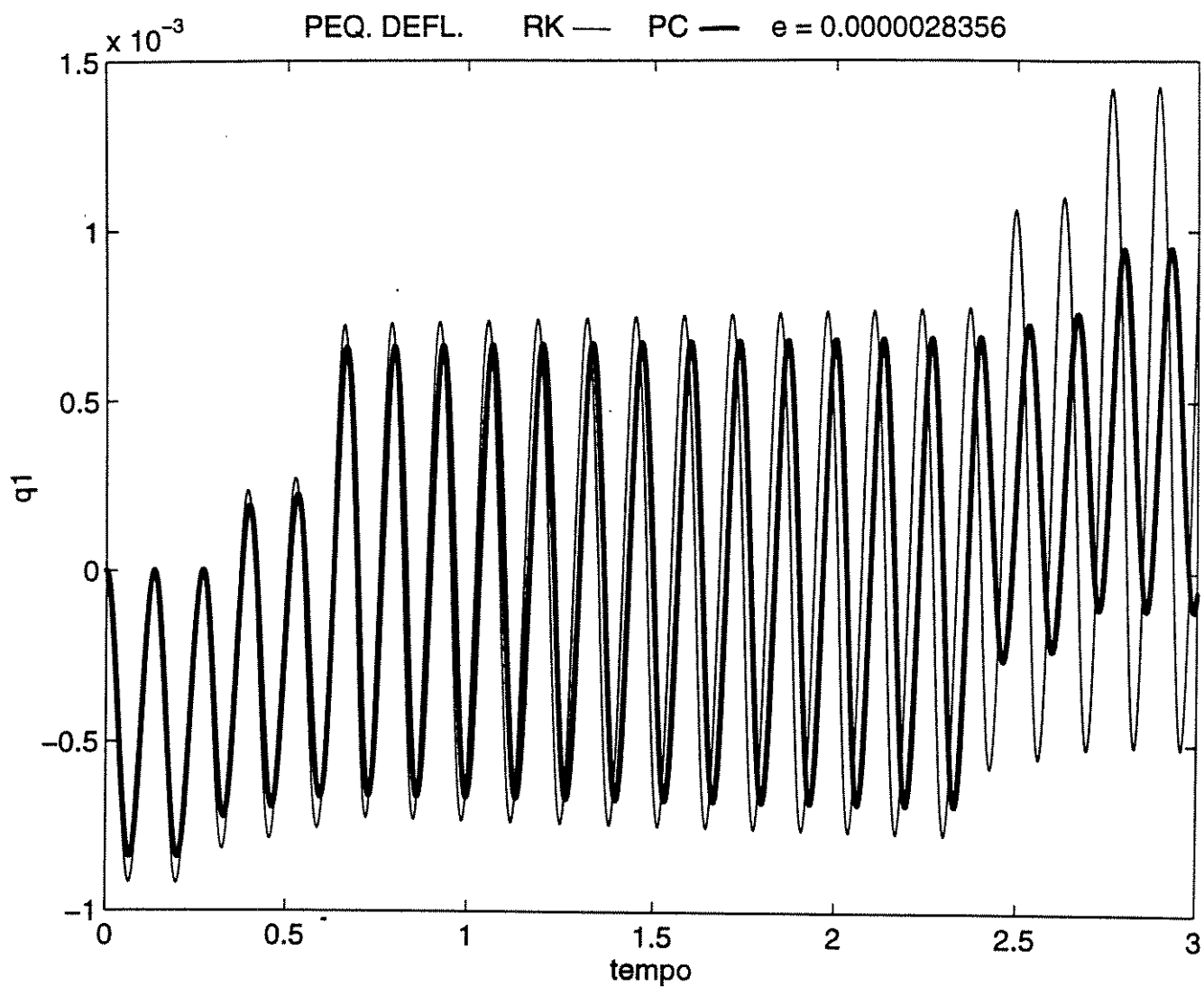


Figura 5.20 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).

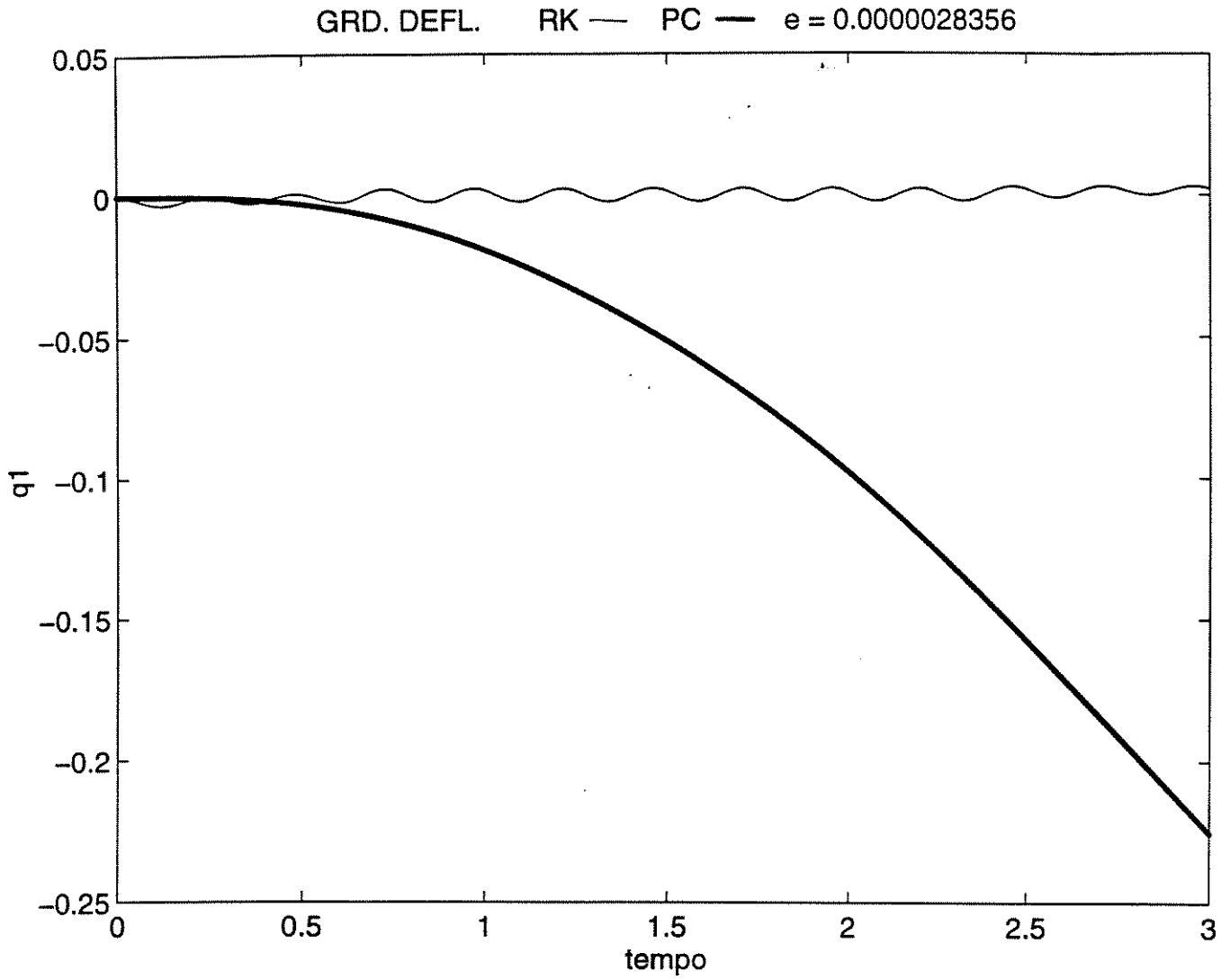


Figura 5.21 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo dois métodos diferentes de integração ($\epsilon = 0.0000028356$).

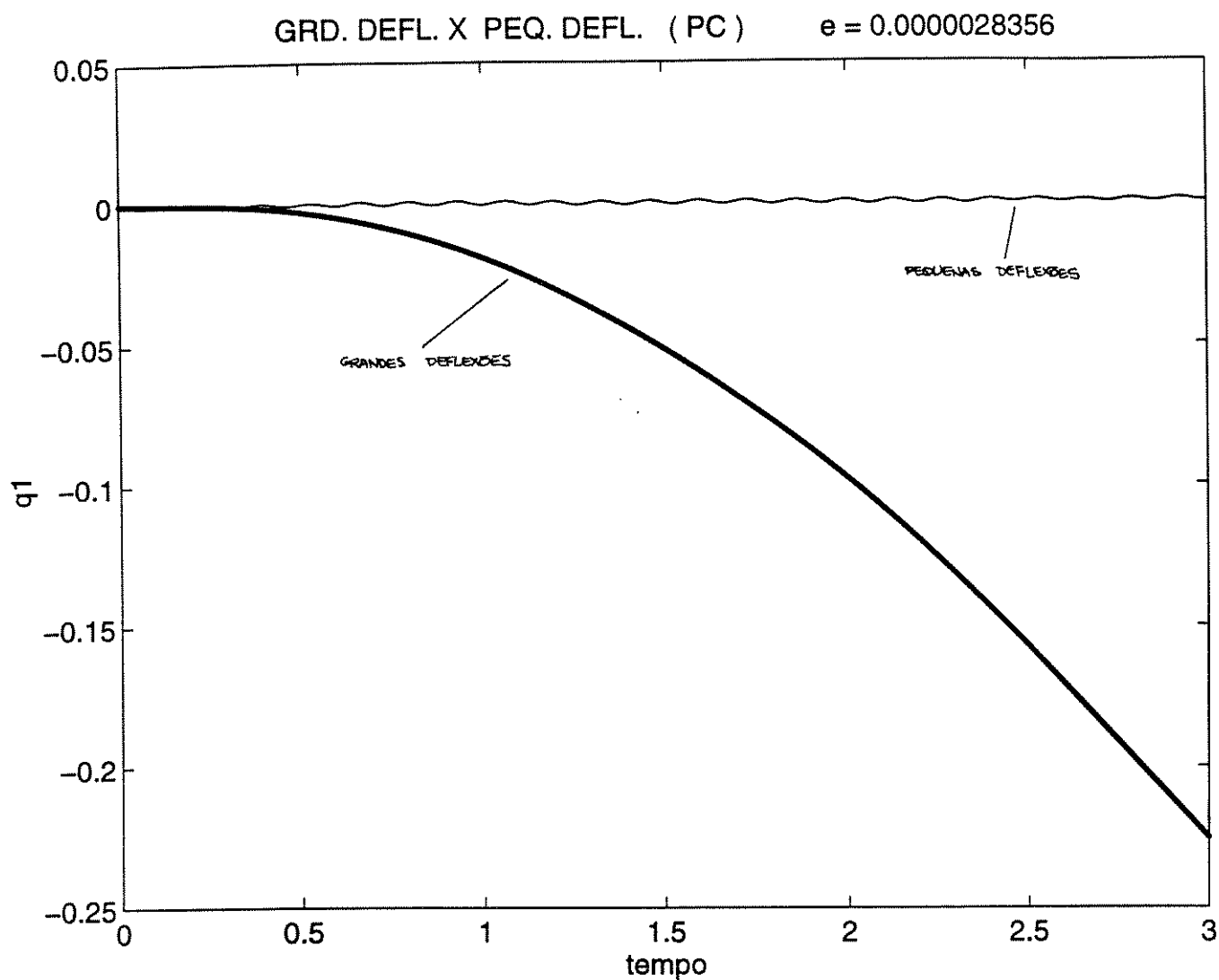


Figura 5.22 - Oscilação da ponta do braço ($Q_1(t)$) considerando o modelo para pequenas deflexões e o modelo para grandes deflexões, truncado no primeiro modo próprio da estrutura, segundo o método de integração predictor-corrector de Adams-Moulton ($\epsilon = 0.0000028356$).

5.6 - Conclusões

As equações obtidas para grandes deflexões são próprias para lidar com estruturas muito longas, ou seja, valores cada vez menores de ϵ . Consequentemente, para valores grandes deste parâmetro, ou seja, estruturas não muito flexíveis (grande relação entre espessura e comprimento da viga) recomenda-se utilizar o equacionamento para pequenas deflexões.

A influência dos termos adicionais no equacionamento para grandes deflexões no comportamento do sistema pode ser verificado nas figuras 5.2 a 5.22. Embora esteja se lidando com o mesmo sistema (estrutura flexível de rastreamento) as respostas parecem discordar quando os dois modelos são colocados sob as mesmas condições.

A escolha do método de integração correto também é muito importante, uma vez que, conforme se observou, Runge-Kutta de 4ª ordem e previsor-corretor de Adams-Moulton divergiam para o mesmo modelo. Devido a características do equacionamento desenvolvido neste trabalho (as derivadas de ordem mais alta aparecem nas equações do movimento de forma isolada e multiplicando termos não lineares), o método de integração previsor-corretor é o mais indicado.

Futuramente pretende-se diminuir ainda mais o passo de integração em ambos os métodos e observar se ocorrem novas alterações nas soluções apresentadas. Novos modos deverão também ser incluídos nos modelos.

Os resultados obtidos através dos modelos da estrutura flexível de rastreamento que levam em consideração a maior ou menor flexibilidade do sistema e apresentados neste capítulo refletem o fato da utilização de apenas um modo na expansão da variável de deflexão transversal (v).

Capítulo 6

Protótipo experimental

6.1 - Introdução

Tomando como base os cálculos preliminares desenvolvidos no apêndice C e o modelamento e estudo dinâmico desenvolvido ao longo deste trabalho, um protótipo experimental foi construído.

Neste capítulo faz-se uma breve discussão acerca de escolha e posicionamento de sensores para o referido protótipo. Cabe ressaltar que trata-se de um assunto complexo e justificaria o trabalho de uma dissertação. O que se pretende aqui é somente tecer algumas considerações iniciais. Um estudo mais acurado deverá fazer parte de estudos futuros.

Em se tratando de sensorear estruturas e/ou sistemas dinâmicos, vários tipos de sensores poderão ser utilizados dependendo do tipo de medição que se pretende e para qual propósito (acelerômetros, encoders, extensômetros,...). Cuidados deverão ser tomados ao se optar por um ou por outro dispositivo.

Por exemplo, no caso de estruturas flexíveis, acelerômetros poderão representar massas concentradas que deverão ser incluídas no equacionamento dinâmico do sistema. Um acelerômetro colocado na extremidade livre de um manipulador flexível para propósitos de controle fará as vezes de uma possível carga a ser transportada pelo braço e poderá excitá-lo da mesma forma. A não inclusão destes dispositivos no equacionameno poderá gerar resultados errôneos e/ou inesperados, conforme poderá ser verificado em [14].

Sabendo o número de sensores com o qual se pretende trabalhar, existem algoritmos que fornecem as melhores posições para alocá-los. Inicialmente pretende-se trabalhar com extensômetros e encoders incrementais. Posteriormente poderão ser utilizados acelerômetros de precisão para medições do deslocamento da extremidade livre do braço flexível.

Os extensômetros deverão ser utilizados para a medição do grau de deflexão da estrutura em movimento. Neste ponto, para as dimensões da estrutura utilizada como braço flexível poder-se-á discutir qual dos equacionamentos desenvolvidos aqui poderá ser utilizado ou qual se aplica satisfatoriamente.

Um encoder deverá ser utilizado para a medição da posição e velocidade angular do eixo do sistema de acionamento. Um outro encoder deverá ser conectado ao eixo 3 do sistema de transmissão (vide apêndice C e figura 6.1), permitindo a medida da posição angular do braço. Valendo-se deste último encoder, a eficiência do sistema de transmissão também poderá ser verificada.

As figuras 6.2 e 6.3 mostram o protótipo experimental composto basicamente de três partes: sistema de acionamento (motor cc), sistema de transmissão e estrutura flexível (viga de alumínio) .

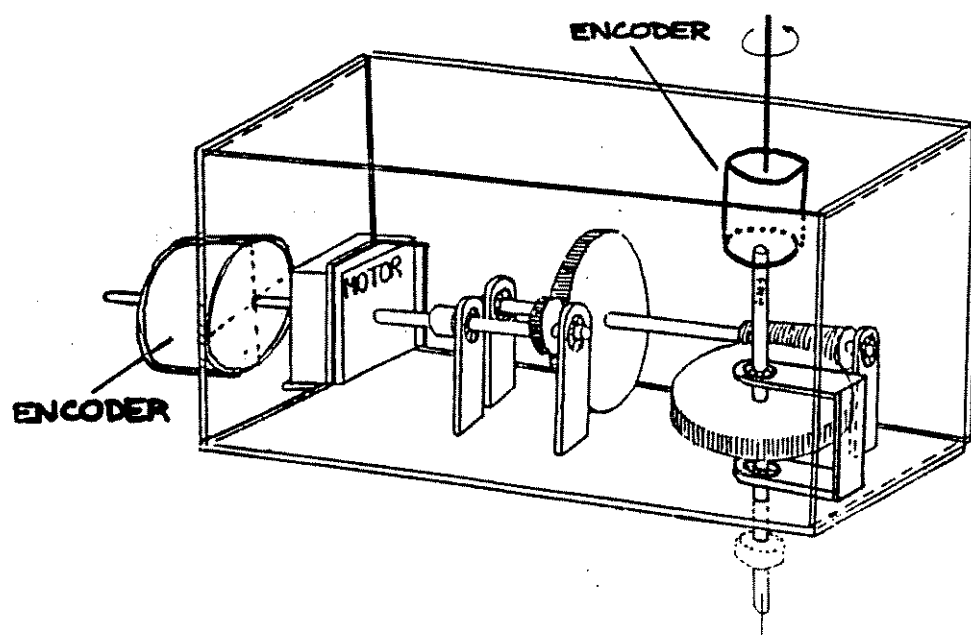


Figura 6.1 - Sistema de transmissão e posicionamento dos encoders

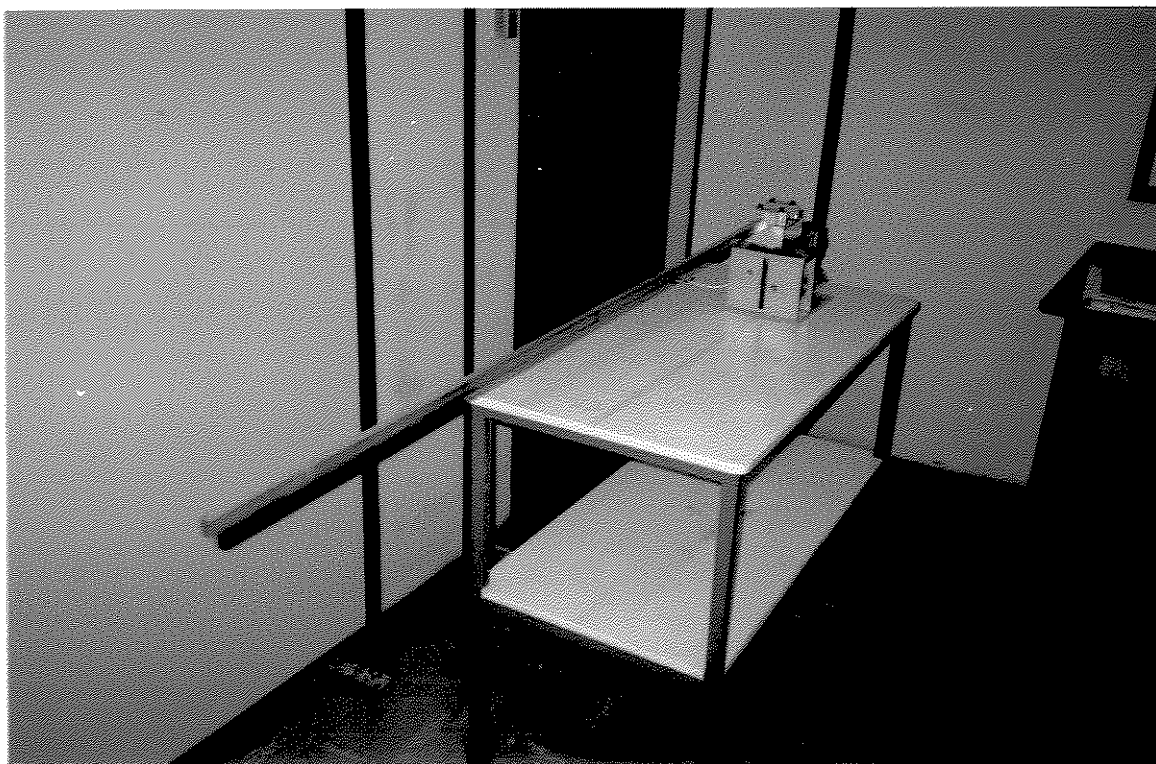


Figura 6.2 - Conjunto completo

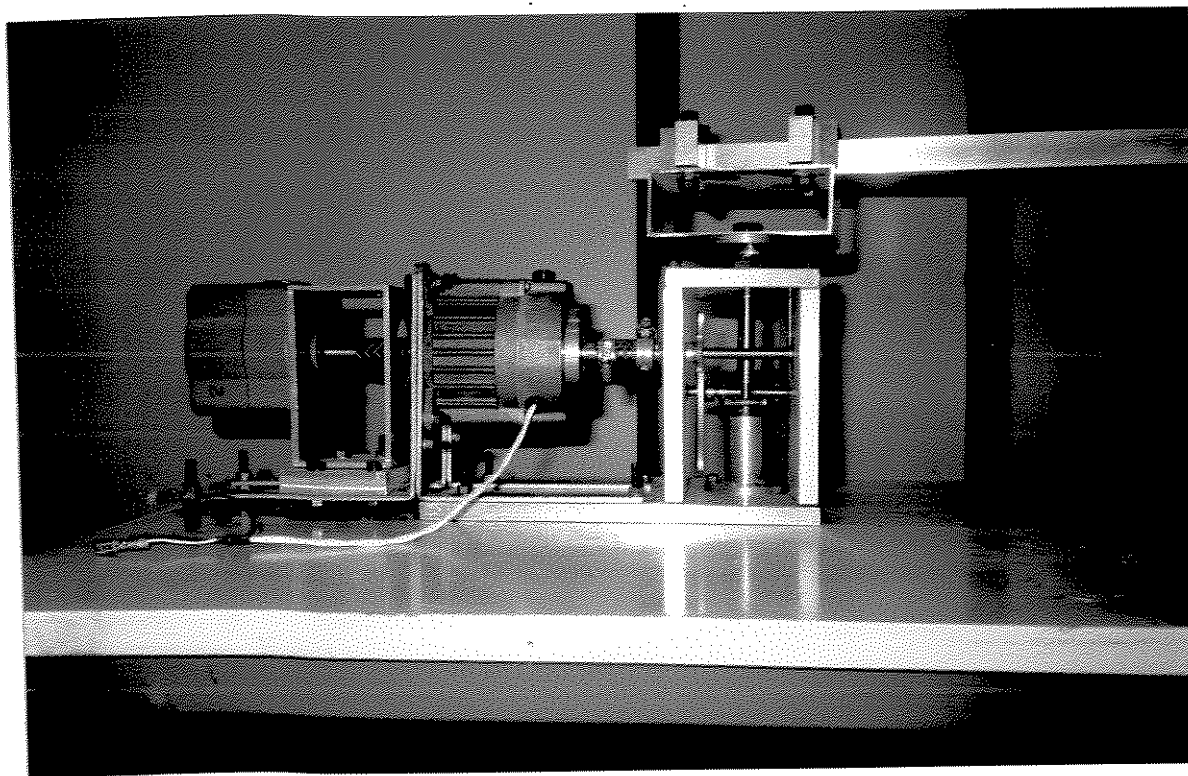


Figura 6.3 - Sistema de transmissão

6.2 - Posicionamento de sensores

Os locais para posicionamento dos extensômetros para o protótipo experimental serão baseados, em uma primeira análise, nas formas dos três primeiros modos de vibrar do sistema livre de esforços externos e não amortecido. Estes três primeiros modos próprios da estrutura em estudo encontram-se apresentados na figura 3.2.

O cuidado que se deve tomar aqui é o não posicionamento dos extensômetros em locais considerados *nós* dos modos de vibrar da estrutura, ou seja, locais aonde o deslocamento da estrutura é nulo (ou desprezível em relação aos demais pontos) e, portanto, a informação obtida não servirá para nada.

Os locais aonde busca-se posicionar sensores são os considerados críticos, de outra forma, locais que apresentem os maiores deslocamentos.

Assim, tomando como base os modos retratados na figura 3.2, optou-se por instalar os extensômetros nos seguintes locais :

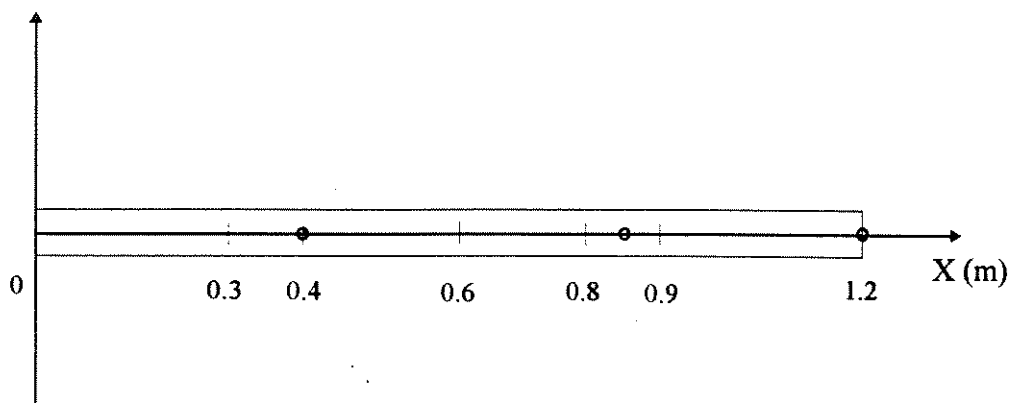


Figura 6.4 - Posicionamento dos sensores (extensômetros) : o

Pontos próximos ao meio da viga (0.6 m) poderiam ser uma ótima escolha se forem considerados apenas os dois primeiros modos próprios. Contudo, caso a influência do terceiro modo no comportamento do sistema seja significativa, esta localidade equivale, neste modo, a uma região próxima a um nó. O mesmo ocorre com outros pontos ao longo do braço, conforme pode ser facilmente verificado através da figura 3.2.

A questão apresentada no parágrafo anterior é uma das razões pela qual deve-se estabelecer critérios mais fortes para a escolha das localidades aonde pretende-se instalar sensores, critérios estes que envolvem estudos mais acurados.

Eventualmente, em trabalhos futuros, poderá ser desenvolvido um estudo de estimadores de estado a fim de que se possa suprir as informações que não puderem ser obtidas via medições experimentais.

6.3 - Ensaio experimentais

Os extensômetros a serem utilizados no protótipo serão próprios para fixação em estruturas de alumínio e possui a especificação KFG-2-350-C1-23 da KYOWA.

A montagem destes sensores deverá ser feita de acordo com o que se pretende medir na estrutura à qual serão afixados. Neste caso, dois tipos de fixação deverão ser feitas, conforme indicado na figura 6.5. Estas montagens deverão permitir obter-se informações acerca do esforço axial e momento fletor sobre a estrutura.

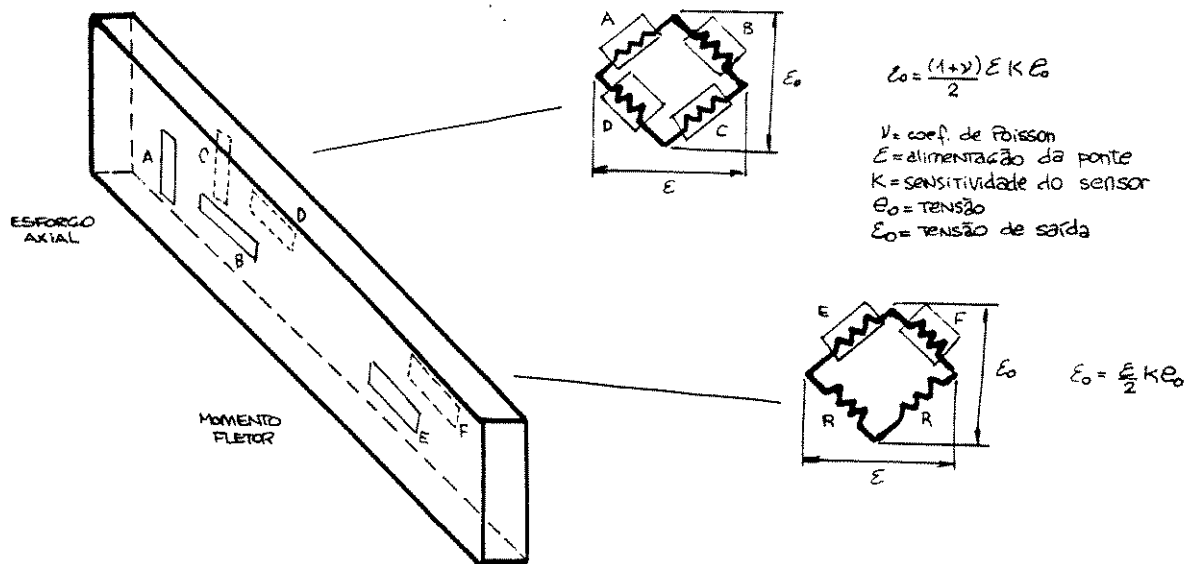


Figura 6.5 - Montagem dos extensômetros

A mudança da resistência elétrica causada por uma deformação no extensômetro é muito pequena. Geralmente, uma ponte de wheatstone é utilizada para transformá-la em sinal elétrico. Na figura 6.5 também é mostrada a disposição dos extensômetros na ponte de wheatstone, utilizada para transformar a variação da resistência nos extensômetros em tensão elétrica.

