



DANILO BELI

Análise Dinâmica de Anéis Girantes com uma Formulação de Elementos Espectrais

85/2013

CAMPINAS

2013



UNICAMP

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

DANILO BELI

Análise Dinâmica de Anéis Girantes com uma Formulação de Elementos Espectrais

Orientador: Prof. Dr. José Roberto de França Arruda

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO DANILO BELI
E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ
ROBERTO DE FRANÇA ARRUDA

ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

B412a Beli, Danilo, 1988-
Análise dinâmica de anéis girantes com uma formulação de elementos espectrais
/ Danilo Beli. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: José Roberto de França Arruda.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Anéis delgados. 2. Rotação. 3. Propagação de ondas. 4. Análise espectral.
5. Vibração. I. Arruda, José Roberto de França, 1954-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Dynamic analysis of rotating rings with a spectral element formulation

Palavras-chave em inglês:

Thin rings

Rotation

Wave propagation

Spectral analysis

Vibration

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

José Roberto de França Arruda [Orientador]

Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Domingos Alves Rade

Data de defesa: 30-07-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise Dinâmica de Anéis Girantes com uma Formulação de Elementos Espectrais

Autor: Danilo Beli

Orientador: José Roberto de França Arruda

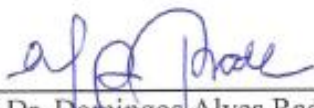
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente
FEM / UNICAMP



Prof. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini
FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Domingos Alves Rade
FEMEC / UFU

Campinas, 30 de Julho de 2013.

Agradecimentos

Agradeço às seguintes pessoas e agência que contribuíram para que este trabalho se concretizasse:

- À minha família, sempre presente, pelo incentivo e apoio.
- Ao Prof. Dr. José Roberto de França Arruda pela orientação, incentivo e dedicação a este projeto.
- Aos meus colegas do Departamento de Mecânica Computacional pelas discussões enriquecedoras ao trabalho e pelos bons momentos.
- Aos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica que ajudaram de forma direta e indireta.
- Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho deriva um elemento espectral para um segmento de anel rotativo com pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural baseado na teoria de viga curva de Euler-Bernoulli. As equações do movimento são deduzidas pelo Princípio de Hamilton Estendido. A formulação pode ser empregada no estudo de vibrações, por exemplo, de pneus, sensores, rolamentos e separadores centrífugos. A relação espectral (números de onda versus frequência), resposta livre (modos de flexão e extensão) e resposta forçada são obtidas. Os resultados são validados pela comparação com resultados obtidos pelo modelo em elementos finitos simulado em Ansys® e com a solução analítica para um anel uniforme. A força dinâmica rotativa é naturalmente derivada pelo Método dos Elementos Espectrais e empregada para calcular a resposta forçada. O efeito de rotação aparece como uma aceleração de Coriolis que causa a bifurcação das frequências naturais, como uma tensão induzida pela rotação que causa um aumento da rigidez do anel, e como um modo de corpo rígido. A pressão interna desloca os picos de ressonância para frequências mais altas fazendo o sistema mais rígido. A fundação elástica causa a bifurcação do modo de corpo rígido e também torna o sistema mais rígido. O amortecimento estrutural diminui a amplitude dos picos de ressonância sem modificar as frequências de ressonância. A inclusão de não uniformidades é feita pela inclusão de elementos com diferentes propriedades e é estudada em dois exemplos. A resposta para uma força estacionária é obtida com convergência verificada com o aumento do número de elementos que compõe o anel. Um modelo simples e computacionalmente eficiente é desenvolvido neste trabalho e pode ser utilizado para investigar a resposta livre e forçada de um anel rotativo com não uniformidades.

Palavras Chave: Anel rotativo, Elemento espectral, Propagação de ondas, Análise espectral, Não uniformidades.

Abstract

This work derives a spectral element for a rotating ring segment with internal pressure, elastic foundation and structural damping based on the Euler-Bernoulli curved beam theory. The equations of motion are derived by Extended Hamilton's Principle. The formulation can be employed in the vibrations study, for example, of tires, sensors, bearings and centrifugal separators. The spectrum relation (wavenumbers versus frequency), the free response (flexural and extensional modes) and the forced response are obtained. Results are validated by comparison with results from a Finite Element model simulated in Ansys® and with the analytical solution for a uniform ring. A rotating dynamic force is naturally derived for the Spectral Element Method and employed to compute the forced response. The rotating effect appears as Coriolis acceleration, which causes the bifurcation of the natural frequencies, as centrifugal hoop stress, which causes an increase of the ring stiffness, and as rigid body mode. The internal pressure shifts the resonance peaks to higher frequencies making the system more rigid. The elastic foundation causes the bifurcation of the rigid body mode and also makes the system stiffer. The structural damping decreases the amplitude of the resonance peaks without modifying the resonance frequencies. The inclusion of the non-uniformities is done by the elements with different properties and is studied in two examples. The response for a stationary force is obtained with convergence verified by increasing the number of elements that compose the ring. The simple and computationally efficient model developed in this work can be used to investigate the free and forced response of a rotating ring with non-uniformities.

Key Words: Rotating ring, Spectral element, Wave propagation, Spectral analysis, Non-uniformities.

Lista de Figuras

3.1	Elemento de anel rotativo com as forças envolvidas	11
3.2	Campo de deslocamentos na viga curva	12
3.3	Campo de deformações em coordenadas cilíndricas	13
3.4	Tensões tangenciais em um segmento de anel rotativo	16
3.5	Tensão em um anel sujeito à pressão interna	16
3.6	Pressão centrífuga em um anel devido à rotação	17
3.7	Velocidades em um segmento de anel rotativo e referenciais para o cálculo cinemático	18
4.1	Elemento espectral de anel rotativo	31
4.2	Sentido da propagação das ondas no elemento	33
4.3	Processo de montagem da matriz global de um anel com 4 elementos	36
4.4	Anel girante com carregamento dinâmico rotativo	37
4.5	Elemento espectral de anel rotativo com fundação elástica e pressão interna	39
4.6	Distribuição espacial de uma força na forma de sino	41
5.1	Modelo de anel rotativo: SEM (a) e FEM construído no Ansys® (b)	45
5.2	Localização da excitação e da resposta para o cálculo da resposta forçada	45
5.3	Relação espectral para anel estacionário (a,c) e para anel rotativo com $\Omega = 50$ rad/s (b,d)	46
5.4	Razão de amplitude para anel estacionário (a) e para anel rotativo com $\Omega = 50$ rad/s (b)	47
5.5	FRFs do anel estacionário (a) e do anel rotativo com $\Omega = 50$ rad/s (b)	48
5.6	Mapas das FRFs pela velocidade de rotação. Uma força aplicada (a) e duas forças opostas aplicadas (b)	49
5.7	Configuração das forças aplicadas. Uma força aplicada (a) e duas forças opostas aplicadas (b)	50

5.8	Formas modais de flexão para $\Omega=50$ rad/s. Modo de flexão: 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 5 (e) e 6 (f)	52
5.9	Formas modais de extensão para $\Omega=50$ rad/s. Modo de extensão: 1 (a), 2 (b) e 3 (c)	52
5.10	Pressão interna - Parte real (a) e imaginária (b) dos números de onda	53
5.11	FRF para análise de pressão interna	53
5.12	Mapa de FRF por Ω com $p_0 = 1$ bar (a) e mapa de FRF pela pressão interna com $\Omega = 50$ rad/s (b)	54
5.13	Fundação Elástica - Parte real (a) e imaginária (b) dos números de onda	56
5.14	FRF para análise da fundação elástica	56
5.15	Mapa da FRF por Ω com $k_w = k_u = 2.10^4$ N/m ³ (a) e mapa da FRF pela rigidez da fundação elástica com $\Omega = 50$ rad/s (b)	57
5.16	Amortecimento Estrutural - Parte real (a) e imaginária (b) dos números de onda	58
5.17	FRF para análise do amortecimento estrutural	58
5.18	Mapa de FRF por Ω com $\eta = 0.01$ (a) e mapa de FRF versus amortecimento estrutural com $\Omega = 50$ rad/s (b)	59
5.19	Modelos de anel rotativo com não uniformidades: quatro seções (a) e imperfeição local (b)	60
5.20	FRF para análise de um anel rotativo com quatro seções	61
5.21	FRF para análise de um anel rotativo com imperfeição local	61
5.22	Mapa de FRF pela pressão interna com $\Omega = 0$ rad/s para formulação da pressão interna por vaso de pressão (a) e corda elástica tensionada (b)	62
5.23	FRF para análise do tipo de formulação da pressão interna com $p_0 = 5$ bar	63
5.24	Comparação da resposta temporal para anel rotativo com força estacionária na forma de sino para diferentes números de elementos com $\Omega = 10$ rad/s (a), $\Omega = 50$ rad/s (b), $\Omega = 100$ rad/s (c) e $\Omega = 200$ rad/s (d)	65
5.25	Amplitude da resposta temporal pela velocidade de rotação do anel para anel composto por diferentes números de elementos	66
A.1	Resposta forçada pela solução analítica para velocidade de rotação constante com $\Omega = 0$ rad/s (a), $\Omega = 20$ rad/s (b) e $\Omega = 50$ rad/s (c)	79

A.2	Resposta forçada pela solução analítica para frequência de excitação constante com $f = 1$ Hz (a), $f = 100$ Hz (b) e $f = 10000$ Hz (c)	80
A.3	Mapa de frequência de excitação pela velocidade de rotação pelo máximo deslocamento radial utilizando a solução analítica. Anel rotativo com força estacionária (a) e anel estacionário com força rotativa (b)	81

Lista de Tabelas

1.1	Tabela comparativa das formas de modelagem	3
1.2	Tabela comparativa dos métodos de cálculo	3
5.1	Frequências de flexão (Hz) para $\Omega=50$ rad/s	51
5.2	Frequências de extensão (Hz) para $\Omega=50$ rad/s	51

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.2 Estrutura do Trabalho	4
2 Revisão Bibliográfica	6
2.1 Anéis Rotativos	6
2.2 Propagação de Ondas em Vigas Curvas	8
3 Equações do Movimento	10
3.1 Deformações e Tensões no Elemento	11
3.2 Pré-Tensões	16
3.3 Velocidades Relativas	18
3.4 Equações de Energia	20
3.4.1 Energia Potencial de Deformação	20
3.4.2 Energia Cinética	22
3.4.2 Energia Potencial devido à Fundação Elástica	22
3.4.3 Trabalho Virtual devido às Forças Externas	23
3.5 Equações do Movimento e Condições de Contorno	23
4 Método dos Elementos Espectrais	29
4.1 Formulação de um Elemento Espectral de Anel Rotativo	31
4.2 Inclusão da Pressão Interna, Fundação Elástica e Amortecimento Estrutural	38
4.3 Anel Girante com Força Estacionária	41

5 Resultados e Discussões	44
5.1 Efeitos da Rotação: Aceleração de Coriolis e Tensão Induzida pela Rotação	45
5.1.1 Relação Espectral	46
5.1.2 Resposta Forçada	47
5.1.3 Modos e Frequências Operacionais	50
5.2 Pressão Interna	53
5.3 Fundação Elástica	55
5.4 Amortecimento Estrutural	57
5.5 Não Uniformidades no Anel Girante	60
5.6 Pressão Interna – Vaso de Pressão e Corda Elástica	62
5.7 Anel Girante com Força Estacionária	64
6 Comentários e Conclusões	67
6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros	69
6.2 Trabalhos Publicados	69
6.3 Trabalhos Submetidos	70
Referências Bibliográficas	71
Anexo A Solução Analítica para Anel Homogêneo Girante	74
A.1 Modos e Frequências Naturais	74
A.2 Resposta Forçada	75
A.2.1 Anel Rotativo com Força Estacionária	76
A.2.2 Anel Estacionário com Força Rotativa	77
A.2.3 Resultados	78
Anexo B Elemento Espectral de Anel Estacionário com Pressão Interna	82
B.1 Equações do Movimento	82
B.2 Carregamento Móvel	83
B.3 Velocidade Crítica	83

1 INTRODUÇÃO

A análise de vibrações em estruturas é necessária, pois fornece dados fundamentais como modos e frequências naturais bem como a resposta a carregamentos dinâmicos que são levados em consideração na concepção de estruturas, na análise de falhas e na manutenção de máquinas, entre outros.

Na maioria das vezes deseja-se projetar sistemas que forneçam um menor nível de vibrações e ruído, pois desta maneira aumenta-se o conforto (exemplos: painéis acústicos, isolamento de prédios, absorvedores de vibração) e durabilidade de componentes (exemplos: rolamentos, máquinas). Ainda podem-se projetar componentes para operar com vibrações específicas (exemplo: instrumentos musicais).

Um estudo prévio da estrutura torna-se importante porque através dele os parâmetros mais influentes serão conhecidos, uma concepção ótima poderá ser realizada e determinadas predições poderão ser feitas. No passado, isto era feito por modelos simples e soluções analíticas empregando teorias de barras, vigas, eixos, placas, cascas, entre outros desenvolvidos por diversos autores (Soedel, 2004 e Inman, 2008).

Muitos destes modelos representam a física do problema e foram validados com experimentos, porém com a necessidade de calcular estruturas mais complexas e com o surgimento dos computadores, os métodos analíticos deram lugar aos métodos numéricos como elementos finitos e elementos de contorno.

O Método dos Elementos Finitos (FEM) é o mais empregado. Utiliza a discretização espacial para dividir uma estrutura complexa em estruturas finitas simples que são modeladas segundo as teorias de barras, vigas, placas, cascas e sólidos tridimensionais, e as matrizes globais são formadas por superposição das matrizes destes elementos. Porém, como utiliza funções de forma espaciais aproximadas, necessita de refinamento em altas frequências em estudos de vibrações e acústica, o que pode levar a modelos com custo computacional proibitivo.

Já o Método dos Elementos de Contorno (BEM), pelo conhecimento e discretização do contorno da estrutura consegue inferir o comportamento do domínio a partir de uma formulação integral das equações diferenciais parciais que governam o problema. A discretização apenas do contorno diminui o número de graus de liberdade do modelo, mas em contrapartida o modelo constitui-se de matrizes cheias em função da frequência. Para frequências mais elevadas é preciso refinar o modelo e o custo computacional também pode ser proibitivo.

Apesar de a teoria de propagação de ondas ter sido há muito tempo formulada, técnicas numéricas baseadas em propagação de ondas começaram a ser usadas mais recentemente, entre elas o Método dos Elementos Espectrais (SEM). O SEM é um método de elementos finitos na frequência que permite, de acordo com a teoria empregada, o cálculo exato em todas as faixas de frequência, além de ter um menor custo computacional, possibilitando seu uso em análises de otimização e de incertezas.

O trabalho apresentado situa-se neste contexto de desenvolvimento e aplicação de estruturas básicas, no presente caso um elemento de arco girante, para construção de estruturas mais complexas, como anéis rotativos, utilizando o Método dos Elementos Espectrais devido às suas vantagens.

Vibrações em anéis rotativos foram e ainda são tema de estudo de muitos autores. São utilizados na modelagem de pneus, sensores, rolamentos, ou quando é necessário calcular vibrações no plano de componentes aproximados por cilindros como turbinas, centrífugas, entre outras aplicações (Endo *et al.*, 1984).

A motivação para este desenvolvimento foi a análise de vibrações em pneus cujas principais causas são as imperfeições de massa, rigidez e geometria que surgem devido ao processo de fabricação, como também às emendas necessárias à montagem. As vibrações em pneus afetam o conforto vibratório e acústico dos passageiros nos veículos como também aceleram o desgaste e diminuem a durabilidade destes componentes.

As equações de movimento no plano de anéis girantes desenvolvidos pela teoria de Euler-Bernoulli foram apresentadas por Bickford e Reedy (1985). Huang e Soedel (1987a e 1987b) realizaram a solução analítica destas equações para o movimento livre e forçado com carregamento estacionário. Hoje softwares comerciais baseados em elementos finitos como Ansys® também permitem esta análise, porém com elevado custo computacional.

Outra forma de se tratar anéis rotativos com carregamento estacionário é deixar o anel estacionário e fazer com que o carregamento seja móvel. Isto foi feito de forma analítica por Huang e Soedel (1987a e 1987b), por elementos espectrais em Delamotte *et al.* (2008) e pode ser analisado por elementos finitos.

Huang e Soedel (1987a e 1987b) analisaram diferentes tipos de carregamento e concluíram que os problemas de anel girante com força estacionária e anel estacionário com força girante são equivalentes quando a velocidade de rotação é baixa ou quando a frequência de excitação é alta.

Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver um elemento espectral de arco girante para possibilitar o estudo de imperfeições em anéis rotativos. Nas Tabelas 1.1 e 1.2, comparam-se as vantagens e desvantagens das diferentes formas e métodos, existentes e propostos, de analisar o problema em questão.

Tabela 1.1 – Tabela comparativa das formas de modelagem.

Modelagem	Efeito de Rotação	Faixa de Rotação	Frequência Excitação
Anel Estacionário com Força Girante	Ausente	Baixas Velocidades	Altas Frequências
Anel Girante com Força Estacionaria	Presente	Qualquer Velocidade	Qualquer Frequência

Tabela 1.2 – Tabela comparativa dos métodos de cálculo.

Método	Precisão no Cálculo	Análise de Imperfeições	Geometria da Seção	Custo Computacional
Analítico	Todas as Frequências	Não Possível	Simples	Baixo
Elementos Finitos	Baixas Frequências	Possível	Complexa	Moderado
Elementos Espectrais	Todas as Frequências	Possível	Simples	Baixo

O efeito de rotação leva em consideração os termos de aceleração de Coriolis e tensão induzida pela rotação, que serão apresentados na formulação. O trabalho proposto possibilita o estudo exato de vibração livre e forçada em toda faixa de frequência e rotação, e a inclusão de

imperfeições a um baixo custo computacional, reunindo as vantagens dos métodos já existentes, porém a seção transversal dos elementos necessita ter geometria simples.

1.1 Objetivos

O trabalho tem como objetivos:

- Desenvolver um elemento espectral para um segmento de anel rotativo com pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural segundo a teoria de Euler-Bernoulli;
- Analisar os efeitos de rotação, pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural nas relações espectrais e nas respostas livre e forçada;
- Estudar as influências das imperfeições de geometria e de material no comportamento dinâmico do anel girante.

1.2 Estrutura do Trabalho

Uma revisão bibliográfica dos estudos realizados sobre anéis rotativos e métodos de propagação de ondas em vigas curvas é feita no Capítulo 2.

No Capítulo 3 a teoria de Euler-Bernoulli e o princípio de Hamilton são utilizados para deduzir as equações do movimento para um anel girante; nesta formulação o efeito da rotação aparece como uma tensão induzida pela rotação e como uma aceleração centrípeta. Pelo princípio de Hamilton, também são incluídos os efeitos de fundação elástica e pressão interna. O amortecimento estrutural é modelado como um termo imaginário na rigidez do material.

O mesmo procedimento empregado por Delamotte *et al.* (2008) para deduzir um elemento espectral de anel estacionário é utilizado para deduzir um elemento espectral de anel girante no Capítulo 4. Impõe-se uma solução por ondas, encontra-se a relação espectral, calcula-se a razão

de amplitude entre as ondas de flexão e extensão para simplificar o problema, escrevem-se os deslocamentos e as forças externas em função das constantes da solução de flexão, por fim relacionam-se as forças externas do elemento com os deslocamentos no domínio da frequência. Com esta formulação deduz-se um elemento espectral de anel rotativo com força girante; então, é apresentado um equacionamento para obter a resposta a uma força estacionária.

Os resultados são apresentados no Capítulo 5 na forma de relação espectral, resposta livre e forçada, estudam-se suas variações em função da rotação do anel, fundação elástica, pressão interna e amortecimento. A formulação desenvolvida é validada através da comparação com as respostas livre e forçada pelo método dos elementos finitos utilizando o software comercial Ansys® e pela solução analítica apresentada no Apêndice A. Finalmente, são realizados estudos de imperfeições e não uniformidades conhecidas, comparação de formulação da pressão interna e análise de força estacionária.

No Capítulo 6 estão as conclusões, as propostas de trabalhos futuros e os trabalhos publicados durante a dissertação.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão bibliográfica do desenvolvimento da teoria, estudos e aplicações de anéis rotativos, bem como do método de propagação de ondas aplicado a vigas curvas estáticas e rotativas.

2.1 Anéis Rotativos

Endo *et al.* (1984) compararam dados experimentais com os analíticos de vibrações no plano de anéis girantes obtendo resultados representativos para frequências naturais em função da rotação. Nas equações foram considerados os efeitos de tensão centrípeta induzida e o de Coriolis, termos que foram incorporados por Bickford e Reedy (1985) no equacionamento.

Um modelo de anel rotativo bidimensional foi procurado por muitos autores, tendo sido apresentada uma versão por Bickford e Reedy (1985) que é muito utilizada para representar o fenômeno quando necessário. Este modelo parte da teoria de viga curva de Euler-Bernoulli, da cinemática de partículas, da teoria de vasos de pressão e do princípio de Hamilton para deduzir as equações do movimento. Eles consideraram a deformação por cisalhamento e a inércia de rotação e concluíram que estes efeitos são importantes para altas velocidades de rotação e para modos de flexão de alta ordem. O modelo é aplicado apenas para anéis homogêneos.

Huang e Soedel (1987a e 1987b) aplicaram as equações de Bickford e Reedy (1985) sem considerar o efeito de cisalhamento e inércia rotacional para obter a resposta livre e forçada analítica de anéis estacionários com forças rotativas e de anéis rotativos com forças estacionárias a fim de saber se os problemas eram equivalentes. Eles analisaram diferentes tipos de carregamento e concluíram que os problemas de estudo são equivalentes quando a velocidade de rotação é baixa ou quando a frequência de excitação é alta.

Estendendo a teoria de anéis para cilindros e utilizando o método da expansão modal, Huang e Hsu (1990) estudam o fenômeno de ressonância em cilindros rotativos sujeitos a carregamento móvel harmônico. Concluem que a rotação do cilindro leva a instabilidade no primeiro modo, correspondente ao *forward whirl* (movimento circular no sentido da rotação) e que o carregamento móvel sobre o cilindro rotativo funciona como um carregamento harmônico estacionário.

Huang e Hsu (1992) incluem suspensão no modelo de anel rotativo apresentado por Huang e Soedel (1987b), desenvolvem e resolvem as equações possibilitando o cálculo da resposta de vibração na suspensão para o desenvolvimento de pneus automotivos. A força transmitida na suspensão tem grande influencia da rotação, sendo reduzida com aumento da velocidade de rotação. A rotação juntamente com o amortecimento pode criar zonas de instabilidade no sistema pneu-roda-suspensão.

Uma metodologia de cálculo da resposta livre de anéis com imperfeições é feita por Hwang *et al.* (1999). A metodologia não inclui os efeitos da rotação, porém apresenta como incluir imperfeições através de uma função que varia a circunferência do anel. O trabalho é aplicado no desenvolvimento de sensores inerciais em que o nível de vibração é sensível às imperfeições que devem ser controladas para obter a operação desejada.

Eley *et al.* (2000) derivam as equações do movimento para investigar um anel rotativo com rotação simultânea nos três eixos coordenados, no plano e fora dele. Analisam que o efeito centrípeto pode ser negligenciado e que o acoplamento de Coriolis é predominante sobre o comportamento vibratório. O trabalho é empregado para projetar sensores de baixo custo.

A resposta livre dentro e fora do plano de anéis rotativos também é investigada por Kim e Chung (2002). Eles utilizam a teoria de deformação de Lagrange e o princípio de Hamilton para derivar as equações do movimento, os deslocamentos dentro e fora do plano são acoplados. Consideram na deformação e tensão radial a não linearidade geométrica, não levada em conta por Eley *et al.* (2000), pois ela é importante para descrever o efeito de enrijecimento do anel devido à rotação.

Forbes e Randall (2008) analisam ressonâncias em anéis estacionários sujeitos a carregamentos móveis, as equações são as mesmas utilizadas por Huang e Soedel (1987b). Estudam carregamentos nos quais há variação de posição, fase e distribuição para modelar as cargas que agem sobre o estator das turbinas devido à operação.

2.2 Propagação de Ondas em Vigas Curvas

Narayanan e Beskos (1978) calculam a matriz de rigidez dinâmica de elementos de viga através da transformada de Fourier, relacionando as forças e deslocamentos do elemento no domínio da frequência. A matriz de rigidez global é formada pela superposição das matrizes elementares, permitindo analisar a vibração da estrutura. Foram dos primeiros a empregar esta metodologia que é muito parecida com o SEM atual.

O SEM foi definido por Patera (1984) em um trabalho de mecânica de fluidos como sendo um método que combina a generalidade do método dos elementos finitos com a precisão das técnicas espectrais.

Doyle (1997) sistematiza o cálculo de vibrações em estruturas como barras, vigas, eixos, dutos, dentre outros, pelo SEM. Impõe uma solução por onda nas equações diferenciais que governam o movimento do elemento, obtendo a relação espectral. Após isto relaciona as forças e deslocamentos no domínio da frequência para encontrar a matriz de rigidez dinâmica do elemento que será utilizada para formar a matriz global. A transformação dos resultados do domínio da frequência para o tempo pode ser feito aplicando a transformada de Fourier.

