

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL I
TESE DEFENDIDA POR RONALDO
CARRION E APROVADA PELO
COMISSÃO JULGADORA EM 29/02/02.
Euclides de Mesquita Neto
ORIENTADOR

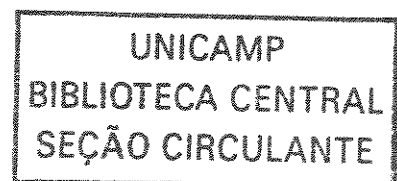
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Uma Implementação do Método dos Elementos
de Contorno para Problemas
Viscoelastodinâmicos Estacionários
Tridimensionais em Domínios Abertos e
Fechados**

Autor: **Ronaldo Carrion**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

200306099



UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

**Uma Implementação do Método dos Elementos
de Contorno para Problemas
Viscoelastodinâmicos Estacionários
Tridimensionais em Domínios Abertos e
Fechados**

Autor: **Ronaldo Carrion**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2002

S.P. – Brasil

UNIDADE	AB
Nº CHAMADA	UNICAMP
	C235i
V	EX
TOMBO BC	52379
PROC.	124/03
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	
Nº CPD	

CM0017977B-4

BIB ID 279793

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C235i

Carrion, Ronaldo

Uma implementação do método dos elementos de contorno para problemas viscoelastodinâmicos estacionários tridimensionais em domínios abertos e fechados / Ronaldo Carrion. --Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientador: Euclides de Mesquita Neto.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1 Métodos de elementos de contorno. 2. Interação solo-estrutura. 3. Viscoelasticidade. I. Mesquita Neto, Euclides. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

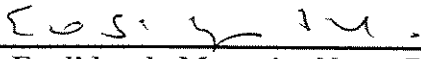
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

**Uma Implementação do Método dos Elementos de
Contorno para Problemas Viscoelastodinâmicos
Estacionários Tridimensionais em Domínios
Abertos e Fechados**

Autor: **Ronaldo Carrion**

Orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, Presidente
FEM – UNICAMP



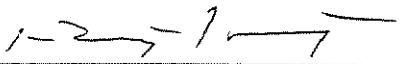
Prof. Dr. Paulo Sollero
FEM – UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM – UNICAMP



Prof. Dr. Henrique Lindenberg Neto
DEEF – EPUSP



Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo
DEC - FUFOP

Campinas, 28 de fevereiro de 2002

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos meus pais Geraldo Carrion e Maria Aurora Carrion.

Agradecimentos:

Este trabalho não poderia ter sido terminado sem a ajuda de diversas pessoas e entidades, às quais presto minha homenagem:

Prof. Doutor Euclides de Mesquita Neto pelo acompanhamento, direcionamento e compreensão ao longo de toda a tese.

Professores do Departamento de Mecânica Computacional que de alguma forma ajudaram no desenvolvimento deste projeto, em especial, Prof. Dr. Renato Pavanello.

Prof. Dr Edivaldo Romanini.

Alunos da Pós-Graduação do Departamento de Mecânica Computacional pelo companheirismo e auxílio, em especial, Pedro Yoshito Noritomi, William Portilho de Paiva, Éder Lima de Albuquerque, Frederico Gervatoski Lourenço e Carlos Eduardo Foltran.

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Eliana Corrêa Aguirre de Mattos pelo estímulo pessoal e ajuda na construção do texto.

Palavra prima
Uma palavra só, a crua palavra
Que quer dizer
Tudo
Anterior ao entendimento, palavra
(...)
Palavra boa
Não de fazer literatura, palavra
Mas de habitar
Fundo
O coração do pensamento, palavra

Chico Buarque de Hollanda, trechos da canção “Uma palavra”

Resumo

CARRION, Ronaldo, *Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Viscoelastodinâmicos Estacionários Tridimensionais em Domínios Abertos e Fechados*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 189 p. Tese (Doutorado).

Este trabalho apresenta uma formulação e implementação, baseadas no Método dos Elementos de Contorno, para a análise de problemas viscoelásticos estacionários tridimensionais em domínios abertos e fechados. A metodologia aqui adotada exigiu, inicialmente, a divisão do trabalho em quatro etapas, quais sejam: implementação do problema estático em domínios fechados; implementação do problema dinâmico em domínios fechados; implementação do problema estático em domínios abertos e, finalmente, implementação do problema dinâmico em domínios abertos. Ao longo dessas quatro etapas, dois artifícios particularmente úteis foram utilizados: a regularização da integral singular que torna possível o tratamento da singularidade de problemas dinâmicos e os chamados “enclosing elements”, que tornam possível o tratamento da singularidade em domínios abertos. Em seguida, foram analisados os mesmos casos considerando a divisão dos domínios em sub-regiões. Alguns exemplos práticos como a aplicação de trincheiras no semi-espço e a interação solo-estrutura são exemplificados qualitativamente. Também a formulação e a implementação de problemas viscoelásticos estacionários axi-simétricos em domínios abertos são apresentadas.

Palavras Chave

Método dos Elementos de Contorno, Elastodinâmica, Interação Solo-Estrutura, Axi-simetria.

Abstract

CARRION, Ronaldo, *An Implementation of the Boundary Element Method for Stationary Viscoelastodynamic Problems in Bounded and Unbounded Three-dimensional Domains*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002, 189 p. Tese (Doutorado).

This thesis presents a formulation and an implementation of the Boundary Element Method (BEM) to describe the static and stationary dynamic behavior of three-dimensional bounded and unbounded viscoelastic domains. The adopted procedure is divided into four steps. In the first step the static analysis for bounded domains is implemented. The second step is the implementation of the stationary dynamic solution for bounded domains. The last two stages are, respectively, the implementation of the static and the stationary dynamic analysis for unbounded domains. Throughout the implementation two strategies were used. The first strategy consists of using the static singular kernels to regularize the stationary dynamic kernels. The second strategy is the application of the so called ‘enclosing elements’, to allow the use of the rigid body argument to circumvent the singular integrals in the unbounded domains. In the sequence the idea of sub-domains is also formulated and implemented. Finally, a formulation and implementation of the BEM for axisymmetric stationary problems is presented. The implementation is applied to analyze a series of soil-structure interaction problems.

Key Words

Boundary Element Method, Elastodynamics, Soil-Structure Interaction, Axisymmetry

Índice

Lista de Figuras e Gráficos	iv
Lista de Tabelas	ix
Nomenclatura	xi
 Introdução	 1
 Capítulo 1	
Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Elastostática 3D	7
1.1 A Elastostática Linear e suas equações	7
1.2 De Equações Diferenciais no Domínio a Equações Integrais no Contorno	10
1.3 Sub-regiões em Elastostática	35
 Capítulo 2	
Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Elastodinâmica Estacionária 3D	40
2.1 A Elastodinâmica Estacionária Linear e suas Equações	40
2.2 Equações Integrais de Contorno	42
2.3 Viscoelasticidade - Princípio da Correspondência	45
 Capítulo 3	
Formulação do Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Domínios Ilimitados	46
3.1 Utilização dos “Enclosing Elements” na Análise de Problemas Estáticos por Elementos de Contorno	49
3.2 Sub-regiões em Domínios Ilimitados com Utilização dos EE	59

Capítulo 4

Resultados e Discussões	62
4.1 Exemplo Elastostático com Domínios Limitados	62
4.2 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Limitados	66
4.3 Exemplo Elastostático com Domínios Ilimitados	70
4.4 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Ilimitados	80
4.5 Exemplo Elastostático com Domínios Limitados – Sub-regiões	108
4.6 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Limitados - - Sub-regiões	111
4.7 Exemplo Elastostático com Domínios Ilimitados – Sub-regiões	113
4.8 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Ilimitados - - Sub-regiões	122

Capítulo 5

Formulação do Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Domínios Ilimitados Axi-simétricos	135
5.1 Formulação Elastostática Axi-simétrica	135
5.2 Formulação Elastodinâmica Estacionária Axi-simétrica	147
5.3 Formulação Elastodinâmica Estacionária Axi-simétrica Aplicada a Domínios Ilimitados	149
5.4 Exemplos Elastodinâmicos Estacionários Axi-simétricos Aplicados a Domínios Ilimitados	150

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas	154
Referências Bibliográficas	157

Apêndices	161
Apêndice A	161
Apêndice B	176
Apêndice C	179
Apêndice D	187

Lista de Figuras

1.1a – Deslocamentos no ponto x resultantes de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1	15
1.1b – Tensor de tensões σ_{ij}^* no ponto x resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1	16
1.1c – Vetor de tensões t_{1i}^* atuando no ponto x , na superfície de orientação n , resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1	17
1.2 – Superfície de contorno acrescida de um hemisfério de integração S_e	21
1.3 – Definições geométricas	23
1.4 – Sistema de coordenadas normalizado para um elemento de superfície quadrilateral	31
1.5 – Subdivisão do elemento para integração do núcleo u_{ij}^*	32
1.6 – Meio contínuo com duas camadas discretizado com doze elementos constantes	35
3.1a – Função de Green de Espaço Completo. Discretização do semi-espaco com elementos carregados e malha truncada	47
3.1b – Função de Green de Semi-Espaco. Discretização da área carregada	48
3.2 – Superfície truncada S_{MEC} do semi-espaco e contornos fictícios S_{EEi} ($i = 1, 2$)	49
3.3 – Matriz $[H]$ estendida, incluindo os EE	51
3.4 – Diferentes números de EE para o mesmo contorno	54
3.5 – Diferentes contornos para o mesmo número de EE	57
3.6 – Malhas com e sem conectividade entre os elementos	59

3.7 –	Semi-espaco dividido em duas sub-regiões acrescido de EE	60
3.8 –	Matriz $[H]$ estendida para duas sub-regiões, incluindo os EE	60
3.9 –	Aspecto intermediário da matriz $[H]$	61
4.1 -	Malhas utilizadas na discretização de uma barra	64
4.2 –	Vista frontal da barra com o elemento analisado em destaque	67
4.3 -	Malhas utilizadas na discretização do semi-espaco	70
4.4 –	Quadros representando a oscilação da superfície do semi-espaco para uma frequência $\omega = 1.0$	96
4.5 –	Quadros representando a oscilação da superfície do semi-espaco para uma frequência $\omega = 2.0$	97
4.6 -	Malha utilizada na discretização do semi-espaco com trincheira.	105
4.7 –	Representação da barra dividida em duas sub-regiões com suas respectivas malhas	109
4.8 –	Malhas utilizadas na discretização do semi-espaco com duas sub-regiões	113
4.9 –	Malha utilizada na discretização solo-estrutura	119
5.1 -	Representação de um domínio axi-simétrico	136
5.2 –	Transformação de coordenadas cartesianas em cilíndricas para representação de uma superfície	137
5.3 –	Superfície truncada e contorno fictício axi-simétricos	149
5.4 –	Problema axi-simétrico e outro análogo em coordenadas cartesianas	150

Gráficos

4.1 –	Função de Resposta em Frequência do deslocamento normal u_1 do ponto de coordenadas (12,0; 0,375; 0,375) para diferentes malhas	68
4.2 –	Modos de vibração obtidos numericamente	69

4.3 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço	72
4.4 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos do semi-espaço	74
4.5 – Tensões normais σ_{33} em pontos internos do semi-espaço	76
4.6 – Outras componentes do vetor deslocamento e tensor de tensões em ponto internos	78
4.7 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço. Comparação entre o problema estático e quase-estático	81
4.8 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço	83
4.9 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos do semi-espaço	86
4.10 – Tensões normais σ_{33} em pontos internos do semi-espaço	89
4.11 – Outras componentes do vetor deslocamento e tensor de tensões em ponto internos	92
4.12 - Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço ($\beta = 0,1$)	98
4.13 - Deslocamentos normais u_3 em pontos internos do semi-espaço ($\beta = 0,1$)	99
4.14 - Tensões normais σ_{33} em pontos internos do semi-espaço ($\beta = 0,1$)	100
4.15 – Outras componentes do vetor deslocamento e tensor de tensões em ponto internos ($\beta = 0,1$)	101
4.16 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço (com trincheira)	106
4.17 – Deslocamentos normais u_1 na superfície do semi-espaço (com trincheira)	107
4.18 - Função de Resposta em Frequência do deslocamento normal u_1 do ponto de coordenadas (12,0; 0,375; 0,375) para diferentes malhas: duas sub-regiões	112
4.19 - Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço. Comparação entre o problema com e sem sub-regiões	115
4.20 – Deslocamentos normais u_3 em pontos na interface das sub-regiões	116
4.21 – Deslocamentos normais u_3 medidos ao longo da profundidade do semi-espaço nas duas sub-regiões	117

4.22 – Deslocamentos u_1 medidos ao longo da profundidade do semi-espço nas duas sub-regiões	117
4.23 – Forças de superfície normais t_3 em pontos na interface das sub-regiões	118
4.24 – Perfis de deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – - fundação flexível	120
4.25 – Perfil do deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – - fundação rígida	121
4.26 - Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço. Comparação entre o problema estático e quase-estático	122
4.27 - Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço	123
4.28 - Deslocamentos normais u_3 em pontos na interface das sub-regiões	124
4.29 - Deslocamentos normais u_3 medidos ao longo da profundidade do semi-espço nas duas sub-regiões	125
4.30 - Deslocamentos normais u_1 medidos ao longo da profundidade do semi-espço nas duas sub-regiões	126
4.31 - Tensões normais σ_{33} em pontos na interface das sub-regiões	127
4.32 - Deslocamentos normais u_3 em pontos internos da 1ª sub-região	128
4.33 - Deslocamentos normais u_3 em pontos internos da 2ª sub-região	129
4.34 - Perfis de deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – - fundação flexível	131
4.35 - Perfil do deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – - fundação rígida	132
4.36 - Deslocamento u_3 em função da frequência de excitação para uma força F_3 harmônica e unitária	133
4.37 - Deslocamento u_1 em função da frequência de excitação para uma força F_1 harmônica e unitária	134

5.1 -	Deslocamento normal $u_z = u_3$ na superfície do semi-espaço	151
5.2 -	Deslocamento normal $u_z = u_3$ em pontos internos do semi-espaço	152

Lista de Tabelas

3.1 –	Características das malhas mostradas na Figura (3.4)	55
3.2 –	Comparações entre valores de $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes densidades de malha e números de pontos de integração de Gauss	55
3.3 –	Comparações entre valores de $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes formas de malha e números de pontos de integração de Gauss.	58
3.4 -	Comparações entre valores de $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes malhas, com e sem conectividade entre os elementos, e números de pontos de integração de Gauss	59
4.1 -	Comparação entre os deslocamentos normais médios da superfície da barra para diferentes malhas	63
4.2 -	Comparação entre a força de superfície média na extremidade fixa da barra para diferentes malhas	64
4.3 -	Comparação entre deslocamentos e tensões normais de um ponto interno da barra de coordenadas (2,0; 0,5; 0,5) para diferentes malhas.	65
4.4 -	Comparação entre deslocamentos e tensões normais de um ponto interno da barra de coordenadas (6,0; 0,5; 0,5) para diferentes malhas	65
4.5 –	Comparação entre as frequências naturais numéricas e analítica para diferentes malhas	67
4.6 –	Característica das malhas utilizadas na discretização do semi-espaco	71
4.7 -	Comparação entre o deslocamento normal médio em superfícies de uma barra tratada com duas sub-regiões para diferentes malhas	109
4.8 -	Comparação entre a força de superfície média em superfícies de uma barra tratada com duas sub-regiões para diferentes malhas	110

4.9 - Comparação entre os deslocamentos e tensões normais em pontos internos de uma barra tratada com duas sub-regiões para diferentes malhas	110
4.10 - Comparação entre as frequências naturais numéricas e analíticas para diferentes malhas: duas sub-regiões	111
4.11 – Característica das malhas utilizadas na discretização do semi-espaco com duas sub-regiões	114

Nomenclatura

Letras Latinas

a	semi-largura do carregamento
b	semi-comprimento do carregamento
b_i	componentes do vetor força de corpo
c_{ij}	termos livres (definido na formulação do MEC)
C_p	velocidade de propagação da onda de pressão
C_s	velocidade de propagação da onda de cisalhamento
E	módulo de elasticidade linear
E^*	módulo de elasticidade linear em um meio contínuo viscoelástico
$E\left(m, \pi/2\right)$	integral elíptica do segundo tipo
e_i	versores nas direções dos eixos de cartesianos
G	módulo de elasticidade transversal
G^*	módulo de elasticidade transversal em um meio contínuo viscoelástico
$[G]$	matriz que contém os núcleos de deslocamento
$[H]$	matriz que contém os núcleos de forças de superfície
$K\left(m, \pi/2\right)$	integral elíptica do primeiro tipo
m	módulo das integrais elípticas
\mathbf{n}	vetor unitário normal à uma superfície
$\mathbf{r}(\xi, x)$	vetor raio (definido na formulação do MEC)
S	superfície de contorno
t_i	componentes do vetor força de superfície

t_{ij}	componentes do tensor força de superfície
u_i	componentes do vetor deslocamento
\ddot{u}_i	componentes do vetor aceleração
u_{ij}	componentes do tensor de deslocamento
x	ponto de campo (definido na formulação do MEC)
x_i	eixos do sistema cartesiano de coordenadas
r, θ, z	orientações do sistema de coordenadas cilíndricas

Letras Gregas

β	fator de amortecimento
Γ	linha de contorno
δ_{ij}	delta de Kronecker
ε_{ij}	componentes do tensor de deformações
ϕ	função de forma
λ, μ	constantes de Lamé
ν	coeficiente de Poisson
ξ	ponto de colocação (definido na formulação do MEC)
ρ	densidade de massa
σ_{ij}	componentes do tensor de tensões
ω	frequência angular
Ω	domínio de uma função

Abreviações

EE	enclosing elements
FRF	função de resposta em frequência

MEC	método dos elementos de contorno
MEF	método dos elementos finitos

Siglas

DMC	departamento de mecânica computacional
FEM	faculdade de engenharia mecânica
UNICAMP	universidade estadual de campinas

INTRODUÇÃO

É uma tendência mundial, atualmente, considerar que a solução de um problema qualquer deve ser inserida num contexto maior do que a mera obtenção do resultado em si próprio. Deve-se considerar de antemão, sempre que possível, as conseqüências para todo o sistema em estudo, advindas da maneira escolhida para se resolver tal problema. Este paradigma também se aplica à engenharia e ao assunto tema do presente trabalho, o qual trata da interação dinâmica solo-estrutura. Exemplarmente, as vibrações propagadas pelo solo, provenientes do funcionamento de máquinas operatrizes ou linhas ferroviárias de superfície ou subterrânea, devem cumprir as exigências quanto aos níveis máximos permitidos para estas vibrações nas suas imediações.

A abordagem deste problema é tratada pela dinâmica dos solos, cuja origem, segundo Banerjee e Butterfield [1987], deve ser associada aos estudos desenvolvidos no Japão nas décadas de 20 e 30 a partir dos terremotos, bastante comuns naquela região. Esta abordagem inclui, entre outros, a análise do dano estrutural sísmico e as condições do solo bem como o estudo da interação solo-estrutura. Também na década de 30, simultaneamente na Alemanha e na União Soviética, esforços sistemáticos foram feitos para desenvolver procedimentos racionais no projeto de fundações de máquinas.

Durante toda a década de 50 e início de 60, trabalhos nos Estados Unidos objetivaram principalmente compreender o fenômeno da propagação de onda associada a explosões nucleares, mas, além disto, projetar outras estruturas da era espacial. Uma atenção bastante especial também foi dada à determinação das propriedades mecânicas do solo. No mesmo período, engenheiros japoneses continuavam a explorar a relação entre os danos de um terremoto e as condições locais do solo, desenvolvendo soluções para o projeto de estruturas em abalos sísmicos.

A dinâmica do solo experimentou um grande crescimento após os destrutivos terremotos no Alaska e em Niigata, em 1964, impulsionada principalmente pela necessidade de se entender o comportamento e o papel do solo, não só durante os terremotos, mas também no projeto de plataformas de petróleo “offshore”, entre outros.

Como resultado de tudo, a dinâmica do solo constitui um ramo bastante consolidado na engenharia. Ela utilizou, combinou e assimilou conceitos e técnicas da mecânica dos solos, da teoria da propagação de ondas e da dinâmica das estruturas para desenvolver seus próprios métodos de análise.

Dentre estes métodos, ressaltam-se aqui as técnicas numéricas que sofreram forte desenvolvimento em virtude da presença de computadores eletrônicos digitais cada vez mais poderosos, permitindo a solução de problemas matemáticos complexos. Destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) como uma alternativa bastante eficiente para a modelagem de domínios ilimitados, pois já satisfaz naturalmente a condição de radiação de Sommerfeld, também conhecida como amortecimento geométrico.

O MEC é o procedimento numérico em que está pautado todo este trabalho, o qual faz parte de uma linha de pesquisa desenvolvida pelo Departamento de Mecânica Computacional (DMC) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

MOTIVAÇÃO

Neste trabalho pretende-se modelar numericamente o comportamento dinâmico estacionário da interação solo-estrutura 3D com o objetivo de se criar uma ferramenta que possa auxiliar na análise de propagação de ondas através do solo. A estrutura é, muitas vezes, representada por uma fundação que serve de suporte para máquinas, que em operação vibram e transmitem estas vibrações para a fundação, que por sua vez as transmite para o solo. Em vista disto, o procedimento de modelagem deve ser tal que permita, dentro dos limites estabelecidos, tratar a fundação e o solo como sendo domínios diferentes - cada um com suas constantes elásticas ou viscoelásticas - e, mais ainda, que este último possa ser estratificado (diferentes camadas). Outro fator importante a ser considerado é a capacidade de o modelo simular tipos

diferentes de carregamentos tanto na fundação como diretamente sobre o solo para geometrias arbitrárias.

Mais um ponto que este modelo deve ser capaz de analisar é o isolamento das vibrações em regiões adjacentes à excitação inicial. A partir da caracterização do campo de deslocamentos no solo, a idéia é tornar possível simular situações, com esta mesma ferramenta, em que a introdução de barreiras provoque uma queda desejada na amplitude das ondas propagantes.

METODOLOGIA PROPOSTA

A primeira consideração a ser feita na metodologia aqui adotada admite que tanto o solo quanto a fundação podem ser modelados como um meio elástico ou viscoelástico, linear, homogêneo e isotrópico sujeito a carregamentos harmônicos no tempo. Por isto, a modelagem da interação solo-estrutura passa então a ser a solução de um Problema de Valor de Contorno da (Visco)Elastodinâmica Estacionária Tridimensional. Como a idéia é colher resultados de problemas com geometria e carregamento arbitrários, isto exclui a possibilidade de soluções analíticas; deste modo, optou-se então por procurar uma ferramenta numérica adequada para aproximar a solução do problema em questão.

No âmbito da solução aproximada de Problemas de Valor de Contorno Lineares, dois conhecidos métodos numéricos estão disponíveis. O primeiro deles, e o mais utilizado entre os engenheiros, é o Método dos Elementos Finitos (MEF) [Zienkiewicz e Morgan 1983]. Outra alternativa, que nos últimos anos vem sendo progressivamente utilizada na solução de diversos tipos de problemas lineares, é o já citado Método dos Elementos de Contorno (MEC). A diferença mais significativa entre os dois métodos é que enquanto o MEF exige a discretização de todo o domínio a ser modelado, o MEC somente requer a discretização da superfície do mesmo [Brebbia e Dominguez 1989, Kane 1994]. A consequência mais imediata é que no MEC a dimensão do problema a ser tratado é reduzida de uma ordem. Assim, problemas tridimensionais somente necessitam a discretização de uma superfície, enquanto problemas bidimensionais requerem a discretização de uma linha. Problemas unidimensionais são reduzidos a dois pontos nos extremos do domínio [Hartmann 1986]. Uma implicação importante desta redução de uma ordem da dimensão do problema a ser tratado pelo MEC é que o sistema algébrico resultante da discretização é bem menor que a contrapartida produzida pelo MEF. Outro aspecto importante do

MEC é que ele é capaz de modelar naturalmente o amortecimento geométrico associado à propagação de ondas em meios ilimitados [Dominguez 1993, Anzou 1996], sem ter que recorrer a elementos ou técnicas especiais como no caso do MEF [Bettess 1992, Zavala 1999]. Uma discussão mais detalhada sobre as vantagens e desvantagens relativas do MEC quando comparado ao MEF pode ser encontrada em Mesquita Neto, Pontes e Sousa [1994 a,b].

No presente trabalho optou-se por utilizar o MEC pela razão principal de que os bons resultados obtidos pelo método são mais patentes na elastodinâmica linear especialmente quando o domínio de interesse é infinito ou semi-infinito, como é citado em Beskos [1987].

Uma vez conhecida a equação diferencial que se quer resolver (Equação de Navier para problemas dinâmicos estacionários), escolhido o método numérico para tal (MEC) e considerando o fato de que se trata de aplicar os dois itens anteriores em domínios ilimitados, optou-se por seguir uma seqüência na implementação e validação dos programas, que passa a ser explicada em seguida.

A maneira aqui adotada para se resolver os problemas dinâmicos requer a prévia solução do mesmo problema, porém, estático. Nesta mesma linha, o artifício conhecido como consideração do movimento de corpo rígido, escolhido para tratar a singularidade do núcleo de força de superfície, é aplicado em problemas estáticos e mais comumente em domínios limitados. Em vista disto, a seqüência adotada para se resolver o problema inicial foi a seguinte: formulação e implementação do MEC para problemas elastostáticos em domínios limitados; formulação e implementação do MEC para problemas elastodinâmicos em domínios limitados; formulação e implementação do MEC para problemas elastostáticos em domínios ilimitados e, finalmente, formulação e implementação do MEC para problemas elastodinâmicos em domínios ilimitados, sendo que este último caracteriza o problema de interação dinâmica solo-estrutura. A seqüência destes quatro itens é repetida em seguida para sub-regiões.