Outras fases a serem realizadas em uma etapa futura consistem em calibração dos extensômetros, modelagem destes dispositivos e utilização de um novo atuador (hidráulico) para movimentar a estrutura flexível de rastreamento.

A calibração dos extensômetros deverá ser feita tendo-se em vista cada um dos efeitos que se pretende medir e geralmente é realizada utilizando-se pesos padronizados e construindo-se gráficos *esforço* (axial ou momento fletor, por exemplo) contra *voltagem*. Esta calibração tem por objetivo igualmente medir a sensibilidade destes sensores.

O modelo para os sensores utilizados no protótipo deverá também, futuramente, ser levantado e incluído nos modelos do sistema dinâmico desenvolvidos neste trabalho (capítulos 3 e 4). As informações advindas destes dispositivos deverão ser utilizadas para propósitos de controle associados a problemas de vibração devido ao comportamento flexível da estrutura e problemas de posicionamento associados ao comportamento de corpo rígido da mesma.

Além do motor de corrente contínua proposto neste trabalho para o acionamento da estrutura flexível de rastreamento, uma outra opção seria trabalhar com um motor hidráulico. Este tipo de atuador dispensaria o sistema de transmissão e todos os problemas de atritos, folgas e outros inerentes ao mesmo. A velocidade angular do eixo deste motor poderia ser ajustada diretamente de acordo com a necessidade da estrutura movida.

6.4 - Conclusões

Não serão realizadas medições experimentais neste trabalho. O que se pretende aqui consiste apenas em preparar o protótipo para um próximo e árduo passo.

Como trata-se de um trabalho de pesquisa e, portanto, iterativo, os resultados experimentais obtidos tanto através destas medições quanto futuramente através do desempenho do sistema sob

controle poderão levar a novas considerações acerca do equacionamento dinâmico desenvolvido neste trabalho.

A influência dos modos superiores no comportamento da estrutura flexível somente poderá ser verificada com novas considerações acerca do truncamento da variável de deflexão v realizada nos capítulos 3 e 4. Neste trabalho verificou-se apenas a influência do primeiro modo no comportamento da estrutura (capítulo 5).

A verificação dos demais modos no comportamento da estrutura e comparação com resultados obtidos neste trabalho para apenas um modo no truncamento de v será feita na continuidade deste trabalho e é um procedimento imprescindível para se poder prosseguir com este estudo.

Capítulo 7

Conclusões e sugestões para próximos trabalhos

O trabalho desenvolvido nesta dissertação buscou desenvolver uma maior sensibilidade acerca do modelamento de estruturas flexíveis de rastreamento de membro único.

As simulações das equações dinâmicas do movimento realizadas tanto para o modelo de pequenas deflexões quanto para o modelo de grandes deflexões reforçam a distância entre os modelos considerados e entre os métodos numéricos de integração utilizados para a solução das equações dinâmicas associadas a estes modelos. Esta distância aumenta quando o grau de acoplamento entre as equações do movimento cresce. A comparação entre o modelo rígido e os modelos envolvendo a flexibilidade do sistema serve como parâmetro de comparação das respostas envolvendo o deslocamento angular da estrutura.

A adimensionalização das equações do movimento e a obtenção do pequeno parâmetro adimensional ϵ mostrou facilitar a análise do sistema de equações obtido e a compreensão acerca da dinâmica do sistema analisado assim como mostrou permitir o estudo de uma gama de sistemas afins alterando poucos parâmetros no equacionamento obtido (basicamente ϵ).

Todas as não linearidades do sistema encontram-se multiplicadas por este pequeno parâmetro e o mesmo irá determinar se o sistema em questão é fortemente não linear ou não e qual a ordem das não linearidades envolvidas.

Conclui-se também que, quanto maior o parâmetro ϵ , ou seja, quanto maior a relação entre a espessura e o comprimento da estrutura flexível (formato de viga), mais rígido torna-se o sistema e, conseqüentemente, a teoria para pequenas deflexões parece aplicar-se melhor.

Muito cuidado deve ser tomado, porém, na escolha das dimensões da estrutura flexível que se pretende estudar de forma a se continuar garantindo um comportamento planar da mesma. Por exemplo, estruturas muito finas poderiam apresentar torção; estruturas muito grossas apresentariam esforços cisalhantes significativos. Estes efeitos não são considerado neste trabalho.

Para a continuidade deste trabalho são propostas algumas sugestões.

A primeira diz respeito à consideração de mais de um modo próprio (dois modos, três modos, ...) no truncamento utilizado para discretizar as equações dinâmicas do movimento tanto para pequenas quanto para grandes deflexões. A partir destas novas considerações, pode-se verificar quantos modos são realmente necessários para se representar satisfatoriamente o sistema proposto em cada um dos modelos estudados, apresentados nos capítulos 3 e 4.

A segunda sugestão refere-se à consideração de cargas na extremidade livre. Neste trabalho, este item não foi modelado. As considerações de carga transportada foram aqui apenas utilizadas para projetar o sistema de transmissão do protótipo experimental. Esta sugestão, contudo, está ligada à extensão da análise aqui apresentada para uma abordagem tridimensional. Quando um manipulador flexível de rastreamento está operando cargas, o modelo espacial pretende ser o que mais se ajusta ao modelo físico do sistema. A estrutura se deforma sob o peso da carga e rotaciona (rastreia). As irregularidades da carga (inércia variável) poderiam representar uma nova fonte de excitação externa para o problema.

Uma terceira sugestão seria a inclusão de algum tipo de amortecimento no modelo da estrutura flexível (amortecimento estrutural, amortecimento atmosférico,...).

Uma quarta sugestão seria aplicar o método das múltiplas escalas ao sistema de equações diferenciais não lineares do movimento obtidas para cada um dos modelos e estudar as equações de modulamento da amplitude e fase da oscilação do braço flexível. Esta seria uma outra maneira de se estudar o comportamento do sistema aqui apresentado. O sistema teria que apresentar, contudo, uma fraca não linearidade. Estes resultados poderiam, de alguma forma, ser comparados àqueles obtidos aqui.

Referências bibliográficas

- 1 - Rossi, M. , “Passive and adaptive controller design for a class of manipulators with a flexible link”, Master’s thesis, University of Waterloo, Ontário, Canada, 1996.
- 2 - G. Pitcher, “Painting system performs a labour of hercules”, Automation System Magazine, nov., 1991.
- 3 - S. V. Hanagud, M. Meyappa e J. I. Craig, “Method of multiple scales and identification of nonlinear structural dynamic systems”, AIAA Journal, vol. 23, nº. 5, 802-807, 1985.
- 4 - F. Khorrami, S. Jain, W. Grossman, A. Tzes, W. Blesser, “Nonlinear control with input preshaping for flexible-link manipulators”, Fifth International Conference on Advanced Robotics, Pisa, Itália, 96-101, 1991.
- 5 - H. Krishnan, “ Bounded input discrete time control of a single flexible link”, Master’s thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1988.
- 6 - J. H. Park e H. Asada, “Design and control of minimum-phase flexible arms with torque transmission mechanics”, Proceeding of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1790-1795, 1990.

- 7 - D. Wang e M. Vidyasagar, "Transfer function for a single flexible link", Proceeding of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1042-1047, 1989.
- 8 - E. Garcia e D. J. Inmam, "Modeling of the slewing control of a flexible structure", Journal of Guidance, vol. 14, 736-742, 1990.
- 9 - B. V. Viscomi e R. J. Ayre, "Nonlinear dynamic response of elastic slider-crank mechanism", Journal of Engineering for Industry, 93B, 251-262, 1971.
- 10 - J. O. Song e E. J. Haug, "Dynamic analysis of planar flexible mechanisms", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 24, 359-381, 1980.
- 11 - A. A. Shabana e R. A. Wehage, "A coordinate reduction technique for dynamic analysis of spatial substructures with large angular rotations", Journal of Structural Mechanics, 11, 401-431, 1983.
- 12 - F. Khorrami, "Analysis of multi-link flexible manipulators via asymptotic expansions", of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, FL, 2089-2094, 1989.
- 13 - E. R. Christensen e S. W. Lee, "Nonlinear finite element modeling of the dynamics of unrestrained flexible structures", Computers and Structures, 23, 819-829, 1986.
- 14 - Garcia, Ephraim, "On the modeling and control of slewing flexible structures", Tese de Doutorado, State University of New York at Buffalo, Agosto 1989.
- 15 - A. Yigit, R. A. Scott e A. Galip Ulsoy, "Flexural motion of a radially rotating beam attached to a rigid body", Journal of Sound and Vibration, 121(2), 201-210, 1988.
- 16 - H. Kojima, "Transient vibrations of a beam/mass system fixed to a rotating body", Journal of Sound and Vibration, 107, 149-154, 1986.

- 17 - Crandall, Stephen H., Karnopp, Dean C., Kurtz, Edward F. and Pridmore-Brown, David C., "Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems", McGraw-Hill Book Company, EUA, 1968.
- 18 - Langhaar, H. L., "Energy Methods in Applied Mechanics", John Wiley and Sons, EUA, 1962.
- 19 - Craig, Roy R., "Structural Dynamics - An introduction to computer methods", John Wiley and Sons, EUA, 1981.
- 20 - Tauchert, T. R., "Energy principles in Structural Mechanics", McGraw Hill Books Co., EUA, 1974.
- 21 - Garcia, Ephraim and Inman, Daniel J., "Advantages of slewing an active structure", J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., vol.1, Julho 1990.
- 22 - Garcia, Ephraim and Inman, Daniel J., "Modeling of the slewing control of a flexible structure", AIAA - Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 14, 1990, pp 736-742.
- 23 - Juang, J.N., Horta, L.G. e Robertshaw, H., "A slewing control experiment for flexible structures", AIAA - Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 9, No. 5, pp 599-607.
- 24 - Khorrami, F. and Zheng, S., "An Inner/Outer Loop Controller for Rigid-Flexible Manipulators", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, December 1992.
- 25 - Sah, J.J.F., "On the interaction between actuator and slewing structure", Ph. D. Thesis, Faculty of the Graduate School of the State University of New York at Buffalo, New York, 1990.

- 26 - Simmonds, J. G., Mann, J. E. Jr., "A first look at perturbation theory", Robert E. Krieger Publishing Company, Florida, 1986.
- 27 - Hinch, E. J. , "Perturbation methods" , Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.
- 28 - Nayfeh, A. H. , "Perturbation methods", John Wiley and Sons, USA, 1973.
- 29 - Nayfeh, A. H. , "Introduction to perturbation techniques", John Wiley and Sons, USA, 1981.
- 30 - Aziz, A. e Na, T. Y., "Perturbation methods in heat transfer" , Hemisphere Publishing Corporation, USA, 1984.
- 31 - Niemann, G., "Elementos de Máquinas", vol. 2, Editora Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 1971.
- 32 - Niemann, Gustav, "Elementos de Máquinas" , volume 3, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1971.
- 33 - Shigley, J. E., "Mechanical Engineering Design", vol. 1, McGraw Hill Books, EUA, 1977.
- 34 - Deutschman, A. D., Michels, W. J. And Wilson, C. E., "Machine Design : Theory and Practice", Macmillan Publishing Co. Inc., New York, 1975.
- 35 - PIC : Catálogo número 37 - Largest resource for standard and special precision components.
- 36 - Rolamentos FAG - Manual.
- 37 - Rolamentos SKF - Manual de produtos nacionais.

Apêndices

Apêndice A

Equações dinâmicas do motor

A.1 - Modelo do motor e equações dinâmicas

Um motor de corrente contínua é um dispositivo eletro-mecânico que converte energia elétrica em energia mecânica.

Motores deste tipo são atuadores populares não apenas porque podem gerar uma faixa extensa de torques e velocidades angulares mas também porque são silenciosos, limpos e eficientes [25] .

Seja o diagrama esquemático de um motor de corrente contínua controlado por armadura ilustrado na figura A.1.

O balanço elétrico do motor (somatório de tensões) fornece :

$$L_A \left(\frac{di_A}{dt} \right) + R_A i_A + e_B = e_A \quad (A.1)$$

aonde e_B representa a força contra-eletromotriz do motor e e_A representa a tensão de controle aplicada à armadura.

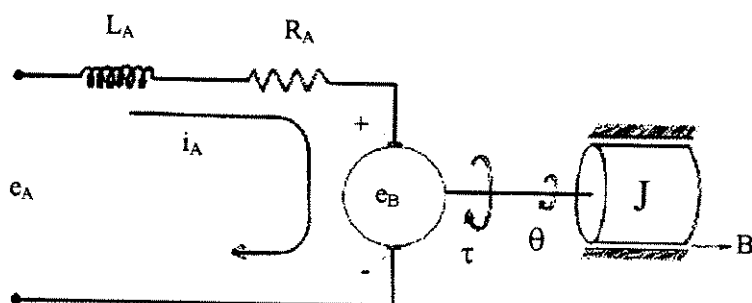


Figura A.1 - Modelo para o motor cc controlado por armadura.

O balanço mecânico do motor (somatório de forças) fornece :

$$J \left(\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} \right) + B \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right) + T_A = K_m i_A \quad (A.2)$$

aonde θ_m representa a posição angular do motor, J representa a inércia da estrutura a ser movida, B o atrito associado ao movimento desta estrutura, T_A representa o torque aplicado devido ao sistema de transmissão entre o motor e a estrutura de rastreamento e K_m representa a constante de torque do motor.

Seja, então :

$$T_M = (1/N_g) T_A \quad (A.3)$$

aonde T_M representa o torque gerado pelo motor e N_g representa a relação de transmissão ($N_g:1$).

De (A.2) :

$$T_A = K_m i_A - J \left(\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} \right) - B \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right) \quad (A.4)$$

De (A.1) , e considerando a indutância do motor (L_A) desprezível, tem-se:

$$i_A = (e_A - e_B) / R_A \quad (A.5)$$

Substituindo (A.5) em (A.4) , fazendo $e_B = K_B \dot{\theta}_m$, aonde K_B representa a constante de tensão do motor, e rearranjando termos, obtém-se :

$$T_A = (K_m / R_A) e_A - J \left(\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} \right) - [B + (K_M K_B / R_A)] \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right) \quad (A.6)$$

Substituindo (A.6) em (A.3) :

$$T_M = ((1/N_g) K_m / R_A) e_A - J (1/N_g) \left(\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} \right) - [(1/N_g) B + ((1/N_g) K_M K_B / R_A)] \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right) \quad (A.7)$$

O torque T_A é reverenciado nas equações do movimento para a estrutura flexível como T e seja também $\theta_m = \theta$ aonde θ representa a rotação da estrutura flexível em análise em torno do eixo de rastreamento.

A expressão (A.7) , que representa a equação do motor, pode ser reescrita como :

$$T_M = C_1 e_A - C_2 \ddot{\theta}_m - C_3 \dot{\theta}_m$$

(A.8)

aonde :

$$C_1 = (1/N_g) K_m / R_A$$

$$C_2 = J(1/N_g)$$

$$C_3 = (1/N_g)B + ((1/N_g)K_M K_B / R_A)$$

Apêndice B

Técnicas de Perturbação

B.1 - Introdução ([26], [27])

Existem dois métodos de se obter aproximações precisas para as soluções de uma equação qualquer: métodos numéricos e métodos analíticos. O método das perturbações pertence a esta última classe.

A teoria de perturbação representa o estudo dos efeitos de pequenos distúrbios no comportamento do sistema que se pretende analisar. A idéia básica desta teoria consiste em obter uma solução aproximada de um problema matemático através de uma expansão explorando-se a presença de um parâmetro adimensional pequeno o suficiente no equacionamento do problema. Quanto menor este parâmetro, mais acurada torna-se a solução aproximada proposta. Este método e os métodos numéricos não competem entre si mas complementam-se.

A obtenção de valores numéricos bons para a solução não representa a única proposta de uma aproximação por perturbação. Esta análise fornecerá informações sobre o sistema através da física simplificada de um problema limite. Muitas das técnicas e conceitos da análise de perturbação encontram-se introduzidos valendo-se de um simples conjunto de equações algébricas, conforme se verifica comumente na literatura (as referências citadas no começo e ainda [28] e [29]).

Referente aos pequenos distúrbios citados anteriormente, se seus efeitos no comportamento do sistema são pequenos, os distúrbios ou perturbações são ditos *regulares*; de outra forma, eles são ditos *singulares*.

As perturbações regulares são assumidas praticamente toda vez que se constrói um modelo matemático de um fenômeno do mundo real (o regime de escoamento é *quase* permanente, a densidade varia *essencialmente* apenas com a amplitude, a condutividade é *virtualmente* independente da temperatura, a mola é *aproximadamente* linear, o atrito é *praticamente* desprezível, ...).

As perturbações singulares são provavelmente menos familiares. Sistemas que apresentam este tipo de comportamento singular podem ser caracterizados por apresentarem *singularidade no domínio* ou *singularidade no modelo*.

Problemas de perturbação tratando de singularidades no domínio foram investigados sistematicamente por Poincaré, quem os encontrou estudando mecânica orbital. A primeira análise extensiva de problemas envolvendo singularidade de modelo (problemas de camada limite) foi desenvolvida por Prandtl em seu trabalho em escoamento de fluidos de baixa viscosidade, tal como o ar e a água, sobre objetos sólidos.

Para se evitar incompatibilidades na solução, problemas de perturbação singular são transformados em problemas de perturbação regular através de um artifício denominado *não-dimensionalização* (também conhecido como *rescaling*). Neste

processo obtem-se o pequeno parâmetro ϵ , o qual deve ser o menor possível para que as soluções linear e não linear possam ser aproximadas.

Em alguns problemas, contudo, pode ser necessário introduzir uma quantidade de perturbação artificialmente a fim de facilitar a expansão da solução. Desta forma, no mesmo problema, mais de uma escolha pode ser disponível. A escolha feita irá determinar a simplicidade ou utilidade da solução final [30].

Nos problemas de perturbação singular, o comportamento do sistema aonde considerou-se $\epsilon = 0$ difere de maneira importante da abordagem aonde faz-se o limite para $\epsilon \rightarrow 0$. A maioria dos problemas de interesse em engenharia são singulares.

Uma idéia muito útil para problemas singulares é reescalar as variáveis antes de se fazer uma expansão. Assim, o problema passa de singular para regular. Portanto, o problema de encontrar o ponto de partida correto para a expansão pode ser visto como um problema de se encontrar um reescalonamento aceitável que regularize o problema singular.

A *não-dimensionalização* das equações que descrevem um sistema físico é feita expressando-se cada variável do problema que possui unidade física como uma fração de alguma quantidade fixa intrínseca ao problema analisado (um tempo característico, um comprimento característico, uma frequência característica, ...). O parâmetro ϵ deve surgir naturalmente após este tipo de procedimento.

Uma grande virtude da não-dimensionalização é que esta torna possível representar uma infinidade de problemas físicos através de um único problema matemático. Outra aplicação útil da não-dimensionalização é que esta algumas vezes revela sistemas físicos díspares como sendo idênticos matematicamente. Isto abre a possibilidade de se resolver problemas físicos por analogia.

A principal preocupação neste tipo de análise será determinar quando e como as equações diferenciais (ordinárias ou parciais) que regem o comportamento de um sistema físico podem ser resolvidas *aproximadamente* por métodos de perturbação. Para alguns problemas mais complicados, soluções exatas e fechadas podem não ser disponíveis.

B.2 - O método das múltiplas escalas

O *método das múltiplas escalas* é um método geral aplicável a uma enorme variedade de problemas. Estes problemas são caracterizados por terem dois ou mais processos físicos, cada um deles com sua própria escala, e ocorrendo simultaneamente. Existem quantidades que são preservadas em ordens principais, mas que podem deteriorar-se através da acumulação de pequenos distúrbios ([1], [2]).

Um dos maiores desafios nos problemas do tipo singular consiste em se determinar qual a melhor expansão que representa a solução do problema perturbado. Geralmente trabalha-se com expressões que apresentam potências de ϵ , mas estas potências, por exemplo, podem ser inteiras ou fracionárias ([1], [2]).

Para o sistema de equações diferenciais para estruturas flexíveis de rastreamento de membro único (pequenas ou grandes deflexões) da forma como foi adimensionalizado neste trabalho, uma expansão deste tipo tornou-se impraticável, no momento, para a solução do mesmo.

A razão reside no fato de que a menor ordem de ϵ multiplicando as não linearidades do problema é 5. Cada ordem de ϵ equivale a uma escala de tempo do problema. Cada escala tem a ver com o tempo específico de um fenômeno diferente que pode ocorrer no problema em questão.

Imagine-se uma garotinha divertindo-se em um balanço. Enquanto oscila para lá e para cá, a infante está sacudindo as pernas. Duas escalas de tempo poderiam ser utilizadas

para se analisar este problema. Uma escala estaria associada ao movimento do balanço (e consequentemente do corpo da garota) e outra escala (mais rápida) acompanharia o movimento de suas pernas.

Para o problema tratado neste trabalho, a expansão da solução do problema em torno da solução de um problema ideal seria do tipo:

$$\theta = \epsilon^1 \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \epsilon^3 \theta_3 + \epsilon^4 \theta_4 + \epsilon^5 \theta_5 \quad (\text{B.1a})$$

$$q_1 = \epsilon^1 q_{11} + \epsilon^2 q_{12} + \epsilon^3 q_{13} + \epsilon^4 q_{14} + \epsilon^5 q_{15} \quad (\text{B.1b})$$

A maioria das expansões adotadas geralmente terminam (ou são truncadas) no segundo ou terceiro termo. Este truncamento varia de sistema para sistema.

Em geral, tal truncamento deve-se a três fatores [30]:

- a expansão truncada é em geral suficientemente acurada no intervalo de ϵ que é de interesse prático;
- quando se chega a equações de perturbação de ordem mais elevada, suas soluções vão se tornando cada vez mais difíceis de serem obtidas;
- a mera proliferação de termos não garante necessariamente um aumento na acurácia da solução (na verdade, algumas vezes o número elevado de termos pode prejudicar a acurácia).

Uma expansão truncada pode ser válida apenas para um intervalo limitado de valores da quantidade de perturbação (ϵ , por exemplo). Fora deste intervalo, a expansão falha em convergir e pode produzir resultados errôneos. Este problema pode ser resolvido com o desenvolvimento do *método das séries de perturbação extendidas* [30].

Se a expansão for válida em todo o domínio de ϵ , esta é classificada como *expansão de perturbação regular*. Por outro lado, se a expansão torna-se singular em uma certa região, a expansão é classificada como *expansão de perturbação singular*. Neste último caso, a expansão possui pouca ou nenhuma utilidade [30].

As regiões aonde a expansão falha são denominadas *regiões de não uniformidade*. A não uniformidade pode apresentar-se de muitas formas [30]:

- a solução do problema torna-se infinita em algum valor da variável independente;
- a solução possui uma descontinuidade no domínio de interesse da análise;
- a solução falha em satisfazer alguma condição de contorno;
- a solução contém uma singularidade essencial.

Para o estudo do problema desenvolvido neste trabalho através do método das múltiplas escalas, cada uma das expressões B.1 deveria, então, ser substituída nas equações do movimento obtidas nos capítulos 3 e 4 (para pequenas e grandes deflexões respectivamente).

O próximo passo nesta análise seria separar as ordens de ϵ e compor novos sistemas de equações. No problema em questão ter-se-ia pelo menos cinco grupos de duas equações diferenciais cada, cada grupo associado a uma ordem de ϵ . O primeiro sistema seria resolvido (obtem-se θ_1 e q_{11}) e a solução substituída no próximo, até o último. Este primeiro sistema trata-se do problema linear comumente encontrado na literatura e com solução analítica fechada na maioria das vezes.

Obtendo-se os θ_i e os q_{ii} obtem-se θ e q_1 .

Este tipo de procedimento, contudo, para o problema em questão, envolveria uma quantidade absurda de cálculos e levaria a análise aqui apresentada para outras direções. Através deste tipo de análise pode-se obter as equações de modulamento de amplitude e fase da oscilação do braço. E informações valiosas podem ser retiradas daí.

Apêndice C

Projeto do manipulador flexível

C.1 - Modelo geométrico

O conjunto completo do manipulador flexível a ser projetado refere-se à figura C.1. Cada uma das partes ali apresentada será dimensionada na sequência.

Muitas vezes, no decorrer deste texto, a parte referente ao braço do manipulador flexível será referenciada como viga de alumínio. Esta é a parte do conjunto cujo modelamento e dinâmica vêm sendo desenvolvidos até então neste trabalho (capítulos 2, 3 e 4).

O sistema manipulador flexível apresentado é composto de três partes básicas : motor de corrente contínua (acionador), transmissão mecânica e estrutura flexível (braço). O modelo proposto para o motor é apresentado no apêndice A. A escolha da transmissão mais razoável em uma primeira abordagem é apresentada a partir do item C.9. O dimensionamento da transmissão escolhida é apresentado a partir do item C.11.

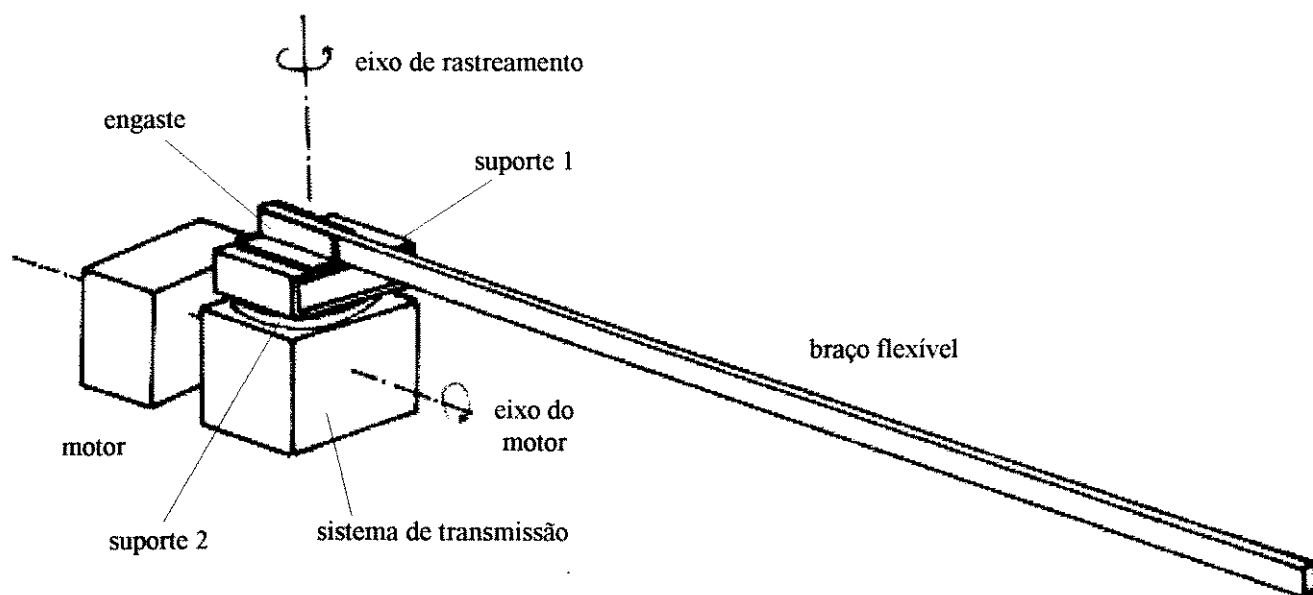


Figura C.1 - Conjunto completo: manipulador flexível

C.2 - Viga de alumínio : cálculos de inércia

A figura C.1 apresenta a carga total que será acionada pelo motor. Esta carga será inicialmente composta pelas seguintes partes : a viga de alumínio (ou braço do manipulador flexível), o engaste (composto por duas cantoneiras ajustáveis através de orifícios no suporte 1), os suportes 1 e 2 e a carga a ser transportada pelo braço (visando futuras aplicações), a qual não se encontra representada na figura.

O cálculo do momento de inércia em relação ao eixo de rastreamento da viga de alumínio será efetuado de acordo com o esquema indicado na figura C.2. A parte coberta pelo comprimento L - a representa a parte que será efetivamente considerada nas simulações e que representa a estrutura flexível propriamente dita. A parte restante, de comprimento a , servirá apenas para propósitos de engastamento.

