

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**Estudo do Comportamento Estático e Dinâmico de  
um *Riser* Vertical com Bóia de Subsuperfície**

Autor: **David Champi Farfán**  
Orientador: **Celso Kazuyuki Morooka**

07/2005

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

## **Estudo do Comportamento Estático e Dinâmico de um *Riser* Vertical com Bóia de Subsuperfície**

Autor: **David Champi Farfán**  
Orientador: **Celso Kazuyuki Morooka**

Curso: Ciências e Engenharia de Petróleo

Dissertação de mestrado apresentada à Subcomissão de Pós-Graduação Interdisciplinar de Ciências e Engenharia de Petróleo (FEM e IG), como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo.

Campinas, 2005  
SP - Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Estudo do Comportamento Estático e Dinâmico de  
um *Riser* Vertical com Bóia de Subsuperfície**

Autor: **David Champi Farfán**

Orientador: **Celso K. Morooka**

Banca Examinadora:

---

**Prof. Dr. Celso K. Morooka, Presidente**  
**Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP**

---

**Dr. Ricardo Franciss**  
**CENPES / PETROBRAS**

---

**Prof. Dr. Sérgio Nascimento Bordalo**  
**Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP**

Campinas, 14 de julho de 2005

## Agradecimentos

Este trabalho não poderia ter sido concluído sem a ajuda de diversas pessoas às quais expresso meus agradecimentos:

Ao professor Celso K. Morooka, pela orientação e sugestões feitas para o trabalho, pela oportunidade de fazer o mestrado aqui no Brasil e pela amizade.

Aos meus pais Luis e Pascuala por sempre me apoiarem e acreditarem em mim, à minha irmã Dra. Ana seu esposo o Dr. Michel e sua família pelo apoio que sempre me deram aqui no Brasil e a Jorge meu irmão pelo incentivo moral.

Aos colegas do Grupo de Estudos de Sistemas Marítimos de Produção, Hélio, Denis, Adriano e Saon pela ajuda e o companheirismo em todo este período. Também gostaria de agradecer em especial ao aluno de iniciação científica Fábio Moreira Coelho pela ajuda prestada no desenvolvimento do código computacional utilizado neste trabalho.

A Bibliotecária Alice pela ajuda prestada na disposição dos livros e pela amizade.

Ao CEPETRO e à CNPq pelo financiamento recebido permitindo fazer o trabalho de forma tranqüila durante este período.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

## Resumo

FARFAN, David Champi. *Estudo do Comportamento Estático e Dinâmico de um Riser Vertical com Bóia de Sub-superfície*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 97 p. Dissertação (Mestrado)

Na atualidade as descobertas de óleo a grandes profundidades no mar têm levado ao desenvolvimento de campos localizados numa profundidade aproximada de 3000m, sendo então o sistema de *Riser* Híbrido Auto-Sustentável uma alternativa atraente. O presente trabalho apresenta os modelos matemáticos que descrevem o comportamento estático e dinâmico de um *riser* vertical com bóia de sub-superfície nas direções *in-line*, que é a direção da onda e correnteza no mar, e a direção transversal, perpendicular à direção *in-line*. Apresentam-se também simulações numéricas em diferentes condições de onda e correnteza e o seu efeito combinado, assim como o estudo paramétrico para as principais variáveis que influenciam no comportamento dinâmico e estático.

### *Palavras Chave*

- *Riser* de produção de petróleo, ondas de mar, correnteza, Vibração induzida por Vórtice.

## **Abstract**

FARFAN, David Champi. *Static and Dynamic Behaviors Study of a Vertical Riser with Subsurface buoy*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 97 p. Dissertação (Mestrado)

Nowadays, the oil discoveries at big depths in the sea have taken to the development of fields located in an approach depth of 3000m, being the Self Standing Hybrid Riser an attractive alternative. The present work presents the mathematical models that describe the static and dynamic behavior of a Vertical riser with a subsurface buoy in the directions in-line, that it is the direction of the wave and currents in the sea, and the transversal, that is perpendicular to the in-line direction. Numerical simulations in different conditions of wave and currents are also presented and its combined effect is studied, as well as the parametric study for the main variable that influences its dynamic and static behavior.

### *Key Words*

- Oil production riser, sea waves, sea currents, Vortex Induced Vibration.

# Índice

Lista de Figuras.

Nomenclatura

1. Introdução	1
2. Comportamento Estático e Vibração Livre do <i>Riser</i> Auto-Sustentável	8
2.1. Equações do Comportamento de <i>Risers</i> Verticais Rígidos	8
2.2 Comportamento estático do <i>Riser</i> Auto Sustentável	11
2.3 Vibração livre do <i>Riser</i> auto-sustentável	17
2.4 Solução numérica para a vibração livre para <i>Riser</i> auto-sustentável	19
2.5 Comparações entre as soluções numérica e analítica para vibração livre do <i>Riser</i> Auto-sustentável	20
3. Forças Hidrodinâmicas e comportamento dinâmico do <i>Riser</i> Auto-Sustentável	26
3.1 Esforços hidrodinâmicos na direção <i>in line</i>	27
3.2 Esforço Hidrodinâmico na direção transversal	30
3.3 Comportamento dinâmico do <i>riser</i>	33
4. Resultados e Discussões	35
4.1 Influência das características do fluido externo e interno no sistema <i>Riser</i> Auto-Sustentável.	37
4.2 Variação das características geométricas da bóia	42
4.3 Variação dos coeficientes hidrodinâmicos no <i>Riser</i> Auto-Sustentável	44

4.4 Influencia dos parâmetros estruturais no <i>Riser</i> Auto-Sustentável	48
4.5 Estudo do efeito da VIV no riser em relação ao comportamento dinâmico do sistema	49
5. Conclusões	53
Referências Bibliográficas	56
Apêndices	
A. Considerações para o Estudo do Comp. Estático e da Vibração Livre	59
A.1. Desenvolvimento da Equação Estática para um <i>Riser</i> Vertical Rígido.	59
A.2. Análise por Elementos Finitos para <i>Riser</i> Verticais Rígidos.	62
A.3. Solução Analítica para o Comportamento Estático do <i>Riser</i> Vertical Rígido	74
A.4. Generalização do Problema de Autovalor.	81
A.5. Solução Analítica para a Vibração Livre de um <i>Riser</i> Vertical Rígido.	83
B. Considerações para o Estudo do Comportamento Dinâmico	88
B.1. Calculo da Matriz de Massa.	88
B.2. Calculo da Matriz de rigidez Concentrada.	88
B.3. Calculo da Matriz de Amortecimento.	90
B.4. Equação de Morison para <i>Riser</i> Inclinado.	92
B.5. Equação de Morison para Diferentes Tipos de Escoamento.	93
B.6. Solução da Equação do Comportamento do <i>Riser</i> no Domínio do Tempo.	95



## Lista de Figuras

1.1	Configurações dos <i>riser</i>	2
1.2	Configuração de <i>riser</i> híbrido auto-sustentável	3
2.1	Exemplo dos graus de liberdade de um elemento do <i>riser</i>	9
2.2	Diagrama de um corpo livre de um segmento tubular	10
2.3	<i>Riser</i> auto-sustentável	11
2.4	(a) Comparação numérica e analítica para <i>riser</i> de 100m de comprimento	15
2.4	(b) Comparação numérica e analítica para <i>riser</i> de 200m de comprimento	15
2.4	(c) Comparação numérica e analítica para <i>riser</i> de 500m de comprimento	16
2.4	(d) Comparação numérica e analítica para <i>riser</i> de 1000m de comprimento	16
2.5	Conjunto bóia- <i>riser</i> no nível de colocação da bóia	16
2.6	Elemento do <i>riser</i> e carregamento lateral, livre para flexão	17
2.7	Período natural versus comprimento do <i>riser</i>	24
2.8	Período natural versus comprimento do <i>riser</i>	24
2.9	Modos naturais para a viga topo livre	25
3.1	Sistema de Referencia adotado para <i>riser</i> vertical em onda e correnteza	27
3.2	Componentes da força transversal	30
3.3	Número de Strouhal em função do número de Reynolds	32
3.4	Velocidades no caso de duas dimensões	33
4.0	Sistema Riser Auto-Sustentável e seus principais parâmetros, efeitos e comportamentos	37
4.1	Comportamento do <i>riser</i> em função da velocidade da correnteza	38
4.2	Comportamento do <i>riser</i> em função da altura da onda	39
4.3	Comportamento do <i>riser</i> em função do período da onda	41
4.4	Envoltórias dos deslocamentos com onda e correnteza	41

4.5.	Efeito do riser auto-sustentável com e sem fluido interno	42
4.6	Comportamento do sistema uma função do diâmetro da bóia	43
4.7	Efeito comprimento variável na bóia do <i>Riser</i> Auto-Sustentável.	44
4.8	Comportamento do <i>riser</i> com a bóia em função do $C_D$ em um fluxo oscilatório.	45
4.9	Comportamento do <i>riser</i> com a bóia em função do $C_D$ para correnteza constante ao longo da bóia de 1.2 m/s	46
4.10	Efeito do coeficiente lift $C_l$ no <i>Riser</i> Auto-Sustentável com onda	47
4.11	Efeito do coeficiente lift $C_l$ no <i>Riser</i> Auto-Sustentável com correnteza	47
4.12	Efeito do coeficiente de massa adicional $C_A$ no <i>Riser</i> Auto-Sustentável com correnteza.	48
4.13	Figura 4.13. Efeito do fator de amortecimento $\zeta$ no <i>Riser</i> Auto-Sustentável.	49
4.14	Série Temporal dos deslocamentos transversais.	50
4.15	Deslocamento planar com e sem efeito de VIV	52
A1	Condições de Contorno	74
A2	Comparação dos deslocamentos e ângulos na parte analítica e o programa utilizando elementos finitos	79
A3	Comparação dos deslocamentos e ângulos entre as soluções obtidas analiticamente e numericamente	80
A4	<i>Riser</i> rígido vertical na condição de engaste no fundo e tração T no topo	84

## Lista de Tabelas

Tabela 1	Dados para o <i>riser</i> .	14
Tabela 2	Dados para a bóia.	15
Tabela 3	Comprimento e respectiva tração no topo do <i>riser</i>	23
Tabela 4	Dados do <i>riser</i> e da bóia.	36
Tabela A1	Dados para as comparações da figura A2	79
Tabela A2	Dados para as comparações da figura A3	80

## Nomenclatura

$A_0$  - Área transversal interna do *riser* e espessura

$A_i$  - Área transversal do furo do *riser*

$A_s$  - Área transversal da parede do *riser* ( $= A_0 - A_i$ )

[B] - Matriz de amortecimento

$C_A$  - Coeficiente de massa adicional

$C_D$  - Coeficiente de arrasto

$C_l$  - Coeficiente de lift

$C_M$  - Coeficiente de inércia

$D$  - Diâmetro do *riser*

$F_x$  - Força *in-line*

$(F_{x0} + F_{xi})$  - é a força horizontal oriunda das pressões interna e externa

$(F_{y0} + F_{yi})$  - é força vertical oriunda das pressões interna e externa

$(F_c)$  - Força externa própria da correnteza por unidade de comprimento;

$k$  - Parâmetro de rugosidade

[K] - Matriz de rigidez

$L$  - Comprimento de onda

[M] - Matriz de massa

$M$  - Momento

$N$  - Força externa normal ao *riser*

$P_0$  - Pressão externa

$P_i$  - Pressão interna

$t$  - tempo

$T$  - Período da onda

$T$  - Tração de topo

$u$  - Velocidade da particular de água  
 $u_0$  - Velocidade horizontal da particular de água  
 $U_c$  - Velocidade da correnteza  
 $U$  - Velocidade instantânea do fluxo oscilatório.  
 $V$ .- Força cortante.  
 $V_{r0}$ .-Amplitude da velocidade relativa  
 $v_0$  - Velocidade vertical da particular de água  
 $x$  - Deslocamento do *riser* na direção *in-line*  
 $\gamma_0$  - Peso específico do fluido externo  
 $\gamma_i$  - Peso específico do fluido interno  
 $\gamma_s$  - Peso específico do material do *riser*  
 $\rho$  - Densidade da água  
 $\phi$  - Diferença de fase entre a resposta do *riser* e a força transversal.  
 $C_t$  Amplitude média do coeficiente transversal de força.  
 $f_s$  - Frequência média dos vórtices  
 $\bar{U}$  - Velocidade média do fluxo oscilatório  
 $KC$  - Número de Keulegan-Carpenter  
 $Re$  - Número de Reynolds  
 $St$  - Número de Strouhal  
 $VIV$  – Vibração Induzida por Vórtices  
 $D/L$ - Parâmetro de difração  
 $EI$  - Rigidez de flexão  
 $W$ .- peso distribuído do elemento

# Capítulo 1

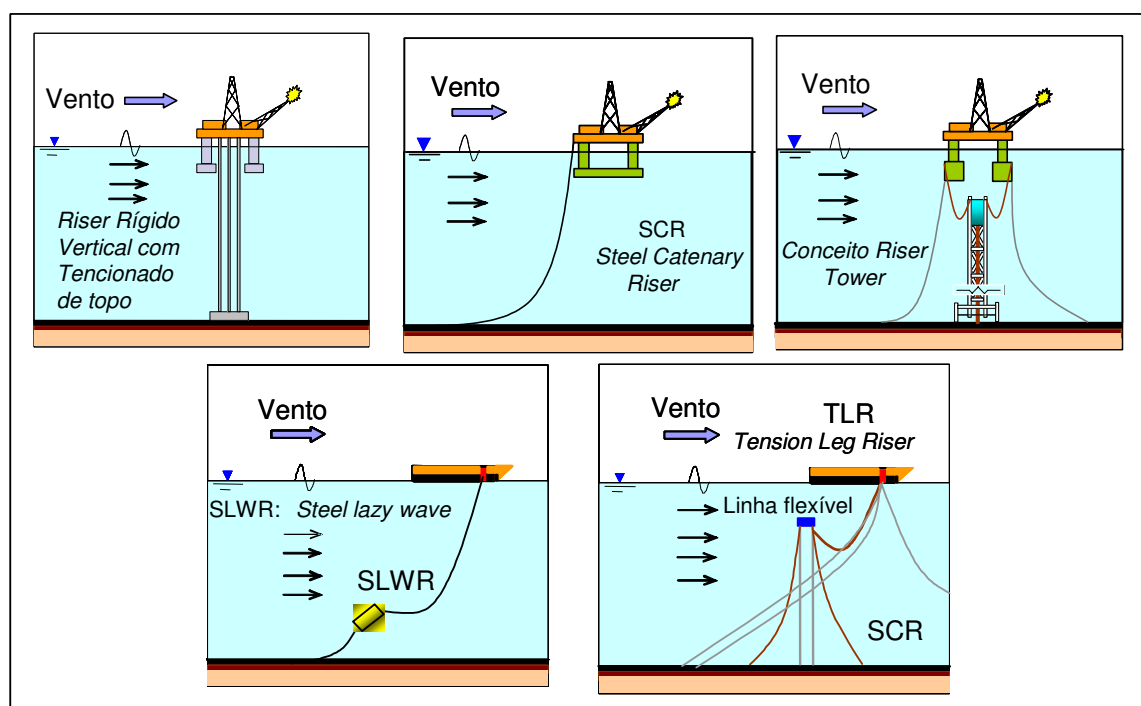
## Introdução

Nos últimos anos o Brasil vem se destacando como foco da produção e exploração de petróleo em campos marítimos e cada vez mais em grandes profundidades. A prova disso é que atualmente novos esforços em termos de desenvolvimento de sistemas marítimos de produção vem sendo dirigidos para lâminas de água ultraprofundas de aproximadamente 3000 m. Dentro deste contexto novos conceitos em termos de componentes do sistema têm sido desenvolvidos e aplicados.

No sentido de viabilizar a operação de produção de petróleo nestas condições, assim como a perfuração, os *risers* são de vital importância constituindo-se em objeto de otimização de custos e esforços operacionais.

O *riser* é um duto esbelto de aço que tem como função transportar óleo, água e gás desde a cabeça do poço até a unidade de produção, ou ainda levar água de injeção para recuperação de reservatórios de petróleo. Dependendo da profundidade e das condições de estudo, o *riser* pode apresentar uma grande rigidez ou uma grande flexibilidade, sendo esta uma de suas características fundamentais. Na literatura são apresentadas várias configurações de *riser* para águas profundas e ultraprofundas dentre as quais vale mencionar o *riser* rígido em forma de catenária - SCRs - (Sertã, 2001), *riser* rígido vertical de produção com tensionamento de topo - TTR - (Martins, 2003), *Steel Lazy Wave Riser* (SLWR) que é uma alternativa para os *risers* em catenária de utilização favorável em condições severas de mar e sistemas alternativos tais como o de *Riser Tower* (Sertã, 2001) no qual se tem um *riser* rígido que se estende desde o fundo do mar

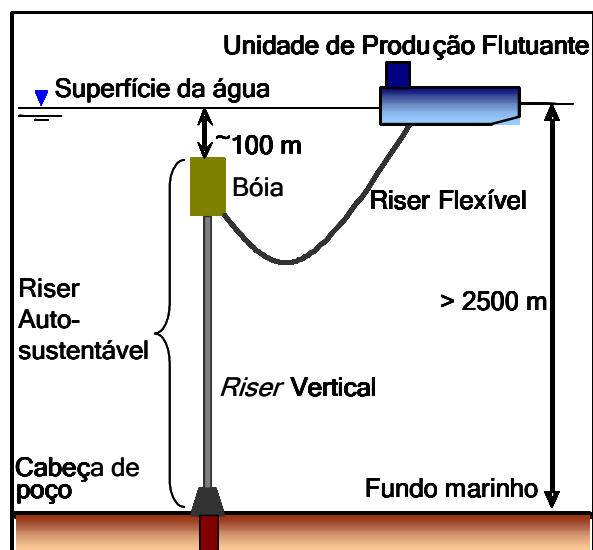
até 45 m abaixo do nível de água, sendo que a conexão do transporte de fluidos à unidade de produção flutuante é feita através de linhas flexíveis ligadas à um tanque cheio de ar permitindo a auto-sustentação do *riser* vertical. Este sistema foi utilizado para lâminas de água de aproximadamente 470 m. Outra configuração híbrida é a configuração *Tension Leg Riser* (TLR) constituída por um *riser* em catenária, uma bóia e uma linha flexível, sendo que a linha absorve os movimentos da plataforma e grande parte dos efeitos da onda do mar, sendo esta uma vantagem técnica para este sistema. Na Figura 1.1 as configurações mencionadas são mostradas. Uma parte do sistema para utilização em águas ultraprofundas, denominado de *Riser Híbrido Auto-Sustentável* (RHAS) é objeto de estudo deste trabalho.



**Figura 1.1. Configurações dos risers.**

A configuração RHAS é uma alternativa atraente para águas profundas. Tal sistema é constituído de uma parte vertical de tubulação rígida a qual é sustentada por uma bóia de subsuperfície a aproximadamente 100 metros abaixo do nível do mar e que por sua vez interliga-se à plataforma ou navio de produção na superfície através de um *riser* flexível, como é apresentado na Figura 1.2. Uma vantagem técnica e operacional deste sistema é que a bóia e grande parte do *riser* vertical não sofrem efeitos relevantes da onda próximas à superfície da

água, diminuindo assim, os riscos de ruptura por fadiga no componente rígido. Por outro lado, o uso de um *riser* rígido em grande parte da profundidade de água mostra-se mais vantajoso em termos econômicos do que utilizar um *riser* flexível (Coimbra, 2001).



**Figura 1.2. Configuração do *riser* híbrido Auto-Sustentável (RHAS).**

O comportamento dinâmico do RHAS pode ser estimado e previsto utilizando-se de testes experimentais em tanques de prova com modelos reduzidos. Conseguindo-se assim uma boa aproximação do comportamento do sistema real mediante determinadas condições impostas dentro do teste (Pereira, 2005). Tais experimentos usualmente exigem grandes investimentos para sua realização, devido à complexidade dos mesmos. Ao contrário disto, a utilização de simulações numéricas do comportamento do sistema torna-se uma ferramenta poderosa de projeto uma vez que é possível prever o comportamento do sistema nas condições reais em que ele opera, podendo-se inclusive variar estas condições a um custo muito menor que no caso anterior.

Quando o *riser* é submetido a carregamentos externos tais como: onda, correnteza e movimentos da plataforma, o mesmo fica sujeito à movimentos oscilatórios que com o tempo devido à repetitividade podem ocasionar fraturas na estrutura, provocando assim, no pior dos casos a ruptura por fadiga do mesmo. Então é possível estimar a vida útil do *riser* através de resultados obtidos de experimentos na forma de curvas de tensão operacional versus vida útil,



permitindo-se que para diversas intensidades de esforços oscilatórios possam se estimar quanto tempo o material pode suportar aos carregamentos externos oscilatórios antes da falha por fadiga. Desta forma, a determinação destes esforços torna-se de extrema importância. Tais esforços são facilmente obtidos a partir da definição da dinâmica do movimento do *riser*. Neste sentido, o presente trabalho pretende fazer uma análise do comportamento estático e dinâmico do *riser* rígido sustentado por uma bóia de subsuperfície, tendo como um ponto importante o efeito de *Vortex Induced Vibration* (VIV), (Ferrari, 1998), que se apresenta no *riser* produzindo deslocamentos na parte transversal.

Como parte da análise do comportamento estático, neste trabalho foram feitos cálculos numéricos e analíticos, partindo-se de um elemento de *riser* submetido a diversos carregamentos estáticos internos e externos que atuam sobre este, (Patel, 1989), sendo que podem ser destacados dentre estes carregamentos, a força de arrasto devido à correnteza, as pressões devidas ao fluido interno e externo, assim como, a tração na parede do *riser* e os esforços devidos ao cisalhamento e a flexão.

A equação diferencial do comportamento estático do *riser* foi obtida a partir do equilíbrio de forças atuantes no plano do carregamento a qual é amplamente discutida no Capítulo 2.

Partindo das condições de contorno obtidas de (Lu, P., 2001), obtiveram-se os coeficientes da solução analítica do comportamento estático.

Na solução numérica do comportamento estático considerou-se a formulação fraca do método de Galerkin (Paz, 1991) o qual é utilizado para a solução da equação diferencial estática. Nesta abordagem o *riser* é discretizado em elementos, onde cada elemento apresenta dois nós em seus extremos, os quais têm 3 graus de liberdade. Estes graus de liberdade são descritos por dois deslocamentos laterais e uma rotação dando forma a matriz de rigidez do elemento. Através da composição de matrizes de rigidez elementares é obtida a matriz de rigidez global do *riser* considerando-se as componentes de rigidez elástica e geométrica.

As soluções completas para o comportamento estático são apresentadas no (Apêndice A) como uma comparação entre os resultados obtidos entre a aproximação numérica e analítica. Nestas comparações são também apresentados os deslocamentos encontrados utilizando uma matriz de rigidez concentrada (*Lumped*) utilizada futuramente na solução da equação da dinâmica do *riser*.

Como parte da análise dinâmica, foi feito um estudo do movimento de vibração livre do *riser* utilizando-se a solução analítica apresentada em (Rivin, 1999), o qual mostra o equacionamento da vibração livre de uma viga com uma tração axial. Utilizando esta equação e as condições de contorno da viga tracionada obtêm-se as frequências naturais para cada modo de vibração.

Para o estudo numérico da vibração livre utilizou-se a metodologia apresentada por (Burden, 1993) na qual mediante este procedimento se determinam os autovalores do sistema a partir da equação característica.

As forças que intervêm no *riser* devido onda, correnteza e movimentos da plataforma são apresentadas em duas direções. Sendo a primeira, a direção *in line* que tem a mesma direção da onda e a correnteza do mar quando alinhadas e a segunda chamada de direção transversal a qual é perpendicular a direção *in line* onde ocorre a vibração induzida por vórtices.

Para o cálculo do comportamento dinâmico do *riser* é necessária a determinação dos carregamentos. As forças na direção *in line* devidas à onda e correnteza são obtidas à partir da Equação de Morison (Chakrabarti, 1982) a qual considera duas componentes que são a força de inércia e a força de arrasto. A força de inércia aparece pelo efeito da aceleração da partícula do fluido que passa ao redor de um duto cilíndrico e a força de arrasto apresenta-se sob o efeito da velocidade da partícula do fluido. Tais componentes são também dependentes dos coeficientes de inércia e o coeficiente de arrasto, respectivamente. Estes coeficientes foram determinados à partir de resultados experimentais, e mostram-se dependentes do número de Reynolds, do numero de Keulegan-Carpenter e da rugosidade (Sarpkaya, 1981). Neste trabalho, é considerada a Equação

de Morison modificada pelo o modelo de (Ferrari e Bearman, 1999), o qual leva em consideração a velocidade relativa do fluido externo e da estrutura.