ESTADO DA ARTE

Ao que tudo indica, Dominguez no ano de 1978 [a,b] foi o primeiro a tratar fundações rígidas superficiais ou enterradas, 2D e 3D, sujeitas a forças externas ou ondas sísmicas pelo MEC no domínio da frequência. Posteriormente, Karabalis e Beskos em 1984 e Spyarakos e Beskos em 1984 e 1986 estudaram, respectivamente em geometrias 3D e 2D, o mesmo problema

acrescentando o efeito da flexibilidade da fundação na resposta pelo MEC no domínio do tempo. Já em 1985, Gomez-Lera *et al*, desenvolveram soluções fundamentais especiais axisimétricas para o tratamento do movimento de fundações axisimétricas no estado estacionário e, em 1992, Becker publica um livro sobre o MEC em que um dos capítulos é dedicado exclusivamente a problemas potenciais e elastostáticos axi-simétricos.

No ano de 1987, Hirose utiliza pela primeira vez os chamados “Enclosing Elements” (EE), em sua tese de doutorado, para uma análise de propagação de ondas 2D e no ano seguinte, Ahmad e Banerjee também usam os EE para uma análise dinâmica estacionária 2D de um semi-espaço. Estes EE fazem parte de um artifício para tratar a singularidade existente no núcleo de força de superfície através da consideração do movimento de corpo rígido. Este mesmo tipo de elemento é utilizado mais tarde, em 1997, por Araújo *et al* num problema de análise transiente 3D.

Outra maneira de tratar esta singularidade está presente no livro de Brebbia e Dominguez de 1989 e mais recentemente, em 2001, explicado com maiores detalhes no livro de Beer.

A solução de problemas dinâmicos através da prévia solução do problema estático, conhecida como regularização de integral singular, está apresentada e implementada em programas no livro de Dominguez sobre problemas elastodinâmicos publicado no ano de 1993.

Mais recentemente, em 1997, Almeida Barros desenvolveu um trabalho no qual apresenta e analisa as Funções de Green e de Influência para elastodinâmica em meios transversalmente isotrópicos, implementando-as no MEC, e na mesma linha, em 2001, Barros sintetizou as Funções de Influência para elastodinâmica em meios axisimétricos com sub-camadas.

ESTRUTURA DO TRABALHO

A apresentação do assunto tratado neste trabalho está dividida da seguinte maneira.

Capítulo 1: O MEC e a elastostática linear. O propósito deste capítulo é mostrar a formulação do MEC para elastostática, tendo em vista que a solução do problema elastodinâmico utiliza um artifício matemático que requer a solução do primeiro. A técnica de divisão do domínio em sub-regiões aplicada ao MEC também é apresentada;

Capítulo 2: O MEC e a elastodinâmica linear estacionária. Este capítulo visa a formulação do MEC para problemas elastodinâmicos explicitando o artifício matemático citado no parágrafo anterior;

Capítulo 3: Tratamento de domínios ilimitados na formulação do MEC. Aqui é apresentado um elemento de contorno especial, chamado “Enclosing Element” (EE), utilizado no cálculo dos termos singulares do núcleo de forças de superfície. Alguns resultados que validam a possibilidade de utilização dos EE são apresentados. A técnica de divisão destes domínios em sub-regiões com a utilização dos EE também é apresentada;

Capítulo 4: Resultados e discussões. Usando os programas computacionais desenvolvidos neste trabalho, este capítulo busca analisar a interação dinâmica solo-estrutura, porém, a maneira escolhida neste trabalho para atingir este fim requer antes a validação dos problemas estático e dinâmico em domínios limitados para posteriormente passarmos à validação dos problemas estático e dinâmico em domínios ilimitados. Esta mesma sequência de análise é aplicada novamente para o estudo de sub-regiões. Os resultados que validam estas oito análises são mostrados aqui.

Capítulo 5: O MEC aplicado a domínios ilimitados axi-simétricos. Aqui são mostradas as particularizações necessárias para a resolução de problemas elastodinâmicos estacionários axi-simétricos no semi-espaço, com implementação computacional, resultados parciais e discussão;

Capítulo 6: Conclusões e Perspectivas.

CAPÍTULO 1

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A ELASTOSTÁTICA 3D

As equações diferenciais que regem os problemas da Física Matemática somente possuem soluções analíticas fechadas em casos nos quais tanto a geometria do domínio quanto as condições de contorno e iniciais são razoavelmente simples. Problemas com domínios arbitrários e condições de contorno bastante gerais apenas podem ser resolvidos de maneira aproximada, como por exemplo, através de técnicas numéricas.

Este capítulo trata da solução de um problema da elastostática linear, homogênea e isotrópica e a técnica numérica adotada é o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

1.1 A Elastostática Linear e suas Equações

No âmbito da Mecânica do Contínuo, a elastostática linear é governada por três equações de equilíbrio, seis equações cinemáticas e seis equações constitutivas conforme apresentam Popov [1978] e Shames [1989], sendo elas, escritas em notação indicial, respectivamente:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \quad (1.3)$$

onde os símbolos que nelas aparecem têm os seguintes significados:

σ_{ij} = tensor de tensões

ε_{ij} = tensor de deformações

u_i = vetor de deslocamentos lineares

b_i = vetor de forças de corpo

δ_{ij} = operador Delta de Kronecker, que possui esta propriedade:

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{para } i = j \\ = 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

E = módulo de elasticidade linear do material (módulo de Young)

ν = coeficiente de Poisson do material

Apenas para acrescentar, as Equações Constitutivas dadas por (1.3) fornecem σ_{ij} em função de ε_{ij} . Caso se queira fazer a representação inversa (e isto será utilizado posteriormente), ou seja, ε_{ij} em função de σ_{ij} , estas mesmas equações também podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \quad (1.4)$$

Retomando, temos então um conjunto de quinze equações envolvendo quinze incógnitas; sendo três deslocamentos u_i , seis deformações ε_{ij} e seis tensões σ_{ij} .

A tarefa da elastostática linear é resolver estas quinze equações para um domínio fornecido e para as condições de contorno e iniciais prescritas. É comum reescrevê-las num

conjunto de três equações de equilíbrio acopladas, tendo como variável o deslocamento u_i , bastando para isto combinar as Equações (1.1), (1.2) e (1.3), obtendo-se então a chamada Equação de Navier para problemas elastostáticos, que é:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (1.5)$$

Na Equação (1.5) os símbolos μ e λ , chamados de constantes de Lamé, são definidos como:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.7)$$

Outra grandeza que será amplamente utilizada neste texto é o vetor força de superfície, aqui representado por t_i . Ele resulta da relação entre as componentes do tensor de tensões, que são também as componentes dos vetores de tensão atuando em três planos mutuamente perpendiculares, e as componentes do vetor tensão atuando num plano de direção arbitrária caracterizado pela normal \mathbf{n} . Esta relação é conhecida como Fórmula de Cauchy e é representada como:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.8)$$

Uma vez estabelecidas as equações diferenciais que queremos resolver, vamos passar agora à apresentação do método utilizado neste trabalho para transformá-las em um conjunto de equações integrais, bem como da técnica numérica usada para aproximar esta solução.

1.2 De Equações Diferenciais no Domínio a Equações Integrais no Contorno

Nesta seção as equações diferenciais que regem a elastostática linear, definidas sobre o domínio do problema em questão, são transformadas em equações integrais equivalentes definidas sobre o contorno deste mesmo domínio. Daí o nome Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Antes, porém, seria útil lembrar o Teorema da Divergência do Cálculo Vetorial, onde é possível expressar uma integral de superfície através de uma integral de volume ou vice-versa [Kreyszig 1988].

Seja Ω uma região fechada do espaço cujo contorno é delimitado por uma superfície S . Sendo F uma função vetorial contínua e as primeiras derivadas parciais também contínuas, então

$$\int_{\Omega} \text{div } F \, d\Omega = \int_S F \cdot n \, dS \quad (1.9)$$

onde n é o vetor normal unitário externo à superfície S .

A Equação (1.9) também pode ser escrita como segue:

$$\int_{\Omega} F_{i,i} \, d\Omega = \int_S F_i n_i \, dS \quad (1.10)$$

Partindo agora da equação de equilíbrio da elastostática ($\sigma_{ij,j} + b_i = 0$), definida num domínio Ω , pode-se aplicar a idéia do Método dos Resíduos Ponderados (MRP) tomando as componentes de um campo de deslocamentos u_i^* como função ponderadora, resultando, desta forma, em:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* \, d\Omega = 0 \quad (1.11)$$

Separando a Equação (1.11) em dois termos, vem:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

Vamos trabalhar com o primeiro termo da Equação (1.12), lembrando que:

$$\left(\sigma_{ij} u_i^* \right)_{,j} = \sigma_{ij,j} u_i^* + \sigma_{ij} u_{i,j}^* \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij,j} u_i^* = \left(\sigma_{ij} u_i^* \right)_{,j} - \sigma_{ij} u_{i,j}^*$$

Este primeiro termo pode ser dividido em outros dois de tal forma que, ao aplicarmos o Teorema da Divergência e em seguida a Fórmula de Cauchy, obtemos:

$$1^\circ \text{ termo: } \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} u_i^* \right)_{,j} d\Omega = \int_S \sigma_{ij} u_i^* n_j dS = \int_S \sigma_{ij} n_j u_i^* dS = \int_S u_i^* t_i dS$$

$$2^\circ \text{ termo: } \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega$$

Mas observando que:

$$\sigma_{ij} u_{i,j}^* = \sigma_{ji} u_{j,i}^* = \sigma_{ij} u_{j,i}^*$$

e lembrando a definição do tensor de deformações, temos:

$$\sigma_{ij} u_{i,j}^* = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^* \right) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^* + u_{j,i}^* \right) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*$$

Assim a Equação (1.12) pode ser escrita como:

$$\int_S u_i^* t_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

ou

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = -\int_S u_i^* t_i dS \quad (1.14)$$

Manipulando o primeiro termo do lado esquerdo da Equação (1.14) e lembrando as Equações Constitutivas (1.3) e (1.4), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= -\int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}) \left(\frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}^* - \delta_{ij} \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}^* \right) d\Omega = \\ &= -\int_{\Omega} \left\{ \left[(\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}) \left(\frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}^* \right) \right] + \left[(\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}) \left(-\delta_{ij} \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}^* \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[(2\mu \varepsilon_{ij}) \left(\frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}^* \right) \right] + \left[(2\mu \varepsilon_{ij}) \left(-\delta_{ij} \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}^* \right) \right] \right\} d\Omega = \\ &= -\int_{\Omega} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu} \delta_{ij} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{kk} - \frac{\lambda^2 \delta_{ij} \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{kk} \sigma_{kk}^* + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \varepsilon_{ij} \sigma_{kk}^* \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Analisando separadamente cada termo a ser integrado da expressão acima, temos:

$$1^\circ \text{ termo: } \frac{\lambda}{2\mu} \delta_{ij} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{kk} = \frac{\lambda}{2\mu} \sigma_{ii}^* \varepsilon_{kk} = \frac{\lambda}{2\mu} \sigma_{kk}^* \varepsilon_{kk}$$

$$2^\circ \text{ termo: } -\frac{\lambda^2 \delta_{ij} \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{kk} \sigma_{kk}^* = -\frac{\lambda^2 \delta_{ii}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{kk} \sigma_{kk}^* = -\frac{3\lambda^2}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{kk} \sigma_{kk}^*$$

$$3^\circ \text{ termo: } \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^*$$

$$4^\circ \text{ termo: } -\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \varepsilon_{ij} \sigma_{kk}^* = -\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{ii} \sigma_{kk}^* = -\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{kk} \sigma_{kk}^*$$

Somando os quatro termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{kk}^* \varepsilon_{kk} \left(\frac{\lambda}{2\mu} - \frac{3\lambda^2}{2\mu(3\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \right) + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* = \\
& = \sigma_{kk}^* \varepsilon_{kk} \left(\frac{\lambda(3\lambda+2\mu) - 3\lambda^2 - 2\mu\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \right) + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* = \\
& = \sigma_{kk}^* \varepsilon_{kk} \left(\frac{3\lambda^2 + 2\mu\lambda - 3\lambda^2 - 2\mu\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \right) + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* = 0 + \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^*
\end{aligned}$$

Portanto:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^* d\Omega$$

Desta forma, a Equação (1.14) pode ser escrita como:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = - \int_S u_i^* t_i dS \quad (1.15)$$

Considerando-se ainda que:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega \quad (1.16)$$

e lembrando-se mais uma vez que:

$$\left(\sigma_{ij}^* u_i \right)_{,j} = \sigma_{ij,j}^* u_i + \sigma_{ij}^* u_{i,j} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij}^* u_{i,j} = \left(\sigma_{ij}^* u_i \right)_{,j} - \sigma_{ij,j}^* u_i$$

podemos voltar na Equação (1.16) e escrever:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = -\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* u_i)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega$$

Usando o Teorema da Divergência no primeiro termo do lado direito da equação acima;

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega = -\int_S \sigma_{ij}^* u_i n_j dS + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega$$

Analisando cada termo do lado direito separadamente, vem:

$$1^\circ \text{ termo: } -\int_S \sigma_{ij}^* u_i n_j dS = -\int_S t_i^* u_i dS$$

$$2^\circ \text{ termo: } \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega = -\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (\text{lembrando que } \sigma_{ij,j}^* + b_i^* = 0)$$

Finalmente, voltando na Equação (1.15), temos:

$$-\int_S t_i^* u_i dS - \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = -\int_S u_i^* t_i dS$$

que pode ser escrita como:

$$\int_S t_i u_i^* dS + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_S t_i^* u_i dS + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (1.17)$$

O resultado obtido na Equação (1.17) é conhecido como Teorema da Reciprocidade ou Teorema de Betti, que estabelece que o trabalho realizado por um conjunto de forças (de superfície t_i ou de corpo b_i) de um estado elastostático sobre os deslocamentos de um segundo estado u_i^* , é igual ao trabalho realizado pelo conjunto de forças t_i^* ou b_i^* do segundo, sobre os deslocamentos do primeiro u_i .

O que temos até este ponto é a transformação de uma Equação Diferencial (1.1) numa Equação Integral equivalente (1.17), válida em todo o domínio e não somente no contorno como

o método sugere. A maneira de se obter uma equação integral de contorno é através da escolha de uma função ponderadora u_i^* com algumas particularidades. O emprego desta função ponderadora transforma as integrais de domínio da expressão integral em integrais de contorno, como segue adiante.

Uma função ponderadora particularmente útil para ser aplicada na Equação (1.11) é aquela que resulta do chamado Problema de Kelvin conforme apresentado por Kane [1994]. Este problema é caracterizado pela aplicação de uma força de corpo na forma de um Delta de Dirac de intensidade unitária em um ponto ξ de um domínio elástico completo (ilimitado) em uma direção e_i dos eixos coordenados:

$$b_i^*(x, \xi) = \Delta(x - \xi) e_i$$

Neste problema, ξ é chamado de ponto de colocação (ou ponto fonte) e x é o ponto de campo. Na Figura (1.1a) está indicada uma excitação $\Delta(x - \xi)$ aplicada em ξ na direção $i = 1$, representada por Δe_1 . Em um ponto de campo qualquer x o problema terá três componentes de deslocamento u_{11}^* , u_{12}^* e u_{13}^* .

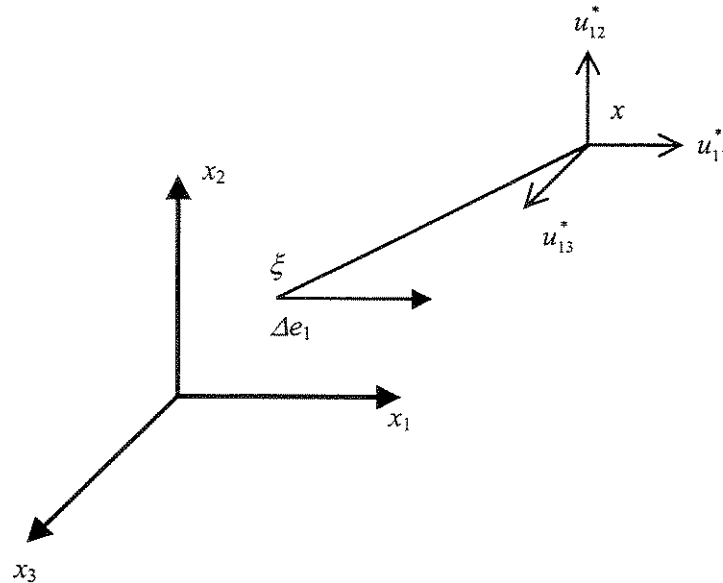


Figura 1.1a – Deslocamentos no ponto x resultantes de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1 .

Mas a mesma excitação $b_1^*(x, \xi) = \Delta(x - \xi) e_1$ também irá gerar no ponto x um tensor de tensões σ_{1ik} , cujas componentes estão mostradas na Figura (1.1b).

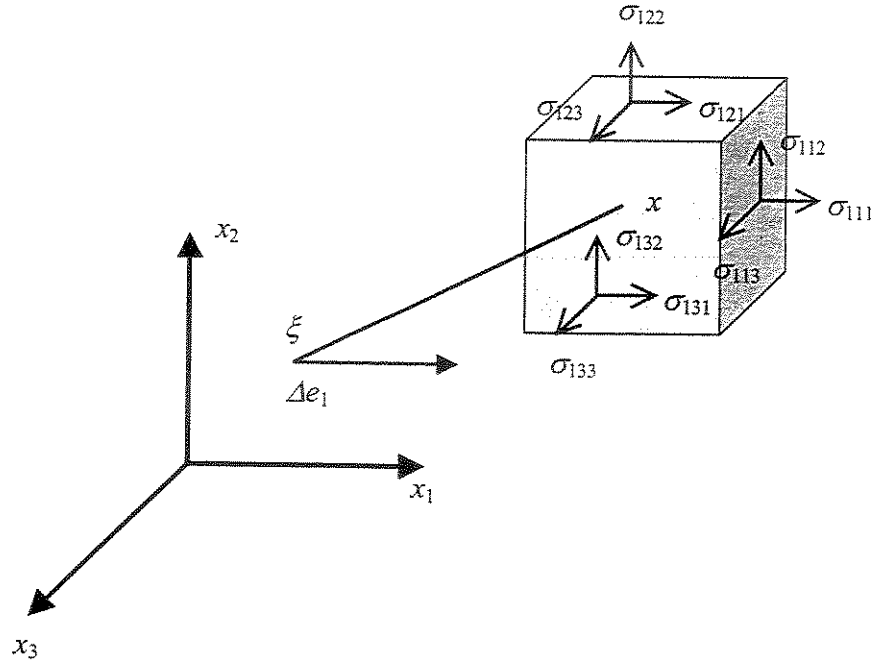


Figura 1.1b – Tensor de tensões σ_{1ij}^* no ponto x resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1 .

Em uma superfície de orientação arbitrária passando pelo ponto x , e caracterizada pelas componentes n_j de sua normal, atuam forças de superfície (vetor tensão) caracterizadas pelas componentes $t_{1i}^* = \sigma_{1ij} n_j$ como pode ser visto na Figura (1.1c).

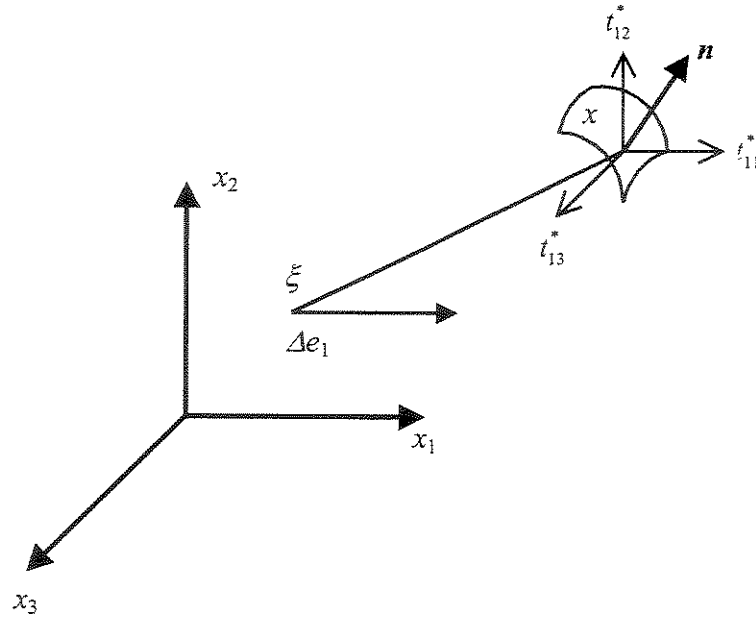


Figura 1.1c – Vetor de tensões t_{li}^* atuando no ponto x , na superfície de orientação n , resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1 .

É importante reconhecer que se as forças unitárias b_i^* forem aplicadas concomitantemente nas três direções e_i , então o campo de deslocamentos resultante será a superposição das componentes de cada excitação;

$$u_1^* = u_{11}^* + u_{21}^* + u_{31}^*$$

$$u_2^* = u_{12}^* + u_{22}^* + u_{32}^*$$

$$u_3^* = u_{13}^* + u_{23}^* + u_{33}^*$$

que ainda poderia ser escrito de forma compacta com o indicador de direção e_i (de valor unitário) como:

$$u_1^* = u_{i1}^* e_i$$

$$u_2^* = u_{i2}^* e_i$$

$$u_3^* = u_{i3}^* e_i$$

ou ainda:

$$u_j^* = u_{ij}^* e_i$$

Analogamente, as forças de superfície atuando em uma superfície de orientação n_k são dadas por:

$$t_j^* = t_{ij}^* e_i$$

Estes tensores u_{ij}^* e t_{ij}^* são conhecidos como tensores de Stokes, encontrados em Eringen e Suhubi [1975], e representam a chamada Solução Fundamental do problema elastostático linear, sendo as suas expressões para o caso 3D, mostradas em Brebbia e Dominguez [1989], dadas como:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{1}{r(\xi, x)} \right] \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_i} \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_j} \right] \quad (1.18)$$

$$t_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2(\xi, x)} \left[\frac{\partial r(\xi, x)}{\partial n} \right] \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 3 \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_i} \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_j} \right] \\ - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)r^2(\xi, x)} \left[\frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (1.19)$$

onde

$r(\xi, x) = x - \xi$ é o vetor raio que significa a distância entre o ponto de campo x e o ponto de colocação ξ dado por:

$$r(\xi, x) = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \right]^{1/2} = \left[(x_i - \xi_i)^2 \right]^{1/2}$$

$\frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_i}$ são as derivadas direcionais do vetor raio $r(\xi, x)$ dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \right]^{-1/2} \cdot 2(x_i - \xi_i) = \\ &= \frac{(x_i - \xi_i)}{\left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \right]^{1/2}} = \frac{(x_i - \xi_i)}{r(\xi, x)}\end{aligned}$$

$\frac{\partial r(\xi, x)}{\partial n}$ é a derivada do vetor raio em relação à normal calculada através do produto

escalar entre o gradiente do raio e a normal $\frac{\partial r(\xi, x)}{\partial n} = \nabla r \bullet n$.

$$\begin{aligned}\nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial x_3} \mathbf{k} = \frac{x_1 - \xi_1}{r(\xi, x)} \mathbf{i} + \frac{x_2 - \xi_2}{r(\xi, x)} \mathbf{j} + \frac{x_3 - \xi_3}{r(\xi, x)} \mathbf{k} \\ \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial n} &= \nabla r \bullet n = \frac{x_1 - \xi_1}{r(\xi, x)} n_1 + \frac{x_2 - \xi_2}{r(\xi, x)} n_2 + \frac{x_3 - \xi_3}{r(\xi, x)} n_3 = \frac{x_i - \xi_i}{r(\xi, x)} n_i\end{aligned}$$

Voltando agora à Equação (1.17), e trocando nela i por j apenas para manter os índices das relações acima como elas foram apresentadas, podemos escrevê-la como:

$$\int_S t_j u_{ij}^* e_i dS(x) + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* e_i d\Omega(x) = \int_S t_{ij}^* e_i u_j dS(x) + \int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega(x) \quad (1.20)$$

ou

$$\int_S t_j u_{ij}^* e_i dS(x) + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* e_i d\Omega(x) = \int_S t_{ij}^* e_i u_j dS(x) + \int_{\Omega} \Delta(x - \xi) e_j u_j d\Omega(x) \quad (1.21)$$

Analisando somente a última integral do lado direito, podemos escrever:

$$\int_{\Omega} \Delta(x - \xi) e_j u_j(x) d\Omega(x)$$

Aplicando a propriedade do Delta de Kronecker $\Rightarrow \delta_{ji} e_i = e_j$

resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(x - \xi) \delta_{ji} e_i u_j(x) d\Omega(x) &= \int_{\Omega} \Delta(x - \xi) \delta_{ji} u_j(x) e_i d\Omega(x) = \\ &= \int_{\Omega} \Delta(x - \xi) \delta_{ij} u_j(x) e_i d\Omega(x) = \int_{\Omega} \Delta(x - \xi) u_i(x) e_i d\Omega(x) \end{aligned}$$

$$\text{Aplicando a propriedade da seleção do Delta de Dirac} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x - c) g(x) dx = g(c)$$

obtemos:

$$\int_{\Omega} \Delta(x - \xi) u_i(x) e_i d\Omega(x) = u_i(\xi) e_i$$

Assim, a Equação (1.21) pode ser reescrita como:

$$u_i(\xi) + \int_S t_{ij}^* u_j dS(x) = \int_S t_j u_{ij}^* dS(x) + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega(x) \quad (1.22)$$

ou

$$u_i(\xi) = \int_S \{ u_{ij}^* t_j - t_{ij}^* u_j \} dS(x) + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega(x) \quad (1.23)$$

Esta Expressão (1.23) é conhecida como Identidade de Somigiana e é válida para qualquer ponto particular ξ onde as forças são aplicadas. Ela é uma equação integral que fornece o valor das componentes de deslocamento em qualquer ponto do domínio em função de integrais de contorno das grandezas u_j e t_j e de uma integral de domínio envolvendo forças de corpo b_j . Notar que na Equação (1.23) u_j e t_j não são geralmente conhecidas em todo o contorno, ao passo que b_j o é. A aplicação da Identidade de Somigiana para se obter u_i em qualquer ponto do domínio requer a obtenção prévia das grandezas u_j e t_j no contorno do mesmo. Para tanto será mostrada uma metodologia para a obtenção das grandezas no contorno

RESOLVENDO O PROBLEMA NO CONTORNO (FORMULAÇÃO SINGULAR)

Como já mencionado, a Equação Integral (1.23) permite a determinação do deslocamento u_i em um ponto ξ do domínio, uma vez conhecidas u_j e t_j no contorno. Veremos que a estratégia para a obtenção de u_j e t_j em S passa pela colocação do ponto ξ no próprio contorno S .