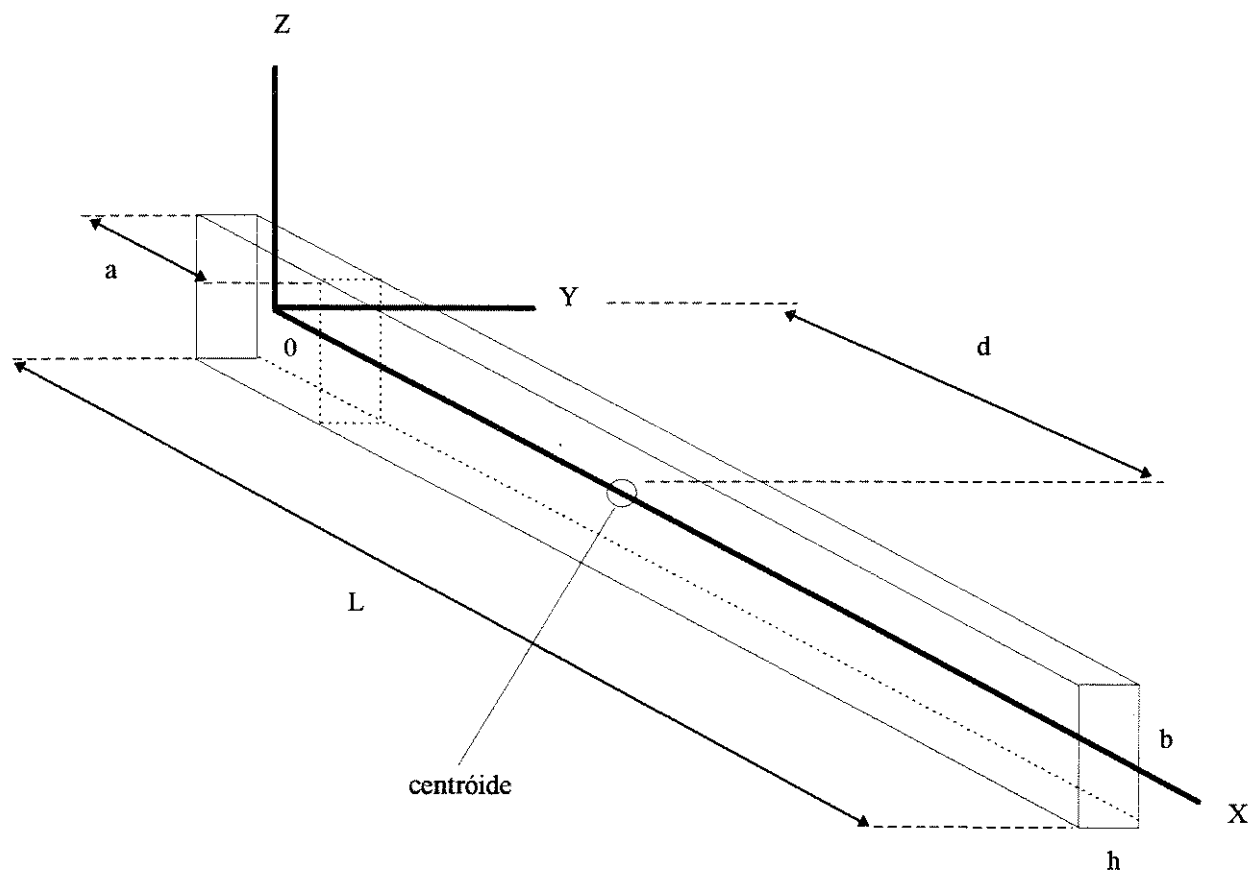


Figura C.2 - Viga de alumínio (braço)

Neste estudo, com o propósito de simulação, trabalhou-se com estruturas que possuem mesmo comprimento (1.2 m), porém, secções retas transversais diferentes. Os resultados observados puderam, então, ser comparados.

Para o projeto do manipulador, contudo, optou-se por uma destas secções. Com efeito, optou-se por aquela a qual pretende-se utilizar no protótipo experimental.

Assim sendo, considera-se os seguintes valores :

$$\rho_{\text{alumínio}} = 2700 \text{ kg / m}^3$$

$$L = 1.300 \text{ m}$$

$$a = 0.100 \text{ m}$$

$$b = 0.020 \text{ m}$$

$$h = 0.015 \text{ m}$$

$$d = 0.600 \text{ m}$$

O volume e a massa total da viga serão :

$$V_{\text{viga}} = 0.00039 \text{ m}^3$$

$$m_{\text{viga}} = 1.05300 \text{ kg}$$

Considerando a viga de alumínio como um corpo rígido, pode-se calcular o momento de inércia em relação ao eixo Z (inercial) da seguinte maneira:

$$I_{\text{viga}_{\text{centróide}}} = (1/12) m_{\text{viga}} (h^2 + L^2) = 0.14832 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{viga}_Z} = I_{\text{viga}_{\text{centróide}}} + m_{\text{viga}} (d)^2 = 0.52740 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{VIGA}_Z} = 0.52740 \text{ kgm}^2$$

C.3 - Engaste : cálculos de inércia

A fim de que os modos considerados na análise teórica possam realmente representar o sistema físico, este deverá apresentar-se engastado em uma de suas extremidades. A condição de

engastamento total é uma condição muitas vezes difícil e complicada de ser alcançada na prática. A estrutura real dificilmente pode ser considerada como completamente engastada. A solução pela qual se optou neste trabalho para engastar a estrutura flexível no protótipo experimental é apresentada a seguir. O sistema utilizado para fixação do braço permitirá que se trabalhe com vigas de várias secções retas.

Cabe ressaltar que todos os parafusos utilizados para fixação das partes não estão sendo considerados de forma alguma nas análises aqui apresentadas. Para uma maior facilidade de cálculo, os orifícios pelos quais atravessarão também foram suprimidos.

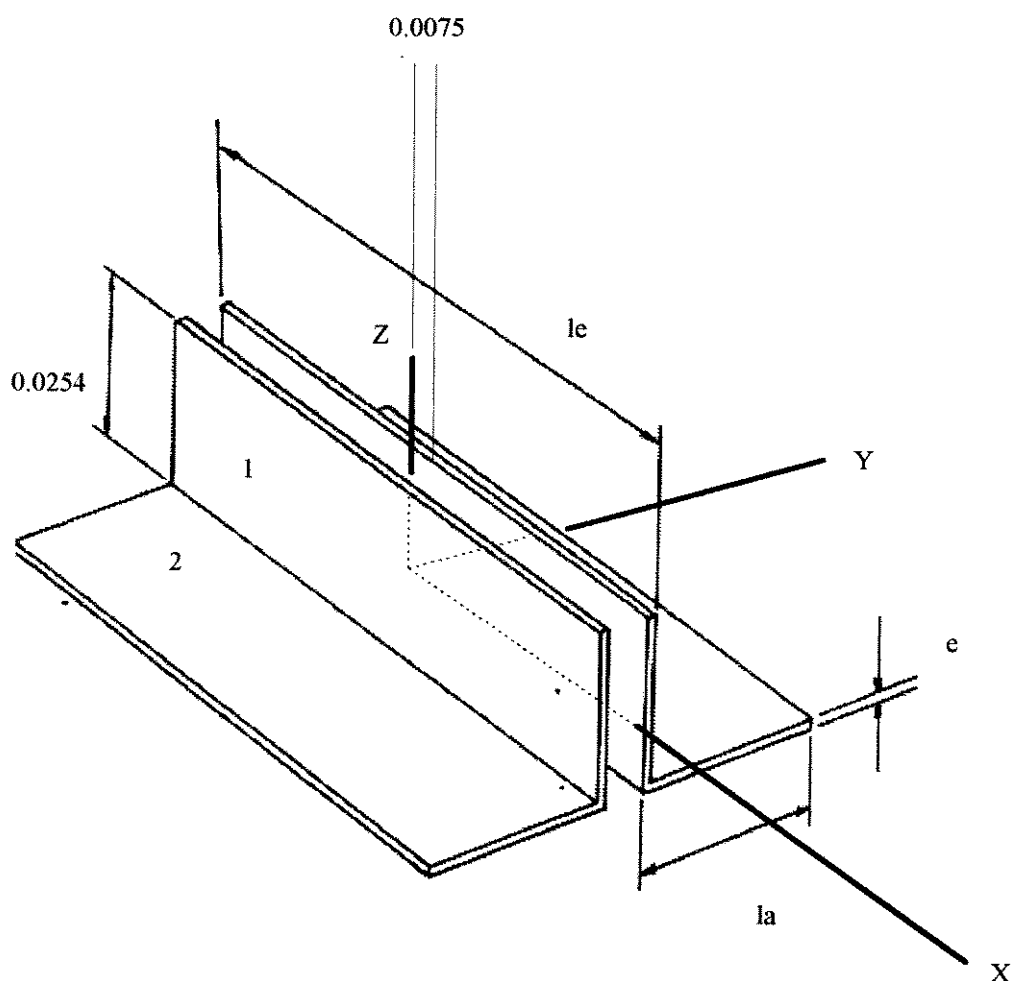


Figura C.3 - Engaste

O engaste terá o formato apresentado na figura C.3. Será confeccionado de aço 1020. Para este material tem-se $\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$.

Sejam os seguintes parâmetros com seus respectivos valores:

$$\begin{aligned} f &= (0.0075 + 0.0015) \text{ m} \\ g &= (0.0075 + (0.0254/2)) \text{ m} \\ e &= 0.003 \text{ m} \\ le &= 0.1010 \text{ m} \\ la &= 0.0254 \text{ m} \end{aligned}$$

O engaste será dividido em duas partes para o cálculo das inércias, apresentando os nomes de acordo com a mesma figura C.3. Devido à simetria apresentada, será realizado o cálculo para uma das partes e o valor obtido será, por conseguinte, dobrado.

Assim sendo :

$$m_1 = (7800)(0.003)(0.0254 - 0.003) (0.1010) = 0.05294 \text{ kg}$$

$$m_2 = (7800)(0.003)(0.0254)(0.1010) = 0.06003 \text{ kg}$$

$$I_{1 \text{ centróide}} = (1/12) m_1 (e^2 + le^2)$$

$$I_{1 \text{ centróide}} = (1/12) 0.05294 (0.003^2 + 0.1010^2)$$

$$I_{1 \text{ centróide}} = 0.000045 \text{ kgm}^2$$

$$I_{1Z} = I_{1 \text{ centróide}} + m_1 f^2$$

$$I_{1Z} = 0.000049 \text{ kgm}^2$$

$$I_{2 \text{ centróide}} = (1/12) m_2 (la^2 + le^2)$$

$$I_{2 \text{ centróide}} = (1/12) 0.06003 (0.0254^2 + 0.1010^2)$$

$$I_{2 \text{ centróide}} = 0.000054 \text{ kgm}^2$$

$$I_{ZZ} = I_{2 \text{ centróide}} + m_2 g^2$$

$$I_{ZZ} = 0.000079 \text{ kgm}^2$$

Portanto:

$$I_{\text{ENGASTE } Z} = 2 I_{1Z} + 2 I_{2Z}$$

$$I_{\text{ENGASTE } Z} = 0.000256 \text{ kgm}^2$$

C.4 - Suporte 1 : cálculos de inércia

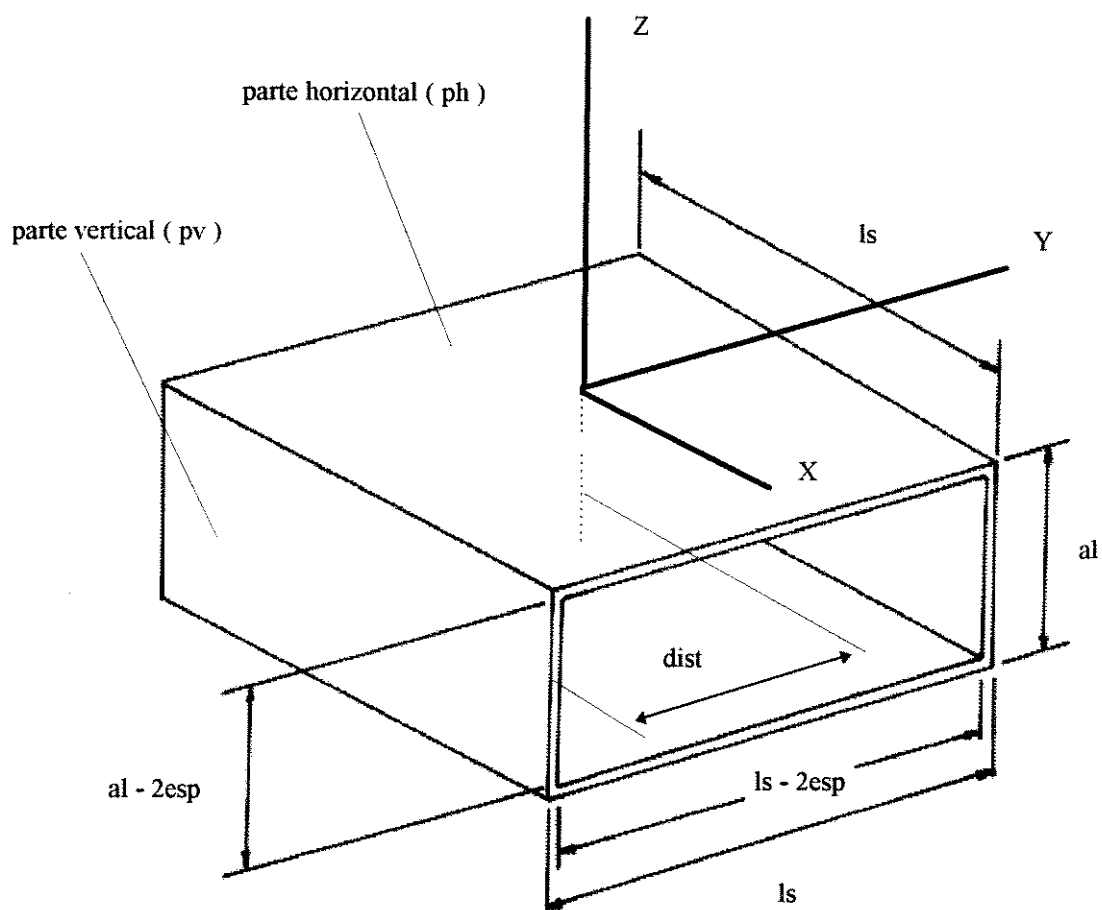


Figura C.4 - Suporte para o engaste apresentado no item C.3.

Na figura C.4 :

$$ls = 0.1010 \text{ m}$$

$$al = 0.038 \text{ m}$$

$$esp = 0.003 \text{ m}$$

$$m_{ph} = 0.08263 \text{ kg (cada)}$$

$$m_{pv} = 0.02618 \text{ kg (cada)}$$

$$dist = (ls/2) - (esp/2) \text{ m}$$

E os momentos de inércia em torno do eixo inercial Z tornam-se:

$$I_{\text{parte horizontal centróide}} = 1/12 m_{ph} (ls^2 + ls^2)$$

$$I_{\text{parte horizontal centróide}} = 1/12 (0.08263) (0.1010^2 + 0.1010^2)$$

$$I_{\text{parte horizontal centróide}} = 0.0001405 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{parte horizontal Z}} = I_{\text{parte horizontal centróide}}$$

$$I_{\text{parte vertical centróide}} = 1/12 m_{pv} (esp^2 + ls^2)$$

$$I_{\text{parte vertical centróide}} = 1/12 (0.02618) (0.003^2 + 0.1010^2)$$

$$I_{\text{parte vertical centróide}} = 0.0000703 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{parte vertical Z}} = I_{\text{parte vertical centróide}} + m_{pv} dist^2$$

$$I_{\text{parte vertical Z}} = 0.0000703 + 0.02618 (0.1010/2 - 0.003/2)^2$$

$$I_{\text{parte vertical Z}} = 0.0001332 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{total suporte 1}} = 2 I_{\text{parte horizontal Z}} + 2 I_{\text{parte vertical Z}}$$

$$I_{\text{total suporte 1 Z}} = 0.0005473 \text{ kgm}^2$$

C.5 - Suporte 2 : cálculos de inércia

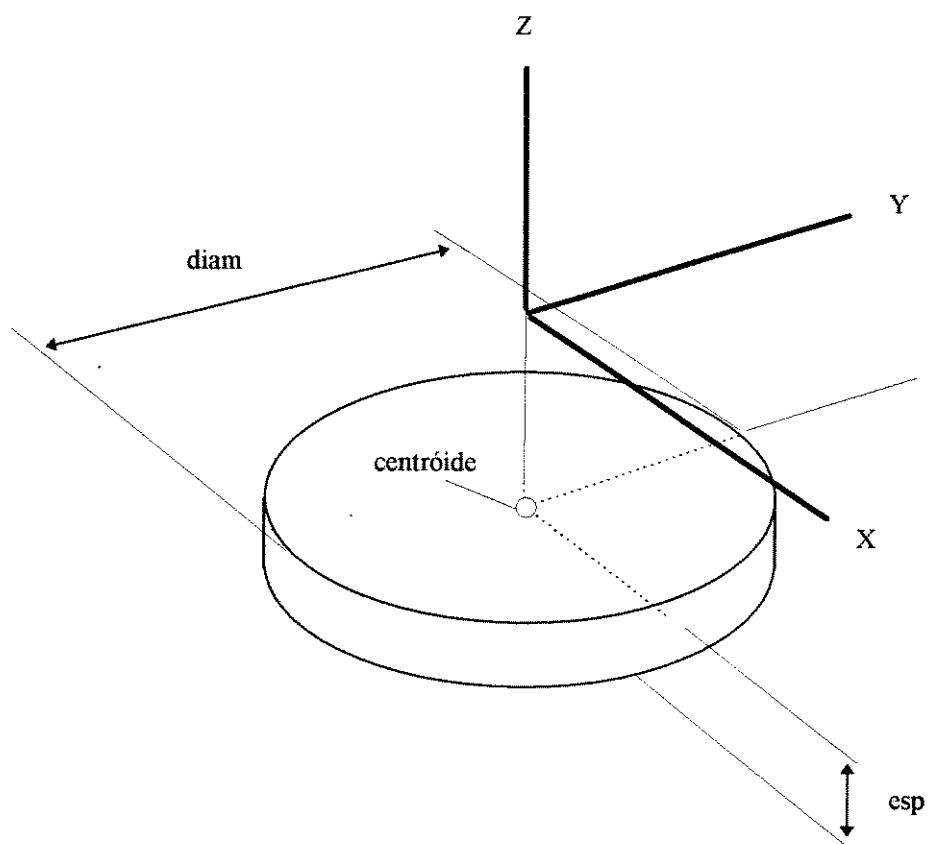


Figura C.5 - Suporte para a peça mostrada no item C.4

Aonde:

material = aço 1020

$\rho_{\text{aço}} = 7800 \text{ kg/m}^3$

diam = 0.100 m

esp = 0.004 m

Portanto:

$$m_{\text{suporte 2}} = \rho_{\text{aço}} \left(\pi \left(\frac{\text{diam}}{2} \right)^2 \right) \text{esp} = 0.245044 \text{ kg}$$

$$I_{\text{suporte 2 centróide}} = \frac{1}{2} \left(m_{\text{disco}} \right) \left(\frac{\text{diam}}{2} \right)^2 = 0.0003063 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{suporte } 2 Z} = I_{\text{disco centróide}}$$

$$I_{\text{suporte } 2 Z} = 0.0003063 \text{ kgm}^2$$

C.6 - Carga transportada : cálculos de inércia

A montagem que poderá ser utilizada para fixação da carga na extremidade livre do braço será conforme indicado na figura C.6. Objetos de diferentes tamanhos e formatos poderão ser afixados nesta extremidade. Buscou-se aqui determinar a inércia de uma massa limite para o manipulador em questão. Naturalmente, por ser sujeito a grandes deflexões, o braço poderá quebrar mais facilmente caso certos cuidados não sejam tomados.

Considera-se aqui que a inércia da carga transportada pelo braço seja constante ao longo do trajeto realizado pelo manipulador. Esta é uma primeira aproximação e também será feita para facilitar nos cálculos iniciais . Dependendo do formato da carga (simétrica ou não em relação a determinados eixos), de como for fixada e da deflexão do braço devido a carga excessiva, por exemplo, esta poderá ser uma suposição fraca.

Considera-se aqui que o centro de massa do objeto a ser transportado encontra-se sobre o eixo X (inercial). Esta observação casa com o que foi discutido no parágrafo anterior.

Considera-se também que o referido objeto a ser transportado pelo braço trata-se de um disco de aço.

Não se considera, nesta altura, o efeito das massas dos componentes de fixação da carga, consideradas também desprezíveis e, conseqüentemente, as suas inércias. Estes elementos encontram-se hachurados na figura C.6.

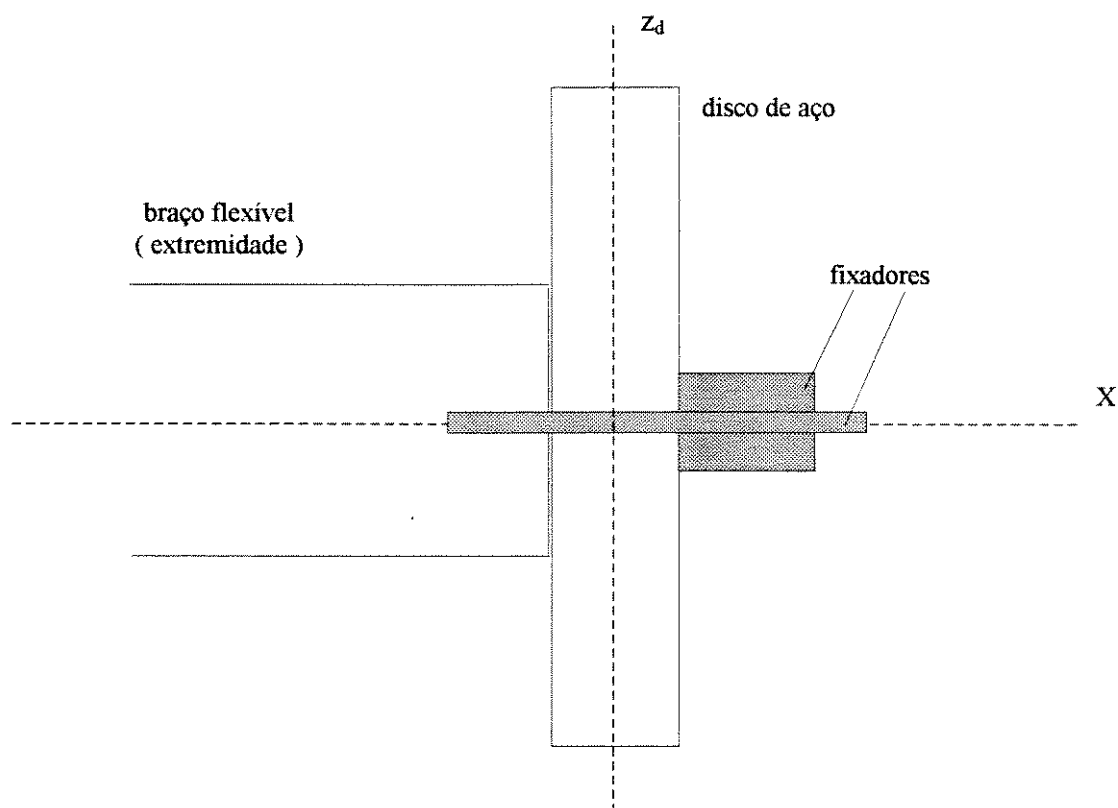


Figura C.6 - Carga a ser transportada (disco)

As dimensões do disco (elemento representativo da carga a ser transpostada pelo manipulador) são as que seguem :

diâmetro = 0.05 m

espessura = 0.01 m

volume = 0.00001963 m³

$m_{\text{DISCO}} = 0.153 \text{ kg}$

distância entre Z e $z_d = (L - a/2) + \text{espessura} / 2$

Assim,

$$I_{\text{disco}_{ZD}} = (1/12) m_{\text{DISCO}} (3R^2 + \text{espessura}^2)$$

$$I_{\text{disco}_{ZD}} = 0.00002518 \text{ kgm}^2$$

Portanto :

$$I_{\text{disco}_Z} = I_{\text{disco}_{Zd}} + m_{\text{DISCO}} (\text{distância entre } Z \text{ e } Z_d)^2$$

$$I_{\text{disco}_Z} = 0.00002518 + 0.153 ((1.300 - 0.005) + 0.01/2)^2$$

$$I_{\text{disco}_Z} = 0.2586 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{carga}_Z} = I_{\text{disco}_Z}$$

$$I_{\text{carga}_Z} = 0.2586 \text{ kgm}^2$$

C.7 - Inércia total da carga do motor

Desta forma , a inércia total com a qual o motor terá que lidar, através do sistema de transmissão, em relação ao eixo inercial Z, será :

$$I_{\text{TOTAL}} = I_{\text{VIGA}} + I_{\text{ENGASTE}} + I_{\text{SUPORTE 1}} + I_{\text{SUPORTE 2}} + I_{\text{CARGA}}$$

$$I_{\text{TOTAL}} = 0.787108 \text{ kgm}^2$$

C.8 - Estimativa de torque necessário e perfis de velocidade e aceleração angulares

Em posse deste dado, passa-se a determinar o torque necessário para acionar o sistema representado na figura C.1 e que possui a inércia calculada através dos itens C.2 a C.7.

A aceleração angular do braço será estimada tendo-se em vista o comportamento desejado para o mesmo. Este parâmetro, em verdade, será obtido via integração a partir de um perfil prescrito para a velocidade angular do mesmo. Este perfil é o que se busca comumente na prática.

Para a determinação do torque necessário a ser transmitido para o braço, T , tem-se :

$$T = I_{\text{TOTAL}} \alpha$$

aonde α representa a aceleração angular do braço.

Baseando-se nas características do movimento que se quer, propõe-se perfis de velocidade angular e, conseqüentemente, aceleração angular para o braço. Estes perfis serão necessários para a determinação das características da transmissão mecânica necessária. Esta transmissão, inicialmente, pensou-se realizar através de um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos, o tipo mais comum.

Os perfis de velocidade angular e aceleração angular que serão utilizados para o projeto do manipulador flexível são apresentados na figura C.7.

Para o perfil $w X t$, a velocidade de operação do braço é estimada em 0.5236 rad/s (5 rpm) e constante durante a maior parte do tempo em que o sistema estiver operando. Estima-se também que durante o primeiro e o último intervalos de operação, os quais poderão ser efetivamente maiores, o sistema irá acelerar e desacelerar, respectivamente.

Tanto a aceleração quanto a desaceleração pretende-se que sejam extremamente suaves, a fim de que o sistema não seja excitado, nestes intervalos de transitório, de alguma maneira. Tal excitação caminhará no sentido de degenerar o desempenho do sistema. Em sistemas reais estes intervalos são problemáticos.

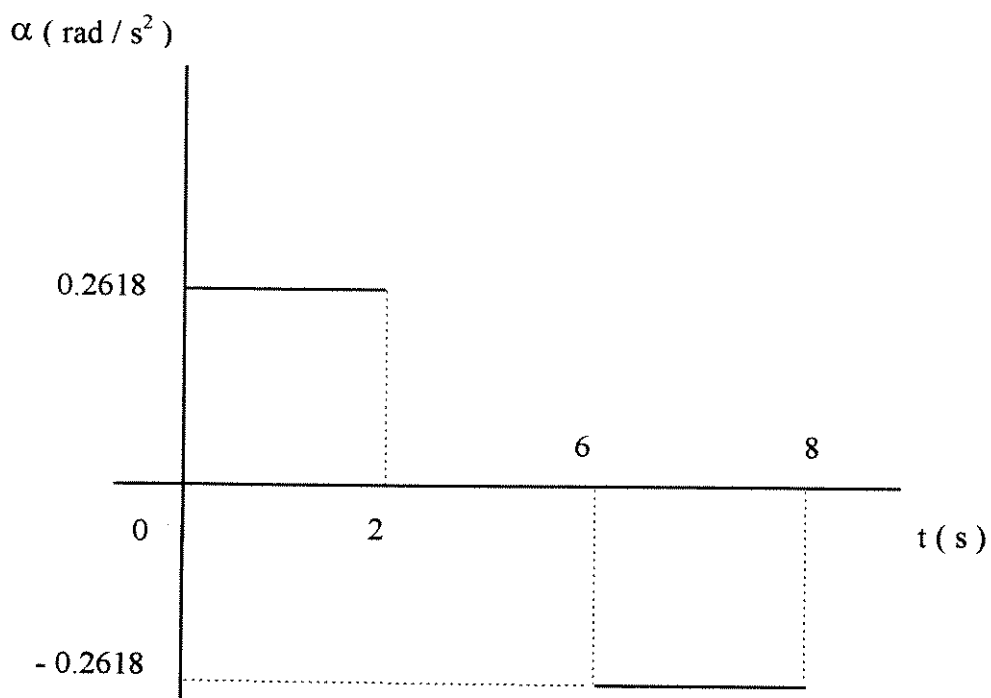
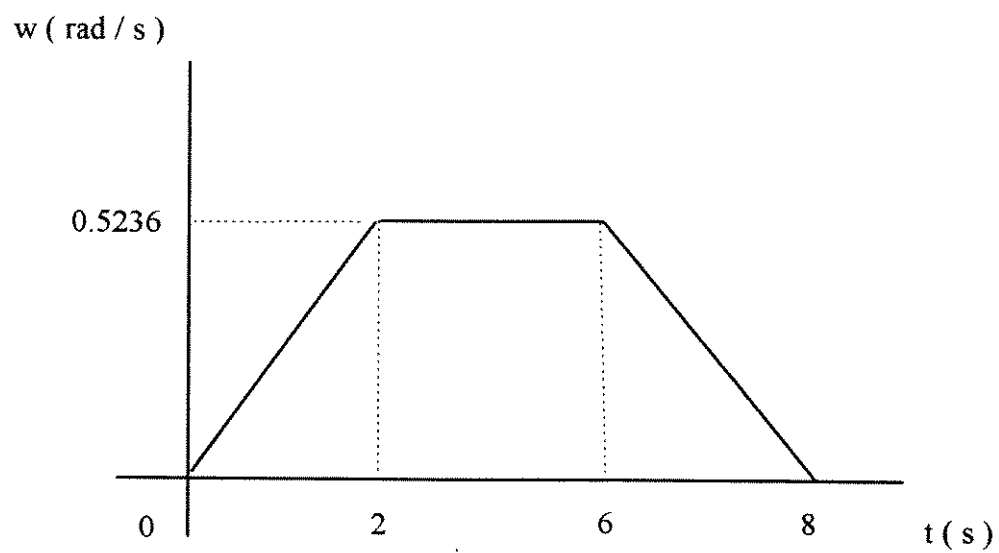


Figura C.7 - Perfis prescritos de velocidade e aceleração angulares do braço

Daqui em diante, para efeitos de simplificação, o termo *carga-motor* referir-se-á ao conjunto formado pela viga de alumínio (ou o braço flexível propriamente dito), o engaste, os suportes e a carga manuseada pelo braço, ou seja, a carga total com a qual o motor terá que operar.