A força transversal à direção do carregamento de onda e correnteza é obtida também a partir do modelo de Ferrari e Berman (Ferrari, 1981), que descreve o fenômeno de separação que ocorre quando o fluido esta escoando na direção *in line* em torno de um corpo cilíndrico. Dependendo da intensidade da velocidade com que escoar, o fluido tende a formar vórtices a partir de um ângulo aproximadamente de  $82^\circ$  com respeito a direção da corrente. A vorticidade por sua vez é alternada e a força originada possui uma frequência idêntica à frequência de desprendimento de vórtices ou Frequência de *Shedding*.

A formação de vorticidade ao longo do comprimento do *riser* conduz o mesmo a uma VIV (*Vortex Induced Vibration*). A atenção com respeito ao efeito da VIV tem se mostrado crescente nos recentes desenvolvimentos em *risers*. Como podemos observar no trabalho apresentado por (Déserts, 2000), é analisada a influência da variação da tração na parede do *riser* para a diminuição da VIV e a utilização de absorvedores deste efeito. O efeito da adição de absorvedores em regiões do *riser* onde a VIV é crítica também é citado em (Fisher, 1995). Toda esta preocupação pelo efeito da VIV justifica a utilização do cálculo desta por modelos aproximados que permitem seu dimensionamento em problemas operacionais encontrados em *Risers* Auto-Sustentáveis.

A solução dinâmica do *Riser* Auto-Sustentável no domínio do tempo no presente trabalho leva em consideração a semelhança da equação dinâmica do comportamento do *riser* com um sistema massa-mola-amortecedor. A equação do comportamento é composta pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura dividida em elementos. O modelo de massa concentrada em nós (*Lumped*) é utilizado, tornando-se também necessária a obtenção das outras duas matrizes na forma concentrada. Tal procedimento economiza esforço computacional já que permite a resolução do sistema de equações somente para o grau de liberdade desejado. O método utilizado para a solução numérica é o método de Newmark  $\beta$  com  $\beta = 1/4$  já empregado em trabalhos anteriores (Ferrari, 1999; Kubota, 2003; Morooka, 2004) mostrando boa convergência da solução.

A maioria dos modelos desenvolvidos para a dinâmica do comportamento de *risers* rígidos não levam em consideração o efeito de VIV em conjunto com o carregamento *in line* em seus resultados. Neste trabalho pretende-se mostrar resultados dos deslocamentos *in line* e transversal que levam em conta o acoplamento destes movimentos através do modelo descrito.

O sistema em estudo neste trabalho é um subsistema do *Riser* Híbrido Auto-Sustentável (RHAS), que pode ser visualizado e assinalado na Figura 1.2. Como mencionado anteriormente neste trabalho será feito um estudo estático e dinâmico do subsistema composto pelo *riser* vertical junto com a bóia, definido aqui como *riser* autosustentável.

## Capítulo 2

### Comportamento Estático e Vibração Livre do *Riser* Auto-Sustentável

#### 2.1. Equação do Comportamento de *Risers* Verticais rígidos

O *riser* é um elemento tubular cilíndrico cuja função é transportar óleo, gás e água. Os *risers* são utilizados em diversas operações das quais se destacam a produção e a perfuração. O estudo feito neste trabalho é referente a *risers* de produção.

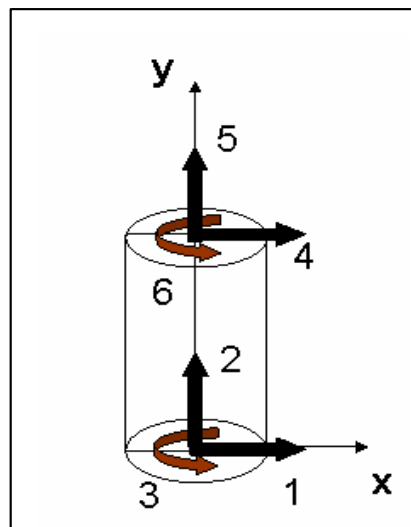
*Risers* de produção podem ser de dois tipos: rígidos e flexíveis. A vantagem dos flexíveis, em geral, é a maior deflexão máxima permissível, a capacidade de suportar maiores esforços, maior vida útil, além de permitirem um maior *offset* da plataforma em comparação a *risers* rígidos, a desvantagem dos *risers* flexíveis é que eles são economicamente de maior custo, e a ação da alta pressão hidrostática com o aumento da lâmina de água pode comprometer a sua utilização. No caso dos *risers* rígidos, o problema principal é, em geral, a fadiga causada pela vibração induzida devido aos movimentos da plataforma, à onda e correnteza, e conseqüente desprendimento de vórtices. A vantagem do *riser* rígido é seu menor custo quando comparado com o *riser* flexível, a resistência a altas pressões e também a possibilidade em configuração de catenária ser também complacente aos movimentos da embarcação.

Aproveitando as vantagens dos *riser* rígidos tem sido utilizado um sistema alternativo denominado *Riser* Híbrido Auto-Sustentável (RHAS) como citado no Capítulo 1.

Para começar o estudo do comportamento estático do subsistema do RHAS, aqui denominado de *Riser* Auto-Sustentável, considera-se o *riser* rígido como uma viga que tem uma tração e que está livre no topo e engastada no fundo.

O modelo aqui utilizado para o *riser* rígido é o modelo de uma viga Euler-Bernoulli, no qual se assume a hipótese de que as seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga mesmo após sofrer deformações, além de não considerar as deformações devido à esforços cisalhantes.

A análise é restrita a duas dimensões e o *riser* é idealizado como uma junta de elementos onde cada elemento tem seis graus de liberdade, sendo dois de translação e um de rotação em cada extremo como é ilustrado na Figura 2.1.

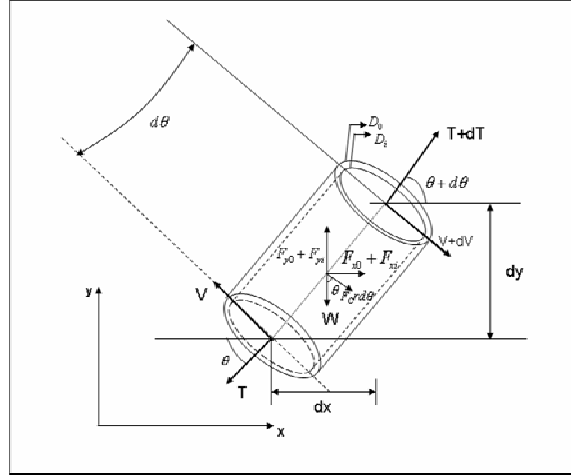


**Figura 2.1. Exemplo de graus de liberdade em um elemento do *riser*.**

A Figura 2.2 apresenta as forças estáticas que atuam sobre um elemento diferencial de forma tubular, onde:

- (T) é a tração e (V) a força de cisalhamento sobre as paredes do *riser*;
- $(F_{x0} + F_{xi})$  é a força horizontal oriunda das pressões interna e externa;
- $(F_{y0} + F_{yi})$  é a força vertical oriunda das pressões interna e externa;
- (Fc) é a força de arrasto própria da correnteza;

- (W) é o peso distribuído do elemento.



**Figura 2.2. Diagrama de corpo livre de um segmento tubular.**

A partir destas forças considerando o equilíbrio com  $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$  se obtém a equação estática de um *riser* rígido sob tração:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 x}{dy^2} \right) - (T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 x}{dy^2} = Fc + (\gamma_s A_s + \gamma_i A_i - \gamma_0 A_0) \frac{dx}{dy} \quad (2.1)$$

(a)                      (b)                      (c)                      (d)

onde  $EI$  é a rigidez à flexão da viga,  $P_0$  é a pressão externa,  $P_i$  é a pressão interna,  $A_i, A_0, A_s$  são as áreas interna, externa e das paredes do *riser* respectivamente e  $\gamma_i, \gamma_0, \gamma_s$  são as densidades específicas do fluido interno, externo e do *riser*.

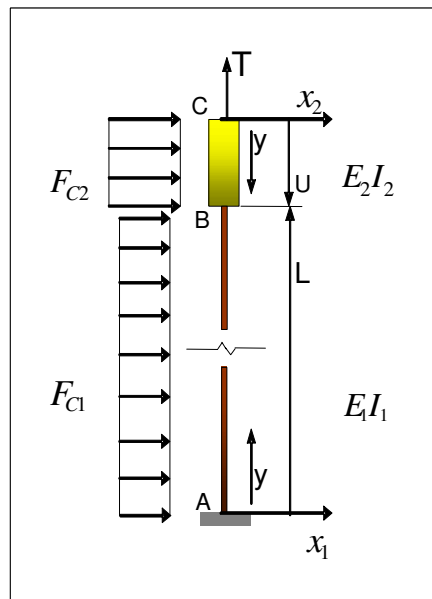
Os termos da Equação 2.1 representam: (a), rigidez à flexão do *riser* devido a propriedades do material do *riser*, (b), a rigidez à flexão devido aos efeitos da força axial do *riser*, (c), a intensidade da força externa horizontal distribuída por unidade de comprimento e (d) o amortecimento devido à massa do *riser*.

O Método de Galerkin é utilizado para determinar a solução numérica da Equação 2.1. Os Apêndices A1 e A2 mostram detalhadamente os fundamentos, (Patel, 1989) e (Paz, 1989), deste método aplicado ao caso em questão no presente trabalho.

Os resultados obtidos através do método numérico são comparados com a solução analítica da Equação 2.1.

## 2.2. Comportamento estático do *Riser* Auto-Sustentável

Para o cálculo do comportamento estático do *Riser* Auto-Sustentável utilizam-se os mesmos métodos descritos na literatura para os *risers* verticais rígidos (Patel, 1989), tanto numéricos quanto analítico fazendo-se as adaptações e considerações necessárias no modelo como é descrito nesta seção. A Figura 2.3 apresenta um esquema do *Riser* Auto-Sustentável em questão.



**Figura 2.3. *Riser* Auto-Sustentável.**

Neste estudo considerou-se para efeitos de simplicidade uma força concentrada  $T$  constante ao longo do comprimento do *riser* que representa a tração exercida pelo empuxo causado pela bóia na parede do *riser*, sendo assim o efeito hidrostático da bóia. No sistema foram impostas



forças distribuídas por unidade de comprimento,  $F_{C1}$  ao longo do *riser* e  $F_{C2}$  ao longo da bóia, que representam as forças de correnteza e também rigidezes à flexão,  $E_1 I_1$  e  $E_2 I_2$  respectivamente.

A bóia nos dois casos foi aproximada por um elemento de rigidez elástica muito maior à do *riser* e de rigidez geométrica nula.

As condições de contornos aplicadas para a solução analítica consideram que o fundo do sistema (Ponto A, Figura 2.3) possui deslocamento e ângulo de rotação zero, sendo assim considerado engastado; e que o topo (Ponto C na Figura 2.3) possui momento fletor e força de cisalhamento igual a zero, sendo assim um ponto livre. Então:

-No fundo: Condição de engastamento (No *riser*, ponto A na Figura 2.3).

a)  $x_1=0 \rightarrow y=0$  (Deslocamento)

b)  $\frac{dx_1}{dy} = 0 \rightarrow y=0$  (Ângulo) (2.2)

-No topo: condição livre (na bóia, ponto C na Figura 2.3).

c)  $\frac{d^2 x_2}{dy^2} = 0 \rightarrow y=0$  (Momento)

d)  $\frac{d^3 x_2}{dy^3} - n_2^2 \frac{dx_2}{dy} = 0 \rightarrow y=0$  (Força cizalhante) (2.3)

Aplicando estas condições na Equação (2.1), as soluções estáticas para o *riser* e para a bóia poderão ser representadas como:

$$x_1 = C_1(e^{n_1 y} - n_1 y - 1) + D_1(e^{-n_1 y} + n_1 y - 1) - \frac{F_{C1} y^2}{2E_1 I_1 n_1^2}$$

(2.4)

$$x_2 = D_2 \left( e^{-n_2 y} - e^{n_2 y} \right) - \frac{B_2}{n_2^2} + \frac{F_{C2}}{2E_2 I_2 n_2^4} \left( 2e^{n_2 y} - n_2^2 y^2 - 2 \right) \quad (2.5)$$

Sendo  $C_1, D_1, D_2, B_2$  coeficientes a serem achados com  $n_1 = \sqrt{T/(E_1 I_1)}$  e  $n_2 = \sqrt{T/(E_2 I_2)}$

Assumindo a condição de continuidade na interligação das estruturas do *riser* e da bóia (Rivin, 1999), ponto B da Figura 2.3, e aproveitando as equações 2.4 e 2.5 temos neste ponto as seguintes condições:

1) A continuidade do deslocamento,  $x_1(L) = x_2(U)$

$$C_1 \left( e^{n_1 L} - n_1 L - 1 \right) + D_1 \left( e^{-n_1 L} + n_1 L - 1 \right) + D_2 \left( e^{n_2 U} - e^{-n_2 U} \right) + \frac{B_2}{n_2^2} = \frac{F_{C1} L^2}{2E_1 I_1 n_1^2} + \frac{F_{C2}}{2E_2 I_2 n_2^4} \left( 2e^{n_2 U} - n_2^2 U^2 - 2 \right) \quad (2.6)$$

2) A continuidade no ângulo,  $\left. \frac{dx_1(y)}{dy} \right|_{y=L} = - \left. \frac{dx_2(y)}{dy} \right|_{y=U}$

$$C_1 n_1 \left( e^{n_1 L} - 1 \right) + D_1 n_1 \left( 1 - e^{-n_1 L} \right) - D_2 n_2 \left( e^{-n_2 U} + e^{n_2 U} \right) = \frac{F_{C1} L}{E_1 I_1 n_1^2} - \frac{F_{C2}}{E_2 I_2 n_2^3} \left( e^{n_2 U} - n_2 U \right) \quad (2.7)$$

3) A continuidade para o momento,  $\left. \frac{d^2 x_1(y)}{dy^2} \right|_{y=L} = J^4 \left. \frac{d^2 x_2(y)}{dy^2} \right|_{y=U}$ ; com  $J = \sqrt[4]{(E_2 I_2)/(E_1 I_1)}$ .

$$C_1 n_1^2 e^{n_1 L} + D_1 n_1^2 e^{-n_1 L} + D_2 n_2^2 J^4 \left( e^{n_2 U} - e^{-n_2 U} \right) = \frac{F_{C1}}{E_1 I_1 n_1^2} + J^4 \frac{F_{C2}}{E_2 I_2 n_2^2} \left( e^{n_2 U} - 1 \right) \quad (2.8)$$

4) Continuidade para a força constante,  $\left. \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{d^3 x_1(y)}{dy^3} - \frac{dx_1}{dy} \right|_{x=L} = - \left( \frac{1}{n_2^2} \cdot \frac{d^3 x_2(y)}{dy^3} - \frac{dx_2}{dy} \right) \Big|_{x=U}$

$$C_1 - D_1 = - \frac{F_{C2} U}{E_2 I_2 n_2^2 n_1} - \frac{F_{C1} L}{E_1 I_1 n_1^3} \quad (2.9)$$

Das equações (2.6) a (2.9) se tem um sistema de equações que, resolvido, permite a determinação da solução geral analítica do comportamento estático do sistema *Riser* Auto-Sutentável. A seguir apresentam-se resultados obtidos pela solução analítica que são agora comparados com a solução numérica. Os dados utilizados na comparação para o *riser* e para a bóia são apresentados nas Tabelas 1 e 2 respectivamente.

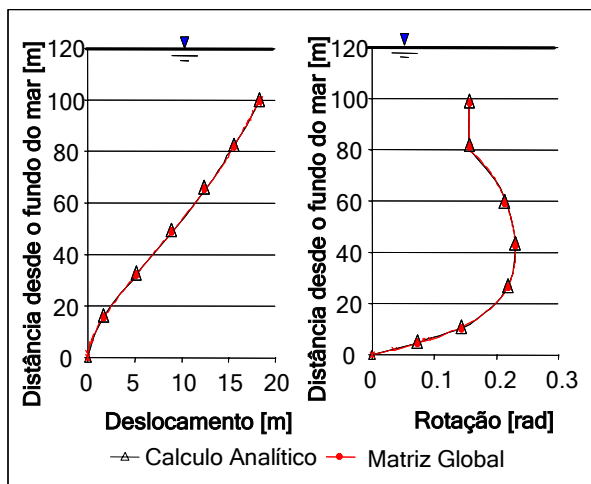
**Tabela 1. Dados para o *riser*.**

<b>Para o <i>riser</i></b>	
Área Transversal ( $m^2$ )	0,014
Coeficiente de arrasto – $C_D$	0,7
Comprimentos sem peso – L (m)	100,0-200,0-500,0-1000,0
Densidade do fluido externo ( $kg/m^3$ )	1025,0
Diâmetro externo – $D_{ext}$ (m)	0,25
Diâmetro interno – $D_{in}$ (m)	0,21
Força externa horizontal – $F_{C1}$ (kN/m)	0,09
Modulo de Young – $E_1$ ( $kN/m^2$ )	$2,1 \times 10^8$
Momento de inércia – $I_1$ ( $m^4$ )	$9,43 \times 10^{-5}$
Tração de topo – T (kN)	100,0
Velocidade constante da correnteza (m/s)	1,0

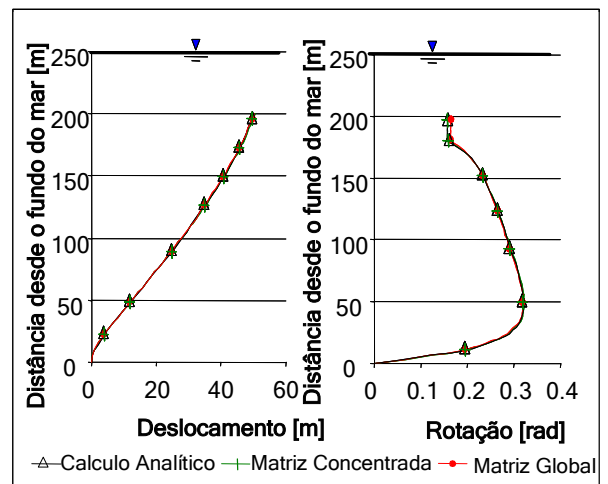
**Tabela 2. Dados para a bóia.**

Para a bóia	
Área Transversal ( $m^2$ )	7,07
Comprimento sem peso – U (m)	20,0
Diâmetro externo – $D_{bóia}$ (m)	3,0
Força externa horizontal - $F_{c2}$ (kN/m)	1,07
Modulo de Young – $E_2$ (kN/ $m^2$ )	$2,10 \times 10^{12}$
Momento de inércia – $I_2$ ( $m^4$ )	3,97

Na Figura 2.4 encontram-se quatro casos nos quais se faz uma comparação dos deslocamentos e inclinações entre o cálculo numérico feito utilizando-se uma matriz de rigidez global e uma matriz de rigidez concentrada, com o cálculo analítico. As matrizes de rigidez concentrada e global estão apresentadas no Apêndice B, e a diferença básica é que a matriz de rigidez concentrada despreza os efeitos das forças nos graus de liberdade verticais e rotacionais sendo então usada para a solução dinâmica. Os quatro casos 2.4 (a), 2.4 (b), 2.4 (c) e 2.4 (d) representam quatro comprimentos diferentes de *riser*: 100 m, 200 m, 500 m, e 1000 m respectivamente.



**Fig. 2.4 (a)**



**Fig. 2.4 (b)**

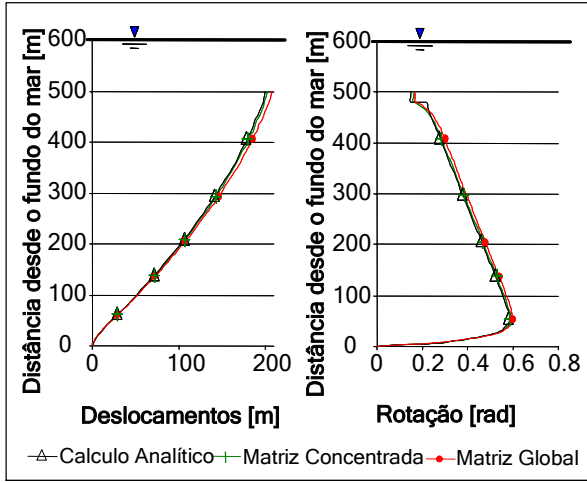


Fig. 2.4(c)

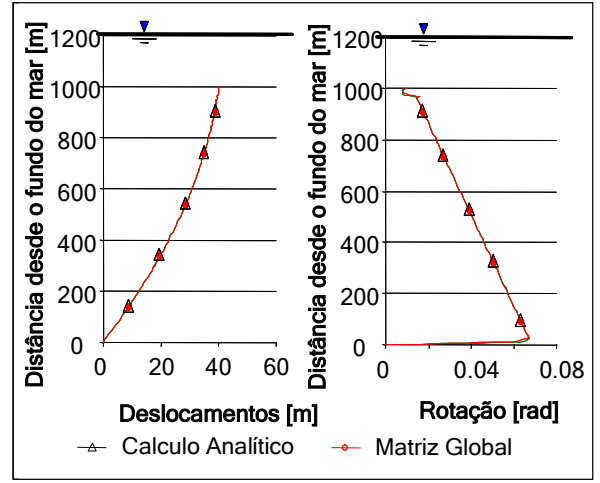


Fig. 2.4 (d)

Nos cálculos utilizando-se o método de elementos finitos, a matriz de rigidez elástica da bóia é somada à rigidez elástica do *riser*. A tração na bóia causada pelo próprio empuxo foi desprezada, portanto ela não possui matriz de rigidez geométrica. No nível da bóia, somente a rigidez geométrica do *riser* é significativa como descrito na Equação 2.10 e ilustrado na Figura 2.5.

$$[KGLOB] = [KE]_{bóia} + [KE]_{riser} + [KG]_{riser} \quad (2.10)$$

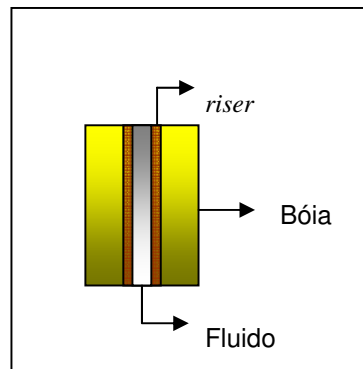


Figura 2.5. Conjunto bóia-riser no nível de colocação da bóia.

Como a rigidez elástica da bóia  $[KE]_{bóia}$  é imensamente maior que a do *riser* nas considerações feitas para o cálculo do deslocamento no nível da bóia, a expressão que vai prevalecer para a matriz de rigidez global para simplificação dos cálculos é:

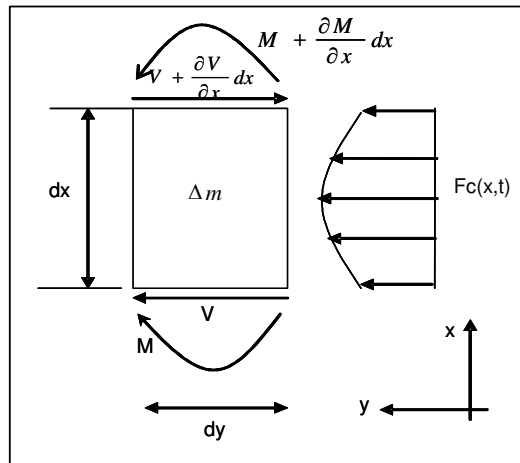
$$[KGLOB] = [KE]_{bóia} \quad (2.11)$$

### 2.3. Vibração livre do *Riser* Auto-Sustentável

As equações de vibração livre são obtidas utilizando-se o equilíbrio de um elemento do *riser* aplicando-se basicamente a segunda lei de Newton (Craig, 1981).

Considera-se nos desenvolvimentos a seguir que a viga não sofre deformações ao longo de seu eixo axial, eixo 'y', que os planos das seções transversais são perpendiculares ao eixo longitudinal e a elasticidade do material que constitui a viga é linear.

A Figura 2.6 mostra esquematicamente um elemento de *riser* de massa ' $\Delta m$ ' no qual atua uma força por unidade de comprimento  $F_c$ , um momento  $M$  e a força cortante  $V$ .



**Figura 2.6. Elemento do *riser* e carregamento lateral, livre para flexão**

$$\sum F_y = (\Delta m)a_y \Rightarrow V - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) + F_c dx = \Delta m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

Onde,  $\Delta m = \rho A dx$ . Com ‘ $\rho$ ’ densidade do elemento, ‘ $A$ ’ área transversal dentro de um diferencial do elemento ‘ $dx$ ’.

Como  $\sum M = 0$ , então:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - V \frac{dx}{2} - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.13)$$

Portanto:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + \rho A \frac{d^2 v}{dt^2} = F_c(x, t) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = 0 \quad (2.15)$$

Para deflexões com pequenas curvaturas, aplica-se:

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

Combinando a expressão (2.14) com a expressão (2.15) e utilizando a expressão (2.16), se tem:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F_c(x, t) \quad (2.17)$$

Considerando a viga tracionada com uma tração  $T$ , obtém-se a expressão a seguir:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - T(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F_c(x, t) \quad (2.18)$$

A Equação (2.18) corresponde à equação do Comportamento de um *riser* vertical com carregamento lateral.