Assim, ao colocarmos ξ sobre S e fazermos o ponto de campo x , que é a variável de integração, percorrer S , vamos encontrar a situação em que x coincide com ξ e a variável $r(\xi, x) = x - \xi$ tende a zero. Uma análise das expressões para u_{ij}^* e t_{ij}^* , Equações (1.18) e (1.19), indica que elas possuem um comportamento $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente. Logo, quando $r \rightarrow 0$ os núcleos u_{ij}^* e t_{ij}^* apresentam comportamento singular.

O artifício usado para resolver este problema consiste em aumentar o contorno S de um hemisfério, com centro no ponto de colocação, e um pequeno raio ε que será posteriormente tomado no limite, como mostra a Figura (1.2).

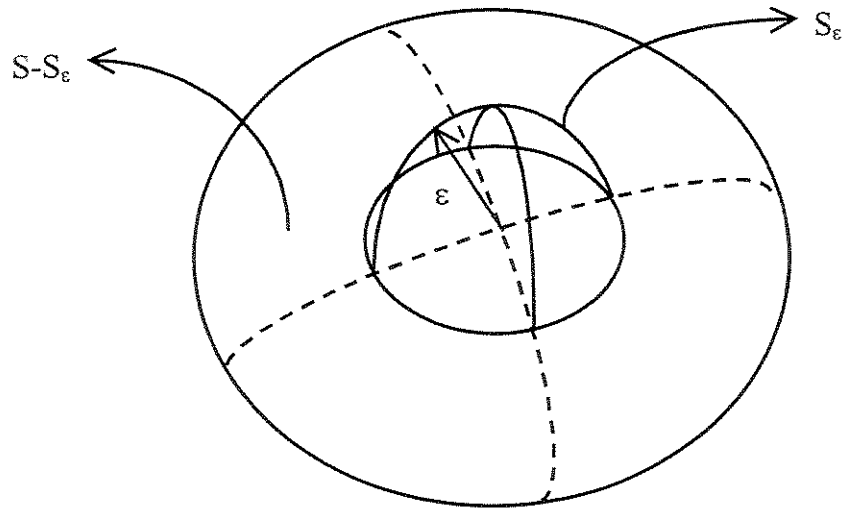


Figura 1.2 – Superfície de contorno acrescida de um hemisfério de integração S_ε

Reescrevendo a Equação (1.23) para o contorno expandido mostrado na Figura (1.2) e fazendo o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, temos:

$$u_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\int_{S-S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j dS(x) + \int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j dS(x) \right) - \left(\int_{S-S_\varepsilon} t_j^* u_j dS(x) + \int_{S_\varepsilon} t_j^* u_j dS(x) \right) + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega(x) \right] \quad (1.24)$$

Este procedimento de expandir o contorno em torno de um ponto singular, e em seguida fazer o limite, é conhecido como integrar uma função no sentido do Valor Principal de Cauchy, mostrado em Kane [1994].

Vamos analisar agora estas integrais uma a uma como apresentado em Brebbia [1978].

Discutindo inicialmente a integral envolvendo a solução fundamental em deslocamento:

$$\int_S u_{ij}^* t_j dS(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S-S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j dS(x) \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j dS(x) \right)$$

A primeira integral do lado direito torna-se simplesmente uma integral em todo o contorno S quando $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S-S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j dS(x) \right) = \int_S u_{ij}^* t_j dS(x)$$

Já a segunda integral pode ser escrita novamente como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j dS(x) \right) = t_j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* dS(x) \right)$$

Lembrando que a solução fundamental é da ordem de $1/\varepsilon$, a integral de superfície acima resulta em ε^2 , e daí concluímos que esta tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* dS(x) \right) = 0$$

Em outras palavras, a integral envolvendo a solução fundamental em deslocamento não é afetada pela singularidade em ξ .

Analisando agora a integral envolvendo a solução fundamental em forças de superfície, usaremos as definições geométricas da Figura (1.3).

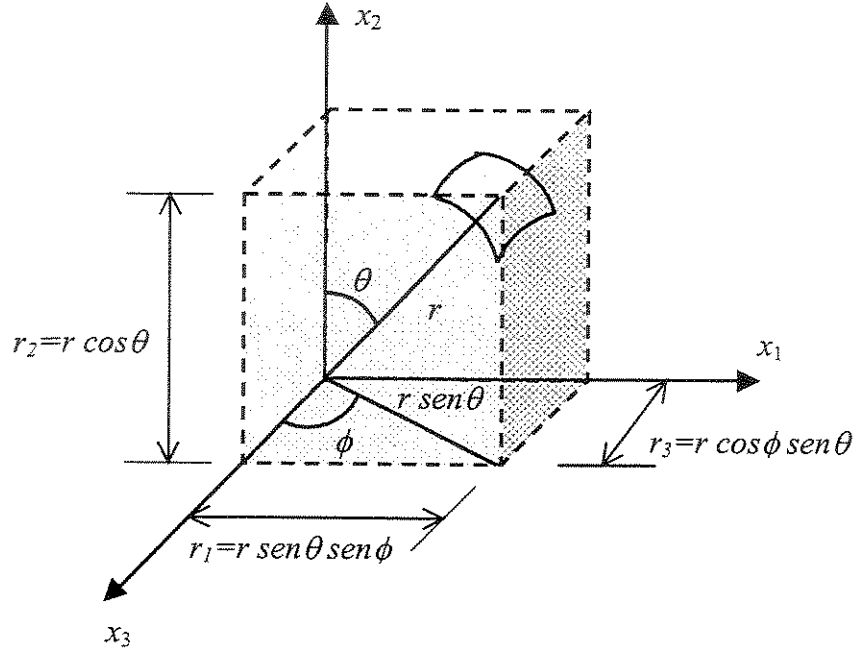


Figura 1.3 – Definições geométricas

$$\int_S t_{ij}^* u_j dS(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S-S_\varepsilon} t_{ij}^* u_j dS(x) \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\varepsilon} t_{ij}^* u_j dS(x) \right)$$

A primeira integral do lado direito torna-se simplesmente uma integral em todo o contorno S quando $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S-S_\varepsilon} t_{ij}^* u_j dS(x) \right) = \int_S t_{ij}^* u_j dS(x)$$

A segunda integral pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S_\varepsilon} \left\{ u_j \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu) \delta_{ij} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right] \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \right\} dS(x) \right\}$$

Reforçando o fato de que $\varepsilon \equiv r$ e analisando a Figura (1.3), podemos escrever que:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_i} = 0$$

e percebendo que $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} = n_i = \varepsilon_i$$

onde ε_i é a componente de ε na direção i ; podemos escrever que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S_\varepsilon} \left\{ u_j \left[\left((1-2\nu) \delta_{ij} + 3\varepsilon_i \varepsilon_j \right) \right] \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \right\} dS(x) \right\}$$

Usando as relações geométricas da Figura (1.3), é possível escrever para $i = 1$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S_\varepsilon} \left\{ u_1 (1-2\nu) + 3u_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 + 3u_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 3u_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \right\} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{8\pi(1-\nu)} \right\}$$

A integral agora não depende de r e pode ser expressa em termos de ϕ e θ .

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[u_1 (1-2\nu) + 3u_1 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 3u_2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \theta + 3u_3 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \right] \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{8\pi(1-\nu)} \right\}$$

Resolvendo a integral anterior, ver Brebbia [1978], encontramos, para um contorno suave:

$$-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}[(1-2\nu)2\pi+2\pi]u_1(\xi)=-\frac{4(1-\nu)}{8(1-\nu)}u_1(\xi)=-\frac{1}{2}u_1(\xi)$$

O mesmo pode ser demonstrado quando fazemos $i = 2$ e $i = 3$ e este resultado pode então ser escrito como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\epsilon} t_{ij}^* u_j dS(x) \right) = -\frac{1}{2}u_i(\xi) = -\frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi)$$

Desta forma a integral envolvendo a solução fundamental em força de superfície torna-se:

$$\int_S t_{ij}^* u_j dS(x) = \int_S t_{ij}^* u_j dS(x) - \frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi)$$

Após feitas estas considerações em que ξ pertence ao contorno, podemos finalmente escrever a Equação (1.23) como:

$$\delta_{ij}u_j(\xi) - \frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi) = \int_S \{t_j u_{ij}^* - t_{ij}^* u_j\} dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* d\Omega(x)$$

ou

$$\frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi) + \int_S t_{ij}^* u_j dS(x) = \int_S u_{ij}^* t_j dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* d\Omega(x) \quad (1.25)$$

De maneira mais genérica, a Equação Integral de Contorno (1.25) pode ser escrita como:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_S t_{ij}^* u_j dS(x) = \int_S u_{ij}^* t_j dS(x) + \int_\Omega u_{ij}^* b_j d\Omega(x) \quad (1.26)$$

onde a constante $c_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ é válida somente para contornos suaves, caso contrário outro tensor 3x3, exemplificado em Kane [1994], é necessário.

A Equação Integral (1.26) é uma representação exata da solução do problema elastostático e, mais uma vez, vale ressaltar, que é válida para qualquer ponto particular ξ onde as forças são aplicadas. Aqui ainda persiste o fato de que nem todos os valores de u_j e t_j em S são conhecidos. Na próxima etapa vamos mostrar uma técnica para aproximar a solução desta equação integral.

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Nos problemas práticos da elastostática linear, os deslocamentos são conhecidos em uma parte do contorno S_1 e as forças de superfície em outra parte S_2 , de tal forma que $S_1 + S_2 = S$. Por isso, não é possível resolver a Equação (1.26) na forma como ela se apresenta. A maneira de solucionar este problema é discretizando o contorno, ou ainda, dividindo-o em elementos nos quais deslocamentos e forças de superfície são escritos em termos de seus valores em pontos específicos denominados nós. Vamos considerar agora uma maneira de se obter uma solução aproximada para um problema de valor de contorno a partir da discretização da Equação (1.26). Tal procedimento conduz a um sistema de equações algébricas cuja solução resulta em todos os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno.

Definindo, para cada elemento j os deslocamentos e forças de superfície em função dos respectivos valores nodais, vem:

$$u_j^e(x) = \phi_c(x) \left(u_j^e(x) \right)_c \quad (1.27)$$

$$t_j^e(x) = \phi_c(x) \left(t_j^e(x) \right)_c \quad (1.28)$$

onde o índice c indica o número de nós contidos em cada elemento e da discretização e ϕ é a função de interpolação ou função de forma que devem satisfazer duas condições:

- 1) $\phi_c(x) = 1$ no nó c
- 2) $\phi_c(x) = 0$ em todos os outros nós

Se os elementos contiverem um único nó, as funções de deslocamento e força de superfície são supostas constantes ao longo destes e o nó é tomado como representante de todo o elemento, sendo, por isso, denominados de elementos constantes. Já, se os elementos contiverem dois nós, eles são denominados lineares e as funções de deslocamento e força de superfície variam linearmente ao longo de cada um, sendo que esta função linear é escrita em função dos dois valores nodais. Assim sucessivamente pode-se ir aumentando o número de nós por elemento obtendo-se elementos quadráticos, cúbicos, etc.

Com esta última consideração feita e admitindo ausentes as forças de corpo, podemos escrever a Equação Integral de Contorno (1.26) como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} t_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) (u_j^e(x))_c dS_e(x) \right] = \\ = \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} u_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) (t_j^e(x))_c dS_e(x) \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

onde NE é o número de elementos de contorno e NNE é o número de nós por elemento (que é igual ao número de funções de forma).

Como $(u_j^e)_c$ e $(t_j^e)_c$ são constantes, a Equação (1.29) ainda pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} t_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) \right] u_j^e(x) = \\ = \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} u_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) \right] t_j^e(x) \end{aligned} \quad (1.30)$$

A Equação (1.30) corresponde à aplicação da solução fundamental num nó particular do contorno de coordenada ξ (ponto fonte), integrada sobre todos os nós do contorno de coordenada x (ponto de campo).

Chamando;

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ij}^e(\xi, x) &= \sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} t_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) \\ G_{ij}^e(\xi, x) &= \sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} u_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x)\end{aligned}\tag{1.31}$$

a Equação (1.30) passa a ser escrita como:

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \sum_{e=1}^{NE} \hat{H}_{ij}^e(\xi, x) u_j^e(x) = \sum_{e=1}^{NE} G_{ij}^e(\xi, x) t_j^e(x)\tag{1.32}$$

Mais uma vez, chamando;

$$\begin{aligned}H_{ij}^e(\xi, x) &= \hat{H}_{ij}^e(\xi, x) && \text{se } \xi \neq x \\ H_{ij}^e(\xi, x) &= \hat{H}_{ij}^e(\xi, x) + c_{ij}(\xi) && \text{se } \xi = x\end{aligned}\tag{1.33}$$

a Equação (1.32) pode ser escrita como:

$$\sum_{e=1}^{NE} H_{ij}^e(\xi, x) u_j^e(x) = \sum_{e=1}^{NE} G_{ij}^e(\xi, x) t_j^e(x)\tag{1.34}$$

Se considerarmos agora a contribuição de todos os pontos ξ , podemos escrever um sistema global de equações que, representado na forma matricial, pode ser expresso da seguinte forma:

$$[H] \{u\} = [G] \{t\}\tag{1.35}$$

Os vetores $\{u\}$ e $\{t\}$ representam todos os valores dos deslocamentos e forças de superfície antes da aplicação das condições de contorno. Quando estas condições são introduzidas, é possível rearranjar as colunas de $[H]$ e $[G]$ de modo a deixar todas as incógnitas num mesmo vetor $\{x\}$ no lado esquerdo da igualdade representada pela Equação (1.35). Isto conduz a um sistema de equações final do tipo:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (1.36)$$

onde o vetor $\{x\}$ possui incógnitas tanto em deslocamento quanto em forças de superfície.

Com a resolução do Sistema de Equações (1.36), todos os valores do contorno são conhecidos, e de posse destes dados é possível voltar à Equação (1.26), e calcular qualquer valor dos deslocamentos em pontos internos. Neste caso o vetor $c_{ij}(\xi)$ é igual à matriz identidade.

Um pouco mais trabalhoso é o cálculo das tensões em pontos internos, mostrado em Brebbia e Dominguez [1989]. Para isto basta, na Identidade de Somigliana, derivar os deslocamentos nestes pontos, obtendo assim as deformações, e em seguida aplicar a relação tensão deformação dada pela Equação (1.3). Após este procedimento chega-se à equação que fornece as tensões em pontos internos dada por:

$$\sigma_{lk}(\xi) = \int_S \{ D_{jlk} t_j - S_{jlk} u_j \} dS(x) + \int_\Omega D_{jlk} b_j d\Omega(x) \quad (1.37)$$

onde os tensores de terceira ordem D_{jlk} e S_{jlk} são dados por:

$$D_{jlk} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) \left[\delta_{jl} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_l} - \delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] + 3 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} \quad (1.38)$$

e

$$\begin{aligned}
S_{jlk} = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \nu \left(\delta_{lj} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right) - 5 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] + \right. \\
+ 3\nu \left(n_l \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_j} + n_k \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + \\
\left. + (1-2\nu) \left(3n_j \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} + n_k \delta_{lj} + n_l \delta_{kj} \right) - (1-4\nu)n_j \delta_{lk} \right\}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Tanto para o cálculo de deslocamentos quanto das tensões em pontos internos, o mesmo procedimento de discretização do contorno é necessário.

DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS

Uma alternativa para se calcular numericamente os valores das integrais que aparecem na Equação (1.30), posteriormente chamadas de matrizes $H_{ij}^e(\xi, x)$ e $G_{ij}^e(\xi, x)$ é através da Quadratura Gaussiana Padrão [Stroud e Secrest 1966], cuja fórmula é dada em termos de um sistema de coordenadas normalizadas η como mostra a Equação (1.40).

$$\int_{\eta_1=-1}^{\eta_2=+1} f(\eta) d\eta \cong \sum_{k=1}^N w_k f(\eta_k) \tag{1.40}$$

onde N é o número de pontos de integração, η_k é a coordenada do k éximo ponto de integração e w_k é o fator ponderador (peso) associado.

Neste método, todas as grandezas precisam então ser transferidas do sistema de coordenadas global (x_i) para o sistema de coordenadas local (η_i). Utilizando um elemento de superfície quadrilateral para ilustração, este sistema de coordenadas local seria expresso como mostra a Figura (1.4).

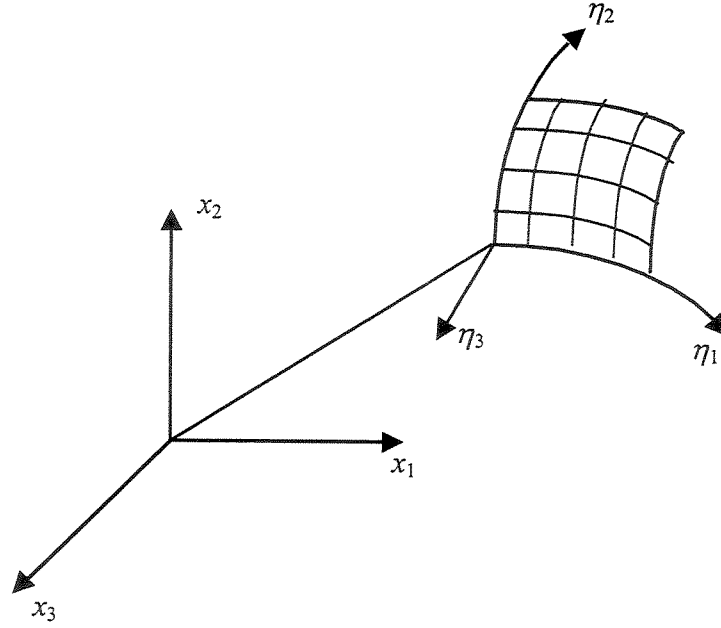


Figura 1.4 – Sistema de coordenadas normalizado para um elemento de superfície quadrilateral.

O método de integração por Quadratura Gaussiana Padrão pode ser aplicado sem restrições quando o ponto de colocação ξ não coincide com o ponto de campo x , resultando nos blocos de matrizes $H_{ij}^e(\xi, x)$ e $G_{ij}^e(\xi, x)$ fora da diagonal das matrizes globais $[H]$ e $[G]$. Desta forma, aplicando a definição apresentada na Equação (1.40) para estes núcleos tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{S_e} t_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) &= \int_{\eta_1=-1}^{\eta_1=+1} t_{ij}^*(\xi(\eta), x(\eta)) \phi_c(x(\eta)) J(x(\eta)) d\eta = \\ &= \sum_{k=1}^N t_{ij}^*(\eta_k) \phi_c(x(\eta_k)) J(x(\eta_k)) w_k \end{aligned} \quad (1.41a)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_e} u_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) &= \int_{\eta_1=-1}^{\eta_1=+1} u_{ij}^*(\xi(\eta), x(\eta)) \phi_c(x(\eta)) J(x(\eta)) d\eta = \\ &= \sum_{k=1}^N u_{ij}^*(\eta_k) \phi_c(x(\eta_k)) J(x(\eta_k)) w_k \end{aligned} \quad (1.41b)$$

onde $J(x(\eta))$ representa o Jacobiano da transformação de coordenadas.

Devemos ainda calcular os coeficientes das matrizes $H_{ij}^e(\xi, x)$ e $G_{ij}^e(\xi, x)$ quando o ponto de colocação ξ coincide com o ponto de campo x , resultando nos blocos de matrizes $H_{ij}^e(\xi, x)$ e $G_{ij}^e(\xi, x)$ das diagonais das matrizes globais $[H]$ e $[G]$ respectivamente. Isto significa dizer que a variável $r(\xi, x) = x - \xi$ utilizada nos núcleos de deslocamento e força de superfície das Equações (1.18) e (1.19) tende a zero e, conforme já comentado anteriormente neste mesmo capítulo, o fato de $r(\xi, x) = x - \xi$ tender a zero acarreta em um comportamento singular de ordem $O(1/r)$ (singularidade fraca) e $O(1/r^2)$ (singularidade forte) neste núcleos. Para resolver este problema, lança-se mão de alguns artifícios específicos que serão discutidos na sequência.

Integração dos núcleos de singularidade fraca (u_{ij}^*): Para integrar os núcleos u_{ij}^* é possível utilizar a quadratura Gaussiana padrão desde que um tratamento particular seja dado ao elemento singular. A idéia é dividir o elemento em três ou quatro sub-elementos triangulares, conforme ilustrado na Figura (1.5), dependendo de o elemento original ser triangular ou quadrilateral. Então cada sub-elemento é tratado como um domínio quadrilateral onde dois nós são colapsados no ponto de colocação. Desta forma, o jacobiano da transformação apresenta ordem $O(r)$, cancelando assim a singularidade de ordem $O(1/r)$ do núcleo de deslocamentos, como visto em Dominguez [1993]. Este artifício para lidar com esta integral singular foi apresentado por Lachat [1975] sendo desenvolvido posteriormente por Telles [1987]. Com isto todos os blocos $G_{ij}^e(\xi, x)$ da matriz global $[G]$ foram calculados.

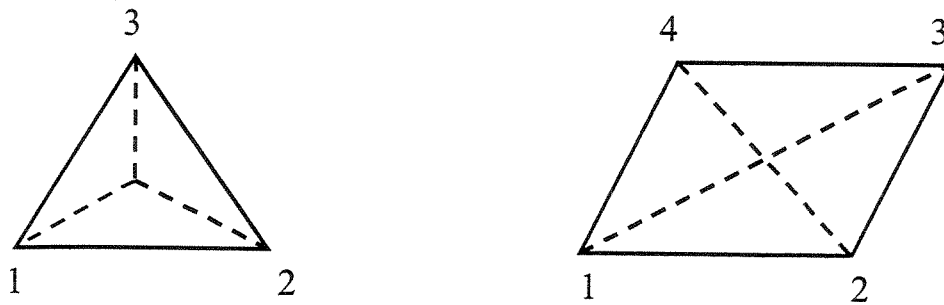


Figura 1.5 – Subdivisão do elemento para integração do núcleo u_{ij}^*

Integração dos núcleos de singularidade forte (t_{ij}^*) : A singularidade de ordem $O(1/r^2)$ apresentada pelo núcleo (t_{ij}^*) somente pode ser resolvida no sentido do Valor Principal de Cauchy. Uma maneira alternativa de calcular estes blocos diagonais é através da consideração do movimento de corpo rígido (mesmo deslocamento para todos os nós numa determinada direção). Esta consideração pode ser feita pois as matrizes da equação integral de contorno devem ser aplicadas a qualquer problema físico com uma única solução desde que esta solução independa de sua geometria. Arbitra-se comumente deslocamentos unitários para os nós nas três direções. Como consequência do movimento de corpo rígido, as forças de superfície são iguais a zero. Esquemáticamente podemos entender este conceito da seguinte forma:

Assuma um domínio fechado 3D que é discretizado com quatro elementos constantes. É possível criar, de maneira fictícia, uma série de três deslocamentos de corpo rígido de valor unitário, respectivamente $(u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0)$, $(u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0)$ e $(u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1)$. Estes três deslocamentos de corpo rígido não induzem o aparecimento de forças de superfície, ou seja $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. A Equação (1.42), em seguida, mostra como fica o sistema global $[H]\{u\} = [G]\{t\}$ admitindo o primeiro caso de movimento de corpo rígido, isto é, $(u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0)$.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} \\ H_{71} & H_{72} & H_{73} \\ H_{81} & H_{82} & H_{83} \\ H_{91} & H_{92} & H_{93} \\ H_{101} & H_{102} & H_{103} \\ H_{111} & H_{112} & H_{113} \\ H_{121} & H_{122} & H_{123} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{64} & H_{65} & H_{66} \\ H_{74} & H_{75} & H_{76} \\ H_{84} & H_{85} & H_{86} \\ H_{94} & H_{95} & H_{96} \\ H_{104} & H_{105} & H_{106} \\ H_{114} & H_{115} & H_{116} \\ H_{124} & H_{125} & H_{126} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{17} & H_{18} & H_{19} \\ H_{27} & H_{28} & H_{29} \\ H_{37} & H_{38} & H_{39} \\ H_{47} & H_{48} & H_{49} \\ H_{57} & H_{58} & H_{59} \\ H_{67} & H_{68} & H_{69} \\ H_{77} & H_{78} & H_{79} \\ H_{87} & H_{88} & H_{89} \\ H_{97} & H_{98} & H_{99} \\ H_{107} & H_{108} & H_{109} \\ H_{117} & H_{118} & H_{119} \\ H_{127} & H_{128} & H_{129} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{110} & H_{111} & H_{112} \\ H_{210} & H_{211} & H_{212} \\ H_{310} & H_{311} & H_{312} \\ H_{410} & H_{411} & H_{412} \\ H_{510} & H_{511} & H_{512} \\ H_{610} & H_{611} & H_{612} \\ H_{710} & H_{711} & H_{712} \\ H_{810} & H_{811} & H_{812} \\ H_{910} & H_{911} & H_{912} \\ H_{1010} & H_{1011} & H_{1012} \\ H_{1110} & H_{1111} & H_{1112} \\ H_{1210} & H_{1211} & H_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} \\ G_{71} & G_{72} & G_{73} \\ G_{81} & G_{82} & G_{83} \\ G_{91} & G_{92} & G_{93} \\ G_{101} & G_{102} & G_{103} \\ G_{111} & G_{112} & G_{113} \\ G_{121} & G_{122} & G_{123} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{64} & G_{65} & G_{66} \\ G_{74} & G_{75} & G_{76} \\ G_{84} & G_{85} & G_{86} \\ G_{94} & G_{95} & G_{96} \\ G_{104} & G_{105} & G_{106} \\ G_{114} & G_{115} & G_{116} \\ G_{124} & G_{125} & G_{126} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{17} & G_{18} & G_{19} \\ G_{27} & G_{28} & G_{29} \\ G_{37} & G_{38} & G_{39} \\ G_{47} & G_{48} & G_{49} \\ G_{57} & G_{58} & G_{59} \\ G_{67} & G_{68} & G_{69} \\ G_{77} & G_{78} & G_{79} \\ G_{87} & G_{88} & G_{89} \\ G_{97} & G_{98} & G_{99} \\ G_{107} & G_{108} & G_{109} \\ G_{117} & G_{118} & G_{119} \\ G_{127} & G_{128} & G_{129} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{110} & G_{111} & G_{112} \\ G_{210} & G_{211} & G_{212} \\ G_{310} & G_{311} & G_{312} \\ G_{410} & G_{411} & G_{412} \\ G_{510} & G_{511} & G_{512} \\ G_{610} & G_{611} & G_{612} \\ G_{710} & G_{711} & G_{712} \\ G_{810} & G_{811} & G_{812} \\ G_{910} & G_{911} & G_{912} \\ G_{1010} & G_{1011} & G_{1012} \\ G_{1110} & G_{1111} & G_{1112} \\ G_{1210} & G_{1211} & G_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

A partir da Equação (1.42) é possível estabelecer uma relação para alguns termos, por exemplo, da primeira linha.

$$H_{11} + H_{14} + H_{17} + H_{110} = 0 \tag{1.43}$$

Através da Equação (1.43) o elemento singular H_{11} pode ser determinado indiretamente. Estabelecendo a mesma relação para as outras linhas do sistema de equações, obtém-se como resultado a primeira coluna de todos os blocos diagonais. Admitindo em seguida o segundo ($u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0$) e o terceiro ($u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1$) movimentos de corpo rígido

obtêm-se a segunda e terceira colunas dos blocos diagonais. Este procedimento permite calcular os componentes singulares em função dos outros não singulares. Com isto todos os blocos $H_{ij}^e(\xi, x)$ da matriz global $[H]$ foram calculados.

