

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Josué Labaki
SILVA E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 31/07/2008
Euclides de Mesquita Neto
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno Indireto Baseada em uma Solução Viscoelastodinâmica Estacionária Não-Singular

Autor: **Josué Labaki Silva**

Orientador: **Euclides de Mesquita Neto**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno Indireto Baseada em uma Solução Viscoelastodinâmica Estacionária Não-Singular

Autor: **Josué Labaki Silva**

Orientador: **Euclides de Mesquita Neto**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentado à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008
S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si38i Silva, Josué Labaki
Uma implementação do método dos elementos de contorno indireto baseada em uma solução viscoelastodinâmica estacionária não-singular / Josué Labaki Silva. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Viscoelasticidade. 3. Interação solo-estrutura. I. Mesquita Neto, Euclides de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: An implementation of the indirect boundary elements method based on a stationary, non-singular, viscoelastodynamic solution

Palavras-chave em Inglês: Boundary elements method, Viscoelasticity, Auxiliary state

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Oscar Antonio Braunbeck, Renato Pavanello

Data da defesa: 31/07/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno Indireto Baseada em uma Solução Viscoelastodinâmica Estacionária Não-Singular

Autor: **Josué Labaki Silva**

Orientador: **Euclides de Mesquita Neto**



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Oscar Antonio Braunbeck
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Renato Pavanello
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 31 de julho de 2008

Como tudo que faço na vida, dedico este trabalho à ruiva do meu coração, que significa mais pra mim do que é capaz de imaginar.

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Euclides de Mesquita Neto, pela paciência infinita e por apostar em mim mais do que eu mesmo.

À minha família, que abriu mão de muitas coisas por mim. Em especial à minha mãe, por me amar além do que eu mereço.

Aos professores, funcionários e companheiros da pós-graduação da Unicamp. Em especial aos grandes Flávio Nunes Pereira e Alberto Kury Oehlmeyer, que são o cerne da minha turma e com os quais formamos (conjugação no presente) um belo e imbatível time.

Aos companheiros do Laboratório de Mecânica Estrutural Computacional, Luiz Thomazo, Amilcar Ogaz e Ronaldo Carrion pela ajuda sempre presente.

Agradeço ao governo brasileiro por incentivar e acreditar em jovens pesquisadores, fornecendo auxílio financeiro por meio de sua Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

E finalmente, como já agradeço todos os dias, também aqui agradeço ao Grande Geômetra por me incluir em seu *design*.

À memória dos sete grandes geômetras cristãos ou agnósticos:

Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange, Comte,
(Allah se compadeça desses infiéis)

E à memória do inesquecível matemático, astrônomo e filósofo muçulmano,

Buchafar Mohamed Ibn Musa Al Kwarismi,
(Allah o tenha em sua glória!)

E também a todos os que estudam, ensinam ou admiram a prodigiosa ciência das grandezas,
das formas, dos números, das medidas, das funções, dos movimentos e das forças, eu, el-hadj
xerife

Ali Iezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan
(crente de Allah e de seu santo profeta Mafoma)

Dedico esta desvaliosa página de lenda e fantasia.

De Bagdá, 19 da Lua de Ramadã de 1321.

Malba Tahan
O Homem que Calculava

Resumo

SILVA, Josué Labaki, *Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno Indireto Baseada em uma Solução Viscoelastodinâmica Estacionária Não-Singular*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 113 p. Dissertação (Mestrado).

Estados auxiliares são soluções analíticas ou numéricas para operadores matemáticos, sujeitas às condições de contorno de um determinado problema da física matemática. Embora a solução de tais estados tenha aplicação prática limitada a problemas elementares, pode ser utilizada para resolver problemas reais de engenharia através de formulações como o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Neste trabalho, usa-se a linguagem Fortran para implementar uma formulação indireta do MEC, utilizando um estado auxiliar viscoelastodinâmico não-singular, com o objetivo de analisar problemas de domínios limitados ou ilimitados, sujeitos a carregamentos estacionários, discretizados somente no contorno por elementos retangulares, constantes e descontínuos. Valida-se minuciosamente uma implementação para este estado auxiliar, e para isso desenvolve-se um estudo sobre quais são, como utilizar e quais as limitações das fontes de validação disponíveis para este tipo de problema. Ao fim, compara-se alguns resultados obtidos com o programa em Fortran frente às respostas clássicas da bibliografia para problemas dinâmicos de barra, viga e domínios ilimitados.

Palavras-Chave

Método dos Elementos de Contorno Indireto, Viscoelasticidade, Estado Auxiliar.

Abstract

SILVA, Josué Labaki, *An Implementation of the Indirect Boundary Elements Method Based on a Stationary, Non-Singular, Viscoelastodynamic Solution*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 113 p. Dissertação (Mestrado).

Auxiliary states are numerical or analytical solutions for mathematical operators, subjected to the boundary conditions of a given problem. Although the solution of these states has its utility limited to elementary problems, it can be used to solve a more real sort of engineering problems through formulations such as the Boundary Element Method (BEM). This work describes an implementation of BEM's Indirect formulation, based on a non-singular, viscoelastodynamic auxiliary state, aiming the analysis of both limited- and unlimited-domain problems, subjected to stationary loadings. The problem is modeled by means of constant, discontinuous, rectangular boundary elements. The present implementation for the viscoelastodynamic auxiliary state is carefully validated. For this purpose, this work also describes a study on validation sources for this kind of states, including their uses and limitations. The final program, written in the Fortran programming language, is used to analyze classic elementary engineering problems, such as bars and beams, and also the case of unlimited domains.

Keywords

Indirect Boundary Elements Method, Viscoelasticity, Auxiliary State.

Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Nomenclatura	xvi
1 Introdução	1
1.1 Formulação do MEC para a equação homogênea de Laplace baseada na solução fundamental do operador de Laplace	2
1.2 Formulação do MEC para a equação homogênea de Helmholtz baseada na solução fundamental do operador de Helmholtz	6
1.3 Inconveniências do MEC-Direto	7
1.4 Formulações alternativas do Método dos Elementos de Contorno	11
1.5 Estados auxiliares não-singulares	14
1.6 Formulações singular e não-singular do MEC	15
1.7 Revisão bibliográfica	16
1.8 Objetivos do trabalho	17
2 Estados auxiliares	19
2.1 Viscoelastodinâmica	19
2.2 Solução de Kelvin para carga concentrada e espaço tridimensional	20
2.3 Solução de Crouch e Starfield para carga distribuída e espaço bidimensional	22
2.4 Estado auxiliar viscoelastodinâmico estacionário não-singular	25
2.5 Tensões devido ao carregamento em Y	31
2.6 Solução alternativa	35
3 Validação do estado auxiliar	36

3.1 Validação mais abrangente	41
3.2 Limitações da solução	51
3.3 Tensões-D	59
4 Formulação do MEC-Indireto	67
4.1 Deslocamentos	67
4.2 Tensões	73
4.3 Relação força de superfície \times deslocamento	79
4.4 Método de solução	81
4.5 Implementação	83
5 Resultados e discussão	86
5.1 Simetria	86
5.2 Equilíbrio	88
5.3 Problemas dinâmicos	88
6 Conclusão e desenvolvimentos futuros	97
7 Referências	99
Apêndice	105
A.1 Análise de tensões	105
A.2 Fluxograma do código	109
A.3 Compilação e execução em Linux	110
A.4 Dedução detalhada da Equação Integral de Helmholtz	112
A.5 Dedução detalhada da Equação 1.17	113

Lista de Figuras

1.1 Domínio Ω_b delimitado por um contorno Γ_b .	2
1.2 Caso particular de estado auxiliar solução fundamental.	3
1.3 Discretização do contorno Γ_b que dá origem ao MEC-D.	5
1.4 Discretização do domínio Ω_b em células de domínio Ω_c .	8
1.5 Pontos de suporte para as funções auxiliares do DRM.	9
1.6 Domínio ilimitado Ω_{inf} e domínio limitado Ω_b discretizado por células Ω_c .	10
1.7 (a) deslocamentos e (b) tensões descritos pela função de Green para o semi-espaço.	11
1.8 Discretizações para funções de Green (a) do semi-espaço e (b) do espaço completo.	12
1.9 Função de Green específica para camada sobre base rígida e discretização.	13
1.10 malhas para camadas sobre base rígida para fundação (a) sobre a superfície, sobre camada horizontal e (b) engastada, sobre camada não-horizontal.	13
1.11 Semi-espaços com carregamentos distribuídos (a) constante e (b) linear.	14
1.12 Estados auxiliares não-singulares para carregamento (a) vertical e (b) transversal no interior do espaço completo.	14
1.13 (a) Estado singular com formulação não-singular do MEC. (b) Estado não-singular com formulação singular do MEC.	15
2.1 Cargas pontuais no espaço tridimensional infinito.	20
2.2 Carga concentrada P e trações na direção de x_3 .	21
2.3 Esquematização de cargas distribuídas no espaço bidimensional infinito.	22
2.4 Exemplos de descontinuidades e singularidades que a solução de Crouch e Starfield é capaz de prever ($A = 1$, $G = 1$, $P_X = P_Z = 1$ N, $v = 0,25$, $X \in [-2, 2]$ e $Z \rightarrow 0^+$).	24
2.5 Pode-se emular um problema bidimensional fazendo n muito maior que 1.	25
2.6 Carregamento distribuído no interior do espaço infinito tridimensional.	26
2.7 Procedimento utilizado por Adolph para solução da Equação 2.14.	29
2.8 Método de integração utilizado na solução deste espaço auxiliar.	30
2.9 Posição dos pontos P_2 e P_1 frente aos carregamentos nas direções X e Y.	32
2.10 Comparação entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para $P_2 = (X, Y, Z)$, variando X.	34
3.1 Comparação das componentes u_{ZZ} e u_{XY} com a solução de Kelvin 3D estática.	36
3.2 Comparação das componentes u_{XX} e u_{YZ} com a solução de Kelvin 3D estática.	37

3.3 Comparação das componentes u_{ZZ} e u_{ZY} com a solução de Romanini 3D.	37
3.4 Comparação das componentes u_{XX} e u_{YZ} com a solução de Romanini 3D.	37
3.5 Comparação das componentes σ_{ZZZ} e σ_{XYZ} com a solução estática de Kelvin 3D.	39
3.6 Comparação das componentes σ_{XXX} e σ_{ZZZ} com a solução dinâmica de Romanini 2D.	39
3.7 (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 2$, $Z = 2$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.	41
3.8 (a) Componente u_{XZ} e (b) u_{YY} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 2$, $Z = 2$.	42
3.9 (a) Linha $Z \in [-2, 2]$, $X = -2$, $Y = -2$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.	42
3.10 (a) Componente u_{XZ} e (b) u_{ZZ} ao longo da linha $Z \in [-2, 2]$, $X = -2$, $Y = -2$.	42
3.11 (a) Linha $Y \in [-2, 2]$, $X = 2$, $Z = -2$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.	43
3.12 (a) Componente u_{XZ} e (b) u_{YY} ao longo da linha $Y \in [-2, 2]$, $X = 2$, $Z = -2$.	43
3.13 (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = X$, $Z = X$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.	44
3.14 (a) Componente u_{XZ} e (b) u_{ZZ} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = X$, $Z = X$.	44
3.15 (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -X$, $Z = X$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.	44
3.16 (a) Componente u_{XZ} e (b) u_{ZZ} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -X$, $Z = X$.	45
3.17 (a) Linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$. (b) Componente σ_{XYX} ao longo desta linha.	46
3.18 (a) componente σ_{YYX} e (b) σ_{ZZX} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.	46
3.19 (a) Componente σ_{XXZ} e (b) σ_{YZZ} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.	46
3.20 (a) Linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 1$, $Z = \frac{1}{2}$. (b) Linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 1$, $Z = 1$.	47
3.21 (a) Parte real e (b) imaginária da componente u_{XX} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.	48
3.22 (a) Parte real e (b) imaginária da componente u_{XY} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.	48
3.23 (a) Parte real e (b) imaginária de u_{YZ} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.	49
3.24 (a) Parte real e (b) imaginária de u_{ZZ} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.	49
3.25 (a) Parte real e (b) imag. de σ_{XXZ} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.	49
3.26 (a) Parte real e (b) imag. de σ_{XZZ} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.	50
3.27 (a) Parte real e (b) imag. de σ_{YYX} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.	50
3.28 (a) Parte real e (b) imag. de σ_{XZX} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.	50

3.29 (a) Espaço confiável real. (b) Espaço confiável assumido.	52
3.30 Módulo de u_{XX} para $X = Y = Z \in [40, 80]$.	53
3.31 Módulo de u_{YZ} para $X \in [-3, 3]$, $Y = -Z = \frac{1}{2}$.	53
3.32 Módulo de u_{ZZ} para $X \in [5, 100]$, $Y = Z = 5$.	55
3.33 Módulo de u_{ZZ} para $X \in [-3, 3]$, $Y = -Z = \frac{1}{2}$.	55
3.34 Módulo de u_{XX} para $X \in [5, 100]$, $Y = Z = 5$.	56
3.35 Componente u_{XX} para $X = Y \in [400, 500]$, $Z = 150$.	56
3.36 Componente σ_{XYX} para $X \in [0, 100]$, $Y = Z = 2$, $\eta = 0,01$, $\omega = 0,1$ rad/s, erros de integração de 10^{-5} , $A = 1$ m, variando B/A .	58
3.37 Componente σ_{YYX} para $X \in [3, 60]$, $Y = Z = 2$, $\omega = 0,5$ rad/s, erros de integração de 10^{-6} , $A = B = 1$ m, variando η .	58
3.38 Sistema de coordenadas mostrando os pontos A , B , C ,... e X₀ .	59
3.39 Pontos usados para interpolação ao longo de X .	60
3.40 (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 0$, $Z \rightarrow 0^+$, com $A = 1$. (b) Componente σ_{ZZZ} nesta linha.	63
3.41 (a) Distribuição alternativa de pontos e (b) sua distribuição em torno de $X = A = 1$.	63
3.42 Ampliação de trecho da componente σ_{ZZZ} mostrando como garantir uma boa representação da descontinuidade.	64
3.43 (a) componente σ_{YZZ} e (b) σ_{ZZZ} ao longo da linha $Y \in [-5, 5]$, $X = 0$, $Z \rightarrow 0^-$.	65
3.44 (a) componente σ_{XYX} e (b) σ_{ZZZ} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -2$, $Z = \frac{1}{2}$.	66
4.1 Exemplo de problema discretizado, mostrando os elementos j (carregado) e i (onde se mede os deslocamentos).	69
4.2 Esboço do carregamento no interior do espaço completo, mostrando as principais componentes de tensão no ponto-campo X_i .	73
4.3 (a) discretização de problema por três elementos e (b) aplicação de carregamento	81
4.4 Fluxograma da técnica de solução das Equações 4.14 e 4.33.	83
5.1 Cubo discretizado no contorno por seis elementos quadrados constantes.	87
5.2 Barra usada para validação do IMECC.	89
5.3 Discretização usada para calcular a barra, e sistemas locais de coordenadas.	90
5.4 Exemplo bidimensional do afastamento ΔZ aplicado na direção de $-Z_{LOCAL}$.	90

5.5 FRF da barra, com $\eta = 0,05$, $\nu = 0,25$, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1 \text{ N/m}^2$ e $\Delta Z = 0,02 \text{ m}$.	91
5.6 FRF da barra, com $\eta = 0,05$, $\nu = 0,25$, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1 \text{ N/m}^2$ e $\Delta Z = 0,05 \text{ m}$.	91
5.7 Viga usada para validação do IMECC.	93
5.8 FRF da viga, com $\eta = 0,05$, $\nu = 0,25$, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1 \text{ N/m}^2$ e $\Delta Z = 0,02 \text{ m}$.	93
5.9 Vista bidimensional do semi-espaço, típico problema que pode ser tratado pelo MEC-I com discretização somente na fronteira.	94
5.10 Vista tridimensional do domínio ilimitado mostrado na 5.9.	95
5.11 Módulo do deslocamento do elemento central, em termos da frequência ω .	96
6.1 Exemplos de casos em que as coordenadas X e Y se anulam.	97
A.1 Fluxograma do programa IMECC.	109

Lista de Tabelas

2.1: Dados utilizados para testar a transformação de tensões.	32
2.2: Razão entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$.	33
2.3: Razão entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para o ponto $P_2 = (7.75, 12, -3.22)$.	34
2.4: Razão entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para o ponto $P_2 = (73.5, 102, 4)$.	34
3.1: Dados utilizados nas comparações nas Figuras 3.1 e 3.2.	36
3.2: Dados utilizados nas comparações nas Figuras 3.3 e 3.4.	38
3.3: Dados utilizados nas comparações na Figura 3.5.	38
3.4: Dados utilizados na validação estática de deslocamentos.	41
3.5: Dados utilizados na validação estática de tensões.	45
3.6: Dados utilizados na validação dinâmica de tensões.	47
3.7: Dados utilizados na validação dinâmica de tensões.	54
3.8: Dados utilizados no estudo da Figura 3.32.	54
3.9: Dados utilizados no estudo da Figura 3.32.	57
3.10: Dados utilizados no estudo da Figura 3.44.	65
5.1: Dados utilizados para calcular as FRF das Figuras 5.5 e 5.6.	92
A.2.1: Tensões devido ao carregamento em $k = X$.	106
A.2.2: Tensões devido ao carregamento em $k = Y$.	106
A.2.3: Tensões devido ao carregamento em $k = Z$.	107

Nomenclatura

u_{ik}	Componente de deslocamento na direção i devido à carga na direção k	[m]
E_{ki}	Componente de deslocamento na direção i devido à carga na direção k	[m]
$u_{ij,k}$	Derivada da componente u_{ij} em relação a k	-
σ_{ijk}	Componente de tensão σ_{ij} devido à carga na direção k	[Pa]
ϵ_{ijk}	Componente de deformação ϵ_{ij} devido à carga na direção k	-
ρ	Massa específica	[kg/m ³]
ρ	Distância entre o ponto-fonte e o ponto-campo	[m]
η	Coeficiente de amortecimento	-
μ	Constante de Lamé	[Pa]
λ	Constante de Lamé	[Pa]
Ω	Domínio	-
Γ	Contorno	-
δ_{ij}	Delta de Krönecker	-
$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$	Delta de Dirac aplicado sobre o ponto \mathbf{x}_0	-
ω	Frequência estacionária de carregamento	[rad/s]
ν	Razão de Poisson	-
θ	Variável do espaço de Radon	-
ξ	Variável do espaço de Radon	-
ΔZ	Afastamento entre a face do elemento e o carregamento	[m]
\mathbf{k}	Variável do espaço de Fourier	-
β	Matriz de transformação de coordenadas	-

G	Módulo de elasticidade transversal	[Pa]
E	Módulo de elasticidade longitudinal, ou Módulo de Young	[Pa]
A	Metade da largura de carregamento na direção X	[m]
B	Metade da largura de carregamento na direção Y	[m]
P	Intensidade de carga concentrada	-
P_X	Intensidade da carga concentrada aplicada na direção X	-
P_Z	Intensidade da carga concentrada aplicada na direção Z	-
A₀	Frequência estacionária de carregamento	[rad/s]
X_j	Ponto-fonte, no qual se aplica o carregamento	-
X_i	Ponto-campo, no qual se mede os efeitos do carregamento	-
G_{ik}	Componente de deslocamento u_{ik} devido ao carregamento unitário	[m]
H_{ijk}	Componente de tensão σ_{ijk} devido ao carregamento unitário	[Pa]
q	Vetor de carregamentos fictícios	-
t^j	Vetor força de superfície descrito no sistema local de coordenadas do elemento j	[Pa]
T^G	Vetor força de superfície descrito no sistema global de coordenadas	[Pa]
n^j	Vetor normal ao elemento, descrito no sistema local de coordenadas	-
N^G	Vetor normal ao elemento, descrito no sistema global de coordenadas	-
M	Número de elementos	
N	Número de graus de liberdade	

Capítulo 1

Introdução

Ao longo de todo o último século, dezenas de métodos numéricos têm sido criadas para resolver problemas da física matemática cuja solução analítica é difícil ou inatingível. Por exemplo, o Método de Elementos Finitos (MEF), de Diferenças Finitas e de Volumes Finitos. Outro método, o de Elementos de Contorno (MEC) começou a ser desenvolvido por Cruse e Rizzo (1968) e Brebbia (1978), essencialmente como uma formulação discretizada das Equações Integrais e Equações Integrais de Contorno consolidadas pelos trabalhos de Fredholm e Helmholtz (Courant e Hilbert, 1989, Arfken e Weber, 2005).

O MEC faz parte do grupo de métodos que envolvem alguma discretização, isto é, o problema grande e complexo é dividido em problemas menores cuja solução é obtida mais facilmente. Depois de obtidas, as soluções desses problemas menores são arrançadas adequadamente de forma a compor a solução aproximada do problema grande e complexo, que pode ser de natureza estrutural estática, dinâmica, térmica, elétrica e eletromagnética, química, etc.

É comum comparar o MEC com o Método de Elementos Finitos, que é apresentado primeiro aos estudantes de engenharia.

Embora possuam formulações matemáticas completamente distintas, eles são algo parecidos em outros aspectos matemáticos: a solução de problemas passa por uma fase de discretização do problema em termos de elementos, pela atribuição dos dados do problema em valores nodais, pela integração numérica sobre os elementos, pela montagem de uma equação matricial que representa a contribuição das pequenas soluções dos elementos para a solução do problema geral, e pela solução numérica desse sistema final de equações.

Uma diferença entre os métodos é que o MEC pode não exigir a discretização de todo o domínio do problema, somente de sua fronteira. Quando a melhor solução para um problema é obtida somente após sucessivas remodelagens, processo que demanda muito tempo de trabalho humano, essa passa a ser uma vantagem do MEC. Algumas formulações do MEC ainda exigem alguma discretização do domínio, como será mostrado adiante, mas esse não é o caso da usada neste trabalho.

A solução obtida pela análise do contorno também permite recuperar dados do domínio do problema. Porém, enquanto pelo MEF isso se dá por interpolação, no MEC é usada uma técnica de integração semelhante à usada na solução dos pontos da fronteira.

O Método dos Elementos de Contorno apresenta algumas formulações distintas, classificadas em dois grandes grupos: a formulação direta (MEC-D) e a indireta (MEC-I).

1.1 Formulação do MEC para a equação homogênea de Laplace baseada na solução fundamental do operador de Laplace

Seja um domínio Ω_b delimitado por uma fronteira Γ_b (Figura 1.1), no qual o comportamento de uma grandeza $u(\underline{x})$ é descrito pela equação homogênea de Laplace (Equação 1.1).

$$\nabla^2 u(\underline{x}) = 0 \quad (1.1)$$

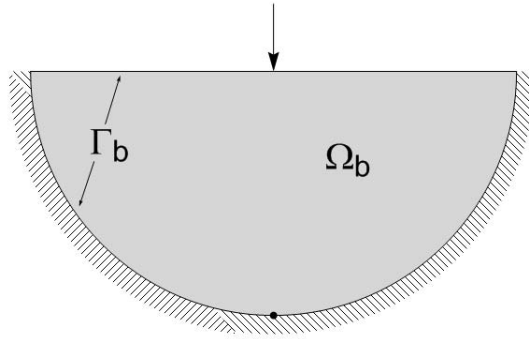


Figura 1.1: Domínio Ω_b delimitado por um contorno Γ_b .

Seja ainda uma relação de reciprocidade entre dois estados $u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)$ e $u(\underline{x})$, tal como a Segunda Identidade de Green (Brebbia e Dominguez, 1992, Kane, 1994).

$$\int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \nabla^2 u(\underline{x}) - u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x}) \quad (1.2)$$

Na Equação 1.2, o estado $u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)$ é chamado de *estado auxiliar*, e é uma característica fundamental do Método dos Elementos de Contorno. O **Capítulo 2** traz alguns exemplos de estados auxiliares, mas um exemplo clássico é a solução do operador de Laplace quando o domínio Ω é ilimitado (Figura 1.2):

$$\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) = -\delta(\underline{x}, \underline{x}_0) \quad (1.3)$$

Este estado diz respeito à aplicação de um carregamento unitário concentrado (distribuição Delta de Dirac) no ponto \underline{x}_0 , sujeito à condição de que seu efeito desapareça em um ponto \underline{x} infinitamente distante de \underline{x}_0 . Ou seja,

$$\lim_{|\underline{x}-\underline{x}_0| \rightarrow \infty} u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) = 0 \quad (1.4)$$

O ponto-fonte \underline{x}_0 , no qual se aplica o estado auxiliar, e o ponto-campo \underline{x} , onde se mede o efeito desta aplicação, também são conceitos fundamentais do MEC, assim como a derivada do estado auxiliar em relação a uma direção normal \underline{n} a ser definida adiante:

$$\frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} = q^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \quad (1.5)$$

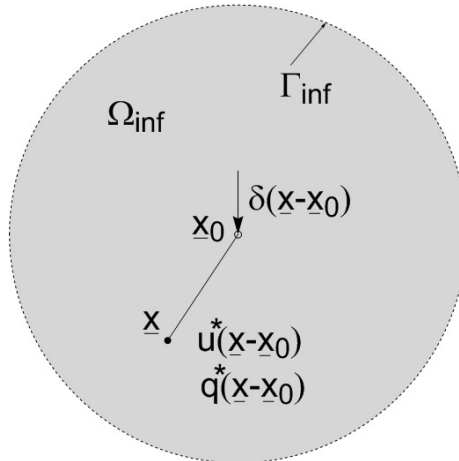


Figura 1.2: Caso particular de estado auxiliar: solução fundamental.

Este caso particular de estado auxiliar é chamado de *solução fundamental* do operador de Laplace¹, cujas características são:

1. O estado auxiliar é a solução do operador de Laplace do domínio ilimitado Ω_{inf} , apresentando um termo não-homogêneo definido por um Delta de Dirac e
2. Satisfaz a condição de contorno expressa pela Equação 1.4.

A solução fundamental $u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)$ apresenta a seguinte importante propriedade matemática:

$$\int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \int_{\Omega_b} - \left(u(\underline{x}) \delta(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = -u(\underline{x}_0) \quad (1.6)$$

Substituindo-se (1.6) e (1.1) em (1.2), tem-se:

$$\int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \underbrace{\nabla^2 u(\underline{x})}_0 - u(\underline{x}) \underbrace{\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}_{-\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)} \right) d\Omega = \int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) [-\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)] \right) d\Omega = u(\underline{x}_0) \quad (1.7)$$

Aplica-se (1.7) ao lado direito da Segunda Identidade de Green (Equação 1.2) para se obter a seguinte Equação Integral de Contorno:

$$+u(\underline{x}_0) = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x}) \quad (1.8)$$

Como a posição do ponto-fonte \underline{x}_0 é qualquer, ele pode ser posto no contorno do problema, onde a Equação 1.8 torna-se análoga à Identidade de Somigliana, mas para o operador de Laplace:

$$C(\underline{x}_0)u(\underline{x}_0) = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x}) \quad (1.9)$$

¹ Ou também, “Função de Green do Espaço Completo”.

Esta equação é a base do MEC-Direto clássico e sua formulação pode ser encontrada nos mais variados livros-texto sobre o Método dos Elementos de Contorno.

Contudo, a Equação 1.9 não encerra sobre si o MEC. Trata-se de uma Equação Integral de Contorno na qual integrais de linha devem ser determinadas ao longo de um contorno finito e contínuo como o Γ_b da Figura 1.1, e cujo resultado expressa de maneira absolutamente exata o comportamento da grandeza u .

A diferença entre a solução exata da Equação 1.9 e o MEC está em um processo de discretização. Segundo este método, a fronteira Γ_b é discretizada por meio de elementos de fronteira Γ^e (Figura 1.3), e admite-se que a solução do problema todo é representada por uma aproximação da solução nos elementos, como:

$$u(\underline{x}) = \sum_i u_i h_i(x) ; \quad q(\underline{x}) = \sum_i q_i h_i(x) \quad (1.10)$$

Assim, a Equação 1.9 aplicada aos elementos torna-se:

$$C(\underline{x}_0)u(\underline{x}_0) = \sum_i q_i \int_{\Gamma^e} u^*(\underline{x}_e, \underline{x}_0) h_i(\underline{x}_e) d\Gamma^e(\underline{x}_e) + \sum_i u_i \int_{\Gamma^e} q^*(\underline{x}_e, \underline{x}_0) h_i(\underline{x}_e) d\Gamma^e(\underline{x}_e) \quad (1.11)$$

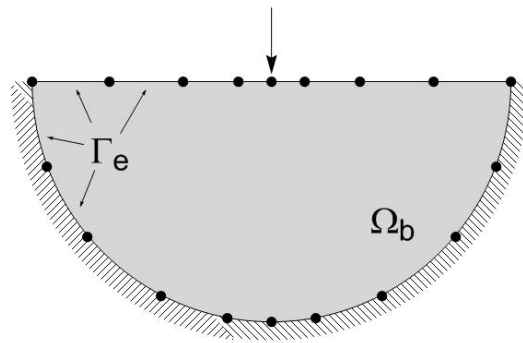


Figura 1.3: Discretização do contorno Γ_b que dá origem ao MEC-D.

1.2 Formulação do MEC para a equação homogênea de Helmholtz baseada na solução fundamental do operador de Helmholtz

De forma análoga ao que foi feito com o operador de Laplace, é possível escrever uma Equação Integral de Contorno para o operador homogêneo de Helmholtz (Kane, 1994):

$$\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) = 0 \quad (1.12)$$

Neste caso, também se define uma solução fundamental por:

$$\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) + k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) = -\delta(\underline{x}, \underline{x}_0) \quad (1.13)$$

Utilizando as Equações 1.12 e 1.13 em conjunto com o lado esquerdo da Segunda Identidade de Green (Equação 1.2) obtém-se:

$$\int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) [-\delta(\underline{x} - \underline{x}_0)] \right) d\Omega = +u(\underline{x}_0) \quad (1.14)$$

Finalmente, chega-se a uma Equação Integral de Contorno para o operador de Helmholtz substituindo-se (1.14) no lado direito da Equação 1.2:

$$-u(\underline{x}_0) = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x}) \quad (1.15)$$

Atente-se para o fato de que novamente o problema é completamente descrito por integrais no contorno Γ_b .

1.3 Inconveniências do MEC-Direto

O que ocorre quando se pretende formular uma Equação Integral de Contorno com uma solução fundamental que não corresponde ao operador em questão?

Para ilustrar isso, considere o operador de Helmholtz (Equação 1.12):

$$\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) = 0 \quad (1.12)$$

e a solução fundamental do operador de Laplace (Equação 1.3):

$$\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) = -\delta(\underline{x}, \underline{x}_0) \quad (1.3)$$

Aplicando as Equações 1.3 e 1.12 na expressão da esquerda da Segunda Identidade de Green (Equação 1.2), chega-se a:

$$\int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \nabla^2 u(\underline{x}) - u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = u(\underline{x}_0) - \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega \quad (1.16)$$

Finalmente, chega-se a uma equação integral para o operador de Helmholtz baseado em uma solução fundamental alternativa substituindo-se (1.16) no lado direito da Equação 1.2:

$$u(\underline{x}_0) = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x}) + k^2 \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) u(\underline{x}) \right) d\Omega(\underline{x}) \quad (1.17)$$

Ao contrário do que se observa nas Equações 1.9 e 1.15, a Equação 1.17 contém ainda uma integral que deve ser resolvida em todo o domínio, envolvendo a solução fundamental de Laplace $u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)$ e a variável do problema, $u(\underline{x})$.

Este desenvolvimento pode ser feito para outras combinações de operadores e soluções fundamentais. De qualquer forma, se não há uma solução fundamental que corresponda

exatamente ao operador diferencial em análise, sempre será necessário realizar uma integral de domínio – o problema nunca poderá ser descrito completamente por uma Equação Integral de Contorno (Wrobel, 2002, Aliabadi, 2002).

Porém, de forma análoga ao conceito que levou à Equação 1.17, também se pode formular um problema elástico anisotrópico a partir de uma solução estática isotrópica, e a integral de domínio remanescente será responsável por corrigir esta diferença. Da mesma forma, uma solução elastostática pode ser usada na formulação integral de um operador elastodinâmico, e as componentes inerciais serão representadas na integral de domínio (Wrobel, 2002, Aliabadi, 2002).

Além disso, a discretização formulada pelas Equações 1.10, baseada em superposição, faz com que o MEC seja adequado para tratar problemas lineares, mas problemas não-lineares podem ser tratados pela inclusão de uma integral de domínio (Wutzow, 2003).

Há três abordagens principais para resolver as integrais de domínio.

Uma delas é discretizar o domínio por meio de células (Figura 1.4), sobre as quais se faz uma integração. Existem técnicas eficientes de resolver tais integrais, entre elas a de Wutzow (2003), que as transforma analiticamente em integrais de contorno relativas às células, mas de qualquer forma causam a perda de um dos principais atrativos do MEC: a possibilidade de discretizar somente o contorno.

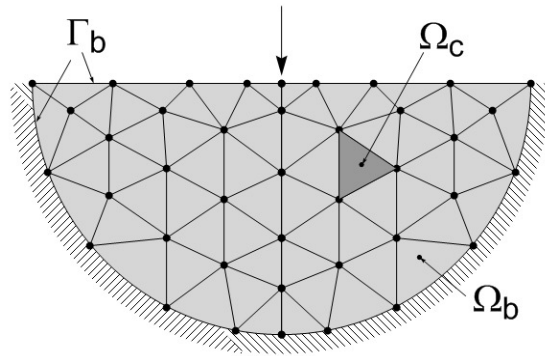


Figura 1.4: Discretização do domínio Ω_b em células de domínio Ω_c .

No Método de Reciprocidade Dual (DRM), as integrais de domínio são aproximadas por uma soma de integrais de contorno onde existe um conjunto de funções de ponderação distribuídas em pontos do contorno, e eventualmente do domínio (Brebbia e Partridge, 1992,

Mesquita et al, 2002). Um esquema de pontos de suporte para as funções auxiliares da DRM é mostrado na Figura 1.5. A escolha do tipo das funções auxiliares, o número de pontos de colocação destas funções, bem como sua posição, tanto sobre o domínio como sobre o contorno são variáveis que necessitam ser pesquisadas para cada implementação do método. Esta técnica pode ser implementada de forma eficiente e competitiva, mas dependendo das opções feitas existe um acréscimo de memória necessária bem como de tempo de processamento.

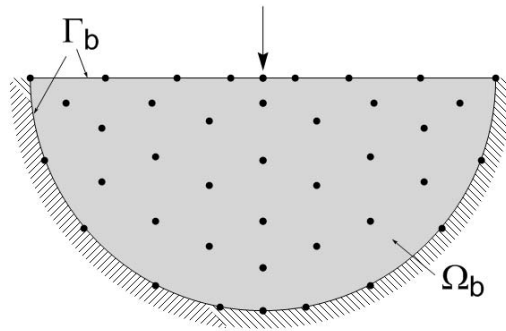


Figura 1.5: Pontos de suporte para as funções auxiliares do DRM.

Por fim, o Método da Múltipla Reciprocidade (MRM) transforma a integral de domínio em uma soma de uma série de integrais de contorno, utilizando uma família de soluções auxiliares para o operador em análise (Mesquita et al, 2002). O método tem o inconveniente de exigir uma família recorrente de funções auxiliares, e também exige um estudo do número de elementos da série que produz convergência nos resultados. Deve-se considerar ainda o aumento do custo computacional do MRM.

Técnicas como estas viabilizam o MEC-D mesmo sem a existência de uma solução fundamental correspondente ao operador analisado, mas sempre dependem de alguma operação sobre o domínio do problema. A consequência é que problemas envolvendo domínios abertos não possam ser tratados pelo MEC-D, a menos que haja uma solução fundamental capaz de formular uma Equação Integral somente de Contorno.

A Figura 1.6 ilustra um caso de domínio ilimitado Ω_{inf} . Como as técnicas de divisão celular, DRM e MRM são capazes de tratar somente o domínio limitado, são ineficientes se o fenômeno envolve a propagação da grandeza para além do espaço Ω_b . Fenômenos como a transferência de calor em meios abertos, a acústica de oceanos e da atmosfera e o eletromagnetismo em ambientes abertos são exemplos típicos de problemas de domínio ilimitado.

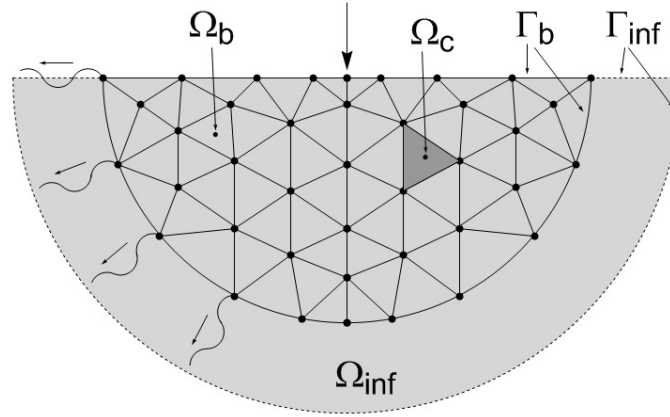


Figura 1.6: Domínio ilimitado Ω_{inf} e domínio limitado Ω_b discretizado por células Ω_c .

Outro desafio, que surge no tratamento da propagação de ondas em meios geofísicos, é a necessidade de respeitar a Condição de Radiação de Sommerfeld (CRS) (Sommerfeld, 1957, Gazetas, 1983, Richart et al. 1970). Essa condição estabelece que a energia se propaga das fontes próximas para o infinito e não vem do infinito para a região analisada.

O MEC é capaz de lidar com estas situações se existir um estado auxiliar que satisfaça o operador, ao mesmo tempo em que satisfaz a CRS. Para problemas elásticos em meios isotrópicos ou anisotrópicos, existem soluções fundamentais no domínio da frequência. Existe expressão analítica para o caso isotrópico dada por Dominguez (1993). Para o caso anisotrópico, as soluções podem ser fornecidas numericamente (Dravinski e Niu, 2003). Os problemas viscoelásticos lineares estacionários podem ser resolvidos pelo Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico (Christensen, 2003), segundo o qual a solução do meio viscoelástico pode ser obtida a partir da solução do domínio elástico, desde que se substitua os parâmetros constitutivos elásticos pelos viscoelásticos.

Problemas viscoelásticos transientes, por outro lado, necessitam um estado auxiliar viscoelástico transiente genérico, que satisfaça qualquer equação constitutiva viscoelástica linear. Não existe tal solução (Gaul, Antes e Fiedler, 1992, Gaul e Schanz, 1999, Gaul e Schanz, 1997, Schanz e Antes, 1997, Schanz, 1999, Schanz, 2001, Mesquita et al, 2002).

Há duas técnicas principais para modelar domínios infinitos sujeitos à CRS. Pode-se sintetizar estados auxiliares aplicáveis ao MEC, que respeitem a CRS, ou simular a CRS no Método dos Elementos Finitos (Mesquita e Pavanello, 2005). Esta última técnica foi abordada

por Marques de Barros et al (1995) por meio de Elementos Finitos Infinitos, e por Givoli (1992) pelo mapeamento Dirichlet to Neumann (DtN).