#### 2.4.Solução numérica para a vibração livre do *Riser* Auto-Sustentável

Considerando a equação geral do comportamento do *riser* vertical rígido (Equação 2.18) sem a consideração do amortecimento e da força  $F_C(x,t)$  (Burden, 1993), a vibração de vigas em flexão pode ser representada da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{0\} \quad (\text{vibração livre}) \quad (2.19)$$

Onde,  $[M]$  é a matriz global de massa de ordem  $N \times N$ , dada pela união da matriz de massa de cada elemento,  $\{d\}$  é o vetor nodal de deslocamento e rotações,  $\{\ddot{d}\}$  é o vetor nodal de acelerações,  $[K]$  é a matriz de rigidez global que vem a ser a soma da matriz de rigidez elástica e geométrica global.

Considera-se como solução para a Equação (2.19), a seguinte expressão:

$$\{d\} = \{d_0\} \cos(\omega t - \beta) \quad (2.20)$$

Onde,  $\{d_0\}$  é o vetor correspondente dos deslocamentos iniciais da viga,  $\omega$  é a frequência circular de movimento e  $\beta$  é o ângulo de fase. Substituindo a solução dada pela Equação (2.20) na Equação (2.19), tem-se:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{d_0\} \cos(\omega t - \beta) = \{0\}$$

Ou ainda,

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{d_0\} = \{0\} \quad (2.21)$$



Se desconsiderarmos a solução trivial da Equação (2.21) tem-se que:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = |[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (2.22)$$

O problema descrito pela Equação (2.22) é um problema de auto-valor. Sua resolução pode ser obtida utilizando-se procedimento citado no Apêndice A4, (Burden, 1993).

## 2.5. Comparações entre as soluções numérica e analítica para a vibração livre do *Riser* Auto-Sustentável

Resultados foram obtidos através da solução analítica e numérica, respectivamente, para a vibração livre do *Riser* Auto-Sustentável, onde a tração longitudinal foi considerada constante para esta primeira análise. Os resultados dos modos naturais de vibração estão apresentados com suas respectivas frequências naturais. As frequências foram obtidas utilizando-se procedimento descrito para a solução do problema de auto-valor aqui descrito. A solução analítica foi obtida através do procedimento descrito em seguida.

Adaptando-se a solução analítica obtida para um *riser* vertical rígido apresentada no Apêndice A.5, obtemos para o *Riser* Auto-Sustentável as seguintes soluções:

-Para o *riser*:

$$x_1(y) = A_1 \sinh(r_1 y) + B_1 \cosh(r_1 y) + C_1 \sin(t_1 y) + D_1 \cos(t_1 y) \quad (2.23)$$

-Para a bóia:

$$x_2(y) = A_2 \sinh(r_2 y) + B_2 \cosh(r_2 y) + C_2 \sin(t_2 y) + D_2 \cos(t_2 y) \quad (2.24)$$

Onde:

$$r_1 = \sqrt{\frac{n_1^2}{2} + \sqrt{\frac{n_1^4}{4} + K_1^4}} \quad \text{e} \quad t_1 = \sqrt{-\frac{n_1^2}{2} + \sqrt{\frac{n_1^4}{4} + K_1^4}}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{n_2^2}{2} + \sqrt{\frac{n_2^4}{4} + K_2^4}} \text{ e } t_2 = \sqrt{-\frac{n_2^2}{2} + \sqrt{\frac{n_2^4}{4} + K_2^4}}$$

$$n_1^2 = \frac{T}{E_1 I_1}; K_1 = \sqrt[4]{\frac{m_1 \omega^2}{E_1 I_1}}, m_1 = \rho_{riser} A_{riser} + \rho_{fluido} A_{interna\ duto} + C_A \rho_{mar} A_{externa\ duto}$$

$$n_2^2 = \frac{T}{E_2 I_2}; K_2 = \sqrt[4]{\frac{m_2 \omega^2}{E_2 I_2}}, m_2 = \rho_{boia} A_{boia} + \rho_{riser} A_{riser} + \rho_{fluido} A_{interna\ duto} + C_A \rho_{mar} A_{boia}$$

$$J = \sqrt[4]{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}}$$

Impondo as condições de contorno da configuração da Figura 2.3, para os extremos do *riser* temos:

-No fundo do *riser* (No *riser*, ponto A na Figura 2.3)

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 &= 0 \rightarrow y=0 \\ \text{b) } \frac{dx_1}{dy} &= 0 \rightarrow y=0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

-No topo da bóia (Na bóia, ponto C na Figura 2.3)

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{d^2 x_2}{dy^2} &= 0 \rightarrow y=0 \\ \text{d) } \frac{d^3 x_2}{dy^3} - n_2^2 \frac{dx_2}{dy} &= 0 \rightarrow y=0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aplicando essas condições nas Equações (2.23) e (2.24), têm-se as novas equações de  $x_1(y)$  e  $x_2(y)$  em função de A1, B1 e A2, B2 respectivamente:

$$x_1(y) = A_1 \left( \sinh(r_1 y) - \frac{r_1}{t_1} \sin(t_1 y) \right) + B_1 (\cosh(r_1 y) - \cos(t_1 y)) \quad (2.27)$$

$$x_2(y) = A_2 \left( \sinh(r_2 y) + \frac{r_2}{t_2} \left( \frac{r_2^2 - n_2^2}{t_2^2 + n_2^2} \right) \sin(t_2 y) \right) + B_2 \left( \cosh(r_2 y) + \frac{r_2^2}{t_2^2} \cos(t_2 y) \right) \quad (2.28)$$

Levando-se em conta novamente a continuidade no ponto de união entre a bóia e o *riser*, ponto B na Figura 2.3, podemos expressá-la da seguinte forma:

1. A continuidade do deslocamento,  $x_1(L) = x_2(U)$

$$A_1 \left( \sinh(r_1 L) - \frac{r_1}{t_1} \sin(t_1 L) \right) + B_1 (\cosh(r_1 L) - \cos(t_1 L)) - A_2 \left( \sinh(r_2 U) + \frac{r_2}{t_2} \left( \frac{r_2^2 - n_2^2}{t_2^2 + n_2^2} \right) \sin(t_2 U) \right) - B_2 \left( \cosh(r_2 U) + \left( \frac{r_2}{t_2} \right)^2 \cos(t_2 U) \right) = 0$$

2. A continuidade no ângulo,  $\left. \frac{dx_1(y)}{dy} \right|_{y=L} = - \left. \frac{dx_2(y)}{dy} \right|_{y=U}$

$$A_1 r_1 (\cosh(r_1 L) - \cos(t_1 L)) + B_1 (r_1 \sinh(r_1 L) + t_1 \sin(t_1 L)) + A_2 r_2 \left( \cosh(r_2 U) + \left( \frac{r_2^2 - n_2^2}{t_2^2 + n_2^2} \right) \cos(t_2 U) \right) + B_2 r_2 \left( \sinh(r_2 U) - \frac{r_2}{t_2} \sin(t_2 U) \right) = 0$$

3. A continuidade para o momento,  $\left. \frac{d^2 x_1(y)}{dy^2} \right|_{y=L} = J^4 \left. \frac{d^2 x_2(y)}{dy^2} \right|_{y=U}$

$$A_1 r_1 (r_1 \sinh(r_1 L) + t_1 \sin(t_1 L)) + B_1 (r_1^2 \cosh(r_1 L) + t_1^2 \cos(t_1 L)) - A_2 J^4 r_2 \left( r_2 \sinh(r_2 U) - \frac{t_2 (r_2^2 - n_2^2)}{t_2^2 + n_2^2} \sin(t_2 U) \right) - B_2 J^4 r_2^2 (\cosh(r_2 U) - \cos(t_2 U)) = 0$$

4. A continuidade para a força constante,  $\left. \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{d^3 x_1(y)}{dy^3} - \frac{dx_1}{dy} \right|_{x=L} = - \left( \frac{1}{n_2^2} \cdot \frac{d^3 x_2(y)}{dy^3} - \frac{dx_2}{dy} \right) \Big|_{x=U}$

$$A_1 r_1 \left( \left( \frac{r_2^2}{n_2^2} - 1 \right) \cosh(r_1 L) + \left( \frac{t_1^2}{n_1^2} + 1 \right) \cos(t_1 L) \right) + B_1 \left( r_1 \left( \frac{r_1^2}{n_1^2} - 1 \right) \sinh(r_1 L) - t_1 \left( \frac{t_1^2}{n_1^2} + 1 \right) \sin(t_1 L) \right) +$$

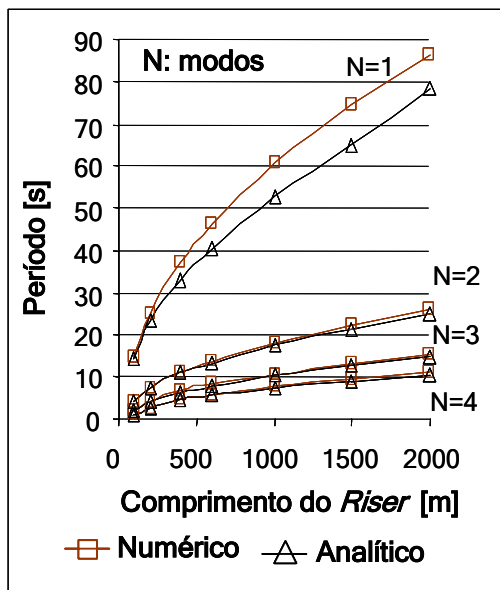
$$A_2 \frac{r_2 (r_2^2 - n_2^2)}{n_2^2} (\cosh(r_2 U) - \cos(t_2 U)) + B_2 \frac{r_2}{n_2^2} \left( (r_2^2 - n_2^2) \sinh(r_2 U) + r_2 \left( \frac{t_2^2 + n_2^2}{t_2} \right) \sin(t_2 U) \right) = 0$$

Em soma através do procedimento analítico apresentado anteriormente, e dos resultados numéricos obtidos através de procedimentos descritos no Apêndice A5 e na seção 2.4, comparações foram feitas entre os métodos numérico e analítico. Os resultados a seguir mostram a boa concordância entre os métodos.

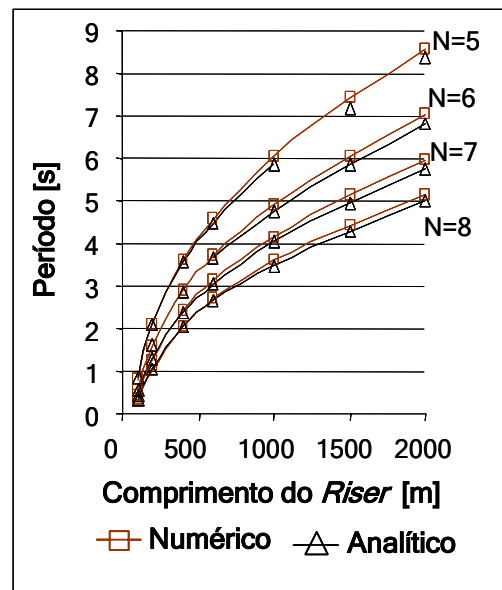
**Tabela 3. Comprimento e respectiva tração no topo no *riser*.**

<b>Comprimento <i>riser</i> [m]</b>	<b>TTOP [kN]</b>
100,0	106,74
200,0	213,48
400,0	426,97
600,0	640,46
1000,0	1067,43
1500,0	1601,15
2000,0	2668,58

A Tabela 3 mostra os comprimentos do *riser* que vão desde 100 m até 2000 m com suas respectivas trações de topo. Os seguintes resultados são de um *riser* engastado no fundo e livre no topo com tração constante.

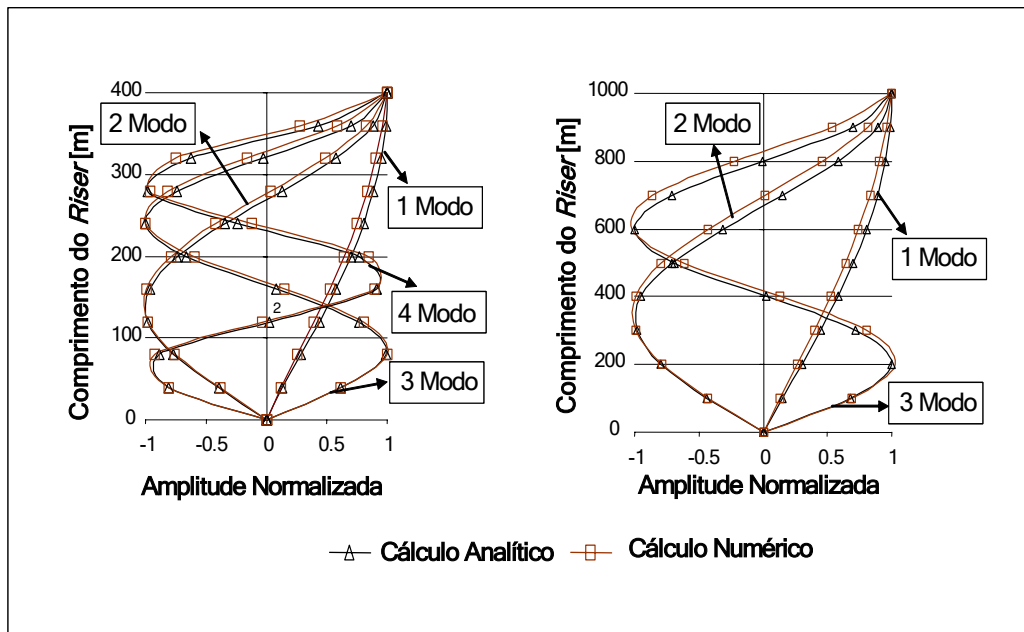


**Figura 2.7. Período natural vs comprimento do *riser***



**Figura 2.8. Período natural vs comprimento do *riser***

As Figuras 2.7 e 2.8 mostram os períodos naturais do *riser* de tração constante em função de seu comprimento. Mostram também que quando o comprimento do *riser* aumenta o período de vibração livre, para um modo de vibração determinado, também aumenta sendo assim mais lento o movimento vibratório. Por outro lado, para um comprimento constante o período de vibração aumenta a medida que os modos de vibração diminuem.



**Figura 2.9. Modos naturais para a viga de topo livre.**

A Figura 2.9 mostra os modos naturais para uma viga de topo livre com dois comprimentos de *risers* diferentes, 400 m e 1000 m, em função da amplitude normalizada, através dos cálculos numérico e analítico.

## Capítulo 3

### Forças Hidrodinâmicas e Comportamento Dinâmico do *Riser* Auto-Sustentável

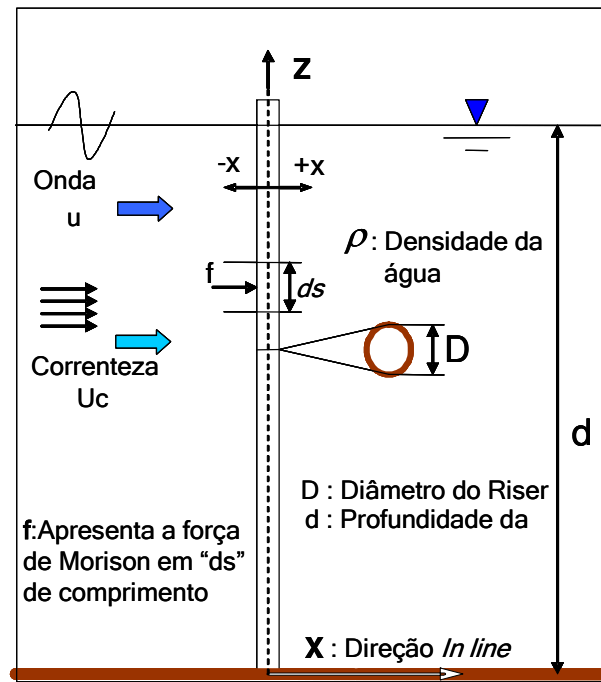
Diferentes modelos estão disponíveis na literatura para estimativa dos esforços hidrodinâmicos em *risers*. No presente estudo, considera-se a formulação de Morison (Chakrabarti, 1987) no tratamento destes esforços. A Equação de Morison é expressa através da soma da força de inércia (proporcional à aceleração da partícula fluída devido à onda) e da força de arrasto (proporcional à velocidade da partícula fluída devido à onda).

A Equação de Morison é apropriada quando efeitos viscosos são relevantes no problema tratado, como é o caso de estruturas esbeltas cujas dimensões são pequenas se comparado ao comprimento de onda. No presente estudo a Equação de Morison é considerada não só para o cálculo da força atuando sobre o *riser*, mas também para a bóia de subsuperfície.

Nas descrições posteriores, adota-se a direção *in line* como aquela coincidente com a direção de onda e da correnteza, e direção transversal àquela perpendicular à direção (*in line*) da onda e correnteza, porém no mesmo plano.

### 3.1. Esforços hidrodinâmicos na direção *in line*

Considerando a incidência de ondas e correnteza, agindo perpendicularmente à um cilindro na vertical, conforme Figura 3.1, a Equação de Morison descreve a força hidrodinâmica composta de uma parcela devido a esforços de arrasto e uma outra devido aos esforços de inércia.



**Figura 3.1. Sistema de referencia adotado para o *riser* vertical em onda e correnteza.**

Considera-se inicialmente o *riser* somente na presença de ondas. Tendo em vista a aceleração da partícula de fluido ao atingir o *riser* e em seguida o processo de desaceleração ao ultrapassar o *riser*, este processo ocasiona uma variação de quantidade de movimento do fluido. Esta alteração no movimento da partícula fluida origina o aparecimento de uma força inercial que para um comprimento elementar infinitesimal de *riser* ( $ds$ ), é descrita como:

$$df = C_M \rho \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds \quad (3.1)$$

$D$  - diâmetro do cilindro (diâmetro externo do *riser*)



- $\frac{\partial u}{\partial t}$  - aceleração local da partícula da água em relação ao centro do cilindro
- $C_M$  - coeficiente de inércia
- $ds$  - comprimento infinitesimal do *riser*
- $\rho$  - densidade da partícula fluida

O coeficiente de inércia  $C_M$  é empírico, determinado experimentalmente. Em teoria o valor do coeficiente de inércia  $C_M$  pode ser calculado, por exemplo terá o valor de 2.0 para cilindros lisos dentro de um fluido ideal (Patel, 1989)

Ainda na condição do *riser* com a incidência somente de ondas, e observando-se o escoamento através da sua seção transversal, verifica-se uma diferença na pressão externa à montante (região de alta pressão) e à jusante (região de baixa pressão) do *riser*. Esta diferença de pressão é provocada pelo fenômeno da separação da camada limite, dando origem à força de arrasto.

Se o escoamento for permanente (por exemplo, somente correnteza) as pressões nas regiões à montante e à jusante permanecerão constantes e a força de arrasto será proporcional ao quadrado da velocidade da partícula.

Em caso de escoamento não permanente (por exemplo, na presença de ondas) as pressões nas regiões à montante e à jusante serão variáveis, e a força de arrasto variará no decorrer do tempo. Na formulação do esforço de arrasto a seguir, o sinal da força é considerado tomando-se o valor absoluto da velocidade da partícula fluída:

$$df = \frac{1}{2} C_D \rho D |u| u ds \quad (3.2)$$

Onde,  $C_D$  é o coeficiente empírico de arrasto e 'u' é a velocidade instantânea da partícula de água.

A soma das componentes de arrasto e inércia, conforme descrito anteriormente, resulta na Equação de Morison para um cilindro fixo na presença de ondas, conforme a seguir:

$$f = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |u|u \quad (3.3)$$

$$\text{Onde, } A_I = \rho \frac{\pi}{4} D^2 \text{ e } A_D = \rho \frac{D}{2}$$

A literatura apresenta resultados experimentais para  $C_M$  e  $C_D$  (Sarpkaya, 1981). A correta escolha destes coeficientes permite obter resultados mais realistas para os esforços de ondas. Em geral, estes coeficientes são dependentes de parâmetros adimensionais do escoamento e do cilindro (*riser*), tais como número de Reynolds (Re), Keulegan-Karpenter (KC) e rugosidade relativa, conforme definição a seguir:

$$KC = \frac{|u_0|T}{D} \quad (3.4)$$

Onde  $u_0$  é a amplitude da velocidade da onda.

$$Re = \frac{|u_0|D}{\nu} \quad (3.5)$$

A rugosidade relativa é definida por  $k/D$  onde  $k$  é a medida da rugosidade da partícula e  $D$  como mencionado anteriormente o diâmetro do cilindro.

O Apêndice B apresenta a aplicação da Equação de Morison para diferentes formas de escoamento.

### 3.2. Esforços hidrodinâmicos na direção transversal

Observando-se novamente a seção transversal de um *riser* típico, Figura 3.2, o escoamento do fluido através do *riser* sofre variações na pressão ao longo de sua superfície externa. Esta variação de pressão, em geral, provoca separação de fluxo ou camada limite em ambos os lados do cilindro, produzindo assim camadas cisalhantes opostas ao fluxo e gerando vórtices. Este fenômeno de separação, em geral, ocorre de forma alternada em cada lado da seção transversal do *riser*, tendo como referência o eixo de progressão do escoamento. Um padrão regular de vórtices é formado dentro de uma esteira o que gera forças variáveis no tempo e estas podem provocar um movimento oscilatório ao *riser*. Estas forças caracterizam-se por uma magnitude e frequência de surgimento (frequência de *shedding* ou frequência de desprendimento de vórtices). O movimento oscilatório resultante é denominado de vibração induzida por vórtices (VIV).

A força dinâmica, não constante, própria da formação de vórtices dentro da direção normal ao escoamento é denominada de força transversal ou força de VIV (Figura 3.2).

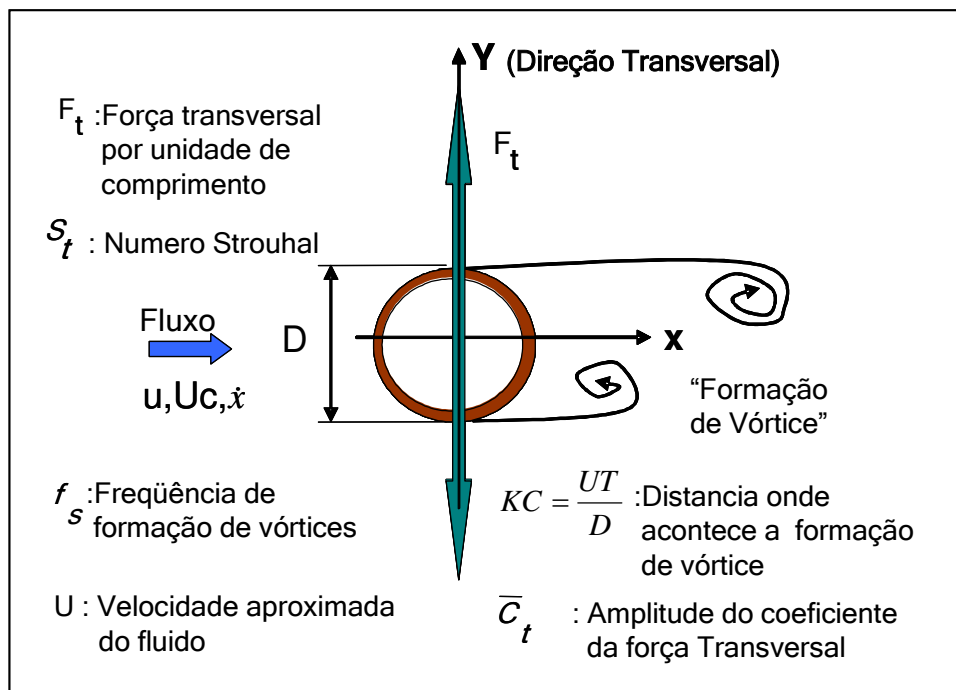


Figura 3.2. Componentes da força transversal.