A solução de vigas curvas não rotativas por propagação de ondas foi abordado por Kang *et al.* (2003) que analisam vibrações livres em diversos suportes. A formulação permite incluir diversas descontinuidades como massas interligadas à estrutura, suportes elásticos e mudança de curvatura. A matriz de transferência do elemento é deduzida a partir das matrizes de transmissão e reflexão em suporte genérico, a matriz global é formada pela multiplicação das matrizes elementares. Seguindo este trabalho, Riedel e Kang (2006) analisam como a rigidez dos suportes elásticos, variação na localização da descontinuidade e diferenças de curvatura afetam a resposta livre de estruturas curvas.

Lee *et al.* (2007) também estudaram vigas curvas estacionárias com curvatura constante utilizando a teoria de propagação, transmissão e reflexão de ondas. As equações diferenciais se baseiam na teoria de Flügge e possuem poucas diferenças em relação à teoria de viga curva de

Euler Bernoulli. As relações espectrais são obtidas e apresenta-se como separar os números de onda que se propagam em direções contrárias. Um exemplo de estrutura em “U” que associa o elemento de viga curva com o de viga reta é analisado.

Delamotte *et al.* (2008) desenvolveram um modelo por elementos espectrais de um anel estacionário de Euler Bernoulli com força girante para simular vibrações em pneus e prever velocidades críticas. A inserção da pressão interna é feita pela teoria de tensão em corda elástica. Santos (2010) incluiu fundação elástica na modelagem de Delamotte *et al.* (2008) pela soma dos valores de rigidez da fundação na matriz de rigidez dinâmica e estudou como as imperfeições do pneu afetam o conforto vibracional do veículo através de uma análise estocástica.

Huang *et al.* (2013) calculam a resposta livre de um anel rotativo não homogêneo por propagação de ondas usando matrizes de transmissão e reflexão. São os primeiros a empregar métodos de propagação de ondas nas equações de movimento de Huang e Soedel (1987a e 1987b). As relações espectrais que antes eram simétricas para o problema sem rotação são assimétricas para o anel com rotação.

3 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Para formular um elemento espectral de anel rotativo é necessário descrever as equações do movimento do mesmo e aplicar uma solução por ondas. Neste capítulo, mostram-se os detalhes de como as equações do movimento de elemento de anel rotativo baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli são encontradas pelo princípio de Hamilton.

O princípio de Hamilton é um princípio de minimização aplicável em toda mecânica e na maioria da física clássica. É muito utilizado na dedução de equações que descrevem o comportamento vibratório de sistemas contínuos como barras, vigas, eixos, entre outros. Teoricamente há várias maneiras de um sistema dinâmico se mover de um ponto a outro no espaço e tempo, mas na verdade o sistema segue um movimento que minimiza a integral no tempo da diferença entre a energia potencial e cinética; é isto que o Princípio de Hamilton postula. Este pode ser estendido para englobar sistemas sujeitos a forças não conservativas, então podemos obter equações do movimento do anel girante pelo Princípio de Hamilton Estendido (Craig e Kurdila, 2006) dado pela Eq. (3.1).

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_{cin} - E_{pot}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3.1)$$

Desta forma é necessário encontrar as energias cinética (E_{cin}), potencial (E_{pot}) e o trabalho virtual devido às forças não conservativas (δW_{nc}) envolvidas no sistema considerado, ou seja, no elemento. As forças externas, carregamentos e os outros componentes presentes no segmento de anel rotativo em questão, bem como seu sistema de coordenadas, podem ser vistos na Fig. 3.1, onde w e u são os deslocamentos radial e tangencial em relação à linha neutra, Ω é a velocidade de rotação, V é a força cortante, T é a força normal, M é o momento flexor, q_w e q_u são os carregamentos radial e tangencial, R é o raio, s_0 é o comprimento angular do elemento, s é a coordenada angular, p_0 é a pressão interna, k_w e k_u são as rigidezes radial e tangencial das molas que compõe a fundação elástica.

O segmento é homogêneo na direção s . Possui área da seção transversal retangular (A), também homogênea, composta pela multiplicação de sua altura (h) por sua largura (b), dimensão fora do plano.

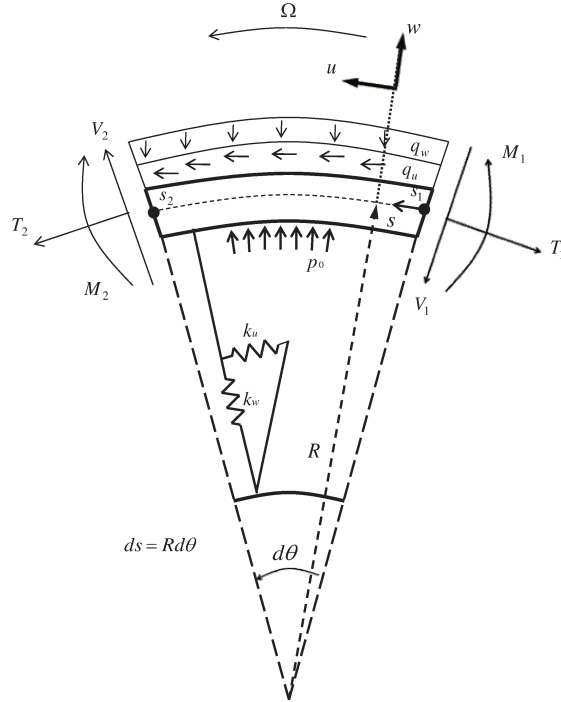


Figura 3.1 – Elemento de anel rotativo com as forças envolvidas.

3.1 Deformações e Tensões no Elemento

O campo de deslocamentos para uma viga curva no plano apresentada na Fig. 3.2 é expresso no sistema de coordenadas cilíndrico sob a consideração de que seções planas permanecem planas depois da deformação (teoria de Euler-Bernoulli). Tomam-se como hipóteses também que a viga é esbelta, ou seja, a altura da seção transversal é muito menor que o raio do anel. A deformação de cisalhamento assim como o *warping* devido à torção da seção transversal é negligenciável. Então, os deslocamentos em um ponto r e θ podem ser descritos por:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, \theta, t) = w(\theta, t) = w \\ u_\theta &= u_\theta(r, \theta, t) = u(\theta, t) + \alpha_3 \phi(\theta, t) = u + \alpha_3 \phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Onde α_3 indica a posição radial em relação à superfície de referência, neste caso é a linha neutra. w e u são os deslocamentos radial e tangencial em relação à linha neutra e ϕ é o ângulo de rotação:

$$\phi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \quad (3.3)$$

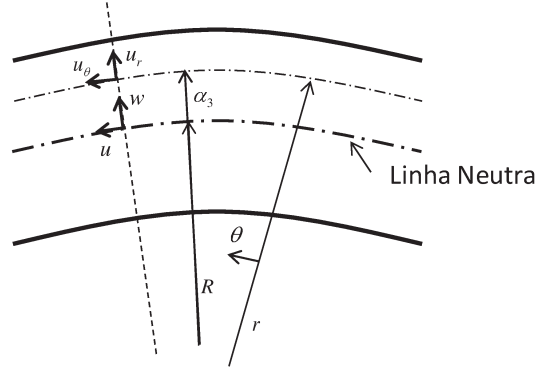


Figura 3.2 – Campo de deslocamentos na viga curva.

Como o anel se deforma e tem um movimento de corpo rígido devido à rotação, não linearidades geométricas estão presentes e devem ser inseridas na formulação. Estas são descritas pela Teoria de Deformação Finita de Lagrange (Lai *et al.*, 1999) que relaciona as não linearidades entre as deformações e os deslocamentos. Para um anel girante, estas não linearidades estão relacionadas com o efeito de enrijecimento do anel devido à rotação (Kim e Chung, 2002). Para Huang e Soedel (1987a), estes termos são mantidos para levar em conta os efeitos de tensão inicial em superposição com as deformações.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla l + (\nabla l)^T] + \frac{1}{2} (\nabla l)^T \nabla l \quad (3.4)$$

Em que o gradiente dos deslocamentos em coordenadas cilíndricas (Lai *et al.*, 1999) é:

$$\nabla l = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Como as deformações do anel ocorrem no plano, temos:

$$\nabla l = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & 0 \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. (3.6) na Eq. (3.4), obtemos as deformações em coordenadas cilíndricas (Eq. (3.7) e Fig. 3.3).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right] \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} &= 0 \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} \end{aligned} \quad (3.7)$$

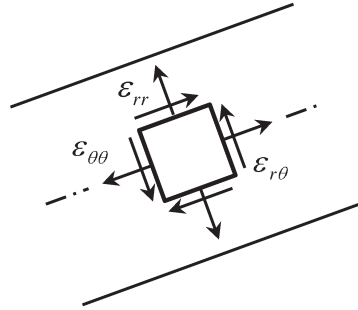


Figura 3.3 – Campo de deformações em coordenadas cilíndricas.

Onde ε_{rr} é a deformação radial, $\varepsilon_{\theta\theta}$ é a deformação tangencial e $\varepsilon_{r\theta}$ a deformação relativa ao cisalhamento. Define-se a seguinte notação:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

Substituindo os deslocamentos (Eq. 3.2) nas deformações (Eq. 3.7) e utilizando a notação da Eq. (3.8), chega-se à Eq. (3.9) (Bickford e Reedy, 1985) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= 0 \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u' + \alpha_3 \phi' + w}{R + \alpha_3} + \frac{(w + u' + \alpha_3 \phi')^2 + (w' - u - \alpha_3 \phi)^2}{2(R + \alpha_3)^2} \\
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{w' - u - \alpha_3 \phi}{2(R + \alpha_3)}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pela hipótese de viga esbelta $\alpha_3 \ll R$, temos as mesmas equações de Huang e Soedel (1987a):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= 0 \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u' + w}{R} + \alpha_3 \frac{u' - w''}{R^2} + \frac{(w + u')^2 + (w' - u)^2}{2R^2} = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \alpha_3 K_\theta + \frac{(w + u')^2 + (w' - u)^2}{2R^2} \\
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2R} (w' - u - \alpha_3 \phi)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

O termo $\varepsilon_{\theta\theta}^0$ refere-se à tensão de membrana, K_θ à mudança de curvatura devida ao efeito de flexão e está relacionada com o ângulo de rotação ϕ . O último termo da equação $\varepsilon_{\theta\theta}$ é um termo não linear que é mantido com o intuito de considerar as componentes de forças devido à tensão no anel. Esta tensão tem uma componente que é gerada pelas forças centrífugas, em altas velocidades quando o anel é retirado do equilíbrio é um importante mecanismo de restauração.

Será necessário utilizar a deformação tangencial elevada à segunda potência, então seu calculo é feito:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta\theta}^2 &= \frac{u'^2 + 2u'w + w^2}{R^2} + 2\alpha_3 \frac{u'^2 + wu' - w''u' - w''w}{R^3} + \alpha_3^2 \frac{u'^2 - 2u'w'' + w'^2}{R^4} \\
&+ 2 \frac{(u'w^2 + 2u'^2w + u'^3 + u'w'^2 - 2uu'w' + u'u^2 + w^3 + 2u'w^2 + wu'^2 + ww'^2 - 2uww' + wu^2)}{2R^3} + \\
&+ 2\alpha_3 \frac{u'w^2 + 2u'^2w + u'^3 + u'w'^2 - 2uu'w' + u'u^2}{2R^4} + \\
&+ 2\alpha_3 \frac{-w''w^2 - 2u'ww'' - w''w'^2 - u'^2w'' + 2uw'w'' - w''u^2}{2R^4} + \\
&+ \frac{w^4 + w^2(2u'w + u'^2 + w'^2 - 2uw' + u^2) + 4u'^2w^2 + 2u'w(w^2 + u'^2 + w'^2 - 2uw' + u^2)}{4R^4} + \\
&+ \frac{u'^4 + u'^2(w^2 + 2u'w + w'^2 - 2uw' + u^2) + w'^4(w^2 + 2u'w + u'^2 - 2uw' + u^2)}{4R^4} + \dots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Desconsiderando os termos de ordem mais elevada chegamos à:

$$\varepsilon_{\theta\theta}^2 = \frac{u'^2 + 2u'w + w^2}{R^2} + 2\alpha_3 \frac{u'^2 + wu' - w''u' - w''w}{R^3} + \alpha_3^2 \frac{u'^2 - 2u'w'' + w''^2}{R^4} \quad (3.12)$$

Assumindo que o material é linear, elástico, isotrópico e Hookeano (Kim e Chung, 2002) obtemos pelas leis constitutivas as relações entre as deformações e as tensões em coordenadas polares (Lai et al., 1999), considerando apenas as deformações no plano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2E_G} \sigma_{r\theta} \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Com o módulo de Young (E), módulo de cisalhamento (E_G) e as tensões (σ_{ij} com $i, j = r, \theta, z$). Por hipótese trabalhamos com a Teoria de Euler-Bernoulli, então o coeficiente de Poisson (ν) é negligenciado.

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E}; \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}; \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{E_G}; \quad \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.14)$$

Neste caso a pressão interna e pressão induzida pela rotação aparecerão como termos de tensão induzida ou pré-tensão (σ_{θ}^i). Como a viga é curva e a pré-tensão é normal à área da seção transversal, ela aparecerá na formulação como uma contribuição na tensão tangencial (Pariseau, 2012). A tensão induzida é dada pela soma da contribuição relativa à rotação ($\sigma_{\theta R}^i$) com a da pressão interna ($\sigma_{\theta p_0}^i$). Os detalhes de como são obtidas são mostrados na Seção 3.2.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^T - \sigma_{\theta}^i \quad \text{com} \quad \sigma_{\theta}^i = \sigma_{\theta R}^i + \sigma_{\theta p_0}^i \quad (3.15)$$

Assim:

$$\sigma_{\theta\theta}^T = E\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta}^i; \quad \sigma_{rr} = E\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{r\theta} = E_G\gamma_{r\theta}; \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.16)$$

Na Fig. 3.4 mostram-se a relação da tensão total ($\sigma_{\theta\theta}^T$) com a deformação no elemento, enquanto $\sigma_{\theta\theta}$ varia com a deformação, σ_{θ}^i permanece constante (Eq. (3.17)).

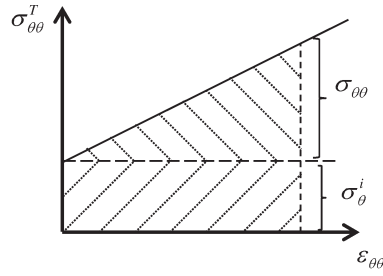


Figura 3.4 – Tensões tangenciais em um segmento de anel rotativo.

3.2 Pré-Tensões

A pressão interna provoca uma tensão tangencial inicial ($\sigma_{\theta\theta}^i$) perpendicular à área da seção transversal. Esta pré-tensão é deduzida como feito na teoria de vasos de pressão de parede fina (Hearn, 1997). Na Fig. 3.5 temos um anel cortado sujeito à pressão interna.

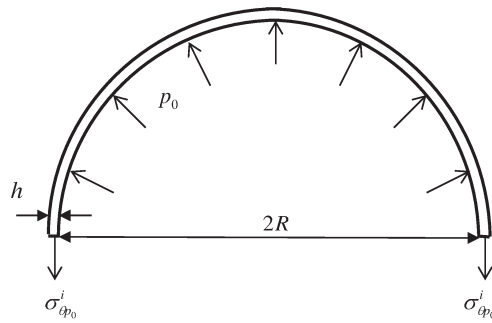


Figura 3.5 – Tensão em um anel sujeito à pressão interna.

Dividimos o anel para obtermos o diagrama de corpo livre e assim relacionar a tensão radial com a pressão interna. Como aos valores da tensão serão iguais em todos os pontos circunferenciais, podemos para simplificar os cálculos utilizar metade de um anel.

Sendo o comprimento longitudinal (b), a força nesta parte do cilindro devido à pressão interna é:

$$F_{p_0} = p_0 \text{Area Pr ojetada} = p_0 2Rb \quad (3.17)$$

A força de resistência do material devido à tensão induzida nas paredes do cilindro é:

$$F_{\sigma_{\theta}} = 2\sigma_{\theta}^i hb \quad (3.18)$$

Igualando a Eq. (3.17) com a Eq. (3.18), encontramos a tensão devida à pressão interna.

$$\sigma_{\theta}^i = \frac{p_0 R}{h} \quad (3.19)$$

A rotação induz uma pressão p_R devida ao efeito centrífugo próprio da massa em rotação (Hearn, 1997), esta é também perpendicular à área da seção transversal. Como realizado anteriormente, obtém-se o diagrama de corpo livre de metade de um anel para o cálculo da tensão devida à rotação, desta forma aparecem às forças na seção transversal do segmento de anel (F_R) em equilíbrio à p_R . O esquema das forças envolvidas pode ser visualizado na Fig. 3.6.

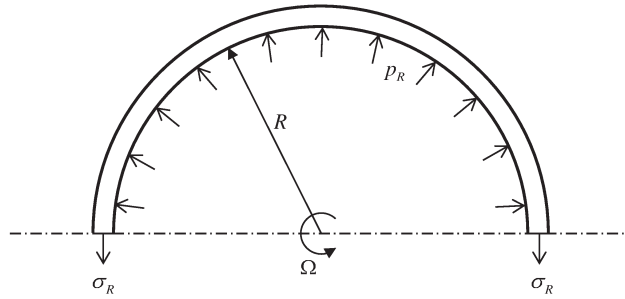


Figura 3.6 – Pressão centrífuga em um anel devido à rotação.

O efeito centrífugo por unidade de comprimento circunferencial é:

$$p_R = mR\Omega^2 \quad (3.20)$$

Realizando o equilíbrio de forças em metade do cilindro.

$$2\sigma_R = p_R 2R \Rightarrow \sigma_R = p_R R \quad (3.21)$$

Substituindo a Eq. (3.20) na Eq. (3.21), obtemos a tensão centrífuga por unidade de comprimento circunferencial.

$$\sigma_R = mR^2\Omega^2 \quad (3.22)$$

Então, podemos obter a tensão induzida pela rotação dividindo esta tensão pela área da seção transversal (A).

$$\sigma_{\theta R}^i = \frac{\sigma_R}{A} = \frac{m\Omega^2 R^2}{A} = \rho R^2 \Omega^2 \quad (3.23)$$

Pela Eq. (3.23), a tensão induzida pela rotação será maior à medida que a velocidade de rotação aumenta.

3.3 Velocidades Relativas

As velocidades relativas de um ponto da viga são encontradas através do movimento relativo utilizando a cinemática de partículas. Na Fig. 3.7 temos as variáveis envolvidas e um esboço do problema. O sistema de coordenadas xy é fixo, o sistema x_1y_1 é móvel com velocidade angular Ω em torno do eixo z e localizado no centro de rotação (O). A distância da linha neutra ao centro de rotação é dada pelo raio do anel, R .

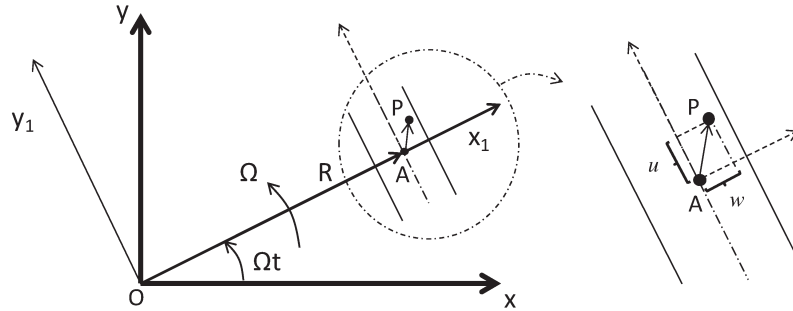


Figura 3.7 – Velocidades em um segmento de anel rotativo e referenciais para o cálculo cinemático.

Um ponto A sobre a linha neutra se desloca para um ponto P com coordenadas $\{R+w, u, 0\}$ e velocidade $\{\dot{w}, \dot{u}, 0\}$ em relação ao sistema x_1y_1 . As velocidades e acelerações do ponto P irão ser modificadas pela velocidade angular do anel, Ω .

Pela cinemática de partículas, a velocidade no ponto desejado em relação ao sistema de coordenadas fixo pode ser obtida por (Santos, 2001):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} + (\vec{v}_{P(x_1y_1)})_{xy} \quad (3.24)$$

Sendo \vec{v}_P a velocidade linear absoluta do ponto P representada no sistema fixo, \vec{v}_O a velocidade linear absoluta do sistema móvel escrita no sistema de coordenadas fixo, $\tilde{\omega}$ a matriz de velocidades angulares absoluta do sistema de referência móvel em relação ao sistema fixo e $(\vec{v}_{P(x_1, y_1)})_{xy}$ a posição do ponto P em relação ao sistema móvel representada no sistema de coordenadas fixo.

Como há apenas rotação em torno do eixo z , temos uma única matriz de transformação de coordenadas do sistema fixo para o móvel que se traduz na matriz S_I , a partir desta define-se a matriz de velocidades angulares absoluta.

$$S_I = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\omega} = \dot{S}_I S_I^t = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Os termos de posição e velocidade do ponto P em relação ao sistema móvel descrito no sistema de coordenadas fixo são:

$$\vec{OP} = S_I \vec{OP}_{(x_1, y_1)} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R + w \\ u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R + w) \cos(\Omega t) - u \sin(\Omega t) \\ (R + w) \sin(\Omega t) + u \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$(\vec{v}_{P(x_1, y_1)})_{xy} = S_I \vec{v}_{P(x_1, y_1)} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w} \cos(\Omega t) - \dot{u} \sin(\Omega t) \\ \dot{w} \sin(\Omega t) + \dot{u} \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Substituindo as Eqs. (3.25), (3.26) e (3.27) na Eq. (3.24) têm-se a velocidade absoluta escrita no sistema de coordenadas fixo.

$$\vec{v}_P = \begin{bmatrix} -(R + w)\Omega \sin(\Omega t) - u\Omega \cos(\Omega t) + \dot{w} \cos(\Omega t) - \dot{u} \sin(\Omega t) \\ (R + w)\Omega \cos(\Omega t) - u\Omega \sin(\Omega t) + \dot{w} \sin(\Omega t) + \dot{u} \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Porém, é necessário descrever a velocidade da partícula em relação ao sistema móvel, pois as equações são deduzidas no referencial do elemento, ou seja, referencial girante.

$$\vec{v}_{P(x_1, y_1)} = \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix} = S_I^t \vec{v}_P = \begin{bmatrix} \dot{w} - u\Omega \\ \dot{u} + (R + w)\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad e \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.29)$$

Na Eq. (3.29) há apenas duas componentes da velocidade, o que está de acordo com a formulação, pois o movimento ocorre no plano.

3.4 Equações de Energia

3.4.1 Energia Potencial de Deformação

Corresponde ao termo de energia armazenada no material quando ocorre uma deformação elástica. A energia de deformação pode ser escrita pela Eq. (3.30).

$$E_{pot} = \iiint_{Vol} \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dVol \quad \text{com } i, j = r, \theta, z \quad (3.30)$$

Expandindo a equação para deixá-la com integrador em θ :

$$E_{pot} = \int_{s_1}^{s_2} \int_A \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dA ds = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dA d\theta \quad (3.31)$$

Integrando a relação tensão-deformação utilizando a Eq. (3.14) obtemos a Eq. (3.32) como em Bickford e Reedy (1985).

$$E_{pot} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \sigma_{\theta}^i \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1}{2} E \varepsilon_{rr}^2 + \frac{1}{2} E_G \gamma_{r\theta}^2 \right) dA d\theta \quad (3.32)$$

A deformação radial é nula e a deformação por cisalhamento é negligenciada. Assim, como apresentado em Huang e Soedel (1987a), temos:

$$E_{pot} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \sigma_{\theta}^i \varepsilon_{\theta\theta} \right) dA d\theta \quad (3.33)$$

A integral acima será dividida em duas partes para facilitar a integração e a manipulação algébrica. A primeira (E_{pot1}) devida às propriedades do material e a segunda (E_{pot2}) devida à tensão induzida ou pré-tensão.