A abordagem do MEC-D baseada em soluções fundamentais singulares traz consigo ainda um último inconveniente que é a necessidade de tratar as singularidades da solução. As singularidades fracas podem ser integradas numericamente com boa precisão; as fortes precisam ser integradas segundo a abordagem do Valor Principal de Cauchy (Kane, 1994); as hipersingulares exigem técnicas mais sofisticadas, como a Parte Finita de Hadamard (Guiggiani et al. 1992, Krishnasamy et al. 1992).

1.5 Formulações alternativas do Método dos Elementos de Contorno

Até aqui, denominou-se solução fundamental ou Função de Green do Espaço Completo a solução que obedecia à condição de contorno da Equação 1.4. Funções de Green específicas podem ser designadas para satisfazer outras condições de contorno além dessa.

A Figura 1.7 mostra um exemplo de função de Green específica para um semi-espço. Neste caso, uma força concentrada $t_z = \delta(x, z)$ é aplicada na origem do sistema de coordenadas e na direção de Z, e a função de Green deve satisfazer as seguintes condições de contorno: $t_z(x \neq 0, z = 0) = 0$ e $t_x(x \neq 0, z = 0) = 0$.

Funções de Green específicas com estas características são chamadas de Funções de Green para o Semi-Espço.

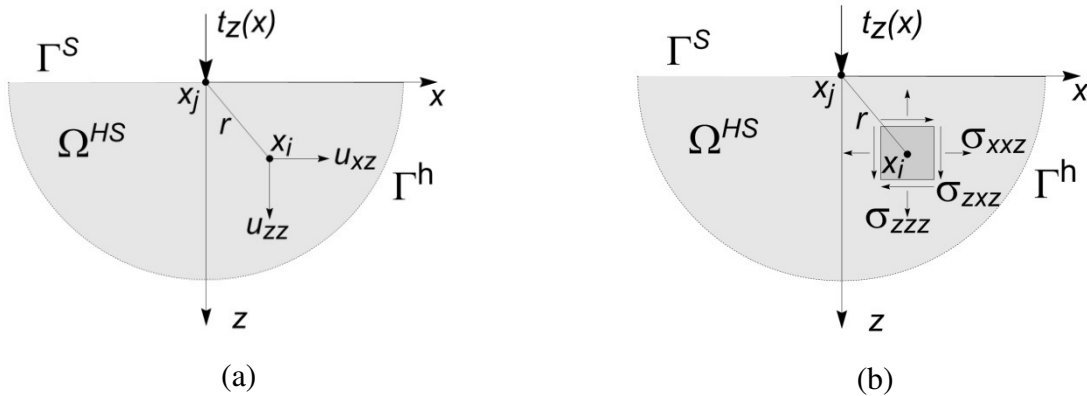


Figura 1.7: (a) deslocamentos e (b) tensões descritos pela função de Green para o semi-espço.

Quando se descreve a interação de uma estrutura rígida com o semi-espço pela função de Green para o semi-espço, somente a interface solo-fundação precisa ser discretizada, uma vez que as demais condições de contorno da superfície não-carregada já estão satisfeitas a priori por essa função.

A Figura 1.8a ilustra esse exemplo. A interface Γ_{fs} sob a fundação é discretizada, enquanto o resto da superfície livre ilimitada Γ_{s-inf} do semi-espço obedece às condições de contorno $t_z (|x| > a, z = 0) = t_x (|x| > a, z = 0) = 0$.

O mesmo problema, se descrito pela Função de Green do Espaço Completo, exige a discretização de toda uma superfície Γ_s na qual se impõe as condições $t_z (L_s + a > |x| > a, z = 0) = t_x (L_s + a > |x| > a, z = 0) = 0$ (Figura 1.8b). Este esforço de criação da superfície livre Γ_s que se estenda para além da interface solo-fundação Γ_{fs} é um dos custos do uso da solução fundamental. A superfície Γ_s deveria se estender infinitamente além de Γ_{fs} , mas na prática é truncada a uma distância $(L_s + a)$ do centro da fundação. Este truncamento introduz uma aproximação na discretização e sua influência necessita ser avaliada com cuidado.

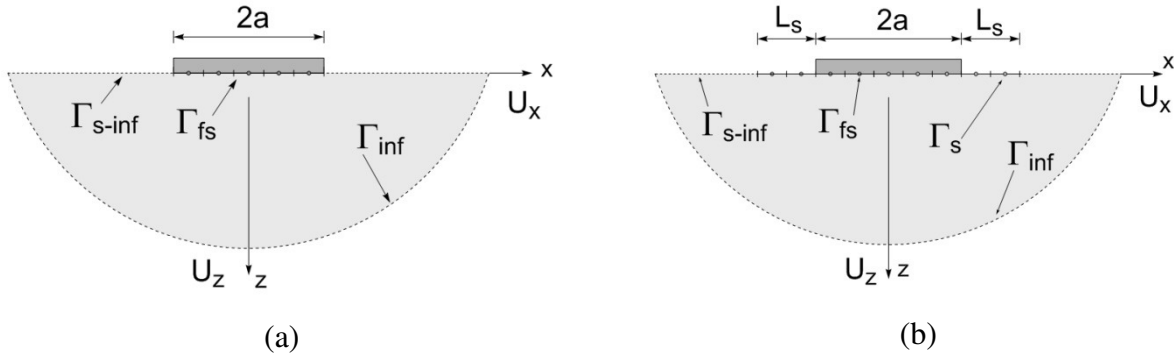


Figura 1.8: Discretizações para funções de Green (a) do semi-espço e (b) do espaço completo.

Considere agora que o problema a ser tratado seja uma camada horizontal Ω_L disposta sobre uma camada rígida (Figura 1.9a). Pode-se sintetizar uma função de Green específica sujeita às condições da superfície livre e deslocamento nulo no fundo de Ω_L , e somente a superfície Γ_{fs} deve sofrer discretização (Figura 1.9b).

Abordar o mesmo problema pela função de Green do Espaço Completo exige a discretização de todas as superfícies, Γ_{s-inf} e Γ_u , como mostra a malha da Figura 1.10a (Carrion et al, 2007).

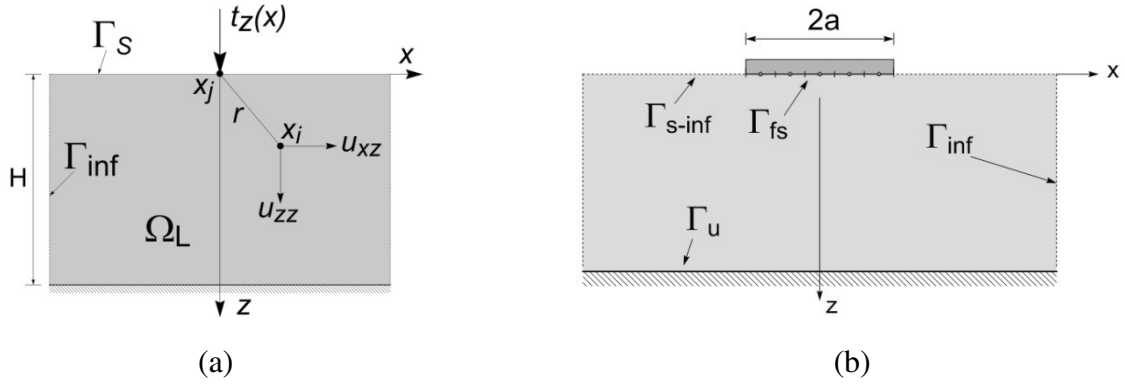


Figura 1.9: Função de Green específica para camada sobre base rígida e discretização.

No entanto, o maior empecilho vem da falta de generalidade dessa técnica. Se o problema for, por exemplo, a fundação sobre base rígida cuja malha é mostrada na Figura 1.10b, será necessário o trabalho extremamente difícil, senão impossível, de construir uma função de Green específica capaz de satisfazer as condições de contorno presentes neste problema.

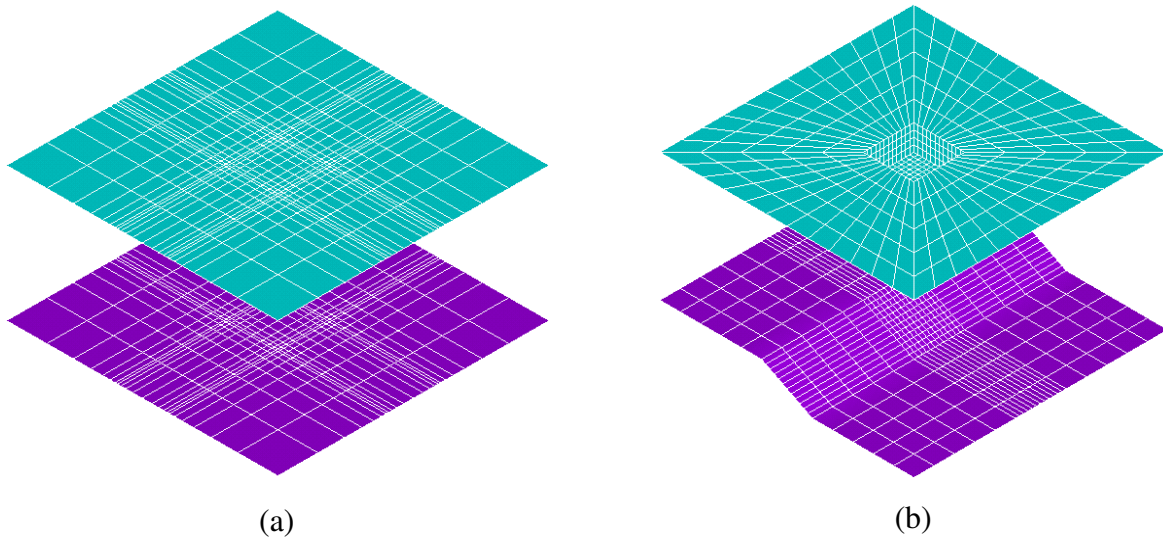


Figura 1.10: malhas para camadas sobre base rígida para fundação (a) sobre a superfície, sobre camada horizontal e (b) engastada, sobre camada não-horizontal.

1.6 Estados auxiliares não-singulares

Uma alternativa às funções de Green, relativas a esforços concentrados, é a síntese de estados auxiliares não-singulares. Estados sintetizados assim têm a vantagem de não serem singulares próximo ao carregamento, e de poderem ser incluídos em formulações diretas (Barros e Mesquita, 2001) ou indiretas (Thomazo, 2004) do MEC.

As Figuras 1.11a e 1.11b mostram exemplos de estados auxiliares não-singulares para carregamentos distribuídos de amplitude constante e linear, aplicados sobre a superfície do semi-espaço.

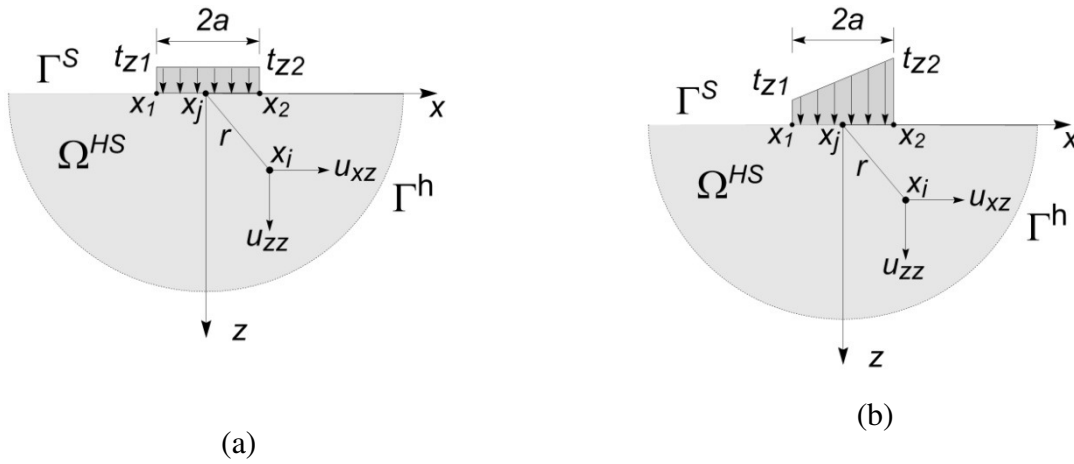


Figura 1.11: Semi-espaços com carregamentos distribuídos (a) constante e (b) linear.

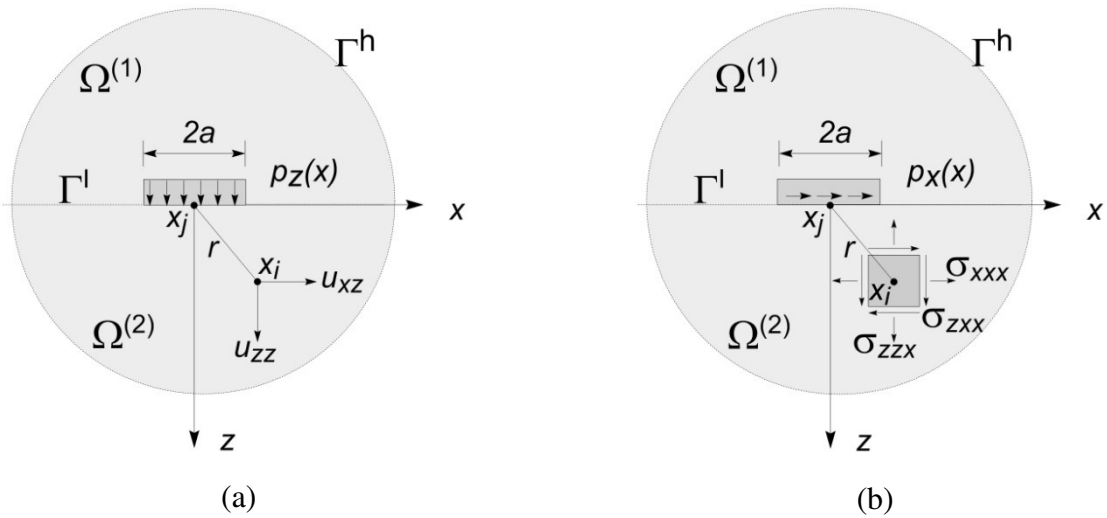


Figura 1.12: Estados auxiliares não-singulares para carregamento (a) vertical e (b) transversal no interior do espaço completo.

As Figuras 1.12a e 1.12b mostram exemplos de estados auxiliares não-singulares para carregamentos vertical e tangencial, aplicados no interior do espaço completo.

Estados auxiliares não-singulares muito simples podem ser resolvidos analiticamente. Crouch e Starfield (1983) fizeram isso para o estado auxiliar da elastostática bidimensional. Estados mais complexos, como da elastodinâmica iso- ou anisotrópica exigem solução numérica.

O **Capítulo 2** trata com mais detalhes da síntese de estados auxiliares não-singulares.

1.7 Formulações singular e não-singular do MEC

Independente de o estado auxiliar ser singular (solução fundamental) ou não, a formulação do MEC pode ainda ser abordada de maneira singular ou não-singular.

A Figura 1.13a mostra um exemplo da abordagem não-singular do MEC, embora a solução fundamental utilizada seja singular. Isso é conseguido fazendo-se com que os pontos de colocação x_{0i} se disponham sobre uma superfície auxiliar Γ_{aux} distante da superfície real discretizada Γ_s , de forma que os integrandos da solução fundamental nunca sejam singulares. A distância entre as fronteiras Γ_{aux} e Γ_s deve ser otimizada para cada tipo de problema.

A Figura 1.13b mostra o oposto: um estado não-singular aplicado em uma formulação singular do MEC, exatamente sobre o contorno discretizado.

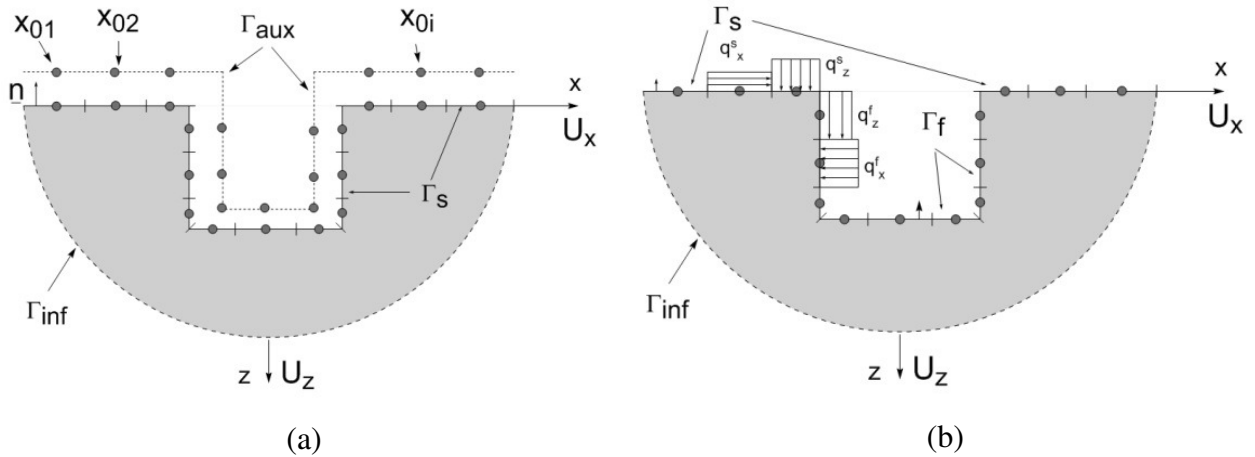


Figura 1.13: (a) Estado singular com formulação não-singular do MEC. (b) Estado não-singular com formulação singular do MEC.

1.8 Revisão bibliográfica

Este trabalho se enquadra em uma linha de trabalho de um grupo de pesquisa deste Departamento de Mecânica Computacional, na qual se desenvolve estados auxiliares por meio de técnicas analíticas e numéricas, geralmente envolvendo alguma transformação analítica de Fourier, Radon ou Hankel, e sua transformação inversa operada numericamente.

Outra vertente do grupo, na qual se inclui este trabalho, se ocupa de aplicar tais estados sintetizados em métodos como o MEC direto ou indireto para a solução de problemas da física matemática.

O primeiro trabalho do grupo foi realizado por Mesquita (1989) e consistiu em desenvolver um estado auxiliar não singular para semi-espacos bi- e tridimensionais. Neste caso os carregamentos eram de amplitude constante e aplicados na superfície do semi-espaço. As respostas eram dadas no domínio da frequência, caso estacionário, e o solo era considerado isotrópico e viscoelástico.

Os trabalhos de Romanini (1995) e Mesquita e Romanini (1992) estendem a formulação para o caso de uma camada viscoelástica apoiada sobre uma base rígida, bem como uma camada apoiada sobre um semi-espaço. Aqui a análise era bi-dimensional e no domínio da frequência, e o meio, isotrópico. Uma extensão para um meio transversalmente isotrópico, viscoelástico e bidimensional foi realizado por Barros (1999). Barros tratou tanto de espaços completos como de semi-espacos, sendo que nestes últimos casos as direções principais dos solos não necessariamente coincidiam com a orientação da superfície livre.

A aplicação das soluções desenvolvidas por Romanini para a superfície do semi-espaço foram incorporadas no chamado “Substructure Deletion Method” para incorporar o efeito do engastamento das fundações sobre semi-espacos (Mesquita et al. 1995). A interação estrutura-solo-estrutura utilizando as mesmas funções foi realizada por Betti et al (1996). O trabalho de Barros e Mesquita (2001) aplica as soluções de espaço completo transversalmente isotrópicas e não-singulares no âmbito do MEC-Direto para tratar problemas de interação túnel-solo.

Soluções bidimensionais com diversos tipos de carregamentos distribuídos, tais como lineares, quadráticos e mesmo carregamentos com singularidade, foram desenvolvidos e aplicados para descrever a interação solo-estrutura (Barros e Mesquita, 2000, Barros e Mesquita, 1999b). Soluções bi- e tridimensionais axissimétricas para múltiplas camadas horizontais em

meios transversalmente isotrópicos no domínio da frequência foram desenvolvidas por Marques de Barros (2001).

Diversos trabalhos foram empreendidos pelo grupo para tratar de problemas transientes. Aprimorando as técnicas de integração no domínio da frequência e utilizando a transformada de Fourier, pôde-se analisar a resposta dinâmica transiente de semi-espacos (Mesquita et al. 2002, Thomazo, 2004) bem como de camadas sobre bases rígidas (Mesquita et al. 2003).

Com as análises bidimensionais em um bom patamar de resultados e eficiência computacional, as análises começaram a ser estendidas com estados auxiliares tridimensionais.

Romanini (2008) sintetizou a solução de um estado auxiliar tridimensional, composto por um carregamento retangular inserido em um espaço completo isotrópico, viscoelástico, no domínio da frequência. A ferramenta numérica utilizada por Romanini foi a transformada integral de Fourier.

Mais recentemente, Adolph sintetizou solução semelhante utilizando a transformada de Radon (Adolph 2006, Adolph et al, 2007). As soluções sintetizadas por Adolph incluíam carregamentos retangulares de amplitude constante aplicados na superfície de um semi-espaço (Adolph et al. 2007) ou no interior do espaço completo.

1.9 Objetivos do trabalho

De posse de uma solução numérica de um estado auxiliar dinâmico estacionário para deslocamentos e tensões para um meio contínuo, tridimensional, viscoelástico, sujeito a um carregamento contínuo distribuído numa área retangular, objetiva-se aplicar o conceito do MEC-Indireto para resolver problemas de mesmas características físicas, de domínios fechados ou abertos, estáticos ou dinâmicos estacionários, discretizados no contorno por elementos constantes retangulares.

A implementação final, feita em linguagem Fortran – uma linguagem compilada, fortemente tipada, de alto nível e alto desempenho, é planejada para admitir futuramente a inclusão de outros tipos de análise, como multidomínios, problemas envolvendo a presença de corpos rígidos, e melhorias nas técnicas numéricas de integração e álgebra, além de programação paralela.

Adicionalmente, desenvolve-se um estudo analítico abrangente do comportamento que as componentes do tensor de tensões para meios contínuos apresentam ao longo de vários planos e eixos coordenados, usando para isso a formulação da Lei de Hooke generalizada, e também um estudo das fontes disponíveis de validação para estados auxiliares desenvolvidos numericamente, e suas limitações.

Capítulo 2

Estados auxiliares

Estados auxiliares são soluções analíticas ou numéricas para operadores matemáticos, sujeitas às condições de contorno de um determinado problema da física matemática. Soluções fundamentais são casos particulares de estado auxiliar, em que o carregamento é singular, dado pela função Delta de Dirac, como mostrado no **Capítulo 1**.

A solução de tais estados por si só freqüentemente tem aplicação prática limitada a problemas elementares, embora dê valiosas informações sobre o comportamento dos meios quando sujeitos ao respectivo carregamento ou mesmo carregamentos semelhantes. A grande utilidade dessas soluções vem quando elas são aplicadas por métodos como o dos elementos de contorno para resolver problemas reais de engenharia.

Soluções analíticas ou numéricas para estados auxiliares dos mais diversos tipos são descritas pela bibliografia; algumas delas são resumidas a seguir. Neste trabalho, utiliza-se uma solução numérica estacionária não-singular, desenvolvida por Adolph (2006) em seu trabalho de doutorado.

2.1 Viscoelastodinâmica

Em muitos problemas mecânicos, o estado de tensão é também função do tempo, e não somente do estado de deformação (característica puramente geométrica). Isto é, muitos problemas não são rigorosamente elásticos, mas sim *viscoelásticos*. Quando essa verdade é descrita com mais precisão na modelagem do problema, obtém-se maior semelhança entre o comportamento sugerido pelo modelo e a realidade, no que tange a dissipação de energia (Adolph, 2006, Christensen, 2003).

Uma forma de descrever o comportamento viscoelástico de um meio é pelo Princípio da Correspondência (Christensen, 2003), segundo o qual as propriedades do meio são tratadas como entidades complexas. Por exemplo, $\lambda_{\text{viscoelástico}}(\omega) = \lambda(1+i\eta(\omega))$, em que η é o coeficiente de amortecimento do meio, particular de cada uma das constantes, e λ é a constante de Lamé.

O amortecimento pode variar com a frequência, ou ser uma constante. O primeiro modelo é chamado de amortecimento viscoso e o último de histerético, e é o modelo usado neste trabalho.

2.2 Solução de Kelvin para carga concentrada e espaço tridimensional

Kelvin determinou o comportamento que um meio elástico tridimensional infinito, homogêneo e isotrópico apresenta quando sujeito a uma carga pontual estática (Figura 2.1).

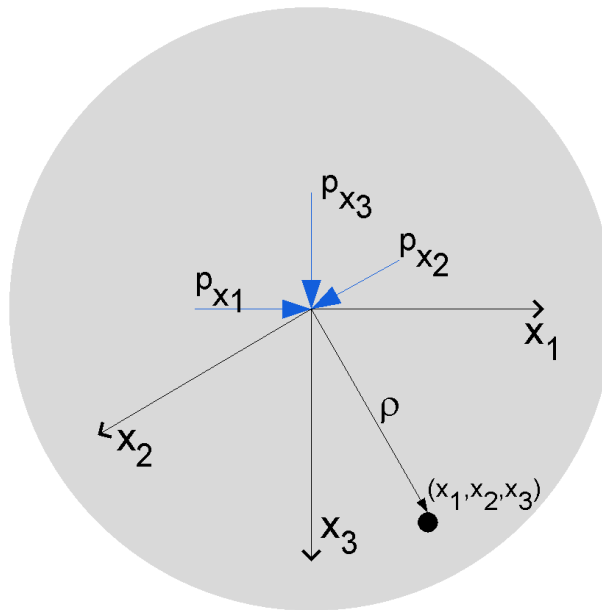


Figura 2.1: Cargas pontuais no espaço tridimensional infinito.

Sendo o meio infinito, a solução do problema não muda quando se considera, para fins de simplificação, que as cargas pontuais estão aplicadas sobre a origem, alinhadas com os eixos coordenados.

Para contornar o problema da inconsistência física que é a força pontual, pode-se considerá-las como sugerem os conceitos do delta de Dirac: a força pontual é o caso limite de uma força de corpo f_i atuando sobre uma esfera, tal que f_i aumente quando o raio da esfera tenda a zero, de forma a manter constante a carga resultante P .

A carga aplicada nessa esfera deve ser tal que, quando confrontada quando as forças de superfície na direção x_i , não altere o equilíbrio da esfera (Figura 2.2). Isto é, a somatória das forças na direção x_i deve ser nula:

$$\sum F_i = 0 = P + \int_{\Gamma} t_i d\Gamma \quad (2.1)$$

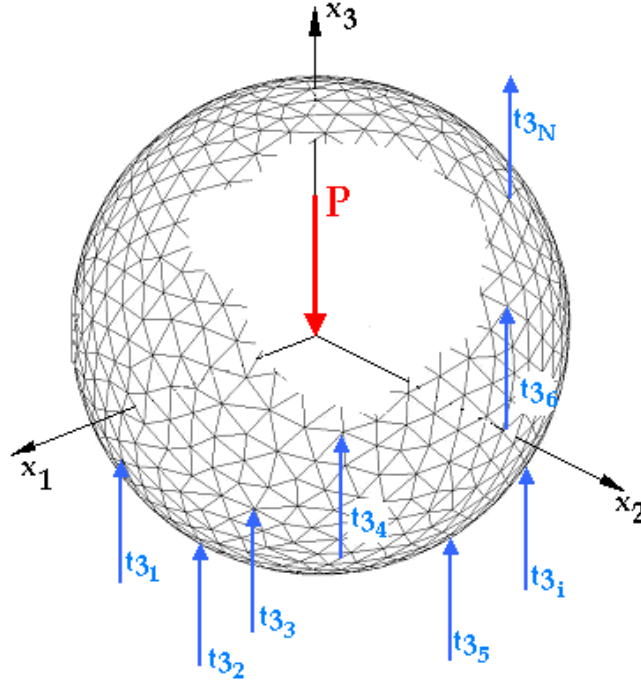


Figura 2.2: Carga concentrada P e trações na direção de x_3 .

O desenvolvimento dessa equação de equilíbrio usando o conceito do vetor de Galerkin, a fórmula de Cauchy e a equação de elasticidade de Navier é mostrada em detalhes por Kane (1994), mas conduz às expressões analíticas de deslocamento e tensão para um ponto qualquer do espaço tridimensional infinito, dadas por:

$$u_{ik} = \frac{P}{16\mu\pi(1-\nu)} \rho^{-1} \left[(3-4\nu) \delta_{ik} + \frac{x_k}{\rho} \frac{x_i}{\rho} \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ijk} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[\delta_{ij} \frac{x_k}{\rho} - \delta_{jk} \frac{x_i}{\rho} - \delta_{ki} \frac{x_j}{\rho} - \frac{3}{1-2\nu} \frac{x_i x_j x_k}{\rho^3} \right] \quad (2.3)$$

em que os índices i, j e k referem-se às direções 1, 2 e 3. u_{ik} representa a componente de deslocamento na direção i devido à carga na direção k e σ_{ijk} a componente de tensão σ_{ij} devido à

carga na direção k . A intensidade da carga concentrada é representada por P e o material é definido por suas propriedades ν (razão de Poisson) e μ (constante de Lamé, equivalente ao módulo de elasticidade transversal G). O ponto $\mathbf{X} = (x_i, x_j, x_k)$ é ponto do espaço em que se calcula a solução, e sua distância da origem é dada por $\rho = \sqrt{x_i^2 + x_j^2 + x_k^2}$. A função δ_{ij} , o Delta de Krönecker, é definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

É fundamental observar que as expressões do problema de Kelvin não apresentam descontinuidades, embora algumas componentes sejam singulares na origem do sistema de coordenadas.

Esta solução pode ser usada para validar um estado auxiliar dinâmico tridimensional, desde que a frequência utilizada seja muito baixa (emulação da característica estática da solução de Kelvin) e a área carregada seja muito pequena (emulação da característica concentrada). Porém, deve-se atentar para o fato de que as descontinuidades que eventualmente ocorram no estado auxiliar não serão mostradas por esta solução de Kelvin.

2.3 Solução de Crouch e Starfield para carga distribuída e espaço bidimensional

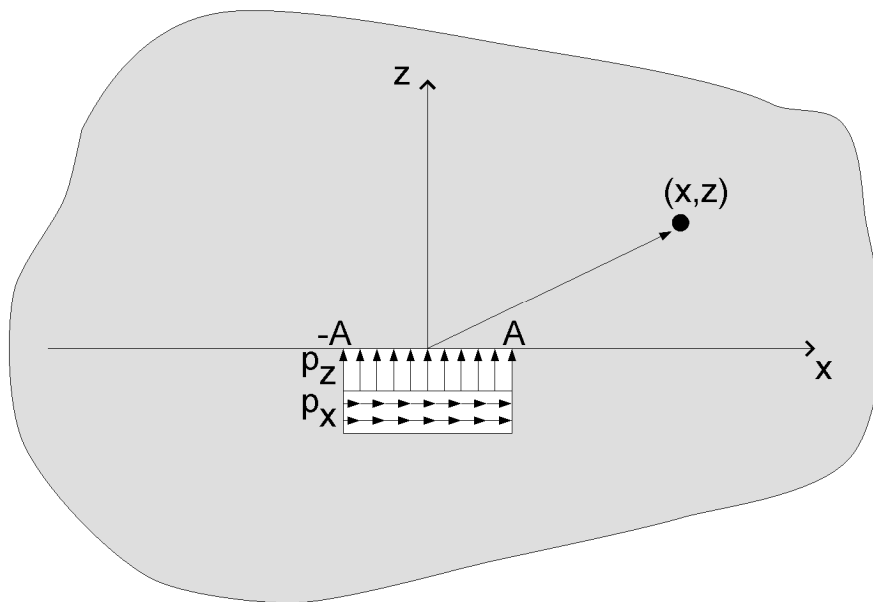


Figura 2.3: Esquematização de cargas distribuídas no espaço bidimensional infinito.

Crouch e Starfield (1983) utilizaram a solução de Kelvin do espaço bidimensional para determinar o comportamento que um meio elástico bidimensional infinito, homogêneo e isotrópico apresenta quando sujeito a um carregamento estático constante, porém desta vez distribuído sobre uma linha de comprimento $2A$ (Figura 2.3).

Se esse carregamento é centrado na origem do sistema de coordenadas, as expressões de deslocamentos e tensões em qualquer ponto do espaço bidimensional são dadas por Crouch e Starfield (1983) como:

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= \frac{P_x}{2G} \left[(3-4\nu) f + z \cdot f_{,z} \right] \\
 u_{xz} &= \frac{P_z}{2G} \left[-z \cdot f_{,z} \right] \\
 u_{zx} &= \frac{P_x}{2G} \left[-z \cdot f_{,x} \right] \\
 u_{zz} &= \frac{P_z}{2G} \left[(3-4\nu) f + z \cdot f_{,z} \right]
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xxx} &= P_x \left[(3-2\nu) f_{,x} + z \cdot f_{,xz} \right] \\
 \sigma_{xzx} &= P_x \left[2(1-\nu) f_{,z} + z \cdot f_{,zz} \right] \\
 \sigma_{zzx} &= P_x \left[-(1-2\nu) f_{,x} - z \cdot f_{,xz} \right] \\
 \sigma_{xxz} &= P_z \left[2\nu f_{,z} + z \cdot f_{,zz} \right] \\
 \sigma_{xzz} &= P_x \left[2(1-\nu) f_{,x} - z \cdot f_{,xz} \right] \\
 \sigma_{zzz} &= P_x \left[(1-2\nu) f_{,z} - z \cdot f_{,zz} \right]
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

nos quais u_{ik} representa a componente de deslocamento na direção i devido à carga na direção k e σ_{ijk} a componente de tensão σ_{ij} devido à carga na direção k . Os índices i, j e k representam as direções X e Z. P_x e P_z representam as intensidades das cargas distribuídas nas direções X e Z. O material é definido pelas propriedades ν (razão de Poisson) e G (módulo de elasticidade transversal). A função $f(x,z)$ mostrada nas Equações 2.4 e 2.5 e suas derivadas são dadas por:

$$f(x, z) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[z \left(\arctan \frac{z}{x-A} - \arctan \frac{z}{x+A} \right) - (x-A) \ln \sqrt{(x-A)^2 + z^2} + (x+A) \ln \sqrt{(x+A)^2 + z^2} \right];$$

$$f_{,x}(x, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{(x-A)^2 + z^2} - \ln \sqrt{(x+A)^2 + z^2} \right];$$

$$f_{,z}(x, z) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{z}{x-A} - \arctan \frac{z}{x+A} \right];$$

$$f_{,xz}(x, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{z}{(x-A)^2 + z^2} - \frac{z}{(x+A)^2 + z^2} \right] e$$

$$f_{,xx}(x, z) = -f_{,zz}(x, z) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-A}{(x-A)^2 + z^2} - \frac{x+A}{(x+A)^2 + z^2} \right].$$

Ao contrário da solução de Kelvin para carga concentrada, estas expressões são capazes de descrever tanto o comportamento descontínuo quanto as singularidades que as componentes de tensão apresentam em algumas circunstâncias. Como exemplo, a Figura 2.4 ilustra a descontinuidade que a componente σ_{zzz} apresenta sob a superfície de carregamento, e a singularidade que a componente σ_{zzx} apresenta próximo à borda do carregamento (isto é, quando $X \rightarrow A$).

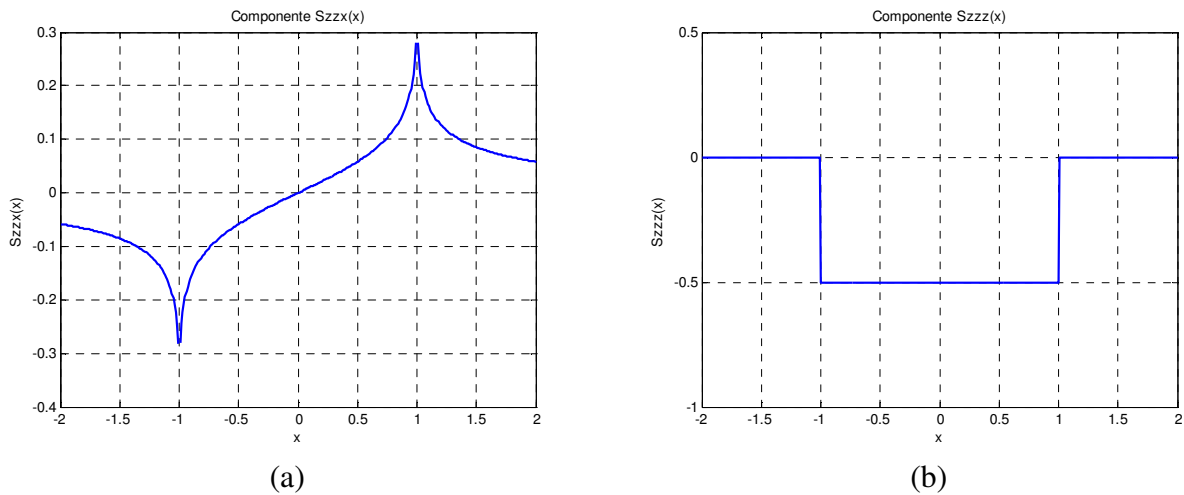


Figura 2.4: Exemplos mostrando descontinuidades e singularidades que a solução de Crouch e Starfield é capaz de prever ($A = 1$ m, $G = 1$ Pa, $P_X = P_Z = 1$ N, $\nu = 0,25$, $X \in [-2, 2]$ m, $Z \rightarrow 0^+$).

Esta solução pode ser usada para validar a solução de um estado auxiliar tridimensional dinâmico, cujo carregamento se distribui sobre um plano e não sobre uma linha (Figura 2.5). Para tanto, é necessário que a frequência utilizada seja muito baixa (emulação da característica estática da solução de Crouch e Starfield) e a largura de carregamento B na terceira dimensão seja muito maior que A (emulação da característica bidimensional).