1.3 Sub-regiões em elastostática

Na seção anterior foi desenvolvida a formulação do Método dos Elementos de Contorno para um meio linear, elástico, homogêneo e isotrópico. Todavia, em vários casos, há que se considerar a análise de meios não-homogêneos, mas constituídos de várias camadas. Estes problemas podem ser resolvidos utilizando a formulação já estudada além das condições de continuidade provenientes da dinâmica e cinemática do problema. Neste caso, todos os contornos do corpo devem ser discretizados, incluindo interfaces que separam zonas homogêneas dentro do meio. Aplicando a formulação do MEC para todos os contornos, mais as equações de continuidade em todas as interfaces, onde todos os deslocamentos e forças de superfície são desconhecidos, resulta num sistema de equações que pode ser resolvido. Para ilustrar e melhor compreender um caso concreto, considere um meio com duas sub-regiões como mostrado na Figura (1.6).

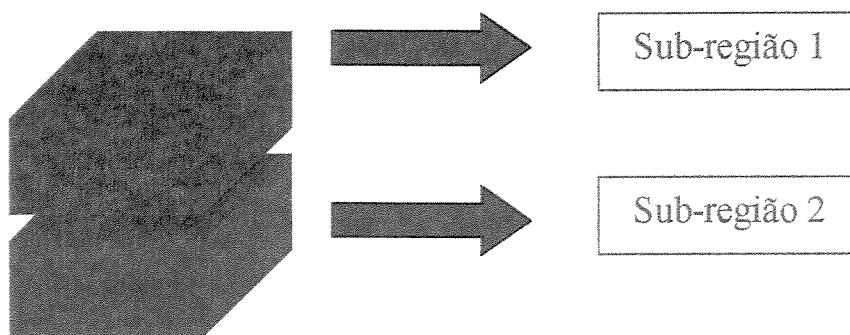


Figura 1.6 – Meio contínuo com duas camadas discretizado com doze elementos constantes.

Admitamos que cada sub-domínio possua seis elementos – cada face dos paralelepípedos contém um elemento. Os sub-domínios possuem um elemento na interface cada um, sendo que,

para exemplificar, vamos admitir que sejam eles os elementos número seis da primeira sub-região e o número sete da segunda. Aplicando a formulação do MEC para cada sub-região separadamente, obtemos o seguinte sistema global de equações $[H]\{u\}=[G]\{t\}$ onde cada bloco H_{ij} e G_{ij} tem dimensão 3x3 e os vetores u_j e t_j , dimensão 1x3.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & H_{711} & H_{712} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} & H_{811} & H_{812} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} & H_{911} & H_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} & H_{1011} & H_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{117} & H_{118} & H_{119} & H_{1110} & H_{1111} & H_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{127} & H_{128} & H_{129} & H_{1210} & H_{1211} & H_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{77} & G_{78} & G_{79} & G_{710} & G_{711} & G_{712} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{87} & G_{88} & G_{89} & G_{810} & G_{811} & G_{812} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{97} & G_{98} & G_{99} & G_{910} & G_{911} & G_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{107} & G_{108} & G_{109} & G_{1010} & G_{1011} & G_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{117} & G_{118} & G_{119} & G_{1110} & G_{1111} & G_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{127} & G_{128} & G_{129} & G_{1210} & G_{1211} & G_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \\ t_{10} \\ t_{11} \\ t_{12} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Aplicando as condições de continuidade que são

• Compatibilidade cinemática $u_6 = u_7 = u_{\text{int}}$

• Equilíbrio dinâmico $t_6 = -t_7 = t_{\text{int}}$

A Equação (1.44) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}
 H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & H_{711} & H_{712} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} & H_{811} & H_{812} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} & H_{911} & H_{912} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} & H_{1011} & H_{1012} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{117} & H_{118} & H_{119} & H_{1110} & H_{1111} & H_{1112} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{127} & H_{128} & H_{129} & H_{1210} & H_{1211} & H_{1212}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_{\text{int}} \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{77} & G_{78} & G_{79} & G_{710} & G_{711} & G_{712} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{87} & G_{88} & G_{89} & G_{810} & G_{811} & G_{812} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{97} & G_{98} & G_{99} & G_{910} & G_{911} & G_{912} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{107} & G_{108} & G_{109} & G_{1010} & G_{1011} & G_{1012} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{117} & G_{118} & G_{119} & G_{1110} & G_{1111} & G_{1112} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{127} & G_{128} & G_{129} & G_{1210} & G_{1211} & G_{1212}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_{\text{int}} \\ t_8 \\ t_9 \\ t_{10} \\ t_{11} \\ t_{12}
 \end{Bmatrix}
 \quad (1.45)$$

Rearranjando os índices, temos:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{76} & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & H_{711} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{86} & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} & H_{811} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{96} & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} & H_{911} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{106} & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} & H_{1011} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{116} & H_{117} & H_{118} & H_{119} & H_{1110} & H_{1111} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{126} & H_{127} & H_{128} & H_{129} & H_{1210} & H_{1211} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{76} & G_{77} & G_{78} & G_{79} & G_{710} & G_{711} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{86} & G_{87} & G_{88} & G_{89} & G_{810} & G_{811} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{96} & G_{97} & G_{98} & G_{99} & G_{910} & G_{911} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{106} & G_{107} & G_{108} & G_{109} & G_{1010} & G_{1011} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{116} & G_{117} & G_{118} & G_{119} & G_{1110} & G_{1111} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{126} & G_{127} & G_{128} & G_{129} & G_{1210} & G_{1211} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \\ t_{10} \\ t_{11} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Ressalta-se que neste ponto a matriz global $[H]$ não é quadrada como sempre acontece no MEC.

Como todas as grandezas são desconhecidas na interface, vamos passar a coluna da matriz $[G]$ que multiplica o t_{int} na Equação (1.45) ou t_6 na Equação (1.46) para o lado esquerdo da igualdade, zerando a posição que ela ocupava anteriormente.

$$\begin{bmatrix}
H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{16} \\
H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{26} \\
H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{36} \\
H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{46} \\
H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{56} \\
H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{66} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{76} & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & H_{711} & G_{76} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{86} & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} & H_{811} & G_{86} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{96} & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} & H_{911} & G_{96} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{106} & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} & H_{1011} & G_{106} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{116} & H_{117} & H_{118} & H_{119} & H_{1110} & H_{1111} & G_{116} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{126} & H_{127} & H_{128} & H_{129} & H_{1210} & H_{1211} & G_{126}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ t_6
\end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{77} & G_{78} & G_{79} & G_{710} & G_{711} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{87} & G_{88} & G_{89} & G_{810} & G_{811} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{97} & G_{98} & G_{99} & G_{910} & G_{911} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{107} & G_{108} & G_{109} & G_{1010} & G_{1011} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{117} & G_{118} & G_{119} & G_{1110} & G_{1111} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{127} & G_{128} & G_{129} & G_{1210} & G_{1211} & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ 0 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \\ t_{10} \\ t_{11}
\end{Bmatrix}
\quad (1.47)$$

Notemos agora que a matriz global $[H]$ é quadrada.

Aplicando-se as condições de contorno com posterior permutação das colunas, monta-se o sistema do tipo $[A]\{x\} = \{B\}$ cuja solução contém os valores dos deslocamentos e as forças de superfície nos contornos de todas as sub-regiões.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A ELASTODINÂMICA ESTACIONÁRIA 3D

2.1 A Elastodinâmica Estacionária Linear e suas Equações

A formulação do MEC para a elastodinâmica tem o mesmo tratamento já verificado no Capítulo 1 para a elastostática, mudando apenas as equações de equilíbrio, que eram $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ e agora passam a ser:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

onde os novos símbolos que aparecem na Equação (2.1) significam:

ρ = densidade de massa ou massa específica

\ddot{u}_i = vetor de acelerações

É conveniente ressaltar que para o regime estacionário, assumindo-se uma variação temporal harmônica $u(x,t) = u(x) \exp(i\omega t)$, a Equação (2.1) passa a ser independente do tempo e pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = -\omega^2 \rho u_i \quad (2.2)$$

lembrando ainda que agora todas as grandezas vetoriais e tensoriais são complexas.

Também aqui, se forem combinadas as três equações de equilíbrio, as seis equações cinemáticas e as seis equações constitutivas, obtém-se um conjunto de três equações de equilíbrio acopladas, tendo como variável o deslocamento u_i resultando na chamada Equação de Navier para problemas elastodinâmicos, representada como:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.3)$$

A Equação (2.3), quando escrita para o regime estacionário fica:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = -\omega^2 \rho u_i \quad (2.4)$$

É possível mostrar que as relações

$$\frac{\mu}{\rho} = Cs^2 \quad (2.5)$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = Cp^2 \quad (2.6)$$

representam respectivamente Cs , a velocidade de propagação da onda de cisalhamento, e Cp , a velocidade de propagação da onda de pressão em um meio contínuo elástico, como exposto em Graff [1975] e Dominguez [1993]. Com as definições das velocidades de propagação das ondas de cisalhamento e pressão, a Equação de Navier (2.4) pode ser reescrita como:

$$Cs^2 u_{i,jj} + (Cp^2 - Cs^2) u_{j,ji} + b_i = -\omega^2 u_i \quad (2.7)$$

De posse das equações diferenciais a serem resolvidas, mostra-se agora a aplicação do MEC para encontrar uma solução das mesmas.

2.2 Equações Integrais de Contorno

Analogamente ao que fora feito anteriormente, baseando-se na idéia do MRP aplicado à Equação de Equilíbrio da Elastodinâmica Estacionária (2.2) e já utilizando o resultado obtido na Equação (1.26), sem as forças de corpo, a equação integral de contorno para a elastodinâmica estacionária pode ser escrita no domínio da frequência como:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)u_j(x, \omega)dS(x) = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)t_j(x, \omega)dS(x) \quad (2.8)$$

A Solução Fundamental do problema elastodinâmico estacionário para o caso 3D é dada, como encontrada em Brebbia e Dominguez [1989], por:

$$u_{ij}^*(\xi, x, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho Cs^2} \left[\psi \delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} t_{ij}^*(\xi, x, \omega) = & \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r(\xi, x)} \chi \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) + \right. \\ & - \frac{2}{r(\xi, x)} \chi \left(n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} + \\ & \left. + \left(\frac{Cp^2}{Cs^2} - 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{2r} \chi \right) \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

com

$$\psi(\xi, x, \omega) = \left[\left(1 - \frac{Cs^2}{\omega^2 r^2(\xi, x)} + \frac{Cs}{i\omega r(\xi, x)} \right) \frac{e^{-i\omega r(\xi, x)/Cs}}{r(\xi, x)} + \right. \\ \left. - \left(\frac{Cs^2}{Cp^2} \right) \left(-\frac{Cp^2}{\omega^2 r^2(\xi, x)} - \frac{Cp}{i\omega r(\xi, x)} \right) \frac{e^{-i\omega r(\xi, x)/Cp}}{r(\xi, x)} \right] \quad (2.11)$$

e

$$\chi(\xi, x, \omega) = \left[\left(-\frac{3Cs^2}{\omega^2 r^2(\xi, x)} + \frac{3Cs}{i\omega r(\xi, x)} + 1 \right) \frac{e^{-i\omega r(\xi, x)/Cs}}{r(\xi, x)} + \right. \\ \left. - \left(\frac{Cs^2}{Cp^2} \right) \left(-\frac{3Cp^2}{\omega^2 r^2(\xi, x)} + \frac{3Cp}{i\omega r(\xi, x)} + 1 \right) \frac{e^{-i\omega r(\xi, x)/Cp}}{r(\xi, x)} \right] \quad (2.12)$$

Como na estática, os núcleos de deslocamento e de força de superfície dinâmicos, Equações (2.9) e (2.10), também apresentam um comportamento singular quando $\xi = x$ de ordem $O(1/r)$, chamada singularidade fraca, e $O(1/r^2)$, chamada singularidade forte, respectivamente.

Novamente, a dificuldade em resolver a Equação (2.8) está na técnica de integração dos núcleos 3D. Quando o ponto de colocação ξ não está sobre o elemento de integração que contém o ponto de campo x , estas integrais são resolvidas numericamente usando-se a Quadratura Gaussiana Padrão. Entretanto, quando o ponto de colocação ξ está sobre o elemento de integração que contém o ponto de campo x , como já vimos no Capítulo 1, a variável $r(\xi, x) = x - \xi$ tende a zero e isto acarreta um comportamento singular destes núcleos. Por isso uma outra metodologia de integração, que não a Quadratura Gaussiana Padrão, deve ser utilizada.

O núcleo que apresenta singularidade fraca, que dá origem aos blocos diagonais da matriz global $[G]$, pode ser calculado como na estática; porém, aos blocos diagonais de $[H]$ não é possível aplicar o conceito de movimento de corpo rígido, porque, no problema dinâmico, há deslocamento relativo entre dois pontos quaisquer e este conceito citado implica em

deslocamento constante para todos os nós em qualquer direção (deslocamento relativo entre dois pontos quaisquer igual a zero). Isto nos traz a necessidade de encontrar outro método de integração deste núcleo.

Para explicar como isto é feito, usaremos a seguinte convenção:

EST = índice representativo do problema estático;

DIN = índice representativo do problema dinâmico.

A Equação (2.8) pode ser escrita agora como:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} u_j(x, \omega) dS(x) = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} t_j(x, \omega) dS(x) \quad (2.13)$$

O termo $c_{ij}(\xi)$ dispensa o índice representativo do problema dinâmico pois $c_{ij}(\xi)_{DIN} = c_{ij}(\xi)_{EST} = c_{ij}(\xi)$.

A estratégia utilizada para integrar este núcleo consiste em somar e subtrair o problema estático ao problema dinâmico como utilizado em Dominguez [1993], ficando:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} u_j(x, \omega) dS(x) + \\ + \int_S t_{ij}^*(\xi, x)_{EST} u_j(x) dS(x) - \int_S t_{ij}^*(\xi, x)_{EST} u_j(x) dS(x) = \\ = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} t_j(x, \omega) dS(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

que ainda pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S [t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} - t_{ij}^*(\xi, x)_{EST}] u_j(x, \omega) dS(x) + \\ + \int_S t_{ij}^*(\xi, x)_{EST} u_j(x) dS(x) = \\ = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} t_j(x, \omega) dS(x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

A integral da diferença dos núcleos dinâmico e estático, primeira da Equação (2.15), não apresenta singularidade quando executada concomitantemente como exposto acima, porque elas

são da mesma ordem nos dois problemas ($O(1/r^2)$ para a força de superfície). Este artifício é chamado de Regularização da Integral Singular, presente também em Kane [1994], possibilitando com isto que tal integral possa ser resolvida pela fórmula da Quadratura Gaussiana Padrão. Já a integral do núcleo estático, segunda da mesma quação, já foi tratada no capítulo anterior. Desta forma, é possível resolver as três integrais da Equação (2.15). A regularização da integral singular deve ser feita apenas para o núcleo de singularidade forte já que o de singularidade fraca utiliza um artifício que independe do problema ser estático ou dinâmico.

2.3 Viscoelasticidade – Princípio da Correspondência

Como vimos nos itens anteriores, na análise de tensão e deformação, três tipos de equações são necessárias: equações de equilíbrio, equações cinemáticas e equações constitutivas do material. Os dois primeiros tipos são iguais tanto para problemas elásticos como viscoelásticos e a característica que diferencia as duas análises está nas equações constitutivas, como mostra Findley *et al* [1989].

O Princípio da Correspondência diz que é possível obter a solução viscoelástica de um problema de análise de tensão no domínio da frequência (ω) a partir da solução elástica, trocando-se os módulos ou parâmetros constitutivos elásticos por sua contrapartida viscoelástica, da seguinte maneira:

Definindo β como fator de amortecimento, as constantes viscoelásticas, como está mostrado em Pontes Jr. [1992], tornam-se

$$E^* = E [1 + i\beta_E(\omega)] \quad (2.16)$$

$$G^* = G [1 + i\beta_G(\omega)] \quad (2.17)$$

Deste modo, uma pequena mudança na implementação nos permite passar da análise elástica para a viscoelástica.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO **APLICADO A DOMÍNIOS ILIMITADOS 3D**

Direcionando o assunto para a análise da propagação de ondas no solo, sendo este comumente modelado através de domínios ilimitados conhecidos como semi-espacos, discutimos neste capítulo como o MEC é aplicado para solucionar tais problemas.

O semi-espaço é um domínio infinito caracterizado por possuir uma vasta superfície, na verdade ilimitada e em grande parte sem nenhum carregamento, cuja idealização é amplamente usada para modelar o comportamento estático ou dinâmico de solos [Gazetas 1983].

Na formulação do MEC para domínios ilimitados existem dois aspectos relevantes que merecem ser mencionados. O primeiro está relacionado ao estado auxiliar (ou função ponderadora do MRP) utilizado. Uma função bastante usada, como discutido nos capítulos anteriores, é a Função de Green de Espaço Completo também conhecida como Solução Fundamental, presente também em Brebbia, Telles e Wrobel [1984]. Para simular a superfície do semi-espaço, uma superfície ilimitada (solo) deve ser discretizada e só então as condições de contorno aplicadas a ela. Numa análise real, tal superfície livre ilimitada não pode ser criada e a discretização deve ser truncada em algum ponto, ver Manolis e Beskos [1988]. Este truncamento diminui a precisão dos resultados, especialmente nas regiões próximas a ele. A Figura (3.1a) expressa como é utilizado este artifício.

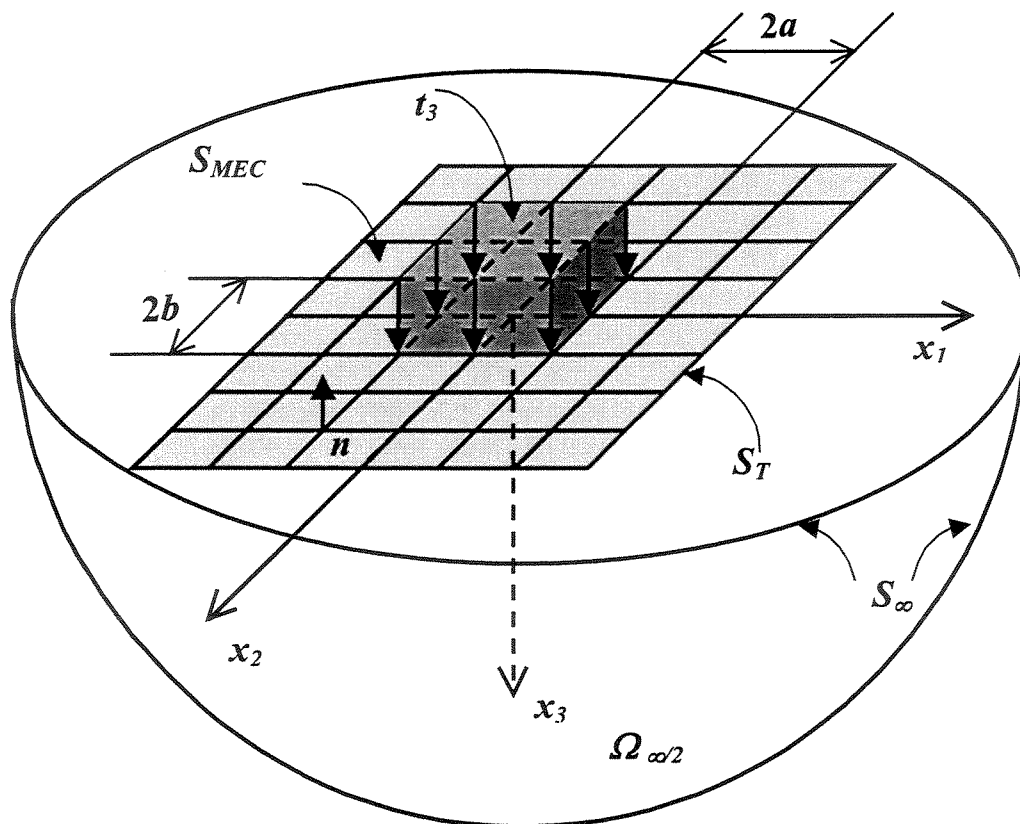


Figura 3.1a – Função de Green de Espaço Completo. Discretização do semi-espaço com elementos carregados e malha truncada.

Numa análise da Figura 3.1a, o semi-espaço se estende para o infinito nas três direções ($-\infty < x_1 < +\infty$, $-\infty < x_2 < +\infty$, $0 < x_3 < +\infty$) e os contornos S_∞ também devem ser localizados no infinito. Uma vez que a discretização dos contornos S_∞ não pode ser executada, como já mencionado, o semi-espaço utilizado no MEC discretiza somente uma porção truncada da superfície S_{MEC} cujas bordas são delimitadas por S_T . A orientação da normal à superfície, n , indica qual lado da superfície livre discretizada do semi-espaço ilimitado $\Omega_{\infty/2}$ está sendo considerado.

Uma estratégia possível para evitar os erros de truncamento da superfície livre é usar como estado auxiliar na formulação do MEC a Função de Green de Semi-Espaço. Neste caso somente a superfície carregada do semi-espaço deve ser discretizada, como ilustra a Figura (3.1b). A condição de contorno de carregamento nulo na superfície ilimitada e a condição de

radiação de Sommerfeld (para problemas dinâmicos) são automaticamente satisfeitas por esta função de Green como mostram Manolis e Davies [1993], Mesquita Neto e Pontes Jr. [1992] e Richter [1997].

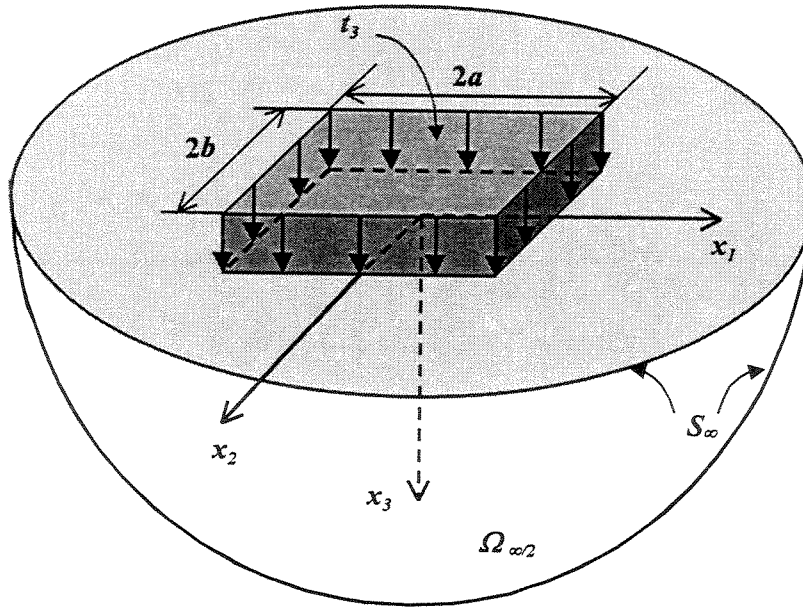


Figura 3.1b – Função de Green de Semi-Espaço. Discretização da área carregada.