Para seções bidimensionais típicas, como é o caso de *risers* em geral, estas forças transversais têm sido obtidas de experimentos disponíveis na literatura (Sarpkaya, 1981). Estas forças normalmente estão apresentadas na forma de coeficiente adimensional denominado de coeficiente da força transversal ou *lift*, e definido como:

$$\overline{C}_t = \frac{F_t}{1/2 \rho D U^2} \quad (3.6)$$

A frequência de formação de vórtices  $f_s$  (frequência de *shedding*) em um cilindro estacionário é outro parâmetro importante deste escoamento e sua forma adimensionalizada é denominada de número de Strouhal  $S_t$ :

$$S_t = \frac{f_s D}{U} \quad (3.7)$$

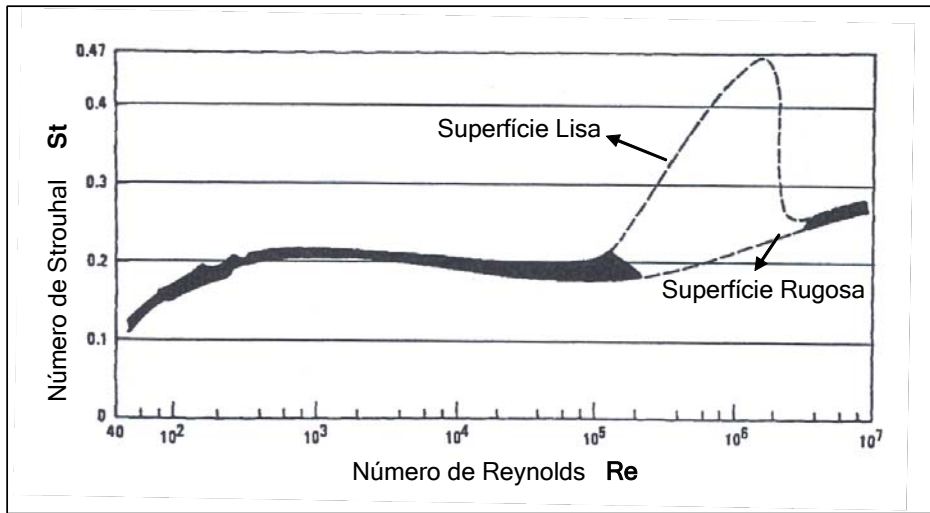
Para *risers* marítimos utilizados para perfuração ou produção de petróleo, em geral um cilindro flexível de superfície rugosa, o valor de 0.2 para o número de Strouhal parece ser apropriado ainda considerando o regime de fluxo crítico (Ferrari, 1998).

Vale ressaltar que o padrão de formação de vórtices em um cilindro de seção circular (*riser*) com escoamento permanente (correnteza marítima) em condições ideais é dependente do número de Reynolds. Já para um escoamento oscilatório (ondas marítimas), o padrão de formação de vórtice é dependente do número de Keulegan-Carpenter (KC) que está relacionado com a distância de ocorrência da formação de vórtices (Ferrari, 1998)

No presente trabalho foi adotado como modelo para a força transversal no *Riser* Auto-Sustentável o modelo de Ferrari e Berman (Ferrari, 1998) onde a força de VIV agindo em uma seção transversal do *riser* (cilindro), sujeita a um escoamento oscilatório (onda) em regime permanente e a uma correnteza, apresenta a forma senoidal e periódica conforme a seguir (Ferrari, 1998):

$$F_t = \frac{1}{2} \rho U_{w+c}^2 D \bar{C}_t \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) \quad (3.8)$$

onde a velocidade instantânea do fluxo é dada por  $U_{w+c} = u + U_c$ , onde  $u$  é a velocidade da partícula do fluido devido à onda e  $U_c$  é a velocidade da correnteza,  $\bar{f}_s$  é a frequência média de vórtices formados por segundo, a qual é calculada pela velocidade média da onda em cada meio ciclo sendo que  $t'$  varia de 0 a  $T/2$ , (Ferrari, 1998), e  $\varphi$  é a diferença de fase entre a resposta do *riser* e a força transversal. A frequência de desprendimento de vórtices pode ser obtida do número de Strouhal, Equação (3.7), e  $S_t$  é função do número de Reynolds, Figura 3.3. (Blevins, 1990).



**Figura 3.3 Número de Strouhal em função de número de Reynolds. (Blevins, 1990)**

Como foi considerado para o escoamento oscilatório, a média da velocidade instantânea é utilizada para cada meio ciclo, onde a frequência média de formação de vórtices  $\bar{f}_s$  é dada por:

$$\bar{f}_s = \frac{|\bar{U}| S_t}{D} \quad (3.9)$$

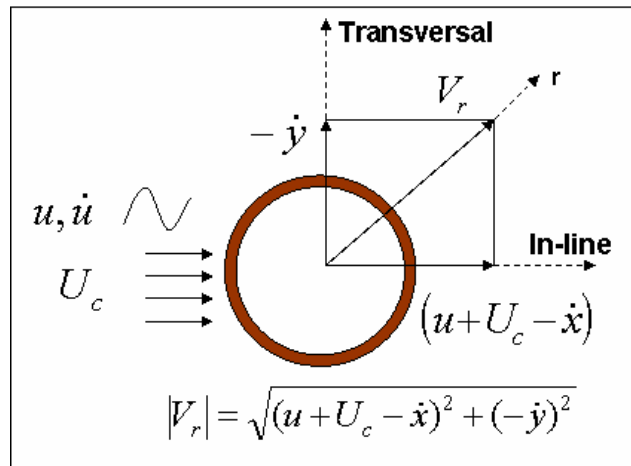
$$\text{onde, } \bar{U} = \frac{\int_{t_0}^t (u + U_c) dt}{(t - t_0)}.$$

### 3.3. Comportamento dinâmico do riser

A Equação de Morison aplicada no presente estudo considera um modelo adaptado para a velocidade relativa do *riser* (Ferrari, 1998) conforme é representado na Figura 3.4 e a força em sua forma vetorial é conforme a seguir:

$$\vec{F}_r = C_M A_I \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{F}_{VIV} + C_D A_D |\vec{V}_r| \vec{V}_r - C_A A_I (\ddot{\vec{x}} + \ddot{\vec{y}}) \quad (3.10)$$

Esta força é a força resultante que atua lateralmente no *riser* a qual é composta pelas componentes da força inercial, da força de VIV, da força de arrasto e da força proporcional a massa adicional acoplada através do fluido pelo termo  $|\vec{V}_r| = \sqrt{(u + U_c - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}$ .



**Figura 3.4** Velocidades no caso de duas dimensões.

As componentes do esforço hidrodinâmico presentes na Equação (3.10) na direção *in line* e transversal são respectivamente:

$$F_x = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |\vec{V}_r| (u + U_c - \dot{x}) - C_A A_I \ddot{x} \quad (3.11)$$

$$F_y = F_{VIV} - \underbrace{C_D A_D |V_r| \dot{y} - C_A A_I \ddot{y}}_{\text{Reação do fluido}} \quad (3.12)$$

Onde,

$$F_{VIV} = \frac{1}{2} \rho ((u - \dot{x}) + U_c)^2 D \bar{C}_t \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) \quad (3.13)$$

Na Equação (3.12) nota-se que a Equação de Morison se apresenta como força de reação do fluido oposta ao movimento do *riser* na direção transversal. Este modelo (Ferrari, 1998) descreve de forma mais fiel o escoamento ao redor da seção do *riser*, tendo em vista que considera a influência do escoamento na direção *in line* e na direção transversal, de forma concomitante.

As equações do comportamento dinâmico do *riser* na direção *in line* e na transversal são solucionadas aplicando-se a integração numérica Newmark  $\beta$  (Patel, 1989). Estas equações estão apresentadas a seguir:

$$[M]_x \ddot{x} + [B]_x \dot{x} + [K]_x x = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |V_r| (u + U_c - \dot{x}) - C_A A_I \ddot{x} \quad (3.14)$$

$$[M]_y \ddot{y} + [B]_y \dot{y} + [K]_y y = \frac{1}{2} \rho ((u - \dot{x}) + U_c)^2 D \bar{C}_t \cos(2\pi \bar{f}_s t' + \varphi) - C_A A_I \ddot{y} - C_D A_D |V_r| \dot{y} \quad (3.15)$$

Onde  $[M]_x$  e  $[M]_y$  são as matrizes de massa sem massa adicional, uma vez que esse termo está presente na excitação em forma de reação do fluido. O cálculo das matrizes de massa, amortecimento e rigidez e os respectivos modelos são apresentados no Apêndice B.

## Capítulo 4

### Resultados e Discussões

Realizaram-se neste estudo cálculos para o comportamento dinâmico do *Riser* Auto-Sustentável apresentando-se os resultados de calculo numérico em forma de envoltórias máximas e mínimas referentes aos deslocamentos nas direções *in line* e transversal. Na Figura 4.0 mostra-se o sistema e as principais características e efeitos de forma esquemática.

Na Seção 4.1 pretende-se mostrar a influência das características do fluido interno e das variações dinâmicas do fluido externo através de diversos carregamentos de onda com variações na altura e no período e com diferentes velocidades de correnteza. As diferenças nas envoltórias de deslocamentos são destacadas perante os diferentes carregamentos e mediante a presença ou não do fluido interno.

Outro aspecto abordado é a influência do comportamento dinâmico mediante a variação da geometria da bóia, apresentados na Seção 4.2.

Na Seção 4.3 é apresentado o comportamento dinâmico do riser perante a variação dos coeficientes hidrodinâmicos sobre o *Riser* Auto-Sustentável. Tanto no *riser* quanto na bóia são feitas variações no coeficiente de arrasto  $C_D$ , no coeficiente de massa adicional  $C_A$  e no coeficiente de força transversal ou de sustentação (*lift*)  $C_l$ .



Apresenta-se também na Seção 4.4 o efeito de variações no amortecimento estrutural do sistema.

E por fim, apresenta-se na Seção 4.5 um detalhamento do efeito da VIV na bóia e no *riser*, se apresentando as séries temporais dos deslocamentos em pontos da bóia e do *riser* na direção transversal, assim como as trajetórias espaciais.

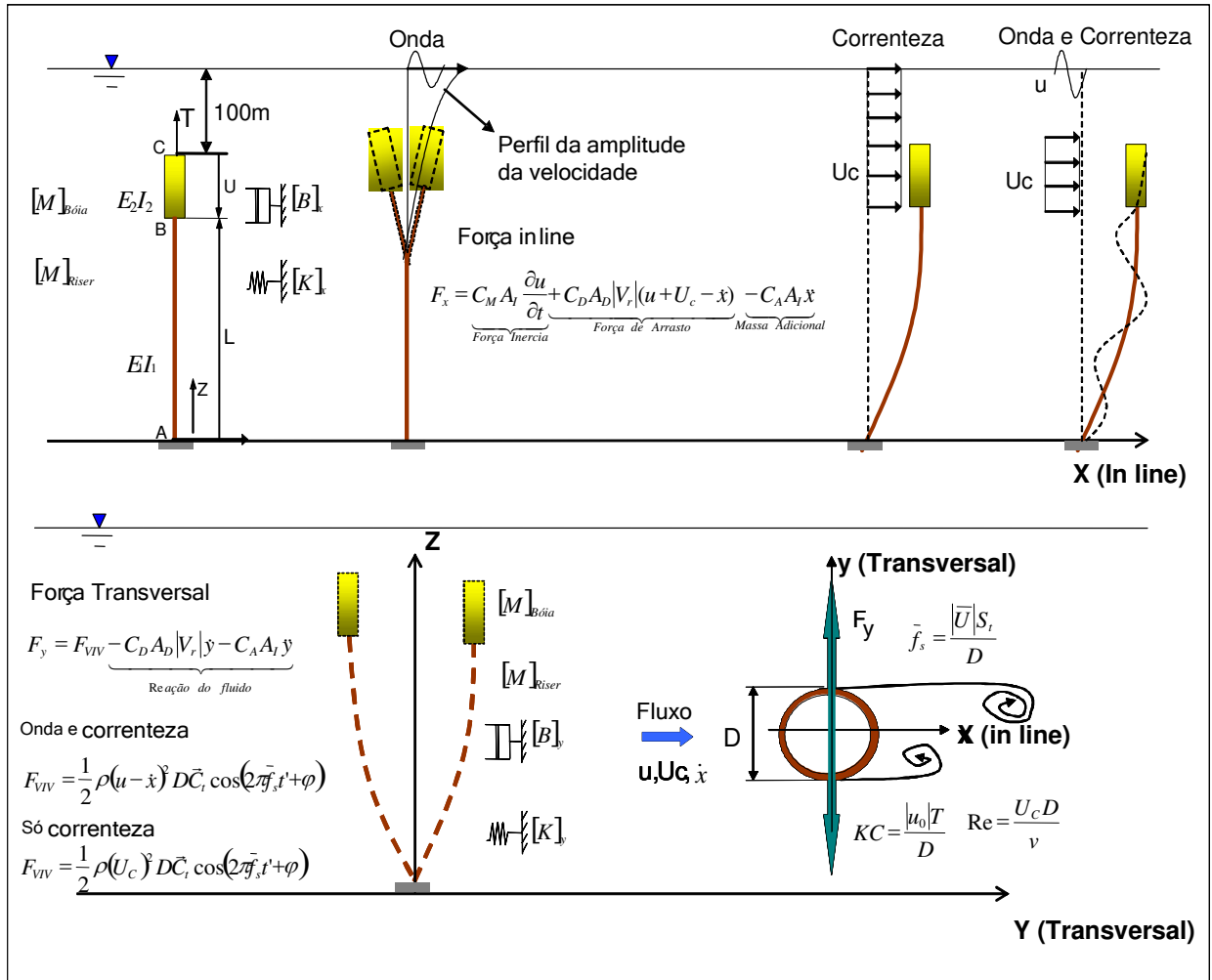
A Tabela 4 apresenta as principais dimensões do *riser* e da bóia utilizados para os cálculos realizados.

Os modos de vibração dominantes assumidos referentes às frequências adotadas para o cálculo da matriz de amortecimento proporcional são o primeiro e segundo modos tanto na direção *in line* quanto na direção transversal com um fator de amortecimento estrutural de 0.2.

**Tabela 4. Dados do *riser* e da bóia.**

<b>Riser</b>	
Comprimento da Lâmina de água [m]	2800,0
Comprimento do Riser [m]	2700,0
Densidade do fluido externo [ $kg/m^3$ ]	1025,0
Densidade do fluido interno [ $kg/m^3$ ]	970,43
Densidade do <i>riser</i> [ $kg/m^3$ ]	7846,05
Diâmetro externo [m]	0,45
Diâmetro interno [m]	0,41
Modulo de Young [kPa]	$2,1 \times 10^8$
CD-CA-Ct	1,2-1,0-1,2

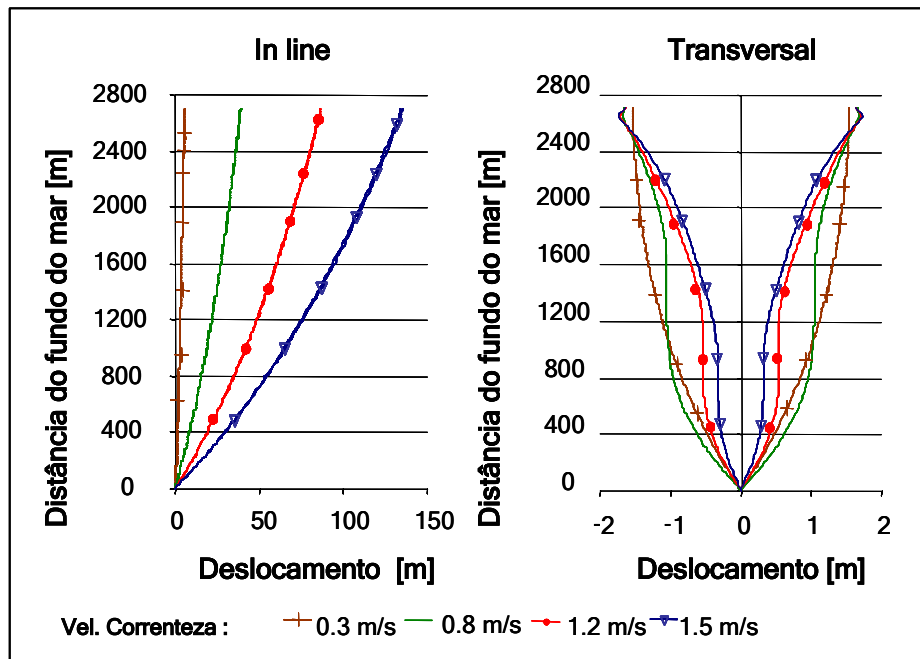
<b>Bóia</b>	
Comprimento [m]	37,0
Diâmetro externo [m]	6,4
Modulo de Young [kPa]	$2,1 \times 10^{13}$



**Figura 4.0. Sistema Riser Auto-Sustentável e seus principais parâmetros, efeitos e comportamentos.**

#### 4.1 Influência das características do fluido externo e interno no sistema *Riser* Auto-Sustentável.

Na Figura 4.1 mostramos resultados de cálculo numérico para o comportamento dinâmico do *riser* em quatro diferentes velocidades de correnteza: 0,3 m/s, 0,8 m/s, 1,2m/s e 1,5m/s. Estas correntezas são aplicadas somente na bóia.

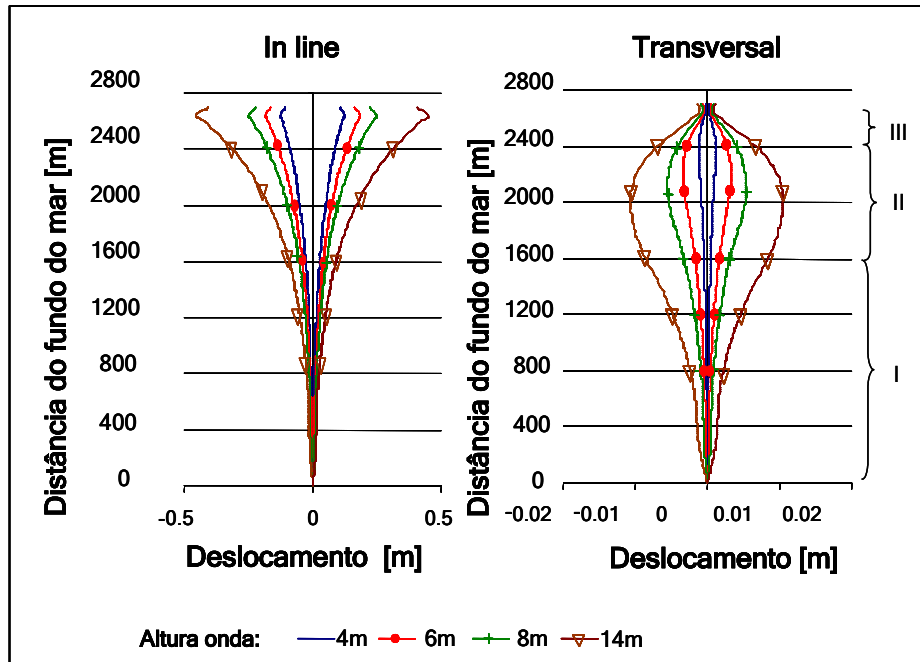


**Figura 4.1. Comportamento do *riser* em função da velocidade da correnteza.**

Como se percebe na Figura 4.0, a força *in line*  $F_x$  é tão maior quanto o valor da velocidade na sua componente de arrasto o que explica o aumento dos deslocamentos na direção *in line*. Na direção transversal como a velocidade de correnteza é aplicada somente na região da bóia, a força de VIV será nula na região do *riser* havendo somente a força de reação do fluido nesta região. Com o aumento da velocidade de correnteza há um aumento da força de reação do fluido na direção transversal reduzindo os deslocamentos nesta direção. No entanto, a região da bóia por ter uma velocidade de correnteza incidente diferente de zero, apresenta um número de Reynolds que, segundo a tabela de regime de escoamento apresentada em (Ferrari, 1998), está dentro de uma faixa em que há desprendimento de vórtices.

Na Figura 4.2 apresentam-se os resultados de simulações em termos de deslocamento para a incidência de um carregamento em que há somente a presença de onda mostrando-se a influência da variação da altura de onda considerando-se um período constante de 12 s. Como pode se ver, com o aumento da altura da onda, observa-se um aumento do deslocamento do *riser* na direção *in line*, pois há um incremento da energia da onda.

Na direção transversal, os deslocamentos da Figura 4.2 aumentam na medida em que há um aumento da altura da onda. Observa-se também que na região da bóia há uma queda brusca nos deslocamentos sendo que isto pode ser devido ao incremento da massa adicional do sistema devido à presença da bóia. O mesmo efeito pode ser observado na direção transversal.



**Figura 4.2. Comportamento do *riser* em função da altura de onda.**

Na direção transversal observam-se três regiões bem definidas na Figura 4.2 : I, II e III. Tais regiões são especificadas logo abaixo e são características de todos os resultados em que há carregamento somente de onda.

Dentro da região I o número de KC é pequeno devido à pequena influência da onda nesta região (Equação 3.4), possuindo para todos os casos em que há somente onda um valor menor que um. Em (Ferrari, 1998) é apresentada os padrões de formação de vorticidade para um cilindro dentro de um fluxo oscilatório em que um número de KC menor que 1 implica no não-desprendimento de vórtices, uma vez que o fluido não se separa. Portanto, a força transversal  $F_y$  terá somente a componente da força de reação do fluido a qual é dependente da velocidade relativa entre a onda e a estrutura.

Na região II se observa que o número de KC começa a incrementar seu valor devido à velocidade da onda que aumenta à medida que se aproxima a superfície da água. Para esta região o número de KC nos cálculos se encontra entre os valores de 1 a 4, significando que, segundo a Tabela referida anteriormente sempre haverá formação de vórtices. Como consequência os deslocamentos nessa região na direção transversal serão sempre maiores que os deslocamentos apresentados na região I.

Na região III observa-se que as envoltórias dos deslocamentos diminuem drasticamente. Isto acontece principalmente devido à variação brusca que se tem entre o diâmetro do *riser* e o diâmetro da bóia, sendo que o número de KC diminui consideravelmente seu valor, implicando em não formação de vórtices na região da bóia, sendo que a bóia fica somente sob a influência da força de reação do fluido, apresentando assim menores deslocamentos.

Na Figura 4.3 mostramos as envoltórias dos deslocamentos do sistema submetido a um carregamento somente de onda de 4 m de altura para diferentes períodos. É possível perceber que com a diminuição do período e o consequente aumento da velocidade da partícula de fluido devido à onda, há uma diminuição nos deslocamentos nas duas direções.

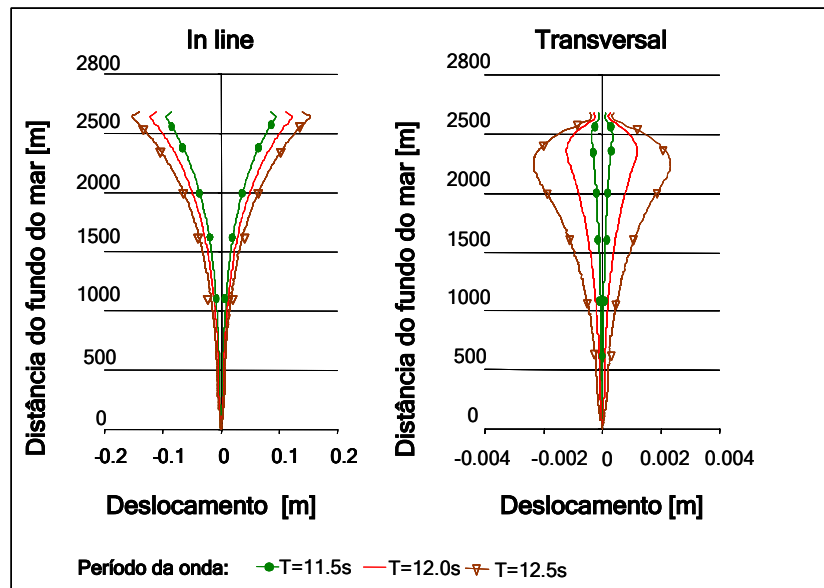


Figura 4.3. Comportamento do *riser* em função do período da onda.

A Figura 4.4 apresenta as envoltórias dos deslocamentos do *riser* nas direções *in line* e transversal para um carregamento de onda e correnteza, sendo que a onda possui uma altura de 14.6 m e um período de 12.2 s e a correnteza uma velocidade de 1.5 m/s. Tal resultado visa futuras comparações com casos experimentais como citado em (Pereira, 2005).