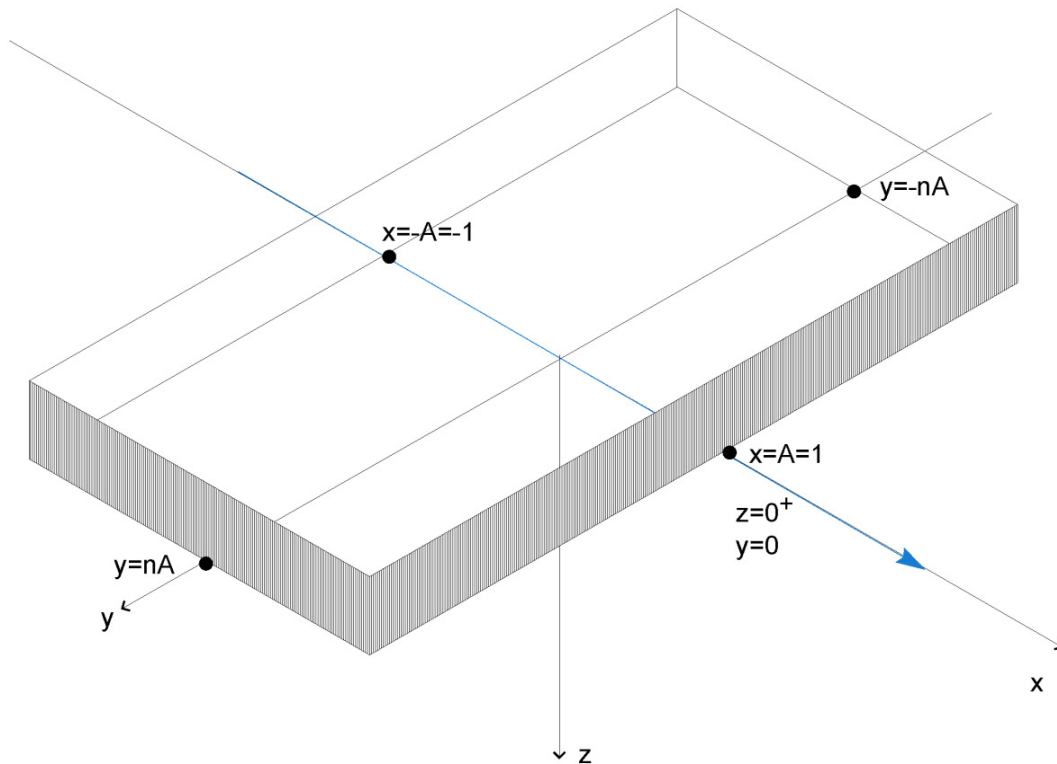


Figura 2.5: Pode-se emular um problema bidimensional fazendo n muito maior que 1.

2.4 Estado auxiliar viscoelastodinâmico estacionário não-singular

A solução para um estado auxiliar tridimensional viscoelastodinâmico não-singular foi desenvolvida por Adolph (2006). A solução refere-se a um carregamento de intensidade constante no espaço, dinâmico estacionário, distribuído sobre uma área retangular de lados $2A$ ao longo de X e $2B$ ao longo de Y (Figura 2.6).

Um problema de elasticidade é descrito por quinze grandezas: três deslocamentos u_i , seis deformações ϵ_{ij} e seis tensões σ_{ij} . Quando o meio é isotrópico, a solução para este tipo de

problema pode ser obtida por meio de quinze equações: as seis relações de Hooke entre tensão e deformação,

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.6)$$

as seis relações de Cauchy entre deslocamento-deformação,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.7)$$

e três equações de equilíbrio,

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (2.8)$$

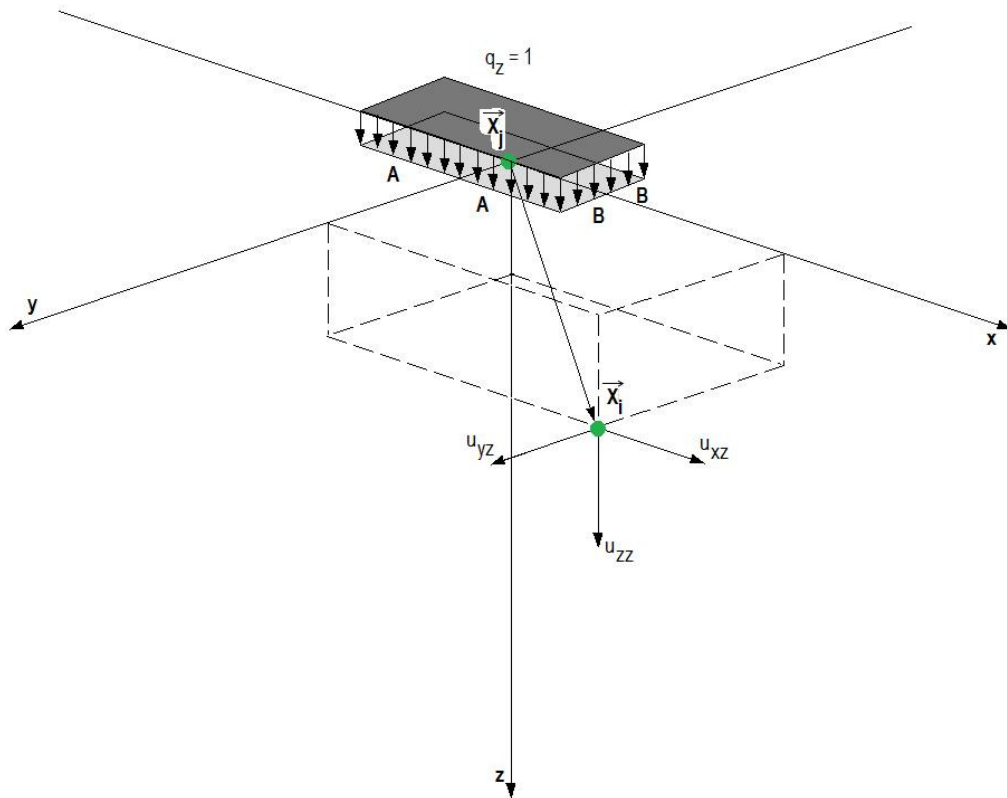


Figura 2.6: Carregamento distribuído no interior do espaço infinito tridimensional.

Embora a rigor as grandezas ϵ_{ij} e σ_{ij} englobem nove valores, por simetria tem-se que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Pode-se reescrever a Equação 2.8 em termos dos deslocamentos. Para tanto, substitui-se a Equação 2.6 nesta última:

$$\begin{aligned} \left[\lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \right]_{,j} + f_i &= 0 \\ \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk,j} + 2\mu \epsilon_{ij,j} + f_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substitui-se (2.7) em (2.9):

$$\lambda \frac{1}{2} (u_{k,kj} + u_{k,kj}) + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + f_i = 0 \quad (2.10)$$

Mas

$$\lambda \frac{1}{2} (u_{k,kj} + u_{k,kj}) = \lambda u_{k,kj} \quad (2.11)$$

Portanto,

$$\lambda u_{k,kj} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + f_i = 0 \quad (2.12)$$

Observando que $u_{j,ji} = u_{k,kj}$, tem-se a Equação de Elasticidade de Navier:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ij} + f_i = 0 \quad (2.13)$$

Ou ainda, aplicando a Segunda Lei de Newton ao termo de forças internas f_i , tem-se finalmente:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.14)$$

Embora descreva completamente o problema, o operador linear da Equação 2.14 tem solução analítica difícil de ser determinada. Trata-se de uma equação acoplada, isto é, coexistem nela os três componentes de deslocamento, u_1 , u_2 e u_3 .

Adolph usou em seu trabalho uma estratégia de solução que envolve uma transformação analítica da Equação 2.14 para o domínio de Radon, e outra transformação de Fourier também analítica. As equações resultantes puderam então ser resolvidas algebricamente neste novo espaço de equações, e a solução no espaço real vem com as transformações inversas, desta vez numéricas, de Fourier e Radon. Este processo é sintetizado pela Figura 2.8.

As expressões de deslocamento e tensão obtidas são mostradas em sua tese (Adolph, 2006). São nove componentes de deslocamento u_{ij} e dezoito componentes de tensão σ_{ijk} , em expressões como as seguintes:

$$u_{zz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G_{u_{zz}} e^{-\delta\alpha_1(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))} d\theta d\xi \quad (2.15)$$

e

$$\sigma_{zzz} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{\sigma_{zz}} e^{i\delta\xi(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))} d\theta d\xi \quad (2.16)$$

em que u_{zz} é a expressão para o deslocamento na direção de Z devido ao carregamento na mesma direção e σ_{zzz} a componente de tensão σ_{zz} devido ao carregamento vertical. O meio é definido pelas propriedades μ e λ (constantes de Lamé) e pela massa específica ρ , e a intensidade do carregamento oscila harmonicamente com frequência ω . As funções $G_{u_{zz}}$ e $S_{\sigma_{zz}}$ são dadas por:

$$G_{u_{zz}} = \text{sign}(\xi) \delta\xi \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \{ \psi_2 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \psi_1 e^{-\delta\alpha_2|z|} \} \text{ e}$$

$$S_{\sigma_{zz}} = \text{sign}(\xi) \text{sign}(z) \delta\xi \frac{1}{\psi_2 \Gamma_1 - \psi_1 \Gamma_2} \tilde{P} \{ \Gamma_1 \psi_2 e^{-\delta\alpha_1|z|} - \Gamma_2 \psi_1 e^{-\delta\alpha_2|z|} \}, \text{ em que:}$$

$$\Gamma_1 = -\alpha_1(\lambda + 2\mu) + i\xi\lambda\psi_1;$$

$$\Gamma_2 = -\alpha_2(\lambda + 2\mu) + i\xi\lambda\psi_2;$$

$$\psi_1 = \frac{\alpha_1^2 (\lambda + 2\mu) - \xi^2 \mu + 1}{i\xi \alpha_1 (\lambda + 2\mu)};$$

$$\psi_2 = \frac{\alpha_2^2 (\lambda + 2\mu) - \xi^2 \mu + 1}{i\xi \alpha_2 (\lambda + 2\mu)};$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{-c'_3 - \sqrt{c'^2_3 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}};$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-c'_3 + \sqrt{c'^2_3 - 4c'_1 c'_5}}{2c'_1}};$$

$$c'_1 = \lambda\mu + 2\mu^2;$$

$$c'_3 = -2\xi^2 \lambda\mu - 4\xi^2 \mu^2 + \lambda + 3\mu;$$

$$c'_5 = \xi^4 \lambda\mu + 2\xi^2 \mu^2 - \xi^2 \lambda - 3\xi^2 \mu + 1;$$

$$\xi = \frac{k}{\delta};$$

k : variável resultante da transformada de Fourier;

$$\delta = \omega \sqrt{\rho} \text{ e}$$

$\mathbf{X} = (x, y, z)$: ponto do espaço em que se calcula a solução.

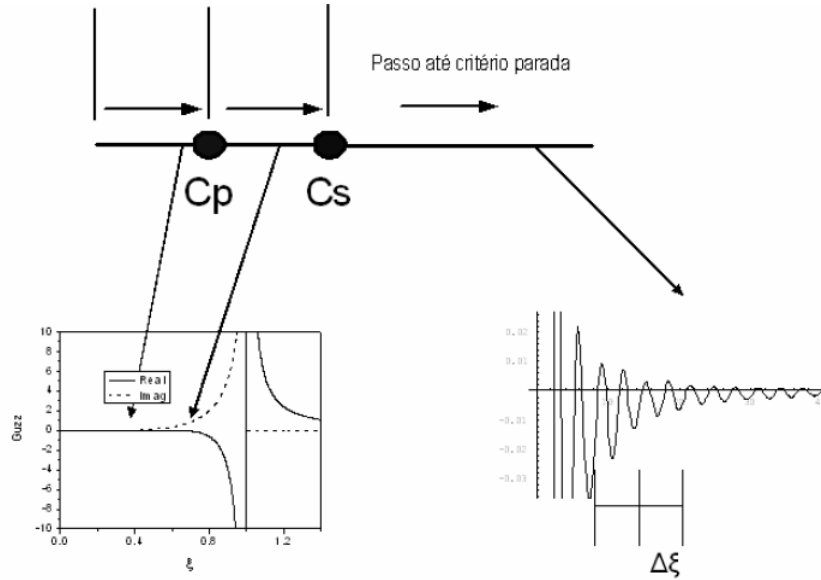


Figura 2.7: Método de integração utilizado na solução deste espaço auxiliar.

Para solução de tais integrais, Adolph utilizou uma combinação entre um algoritmo adaptativo de quadratura de Gauss com refinamento próximo de regiões singulares, e o algoritmo do tipo “procedendo para infinito” quando o termo dissipativo se sobrepõe ao termo oscilatório fazendo-o decair harmonicamente (Figura 2.7).

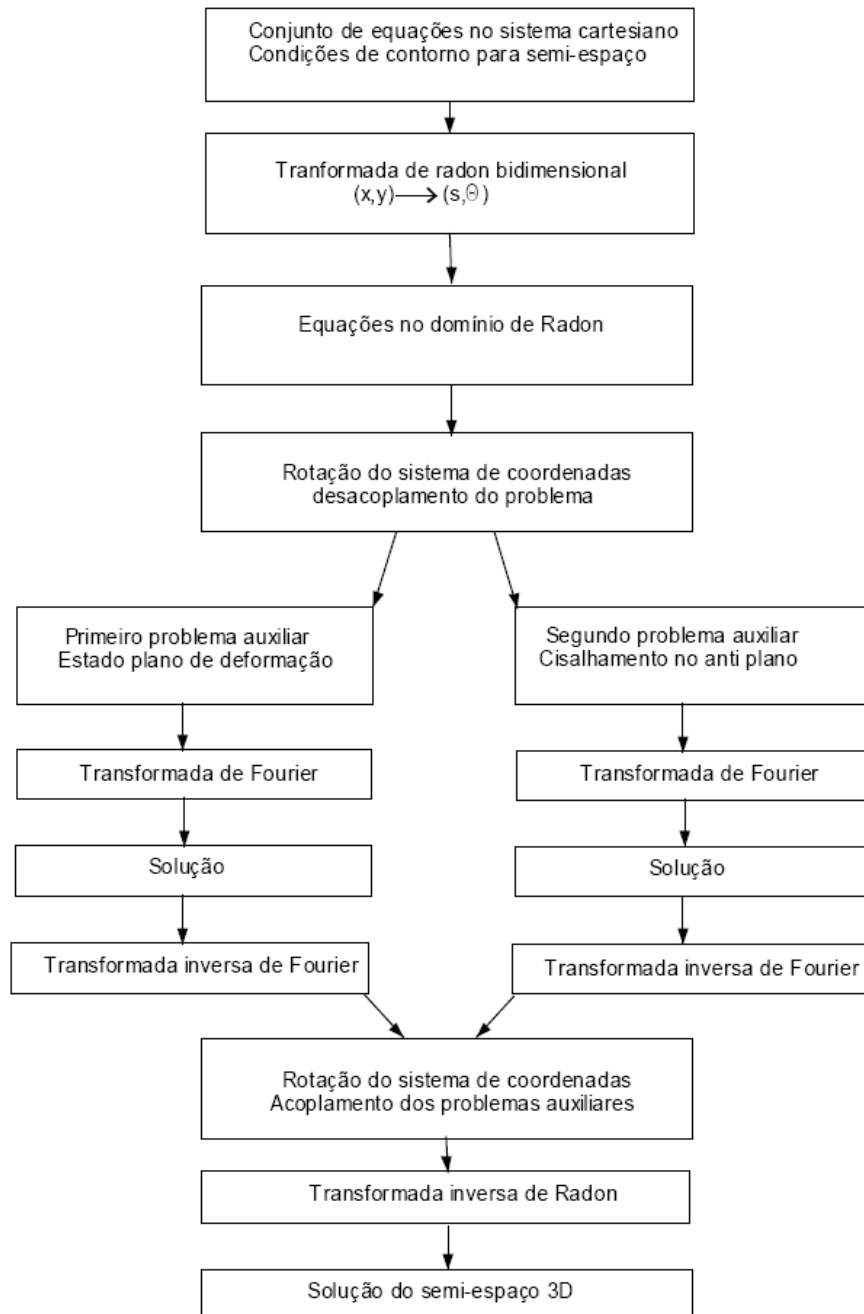


Figura 2.8: Procedimento utilizado por Adolph para solução da Equação 2.14.

A implementação computacional destas integrações foi feita usando a linguagem Fortran sob o paradigma procedural, estrutura 90/95, com formato fixo e em forma de subrotinas, totalizando 348 subrotinas.

O programa principal exige como dados de entrada a frequência ω , a densidade ρ e o coeficiente de amortecimento η do meio, as larguras de carregamento A e B, a razão de Poisson ν e a constante μ de Lamé. Adicionalmente, deve-se informar os erros absoluto e relativo admitidos na integração e o critério de parada, além do ponto (X, Y, Z) onde se deseja conhecer a solução.

Como saída, são dados as nove componentes complexas de deslocamento u_{ij} e as doze tensões σ_{ijX} e σ_{ijZ} (σ_{ij} devido aos carregamentos na direção de X e Z), de forma que as componentes σ_{ijY} devem ser obtidas por meio de uma transformação de coordenadas apropriada.

2.5 Tensões devido ao carregamento em Y

A implementação de Adolph para a solução do estado auxiliar descrito acima não calcula as componentes de tensão devido a um carregamento distribuído na direção de Y, somente na direção de X. Contudo, é possível calcular estas componentes por meio de uma transformação tensorial do tensor σ_{ijX} .

Como se pode observar pela Figura 2.9, analisar as tensões em um ponto P_1 devido ao carregamento em Y é análogo a analisar as tensões em um ponto P_2 devido ao carregamento X, desde que o valor das larguras de carregamento A e B sejam invertidas ($A \leftarrow B$ e $B \leftarrow A$). Essa analogia só é válida quando o meio é isotrópico, ou ao menos transversalmente isotrópico.

A matriz $[\beta]$ de transformação de coordenadas de um sistema 1 para outro 2 tais que a relação entre $1 \rightarrow 2$ é um giro de -90° em torno do eixo Z é:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

tal que $P_2 = [\beta] \cdot P_1$.

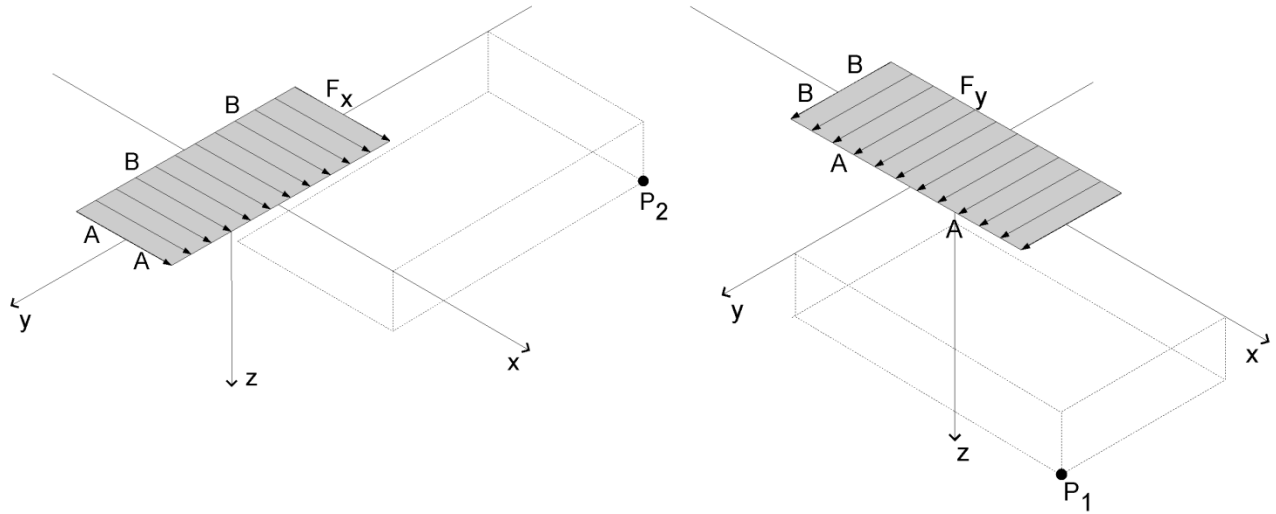


Figura 2.9: Posição dos pontos P_2 e P_1 frente aos carregamentos nas direções X e Y.

Assim, para que se obtenha as tensões $[\sigma] = \sigma_{ijY}(P_2, A, B)$, pode-se fazer $[\sigma] = \sigma_{ijX}(P_1, B, A)$, sendo que:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{y2} \\ -P_{x2} \\ P_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Alguns testes foram feitos para conferir se a transformação acima é correta. Por exemplo, deseja-se determinar o tensor σ_{ijY} em um ponto $P_2 = (5, 1, \frac{1}{2})$, em um espaço sujeito a um carregamento de larguras $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{4}$. Os outros dados do problema são:

Tabela 2.1: Dados utilizados para testar a transformação de tensões.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	1 rad/s
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³

Segundo a transformação mostrada acima, essa componente deveria ser igual a σ_{ijX} quando calculada em $P_1 = (1, -5, \frac{1}{2})$, com $B = \frac{1}{2}$ e $A = \frac{1}{4}$. A Tabela 2.2 mostra a relação $\sigma_{ijX}(P_1, B, A) \div \sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para este ponto.

Tabela 2.2: Razão entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$.

Componente	$\sigma_{ijX}/\sigma_{ijY}$
σ_{XX}	0.935
σ_{XY}	0.916
σ_{XZ}	0.914
σ_{YY}	1.022
σ_{YZ}	0.794
σ_{ZZ}	1.009

Para uma transformação ideal, essa razão deveria ser igual a 1 para todas as componentes. A diferença vem do fato de que a resposta do estado auxiliar não é uniforme no que diz respeito à precisão de integração. Por exemplo, como a solução vai piorando quanto mais próximo dos eixos coordenados está o ponto, é mais “fácil” calcular $P_1 = (1, -5, \frac{1}{2})$ que está mais distante do eixo X, do que $P_2 = (5, 1, \frac{1}{2})$, que está mais próximo.

Para mostrar isso, as Tabelas 2.3 e 2.4 ilustram a mesma razão $\sigma_{ijX}(P_1, B, A) \div \sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para pontos mais distantes dos eixos coordenados, região onde a precisão do cálculo é mais uniforme.

Tabela 2.3: Razão entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para o ponto $P_2 = (7.75, 12, -3.22)$.

Componente	$\sigma_{ijX}/\sigma_{ijY}$
σ_{XX}	1.025
σ_{XY}	0.997
σ_{XZ}	0.995
σ_{YY}	1.003
σ_{YZ}	0.999
σ_{ZZ}	1.014

Tabela 2.4: Razão entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para o ponto $P_2 = (73.5, 102, 4)$.

Componente	$\sigma_{ijX}/\sigma_{ijY}$
σ_{XX}	1.001
σ_{XY}	0.999
σ_{XZ}	1.002
σ_{YY}	1.003
σ_{YZ}	1.000
σ_{ZZ}	1.004

Na Figura 2.10, duas componentes de $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ são plotadas juntamente com suas respectivas $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$, para um tal $P_2 = (X, Y, Z)$ em que somente X varia. Assim, pode-se ver graficamente o efeito da proximidade do eixo X sobre a divergência entre os valores de σ_{ijX} e σ_{ijY} .

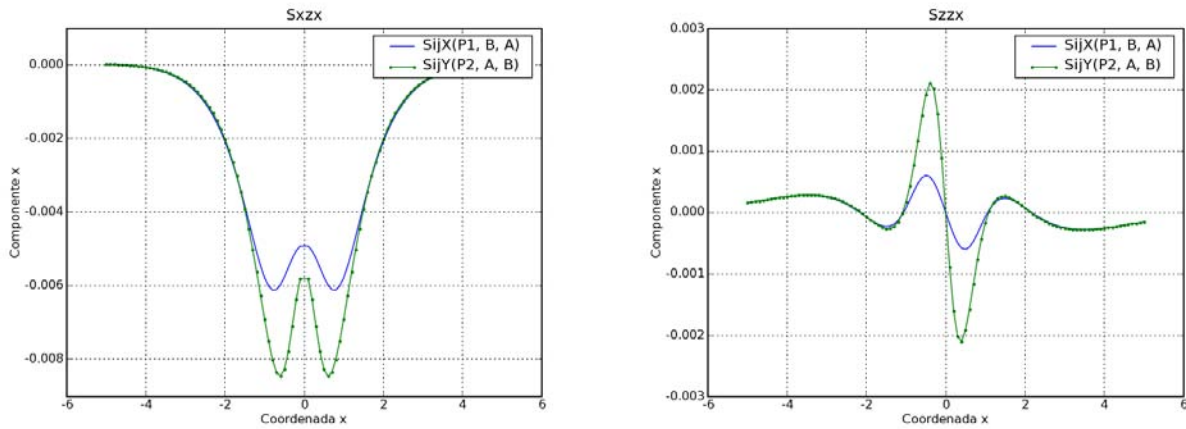


Figura 2.10: Comparação entre $\sigma_{ijX}(P_1, B, A)$ e $\sigma_{ijY}(P_2, A, B)$ para $P_2 = (X, Y, Z)$, variando X .

O **Capítulo 3** relata um estudo detalhado de como essas dificuldades de integração se desenvolvem ao longo do espaço geométrico e de parâmetros.

2.6 Solução alternativa

Romanini (2008) desenvolveu uma solução para exatamente o mesmo estado auxiliar mostrado na seção anterior (Romanini 3D) e também para um estado similar, porém bidimensional (Romanini 2D) (Romanini, 1995). A diferença da solução de Adolph para a de Romanini 3D é que todas as transformações de espaço utilizadas no desenvolvimento de Romanini são de Fourier.

A princípio, pretendia-se usar esta solução neste trabalho, mas durante o processo de validação descobriu-se que ela tinha ainda muitos problemas de implementação, era instável, e funcionava em um espaço geométrico pequeno demais.

De qualquer forma, dentro de um espaço limitado e com parâmetros não muito críticos, a solução funciona e foi usada por Adolph para validar sua solução.

Neste capítulo foi visto o que são soluções fundamentais e estados auxiliares, juntamente com alguns exemplos para carregamentos dinâmicos e estáticos, e diferentes meios. Viu-se que tais estados podem ser desenvolvidos analítica ou numericamente, mas que de qualquer forma têm pouca aplicação prática. No **Capítulo 4**, será visto como o estado viscoelastodinâmico descrito na **Seção 2.4** se aplica para resolver um problema real de engenharia.

Capítulo 3

Validação do estado auxiliar

Em seu trabalho de doutorado, Adolph (2006) fez uma minuciosa validação do estado auxiliar desenvolvido por ele.

Alguns exemplos da validação de deslocamentos para o caso estático podem ser vistos nas Figuras 3.1 e 3.2. Como parâmetro de validação, foi usada a solução de Kelvin para carga concentrada no espaço tridimensional, então a frequência utilizada teve que ser baixa (emulação da característica estática da solução de Kelvin), e a largura do carregamento, pequena (emulação da característica concentrada). A Tabela 3.1 mostra os dados utilizados nesta comparação.

Tabela 3.1: Dados utilizados nas comparações nas Figuras 3.1 e 3.2.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	0,01 rad/s
Largura de carregamento A	0,025 m
Largura de carregamento B	0,025 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Coordenadas Y e Z	1 m

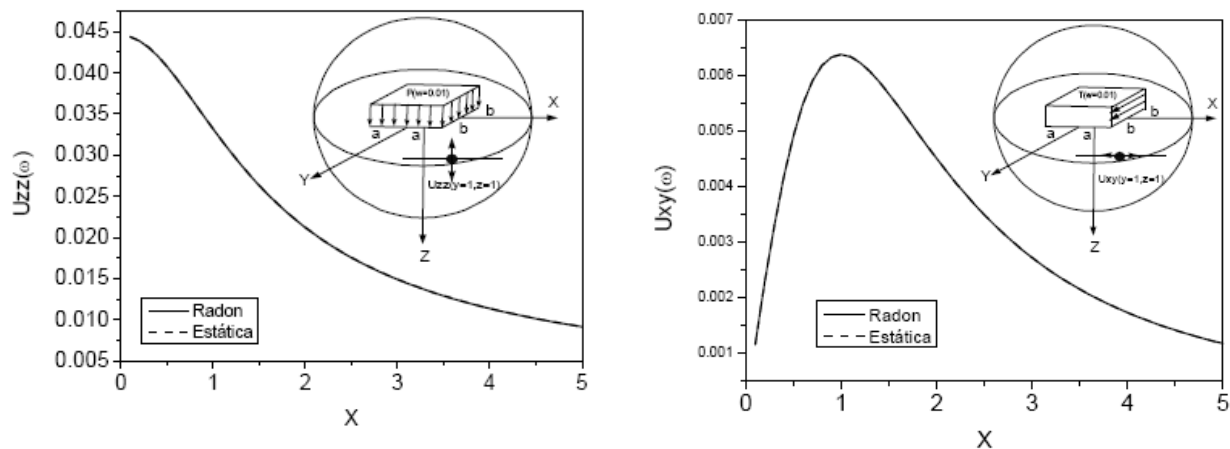


Figura 3.1: Comparação das componentes u_{zz} e u_{xy} com a solução de Kelvin 3D estática.

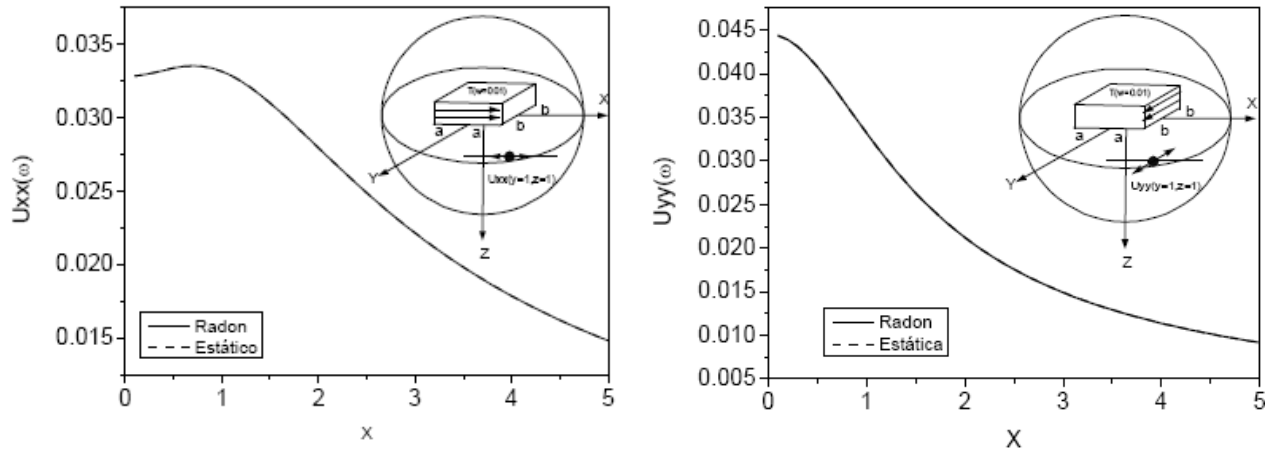


Figura 3.2: Comparação das componentes u_{xx} e u_{yz} com a solução de Kelvin 3D estática.

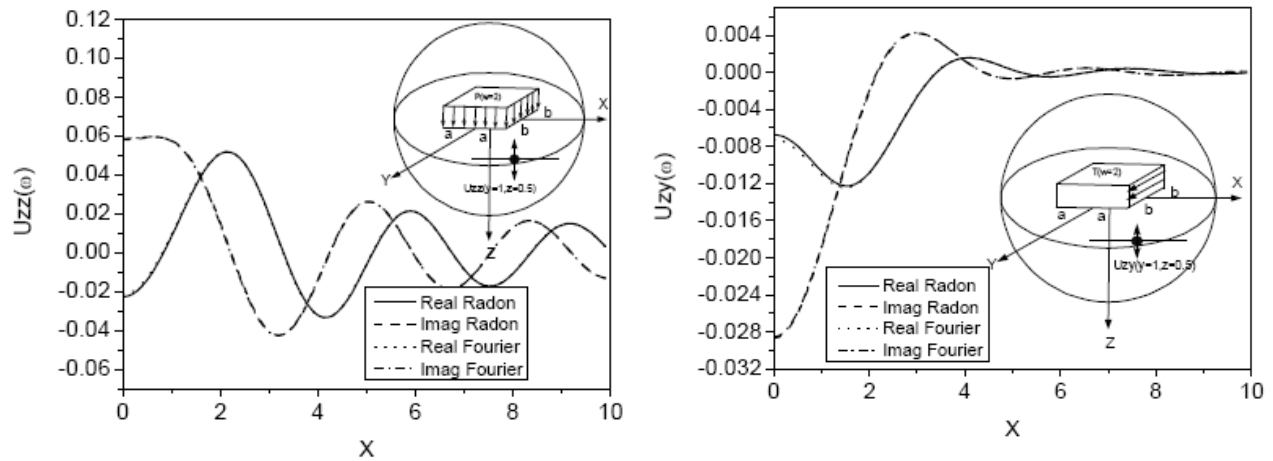


Figura 3.3: Comparação das componentes u_{zz} e u_{zy} com a solução de Romanini 3D.

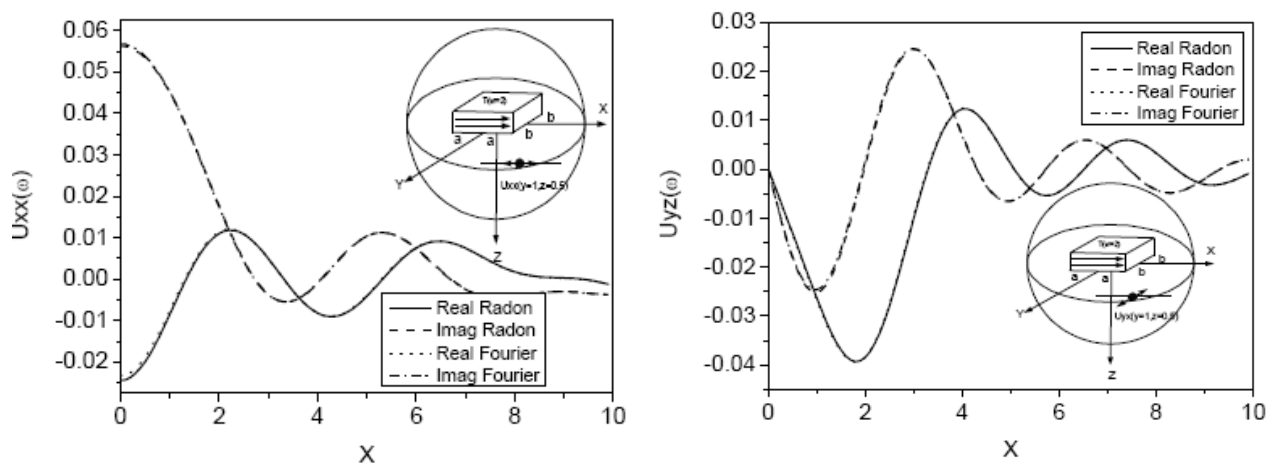


Figura 3.4: Comparação das componentes u_{xx} e u_{yz} com a solução de Romanini 3D.

As Figuras 3.3 e 3.4 mostram quatro casos da validação de deslocamentos para carga dinâmica, nos quais a comparação é feita com a solução de Romanini 3D. A Tabela 3.2 mostra os parâmetros usados na comparação.

Tabela 3.2: Dados utilizados nas comparações nas Figuras 3.3 e 3.4.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	2 rad/s
Largura de carregamento A	1 m
Largura de carregamento B	1 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Coordenada Y	1 m
Coordenada Z	5 m

Finalmente, as Figuras 3.5 e 3.6 mostram exemplos das validações estáticas e dinâmicas de tensão, comparadas respectivamente com as soluções de Kelvin e Romanini 2D. Para a primeira comparação, usa-se os dados da Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Dados utilizados nas comparações na Figura 3.5.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	0,01 rad/s
Largura de carregamento A	0,025 m
Largura de carregamento B	0,025 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Coordenada Y	2 m
Coordenada Z	1 m

Para a comparação dinâmica, além de utilizar frequência ω de 2 rad/s, foi necessário emular a característica bidimensional da solução de Romanini 2D fazendo $B = 20$ e $A = 1$, e calcular a solução somente no plano $Y = 0$.

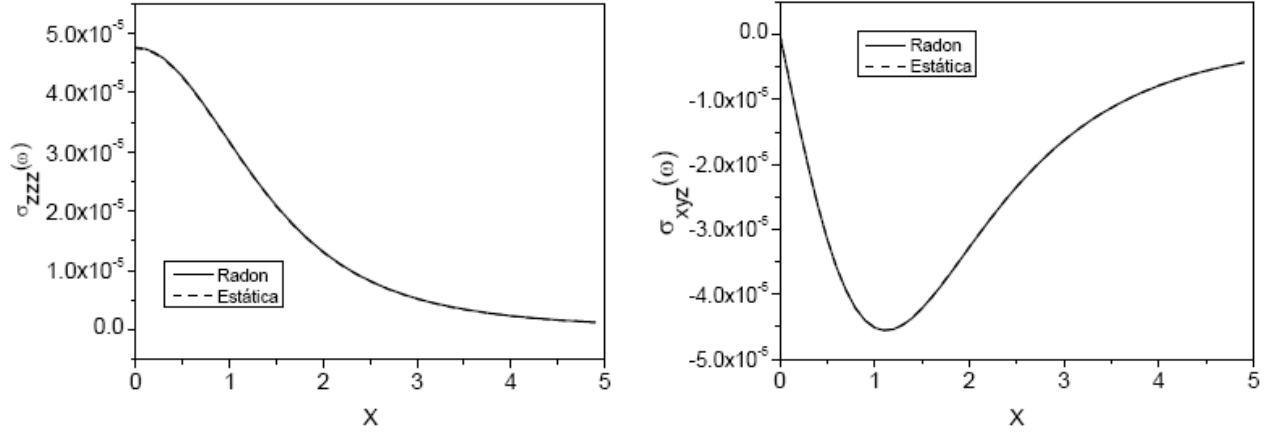


Figura 3.5: Comparação das componentes σ_{zzz} e σ_{xyz} com a solução estática de Kelvin 3D.

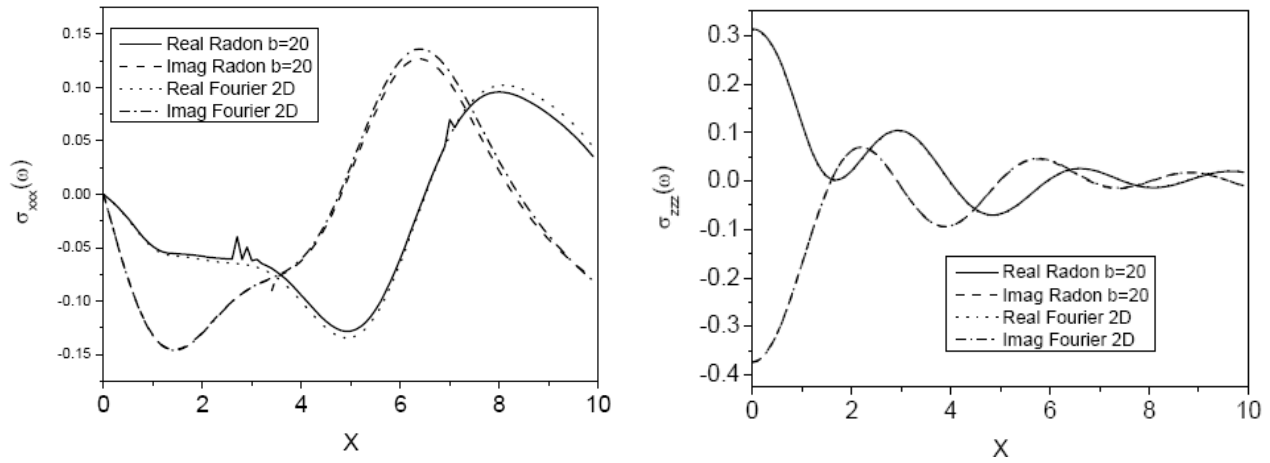


Figura 3.6: Comparação das componentes σ_{xxx} e σ_{zzz} com a solução dinâmica de Romanini 2D.