A primeira integral (E_{pot1}):

$$E_{pot1} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \frac{1}{2} E \varepsilon_{\theta\theta}^2 dA d\theta = \frac{1}{2} RE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \varepsilon_{\theta\theta}^2 dA d\theta \quad (3.34)$$

Substituindo a deformação tangencial elevada à segunda potência (Eq. 3.12) sem considerar os termos de alta ordem, temos:

$$E_{pot1} = \frac{1}{2} RE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \left(\frac{u'^2 + 2u'w + w^2}{R^2} + 2\alpha_3 \frac{u'^2 + wu' - w''u' - w''w}{R^3} + \alpha_3^2 \frac{u'^2 - 2u'w'' + w''^2}{R^4} \right) dA d\theta \quad (3.35)$$

Realizando a integral em relação à área da seção transversal:

$$E_{pot1} = \frac{1}{2} RE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(A \frac{u'^2 + 2u'w + w^2}{R^2} + 2A\alpha_{dist} \frac{u'^2 + wu' - w''u' - w''w}{R^3} + I \frac{u'^2 - 2u'w'' + w''^2}{R^4} \right) d\theta \quad (3.36)$$

Sendo a área da seção transversal, A , o primeiro momento de inércia de área, $A\alpha_{dist}$, e o segundo momento de inércia de área, I . Neste caso, como o centroide da seção está situado sobre a linha neutra que define o eixo coordenado, o primeiro momento de área é nulo.

$$E_{pot1} = \frac{1}{2} RE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(A \frac{u'^2 + 2u'w + w^2}{R^2} + I \frac{u'^2 - 2u'w'' + w''^2}{R^4} \right) d\theta \quad (3.37)$$

A segunda integral (E_{pot2}):

$$E_{pot2} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A (\sigma_{\theta}^i \varepsilon_{\theta\theta}) dA d\theta \quad \text{com} \quad \sigma_{\theta}^i = \sigma_{\theta R}^i + \sigma_{\theta p_0}^i = \rho R^2 \Omega^2 + \frac{p_0 R}{h} \quad (3.38)$$

Substituindo a deformação tangencial (Eq. 3.10):

$$E_{pot2} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_A \sigma_{\theta}^i \left(\frac{u' + w}{R} + \alpha_3 \frac{u' - w''}{R^2} + \frac{w^2 + 2u'w + u'^2 + w'^2 - 2uw' + u^2}{2R^2} \right) dA d\theta \quad (3.39)$$

Realizando a integral em relação à área da seção transversal:

$$E_{pot2} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_{\theta}^i \left(A \frac{u' + w}{R} + A\alpha_{dist} \frac{u' - w''}{R^2} + A \frac{w^2 + 2u'w + u'^2 + w'^2 - 2uw' + u^2}{2R^2} \right) d\theta \quad (3.40)$$

Como o primeiro momento de área é nulo:

$$E_{por2} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_{\theta}^i A \left(\frac{u' + w}{R} + \frac{w^2 + 2u'w + u'^2 + w'^2 - 2uw' + u^2}{2R^2} \right) d\theta \quad (3.41)$$

3.4.2 Energia Cinética

Para um anel estacionário, a energia cinética ocorre devida à vibração da estrutura. No anel girante, a velocidade do elemento devido à vibração é modificada pela rotação como já demonstrado, sendo que a sua energia cinética é dada pela Eq. (3.42).

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \iiint_{Vol} \rho (v_r^2 + v_{\theta}^2 + v_z^2) dVol \quad (3.42)$$

Como o movimento acontece no plano, v_z é nulo. Expandindo a equação para deixá-la com integrador em θ , temos equação de energia cinética na mesma forma apresentada em Huang e Soedel (1987a):

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho R A (v_r^2 + v_{\theta}^2) d\theta \quad (3.43)$$

Então:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho R A [\dot{w}^2 - 2u\dot{w}\Omega + u^2\Omega^2 + \dot{u}^2 + 2(R + w)\dot{u}\Omega + (R^2 + 2Rw + w^2)\Omega^2] d\theta \quad (3.44)$$

3.4.3 Energia Potencial devido à Fundação Elástica

A fundação elástica é composta pelas rigidezes radial e tangencial, neste caso elas são dependentes da área da superfície do segmento em que estão conectadas, possuindo a dimensão de N/m^3 . A energia potencial é então obtida integrando a energia da mola em relação á superfície do anel ($dA_{cil} = bds$), de Huang e Soedel (1987a):

$$\begin{aligned}
E_{pot3} &= \int \int_{A_{cil}} \left(\frac{1}{2} k_w w^2 + \frac{1}{2} k_u u^2 \right) dA_{cil} \\
E_{pot3} &= \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{1}{2} b k_w w^2 + \frac{1}{2} b k_u u^2 \right) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{2} b k_w w^2 + \frac{1}{2} b k_u u^2 \right) R d\theta
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.4.4 Trabalho Virtual devido às Forças Externas

As forças externas envolvidas na modelagem do anel em questão são o carregamento e as forças nas extremidades do elemento, sendo seu trabalho virtual computado abaixo. O carregamento é integrado sobre a superfície do segmento de anel assim como acontece com a fundação elástica, possuindo a dimensão de N/m².

$$\begin{aligned}
\delta W_{NC} &= \int_{s_1}^{s_2} (b q_w(s, t) \delta w + b q_u(s, t) \delta u) ds - V_2 \delta w(s_2, t) + V_1 \delta w(s_1, t) + \\
&\quad - M_2 \delta w'(s_2, t) + M_1 \delta w'(s_1, t) - T_2 \delta u(s_2, t) + T_1 \delta u(s_1, t)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Realizamos a transformação da coordenada s para a coordenada θ .

$$\begin{aligned}
\delta W_{NC} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b q_w(\theta, t) \delta w + b q_u(\theta, t) \delta u) R d\theta - V_2 \delta w(\theta_2, t) + V_1 \delta w(\theta_1, t) + \\
&\quad - M_2 \frac{\delta w'(\theta_2, t)}{R} + M_1 \frac{\delta w'(\theta_1, t)}{R} - T_2 \delta u(\theta_2, t) + T_1 \delta u(\theta_1, t)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Simplificando a notação:

$$\delta W_{NC} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b q_w \delta w + b q_u \delta u) R d\theta - V_2 \delta w_2 + V_1 \delta w_1 - \frac{M_2}{R} \delta w'_2 + \frac{M_1}{R} \delta w'_1 - T_2 \delta u_2 + T_1 \delta u_1 \tag{3.48}$$

3.5 Equações do Movimento e Condições de Contorno

Inserindo os termos de variação de energia obtidos a partir das Eqs. (3.37), (3.41), (3.44) e

(3.45), e o termo de trabalho virtual (3.48) no Princípio de Hamilton Estendido Eq. (3.1), temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\begin{aligned} & \rho R A \left(\dot{w} \delta \dot{w} - u \Omega \delta \dot{w} - \dot{w} \Omega \delta u + u \Omega^2 \delta u + \dot{u} \delta \dot{u} + \right. \\ & \quad \left. (R + w) \Omega \delta \dot{u} + \dot{u} \Omega \delta w + R \Omega^2 \delta w + w \Omega^2 \delta w \right) + \\ & \quad - \frac{EA}{R} (u' \delta u' + u' \delta w + w \delta u' + w \delta w) \\ & \quad - \frac{EI}{R^3} (u' \delta u' - u' \delta w'' - w'' \delta u' + w'' \delta w') - \sigma_{\theta}^i A (\delta u' + \delta w) \\ & \quad - \frac{\sigma_{\theta}^i A}{R} (w \delta w + u' \delta w + w \delta u' + u' \delta u' + w' \delta w' - u \delta w' - w' \delta u + u \delta u) + \\ & \quad - R b k_w w \delta w - R b k_u u \delta u + R b q_w \delta w + R b q_u \delta u \\ & \quad + V_2 \delta w_2 - V_1 \delta w_1 + \frac{M_2}{R} \delta w_2 - \frac{M_1}{R} \delta w_1 + T_2 \delta u_2 - T_1 \delta u_1 \end{aligned} \right] d\theta dt = 0 \quad (3.49)$$

Calculam-se as integrais por partes, a seguir são apresentados apenas alguns exemplos:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta \dot{w} dt &= \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt \\ \int_{t_1}^{t_2} u \Omega \delta \dot{w} dt &= u \Omega \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \Omega \dot{u} \delta w dt \\ \int_{t_1}^{t_2} (R + w) \Omega \delta \dot{u} dt &= (R + w) \Omega \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} u' \delta u' d\theta &= u' \delta u \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} u'' \delta u d\theta \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} w \delta u' d\theta &= w \delta u \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} w' \delta u d\theta \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} u' \delta w' d\theta &= u' \delta w \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} u'' \delta w d\theta = u' \delta w \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - u'' \delta w \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} u''' \delta w d\theta \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} w'' \delta u' d\theta &= w'' \delta u \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} w''' \delta u d\theta \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} w'' \delta w' d\theta &= w'' \delta w \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} w''' \delta w d\theta = w'' \delta w \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - w''' \delta w \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} w'''' \delta w d\theta \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo as integrais por partes na Eq. (3.49):

$$\left. \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\begin{aligned} & \rho R A \left(-\ddot{w} \delta w + \Omega \dot{u} \delta w - \dot{w} \Omega \delta u + u \Omega^2 \delta u - \ddot{u} \delta u + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Omega \dot{w} \delta u + \dot{u} \Omega \delta w + R \Omega^2 \delta w + w \Omega^2 \delta w \right) + \right. \\ & \quad - \frac{EA}{R} (-u'' \delta u + u' \delta w - w' \delta u + w \delta w) + \\ & \quad - \frac{EI}{R^3} (u'' \delta u - u''' \delta w + w''' \delta u + w'''' \delta w) + \\ & \quad - \frac{\sigma_{\theta}^i A}{R} \left(w \delta w + u' \delta w - w \delta u - u'' \delta u - w'' \delta w + \right. \\ & \quad \left. \left. + u' \delta w - w' \delta u + u \delta u + R \delta w \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. - R b k_w w \delta w - R b k_u u \delta u + R b q_w \delta w + R b q_u \delta u \right) \right] d\theta \right\} dt = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
& + V_2 \delta w_2 - V_1 \delta w_1 + \frac{M_2}{R} \delta w_2' - \frac{M_1}{R} \delta w_1' + T_2 \delta u_2 - T_1 \delta u_1 + \\
& - \frac{EA}{R} (u_2' \delta u_2 - u_1' \delta u_1 + w_2 \delta u_2 - w_1 \delta u_1) + \\
& - \frac{EI}{R^3} \left[u_2' \delta u_2 - u_1' \delta u_1 - (u_2' \delta w_2' - u_1' \delta w_1' - u_2'' \delta w_2 + u_1'' \delta w_1) + \right. \\
& \left. - (w_2'' \delta u_2 - w_1'' \delta u_1) + w_2'' \delta w_2' - w_1'' \delta w_1' - w_2''' \delta w_2 + w_1''' \delta w_1 \right] + \\
& - \frac{\sigma_{\theta}^i A}{R} \left(w_2 \delta u_2 - w_1 \delta u_1 + u_2' \delta u_2 - u_1' \delta u_1 + \right. \\
& \left. + w_2' \delta u_2 - w_1' \delta u_1 + u_2 \delta w_2 - u_1 \delta w_1 \right) + \\
& - \sigma_{\theta}^i A (\delta u_2 - \delta u_1)
\end{aligned}$$

Separando os termos referentes ao deslocamento virtual radial e tangencial da integral em θ , obtemos as equações do movimento de flexão e extensão. Como δw e δu são termos independentes e a integral deve ser zero, cada coeficiente multiplicado a estes deslocamentos virtuais será igualado à zero.

Na direção radial obtemos a equação de flexão:

$$\begin{aligned}
& \rho A R [-\ddot{w} + 2\dot{u}\Omega + (R + w)\Omega^2] - \frac{EA}{R} (u' + w) - \frac{EI}{R^3} (-u'''' + w''''') + \\
& - \left(\rho R^2 \Omega^2 + \frac{p_0 R}{h} \right) \frac{A}{R} (R + w + 2u' - w'') - R b k_w w + R b q_w = 0
\end{aligned} \quad (3.52)$$

Retirando alguns termos em evidência:

$$\begin{aligned}
& -\frac{EI}{R^3}(w''''-u''')-\frac{EA}{R}(w+u')-\left(\rho R^2\Omega^2+\frac{p_0R}{h}\right)\frac{A}{R}(2u'-w'')+ \\
& -\rho R^2\Omega^2\frac{A}{R}w-\frac{p_0R}{h}\frac{A}{R}w-\rho R^2\Omega^2\frac{A}{R}R-\frac{p_0R}{h}\frac{A}{R}R+ \\
& +\rho AR[-\ddot{w}+2\dot{u}\Omega]+\rho AR^2\Omega^2+\rho AR\Omega^2w-Rbk_w w+Rbq_w=0
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{R^3}(w''''-u''')+\frac{EA}{R}(w+u')+\left(\rho RA\Omega^2+\frac{p_0A}{h}\right)(2u'-w'')+b(p_0+Rk_w)w+ \\
& +\rho AR[\ddot{w}-2\dot{u}\Omega]=Rbq_w-\frac{p_0AR}{h}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Onde o termo de pressão do lado direito da Eq. (3.54) refere-se ao deslocamento estático. Como estamos interessados como o anel se deforma a partir da sua posição de equilíbrio, este termo é desconsiderado, obtendo o mesmo resultado de Huang e Soedel (1987a).

Na direção tangencial obtemos a equação de extensão:

$$\begin{aligned}
& \rho AR[-\ddot{u}-2\dot{w}\Omega+u\Omega^2]-\frac{EA}{R}(-u''-w')-\frac{EI}{R^3}(-u''+w''')+ \\
& -\left(\rho R^2\Omega^2+\frac{p_0R}{h}\right)\frac{A}{R}(u-2w'-u'')-Rbk_u u+Rbq_u=0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Retirando alguns termos em evidência:

$$\begin{aligned}
& -\frac{EI}{R^3}(w'''-u'')-\frac{EA}{R}(-w'-u'')-\left(\rho R^2\Omega^2+\frac{p_0R}{h}\right)\frac{A}{R}(-2w'-u'')+ \\
& -\rho R^2\Omega^2\frac{A}{R}u-\frac{p_0R}{h}\frac{A}{R}u+ \\
& +\rho AR[-\ddot{u}-2\dot{w}\Omega]+\rho AR\Omega^2u-Rbk_u u+Rbq_u=0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{R^3}(w'''-u'')-\frac{EA}{R}(w'+u'')+\left(\rho RA\Omega^2+\frac{p_0A}{h}\right)(-2w'-u'')+b(p_0+Rk_u)u+ \\
& +\rho AR[\ddot{u}+2\dot{w}\Omega]=Rbq_u
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Os outros termos fornecem as condições de contorno (Eq. 3.58).

$$\begin{aligned}\delta w_k \left[V_k - \frac{EI}{R^3} (u_k'' - w_k''') - \frac{\sigma_\theta^i A}{R} u_k \right] &= 0 \\ \delta w'_k \left[\frac{M_k}{R} - \frac{EI}{R^3} (-u_k' + w_k'') \right] &= 0 \quad k=1,2 \\ \delta u_k \left[T_k - \frac{EA}{R} (u_k' + w_k') - \frac{EI}{R^3} (u_k' - w_k'') - \sigma_\theta^i A \left(\frac{w_k + u_k' + w_k'}{R} + 1 \right) \right] &= 0\end{aligned}\quad (3.58)$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}\delta w_k &= 0 \quad \text{ou} \quad V_k = \frac{EI}{R^3} (u_k'' - w_k''') + \frac{\sigma_\theta^i A}{R} u_k \\ \delta w'_k &= 0 \quad \text{ou} \quad M_k = \frac{EI}{R^2} (-u_k' + w_k'') \quad k=1,2 \\ \delta u_k &= 0 \quad \text{ou} \quad T_k = \frac{EA}{R} (u_k' + w_k') + \frac{EI}{R^3} (u_k' - w_k'') + \sigma_\theta^i A \left(\frac{w_k + u_k' + w_k'}{R} + 1 \right)\end{aligned}\quad (3.59)$$

Na Eq. (3.60), o termo de tensão induzida que aparece na equação do esforço cortante é a projeção de uma tensão tangencial na direção radial, sendo desprezível em relação aos demais termos. No termo de força axial, as componentes de deformação e deslocamento presentes no termo de tensão induzida são muito menores quando comparados à unidade, sendo por isso desprezados. A tensão induzida que permanece no equacionamento ($\sigma_\theta^i A$) também é desprezada, pois trabalharemos com a deformação do anel a partir de sua posição de equilíbrio estático.

Alguns autores como Lee *et al.* (2007) mantêm a componente relativa a EI/R^3 na força axial, porém esta tem ordem de grandeza muito menor que o termo em EA/R , sendo desprezada em Huang *et al.* (2013) e neste trabalho.

Assim, obtemos as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\delta w_k &= 0 \quad \text{ou} \quad V_k = \frac{EI}{R^3} (u_k'' - w_k''') \\ \delta w'_k &= 0 \quad \text{ou} \quad M_k = \frac{EI}{R^2} (-u_k' + w_k'') \quad k=1,2 \\ \delta u_k &= 0 \quad \text{ou} \quad T_k = \frac{EA}{R} (u_k' + w_k')\end{aligned}\quad (3.60)$$

As equações do movimento (Eq. (3.54) e Eq. (3.57)) são divididas por R , então a Eq. (3.61) é a mesma apresentada por Huang e Soedel (1987b):

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{R^4} (w'''' - u''') + \frac{EA}{R^2} (w + u') + \left(\rho A \Omega^2 + \frac{bp_0}{R} \right) (2u - w'') + b \left(\frac{p_0}{R} + k_w \right) w \\
& \quad + \rho A (\ddot{w} - 2\Omega \dot{u}) = bq_w \\
& \frac{EI}{R^4} (w''' - u'') - \frac{EA}{R^2} (w' + u'') + \left(\rho A \Omega^2 + \frac{bp_0}{R} \right) (-2w' - u'') + b \left(\frac{p_0}{R} + k_u \right) u \\
& \quad + \rho A (\ddot{u} + 2\Omega \dot{w}) = bq_u
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Como trabalharemos na coordenada espacial ao invés da coordenada angular, no Capítulo 4 realizamos a transformação de coordenadas $s = R\theta$ na Eq. (3.61) e na Eq. (3.62).

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS

Vários métodos matemáticos têm sido empregados para avaliar o comportamento de estruturas e o Método dos Elementos Espectrais (SEM) é um deles (Doyle, 1997). Seu conceito foi introduzido primeiramente por Beskos em seu trabalho de 1978 (Lee, 2009). O SEM pode ser considerado uma combinação dos melhores pontos do Método dos Elementos Finitos (FEM), Método da Rigidez Dinâmica (DSM) e Método de Análise Espectral (SAM).

O FEM consiste na transformação de um domínio contínuo em discreto, isto ocorre pela divisão do domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos. Seu equacionamento é baseado em equações diferenciais parciais e sua solução é numérica, porém sua precisão diminui com o aumento da frequência de análise porque as funções de interpolação fornecem modelos paramétricos no domínio do tempo. Tornou-se uma poderosa ferramenta na engenharia e em ciências como forma de cálculo eficiente e econômica (Lee, 2009 e Santos, 2010).

No DSM, a matriz de rigidez dinâmica exata é deduzida no domínio da frequência usando as funções de forma derivadas das soluções de onda das equações do movimento. Para obter as soluções, as equações diferenciais do movimento no tempo são transformadas para frequência assumindo uma solução harmônica de frequência única. A matriz de rigidez dinâmica é considerada uma combinação das propriedades de inércia, rigidez e amortecimento do elemento. O elemento, denominado contínuo, é exato dentro do escopo da teoria usada e apenas um é necessário para representar parte da estrutura se esta não houver descontinuidade, reduzindo assim o número de elementos em relação ao FEM (Lee, 2009).

O método mais popular de solução de equações diferenciais no domínio da frequência é o SAM, baseia-se na superposição de infinitas ondas de diferentes números de onda; isto corresponde à transformada de Fourier contínua da solução, ou seja, em determinar os coeficientes de Fourier. A solução temporal é obtida pela transformação inversa. Devido aos métodos computacionais utiliza-se a forma discreta da transformada.

Dessa forma, o SEM aproveita do:

- FEM, a discretização espacial e montagem da matriz global a partir das matrizes elementares;
- DSM, a formulação exata da matriz de rigidez dinâmica elementar e redução do número de elementos para descrever uma estrutura;
- SAM, superposição dos modos de propagação de onda pela Transformada Discreta de Fourier e algoritmo da FFT.

O SEM é um método baseado na propagação de ondas. Apresenta semelhanças com o Método dos Elementos Finitos, mas a matriz de rigidez dinâmica é escrita no domínio da frequência, permitindo que a inércia da massa distribuída seja representada na forma exata. Consequentemente, esta formulação permite a descrição do comportamento dinâmico exato da estrutura dentro do escopo da teoria utilizada na formulação. Assim, este pode ser considerado um método semi-analítico.

Como já citado, uma vantagem do SEM em relação ao FEM é a redução do problema e, consequentemente, um menor número de equações a serem resolvidas, tendo assim menor custo computacional, o que o torna mais adequado para problemas de otimização e incertezas onde a solução dinâmica deve ser calculada grande número de vezes.

Neste método, deve haver um nó quando é necessário separar elementos de diferentes propriedades geométricas e/ou de material, quando se deseja aplicar uma força ou obter de forma direta uma resposta em um determinado ponto (caso contrário seria preciso usar as funções de interpolação exatas do elemento espectral). Caso a estrutura seja uniforme com um ponto de aplicação da força no mesmo ponto de medição, é possível descrever o comportamento dinâmico completo com apenas um elemento. Este método é utilizado principalmente em estruturas de geometria simples.

Dentre as desvantagens do método estão:

- A formulação exata do elemento só é possível se houver a solução exata por ondas - para problemas mais complexos e multidimensionais isto não é realizável;
- Não se pode aplicar diretamente em problemas com parâmetros variantes no tempo;
- Não é aplicável em sistemas não lineares, nos quais o princípio da superposição não é válido - deve-se usar um método iterativo para tratar os termos não lineares como

pseudo forças;

- Mesmo que o SEM garanta a solução exata na frequência, isto pode não ser verdade para o tempo, devido a erros de processamento de sinais como *leakage* e *aliasing*.

A metodologia empregada neste trabalho na dedução do elemento espectral de viga curva girante é aquela utilizada por Delamotte *et al.* (2008), ou seja, relacionar as forças e deslocamentos no domínio da frequência a partir das equações do movimento, equilíbrio de forças no elemento e solução por superposição de ondas.

4.1 Formulação de um Elemento Espectral de Anel Rotativo

Um esquema de segmento de anel rotativo utilizado pode ser visto na Fig. 4.1. Não são considerados nesta seção a pressão interna, a fundação elástica e o amortecimento estrutural.

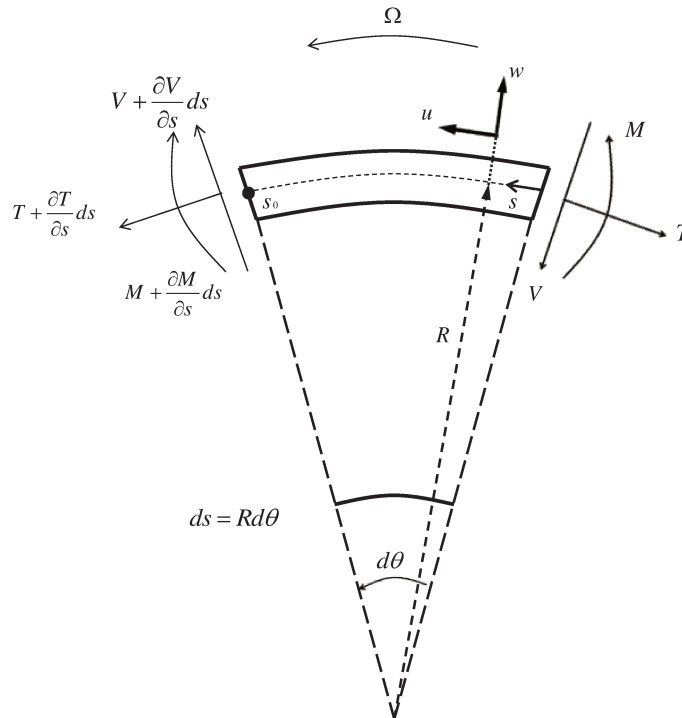


Figura 4.1 – Elemento espectral de anel rotativo.

Como demonstrado anteriormente, pela Teoria de Euler-Bernoulli e pelo Princípio de Hamilton, as equações acopladas do movimento para um segmento de anel flexível girante são dadas pela Eq. (3.44). Realizando a transformação de coordenadas $s = R \theta$ e desconsiderando os termos de carregamento, pressão interna e fundação elástica, temos:

$$\begin{aligned} EI \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} - R \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) - EA \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \rho AR \Omega^2 \left(-2R \frac{\partial u}{\partial s} + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) &= \rho AR \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ EI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right) + EA \left(\frac{\partial w}{\partial s} + R \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + \rho AR \Omega^2 \left(2R \frac{\partial w}{\partial s} + R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) &= \rho AR \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

A primeira equação corresponde à equação de flexão e a segunda à equação de extensão. Nestas equações, os termos de aceleração de Coriolis são $2\Omega(dw/dt)$ e $2\Omega(du/dt)$, as velocidades radial e tangencial são modificadas pela velocidade de rotação, diferentemente do problema de viga curva estacionária. Já o termo de tensão induzida pela rotação é $\rho R^2 \Omega^2$, funciona como uma pressão interna que aumenta com a velocidade de rotação.