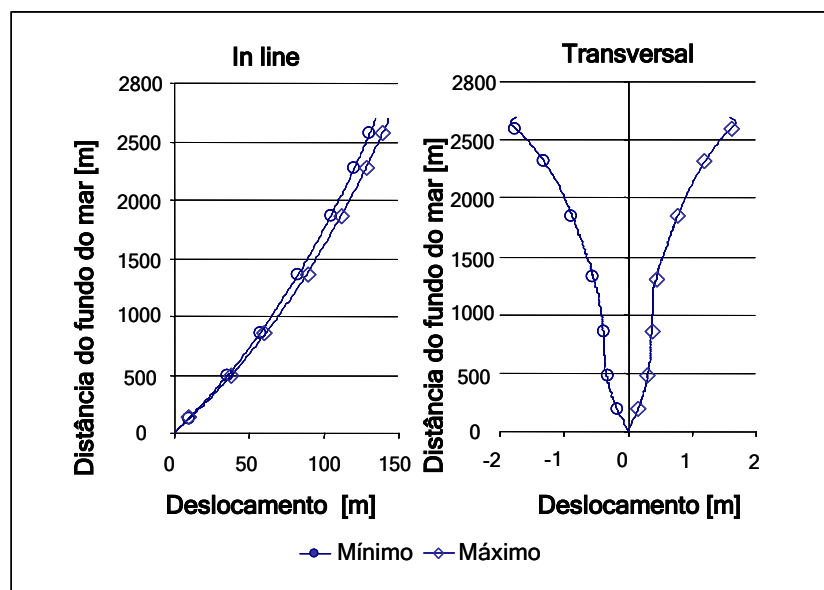
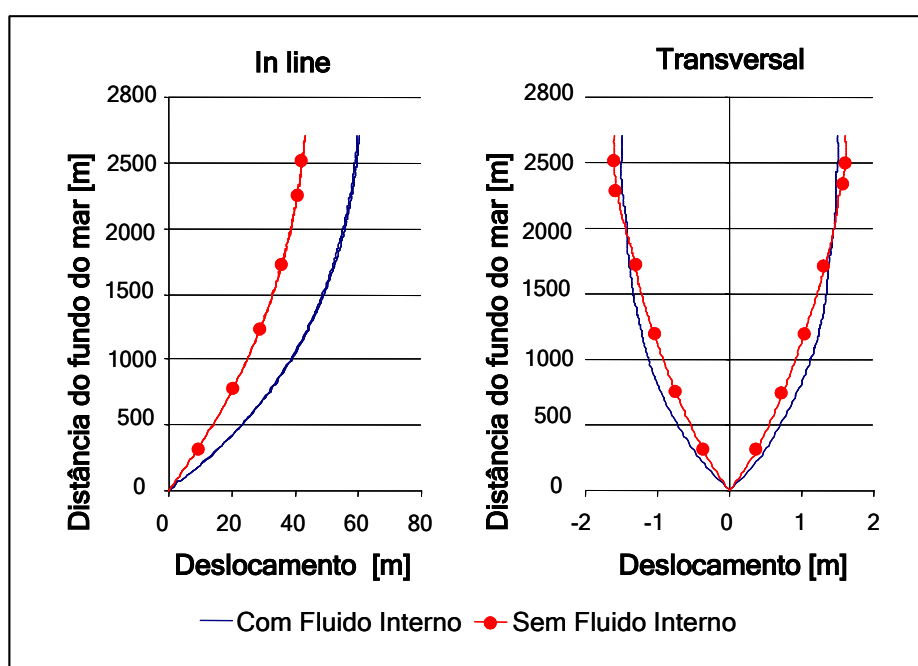


Figura 4.4. Envoltórias dos deslocamentos com onda e correnteza.

Na Figura 4.5 apresenta-se o efeito do sistema considerando o efeito da presença do fluido interno nos cálculos para um carregamento de correnteza de 0.5 m/s de velocidade ao longo da extensão da bóia. Observa-se que quando se considera o fluido interno a diminuição na pressão hidrostática interna afeta diretamente a tensão efetiva ao longo do *riser* diminuindo seu valor (Equação 2.1). Como se pode perceber nas direções *in line* e transversal o deslocamento será maior nos casos em que se considera o fluido.

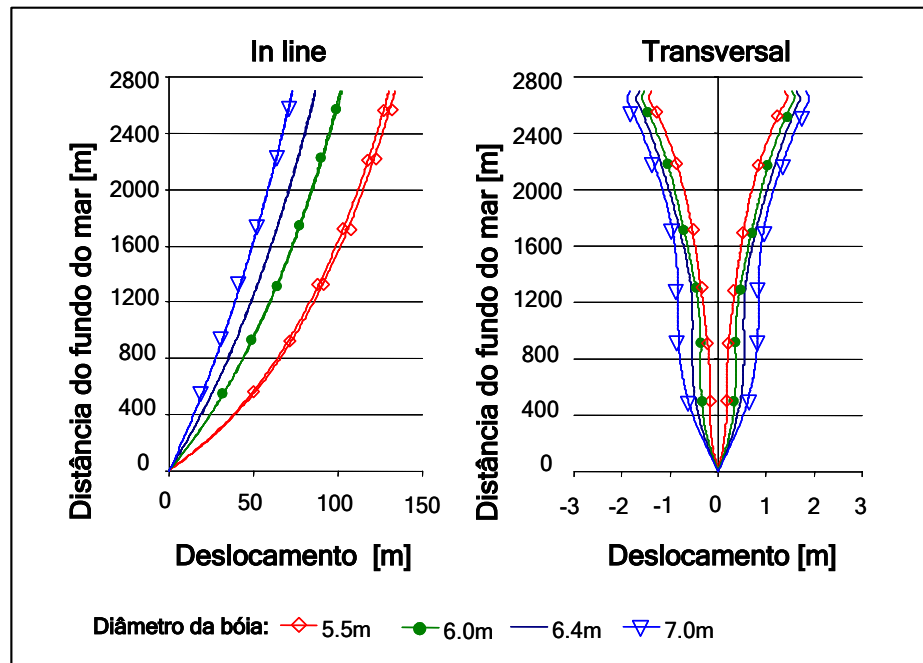


**Figura 4.5. Efeito do *Riser* Sustentável com e sem fluido interno.**

## 4.2 Variação das características geométricas da bóia

A Figura 4.6 apresenta as envoltórias máximas e mínimas do deslocamento do *riser* junto com a bóia variando-se o diâmetro da bóia. A velocidade de correnteza é de 1.2 m/s. Nesta figura percebe-se que os deslocamentos na direção *in line* diminuem quando o diâmetro da bóia aumenta. Isto ocorre devido ao aumento do volume da bóia que influi diretamente na tração efetiva do sistema aumentando os valores da matriz de rigidez geométrica. Também com este aumento do diâmetro, aumenta-se as forças de arrasto, sendo, porém, menores do que a influência do aumento da tração, Equação (3.3). Na direção transversal há um aumento pequeno dos

deslocamentos na medida em que se aumenta o diâmetro da bóia, já que há um aumento da força de VIV.



**Figura 4.6. Comportamento do sistema em função do diâmetro da bóia.**

Para observar o efeito que tem a variação do comprimento da bóia sobre o *Riser* Auto-Sustentável, a Figura 4.7 apresenta os resultados dos deslocamentos do sistema para um carregamento de correnteza constante de 0.5 m/s ao longo da bóia como anteriormente.

Na direção *In line* observa-se que com o aumento do comprimento, e consequentemente do volume da bóia, os deslocamentos diminuem pelos mesmos motivos citados no caso anterior. Entretanto na direção transversal observa-se que com o aumento do comprimento na bóia a influência deste aumento sobre a força transversal prevalece, embora haja um aumento da rigidez do sistema.



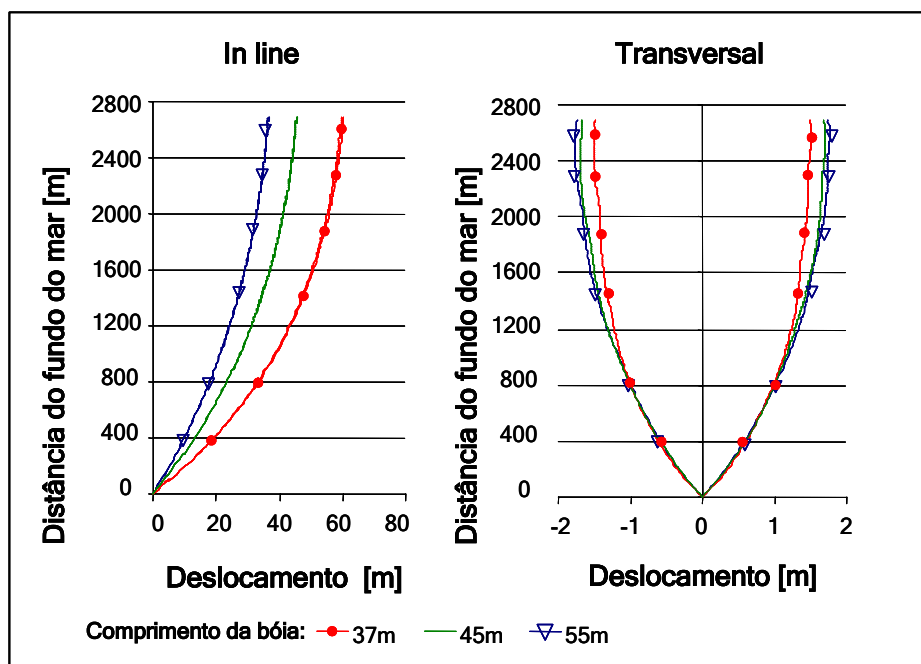
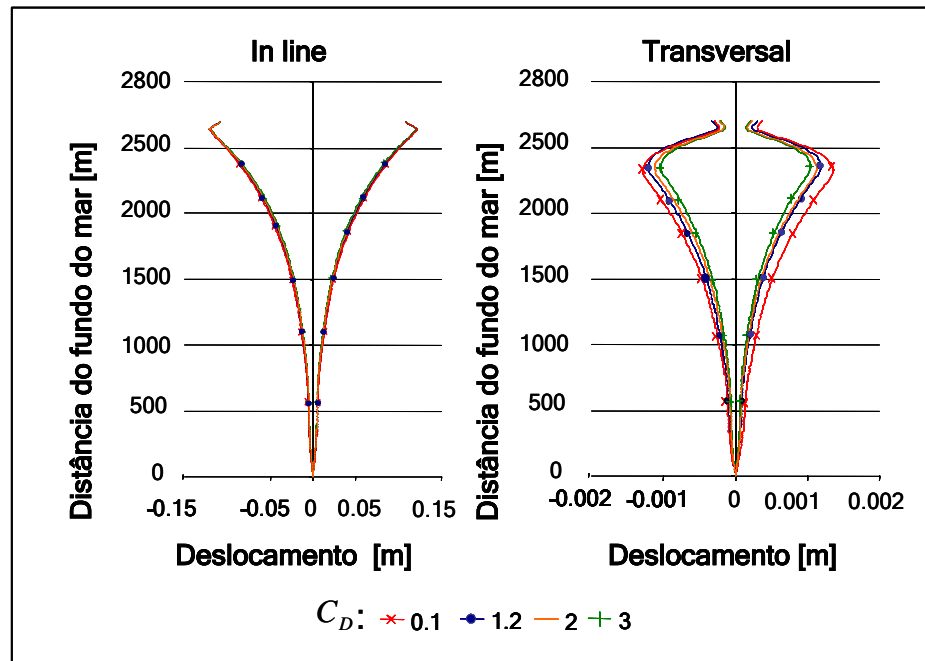


Figura 4.7. Efeito do comprimento variável na bóia do *Riser Auto-Sustentável*.

#### 4.3 Variação dos coeficientes hidrodinâmicos no *Riser Auto-Sustentável*.

Nos próximos resultados são apresentadas às envoltórias dos deslocamentos tendo em consideração diferentes valores dos coeficientes hidrodinâmicos. A Tabela 4 continuará sendo considerada com a exceção destes.

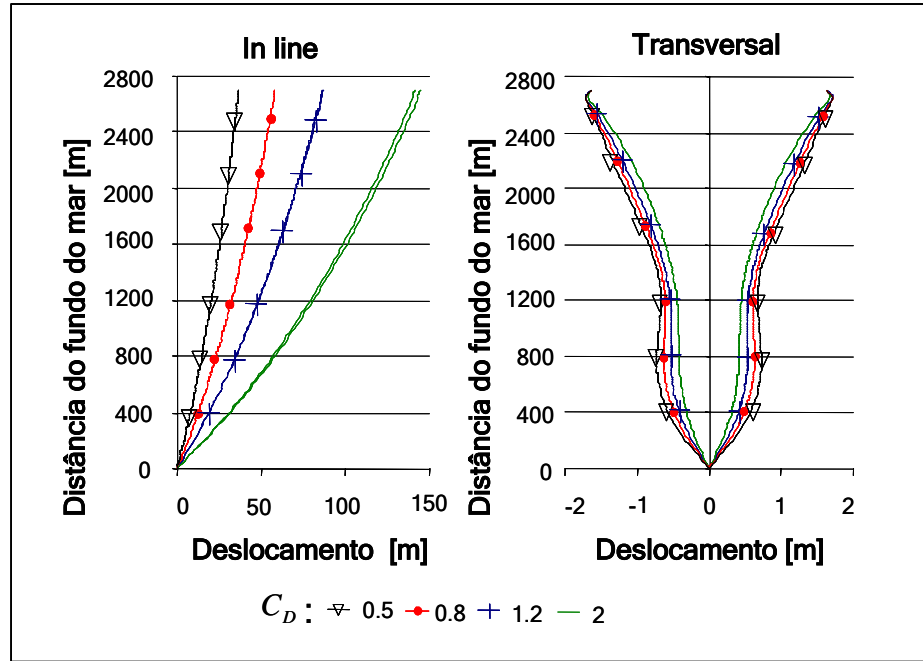
A Figura 4.8 apresenta os deslocamentos do *riser* para diferentes coeficientes de arrasto para um carregamento de somente onda de 4.0 m de altura e 12.0 s de período. O aumento do coeficiente de arrasto aumenta a força na direção *in line* e tende a diminuir a força na direção transversal, como se mostram nas equações (3.11) e (3.12) respectivamente, o que pode ser percebido nas respectivas envoltórias de deslocamentos.



**Figura 4.8. Comportamento do riser com a bóia em função do  $C_D$  em um fluxo oscilatório.**

Na Figura 4.9 é apresentada a influência do coeficiente de arrasto para um carregamento de correnteza constante ao longo da bóia de velocidade 1.2 m/s em termos dos deslocamentos nas direções *in line* e transversal.

Como se pode perceber, o  $C_D$  influencia notoriamente. Há um aumento da força *in line* com o aumento do  $C_D$  e uma diminuição da força transversal com o aumento da reação do fluido devida ao aumento do  $C_D$  nos cálculos. Tal tendência pode ser verificada também em (Kubota, 2003).



**Figura 4.9. Comportamento do riser com a bóia em função do  $C_D$  para correnteza constante ao longo da bóia de 1.2 m/s.**

Nas Figuras 4.10 e 4.11 mostra-se o efeito do coeficiente de lift sobre o sistema. A Figura 4.10 apresenta este efeito com uma onda de 4 m de altura e 12 s de período. Pode-se observar nesta figura que o coeficiente lift não apresentou mudança significativa nos deslocamentos na direção *in line* mesmo apesar de o modelo utilizado prever o acoplamento entre os movimentos nas direções *in line* e transversal, como é mostrado nas Equações (3.11), (3.12) e (3.13).

A Figura 4.11 mostra também o efeito do coeficiente transversal para um carregamento de correnteza constante de 0.5 m/s ao longo de toda a profundidade de água. Pode-se perceber que em relação ao caso com onda, além do aumento dos deslocamentos na direção transversal, o aumento do coeficiente  $C_t$  traz como consequência o aumento dos deslocamentos na direção *in line*. Isto significa que o acoplamento do sistema pela velocidade relativa neste caso tem uma certa influência (figura 3.4), já que a velocidade de correnteza tem maior efeito que a velocidade da onda, assim como também a velocidade da estrutura na direção transversal é maior que no caso de onda somente.

Como era de se esperar, nos dois casos os deslocamentos aumentam com o incremento do coeficiente transversal.

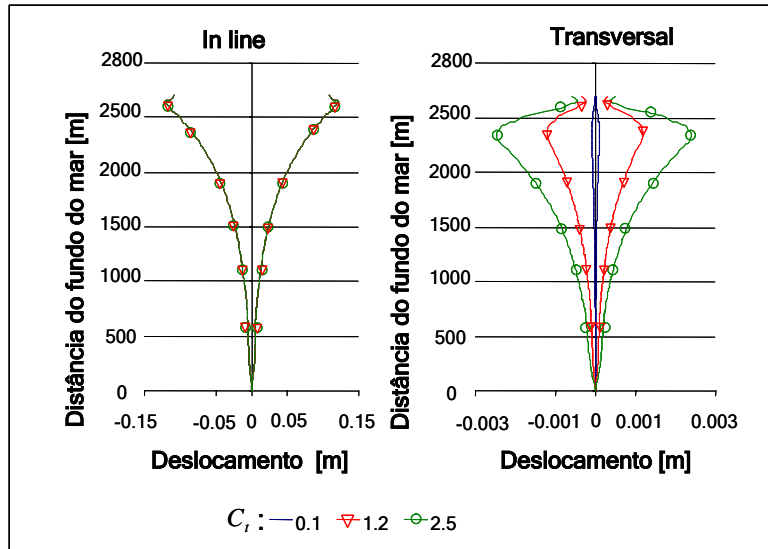


Figura 4.10. Efeito do coeficiente lift  $C_l$  no *Riser Auto-Sustentável* com onda

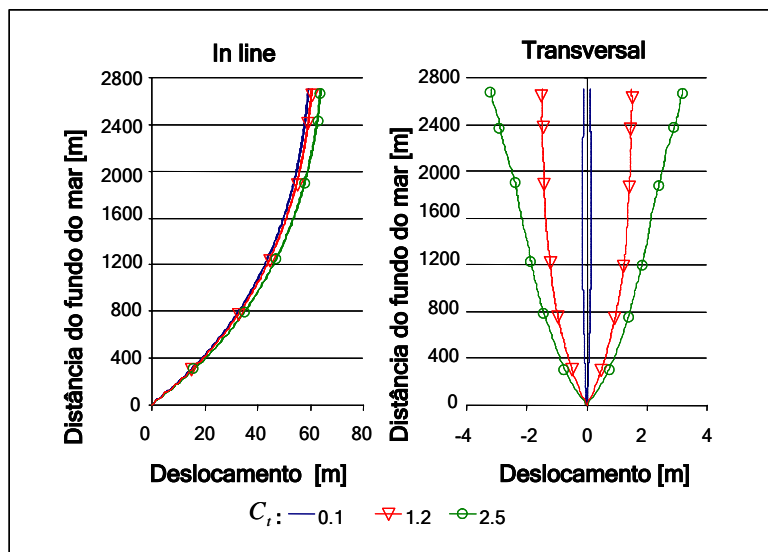
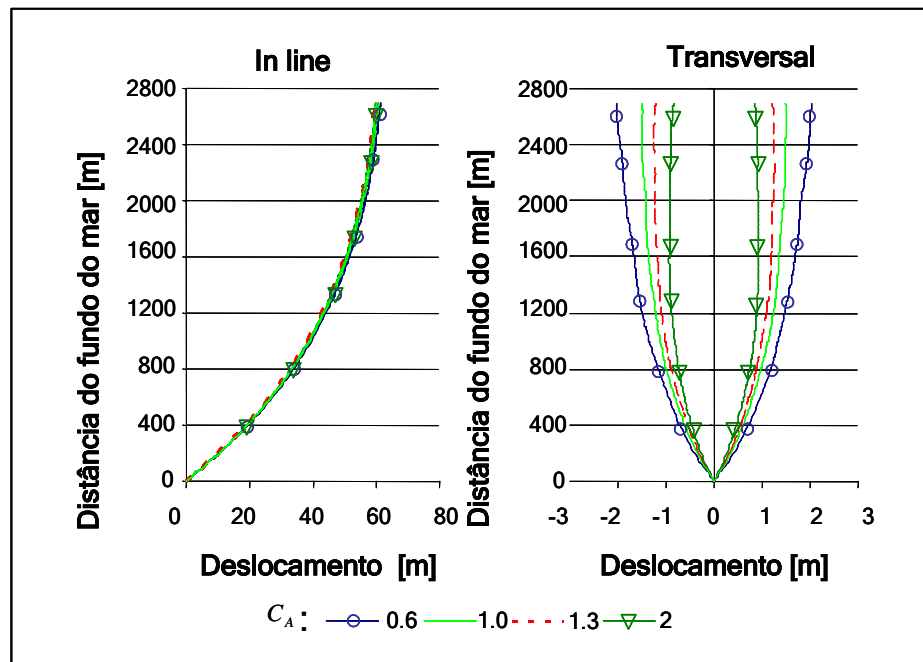


Figura 4.11. Efeito do coeficiente lift  $C_l$  no *Riser Auto-Sustentável* com correnteza

A Figura 4.12 apresenta o efeito do coeficiente de massa adicional  $C_A$  para um carregamento de correnteza constante ao longo da lâmina de água. Na direção *in line* a variação do coeficiente da massa adicional, conforme a Equação (3.11), se apresenta como uma força de reação, assim os deslocamentos mostram a tendência de diminuir com o aumento do  $C_A$ . Na

direção transversal, percebe-se mais claramente a influência da variação do  $C_A$ , conforme a Equação (3.12), à medida em que se aumente a massa adicional os deslocamentos transversais diminuem, pois a força de reação nesta direção aumenta com o aumento deste coeficiente.



**Figura 4.12. Efeito do coeficiente de massa adicional  $C_A$  no *Riser* Auto-Sustentável com correnteza**

#### 4.4 Influencia dos parâmetros estruturais no *Riser* Auto-Sustentável

A Figura 4.13 mostra o efeito do fator de amortecimento estrutural nos deslocamentos *in line* e transversal. Para este caso utilizou-se uma onda de altura 4.0 m e período 10.0 s. Percebe-se uma bem diferenciada variação dos deslocamentos causados pela variação do amortecimento estrutural uma vez que ele influencia diretamente na matriz de amortecimento do sistema representando uma resistência da estrutura ao movimento como apresentado nos resultados, onde quanto maior o fator de amortecimento, menores serão as envoltórias dos deslocamentos nas duas direções.

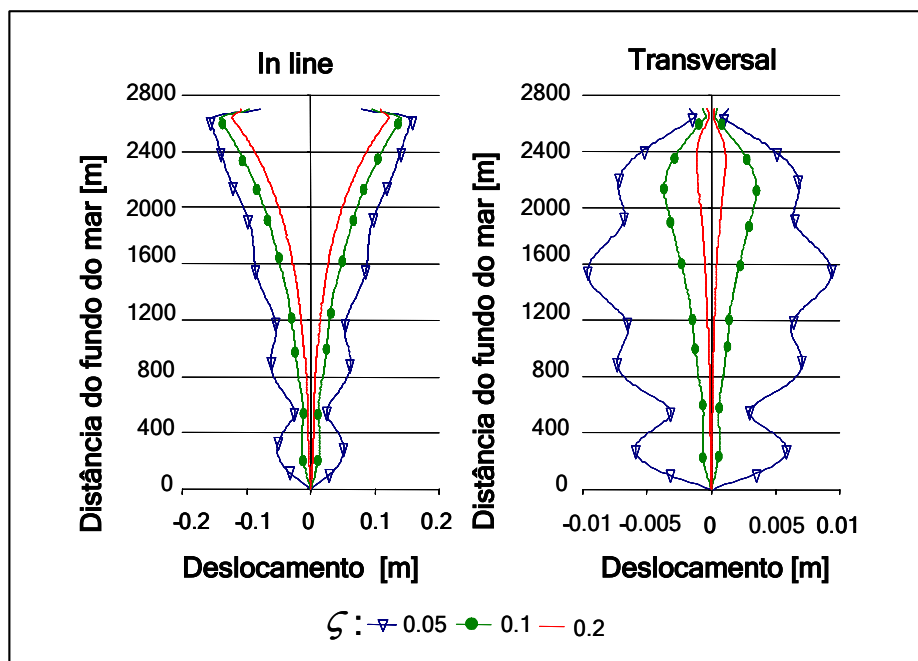


Figura 4.13. Efeito do fator de amortecimento  $\zeta$  no *Riser* Auto-Sustentável.

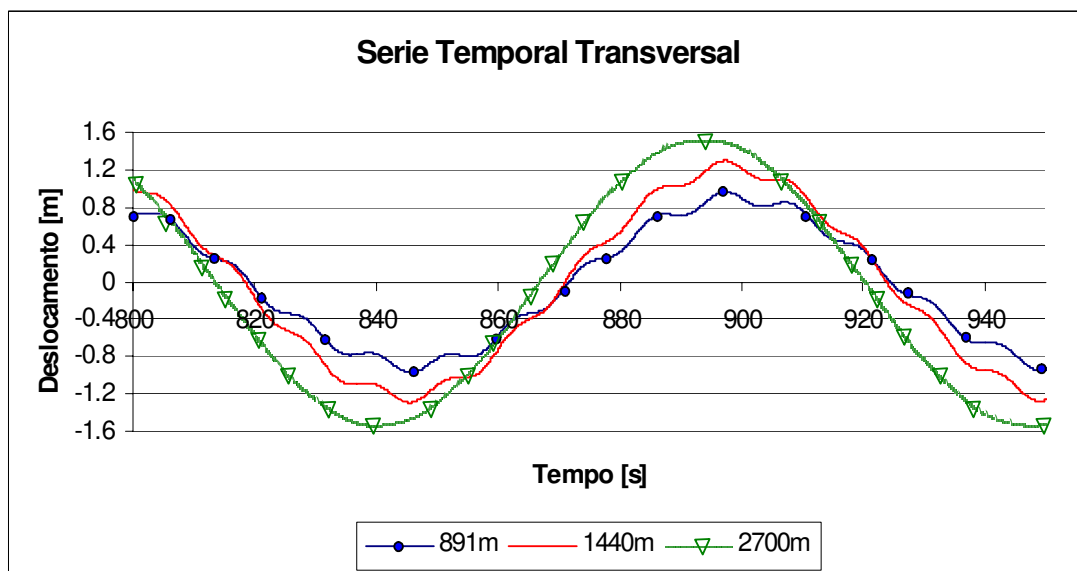
#### 4.5 Estudo do efeito da VIV no riser em relação ao comportamento dinâmico do sistema

O resultado da Figura 4.14 mostra os deslocamentos transversais do *riser* com uma correnteza imposta ao longo lâmina de água. No *riser* o valor da velocidade de correnteza ao longo de sua extensão é de 0.2 m/s e na bóia é de 0.5 m/s.