Contudo, embora tal validação tenha servido ao propósito de mostrar a validade da teoria desenvolvida por Adolph, a confiabilidade do resultado das integrações e a correta implementação dos sinais das expressões, foi insuficiente quando o objetivo é usar tal solução para resolver um problema físico pelo MEC-Indireto. Isso sequer fazia parte do escopo do trabalho. Essa validação foi insuficiente por três motivos principais:

Aspectos importantes dos parâmetros de validação foram ignorados. Por exemplo, a solução de Kelvin para carga concentrada no espaço tridimensional é incapaz de prever as singularidades e descontinuidades do tensor de tensões. Já foi dito na **Seção 2.3** que componentes como σ_{zzz} e σ_{zzx} apresentam descontinuidades e/ou singularidades em várias circunstâncias. Um exemplo típico é ao longo da linha $X \in [-2A, 2A]$, com $Y = Z = 0$ (Figura 2.4). A solução

bidimensional de Crouch e Starfield descreve perfeitamente esse comportamento, mas a solução de Kelvin 3D, usada por Adolph em sua validação, não descreve. Por exemplo, a componente σ_{zzz} de Kelvin, dada por (Equação 2.3):

$$\sigma_{zzz} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-\frac{z}{\rho} - \frac{3}{1-2\nu} \frac{z^3}{\rho^3} \right],$$

é nula em todo o plano $Z = 0$.

Assim, o resultado da validação feita por Adolph só é válido longe da superfície carregada, onde não há descontinuidades nem singularidades.

O segundo aspecto é que, como se vê pelas Figuras 3.1 a 3.6 e nos demais resultados de sua tese, a validação só é feita para valores positivos de X , Y e Z – somente em um dos oito quadrantes do espaço tridimensional. Estes resultados talvez indiquem que os valores das soluções, em módulo, estejam corretos em todos os quadrantes, mas não garantem a correção dos sinais das soluções.

Por fim, não se avaliou quais valores dos parâmetros do problema (frequência, geometria do carregamento, etc.), do meio (amortecimento, densidade, razão de Poisson, etc.) e da implementação (erros de integração) podem ser aplicados no programa. Há uma limitação de valores para a maioria destes parâmetros, que não decorre das características do estado auxiliar, e sim da implementação das integrações.

Assim, fez-se uma nova, mais profunda e exaustiva validação da solução de Adolph com o objetivo de identificar todos os pormenores no comportamento de deslocamentos e tensão, bem como as limitações da solução, tudo com o intuito de aplicar a solução com confiança através do MEC-Indireto.

Para tanto, foi necessário primeiro estudar as principais fontes de validação disponíveis na bibliografia e suas características de aplicação, descritas no capítulo anterior: a solução de Kelvin para carga estática concentrada no espaço tridimensional, a solução de Crouch e Starfield para carregamento estático distribuído no espaço bidimensional e a solução de Romanini para o mesmo estado auxiliar.

3.1 Validação mais abrangente

O valor e o sinal da solução de Adolph para estado auxiliar são comparados com a solução de Kelvin 3D. Para esta comparação, é necessário emular as características de carga concentrada e estática da solução de Kelvin, como mostrado na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Dados utilizados na validação estática de deslocamentos.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	0,0001 rad/s
Largura de carregamento A	0,001 m
Largura de carregamento B	0,001 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³

Para garantir a correção dos sinais de todas as componentes no espaço tridimensional, foi necessário fazer a comparação ao longo de linhas que atravessassem todos os oito quadrantes do espaço. Inicialmente, observou-se que a componente u_{XY} tinha sinal invertido em qualquer análise que se fizesse. Esse sinal foi corrigido dentro do código, e alguns dos resultados são mostrados a seguir.

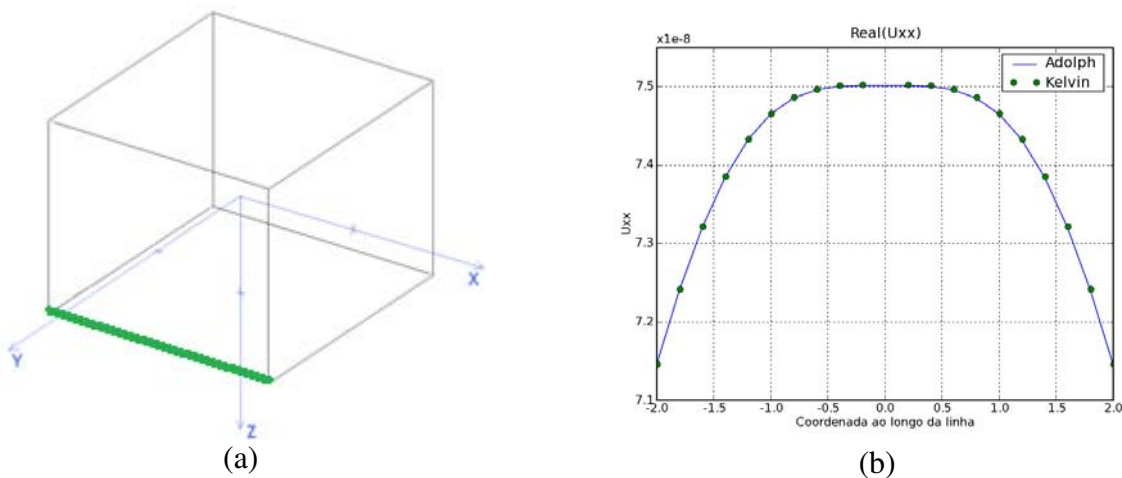
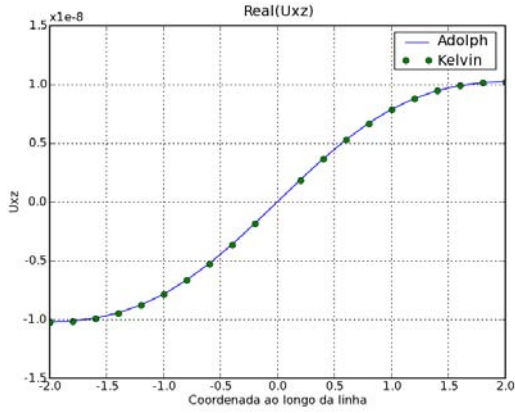
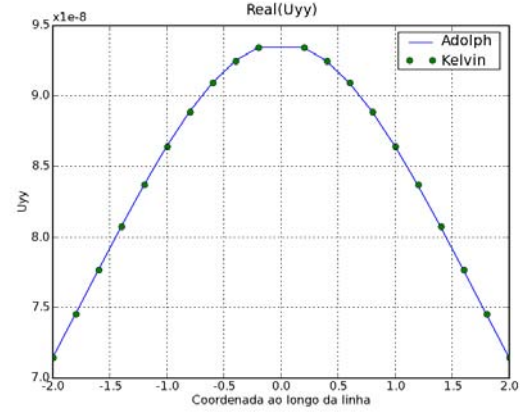


Figura 3.7: (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 2$, $Z = 2$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.

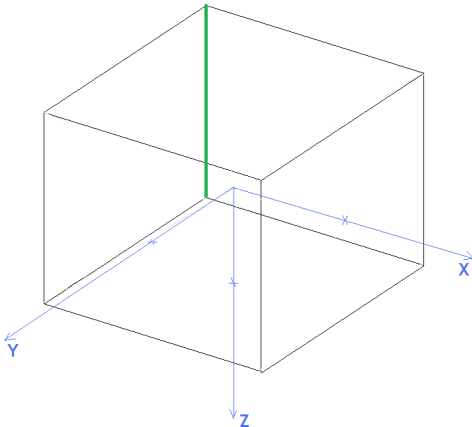


(a)

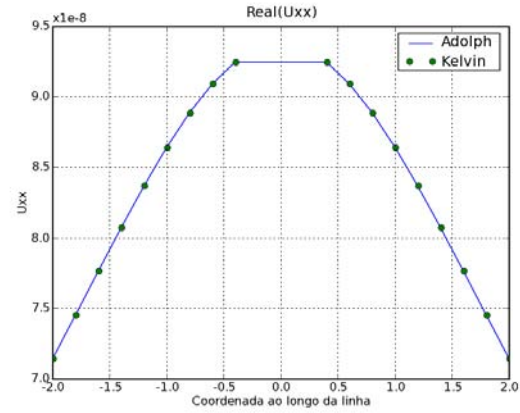


(b)

Figura 3.8: (a) Componente u_{xz} e (b) u_{yy} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 2$, $Z = 2$.

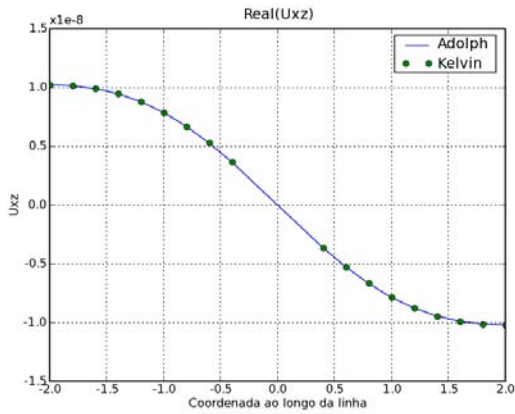


(a)

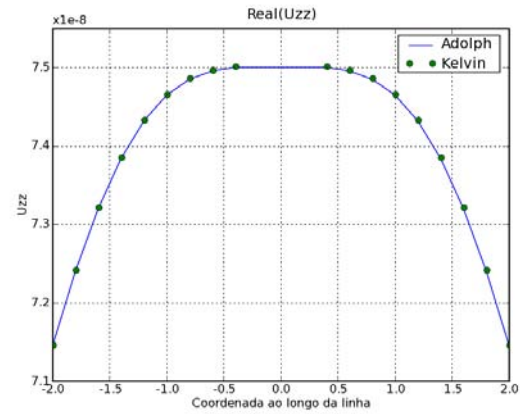


(b)

Figura 3.9: (a) Linha $Z \in [-2, 2]$, $X = -2$, $Y = -2$. (b) Componente u_{xx} ao longo desta linha.

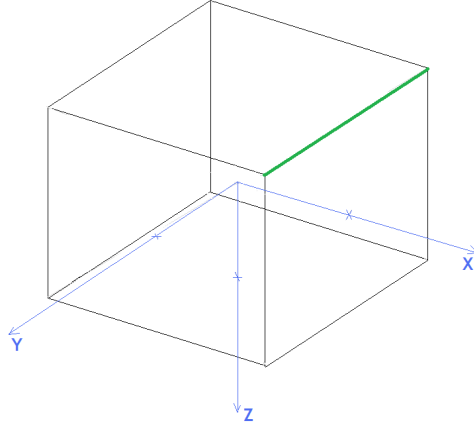


(a)

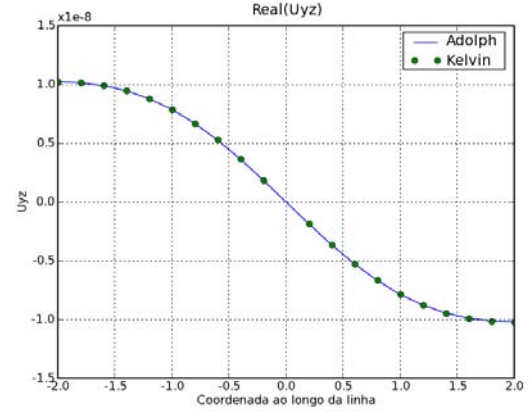


(b)

Figura 3.10: (a) Componente u_{xz} e (b) u_{zz} ao longo da linha $Z \in [-2, 2]$, $X = -2$, $Y = -2$.

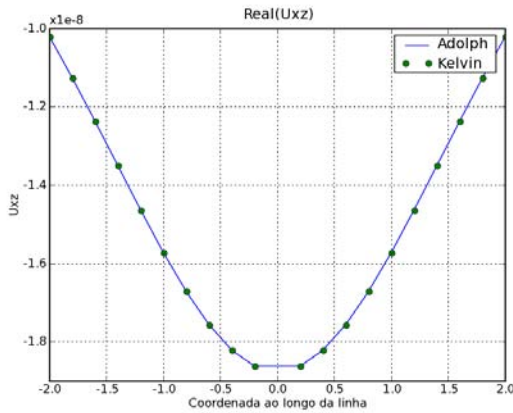


(a)

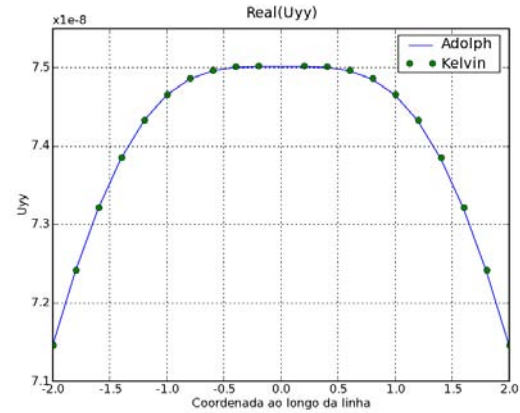


(b)

Figura 3.11: (a) Linha $Y \in [-2, 2]$, $X = 2$, $Z = -2$. (b) Componente u_{XX} ao longo desta linha.



(a)



(b)

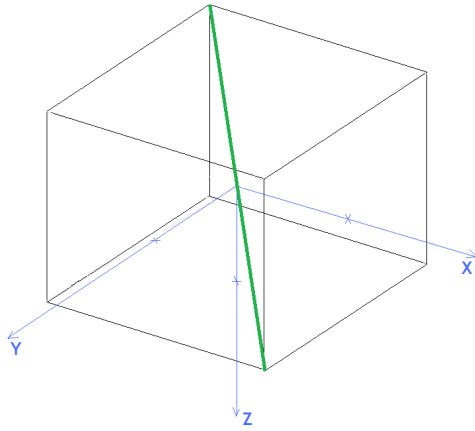
Figura 3.12: (a) Componente u_{XZ} e (b) u_{YY} ao longo da linha $Y \in [-2, 2]$, $X = 2$, $Z = -2$.

As Figuras 3.7b e 3.8 mostram a parte real das componentes u_{XX} , u_{XZ} e u_{YY} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 2$, $Z = 2$ (Figura 3.7a).

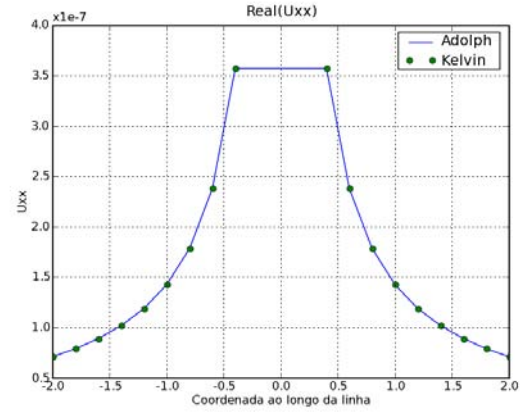
As Figuras 3.9b e 3.10 mostram a parte real das componentes u_{XX} , u_{XZ} e u_{ZZ} ao longo da linha $Z \in [-2, 2]$, $X = -2$, $Y = -2$. (Figura 3.9a).

As Figuras 3.11b e 3.12 mostram a parte real das componentes u_{YZ} , u_{XZ} e u_{YY} ao longo da linha $Y \in [-2, 2]$, $X = 2$, $Z = -2$. (Figura 3.11a).

Adicionalmente, quatro testes foram feitos para linhas cruzando mais de um quadrante simultaneamente. As Figuras 3.13b e 3.14 mostram a parte real das componentes u_{XX} , u_{XZ} e u_{ZZ} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = X$, $Z = X$. (Figura 3.13a).

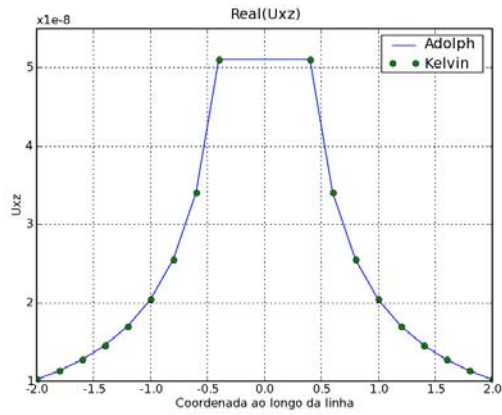


(a)

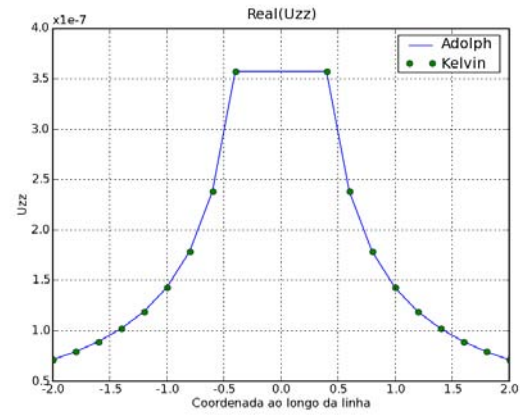


(b)

Figura 3.13: (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = X$, $Z = X$. (b) Componente u_{xx} ao longo desta linha.

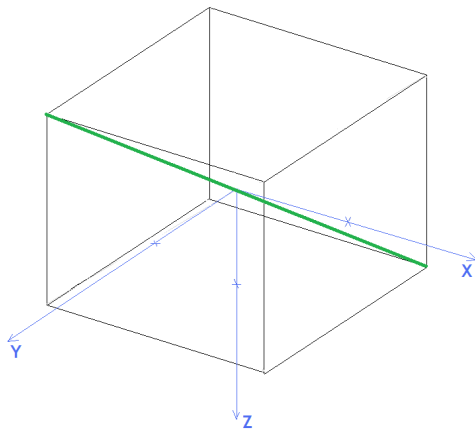


(a)

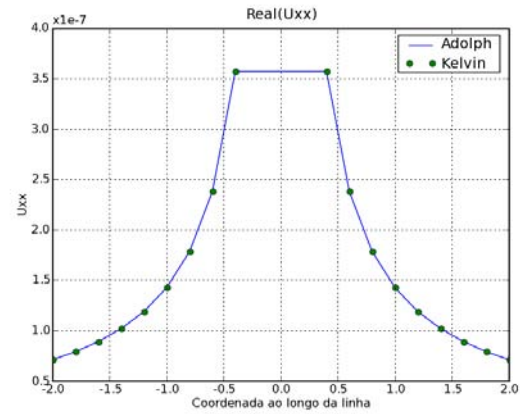


(b)

Figura 3.14: (a) Componente u_{xz} e (b) u_{zz} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = X$, $Z = X$.

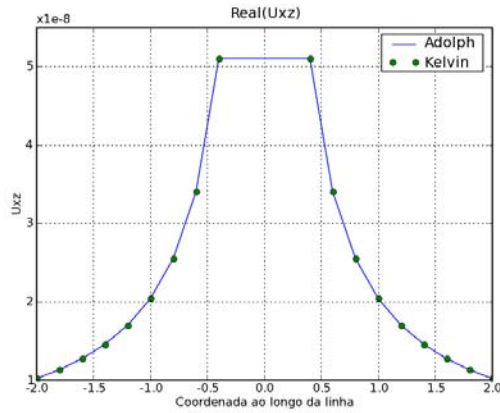


(a)

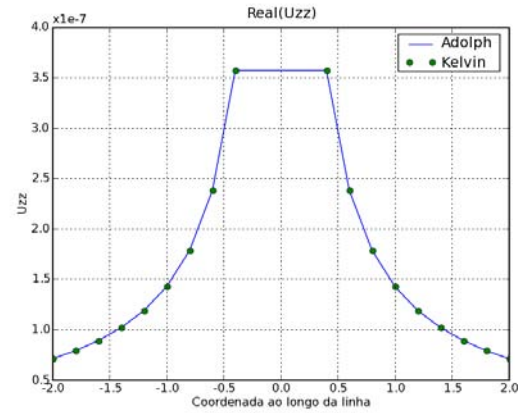


(b)

Figura 3.15: (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -X$, $Z = X$. (b) Componente u_{xx} ao longo desta linha.



(a)



(b)

Figura 3.16: (a) Componente u_{xz} e (b) u_{zz} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -X$, $Z = X$.

As Figuras 3.15b e 3.16 mostram a parte real das componentes u_{xx} , u_{xz} e u_{zz} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -X$, $Z = X$. (Figura 3.15a).

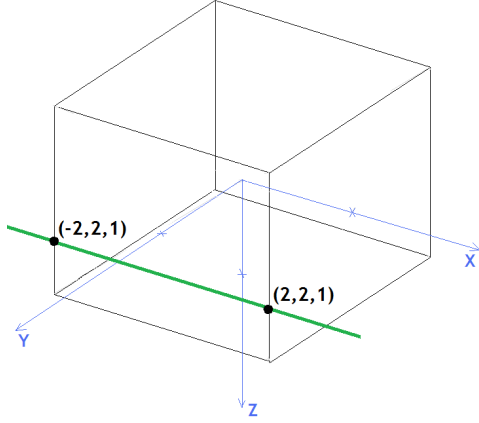
Fez-se uma análise estática semelhante para as tensões, com os dados mostrados na Tabela 3.5.

Análises preliminares mostraram que as componentes σ_{xxx} e σ_{zzz} tinham sinal invertido em qualquer situação, e as componentes σ_{xxz} e σ_{yzz} tinham sinal invertido quando a coordenada Z era negativa. Estes problemas foram corrigidos dentro do código, e alguns dos resultados obtidos depois disso podem ser vistos a seguir.

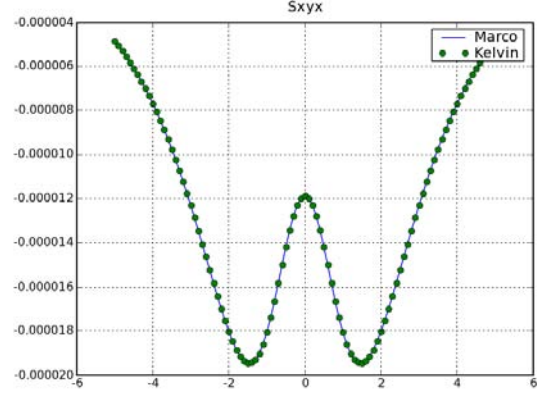
Tabela 3.5: Dados utilizados na validação estática de tensões.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	0,0001 rad/s
Larguras de carregamento A e B	0,025 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³

As Figuras 3.17b, 3.18 e 3.19 mostram a parte real das componentes σ_{xyx} , σ_{yyx} , σ_{zzx} , σ_{xxz} e σ_{yzz} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$ (Figura 3.17a).

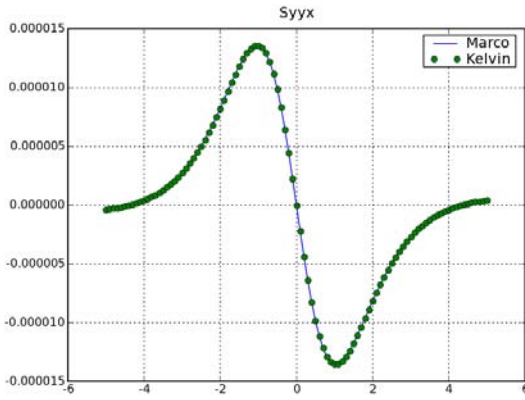


(a)

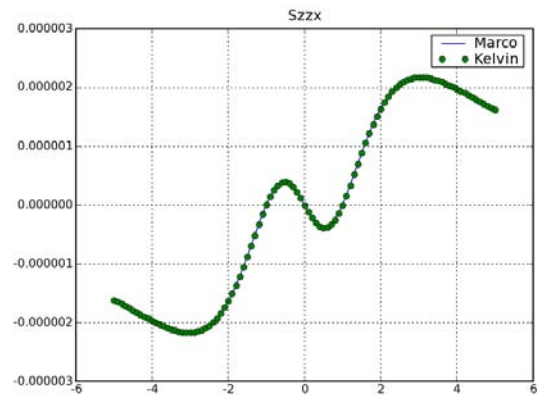


(b)

Figura 3.17: (a) Linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$. (b) Componente σ_{XYX} ao longo desta linha.

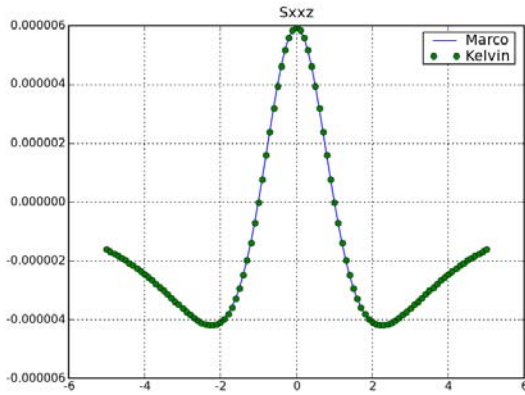


(a)

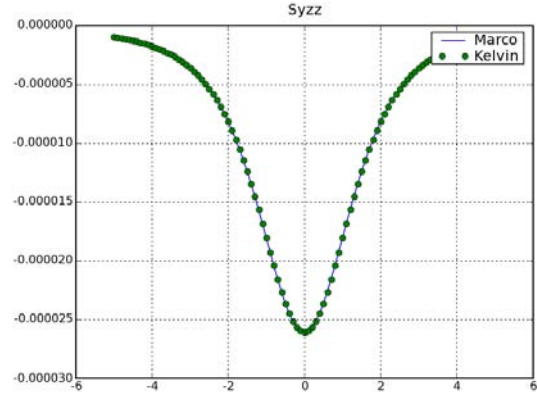


(b)

Figura 3.18: (a) componente σ_{YYX} e (b) σ_{ZZX} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.



(a)



(b)

Figura 3.19: (a) Componente σ_{XXZ} e (b) σ_{YZZ} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.

Como o sinal de todas as componentes já estava correto, não era mais necessário que a validação para o caso dinâmico também fosse feita em todos os quadrantes. O objetivo agora era somente observar a concordância do comportamento das amplitudes com outras soluções da bibliografia. A fonte de validação utilizada para este caso foi a solução de Romanini 3D, com os seguintes dados:

Tabela 3.6: Dados utilizados na validação dinâmica de tensões.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	2 rad/s
Larguras de carregamento A e B	1 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Coordenada Y	1 m

As partes real e imaginária das componentes u_{XX} , u_{XY} , u_{YZ} e u_{ZZ} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$ são mostradas respectivamente pelas Figuras 3.21a e 3.21b, Figuras 3.22a e 3.22b, Figuras 3.23a e 3.23b e Figuras 3.24a e 3.24b. Os pontos verdes da solução de Romanini que estão completamente fora da curva quando $X = 1$ surgem porque, por problemas de ordem computacional, esta solução não funciona quando $X = A$ (exatamente sob a borda da superfície de carregamento).

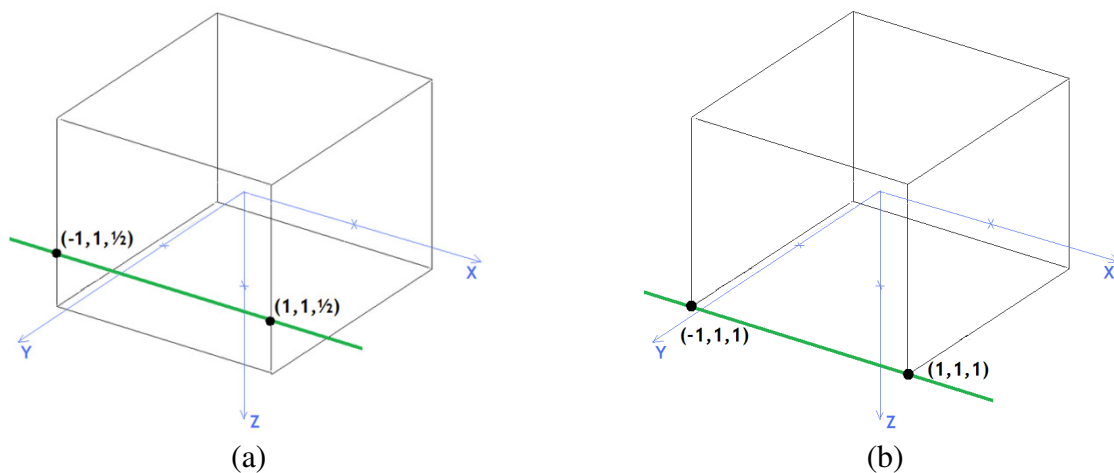
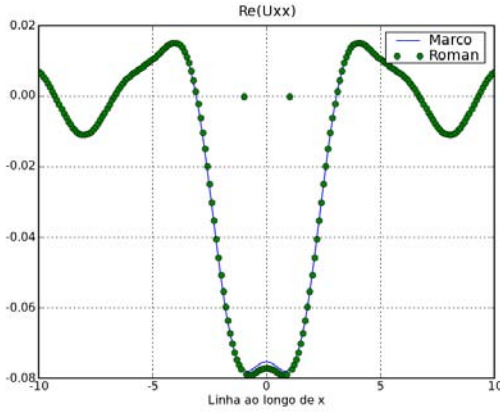
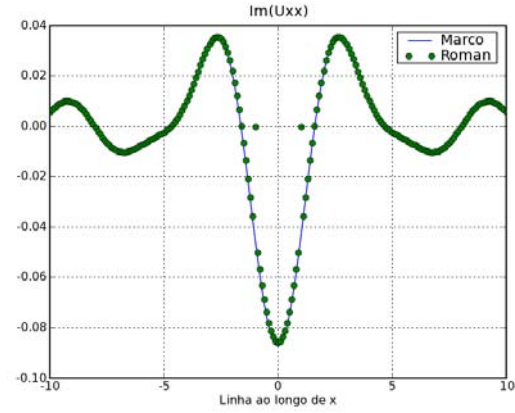


Figura 3.20: (a) Linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 1$, $Z = \frac{1}{2}$. (b) Linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 1$, $Z = 1$.



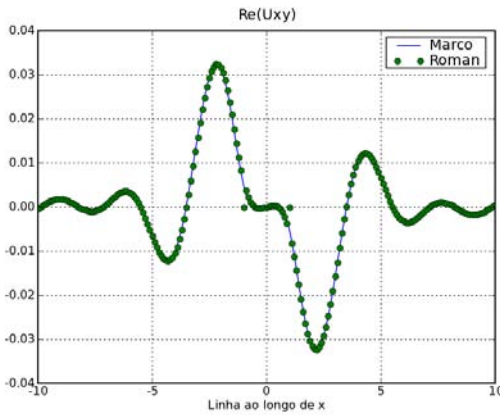
(a)



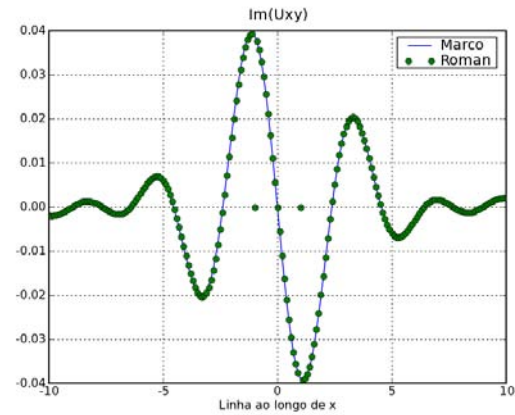
(b)

Figura 3.21: (a) Parte real e (b) imaginária da componente u_{xx} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2, Z = 1$.

Quanto às tensões, as partes real e imaginária das componentes σ_{xxz} , σ_{xzz} , σ_{yyx} e σ_{zxx} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2, Z = \frac{1}{2}$ são mostradas respectivamente pelas Figuras 3.25a e 3.25b, Figuras 3.26a e 3.26b, Figuras 3.27a e 3.27b e Figuras 3.28a e 3.28b.



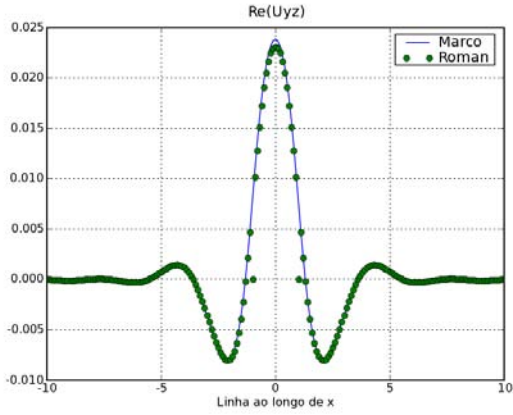
(a)



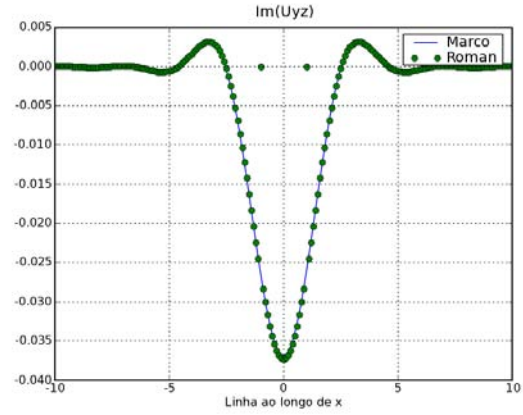
(b)

Figura 3.22: (a) Parte real e (b) imaginária da componente u_{xy} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2, Z = 1$.

Não é possível afirmar qual das duas soluções está correta quando ocorrem desvios como o da componente σ_{xzx} . Isto porque não há solução analítica nem uma fonte experimental de validação para este tipo de estado auxiliar, com as quais Romanini pudesse validar sua solução numérica.

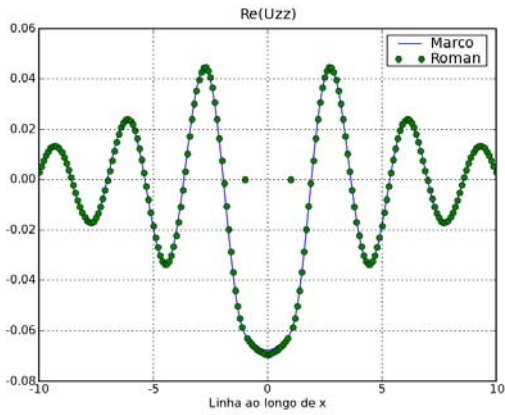


(a)

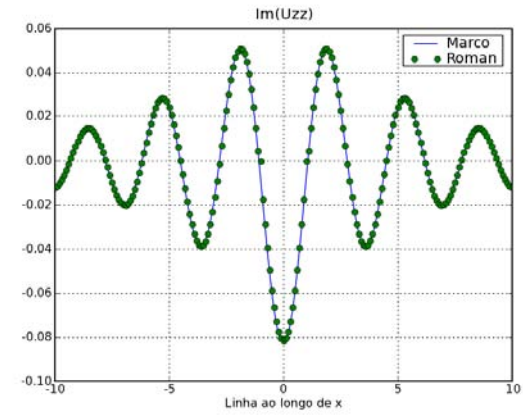


(b)

Figura 3.23: (a) Parte real e (b) imaginária de u_{yz} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.

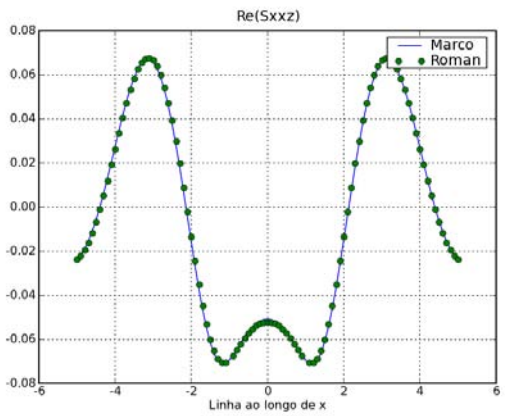


(a)

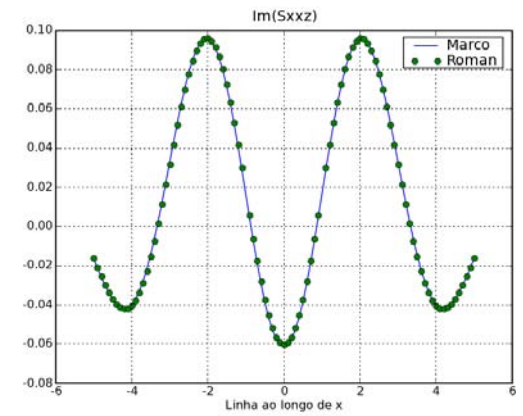


(b)

Figura 3.24: (a) Parte real e (b) imaginária de u_{zz} ao longo da linha $X \in [-6, 6]$, $Y = 2$, $Z = 1$.

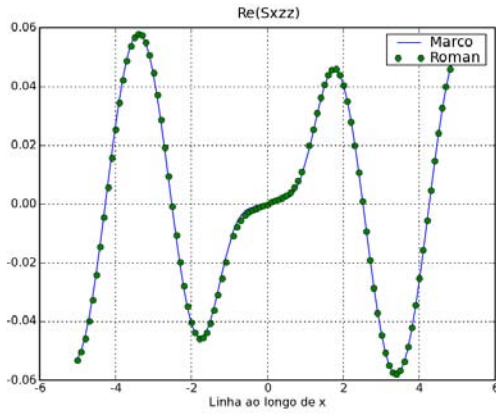


(a)

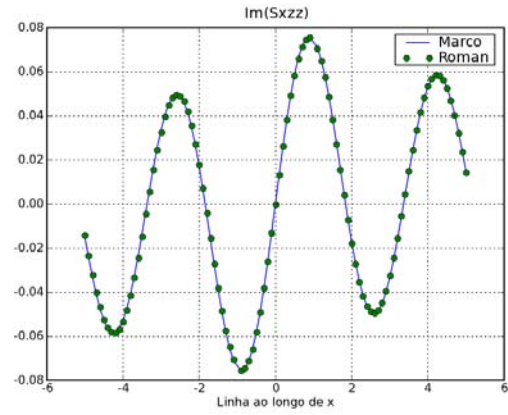


(b)

Figura 3.25: (a) Parte real e (b) imag. de σ_{xxz} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.

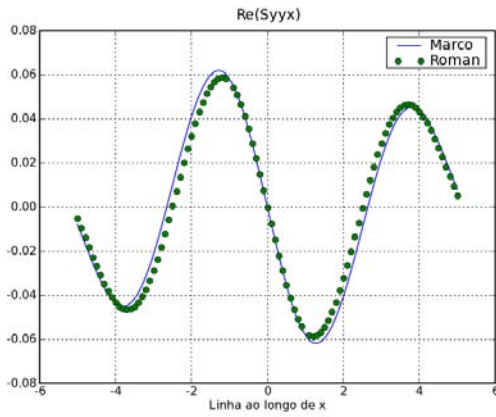


(a)

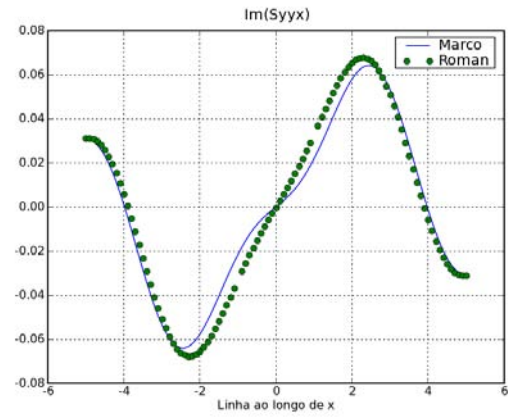


(b)

Figura 3.26: (a) Parte real e (b) imag. de σ_{xzz} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.