Assumimos a solução da Eq. (4.1) como uma solução por propagação de ondas:

$$\begin{aligned} w(s, t) &= C_w e^{i(-\gamma s - \omega t)} \\ u(s, t) &= C_u e^{i(-\gamma s - \omega t)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Calculando as derivadas da Eq. (4.2), substituindo na Eq. (4.1) e rearranjando os termos, obtemos o sistema de Eq. (4.3) em função das amplitudes da solução C_w e C_u .

$$\begin{bmatrix} \left(EIR\gamma^4 + \frac{EA}{R} + \rho AR^3 \Omega^2 \gamma^2 - \rho AR \omega^2 \right) & \left(-i(EI\gamma^3 + EA\gamma + 2\rho AR^2 \Omega^2 \gamma - 2\rho AR \omega) \right) \\ \left(-i(EI\gamma^3 + EA\gamma + 2\rho AR^2 \Omega^2 \gamma - 2\rho AR \omega) \right) & \left(\frac{-EI}{R} \gamma^2 - EAR\gamma^2 - \rho AR^2 \Omega^2 \gamma^2 + \rho AR \omega^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_w \\ C_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

O determinante da matriz do lado esquerdo da Eq. (4.3) é computado e igualado a zero, assim temos a equação característica (Eq. (4.4)) que relaciona os números de onda com a frequência:

$$\begin{aligned}
& (-EAEIR^2 - \rho AEIR^4 \Omega^2) \gamma^6 + (2EAEI + \rho AEIR^2 \omega^2 + 3\rho AEIR^2 \Omega^2 \\
& - \rho AEAR^4 \Omega^2 - \rho^2 A^2 R^4 \Omega^2) \gamma^4 + (-4\rho AEIR\Omega\omega) \gamma^3 + \left(\frac{-EAEI}{R^2} + \rho AEI\omega^2 \right. \\
& \left. + \rho AEAR^2 \omega^2 + 3\rho AEAR^2 \Omega^2 + 2\rho^2 A^2 R^4 \Omega^2 \omega^2 + 4\rho^2 A^2 R^4 \Omega^4\right) \gamma^2 + \\
& (-4\rho AEAR\Omega\omega - 8\rho^2 A^2 R^3 \Omega^3) \gamma + (\rho AEAR\omega^2 - \rho^2 A^2 R^2 \omega^4 + 4\rho^2 A^2 R^2 \Omega^2 \omega^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Reescrevendo a Eq. (4.4) agrupando os termos de mesma potência, temos a Eq. (4.5):

$$p_6 \gamma^6 + p_4 \gamma^4 + p_3 \gamma^3 + p_2 \gamma^2 + p_1 \gamma + p_0 = 0 \tag{4.5}$$

Da Eq. (4.5) temos seis números de onda que podem ser reais, imaginários e/ou complexos para cada frequência. Três números de ondas representam as ondas que propagam no sentido positivo (sentido anti-horário), os outros três representam as ondas que se propagam no sentido negativo (sentido horário) (Fig. 4.2).



Figura 4.2 – Sentido da propagação das ondas no elemento.

Devido à rotação, os números de onda que se propagam em diferentes sentidos não irão ser simétricos como ocorre em um anel estacionário tratado por Lee *et al.* (2007). Assim, é necessário conhecer a direção de propagação das ondas para se utilizar na formulação que segue, pois esta depende das condições de contorno do início e fim o elemento, e consequentemente das ondas nos diferentes sentidos.

De acordo com Lee *et al.* (2007), as ondas que se propagam no sentido positivo seguem a Eq. (4.6). O sentido positivo é a mesmo do sentido da rotação do anel mostrado na Fig. 4.2, ou seja, direção anti-horária.

$$\text{Im}\{\gamma\} \geq 0 \text{ ou } \text{Re}\left\{\frac{\partial \gamma}{\partial \omega}\right\} > 0 \text{ se } \text{Im}\{\gamma\} = 0 \tag{4.6}$$

Usando a equação característica (Eq. 4.4), podemos escrever a derivada da Eq. 4.6 como:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \omega} = - \frac{\left[\begin{aligned} &(2\rho AEIR^2\omega)\gamma^4 + (-4\rho AEIR\Omega)\gamma^3 + (2\rho AEI\omega + \\ &2\rho AEAR^2\omega + 4\rho^2 A^2 R^4 \Omega^2 \omega)\gamma^2 + (-4\rho AEAR\Omega)\gamma + \\ &(2\rho AEA\omega - 4\rho^2 A^2 R^2 \omega^2 + 8\rho^2 A^2 R^2 \Omega^2 \omega) \end{aligned} \right]}{6p_6\gamma^5 + 4p_4\gamma^3 + 3p_3\gamma^2 + 2p_2\gamma + p_1} \quad (4.7)$$

A Eq. (4.5) fornece seis números de onda e pela Eq. (4.6) podemos separá-los, definimos como γ_1, γ_2 e γ_3 os números de onda que se propagam no sentido positivo, e γ_4, γ_5 e γ_6 os números de onda que se propagam no sentido negativo.

Então, os deslocamentos podem ser escritos para cada frequência como mostrado na Eq. (4.8) e Eq. (4.9).

$$w(s,t) = (C_{w1}^+ e^{-i\gamma_1 s} + C_{w2}^+ e^{-i\gamma_2 s} + C_{w3}^+ e^{-i\gamma_3 s} + C_{w4}^- e^{-i\gamma_4 s} + C_{w5}^- e^{-i\gamma_5 s} + C_{w6}^- e^{-i\gamma_6 s}) e^{-i\omega t} \quad (4.8)$$

$$u(s,t) = (C_{u1}^+ e^{-i\gamma_1 s} + C_{u2}^+ e^{-i\gamma_2 s} + C_{u3}^+ e^{-i\gamma_3 s} + C_{u4}^- e^{-i\gamma_4 s} + C_{u5}^- e^{-i\gamma_5 s} + C_{u6}^- e^{-i\gamma_6 s}) e^{-i\omega t} \quad (4.9)$$

A metodologia utilizada para definir a matriz espectral do elemento é a mesma empregada por Delamotte *et al.* (2008), ou seja, escrever os deslocamentos do elemento em função das amplitudes da Eq. (4.8) e escrever as forças no elemento em função destas mesmas amplitudes. Com estas duas equações, podemos eliminar as amplitudes e obter uma fórmula que relaciona os deslocamentos com as forças, que é matriz de rigidez dinâmica desejada.

Uma forma de simplificar o equacionamento é relacionar a Eq. (4.8) com a Eq. (4.9). Do sistema de equações (Eq. 4.3), podemos escrever:

$$\alpha = \frac{C_u}{C_w} = \frac{\left(\begin{aligned} &EIR\gamma^4 + \frac{EA}{R} + \\ &\rho AR^3 \Omega^2 \gamma^2 - \rho AR \omega^2 \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &i(EI\gamma^3 + EA\gamma + \\ &2\rho AR^2 \Omega^2 \gamma - 2\rho AR \Omega \omega) \end{aligned} \right)} = \frac{\left(\begin{aligned} &i(EI\gamma^3 + EA\gamma + \\ &2\rho AR^2 \Omega^2 \gamma - 2\rho AR \Omega \omega) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &-\frac{EI}{R\gamma^2} - EAR\gamma^2 - \\ &\rho AR^3 \Omega^2 \gamma^2 + \rho AR \omega^2 \end{aligned} \right)} \quad (4.10)$$

Então, para cada número de onda há uma relação diferente:

$$\alpha_1 = \frac{C_{u1}^+}{C_{w1}^+}; \alpha_2 = \frac{C_{u2}^+}{C_{w2}^+}; \alpha_3 = \frac{C_{u3}^+}{C_{w3}^+}; \alpha_4 = \frac{C_{u4}^-}{C_{w4}^-}; \alpha_5 = \frac{C_{u5}^-}{C_{w5}^-}; \alpha_6 = \frac{C_{u6}^-}{C_{w6}^-} \quad (4.11)$$

Uma matriz α , e os vetores C e N podem ser usados para escrever os deslocamentos $w(s)$ e $u(s)$, e a rotação $w'(s)$ de uma forma simplificada em função das amplitudes de $w(s)$.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{Bmatrix} C_{w1} \\ C_{w2} \\ C_{w3} \\ C_{w4} \\ C_{w5} \\ C_{w6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad N = \begin{Bmatrix} e^{-i\gamma_1 s} \\ e^{-i\gamma_2 s} \\ e^{-i\gamma_3 s} \\ e^{-i\gamma_4 (s-s_0)} \\ e^{-i\gamma_5 (s-s_0)} \\ e^{-i\gamma_6 (s-s_0)} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

N é um vetor que contém a solução espacial onde, para os números de onda negativos, inserimos o termo s_0 , que é o comprimento do elemento, para melhorar a estabilidade numérica da solução. Por isto foi necessário separar os números de onda nos sentidos positivo e negativo. Assim, temos:

$$w(s) = N^t(s).C \quad u(s) = N^t(s)\alpha.C \quad w'(s) = \frac{\partial w}{\partial s} = N'^t(s).C \quad (4.13)$$

Avaliando os deslocamentos nas extremidades do elemento, é encontrada uma matriz que relaciona os deslocamentos com o vetor de amplitude C .

$$\begin{Bmatrix} u(0) \\ w(0) \\ w'(0) \\ u(s_0) \\ w(s_0) \\ w'(s_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 e^{-i\gamma_4 s_0} & \alpha_5 e^{-i\gamma_5 s_0} & \alpha_6 e^{-i\gamma_6 s_0} \\ 1 & 1 & 1 & e^{-i\gamma_4 s_0} & e^{-i\gamma_5 s_0} & e^{-i\gamma_6 s_0} \\ -i\gamma_1 & -i\gamma_2 & -i\gamma_3 & -i\gamma_4 e^{-i\gamma_4 s_0} & -i\gamma_5 e^{-i\gamma_5 s_0} & -i\gamma_6 e^{-i\gamma_6 s_0} \\ \alpha_1 e^{-i\gamma_1 s_0} & \alpha_2 e^{-i\gamma_2 s_0} & \alpha_1 e^{-i\gamma_3 s_0} & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ e^{-i\gamma_1 s_0} & e^{-i\gamma_2 s_0} & e^{-i\gamma_3 s_0} & 1 & 1 & 1 \\ -i\gamma_1 e^{-i\gamma_1 s_0} & -i\gamma_2 e^{-i\gamma_2 s_0} & -i\gamma_3 e^{-i\gamma_3 s_0} & -i\gamma_4 & -i\gamma_5 & -i\gamma_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Simplificando:

$$U(\omega) = G(\omega)C \quad (4.15)$$

Também é possível escrever os esforços em função do vetor C . Os esforços estão relacionadas com as deformações e deslocamentos pela teoria de Euler-Bernoulli e foram obtidas pelo Princípio de Hamilton na seção 3.5. Escrevendo-os como função das amplitudes de $w(s)$, obtemos:

$$T = EA \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) = EA(N'^t \alpha + N^t)C \quad (4.16)$$

$$V = EI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right) = EI \left(\frac{1}{R} N''^t \alpha - N'''^t \right)C \quad (4.17)$$

$$M = EI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = EI \left(\frac{1}{R} N'^t \alpha - N''^t \right) C \quad (4.18)$$

Avaliando os esforços nas extremidades do elemento, é encontrada uma matriz que relaciona os esforços com o vetor de amplitudes C .

$$\begin{Bmatrix} -T(0) \\ V(0) \\ -M(0) \\ T(s_0) \\ -V(s_0) \\ M(s_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA[N'^t(0)\alpha + N^t(0)] \\ EI[(1/R)N''^t(0)\alpha - N'''^t(0)] \\ -EI[(1/R)N'^t(0)\alpha - N''^t(0)] \\ EA[N'^t(s_0)\alpha + N^t(s_0)] \\ EI[(1/R)N''^t(s_0)\alpha - N'''^t(s_0)] \\ -EI[(1/R)N'^t(s_0)\alpha - N''^t(s_0)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Simplificando:

$$F(\omega) = H(\omega)C \quad (4.20)$$

Então, a matriz espectral para um elemento de anel girante pode ser obtida pela Eq. (4.15) e pela Eq. (4.20):

$$F(\omega) = H(\omega)G(\omega)^{-1}U(\omega) = K(\omega)U(\omega) \rightarrow K(\omega) = H(\omega)G(\omega)^{-1} \quad (4.21)$$

Da Eq. (4.21) é possível construir por superposição das matrizes elementares a matriz global de um anel girante como ocorre no Método dos Elementos Finitos. O processo de montagem a partir de quatro elementos é exemplificado na Fig. 4.3.

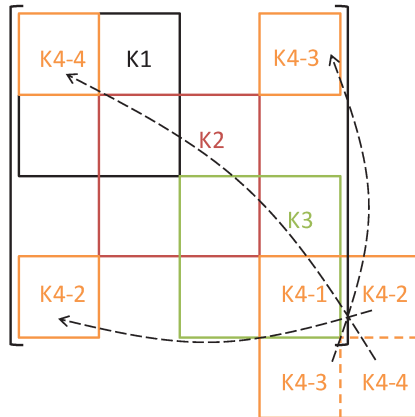


Figura 4.3 – Processo de montagem da matriz global de um anel com 4 elementos.

Devido à formulação, o vetor de esforços gira na mesma velocidade do anel, permanecendo estacionário no sistema de coordenadas do anel, ou seja, gira junto com o nó em que está sendo aplicada (Fig. 4.4).

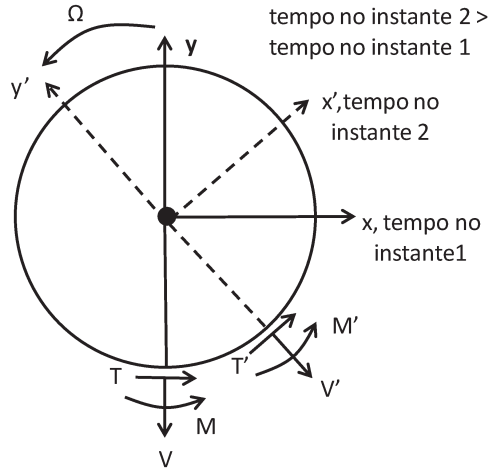


Figura 4.4 – Anel girante com carregamento dinâmico rotativo.

Através da matriz global é possível obter a resposta forçada para um anel girante com força girante. Se variarmos a frequência de análise e tomarmos o deslocamento para um determinado nó, podemos traçar as Funções de Resposta em Frequência (FRFs). Se também variarmos a rotação, podemos traçar um mapa de frequência x rotação x deslocamento. Tendo as FRFs, sabemos as frequências de ressonância; se analisarmos os deslocamentos de todos os nós nestas frequências teremos os modos de vibrar do anel rotativo segundo uma resposta forçada.

Caso o número de pontos tomados na simulação não seja suficiente para visualizar a forma modal, é possível realizar uma interpolação através das funções de forma. Assim é possível calcular o comportamento do anel com um elemento e utilizar as funções de forma para descrever o comportamento nos outros pontos desejados. As funções de forma para os deslocamentos radial e tangencial seguem abaixo.

$$\begin{aligned} w(s) &= N^t(s)G(\omega)^{-1}U(\omega) \\ u(s) &= N^t(s)G(\omega)^{-1}\alpha U(\omega) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2 Inclusão da Fundação Elástica, Pressão Interna e Amortecimento Estrutural

Serão inseridos a fundação elástica, a pressão interna e o amortecimento estrutural na formulação do elemento de anel girante para obter um modelo mais completo para o comportamento dinâmico do anel com o intuito de estudar uma gama maior de problemas. Os termos da fundação e pressão interna foram deduzidos anteriormente e estão nas equações do movimento da seção 3.5 (Eq. (3.44)). Já o amortecimento é modelado como sendo estrutural, é somado como um termo imaginário no módulo de elasticidade.

Nas equações do movimento (Eq. 3.44) é aplicada a transformação de coordenadas $s = R \theta$ e são desconsiderados os termos de carregamento, também no módulo de elasticidade é incluído o termo de amortecimento estrutural (Eq 4.24), assim obtermos a equação do movimento (Eq. 4.23) para o elemento da Fig. 4.5.

$$\begin{aligned}
 E^* I \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} - R \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) - E^* A \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) + (\rho A R \Omega^2 + b p_0) \left(-2R \frac{\partial u}{\partial s} + R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\
 - (b p_0 + b R k_w) w = \rho A R \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
 E^* I \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right) + E^* A \left(\frac{\partial w}{\partial s} + R \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + (\rho A R \Omega^2 + b p_0) \left(2R \frac{\partial w}{\partial s} + R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) \\
 - (b p_0 + b R k_u) u = \rho A R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} \right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$E^* = E(1 + i\eta) \tag{4.24}$$

O procedimento utilizado para deduzir o elemento espectral de segmento de arco girante com pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural é o mesmo utilizado na seção anterior; assume-se a mesma solução (Eq. (4.2)). Apenas a relação espectral e a razão de amplitudes apresentam modificações em relação às equações da seção anterior; assim somente elas serão reescritas.

Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.23) e rearranjando os termos, obtemos a Eq. (4.25), das quais podemos obter a nova relação espectral e razão de amplitude.

$$\begin{bmatrix} \left(E^* I R \gamma^4 + \frac{E^* A}{R} + \rho A R^3 \Omega^2 \gamma^2 \right) & -i \left\{ E^* I \gamma^3 + E^* A \gamma - 2 \rho A R \omega \right\} \\ + (b p_0 + b R k_w) - \rho A R \omega^2 & + 2(\rho A R \Omega^2 + b p_0) R \gamma \\ -i \left\{ E^* I \gamma^3 + E^* A \gamma - 2 \rho A R \omega \right\} & \left(-\frac{E^* I}{R} \gamma^2 - E^* A R \gamma^2 - \rho A R^2 \Omega^2 \gamma^2 \right) \\ + 2(\rho A R \Omega^2 + b p_0) R \gamma & - (b p_0 + b R k_u) + \rho A R \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_w \\ C_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

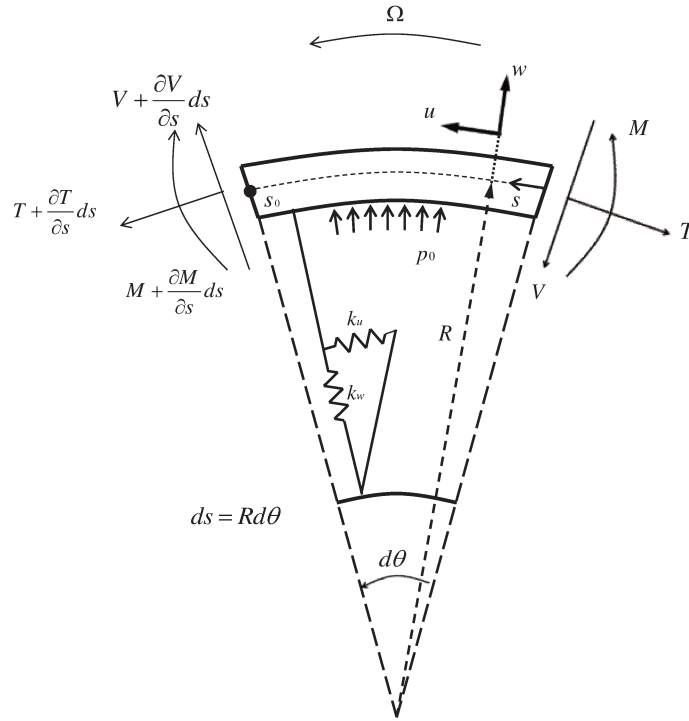


Figura 4.5 – Elemento espectral de anel rotativo com fundação elástica e pressão interna.

Calculando a relação espectral pelo determinante da Eq. (4.25):

$$\begin{aligned}
& (-E^* AE^* IR^2 - E^* IR^3 bp_0 - \rho AE^* IR^4 \Omega^2) \gamma^6 + (2E^* AE^* I + 2E^* IR bp_0 - E^* IR^2 bk_u \\
& - E^* AR^3 bp_0 - R^4 b^2 p_0^2 + \rho AE^* IR^2 \omega^2 + 3\rho AE^* IR^2 \Omega^2 - \rho AE^* AR^4 \Omega^2 - 2\rho AR^5 bp_0 \Omega^2 \\
& - \rho^2 A^2 R^6 \Omega^4) \gamma^4 + (-4\rho AE^* I \Omega \omega) \gamma^3 + \left(-\frac{E^* AE^* I}{R^2} - \frac{E^* I bp_0}{R} - E^* I bk_w + 2E^* AR bp_0 \right. \\
& \left. - E^* AR^2 bk_w + 2R^2 b^2 p_0^2 - R^3 b^2 p_0 k_u - R^3 b^2 p_0 k_w + \rho AE^* I \omega^2 + \rho AE^* AR^2 \omega^2 \right. \\
& \left. + 3\rho AE^* AR^2 \Omega^2 + 2\rho AR^3 bp_0 \omega^2 + 6\rho AR^3 bp_0 \Omega^2 - \rho AR^4 bk_u \Omega^2 - \rho AR^4 bk_w \Omega^2 \right. \\
& \left. + 2\rho^2 A^2 R^4 \Omega^2 \omega^2 + 4\rho^2 A^2 R^4 \Omega^4\right) \gamma^2 + (-4\rho AE^* AR \Omega \omega - 8\rho AR^2 bp_0 \Omega \omega \\
& - 8\rho^2 A^2 R^3 \Omega^3 \omega) \gamma + (-b^2 p_0^2 - b^2 R p_0 k_u - b^2 R p_0 k_w - b^2 R^2 k_u k_w - \frac{E^* A}{R} bp_0 \\
& - E^* Abk_u + \rho AE^* A \omega^2 + 2\rho AR bp_0 \omega^2 + \rho AR^2 bk_u \omega^2 - \rho^2 A^2 R^2 \omega^4 + 4\rho^2 A^2 R^2 \Omega^2 \omega^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Reagrupando os termos de mesma potência:

$$p_6^* \gamma^6 + p_4^* \gamma^4 + p_3^* \gamma^3 + p_2^* \gamma^2 + p_1^* \gamma + p_0^* = 0 \tag{4.27}$$

A Eq. (4.6) é utilizada para organizar os números de onda, porém a derivada segue a equação característica (Eq. 4.26).

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \omega} = - \frac{\left[(2\rho AE^* IR^2 \omega) \gamma^4 + (-4\rho AE^* IR \Omega) \gamma^3 + (2\rho AE^* I \omega + 2\rho AE^* AR^2 \omega + 4\rho AR^3 bp_0 \omega + 4\rho^2 A^2 R^4 \Omega^2 \omega) \gamma^2 + (-4\rho AE^* AR \Omega - 8\rho AR^2 bp_0 \Omega - 8\rho^2 A^2 R^3 \Omega^3) \gamma + (2\rho AE^* A \omega - 4\rho^2 A^2 R^2 \omega^2 + 8\rho^2 A^2 R^2 \Omega^2 \omega) \right]}{6p_6^* \gamma^5 + 4p_4^* \gamma^3 + 3p_3^* \gamma^2 + 2p_2^* \gamma + p_1^*} \tag{4.28}$$

Também pela Eq. (4.25) é possível calcular a nova razão de amplitude (Eq. (4.29)).

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{C_u}{C_w} &= \frac{E^* IR \gamma^4 + \frac{E^* A}{R} + (\rho AR \Omega^2 + bp_0) R^2 \gamma^2 + (bp_0 + bRk_w) - \rho AR \omega^2}{i\{E^* I \gamma^3 + E^* A \gamma + 2(\rho AR \Omega^2 + bp_0) R \gamma - 2\rho AR \Omega \omega\}} \\
&= \frac{i\{E^* I \gamma^3 + E^* A \gamma + 2(\rho AR \Omega^2 + bp_0) R \gamma - 2\rho AR \Omega \omega\}}{-\frac{E^* I}{R \gamma^2} - E^* AR \gamma^2 - (\rho AR \Omega^2 + bp_0) R^2 \gamma^2 - (bp_0 + bRk_u) + \rho AR \omega^2}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

4.3 Anel Girante com Força Estacionária

Pela formulação do elemento espectral de anel rotativo apresentado, a força é estacionária no nó, ou seja, gira na mesma velocidade do anel. Porém, um dos interesses deste trabalho é calcular a resposta do anel devida a uma força estacionária.

Pode-se adaptar a teoria desenvolvida para este tipo de força através do conceito de carregamento móvel. No problema clássico de carregamento móvel tem-se uma força com determinada velocidade passando em uma viga. Neste caso, o anel considerado uma viga com as duas extremidades interligadas gira em um sentido e o carregamento móvel se move no sentido contrário com a mesma velocidade de rotação do anel para levar ao efeito de carregamento estacionário.

A força é modelada como uma distribuição espacial na forma de sino com passagem por três nós e dois elementos (pontos 1, 2 e 3 da Fig. 4.6) na direção radial do elemento; na direção tangencial é considerado que nenhuma força é aplicada. A forma de sino foi escolhida para obter uma passagem suave entre os nós. Da maneira como foi proposta, a forma da excitação varia em função da quantidade de elementos que compõem o anel.

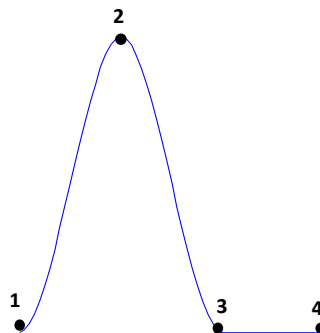


Figura 4.6 – Distribuição espacial de uma força na forma de sino.

A função que define esta distribuição é dada por:

$$f_E(t) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{3t^2}{T_0^2} - \frac{2t^3}{T_0^3} \right) \rightarrow -T_0 \leq t < 0 \\ F_0 \left(1 - \frac{3t^2}{T_0^2} - \frac{2t^3}{T_0^3} \right) \rightarrow 0 \leq t \leq T_0 \end{cases} \quad (4.30)$$

com F_0 é o ponto de máximo da força e T_0 o tempo de passagem de um elemento a outro é:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega Ne} \quad (4.31)$$

sendo Ne a quantidade de elementos que compõe o anel.

A parte superior da Eq. (4.30) é a função ascendente da excitação, forma espacial do ponto 1 ao 2 da Fig. 4.6, e a parte inferior da Eq. (4.30) é a função descendente da excitação, forma espacial do ponto 2 ao 3 da Fig. 4.6.