Assim sendo, tem-se :

$$T_{\text{CARGA-MOTOR}} = (0.787108)(0.2618)$$

$$T_{\text{CARGA-MOTOR}} = 0.2061 \text{ Nm}$$

Seja a velocidade máxima de trabalho do motor dada por $w_{\text{MOTOR}} = 600 \text{ rpm}$ ou 62.832 rad / s . Assim, pode-se estimar o torque exercido pelo motor igualando-se as potências dos dois lados (lado *motor* e lado *carga-motor*).

$$P_{\text{MOTOR}} = P_{\text{CARGA-MOTOR}}$$

$$T_{\text{MOTOR}} w_{\text{MOTOR}} = T_{\text{CARGA-MOTOR}} w_{\text{CARGA-MOTOR}}$$

$$T_{\text{MOTOR}} = ((0.2061)(0.5236)) / 62.832$$

$$T_{\text{MOTOR}} = 0.00172 \text{ Nm}$$

C.9 - Cálculo do sistema de transmissão

C.9.1 - Transmissão através de engrenagens cilíndricas (dois eixos)

Seja a relação de transmissão :

$$\frac{N_{\text{MOTOR}}}{N_{\text{CARGA-MOTOR}}} = \frac{T_{\text{MOTOR}}}{T_{\text{CARGA-MOTOR}}} = \frac{D_{\text{MOTOR}}}{D_{\text{CARGA-MOTOR}}}$$

aonde D representa o diâmetro primitivo das engrenagens.

Os mesmos cálculos foram refeitos para uma relação de transmissão bem menor (1:50) com o propósito de mostrar que o problema do tamanho das engrenagens persiste.

Os valores encontrados constam na tabela C.1 , a seguir.

W _{BRAÇO} (rpm)	Relação de Transmissão	W _{MOTOR} (rpm)	Diâmetro primitivo ¹ (mm) (engrenagem no eixo do motor)	Diâmetro primitivo ² (mm) (engrenagem no eixo carga-motor)
5.00	1 : 120	600	30	3600
5.00	1 : 50	250	30	1500

- 1 - valor proposto e considerado razoável para iniciar os cálculos
- 2 - valor obtido através da relação de transmissão para o valor proposto de diâmetro no eixo do motor

Tabela C.1 - Transmissão através de par de engrenagens de dentes retos - Resultados

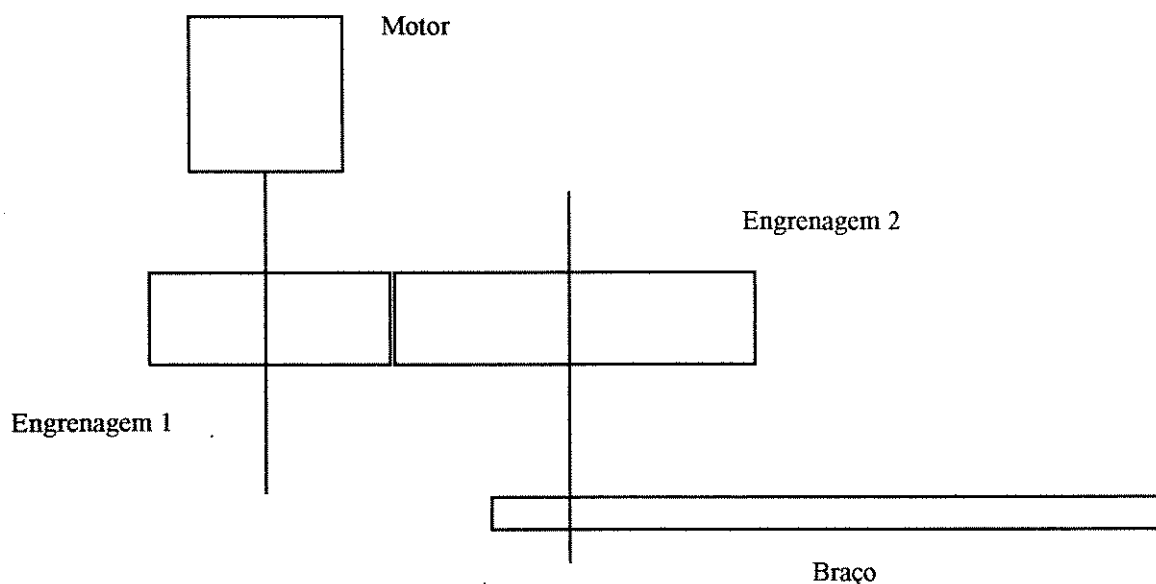


Figura C.8 - Montagem do manipulador incluindo sistema de transmissão por engrenagens

Em vista dos valores obtidos, os quais mostraram valores absurdos para o diâmetro das engrenagens da coroa, optou-se por estudar um novo tipo de transmissão do movimento entre o eixo do motor e o eixo associado ao sistema que inclui o braço.

C.9.2 - Transmissão através de engrenagens cilíndricas (mais de dois eixos)

O objetivo agora será incluir eixos intermediários entre o eixo do motor e o eixo da carga por ele transportada e realizar reduções sucessivas, até o ponto em que as dimensões das engrenagens tornem-se aceitáveis para este tipo de construção mecânica.

Seja, então, um eixo intermediário entre o eixo do motor e o eixo de sua carga, conforme o esquema apresentado na figura C.9.

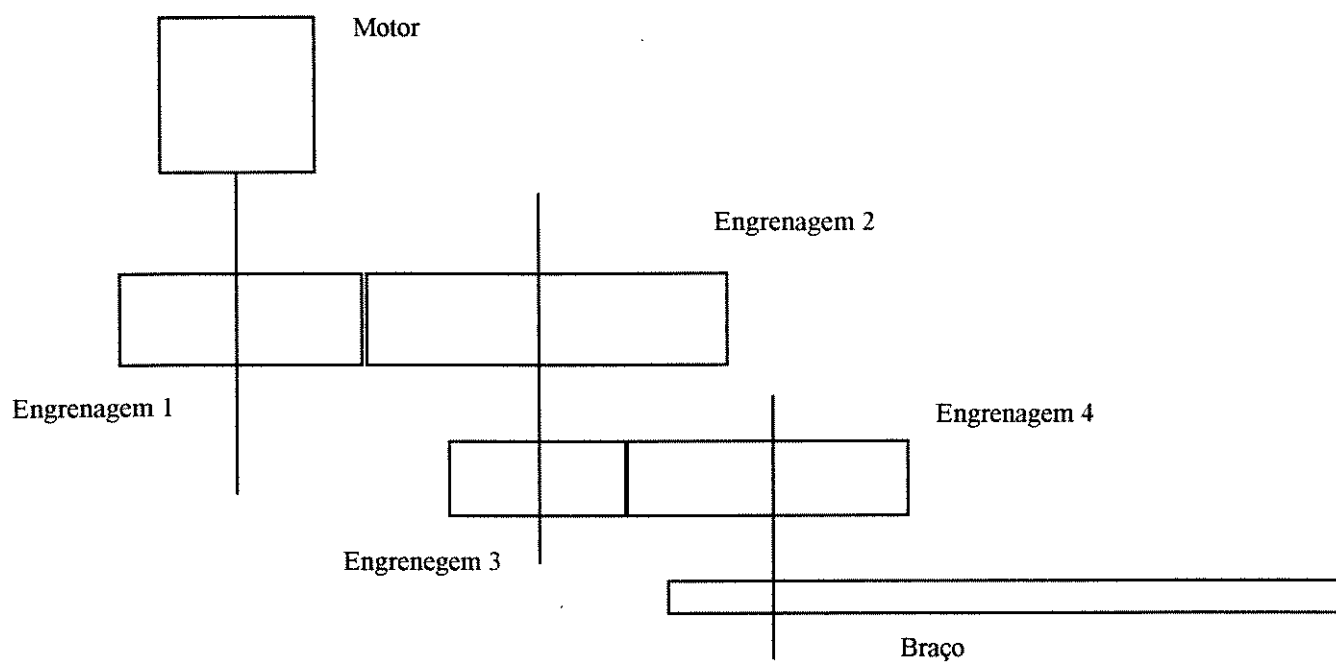


Figura C.9 - Montagem do manipulador incluindo sistema de transmissão por engrenagens e um eixo intermediário

E sejam as relações de transmissão entre as engrenagens da montagem apresentada na figura C.9.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{20} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_2}{600} \quad \text{e} \quad w_2 = w_3 \text{ (mesmo eixo)}$$

$$\frac{N_3}{N_4} = \frac{1}{6} = \frac{w_4}{w_3} = \frac{w_4}{30} \quad \text{e} \quad w_4 = 5 \text{ rpm (desejada)}$$

Portanto:

$$w_3 = 30 \text{ rpm}$$

$$w_4 = 5 \text{ rpm}$$

Da mesma forma :

$$\frac{1}{20} = \frac{0.00172}{T_2} \quad \text{e} \quad T_2 = T_3$$

$$\frac{1}{6} = \frac{T_3}{T_4}$$

Portanto :

$$T_3 = 0.0344 \text{ Nm}$$

$$T_4 = 0.2064 \text{ Nm}$$

E os diâmetros primitivos tornam-se:

D ₁ (mm)	D ₂ (mm)	D ₃ (mm)	D ₄ (mm)
30	600	30	180

Obs.: Os diâmetros 1 e 3 foram propostos e os demais calculados pela relação de transmissão. Esta estimativa dá idéia acerca das ordens de grandeza envolvidas

Tabela C.2 - Diâmetros primitivos das engrenagens considerando um eixo intermediário

Uma outra possibilidade, as relações de transmissão 1:12 e 1:10, por exemplo, forneceriam os diâmetros primitivos D₂ = 360 e D₄ = 300, ainda inaceitáveis.

Os mesmos procedimentos foram executados para dois e três eixos intermediários, sempre buscando reduzir o tamanho das engrenagens e manter a saída desejada em matéria de velocidade angular e torque necessário. Os resultados obtidos são mostrados a seguir.

Fazendo :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{N_3}{N_4} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{N_5}{N_6} = \frac{1}{3}$$

D ₁ (mm)	D ₂ (mm)	D ₃ (mm)	D ₄ (mm)	D ₅ (mm)	D ₆ (mm)
30	240	30	150	30	90

Obs.: Os diâmetros 1, 3 e 5 foram propostos e os demais calculados pela relação de transmissão. Esta estimativa dá idéia acerca das ordens de grandeza envolvidas

Tabela C.3 - Diâmetros primitivos das engrenagens considerando dois eixos intermediários

Fazendo :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{N_3}{N_4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{N_5}{N_6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{N_7}{N_8} = \frac{1}{2}$$

D ₁ (mm)	D ₂ (mm)	D ₃ (mm)	D ₄ (mm)	D ₅ (mm)	D ₆ (mm)	D ₇ (mm)	D ₈ (mm)
30	150	30	120	30	90	30	60

Obs.: Os diâmetros 1, 3 , 5 e 7 foram propostos e os demais calculados pela relação de transmissão. Esta estimativa dá idéia acerca das ordens de grandeza envolvidas

Tabela C.4 - Diâmetros primitivos das engrenagens considerando três eixos intermediários

Os diâmetros tornam-se cada vez menores e mais satisfatórios, porém, a complexidade do sistema de transmissão aumenta, assim como aumentam todos os efeitos negativos e não lineares que irão sendo acrescentados ao conjunto do manipulador.

Os efeitos mencionados no parágrafo anterior incluem desde problemas relacionados à vibração dos conjuntos de engrenagens e problemas de atrito seco. Isto sem mencionar um sistema de suporte mais elaborado para tantos eixos de transmissão.

O próximo passo será realizar os cálculos para um sistema de transmissão composto por um par rosca sem fim - coroa.

Devido às características deste tipo de engrenamento, é bem provável que uma solução mais simples e mais compacta consiga ser obtida para o sistema de transmissão mecânica do manipulador.

C.9.3 - Transmissão através de par sem fim-coroa

O sistema de transmissão via par sem fim-coroa é comparado a seguir com vários tipos de sistemas de transmissão conhecidos e comumente utilizados, justificando-se sua utilização.

Em relação às engrenagens cilíndricas e cônicas, por exemplo, o tipo de transmissão utilizando-se do par parafuso sem fim-coroa envolve elementos geralmente menores e mais fáceis de serem fabricados. Para as grandes relações de transmissão, torna-se mais econômico ([31] , [32] , [33]) .

Em relação a engrenagens cônicas descentradas, a transmissão através de par sem fim-coroa possui maior comprimento total de linha de contato e é mais silencioso ([31] , [32] , [33]) .

Em relação às engrenagens helicoidais, o sistema de transmissão em discussão aqui possui maior resistência mecânica e maior rendimento, devido ao contato linear em vez de pontiforme ([31] , [32] , [33]) .

Seja, portanto, o esquema apresentado na figura C.10, representando o tipo de transmissão em discussão neste item.

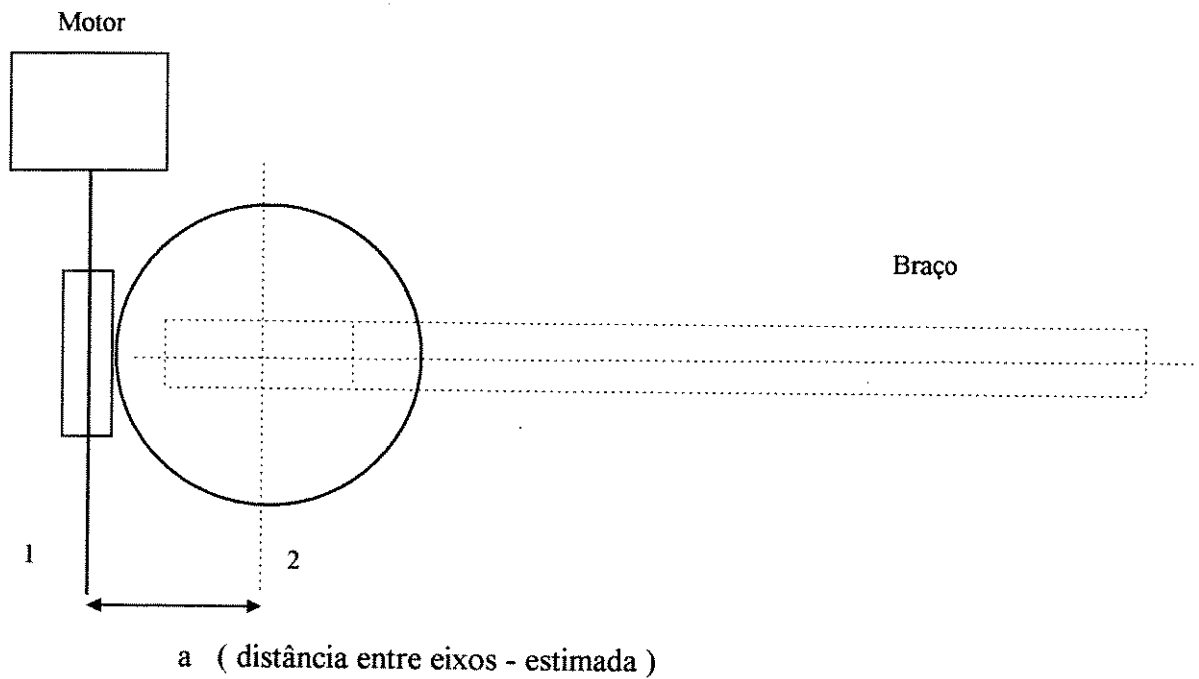


Figura C.10 - Transmissão considerando parafuso sem fim-coroa.

Relação de transmissão (baseado nas rotações em rpm) :

$$i = \frac{w_1}{w_2} = \frac{600}{5} = 120$$

A relação de transmissão obtida é muito grande para este tipo de transmissão. Recomenda-se que se use, no máximo, $i = 100$, sendo $i = 60$ uma ótima relação de transmissão para fins práticos.

C.9.4 - Transmissão através de engrenagens cilíndricas e par sem fim-coroa

Em vista do discutido em C.9.3, optou-se por realizar uma primeira redução antes de se introduzir o sem-fim. Esta primeira redução será feita por um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos com relação de transmissão 1:2.

Desta forma, considerando o diâmetro da engrenagem motriz (conectada ao eixo do motor) igual a 30 mm, a engrenagem movida (redutora) será de 60 mm. A velocidade angular do motor cai de 600 rpm (w_1) para 300 rpm (w_2) nesta primeira redução.

Para o parafuso sem fim-coroa, ter-se-á, agora, uma relação de transmissão de:

$$i = \frac{w_3}{w_4} = \frac{300}{5} = 60$$

Na relação acima, w_3 refere-se à velocidade angular no eixo do sem fim (a mesma velocidade angular da segunda engrenagem, uma vez que compartilham o mesmo eixo) e w_4 refere-se à velocidade angular no eixo do braço, conforme a figura C.11.

Seja uma distância entre eixos, a , de 40 mm.

Adota-se o número de dentes $z_1 = 1$ e $z_{m2} = 60$, aonde o subscrito m representa o valor médio. Cabe ressaltar que muitos valores e fórmulas aqui apresentados são resultado de consultas em tabelas, as quais podem ser conferidas em [31], [32], [33], [34].

Seja também:

$$d_{f1} \cong 0.6 a^{0.85}$$

aonde d representa o diâmetro e o subscrito f refere-se ao círculo de base. Assim sendo, encontra-se $d_{f1} \cong 13.80$.

Para a determinação do módulo tem-se:

$$m \cong \frac{2a - d_{f1}}{z_{m2} + 2.4} = \frac{2(40) - 13.80}{60 + 2.4} \cong 1.06 \text{ mm}$$

Desta forma,

$$d_{m1} \cong d_{f1} + 2.4 m$$

resultando $d_{m1} \cong 16.35 \text{ mm}$. Adota-se o diâmetro médio do sem-fim como 17 mm.

Para o cálculo do fator de deslocamento de perfil, tem-se:

$$x_2 = \frac{z_{m2} - z_2}{2}$$

Em consulta às referências [31] e [32], chega-se à conclusão de que $z_2 = i$, portanto, $x_2 = 0$. Com este valor, obtém-se um perfil de parafuso E (normal).

Para a determinação do diâmetro médio da coroa, tem-se:

$$d_{m2} = 2a - d_{m1}$$

resultando $d_{m2} = 63.65 \text{ mm}$.

Finalmente, para a determinação do diâmetro primitivo do sem fim (1) e da coroa (2), tem-se :

$$d_{O1} = d_{m1} + 2x_2m$$

$$d_{O2} = d_{m2} - 2x_2m$$

Obtendo-se:

$$d_{O1} \cong 17 \text{ mm}$$

$$d_{O2} \cong 64 \text{ mm}$$

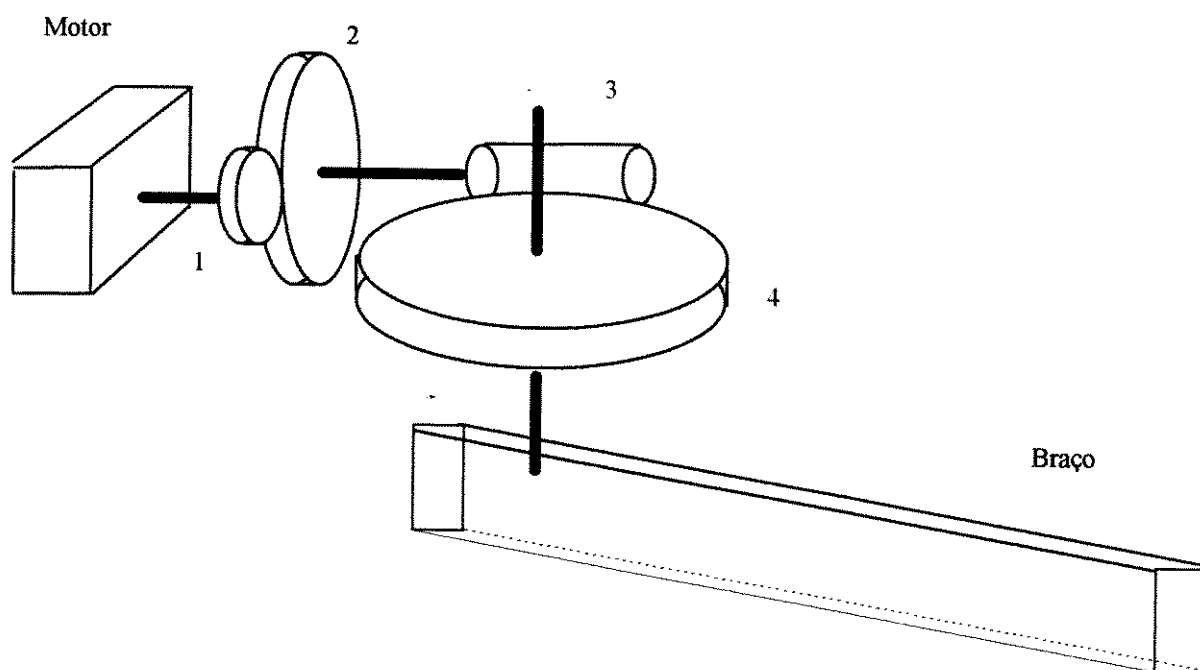


Figura C.11 - Sistema de transmissão incluindo par de engrenagens (primeira redução) e sem fim-coroa (segunda redução).

Este será o sistema de transmissão a ser considerado na construção do protótipo. O próximo passo no sentido do projeto do manipulador flexível será obter as características dos elementos envolvidos a fim de que os mesmos possam ser confeccionados. Estes parâmetros serão discutidos a partir do item C.11.

C.10 - Cálculo da relação $\frac{I_b}{I_s}$

Seja a relação de transmissão $N_g = 1 / 120$ e os seguintes valores :

$$I_b = I_{TOTAL} - I_{CARGA Z} = 0.52838 \text{ kgm}^2$$

$$I_m = \frac{T_{MOTOR}}{\alpha_{MOTOR}} = \frac{0.00172}{0.2618} = 0.00657 \text{ kgm}^2$$

$$I_s = I_m \cdot N_g^2 = 0.000000456$$

Portanto:

$$\frac{I_b}{I_s} = 1158093.151$$

De acordo com [14], o sistema poderá realmente ser considerado como engastado-livre, pois $\frac{I_b}{I_s} > 10$.

O sistema de transmissão, conforme mencionado anteriormente, será tratado neste trabalho como sendo ideal e todos os cálculos realizados partirão desta premissa.

Efeitos não lineares gerados pelo sistema de transmissão (atritos, folgas, ...) e que atuam sobre todo o conjunto do manipulador flexível não serão considerados neste trabalho. Trata-se de um assunto complexo, um refinamento, e, por si só, exigiria um trabalho a parte.

Cabe lembrar somente que estes efeitos poderão ser significativos dependendo do caso (por exemplo, sistemas de transmissão com muitos elementos intermediários entre o acionador e o acionado).

C.11 - Dimensionamento do sistema de transmissão : considerações iniciais

No item C.9 desenvolveu-se uma discussão acerca do melhor sistema de transmissão para o conjunto manipulador flexível, uma vez que necessita-se de uma grande redução de velocidade. Outrossim, os cálculos do sistema de transmissão foram efetuados prevendo-se futura utilização de carga na extremidade livre. Estipulou-se aí uma carga máxima tendo-se em vista também uma insignificante deformação do braço.

Tendo-se chegado a uma conclusão (primeira redução através de um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos e segunda redução através de um sistema sem fim - coroa), agora dimensiona-se a caixa de redução para o manipulador (projeto dos eixos, escolha de rolamentos,...).

As engrenagens, já prontas, fazem parte de um kit utilizado para estes mesmos fins. Suas características foram obtidas a partir de catálogo [35]. A fim de que estes elementos pudessem ser utilizados, os eixos deveriam ter o diâmetro externo no máximo igual ao diâmetro interno das respectivas engrenagens (com as devidas tolerâncias), uma vez que buscou-se evitar que as engrenagens fossem usinadas.

Os eixos que se encaixam nas engrenagens prontas mostram exceder em muito as exigências mínimas necessárias determinadas para sua utilização, com exceção de um deles, considerado o mais crítico de todos os três, conforme será verificado.

C.12 - Parâmetros dos elementos da transmissão e fórmulas principais

O objetivo deste item consiste em determinar os esforços nos eixos devido aos elementos da transmissão e à carga com a qual os mesmos elementos estão trabalhando . Estes esforços serão identificados por : F_R (esforço radial), F_T (esforço tangencial) e F_A (esforço axial).

C.12.1 - Primeira redução

Na tabela C.5 são apresentados os dados referentes aos elementos utilizadas para a primeira redução.

Engrenagens cilíndricas de dentes retos	Material	Ângulo de pressão ϕ	Diâmetro primitivo* (mm)	Diâmetro externo (mm)	Número de dentes
Engrenagem 1: PIC G3-38	Aço inox	20°	20.10664	21.1582	38
Engrenagem 2: PIC G3-180	Aço inox	20°	95.25000	96.3168	180

Tabela C.5 - dados dos elementos da transmissão para a primeira redução

Relação de transmissão : $n_{12} = 1 / 4.74$

* Diâmetro utilizado nos cálculos subsequentes

Os dados acima foram extraídos da referência [35]

Diâmetro do furo : 6.35 mm

C.12.2 - Segunda redução

Na tabela C.6 são apresentados os dados referentes aos elementos utilizadas para a segunda redução.

Engrenagens helicoidais	Material	Ângulo de pressão (ϕ_{SF})	Diâmetro primitivo* (mm)	Ângulo de hélice** (φ_{SF})	“Lead”	“Lead angle”	Número de dentes
Sem-fim : PIC Q6-3	Aço inox	14.5°	12.7	82.817°	4.98729	7.183°	4
Coroa : PIC Q5-11-C	Bronze QQ-B-637 Alloy 464	14.5°	39.6748	7.183°	—	—	100

Tabela C.6 - dados dos elementos da transmissão para a segunda redução

Relação de transmissão : $n_{12} = 1 / 25$

* Diâmetro utilizado nos cálculos subsequentes

** Para o sem-fim : $\varphi_{\text{SEM-FIM}} = 90^\circ - \lambda_{\text{SEM-FIM}}$. Para a coroa (eixos a 90°) : $\varphi_{\text{COROA}} = \lambda_{\text{SEM-FIM}}$

Os dados acima foram extraídos da referência [1]

Diâmetro do furo : 6.35 mm

C.12.3 - Novos valores para n_{TOTAL} e T_{MOTOR}

Os valores obtidos em C.9 para a relação de transmissão entre o motor e o braço e para o torque necessário no motor para movimentar o sistema conectado a ele são, respectivamente :

$$n_{\text{TOTAL}} = 1 / 120$$

$$T_{\text{MOTOR}} = 0.00172 \text{ Nm}$$

Segundo os elementos apresentados nas tabelas C.5 e C.6, estes mesmos parâmetros para o protótipo experimental passam a ser:

$$n_{\text{TOTAL}} = (1 / 4.74) (1 / 25)$$

$$n_{\text{TOTAL}} = 1 / 118.5$$

e, para acionar a carga total (engaste + viga de alumínio (braço flexível) + carga na extremidade do braço + suportes) :

$$T_{\text{MOTOR}} = n_{\text{TOTAL}} T_{\text{CARGA}} = (1 / 118.5) (0.2061)$$

$$T_{\text{MOTOR}} = 0.00174 \text{ Nm}$$

que deverá ser suficiente para mover todo o sistema (a estimativa calculada anteriormente no item 6.8 era de 0.00172 Nm).

As rotações dos eixos tornam-se, em rpm :

Eixo 1	600.00
Eixo 2	126.58
Eixo 3	5.06

C.12.4 - Determinação dos diâmetros dos eixos

A expressão utilizada para a determinação do diâmetro dos eixos encontra-se na referência [33] e é reproduzida a seguir.

$$d = \left\{ \frac{32n}{\pi} \left[\left(\frac{T}{Se} \right)^2 + \left(\frac{M}{Sn} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

aonde:

n = fator de segurança

T = momento torçor na secção crítica

Se = limite de escoamento

M = momento fletor na secção crítica

Sn = limite de resistência à fadiga

Considera-se aqui n = 1.5. O material dos eixos é confeccionado de aço inox. Foram considerados, portanto : Se = 285 M Pa e Sn = 400 M Pa . A densidade do aço utilizada é adotada como sendo 7850 kg / m³.