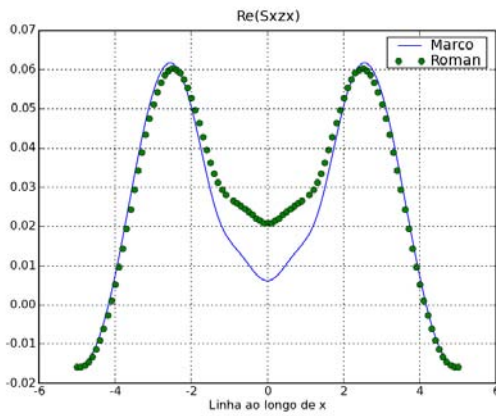


(a)

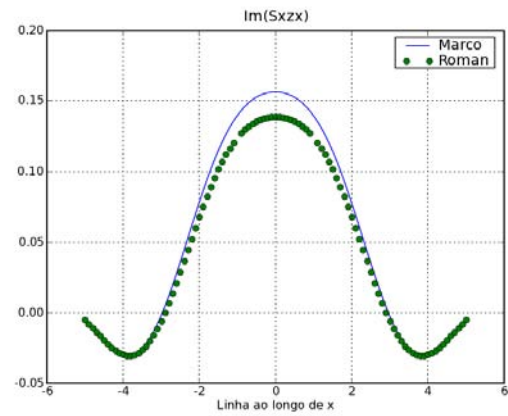


(b)

Figura 3.27: (a) Parte real e (b) imag. de σ_{yyx} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.



(a)



(b)

Figura 3.28: (a) Parte real e (b) imag. de σ_{xzx} ao longo da linha $X \in [-10, 10]$, $Y = 2$, $Z = \frac{1}{2}$.

3.2 Limitações da solução

Uma vez validado os sinais da solução de Adolph e comparado seu comportamento com outra solução similar, resta ainda uma questão: que valores dos parâmetros como amortecimento, frequência e erro de integração a solução é capaz de tratar?

Evidentemente, equações como 2.15 e 2.16 exprimem o estado auxiliar para quaisquer valores desses parâmetros, mesmo que tais valores não existam na natureza. Isto é, a verdade matemática expressa em tais equações não tem qualquer compromisso com a consistência física dessas grandezas.

Por outro lado, a implementação computacional estabelece algumas limitações aos valores que podem ser utilizados, pela natureza dos métodos de integração utilizados.

Uma dificuldade neste estudo de limitações é o número de parâmetros envolvidos. Exceto uma das coordenadas, que sempre varia para ilustrar o desenrolar de alguma componente (Como na Figura 3.28, em que σ_{XZX} se desenvolve ao longo de X), restam os seguintes parâmetros a serem analisados:

- Frequência, ω ;
- Coeficiente de amortecimento, η ;
- Razão de aspecto da superfície carregada, A/B ;
- Razão de Poisson, ν ;
- Constante de Lamé, μ ;
- Erros de integração;
- Coordenadas restantes, Y e Z.

É fácil concluir que, se cada um destes parâmetros assumir apenas cinco valores diferentes, haverá um rol de 32.678 casos diferentes para analisar, para cada uma das nove componentes de deslocamento e cada uma das doze componentes de tensão. Em suma, a rigor tem-se no mínimo 688.128 casos a serem analisados.

Além disso, como não há fonte de validação para dizer-nos que determinado valor de um parâmetro responde por um desvio inaceitável no resultado da solução, somente a consistência

física do resultado pôde ser usada para dizer se tal valor pode ser ou não utilizado. Assim, o método para determinar as limitações da solução foi:

1. Escolhe-se um parâmetro P_1 qualquer (frequência ω , amortecimento η , constante μ , erros de integração relativo, absoluto ou critério de parada, larguras de carregamento A e B, coordenadas X, Y, Z, etc.) para ser variado, e os demais se mantêm fixos;
2. Varia-se P_1 observando a consistência física da resposta, e estabelece-se como limites inferiores $P_{1\text{mín}}$ e superiores $P_{1\text{máx}}$ para P_1 os valores para os quais a resposta começa a ficar inconsistente;
3. Escolhe-se um novo parâmetro P_2 para variar. Todos os outros são mantidos fixos, e P_1 é mantido fixo em um de seus valores críticos, $P_{1\text{máx}}$ ou $P_{1\text{mín}}$ e repete-se o passo 2 para P_2 ;
4. Se o espaço $P_{2\text{máx}} - P_{2\text{mín}}$ for muito pequeno comparado com $P_{1\text{máx}} - P_{1\text{mín}}$, diminui-se o espaço útil do parâmetro P_1 em prol de P_2 ;
5. Estas iterações são repetidas para dos os parâmetros do problema, até que um “espaço confiável” seja definido para todos eles.

Seriam necessários vários meses para definir com precisão este espaço confiável, e ainda assim, o espaço em que os N parâmetros poderiam ser variados não seria um prisma N-dimensional, e sim uma figura de geometria muito complexa.

Para exemplificar, considere que a validação só envolva dois parâmetros: a coordenada X e a frequência ω . Talvez o espaço confiável para estes dois parâmetros seja uma elipse hachurada como mostrada na Figura 3.29a ou outra forma mais complexa.

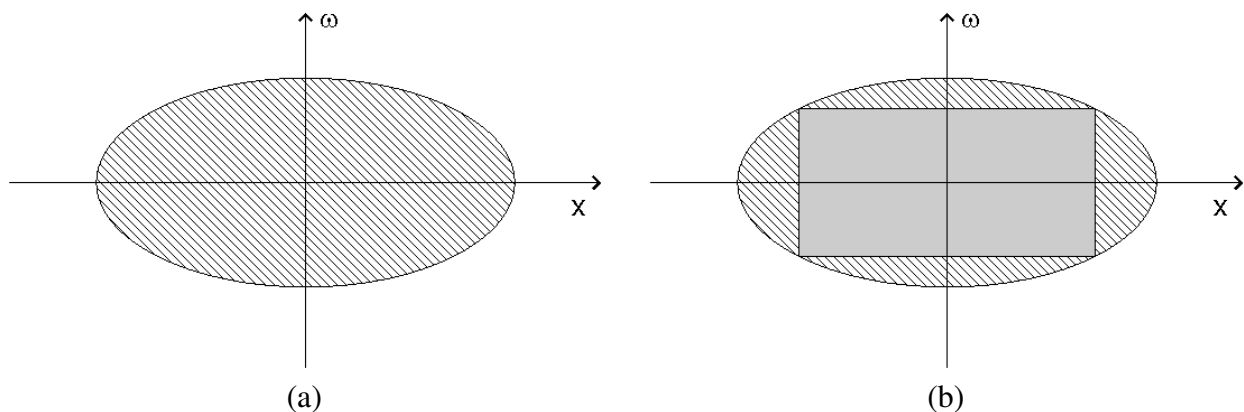


Figura 3.29: (a) Espaço confiável real. (b) Espaço confiável assumido.

O preço pago para tornar factível esta parte da validação em tempo hábil foi admitir perda de parte do espaço confiável. Assim, admite-se que o espaço confiável é dado por uma figura muito mais simples – um prisma N-dimensional (no exemplo de dois parâmetros da Figura 3.29b, um retângulo).

Alguns exemplos da aplicação do método para determinação das limitações do programa podem ser vistos nas figuras seguintes.

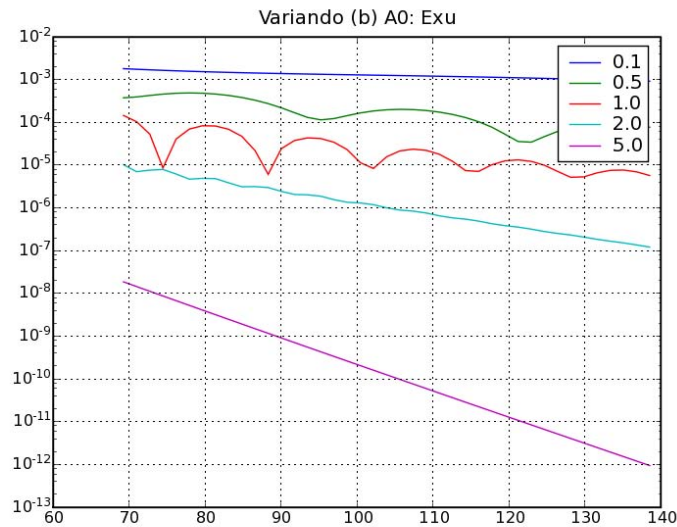


Figura 3.30: Módulo de u_{xx} para $X = Y = Z \in [40, 80]$.

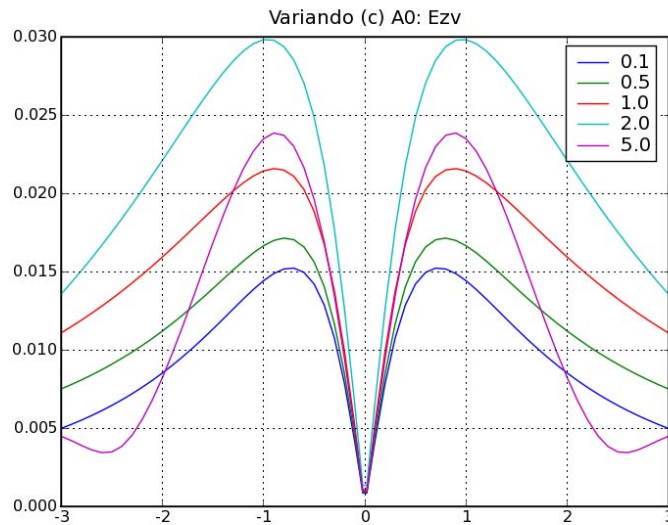


Figura 3.31: Módulo de u_{yz} para $X \in [-3, 3]$, $Y = -Z = \frac{1}{2}$.

Na Figura 3.30, vê-se como se comporta o módulo da componente u_{xx} de acordo com os dados da Tabela 3.7, para vários valores da frequência ω . Esta é uma combinação factível de parâmetros, porque o comportamento da componente é fisicamente consistente: a amplitude da componente diminui com o afastamento da origem, e diminui mais acentuadamente com o aumento da frequência e tem comportamento senoidal-amortecido.

Tabela 3.7: Dados utilizados na validação dinâmica de tensões.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	2 rad/s
Larguras de carregamento A e B	1 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Erros de integração	10 ⁻⁶

Outro efeito da variação de ω pode ser visto na Figura 3.31, mostrando o comportamento do módulo da componente u_{yz} para os mesmos dados da Tabela 3.7. Esta combinação também é aplicável. O comportamento desta componente, que não é singular nem descontínua (como qualquer componente de deslocamento) pode ser comparado com a resposta do problema de Kelvin.

Tabela 3.8: Dados utilizados no estudo da Figura 3.32.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	1 rad/s
Largura de carregamento A	1 m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Coordenadas Y e Z	5 m
Erros de integração	10 ⁻⁶

A Figura 3.32 exemplifica outra fase do teste, em que se deseja determinar os valores máximo e mínimo da razão B/A . Os parâmetros usados são mostrados na Tabela 3.8. Conforme aumenta a razão B/A mantendo A constante, também aumenta a área carregada e por

consequência a carga. Assim, é fisicamente consistente o aumento da amplitude da componente u_{ZZ} conforme aumenta a razão B/A . Além disso, a amplitude da componente também diminui com o afastamento da origem. Este é outro exemplo de combinação de parâmetros aplicável.

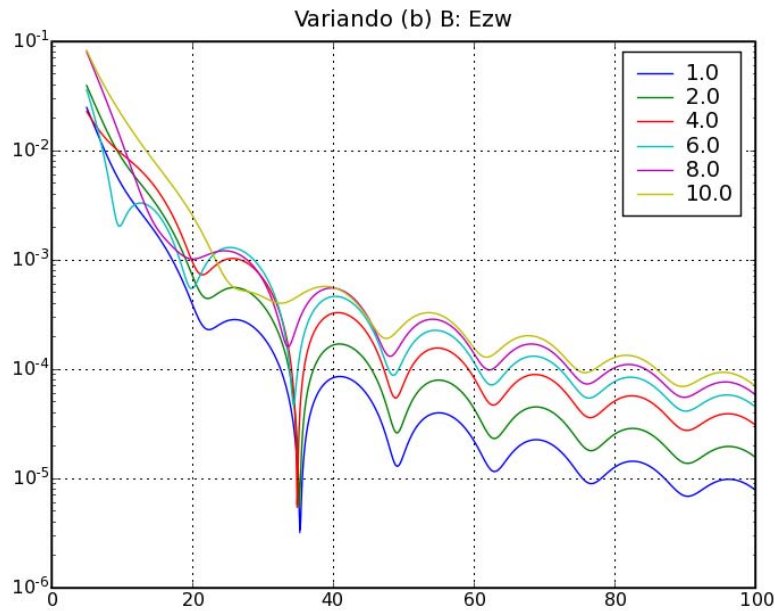


Figura 3.32: Módulo de u_{ZZ} para $X \in [5, 100]$, $Y = Z = 5$.

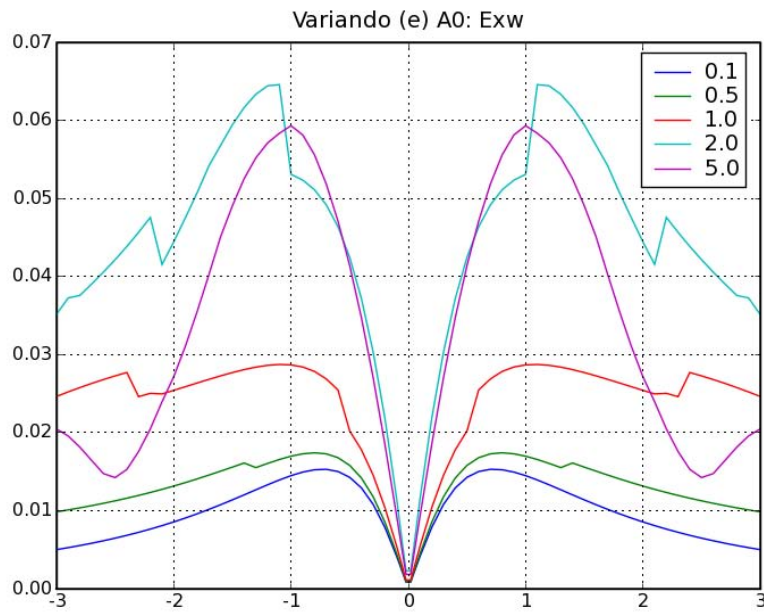


Figura 3.33: Módulo de u_{ZZ} para $X \in [-3, 3]$, $Y = -Z = 1/2$.

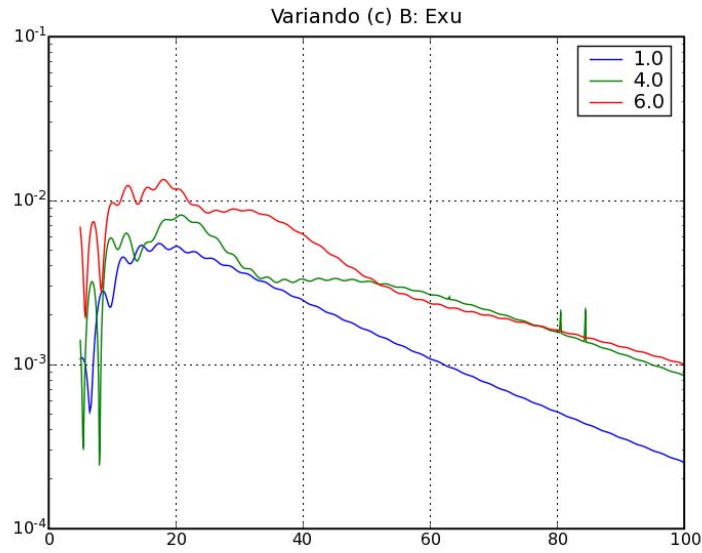


Figura 3.34: Módulo de u_{XX} para $X \in [5, 100]$, $\omega = 5$ rad/s, $Y = Z = 5$, $\nu = 0,25$, $\mu = 1$ N/m², $\rho = 1$ kg/m³ e erros de integração de 10^{-6} .

Por outro lado, as Figuras 3.33 e 3.34 mostram casos de combinações de parâmetros fora do perímetro confiável. As anomalias na Figura 3.33 indicam que o amortecimento utilizado é baixo demais para o programa quando se usa os dados da Tabela 3.9.

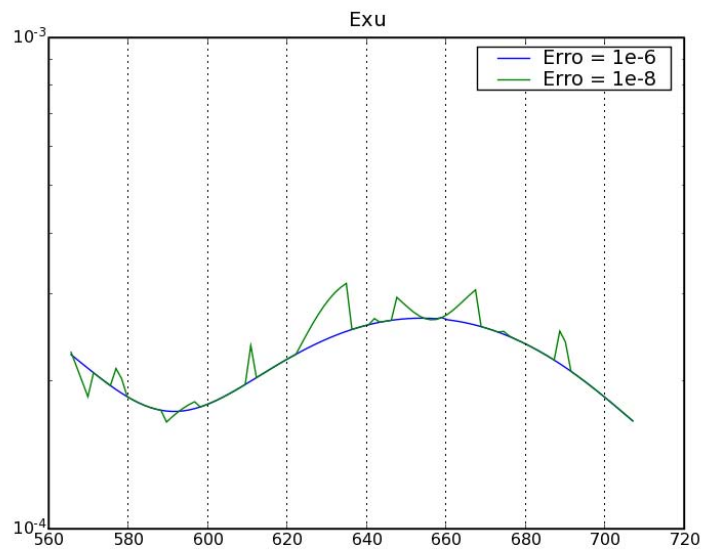


Figura 3.35: Componente u_{XX} para $X = Y \in [400, 500]$, $Z = 150$.

Tabela 3.9: Dados utilizados no estudo da Figura 3.32.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	1 rad/s
Largura de carregamento A e B	1 m
Fator de amortecimento η	10^{-4}
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Erros de integração	10^{-6}

Em outro exemplo, a Figura 3.34 mostra que para uma frequência tão alta quanto 5 rad/s, mesmo valores moderados de B/A, como entre 1 e 6, são elevados demais.

Também há um limite para o erro de integração possível de ser usado. Ao contrário do que se esperava, a implementação de Adolph passa a apresentar resultados discrepantes para valores muito baixos de erro de integração, ou simplesmente deixa de funcionar. A Figura 3.35 ilustra essa limitação. São usados $\eta = 0,005$ e $\omega = 2$ rad/s.

Em resumo, o espaço confiável para uso da solução de Adolph é:

- Espaço geométrico: $-500A \leq X, Y \leq 500A$, $-150A \leq Z \leq 150A$, exceto na casca esférica de raio $10^{-3}A$ centrada na origem;
- Valores de frequência ω entre 0,1 e 2 rad/s;
- Valores de amortecimento η entre 0,01 e 0,1;
- Razão B/A entre 1/7 e 7 e
- Erros de integração iguais a 10^{-5} ou 10^{-6} .

Como foi mostrado anteriormente (Figura 3.29), este é o espaço mínimo, definido por um prisma 7-dimensional. Há outras combinações fora deste perímetro em que a solução poderia ser calculada.

O mesmo estudo começou a ser feito para as respostas de tensão, como mostram os dois exemplos das Figuras 3.36 e 3.37. Na primeira, um exemplo de combinação de parâmetros dentro da faixa confiável, e na última, um exemplo de combinação em que o amortecimento $\eta = 0,005$ já é baixo demais.

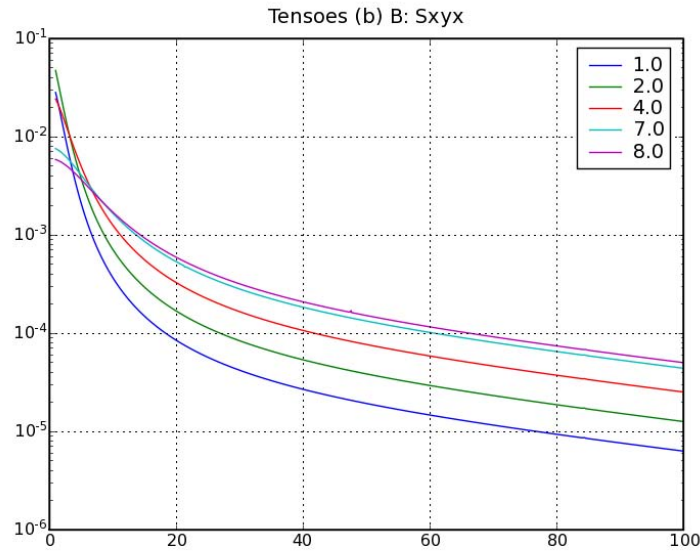


Figura 3.36: Componente σ_{XYX} para $X \in [0, 100]$, $Y = Z = 2$, $\eta = 0,01$, $\omega = 0,1$ rad/s, erros de integração de 10^{-5} , $A = 1$ m, variando B/A .

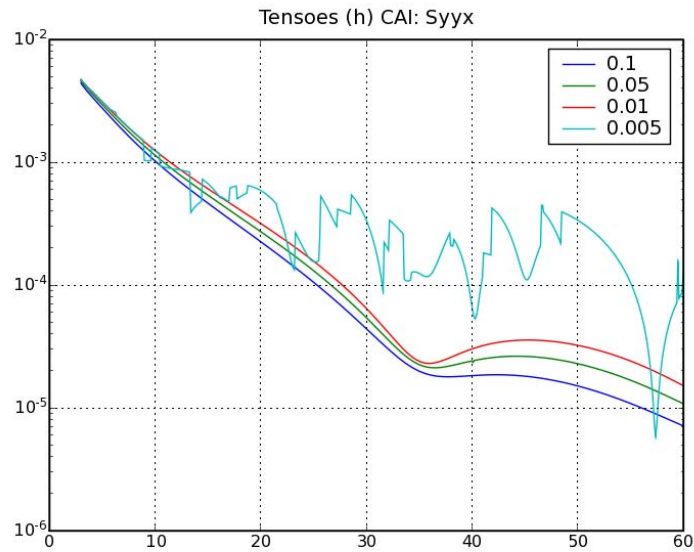


Figura 3.37: Componente σ_{YYX} para $X \in [3, 60]$, $Y = Z = 2$, $\omega = 0,5$ rad/s, erros de integração de 10^{-6} , $A = B = 1$ m, variando η .

O espaço confiável que começou a ser visualizado era complexo. Aparentava ter a forma de uma elipse de revolução esticada ao longo de Y para carregamento transversal em X, exceto um estreito parabolóide hiperbólico ao longo de cada eixo coordenado, e de um cubo centrado na origem para carregamento vertical. O tamanho dessa elipse e cubo, além de pequeno demais, era função da frequência, e provavelmente também o seria dos outros parâmetros, e o espaço confiável final seria a interseção de tais sólidos N-dimensionais.

Sendo assim, foi necessário desenvolver outra estratégia de obtenção da solução de tensões do estado auxiliar, baseada na solução de deslocamentos, mais confiável e abrangente.

3.3 Tensões-D

Uma forma de calcular o valor da solução de tensões no espaço infinito é por aproximação numérica, a partir da solução de deslocamentos.

Seja um ponto $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ no espaço, no qual se deseja calcular a solução de tensões, e seis pontos distintos em torno dele. Por exemplo, segundo a distribuição mostrada na Figura 3.38:

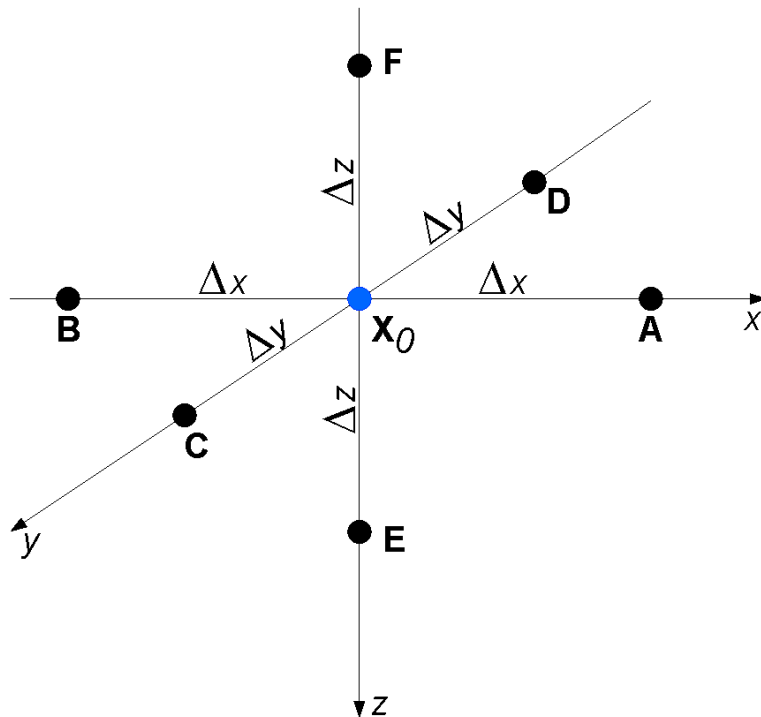


Figura 3.38: Sistema de coordenadas mostrando os pontos A, B, C,... e X_0 .

$$\vec{A} = (x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$$

$$\vec{B} = (x_0 - \Delta x, y_0, z_0)$$

$$\vec{C} = (x_0, y_0 + \Delta y, z_0)$$

$$\vec{D} = (x_0, y_0 - \Delta y, z_0)$$

$$\vec{E} = (x_0, y_0, z_0 + \Delta z)$$

$$\vec{F} = (x_0, y_0, z_0 - \Delta z)$$

As componentes de deslocamento nesses seis pontos podem ser dadas por seis matrizes na forma u_{ij} , em que i é a direção do deslocamento e j a direção em que se aplica o carregamento:

$$u_{ij_{A,B,C,D,E,F}} = \begin{bmatrix} u_{XX} & u_{XY} & u_{XZ} \\ u_{YX} & u_{YY} & u_{YZ} \\ u_{XZ} & u_{ZY} & u_{ZZ} \end{bmatrix}_{A,B,C,D,E,F} \quad (3.1)$$

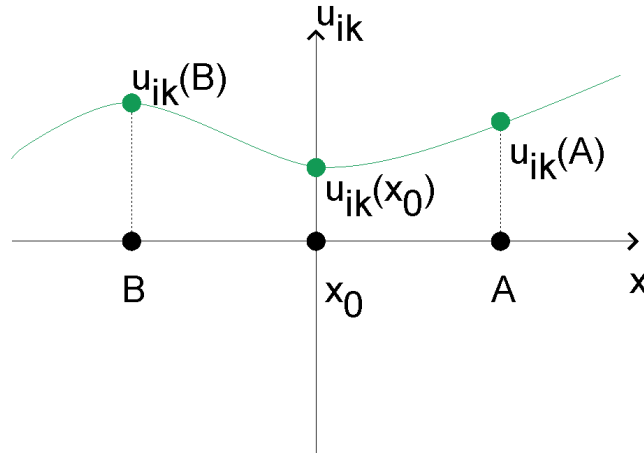


Figura 3.39: Pontos usados para interpolação ao longo de X.

O desenvolvimento dessas componentes ao longo dos eixos coordenados pode ser aproximada por meio de um polinômio quadrático. Pelo polinômio interpolador de Lagrange, tem-se (Figura 3.39):

$$u_{ik}(x)_{Lagrange} = u_{ik}(X_0) \frac{(x-x_A)(x-x_B)}{(x_0-x_A)(x_0-x_B)} + u_{ik}(A) \frac{(x-x_0)(x-x_B)}{(x_A-x_0)(x_A-x_B)} + u_{ik}(B) \frac{(x-x_0)(x-x_A)}{(x_B-x_A)(x_B-x_0)} \quad (3.2)$$

$$u_{ik}(y)_{Lagrange} = u_{ik}(X_0) \frac{(y-y_C)(y-y_D)}{(y_0-y_C)(y_0-y_D)} + u_{ik}(C) \frac{(y-y_0)(y-y_D)}{(y_C-y_0)(y_C-y_D)} + u_{ik}(D) \frac{(y-y_0)(y-y_C)}{(y_D-y_C)(y_D-y_0)} \quad (3.3)$$

$$u_{ik}(z)_{Lagrange} = u_{ik}(X_0) \frac{(z-z_E)(z-z_F)}{(z_0-z_E)(z_0-z_F)} + u_{ik}(E) \frac{(z-z_0)(z-z_F)}{(z_A-z_0)(z_E-z_F)} + u_{ik}(F) \frac{(z-z_0)(z-z_E)}{(z_F-z_E)(z_F-z_0)} \quad (3.4)$$

A Equação 3.2 descreve qualquer uma das componentes u_{ij} ao longo do eixo X, a Equação 3.3 descreve qualquer uma das componentes u_{ij} ao longo do eixo Y e a Equação 3.4 descreve qualquer uma das componentes u_{ij} ao longo do eixo Z.

Com estas funções interpoladoras, pode-se escrever a derivada das componentes u_{ik} , aplicadas no ponto \mathbf{X}_0 ou qualquer outro. Por exemplo, a derivada na direção de X é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{ik}(X_0)_{Lagrange} = u_{ik}(X_0) \left[\frac{1}{(x_0-x_A)} + \frac{1}{(x_0-x_B)} \right] + u_{ik}(A) \frac{(x_0-x_B)}{(x_A-x_0)(x_A-x_B)} + u_{ik}(B) \frac{(x_0-x_A)}{(x_B-x_A)(x_B-x_0)} \quad (3.5)$$

A partir das derivadas de todas as componentes, determina-se a matriz gradiente devido a cada direção de carregamento k :

$$\left[u_{ik,j} \right] = \left[\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}_k \quad (3.6)$$

da qual se obtém o tensor de deformações,

$$[\varepsilon_{ij}]_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

Aplica-se a equação constitutiva da Mecânica dos Sólidos para determinar o tensor de tensões a partir do tensor de deformações. Para um meio contínuo homogêneo e isotrópico, essa equação envolve apenas dois parâmetros independentes. Por exemplo, as constantes λ e μ de Lamé:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{XY} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YZ} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \varepsilon_{XY} \\ \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YZ} \end{Bmatrix}_k \quad (3.8)$$

Dessa forma, por meio de um procedimento essencialmente numérico, obtém-se o tensor de tensões em um ponto \mathbf{X}_0 devido a cada direção de carregamento k . Essas tensões, calculadas por meio de interpolação e derivação numérica das soluções de deslocamento, são chamadas neste trabalho de “Tensões-D”.

A distância entre os pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** e \mathbf{X}_0 , e principalmente sua distribuição em torno de \mathbf{X}_0 são parâmetros que podem ser ajustados para melhorar o resultado das tensões-D.

Há alguns valores do tensor de tensões conhecidos *a priori*, que podem ser usados como parâmetros de validação. Sabe-se que a componente $\sigma_{ZZZ}(0, 0, 0^+) = -1/2$ (Adolph, 2006). Esse valor decorre das condições de contorno do problema, e é um exemplo de valor que pode ser usado para aprimorar a distribuição dos pontos em torno de \mathbf{X}_0 .

Um aspecto que exige atenção são as descontinuidades, como a da componente σ_{ZZZ} na linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 0$, $Z \rightarrow 0$ (Figura 2.4b). Se a distribuição de pontos mostrada na Figura 3.38 for usada para determinar o valor dessa componente exatamente sobre o ponto $X = A^1 = 1$,

¹ Não confundir a largura de carregamento A com o ponto de interpolação **A**, em negrito.

haverá um problema porque a interpolação feita a partir de $u_{ij}(\mathbf{X}_0)$, $u_{ij}(\mathbf{A})$ e $u_{ij}(\mathbf{B})$ não representará nem $\sigma_{ZZZ}(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}^+)$, nem $\sigma_{ZZZ}(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}^-)$.

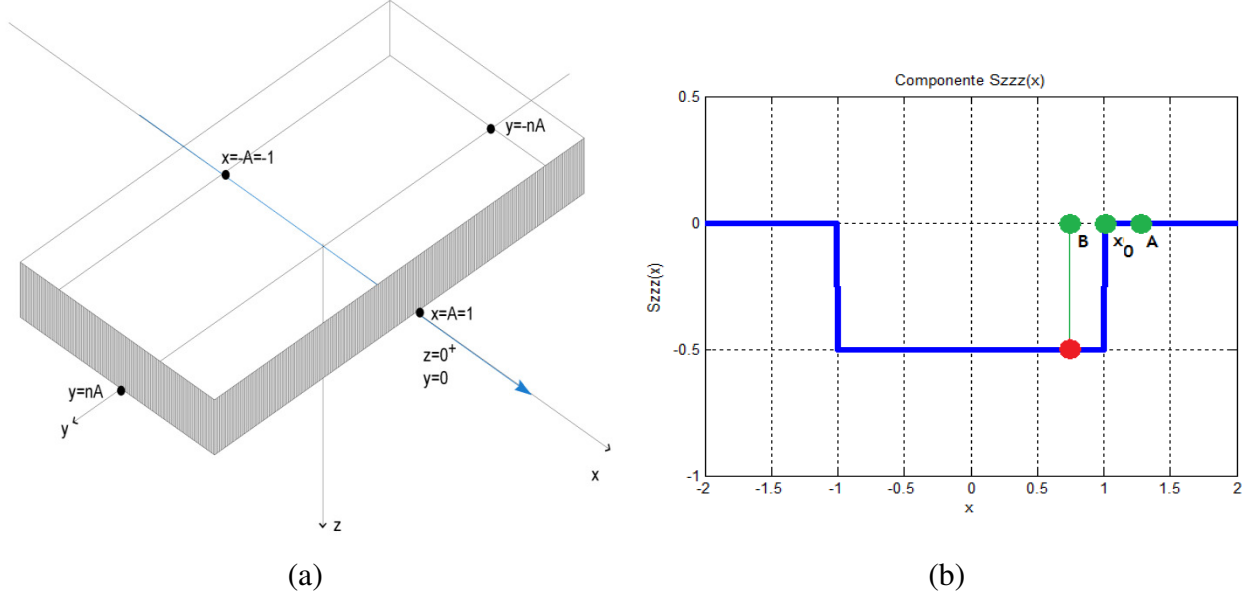


Figura 3.40: (a) Linha $X \in [-2, 2]$, $Y = 0$, $Z \rightarrow 0^+$, com $A = 1$. (b) Componente σ_{ZZZ} nesta linha.

Uma alternativa é redistribuir os pontos em torno de \mathbf{X}_0 como mostrado na Figura 3.41. Isso garante que a interpolação seja capaz de representar adequadamente ao menos $\sigma_{ZZZ}(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}^-)$.

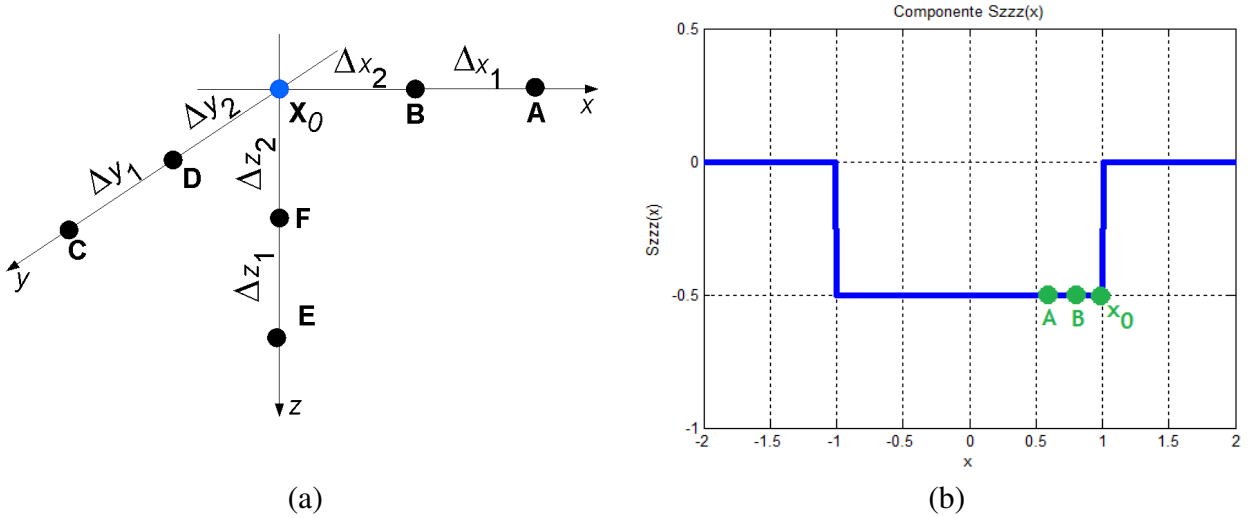


Figura 3.41: (a) Distribuição alternativa de pontos e (b) sua distribuição em torno de $X = A = 1$.

A distribuição utilizada neste trabalho é a mostrada na Figura 3.38. A estratégia usada para tratar descontinuidades é aplicar um pequeno desvio D em relação ao ponto onde há descontinuidade, e garantir que a distância d_x entre \mathbf{X}_0 e os demais pontos ao seu redor faça com que todos eles caiam sobre “o mesmo lado” (Figura 3.42).