A idéia básica desse trabalho é desenvolver, implementar e discutir a formulação do MEC para resolver um problema de valor de contorno para semi-espaço 3D utilizando como estado auxiliar a Função de Green de Espaço Completo. Os resultados aqui obtidos são comparados com um estudo já desenvolvido e implementado por Mesquita Neto e Romanini [1999] que utiliza a Função de Green de Semi-Espaço, porém sem associá-la ainda à implementação do MEC.

O segundo aspecto relevante na formulação do MEC para domínios ilimitados diz respeito à estratégia de lidar com o comportamento singular na integração da solução fundamental quando esta for utilizada. Aqui é introduzido o conceito dos “Enclosing Elements” (EE), ou elementos de fechamento, utilizados por Ahmad e Banerjee [1988] para analisar o comportamento dinâmico estacionário 2D da interação solo-estrutura e estendido por Araújo, Nishikava e Mansur [1997] para análise 3D transiente. Este segundo aspecto, que é o ponto principal deste capítulo, será discutido mais detalhadamente nos itens que se seguem.

3.1 Utilização dos “Enclosing Elements” na Análise de Problemas Estáticos por Elementos de Contorno

Conforme visto no Capítulo 1, é possível tratar a singularidade fraca $O(1/r)$ de tal forma que a integração possa ser desenvolvida pela Quadratura Gaussiana Padrão. Porém o tratamento da singularidade forte $O(1/r^2)$ foi feito através da consideração do movimento de corpo rígido aplicado a domínios fechados. O mesmo artifício, com algumas modificações, também pode ser utilizado em domínios ilimitados, como demonstrado em Brebbia e Dominguez [1989] e Beer [2001]. No presente trabalho não será usado o método descrito nas duas últimas citações para tratar a singularidade forte e sim a idéia dos EE, que, de certa forma, também é baseada na consideração do movimento de corpo rígido.

Voltando à Figura (3.1a), percebemos que a superfície discretizada não configura um domínio onde a técnica do movimento de corpo rígido possa ser prontamente aplicada como feito até agora. Então, este domínio ilimitado é arbitrariamente estendido por um número de EE, criando deste modo um contorno fictício fechado S_{EEi} para que, agora sim, possa ser aplicada a referida consideração. Isto é mostrado para o caso 2D na Figura (3.2).

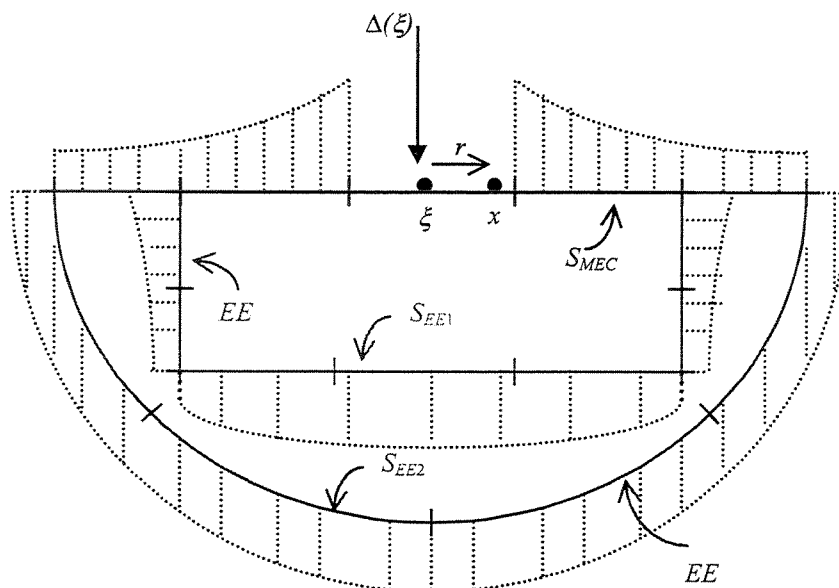


Figura 3.2 – Superfície truncada S_{MEC} do semi-espço e contornos fictícios S_{FFi} ($i = 1, 2$).

No MEC aplicado ao problema elastostático 3D, as contribuições dos elementos singulares referem-se aos blocos diagonais de dimensão 3x3 das matrizes globais $[H]$ e $[G]$. O ponto importante a ser destacado é que a contribuição do elemento de singularidade forte na matriz $[H]$ é a integração do núcleo sobre a geometria do próprio elemento em questão. A contribuição do elemento singular não depende da integração sobre qualquer outro elemento. Se isto estiver correto, então a contribuição deste elemento não é afetada pelos EE, ou ainda, significa dizer que a contribuição deles não depende do contorno escolhido proveniente dos EE para se aplicar a consideração de corpo rígido. Então, a princípio, se o argumento de corpo rígido for aplicado a qualquer contorno de EE S_{EEi} ($i = 1, 2, \dots$) como mostrado na Figura (3.2), os resultados das contribuições dos elementos singulares devem permanecer inalterados.

De fato, como será mostrado em exemplos apresentados mais adiante neste capítulo, estas contribuições não dependem do caminho (forma) ou da discretização da malha de EE S_{EEi} . O essencial é a qualidade da integração (por exemplo número de pontos de Gauss, número e tipo de elementos de contorno) dos núcleos de força de superfície t_{ij}^* sobre o contorno de EE escolhido. Isto está mostrado na Figura (3.2), onde os valores dos núcleos a serem integrados sobre os vários contornos são esquematicamente indicados pelas áreas pontilhadas.

Acrescentando ainda um comentário importante sobre os EE, eles podem ser utilizados para se obter as contribuições dos núcleos de singularidade forte com boa precisão, mas eles não têm absolutamente nenhuma influência no erro introduzido ao se truncar a superfície para se criar a malha de elementos de contorno. Portanto, a malha arbitrária de EE que é adicionada à malha original da superfície livre do semi-espço é importante para a utilização do argumento do corpo rígido, mas não influencia no erro de truncamento da malha de contorno.

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA PARA ELASTOSTÁTICA 3D

A equação integral de contorno escrita na forma discretizada pode ser expressa, conforme já comentado, pela Equação (1.30), onde só há considerações sobre os elementos de contorno. Acrescentando agora as integrações sobre os EE, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \left\{ \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} t_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) \right] + \right. \\
\left. + \sum_{q=1}^L \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_q} t_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_q(x) \right] \right\} u_j^e(x) = \\
= \left\{ \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{c=1}^{NNE} \int_{S_e} u_{ij}^*(\xi, x) \phi_c(x) dS_e(x) \right] \right\} t_j^e(x)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde NE é o número de elementos de contorno, NNE é o número de nós por elemento (que é igual ao número de funções de forma) e L é o número de EE.

Considerando agora a contribuição de todos os pontos ξ , que são localizados somente nos elementos de contorno, obtém-se uma matriz global $[H]$ estendida, que passaremos a representar como $[H]_{estend}$, que possui o aspecto mostrado na Figura (3.3).

$$H_{estend} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \end{array} \right]_{EC} \left[\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right]_{EE}$$

Figura 3.3 – Matriz $[H]$ estendida, incluindo os EE.

O sub-índice EC indica os termos relativos aos elementos de contorno, enquanto o sub-índice EE indica os termos relativos aos EE. As integrações sobre estes EE poderiam ser armazenadas nos blocos diagonais da matriz global $[H]$, porém neste trabalho optou-se por acrescentar uma coluna nesta matriz para armazenar estes resultados.

Uma vez posto o conceito dos EE, podemos dizer então que as técnicas adotadas para a integração dos núcleos singulares de deslocamento e força de superfície para problemas de domínio ilimitado utilizadas neste trabalho têm o seguinte raciocínio:

Integração dos núcleos de singularidade fraca (u_{ij}^*): Mesmo modo utilizado para domínios limitados (Capítulo 1).

Integração dos núcleos de singularidade forte (t_{ij}^*): Também se utiliza da consideração do movimento de corpo rígido para um domínio limitado fictício criado através dos EE, sendo que este domínio limitado fictício possui a superfície do semi-espço.

Vamos, através de um exemplo, acompanhar os passos deste procedimento. Admita uma superfície livre do semi-espço discretizada com dois elementos de contorno, sendo esta acrescida de um número de EE qualquer. Desta forma, aplicando o argumento de corpo rígido numa direção ($u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0$) e já admitindo que isto induz força de superfície nula, temos a seguinte forma para a matriz $[H]_{extend}$

$$\left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{34} & H_{35} & H_{36} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} H_{17} & H_{18} & H_{19} \\ H_{27} & H_{28} & H_{29} \\ H_{37} & H_{38} & H_{39} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} H_{41} & H_{42} & H_{43} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} H_{47} & H_{48} & H_{49} \\ H_{57} & H_{58} & H_{59} \\ H_{67} & H_{68} & H_{69} \end{array} \right] \end{array} \right]_{EC} \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \right]_{EC} = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \right]_{EC} \quad (3.2)$$

A partir da Equação (3.2) é possível estabelecer uma relação para alguns termos, por exemplo, da primeira linha.

$$|H_{11}|_{EC} + |H_{14}|_{EC} + |H_{17}|_{EE} = 0 \quad (3.3)$$

Através da Equação (3.3) o elemento singular $|H_{11}|_{EC}$ pode ser determinado indiretamente. Estabelecendo a mesma relação para as outras linhas do sistema de equações, obtém-se como resultado a primeira coluna de todos os blocos diagonais. Admitindo em seguida o segundo ($u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0$) e o terceiro ($u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1$) movimentos de corpo

rígido, obtém-se a segunda e a terceira colunas de todos os blocos diagonais. Este procedimento permite calcular os componentes singulares em função dos outros não singulares e, uma vez calculados os blocos diagonais, descartam-se as colunas provenientes dos EE.

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA PARA ELASTODINÂMICA ESTACIONÁRIA 3D

Igualmente ao que já fora feito para domínios limitados no Capítulo 2, a solução do problema dinâmico num domínio ilimitado também passa pela resolução do equivalente problema estático utilizando o processo da regularização da integral singular; porém neste último caso (domínios ilimitados), ainda lança-se mão dos EE. Apenas para lembrar, a regularização da integral pode ser expressa pela equação abaixo.

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S [t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} - t_{ij}^*(\xi, x)_{EST}] u_j(x, \omega) dS(x) + \\
 + \int_S t_{ij}^*(\xi, x)_{EST} u_j(x) dS(x) = \\
 = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{DIN} t_j(x, \omega) dS(x)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS EE NO CÁLCULO DOS BLOCOS DIAGONAIS DA MATRIZ $[H]$

Passemos agora a utilizar a implementação formalmente descrita para investigar numericamente as propriedades dos EE.

Influência da discretização da malha de EE: Considere um problema de valor de contorno como aquele mostrado na Figura (3.1a). Usando a função de Green de Espaço Completo, uma superfície S_{MEC} é criada no semi-espaco com uma malha contendo 6x6 (36) elementos de contorno. Todos os elementos têm dimensões axa e nos quatro elementos centrais com dimensões $2a = 2b$ ($a = b$) é aplicado um carregamento em forma de força de superfície uniformemente distribuído de valor unitário $t_3 = 1$.

Para se obter, através da consideração do movimento de corpo rígido, os blocos diagonais da matriz $[H]_{EST}$ na superfície do semi-espaco S_{MEC} , diferentes malhas de EE são utilizadas, como mostra a Figura (3.4). As dimensões do contorno gerado pelos EE são mantidas constantes,

mas o número deles é sistematicamente aumentado. Os números de elementos de contorno e EE para cada malha são mostrados na Tabela (3.1).

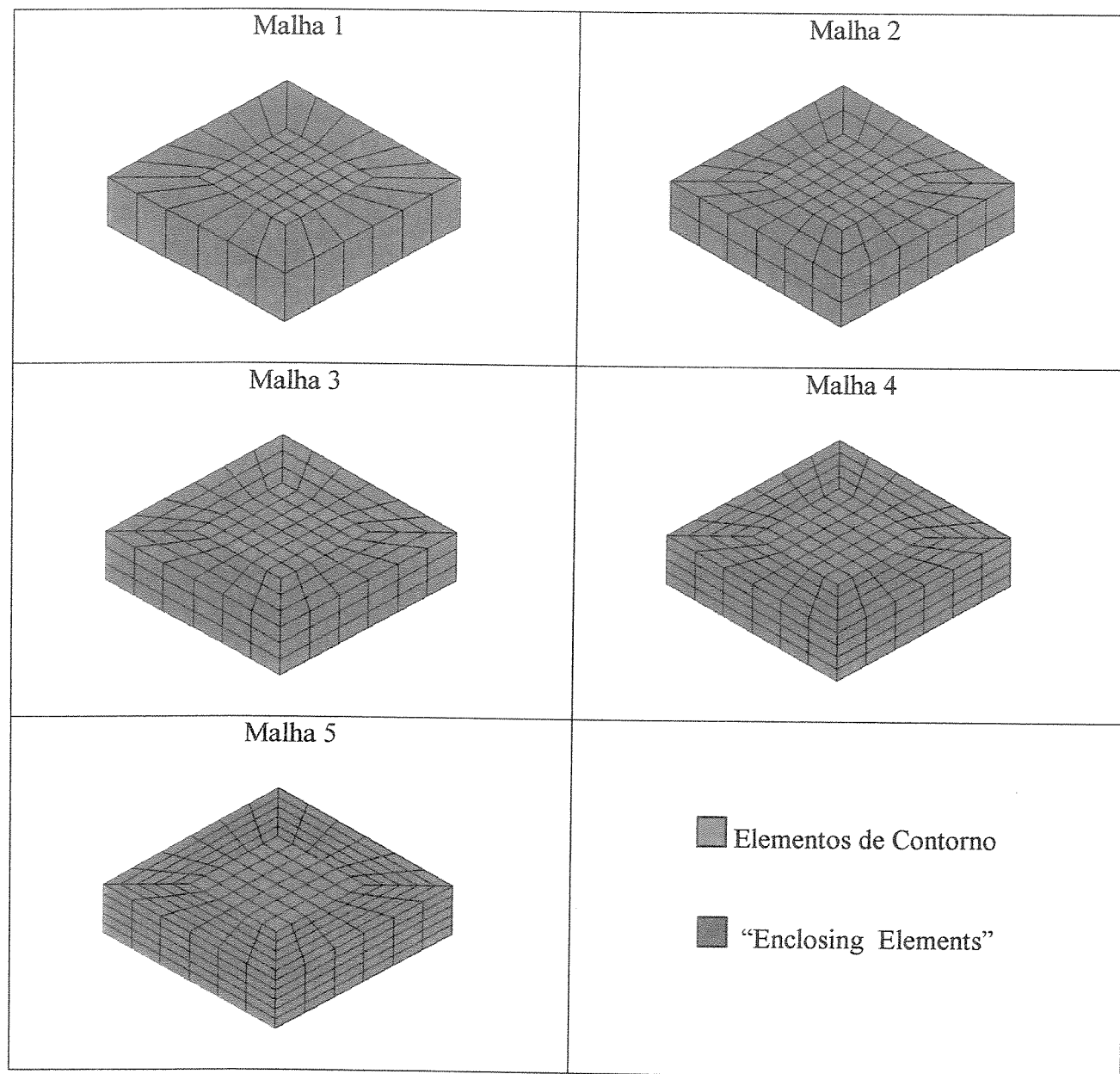


Figura 3.4 – Diferentes números de EE para o mesmo contorno.

Malha nº	Nº de elementos de contorno	Nº de “enclosing elements”
1	36	84
2	36	132
3	36	180
4	36	228
5	36	276

Tabela 3.1 – Características das malhas mostradas na Figura (3.4).

A idéia é investigar a densidade da malha de EE na precisão dos valores calculados dos blocos singulares $[H_{ii}]_{EST}$. Para isto, estamos utilizando elementos constantes, pois já sabemos de antemão que estes valores são iguais a $[H_{ii}]_{EST} = 0.5$, como mostrado em Kane [1994]. Além de aumentar o número de EE, a influência do número de pontos de Gauss também é avaliada, pois, como já foi comentado anteriormente, é esperado que os valores dos blocos singulares de $[H]_{EST}$ não dependam da discretização da malha de EE mas da qualidade da integração dos núcleos t_{ij}^* .

A Tabela (3.2) traz os resultados obtidos para o termo $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes malhas e números de pontos de Gauss na integração.

	1 Ponto de Gauss por direção	2 Pontos de Gauss por direção	4 Pontos de Gauss por direção	8 Pontos de Gauss por direção
Exato	0.50 00	0.5000 000	0.5000000 00000	0.50000000000
Malha 1	0.50 87	0.4994 049	0.4999960 54900	0.500000000003
Malha 2	0.50 59	0.4994 308	0.4999960 43940	0.500000000003
Malha 3	0.50 54	0.4994 323	0.4999960 43932	0.500000000003
Malha 4	0.50 52	0.4994 325	0.4999960 43931	0.500000000003
Malha 5	0.50 51	0.4994 326	0.4999960 43931	0.500000000003

Tabela 3.2 – Comparações entre valores de $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes densidades de malha e números de pontos de integração de Gauss.

Para uma baixa qualidade na integração, aqui representada por pequeno número de pontos de Gauss, quando se aumenta a densidade da malha, o valor de $[H_{11}]_{EST}$ tende a convergir para o valor exato, ao passo que, para uma qualidade de integração melhor, a densidade da malha possui pouca, ou nenhuma, influência no resultado. Outro ponto que chama a atenção está no fato de que aumentando-se a densidade da malha, os valores obtidos tendem a convergir para o valor esperado, mas também pode ser percebido que esta convergência é bastante lenta. Por outro lado, a convergência com relação ao número de pontos de integração de Gauss é muito mais rápida. Este resultado nos leva a concluir que o aumento do número de pontos de Gauss acrescenta mais precisão à integração que a sub-divisão do intervalo de integração (malha de EE).

O resultado obtido na Tabela (3.2) confirma a idéia de que os valores das integrações dos elementos singulares não podem depender da densidade da malha de EE, mas sim, da qualidade da integração nesta malha.

Influência do caminho (forma) da malha de EE: Para discutir a influência da forma ou caminho da malha de EE, analisaremos quatro contornos distintos, que estão mostrados na Figura (3.5). Na superfície truncada S_{MEC} a malha de elementos de contorno contém 10x10 (100) elementos constantes. Todas as malhas de EE são discretizadas com 180 elementos também constantes. A Figura (3.5) apresenta as perspectivas isométrica e frontal das malhas, mostrando suas diferentes formas. A forma da malha de EE deve ser tal que represente o contorno real na fronteira da malha de contorno, assim, as inclinações aqui utilizadas nas malhas de EE para variar a forma da mesma, só é possível para elementos constantes.

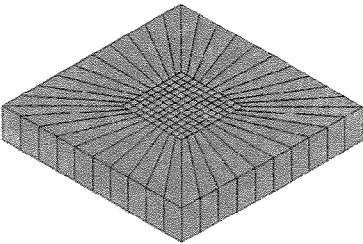

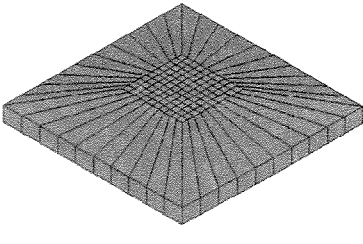

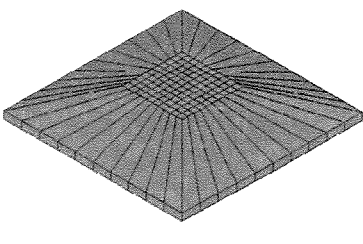



Malha 1		
Malha 2		
Malha 3		
Malha 4		

Figura 3.5 – Diferentes contornos para o mesmo número de EE.

Em seguida, a Tabela (3.3) apresenta os resultados numéricos obtidos para $[H_{11}]_{EST}$ em função das malhas de EE e do número de pontos de integração de Gauss. Assim como ocorrido nos teste anteriores, ao se analisar a Tabela (3.3), percebemos que para uma boa qualidade na

integração, o valor do termo singular $[H_{11}]_{EST}$ é independente do caminho de integração, como era esperado.

	1 Ponto de Gauss por direção	2 Pontos de Gauss por direção	4 Pontos de Gauss por direção	8 Pontos de Gauss por direção
Exato	0.500	0.50000	0.5000000	0.500000000000000
Malha 1	0.504	0.50001	0.5000001	0.500000000000004
Malha 2	0.428	0.44954	0.4821819	0.49896355660741
Malha 3	0.394	0.42473	0.4726135	0.49846617936966
Malha 4	0.244	0.43899	0.5111874	0.50004150782169

Tabela 3.3 – Comparações entre valores de $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes formas de malha e números de pontos de integração de Gauss.

Uma observação importante a ser feita neste ponto da discussão, é que não é necessário haver conectividade entre os elementos da malha de elementos de contorno e a de EE, desde que se respeite o fato de que a malha de EE represente o contorno real na fronteira da malha de elementos de contorno, como já citado.

Para discutir esta observação, analisaremos dois contornos que são mostrados na Figura (3.6). Na superfície truncada S_{MEC} a malha de elementos de contorno contém 10x10 (100) elementos constantes; a primeira discretização possui 180 EE enquanto a segunda, apenas 9. A Tabela (3.4) apresenta os resultados numéricos obtidos para $[H_{11}]_{EST}$ em função das malhas de EE e do número de pontos de integração de Gauss. Novamente aqui, percebemos que para uma boa qualidade na integração, o valor do termo singular $[H_{11}]_{EST}$ é independente de haver ou não conectividade entre os elementos das duas malhas.

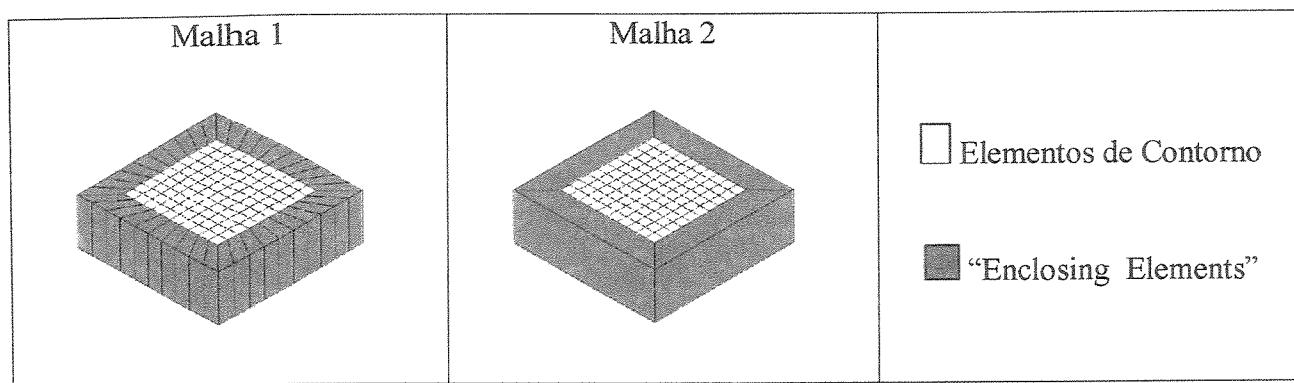


Figura 3.6 – Malhas com e sem conectividade entre os elementos.

	1 Ponto de Gauss por direção	2 Pontos de Gauss por direção	4 Pontos de Gauss por direção	8 Pontos de Gauss por direção
Exato	0.500	0.50000	0.5000000	0.5000000000000000
Malha 1	0.504	0.50001	0.5000001	0.5000000000000004
Malha 2	0.442	0.60459	0.4941047	0.50034846077569

Tabela 3.4 – Comparações entre valores de $[H_{11}]_{EST}$ para diferentes malhas, com e sem conectividade entre os elementos, e números de pontos de integração de Gauss.

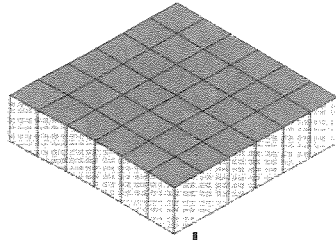
Concluindo, a análise dos resultados obtidos neste capítulo sugere que a malha de EE não influi no resultado do cálculo dos blocos diagonais da matriz $[H]_{EST}$ e por isso ela pode ser a menor possível para fechar a malha de elementos de contorno da superfície S_{MEC} do semi-espaço.

3.2 Sub-regiões em Domínios Ilimitados com Utilização dos EE

O artifício de dividir um domínio ilimitado em sub-regiões pode ser feito com o objetivo de representar camadas do solo com propriedades geomecânicas diferentes, ou ainda promover a interação de uma estrutura (fundação por exemplo) com o solo, tratados como partes diferentes do mesmo domínio. Este item explica, de maneira esquemática, a aplicação da idéia de sub-regiões quando se utiliza os EE para tratamento de domínios ilimitados.

Vamos considerar um semi-espaco com duas sub-regiões, como mostra a Figura (3.7), já com os contornos discretizados com elementos de contorno e EE.

Sub-região 1

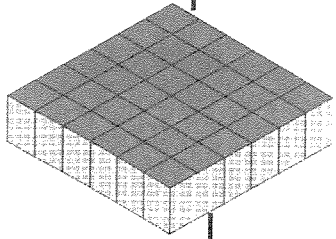


Elementos de contorno



Enclosing elements

Sub-região 2



Superfície inferior \Rightarrow
elementos de contorno

Superfície superior \Rightarrow
elementos de contorno

Superfície inferior \Rightarrow
“enclosing elements”

Figura 3.7 – Semi-espaco dividido em duas sub-regiões acrescido de EE.