Como o método formulado está no domínio da frequência, é necessário que esta força também seja representada neste domínio. Aplicando a transformada de Fourier na Eq. (4.30), temos:

$$F_E(\omega) = \left(\frac{F_0}{\omega^4 T_0^3} \right) [24 + (-12 + 6i\omega T_0)e^{i\omega T_0} + 24 + (-12 + 6i\omega T_0)e^{-i\omega T_0}] \quad (4.32)$$

Devido ao deslocamento no tempo quando a força passa de um nó a outro, haverá uma defasagem das forças aplicadas nos nós no domínio da frequência. Dividindo a Eq. (4.32) pelo período obtemos os coeficientes da série de Fourier (Eq. (4.33)) para uma força na forma de seno deslocado de $m\Delta t$ periodizado com período τ , com o m o nó em que está o ponto máximo da força.

$$c_k = F_E(\omega_k) \frac{e^{\frac{-i\omega_k m \Delta t}{\tau}}}{\tau} \quad (4.33)$$

Sendo

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{\tau} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.34)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (4.35)$$

k é o termo da série de Fourier que está sendo avaliado.

A Eq. (4.33) pode ser rearranjada em função do número de elementos e contabilizada considerando o movimento da força contrário ao movimento do anel.

$$c_k = F_E(\omega_k) \frac{e^{-i\omega_k \frac{Ne-m}{Ne}}}{\tau} \quad m=1, 2, \dots, Ne \quad (4.36)$$

Assim, temos a matriz de rigidez e o vetor de carregamentos no domínio da frequência, então se podem obter os deslocamentos por:

$$U(\omega_k) = K^{-1}(\omega_k) F(\omega_k) \quad (4.37)$$

Para cada termo da série de Fourier (k) constrói-se o vetor de forças ($F(\omega_k)$) e a matriz espectral global ($K(\omega_k)$), então se avaliam os deslocamentos nas frequências discretas ($U(\omega_k)$). A resposta no tempo é computada pela somatória dos termos ($U(\omega_k)$) pela série de Fourier.

$$u(t) = \sum_{k=1}^M U(\omega_k) e^{\frac{i2\pi kt}{\tau}} \quad (4.38)$$

onde M é o número de termos da série de Fourier utilizado para calcular a resposta no tempo.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

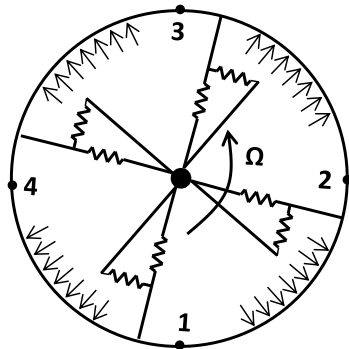
A validação numérica do elemento de anel rotativo é feita comparando a resposta forçada e os modos operacionais de um anel uniforme obtido por elementos espectrais com os resultados adquiridos por elementos finitos e pela solução analítica. As propriedades geométricas do anel uniforme são raio $R = 0.25\text{m}$, largura $b = 0.15\text{m}$, altura $h = 0.002\text{m}$, densidade $\rho = 7200 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidade $E = 220 \text{ GPa}$, sendo a área da seção transversal retangular $A=bh$ e momento de inércia de área $I=bh^3/12$.

O modelo em elemento espectral é composto por quatro elementos (Fig. 5.1a). O modelo em elementos finitos é construído e simulado no software comercial Ansys® (Fig. 5.1b), ele é tridimensional e formado por SOLID185 do Ansys® com 9480 elementos e 19592 nós. O método de elementos finitos é utilizado somente para validar os efeitos de rotação. A solução analítica da resposta livre de um anel uniforme com pressão interna e fundação elástica é mostrada no Apêndice A e utilizada para validar todos os efeitos.

O elemento SOLID185 do Ansys® é usado para modelar estruturas tridimensionais; é composto por oito nós, possuindo três graus de liberdade por nó, ou seja, as translações nas três direções. Este elemento possibilita a modelagem de plasticidade, hiperelasticidade, enrijecimento por tensão, grandes deflexões e grandes deformações, entre outros efeitos. Foi empregado neste trabalho, pois permite a inclusão da aceleração de Coriolis e tensão induzida pela rotação nos cálculos.

O Ansys® é um software muito difundido nas áreas de engenharia e ciências para simulação de estruturas, fluidos, materiais, componentes elétricos, entre outros. Utilizou-se a resposta harmônica e a resposta modal do módulo estrutural. O efeito de rotação foi incluído através do comando CORIOLIS em um sistema de referência girante e o comando SSTIF foi utilizado para uma correta formulação da tensão induzida pela rotação. Verificou-se que o software provoca um erro de cálculo em altas velocidades de rotação; isto aconteceu neste modelo para velocidades de rotação acima de 100 rad/s.

(a)



(b)

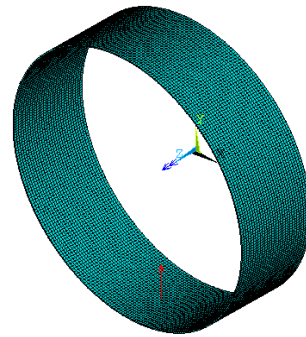


Figura 5.1 – Modelo de anel rotativo: SEM (a) e FEM construído no Ansys® (b).

A resposta forçada é obtida, a não ser que haja alguma observação, pela aplicação de uma força de um Newton na direção radial e pela medida da resposta de deslocamento radial no mesmo nó (Fig. 5.2).

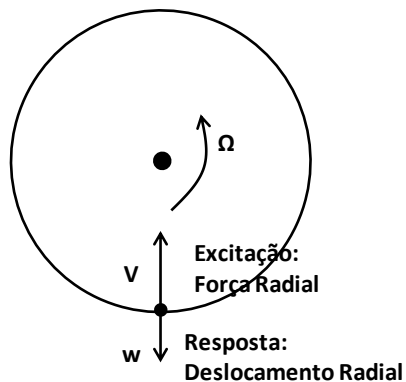


Figura 5.2 – Localização da excitação e da resposta para o cálculo da resposta forçada.

5.1 Efeitos da Rotação: Aceleração de Coriolis e Tensão Induzida pela Rotação

Nesta seção serão investigados apenas os efeitos de rotação. A pressão interna, a fundação elástica e o amortecimento estrutural serão negligenciados.

5.1.1 Relação Espectral

Usando a Eq. (4.4) os gráficos da relação espectral foram obtidos e são mostrados na Fig. 5.3. A parte real dos números de onda corresponde à onda que se propaga, a parte imaginária corresponde à onda evanescente. Os números de onda são obtidos para cada frequência e ordenados pela Eq. (4.6). Então, pela Eq. (4.10), as razões de amplitude são encontradas (Fig. 5.4).

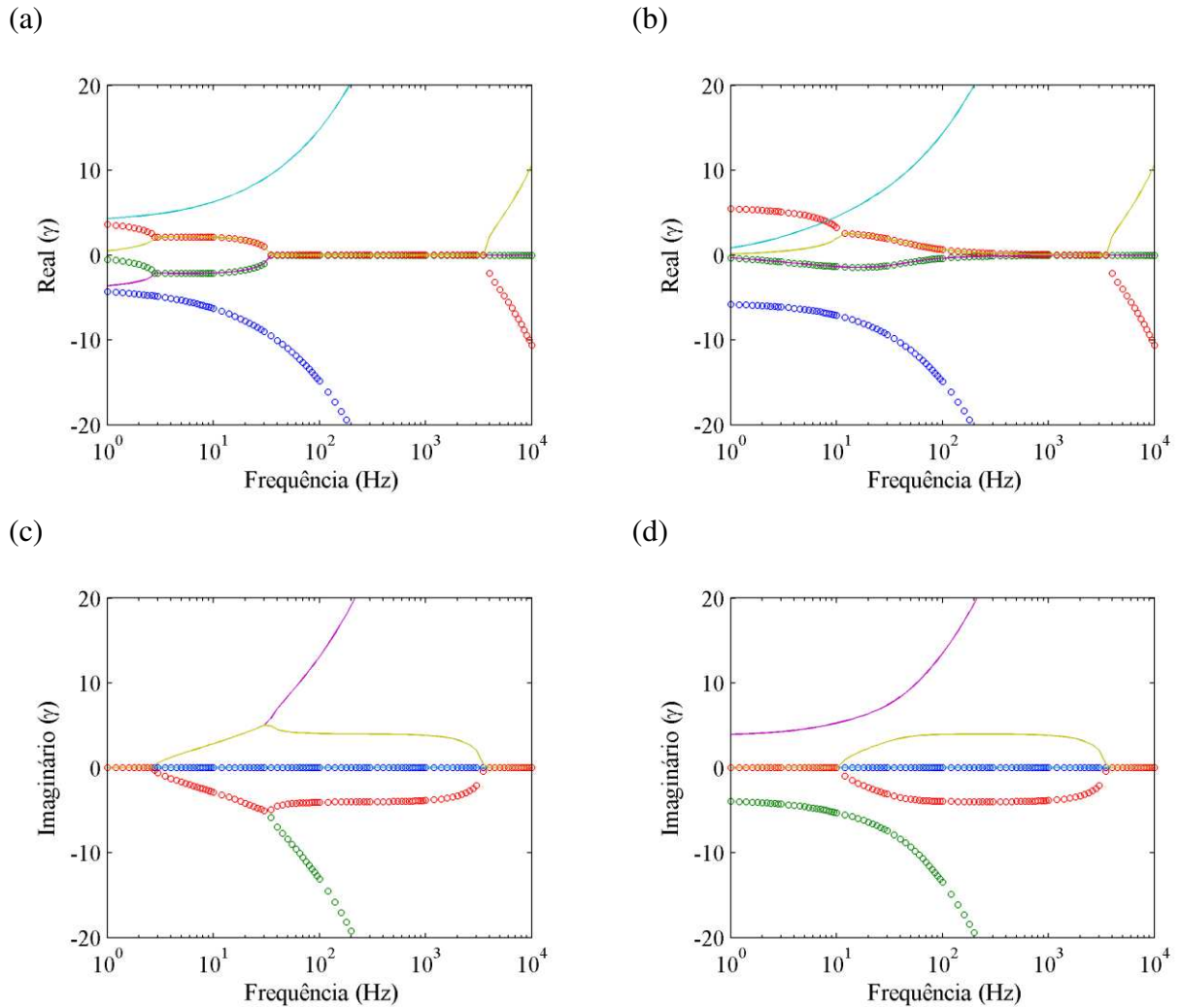


Figura 5.3 – Relação espectral para anel estacionário (a,c) e para anel rotativo com $\Omega = 50$ rad/s (b,d). Números de onda positivos (-) e números de onda negativos (o).

Para o caso de anel estacionário, as partes real e imaginária dos números de onda que propagam no sentido positivo e negativo são simétricas. Isto não acontece no caso do anel rotativo por causa dos termos de aceleração de Coriolis e tensão centrífuga induzida. Do mesmo modo, as razões de amplitude que são coincidentes para $\Omega = 0$, não o são para $\Omega \neq 0$.

(a)

(b)

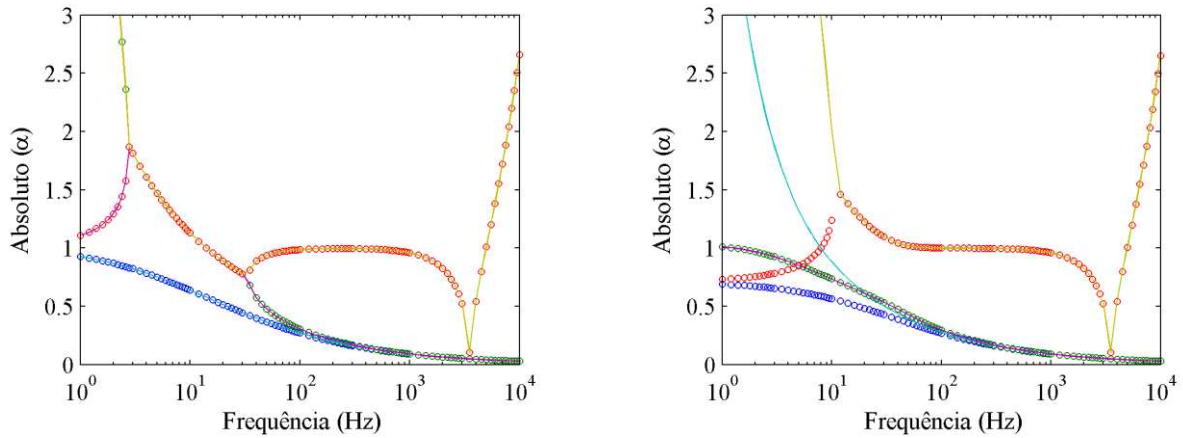


Figura 5.4 – Razão de amplitude para anel estacionário (a) e para anel rotativo com $\Omega = 50$ rad/s (b). Números de onda positivo (-) e números de onda negativo (o).

A relação espectral e a razão de amplitude de um anel rotativo, quando comparadas com o caso do anel estacionário são similares em altas frequências e apresentam grandes diferenças nas baixas frequências.

5.1.2 Resposta Forçada

Pela formulação desenvolvida no Capítulo 4, aplicando uma força na direção radial em somente um nó, podemos calcular os deslocamentos nos nós para cada frequência e traçar as FRFs (Fig. 5.5).

Na FRF do anel estacionário (Fig. 5.5a), os picos de ressonância coincidem com os modos analíticos de flexão, com os do modelo desenvolvido por Delamotte *et. al.* (2008), e com os resultados obtidos pelo FEM. Os resultados em elementos finitos tem uma pequena divergência com relação aos outros métodos nas altas frequências.

Na FRF do anel rotativo (Fig. 5.5b), ocorre uma bifurcação das frequências naturais devida à aceleração de Coriolis. Também os picos são deslocados para frequências mais altas em relação aos modos de flexão analíticos de um anel estacionário devido à tensão centrífuga induzida pela rotação, que aumenta a rigidez do anel. Como no caso do anel estacionário, os resultados quando comparados com os dos elementos finitos e da solução analítica, convergem. O modelo em FEM diverge em altas frequências e as antirressonâncias ocorrem em diferentes locais do espectro quando comparado ao modelo em SEM.

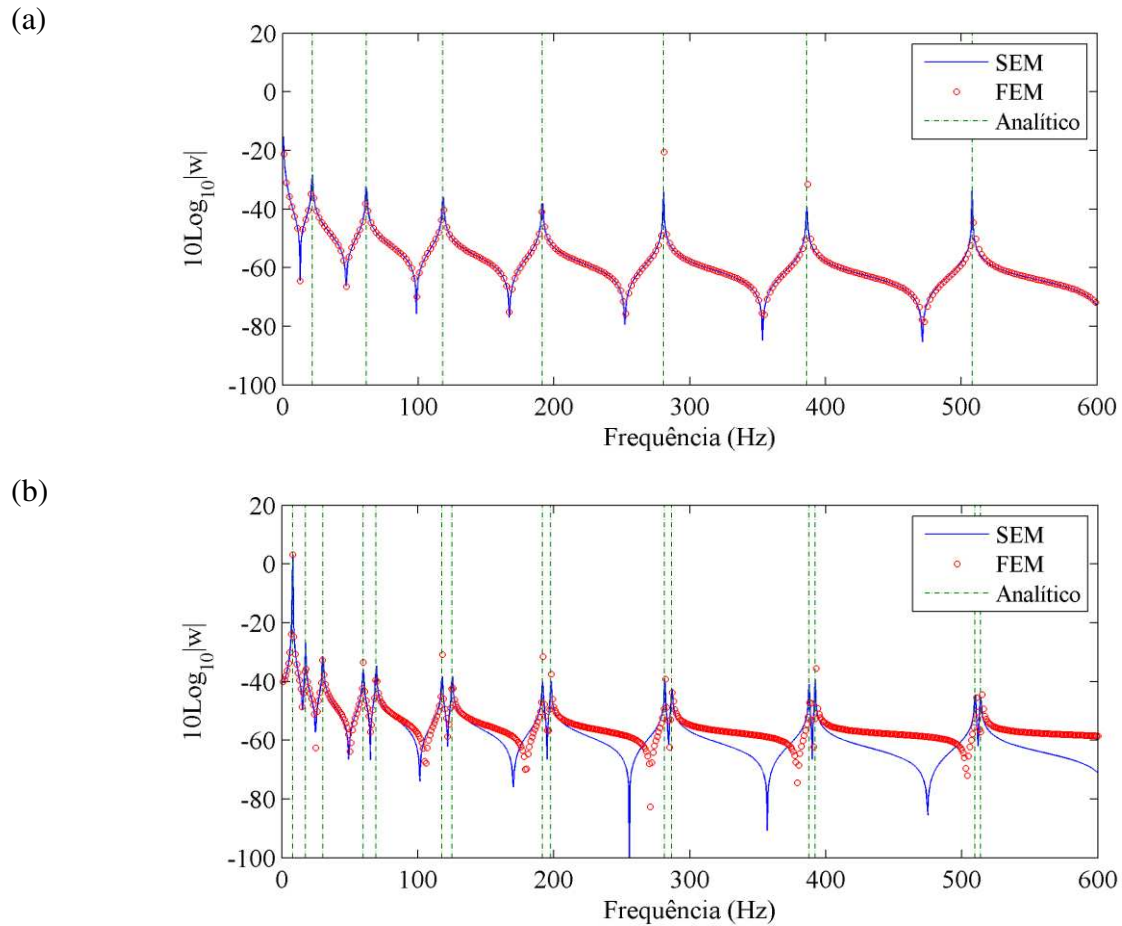
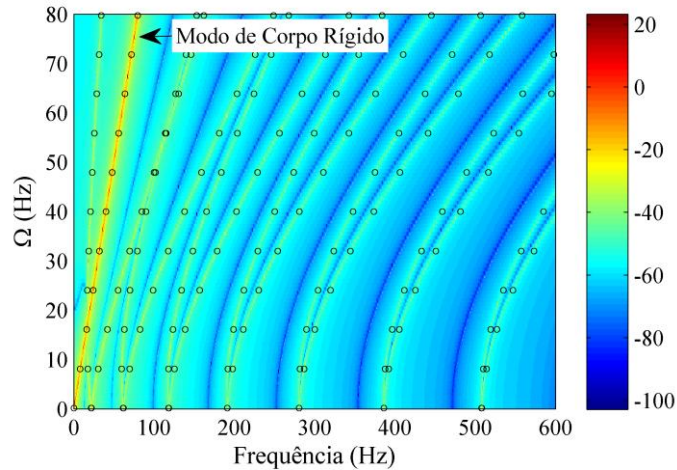


Figura 5.5 – FRFs do anel estacionário (a) e do anel rotativo com $\Omega = 50$ rad/s (b): SEM (-), FEM (o) e solução analítica (linhas verticais).

A diferença nas ressonâncias em altas frequências é prevista podendo ocorrer devido ao refinamento da malha espacial e/ou porque o modelo espectral é desenvolvido segundo a teoria de Euler-Bernoulli que não leva em conta os efeitos de inércia rotacional e cisalhamento.

Enquanto o modelo em FE é tridimensional, o modelo em SEM está no plano, o que pode explicar as diferenças nas antirressonâncias. O tempo computacional para calcular o modelo em SEM foi menor que o tempo computacional para calcular o modelo em FEM

(a)



(b)

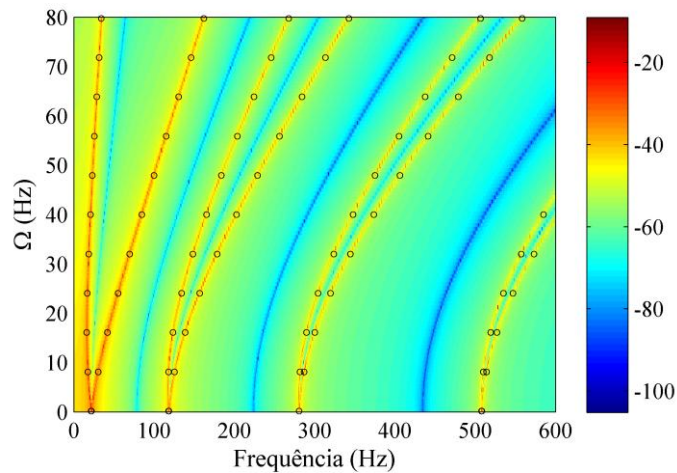


Figura 5.6 – Mapas das FRFs pela velocidade de rotação. Uma força aplicada (a) e duas forças opostas aplicadas (b): SEM (mapa contínuo) e solução analítica (o).

As respostas forçadas para diferentes velocidades de rotação são traçadas na Fig. 5.6. Na Fig. 5.6a somente uma força radial é aplicada (Fig. 5.7a), enquanto que na Fig. 5.6b duas forças radiais opostas são aplicadas, o qual elimina o modo de corpo rígido. Na Fig. 5.6 é possível

identificar as bifurcações das frequências naturais com o aumento da velocidade de rotação e que a distância da bifurcação das frequências naturais é maior para os modos de baixa frequência.

No primeiro caso (Fig. 5.6a, Fig.5.7a), devido à configuração de forças, o modo de corpo rígido é excitado, e o centro do anel é deslocado movendo-se em um círculo com frequência angular igual à velocidade angular de rotação. Quando duas forças opostas são incluídas (Fig.5.6b, Fig. 5.7b), o modo de corpo rígido não é excitado, as forças estão em equilíbrio no espaço e o centro do anel não se move. Neste caso, os modos ímpares são eliminados também porque a configuração das forças possibilita somente a excitação dos modos pares.

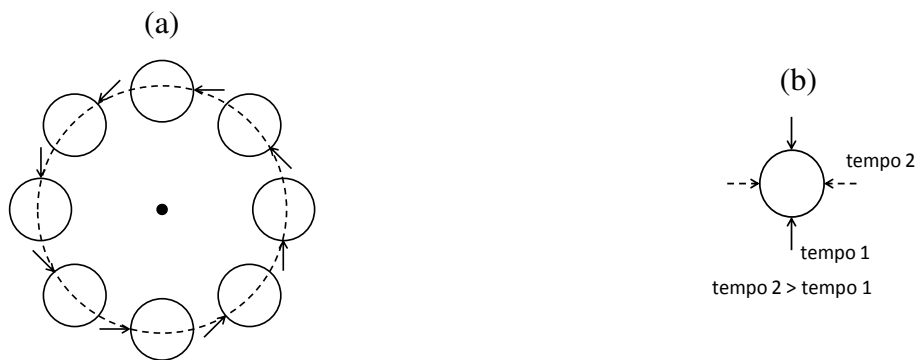


Figura 5.7 – Configuração das forças aplicadas. Uma força aplicada (a) e duas forças opostas aplicadas (b).

5.1.3 Modos e Frequências Operacionais

Para o modelo em SEM, os modos foram calculados pela resposta forçada de uma força aplicada, o qual possibilita o aparecimento de todos os modos. As frequências operacionais que coincidem com os modos do anel (picos de ressonância da Fig. 5.6b) são escolhidas para computar os resultados. Nas ressonâncias, os deslocamentos nodais são calculados. A Eq. (4.22) é usada para interpolar a resposta para os outros pontos, além dos quatro nós do modelo, e obter uma melhor definição espacial das formas modais.

Os modos de flexão ocorrem em todo o espectro de frequência e são de interesse na maioria dos problemas porque eles são predominantes em baixas frequências. Os modos de extensão aparecem nas altas frequências.

As formas modais são uma combinação dos deslocamentos radiais e tangenciais. Nos modos de flexão predominam os deslocamentos radiais enquanto nos modos de extensão

predominam os deslocamentos tangenciais. Cada forma modal tem duas frequências de ressonância devido ao efeito de Coriolis.

Para uma velocidade angular de 50 rad/s os valores de frequências e formas modais operacionais são computadas e comparadas com as predições do modelo em FEM e com a solução analítica (Tabela 5.1, Tabela 5.2). As formas modais de flexão e extensão coincidem para os três métodos e são traçadas nas Fig. 5.8 e Fig. 5.9.

Tabela 5.1 – Frequências de flexão (Hz) para $\Omega=50$ rad/s.

Modo de Flexão	SEM	FEM	Analítico
1	7.96	7.96	7.96
	17.4	17.4	17.4
2	30.2	30.2	30.2
	59.8	59.8	59.8
3	69.3	69.3	69.3
	117.8	117.9	117.8
4	125.3	125.4	125.3
	191.7	191.9	191.7
5	197.8	198.0	197.8
	281.6	282.0	281.6
6	286.8	287.2	286.8

Tabela 5.2 – Frequências de extensão (Hz) para $\Omega=50$ rad/s.

Modo de Extensão	SEM	FEM	Analítico
1	4968.8	4969.1	4968.8
	4984.7	4985.0	4984.7
2	7862.6	7863.5	7862.6
	7875.3	7876.2	7875.3
3	11123.6	11125.9	11123.6
	11133.1	11135.5	11133.1

Como as equações do movimento são a mesma para a solução analítica e para o SEM, as frequências naturais são as mesmas. O primeiro modo de flexão corresponde ao modo de corpo rígido e possui o valor da velocidade angular, os outros modos tem o número de comprimento de onda de acordo com o número do modo.