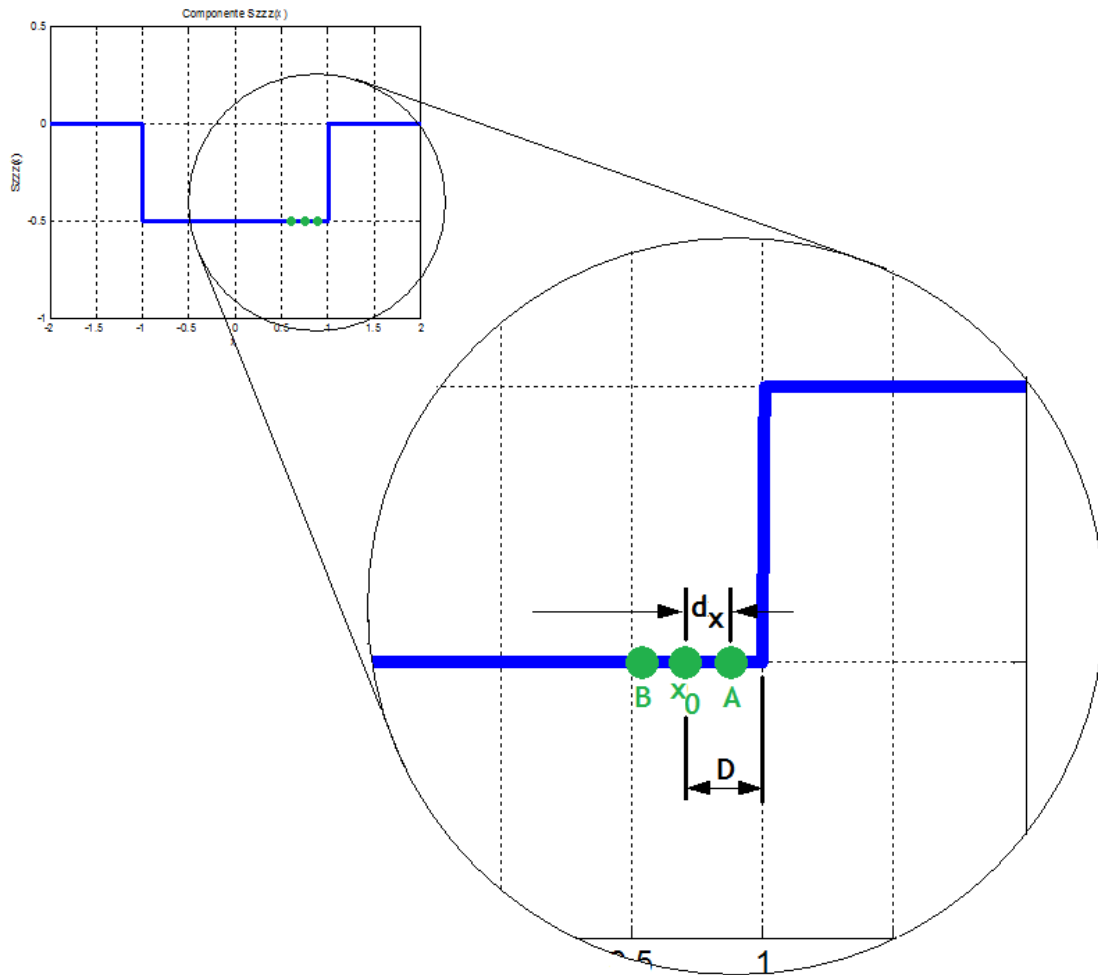


Figura 3.42: Ampliação de trecho da componente σ_{zzz} mostrando como garantir uma boa representação da descontinuidade.

A Figura 3.43 mostra dois resultados obtidos com Tensão-D, comparados com a solução de Crouch e Starfield bidimensional. O objetivo desta comparação é somente mostrar que a técnica de Tensão-D é capaz de representar singularidades e descontinuidades.

O mau resultado observado nestes gráficos deve-se ao fato de que a emulação do estado auxiliar de Crouch e Starfield pela solução de Adolph leva os parâmetros B/A e ω a valores

críticos para a implementação de Adolph: 7 e 0,01 rad/s, respectivamente. Valores de Z muito próximos de zero em conjunto com X nulo também são críticos.

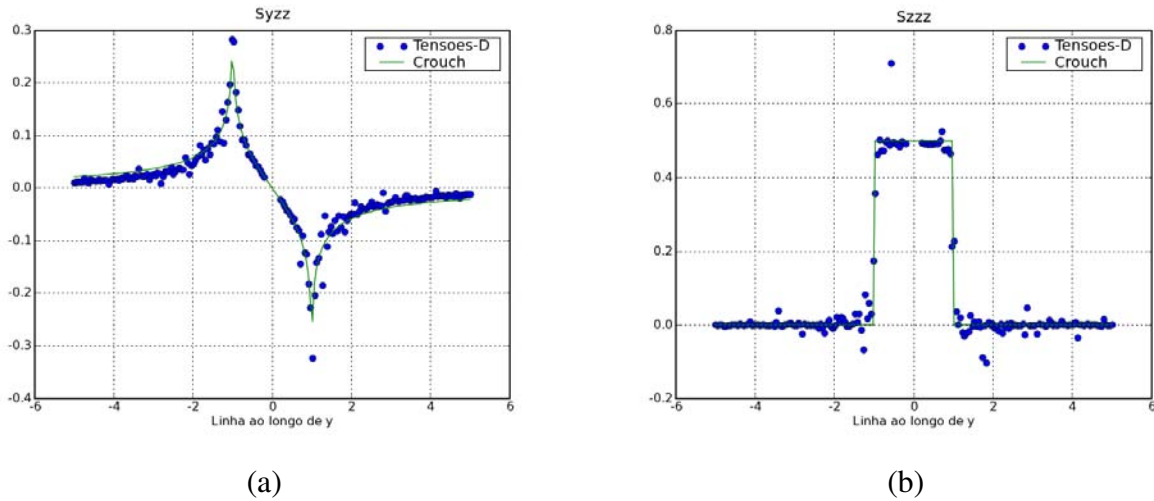
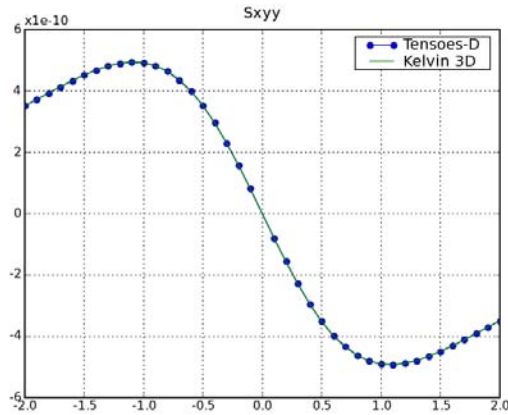


Figura 3.43: (a) componente σ_{YZZ} e (b) σ_{ZZZ} ao longo da linha $Y \in [-5, 5]$, $X = 0$, $Z \rightarrow 0^-$.

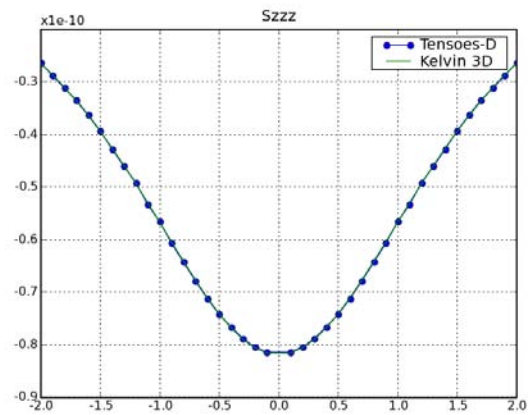
Outra comparação com a solução de Kelvin tridimensional, desta vez com parâmetros longe da região crítica (Tabela 3.10), pode ser vista na Figura 3.44 para as componentes σ_{XYY} e σ_{ZZZ} .

Tabela 3.10: Dados utilizados no estudo da Figura 3.44.

Parâmetro	Valor utilizado
Frequência ω	0,01 rad/s
Largura de carregamento A e B	10^{-4} m
Fator de amortecimento η	0,01
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Erros de integração	10^{-6}



(a)



(b)

Figura 3.44: (a) componente σ_{XYY} e (b) σ_{ZZZ} ao longo da linha $X \in [-2, 2]$, $Y = -2$, $Z = \frac{1}{2}$.

Neste capítulo, a implementação de Adolph para o estado auxiliar descrito na **Seção 2.4** foi estudada a fundo. O objetivo era garantir que as respostas de seu programa não tinham qualquer sinal errado, embora a escassez de fontes de validação dificultasse avaliar quão bons eram os resultados gerados.

A investigação das limitações do programa levou a concluir que o espaço confiável para as soluções de tensão eram pequenos demais, e isso exigiu o desenvolvimento de uma forma alternativa de determiná-las: Tensões-D.

Agora, tendo descrito o estado auxiliar viscoelastodinâmico e estudado as limitações da presente implementação, pode-se discutir como tal estado se aplica, pelo MEC-Indireto, para resolver um problema de engenharia.

Capítulo 4

Formulação do MEC-Indireto

A partir do programa de Adolph (2006), obtém-se a solução numérica no domínio da frequência, para deslocamentos e tensões no espaço completo contínuo, homogêneo, isotrópico, viscoelastodinâmico, devido ao carregamento unitário uniformemente distribuído sobre uma superfície retangular de lados $2A$ e $2B$ paralelos aos eixos coordenados X e Y , respectivamente. Essa solução é utilizada em um procedimento baseado no Método dos Elementos de Contorno Indireto (MEC-I) para determinar os deslocamentos e forças de superfície em um problema tridimensional, aberto ou fechado, discretizado no contorno por elementos retangulares constantes, descontínuos, conformes ou não.

4.1 Deslocamentos

Para um dado ponto-campo $\vec{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, o deslocamento na direção k devido a um carregamento uniformemente distribuído q_l na direção l é dado por:

$$u_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j, \omega, \eta, \nu, \mu, A, B, \rho) = G_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j, \omega, \eta, \nu, \mu, A, B, \rho) \cdot q_l(\vec{X}_j) \quad (4.1)$$

em que $\vec{X}_j = (X_j, Y_j, Z_j)$ é o ponto-fonte onde se aplica o carregamento dinâmico de intensidade q_l e frequência ω , sobre uma superfície retangular de lados $2A$ e $2B$, em um espaço tridimensional infinito com propriedades de amortecimento η , módulo de elasticidade transversal μ , densidade ρ e coeficiente de Poisson ν . Os termos G_{kl} são as componentes de deslocamento na direção k no estado auxiliar, devido a um carregamento unitário na direção l (solução do estado auxiliar).

Tomando como exemplo o carregamento vertical q_z mostrado na Figura 2.6, os deslocamentos no ponto \mathbf{X}_i em relação ao sistema de coordenadas da figura são:

$$\begin{aligned}
u_{xz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{xz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j) \\
u_{yz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{yz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j) \\
u_{zz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{zz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

As demais variáveis que não \mathbf{X}_i e \mathbf{X}_j são suprimidas para simplificar a notação.

Analogamente, para carregamentos transversais nas direções de X e Y tem-se:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{xx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j) \\
u_{yx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{yx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j) \\
u_{zx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{zx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
u_{xy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{xy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j) \\
u_{yy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{yy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j) \\
u_{zy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{zy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Em um caso geral, em que há excitação nas três direções, o deslocamento resultante na direção k qualquer é dado por uma combinação linear dos deslocamentos devidos à excitação em cada uma das direções l :

$$\begin{aligned}
u_x(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{xx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j) + G_{xy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j) + G_{xz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j) \\
u_y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{yx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j) + G_{yy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j) + G_{yz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j) \\
u_z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= G_{zx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j) + G_{zy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j) + G_{zz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Esta superposição pode ser feita linearmente pela natureza linear do operador de Navier, que dá origem aos termos G_{kl} (Equação 2.14).

De forma matricial, reescreve-se (4.5) como:

$$\begin{Bmatrix} u_x(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ u_y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ u_z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{xy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{xz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ G_{yx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{yy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{yz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ G_{zx}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{zy}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{zz}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x(\vec{X}_j) \\ q_y(\vec{X}_j) \\ q_z(\vec{X}_j) \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Em um problema discretizado, em que todos os deslocamentos e tensões de um elemento j são representados no seu ponto central \mathbf{X}_j e analogamente para um elemento i e seu centro \mathbf{X}_i , a Equação 4.6 representa os deslocamentos do elemento i nas direções x^j, y^j, z^j do sistema de coordenadas do elemento j (mostrado na Figura 4.1).

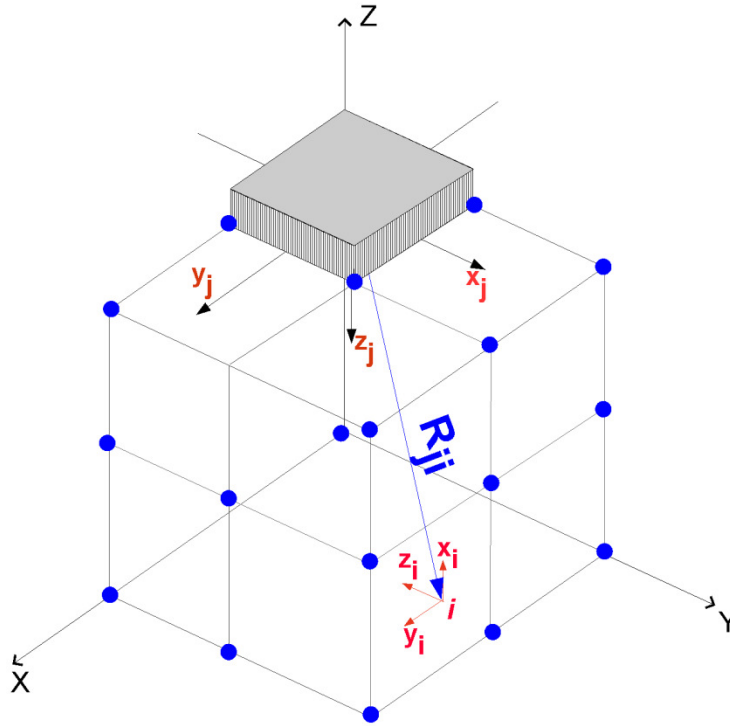


Figura 4.1: Exemplo de problema discretizado, mostrando os elementos j (carregado) e i (onde se mede os deslocamentos).

Este deslocamento é o correspondente somente ao carregamento aplicado no elemento j . O deslocamento real do elemento i é obtido por meio de uma superposição dos efeitos de todos os

carregamentos efetuados em todos os elementos dessa discretização, que só pode ser feita se os deslocamentos do ponto i devidos a cada elemento j estiverem descritos no mesmo sistema de coordenadas.

Para tanto, elege-se como referência o sistema de coordenadas do próprio elemento i .

Sendo $[\beta^j]$ a matriz de transformação de coordenadas tal que $\vec{V}^G = [\beta^j] \vec{v}^j$, sendo \vec{v}^j o vetor descrito no sistema de coordenadas do elemento j e \vec{V}^G o mesmo vetor em relação ao sistema de coordenadas global, pode-se obter os deslocamentos em relação ao sistema global de coordenadas por:

$$\begin{Bmatrix} U_X(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ U_Y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ U_Z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \end{Bmatrix} = [\beta^j] \begin{Bmatrix} u_X(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ u_Y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ u_Z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Substituindo-se (4.7) em (4.6), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U_X(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ U_Y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ U_Z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \end{Bmatrix} = [\beta^j] \underbrace{\begin{bmatrix} G_{XX}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{XY}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{XZ}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ G_{YX}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{YY}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{YZ}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \\ G_{ZX}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{ZY}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) & G_{ZZ}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{G}}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)} \begin{Bmatrix} q_x(\vec{X}_j) \\ q_y(\vec{X}_j) \\ q_z(\vec{X}_j) \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

na qual $\overline{\overline{G}}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$ é a matriz dos estados auxiliares para os deslocamentos, pré-multiplicada pela matriz de transformação de coordenadas do sistema de coordenadas do elemento j para o sistema global. Usando notação indicial, pode-se escrever:

$$U_k(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = \overline{\overline{G}}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \quad (4.9)$$

Sendo $[\beta^i]$ a matriz de transformação de coordenadas do sistema do elemento i para o sistema global, obtém-se finalmente os deslocamentos em relação ao sistema de coordenadas do elemento i por:

$$u_k^i(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = [\beta^i]^T U_k(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = [\beta^i]^T \underbrace{\bar{G}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)}_{\bar{G}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)} q_l(\vec{X}_j) \quad (4.10)$$

em que $\bar{G}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$ é a matriz dos estados auxiliares para os deslocamentos em relação ao sistema de coordenadas do elemento i .

Assim, calcula-se a influência do carregamento em um elemento j sobre os vários elementos $i = 1, M$ por meio de:

$$\begin{aligned} u_k(\vec{X}_1, \vec{X}_j) &= \bar{G}_{kl}(\vec{X}_1, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \\ u_k(\vec{X}_2, \vec{X}_j) &= \bar{G}_{kl}(\vec{X}_2, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \\ &\dots \\ u_k(\vec{X}_M, \vec{X}_j) &= \bar{G}_{kl}(\vec{X}_M, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por outro lado, o deslocamento real de um ponto i devido à influência dos vários elementos $j = 1, M$ é dado por:

$$u_k(\vec{X}_i) = \bar{G}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_1) q_l(\vec{X}_1) + \bar{G}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_2) q_l(\vec{X}_2) + \dots + \bar{G}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_M) q_l(\vec{X}_M) \quad (4.12)$$

Ou, descrevendo a relação de deslocamento de todos os $M = N/3$ elementos do problema, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_x(\vec{X}_1) \\ u_y(\vec{X}_1) \\ u_z(\vec{X}_1) \\ u_x(\vec{X}_2) \\ u_y(\vec{X}_2) \\ u_z(\vec{X}_2) \\ \vdots \\ u_x(\vec{X}_N) \\ u_y(\vec{X}_N) \\ u_z(\vec{X}_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}^{11} & \bar{G}^{11} & \bar{G}^{11} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{12} & \dots & \bar{G}^{1N} & \bar{G}^{1N} & \bar{G}^{1N} \\ \bar{G}^{11} & \bar{G}^{11} & \bar{G}^{11} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{12} & \dots & \bar{G}^{1N} & \bar{G}^{1N} & \bar{G}^{1N} \\ \bar{G}^{11} & \bar{G}^{11} & \bar{G}^{11} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{12} & \dots & \bar{G}^{1N} & \bar{G}^{1N} & \bar{G}^{1N} \\ \bar{G}^{21} & \bar{G}^{21} & \bar{G}^{21} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{22} & \dots & \bar{G}^{2N} & \bar{G}^{2N} & \bar{G}^{2N} \\ \bar{G}^{21} & \bar{G}^{21} & \bar{G}^{21} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{22} & \dots & \bar{G}^{2N} & \bar{G}^{2N} & \bar{G}^{2N} \\ \bar{G}^{21} & \bar{G}^{21} & \bar{G}^{21} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{22} & \dots & \bar{G}^{2N} & \bar{G}^{2N} & \bar{G}^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N2} & \bar{G}^{N2} & \bar{G}^{N2} & \dots & \bar{G}^{NN} & \bar{G}^{NN} & \bar{G}^{NN} \\ \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N2} & \bar{G}^{N2} & \bar{G}^{N2} & \dots & \bar{G}^{NN} & \bar{G}^{NN} & \bar{G}^{NN} \\ \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N1} & \bar{G}^{N2} & \bar{G}^{N2} & \bar{G}^{N2} & \dots & \bar{G}^{NN} & \bar{G}^{NN} & \bar{G}^{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x(\vec{X}_1) \\ q_y(\vec{X}_1) \\ q_z(\vec{X}_1) \\ q_x(\vec{X}_2) \\ q_y(\vec{X}_2) \\ q_z(\vec{X}_2) \\ \vdots \\ q_x(\vec{X}_N) \\ q_y(\vec{X}_N) \\ q_z(\vec{X}_N) \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

na qual $\bar{G}^{ij} = \bar{G}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$, para simplificar a notação.

A Equação 4.13 pode ser resumida por:

$$\{u(\vec{X}_i)\} = [\bar{G}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)] \cdot \{q(\vec{X}_j)\} \quad (4.14)$$

na qual:

$\{u(\vec{X}_i)\}$: vetor $M \times 1$, contendo o deslocamento nas direções X, Y e Z do ponto central de

todos os elementos, expresso no sistema de coordenada de cada elemento i ;

$[\bar{G}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)]$: Matriz $M \times M$, gerada a partir de transformações de coordenadas sobre

componentes do estado auxiliar, $G_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_j, \omega, \eta, \nu, \mu, A, B, \rho)$;

$\{q(\vec{X}_j)\}$: Vetor $M \times 1$, contendo o carregamento fictício a que cada elemento i se sujeita

quando outro elemento j é carregado. Este vetor é expresso no sistema de coordenadas de cada elemento j .

4.2 Tensões

A solução para tensões devido ao carregamento unitário em cada direção X, Y e Z no espaço completo também é dada por Adolph, ou calculada pela estratégia de Tensões-D (**Seção 3.3**). Ponderando-se pelas amplitudes de carregamento correspondentes q_X , q_Y e q_Z , obtém-se o tensor de tensões em um dado ponto (Figura 4.2) por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{XXX} & H_{XYX} & H_{XZX} \\ H_{YXX} & H_{YYX} & H_{YZX} \\ H_{ZXX} & H_{Zyx} & H_{ZZX} \end{bmatrix} q_X + \begin{bmatrix} H_{XXY} & H_{XYY} & H_{XZY} \\ H_{YXY} & H_{YYY} & H_{YZY} \\ H_{ZXY} & H_{ZYY} & H_{ZZY} \end{bmatrix} q_Y + \begin{bmatrix} H_{XXZ} & H_{XYZ} & H_{XZZ} \\ H_{YXZ} & H_{YYZ} & H_{YZZ} \\ H_{ZXZ} & H_{ZYZ} & H_{ZZZ} \end{bmatrix} q_Z \quad (4.15)$$

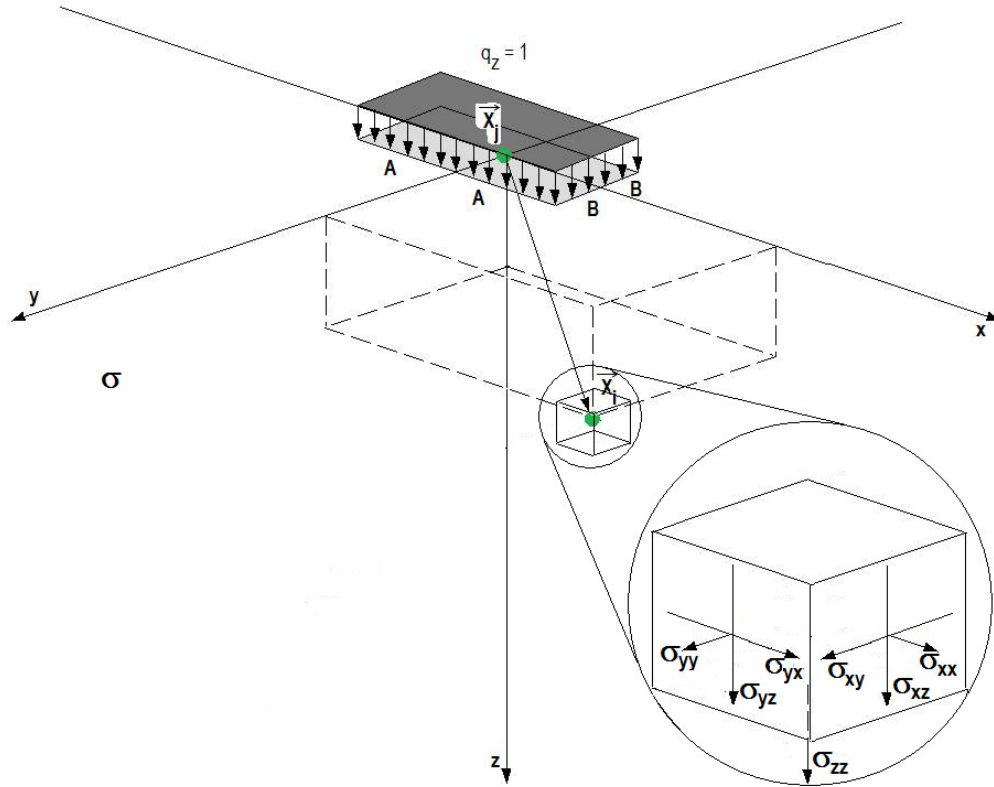


Figura 4.2: Esboço do carregamento no interior do espaço completo, mostrando as principais componentes de tensão no ponto-campo X_i .

Pela solução de Adolph determina-se estas 27 componentes dos estados auxiliares de tensão. As componentes H_{XXX} , H_{XYX} , H_{XZX} , H_{YYX} , H_{YZX} e H_{ZZX} são devido ao carregamento transversal em X, de intensidade q_X . As componentes H_{XXY} , H_{XYY} , H_{XZY} , H_{YYY} , H_{YZY} e H_{ZZY} são devido ao carregamento transversal em Y, de intensidade q_Y . As componentes H_{XXZ} , H_{XYZ} , H_{XZZ} , H_{YYZ} , H_{YZZ} e H_{ZZZ} são devido ao carregamento normal em Z, de intensidade q_Z . As nove demais componentes das matrizes de influência são dadas pela simetria intrínseca do tensor de tensões: $H_{ijk} = H_{jik}$.

Em notação indicial, pode-se simplificar a Equação 4.15 como:

$$\sigma_{rs}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = H_{rsm}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_m(\vec{X}_j) \quad (4.16)$$

O tensor de tensões mostrado está descrito nas coordenadas locais do elemento j , que é o sistema de coordenadas sobre o qual se alinham os carregamentos fictícios q_m . É necessário fazer a mesma manipulação que foi feita para os deslocamentos, reescrevendo-o em termos do sistema global de coordenadas e depois em relação ao sistema de coordenadas do elemento i .

Contudo, como se trata de um tensor, essa transformação se dá de outra forma. Considere as seguintes transformações:

$$\vec{n}^j = [\beta^j]^T \vec{N}^G \quad (4.17)$$

$$\vec{t}^j = [\beta^j]^T \vec{T}^G \quad (4.18)$$

em que:

$[\beta^j]$: matriz que transforma um vetor descrito no sistema de coordenadas local de j para o sistema global de coordenadas;

\vec{N}^G : vetor normal ao elemento, que aponta para fora do domínio, descrito no sistema de coordenadas global e

\vec{T}^G : vetor de força de superfície que atua no elemento j , descrito no sistema global.

Substituindo (4.18) e (4.17) na Equação de Cauchy, $t_i = \sigma_{ij}n_j$, tem-se que:

$$\begin{aligned} [\beta^j]^T \vec{T}^G &= \sigma [\beta^j]^T \vec{N}^G, \text{ ou:} \\ \vec{T}^G &= \underbrace{[\beta^j] \sigma [\beta^j]^T}_{\sigma} \vec{N}^G \end{aligned} \quad (4.18)$$

Isto é,

$$\bar{\sigma}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = [\beta^j] \sigma(\vec{X}_i, \vec{X}_j) [\beta^j]^T \quad (4.19)$$

em que $\bar{\sigma}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)$ representa o tensor de tensões em um ponto \mathbf{X}_i qualquer do espaço, descrito em relação ao sistema global de coordenadas.

Aplica-se essa transformação à Equação 4.16 para se obter:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= [\beta^j] H_x(\vec{X}_i, \vec{X}_j) [\beta^j]^T \cdot q_x(\vec{X}_j) + \\ &+ [\beta^j] H_y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) [\beta^j]^T \cdot q_y(\vec{X}_j) + [\beta^j] H_z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) [\beta^j]^T \cdot q_z(\vec{X}_j) \\ \bar{\sigma}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= \bar{H}_x(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_x(\vec{X}_j) + \bar{H}_y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_y(\vec{X}_j) + \bar{H}_z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \cdot q_z(\vec{X}_j) \end{aligned} \quad (4.20)$$

em que \bar{H}_m são as matrizes de influência de tensões, em relação ao sistema global, devido a cada direção de carregamento q_m .

Pela Equação de Cauchy, pode-se determinar o vetor força de superfície sobre um elemento i em relação ao sistema de coordenadas global:

$$\vec{T}^G(\vec{X}_i) = \bar{\sigma}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \vec{N}^G(\vec{X}_i) \quad (4.21)$$

Em termos das funções de influência, a Equação 4.21 fica:

$$\begin{aligned}\vec{T}^G(\vec{X}_i) &= \bar{H}_x(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \vec{N}^G(\vec{X}_i) q_x(\vec{X}_j) + \\ &+ \bar{H}_y(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \vec{N}^G(\vec{X}_i) q_y(\vec{X}_j) + \bar{H}_z(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \vec{N}^G(\vec{X}_i) q_z(\vec{X}_j)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Expandindo os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} T_x(\vec{X}_i) \\ T_y(\vec{X}_i) \\ T_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{H}_{xxx} & \bar{H}_{xyx} & \bar{H}_{xzx} \\ \bar{H}_{yxx} & \bar{H}_{yyx} & \bar{H}_{yzx} \\ \bar{H}_{zxx} & \bar{H}_{zyx} & \bar{H}_{zzx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(\vec{X}_i) \\ N_y(\vec{X}_i) \\ N_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} q_x + \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{H}_{xxy} & \bar{H}_{xyy} & \bar{H}_{xzy} \\ \bar{H}_{yxy} & \bar{H}_{yyy} & \bar{H}_{yzy} \\ \bar{H}_{zxy} & \bar{H}_{zyy} & \bar{H}_{zzy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(\vec{X}_i) \\ N_y(\vec{X}_i) \\ N_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} q_y + \begin{bmatrix} \bar{H}_{xxz} & \bar{H}_{xyz} & \bar{H}_{xzz} \\ \bar{H}_{yxz} & \bar{H}_{yyz} & \bar{H}_{yzz} \\ \bar{H}_{zxz} & \bar{H}_{zyz} & \bar{H}_{zzz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(\vec{X}_i) \\ N_y(\vec{X}_i) \\ N_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} q_z\end{aligned}\quad (4.23)$$

Desenvolvendo as multiplicações:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} T_x(\vec{X}_i) \\ T_y(\vec{X}_i) \\ T_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} \bar{H}_{xxx} N_x + \bar{H}_{xyx} N_y + \bar{H}_{xzx} N_z & \bar{H}_{xxy} N_x + \bar{H}_{xyy} N_y + \bar{H}_{xzy} N_z & \bar{H}_{xxz} N_x + \bar{H}_{xyz} N_y + \bar{H}_{xzz} N_z \\ \bar{H}_{yxx} N_x + \bar{H}_{yyx} N_y + \bar{H}_{yzx} N_z & \bar{H}_{yxy} N_x + \bar{H}_{yyy} N_y + \bar{H}_{yzy} N_z & \bar{H}_{yxz} N_x + \bar{H}_{yyz} N_y + \bar{H}_{yzz} N_z \\ \bar{H}_{zxx} N_x + \bar{H}_{zyx} N_y + \bar{H}_{zzx} N_z & \bar{H}_{zxy} N_x + \bar{H}_{zyy} N_y + \bar{H}_{zzy} N_z & \bar{H}_{zxz} N_x + \bar{H}_{zyz} N_y + \bar{H}_{zzz} N_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (4.24)$$

Ou, resumidamente,

$$\vec{T}(\vec{X}_i) = A(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \vec{q}(\vec{X}_j) \quad (4.25)$$

Para fins de implementação, é mais fácil considerar a Equação 4.25 de tal forma que:

$$A(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = A_1(\vec{X}_i, \vec{X}_j) + A_2(\vec{X}_i, \vec{X}_j) + A_3(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \quad (4.26)$$

em que:

$$\begin{aligned} A_1(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= \begin{bmatrix} \bar{H}_{XXX} & \bar{H}_{XYX} & \bar{H}_{XZX} \\ \bar{H}_{YXX} & \bar{H}_{YYX} & \bar{H}_{YZX} \\ \bar{H}_{ZXX} & \bar{H}_{ZYG} & \bar{H}_{ZZX} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(\vec{X}_i) \\ N_y(\vec{X}_i) \\ N_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} \{1 \ 0 \ 0\} \\ A_2(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= \begin{bmatrix} \bar{H}_{XXY} & \bar{H}_{XYX} & \bar{H}_{XZY} \\ \bar{H}_{YXY} & \bar{H}_{YYX} & \bar{H}_{YZY} \\ \bar{H}_{ZXY} & \bar{H}_{ZYG} & \bar{H}_{ZZY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(\vec{X}_i) \\ N_y(\vec{X}_i) \\ N_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} \{0 \ 1 \ 0\} \\ A_3(\vec{X}_i, \vec{X}_j) &= \begin{bmatrix} \bar{H}_{XXZ} & \bar{H}_{XYZ} & \bar{H}_{XZZ} \\ \bar{H}_{YXZ} & \bar{H}_{YYZ} & \bar{H}_{YZZ} \\ \bar{H}_{ZXZ} & \bar{H}_{ZYZ} & \bar{H}_{ZZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(\vec{X}_i) \\ N_y(\vec{X}_i) \\ N_z(\vec{X}_i) \end{Bmatrix} \{0 \ 0 \ 1\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Essa técnica de implementação se baseia unicamente em multiplicações sobre as matrizes já existentes, e evita os erros que facilmente ocorreriam durante a digitação da Equação 4.24.

A Equação 4.25 descreve o vetor força de superfície atuando sobre o ponto \mathbf{X}_i resultante do carregamento q_m no elemento j . Aqui, q_m é descrito em termos do elemento j , enquanto \mathbf{T} e $[\mathbf{A}]$, em termos do sistema global de coordenadas.

Por fim, obtém-se a força de superfície sobre o elemento i em termos tangenciais e normais por meio da matriz $[\beta^i]$ de transformação de coordenadas:

$$\vec{t}^i(\vec{X}_i) = [\beta^i]^T \cdot \vec{T}^G(\vec{X}_i) \quad (4.28)$$

Portanto, de (4.25) tem-se:

$$\vec{t}(\vec{X}_i) = \underbrace{\left[\vec{\beta}^i \right]^T A(\vec{X}_i, \vec{X}_j)}_{\bar{S}(\vec{X}_i, \vec{X}_j)} \vec{q}(\vec{X}_j) \quad (4.29)$$

Assim, calcula-se a influência do carregamento em um elemento j sobre os vários elementos $i = 1, M$ por meio de:

$$\begin{aligned} t_k(\vec{X}_1, \vec{X}_j) &= \bar{S}_{kl}(\vec{X}_1, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \\ t_k(\vec{X}_2, \vec{X}_j) &= \bar{S}_{kl}(\vec{X}_2, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \\ &\dots \\ t_k(\vec{X}_M, \vec{X}_j) &= \bar{S}_{kl}(\vec{X}_M, \vec{X}_j) q_l(\vec{X}_j) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por outro lado, a força de superfície real de um ponto i devido à influência dos vários elementos $j = 1, M$ é dada por:

$$t_k(\vec{X}_i) = \bar{S}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_1) q_l(\vec{X}_1) + \bar{S}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_2) q_l(\vec{X}_2) + \dots + \bar{S}_{kl}(\vec{X}_i, \vec{X}_M) q_l(\vec{X}_M) \quad (4.31)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x(\vec{X}_1) \\ t_y(\vec{X}_1) \\ t_z(\vec{X}_1) \\ t_x(\vec{X}_2) \\ t_y(\vec{X}_2) \\ t_z(\vec{X}_2) \\ \vdots \\ t_x(\vec{X}_N) \\ t_y(\vec{X}_N) \\ t_z(\vec{X}_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}^{11} & \bar{S}^{11} & \bar{S}^{11} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{12} & \dots & \bar{S}^{1N} & \bar{S}^{1N} & \bar{S}^{1N} \\ \bar{S}^{11} & \bar{S}^{11} & \bar{S}^{11} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{12} & \dots & \bar{S}^{1N} & \bar{S}^{1N} & \bar{S}^{1N} \\ \bar{S}^{11} & \bar{S}^{11} & \bar{S}^{11} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{12} & \dots & \bar{S}^{1N} & \bar{S}^{1N} & \bar{S}^{1N} \\ \bar{S}^{21} & \bar{S}^{21} & \bar{S}^{21} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{22} & \dots & \bar{S}^{2N} & \bar{S}^{2N} & \bar{S}^{2N} \\ \bar{S}^{21} & \bar{S}^{21} & \bar{S}^{21} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{22} & \dots & \bar{S}^{2N} & \bar{S}^{2N} & \bar{S}^{2N} \\ \bar{S}^{21} & \bar{S}^{21} & \bar{S}^{21} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{22} & \dots & \bar{S}^{2N} & \bar{S}^{2N} & \bar{S}^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N2} & \bar{S}^{N2} & \bar{S}^{N2} & \dots & \bar{S}^{NN} & \bar{S}^{NN} & \bar{S}^{NN} \\ \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N2} & \bar{S}^{N2} & \bar{S}^{N2} & \dots & \bar{S}^{NN} & \bar{S}^{NN} & \bar{S}^{NN} \\ \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N1} & \bar{S}^{N2} & \bar{S}^{N2} & \bar{S}^{N2} & \dots & \bar{S}^{NN} & \bar{S}^{NN} & \bar{S}^{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x(\vec{X}_1) \\ q_y(\vec{X}_1) \\ q_z(\vec{X}_1) \\ q_x(\vec{X}_2) \\ q_y(\vec{X}_2) \\ q_z(\vec{X}_2) \\ \vdots \\ q_x(\vec{X}_N) \\ q_y(\vec{X}_N) \\ q_z(\vec{X}_N) \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

A Equação 4.32 desenvolve a Equação 4.31 para todo o conjunto de $M = N/3$ elementos do problema, na qual $\bar{S}^{ij} = \bar{S}(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$, para simplificar a notação.

De forma resumida, escreve-se:

$$\{t(\bar{X}_i)\} = [\bar{S}(\bar{X}_i, \bar{X}_j)] \cdot \{q(\bar{X}_j)\} \quad (4.33)$$

na qual:

$\{t(\bar{X}_i)\}$: vetor $M \times 1$, contendo a força de superfície atuante nas direções X, Y e Z no ponto central de todos os elementos, expressa no sistema de coordenada de cada elemento i ;

$[\bar{S}(\bar{X}_i, \bar{X}_j)]$: Matriz $M \times M$, gerada a partir de transformações de coordenadas sobre componentes do estado auxiliar, $H_{kl}(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \omega, \eta, \nu, \mu, A, B, \rho)$;

$\{q(\bar{X}_j)\}$: Vetor $M \times 1$, contendo o carregamento fictício a que cada elemento i se sujeita quando outro elemento j é carregado. Este vetor é expresso no sistema de coordenadas de cada elemento j .

4.3 Relação força de superfície \times deslocamento

Foi obtido que os deslocamentos e forças de superfície devido aos carregamentos fictícios q são dados por:

$$\{u(\bar{X}_i)\} = [\bar{G}(\bar{X}_i, \bar{X}_j)] \{q(\bar{X}_j)\} \quad (4.14)$$

$$\{t(\bar{X}_i)\} = [\bar{S}(\bar{X}_i, \bar{X}_j)] \{q(\bar{X}_j)\} \quad (4.33)$$

Como as matrizes de influência \bar{G} e \bar{S} são invertíveis, manipula-se a Equação 4.14 para isolar o termo relativo ao carregamento distribuído:

$$\left\{u\left(\overrightarrow{X}_i\right)\right\}\left[\overline{G}\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]^{-1}=\left\{q\left(\overrightarrow{X}_j\right)\right\} \quad (4.34)$$

Aplica-se (4.34) a (4.33) para se obter:

$$\left[\overline{S}\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]\left[\overline{G}\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]^{-1}\left\{u\left(\overrightarrow{X}_i\right)\right\}=\left\{t\left(\overrightarrow{X}_i\right)\right\} \quad (4.35)$$

A Equação 4.35 é similar à equação final também encontrada no Método dos Elementos Finitos, em que a matriz de rigidez [K] é dada por:

$$\left[K\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]=\left[\overline{S}\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]\left[\overline{G}\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]^{-1} \quad (4.36)$$

Ou seja:

$$\left[K\left(\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\right)\right]\left\{u\left(\overrightarrow{X}_i\right)\right\}=\left\{F\left(\overrightarrow{X}_i\right)\right\} \quad (4.37)$$

A diferença do equacionamento do MEF é que suas expressões são dadas em termos de forças externas nodais equivalentes, e não forças de superfície distribuídas.