Esquematicamente, uma matriz estendida, como aquela mostrada na Figura (3.3), para um domínio dividido em duas sub-regiões, teria o aspecto da Figura (3.8) que segue:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} & & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} & & & \end{array} \right]_{EC}^{EE}$$

Figura 3.8 – Matriz $[H]$ estendida para duas sub-regiões, incluindo os EE.

Vale ressaltar que a dimensões da matriz $[H]$ mostrada na Figura (3.8) não representa a discretização tomada na Figura (3.7).

Após a utilização dos EE para o cálculo dos termos diagonais e aplicando as condições de continuidade (compatibilidade cinemática e equilíbrio), a matriz $[H]$ estendida passa a ter um novo aspecto, conforme mostrado na Figura (3.9):

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figura 3.9 – Aspecto intermediário da matriz $[H]$

Basta agora acrescentar à matriz $[H]$, a coluna da matriz $[G]$ que multiplica o termo em força de superfície da interface, ver Equação (1.47), e a primeira toma seu aspecto final, que é uma matriz quadrada.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são discutidos os resultados obtidos com os programas desenvolvidos para este trabalho, seguindo a sequência já colocada na explanação teórica nos três capítulos anteriores, a saber:

- problemas elastostáticos com domínios limitados;
- problemas elastodinâmicos estacionários com domínios limitados e
- problemas elastostáticos e elastodinâmicos estacionários com domínios ilimitados.

Uma vez analisados e discutidos os resultados obtidos para estes três itens, passamos à análise e discussão dos mesmos tópicos, porém com a divisão do domínio em sub-regiões.

4.1 Exemplo Elastostático com Domínios Limitados

O exemplo citado neste item trata de uma barra fixa-livre com área da seção transversal quadrada e constante de lado unitário, sendo que a relação entre o comprimento e o lado da área da seção é 12:1. A extremidade livre da barra é submetida a um carregamento normal de tração uniformemente distribuído $t_1 = \sigma_{11} = 1$. Os resultados obtidos têm como base de comparação o cálculo analítico 1D já existente na literatura, que é dado pela fórmula abaixo encontrada em Shames [1989]:

$$\Delta L = \frac{FL}{AE} \quad (4.1)$$

onde: ΔL = alongamento da barra
 F = força normal aplicada na barra
 L = comprimento da barra
 A = área da seção transversal da barra
 E = módulo de elasticidade linear do material

Como a idéia neste ponto é validar o programa através de exemplos, são feitas considerações apenas sobre o número de elementos de contorno utilizados na discretização dos contornos, ou seja, à medida que se refina a discretização desta superfície, espera-se a convergência do resultado numérico para o analítico. Como estamos comparando problemas apenas análogos - implementação numérica de uma barra 3D e cálculo analítico de uma barra 1D - vamos utilizar valores médios do primeiro para fazer a comparação com o segundo.

Os elementos de contorno utilizados na discretização são constantes e o número de pontos de Gauss utilizado na integração dos núcleos é mantido fixo e igual a oito. Todos os resultados analisados são normalizados em função dos valores analíticos 1D.

A Figura (4.1) traz as malhas com os respectivos números de elementos utilizados na discretização.

A Tabela (4.1) mostra o deslocamento normal médio na superfície da extremidade livre da barra, trazendo uma comparação entre os valores obtidos numérica e analiticamente.

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
u_1	1,000	0,610	0,749	0,919	0,983	1,000
Erro relativo		39,0 %	25,1 %	8,1 %	1,7 %	0,0 %

Tabela 4.1 - Comparação entre os deslocamentos normais médios da superfície da barra para diferentes malhas.

Para a análise dos esforços reativos na barra na extremidade fixa, que de antemão já sabemos ter valor unitário, vejamos a Tabela (4.2) que traz os resultados numéricos da força de superfície média na referida extremidade.

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
t_1	1,000	1,025	1,018	1,002	0,994	0,995
Erro relativo		2,5 %	1,8 %	0,2 %	0,6 %	0,4 %

Tabela 4.2 - Comparação entre a força de superfície média na extremidade fixa da barra para diferentes malhas.

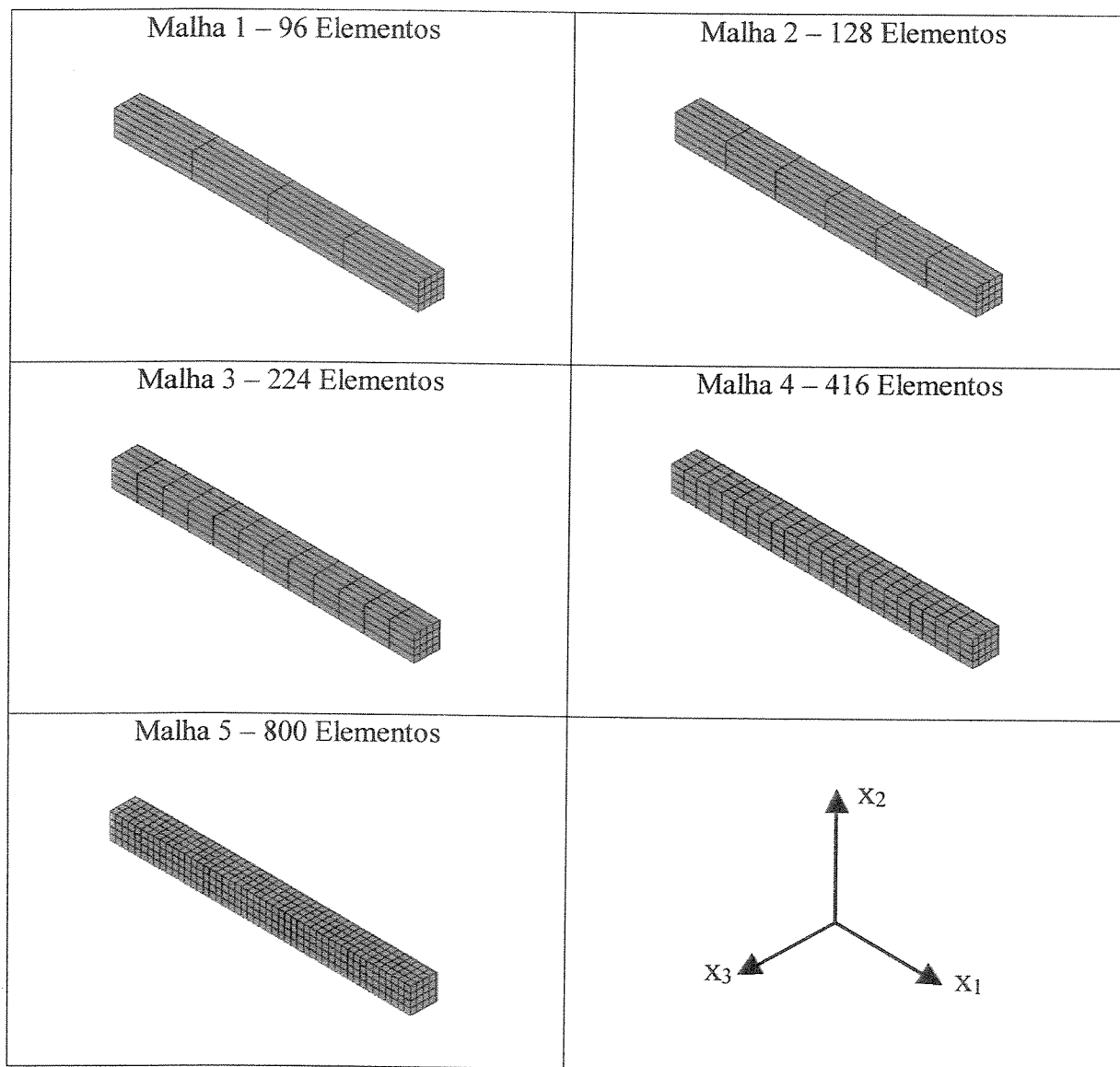


Figura 4.1 - Malhas utilizadas na discretização de uma barra.

Para finalizarmos a validação do programa desenvolvido para a solução do problema estático limitado, vamos investigar os resultados de alguns pontos internos, tanto em relação aos valores dos deslocamentos quanto às tensões. As Tabelas (4.3) e (4.4) trazem os valores dos deslocamentos u_1 e tensões σ_{11} normais, respectivamente, para os pontos de coordenadas (2,0;0,5;0,5) e (6,0;0,5;0,5).

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
u_1	1,0000	0,4527	0,6816	0,8942	0,9743	0,9934
Erro relativo		54,7 %	31,8 %	10,6 %	2,6 %	0,7 %
σ_{11}	1,0000	0,4759	0,8061	0,8041	0,9579	0,9992
Erro relativo		52,4 %	19,4 %	19,6 %	4,2 %	0,1 %

Tabela 4.3 - Comparação entre deslocamentos e tensões normais de um ponto interno da barra de coordenadas (2,0; 0,5; 0,5) para diferentes malhas.

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
u_1	1,000	0,608	0,747	0,917	0,982	0,999
Erro relativo		39,2 %	25,3 %	8,3 %	1,8 %	0,1 %
σ_{11}	1,000	1,007	0,841	0,813	0,958	0,998
Erro relativo		0,7 %	15,9 %	18,7 %	4,2 %	0,2 %

Tabela 4.4 - Comparação entre deslocamentos e tensões normais de um ponto interno da barra de coordenadas (6,0; 0,5; 0,5) para diferentes malhas.

Pela observação dos resultados obtidos pelas simulações, percebemos que estes valores se aproximam com bastante qualidade dos resultados analíticos e o que talvez seja mais importante de enfatizar é que os resultados numéricos se aproximam tanto mais do analítico quanto mais discretizado se torna o contorno da estrutura. Uma vez que a solução do problema dinâmico passa pela solução do estático, e este mostrou bons resultados, vamos à análise do primeiro.

4.2 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Limitados

Este exemplo tem as mesmas características daquele citado no item 4.1 diferindo apenas no fato de que o carregamento agora é periódico harmônico. Desta maneira temos uma barra fixa-livre com área da seção transversal quadrada e constante de lado unitário, sendo que a relação entre o comprimento e o lado da área da seção é 12:1. A extremidade livre da barra é submetida a um carregamento normal unitário de tração uniformemente distribuído. Os resultados obtidos têm como base de comparação o cálculo analítico 1D já existente na literatura e se dará a partir do cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração. As malhas utilizadas para a validação do programa são exatamente as mesmas usadas para os testes feitos na análise estática.

As frequências naturais (ω_n) do problema 1D são dadas pela fórmula abaixo, conforme Richard Jr, Hall Jr e Woods [1970].

$$\omega_n = \frac{n \pi v_c}{2L} \quad \text{com } n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2)$$

sendo $v_c^2 = \frac{E}{\rho}$

onde: E = módulo de elasticidade linear do material

ρ = densidade de massa do material

L = comprimento da barra

Inicialmente vamos construir a Função de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura para as várias malhas apresentadas na Figura (4.1), investigando o ponto (elemento) de coordenadas (12,0; 0,375; 0,375) que pertence à superfície da extremidade livre da barra. A Figura (4.2) explicita este elemento analisado a partir de uma vista frontal desta extremidade.

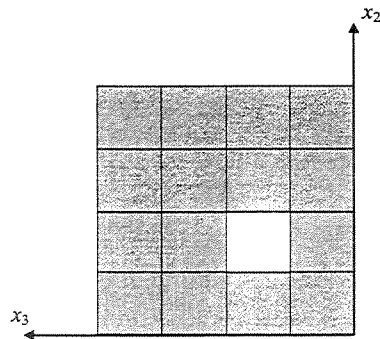
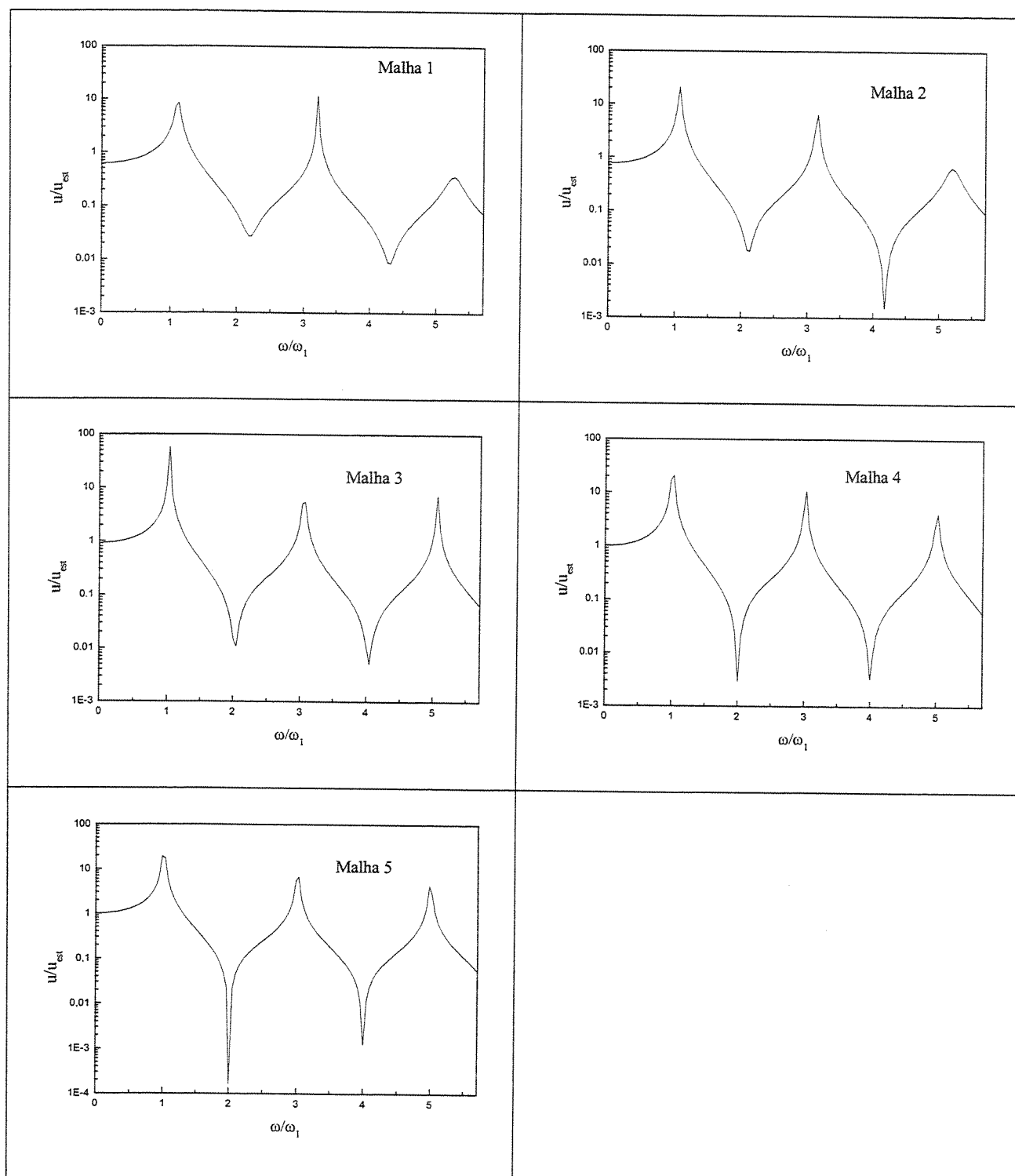


Figura 4.2 – Vista frontal da barra com o elemento analisado em destaque.

Os Gráficos (4.1) trazem estas FRF's, enquanto a Tabela (4.5) mostra os valores discretos das três primeiras frequências naturais calculadas numericamente. Os resultados estão todos normalizados em relação aos valores analíticos: as frequências em relação à primeira frequência natural (ω_1) e os deslocamentos em relação ao valor estático (u_{est}). Também vale frisar que a faixa de frequência mostrada nos Gráficos (4.1) foi dividida em 128 intervalos iguais (129 pontos).

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
ω_1	1,000	1,113	1,069	1,024	1,024	0,980
Erro relativo		11,3 %	6,9 %	2,4 %	2,4 %	2,0 %
ω_2	3,000	3,200	3,156	3,067	3,023	3,023
Erro relativo		6,7 %	5,2 %	2,2 %	0,8 %	0,8 %
ω_3	5,000	5,288	5,199	5,066	5,021	4,977
Erro relativo		5,7 %	4,0 %	1,3 %	0,4 %	2,3 %

Tabela 4.5 – Comparação entre as frequências naturais numéricas e analíticas para diferentes malhas.

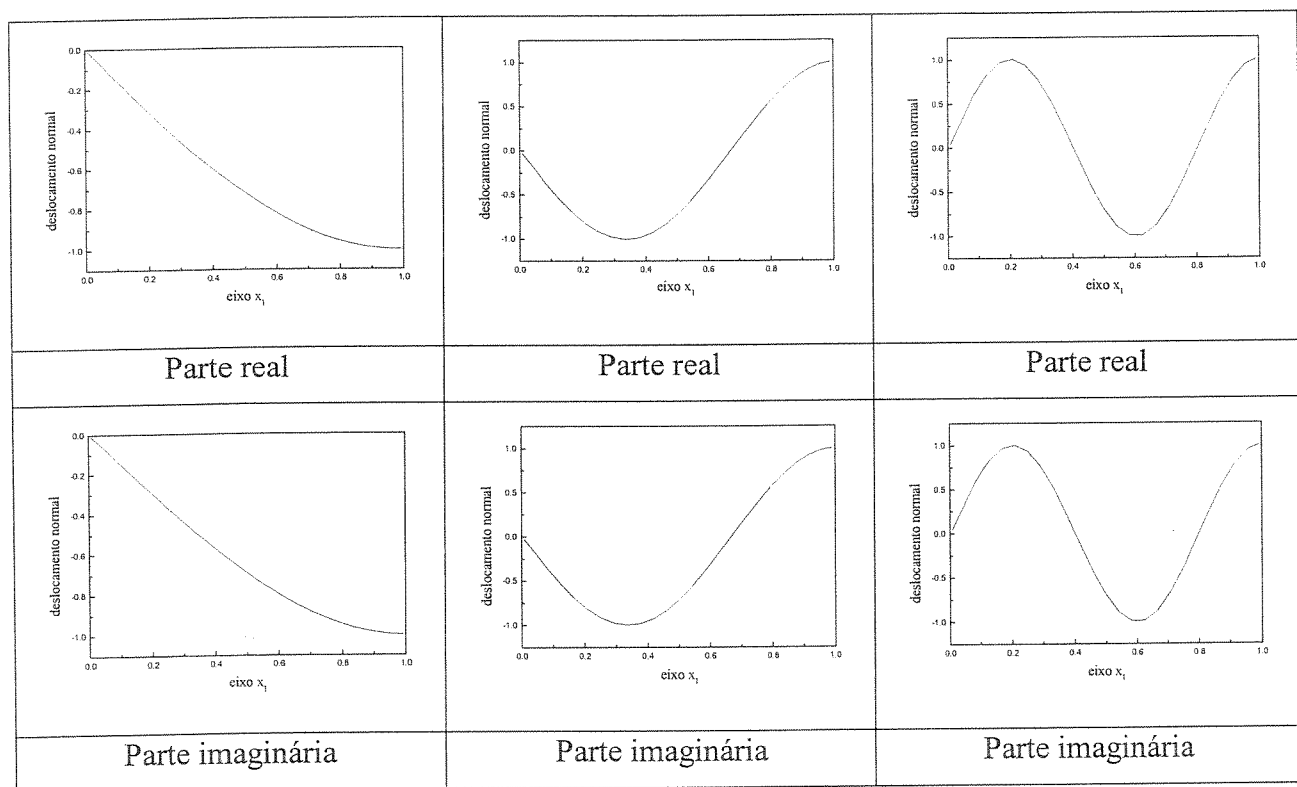


Gráficos 4.1 – Função de Resposta em Frequência do deslocamento normal u_1 do ponto de coordenadas (12,0; 0,375; 0,375) para diferentes malhas.

Notamos, pela análise dos Gráficos (4.1) e da Tabela (4.5), que o aumento da discretização faz diminuir o erro das frequências naturais, além do fato de que, para um valor de frequência próximo a zero, o valor do deslocamento se aproxima do valor estático.

Outro comentário que se faz necessário é o fato de que, pelo número de pontos analisados na faixa de frequência escolhida para se montar as FRF's, o erro não pode ser menor do que aqueles apresentados na Tabela (4.5).

Na seqüência estão expressos, de maneira apenas qualitativa, os três primeiros modos de vibração longitudinal expressos transversalmente. Os valores dos deslocamentos foram normalizados em função do maior valor obtido para cada uma das três frequências analisadas.



Gráficos 4.2 – Modos de vibração obtidos numericamente.

4.3 Exemplo Elastostático com Domínios Ilimitados

Passamos a analisar agora os resultados obtidos pelo MEC aplicado a problemas estáticos de domínios infinitos, onde duas hipóteses da formulação devem ser relevadas aqui, a saber:

- a função ponderadora utilizada na formulação do MEC é a Função de Green de Espaço Completo ou Solução Fundamental;
- faz-se uso dos “Enclosing Elements” para se calcular as integrais que apresentam singularidade forte (bloco diagonal da matriz H)

Vamos investigar inicialmente a convergência do resultado numérico em função das malhas utilizadas para discretização do semi-espço, representadas na Figura (4.3), cujas características são expressas na Tabela (4.6).

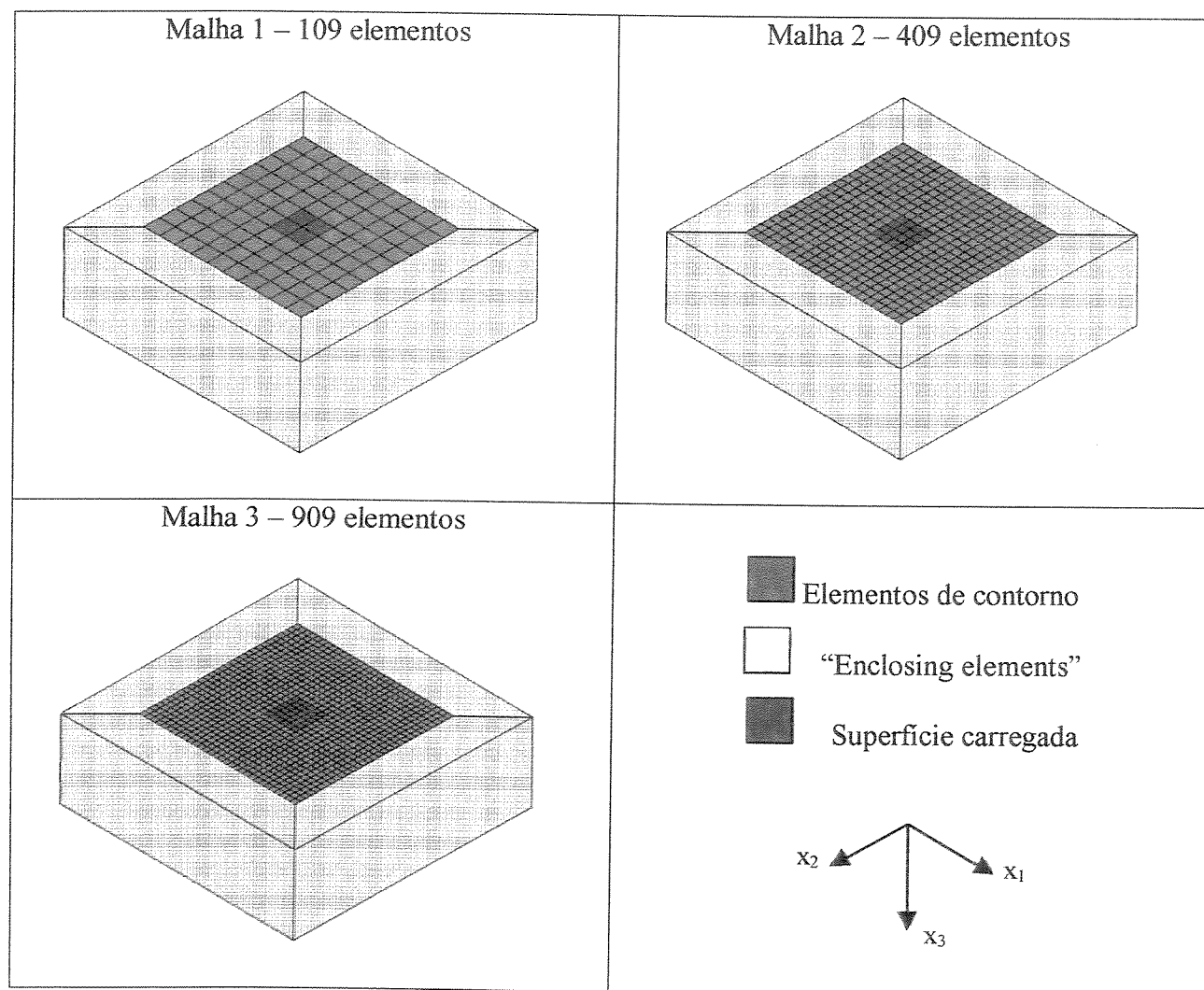


Figura 4.3 - Malhas utilizadas na discretização do semi-espço.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3
n° de elementos de contorno	100	400	900
n° de “enclosing elements”	9	9	9
n° total de elementos	109	409	909
Dimensões	$-5 \leq x_1 \leq +5$	$-5 \leq x_1 \leq +5$	$-5 \leq x_1 \leq +5$
	$-5 \leq x_2 \leq +5$	$-5 \leq x_2 \leq +5$	$-5 \leq x_2 \leq +5$
	$0 \leq x_3 \leq +5$	$0 \leq x_3 \leq +5$	$0 \leq x_3 \leq +5$

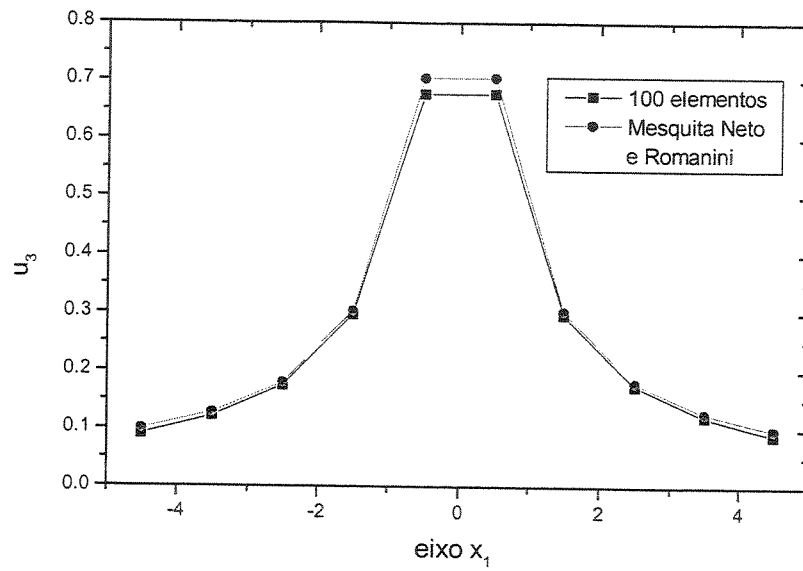
Tabela 4.6 – Característica das malhas utilizadas na discretização do semi-espço.