São apresentados os deslocamentos transversais para três pontos do sistema, a 891 m, 1440 m e 2700 m a partir do fundo do mar, sendo os dois primeiros pontos situados no *riser* e o último na bóia. Pode-se notar que os movimentos do *riser* em comparação aos movimentos da bóia apresentam pequenas oscilações ao longo de sua trajetória com um caráter periódico. Calculando-se o espectro de potência destes sinais percebe-se que o período maior de deslocamento corresponde ao período de oscilação da bóia na direção transversal e o período menor corresponde ao período de oscilação na direção transversal de um *riser* vertical sem bóia suspenso por uma força, equivalente ao efeito da bóia, concentrada no seu topo.

Para este caso percebe-se que o número de Reynolds corresponde a um padrão de fluxo subcrítico o qual prevê formação de vorticidade forte e periódico. Trabalhou-se para este caso com um número de Strouhal de aproximadamente 0.2. Percebe-se no resultado da Figura 4.14

que a VIV na bóia influencia significativamente o movimento transversal do *riser* podendo significar um aumento nos níveis de tensão do mesmo em comparação com um riser vertical rígido sem bóia.



**Figura 4.14. Série temporal dos deslocamentos transversais**

A Figura 4.15 apresenta os deslocamentos em um plano horizontal para dois casos. No caso 1 considera-se uma correnteza de 0.3m/s incidente somente sobre a bóia e no caso 2 considera-se dois perfis distintos de velocidade de correnteza: 0.3 m/s incidente sobre a bóia e 0.2 m/s incidente sobre o *riser*. Percebe-se claramente na figura a diferença entre os deslocamentos planares para os casos em que há incidência de correnteza e consequentemente desprendimento de vórtices no *riser* demonstrando a importância dos deslocamentos de acordo ao efeito de vorticidade. Percebe-se também que os valores de deslocamento na direção *in line* previstos pelo acoplamento dos movimentos nas duas direções são significativos em relação ao movimento transversal.

Segundo (Patel, 1989) em concordância com testes experimentais quando se tem um cilindro imerso em um campo de correnteza, o número de Reynolds é importante para observar a separação do fluido e a formação de vórtices. Nos casos em que o número de Reynolds é pequeno o fluido fica numa faixa onde não há desprendimento de vórtices. Pode-se perceber que no primeiro caso da Figura 4.15 em que só há correnteza na bóia, a velocidade relativa do fluido

escoando em torno do *riser* não é suficiente para gerar desprendimento de vórtices, sendo que o valor do número de Reynolds nestes pontos é pequeno. Já no segundo caso, quando a correnteza é imposta sobre o *riser*, o número de Reynolds no *riser* terá um valor dentro da faixa na qual se percebe a formação de vórtices causando assim uma vibração induzida na direção transversal em pontos do *riser* como se pode ver no caso 2 da Figura 4.15.



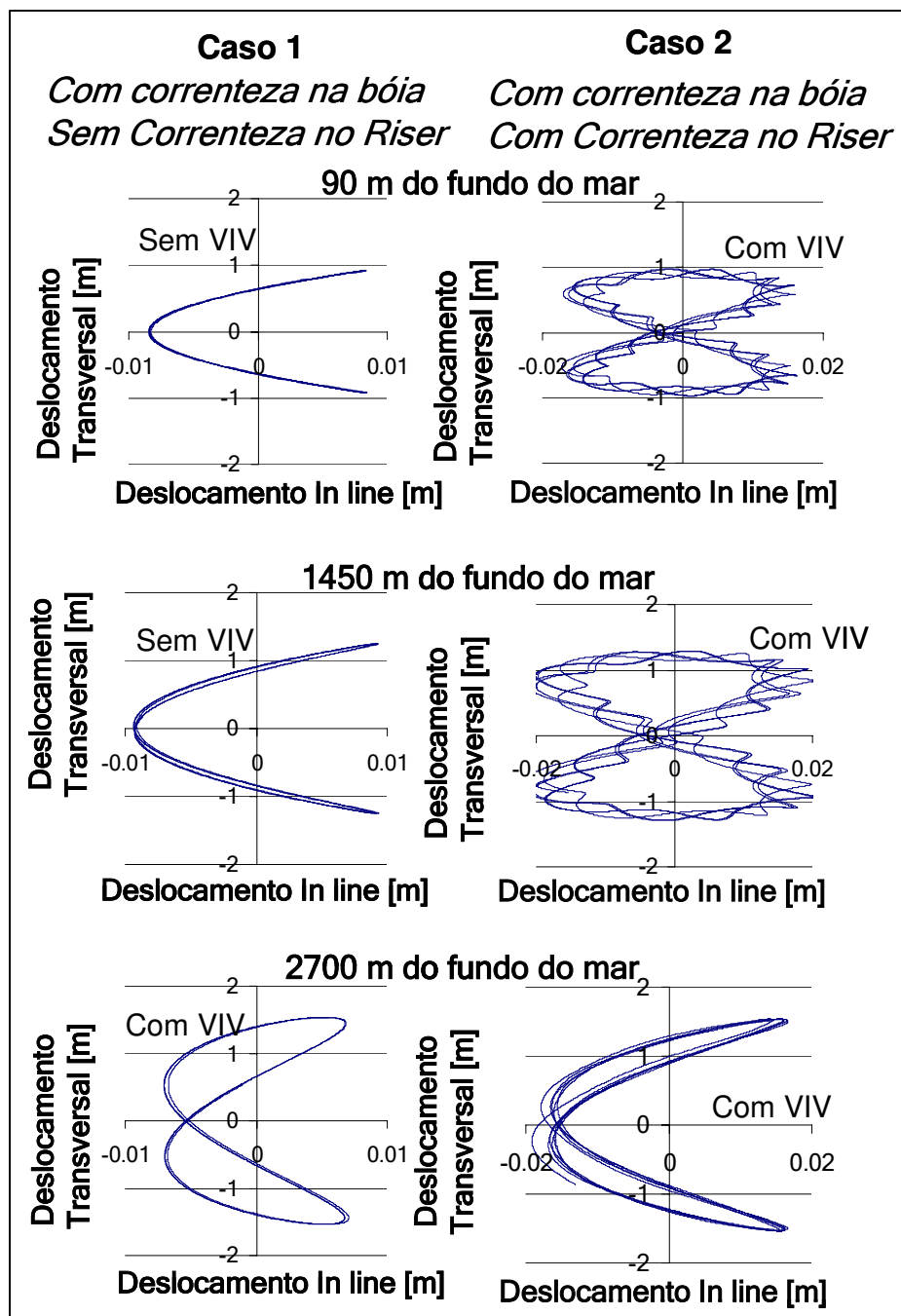


Figura 4.15 Deslocamento planar com e sem efeito de VIV

## Capítulo 5

### Conclusões

O presente trabalho teve por objetivo utilizar conceitos já amplamente apresentados para o comportamento de *risers* verticais rígidos e adaptá-los para o cálculo do comportamento de um *Riser* Auto-Sustentado por uma bóia de subsuperfície focando nos principais parâmetros de relevância técnica do ponto de vista operacional. Com isso pretendeu-se apresentar substrato para futuras discussões acerca das vantagens e limitações da configuração do *Riser* Híbrido Auto-Sustentável.

Dentre dos resultados obtidos, puderam se observar como os mais importantes parâmetros relativos à hidrodinâmica do sistema, os coeficientes de arrasto, inércia e transversal, sendo então que estes coeficientes possuem relevância destacada. No que se refere à estrutura do *riser* com bóia de subsuperfície, foi possível notar que variações na rigidez do sistema, em especial na bóia causam diferenças no comportamento do sistema, sendo assim de importância sua correta consideração nos cálculos de projeto assim como o fator de rigidez.

A bóia por sua vez merece um estudo mais cuidadoso tanto em termos estruturais quanto hidrodinâmicos, uma vez que até mesmo pequenas variações nas suas dimensões geométricas causam grandes variações no comportamento do sistema como se pôde perceber principalmente nos resultados de deslocamentos na direção *in line* que envolviam carregamento de correnteza.

No que diz respeito ao comportamento do sistema na presença de ondas, percebe-se que variações no período e na altura de ondas causam grandes variações no comportamento do sistema, sugerindo que a aproximação desta influência por métodos determinísticos pode ser por demais conservativo, sendo necessário um tratamento estatístico para cálculos de vida útil à fadiga efetuados no projeto do sistema.

Quanto aos modelos hidrodinâmicos utilizados para os carregamentos *in line* e, especialmente, transversal, pôde-se afirmar que são práticos no sentido de permitir a consideração conjunto dos efeitos de onda e correnteza, além de aproximar através do fluido o acoplamento existente entre os movimentos nas direções *in line* e transversal.

O fato de se considerar a bóia como um elemento elástico de rigidez elevada pode causar diferenças com relação ao real comportamento do sistema, uma vez que a bóia possui um comportamento similar ao de um corpo rígido, sendo necessárias comparações com resultados experimentais de forma a analisar a eficiência desta aproximação.

O efeito da VIV mostrou-se de grande importância no comportamento do sistema causando um movimento de período longo na bóia que como pôde ser visto tende a impor no *riser* deslocamentos com este período além da vibração induzida por vórtices em sua estrutura. Tal movimento de grande período tende a aumentar os níveis de tensão aos quais o *riser* está submetido causando uma possível redução da sua vida útil.

É necessário também se fazer um estudo apurado do comportamento elástico do solo e sua influência nas condições de engastamento no fundo do *riser*. A junção do *riser* com a bóia também necessita de uma modelagem mais próxima ao modelo real uma vez no modelo aqui utilizado o *riser* encontra-se engastado na junção com a bóia causando elevados níveis de tensão neste ponto nos cálculos obtidos por simulação.

Sugere-se também a utilização de Teoria de difração para o cálculo da hidrodinâmica da bóia uma vez que seu elevado diâmetro aparente causa distorções nas características da onda incidente.

Para trabalhos futuros sugere-se um estudo mais detalhado dos pontos já citados considerando-se a influência da linha flexível sobre o *riser* rígido com a bóia de subsuperfície e comparações das simulações obtidas com resultados experimentais.

## Referências Bibliográficas

- Andueza, A. e Estefen, S. F., Estudo de Configuração de *Riser* Híbrido para Águas Ultraprofundas, SOBENA, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- Blevins, R., Flow-Induced Vibration, 2ª edition, Krieger publishing Company, 1990.
- Burden, R. e Faires, J., Numerical Analysis, 5ª publicação, PWS Publishing Company, 1993 .
- Coelho, F. M.; Morooka, C. K.; (Kubota, 2003), H.Y.; Ferrari Jr., J. A. e Ribeiro, E. J., Estudo Paramétrico dos Deslocamentos em *Risers* de Produção com Tensionamento no Topo, SOBENA, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- Coimbra Thomé, M. e Gargoul, N. S., Evaluation of a Rigid Pipe *Riser* Concept for Deepwater Production. OMAE/OFT-1083, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
- Chakrabarti, S. K. e Frampton, R. E., Review of *Riser* analysis techniques. Chicago Bridge and Iron Co., Plainfield, IL 60544, USA, 1982.
- Chakrabarti, S.K, “Hydrodynamic of Offshore Structures”, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, USA, Illinois, chapter 6., 1987.
- Craig, R.R. , Structural Dynamics – An introduction to Computer methods, 1<sup>st</sup> ed., John Wiley & Sonc, Inc, 1981.

- Dailey, J.E.; Healy, B.E.; Zhang, J., Truss *Riser* Tower in Deep Water, OTC 14190, USA, Houston, Texas, 2002.
- Déserts, L., Hybrid *Riser* for Deepwater Offshore Africa. OTC 11875, USA, Houston, Texas, 2000.
- Ferrari, J. A., Hydrodynamic Loading and Response of offshore *Riser*. tese de doutorado, Imperial college of Science, technology and Marine, England, London, 1998.
- Ferrari, J. A. e Bearman, P. W., Hydrodynamic Loading and Response of Offshore *Risers*. OMAE99-4132, Canada, Newfoundland, 1999.
- Fisher, E.; Holley, P. e Brashier, S., Development and Deployment of a Freestanding Production *Riser* in the Gulf of Mexico. OTC 7770, USA, Houston, Texas, 1995.
- Kubota, 2003, H. Y., Comportamento Dinâmico de um *Riser* Rígido de Produção, dissertação de mestrado Universidade Estadual de Campinas, Brasil, Campinas, 2003.
- Lu, P.; Shen, F.; O'shea, S.J.; Lee, K.H. e Ng., T.Y., Analysis of Effects on Mechanical Properties of Microcantilevers. Mater. Phys. Mech. 4 , p. 51-55, Singapore, 2001.
- Martins, F. P. ; (Kubota, 2003), H.Y.; Morooka, C. K.; Ferrari Jr., J. A. e Ribeiro, A Study on *In line* and Transverse Dynamic Behavior of a Vertical *Riser* in Time Domain. COBEM, São Paulo, Brasil, 2003.
- Morooka, C. K.; Coelho, F. M.; (Kubota, 2003), H.Y.; Ferrari Jr., J. A. e Ribeiro, E. J., Investigations on the Behavior of Vertical Production *Riser*, OMAE/OFT, Vancouver, Canadá, 2004.
- Patel, M. H., Dynamics of offshore structures. Butterworth & Co. (Publishers) Ltd, England, London, 1989.

- Paz, Mario, Structural Dynamic: The Theory and Computation, USA, New York, Van Nostrand Reinhold, 1991.
- Pereira, P. S. D.; Maeda, K.; Morooka, C. K.; Tamura, K.; Itoh, K., Experimental Study on Self Standing Hybrid *Riser* System Throughout Test on a Deep Sea Model Basin, OMAE2005-67558, 2005.
- Rivin, E.I., Stiffness and damping in mechanical design, M. Dekker, USA, New York Appendix 3, pp.417-419, 1999.
- Sarpkaya, T. e Isaacson, M., Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures. 1<sup>st</sup> ed., Van Nostrand and Reinhold Company, 1981.
- Sertão, O. B.; Longo, C. E. V. e Roveri, F. E., *Riser* Systems for Deep and Ultra-Deepwaters. OTC 13185, USA, Houston, 2001.

## Apêndice A

### Considerações para o Estudo do Comportamento Estático e da Vibração Livre

#### A.1. Desenvolvimento da equação estática para um *riser* vertical rígido.

Considerando-se o equilíbrio das forças dinâmicas no elemento através da somatória das forças nas direções de x e y, temos que:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ (T + dT)\cos(\theta + d\theta) - T\cos\theta + (V + dV)\sin(\theta + d\theta) \\ - V\sin\theta + (F_{x0} + F_{xi}) + N\sin\theta d\theta &= 0\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ (T + dT)\sin(\theta + d\theta) - T\sin\theta - (V + dV)\cos(\theta + d\theta) \\ + V\cos\theta + (F_{y0} + F_{yi}) - W - N\cos\theta d\theta &= 0\end{aligned}\tag{A.1.2}$$

Considerando as identidades trigonométricas:  $\sin(\theta + d\theta) = \sin\theta \cos d\theta + \sin d\theta \cos\theta$  e  $\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta \cos d\theta - \sin d\theta \sin\theta$ , as equações (A.1.1) e (A.1.2) podem ser expressas da seguinte forma:

$$-(T\sin\theta - V\cos\theta)d\theta + dT\cos\theta + dV\sin\theta + (F_{x0} + F_{xi}) + N\sin\theta d\theta = 0\tag{A.1.3}$$



$$(T \cos \theta + V \sin \theta) d\theta + dT \sin \theta - dV \cos \theta + (F_{y0} + F_{yi}) - W - N \cos \theta r d\theta = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

A multiplicação das expressões (A.1.3) pelo  $\sin \theta$  e (A.1.4) pelo  $\cos \theta$ , resulta:

$$Td\theta - dV + (F_{yi} + F_{y0} - W) \cos \theta - (F_{x0} + F_{xi}) \sin \theta - N r d\theta = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

As forças horizontais  $(F_{x0} + F_{xi})$  e verticais  $(F_{y0} + F_{yi})$  são próprias da pressão hidrostática interna e externa como se mostra na referencia (Patel, 1989), conforme seguir:

$$F_{x0} + F_{xi} = [(p_i A_i - P_0 A_0) + (\gamma_i A_i - \gamma_0 A_0) r (\cos \theta - \sin \theta d\theta)] \sin \theta d\theta \quad (\text{A.1.6})$$

$$F_{y0} + F_{yi} = [(p_0 A_0 - P_i A_i) + (\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i) r (\cos \theta - \sin \theta d\theta)] \cos \theta d\theta \quad (\text{A.1.7})$$

Onde  $p$ ,  $A$ , e  $\gamma$  são a pressão, área da seção transversal e o peso específico do fluido.

Substituindo as duas últimas equações na Equação (A.1.5), obtém se:

$$(T + p_0 A_0 - p_i A_i) d\theta - dV + ((\cos \theta - \sin \theta d\theta)(\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i) - \gamma_s A_s \cos \theta - N) r d\theta = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

onde,  $W = \gamma_s A_s r d\theta$ ,  $\gamma_s$  é o peso específico do material da parede do *riser* e  $A_s$  a seção transversal da parede do *riser*.

É importante mencionar que a pressão dinâmica exercida pelo escoamento do fluido interno será desprezada para efeito de simplificação neste trabalho. As forças hidrostáticas não atuam na extremidade inferior do *riser* (o ultimo nó) tendo em vista que o mesmo encontra-se na condição de engastado fundo, ou seja, neste nó não há nenhum tipo de deslocamentos.

Utilizando-se a transformação de coordenadas para o sistema cartesiano e supondo que a curva da deflexão do *riser* tem pequenas inclinações consideradas não desprezíveis:

$$ds \neq dx \text{ e } \theta \neq d\theta$$

Então se tem:

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} ; \sin \theta = \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{d(\arctan dy/dx)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} .$$

Esta equação  $\frac{d\theta}{ds}$  representa a curvatura do *riser* e à partir dela podemos escrever:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dV}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Dividindo a Equação (A.1.8) por  $(ds)$  obtemos a expressão  $\frac{dV}{ds}$  então se obtém a seguinte expressão:

$$(T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 y}{dx^2} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-1} - \frac{dV}{dx} + (\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i - \gamma_s A_s) - N \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2} = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

Baseado na equação de flexão da viga, pode se introduzir a seguinte expressão:

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 x}{dy^2} \right) \quad (\text{A.1.10})$$

Onde E é o modulo de Young ou modulo de elasticidade, I é o segundo momento de área do *riser* e EI é a rigidez a flexão da viga.

Multiplicando (A.1.9) por  $(dx/dy)$ , usando a equação da viga flexionada (A.1.10) e assumindo que  $\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$  é igual a um para pequenas deflexões, se obtém:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 x}{dy^2} \right) - (T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 x}{dy^2} = N + (\gamma_s A_s + \gamma_i A_i - \gamma_0 A_0) \frac{dx}{dy} \quad (\text{A.1.11})$$

Esta expressao é a equação diferencial que representa o comportamento estático do riser tal como é apresentada no Capitulo 2.

## A.2. Analise por Elementos Finitos para riser Verticais rígidos

A formulação fraca do Método “Galerkin”, que é um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados, será utilizada para a solução da Equação (2.1) do Capítulo 2.

### A.2.1. Deslocamentos laterais

No método dos resíduos Ponderados, busca-se encontrar uma solução aproximada de uma equação diferencial do tipo  $f(x) = b$ , em um domínio  $\psi$ . A obtenção da solução é feita com o auxilio de uma função resíduo R, a qual também satisfaz as condições de contorno do problema. Ver referencia (Paz, 1991)

O objetivo do método é fazer os erros menores possíveis sobre o domínio da função, assim:

$$\langle R, w \rangle = \int_{\psi} R w d\psi = 0$$

$$R = f(x_0) - b \neq 0$$

$$x_0 \in \psi$$

Portanto:

$$\int_{\psi} (f(x_0) - f(x)) w d\psi = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

$w$ : função peso

Para obter equações elementares, se analisa um elemento da viga e constrói-se a formulação fraca do método de Galerkin no elemento.

A formulação fraca consiste, essencialmente, na exigência de que as condições de contorno de um determinado problema sejam satisfeitas.

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dy^4} = q(y) \quad (\text{A.2.2})$$

Sendo  $q(y)$  o carregamento distribuído ao longo do comprimento do *riser*.

Na Equação (A.2.2) utilizando o método dos resíduos ponderados, no domínio  $\psi = (0, L)$  e posteriormente integrando-se por partes obtemos:

$$\int_0^L w \left[ EI \frac{d^4 v}{dy^4} - q(y) \right] dy = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

$$\int_0^L \left[ -\frac{dw}{dy} \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right) - w q(y) \right] dy + \left[ w \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right) \right]_0^L = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

$$\int_0^L \left[ EI \frac{d^2 w}{dy^2} \frac{d^2 v}{dy^2} - w q(y) \right] dy + \left[ w \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right) - \frac{dw}{dy} \left( EI \frac{d^2 v}{dy^2} \right) \right]_0^L = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

No que se refere às condições de contorno, podemos citar dois tipos, as essenciais e as naturais. As essenciais são relacionadas à deflexão  $v$  e à rotação  $dv/dy$ , e as naturais que são

$EI \frac{d^2 v}{dy^2}$  igual ao o momento fletor e  $EI \frac{d^3 v}{dy^3}$  igual a força cortante.

Na expressão (A.2.5):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right)_0 \\ Q_2 &= \left( EI \frac{d^2 v}{dy^2} \right)_0 \\ Q_3 &= - \left( EI \frac{d^3 v}{dy^3} \right)_L \\ Q_4 &= - \left( EI \frac{d^2 v}{dy^2} \right)_L \end{aligned} \quad (A.2.6)$$

Com a notação (A.2.6) a formulação fraca da Equação (A.2.5) pode ser escrita ou expressada como:

$$\int_0^L \left[ EI \frac{d^2 w}{dy^2} \frac{d^2 v}{dy^2} - wq(y) \right] dy - w(0)Q_1 - \left( -\frac{dw}{dy} \right)_0 Q_2 - w(L)Q_3 - \left( -\frac{dw}{dy} \right)_L Q_4 = 0 \quad (A.2.7)$$

Na Equação (A.2.2),  $v$  é a variável dependente que representa o deslocamento lateral da viga ao longo de seu comprimento o qual pode ser aproximado por:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y^3 \quad (A.2.8)$$

Assumindo também que:

$$\begin{aligned}
 1) \frac{dv(y)}{dy} &= \theta(y) \\
 2) \frac{d^2v(y)}{dy^2} &= M_{xy}(y) / EI \\
 3) \frac{d^3v(y)}{dy^3} &= F_x(y) / EI
 \end{aligned} \tag{A.2.9}$$

Na qual (1) é o ângulo de rotação, (2) o momento e (3) a força cortante.

As condições de contorno natural do problema são:

$$\begin{aligned}
 v = v_1 \rightarrow \frac{dv_1}{dy} &= \theta_1 \dots \text{para} \dots y = 0 \\
 v = v_2 \rightarrow \frac{dv_2}{dy} &= \theta_2 \dots \text{para} \dots y = L
 \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

Escrevendo as equações com as condições de contorno posteriormente expressando-as na formas matriciais têm-se:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 \\
 \theta_1 &= 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 \\
 v_2 &= 1\alpha_1 + L\alpha_2 + L^2\alpha_3 + L^3\alpha_4 \\
 \theta_2 &= 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2L\alpha_3 + 3L^2\alpha_4
 \end{aligned} \tag{A.2.11}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{A.2.12}$$

Isolando-se  $\alpha$  , chegamos na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.13})$$

Pode-se notar também que a equação  $v(x)$  pode ser expressa da seguinte maneira:

$$v(x) = f_1 v_1 + f_2 \theta_1 + f_3 v_2 + f_4 \theta_2 \quad (\text{A.2.14})$$

Utilizando a Equação (A.2.8) com seus respectivos  $\alpha_i$  se obtêm os  $f_i$ .