C.12.5 - Eixo 1 : dimensionamento

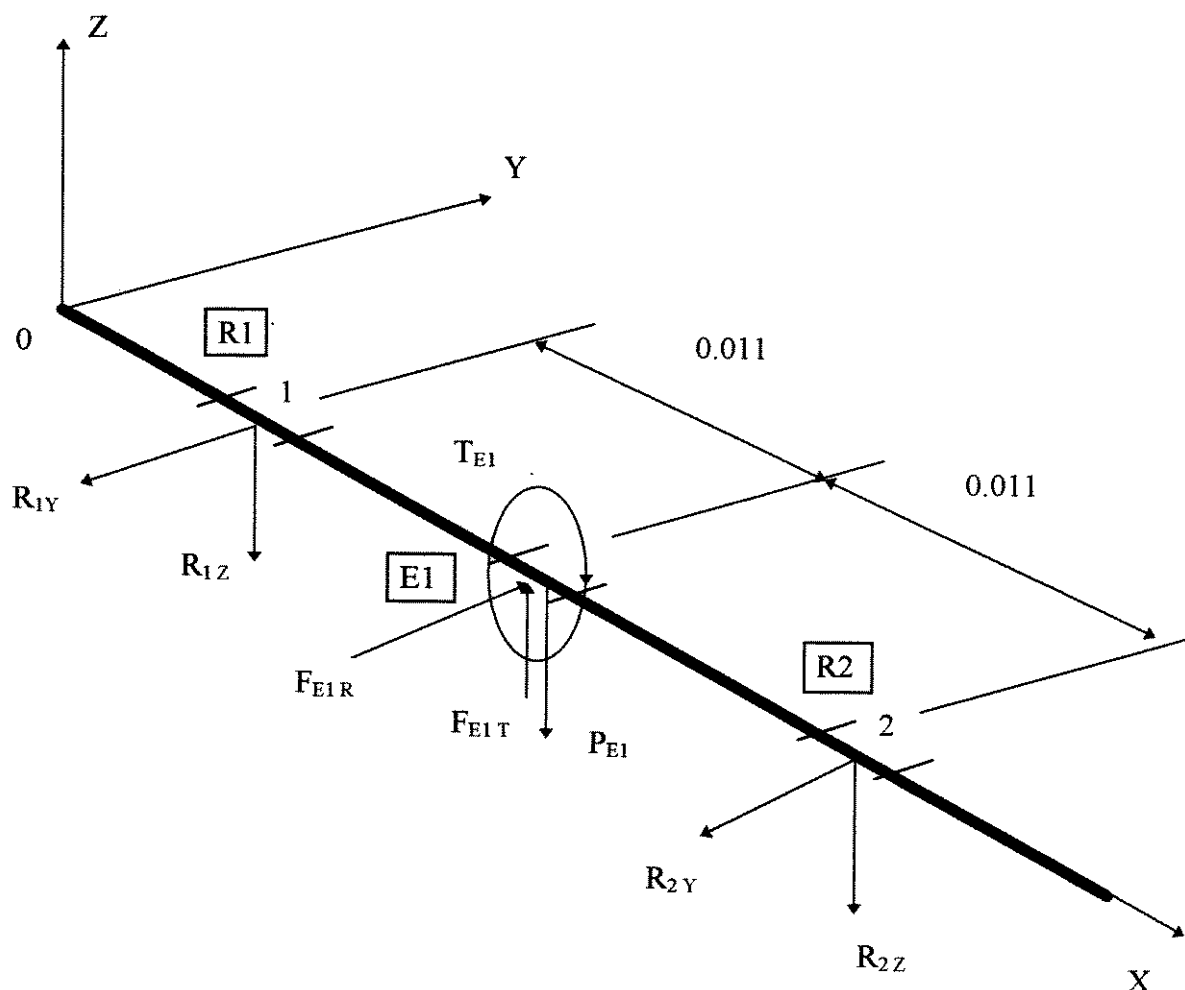


Figura C.12 - Eixo 1 : esforços

Comprimento do eixo : 51 mm

$$F_{E1T} = (T_{MOTOR}) / (\text{raio E1}) = 0.173 \text{ N}$$

$$F_{E1R} = F_{E1T} (\tan \phi_1) = 0.173 (\tan 20^\circ) = 0.063 \text{ N}$$

$$T_{E1} = T_{MOTOR} = 0.00174 \text{ Nm (plano YZ)}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$P_{E1} = m_{E1} (g) = 0.080 \text{ N}$$

espessura $R1^* = \text{espessura } R2^* = 0.009 \text{ m}$

espessura $E1 = 0.003 \text{ m}$

(*) Um cálculo preliminar foi efetuado não considerando as espessuras dos rolamentos. Determinou-se qual rolamento se encaixaria nas especificações. O cálculo foi refeito considerando-se as espessuras e confirmou-se a escolha. O comprimento final do eixo foi determinado nesta segunda fase. Para os demais eixos utilizou-se o mesmo procedimento. As referências básicas para o dimensionamento dos eixos são [4], [5] e [6]. E1 refere-se à engrenagem cujas propriedades encontram-se na tabela C.5.

Inicialmente serão analisados os esforços atuando no plano XZ.

Fazendo-se a somatória dos momentos em relação ao ponto 1, ou seja,

$$\sum M_{1XZ} = 0$$

obtem-se :

$$- (0.173 - 0.080) 0.011 + R_{2Z} 0.022 = 0$$

$$R_{2Z} = 0.0465 \text{ N}$$

Fazendo-se a somatória dos momentos em relação ao ponto 2 , ou seja,

$$\sum M_{2XZ} = 0$$

obtem-se :

$$R_{1Z} = 0.0465 \text{ N}$$

Analisa-se, a partir de agora, os esforços atuando no plano XY.

Fazendo-se a somatória dos momentos em relação ao ponto 1, ou seja,

$$\sum M_{1XY} = 0$$

obtem-se :

$$- (0.063) 0.011 + R_{2Y} 0.022 = 0$$

$$R_{2Y} = 0.0315 \text{ N}$$

Fazendo-se a somatória dos momentos em relação ao ponto 2 , ou seja,

$$\sum M_{2XY} = 0$$

obtem-se :

$$R_{1Y} = 0.0315 \text{ N}$$

Assim, obtem-se o esforço radial resultante sobre os rolamentos R1 e R2 :

$$R1_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = R2_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = \sqrt{R_{1Y}^2 + R_{1Z}^2}$$

$$R1_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = R2_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = 0.056 \text{ N}$$

O diagrama de momentos fletores para o eixo 1 é, então, apresentado na figura C.13.

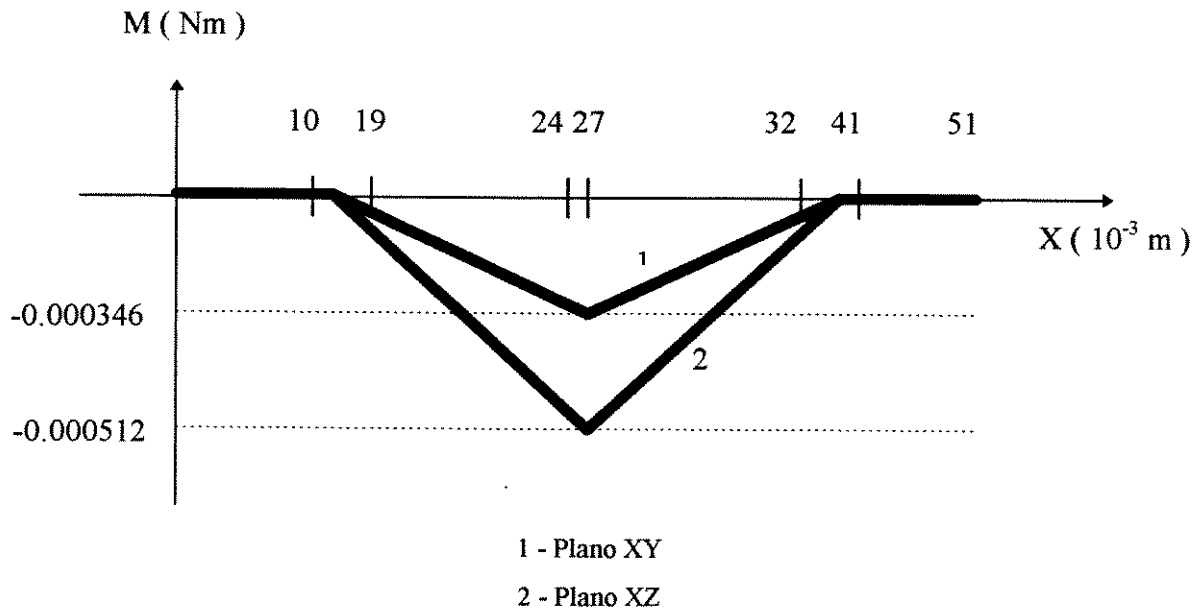


Figura C.13 : Diagrama de momentos fletores para o eixo 1

Com as informações obtidas até aqui pode-se finalmente determinar o diâmetro do eixo 1 :

$$d_1 = \left\{ \frac{32(1.5)}{\pi} \left[\left(\frac{0.00174}{285(10^6)} \right)^2 + \left(\frac{0.000512}{400(10^6)} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

$$d_1 = 0.00046 \text{ m} = 0.46 \text{ mm}$$

O eixo que se ajusta às engrenagens utilizadas (do kit citado anteriormente) deverá possuir $d_1 = 6.35 \text{ mm}$. Portanto, o eixo que possuir este diâmetro (6.35 mm) suportará satisfatoriamente os esforços necessários e estará superdimensionado, o que possibilita uma maior liberdade de alteração nas características do braço (material , propriedades geométricas, carga transportada,...).

C.12.6 - Eixo 2 : dimensionamento

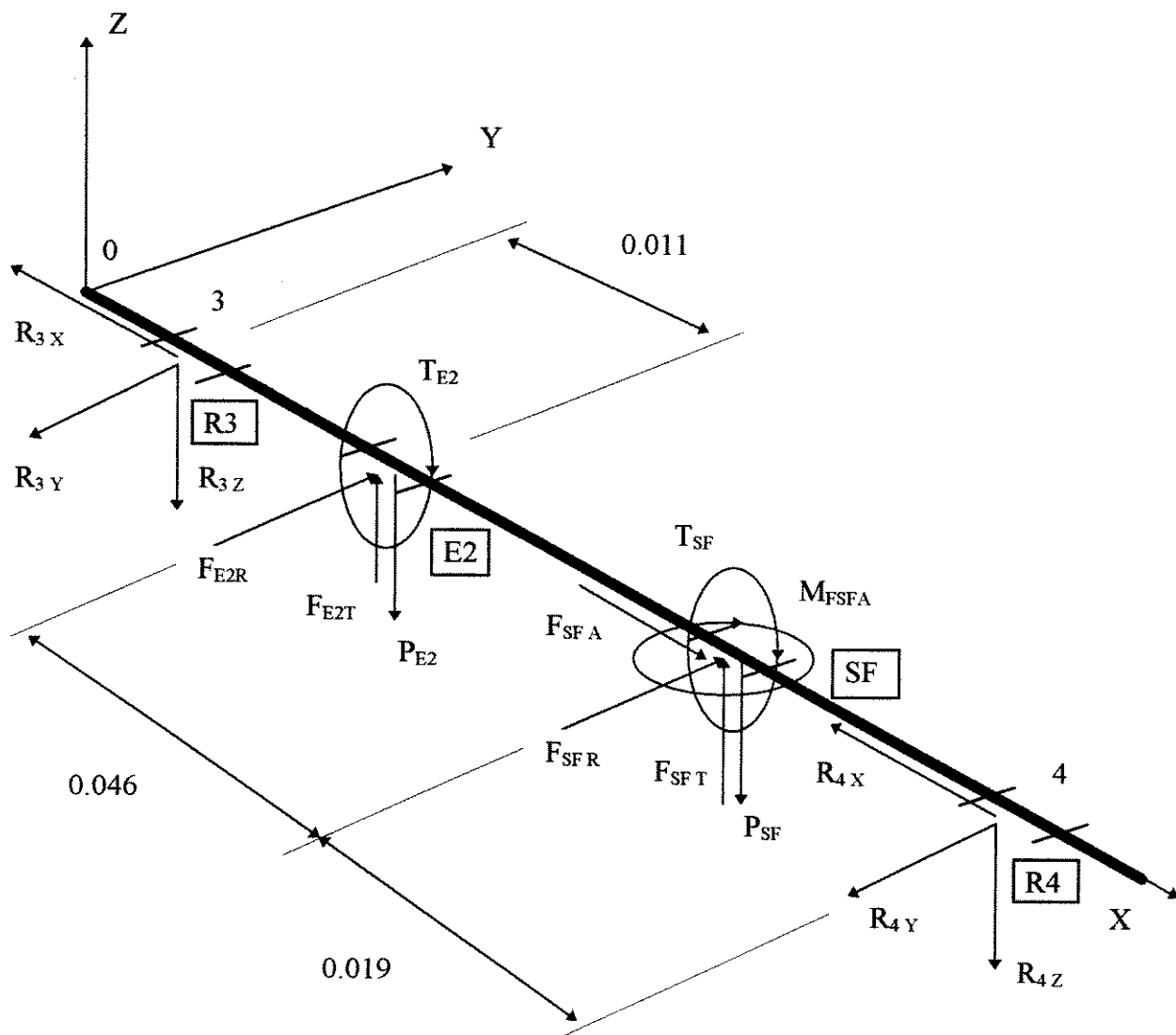


Figura C.14 - Eixo 2 : esforços

$$T_{SF} = T_{MOTOR} (n_{12}) = 0.00174 (4.74) = 0.008248 \text{ Nm} = T_{E2} \quad (\text{plano YZ})$$

$$F_{E2T} = T_{MOTOR} / \text{raio E2} = 0.03654 \text{ N}$$

$$F_{E2R} = F_{E2T} (\tan \phi) = 0.013298 \text{ N}$$

$$\text{Potência transmitida} = T_{SF} (\omega_{EIXO 2}) = (0.008248) (13.25546) = 0.10933 \text{ w}$$

$$F_{SFT} = \text{Potência transmitida} / (\omega_{EIXO 2} (d_{SF} / 2)) = 1.298885 \text{ N}$$

$$F_{SF R} = F_{SF T} (\tan \phi_{SF}) = 0.33592 \text{ N}$$

$$F_{SF A} = F_{SF T} (\tan \phi_{SF}) = 10.30633 \text{ N}$$

$$M_{FSFA} = F_{SFA} (\text{raio SF}) = 0.06545 \text{ Nm}$$

$$P_{E2} = 0.1678 \text{ N}$$

$$P_{SF} = 0.1889 \text{ N}$$

Fazendo a somatória das forças na direção Y igual a zero e somatório dos momentos em relação ao ponto 4 (no plano XY) igual a zero, obtem-se :

$$R_{3Y} = 0.09535 \text{ N}$$

$$R_{4Y} = 0.25386 \text{ N}$$

Fazendo a somatória das forças na direção Z igual a zero e somatório dos momentos em relação ao ponto 4 (no plano XZ) igual a zero, obtem-se :

$$R_{3Z} = 0.16524 \text{ N}$$

$$R_{4Z} = 0.81349 \text{ N}$$

Fazendo a somatória das forças na direção X igual a zero e $R_{3X} = R_{5X}$, obtem-se :

$$R_{3x} = 5.15317 \text{ N}$$

$$R_{4x} = 5.15317 \text{ N}$$

Desta forma,

$$R3_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = \sqrt{R^2_{3Y} + R^2_{3Z}}$$

$$R4_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = \sqrt{R^2_{4Y} + R^2_{4Z}}$$

$$R3_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = 0.19078 \text{ N}$$

$$R4_{\text{RESULTANTE RADIAL}} = 0.85218 \text{ N}$$

$$R3_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = R4_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = \sqrt{R^2_{3X}}$$

$$R3_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = R4_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = 5.15317 \text{ N}$$

O diagrama de momentos fletores para o eixo 2 é apresentado na figura C.15.

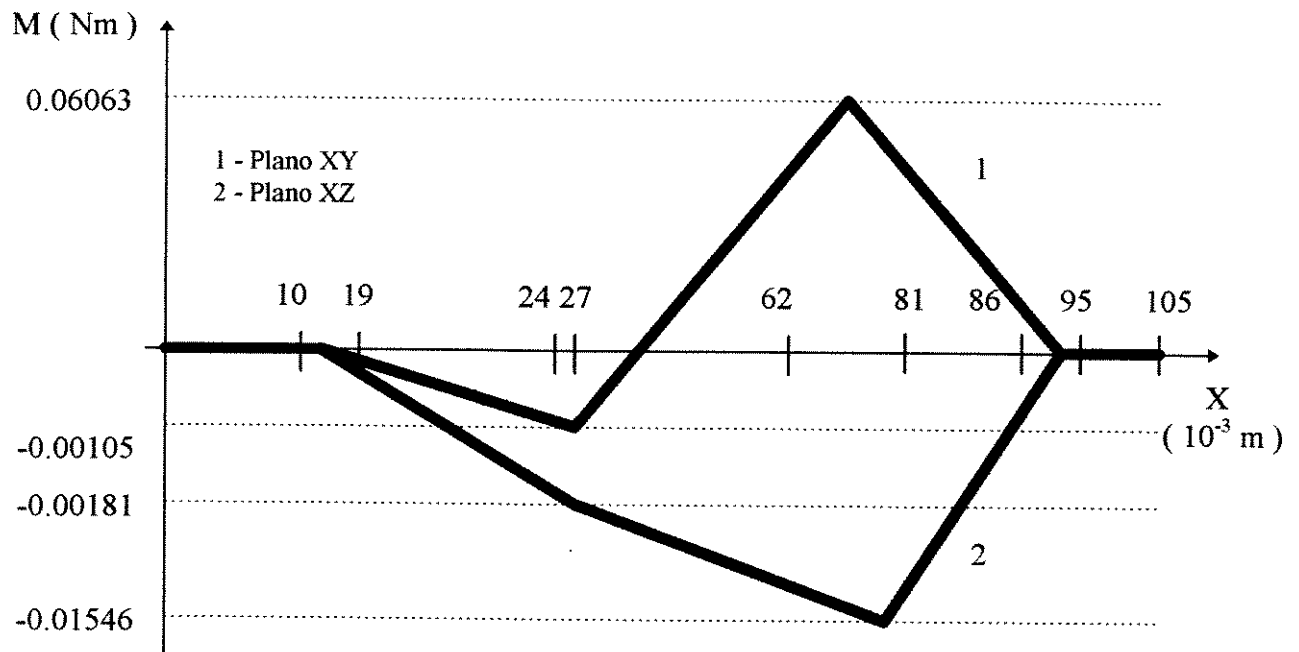


Figura C.15 - Diagrama de momentos fletores para o eixo 2

Com as informações obtidas até então pode-se finalmente determinar o diâmetro do eixo 2 necessário :

$$d_2 = \left\{ \frac{32(1.5)}{\pi} \left[\left(\frac{0.008248}{285(10^6)} \right)^2 + \left(\frac{0.06063}{400(10^6)} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

$$d_2 = 0.00133 \text{ m} = 1.33 \text{ mm}$$

Novamente, o eixo que se ajusta às engrenagens utilizadas possui $d_2 = 6.35 \text{ mm}$ e estará superdimensionado. O comprimento do eixo deverá ser de 105 mm.

C.12.7 - Eixo 3 : dimensionamento

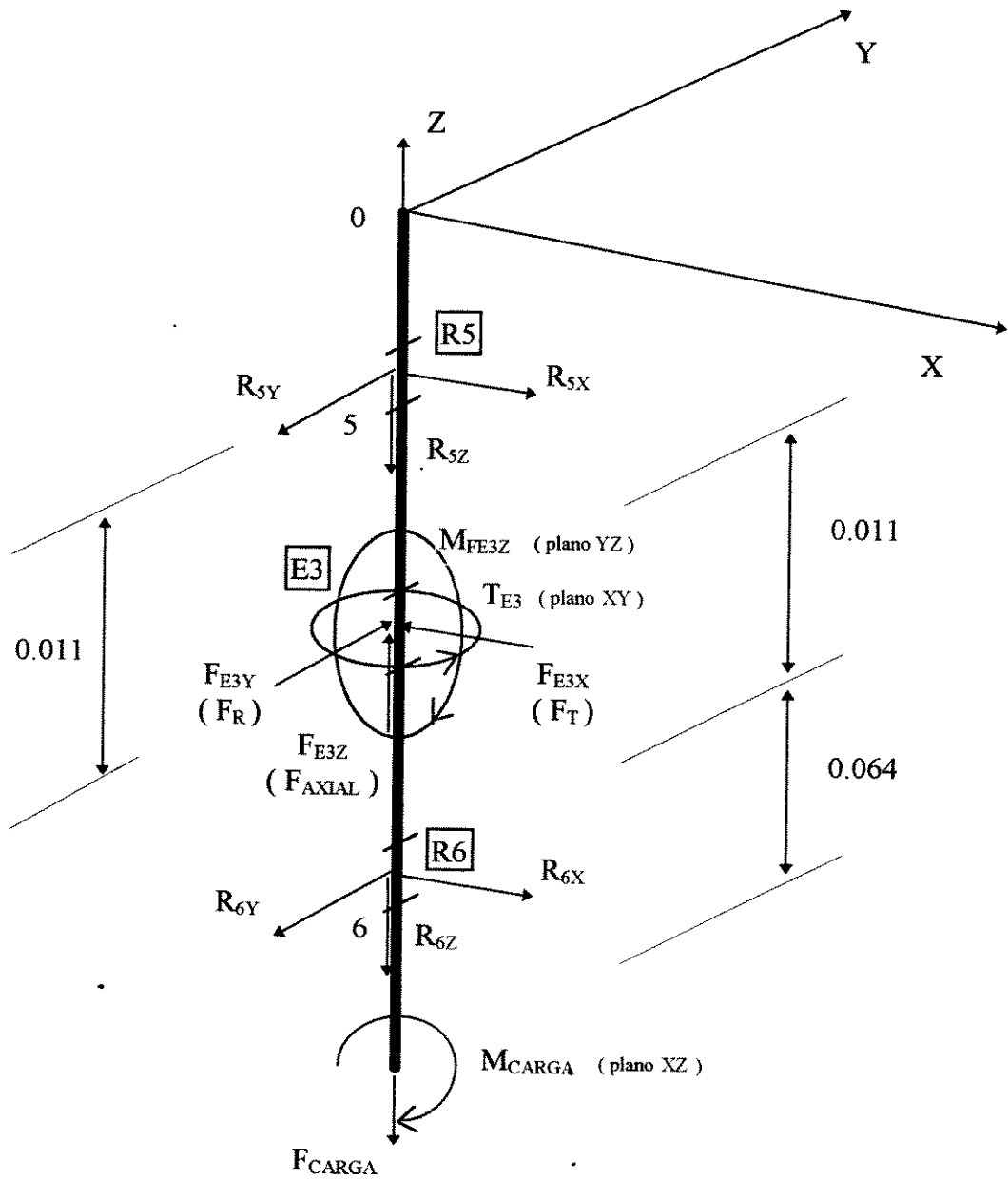


Figura 6.16 - Eixo 3 : esforços

Aonde :

$$F_{CARGA} = (m_{ENGASTE} + m_{VIGA\ ALUMÍNIO} + m_{CARGA\ BRAÇO} + m_{SUPORTE\ 1} + m_{SUPORTE\ 2}) g$$

$$F_{\text{CARGA}} = (0.2247 + 1.0530 + 0.1530 + 0.2176 + 0.2450) 10$$

$$F_{\text{CARGA}} = 18.9332 \text{ N}$$

$$M_{\text{CARGA}} = M_{\text{ENGASTE}} + M_{\text{VIGA ALUMÍNIO}} + M_{\text{CARGA BRAÇO}} + M_{\text{SUPORTE 1}} + M_{\text{SUPORTE 2}}$$

$$M_{\text{CARGA}} = 0 + m_{\text{VIGA ALUMÍNIO}} g (L/2) + m_{\text{CARGA BRAÇO}} g (L) + 0 + 0$$

$$M_{\text{CARGA}} = 15.0750 \text{ Nm}$$

Para a coroa (E3), que trata-se de uma engrenagem helicoidal, tem-se :

$$T_{E3} = 0.2061 \text{ Nm} \quad (\text{Torque necessário para mover a carga})$$

$$\omega_{\text{EIXO 3}} = 0.5299 \text{ rad/s} \quad (\text{Velocidade desejada para o braço})$$

$$P_3 = T_{E3} \omega_{\text{EIXO 3}} = 0.1092 \text{ w} \quad (\text{Potência transferida pela engrenagem})$$

$$d_c = 39.6748 \text{ mm} \quad (\text{Diâmetro da coroa})$$

$$F_T = \frac{P_3}{\omega_{\text{EIXO 3}}(d_c / 2)} = 0.0104 \text{ N} \quad (\text{Força tangencial transmitida pela coroa})$$

Logo :

$$\phi_C = \text{ângulo de pressão} = 14.5^\circ$$

$$\varphi_C = \text{ângulo de hélice} = 7.183^\circ$$

$$F_R = F_T (\tan \phi_C) = 0.0027 \text{ N} \quad (\text{Força radial transmitida pela coroa})$$

$$F_{\text{AXIAL}} = F_T (\tan \varphi_C) = 0.0013 \text{ N} \quad (\text{Força axial transmitida pela coroa})$$

$$M_{\text{FE3Z}} = F_{\text{AXIAL}} (\text{raio E3}) = 0.000026 \text{ Nm}$$

Assim sendo, os esforços nos apoios (rolamentos) podem ser determinados.

Fazendo-se a somatória das forças na direção y igual a zero e somatória das momentos em relação ao ponto 6 (plano YZ) igual a zero, obtem-se :

$$R_{5Y} = R_{6Y} = 0.00135 \text{ N}$$

Fazendo-se a somatória das forças na direção x igual a zero e somatória das momentos em relação ao ponto 6 (plano XZ) igual a zero, obtem-se :

$$R_{5X} = R_{6X} = 0.00520 \text{ N}$$

Fazendo-se a somatória das forças na direção z igual a zero e $R_{5Z} = R_{6Z}$, obtem-se :

$$R_{5Z} = R_{6Z} = 9.46595 \text{ N}$$

Desta forma,

$$R_{5\text{RESULTANTE RADIAL}} = R_{6\text{RESULTANTE RADIAL}} = \sqrt{R_{5Y}^2 + R_{5X}^2}$$

$$R_{5\text{RESULTANTE RADIAL}} = R_{6\text{RESULTANTE RADIAL}} = 0.0054 \text{ N}$$

$$R5_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = R6_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = \sqrt{R_{5Z}^2}$$

$$R5_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = R6_{\text{RESULTANTE AXIAL}} = 9.4659 \text{ N}$$

Seja $e = 0.22$ (folga radial). Desta forma, $\frac{F_{\text{AXIAL}}}{F_R} = 0.4815$ será maior que e . Então:
 $X=0.56$ e $Y=2.00$.

O diagrama de momentos fletores para o eixo 3 é apresentado na figura C.17.

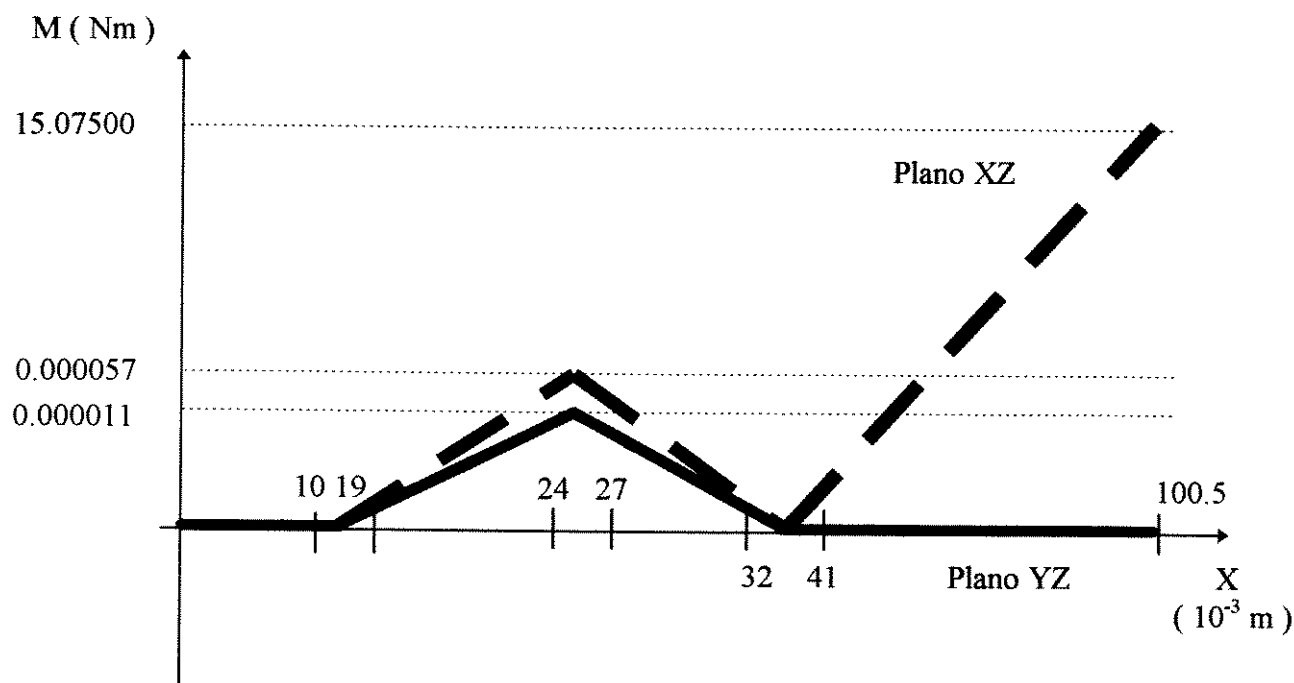


Figura C.17 - Diagrama de momentos fletores para o eixo 3

Com as informações obtidas até então pode-se finalmente determinar o diâmetro do eixo 3 :

$$d_3 = \left\{ \frac{32(1.5)}{\pi} \left[\left(\frac{0.2061}{285(10^6)} \right)^2 + \left(\frac{15.0750}{400(10^6)} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

$$d_3 = 0.00832 \text{ m} = 8.32 \text{ mm}$$

O eixo que se ajusta às engrenagens possui $d_3 = 6.35 \text{ mm}$. Neste caso, o mesmo não suportará satisfatoriamente os esforços calculados. Percebe-se aqui que se trata do eixo mais crítico dos três. O furo interno da engrenagem 3 terá que ser usinado para suportar um eixo com o diâmetro especificado acima.

O comprimento do eixo deverá ser de 100.5 mm.

C.13 - Escolha do rolamento : cálculo da capacidade de carga dinâmica

Seja a expressão para o cálculo da capacidade de carga dinâmica para cada um dos rolamentos em dimensionamento [36] :

$$C = (f_L / f_N) P \quad [\text{Kg}]$$

aonde :

f_L = fator de forças dinâmicas (considerado = 3, ver referência [36]);

f_N = fator do número de rotações ($f_N = [(33 \text{ } 1/3) / \text{número de rotações}]^{1/3}$);

$P = XF_R + YF_A$ representa a carga dinâmica equivalente [kg], com X = fator radial e

Y = fator axial e F_R e F_A , respectivamente, as resultantes radial e axial.