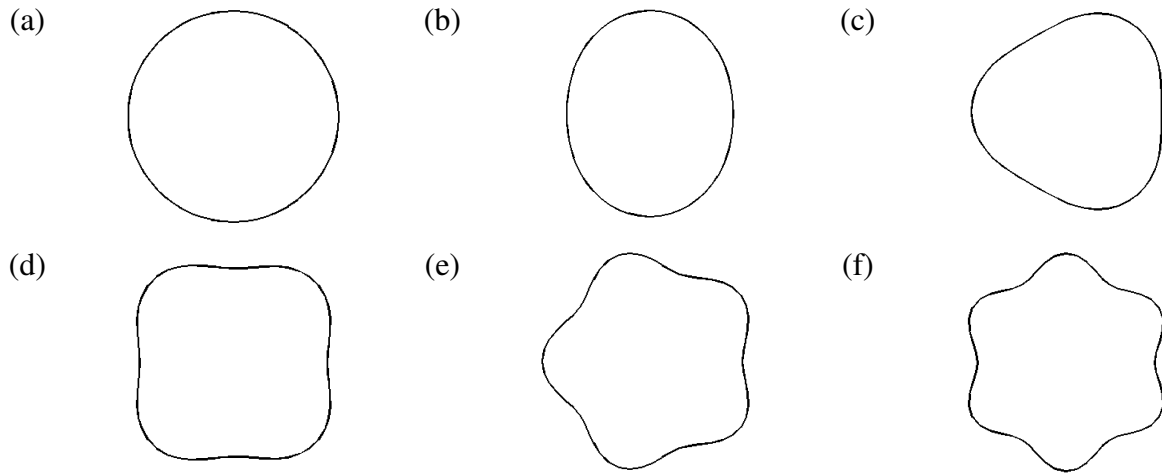


Figura 5.8 – Formas modais de flexão para $\Omega=50$ rad/s. Modo de flexão: 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 5 (e) e 6 (f).

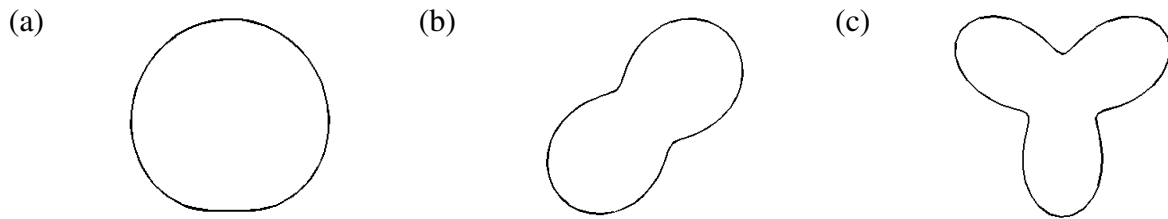


Figura 5.9 – Formas modais de extensão para $\Omega=50$ rad/s. Modo de extensão: 1 (a), 2 (b) e 3 (c).

A relação espectral e a resposta forçada quando outros efeitos, como pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural, são levados em conta irão ser investigados usando as equações da seção 4.2, metodologia da seção 4.1 e o mesmo procedimento da análise dos efeitos da rotação.

5.2 Pressão Interna

Empregando uma pressão interna de 1 bar e velocidade de rotação de 50 rad/s, o efeito de pressão interna será investigado. Os efeitos de fundação elástica e amortecimento estrutural não são considerados nesta subseção.

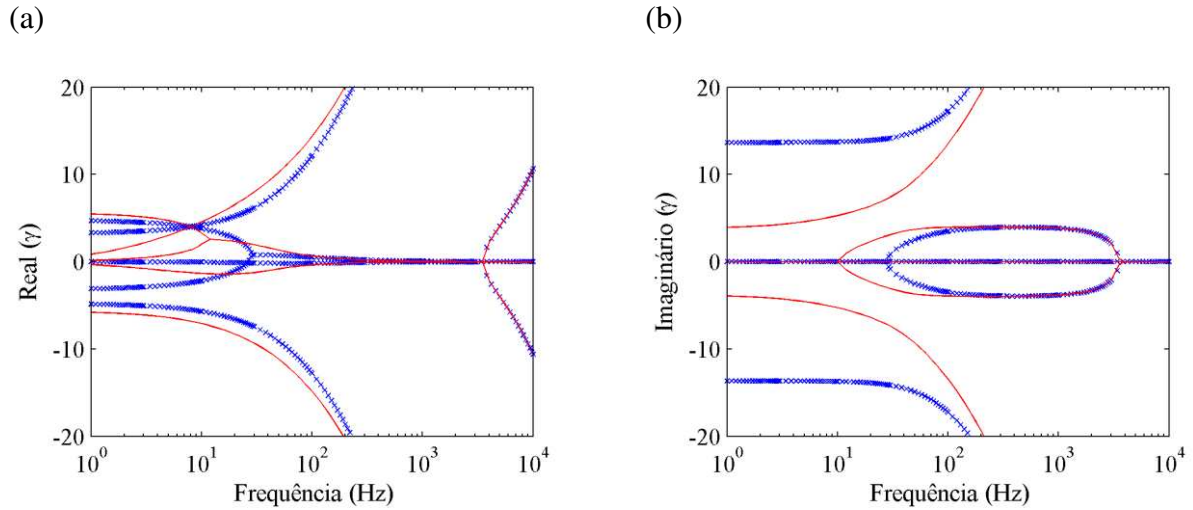


Figura 5.10 – Pressão interna - Parte real (a) e imaginária (b) dos números de onda: $p_0 = 1$ bar (x) e $p_0 = 0$ (-).

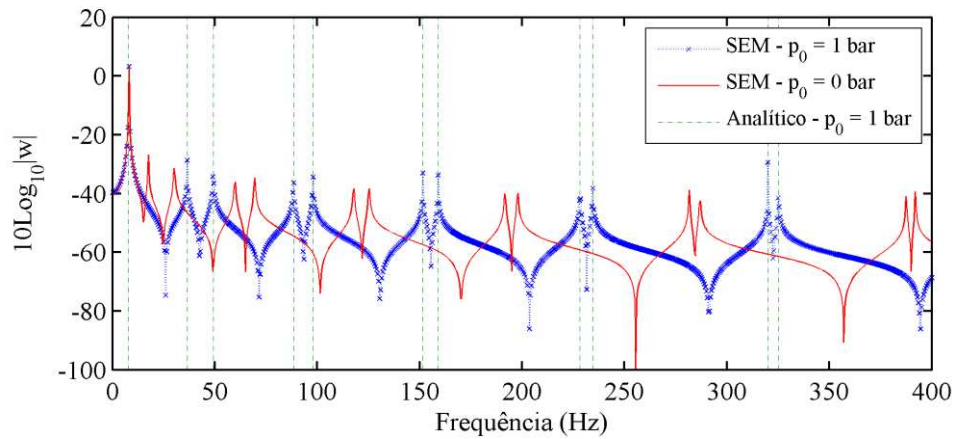
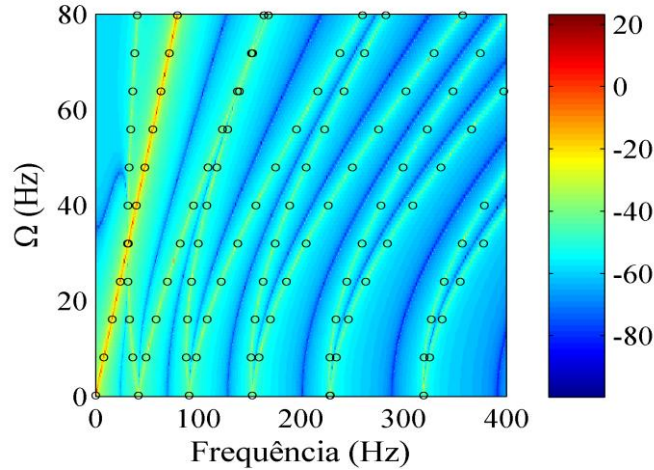


Figura 5.11 – FRF para análise de pressão interna: SEM para $p_0 = 1$ bar (--x--), SEM para $p_0 = 0$ bar (-) e solução analítica para $p_0 = 1$ bar (linhas verticais).

A pressão interna influencia as baixas e médias frequências da relação espectral (Fig. 5.10), modificando as partes real e imaginária dos números de onda de zero até uma determinada frequência, neste caso até 10^3 Hz.

(a)



(b)

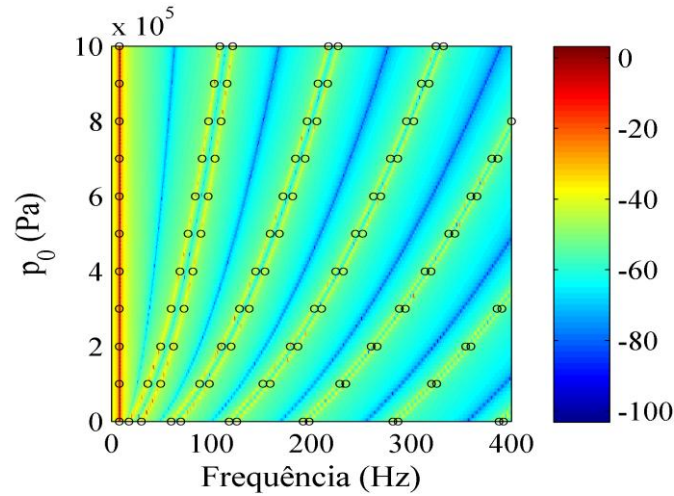


Figura 5.12 – Mapa de FRF por Ω com $p_0 = 1$ bar (a) e mapa de FRF pela pressão interna com $\Omega = 50$ rad/s (b): SEM (mapa contínuo) e solução analítica (o).

Na FRF da Fig. 5.11, os picos de ressonância são deslocados para frequências mais altas de acordo com o aumento da pressão interna. Isto ocorre porque a pressão interna aumenta a rigidez do anel. O mapa da amplitude da FRF pela velocidade de rotação com pressão interna (Fig. 5.12a) tem o mesmo formato que o mapa da amplitude da FRF pela velocidade de rotação sem

pressão interna (Fig. 5.6a), mas os picos de ressonância são deslocados para direita do espectro de frequências devido à pressão interna.

No mapa de amplitude da FRF pela pressão interna com velocidade de rotação constante de 50 rad/s (Fig. 5.12b), o efeito da pressão interna é não linear e muda com a frequência. O par de frequências da bifurcação devido à rotação segue a mesma tendência e os modos das altas frequências são mais influenciados pela pressão interna. Como esperado, o modo de corpo rígido não é influenciado por este parâmetro.

5.3 Fundação Elástica

Nesta subseção uma fundação elástica com valores de rigidez de mola radial e tangencial de 10^4 N/m^3 é estudada com velocidade de rotação de 50 rad/s. Os efeitos de pressão interna e amortecimento estrutural não são considerados.

A fundação elástica modifica a relação espectral em baixas frequências. Neste caso, modifica levemente as partes real e imaginária dos números de onda na faixa de 0 a 100 Hz (Fig. 5.13).

A bifurcação do modo de corpo rígido devida à fundação elástica pode ser vista na FRF da Fig. 5.14. Aparecem duas frequências correspondentes às rigidezes radial e tangencial da fundação. Os modos de flexão em baixas frequências são levemente deslocados para frequências mais altas, isto é, o sistema se torna mais rígido.

No mapa de FRF por Ω com fundação elástica (Fig. 5.15a) aparece a bifurcação do modo de corpo rígido, o qual permanece linear com a rotação, a rotação não age na bifurcação deste modo e o intervalo que separa estas frequências é o mesmo variando a velocidade de rotação. Quando se tem uma fundação elástica e Ω é igual a zero, o sistema torna-se um problema de massa-mola com as molas radial e tangencial em paralelo. Então, os modos de corpo rígido não começam em zero e as duas frequências têm o mesmo valor.

Na análise da FRF pela rigidez da fundação elástica (Fig. 5.15b), é considerado que as rigidezes radial e tangencial têm o mesmo valor. A bifurcação do modo de corpo rígido não é linear com a rigidez da mola enquanto que os outros modos tem uma relação linear.

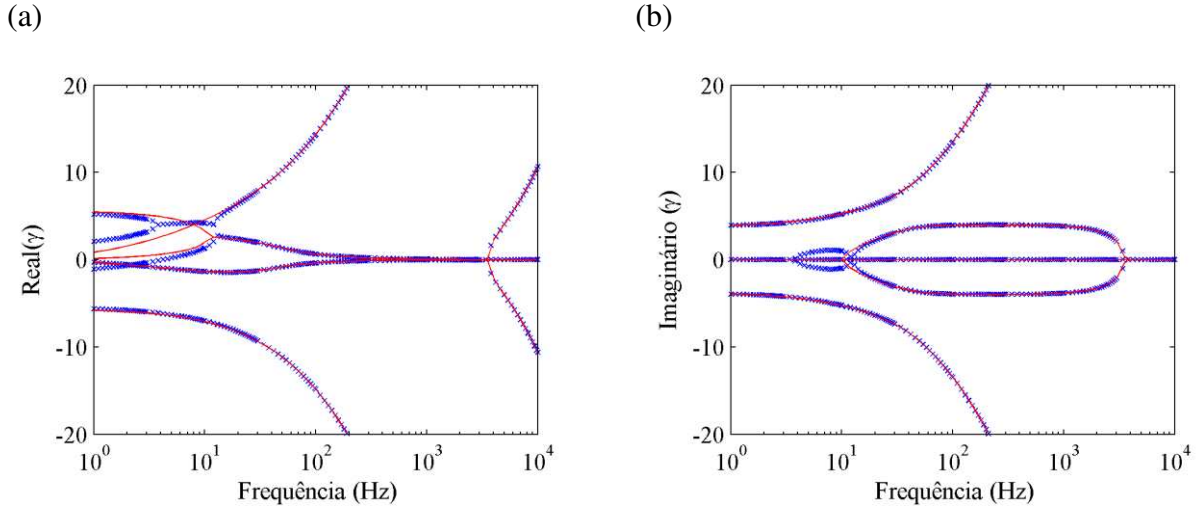


Figura 5.13 – Fundação Elástica - Parte real (a) e imaginária (b) dos números de onda: $k_w = k_u = 10^4 \text{ N/m}^3$ (x) and $k_w = k_u = 0$ (-).

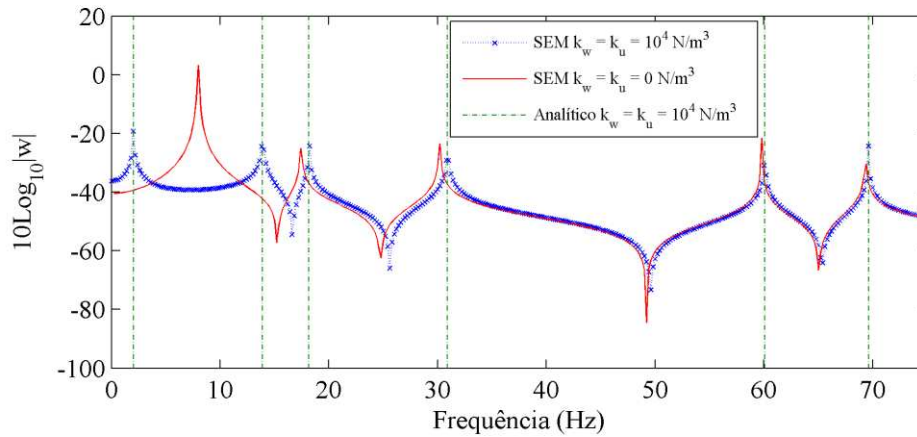
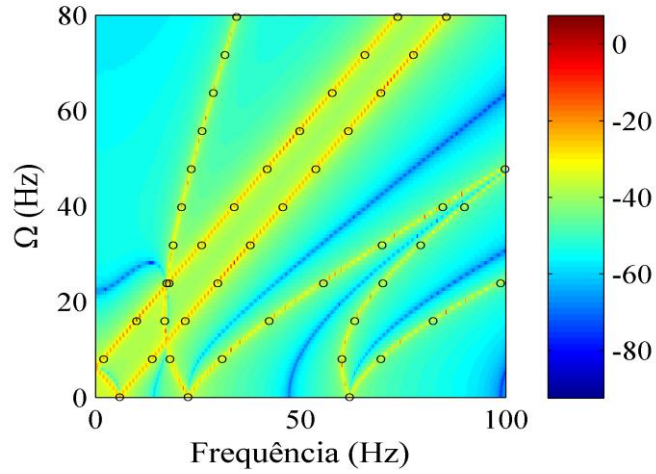


Figura. 5.14 – FRF para análise da fundação elástica: SEM com $k_w = k_u = 10^4 \text{ N/m}^3$ (-x-), SEM com $k_w = k_u = 0$ (-) e solução analítica com $k_w = k_u = 10^4 \text{ N/m}^3$ (linhas verticais).

(a)



(b)

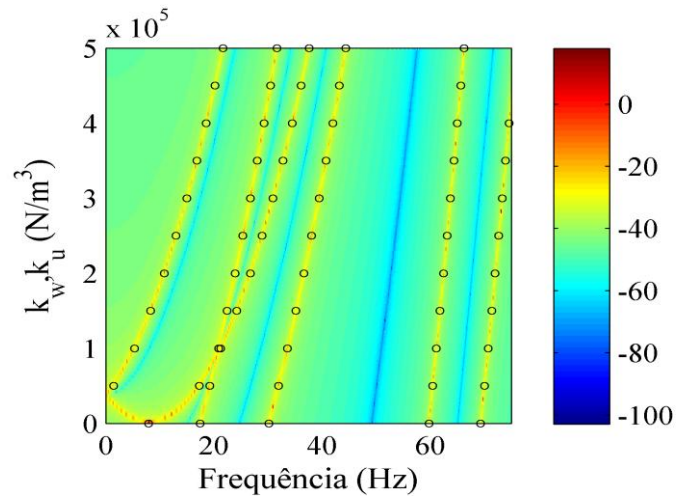


Figura 5.15 – Mapa da FRF por Ω com $k_w = k_u = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ (a) e mapa da FRF pela rigidez da fundação elástica com $\Omega = 50 \text{ rad/s}$ (b): SEM (mapa contínuo) e solução analítica (o).

5.4 Amortecimento Estrutural

Nesta subseção um amortecimento estrutural de 0,01 com uma velocidade de rotação de 50 rad/s é utilizado. Os efeitos de pressão interna e amortecimento estrutural não são considerados.

O amortecimento estrutural influencia as partes reais e imaginárias dos números de onda que são zero ou próximas de zero (Fig. 5.16), aumentando para valores maiores à medida que a frequência aumenta, como uma bifurcação em relação à frequência. Para valores maiores de amortecimento, esta característica é acentuada.

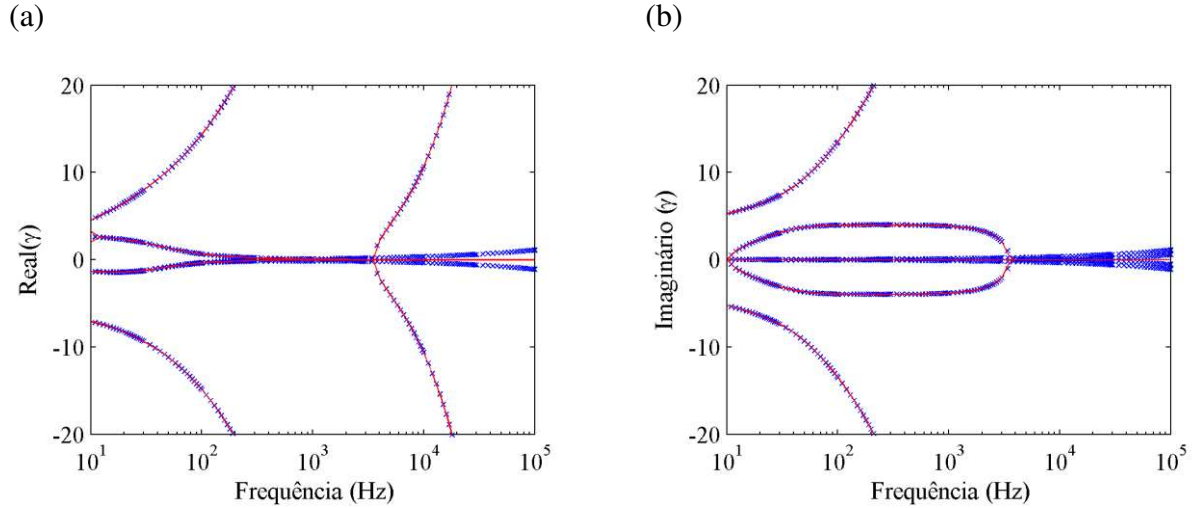


Figura 5.16 – Amortecimento Estrutural - Parte real (a) e imaginária (b) dos números de onda para $\eta = 0.01$ (x) e $\eta = 0$ (-).

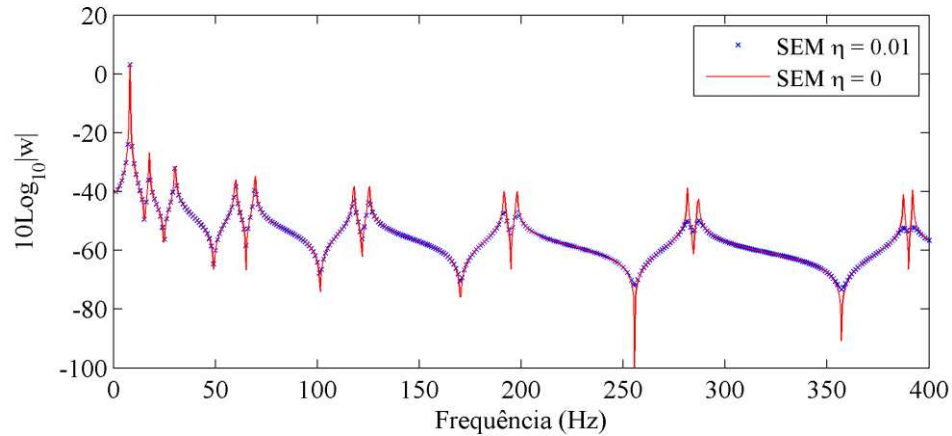


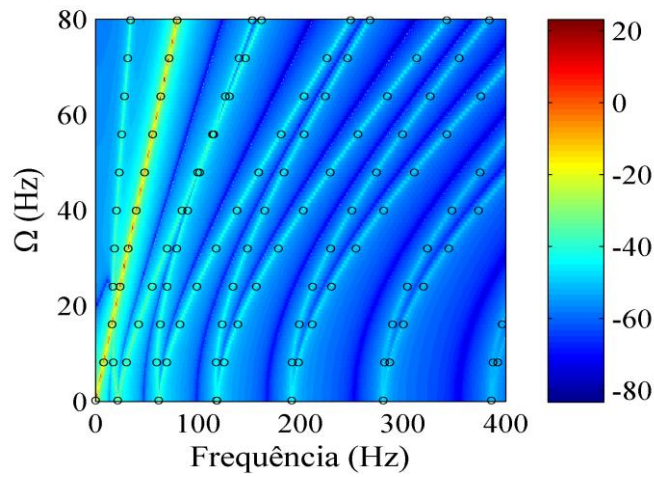
Figura 5.17 – FRF para análise do amortecimento estrutural: SEM para $\eta = 0.01$ (x) e SEM para $\eta = 0$ (-).

A Fig. 5.17 mostra que o amortecimento estrutural diminui a amplitude dos picos de ressonância sem modificar as frequências de ressonância. A amplitude do modo de corpo rígido

não é influenciada e as amplitudes dos picos de ressonância diminuem com o aumento da frequência. Nas altas frequências, devido ao amortecimento, somente um pico de ressonância pode aparecer, levando à falsa impressão que existe somente uma ressonância ao invés de duas.

Nota-se que não há influência no modo de corpo rígido e os picos de ressonância das mais altas ordens são os mais amortecidos. O pico da ressonância é diminuído, porém os valores das frequências se mantêm os mesmos. Dependendo da frequência e da velocidade de rotação, não é possível distinguir uma bifurcação que ocorreria no caso sem amortecimento.

(a)



(b)

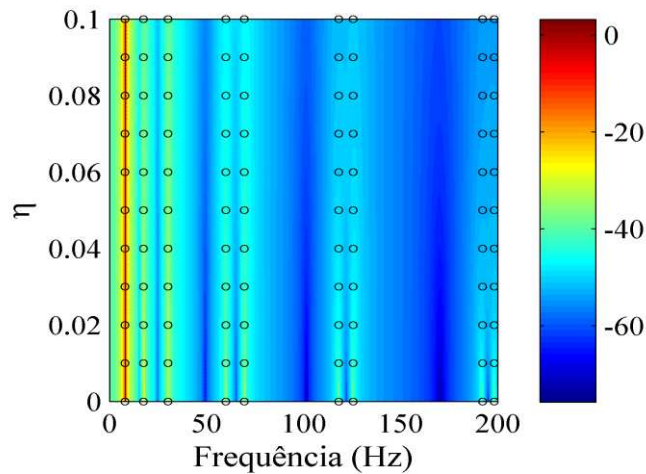


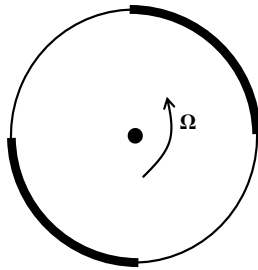
Figura 5.18 – Mapa de FRF por Ω com $\eta = 0.01$ (a) e mapa de FRF versus amortecimento estrutural com $\Omega = 50$ rad/s (b): SEM (mapa contínuo) e solução analítica (o).

O mapa de FRF por Ω com amortecimento estrutural (Fig. 5.18a) tem o mesmo comportamento da Fig. 5.6a, somente a amplitude das ressonâncias são menores. No mapa de FRF pelo amortecimento estrutural (Fig. 5.18b), pode ser visto que o amortecimento estrutural não influencia as ressonâncias e que suas amplitudes diminuem com o aumento no valor do amortecimento.