O sistema de coordenadas é colocado no centro das malhas de tal forma que elas sempre possuem simetria tanto no eixo x_1 quanto no x_2 . Estas malhas utilizam elementos constantes, possuindo uma superfície carregada cujas dimensões são $2a = 2b$, ver Figura (3.1a), onde $a = b = 1$. Um carregamento unitário é aplicado na forma de força de superfície $t_3 = 1$ e, como a área carregada é sempre a mesma, podemos perceber que a malha 1 possui quatro elementos carregados, a malha 2 possui dezesseis e finalmente a malha 3 possui trinta e seis. A integração dos núcleos é feita com oito pontos de Gauss.

Os resultados numéricos obtidos são comparados com um programa computacional implementado através da Função de Green de Semi-Espço 3D dinâmico desenvolvido por Romanini e Mesquita Neto [1999] para um valor de frequência próximo a zero (na verdade é tomado o valor de $\omega = 0,01$). Esta implementação desenvolvida por Romanini e Mesquita Neto não é baseada no MEC.

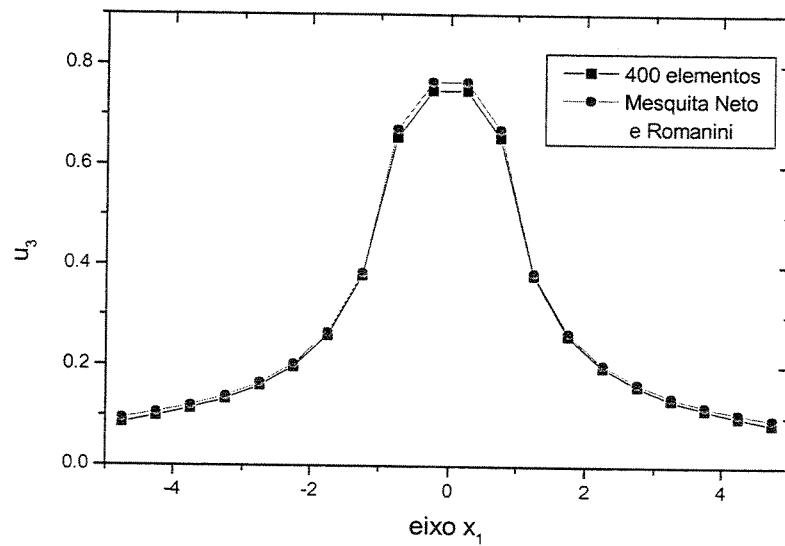
Os Gráficos (4.3a), (4.3b) e (4.3c) mostram os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) e para um valor de x_2 constante tomados ao longo do eixo x_1 .

Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 1/2$)

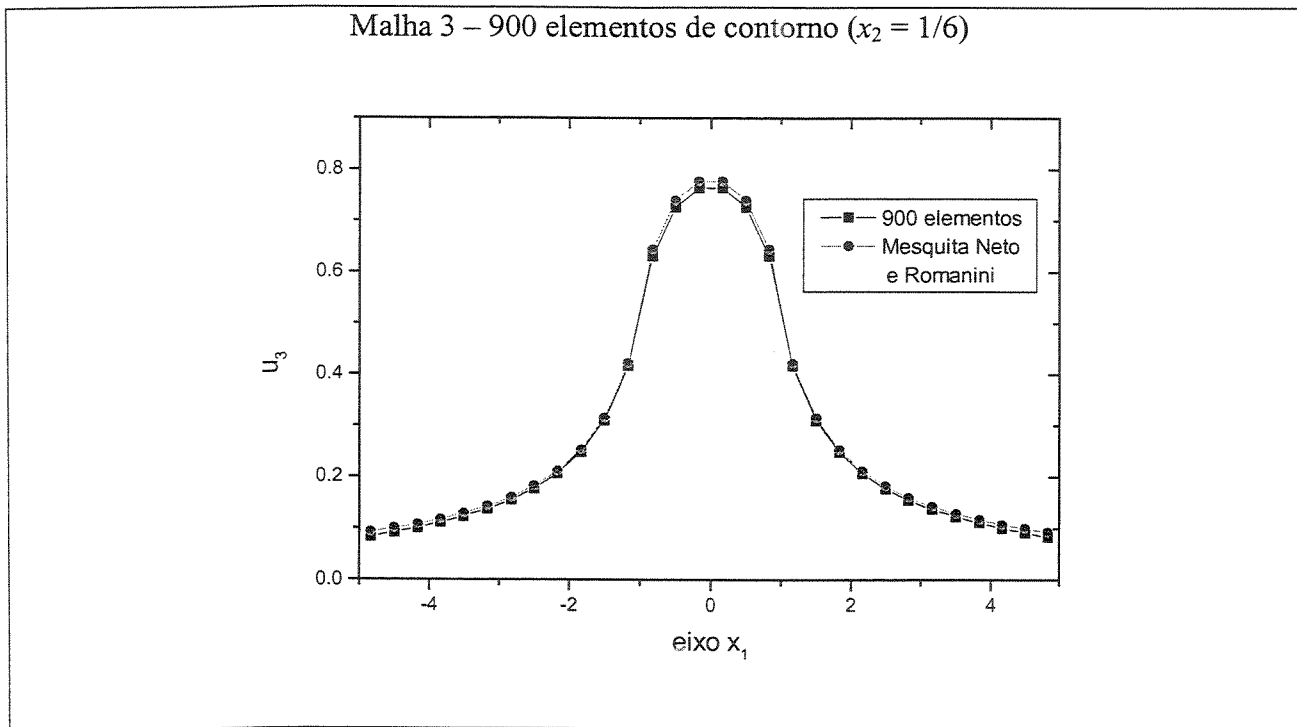


Gráficos 4.3a

Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 1/4$)



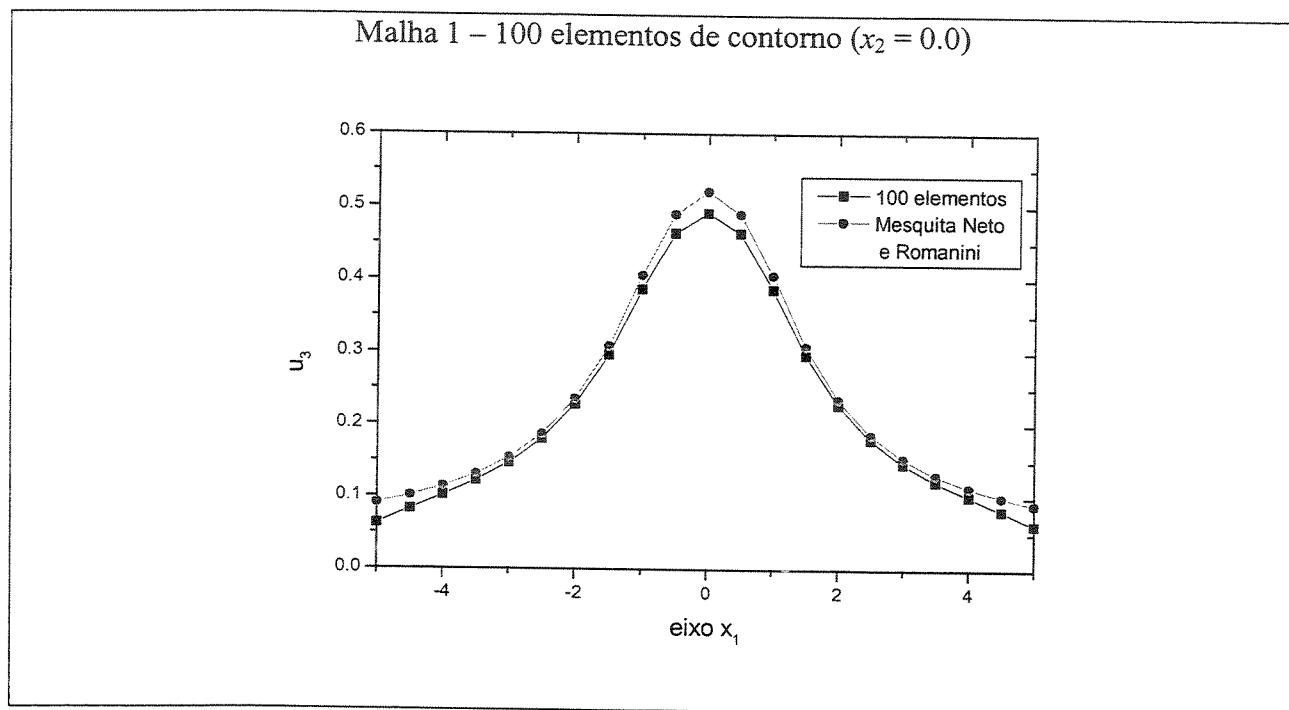
Gráficos 4.3b



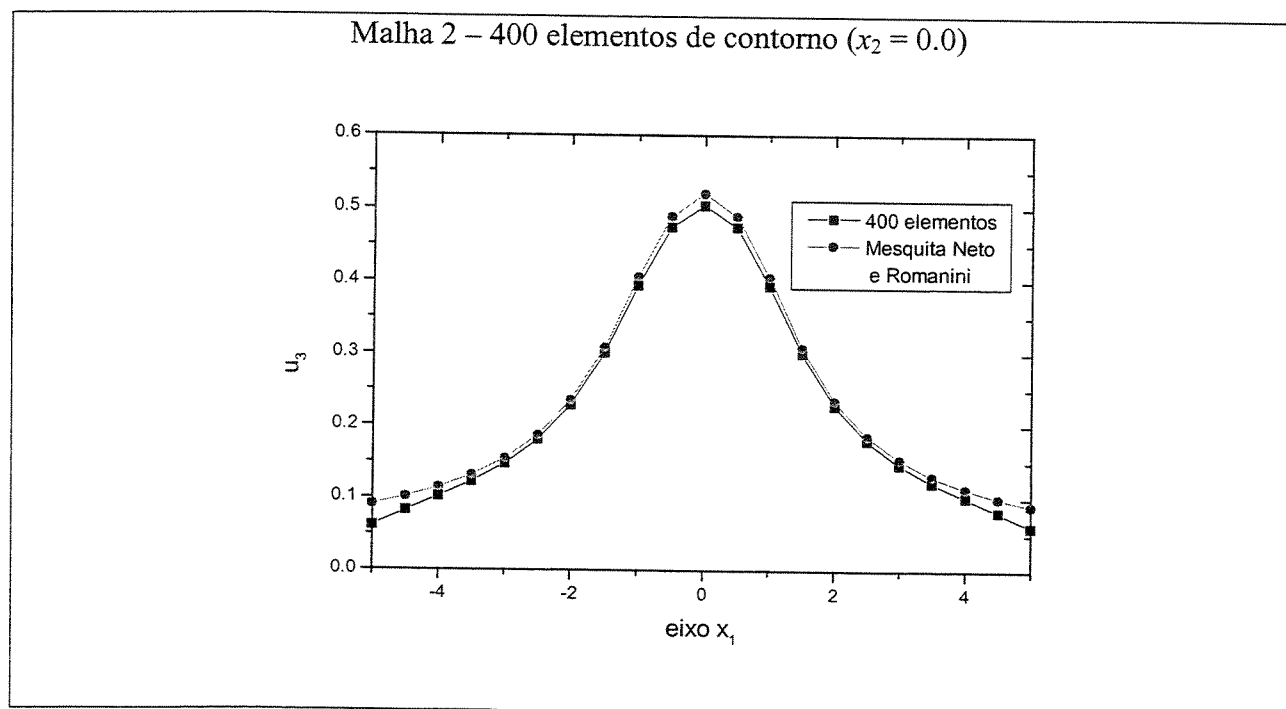
Gráficos 4.3c

Gráficos 4.3 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço.

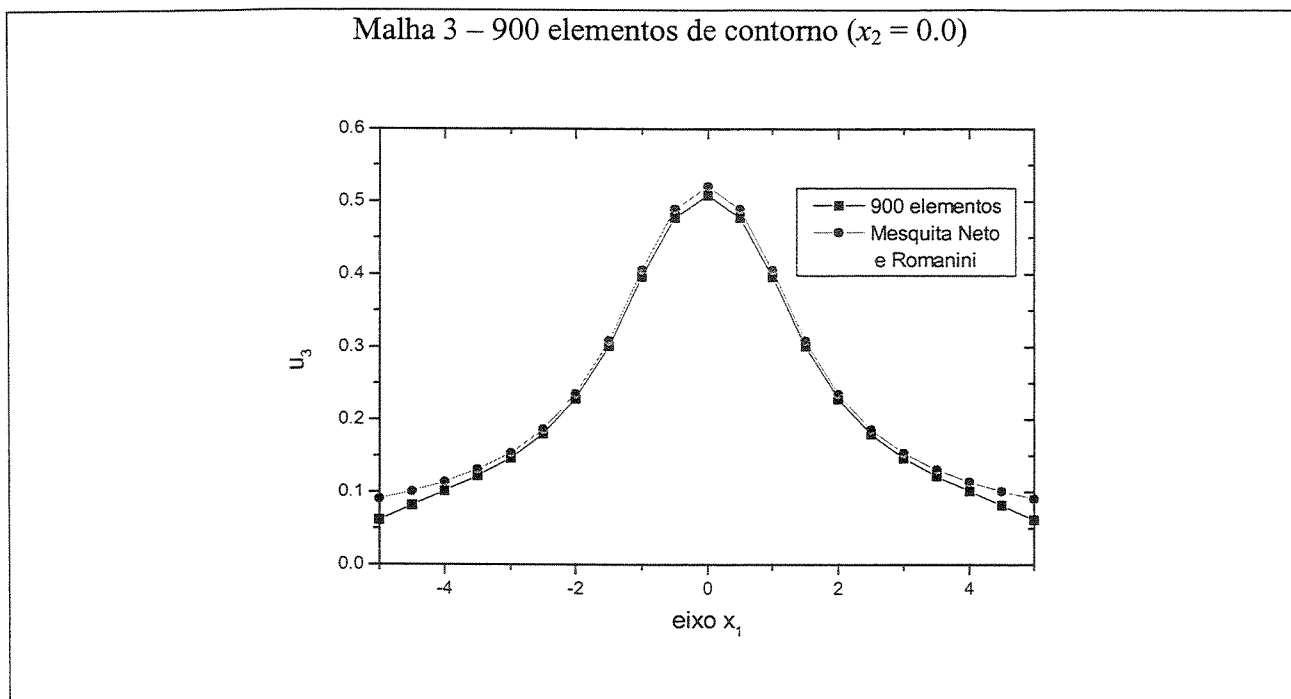
Os Gráficos (4.4a), (4.4b) e (4.4c) mostram os deslocamentos normais u_3 em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 1.0$) e para um valor de x_2 constante tomados ao longo do eixo x_1 .



Gráficos 4.4 a



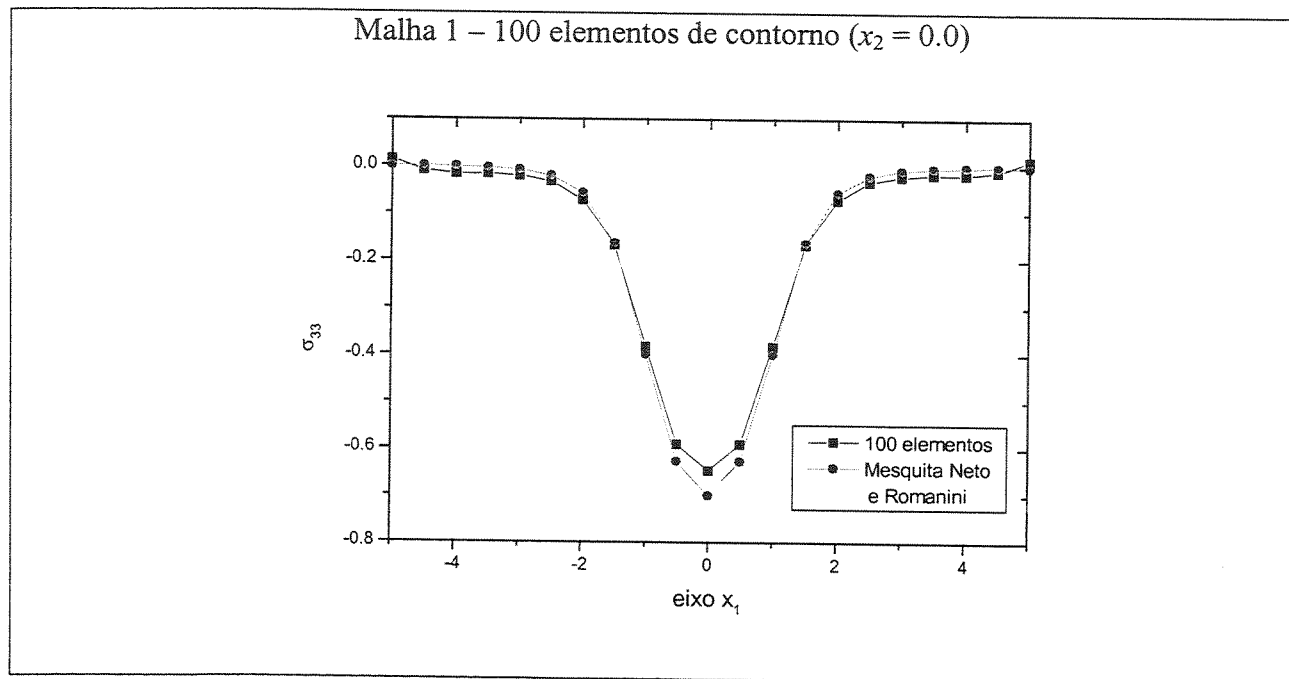
Gráficos 4.4b



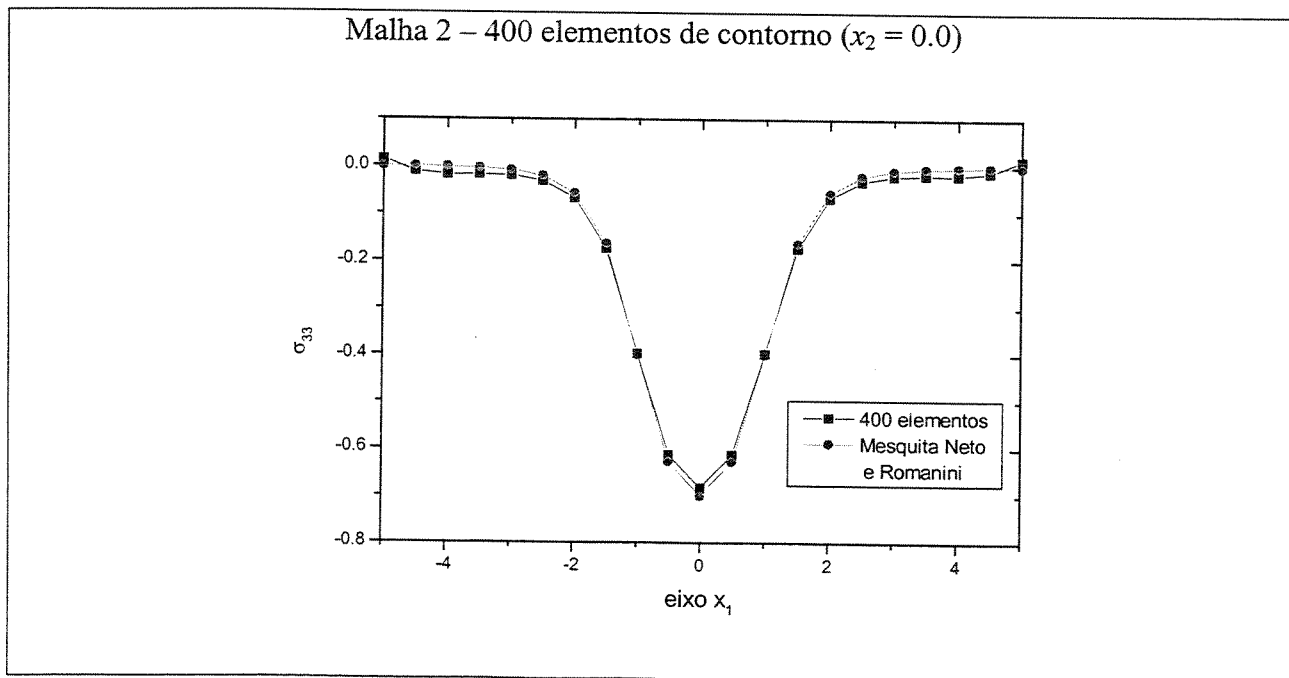
Gráficos 4.4c

Gráficos 4.4 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos do semi-espaco.

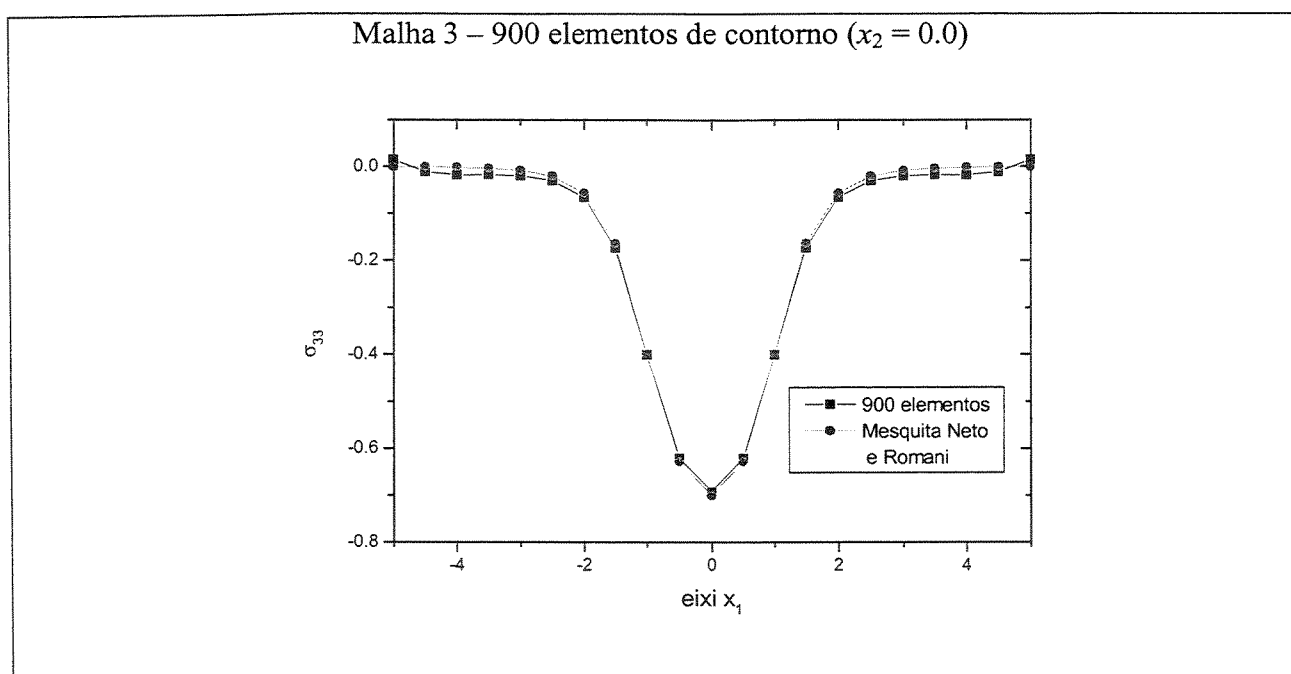
Os Gráficos (4.5a), (4.5b) e (4.5c) mostram as tensões normais σ_{33} em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 1.0$) e para um valor de x_2 constante tomados ao longo do eixo x_1 .