Utilizar-se-á rolamentos rígidos de esferas com folga radial normal.

Os resultados finais são obtidos na tabela a seguir.

Rolamento	Rotação (rpm)	f_N	X	F_R (N) Resultante radial	Y	F_A (N) Resultante axial	C (N)	Rolamento escolhido
1	600	0.382	1.00	0.056	0.00	0.000	0.4398	618/7 SKF
2	600	0.382	1.00	0.056	0.00	0.000	0.4398	618/7 SKF
3	126.58	0.644	1.00	0.191	0.00	5.1532	0.8888	618/7 SKF
4	126.58	0.644	1.00	0.852	0.00	5.1532	3.9699	618/7 SKF
5	5.06	1.874	0.56	0.005	2.00	9.4660	30.3117	618/8 SKF
6	5.06	1.874	0.56	0.005	2.00	9.4660	30.3117	618/8 SKF

Tabela C.7 - Especificações para escolha do rolamento

Obs.: Considerando $e = 0.22$ (folga radial)

rolamentos 3 e 4 (F_A / F_R) $\leq e$

rolamentos 5 e 6 (F_A / F_R) $> e$

Os rolamentos de esferas especificados na tabela C.7 possuem as seguintes propriedades [37]:

PROPRIEDADE	ROLAMENTOS 1,2 3 E 4	ROLAMENTOS 5 E 6
diâmetro interno (mm)	7	8
diâmetro externo (mm)	14	16
espessura (mm)	3.5	4
massa (kg)	0.0022	0.0030
capacidade de carga (N)	956	1330

Tabela C.8 - Propriedades dos rolamentos escolhidos

C.14 - Considerações finais e conclusões

Posteriormente aos cálculos efetuados neste apêndice, e quando se iniciou a montagem experimental, alguns problemas técnicos encontrados na construção do protótipo (disponibilidade de peças, falta de material, tempo de confecção das peças necessárias, novas idéias para otimizar o mecanismo,...) levou a ligeiras alterações no projeto inicial do sistema de transmissão apresentado aqui.

De qualquer maneira, o material apresentado neste capítulo poderá ser utilizado como roteiro e foi confeccionado de tal forma que se tornasse o mais didático possível. Como mencionado anteriormente, trata-se de uma primeira abordagem.

Problemas que poderiam ser encontrados posteriormente, tais como a flambagem imprevista de um dos eixos da nova transmissão experimental (novamente o eixo 3, considerado mais crítico), quando se adicionasse cargas à extremidade livre, levou à adição de mais um mancal (e mais um rolamento de esferas) ao protótipo experimental.

Todos os rolamentos utilizados, conforme pode ser observado na tabela C.7, estavam também acima das características exigidas.

Apêndice D

**Integradores numéricos - Runge-Kutta de 4ª ordem
e previsor-corretor de Adams-Moulton : programas**

```

program runkuttr ;
{ RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM PARA O MODELO ESTRUTURA RIGIDA }

```

221

```

{ CASOS 1-2-3 }

```

```

{ CASO 1
  altura := 0.030;
  base := 0.025;
}

```

```

{ CASO 2 ( EXPERIMENTAL )
  altura := 0.01905;
  base := 0.01270;
}

```

```

{ CASO 3
  altura := 0.010
  base := 0.007
}

```

```

const
  altura = 0.01905 ;
  base = 0.01270 ;
  a1L = 1.8780;
  young = 0.70*1e11;
  L = 1.2 ;
  aux = 0.100 ;
  Ng = 120 ;
  Km = 0.0549 ;
  Ra = 1.1 ;
  Kb = 0.0555 ;
  intervalo = 0.3 ;
  Wmotor = 62.832 ;
  passo = 1e-5 ;

```

```

var
  xout1 : array[1..200000] of real ;
  yout1 : array[1..200000] of real ;
  xout2 : array[1..200000] of real ;
  yout2 : array[1..200000] of real ;
  xout3 : array[1..200000] of real ;
  yout3 : array[1..200000] of real ;
  xout4 : array[1..200000] of real ;
  yout4 : array[1..200000] of real ;
  xout5 : array[1..200000] of real ;
  yout5 : array[1..200000] of real ;
  U : array[1..2000000] of real ;
  T : array[1..2000000] of real ;
  x1 : array[1..2000000] of real ;
  x2 : array[1..2000000] of real ;
  tempo : array[1..2000000] of real ;
  area, I, ro, w1, E, massa, Izz, alfa, Tmotor, valor1, valor2 : real ;
  Umax, xint1, xint2, xint3, yint1, yint2, yint3, coef1, coef2, coef3, a, b, c : real ;
  varaux, yaux, y, xn, xo, n, h, d1, d2, d3 : real ;

```

```

k11,k12,k21,k22,k31,k32,k41,k42 : real ;
i : integer ;
{ arq1 : text ; }
arq2 : text ;

function power (a:real; b:integer): real;
var r: real;
begin
    r := 1;
    while (b>0) do
    begin
        r := r * a ;
        b := b - 1;
    end;
    power := r;
end;

begin

{ Abertura dos arquivos }

{ open(arq1,'/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res','unknown'); }
{ rewrite(arq1,'/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res'); }
{ writeln(arq1,T,' ',U); }

open(arq2,'/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/RK.res','unknown');
rewrite(arq2,'/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/RK.res');
{writeln(arq2,tempo,' ',x1);}

area := altura*base;
I := ( altura*power(base,3)) / 12 ;
ro := 2700*area ;

w1 := (power(a1L,2))*sqrt((young*I)/(ro*power(L,4)));

E := (power(base,2))/(12*power(L,2)) ;

massa := 2700*area*L;
Izz := ((1/12)*massa*( power(base,2) + power(L,2) ) ) + ( massa*( power( ((L/2)
    -(aux/2)),2 ) ) );

alfa := ( Wmotor / 120 ) / intervalo ;
Tmotor := Izz*alfa*(1/Ng) ;

valor1 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Km/Ra) ;
valor2 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Kb/Ra)*(Km);

```

```
Umax := ( Tmotor + (Kb/Ra)*Km*Wmotor/Ng ) * Ra * Ng * (1/Km) ;
```

```
{ PERFIL DE POTENCIAL }
```

```
xint1:=8*intervalo;
xint2:=2*intervalo;
xint3:=intervalo;
```

```
yint1:=Umax;
yint2:=Umax;
yint3:=0.632*Umax;
```

```
coef1 := - (power(xint2,2)/power(xint1,2)) ;
coef2 := - (power(xint3,2)/power(xint1,2)) ;
coef3 := - ((coef2*xint1) + xint3) / ((coef1*xint1) + xint2) ;
```

```
c := (coef3*((coef1*yint1)+yint2) + ((coef2*yint1) + yint3)) /
      ((coef3*(coef1 + 1)) + (coef2 + 1));
b := (((coef1*yint1) + yint2) - ((1 + coef1)*c)) / ((xint2) +
      (xint1)*coef1) ;
a := ( yint1 - c - ((xint1)*b) ) / power(xint1,2) ;
```

```
xout1[1] := 0 ;
yout1[1] := 0 ;
for i := 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := i*passo ;
  y := 0.632*Umax*varaux/xint3 ;
  yout1[i+1] := y ;
  xout1[i+1] := varaux ;
end;
```

```
xout2[1] := intervalo ;
yout2[1] := a*power(xout2[1],2) + b*xout2[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := intervalo + i*passo ;
  y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
  yout2[i] := y ;
  xout2[i] := varaux ;
end;
```

```

xout3[1] := (2*intervalo) ;
yout3[1] := Umax ;
for i:= 1 to round(6*intervalo/passo) do
begin
    varaux := 2*intervalo + i*passo ;
    y := Umax;
    yout3[i] := y ;
    xout3[i] := varaux ;
end;

```

```

xout4[1] := (8*intervalo) ;
yout4[1] := a*power(xout4[1],2) + b*xout4[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 8*intervalo + i*passo ;
    y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
    yout4[i] := y ;
    xout4[i] := varaux ;
end;

```

```

xout5[1] := (9*intervalo) ;
yout5[1] := a*power(xout5[1],2) + b*xout5[1] + c ;
yaux := yout5[1] ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 9*intervalo + i*passo ;
    y := ( (10*intervalo)*yaux - yaux*varaux ) / intervalo ;
    yout5[i] := y ;
    xout5[i] := varaux ;
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[i] := xout1[i];
    U[i] := yout1[i];
    { writeln(arq1,xout1[i], ' ',yout1[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round((1/passo)*intervalo) + i] := xout2[i];
    U[ round((1/passo)*intervalo) + i] := yout2[i];
    { writeln(arq1,xout2[i], ' ',yout2[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*6*intervalo) do
begin
    T[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout3[i];

```

```

        U[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout3[i];
        { writeln(arq1,xout3[i], ' ',yout3[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout4[i];
    U[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout4[i];
    { writeln(arq1,xout4[i], ' ',yout4[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout5[i];
    U[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout5[i];
    { writeln(arq1,xout5[i], ' ',yout5[i]); }
end;

```

```

{ *****
  RUNGE-KUTTA de QUARTA ORDEM : RIGIDO
  ***** }

```

```

{ h = passo de integracao
  n = numero de pontos }

```

```

xn := 10*intervalo ;
xo := 0 ;
n := (10*intervalo) / passo ;
h := ( xn - xo ) / n ;

```

```

{ CONSTANTES }

```

```

d1 := ro*power(L,3) / Izz ;
d2 := d1*valor1 ;
d3 := d1*valor2*Ng ;

```

```

{ INTEGRADOR NUMERICO }

```

```

{ Em t=0 }

```

```

tempo[1] := 0 ;
x1[1] := 0 ;

```

```
x2[1] := 0 ;
```

226

```
for i :=1 to round(n) do  
begin
```

```
    tempo[i+1] := tempo[i] + h ;
```

```
    k11 := h*x2[i] ;
```

```
    k12 := h*( d2*U[i+1] - d3*x2[i] ) ;
```

```
    k21 := h*( x2[i] + k11/2 ) ;
```

```
    k22 := h*( d2*U[i+1] - d3*(x2[i] + k12/2) ) ;
```

```
    k31 := h*( x2[i] + k21/2 ) ;
```

```
    k32 := h*( d2*U[i+1] - d3*(x2[i] + k22/2) ) ;
```

```
    k41 := h*( x2[i] + k31 ) ;
```

```
    k42 := h*( d2*U[i+1] - d3*(x2[i] + k32 ) ) ;
```

```
    x1[i+1] := x1[i] + ( k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41 )/6 ;
```

```
    x2[i+1] := x2[i] + ( k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42 )/6 ;
```

```
    writeln(arq2,tempo[i], ' ',x1[i] );
```

```
end;
```

```
{ close(arq1); }
```

```
close(arq2);
```

```
end.
```

```

program runkutpd ;
{ RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM PARA O MODELO ESTRUTURA... }
{ ...CONSIDERANDO PEQUENAS DEFLEXOES }

```

227

```

{ CASOS 1-2-3 }

```

```

{ CASO 1
  altura := 0.030;
  base := 0.025;
}

```

```

{ CASO 2 ( EXPERIMENTAL )
  altura := 0.01905;
  base := 0.01270;
}

```

```

{ CASO 3
  altura := 0.010
  base := 0.007
}

```

```

const
  altura = 0.01905 ;
  base = 0.01270 ;
  alL = 1.8780;
  young = 0.70*1e11;
  L = 1.2 ;
  aux = 0.100 ;
  Ng = 120 ;
  Km = 0.0549 ;
  Ra = 1.1 ;
  Kb = 0.0555 ;
  intervalo = 0.3 ;
  Wmotor = 62.832 ;
  passo = 1e-5 ;

```

```

var
  xout1 : array[1..200000] of real ;
  yout1 : array[1..200000] of real ;
  xout2 : array[1..200000] of real ;
  yout2 : array[1..200000] of real ;
  xout3 : array[1..200000] of real ;
  yout3 : array[1..200000] of real ;
  xout4 : array[1..200000] of real ;
  yout4 : array[1..200000] of real ;
  xout5 : array[1..200000] of real ;
  yout5 : array[1..200000] of real ;
  U : array[1..2000000] of real ;
  T : array[1..2000000] of real ;
  x1 : array[1..2000000] of real ;
  x2 : array[1..2000000] of real ;
  x3 : array[1..2000000] of real ;
  x4 : array[1..2000000] of real ;
  tempo : array[1..2000000] of real ;
  area,I,ro,wl,E,masa,Izz,alfa,Tmotor,valor1,valor2 : real ;
  Umax,xint1,xint2,xint3,yint1,yint2,yint3,coef1,coef2,coef3,a,b,c : real ;

```

```

    varaux,yaux,y,xn,xo,n,h,c1,c2,c3,c4,c5,c6 : real ;
    k11,k12,k13,k14,k21,k22,k23,k24,k31,k32,k33,k34,k41,k42,k43,k44 : real ;
    i : integer ;
    { arq1 : text ; }
    arq2 : text ;

function power (a:real; b:integer): real;
var r: real;
begin
    r := 1;
    while (b>0) do
        begin
            r := r * a ;
            b := b - 1;
        end;
    power := r;
end;

begin

    { Abertura dos arquivos }

    { open(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res', 'unknown'); }
    { rewrite(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res'); }
    { writeln(arq1,T, ' ',U); }

    open(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/RK.res', 'unknown');
    rewrite(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/RK.res');
    {writeln(arq2,tempo, ' ',x1, ' ',x2);}

    area := altura*base;
    I := ( altura*power(base,3)) / 12 ;
    ro := 2700*area ;

    w1 := (power(a1L,2))*sqrt((young*I)/(ro*power(L,4)));

    E := (power(base,2))/(12*power(L,2)) ;

    massa := 2700*area*L;
    Izz := ((1/12)*massa*( power(base,2) + power(L,2) ) ) +
    ( massa*( power( ((L/2)-(aux/2)),2 ) ) );

    alfa := ( Wmotor / 120 ) / intervalo ;
    Tmotor := Izz*alfa*(1/Ng) ;

    valor1 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Km/Ra) ;

```

```
valor2 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Kb/Ra)*(Km);
```

229

```
Umax := ( Tmotor + (Kb/Ra)*Km*Wmotor/Ng )*Ra*Ng*(1/Km) ;
```

```
{ PERFIL DE POTENCIAL }
```

```
xint1:=8*intervalo;
xint2:=2*intervalo;
xint3:=intervalo;
```

```
yint1:=Umax;
yint2:=Umax;
yint3:=0.632*Umax;
```

```
coef1 := - (power(xint2,2)/power(xint1,2)) ;
coef2 := - (power(xint3,2)/power(xint1,2)) ;
coef3 := - ((coef2*xint1) + xint3) / ((coef1*xint1) + xint2) ;
```

```
c := (coef3*((coef1*yint1)+yint2) + ((coef2*yint1) + yint3)) /
      ((coef3*(coef1 + 1)) + (coef2 + 1));
b := (((coef1*yint1) + yint2) - ((1 + coef1)*c)) / ((xint2) +
      (xint1)*coef1) ;
a := ( yint1 - c - ((xint1)*b) ) / power(xint1,2) ;
```

```
xout1[1] := 0 ;
yout1[1] := 0 ;
for i := 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := i*passo ;
  y := 0.632*Umax*varaux/xint3 ;
  yout1[i+1] := y ;
  xout1[i+1] := varaux ;
end;
```

```
xout2[1] := intervalo ;
yout2[1] := a*power(xout2[1],2) + b*xout2[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := intervalo + i*passo ;
  y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
  yout2[i] := y ;
  xout2[i] := varaux ;
end;
```

```

xout3[1] := (2*intervalo) ;
yout3[1] := Umax ;
for i:= 1 to round(6*intervalo/passo) do
begin
    varaux := 2*intervalo + i*passo ;
    y := Umax;
    yout3[i] := y ;
    xout3[i] := varaux ;
end;

```

```

xout4[1] := (8*intervalo) ;
yout4[1] := a*power(xout4[1],2) + b*xout4[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 8*intervalo + i*passo ;
    y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
    yout4[i] := y ;
    xout4[i] := varaux ;
end;

```

```

xout5[1] := (9*intervalo) ;
yout5[1] := a*power(xout5[1],2) + b*xout5[1] + c ;
yaux := yout5[1] ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 9*intervalo + i*passo ;
    y := ( (10*intervalo)*yaux - yaux*varaux ) / intervalo ;
    yout5[i] := y ;
    xout5[i] := varaux ;
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[i] := xout1[i];
    U[i] := yout1[i];
    { writeln(arq1,xout1[i], ' ',yout1[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round((1/passo)*intervalo) + i] := xout2[i];
    U[ round((1/passo)*intervalo) + i] := yout2[i];
    { writeln(arq1,xout2[i], ' ',yout2[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*6*intervalo) do
begin

```

```

      T[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout3[i];
      U[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout3[i];
      { writeln(arq1,xout3[i], ' ',yout3[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
  T[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout4[i];
  U[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout4[i];
  { writeln(arq1,xout4[i], ' ',yout4[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
  T[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout5[i];
  U[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout5[i];
  { writeln(arq1,xout5[i], ' ',yout5[i]); }
end;

```

```

{ *****
  RUNGE-KUTTA de QUARTA ORDEM : PEQUENAS DEFLEXOES
  ***** }

```

```

{ h = passo de integracao
  n = numero de pontos }

```

```

xn := 10*intervalo;
xo := 0;
n := (10*intervalo) / passo;
h := ( xn - xo ) / n;

```

```

{ CONSTANTES }

```

```

c1 := 3.47*power(E,2);
c2 := 1.29*0.58*power(E,2);
c3 := 1.29*power(w1,2);
c4 := 1.73*power(E,2);
c5 := 0.43*1.29;
c6 := 0.58*power(E,2);

```

```

{ INTEGRADOR NUMERICO }

```

```

{ Em t=0 }

```

```

tempo[1] := 0 ;
x1[1] := 0 ;
x2[1] := 0 ;
x3[1] := 0 ;
x4[1] := 0 ;

```

```

for i :=1 to round(n) do
begin

```

```

    tempo[i+1] := tempo[i] + h ;

```

```

    k11 := h*x3[i] ;
    k12 := h*x4[i] ;
    k13 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] ) -
        c1*x2[i]*x3[i]*x4[i] - c2*x2[i]*power(x3[i],2) -
        c3*x2[i]) / ( 1 + c4*power(x2[i],2) - c5 ) ;
    k14 := h*(( c6*x2[i]*power(x3[i],2) - power(w1,2)*x2[i] )*(1 +
        c4*power(x2[i],2)) - 0.43*(( valor1*U[i+1] -
        valor2*Ng*x3[i] ) - c1*x2[i]*x3[i]*x4[i])) /
        ( 1 + c4*power(x2[i],2) - c5 ) ;

```

```

    k21 := h*( x3[i] + k11/2 ) ;
    k22 := h*( x4[i] + k12/2 ) ;
    k23 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] +
        (k13/2)) ) - c1*(x2[i]+(k13/2))*(x3[i]+(k13/2))*
        (x4[i]+(k13/2)) - c2*(x2[i]+(k13/2))*power((x3[i]+
        (k13/2)),2) - c3*(x2[i]+(k13/2))) / ( 1 +
        c4*power((x2[i]+(k13/2)),2) - c5 ) ;
    k24 := h*(( c6*(x2[i]+(k14/2))*power((x3[i]+(k14/2)),2) -
        power(w1,2)*(x2[i]+(k14/2)) )*(1 + c4*power((x2[i]+
        (k14/2)),2)) - 0.43*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
        (x3[i] + (k14/2)) ) - c1*(x2[i]+(k14/2))*(x3[i]+
        (k14/2))*(x4[i]+(k14/2)))) / ( 1 + c4*power((x2[i]+
        (k14/2)),2) - c5 ) ;

```

```

    k31 := h*( x3[i] + k21/2 ) ;
    k32 := h*( x4[i] + k22/2 ) ;
    k33 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + (k23/2)) ) -
        c1*(x2[i]+(k23/2))*(x3[i]+(k23/2))*(x4[i]+(k23/2)) -
        c2*(x2[i]+(k23/2))*power((x3[i]+(k23/2)),2) - c3*
        (x2[i]+(k23/2))) / ( 1 + c4*power((x2[i]+(k23/2)),2)
        - c5 ) ;
    k34 := h*(( c6*(x2[i]+(k24/2))*power((x3[i]+(k24/2)),2) -
        power(w1,2)*(x2[i]+(k24/2)) )*(1 + c4*power((x2[i]+
        (k24/2)),2)) - 0.43*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
        (x3[i] + (k24/2)) ) - c1*(x2[i]+(k24/2))*(x3[i]+
        (k24/2))*(x4[i]+(k24/2)))) / ( 1 + c4*power((x2[i]+
        (k24/2)),2) - c5 ) ;

```

```

    k41 := h*( x3[i] + k31 ) ;
    k42 := h*( x4[i] + k32 ) ;

```

```

k43 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + k33) ) -
c1*(x2[i]+(k33))*(x3[i]+(k33))*(x4[i]+(k33)) -
c2*(x2[i]+(k33))*power((x3[i]+(k33)),2) - c3*
(x2[i]+(k33))) / ( 1 + c4*power((x2[i]+(k33)),2)
- c5 ) ;
k44 := h*(( c6*(x2[i]+(k34))*power((x3[i]+(k34)),2) -
power(w1,2)*(x2[i]+(k34)) )*(1 + c4*power((x2[i]+
(k34)),2)) - 0.43*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i]
+ k34) ) - c1*(x2[i]+(k34))*(x3[i]+(k34))*(x4[i]+
(k34)))) / ( 1 + c4*power((x2[i]+(k34)),2) - c5 ) ;

x1[i+1] := x1[i] + ( k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41 )/6 ;
x2[i+1] := x2[i] + ( k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42 )/6 ;
x3[i+1] := x3[i] + ( k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43 )/6 ;
x4[i+1] := x4[i] + ( k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44 )/6 ;

```

```

writeln(arq2,tempo[i], ' ',x1[i], ' ',x2[i] );

```

```

end;

```

```

{ close(arq1); }
close(arq2);
end.

```

```

program runkutgd ;
{ RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM PARA O MODELO ESTRUTURA... }
{ ...CONSIDERANDO GRANDES DEFLEXOES }

```

234

```

{ CASOS 1-2-3 }

```

```

{ CASO 1
  altura := 0.030;
  base := 0.025;
}

```

```

{ CASO 2 ( EXPERIMENTAL )
  altura := 0.01905;
  base := 0.01270;
}

```

```

{ CASO 3
  altura := 0.010
  base := 0.007
}

```

```

const
  altura = 0.01905 ;
  base = 0.01270 ;
  alL = 1.8780;
  young = 0.70*1e11;
  L = 1.2 ;
  aux = 0.100 ;
  Ng = 120 ;
  Km = 0.0549 ;
  Ra = 1.1 ;
  Kb = 0.0555 ;
  intervalo = 0.3 ;
  Wmotor = 62.832 ;
  passo = 1e-5 ;

```

```

var
  xout1 : array[1..200000] of real ;
  yout1 : array[1..200000] of real ;
  xout2 : array[1..200000] of real ;
  yout2 : array[1..200000] of real ;
  xout3 : array[1..200000] of real ;
  yout3 : array[1..200000] of real ;
  xout4 : array[1..200000] of real ;
  yout4 : array[1..200000] of real ;
  xout5 : array[1..200000] of real ;
  yout5 : array[1..200000] of real ;
  U : array[1..2000000] of real ;
  T : array[1..2000000] of real ;
  x1 : array[1..2000000] of real ;
  x2 : array[1..2000000] of real ;
  x3 : array[1..2000000] of real ;
  x4 : array[1..2000000] of real ;
  tempo : array[1..2000000] of real ;

```

```

area, I, ro, w1, E, massa, Izz, alfa, Tmotor, valor1, valor2 : real ;
Umax, xint1, xint2, xint3, yint1, yint2, yint3, coef1, coef2, coef3, a, b, c : real ;
varaux, yaux, y, xn, xo, n, h, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10, a11 : real ;
b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10, b11, b12 : real ;
k11, k12, k13, k14, k21, k22, k23, k24, k31, k32, k33, k34, k41, k42, k43, k44 : real ;
i : integer ;
{ arq1 : text ; }
arq2 : text ;

```

```

function power (a:real; b:integer): real;
var r: real;
begin

```

```

    r := 1;
    while (b>0) do
    begin
        r := r * a ;
        b := b - 1;
    end;
    power := r;
end;

```

```

begin

```

```

{ Abertura dos arquivos }

```

```

{ open(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res', 'unknown'); }
{ rewrite(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res'); }
{ writeln(arq1, T, ' ', U); }

```

```

open(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/RK.res', 'unknown');
rewrite(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/RK.res');
{writeln(arq2, tempo, ' ', x1, ' ', x2);}

```

```

area := altura*base;
I := ( altura*power(base,3)) / 12 ;
ro := 2700*area ;

```

```

w1 := (power(a1L,2))*sqrt((young*I)/(ro*power(L,4)));

```

```

E := (power(base,2))/(12*power(L,2)) ;

```

```

massa := 2700*area*L;
Izz := ((1/12)*massa*( power(base,2) + power(L,2) ) ) +
      ( massa*( power( ((L/2)-(aux/2)),2 ) ) );

```

```

alfa := ( Wmotor / 120 ) / intervalo ;
Tmotor := Izz*alfa*(1/Ng) ;

```

```

valor1 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Km/Ra) ;
valor2 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Kb/Ra)*(Km) ;

```

```

Umax := ( Tmotor + (Kb/Ra)*Km*Wmotor/Ng )*Ra*Ng*(1/Km) ;

```

```

{ PERFIL DE POTENCIAL }

```

```

xint1:=8*intervalo;
xint2:=2*intervalo;
xint3:=intervalo;

```

```

yint1:=Umax;
yint2:=Umax;
yint3:=0.632*Umax;

```

```

coef1 := - (power(xint2,2)/power(xint1,2)) ;
coef2 := - (power(xint3,2)/power(xint1,2)) ;
coef3 := - ((coef2*xint1) + xint3) / ((coef1*xint1) + xint2) ;

```

```

c := (coef3*((coef1*yint1)+yint2) + ((coef2*yint1) + yint3)) /
      ((coef3*(coef1 + 1)) + (coef2 + 1));
b := (((coef1*yint1) + yint2) - ((1 + coef1)*c)) / ((xint2) +
      (xint1)*coef1) ;
a := ( yint1 - c - ((xint1)*b) ) / power(xint1,2) ;

```

```

xout1[1] := 0 ;
yout1[1] := 0 ;
for i := 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := i*passo ;
  y := 0.632*Umax*varaux/xint3 ;
  yout1[i+1] := y ;
  xout1[i+1] := varaux ;
end;

```

```

xout2[1] := intervalo ;
yout2[1] := a*power(xout2[1],2) + b*xout2[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := intervalo + i*passo ;
  y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
  yout2[i] := y ;
  xout2[i] := varaux ;

```

end;

237

```
xout3[1] := (2*intervalo) ;
yout3[1] := Umax ;
for i:= 1 to round(6*intervalo/passo) do
begin
    varaux := 2*intervalo + i*passo ;
    y := Umax;
    yout3[i] := y ;
    xout3[i] := varaux ;
end;
```

```
xout4[1] := (8*intervalo) ;
yout4[1] := a*power(xout4[1],2) + b*xout4[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 8*intervalo + i*passo ;
    y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
    yout4[i] := y ;
    xout4[i] := varaux ;
end;
```

```
xout5[1] := (9*intervalo) ;
yout5[1] := a*power(xout5[1],2) + b*xout5[1] + c ;
yaux := yout5[1] ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 9*intervalo + i*passo ;
    y := ( (10*intervalo)*yaux - yaux*varaux ) / intervalo ;
    yout5[i] := y ;
    xout5[i] := varaux ;
end;
```

```
for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[i] := xout1[i];
    U[i] := yout1[i];
    { writeln(arq1,xout1[i], ' ',yout1[i]); }
end;
```

```
for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round((1/passo)*intervalo) + i] := xout2[i];
    U[ round((1/passo)*intervalo) + i] := yout2[i];
    { writeln(arq1,xout2[i], ' ',yout2[i]); }
end;
```

```

for i:=1 to round((1/passo)*6*intervalo) do
begin
  T[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout3[i];
  U[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout3[i];
  { writeln(arq1,xout3[i], ' ',yout3[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
  T[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout4[i];
  U[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout4[i];
  { writeln(arq1,xout4[i], ' ',yout4[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
  T[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout5[i];
  U[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout5[i];
  { writeln(arq1,xout5[i], ' ',yout5[i]); }
end;

```

```

{ *****
  RUNGE-KUTTA de QUARTA ORDEM
  ***** }

```

```

{ h = passo de integracao      }
{ n = numero de pontos        }

```

```

xn := 10*intervalo ;
xo := 0 ;
n := (10*intervalo) / passo ;
h := ( xn - xo ) / n ;

```

```

{ CONSTANTES }

```

```

a1 := 3.6098*power(E,2) ;
a2 := 4.9737*power(E,2) ;
a3 := (15.8181*power(E,2)) - (4.1495*power(w1,2)*power(E,2)) ;
a4 := (17.6166*power(E,4)) - (3.0165*power(w1,2)*power(E,4)) ;
a5 := 2.1060*power(E,2) ;
a6 := 1.2938*power(w1,2) ;
a7 := 1.6169*power(E,2)*valor1 ;
a8 := 7.7379*power(E,2) ;
a9 := 1.6169*valor2*Ng*power(E,2) ;

```

```

a10 := 2.3298*power(E,4) ;
a11 := 2.3455*power(E,4) ;