Assim, a solução do problema discretizado por elementos no contorno pode se dar como no MEF, pela solução da Equação 4.35. Como isso implica na inversão de uma das matrizes de influência e esse processo é computacionalmente caro, adota-se outra técnica de solução das Equações 4.14 e 4.33 (**Seção 4.4**).

Como neste trabalho a discretização é feita por elementos descontínuos, é uma boa estratégia fazer as superposições dos termos de influência no sistema de coordenadas do sistema i . Em um problema discretizado por elementos contínuos, em que um nó responde por mais de um elemento e deve representar diferentes valores e orientações de uma grandeza, é necessário

reescrever esta formulação para que a superposição ocorra em termos do sistema global de coordenadas.

4.4 Método de solução

Seja um problema bidimensional discretizado no contorno por três elementos descontínuos e constantes, com somente um grau de liberdade por nó, na direção do vetor normal \mathbf{n}_i dos elementos, conforme mostra a Figura 4.3a.

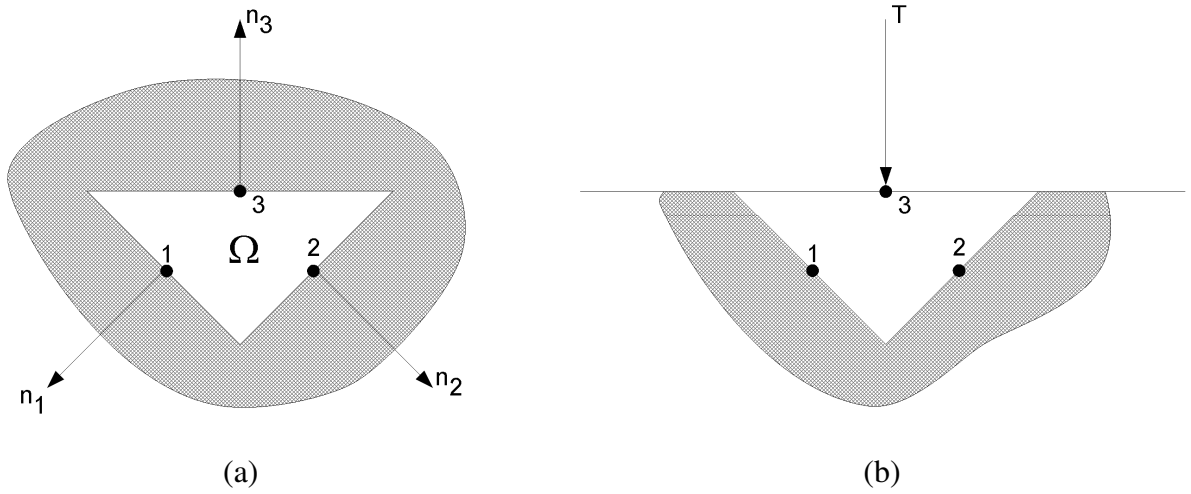


Figura 4.3: (a) discretização de problema por três elementos e (b) aplicação de carregamento.

Para este problema, as Equações 4.14 e 4.33 são reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}^{11} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{13} \\ \bar{S}^{21} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{23} \\ \bar{S}^{31} & \bar{S}^{32} & \bar{S}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

e

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}^{11} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{13} \\ \bar{G}^{21} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{23} \\ \bar{G}^{31} & \bar{G}^{32} & \bar{G}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Considere ainda a aplicação de restrição de deslocamento nos nós 1 e 2, e de uma carga T sobre o nó 3 (Figura 4.3b), de forma que as condições de contorno passem a ser $u_1 = u_2 = 0$ e $t_3 = T$. Como o vetor \mathbf{q} é o mesmo nas Equações 4.38 e 4.39, reescreve-se essas equações separando condições de contorno e incógnitas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}^{11} & \bar{G}^{12} & \bar{G}^{13} \\ \bar{G}^{21} & \bar{G}^{22} & \bar{G}^{23} \\ \bar{S}^{31} & \bar{S}^{32} & \bar{S}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

De forma reduzida, a Equação 4.40 fica:

$$\vec{b} = [\mathcal{Q}] \vec{q} \quad (4.41)$$

em que:

b: vetor envolvendo os valores conhecidos de deslocamento e força de superfície;

q: vetor de carregamentos fictícios;

[Q]: matriz cujas linhas são baseadas nas matrizes \bar{G} e \bar{S} , de acordo com as condições de contorno.

Resolve-se o sistema da Equação 4.41 para determinar o vetor de carregamentos fictícios, e finalmente a seguinte multiplicação para descobrir as incógnitas do problema, t_1 , t_2 e u_3 :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}^{11} & \bar{S}^{12} & \bar{S}^{13} \\ \bar{S}^{21} & \bar{S}^{22} & \bar{S}^{23} \\ \bar{G}^{31} & \bar{G}^{32} & \bar{G}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

De forma reduzida, a Equação 4.42 fica:

$$[\mathcal{Q}_{COMP}] \vec{q} = \vec{b}_{COMP} \quad (4.43)$$

em que:

\mathbf{b}_{COMP} : vetor envolvendo os valores desconhecidos de deslocamento e força de superfície;

$[\mathbf{Q}_{\text{COMP}}]$: matriz complementar de $[\mathbf{Q}]$, cujas linhas também são dispostas de acordo com as condições de contorno, mas em combinação oposta de $[\mathbf{Q}]$.

A técnica ilustrada neste exemplo reduzido também pode ser aplicada para resolver qualquer problema tridimensional e com três graus de liberdade por nó. A Figura 4.4 ilustra o procedimento geral da técnica.

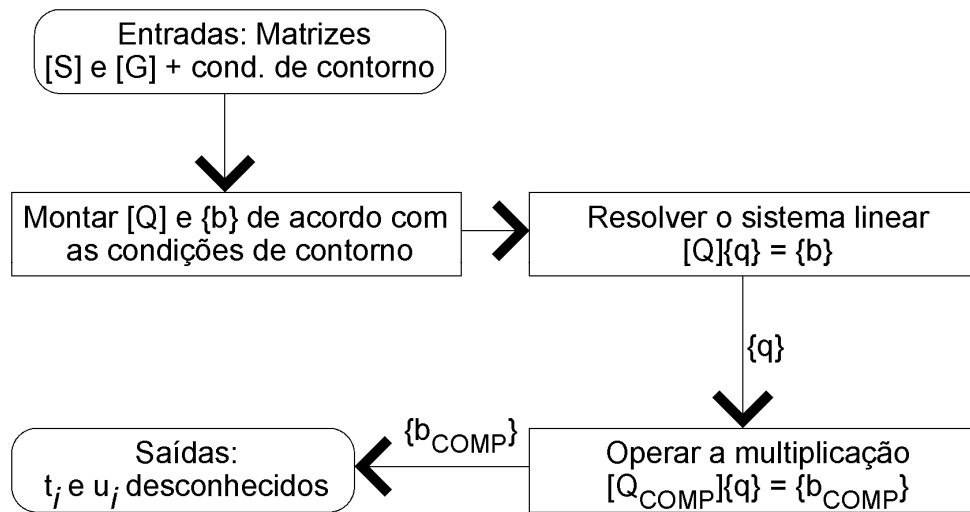


Figura 4.4: Fluxograma da técnica de solução das Equações 4.14 e 4.33.

Este procedimento substitui a inversão das matrizes de influência pela solução de um sistema linear e uma multiplicação matricial.

4.5 Implementação

A formulação do MEC-I descrita neste capítulo foi implementada computacionalmente usando a linguagem Fortran. A linguagem foi escolhida porque é a utilizada por Adolph para implementar sua solução do estado auxiliar. Este fator não é proibitivo: outras linguagens poderiam ser escolhidas para codificar o MEC-I, mesmo com a solução de Adolph escrita em Fortran. Escolheu-se Fortran também por ser uma linguagem de alto nível, bem documentada, de alto desempenho e multi-plataforma.

O programa foi escrito sob o paradigma procedural, estrutura 90/95, com formato fixo e em forma de subrotinas, totalizando 21 subrotinas, um programa principal e um módulo relacionados ao MEC-I, que se somam às 348 subrotinas escritas por Adolph e uma subrotina para solução de sistemas lineares.

No código atual, a interação com o usuário se resume ao fornecimento de quatro arquivos de entrada contendo as propriedades do material, a geometria do problema, a relação de incidência entre os elementos e as condições de contorno aplicadas. O **Apêndice** mostra um fluxograma de como o algoritmo opera sobre estes dados até obter a resposta de deslocamentos e força de superfície.

Além do código escrito em Fortran, diversos programas auxiliares foram escritos em Python. Trata-se de uma linguagem open-source de propósito geral, interpretada, multi-plataforma e de altíssimo nível, que por sua sintaxe clara permite desenvolver em pouquíssimo tempo diversos programas auxiliares necessários neste tipo de trabalho computacional. Alguns exemplos da utilidade de Python neste trabalho:

- Os arquivos de saída dos programas de Adolph, Romanini e outros têm formatos completamente diferentes. Com Python, foi possível ler todos eles adequadamente e gerar gráficos comparativos rapidamente;
- Durante a validação, é necessário criar dezenas de pastas com arquivos de entrada parecidos, porém diferentes. Esse processo manual que levaria horas pôde ser feito em Python automaticamente;
- Frequentemente, é mais rápido escrever um programa em Python para gerar a malha de elementos de contorno para ser usada no processo de validação do que escrever a malha manualmente ou ajustar a malha gerada por outros softwares comerciais;
- No sistema operacional Linux, a compilação de programas em Fortran exige a compilação de cada subrotina individualmente em seu respectivo objeto. Ao final, cada um desses objetos deve ser incluído no comando de compilação. Para um programa como este, que tem 371 subrotinas, esse processo manual pode levar em torno de uma hora para ser feito sem erros, e um programa escrito em Python faz esta tarefa instantaneamente sem interferência do usuário, lendo automaticamente as subrotinas que devem ser compiladas. O **Apêndice** traz uma explicação sobre como fazer compilação de Fortran em Linux;

- Diversos outros pequenos programas foram feitos para geração de gráficos, solução de sistemas lineares, multiplicação de matrizes, etc.

Em resumo, embora sua característica de altíssimo nível faça de Python uma linguagem lenta demais para ser utilizada no cerne de um algoritmo do MEC-I, a linguagem se mostrou uma excelente ferramenta auxiliar.

Neste capítulo, estudou-se como as respostas de um estado auxiliar tridimensional qualquer são aplicadas para resolver um problema de engenharia. Esta formulação é muito geral, e também vale para o estado auxiliar viscoelastodinâmico descrito na **Seção 2.4**.

Mostrou-se também uma estratégia de solução das equações finais visando um bom desempenho computacional, e comentou-se que, de acordo com a tecnologia dos elementos empregados (contínuos, descontínuos), a formulação pode ser modificada para que a superposição dos termos de influência e a descrição das condições de contorno sejam feitas no sistema de coordenadas global.

Resumiu-se a implementação deste equacionamento em Fortran, com base no estado viscoelastodinâmico, destacando-se o uso de Python como ferramenta auxiliar.

Neste momento, o programa final é posto à prova ao resolver problemas elementares.

Capítulo 5

Resultados e Discussão

O objeto executável final gerado pela compilação do programa, IMECC, é utilizado para resolver alguns problemas físicos, estáticos e dinâmicos.

Dada a natureza dos problemas estudados, dois critérios físicos devem ser satisfeitos a priori: a simetria e o equilíbrio, analisados a seguir.

5.1 Simetria

Seja um cubo de aresta $2A = 1$, discretizado por meio de seis elementos quadrados, tais que (Figura 5.1):

- Elemento 1: definido pelos vértices 6, 2, 7 e 1, e paralelo ao elemento 2;
- Elemento 2: definido pelos vértices 3, 5, 4 e 8, e coincidente com o plano XY;
- Elemento 3: definido pelos vértices 3, 2, 6 e 5, paralelo ao elemento 4;
- Elemento 4: definido pelos vértices 4, 1, 7 e 8, e coincidente com o plano YZ;
- Elemento 5: definido pelos vértices 5, 6, 1 e 4, e coincidente com o plano XZ;
- Elemento 6: definido pelos vértices 7, 2, 3 e 8, e paralelo ao elemento 5.

Cada um destes elementos tem seu sistema local de coordenadas, mostrados na Figura 5.1.

Este problema pode ser visto como uma barra ou viga “encurtada”, em que o comprimento é reduzido para ser igual ao seu comprimento e altura.

Como tal, este cubo deve satisfazer as mesmas condições de simetria a que uma barra ou viga estão submetidas. Sejam as seguintes situações:

Situação 1

Aplica-se um carregamento qualquer na direção Z do elemento 6 (Z_6) enquanto se bloqueia o deslocamento na direção Z do elemento 5 (Z_5). Como resposta, pode haver deslocamentos nas direções $-X_1$, X_2 , $-Y_3$ e Y_4 porque o cubo está sendo encurtado, e no máximo em $-Z_1$, $-Z_2$, $-Z_3$ e $-Z_4$, com amplitudes iguais, pelo efeito de Poisson. Por outro lado, por simetria, não deve haver

deslocamentos, nem aparecimento de forças de superfície, nas direções Y_1 , Y_2 , X_3 e X_4 , ou mesmo X_6 e Y_6 , e X_5 e Y_5 .

Situação 2

Aplica-se um carregamento qualquer na direção Z de todos os elementos, isto é, simula-se um caso de dilatação volumétrica uniforme. Nenhuma outra direção de qualquer elemento deve apresentar, como resposta, deslocamentos nem forças de superfície em qualquer outra direção.

Situação 3

Aplica-se um carregamento qualquer nas direções Y_1 , $-X_3$, $-Y_2$ e X_4 , como se o cubo estivesse “girando” em torno de um eixo paralelo a Y_{GLOBAL} . Nesta situação, não devem surgir deslocamentos ou forças de superfície em X_1 , Y_3 , X_2 ou Y_4 , assim como em nenhuma das direções dos elementos 5 e 6.

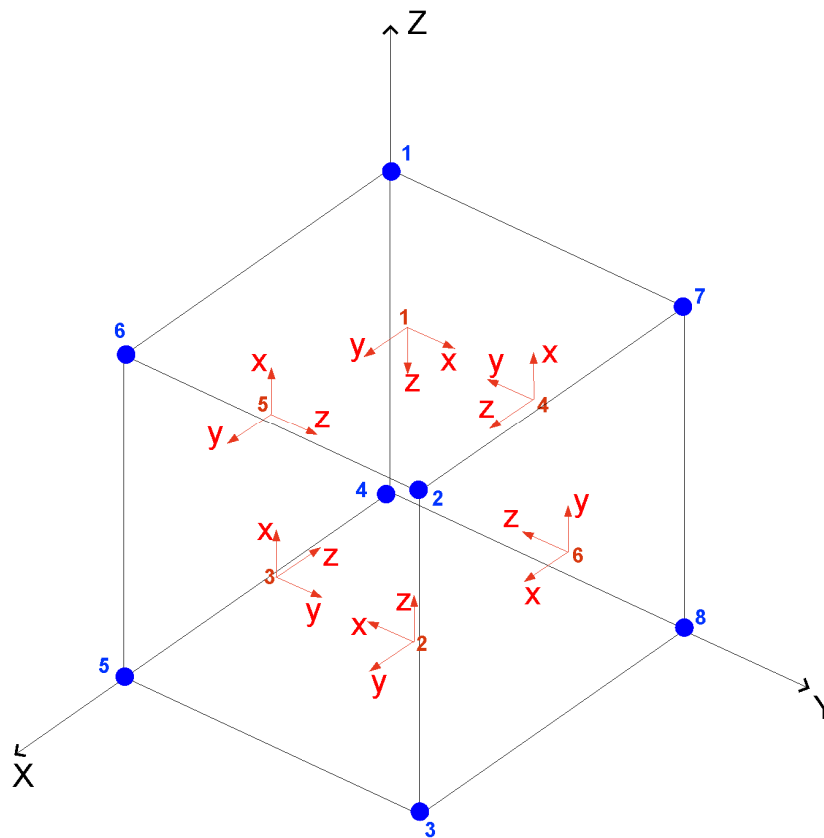


Figura 5.1: Cubo discretizado no contorno por seis elementos quadrados constantes.

Inicialmente, observou-se que o programa IMECC não satisfazia muitas destas condições de simetria. Um estudo minucioso revelou: a assimetria ocorria porque a técnica Tensões-D não era capaz calcular as componentes de tensão com a precisão necessária quando elas deveriam ser nulas (como na Figura 3.43). Foi necessário prever analiticamente a ocorrência destes zeros e instruir o código para assumir estes valores *a priori* quando isso acontecesse, e então se conseguiu que o programa satisfizesse o critério de simetria.

O **Apêndice** mostra a análise de quais tensões são nulas em quais planos e eixos coordenados.

5.2 Equilíbrio

Este último critério físico diz respeito à mecânica conservativa, e estabelece simplesmente que não deve haver forças externas resultantes nas análises.

Considere novamente a Figura 5.1, da qual se engasta o elemento 5. Ou seja, os deslocamentos do elemento são nulos em todas as direções.

Quando se traciona o elemento 6 na direção $-Z_6$ com um carregamento distribuído de intensidade F e frequência ω , a reação no engaste, na direção $-Z_5$, deve ser igual a $F + m u_{Z_6} \omega^2$, em que m é a massa do cubo e u_{Z_6} o deslocamento do elemento 6 na direção Z_6 .

Atualmente, o IMECC não é capaz de satisfazer este critério com perfeição. Ao calcular o caso acima, por exemplo, a reação no engaste ainda apresenta um desvio de 10% do valor correto. As investigações hoje se baseiam na solução de Adolph para o estado auxiliar, que possivelmente apresenta algum desvio grande demais para componentes de tensão ou deslocamento, ou mesmo sinais trocados para alguma dessas componentes.

5.3 Problemas dinâmicos

O primeiro problema que pode ser analisado e comparado com a bibliografia é o de uma barra, carregada estática e dinamicamente.

O problema em estudo aqui é ilustrado pela Figura 5.2, em que uma barra de largura e altura unitárias e comprimento sete vezes maior é engastada em uma extremidade enquanto carregada com carregamento unitário distribuído na outra.

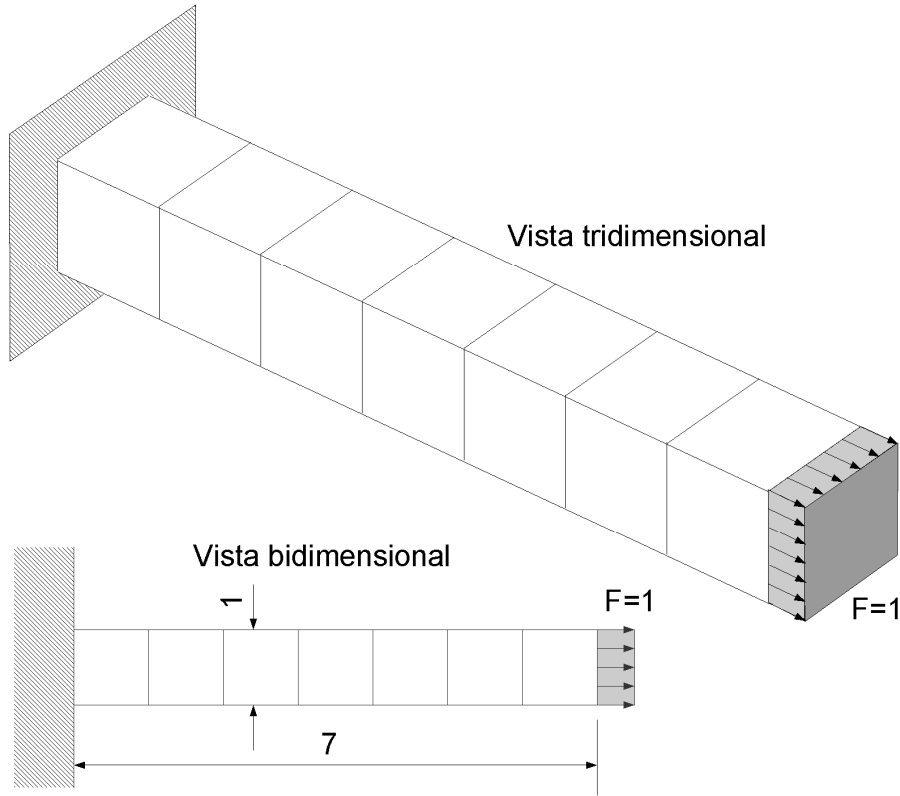


Figura 5.2: Barra usada para validação do IMECC.

A discretização é feita por trinta elementos quadrados de 1×1 m (Figura 5.3). Os graus de liberdade X_1 , Y_1 e Z_1 são bloqueados, enquanto se aplica força de superfície unitária em $-Z_{30}$.

Problemas como este são difíceis para esta implementação do estado auxiliar lidar. Isso porque, em relações como entre os elementos 8 e 28 (Figura 5.3), torna-se necessário calcular a resposta deste estado em uma situação em que X e Y são muito maiores que as larguras de carregamento A e B enquanto a coordenada Z é nula. Ocorre que nesta situação de $Z = 0$, as expressões que definem o estado auxiliar (por exemplo, Equação 2.16) assumem uma configuração em que o algoritmo “procedendo para infinito” utilizado por Adolph na implementação (Figura 2.8) torna-se ineficiente.

Por ora, contorna-se o problema fazendo com que todos os carregamentos fictícios não se apliquem exatamente sobre a face dos elementos, e sim com um pequeno afastamento ΔZ na direção de Z_{LOCAL} . Uma ilustração bidimensional desse afastamento pode ser vista na Figura 5.4. Dessa forma, assume-se uma formulação não-singular para o MEC-I como ilustrado pela Figura 1.13a.

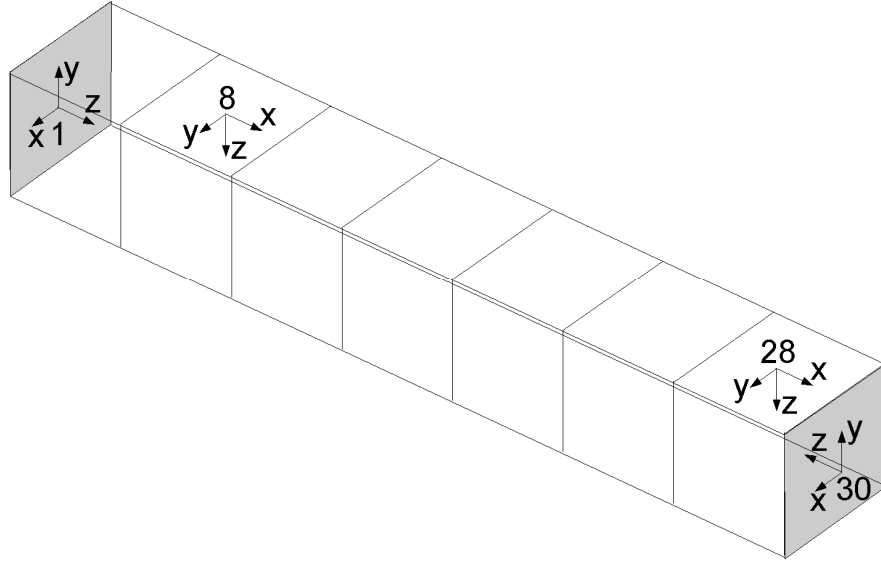


Figura 5.3: Discretização usada para calcular a barra, e sistemas locais de coordenadas.

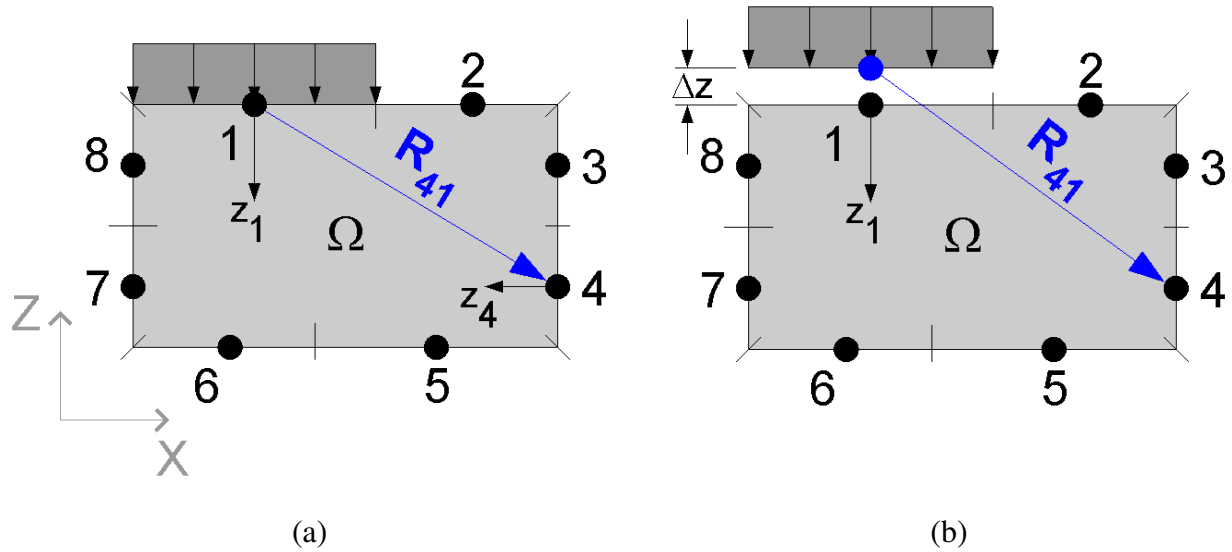


Figura 5.4: Exemplo bidimensional do afastamento ΔZ aplicado na direção de $-Z_{LOCAL}$.

A Figura 5.5 mostra a função de resposta em frequência, na qual se plota o módulo do deslocamento na extremidade livre da barra (deslocamento na direção $-Z_{30}$) contra a frequência $\omega \in [0.025, 2]$, para os dados da Tabela 5.1. Na FRF da Figura 5.6, a única diferença é $\Delta Z = 0,05\text{m}$. O efeito observado com o aumento de ΔZ é uma pequena diminuição na amplitude da FRF; a determinação das frequências naturais não é prejudicada. Os resultados são comparados com a análise por elementos finitos do software AnSys® e usando o MEC-Direto (Carrion et al, 2007).

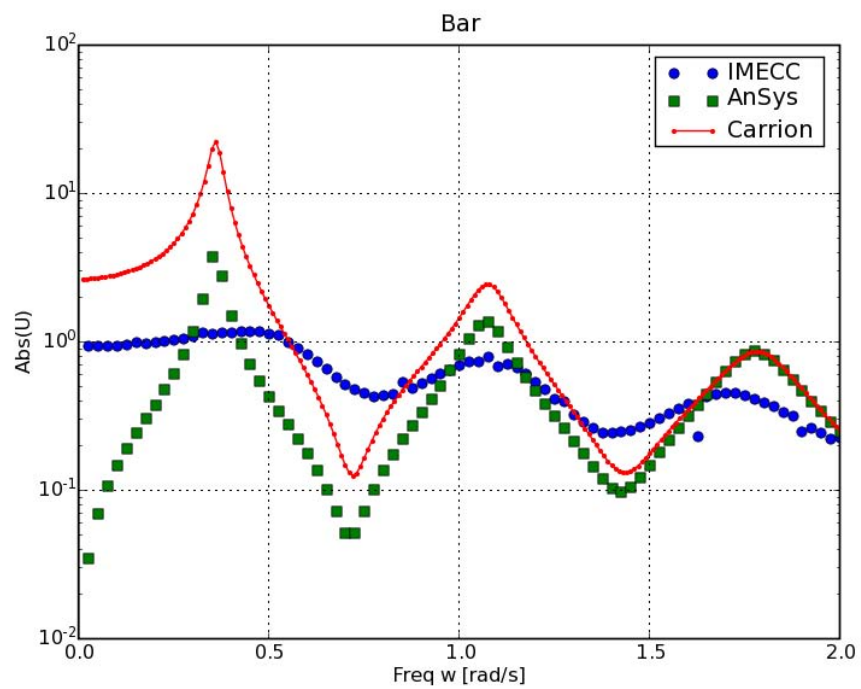


Figura 5.5: FRF da barra, com $\Delta Z = 0,02$ m.

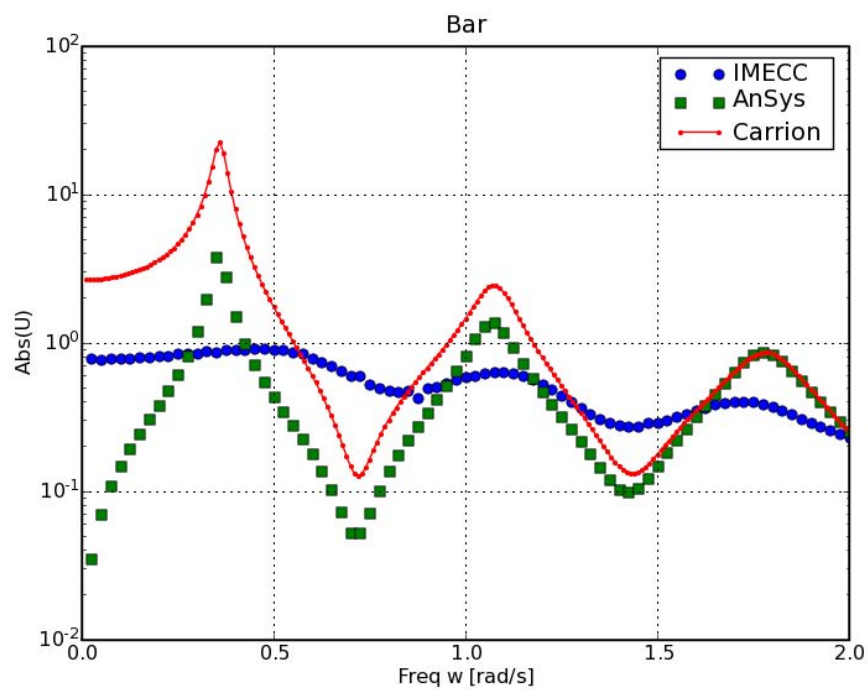


Figura 5.6: FRF da barra, com $\Delta Z = 0,05$ m.

Tabela 5.1: Dados utilizados para calcular as FRF das Figuras 5.5 e 5.6.

Parâmetro	Valor utilizado
Altura e largura da barra/viga	1 m
Comprimento da barra/viga	7 m
Fator de amortecimento η	0,05
Razão de Poisson ν	0,25
Constante de Lamé μ	1 N/m ²
Massa específica do meio ρ	1 kg/m ³
Afastamento ΔZ (Figura 5.5 e 5.8)	0,02 m
Afastamento ΔZ (Figura 5.6)	0,05 m
Erros de integração	10 ⁻⁶

Segundo Craig (2006), as n frequências naturais para uma barra unidimensional são dadas por:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)}{2L} \pi \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

em que L é o comprimento da barra unidimensional, E é o módulo de elasticidade transversal e o resultado ω_n refere-se à n ésima frequência natural da barra.

Embora seja o resultado para uma barra unidimensional, a Equação 5.1 permite estimar as frequências naturais para o sólido da Figura 5.2 quando ele se comporta como uma barra. Para os dados desse problema (Tabela 5.1), as três primeiras frequências naturais se aproximam dos resultados observados nas Figuras 5.5 e 5.6:

$$\omega_1 = 0,3548 \text{ rad/s};$$

$$\omega_2 = 1,0644 \text{ rad/s};$$

$$\omega_3 = 1,7740 \text{ rad/s};$$

Estuda-se ainda a função de resposta em frequência da viga mostrada na Figura 5.7, para os mesmos dados da Tabela 5.1. O resultado é comparado com a FRF de um sólido de mesmas propriedades e dimensões, calculada pelo software AnSys[®], e mostrado na Figura 5.8.

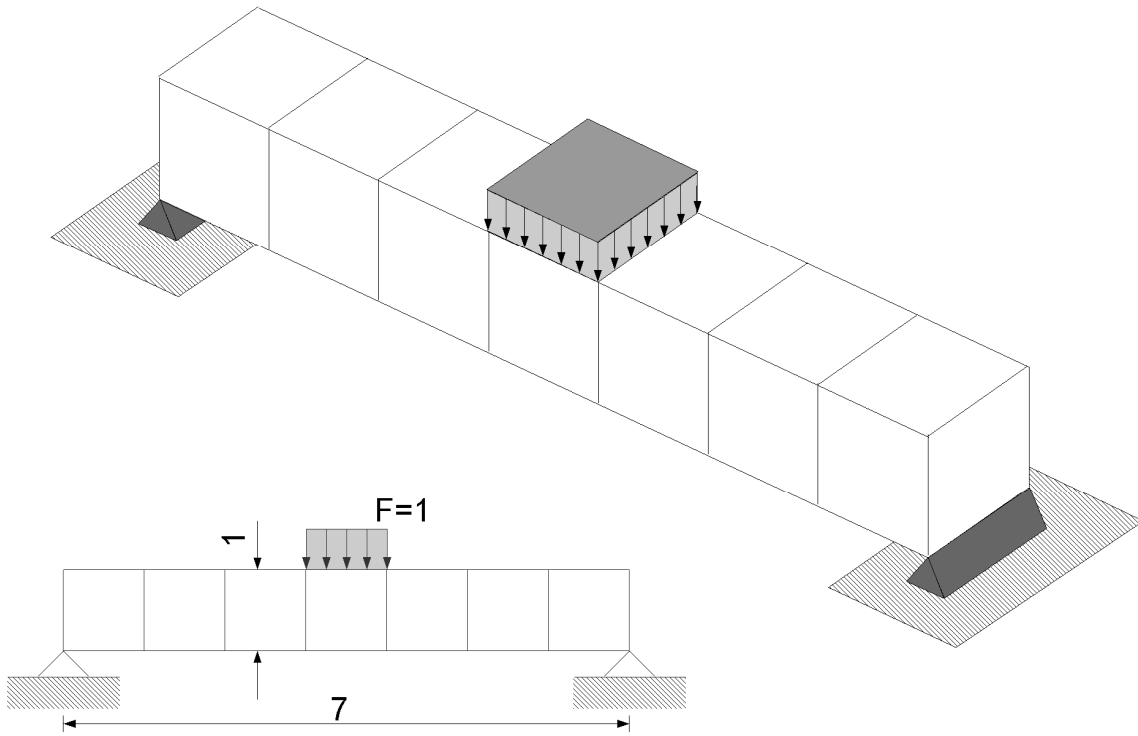


Figura 5.7: Viga usada para validação do IMECC.

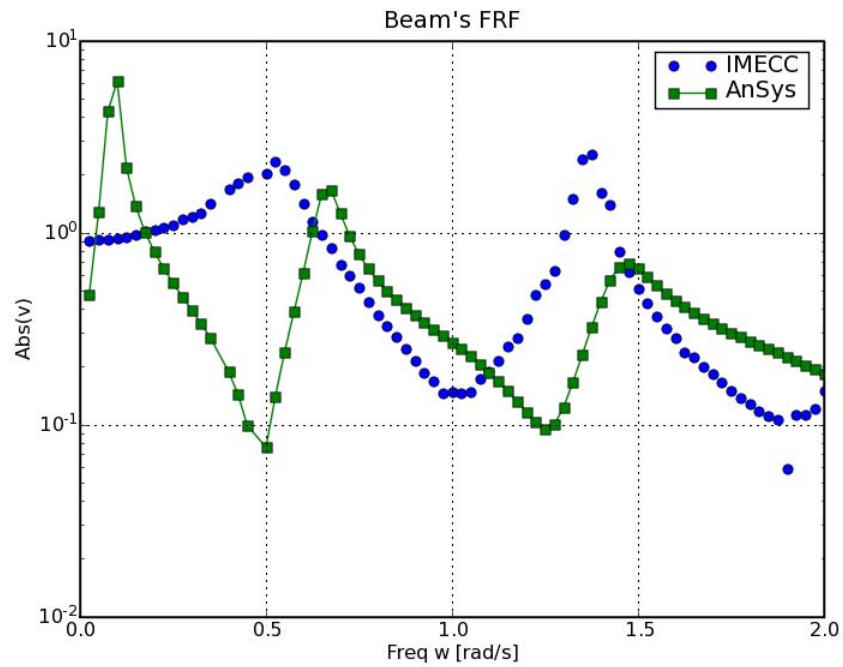


Figura 5.8: FRF da viga, com $\Delta Z = 0,02$ m.

Como relata a **Seção 1.7**, a estratégia de aplicar um afastamento ΔZ não é novidade no Método dos Elementos de Contorno. Ela é aplicada com sucesso na formulação não-singular do MEC, e a distância ΔZ é um parâmetro cujo valor deve ser ajustado de forma a obter a melhor correspondência física com o problema analisado.

Aqui, contudo, não é possível ajustar ΔZ para obter o melhor resultado, e sim ajustá-lo para que as integrações do estado auxiliar possam ao menos ser realizadas. Neste tipo de formulação por elementos constantes, em que todo o elemento é representado por seu nó central, este tipo de afastamento é ainda mais crítico porque, se for grande demais, pode até mesmo descaracterizar a geometria do problema.

Assim, o máximo que se consegue com o programa IMECC hoje, baseada na atual implementação de Adolph para o estado auxiliar, é *ilustrar* o comportamento mecânico dos problemas, e não gerar resultados confiáveis.

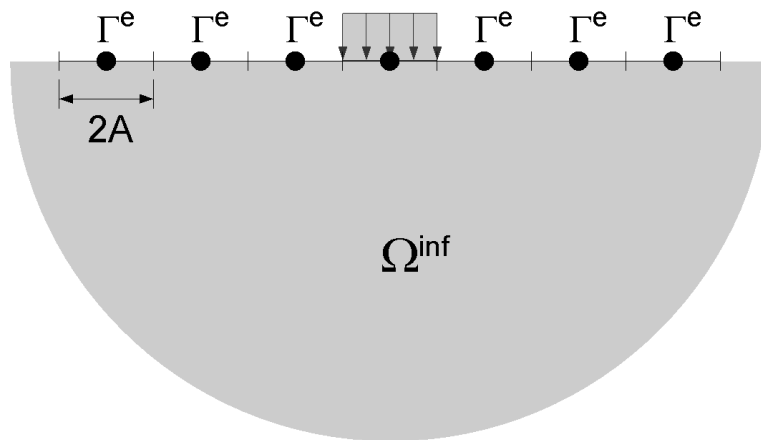


Figura 5.9: Vista bidimensional do semi-espaço, típico problema que pode ser tratado pelo MEC-I com discretização somente na fronteira.

O grande destaque do MEC-I em relação aos demais métodos, que é a capacidade de tratar domínios ilimitados, fica nublado por esta limitação, e esta talvez seja a pior consequência da técnica inadequada de integração.

Seja por exemplo o semi-espaço ilustrado pelas Figuras 5.9 e 5.10, que o MEC-I seria capaz de tratar por meio de discretização somente da fronteira.

Este é um dos problemas mais críticos para o método de integração utilizado no estado auxiliar. Em relações como entre os elementos 6 e 36 (Figura 5.10), é necessário calcular deslocamentos e tensões num caso em que X e Y são muito maiores que as larguras A e B , enquanto Z é nulo.