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_2 &= x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \frac{x^3}{L^2} \\ f_3 &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

As funções  $f_1, f_2, f_3, f_4$  são as funções de forma e são da família de funções interpoladoras Hermitianas que satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 & f_i(0) &= 0 & (i \neq 1) \\ f_3(L) &= 1 & f_i(L) &= 0 & (i \neq 3) \\ \left(-\frac{df_2}{dy}\right)_0 &= 1 & \left(-\frac{df_i}{dy}\right)_0 &= 0 & (i \neq 2) \\ \left(-\frac{df_4}{dy}\right)_L &= 1 & \left(-\frac{df_i}{dy}\right)_L &= 0 & (i \neq 4) \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

Utilizando a Equação (A.2.14) e as funções de forma  $f_i$  como função peso  $w$  na formulação fraca da Equação (A.2.7), tem-se o modelo Euler-Bernoulli de viga. Para quatro variáveis nodais

$v_i(v_1, \phi_1, v_2, \phi_2)$  com ponderação diferentes  $w = f_1, w = f_2, w = f_3, w = f_4$ , obtendo-se quatro equações algébricas, sendo que a  $i$ -ésima equação é representada por:

$$\sum_{j=1}^4 \left( \int_0^L EI \frac{d^2 f_i}{dy^2} \frac{d^2 f_j}{dy^2} dy \right) v_j - \int_0^L f_i q(y) dy - Q_i = 0 \quad (\text{A.2.17})$$

Pode-se representa-la na forma reduzida:

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij} v_j - F_i = 0 \quad (\text{A.2.18})$$

Onde

$$K_{ij} = \int_0^L EI \frac{d^2 f_i}{dy^2} \frac{d^2 f_j}{dy^2} dy \quad \text{e} \quad F_i = \int_0^L f_i q(y) dy + Q_i \quad (\text{A.2.19})$$

Os coeficientes  $K_{ij}$  são simétricos sendo assim  $K_{ij} = K_{ji}$ , então matricialmente no sistema de referência local:

$$\{F\} = \frac{q(y)L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.20})$$

### A.2.2.Deslocamentos axiais

Seja a equação que governa um elemento em tração.

$$EA \frac{d^2 u(y)}{dy^2} = q$$



Onde  $u(y)$  é o deslocamento longitudinal da viga,  $EA$  é a rigidez axial,  $A$  área da seção transversal. Aplicando a formulação fraca do Método de Galerking para um elemento, tem-se:

$$\int_0^L \left[ w \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy = 0 \quad (\text{A.2.21})$$

Integrando a equação uma vez por partes e desenvolvendo-a, obtemos:

$$\int_0^L \left[ \frac{dw}{dy} \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy - w \left( EA \frac{du}{dy} \right)_0^L = 0 \quad (\text{A.2.22})$$

$$\int_0^L \left[ \frac{dw}{dy} \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy - w \left( EA \frac{du}{dy} \right)_{x=0} - w \left( EA \frac{du}{dy} \right)_{x=L} = 0 \quad (\text{A.2.23})$$

$$\int_0^L \left[ \frac{dw}{dy} \left( EA \frac{d^2 u}{dy^2} \right) - wq \right] dy - (wQ)_0 - (wQ)_L = 0 \quad (\text{A.2.24})$$

Seja uma função de aproximação para o deslocamento axial do tipo linear

$$u(y) = \alpha_1 + \alpha_2 y \quad (\text{A.2.25})$$

Aplicando as condições de contorno

$$u(0) = u_1 \text{ e } u(L) = u_2 \quad (\text{A.2.26})$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{A.2.27}$$

Assumindo as equações de forma:

$$\begin{aligned}u(y) &= f_1(y)u_1 + f_2(y)u_2 \\ u(y) &= \left(1 - \frac{y}{L}\right)u_1 + \left(\frac{y}{L}\right)u_2\end{aligned}\tag{A.2.28}$$

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 - \frac{y}{L} \\ f_2 &= \frac{y}{L}\end{aligned}\tag{A.2.29}$$

Aplicando  $u(y)$  e os pesos  $w$  (funções de peso), na equação da formulação fraca de Galerkin (A.2.24) têm-se os coeficientes  $K_{ij}$ , e matricialmente obtém-se:

$$\{F_z\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q(y)L}{2} \\ -\frac{q(y)L}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}\tag{A.2.30}$$

### A.2.3 Deslocamentos axiais e transversais

Através da combinação das matrizes de rigidez axial (A.2.30) e transversal (A.2.20) segundo a referencia (Paz, 1991), tem-se a matriz de rigidez elementar com seus seis graus de liberdade.

$$\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
& 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\
& & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\
& & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
& \text{Simétrico} & & & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\
& & & & & 4\frac{EI}{L}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\bar{u}_1 \\
\bar{v}_1 \\
\bar{\phi}_1 \\
\bar{u}_2 \\
\bar{v}_2 \\
\bar{\phi}_2
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\bar{F}_{y1} \\
\bar{F}_{x1} \\
\bar{M}_{xy1} \\
\bar{F}_{y2} \\
\bar{F}_{x2} \\
\bar{M}_{xy2}
\end{Bmatrix}
\quad (A.2.31)$$

Esta matriz pode ser transformada de um sistema de coordenadas local para um sistema global, com as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i &= u_i \cos \beta + v_i \sin \beta \\
\bar{v}_i &= u_i \sin \beta + v_i \cos \beta \\
\bar{\phi}_i &= \phi_i
\end{aligned}
\quad (A.2.32)$$

sendo  $\beta$  o ângulo formado entre o eixo x global e o eixo x' local.

A matriz em sistema de coordenadas global será:

$$[KE] = \frac{EI}{L}
\begin{bmatrix}
Rc^2 + \frac{12}{L^2}s^2 & \left(R - \frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s & -Rc^2 - \frac{12}{L^2}s^2 & \left(-R + \frac{12}{L^2}\right)cs & -\frac{6}{L}s \\
& Rs^2 + \frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c & (-R + \frac{12}{L^2})cs & -Rs^2 - \frac{12}{L^2}c^2 & \frac{6}{L}c \\
& & 4 & \frac{6}{L}s & -\frac{6}{L}c & 2 \\
& \text{Simétrico} & & Rc^2 + \frac{12}{L^2}s^2 & \left(R - \frac{12}{L^2}\right)cs & \frac{6}{L}s \\
& & & & Rs^2 + \frac{12}{L^2}c^2 & -\frac{6}{L}c \\
& & & & & 4
\end{bmatrix}
\quad (A.2.33)$$

onde  $R = \frac{A}{I}$  e  $[KE]$  representa a matriz global elementar de rigidez elástica,  $c = \cos \beta$  e  $s = \sin \beta$ .

Da mesma forma que se resolve o problema de viga em flexão pode-se resolver a coluna sujeita a carregamento axial (termo  $-(T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 v(y)}{dy^2}$ , na Equação (2.11)). Assumindo uma função que aproxima o termo  $\frac{d^2 v(y)}{dy^2}$ , encontrando a função de forma, aplicando o método de Galerkin, integrando por partes uma vez a relação  $\langle R, w \rangle$ , sendo R a função residual igual a  $-(T + p_0 A_0 - p_i A_i) \frac{d^2 v(y)}{dy^2}$ , tem-se como resultado no sistema local de coordenadas:

$$\pm \frac{(T + p_0 A_0 - p_i A_i)}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \\ \text{simetrico} & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\phi}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.34})$$

O sinal negativo significa que o elemento de *riser* esta em compressão e o sinal positivo que o elemento de *riser* está em tração. A matriz (A.2.34) é chamada de matriz geométrica, que é função da força axial e da geometria do elemento.

Da mesma forma, na matriz geométrica elementar, se faz a transformação de coordenadas obtendo-se assim a matriz de rigidez geométrica global  $[KG(d)]$

$$[KG(d)] = \pm \frac{(T + p_0 A_0 - p_i A_i)}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s & -\frac{6}{5}s^2 & \frac{6}{5}sc & -\frac{L}{10}s \\ & \frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c & \frac{6}{5}sc & -\frac{6}{5}c^2 & \frac{L}{10}c \\ & & \frac{2L^2}{15} & \frac{L}{10}s & -\frac{L}{10}c & -\frac{L^2}{30} \\ & & & \frac{6}{5}s^2 & -\frac{6}{5}sc & \frac{L}{10}s \\ & & & & \frac{6}{5}c^2 & -\frac{L}{10}c \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (A.2.35)$$

*simetrico*

Combinando de forma geral as matrizes (A.2.33) e (A.2.35) obtêm-se a equação de deslocamentos estáticos do *riser* na forma matricial:

$$([KE] + [KG(d)])\{d\} = \{F\} \quad (A.2.36)$$

Onde  $\{d\}$  é o vetor deslocamento (a solução), o qual é constituído por duas translações e uma rotação por nó. O vetor  $\{F\}$  representa a força, e é composto por forças longitudinais (próprias do peso e da tração concentrada no topo), forças transversais (forças de inércia e arrasto próprias da correnteza) e o momento concentrado em cada nó causado pelas forças citadas.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ -wL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -wL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} \quad (A.2.37)$$

Onde  $w(\gamma_s A_s)$  é definido como o peso do aço por unidade de comprimento de *riser* no ar, e  $q$  é o carregamento distribuído devido às forças produzidas pela correnteza.

A força de tração  $T$  na Equação (A.2.35) é influenciada somente pelo peso do *riser* por unidade de comprimento no ar. Uma vez que o *riser* é considerado fixo no fundo do mar a tração  $T$  ao longo do *riser* deve ser tomada como:

$$T(y) = TTOP - \gamma_s A_s (y_{top} - y) \quad (A.2.38)$$

Onde  $TTOP$  é a tensão de topo que para o sistema *Riser* Auto-Sustentável vai ser definido como  $TTOP = E_{boia} - W_{boia}$ , onde  $E_{boia}$  é empuxo exercido pela bóia,  $W_{boia}$  é o peso da bóia,  $y_{top}$  é a coordenada do topo do *riser*, e “ $y$ ” a coordenada longitudinal do *riser*.

A solução para o *riser* vertical é não linear já que a matriz de rigidez geométrica é função dos deslocamentos de cada nó, além do que também a tração axial  $T$  para cada elemento depende do esforço ao qual o próprio elemento está submetido.

Para encontrar a configuração estática do *riser* (vetor  $\{d\}$ ) é adotado um procedimento iterativo. Esse procedimento é dado por uma seqüência de cálculos no qual a estrutura é submetida a um carregamento em cada iteração.

$$1) [KE]\{d_1\} = \{F_1\} \rightarrow \{d_1\}$$

$$2) \{d_1\} \rightarrow [KG(d_1)]$$

$$3) ([KE] + [KG(d_1)])\{\Delta d_1\} = \{\Delta F_1\} \rightarrow \{\Delta d_1\}$$

$$\{\Delta F_1\} = \text{vetor..de..força..desbalanceada} \rightarrow \{F\} - ([KE] + [KG(d_1)])\{d_1\}$$

$$4) \{d_2\} = \{d_1\} + \{\Delta d_1\} \rightarrow [KG(d_2)]$$

.

.

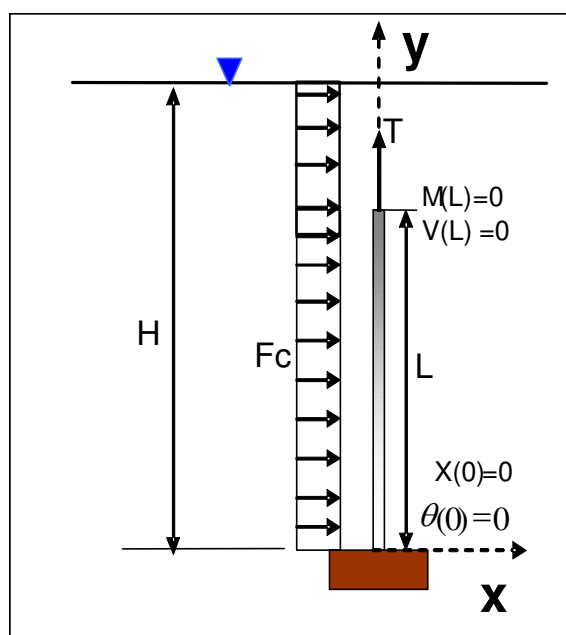
.

$$5) ([KE] + [KG(d_i)])\{\Delta d_i\} = \{\Delta F_i\} \rightarrow \{\Delta d_i\}$$

$$\text{Se } |\Delta F_i| \leq \varepsilon \rightarrow \text{equilíbrio..e..solução} \cong \{d_{i+1}\} = \{d_i\} + \{\Delta d_i\} \quad (A.2.39)$$

### A3. Solução analítica para o comportamento estático do *riser* vertical rígido

A validação do modelo numérico para o comportamento estático do *riser* vertical rígido utilizando a análise de elementos finitos será feita a partir de comparações com soluções analíticas, em concordância com a Figura A1, considerando o *riser* como sendo uma viga de comprimento “L” engastada na parte inferior tracionada através de uma força constante  $T$  ao longo do seu comprimento e uma força lateral  $F_c$  por unidade de comprimento ao longo de sua extensão e utilizando a solução analítica apresentada na referencia (Ferrari, 1998) e adaptando para nossas condições de contorno. A Figura A1 apresenta o *riser* com suas condições de contorno com uma lâmina de água  $H$ .



**Figura A1. Condições de contorno.**

Na Figura A1 acima “ $\theta$ ” representa o ângulo de inclinação dos elementos do *riser*, “ $M$ ” o momento, “ $V$ ” a força cortante, “ $x$ ” os deslocamentos horizontais, “ $y$ ” o eixo vertical do *riser* com o sistema de referência tendo como origem o fundo do mar.

Para a solução analítica da Equação 2.11 assumimos as seguintes hipóteses:

- 1) Viga vertical sem peso  $\Rightarrow (\gamma_0 A_0 - \gamma_i A_i - \gamma_s A_s) = 0$
- 2) Tração constante  $\Rightarrow (T + p_0 A_0 - p_i A_i) = T = \text{constante}$
- 3) Diâmetro e propriedades constantes ao longo do *riser*  $\Rightarrow EI = \text{constante}$
- 4) Carregamento constante  $\Rightarrow F_c = \text{constante}$

Com estas considerações a equação estática do *riser* pode ser representada por:

$$\frac{d^4 x}{dy^4} - \left( \frac{T}{EI} \right) \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{F_c}{EI} \quad (\text{A.3.1})$$

Integrando os dois lados da Equação (A.3.1) duas vezes, tem-se:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} - \left( \frac{T}{EI} \right) x = \left( \frac{F_c}{2EI} \right) y^2 + Ay + B \quad (\text{A.3.2})$$

Fazendo  $n^2 = \frac{T}{EI}$  e assumindo que a viga fique sob tração ( $T > 0$ ), obtém-se:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} - n^2 x = \left( \frac{F_c}{2EI} \right) y^2 + Ay + B \quad (\text{A.3.3})$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem e apresenta uma solução geral que será a soma da solução homogênea com a solução particular. Utilizando o operador notacional  $(D = \frac{dx}{dy})$  na Equação (A.3.3), onde D representa a diferenciação com respeito à 'y'

$\left( Dx = x' = \frac{dx}{dy} \right)$ , tem-se:

$$(D^2 - n^2)x = \left( \frac{F_c}{2EI} \right) y^2 + Ay + B \quad (\text{A.3.4})$$



A solução da equação homogênea  $((D^2 - n^2)x = 0)$ , tem duas raízes reais  $(\pm n)$ , portanto a solução homogênea da Equação (A.3.4) pode ser obtida pela expressão:

$$x_0 = Ce^{ny} + De^{-ny} \quad (\text{A.3.5})$$

A solução particular da Equação (A.3.4), é:

$$x_p = \frac{F_C}{2EI} \frac{y^2}{(D^2 - n^2)} + A \frac{y}{(D^2 - n^2)} + \frac{B}{(D^2 - n^2)} \quad (\text{A.3.6})$$

Encontrar a solução particular pelo uso do operador D, requer a expansão formal de f(D) que é uma soma de séries de potências até o termo  $D^m$ , onde m é a ordem da equação diferencial. Sendo assim:

$$f(D) = \frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 \dots + D^m + \dots \quad (\text{A.3.7})$$

Nota:  $f(D) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^m(0)}{m!} D^m$  para  $|D| < 1$  (expansão de Maclaurin), onde  $f^m$  representa o m-ésimo derivativo de D.

Dito isto a Equação (A.3.6) transforma-se em:

$$x_p = \frac{F_C}{2EI n^2} \left( -1 - \frac{D^2}{n^2} \right) y^2 + \frac{A}{n^2} \left( -1 - \frac{D^2}{n^2} \right) y + \frac{B}{n^2} \left( -1 - \frac{D^2}{n^2} \right) \quad (\text{A.3.8})$$

onde

$$x_p = \frac{F_C}{2EI} \left( \frac{y^2}{n^2} + \frac{2}{n^4} \right) - \frac{A}{n^2} y - \frac{B}{n^2} \quad (\text{A.3.9})$$

Sendo assim a solução geral da Equação (A.3.1) é obtida:

$$x = x_0 + x_p = Ce^{ny} + De^{-ny} - \frac{F_C}{2EI} \left( \frac{y^2}{n^2} + \frac{2}{n^4} \right) - \frac{A}{n^2} y - \frac{B}{n^2} \quad (\text{A.3.10})$$

E sua primeira segunda e terceira derivada respectivamente:

$$\frac{dx}{dy} = Cne^{ny} - Dne^{-ny} - \left( \frac{F_C}{n^2 EI} \right) y - \frac{A}{n^2} \quad (\text{A.3.11})$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = Cn^2 e^{ny} + Dn^2 e^{-ny} - \left( \frac{F_C}{n^2 EI} \right) \quad (\text{A.3.12})$$

$$\frac{dx^3}{dy^3} = Cn^3 e^{ny} - Dn^3 e^{-ny} \quad (\text{A.3.13})$$

Para determinar os coeficientes A, B, C e D é preciso utilizar as condições de contorno do problema, seguindo as condições mostradas na Figura A1:

Para o fundo

a)  $x=0 \rightarrow y=0$

b)  $\frac{dx}{dy} = 0 \rightarrow y=0$

Para o topo

$$c) \frac{d^2 x}{dy^2} = 0 \quad \rightarrow y=L$$

$$d) \frac{d^3 x}{dy^3} - n^2 \frac{dx}{dy} = 0 \quad \rightarrow y=L$$

Sendo o ângulo de inclinação positivo em sentido horário com respeito ao eixo y+.

As equações das condições de contorno são obtidas:

$$C + D - \frac{F_c}{n^4 EI} - \frac{B}{n^2} = 0 \quad \text{Para a condição (a)}$$

$$Cn - Dn - \frac{A}{n^2} = 0 \quad \text{Para a condição (b)}$$

$$Cn^2 e^{nL} + Dn^2 e^{-nL} - \frac{F_c}{n^2 EI} = 0 \quad \text{Para a condição (c)}$$

$$\frac{F_c L}{EI} + A = 0 \quad \text{Para a condição (d)}$$

Então resolvendo este sistema de equações os coeficientes serão:

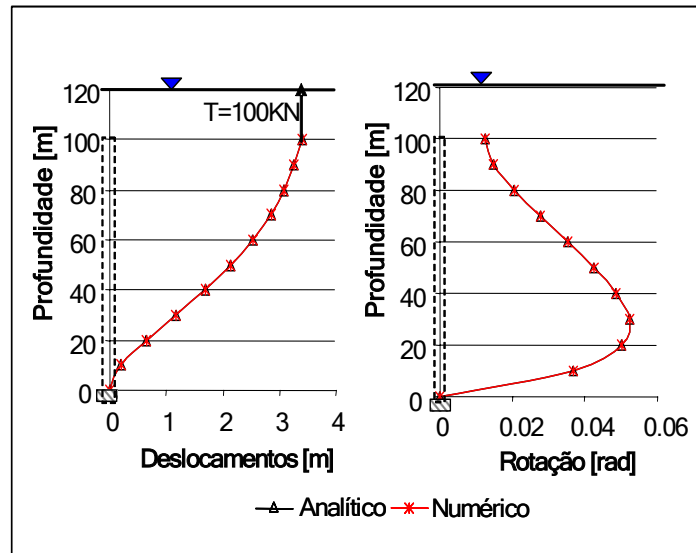
$$\begin{aligned} A &= -\frac{F_c L}{EI} \\ B &= \frac{F_c}{EI n^2} \left[ \frac{2 + e^{nL}(Ln - 1) - e^{-nL}(Ln + 1)}{e^{nL} + e^{-nL}} \right] \\ C &= \frac{F_c}{EI n^4} \left[ \frac{1 - nL e^{-nL}}{e^{nL} + e^{-nL}} \right] \\ D &= \frac{F_c}{EI n^4} \left[ \frac{1 + nL e^{nL}}{e^{nL} + e^{-nL}} \right] \end{aligned} \quad (A.3.14)$$

Exemplo numérico:

Os dados são apresentados na Tabela A.1

**Tabela A.1.Dados para as comparações da Figura A2**

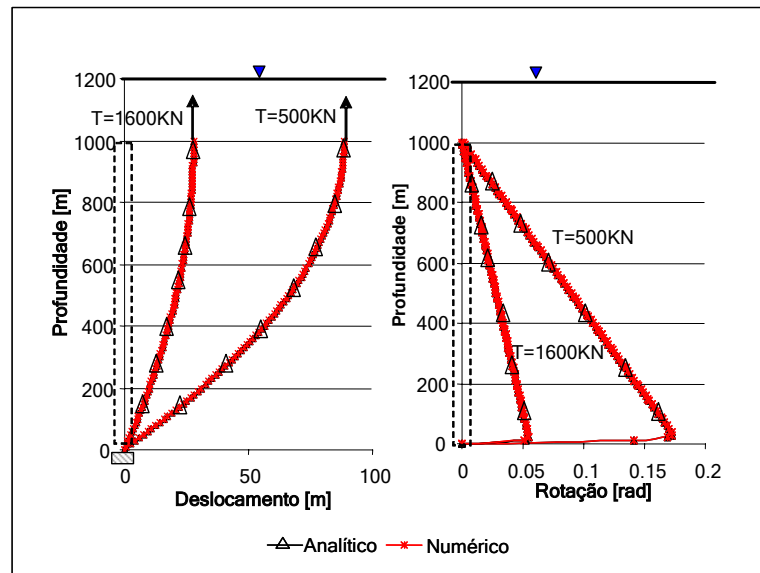
Carregamento na direção do escoamento- $F_c$ [kN/m]	0,09
Coeficiente de arrasto - $C_D$	0,7
Comprimento do <i>riser</i> vertical sem peso- $L$ [m]	100,0
Densidade do fluido externo - $\rho$ [kg / m <sup>3</sup> ]	1025,0
Diâmetro externo – $D_{ext}$ [m]	0,25
Diâmetro interno – $D_{in}$ [m]	0,21
Modulo de Young – $E$ [kN / m <sup>2</sup> ]	$210,0 \times 10^8$
Momento de inércia- $I$ [m <sup>4</sup> ]	$9,43 \times 10^{-5}$
Tensão de topo – $T$ [kN]	100,0
Velocidade constante de correnteza- $U$ [m/s]	1,0
$n = \sqrt{\frac{T}{EI}}$ [1/m]	0,28



**Figura A2. Comparação dos deslocamentos e ângulos na parte analítica e o programa utilizando elementos finitos**

**Tabela A.2. Dados para as comparações da Figura A3.**

Carregamento na direção do escoamento- $F_c$ [kN/m]	0,09
Coeficiente de arrasto - $C_D$	0,7
Comprimento da viga vertical sem peso- $L$ [m]	1000,0
Densidade do fluido externo - $\rho$ [kg / m <sup>3</sup> ]	1025,0
Diâmetro externo – $D_{ext}$ [m]	0,25
Diâmetro interno – $D_{in}$ [m]	0,21
Modulo de Young – $E$ [kN / m <sup>2</sup> ]	$2,1 \times 10^8$
Momento de inércia- $I$ [m <sup>4</sup> ]	$9,43 \times 10^{-5}$
Tensão de topo – $T$ [kN]	1600,0 e 500,0
Velocidade constante da corrente- $U$ [m/s]	1,0
$n = \sqrt{\frac{T}{EI}}$ [1/m]	0,09 e 0,16



**Figura A3. Comparação dos deslocamentos e ângulos entre as soluções obtidas analiticamente e numericamente.**

Pode-se concluir que a utilização do método de elementos finitos fornece resultados com boa aproximação comparados com os resultados analíticos. Também se pode ver que à medida

que se aumenta a tração no topo do *riser*, os deslocamentos e a variação do ângulo de inclinação diminuirão como apresentado na Figura A3.

#### A4. Generalização do problema de autovalor

Um mecanismo muito utilizado para resolver o problema de autovalor são sub-rotinas de programação de computadores. Uma abordagem breve da resolução deste tipo problema utilizando-se tais ferramentas é apresentada no texto que segue seguindo a metodologia da referencia (Burden, 1993). O problema de autovalor pode ser expresso como na Equação (A.4.1).

$$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\} \quad (\text{A.4.1})$$

Onde  $[A]$  e  $[B]$  são matrizes e  $\{x\}$  é um vetor. A Equação (A.4.1) é idêntica em significado à Equação (A.4.2), onde as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são substituídas por  $[K]$  e  $[M]$ , respectivamente e a constante  $\lambda$  por  $\omega^2$ , e uma vez que  $[M]$  é uma matriz não singular (que tem inversa) a Equação (A.4.1) pode ser expressa pela Equação (A.3.2).

$$([M]^{-1} \cdot [K])\{x\} = \omega^2 \{x\} \quad (\text{A.4.2})$$

Assumindo  $[K]$  e  $[M]$  como matrizes simétricas e  $[M]$  positivo, implica que  $\{v\} \cdot [M] \{v\} > 0$  para todo vetor  $\{v\}$ . Isto significa que  $[M]$  tem seus autovalores todos positivos.