```

239

```

b1 := 3.2552*power(E,2) ;
b2 := (12.2261*power(E,2)) - (1.7209*power(w1,2)*power(E,2)) ;
b3 := (-4.5554*power(E,4)) + (0.7800*power(w1,2)*power(E,4)) ;
b4 := 2.8598*power(E,2) ;
b5 := 0.4313*valor1 ;
b6 := 0.4313*valor2*Ng ;
b7 := 0.5301*power(E,4) ;
b8 := 1.4409*valor1*power(E,2) ;
b9 := 1.4409*valor2*Ng*power(E,2) ;
b10 := 4.7549*power(E,4) ;
b11 := 1.6278*power(E,2) ;
b12 := 0.6065*power(E,4) ;

```

```

{ INTEGRADOR NUMERICO }

```

```

{ Em t=0 }

```

```

tempo[1] := 0 ;
x1[1] := 0 ;
x2[1] := 0 ;
x3[1] := 0 ;
x4[1] := 0 ;

```

```

for i :=1 to round(n) do
begin

```

```

    tempo[i+1] := tempo[i] + h ;

```

```

    k11 := h*x3[i] ;
    k12 := h*x4[i] ;

```

```

    k13 := h*( ( -a1*x2[i]*x3[i]*x4[i] - a2*power(x4[i],2)*x2[i] -
a3*power(x2[i],3) - a4*power(x2[i],5) - a5*power(x3[i],2)*x2[i] +
a6*x2[i] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] - a7*U[i+1]*
power(x2[i],2) - a8*power(x2[i],3)*x3[i]*x4[i] + a9*power(x2[i],2)*
x3[i] + a10*power(x4[i],2)*power(x2[i],3) - a11*power(x3[i],2)*
power(x2[i],3) ) / ( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power(x2[i],2) +
2.6786*power(E,4)*power(x2[i],4) ) ) ;

```

```

    k14 := h*( ( b1*x2[i]*x3[i]*x4[i] + b2*power(x2[i],3) + b3*power(x2[i],5)
+ b4*power(x4[i],2)*x2[i] - b5*U[i+1] + b6*x3[i] - power(w1,2)*x2[i]
+ b7*power(x2[i],2)*x3[i]*x4[i] + b8*U[i+1]*power(x2[i],2) -
b9*power(x2[i],2)*x3[i] - b10*power(x2[i],3)*power(x4[i],2) +
b11*power(x3[i],2)*x2[i] - b12*power(x2[i],3)*power(x3[i],2) ) /
( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power(x2[i],2) + 2.6786*power(E,4)*
power(x2[i],4) ) ) ;

```

```
k21 := h*( x3[i] + k11/2 );
k22 := h*( x4[i] + k12/2 );
```

```
k23 := h*( ( -a1*(x2[i]+(k13/2))*(x3[i]+(k13/2))*(x4[i]+(k13/2)) -
a2*power((x4[i]+(k13/2)),2)*(x2[i]+(k13/2)) - a3*power((x2[i]+
(k13/2)),3) - a4*power((x2[i]+(k13/2)),5) - a5*power((x3[i]+
(k13/2)),2)*(x2[i]+(k13/2)) + a6*(x2[i]+(k13/2)) + valor1*U[i+1]
- valor2*Ng*(x3[i]+(k13/2)) - a7*U[i+1]*power((x2[i]+(k13/2)),2) -
a8*power((x2[i]+(k13/2)),3)*(x3[i]+(k13/2))*(x4[i]+(k13/2)) +
a9*power((x2[i]+(k13/2)),2)*(x3[i]+(k13/2)) + a10*power((x4[i]+
(k13/2)),2)*power((x2[i]+(k13/2)),3) - a11*power((x3[i]+(k13/2)),2)
*power((x2[i]+(k13/2)),3) ) / ( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*
power((x2[i]+(k13/2)),2) + 2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+
(k13/2)),4) ) );
```

```
k24 := h*( ( b1*(x2[i]+(k14/2))*(x3[i]+(k14/2))*(x4[i]+(k14/2)) +
b2*power((x2[i]+(k14/2)),3) + b3*power((x2[i]+(k14/2)),5) +
b4*power((x4[i]+(k14/2)),2)*(x2[i]+(k14/2)) - b5*U[i+1] +
b6*(x3[i]+(k14/2)) - power(w1,2)*(x2[i]+(k14/2)) +
b7*power((x2[i]+(k14/2)),2)*(x3[i]+(k14/2))*(x4[i]+(k14/2)) +
b8*U[i+1]*power((x2[i]+(k14/2)),2) - b9*power((x2[i]+(k14/2)),2)*
(x3[i]+(k14/2)) - b10*power((x2[i]+(k14/2)),3)*power((x4[i]+
(k14/2)),2) + b11*power((x3[i]+(k14/2)),2)*(x2[i]+(k14/2)) -
b12*power((x2[i]+(k14/2)),3)*power((x3[i]+(k14/2)),2) ) /
( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k14/2)),2) +
2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+(k14/2)),4) ) );
```

```
k31 := h*( x3[i] + k21/2 );
k32 := h*( x4[i] + k22/2 );
```

```
k33 := h*( ( -a1*(x2[i]+(k23/2))*(x3[i]+(k23/2))*(x4[i]+(k23/2)) -
a2*power((x4[i]+(k23/2)),2)*(x2[i]+(k23/2)) - a3*power((x2[i]+
(k23/2)),3) - a4*power((x2[i]+(k23/2)),5) - a5*power((x3[i]+
(k23/2)),2)*(x2[i]+(k23/2)) + a6*(x2[i]+(k23/2)) +
valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i]+(k23/2)) - a7*U[i+1]*
power((x2[i]+(k23/2)),2) - a8*power((x2[i]+(k23/2)),3)*(x3[i]+
(k23/2))*(x4[i]+(k23/2)) + a9*power((x2[i]+(k23/2)),2)*(x3[i]+
(k23/2)) + a10*power((x4[i]+(k23/2)),2)*power((x2[i]+(k23/2)),3) -
a11*power((x3[i]+(k23/2)),2)*power((x2[i]+(k23/2)),3) ) /
( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k23/2)),2) +
2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+(k23/2)),4) ) );
```

```
k34 := h*( ( b1*(x2[i]+(k24/2))*(x3[i]+(k24/2))*(x4[i]+(k24/2)) +
b2*power((x2[i]+(k24/2)),3) + b3*power((x2[i]+(k24/2)),5) +
b4*power((x4[i]+(k24/2)),2)*(x2[i]+(k24/2)) - b5*U[i+1] +
b6*(x3[i]+(k24/2)) - power(w1,2)*(x2[i]+(k24/2)) +
b7*power((x2[i]+(k24/2)),2)*(x3[i]+(k24/2))*(x4[i]+(k24/2)) +
b8*U[i+1]*power((x2[i]+(k24/2)),2) - b9*power((x2[i]+(k24/2)),2)
*(x3[i]+(k24/2)) - b10*power((x2[i]+(k24/2)),3)*power((x4[i]+
(k24/2)),2) + b11*power((x3[i]+(k24/2)),2)*(x2[i]+(k24/2)) -
b12*power((x2[i]+(k24/2)),3)*power((x3[i]+(k24/2)),2) ) / ( 0.4420
- 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k24/2)),2) + 2.6786*power(E,4)*
power((x2[i]+(k24/2)),4) ) );
```

```
k41 := h*( x3[i] + k31 );
```

```
k42 := h*( x4[i] + k32 );
```

241

```
k43 := h*( ( -a1*(x2[i]+(k33))*(x3[i]+(k33))*(x4[i]+(k33)) -  
a2*power((x4[i]+(k33)),2)*(x2[i]+(k33)) - a3*power((x2[i]+  
(k33)),3) - a4*power((x2[i]+(k33)),5) - a5*power((x3[i]+  
(k33)),2)*(x2[i]+(k33)) + a6*(x2[i]+(k33)) + valor1*U[i+1] -  
valor2*Ng*(x3[i]+(k33)) - a7*U[i+1]*power((x2[i]+(k33)),2) -  
a8*power((x2[i]+(k33)),3)*(x3[i]+(k33))*(x4[i]+(k33)) + a9*  
power((x2[i]+(k33)),2)*(x3[i]+(k33)) + a10*power((x4[i]+  
(k33)),2)*power((x2[i]+(k33)),3) - a11*power((x3[i]+(k33)),2)  
*power((x2[i]+(k33)),3) ) / ( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*  
power((x2[i]+(k33)),2) + 2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+  
(k33)),4) ) );
```

```
k44 := h*( ( b1*(x2[i]+(k34))*(x3[i]+(k34))*(x4[i]+(k34)) +  
b2*power((x2[i]+(k34)),3) + b3*power((x2[i]+(k34)),5) +  
b4*power((x4[i]+(k34)),2)*(x2[i]+(k34)) - b5*U[i+1] + b6*(x3[i]  
+(k34)) - power(w1,2)*(x2[i]+(k34)) + b7*power((x2[i]+(k34)),2)  
*(x3[i]+(k34))*(x4[i]+(k34)) + b8*U[i+1]*power((x2[i]+(k34)),2)  
- b9*power((x2[i]+(k34)),2)*(x3[i]+(k34)) - b10*power((x2[i]+  
(k34)),3)*power((x4[i]+(k34)),2) + b11*power((x3[i]+(k34)),2)*  
(x2[i]+(k34)) - b12*power((x2[i]+(k34)),3)*power((x3[i]+(k34)),2))  
/ ( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k34)),2) + 2.6786*  
power(E,4)*power((x2[i]+(k34)),4) ) );
```

```
x1[i+1] := x1[i] + ( k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41 )/6 ;  
x2[i+1] := x2[i] + ( k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42 )/6 ;  
x3[i+1] := x3[i] + ( k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43 )/6 ;  
x4[i+1] := x4[i] + ( k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44 )/6 ;
```

```
writeln(arq2,tempo[i], ' ',x1[i], ' ',x2[i] );
```

```
end;
```

```
{ close(arq1); }  
close(arq2);  
end.
```

```
program integrador;
```

```
{ *****
  {                                     PEQUENAS DEFLEXOES
  { ***** }
```

```
{ CASOS 1-2-3 }
```

```
{ CASO 1
{ altura := 0.030;
{ base := 0.025; }
```

```
{ CASO 2 ( EXPERIMENTAL )
{ altura := 0.01905;
{ base := 0.01270; }
```

```
{ CASO 3
{ altura := 0.010
{ base := 0.007 }
```

```
const
```

```
altura = 0.01905 ;
base = 0.01270 ;
a1L = 1.8780;
young = 0.70*1e11;
L = 1.2 ;
aux = 0.100 ;
Ng = 120 ;
Km = 0.0549 ;
Ra = 1.1 ;
Kb = 0.0555 ;
intervalo = 0.3 ;
Wmotor = 62.832 ;
passo = 1e-5 ;
```

```
var
```

```
xout1 : array[1..200000] of real ;
yout1 : array[1..200000] of real ;
xout2 : array[1..200000] of real ;
yout2 : array[1..200000] of real ;
xout3 : array[1..200000] of real ;
yout3 : array[1..200000] of real ;
xout4 : array[1..200000] of real ;
yout4 : array[1..200000] of real ;
xout5 : array[1..200000] of real ;
yout5 : array[1..200000] of real ;
```

```

U : array[1..2000000] of real ;
T : array[1..2000000] of real ;
x1 : array[1..2000000] of real ;
x2 : array[1..2000000] of real ;
x3 : array[1..2000000] of real ;
x4 : array[1..2000000] of real ;
tempo : array[1..2000000] of real ;
area, I, ro, wl, E, massa, Izz, alfa, Tmotor, valor1, valor2 : real ;
Umax, xint1, xint2, xint3, yint1, yint2, yint3, coef1, coef2, coef3, a, b, c : real ;
varaux, yaux, y, xn, xo, n, h, c1, c2, c3, c4, c5, c6 : real ;
k11, k12, k13, k14, k21, k22, k23, k24, k31, k32, k33, k34, k41, k42, k43, k44 : real ;
x3a, x3b, x3c, x3d, x4a, x4b, x4c, x4d : real ;
i : integer ;
{ arq1 : text ; }
arq2 : text ;

```

```

function power (a:real; b:integer): real;
var r: real;
begin
    r := 1;
    while (b>0) do
    begin
        r := r * a ;
        b := b - 1;
    end;
    power := r;
end;

```

```

begin

```

```

{ Abertura dos arquivos }

```

```

{ open(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res', 'unknown');
  rewrite(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res');
  writeln(arq1, T, ' ', U); }

```

```

open(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/PC.res', 'unknown');
rewrite(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/PC.res');
{writeln(arq2, tempo, ' ', x1, ' ', x2);}

```

```

area := altura*base;
I := ( altura*power(base,3)) / 12 ;
ro := 2700*area ;

```

```

wl := (power(alL,2))*sqrt((young*I)/(ro*power(L,4)));

```

```

E := (power(base,2))/(12*power(L,2)) ;

```

```

massa := 2700*area*L;
Izz := ((1/12)*massa*( power(base,2) + power(L,2) ) ) +
      ( massa*( power( ((L/2)-(aux/2)),2 ) ) );

```

```

alfa := ( Wmotor / 120 ) / intervalo ;
Tmotor := Izz*alfa*(1/Ng) ;

```

```

valor1 := ( 1/E )*( L / (young*I) )*(Km/Ra) ;
valor2 := ( 1/E )*( L / (young*I) )*(Kb/Ra)*(Km) ;

```

```

Umax := ( Tmotor + (Kb/Ra)*Km*Wmotor/Ng )*Ra*Ng*(1/Km) ;

```

```

{ PERFIL DE POTENCIAL }

```

```

xint1:=8*intervalo;
xint2:=2*intervalo;
xint3:=intervalo;

```

```

yint1:=Umax;
yint2:=Umax;
yint3:=0.632*Umax;

```

```

coef1 := - (power(xint2,2)/power(xint1,2)) ;
coef2 := - (power(xint3,2)/power(xint1,2)) ;
coef3 := - ((coef2*xint1) + xint3) / ((coef1*xint1) + xint2) ;

```

```

c := (coef3*((coef1*yint1)+yint2) + ((coef2*yint1) + yint3)) /
      ((coef3*(coef1 + 1)) + (coef2 + 1));
b := (((coef1*yint1) + yint2) - ((1 + coef1)*c)) / ((xint2) +
      (xint1)*coef1) ;
a := ( yint1 - c - ((xint1)*b) ) / power(xint1,2) ;

```

```

xout1[1] := 0 ;
yout1[1] := 0 ;
for i := 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := i*passo ;
  y := 0.632*Umax*varaux/xint3 ;
  yout1[i+1] := y ;
  xout1[i+1] := varaux ;
end;

```

```

xout2[1] := intervalo ;

```

```

yout2[1] := a*power(xout2[1],2) + b*xout2[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := intervalo + i*passo ;
  y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
  yout2[i] := y ;
  xout2[i] := varaux ;
end;

```

```

xout3[1] := (2*intervalo) ;
yout3[1] := Umax ;
for i:= 1 to round(6*intervalo/passo) do
begin
  varaux := 2*intervalo + i*passo ;
  y := Umax;
  yout3[i] := y ;
  xout3[i] := varaux ;
end;

```

```

xout4[1] := (8*intervalo) ;
yout4[1] := a*power(xout4[1],2) + b*xout4[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := 8*intervalo + i*passo ;
  y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
  yout4[i] := y ;
  xout4[i] := varaux ;
end;

```

```

xout5[1] := (9*intervalo) ;
yout5[1] := a*power(xout5[1],2) + b*xout5[1] + c ;
yaux := yout5[1] ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := 9*intervalo + i*passo ;
  y := ( (10*intervalo)*yaux - yaux*varaux ) / intervalo ;
  yout5[i] := y ;
  xout5[i] := varaux ;
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
  T[i] := xout1[i];
  U[i] := yout1[i];
  { writeln(arq1,xout1[i],',',yout1[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round((1/passo)*intervalo) + i] := xout2[i];
    U[ round((1/passo)*intervalo) + i] := yout2[i];
    { writeln(arq1,xout2[i], ' ',yout2[i]); }
end;

for i:=1 to round((1/passo)*6*intervalo) do
begin
    T[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout3[i];
    U[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout3[i];
    { writeln(arq1,xout3[i], ' ',yout3[i]); }
end;

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout4[i];
    U[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout4[i];
    { writeln(arq1,xout4[i], ' ',yout4[i]); }
end;

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout5[i];
    U[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout5[i];
    { writeln(arq1,xout5[i], ' ',yout5[i]); }
end;

{ *****
  RUNGE-KUTTA de QUARTA ORDEM ( 3 PRIMEIROS PONTOS )
  ***** }

{ h = passo de integracao      }
{ n = numero de pontos        }

xn := 10*intervalo ;
xo := 0 ;
n := (10*intervalo) / passo ;
h := ( xn - xo ) / n ;

{ CONSTANTES }

c1 := 3.47*power(E,2) ;
c2 := 1.29*0.58*power(E,2) ;
c3 := 1.29*power(w1,2) ;

```

```

c4 := 1.73*power(E,2) ;
c5 := 0.43*1.29 ;
c6 := 0.58*power(E,2) ;

```

```

{ INTEGRADOR NUMERICO }

```

```

{ Em t=0 }

```

```

tempo[1] := 0 ;
x1[1] := 0 ;
x2[1] := 0 ;
x3[1] := 0 ;
x4[1] := 0 ;

```

```

for i := 1 to 3 do
begin

```

```

    tempo[i+1] := tempo[i] + h ;

```

```

    k11 := h*x3[i] ;
    k12 := h*x4[i] ;
    k13 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] ) - c1*x2[i]*x3[i]*x4[i] -
        c2*x2[i]*power(x3[i],2) - c3*x2[i]) / ( 1 + c4*power(x2[i],2) -
        c5 ) ;
    k14 := h*(( c6*x2[i]*power(x3[i],2) - power(w1,2)*x2[i] )*(1 + c4*
        power(x2[i],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] ) -
        c1*x2[i]*x3[i]*x4[i])) / ( 1 + c4*power(x2[i],2) - c5 ) ;

```

```

    k21 := h*( x3[i] + k11/2 ) ;
    k22 := h*( x4[i] + k12/2 ) ;
    k23 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + (k13/2)) ) -
        c1*(x2[i]+(k13/2))*(x3[i]+(k13/2))*(x4[i]+(k13/2)) - c2*(x2[i]+
        (k13/2))*power((x3[i]+(k13/2)),2) - c3*(x2[i]+(k13/2))) / ( 1 +
        c4*power((x2[i]+(k13/2)),2) - c5 ) ;
    k24 := h*(( c6*(x2[i]+(k14/2))*power((x3[i]+(k14/2)),2) - power(w1,2)*
        (x2[i]+(k14/2)) )*(1 + c4*power((x2[i]+(k14/2)),2)) - 0.43*
        ( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + (k14/2)) ) -
        c1*(x2[i]+(k14/2))*(x3[i]+(k14/2))*(x4[i]+(k14/2)))) / ( 1 +
        c4*power((x2[i]+(k14/2)),2) - c5 ) ;

```

```

    k31 := h*( x3[i] + k21/2 ) ;
    k32 := h*( x4[i] + k22/2 ) ;
    k33 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + (k23/2)) ) -
        c1*(x2[i]+(k23/2))*(x3[i]+(k23/2))*(x4[i]+(k23/2)) - c2*(x2[i]+
        (k23/2))*power((x3[i]+(k23/2)),2) - c3*(x2[i]+(k23/2))) / ( 1 +
        c4*power((x2[i]+(k23/2)),2) - c5 ) ;
    k34 := h*(( c6*(x2[i]+(k24/2))*power((x3[i]+(k24/2)),2) - power(w1,2)*
        (x2[i]+(k24/2)) )*(1 + c4*power((x2[i]+(k24/2)),2)) - 0.43*
        ( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + (k24/2)) ) -
        c1*(x2[i]+(k24/2))*(x3[i]+(k24/2))*(x4[i]+(k24/2)))) / ( 1 +

```

```
c4*power((x2[i]+(k24/2)),2) - c5 ) ;
```

248

```
k41 := h*( x3[i] + k31 );
k42 := h*( x4[i] + k32 );
k43 := h*(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + k33) ) - c1*(x2[i]+
(k33))*(x3[i]+(k33))*(x4[i]+(k33)) - c2*(x2[i]+(k33))*
power((x3[i]+(k33)),2) - c3*(x2[i]+(k33))) / ( 1 + c4*
power((x2[i]+(k33)),2) - c5 ) ;
k44 := h*(( c6*(x2[i]+(k34))*power((x3[i]+(k34)),2) - power(w1,2)*
(x2[i]+(k34)) )*(1 + c4*power((x2[i]+(k34)),2)) - 0.43*
(( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*(x3[i] + k34) ) - c1*(x2[i]+
(k34))*(x3[i]+(k34))*(x4[i]+(k34)))) / ( 1 + c4*
power((x2[i]+(k34)),2) - c5 ) ;
```

```
x1[i+1] := x1[i] + ( k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41 )/6 ;
x2[i+1] := x2[i] + ( k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42 )/6 ;
x3[i+1] := x3[i] + ( k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43 )/6 ;
x4[i+1] := x4[i] + ( k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44 )/6 ;
```

end;

```
{ *****
PREVISOR-CORRETOR
***** }
```

```
for i := 4 to round(n) do
begin
```

```
tempo[i+1] := tempo[i] + h ;
```

```
{ PREVISOR }
```

```
x1[i+1] := x1[i] + (h/24)*( - 9*x3[i-3] + 37*x3[i-2] - 59*x3[i-1] +
55*x3[i] );
```

```
x2[i+1] := x2[i] + (h/24)*( - 9*x4[i-3] + 37*x4[i-2] - 59*x4[i-1] +
55*x4[i] );
```

```

x3a := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-3] ) - c1*x2[i-3]*x3[i-3]*
x4[i-3] - c2*x2[i-3]*power(x3[i-3],2) - c3*x2[i-3]) / ( 1 +
c4*power(x2[i-3],2) - c5 ) ;
x3b := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-2] ) - c1*x2[i-2]*x3[i-2]*
x4[i-2] - c2*x2[i-2]*power(x3[i-2],2) - c3*x2[i-2]) / ( 1 +
c4*power(x2[i-2],2) - c5 ) ;
x3c := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-1] ) - c1*x2[i-1]*x3[i-1]*
x4[i-1] - c2*x2[i-1]*power(x3[i-1],2) - c3*x2[i-1]) / ( 1 +
c4*power(x2[i-1],2) - c5 ) ;
x3d := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] ) - c1*x2[i]*x3[i]*x4[i] -
c2*x2[i]*power(x3[i],2) - c3*x2[i]) / ( 1 + c4*power(x2[i],2)
- c5 ) ;
x3[i+1] := x3[i] + (h/24)*( - 9*(x3a) + 37*(x3b) - 59*(x3c) +
55*(x3d) ) ;

```

```

x4a := (( c6*x2[i-3]*power(x3[i-3],2) - power(w1,2)*x2[i-3] )*(1 +
c4*power(x2[i-3],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
x3[i-3] ) - c1*x2[i-3]*x3[i-3]*x4[i-3])) / ( 1 + c4*
power(x2[i-3],2) - c5 ) ;
x4b := (( c6*x2[i-2]*power(x3[i-2],2) - power(w1,2)*x2[i-2] )*(1 +
c4*power(x2[i-2],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
x3[i-2] ) - c1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2])) / ( 1 + c4*
power(x2[i-2],2) - c5 ) ;
x4c := (( c6*x2[i-1]*power(x3[i-1],2) - power(w1,2)*x2[i-1] )*(1 +
c4*power(x2[i-1],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
x3[i-1] ) - c1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1])) / ( 1 + c4*
power(x2[i-1],2) - c5 ) ;
x4d := (( c6*x2[i]*power(x3[i],2) - power(w1,2)*x2[i] )*(1 +
c4*power(x2[i],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
x3[i] ) - c1*x2[i]*x3[i]*x4[i])) / ( 1 + c4*power(x2[i],2)
- c5 ) ;
x4[i+1] := x4[i] + (h/24)*( - 9*(x4a) + 37*(x4b) - 59*(x4c) +
55*(x4d) ) ;

```

{ CORRETOR }

```

x1[i+1] := x1[i] + (h/24)*( x3[i-2] - 5*x3[i-1] + 19*x3[i] +
9*x3[i+1] ) ;

```

```

x2[i+1] := x2[i] + (h/24)*( x4[i-2] - 5*x4[i-1] + 19*x4[i] +
9*x4[i+1] ) ;

```

```

x3a := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-2] ) - c1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2] -
c2*x2[i-2]*power(x3[i-2],2) - c3*x2[i-2]) / (1+c4*power(x2[i-2],2)
- c5 ) ;
x3b := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-1] ) - c1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1] -
c2*x2[i-1]*power(x3[i-1],2) - c3*x2[i-1]) / (1+c4*power(x2[i-1],2)
- c5 ) ;
x3c := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] ) - c1*x2[i]*x3[i]*x4[i] -
c2*x2[i]*power(x3[i],2) - c3*x2[i]) / (1+c4*power(x2[i],2)
- c5 ) ;
x3d := (( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i+1] ) - c1*x2[i+1]*x3[i+1]*x4[i+1]
- c2*x2[i+1]*power(x3[i+1],2) - c3*x2[i+1]) / ( 1 + c4*
power(x2[i+1],2) - c5 ) ;
x3[i+1] := x3[i] + (h/24)*( (x3a) - 5*(x3b) + 19*(x3c) + 9*(x3d) ) ;

```

```

x4a := (( c6*x2[i-2]*power(x3[i-2],2) - power(w1,2)*x2[i-2] )*(1 +
c4*power(x2[i-2],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1]-valor2*Ng*x3[i-2])
- c1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2])) / (1+c4*power(x2[i-2],2) - c5) ;
x4b := (( c6*x2[i-1]*power(x3[i-1],2) - power(w1,2)*x2[i-1] )*(1 +
c4*power(x2[i-1],2)) - 0.43*((valor1*U[i+1]-valor2*Ng*x3[i-1])
- c1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1])) / (1+c4*power(x2[i-1],2) - c5) ;
x4c := (( c6*x2[i]*power(x3[i],2) - power(w1,2)*x2[i] )*(1 +
c4*power(x2[i],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i])
- c1*x2[i]*x3[i]*x4[i])) / ( 1 + c4*power(x2[i],2) - c5 ) ;
x4d := (( c6*x2[i+1]*power(x3[i+1],2) - power(w1,2)*x2[i+1] )*(1 +
c4*power(x2[i+1],2)) - 0.43*( ( valor1*U[i+1]-valor2*Ng*x3[i+1])
- c1*x2[i+1]*x3[i+1]*x4[i+1])) / ( 1 + c4*power(x2[i+1],2)-c5 ) ;
x4[i+1] := x4[i] + (h/24)*( (x4a) - 5*(x4b) + 19*(x4c) + 9*(x4d) ) ;

```

```

writeln(arq2,tempo[i], ' ',x1[i], ' ',x2[i] );

```

```

end;

```

```

{ close(arq1); }
close(arq2);
end.