Foi feito um experimento para este caso de domínio ilimitado, com discretização de 121 elementos semelhante à da Figura 5.10, com $\eta = 0,01$, $\nu = 0,25$, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1 \text{ N/m}^2$. O afastamento ΔZ aplicado foi muito grande, 0,1 m, os erros de integração foram muito tolerantes, 10^{-4} , calculou-se apenas 20 valores de frequência diferentes, e mesmo assim o programa demorou quase três semanas para rodar, em máquinas Intel® Xeon quadcores 2 GHz, de 64 bits, 8 GB de memória RAM, sistema operacional CentOS (Linux).

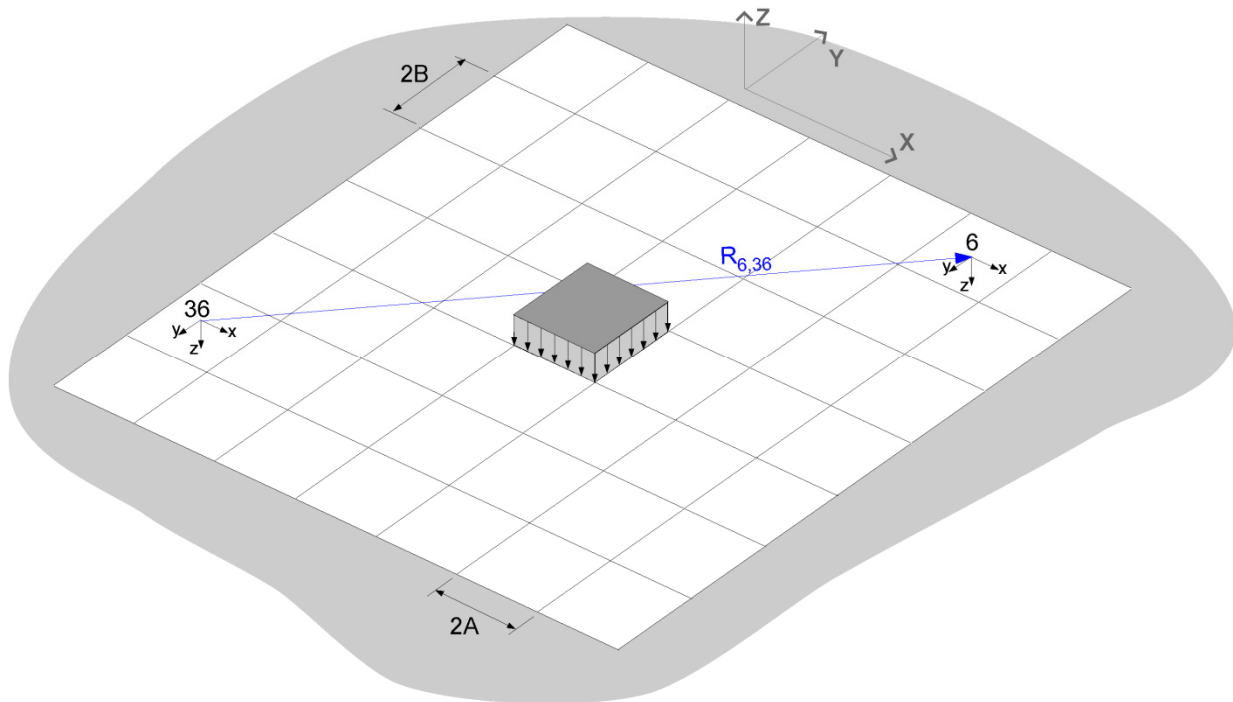


Figura 5.10: Vista tridimensional do domínio ilimitado mostrado na Figura 5.9.

O resultado obtido, por outro lado, está longe de representar a realidade. A Figura 5.11 compara o módulo do deslocamento vertical do elemento central da malha versus frequência de excitação com a resposta obtida por Carrion et al (2007) para o mesmo problema, por meio do MEC-Direto. Novamente, o resultado obtido com o IMECC somente ilustra o comportamento do problema: a amplitude do deslocamento decai com a frequência.

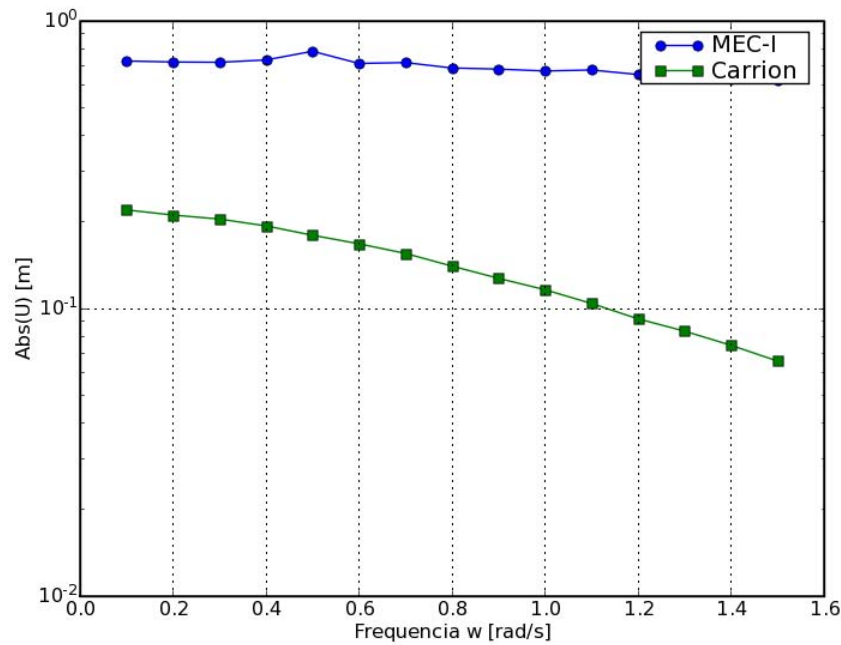


Figura 5.11: Módulo do deslocamento do elemento central, em termos da frequência ω .

Neste capítulo, foi analisado o desempenho do aplicativo IMECC frente ao desafio de resolver problemas reais de engenharia.

Estabeleceu-se dois critérios físicos – a simetria e o equilíbrio – que todo programa deste tipo deve satisfazer, e foi relatado que a princípio o IMECC não satisfazia nenhum dos dois. A simetria pôde ser satisfeita posteriormente, enquanto o equilíbrio é um problema com o qual se lida atualmente.

Encerra-se o capítulo com a resposta do IMECC para alguns problemas clássicos na bibliografia, e observa-se que os resultados unicamente ilustram a resposta de tais problemas; o programa ainda não pode gerar resultados confiáveis. A principal causa para isso é a estratégia de integração inadequada usada para implementar o estado auxiliar viscoelastodinâmico.

Capítulo 6

Conclusão e desenvolvimentos futuros

Como a validação de sua própria tese mostrou, a solução de Adolph (2006) realmente exprime o estado auxiliar correspondente ao operador de Navier para um meio infinito tridimensional viscoelastodinâmico. A implementação, cujas integrações são baseadas em uma combinação de um algoritmo adaptativo de quadratura de Gauss e algoritmo “procedendo para infinito”, funciona em várias situações, podendo os parâmetros físicos variar dentro de um intervalo considerável de valores.

O que não se previu, na escolha da estratégia de implementação, eram as situações peculiares a que o estado auxiliar se submete quando é utilizado para resolver um problema físico pelo MEC-Indireto. Destacam-se dois aspectos. O primeiro é o fato de que as coordenadas X e Y se anulam com frequência: basta que os pontos \mathbf{X}_j (ponto-fonte) e \mathbf{X}_i (ponto-campo) estejam alinhados. A Figura 6.1 mostra dois exemplos: como o elemento 1 é o ponto-fonte, X será nulo quando o estado auxiliar for calculado no elemento 9, e Y será nulo quando se calcular a influência sobre o elemento 3. O segundo aspecto, ainda pior, é que a coordenada Z também se anula eventualmente, como já discutido no **Capítulo 5**, e nesta circunstância o algoritmo “procedendo para infinito” deixa de funcionar.

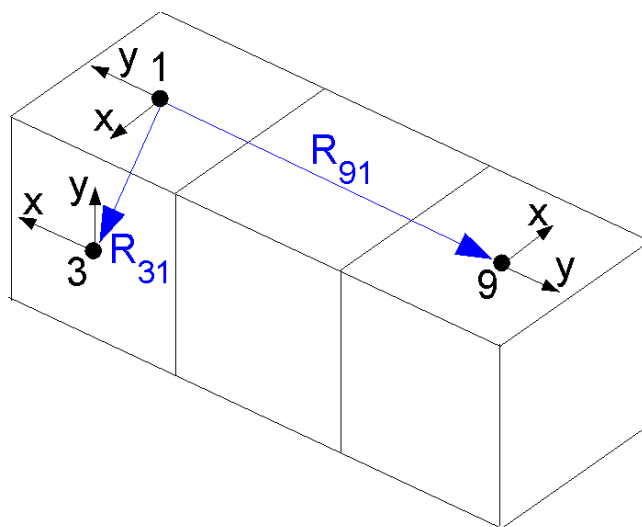


Figura 6.1: Exemplos de casos em que as coordenadas X e Y se anulam.

Indícios como o aspecto das FRFs do **Capítulo 5**, que embora não concordem completamente com a bibliografia, ilustram o comportamento esperado dos problemas físicos, mostram que a implementação do MEC-I está correta.

Vários esforços foram feitos neste trabalho atacando os pontos fracos da solução numérica do estado auxiliar, como Tensões-D (**Seção 3.3**), a abordagem não-singular do MEC-I (Figura 5.4) e a predição de tensões feita para corrigir a assimetria (**Seção 5.1** e **Apêndice**). Remediar os problemas de implementação dessa forma, além de consumir tempo demais, tem introduzido uma complexidade no algoritmo do MEC-I que não tinha sido observada nos trabalhos anteriores em que aplicações semelhantes foram feitas para o caso bidimensional (Thomazo, 2004).

Hoje, percebe-se que a melhor abordagem é repensar a forma de integrar numericamente as equações que definem o estado auxiliar, como as Equações 2.15 e 2.16.

Uma possível estratégia é pela tecnologia de Redes Neurais. Treinando uma rede neural para resolver integrais com as características das Equações 2.15 e 2.16 para um dado rol de parâmetros, pode-se determinar com muita eficiência o resultado das mesmas integrais para outro rol de parâmetros.

Quanto ao programa, pode-se torná-lo mais rápido reescrevendo-o em programação paralela, para ser executado simultaneamente por múltiplos processadores, e/ou usar a tecnologia de programação em Unidades Gráficas de Processamento de Propósito Geral (GP-GPUs).

Mesmo o desenvolvimento analítico desde a Equação de Navier até a solução do estado auxiliar pode ser melhorado em prol da generalidade. Tanto a área carregada (retangular) quando a forma da função de carregamento (constante) podem ser generalizadas e assim tornar o programa apto a tratar de um problema muito mais geral.

Uma lição que se tira deste trabalho é que há um preço alto a pagar por não ter que desenvolver um estado auxiliar correspondente a cada operador de cada problema. Este preço é a difícil integração numérica dos estados auxiliares, que exige técnicas especiais e alto desempenho computacional. Com a rápida evolução do aparato computacional que vem ocorrendo, tem-se que a formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno é uma área de conhecimento promissora, na qual se deve investir pelos próximos anos.

Capítulo 7

Referências

Adolph, Marco. *Síntese de Funções de Green e Estados Auxiliares Viscoelastodinâmicos em Meios Tridimensionais Ilimitados com Auxílio de Transformada de Radon*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 2006, 297 p. Tese (Doutorado).

Adolph M., Mesquita E., Carvalho E. R., Romanini E. Numerically evaluated displacement and stress solutions for a 3D viscoelastic half space subjected to a vertical distributed surface stress loading using the Radon and Fourier transforms. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.23, pp. 787-804, 2007.

Aliabadi, M. H. *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures*. Vol. 2, John Wiley & Sons, 2002, 598p.

Arfken, G. B., Weber, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Orlando: Academic Press, 2005, 1200p.

Barros, P. L. A., Mesquita, E. Elastodynamic Green's functions for orthotropic plane strain continua with inclined axis of symmetry. *International Journal for Solids and Structures*, vol.36, pp. 4767-4788, 1999.

Barros, P. L. A., Barros, E., Mesquita, E. On the dynamic interaction and cross-interaction of 2D rigid structures with orthotropic elastic media possessing general principal axes orientation. *Meccanica*, vol.36, n.4, pp. 367-378, 2001.

Barros, P. L. A., Mesquita, E. Singular-ended spline interpolation for 2D boundary element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n.5, February, pp. 951-967, 2000.

- Barros, P. L. A., Mesquita, E. A Non-Singular Version of the Indirect Boundary Element Method Applied to the Stationary Response of Elastic Domains. Proceedings 13th ASCE Engineering Mechanics Conference, 13-16 June, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA, 6 pp. (Proc. in CD-ROM), 1999b.
- Betti, R., Mesquita, E., Romanini, E. Dynamic Interaction between embedded foundations by the substructure deletion method. In: Y. K. Lin, T. C. Su (eds) Proceedings of the 11 ASCE Engineering Mechanics Specialty Conference, Flórida, May 19-22, vol.1, pp.314-317, 1996.
- Brebbia, C. A. *The Boundary Element Method*. London: Pentech Press, 1978.
- Brebbia C.A., Dominguez J. *Boundary Elements - An Introductory Course*. Southampton: Computational Mechanics., 2nd Edition, 1992.
- Brebbia, C. A., Partridge, P. W. *Boundary Elements in Fluid Dynamics*. Southampton: WIT Press, 1992, 261p.
- Carrion, R., Mesquita, E., Sousa, A. D. O., Dynamic boundary element analysis of an unbounded soil interacting with rotor-foundation system. In: Antonio Rodrigues-Ferran et alli (editors) Proceedings of CMNE-CILAMCE 2007 Métodos Computacionais em Engenharia, Cidade do Porto, Portugal, 13 a15 de Junho 2007, pp. 01-21 (proceedings in CD-ROM), 2007.
- Cenapad. *Introdução ao Fortran 90*. Campinas: Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho, S. d., 62p (Apostila do curso homônimo).
- Christensen, R. M. *Theory of Viscoelasticity*. New York: Dover Publications, 2003, 378p.
- Courant, R., Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: Wiley-Interscience, 1989, 560p.
- Craig, R. R, Kurdila, Andrew. *Fundamentals of Structural Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 2006, 744p.

- Crouch S. L., Starfield A. M. *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. London: Allen & Unwin, 1983, 322p.
- Cruse, T. A., Rizzo, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. *I. I. J. Math Analysis*, vol. 22, pp. 244-259, 1968.
- Dominguez, J. *Boundary Elements in Dynamics*. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1993, 707p.
- Dravinski, M., Niu, Y. Three-dimensional time-harmonic Green's functions for a triclinic full-space using a symbolic computation system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.53, pp. 455-472, 2002.
- Gaul, L., Schanz, M., Fiedler, C. Viscoelastic formulations of BEM in time and frequency domain. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, vol.10, pp. 137-141, 1992.
- Gaul, L., Schanz, M. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains. *Computational Mechanics*, vol.179, pp. 111-123, 1999.
- Gaul, L., Schanz, M. Boundary element calculation of transient response of viscoelastic solids based on inverse transformation. *Meccanica*, vol.32, pp. 171-178, 1997.
- Gazetas, G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 2, pp. 2-42, 1983.
- Givolli, D. *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*. New York: Elsevier Publishing Company, 1992, 300p.
- Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T. J., Rizzo, F. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol.59, pp. 604-614, 1992.

Kane, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994.

Krishnasamy, G., Rizzo, F. J., Rudolph, T. J. Hypersingular Boundary Integral Equations: Their Occurrence, Interpretation, Regularization and Computation. In: P. K. Banerjee, S. Kobayashi (Eds.) *Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods. Development in Boundary Element Methods - 7*. Elsevier Science Publishers, Exxex, UK. Ch.6, pp.207-252, 1992.

Marques de Barros, Renato. *Funções de Green e de Influência para Meios Visco-elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Frequência*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 2001. Tese (Doutorado).

Marques de Barros, R., Mesquita, E. Elementos infinitos unidimensionais e o modelamento da condição de radiação em sistemas elastodinâmicos. Anais do XII COBEM - CIDIM 95, 12-15 dezembro 1995, Belo Horizonte, 04 Páginas (Anais publicados em CD-ROM, sem numeração de páginas), 1995.

Mesquita, Euclides. *Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraum. (Sobre a Interação Dinâmica de Fundações sobre o Semi-espaço Viscoelástico)*. Hannover: Institut für Mechanik, Universität Hannover, 1989. Tese (Doutorado).

Mesquita, E., Adolph, M.; Barros, P. L. A.; Romanini, E. Transient Green and Influence Functions For Plane Strain Visco-Elastic Half-Spaces. Proceedings of the IABEM SYMPOSIUM 2002, The University of Texas at Austin, Texas, May 28-31, 2002, pp.1-12, 2002.

Mesquita, E., Adolph, M., Barros, P. L. A., Romanini, E. Transient Green's Functions and Distributed Load Solutions for Plane Strain, Transversely Isotropic Viscoelastic Layers. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol.1, pp-75-100, 2003.

- Mesquita, E., Carvalho, E. R., Arruda, J. R. F., Pavanello, R., Acoustic Eigenvalue Analysis by Boundary Element Methods, Chapter 7, Boundary Element Acoustics- Fundamentals and Computer Codes , T. W. Wu. (ed.), WIT Press, Southampton, 2000, pp.117-158, ISBN 1-85312-570-9.
- Mesquita, E., Pavanello, R. Numerical Methods for the Dynamics of Unbounded Domains. Computational and Applied Mathematics vol 24., N.1, pp. 01-26, 2005.
- Mesquita, E., Romanini, E. Green's function approach versus direct boundary element scheme to model the dynamic interaction of foundations resting on a viscoelastic layer over a bedrock. Proc. 14BEM (International Conference on Boundary Element Methods), 3-6 november, Seville, Spain, vol.2, pp. 107-121, 1992.
- Mesquita, E., Romanini, E., Pontes Jr., B. R. A. Boundary Element implementation of the substructure deletion method. 17th BEM (17 Boundary Element International Conference), Madison, USA, July 17-19, pp. 375-386, 1995.
- Richart, F. E., Hall, J. R., Woods, R. D. *Vibrations of soils and foundations*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1970.
- Romanini, Edivaldo. *Síntese de Funções de Influência e Green para o Tratamento da Interação Dinâmica Solo-estrutura através de Equações Integrais de Contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1995. Tese (Doutorado).
- Romanini, E. *Síntese dos Estados Auxiliares Viscoelastodinâmicos em Meios Tridimensionais Ilimitados com Auxílio de Transformada de Fourier*. (Provável título, ainda não definido) Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 2008, ainda não publicado.
- Romanini, E., Carvalho, E. R., Mesquita, E., Betti, R. Dynamic structure-soil-structure interaction by the substructure deletion method. In: C. A. Brebbia, J. B. Martins, M. H. Aliabadi, N. Haie (eds.), Proceedings of the BEM 18 - 18th World Conference on the Boundary Element Method. Braga, Portugal, 24-26 September, pp.465-472, 1996.

- Schanz, M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach (Lecture Notes in Applied Mechanics)*. New York: Springer-Verlag, 2001, 170p.
- Schanz, M., Antes, H. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Computational Mechanics*, vol.20(5), pp. 452-459, 1997.
- Schanz, M. A Boundary element formulation in time domain for viscoelastic solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol.15, pp. 799-809, 1999.
- Sommerfeld, A. *Partial Differential Equations*. New York: Academic Press, 1957.
- Thomazo, Luís Henrique. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno Indireto para Resposta Transiente de Meios Visco-elásticos*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 2004, 125 p. Dissertação (Mestrado).
- Wang, C. D., Liao, J. J. Elastic solutions of displacement for a transversely isotropic half spacesubjected to three dimensional buried parabolic rectangular loads. *International journal for Solids and Structures*, vol. 39, pp. 4805-4824, 2002.
- Wang, C. D., Wang, W. J., Lee, T. C. Three-dimensional buried non-linearly varying triangular loads on a transversely Isotropic half space. *International Journal for Solids and Structures*, vol. 41, pp. 3013-3030, 2004.
- Wrobel L.C. *The Boundary Element Method*. New York: John Wiley & Sons, 2002, 468p.
- Wutzow, Wilson Wesley. *Formulação do método dos elementos de contorno para materiais porosos: uma abordagem prática para o estudo de domínios enrijecidos*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2003. Tese (Doutorado).

Apêndice

A.1 Análise de tensões

Como foi dito na **Seção 5.1**, os erros de cálculo do mecanismo Tensões-D são especialmente indesejáveis quando o resultado deveria ser nulo para algumas componentes de tensão. Tensões nulas são responsáveis por cancelar elementos na solução dos sistemas lineares, e se não cumprirem este papel, surgem assimetrias nos problemas físicos.

Foi necessário estudar analiticamente as componentes de tensão para vários planos e eixos coordenados a fim de prever quando elas se anulam, e instruir o programa para assumir estes valores *a priori*.

Previendo tensões fora da área carregada

Embora a solução de Kelvin 3D (Equação 2.3) não seja capaz de representar singularidades e descontinuidades por sua característica de carregamento concentrado, ela é um bom parâmetro para prever tensões fora da área carregada, isto é, quando $|X| > A$ e $|Y| > B$.

$$\sigma_{ijk} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[\delta_{ij} \frac{x_k}{\rho} - \delta_{jk} \frac{x_i}{\rho} - \delta_{ki} \frac{x_j}{\rho} - \frac{3}{1-2\nu} \frac{x_i x_j x_k}{\rho^3} \right] \quad (2.3)$$

Respeitando esta restrição, tem-se as previsões de tensão mostradas pelas Tabelas A.2.1 a A.2.3.

Tabela A.2.1: Tensões devido ao carregamento em $k = X$.

Componente	É nula quando:
$\sigma_{xxx} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-X - \frac{3}{1-2\nu} \left(\frac{X}{\rho} \right)^3 \right]$	$X = 0$.
$\sigma_{xyx} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Y - \frac{3}{1-2\nu} \frac{X^2 Y}{\rho^3} \right]$	$Y = 0$.
$\sigma_{xzx} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Z - \frac{3}{1-2\nu} \frac{X^2 Z}{\rho^3} \right]$	$Z = 0$.
$\sigma_{yyx} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-X - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Y^2 X}{\rho^3} \right]$	$X = 0$.
$\sigma_{yzx} = -\frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{XYZ}{\rho^5}$	$X = 0$, ou $Y = 0$, ou $Z = 0$.
$\sigma_{zzx} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-X - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Z^2 X}{\rho^3} \right]$	$X = 0$.

Tabela A.2.2: Tensões devido ao carregamento em $k = Y$.

Componente	É nula quando:
$\sigma_{xxy} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Y - \frac{3}{1-2\nu} \frac{X^2 Y}{\rho^3} \right]$	$Y = 0$.
$\sigma_{xyy} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-X - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Y^2 X}{\rho^3} \right]$	$X = 0$.
$\sigma_{xzy} = -\frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{XYZ}{\rho^5}$	$X = 0$, ou $Y = 0$, ou $Z = 0$.
$\sigma_{yyy} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Y - \frac{3}{1-2\nu} \left(\frac{Y}{\rho} \right)^3 \right]$	$Y = 0$.
$\sigma_{yzy} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Z - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Y^2 Z}{\rho^3} \right]$	$Z = 0$.
$\sigma_{zzy} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Y - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Z^2 Y}{\rho^3} \right]$	$Y = 0$.

Tabela A.2.3: Tensões devido ao carregamento em $k = Z$.

Componente	É nula quando:
$\sigma_{xxz} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Z - \frac{3}{1-2\nu} \frac{X^2 Z}{\rho^3} \right]$	$Z = 0$.
$\sigma_{xyz} = -\frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{XYZ}{\rho^5}$	$X = 0$, ou $Y = 0$, ou $Z = 0$.
$\sigma_{xzz} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-X - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Z^2 X}{\rho^3} \right]$	$X = 0$.
$\sigma_{yyz} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Z - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Y^2 Z}{\rho^3} \right]$	$Z = 0$.
$\sigma_{yzz} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Y - \frac{3}{1-2\nu} \frac{Z^2 Y}{\rho^3} \right]$	$Y = 0$.
$\sigma_{zzz} = \frac{P[1-2\nu]}{8\pi(1-\nu)} \rho^{-2} \left[-Z - \frac{3}{1-2\nu} \left(\frac{Z}{\rho} \right)^3 \right]$	$Z = 0$.

Em resumo, em todo o plano $X = 0$, $|Y| > B$, tem-se:

$$\sigma_{ijX} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{XYX} & \sigma_{XZX} \\ \sigma_{YXX} & 0 & 0 \\ \sigma_{ZXX} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_{ijY} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXY} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{YYY} & \sigma_{YZY} \\ 0 & \sigma_{ZYY} & \sigma_{ZZY} \end{bmatrix} e \sigma_{ijZ} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXZ} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{YYZ} & \sigma_{YZZ} \\ 0 & \sigma_{ZYZ} & \sigma_{ZZZ} \end{bmatrix}.$$

Em todo o plano $Y = 0$, $|X| > A$, tem-se:

$$\sigma_{ijX} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXX} & 0 & \sigma_{XZX} \\ 0 & \sigma_{YYX} & 0 \\ \sigma_{ZXX} & 0 & \sigma_{ZZX} \end{bmatrix}, \sigma_{ijY} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{XYX} & 0 \\ \sigma_{YXY} & 0 & \sigma_{YZY} \\ 0 & \sigma_{ZYY} & 0 \end{bmatrix} e \sigma_{ijZ} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXZ} & 0 & \sigma_{XZZ} \\ 0 & \sigma_{YYZ} & 0 \\ \sigma_{ZXZ} & 0 & \sigma_{ZZZ} \end{bmatrix}$$

Em todo o plano $Z = 0$, $|X| > A$ e $|Y| > B$, tem-se:

$$\sigma_{ijX} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXX} & \sigma_{XYX} & 0 \\ \sigma_{YXX} & \sigma_{YYX} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ZZX} \end{bmatrix}, \sigma_{ijY} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXY} & \sigma_{XYX} & 0 \\ \sigma_{YXY} & \sigma_{YYY} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ZZY} \end{bmatrix} e \sigma_{ijZ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{XZZ} \\ 0 & 0 & \sigma_{YZZ} \\ \sigma_{ZXZ} & \sigma_{ZYZ} & 0 \end{bmatrix}$$

Prevendo tensões no eixo Z

Conforme mostra a solução de Kelvin 3D, as componentes σ_{ijk} serão nulas em qualquer dos planos coordenados, sempre que $i \neq j \neq k \neq i$. De acordo com a solução de Crouch e Starfield (Equação 2.5), tem-se ainda que as componentes σ_{XXX} , σ_{ZZX} , σ_{YYY} , σ_{ZZY} , σ_{XZZ} e σ_{YZZ} também são nulas neste eixo. A equação constitutiva (Equação 3.8) ajuda a prever mais duas componentes:

$$\sigma_{XYX} = 2\mu \varepsilon_{XYX} = 2\mu (u_{XX,Y} + u_{YX,X})$$

Quando se aplica uma carga na direção de X, o deslocamento u_{XX} é uma função par ao longo do eixo Y, de forma que a derivada $u_{XX,Y}$ é nula. Por compatibilidade cinemática do espaço completo, tem-se ainda que a componente u_{YX} é nula não só no ponto $X = 0$, mas em todo o eixo X, de forma que a derivada $u_{YX,X}$ também é nula. Assim, $\sigma_{XYX} = 0$ no eixo Z. De forma análoga, a componente $\sigma_{XYY} = 2\mu \varepsilon_{XYY} = 2\mu (u_{XY,Y} + u_{YY,X})$ também é nula neste eixo. Assim, em todo o eixo Z, vale:

$$\sigma_{ijX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{XZX} \\ 0 & \sigma_{YYX} & 0 \\ \sigma_{ZXX} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_{ijY} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXY} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{YZY} \\ 0 & \sigma_{ZYY} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_{ijZ} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXZ} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{YYZ} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ZZZ} \end{bmatrix}.$$

Prevendo tensões na origem

Este é um caso primordial na predição de tensões; esta situação ocorre em qualquer problema analisado pelo MEC, sempre que o ponto-fonte é também o ponto-campo.

A origem é simplesmente um caso particular do eixo Z calculado acima, na situação em que Z também é nulo. Por simetria e compatibilidade cinemática, na origem observa-se que as componentes σ_{YYX} e σ_{XXY} também são nulas. Além disso, o *valor* da maioria das componentes restantes decorre das condições de contorno do problema (Adolph, 2006), de forma que na origem tem-se:

$$\sigma_{ijX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ m/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{Z \rightarrow 0^\pm}, \sigma_{ijY} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \\ 0 & m/2 & 0 \end{bmatrix}_{Z \rightarrow 0^\pm} \text{ e } \sigma_{ijZ} = \begin{bmatrix} \sigma_{XXZ} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{YYZ} & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix}_{Z \rightarrow 0^\pm}$$

A.2 Fluxograma do código

A implementação do IMECC pode ser resumida pelo seguinte fluxograma:

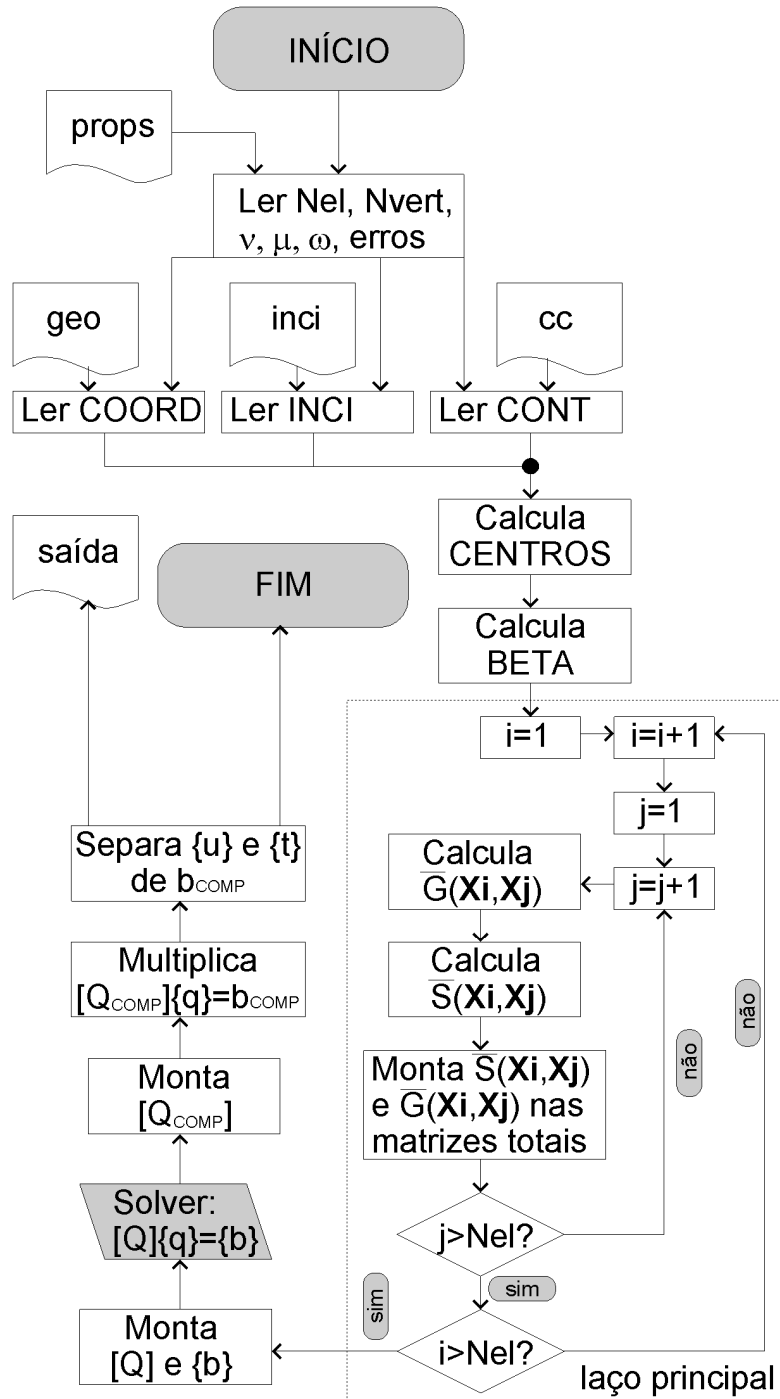


Figura A.1: Fluxograma do programa IMECC.

A.3 Compilação e execução em Linux

A compilação para Linux de programas escritos em Fortran na forma de subrotinas segue dois passos: compila-se todas as subrotinas individualmente em seus respectivos objetos de extensão *.o*, e compila-se o programa principal incluindo-se na sentença todos estes objetos.

Considere por exemplo um programa no qual o arquivo principal chama-se *main.for*, contendo duas subrotinas *sbr1.for* e *sbr2.for*. A compilação usando o compilador *gfortran* ou similares seria:

<code>gfortran -c sbr1.for</code>	Será criado um objeto sbr1.o
<code>gfortran -c sbr2.for</code>	Será criado um objeto sbr2.o
<code>gfortran main.for sbr1.o sbr2.o -o prog1</code>	Será criado um executável prog1

O parâmetro `-o` deve preceder o nome do executável que o programa final deverá ter, e o parâmetro `-c` indica que este passo de compilação não deve gerar um executável (Cenapad, S. d.). O processo é o mesmo para programas de extensão *.for* e *.f*.

Se o programa tiver muitas subrotinas, esse processo todo pode ser demoradíssimo. Para evitar este trabalho, pode-se usar o seguinte curtíssimo algoritmo em Python, que identifica todas as subrotinas presentes no diretório atual e compila todas elas, juntando os objetos finais para compilar o programa principal. Para implementar este código, pode-se digitar `python` na linha de comando do Linux que o interpretador da linguagem Python será aberto (qualquer distribuição Linux traz Python instalada).

```
import os
a = os.listdir('./')
rotinas = ' '
for i in a:
    →if i[-3:].upper()=='FOR' and i != 'programa_principal.for' :
    →→os.system('gfortran -c %s' %i)
    →→rotinas = rotinas + ' ' + i.replace('.for','.o')

os.system("gfortran programa_principal.for %s -o executa" %rotinas)
```


Deve-se substituir a sentença `programa_principal.for` pelo nome do programa principal, `executa` pelo nome desejado para o executável final e os termos *.for* por *.f* se o programa tiver esta última extensão. O símbolo \rightarrow indica que a tecla TAB deve ser pressionada uma vez neste ponto para endentar o código.

Ao final, o programa pode ser executado por `address/executa`, em que `executa` é o nome do executável, e `address` seu endereço no sistema de diretórios. Se o diretório atual é onde se encontra o executável e os arquivos de entrada também estão lá, pode-se simplesmente ordenar:

```
./executa
```

O resultado da execução do programa aparecerá na tela, com a vantagem de que o usuário pode acompanhar seu desenrolar, e com a desvantagem de que o usuário não poderá fazer *logoff*. Contudo, pode-se conseguir que o programa continue executando, mesmo trocando de usuários, com o comando *nohup*:

```
nohup ./executa
```

A desvantagem agora passa a ser que não se pode mais acompanhar a execução do programa na tela. Alguma linha de comando deve ser incluída dentro do algoritmo para que ele eventualmente imprima seu progresso em um arquivo de texto.

A.4 Dedução detalhada da Equação Integral de Helmholtz

De forma análoga ao que foi feito com o operador de Laplace, é possível escrever uma Equação Integral de Contorno para o operador homogêneo de Helmholtz (Kane, 1994), que é dado por $\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) = 0$ (Equação 1.12). Este operador também tem sua respectiva solução fundamental dada por $\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) + k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) = -\delta(\underline{x}, \underline{x}_0)$ (Equação 1.13).

Utilizando as Equações 1.12 e 1.13 em conjunto com o lado esquerdo da Segunda Identidade de Green (Equação 1.2) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \nabla^2 u(\underline{x}) - u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega + \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega - \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \\
 & \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \underbrace{\left[\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) \right]}_0 \right) d\Omega - \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega + \\
 & \int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega - \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega + \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \\
 & \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \underbrace{\left[\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) \right]}_0 \right) d\Omega - \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega + \\
 & \int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) \underbrace{\left[\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) + k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right]}_{-\delta(\underline{x} - \underline{x}_0)} \right) d\Omega + \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \\
 & \underbrace{- \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega + \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega}_{0} = \\
 & \int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) \underbrace{\left[\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) + k^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right]}_{-\delta(\underline{x} - \underline{x}_0)} \right) d\Omega = \int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) [-\delta(\underline{x} - \underline{x}_0)] \right) d\Omega = +u(\underline{x}_0)
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

Finalmente, chega-se a uma Equação Integral de Contorno para o operador de Helmholtz substituindo-se (A.1) no lado direito da Equação 1.2, como já visto na **Seção 1.2**:

$$-u(\underline{x}_0) = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x})
 \tag{1.15}$$

A.5 Dedução detalhada da Equação 1.17

O que ocorre quando se pretende formular uma Equação Integral de Contorno com uma solução fundamental que não corresponde ao operador em questão? Para ilustrar isso, considere o operador de Helmholtz (Equação 1.12), $\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) = 0$, e a solução fundamental do operador de Laplace (Equação 1.3): $\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) = -\delta(\underline{x}, \underline{x}_0)$.

Aplicando as Equações 1.3 e 1.12 na expressão da esquerda da Segunda Identidade de Green (Equação 1.2), chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \nabla^2 u(\underline{x}) - u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \\
 & \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \nabla^2 u(\underline{x}) + u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) - u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega - \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) \nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega = \\
 & \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \underbrace{\left[\nabla^2 u(\underline{x}) + k^2 u(\underline{x}) \right]}_0 - u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega - \int_{\Omega_b} \left(u(\underline{x}) \underbrace{\nabla^2 u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}_{-\delta(\underline{x}, \underline{x}_0)} \right) d\Omega = \\
 & \int_{\Omega_b} \left(-u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega_b} \left(-u(\underline{x}) \delta(\underline{x}, \underline{x}_0) \right) d\Omega}_{-u(\underline{x}_0)} = \\
 & u(\underline{x}_0) - \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) k^2 u(\underline{x}) \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Finalmente, chega-se a uma equação integral para o operador de Helmholtz baseado em uma solução fundamental alternativa substituindo-se (A.2) no lado direito da Equação 1.2:

$$u(\underline{x}_0) = \int_{\Gamma_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial n} - u(\underline{x}) \frac{\partial u^*(\underline{x}, \underline{x}_0)}{\partial n} \right) d\Gamma(\underline{x}) + k^2 \int_{\Omega_b} \left(u^*(\underline{x}, \underline{x}_0) u(\underline{x}) \right) d\Omega(\underline{x}) \tag{1.17}$$