5.5 Não Uniformidades no Anel Girante

Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver um método capaz de simular anéis rotativos com não uniformidades. Nos dois exemplos da Fig. 5.19, são negligenciados os efeitos da pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural. As imperfeições são incluídas pela simples diferença de propriedades dos elementos que compõe o anel.

(a)



(b)

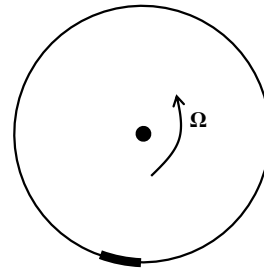


Figura 5.19 – Modelos de anel rotativo com não uniformidades: quatro seções (a) e imperfeição local (b)

No primeiro exemplo, um anel rotativo de quatro seções com $R = 0,025$ m é construído com quatro elementos de mesmo material – $E = 220$ GPa e $\rho = 7200$ kg/m³ – e diferentes seções transversais. Dois elementos com $b = 0,02$ m e $h = 0,002$ m são intercalados com dois elementos com $b = 0,01$ m e $h = 0,001$ m (Fig. 5.19a). A resposta forçada é computada para $\Omega = 100$ rad/s e comparada com um anel uniforme com $b = 0,02$ m e $h = 0,002$ m em todos os elementos (Fig. 5.20).

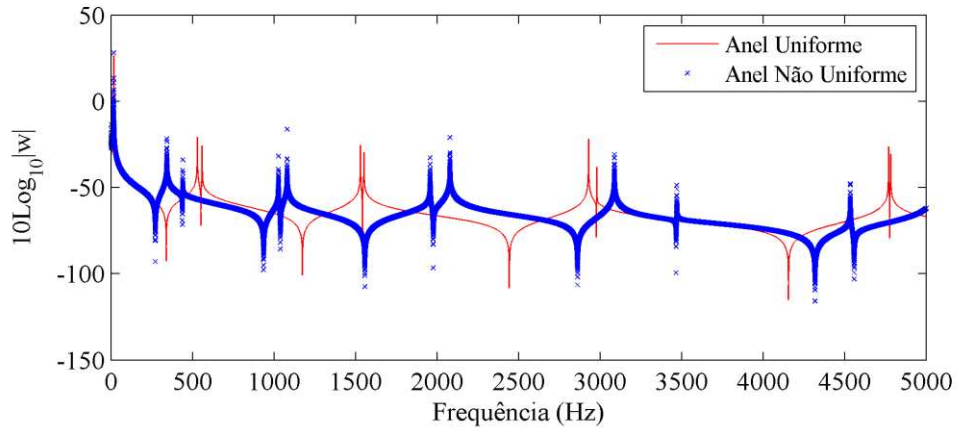


Figura 5.20 – FRF para análise de um anel rotativo com quatro seções: anel não uniforme (x) e anel uniforme (-).

No segundo exemplo, um anel rotativo de $R = 0,25$ m, $h = 0,002$ m e $b = 0,15$ m é construído com 36 elementos (Fig. 5.19b). Um dos elementos é modelado como uma imperfeição com diferentes módulo de Young $E = 1100$ GPa e densidade $\rho = 14400$ kg/m³. A resposta forçada é calculada para $\Omega = 100$ rad/s e comparada com a de um anel uniforme com $E = 220$ GPa e $\rho = 7200$ kg/m³ em todos os elementos (Fig. 5.21).

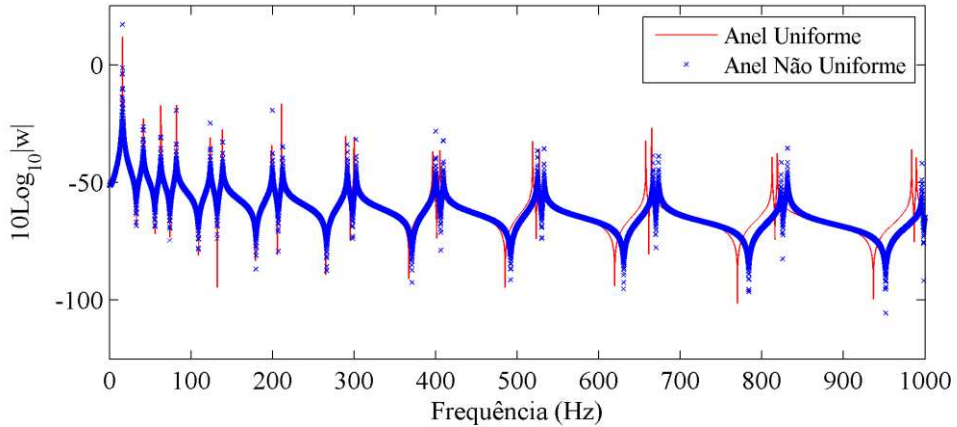


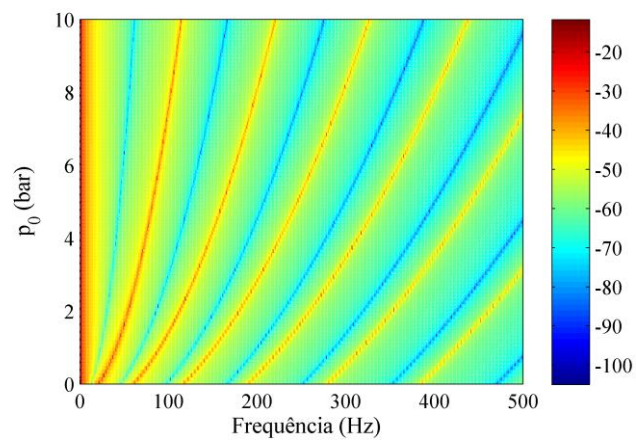
Figura 5.21 – FRF para análise de um anel rotativo com imperfeição local: anel não uniforme (x) e anel uniforme (-).

Na Fig. 5.20, as ressonâncias ocorrem em diferentes frequências quando comparadas a um anel uniforme, somente o modo de corpo rígido é coincidente nos dois casos. Para Fig. 5.21, as

ressonâncias coincidem em baixas frequências e divergem nas altas frequências. Com a inclusão de não uniformidades no modelo, nenhum novo modo é criado no espectro de frequência analisado.

5.6 Pressão Interna - Vaso de Pressão e Corda Elástica

(a)



(b)

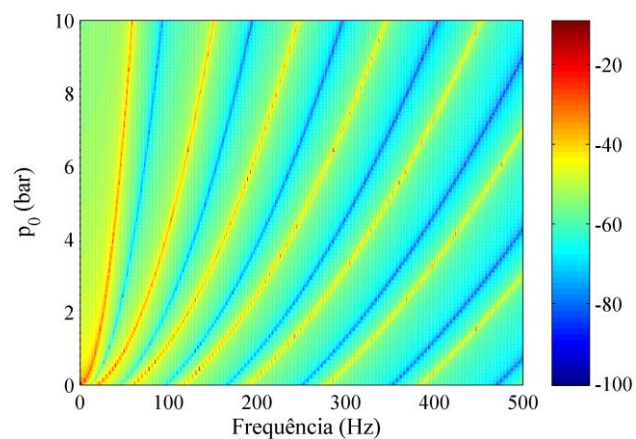


Figura 5.22 – Mapa de FRF pela pressão interna com $\Omega = 0$ rad/s para formulação da pressão interna por vaso de pressão (a) e corda elástica tensionada (b).

Na formulação desenvolvida neste trabalho, a pressão interna foi inserida seguindo a teoria de vasos de pressão, porém há diversas maneiras de incluí-la no anel. Delamotte *et al.* (2008) adiciona a pressão interna nas equações do movimento de um anel estacionário utilizando a teoria de corda elástica sob tensão (Apêndice B).

Enquanto nas equações apresentadas a pressão interna aparece nas equações de flexão e extensão sendo multiplicada pelas deformações radial e tangencial, nas equações apresentadas em Delamotte *et al.* (2008) a pressão interna influencia apenas a equação de flexão e é multiplicada apenas por termos de deformação radial.

Nesta subseção comparam-se estas duas formulações através da resposta forçada para um anel homogêneo com as mesmas características usadas na validação e com pressão interna de 5 bar (Fig. 5.22 e Fig. 5.23), os efeitos de fundação elástica e amortecimento estrutural são negligenciados e $\Omega = 0$ rad/s.

Traçam-se os mapas de FRF por pressão interna com $\Omega = 0$ rad/s para a formulação pela teoria de vasos de pressão (Fig. 5.22a) e teoria de corda elástica tensionada (Fig. 5.22b). A diferença principal entre as formulações é em baixas frequências e no modo de corpo rígido. Enquanto no primeiro caso (Fig. 5.22a) o modo de corpo rígido não é influenciado pela pressão interna, no segundo caso (Fig. 5.22b) o modo de corpo rígido é deslocado para frequências mais altas à medida que a pressão aumenta e possui uma relação não linear com este parâmetro.

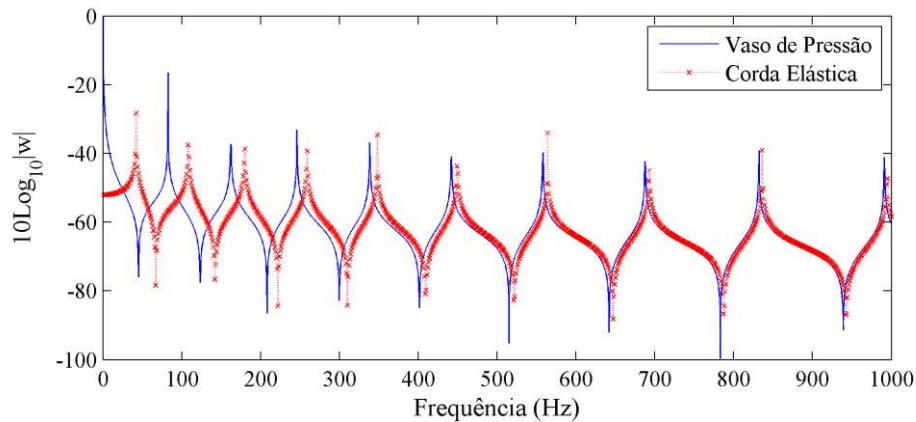


Figura 5.23 – FRF para análise do tipo de formulação da pressão interna com $p_0 = 5$ bar: teoria de vaso de pressão (-) e teoria de corda elástica tensionada (-x-).

Na Fig. 5.23 nota-se que para as baixas frequências a diferença nas frequências de ressonância é grande; à medida que o valor do espectro aumenta, as duas formulações convergem para as mesmas frequências. Maiores diferenças são encontradas para maiores valores de pressão interna.

5.7 Anel Girante com Força Estacionária

Utilizando o equacionamento da seção 4.3 calcula-se a resposta forçada no tempo para o anel rotativo com força estacionária na forma de seno. Emprega-se um anel homogêneo com as mesmas características e propriedades usadas na validação, a resposta é avaliada com 25 termos da série de Fourier.

A resposta temporal para um anel composto por diferentes quantidades de elementos é apresentada na Fig. 5.24. Uma boa convergência da resposta é observada para diferentes números de elementos e velocidades de rotação. A forma da resposta é a mesma para todos os gráficos, porém ainda há pequenas diferenças de amplitude.

Na Fig. 5.25 traça-se a amplitude da resposta temporal pela velocidade do anel. Nota-se que em algumas velocidades a amplitude é elevada, indicando que o mesmo passou por uma ressonância. A resposta converge para diferentes números de elementos.

Ainda é necessária a validação dos resultados desta subseção através de outros métodos. No Apêndice A, mostram-se a formulação e os resultados para resposta analítica de um anel girante com força estacionária e de um anel estacionário com força girante sendo o anel homogêneo e a força harmônica pontual. Num próximo trabalho, estes resultados podem servir de base para validação do elemento espectral de anel girante com força estacionária.

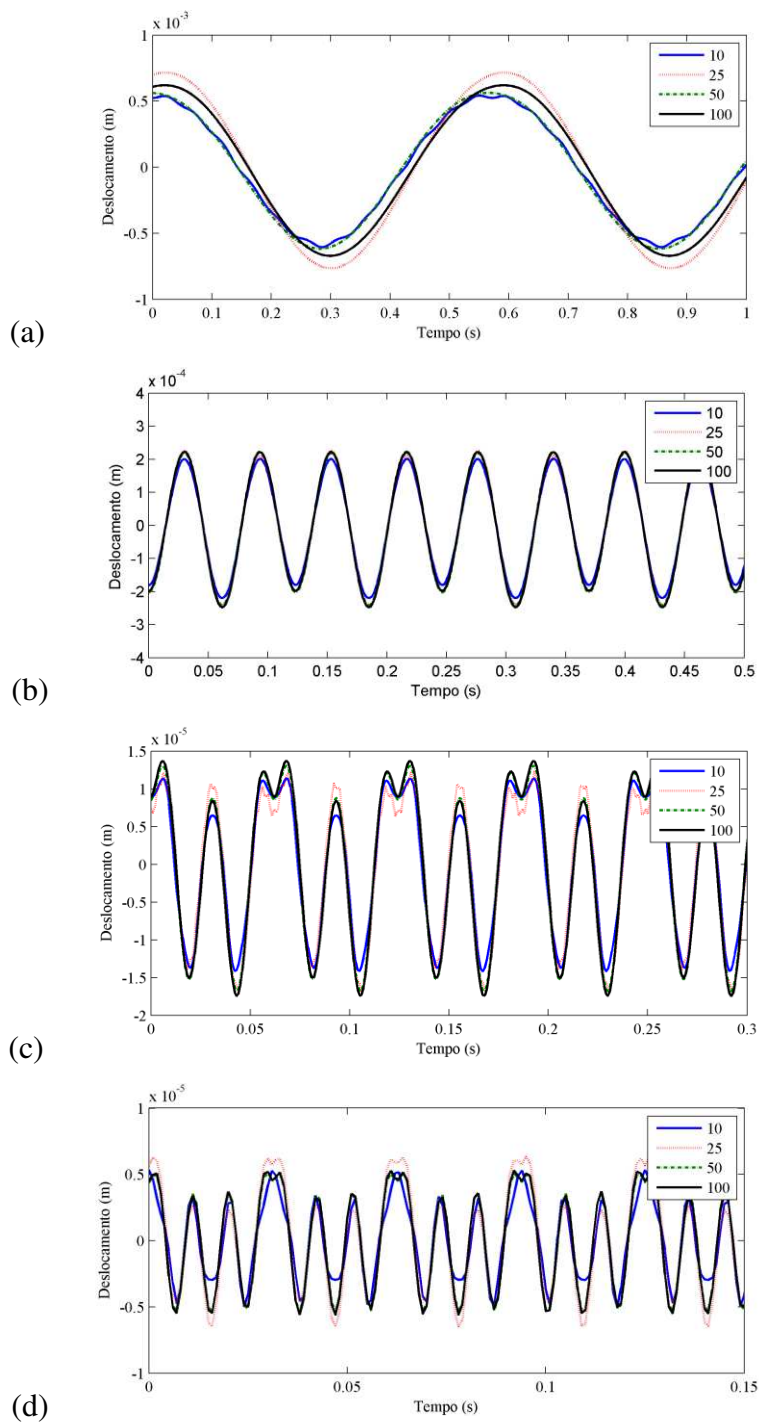


Fig. 5.24 – Comparação da resposta temporal para anel rotativo com força estacionária na forma de seno para diferentes números de elementos com $\Omega = 10$ rad/s (a), $\Omega = 50$ rad/s (b), $\Omega = 100$ rad/s (c) e $\Omega = 200$ rad/s (d).

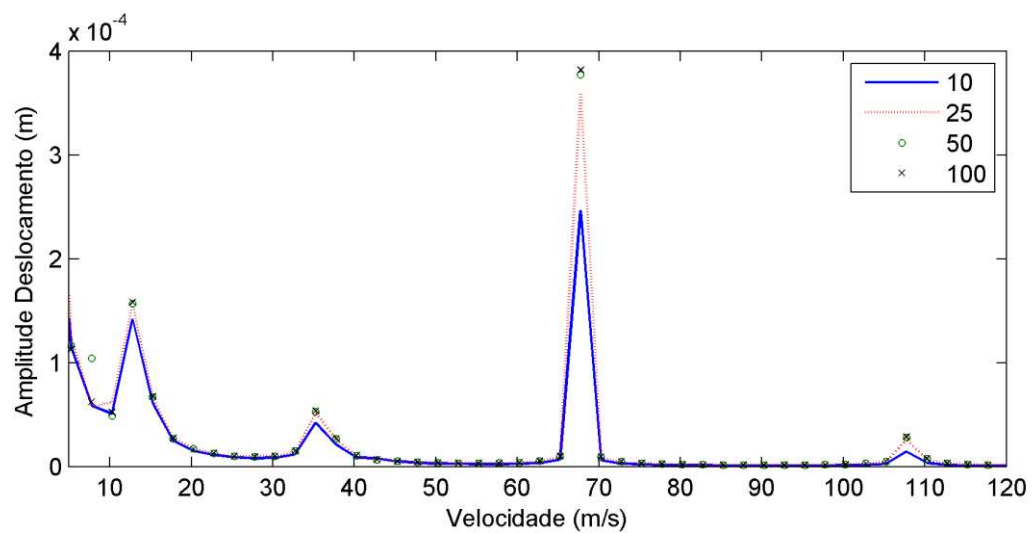


Fig. 5.25 – Amplitude da resposta temporal pela velocidade de rotação do anel para anel composto por diferentes números de elementos.

6 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Este trabalho desenvolveu um elemento espectral de anel rotativo com pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural que possibilita o cálculo da resposta livre e forçada de um anel girante com não uniformidades.

No Capítulo 3, as equações do movimento para um segmento de anel rotativo que seguem a teoria de Euler-Bernoulli são apresentadas, a dedução é feita através do Princípio de Hamilton. Através da cinemática encontram-se as velocidades relativas, emprega-se teoria de Euler-Bernoulli para o campo de deformações, já as tensões podem ou não ser dependentes da deformação. A tensão dependente segue a lei de Hooke, a não dependente é a pré-tensão com contribuição da pressão interna deduzida pela teoria de vasos de pressão de parede fina e da rotação que produz uma tensão induzida.

No Capítulo 4 é formulado o elemento espectral de anel rotativo com pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural. Emprega-se a mesma metodologia adotada em Delamotte *et al.* (2008). Assumindo uma solução por ondas para as equações do movimento, são obtidas a relação espectral e a razão de amplitude. Então relacionam os deslocamentos os esforços no domínio da frequência resultando no elemento espectral. No final do capítulo, faz-se um equacionamento para obter a resposta do anel girante sujeito a uma força estacionária na forma de seno.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados. As relações espectrais, a resposta forçada, as formas modais e os mapas em relação aos parâmetros analisados são obtidos. Os resultados para um anel uniforme são comparados com um modelo em FE simulado em Ansys® e com a solução analítica. Boa concordância foi obtida para todas as frequências em todos os casos (anel rotativo e anel estacionário) e todos os efeitos (rotação, pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural) investigados.

As ressonâncias do modelo em FE convergem com as do modelo em SE, apresentando diferenças em altas frequências podendo ser devido ao refinamento da malha como previsto na

teoria e/ou também porque os efeitos de inércia rotacional e cisalhamento não estão presentes na teoria de Euler-Bernoulli. Enquanto o modelo em FE é tridimensional, o modelo em SE está no plano, o que pode explicar parcialmente as diferenças nas antirressonâncias. O modelo em FE foi desenvolvido com elemento SOLID185 devido à possibilidade de inclusão dos efeitos de aceleração de Coriolis e tensão induzida pela rotação no Ansys® com este elemento. O tempo computacional para calcular o modelo em SE foi menor que o tempo computacional para calcular o modelo em FE.

As equações do movimento para a solução analítica e a solução em SE são as mesmas, o que explica a convergência dos resultados, porém a solução analítica é capaz de computar somente a resposta de um anel rotativo uniforme, enquanto que o modelo em SE pode ser usado para calcular a resposta um anel girante com não uniformidades.

A formulação apresentada captura a física do problema dinâmico incluindo o efeito do modo de corpo rígido, a bifurcação as frequências naturais e o aumento da rigidez do anel devido à rotação. A pressão interna desloca os picos de ressonância para as frequências mais altas tornando o anel mais rígido, a fundação elástica causa a bifurcação do modo de corpo rígido e também torna o sistema levemente mais rígido, o amortecimento estrutural diminui a amplitude dos picos de ressonância sem modificar as frequências naturais.

Este estudo permite a simulação de imperfeições pela simples diferença de propriedades dos elementos que compõe o anel. Não uniformidades em um anel girante com força rotativa modifica a resposta forçada, mas nenhum novo modo aparece na faixa de frequências analisada.

A diferença na modelagem de pressão interna feita neste trabalho e por Delamotte *et al.* (2008) é investigada para um anel estacionário. Neste trabalho emprega-se a teoria de vaso de pressão enquanto no de Delamotte *et al.* (2008) a teoria de corda elástica tensionada pela pressão. Os modelos possuem diferenças em baixas frequências e para a teoria de corda elástica o modo de corpo rígido é dependente da pressão, o que não ocorre na teoria de vaso de pressão.

Uma análise do anel rotativo sujeito a uma força em forma de sino estacionária é feita, a resposta temporal converge para diferentes números de elementos que compõe o anel, porém ainda é necessária a validação destes resultados. Os resultados obtidos pela solução analítica de um anel girante com força estacionária pulsante foram colocados no Apêndice A e podem ser utilizados para validação com o modelo em elemento espectral em um trabalho futuro.

Este projeto que aplica o Método dos Elementos Espectrais em anéis girantes com pressão interna, fundação elástica e amortecimento estrutural representa um avanço em relação às investigações anteriores que consideram somente anel estacionário, rotação de anel uniforme ou a resposta livre de um anel girante com não uniformidades. O desenvolvimento apresentado possibilita uma análise de forma simples e computacionalmente econômica da física do problema dinâmico envolvido e é uma contribuição original para a literatura em questão.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Validação dos resultados do anel girante com força estacionária;
- Generalização do problema de força estacionária para qualquer tipo de análise;
- Estudo de imperfeições em um anel rotativo com força estacionária;
- Extensão da metodologia e dos conceitos apresentados para o desenvolvimento de um elemento espectral de casca girante.

Durante o período de desenvolvimento da dissertação foram elaborados os seguintes trabalhos publicados e submetidos em processo de análise.

6.2 Trabalhos Publicados

Trabalho completo publicado em anais de congresso:

Beli, D.; Arruda, J. R. F., Vibration Analysis of Rotating Rings Using a Spectral Element Formulation. XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, Búzios, RJ, Brazil, February 17-22, 2013.

Resumo publicado em anais de congresso:

Silva, P.B.; Beli, D.; Arruda, J. R. F., Using a hybrid approach to model curved beams with non-symmetric cross sections, Seventh M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Cambridge, MA, USA, June 12-14, 2013.

6.3 Trabalhos Submetidos

Artigo completo em periódico:

Beli, D.; Arruda, J. R. F. Vibration analysis of rotating rings with internal pressure, elastic foundation and structural damping using a spectral element formulation. Submetido ao Journal of Sound and Vibration.

Trabalho completo em anais de congresso:

Beli, D.; Arruda, J. R. F. Vibration analysis of rotating rings with internal pressure and elastic foundation using a spectral element formulation. Submetido ao 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013). Ribeirão Preto, SP, Brazil, 2013.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BICKFORD, W.B.; REEDY, E. S. On the In-Plane Vibrations of Rotating Ring. **Journal of Sound and Vibration**, v.101, n.1, p.13-22, 1985.

CRAIG, R.R.; KURDILA, A.J. **Fundamentals of Structural Dynamics**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006. 744p.

DELAMOTTE, J.C.; NASCIMENTO, R.F.; ARRUDA, J.R.F. Simple models for the dynamic modeling of rotating tires. **Shock and Vibration**, v.15, p.383-393, 2008.

DOYLE, J. F. **Wave Propagation in Structures**. New York: Springer, 1997. 320p.

ELEY, R.; FOX, C.H.J.; McWILLIAM, S. Coriolis Coupling Effects on the Vibration of Rotating Ring. **Journal of Sound and Vibration**, v. 238, n. 3, p. 459-480, 2000.

ENDO, M.; HATAMURA, K.; SAKATA, M.; TANIGUCHI, O. Flexural Vibrations of a Thin Rotating Ring. **Journal of Sound and Vibration**, v.92, n.2, p.261-272, 1984.

FORBES, G.L.; RANDALL, R.B. Resonance phenomena of an elastic ring under a moving load. **Journal of Sound and Vibration**, v.318, p. 991-104, 2008.

HEARN, E. J. **Mechanics of Materials 1**. Woburn: Butterworth-Heinemann, 1997. 450p.

HUANG, S.C.; SOEDEL, W. Effects of Coriolis Acceleration on the Free and Forced In-Plane Vibrations of Rotating Rings on Elastic Foundation. **Journal of Sound and Vibration**, v.115, n2, p.253-274, 1987a.

HUANG, S.C.; SOEDEL, W. Response of Rotating Rings to Harmonic and Periodic Loading and Comparison with the Inverted Problem. **Journal of Sound and Vibration**, v. 118, n.2, p. 253-270, 1987b.

HUANG, S.C.; HSU, B.S. Resonant Phenomena of a Rotating Cylindrical Shell Subjected to a Harmonic Moving Load. **Journal of Sound and Vibration**, v.136, n.2, p. 215-228, 1990.