```

program integrador ;

251

```
{ *****  
  GRANDES DEFLEXOES  
  ***** }
```

```
{ CASOS 1-2-3 }
```

```
{ CASO 1  
  altura := 0.030;  
  base := 0.025;  
}
```

```
{ CASO 2 ( EXPERIMENTAL )  
  altura := 0.01905;  
  base := 0.01270;  
}
```

```
{ CASO 3  
  altura := 0.010  
  base := 0.007  
}
```

const

```
  altura = 0.01905 ;  
  base = 0.01270 ;  
  alL = 1.8780;  
  young = 0.70*1e11;  
  L = 1.2 ;  
  aux = 0.100 ;  
  Ng = 120 ;  
  Km = 0.0549 ;  
  Ra = 1.1 ;  
  Kb = 0.0555 ;  
  intervalo = 0.3 ;  
  Wmotor = 62.832 ;  
  passo = 1e-5 ;
```

var

```
  xout1 : array[1..200000] of real ;  
  yout1 : array[1..200000] of real ;  
  xout2 : array[1..200000] of real ;  
  yout2 : array[1..200000] of real ;  
  xout3 : array[1..200000] of real ;  
  yout3 : array[1..200000] of real ;  
  xout4 : array[1..200000] of real ;  
  yout4 : array[1..200000] of real ;  
  xout5 : array[1..200000] of real ;  
  yout5 : array[1..200000] of real ;  
  U : array[1..2000000] of real ;  
  T : array[1..2000000] of real ;  
  x1 : array[1..2000000] of real ;
```

```

x2 : array[1..2000000] of real ;
x3 : array[1..2000000] of real ;
x4 : array[1..2000000] of real ;
tempo : array[1..2000000] of real ;
area, I, ro, w1, E, massa, Izz, alfa, Tmotor, valor1, valor2 : real ;
Umax, xint1, xint2, xint3, yint1, yint2, yint3, coef1, coef2, coef3, a, b, c : real ;
varaux, yaux, y, xn, xo, n, h, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10, a11 : real ;
b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10, b11, b12 : real ;
k11, k12, k13, k14, k21, k22, k23, k24, k31, k32, k33, k34, k41, k42, k43, k44 : real ;
x3a, x3b, x3c, x3d, x4a, x4b, x4c, x4d : real ;
i : integer ;
{ arq1 : text ; }
arq2 : text ;

```

```

function power (a:real; b:integer): real;
var r: real;
begin

```

```

    r := 1;
    while (b>0) do
    begin
        r := r * a ;
        b := b - 1;
    end;
    power := r;

```

```

end;

```

```

begin

```

```

{ Abertura dos arquivos }

```

```

{ open(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res', 'unknown');
  rewrite(arq1, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/TU.res');
{ writeln(arq1, T, ' ', U); } }

```

```

open(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/PC.res', 'unknown');
rewrite(arq2, '/homes/lumina/fenili/SIMULACOES/PC.res');
{writeln(arq2, tempo, ' ', x1, ' ', x2);}

```

```

area := altura*base;
I := ( altura*power(base,3)) / 12 ;
ro := 2700*area ;

```

```

w1 := (power(a1L,2))*sqrt((young*I)/(ro*power(L,4)));

```

```

E := (power(base,2))/(12*power(L,2)) ;

```

```

massa := 2700*area*L;
Izz := ((1/12)*massa*( power(base,2) + power(L,2) ) ) +

```

```
( massa*( power( ((L/2)-(aux/2)),2 ) ) );
```

253

```
alfa := ( Wmotor / 120 ) / intervalo ;
Tmotor := Izz*alfa*(1/Ng) ;
```

```
valor1 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Km/Ra) ;
valor2 := ( 1/E )*( L / (young*I))*(Kb/Ra)*(Km) ;
```

```
Umax := ( Tmotor + (Kb/Ra)*Km*Wmotor/Ng ) *Ra*Ng*(1/Km) ;
```

```
{ PERFIL DE POTENCIAL }
```

```
xint1:=8*intervalo;
xint2:=2*intervalo;
xint3:=intervalo;
```

```
yint1:=Umax;
yint2:=Umax;
yint3:=0.632*Umax;
```

```
coef1 := - (power(xint2,2)/power(xint1,2)) ;
coef2 := - (power(xint3,2)/power(xint1,2)) ;
coef3 := - ((coef2*xint1) + xint3) / ((coef1*xint1) + xint2) ;
```

```
c := (coef3*((coef1*yint1)+yint2) + ((coef2*yint1) + yint3)) /
      ((coef3*(coef1 + 1)) + (coef2 + 1));
b := (((coef1*yint1) + yint2) - ((1 + coef1)*c)) / ((xint2) +
      (xint1)*coef1) ;
a := ( yint1 - c - ((xint1)*b) ) / power(xint1,2) ;
```

```
xout1[1] := 0 ;
yout1[1] := 0 ;
for i := 1 to round(intervalo/passo) do
begin
  varaux := i*passo ;
  y := 0.632*Umax*varaux/xint3 ;
  yout1[i+1] := y ;
  xout1[i+1] := varaux ;
end;
```

```
xout2[1] := intervalo ;
yout2[1] := a*power(xout2[1],2) + b*xout2[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
```

```

begin
    varaux := intervalo + i*passo ;
    y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
    yout2[i] := y ;
    xout2[i] := varaux ;
end;

xout3[1] := (2*intervalo) ;
yout3[1] := Umax ;
for i:= 1 to round(6*intervalo/passo) do
begin
    varaux := 2*intervalo + i*passo ;
    y := Umax;
    yout3[i] := y ;
    xout3[i] := varaux ;
end;

xout4[1] := (8*intervalo) ;
yout4[1] := a*power(xout4[1],2) + b*xout4[1] + c ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 8*intervalo + i*passo ;
    y := a*power(varaux,2) + b*varaux + c;
    yout4[i] := y ;
    xout4[i] := varaux ;
end;

xout5[1] := (9*intervalo) ;
yout5[1] := a*power(xout5[1],2) + b*xout5[1] + c ;
yaux := yout5[1] ;
for i:= 1 to round(intervalo/passo) do
begin
    varaux := 9*intervalo + i*passo ;
    y := ( (10*intervalo)*yaux - yaux*varaux ) / intervalo ;
    yout5[i] := y ;
    xout5[i] := varaux ;
end;

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[i] := xout1[i];
    U[i] := yout1[i];
    { writeln(arq1,xout1[i], ' ',yout1[i]); }
end;

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin

```

```

    T[ round((1/passo)*intervalo) + i] := xout2[i];
    U[ round((1/passo)*intervalo) + i] := yout2[i];
    { writeln(arq1,xout2[i], ' ',yout2[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*6*intervalo) do
begin
    T[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout3[i];
    U[ round(2*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout3[i];
    { writeln(arq1,xout3[i], ' ',yout3[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout4[i];
    U[ round(8*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout4[i];
    { writeln(arq1,xout4[i], ' ',yout4[i]); }
end;

```

```

for i:=1 to round((1/passo)*intervalo) do
begin
    T[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := xout5[i];
    U[ round(9*((1/passo)*intervalo)) + i] := yout5[i];
    { writeln(arq1,xout5[i], ' ',yout5[i]); }
end;

```

```

{ *****
  RUNGE-KUTTA de QUARTA ORDEM ( 3 PRIMEIROS PONTOS )
  ***** }

```

```

{ h = passo de integracao
  n = numero de pontos }

```

```

xn := 10*intervalo ;
xo := 0 ;
n := (10*intervalo) / passo ;
h := ( xn - xo ) / n ;

```

```

{ CONSTANTES }

```

```

a1 := 3.6098*power(E,2) ;
a2 := 4.9737*power(E,2) ;
a3 := (15.8181*power(E,2)) - (4.1495*power(w1,2)*power(E,2)) ;
a4 := (17.6166*power(E,4)) - (3.0165*power(w1,2)*power(E,4)) ;

```

```

a5 := 2.1060*power(E,2) ;
a6 := 1.2938*power(w1,2) ;
a7 := 1.6169*power(E,2)*valor1 ;
a8 := 7.7379*power(E,2) ;
a9 := 1.6169*valor2*Ng*power(E,2) ;
a10 := 2.3298*power(E,4) ;
a11 := 2.3455*power(E,4) ;

b1 := 3.2552*power(E,2) ;
b2 := (12.2261*power(E,2)) - (1.7209*power(w1,2)*power(E,2)) ;
b3 := (-4.5554*power(E,4)) + (0.7800*power(w1,2)*power(E,4)) ;
b4 := 2.8598*power(E,2) ;
b5 := 0.4313*valor1 ;
b6 := 0.4313*valor2*Ng ;
b7 := 0.5301*power(E,4) ;
b8 := 1.4409*valor1*power(E,2) ;
b9 := 1.4409*valor2*Ng*power(E,2) ;
b10 := 4.7549*power(E,4) ;
b11 := 1.6278*power(E,2) ;
b12 := 0.6065*power(E,4) ;

```

```
{ INTEGRADOR NUMERICO }
```

```
{ Em t=0 }
```

```

tempo[1] := 0 ;
x1[1] := 0 ;
x2[1] := 0 ;
x3[1] := 0 ;
x4[1] := 0 ;

```

```

for i :=1 to 3 do
begin

```

```
    tempo[i+1] := tempo[i] + h ;
```

```

    k11 := h*x3[i] ;
    k12 := h*x4[i] ;

```

```

    k13 := h*( ( -a1*x2[i]*x3[i]*x4[i] - a2*power(x4[i],2)*x2[i] -
    a3*power(x2[i],3) - a4*power(x2[i],5) - a5*power(x3[i],2)*x2[i]
    + a6*x2[i] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] - a7*U[i+1]*
    power(x2[i],2) - a8*power(x2[i],3)*x3[i]*x4[i] + a9*power(x2[i],2)*
    x3[i] + a10*power(x4[i],2)*power(x2[i],3) - a11*power(x3[i],2)*
    power(x2[i],3) ) / ( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power(x2[i],2) +
    2.6786*power(E,4)*power(x2[i],4) ) ) ;

```

```

    k14 := h*( ( b1*x2[i]*x3[i]*x4[i] + b2*power(x2[i],3) +
    b3*power(x2[i],5) + b4*power(x4[i],2)*x2[i] - b5*U[i+1] +
    b6*x3[i] - power(w1,2)*x2[i] + b7*power(x2[i],2)*x3[i]*x4[i] +
    b8*U[i+1]*power(x2[i],2) - b9*power(x2[i],2)*x3[i] - b10*

```

```

power(x2[i],3)*power(x4[i],2) + b11*power(x3[i],2)*x2[i] -
b12*power(x2[i],3)*power(x3[i],2) ) / ( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)
*power(x2[i],2) + 2.6786*power(E,4)*power(x2[i],4) ) ) ;

k21 := h*( x3[i] + k11/2 ) ;
k22 := h*( x4[i] + k12/2 ) ;

k23 := h*( ( -a1*(x2[i]+(k13/2))*(x3[i]+(k13/2))*(x4[i]+(k13/2)) -
a2*power((x4[i]+(k13/2)),2)*(x2[i]+(k13/2)) - a3*power((x2[i]+
(k13/2)),3) - a4*power((x2[i]+(k13/2)),5) - a5*power((x3[i]+
(k13/2)),2)*(x2[i]+(k13/2)) + a6*(x2[i]+(k13/2)) + valor1*U[i+1] -
valor2*Ng*(x3[i]+(k13/2)) - a7*U[i+1]*power((x2[i]+(k13/2)),2) -
a8*power((x2[i]+(k13/2)),3)*(x3[i]+(k13/2))*(x4[i]+(k13/2)) +
a9*power((x2[i]+(k13/2)),2)*(x3[i]+(k13/2)) +
a10*power((x4[i]+(k13/2)),2)*power((x2[i]+(k13/2)),3) -
a11*power((x3[i]+(k13/2)),2)*power((x2[i]+(k13/2)),3) ) /
( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k13/2)),2) +
2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+(k13/2)),4) ) ) ;

k24 := h*( ( b1*(x2[i]+(k14/2))*(x3[i]+(k14/2))*(x4[i]+(k14/2)) +
b2*power((x2[i]+(k14/2)),3) + b3*power((x2[i]+(k14/2)),5) +
b4*power((x4[i]+(k14/2)),2)*(x2[i]+(k14/2)) - b5*U[i+1] +
b6*(x3[i]+(k14/2)) - power(w1,2)*(x2[i]+(k14/2)) +
b7*power((x2[i]+(k14/2)),2)*(x3[i]+(k14/2))*(x4[i]+(k14/2)) +
b8*U[i+1]*power((x2[i]+(k14/2)),2) - b9*power((x2[i]+(k14/2)),2)
*(x3[i]+(k14/2)) - b10*power((x2[i]+(k14/2)),3)*power((x4[i]+(k14/2)
b11*power((x3[i]+(k14/2)),2)*(x2[i]+(k14/2)) - b12*power((x2[i]+
(k14/2)),3)*power((x3[i]+(k14/2)),2) ) / ( 0.4420 -
0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k14/2)),2) + 2.6786*power(E,4)*
power((x2[i]+(k14/2)),4) ) ) ;

k31 := h*( x3[i] + k21/2 ) ;
k32 := h*( x4[i] + k22/2 ) ;

k33 := h*( ( -a1*(x2[i]+(k23/2))*(x3[i]+(k23/2))*(x4[i]+(k23/2)) -
a2*power((x4[i]+(k23/2)),2)*(x2[i]+(k23/2)) - a3*power((x2[i]+
(k23/2)),3) - a4*power((x2[i]+(k23/2)),5) - a5*power((x3[i]+
(k23/2)),2)*(x2[i]+(k23/2)) + a6*(x2[i]+(k23/2)) + valor1*U[i+1] -
valor2*Ng*(x3[i]+(k23/2)) - a7*U[i+1]*power((x2[i]+(k23/2)),2) -
a8*power((x2[i]+(k23/2)),3)*(x3[i]+(k23/2))*(x4[i]+(k23/2)) +
a9*power((x2[i]+(k23/2)),2)*(x3[i]+(k23/2)) +
a10*power((x4[i]+(k23/2)),2)*power((x2[i]+(k23/2)),3) -
a11*power((x3[i]+(k23/2)),2)*power((x2[i]+(k23/2)),3) ) /
( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k23/2)),2) +
2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+(k23/2)),4) ) ) ;

k34 := h*( ( b1*(x2[i]+(k24/2))*(x3[i]+(k24/2))*(x4[i]+(k24/2)) +
b2*power((x2[i]+(k24/2)),3) + b3*power((x2[i]+(k24/2)),5) +
b4*power((x4[i]+(k24/2)),2)*(x2[i]+(k24/2)) - b5*U[i+1] +
b6*(x3[i]+(k24/2)) - power(w1,2)*(x2[i]+(k24/2)) +
b7*power((x2[i]+(k24/2)),2)*(x3[i]+(k24/2))*(x4[i]+(k24/2)) +
b8*U[i+1]*power((x2[i]+(k24/2)),2) - b9*power((x2[i]+(k24/2)),2)*
(x3[i]+(k24/2)) - b10*power((x2[i]+(k24/2)),3)*power((x4[i]+
(k24/2)),2) + b11*power((x3[i]+(k24/2)),2)*(x2[i]+(k24/2)) -
b12*power((x2[i]+(k24/2)),3)*power((x3[i]+(k24/2)),2) ) /
( 0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k24/2)),2) +

```

2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+(k24/2)),4))) ;

258

k41 := h*(x3[i] + k31);

k42 := h*(x4[i] + k32);

k43 := h*((-a1*(x2[i]+(k33))*(x3[i]+(k33))*(x4[i]+(k33)) -
a2*power((x4[i]+(k33)),2)*(x2[i]+(k33)) - a3*power((x2[i]+
(k33)),3) - a4*power((x2[i]+(k33)),5) - a5*power((x3[i]+(k33)),2)
(x2[i]+(k33)) + a6(x2[i]+(k33)) + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*
(x3[i]+(k33)) - a7*U[i+1]*power((x2[i]+(k33)),2) -
a8*power((x2[i]+(k33)),3)*(x3[i]+(k33))*(x4[i]+(k33)) +
a9*power((x2[i]+(k33)),2)*(x3[i]+(k33)) +
a10*power((x4[i]+(k33)),2)*power((x2[i]+(k33)),3) -
a11*power((x3[i]+(k33)),2)*power((x2[i]+(k33)),3)) / (0.4420 -
0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k33)),2) + 2.6786*power(E,4)*
power((x2[i]+(k33)),4))) ;

k44 := h*((b1*(x2[i]+(k34))*(x3[i]+(k34))*(x4[i]+(k34)) +
b2*power((x2[i]+(k34)),3) + b3*power((x2[i]+(k34)),5) +
b4*power((x4[i]+(k34)),2)*(x2[i]+(k34)) - b5*U[i+1] +
b6*(x3[i]+(k34)) - power(w1,2)*(x2[i]+(k34)) +
b7*power((x2[i]+(k34)),2)*(x3[i]+(k34))*(x4[i]+(k34)) +
b8*U[i+1]*power((x2[i]+(k34)),2) - b9*power((x2[i]+(k34)),2)*
(x3[i]+(k34)) - b10*power((x2[i]+(k34)),3)*power((x4[i]+
(k34)),2) + b11*power((x3[i]+(k34)),2)*(x2[i]+(k34)) -
b12*power((x2[i]+(k34)),3)*power((x3[i]+(k34)),2)) /
(0.4420 - 0.7467*power(E,2)*power((x2[i]+(k34)),2) +
2.6786*power(E,4)*power((x2[i]+(k34)),4))) ;

x1[i+1] := x1[i] + (k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)/6 ;

x2[i+1] := x2[i] + (k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)/6 ;

x3[i+1] := x3[i] + (k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43)/6 ;

x4[i+1] := x4[i] + (k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44)/6 ;

end;

```
{ *****
  PREVISOR CORRETOR
  ***** }
```

for i := 4 to round(n) do
begin

```
tempo[i+1] := tempo[i] + h ;
```

```
{   PREVISOR   }
```

```
x1[i+1] := x1[i] + (h/24)*( -9*x3[i-3] + 37*x3[i-2] - 59*x3[i-1] +
55*x3[i] );
```

```
x2[i+1] := x2[i] + (h/24)*( -9*x4[i-3] + 37*x4[i-2] - 59*x4[i-1] +
55*x4[i] );
```

```
x3a := h*( ( -a1*x2[i-3]*x3[i-3]*x4[i-3] - a2*(power(x4[i-3],2))*x2[i-3] -
a3*(power(x2[i-3],3)) - a4*(power(x2[i-3],5)) - a5*(power(x3[i-3],2))*
x2[i-3] + a6*x2[i-3] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-3] - a7*U[i+1]*
(power(x2[i-3],2)) - a8*(power(x2[i-3],3))*x3[i-3]*x4[i-3] +
a9*(power(x2[i-3],2))*x3[i-3] + a10*(power(x4[i-3],2))*
(power(x2[i-3],3)) - a11*(power(x3[i-3],2))*(power(x2[i-3],3)) ) /
( 0.4420 - 0.7467*(power(E,2))*(power(x2[i-3],2)) +
2.6786*(power(E,4))*(power(x2[i-3],4)) ) );
```

```
x3b := h*( ( -a1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2] - a2*(power(x4[i-2],2))*x2[i-2] -
a3*(power(x2[i-2],3)) - a4*(power(x2[i-2],5)) - a5*(power(x3[i-2],2))*
x2[i-2] + a6*x2[i-2] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-2] - a7*U[i+1]*
(power(x2[i-2],2)) - a8*(power(x2[i-2],3))*x3[i-2]*x4[i-2] + a9*
(power(x2[i-2],2))*x3[i-2] + a10*(power(x4[i-2],2))*
(power(x2[i-2],3)) - a11*(power(x3[i-2],2))*(power(x2[i-2],3)) ) /
( 0.4420 - 0.7467*(power(E,2))*(power(x2[i-2],2)) + 2.6786*
(power(E,4))*(power(x2[i-2],4)) ) );
```

```
x3c := h*( ( -a1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1] - a2*(power(x4[i-1],2))*x2[i-1] -
a3*(power(x2[i-1],3)) - a4*(power(x2[i-1],5)) - a5*(power(x3[i-1],2))*
x2[i-1] + a6*x2[i-1] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i-1] - a7*U[i+1]*
(power(x2[i-1],2)) - a8*(power(x2[i-1],3))*x3[i-1]*x4[i-1] +
a9*(power(x2[i-1],2))*x3[i-1] + a10*(power(x4[i-1],2))*
(power(x2[i-1],3)) - a11*(power(x3[i-1],2))*(power(x2[i-1],3)) ) /
( 0.4420 - 0.7467*(power(E,2))*(power(x2[i-1],2)) +
2.6786*(power(E,4))*(power(x2[i-1],4)) ) );
```

```
x3d := h*( ( -a1*x2[i]*x3[i]*x4[i] - a2*(power(x4[i],2))*x2[i] -
a3*(power(x2[i],3)) - a4*(power(x2[i],5)) - a5*(power(x3[i],2))*
x2[i] + a6*x2[i] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] - a7*U[i+1]*
(power(x2[i],2)) - a8*(power(x2[i],3))*x3[i]*x4[i] + a9*
(power(x2[i],2))*x3[i] + a10*(power(x4[i],2))*(power(x2[i],3)) -
a11*(power(x3[i],2))*(power(x2[i],3)) ) / ( 0.4420 -
0.7467*(power(E,2))*(power(x2[i],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i],4)) ) );
```

```
x3[i+1] := x3[i] + (h/24)*( - 9*(x3a) + 37*(x3b) - 59*(x3c) + 55*(x3d) ) ;
```

```
x4a := h*( ( b1*x2[i-3]*x3[i-3]*x4[i-3] + b2*(power(x2[i-3],3)) +
b3*(power(x2[i-3],5)) + b4*(power(x4[i-3],2))*x2[i-3] - b5*U[i+1]
+ b6*x3[i-3] - (power(w1,2))*x2[i-3] + b7*(power(x2[i-3],2))*
x3[i-3]*x4[i-3] + b8*U[i+1]*(power(x2[i-3],2)) - b9*
(power(x2[i-3],2))*x3[i-3] - b10*(power(x2[i-3],3)) )
```

```

(power(x4[i-3],2)) + b11*(power(x3[i-3],2))*x2[i-3] -
b12*(power(x2[i-3],3))*(power(x3[i-3],2)) ) / ( 0.4420 - 260
0.7467*(power(E,2))*(power(x2[i-3],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i-3],4)) ) ) ;

x4b := h*( ( b1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2] + b2*(power(x2[i-2],3)) +
b3*(power(x2[i-2],5)) + b4*(power(x4[i-2],2))*x2[i-2] - b5*U[i+1]
+ b6*x3[i-2] - (power(w1,2))*x2[i-2] + b7*(power(x2[i-2],2))*
x3[i-2]*x4[i-2] + b8*U[i+1]*(power(x2[i-2],2)) - b9*
(power(x2[i-2],2))*x3[i-2] - b10*(power(x2[i-2],3))*
(power(x4[i-2],2)) + b11*(power(x3[i-2],2))*x2[i-2] -
b12*(power(x2[i-2],3))*(power(x3[i-2],2)) ) / ( 0.4420 -
0.7467*(power(E,2))*(power(x2[i-2],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i-2],4)) ) ) ) ;

x4c := h*( ( b1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1] + b2*(power(x2[i-1],3)) +
b3*(power(x2[i-1],5)) + b4*(power(x4[i-1],2))*x2[i-1] - b5*U[i+1]
+ b6*x3[i-1] - (power(w1,2))*x2[i-1] + b7*(power(x2[i-1],2))*
x3[i-1]*x4[i-1] + b8*U[i+1]*(power(x2[i-1],2)) - b9*
(power(x2[i-1],2))*x3[i-1] - b10*(power(x2[i-1],3))*
(power(x4[i-1],2)) + b11*(power(x3[i-1],2))*x2[i-1] - b12*
(power(x2[i-1],3))*(power(x3[i-1],2)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i-1],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i-1],4)) ) ) ) ;

x4d := h*( ( b1*x2[i]*x3[i]*x4[i] + b2*(power(x2[i],3)) +
b3*(power(x2[i],5)) + b4*(power(x4[i],2))*x2[i] - b5*U[i+1] +
b6*x3[i] - (power(w1,2))*x2[i] + b7*(power(x2[i],2))*x3[i]*x4[i]
+ b8*U[i+1]*(power(x2[i],2)) - b9*(power(x2[i],2))*x3[i] - b10*
(power(x2[i],3))*(power(x4[i],2)) + b11*(power(x3[i],2))*x2[i] -
b12*(power(x2[i],3))*(power(x3[i],2)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i],4)) ) ) ) ;

x4[i+1] := x4[i] + (h/24)*( - 9*(x4a) + 37*(x4b) - 59*(x4c) + 55*(x4d) ) ;

{ CORRETOR }

x1[i+1] := x1[i] + (h/24)*( x3[i-2] - 5*x3[i-1] + 19*x3[i] + 9*x3[i+1] );
x2[i+1] := x2[i] + (h/24)*( x4[i-2] - 5*x4[i-1] + 19*x4[i] + 9*x4[i+1] );

x3a := h*( ( -a1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2] - a2*(power(x4[i-2],2))*x2[i-2] -
a3*(power(x2[i-2],3)) - a4*(power(x2[i-2],5)) - a5*
(power(x3[i-2],2))*x2[i-2] + a6*x2[i-2] + valor1*U[i+1] -
valor2*Ng*x3[i-2] - a7*U[i+1]*(power(x2[i-2],2)) - a8*
(power(x2[i-2],3))*x3[i-2]*x4[i-2] + a9*(power(x2[i-2],2))*x3[i-2] +
a10*(power(x4[i-2],2))*(power(x2[i-2],3)) - a11*(power(x3[i-2],2))*
(power(x2[i-2],3)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*(power(E,2))*
(power(x2[i-2],2)) + 2.6786*(power(E,4))*(power(x2[i-2],4)) ) ) ;

x3b := h*( ( -a1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1] - a2*(power(x4[i-1],2))*x2[i-1] -
a3*(power(x2[i-1],3)) - a4*(power(x2[i-1],5)) - a5*
(power(x3[i-1],2))*x2[i-1] + a6*x2[i-1] + valor1*U[i+1] -
valor2*Ng*x3[i-1] - a7*U[i+1]*(power(x2[i-1],2)) - a8*

```

```

(power(x2[i-1],3))*x3[i-1]*x4[i-1] + a9*(power(x2[i-1],2))*
x3[i-1] + a10*(power(x4[i-1],2))*(power(x2[i-1],3)) - a11*
(power(x3[i-1],2))*(power(x2[i-1],3)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i-1],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i-1],4)) ) );

x3c := h*( ( -a1*x2[i]*x3[i]*x4[i] - a2*(power(x4[i],2))*x2[i] -
a3*(power(x2[i],3)) - a4*(power(x2[i],5)) - a5*(power(x3[i],2)) *
x2[i] + a6*x2[i] + valor1*U[i+1] - valor2*Ng*x3[i] - a7*U[i+1]*
(power(x2[i],2)) - a8*(power(x2[i],3))*x3[i]*x4[i] + a9*
(power(x2[i],2))*x3[i] + a10*(power(x4[i],2))*(power(x2[i],3)) -
a11*(power(x3[i],2))*(power(x2[i],3)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i],4)) ) );

x3d := h*( ( -a1*x2[i+1]*x3[i+1]*x4[i+1] - a2*(power(x4[i+1],2))*x2[i+1] -
a3*(power(x2[i+1],3)) - a4*(power(x2[i+1],5)) - a5*
(power(x3[i+1],2)) *x2[i+1] + a6*x2[i+1] + valor1*U[i+1] -
valor2*Ng*x3[i+1] - a7*U[i+1]*(power(x2[i+1],2)) - a8*
(power(x2[i+1],3))*x3[i+1]*x4[i+1] + a9*(power(x2[i+1],2))*
x3[i+1] + a10*(power(x4[i+1],2))*(power(x2[i+1],3)) - a11*
(power(x3[i+1],2))*(power(x2[i+1],3)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i+1],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i+1],4)) ) );

x3[i+1] := x3[i] + (h/24)*( (x3a) - 5*(x3b) + 19*(x3c) + 9*(x3d) ) ;

x4a := h*( ( b1*x2[i-2]*x3[i-2]*x4[i-2] + b2*(power(x2[i-2],3)) +
b3*(power(x2[i-2],5)) + b4*(power(x4[i-2],2))*x2[i-2] - b5*U[i+1]
+ b6*x3[i-2] - (power(w1,2))*x2[i-2] + b7*(power(x2[i-2],2))*
x3[i-2]*x4[i-2] + b8*U[i+1]*(power(x2[i-2],2)) - b9*
(power(x2[i-2],2))*x3[i-2] - b10*(power(x2[i-2],3))*
(power(x4[i-2],2)) + b11*(power(x3[i-2],2))*x2[i-2] - b12*
(power(x2[i-2],3))*(power(x3[i-2],2)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i-2],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i-2],4)) ) );

x4b := h*( ( b1*x2[i-1]*x3[i-1]*x4[i-1] + b2*(power(x2[i-1],3)) +
b3*(power(x2[i-1],5)) + b4*(power(x4[i-1],2))*x2[i-1] - b5*U[i+1]
+ b6*x3[i-1] - (power(w1,2))*x2[i-1] + b7*(power(x2[i-1],2))*
x3[i-1]*x4[i-1] + b8*U[i+1]*(power(x2[i-1],2)) - b9*
(power(x2[i-1],2))*x3[i-1] - b10*(power(x2[i-1],3))*
(power(x4[i-1],2)) + b11*(power(x3[i-1],2))*x2[i-1] - b12*
(power(x2[i-1],3))*(power(x3[i-1],2)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i-1],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i-1],4)) ) );

x4c := h*( ( b1*x2[i]*x3[i]*x4[i] + b2*(power(x2[i],3)) +
b3*(power(x2[i],5)) + b4*(power(x4[i],2))*x2[i] - b5*U[i+1] +
b6*x3[i] - (power(w1,2))*x2[i] + b7*(power(x2[i],2))*x3[i]*x4[i]
+ b8*U[i+1]*(power(x2[i],2)) - b9*(power(x2[i],2))*x3[i] - b10*
(power(x2[i],3))*(power(x4[i],2)) + b11*(power(x3[i],2))*x2[i] -
b12*(power(x2[i],3))*(power(x3[i],2)) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i],4)) ) );

x4d := h*( ( b1*x2[i+1]*x3[i+1]*x4[i+1] + b2*(power(x2[i+1],3)) +

```

```

b3*(power(x2[i+1],5)) + b4*(power(x4[i+1],2))*x2[i+1] - b5*U[i+1]
+ b6*x3[i+1] - (power(w1,2))*x2[i+1] + b7*(power(x2[i+1],2))*
x3[i+1]*x4[i+1] + b8*U[i+1]*(power(x2[i+1],2)) - b9*
(power(x2[i+1],2))*x3[i+1] - b10*(power(x2[i+1],3))*
(power(x4[i+1],2)) + b11*(power(x3[i+1],2))*x2[i+1] - b12*
(power(x2[i+1],3))*(power(x3[i+1],2)) ) ) / ( 0.4420 - 0.7467*
(power(E,2))*(power(x2[i+1],2)) + 2.6786*(power(E,4))*
(power(x2[i+1],4)) ) ) ) ;

```

```

x4[i+1] := x4[i] + (h/24)*( (x4a) - 5*(x4b) + 19*(x4c) + 9*(x4d) ) ;

```

```

writeln(arq2,tempo[i], ' ',x1[i], ' ',x2[i] );

```

```

end;

```

```

{ close(arq1); }
close(arq2);
end.

```

A GLÓRIA de quem tudo, aos seus acenos,
Move o mundo penetra e resplandece,
Em umas partes mais em outras menos.

No céu onde sua luz mais aparece,
Portentos vi que referir, tornando,
Não sabe ou pode quem à terra desce.

Pois, ao excelso desejo se acercando,
A mente humana se aprofunda tanto
Que a memória se esvai, lembrar tentando.

Os tesouros, porém, do reino santo,
Que arrecadar-me pôde o entendimento,
Serão matéria agora do meu canto.

Dante Alighieri

A Divina Comédia, O Paraíso - Canto I