A matriz  $[M]^{-1} \{K\}$  é não simétrica, mas pode ser convertida para um problema de autovalor simétrico utilizando a decomposição de Cholesky  $[M] = [L][L]^t$  onde  $[L]$  é a matriz triangular inferior de  $[M]$  e  $[L]^t$  a transposta que é a matriz triangular superior.

Sendo assim podemos escrever que:

$$\begin{aligned} [K]\{x\} &= \omega^2 [L][L]^T \{x\} \\ [L]^{-1}[K]\{x\} &= \omega^2 [L]^T \{x\} \end{aligned} \quad (\text{A.4.3})$$

Multiplicando ambos extremos por  $[L]^T [L]^T = I$  (matriz identidade), temos que:

$$\begin{aligned} [L]^{-1}[K][L]^T [L]^T \{x\} &= \omega^2 [L]^T I \{x\} \\ \therefore [C]([L]^T \{x\}) &= \omega^2 ([L]^T \{x\}) \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

$$\text{onde } [C] = [L]^{-1}[K][L]^T \quad (\text{A.4.5})$$

A matriz  $[C]$  é simétrica e seus autovalores são iguais aos do problema original e expresso por  $[L]^T \{x\}$ . Para solucionar a Equação (A.4.5) uma maneira eficiente é resolver primeiro a equação:

$$[Y][L]^T = [K] \quad (\text{A.4.6})$$

Com o triangulo inferior da matriz  $[Y]$ , podemos encontrar a matriz simétrica inferior de  $[C]$  pela Equação (A.4.7)

$$[L][C] = [Y] \quad (\text{A.4.7})$$

Conhecendo-se os termos simétricos de  $[C]$ , o problema de autovalor retorna a sua forma simples. Uma metodologia utilizada com frequência é o método de Householder (Burden, 1993) o qual reduz a matriz  $[C]$  para uma matriz tri-diagonal. Numa segunda fase a matriz tri-diagonal é obtida por fatoração na forma QR, onde  $[Q]$  é uma matriz ortogonal (onde sua transposta é igual a sua inversa) e  $[R]$  é uma matriz triangular superior. A combinação de Householder e o método de fatoração QR é a técnica conhecida como mais eficiente para a determinação dos autovalores e autovetores de uma matriz simétrica real.

### A.5. Solução Analítica para a Vibração Livre de um *riser* vertical rígido

A solução analítica para a vibração livre do *riser*, pode ser obtida da solução homogênea da equação que descreve o seu comportamento, onde o termo a direita da equação se anula dada conforme a seguir:

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} - T \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.5.1})$$

onde, “A” e “ $\rho$ ” são a área da seção transversal e densidade do material do *riser*, respectivamente. A solução analítica para a Equação (A.5.1), onde a tensão axial ao longo do *riser*  $T(x)$  é considerada constante, pode ser obtida utilizando-se o método da separação de variáveis, tomando-se  $x = X(y)d(t)$ , e  $d(t) = d_0 \cos(\omega t - \beta)$ . Assim, tem-se:

$$\frac{\ddot{d}(t)}{d(t)} = -\omega^2 \quad (\text{A.5.2})$$

A expressão acima pode ser explicitada da seguinte forma:

$$\frac{T}{\rho A} \frac{X''}{X} - \frac{EI}{\rho A} \frac{X^{iv}}{X} = \omega^2 \quad (\text{A.5.3})$$

A Equação (A.5.3) governa os modos de vibração natural do *riser*, e pode ser re-escrita como:

$$X^{iv} - n^2 X'' - k^4 X = 0 \quad (\text{A.5.4})$$

$$\text{Onde, } n^2 = T / EI \text{ e } k = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}.$$



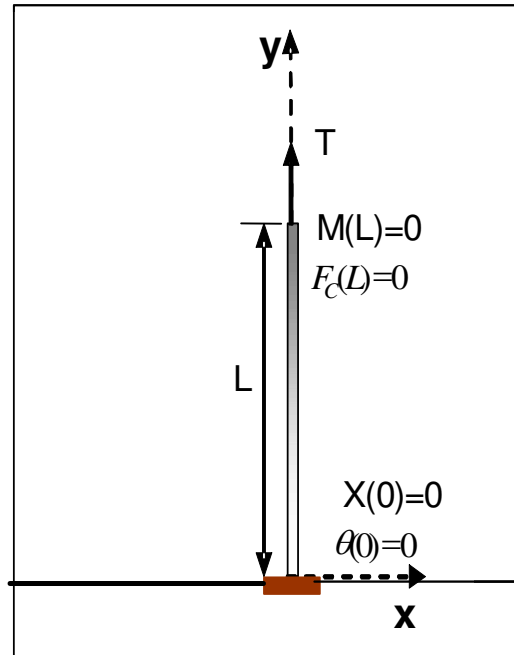
Onde  $T$  é a média da tração no topo e no fundo do *riser*, e  $\rho A^*$  é a massa distribuída composta pela massa do *riser*, do fluido interno e da massa adicionada.

A variável  $X$  na Equação A.5.4 é uma função de  $y$  e representa os deslocamentos laterais no eixo 'x' (direção horizontal) em função da coordenada vertical do *riser* 'y'.

A solução da Equação (A.5.4) pode ser expressa como:

$$X = C_1 \sinh(r_1 y) + C_2 \cosh(r_1 y) + C_3 \sin(r_2 y) + C_4 \cos(r_2 y) \quad (\text{A.5.5})$$

$$\text{Onde, } r_1 = \sqrt{\frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{n^4}{4} + k^4}} \text{ e } r_2 = \sqrt{-\frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{n^4}{4} + k^4}}$$



**Figura A4. Riser rígido vertical na condição de engaste no fundo e tração  $T$  no topo.**

Considerando-se um *riser* vertical rígido submetido à uma força de tração  $T$  concentrada no topo, engastado no fundo e livre no topo, conforme mostrado na Figura 3.2 e considerando-se também para uma primeira análise que a tração  $T$  é constante ao longo de seu comprimento e

sendo ‘ $\theta(0)$ ’ o ângulo de rotação no primeiro nó, ‘ $M(L)$ ’ o momento no topo e ‘ $F_c(L)$ ’ a força cortante no topo, as condições de contorno assim estabelecidas determinam que:

$$\begin{aligned}
 X \Big|_{x=0} &= 0 \\
 \frac{dX}{dy} \Big|_{x=0} &= 0 \\
 \frac{d^2 X}{dy^2} \Big|_{x=L} &= 0 \\
 \frac{d^3 X}{dy^3} - n^2 \frac{dX}{dy} \Big|_{x=L} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.5.6}$$

A primeira, segunda e terceira derivada da função  $X(y)$  podem ser expressas conforme a seguir:

$$X^i = C_1 r_1 \cosh(r_1 y) + C_2 r_1 \sinh(r_1 y) + C_3 r_2 \cos(r_2 y) - C_4 r_2 \sin(r_2 y) \tag{A.5.7}$$

$$X^{ii} = C_1 r_1^2 \sinh(r_1 y) + C_2 r_1^2 \cosh(r_1 y) - C_3 r_2^2 \sin(r_2 y) - C_4 r_2^2 \cos(r_2 y) \tag{A.5.8}$$

$$X^{iii} = C_1 r_1^3 \cosh(r_1 y) + C_2 r_1^3 \sinh(r_1 y) - C_3 r_2^3 \cos(r_2 y) + C_4 r_2^3 \sin(r_2 y) \tag{A.5.9}$$

As Equações (A.5.7), (A.5.8) e (A.5.9) em conjunto com as condições expressas pelas Equações (A.5.6), podem ser expressas em forma um sistema de equações na forma matricial como apresentado na Equação (A.5.10):

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 r_1 & 0 & r_2 & 0 \\
 r_1^2 \sinh r_1 L & r_1^2 \cosh r_1 L & -r_2^2 \sin r_2 L & -r_2^2 \cos r_2 L \\
 (r_1^3 - n^2 r_1) \cosh r_1 L & r_1 (r_1^2 - n^2) \sinh r_1 L & -r_2 (r_2^2 + n^2) \cos r_2 L & r_2 (r_2^2 + n^2) \sin r_2 L
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \tag{A.5.10}$$

Na Equação (A.5.10), os coeficientes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são diferentes de zero. Assim, considerando a solução não trivial, o determinante da matriz deverá ser diferente de zero. E para tanto, a solução deve atender a equação característica a seguir:

$$\begin{aligned} & - \left[ r_2^2 + r_1^4 + n^2 (r_2^2 - r_1^2) \right] + r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2 - 2n^2) \sinh(r_1 L) \sin(r_2 L) \\ & - \left[ 2 r_1^2 r_2^2 + n^2 (r_1^2 - r_2^2) \right] \cos(r_2 L) \cosh(r_1 L) = 0 \end{aligned} \quad (A.5.11)$$

Da Equação (A.5.11) tanto  $r_1$  e  $r_2$  estão ficando na dependência da frequência então para achar os valores que satisfazem esta equação característica se aplica a iteração com a qual estes valores da frequência se comparão com o método numérico e o programa ANFLEX que como se menciona no Capítulo 2 é um programa de propriedade da Petrobras

Os deslocamentos dos modos de vibração natural são obtidos do sistema de Equações (A.5.10). As constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  serão feitas dependentes de uma constante só para achar a equação dos deslocamentos padronizados conforme a Equação (A.5.12):

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{r_2}{r_1} C_3 \\ C_2 &= -C_4 \\ C_3 &= q C_4 \end{aligned} \quad (A.5.12)$$

$$\text{Sendo } q = \frac{r_2 (r_2^2 + n^2) \sin(r_2 L) - r_1 (r_1^2 - n^2) \sinh(r_1 L)}{r_2 [(r_1^2 - n^2) \cosh(r_1 L) + (r_2^2 + n^2) \cos(r_2 L)]}$$

Considerando estes resultados na solução geral (A.5.4), obtém-se que:

$$X = C_4 q \left[ \frac{\cos(r_2 y)}{q} + \sin(r_2 y) - \frac{1}{q} \cosh(r_1 y) - \frac{r_2}{r_1} \sinh(r_1 y) \right] \quad (A.5.13)$$

Esta equação é a que se mostra desenhada na Figura 2.9 e da iteração da Equação A.5.11 se obtém pode-se desenhar as Figuras 2.7 e 2.8 do Capítulo 2 que são os períodos achados das frequências versus o comprimento do *riser*.

## Apêndice B

### Considerações para o Estudo do Comportamento Dinâmico

#### B.1. Cálculo da Matriz de Massa

A matriz de massa total  $[M_T]$  em cada elemento do *riser* é distribuída de forma que a metade da massa se concentre em cada nó como se mostra na Equação (B.1.1) onde a metade da soma da massa do *riser*, do fluido interno e da massa adicional fica em cada extremo da diagonal desta matriz.

$$[M_T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(M_T) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(M_T) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

Esta equação representa a obtenção da matriz total de massa concentrada. (*Lumped Mass*)

#### B.2. Cálculo da Matriz de rigidez concentrada

Nesta matriz os graus de liberdade verticais e rotacionais serão eliminados da matriz de rigidez global, com este procedimento tem-se uma redução grande no armazenamento de dados e no tempo de simulação da análise dinâmica. A separação dos graus de liberdade na matriz global é feita segundo a referencia (*Ferrari, 1998*) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VRVR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ F_{VR} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.1})$$

Sendo a matriz global do sistema apresentada na Equação (B.2.1) na qual se divide em quatro partes que estão descritas pelos subscritos H,V e R que representam os graus de liberdade horizontal vertical e rotacional respectivamente, e desprezando as contribuições das forças verticais e rotacionais  $F_{VR}$  se obtém:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HVR} \\ K_{VRH} & K_{VRVR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_H \\ D_{VR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_H \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2.2})$$

Operando algebricamente é possível se obter a matriz de rigidez concentrada

$$[K_{VRH}]\{D_H\} + [K_{VV}]\{D_{VR}\} = 0 \quad (\text{B.2.3})$$

$$\{D_{VR}\} = -[K_{VV}]^{-1}[K_{VRH}]\{D_H\} \quad (\text{B.2.4})$$

$$[K_{HH}]\{D_H\} + [K_{HVR}]\{D_{VR}\} = \{F_H\} \quad (\text{B.2.5})$$

$$\underbrace{([K_{HH}] - [K_{HVR}][K_{VRVR}]^{-1}[K_{VRH}])}_{[K_{LUMPED}]} \{D_H\} = \{F_H\} \quad (\text{B.2.6})$$

Portanto a matriz de rigidez concentrada ou *Lumped* que será utilizada na equação dinâmica possui a seguinte composição:

$$[K_{LUMPED}] = ([K_{HH}] - [K_{HVR}][K_{VRVR}]^{-1}[K_{VRH}]) \quad (\text{B.2.7})$$

As diferenças dadas na solução estática utilizando a matriz global de rigidez em comparação com a matriz reduzida ficaram em torno de 3% nos deslocamentos como se pode ver

no Capítulo 2 nas Figuras 2.4(c) e 2.4(d) na qual o cálculo numérico 1 é feito utilizando-se a matriz de rigidez global e o calculo numérico 2 utilizando-se a matriz de rigidez concentrada.

### B.3.Calculo da Matriz de Amortecimento

O amortecimento é resultado da dissipação de energia pela estrutura, devido aos próprios componentes estruturais, por exemplo, atrito das juntas do *riser* ou amortecimento interno do material que constitui a estrutura.

O amortecimento estrutural é considerado de uma forma global, considerando o sistema como um todo, ao invés da soma de propriedades de elementos individuais.

Uma maneira de definir a matriz de amortecimento do sistema é aplicar o método de amortecimento proporcional, chamado de “amortecimento de Rayleigh”, que define o amortecimento como:

$$[B] = a_0[M] + a_1[K] \quad (B.3.1)$$

As constantes  $a_1$  e  $a_0$  podem ser escolhidas de forma a produzir o efeito do amortecimento de dois modos de vibração predominantes, desde que sejam definidos os fatores de amortecimentos.

Seja  $(w_r, \phi_r)$  a frequência natural e o autovalor correspondente a um modo  $r$ , respectivamente de modo que:

$$([K] - w_r^2[M])\phi_r = 0 \quad r=1,2,3,\dots,N \quad (B.3.2)$$

onde  $N$  é o numero de modos de vibração.

Baseado nas propriedades de ortogonalidade dos modos naturais de vibração, tem-se:

$$\begin{aligned}\phi_r^T [M] \phi_s &= \bar{M} \delta_{rs} \\ \phi_r^T [M] \phi_s &= w_r^2 \bar{M} \delta_{rs}\end{aligned}\tag{B.3.3}$$

Onde  $\bar{M}$  é a massa modal do modo r, definida como  $\bar{M} = \phi_r^T [M] \phi_r$ , o sobrescrito T denota a matriz transposta e  $\delta_{rs}$  é o delta de Kronecker com a seguinte propriedade:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} \delta_{rs} = 1 \dots \dots \dots se \dots \dots \dots r = s \\ \delta_{rs} = 0 \dots \dots \dots se \dots \dots \dots r \neq s \end{cases}\tag{B.3.4}$$

Então na Equação (B.3.1) o amortecimento de Rayleigh é definido como:

$$\phi_r^T [B] \phi_s = (a_0 + a_1 w_r^2) \bar{M} \delta_{rs}\tag{B.3.5}$$

De maneira análoga à matriz de massa modal pode-se definir a matriz de amortecimento modal:

$$\bar{B}_r = \phi_r^T [B] \phi_r\tag{B.3.6}$$

Da mesma maneira a definição do fator de amortecimento, para um sistema com um único grau de liberdade é feita.

$$\zeta = \frac{b}{2m w_n}\tag{B.3.7}$$



Onde  $\zeta$  é fator de amortecimento,  $m$  a massa,  $b$  o coeficiente de amortecimento e  $w_n$  a frequência natural do sistema com um grau de liberdade, pode-se obter a seguinte relação do amortecimento para o sistema com múltiplos graus de liberdade.

$$\bar{B}_r = \phi_r^T [B] \phi_r = 2 \bar{M}_r w_r \zeta_r \quad (\text{B.3.8})$$

Onde  $\bar{B}_r$  é a matriz de amortecimento modal do modo  $r$  e  $\zeta_r$  é o fator de amortecimento modal. Igualando a Equação (B.3.7) com a (B.3.8), temos:

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0}{w_r} + a_1 w_r \right] \quad (\text{B.3.9})$$

Esta equação permite que se encontrem os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  para uma determinada frequência natural.

#### B.4. Equação de Morison para *riser* inclinado

A Equação de Morison aplicada ao *riser* pode ser estendida para configurações de *riser* inclinado em relação à direção do escoamento do fluido incidente, sejam ondas ou correntezas. A sua descrição na forma vetorial é dada por:

$$\vec{f} = C_M A_I \vec{w} + C_D A_D |\vec{w}| \vec{w} \quad (\text{B.4.1})$$

Através da decomposição da velocidade e aceleração, em suas componentes normal e paralela ao eixo vertical do *riser* resultam em:

$$\begin{aligned}
f_x &= C_M A_I \frac{\partial u_x}{\partial t} + C_D A_D |\vec{w}| u_x \\
f_y &= C_M A_I \frac{\partial u_y}{\partial t} + C_D A_D |\vec{w}| u_y \\
f_z &= C_M A_I \frac{\partial u_z}{\partial t} + C_D A_D |\vec{w}| u_z
\end{aligned} \tag{B.4.2}$$

onde,  $|\vec{w}| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$  e,  $w, \dot{w}$  representam velocidade e aceleração.

Para um cilindro de seção circular imerso, sujeito a ação da onda onde a direção de propagação é ortogonal ao eixo do cilindro (eixo z), às equações (B.4.2) têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f_x &= C_M A_I \frac{\partial u_x}{\partial t} + C_D A_D u_x (u_x^2 + u_y^2)^{1/2} \\
f_z &= 0 \\
f_y &= C_M A_I \frac{\partial u_y}{\partial t} + C_D A_D u_y (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{B.4.3}$$

As forças em cilindros inclinados dentro do plano de um fluxo senoidal oscilatório foram estudadas por Sarpkaya [20]. Ele encontrou os valores dos coeficientes de inércia e arrasto baseado na cinemática normal de cilindros inclinados e encontrou que os valores dos coeficientes para um cilindro inclinado são similares aos encontrados para um cilindro normal, a exceção de uma pequena região onde os valores são significativamente diferentes.

### B.5. Equação de Morison para diferentes tipos de escoamento.

A referencia (Sarpkaya, 1981) que é do livro de Sarpkaya, apresenta experimentos com cilindro oscilando em águas calmas, dentro de coluna de água oscilante passando por um cilindro, em um tubo em ‘U’. Estes testes ajudam na compreensão física do fenômeno de vórtices em um escoamento oscilatório em torno de corpos esbeltos. Estes conhecimentos têm sido aplicados para a previsão de esforços em *risers*, com ressalva no efeito tridimensional não observado nestas experiências.

Se considerarmos o *riser* na presença de ondas e correnteza [20], a Equação de Morison apresenta-se conforme a Equação 4.14:

$$f = C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |u + U_c| (u + U_c) \quad (\text{B.5.1})$$

onde,  $U_c$  é a velocidade da correnteza e  $u$  é a velocidade da partícula devida à onda.

Neste caso, o número de Keulegan-Carpenter, e o número de Reynolds serão definidos:

$$KC = \frac{|u_0 + U_c| T}{D} \quad (\text{B.5.2})$$

$$\text{Re} = \frac{|u_0 + U_c| D}{\nu} \quad (\text{B.5.3})$$

Onde  $u_0$  é a amplitude da velocidade da onda assumindo positiva para cada meio ciclo de fluxo oscilatório.

Para o caso de um cilindro oscilando em águas calmas a expressão da força de Morison é utilizada como uma força de reação da estrutura quando submetida ao escoamento oscilatório:

$$f = -C_A A_I \ddot{x} - C_D A_D |\dot{x}| \dot{x} \quad (\text{B.5.4})$$

$\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  são a velocidade e aceleração da estrutura,  $C_A = C_M - 1$  é o coeficiente de massa adicional e  $C_D$  o coeficiente de arrasto.

O segundo termo da equação (B.5.4) pode ser entendido como uma força amortecedora chamada amortecimento viscoso quadrático, que é oposto ao deslocamento do cilindro.

O caso seguinte é o cilindro oscilando em um escoamento devido à onda e à correnteza. Este caso sobrepõe os casos das Equações (B.5.1) e (B.5.4):

$$f = A_I \dot{u} + C_A A_I (\dot{u} - \ddot{x}) + C_D A_D |u + U_c - \dot{x}|(u + U_c - \dot{x}) \quad (\text{B.5.5})$$

Este modelo é conhecido como o modelo da velocidade relativa [20], onde neste caso o número de  $Re$  e o número de  $KC$  são definidos em termos da velocidade relativa  $V_{r0} + U_c$ :

$$KC = \frac{|V_{r0} + U_c|T}{D} \quad (\text{B.5.6})$$

$$Re = \frac{|V_{r0} + U_c|D}{\nu}$$

Onde  $V_{r0}$  é a amplitude da velocidade  $(u - \dot{x})$ ,  $T$  é o período da onda, assumindo que em cada meio ciclo da velocidade a amplitude é positiva, e o outro meio ciclo é negativo.

O primeiro e segundo termo da Equação (B.5.5) são forças inerciais, e o terceiro termo é a força de arrasto em termos da velocidade relativa, que é a força hidrodinâmica dominante durante a passagem da onda própria da não linearidade da velocidade.

Nesta teses estes são os casos que serão levados para o análises dinâmico, é dizer, o *Riser* Auto-Sustentável estará dentro de correnteza, de onda e de onda e correnteza como se mostrara no Capítulo de resultados.

## B.6. Solução da equação do comportamento do *riser* no domínio do tempo

Para a solução, no domínio do tempo, das equações do comportamento dinâmico do *riser* definidas no Capítulo 3 foi utilizado o método de Newmark  $\beta$ . Basicamente, neste método, os deslocamentos e as velocidades para o final de cada intervalo de tempo são expressos em termos

dos deslocamentos, velocidades e acelerações no começo do referido intervalo de tempo, e a aceleração para o fim do intervalo. Assim sendo:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \ddot{x}_t + \beta (\Delta t)^2 \ddot{x}_{t+\Delta t} \quad (\text{B.6.1})$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{1}{2} \Delta t [\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}] \quad (\text{B.6.2})$$

Assumindo que aceleração seja constante durante um intervalo  $\Delta t$  e igual a média de  $\ddot{x}_t$  e  $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ , e também tomando  $\beta = 1/4$  (método de aceleração média constante).

$$\ddot{x}(t') = \frac{1}{2} (\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}) \quad t \leq t' \leq t + \Delta t \quad (\text{B.6.3})$$

Substituindo a Equação (B.6.1) dentro de (B.6.2) com  $\beta = 1/4$  têm-se:

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} (x_{t+\Delta t} - x_t) - \dot{x}_t$$

A equação geral de movimento em três intervalos sucessivos de tempo chamados  $t, \Delta t$  e  $t + \Delta t$  será:

$$[M] \ddot{x}_{t+\Delta t} + [B] \dot{x}_{t+\Delta t} + [K] x_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}$$

$$[M] \ddot{x}_t + [B] \dot{x}_t + [K] x_t = F_t$$

$$[M] \ddot{x}_{t-\Delta t} + [B] \dot{x}_{t-\Delta t} + [K] x_{t-\Delta t} = F_{t-\Delta t} \quad (\text{B.6.4})$$

Multiplicando a primeira e terceira expressão da Equação (B.6.4) por  $(\Delta t)^2 \beta$ , a do meio por  $(\Delta t)^2(1-2\beta)$  e somando depois com as equações obtidas de (B.6.1) e (B.6.2) para  $\beta = 1/4$  obtém-se:

$$\left( [M_T] + \frac{1}{2} \Delta t [B] + \frac{(\Delta t)^2}{4} [K] \right) x_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2 \left[ \frac{1}{4} (F_{t+\Delta t} + F_{t-\Delta t}) + \frac{1}{2} F_t \right] + \left[ 2[M_T] - \frac{(\Delta t)^2}{2} [K] \right] x_t - \left[ [M_T] - \frac{\Delta t}{2} [B] + \frac{(\Delta t)^2}{4} [K] \right] x_{t-\Delta t} \quad (\text{B.6.5})$$

onde  $[M_T] = [M] + C_A \frac{\pi D_0^2}{4} \rho_0 L$ , é a massa total que é a soma da massa real e a massa adicionada.

A Equação (B.6.5) é a utilizada pelo método de Newmark  $\beta$  para se encontrar os deslocamentos num tempo  $t + \Delta t$  em função dos deslocamentos do tempo  $t$  e  $t - \Delta t$ .