HUANG, S.C.; HSU, B.S. An Approach to the Dynamic Analysis of Rotating Tire-Wheel-Suspension Units. **Journal of Sound and Vibration**, v.156, n.3, p.505-519, 1992.

HUANG, D.; LIANG, T.; CAO, R. Free vibration analysis of planar rotating ring by wave propagation. **Journal of Sound and Vibration**, v.332, p. 4979-4997, 2013.

HWANG, R.S.; FOX, C.H.; McWILLIAM, S. The In-Plane Vibration of Thin Rings With In-Plane Profile Variations Part I: General Background and Theoretical Formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v.220, n.3, p. 497-516, 1999.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. Upper Saddle River: Pearson, 2008. 669p.

KANG, B.; RIEDEL, C.H.; TAN, C.A. Free vibration analysis of a planar curved beams by wave propagation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 260, p.19-44, 2003.

KANG, B.; RIEDEL, C.H. On the validity of planar, thick curved beam models derived with respect to centroidal and neutral axes. **Wave Motion**, v.49, p.1-23, 2012.

KIM, W.; CHUNG, J.; Free Non-Linear Vibration of a Rotating Thin Ring with the In-Plane and Out-Plane Motions. **Journal of Sound and Vibration**, v.258, n1, p.167-178, 2002.

LAI, W.M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics**. Burlington: Butterworth-Heinemann, 1999. 556p.

LEE, S.K.; MACE, B.R.; BRENNAN, M.J. Wave propagation, reflection and transmission in curved beams. **Journal of Sound and Vibration**, v.306, p.636-656, 2007.

LEE, USIK. **Spectral Element Method in Structural Dynamics**. Singapore: John Wiley & Sons, 2009. 454p.

NARAYANAN, G.V.; BESKOS, D.E. Use of Dynamic Influence Coefficients in Forced Vibration Problems with the Aid of Fast Fourier Transform. **Computers & Structures**, v.9, p.145-150, 1978.

NASCIMENTO, R.F. **Propagação de Onda Usando Modelos de Elementos Finitos de Fatias de Guias de Ondas Estruturais**. 2009. 190p. Tese – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PARISEAU, W. G. **Design Analysis in Rock Mechanics**. Leiden: CRC Press/Balkema, 2011. 682p.

PATERA, A.T. A Spectral Element Method for Fluid Dynamics: Laminar Flow in a Channel Expansion. **Journal of Computational Physics**, v.54, p.468-488, 1984.

RIEDEL, C.H.; KANG, B. Free vibration of elastically coupled dual-span curved beams. **Journal of Sound and Vibration**, v.290, p.820-838, 2006.

SANTOS, I. F. **Dinâmica de Sistemas Mecânicos**. São Paulo: MAKRON Books, 2001. 272p.

SANTOS, T. B. **Influência das Desuniformidades do Pneumático no Conforto Vibracional de um Veículo**. 2010. 86p. Dissertação – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SINGH, K.; SINGH, B.P. In-Plane Vibrations of Rotating Sectors and Rings with and Without Radial Supports by Finite Element Method. **Computers & Structures**, v. 19, n. 4, p. 545-554, 1984.

SOEDEL, W. **Vibrations of Shells and Plates**. New York: Marcel Dekker, 2004. 553p.

ANEXO A - SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA ANEL HOMOGÊNEO GIRANTE

Huang e Soedel (1987a, 1987b) calcularam de forma analítica a resposta livre e forçada para anel homogêneo rotativo.

A.1 Modos e Frequências Naturais

As equações do movimento para um segmento de anel rotativo homogêneo com pressão interna e fundação elástica (Eq. 4.23) são também as equações para um anel completo. As frequências naturais são obtidas assumindo que os deslocamentos são dados por:

$$\begin{aligned} w(s, t) &= W_n e^{i(n\frac{s}{R} + \omega_n t)} \\ u(s, t) &= U_n e^{i(n\frac{s}{R} + \omega_n t)} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

com n sendo o modo em consideração, W_n e U_n as amplitudes da solução.

Inserindo as Eq. (A.1) nas Eq. (4.23) conseguimos um sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_n \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{EI}{R^3} n^4 + \frac{EA}{R} + (\rho AR \Omega^2 + bp_0) n^2 + (bp_0 + bRk_w) - \rho AR \omega_n^2 \\ L_{22} &= \frac{EI}{R^3} n^2 + \frac{EA}{R} n^2 + (\rho AR \Omega^2 + bp_0) n^2 + (bp_0 + bRk_u) - \rho AR \omega_n^2 \\ L_{12} &= -L_{21} = i \left\{ \frac{EI}{R^3} n^3 + \frac{EA}{R} n + 2(\rho AR \Omega^2 + bp_0) n - 2\rho AR \Omega \omega_n \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para soluções não triviais é necessário que o determinante da matriz L seja nulo, resultando em uma equação polinomial:

$$l_4 \omega_n^4 + l_2 \omega_n^2 + l_1 \omega_n + l_0 = 0 \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, os coeficientes da Eq. A.4 são:

$$\begin{aligned} l_4 &= \rho^2 A^2 R^2 \\ l_2 &= -\rho AR(C_1 + C_2) - 4\rho^2 A^2 R^2 \Omega^2 \\ l_1 &= 4\rho ARC_3 \\ l_0 &= C_1 C_2 - C_3^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{EI}{R^3} n^4 + \frac{EA}{R} + (\rho AR \Omega^2 + bp_0) n^2 + (bp_0 + bRk_w) \\ C_2 &= \frac{EI}{R^3} n^2 + \frac{EA}{R} n^2 + (\rho AR \Omega^2 + bp_0) n^2 + (bp_0 + bRk_u) \\ C_3 &= \frac{EI}{R^3} n^3 + \frac{EA}{R} n + 2(\rho AR \Omega^2 + bp_0) n \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A Eq. (A.4) fornece quatro frequências naturais: dois modos de flexão ($k = 1, 2$) e dois modos de extensão ($k = 3, 4$). Os deslocamentos radial e tangencial são:

$$\begin{aligned} w(s) &= \cos\left(n \frac{s}{R}\right) \\ u(s) &= Q_k \sin\left(n \frac{s}{R}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

com

$$Q_k = -1/n \text{ para } k = 1, 2 \text{ e } Q_k = n \text{ para } k = 3, 4 \quad (\text{A.8})$$

As formas modais são uma combinação dos deslocamentos radial e tangencial.

A.2 Resposta Forçada

A resposta forçada é calculada para um anel rotativo com força estacionária e para um anel estacionário com força rotativa utilizando as equações do movimento (Eq. 4.23). Na modelagem

tanto a força radial quanto a tangencial são harmônicas. O resultado é obtido realizando a soma dos modos para cada frequência de excitação.

A.2.1 Anel Rotativo com Força Estacionária

A solução em coordenadas cilíndricas é:

$$\begin{aligned} u_3(\theta, t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos[\omega_+ t + n(\theta - \theta^* - \phi_1) - \delta] - B_n \cos[\omega_- t - n(\theta - \theta^* - \phi_2) - \delta]\} \\ u_\theta(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{A_n \sin[\omega_+ t + n(\theta - \theta^* - \phi_1) - \delta] - B_n \sin[\omega_- t - n(\theta - \theta^* - \phi_2) - \delta]\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

θ é a posição angular da resposta, θ^* é a posição do carregamento, δ é o ângulo de fase da excitação e t é o tempo, n é o número do modo, os outros parâmetros são descritos abaixo.

A frequência de excitação (ω) é modificada pelo modo e pela velocidade de rotação (Ω). Uma mesma frequência de excitação excita diferentes modos.

$$\omega_+ = \omega + n\Omega \quad \omega_- = \omega - n\Omega \quad (\text{A.10})$$

A resposta final é escrita em função dos parâmetros geométricos e do material do anel, bem como do modo, velocidade de rotação e frequência de excitação. Amplitudes da resposta:

$$A_n = \frac{\sqrt{(n^2 \tilde{a}^2 F_\theta^2 + \tilde{b}^2 F_3^2)}}{2\rho h R \pi (\tilde{a} + \tilde{b}) \sqrt{\Delta_1}} \quad B_n = \frac{\sqrt{(n^2 \tilde{a}^2 F_\theta^2 + \tilde{b}^2 F_3^2)}}{2\rho h R \pi (\tilde{a} + \tilde{b}) \sqrt{\Delta_2}} \quad (\text{A.11})$$

com

$$\Delta_1 = (\bar{g} + \omega_+ \bar{\Omega} - \omega_+^2)^2 + (\bar{\lambda}_n \omega_+)^2 \quad \Delta_2 = (\bar{g} - \omega_- \bar{\Omega} - \omega_-^2)^2 + (\bar{\lambda}_n \omega_-)^2 \quad (\text{A.12})$$

Ângulos de fase:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{n} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_n \omega_+}{\bar{g} - \omega_+ \bar{\Omega} - \omega_+^2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{n \tilde{a} F_\theta}{\tilde{b} F_3} \right) \right\} \\ \phi_2 &= \frac{1}{n} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_n \omega_-}{\bar{g} - \omega_- \bar{\Omega} - \omega_-^2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{n \tilde{a} F_\theta}{\tilde{b} F_3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Parâmetros que surgem quando é feita a simplificação das equações pela razão de amplitude das soluções.

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{\rho h} \quad \bar{\Omega} = 2\Omega \frac{\tilde{b} + n^2 \tilde{a}}{n(\tilde{a} + \tilde{b})} \quad \bar{g} = \frac{\tilde{b}\tilde{c} - n^2 \tilde{a}}{\rho h(\tilde{a} + \tilde{b})} \quad (\text{A.14})$$

Parâmetros que surgem quando é feita a transformação de coordenadas das coordenadas físicas para as coordenadas generalizadas.

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= n^2 \frac{D}{R^4} + \frac{K}{R^2} + 2 \left(\rho h \Omega^2 + \frac{p_0}{R} \right) \\ \tilde{b} &= n^2 \left(\frac{D}{R^4} + \frac{K}{R^2} + \rho h \Omega^2 + \frac{p_0}{R} \right) + k_\theta + \frac{p_0}{R} \\ \tilde{c} &= n^4 \frac{D}{R^4} + \frac{K}{R^2} + n^2 \left(\rho h \Omega^2 + \frac{p_0}{R} \right) + k_3 + \frac{p_0}{R} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Os parâmetros D e K são denominados respectivamente por rigidez à flexão e rigidez de membrana e são dados pela Eq. (A.16).

$$D = \frac{Eh^3}{12} \quad K = Eh \quad (\text{A.16})$$

A.2.2 Anel Estacionário com Força Rotativa

A solução em coordenadas cilíndricas é:

$$\begin{aligned} u_3(\theta, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \{ A'_n \cos[\omega_+ t + n(\theta - \theta^* - \phi'_1) - \delta] - B'_n \cos[\omega_- t - n(\theta - \theta^* - \phi'_2) - \delta] \} \\ u_\theta(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ A'_n \sin[\omega_+ t + n(\theta - \theta^* - \phi'_1) - \delta] - B'_n \sin[\omega_- t - n(\theta - \theta^* - \phi'_2) - \delta] \} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

As variáveis são as mesmas da solução para anel rotativo, diferenciando apenas as amplitudes e os ângulos de fase.

Amplitudes da resposta:

$$A'_n = \frac{\sqrt{n(n^2 F_3^2 + F_\theta^2)}}{2\rho h R \pi (n^2 + 1) \sqrt{\Delta'_1}} \quad B'_n = \frac{\sqrt{n(n^2 F_3^2 + F_\theta^2)}}{2\rho h R \pi (n^2 + 1) \sqrt{\Delta'_2}} \quad (\text{A.18})$$

com

$$\Delta'_1 = (\omega_n^2 - \omega_+^2)^2 + (\bar{\lambda}_n \omega_+)^2 \quad \Delta'_2 = (\omega_n^2 - \omega_-^2)^2 + (\bar{\lambda}_n \omega_-)^2 \quad (\text{A.19})$$

Ângulos de fase:

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \frac{1}{n} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_n \omega_+}{\omega_n^2 - \omega_+^2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{F_\theta}{n F_3} \right) \right\} \\ \phi'_2 &= \frac{1}{n} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_n \omega_-}{\omega_n^2 - \omega_-^2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{F_\theta}{n F_3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

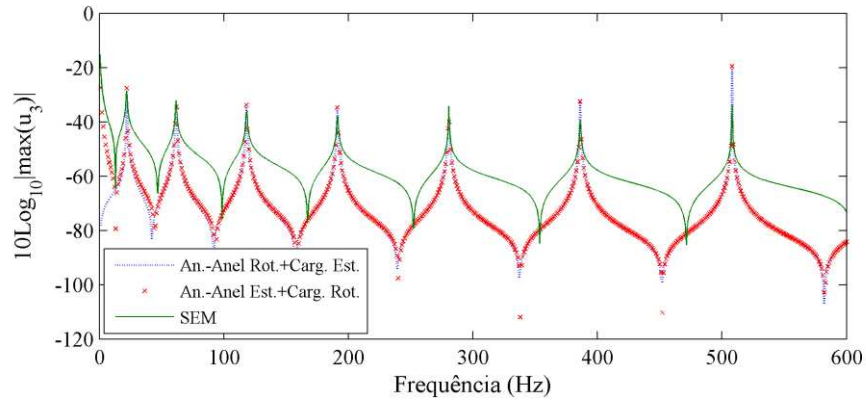
A.2.3 Resultados

Analisa-se as respostas forçadas das subseções A.2.1 e A.2.2 para um anel homogêneo com as mesmas características e propriedades do anel empregado na validação, variam-se a frequência de excitação e a velocidade de rotação.

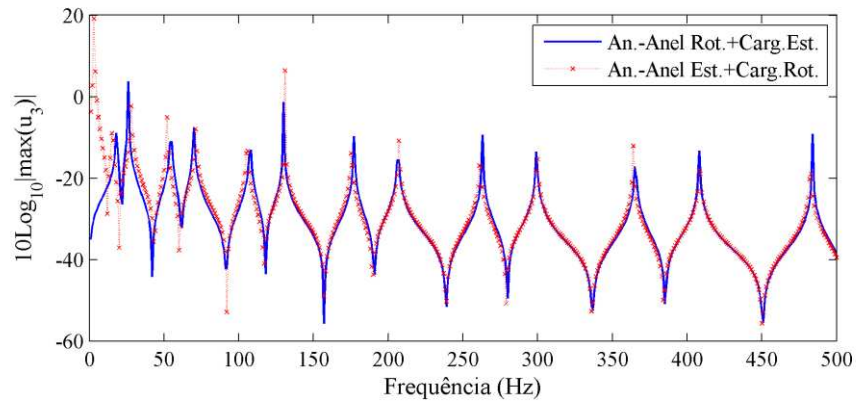
Os gráficos das figuras Fig. A.1 e Fig. A.2 e os mapas da Fig. A.3 são obtidos para comparar a resposta do anel rotativo com força estacionária com a do anel estacionário com força rotativa. Como previsto para baixas velocidades de rotação (Fig A.1) e altas frequências de excitação (Fig. A.2) os problemas são equivalentes. Para velocidade de rotação nula (Fig A.1a), traça-se a resposta por elementos espectrais fora de escala para comparação.

Na Fig. A.3 observa-se que as frequências naturais bifurcam com rotação mesmo quando aplicado uma força estacionária. No anel rotativo a bifurcação não tem um comportamento linear e não há espelhamento das frequências na frequência zero, nesta frequência todos os modos retrógrados tendem a aparecer quando a velocidade de rotação tende ao infinito. Já no anel estacionário a bifurcação tem um comportamento linear e os modos retrógrados se espelham na frequência zero.

(a)



(b)



(c)

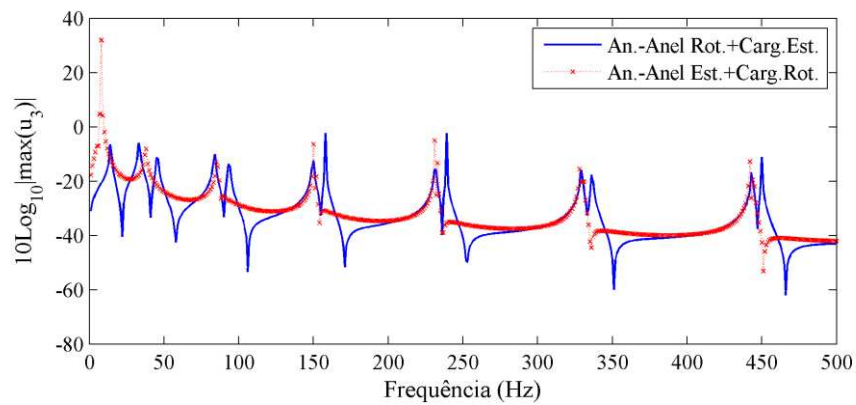
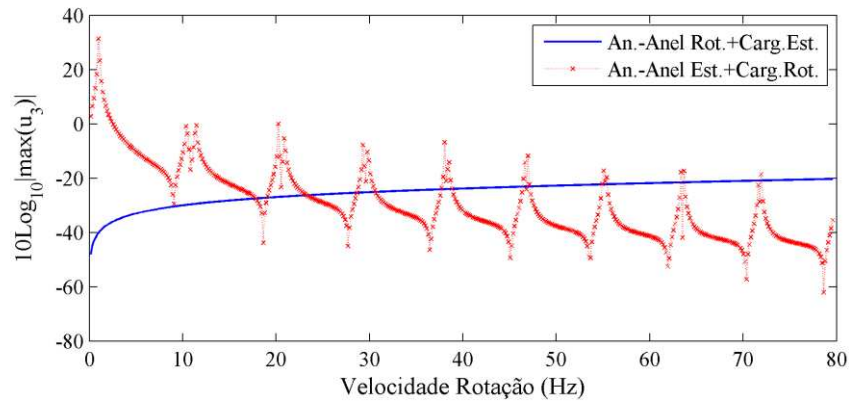
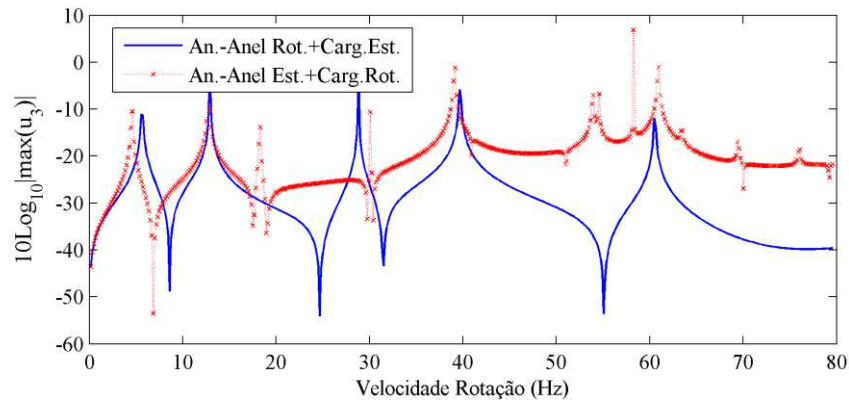


Figura A.1 – Resposta forçada pela solução analítica para velocidade de rotação constante com $\Omega = 0$ rad/s (a), $\Omega = 20$ rad/s (b) e $\Omega = 50$ rad/s (c). Anel rotativo com força estacionária (-) e anel estacionário com força rotativa (-x-).

(a)



(b)



(c)

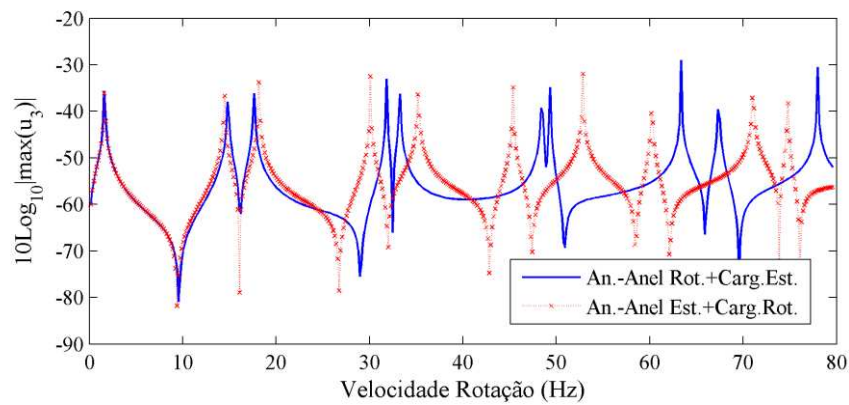
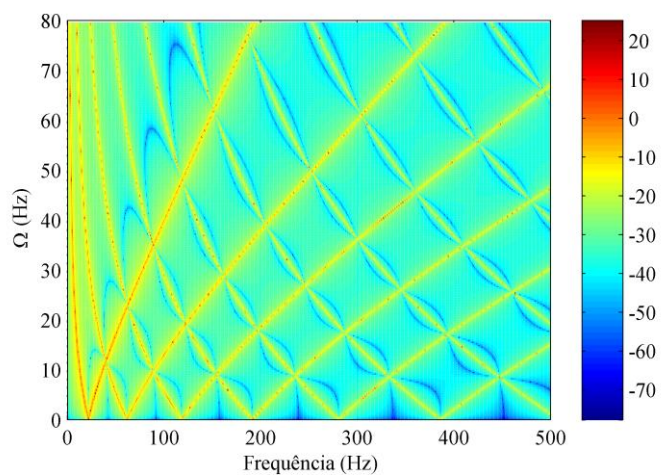


Figura A.2 – Resposta forçada pela solução analítica para frequência de excitação constante com $f = 1$ Hz (a), $f = 100$ Hz (b) e $f = 10000$ Hz (c). Anel rotativo com força estacionária (-) e anel estacionário com força rotativa (-x-).

(a)



(b)

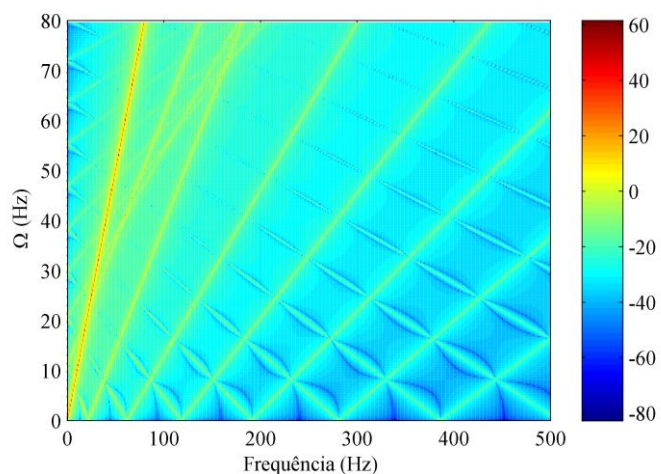


Fig. A.3 – Mapa de frequência de excitação pela velocidade de rotação pelo máximo deslocamento radial utilizando a solução analítica. Anel rotativo com força estacionária (a) e anel estacionário com força rotativa (b).

ANEXO B – ELEMENTO ESPECTRAL DE ANEL ESTACIONÁRIO COM PRESSÃO INTERNA

Nesta modelagem, desenvolvida por Delamotte *et al.* (2008), são utilizadas as equações de viga curva de Euler-Bernoulli para um anel estacionário que podem ser obtidas pelo mesmo equacionamento do Capítulo 3 sem levar em consideração os efeitos da rotação. Aplica-se uma solução por ondas e relacionam-se as forças com os deslocamentos no domínio da frequência, ou seja, o elemento espectral.

Para simular um anel rotativo, aplica-se um carregamento móvel através da expansão em série de Fourier de um carregamento no tempo. Obtém-se também uma previsão das velocidades críticas para o mesmo.

B.1 Equação do Movimento

A equação de uma corda elástica sem carregamento segue a Eq. (B.1)

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad T = p_0 b R \quad (\text{B.1})$$

Para incluir o efeito de corda, adiciona-se a Eq. (B.1) na modelagem de viga curva estacionária através da proporcionalidade em relação à aceleração.

$$\begin{aligned} EA \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{R^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - EAR \frac{\partial v}{\partial s} + EIR \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \right) &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \frac{1}{R^2} \left(EAv - EAR \frac{\partial u}{\partial s} + EIR \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \right) - T \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} &= -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

B.2 Carregamento Móvel

Como carregamento móvel, foi utilizado um pulso triangular que é representado pelos coeficientes de Fourier.

$$a_k = \left[-\frac{b}{a\omega_k^2} (e^{j\omega_k a} + e^{-j\omega_k a} - 2) \right] \frac{e^{-j\omega_k m\Delta t}}{\tau} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{\tau} \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{B.3})$$

Sendo a a espessura do pulso, m o nó em que é aplicado o pulso, n o número de termos de Fourier.

Assim, a resposta na frequência é:

$$X(\omega_k) = K^{-1}(\omega_k) P(\omega_k) \quad (\text{B.4})$$

E a resposta no tempo:

$$x(t) = \sum_{k=1}^M X(\omega_k) e^{\frac{j2\pi kt}{\tau}} \quad (\text{B.5})$$

B.3 Velocidade Crítica

Ondas permanentes aparecem no anel quando a velocidade de rotação atinge valores críticos. Estes valores críticos para cada modo são atingidos quando a velocidade de rotação coincide com uma das frequências naturais dividido pelo número de comprimentos de onda circunferencial do modo n . A primeira velocidade crítica é atingida quando a primeira onda permanente é formada.

$$\Omega_c = \left(\frac{\omega_k}{n} \right)_{\min} \quad (\text{B.6})$$