Gráficos 4.5a

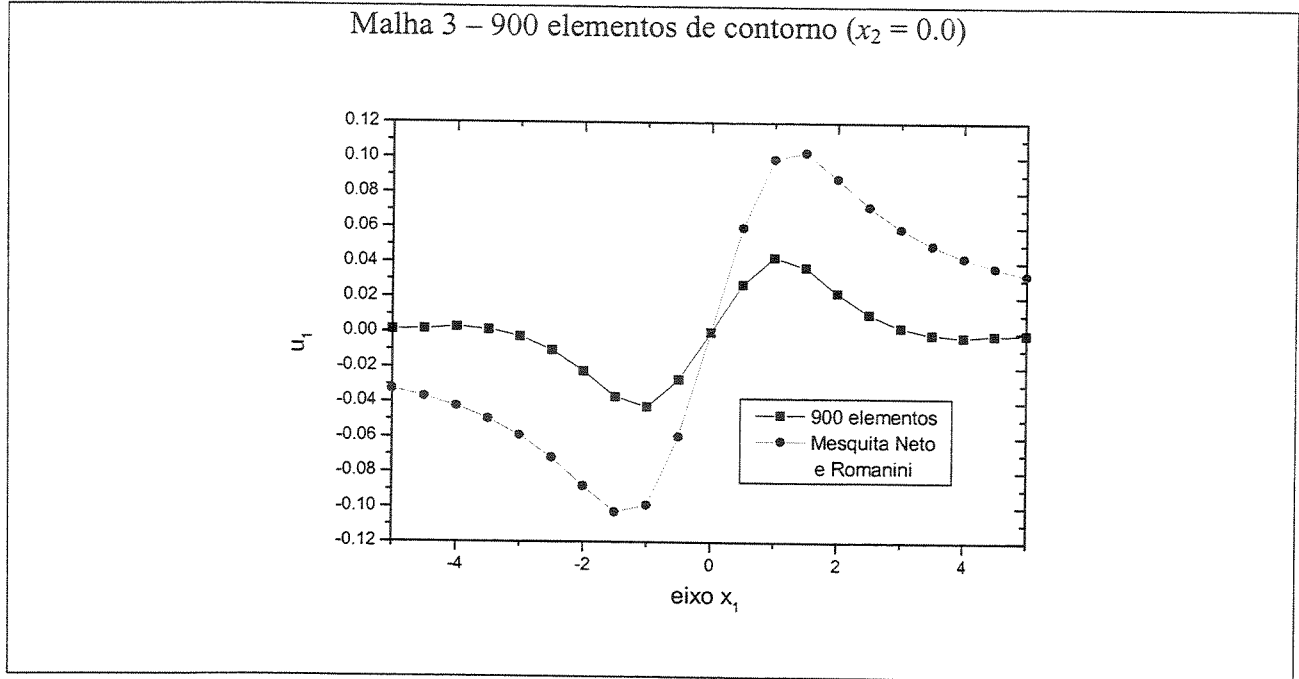


Gráficos 4.5b

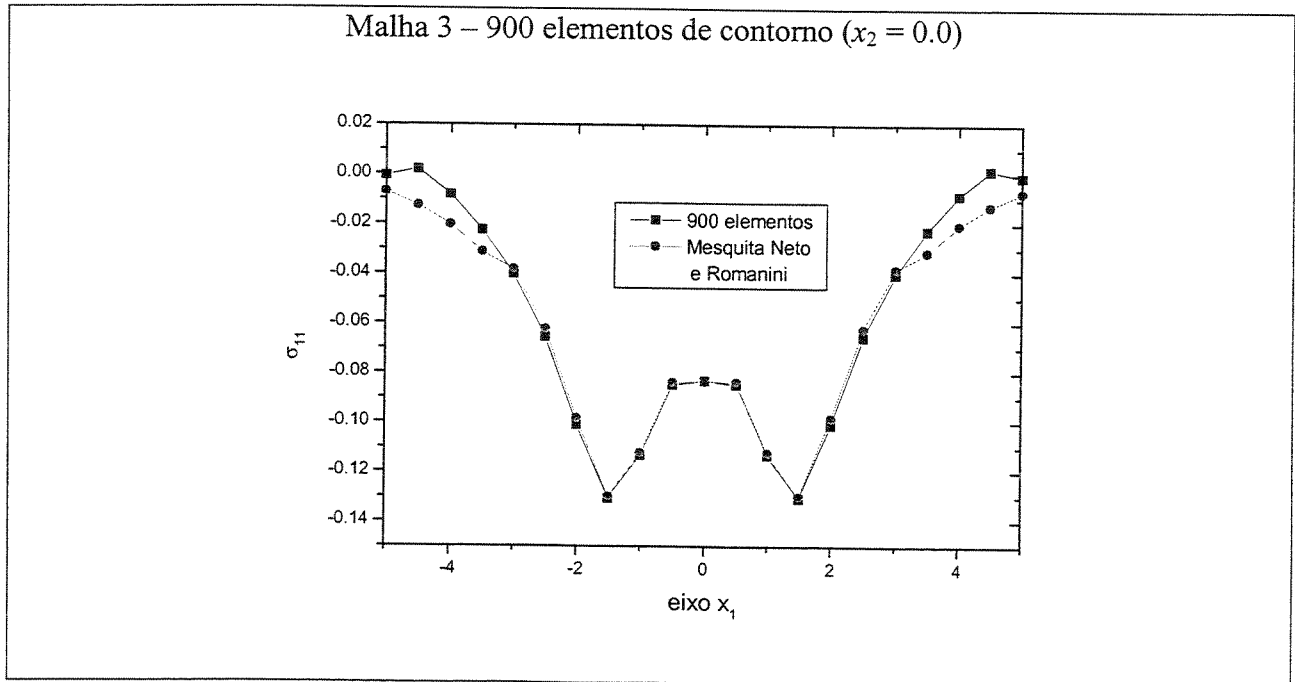


Gráficos 4.5 – Tensões normais σ_{33} em pontos internos do semi-espaço.

Vamos ainda calcular para os mesmos pontos internos analisados nos Gráficos (4.4) e (4.5) as outras componentes do vetor deslocamento e do tensor de tensões para a malha 3, que é aquela que possui melhor discretização. Estes resultados estão nos Gráficos (4.6a), (4.6b), (4.6c) e (4.6d).

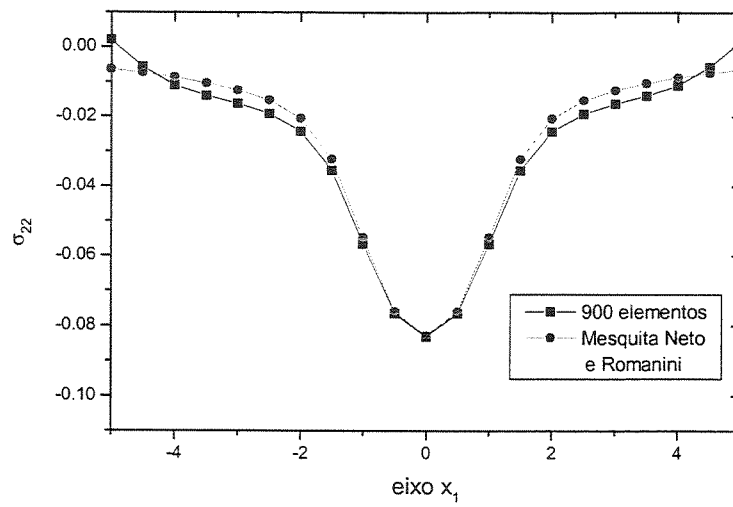


Gráficos 4.6a



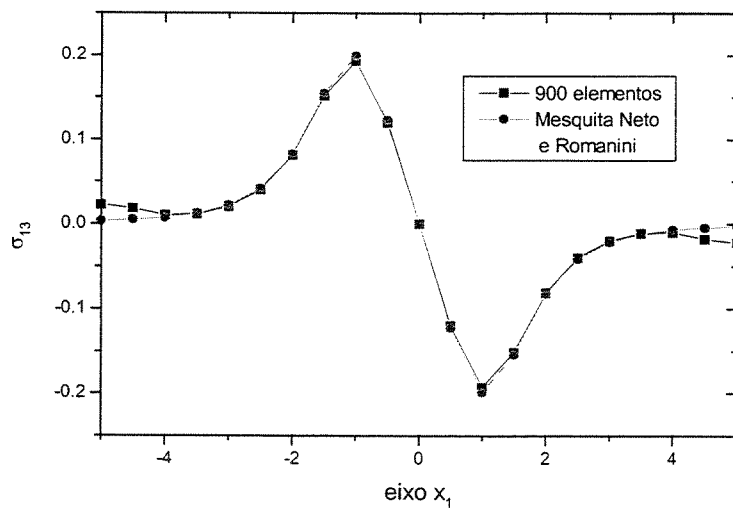
Gráficos 4.6b

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Gráficos 4.6c

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Gráficos 4.6d

Gráficos 4.6 – Outras componentes do vetor deslocamento e tensor de tensões em ponto internos.

As componentes u_2 do vetor deslocamento e σ_{12} e σ_{23} do tensor de tensões, que não aparecem nos Gráficos (4.6), são iguais a zero.

A análise dos gráficos aqui mostrados nos leva a concluir uma coerência entre os resultados obtidos pelo programa desenvolvido para este trabalho e aquele já existente na literatura; quando isto não acontece, como é o caso do deslocamento u_1 no Gráfico (4.6a), esta falta de coerência não é tão discrepante e talvez uma análise um pouco mais detalhada, como por exemplo uma malha ainda mais discretizada, fosse indicada.

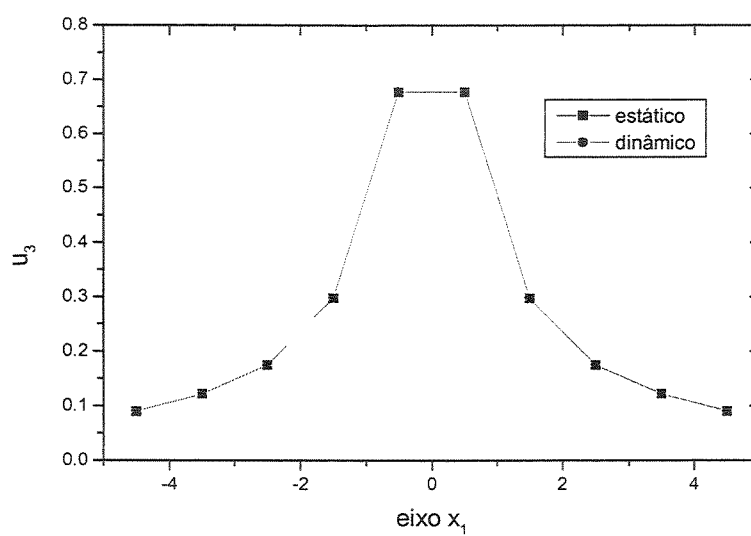
4.4 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Ilimitados

Este exemplo tem as mesmas características daquele citado no item 4.3, diferindo apenas no fato de que o carregamento agora é periódico harmônico. As malhas utilizadas também são as mesmas, possuindo inclusive a mesma numeração.

Os resultados obtidos são comparados com o mesmo programa computacional implementado através da Função de Green de Semi-Espaço 3D dinâmico, desenvolvido por Romanini e Mesquita Neto [1999], já utilizado na análise estática.

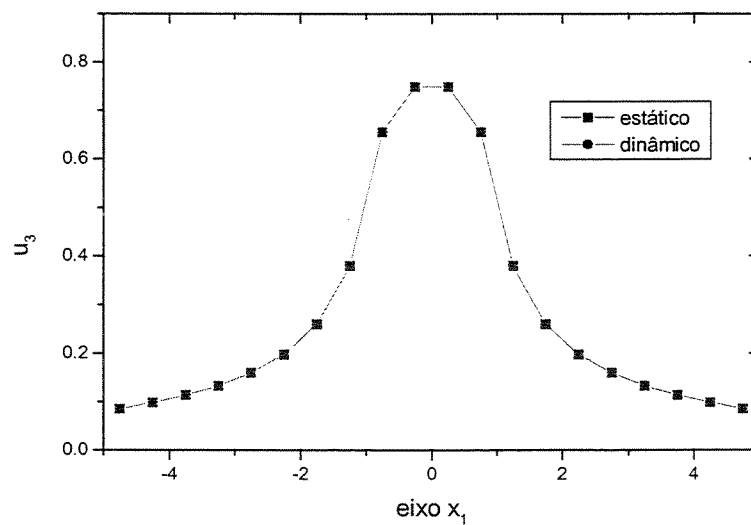
Inicialmente vamos fazer uma comparação entre o programa utilizado no item 4.3 (problema estático) e este programa, com uma frequência próxima de zero ($\omega = 0.01$). Os Gráficos (4.7a), (4.7b) e (4.7c) mostram os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$), para um valor de x_2 constante tomados ao longo do eixo x_1 .

Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 1/2$)

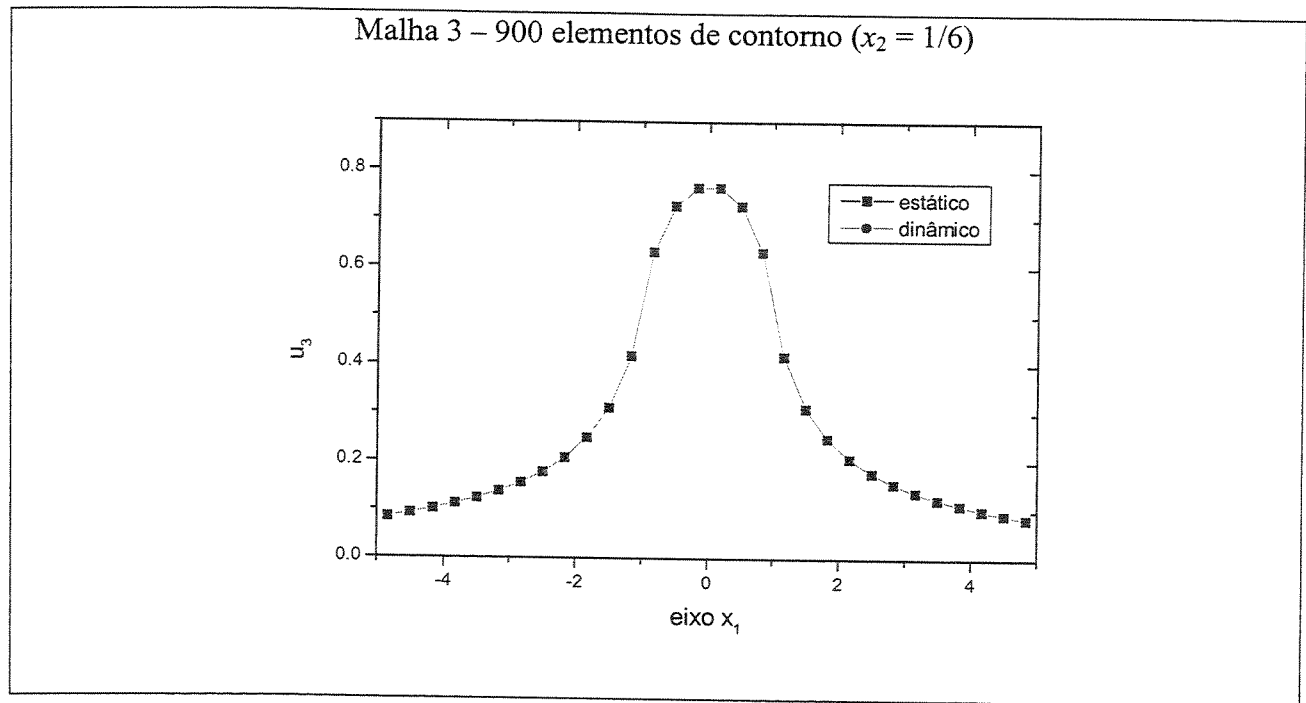


Gráficos 4.7 a

Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 1/4$)



Gráficos 4.7b

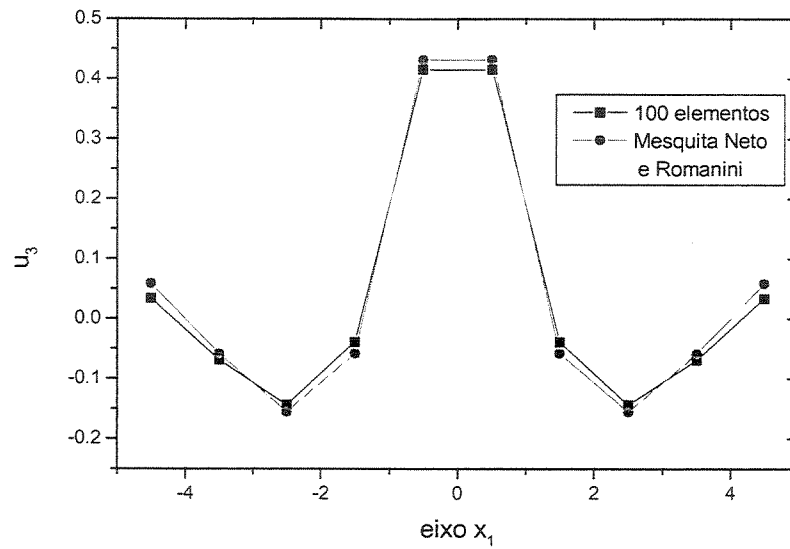


Gráficos 4.7c

Gráficos 4.7 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço. Comparação entre o problema estático e quase-estático.

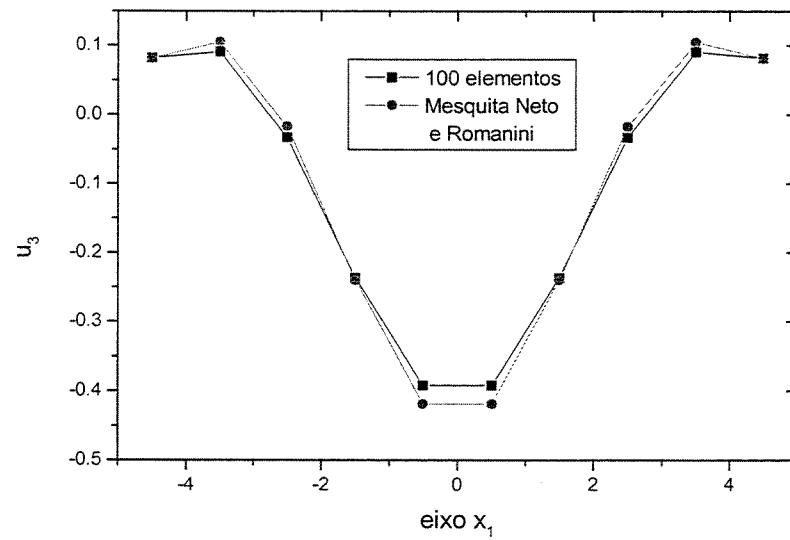
Em seguida, passemos à análise efetiva do problema dinâmico com os Gráficos (4.8a), (4.8b) e (4.8c), que mostram os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$.

Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 1/2$)



Parte real

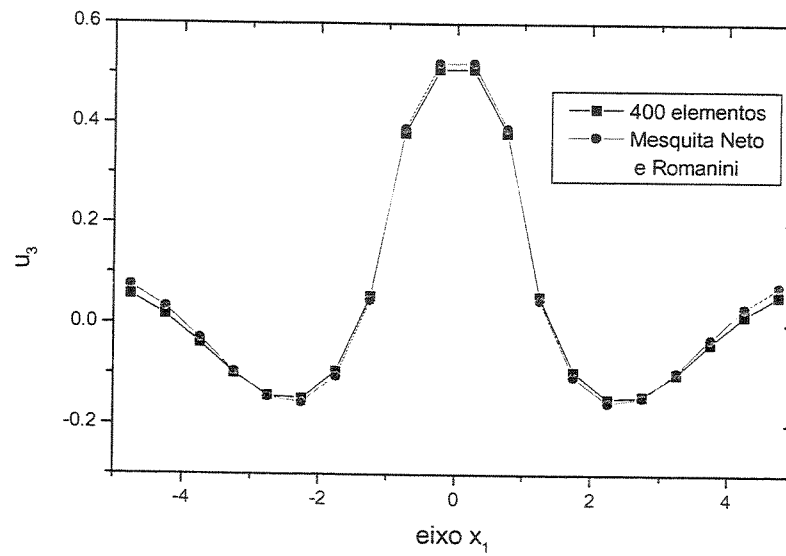
Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 1/2$)



Parte imaginária

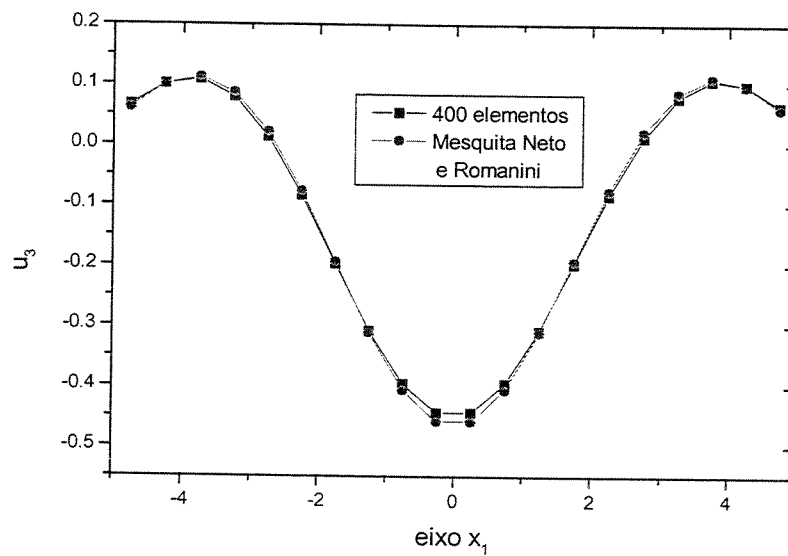
Gráficos 4.8a

Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 1/4$)



Parte real

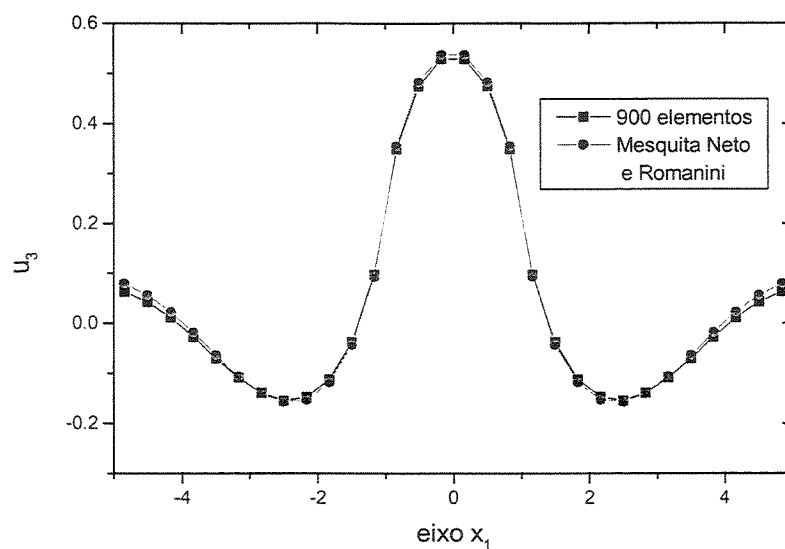
Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 1/4$)



Parte imaginária

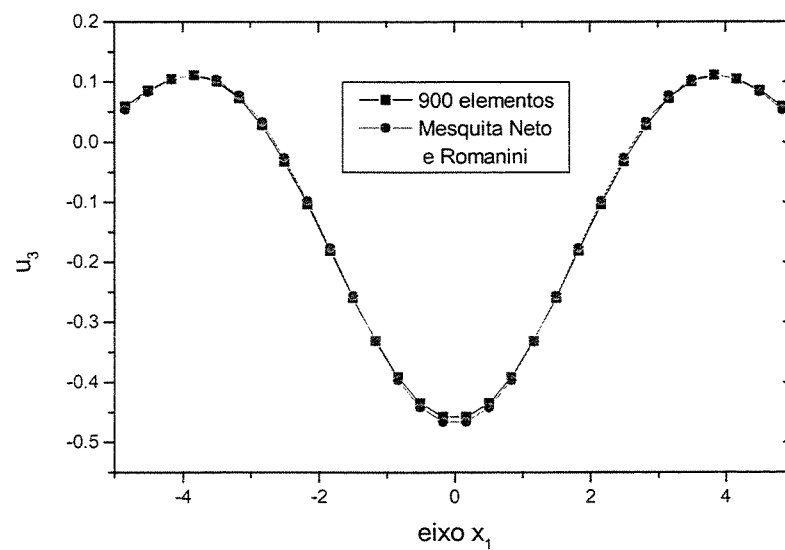
Gráficos 4.8b

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 1/6$)



Parte real

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 1/6$)



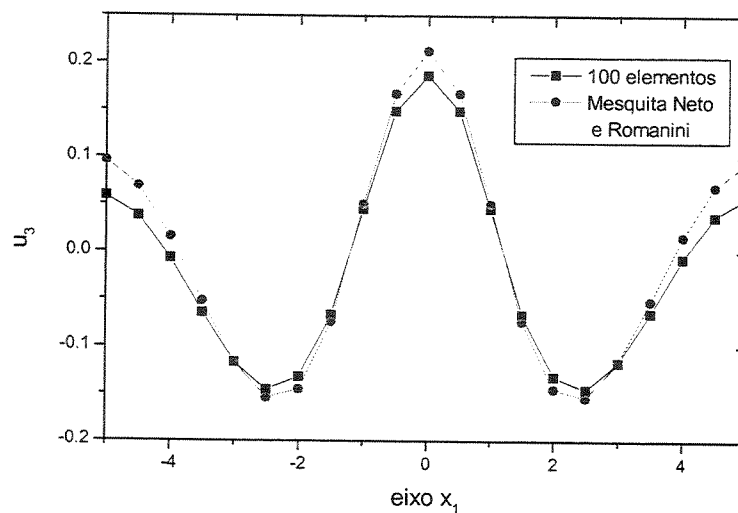
Parte imaginária

Gráficos 4.8c

Gráficos 4.8 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaço.

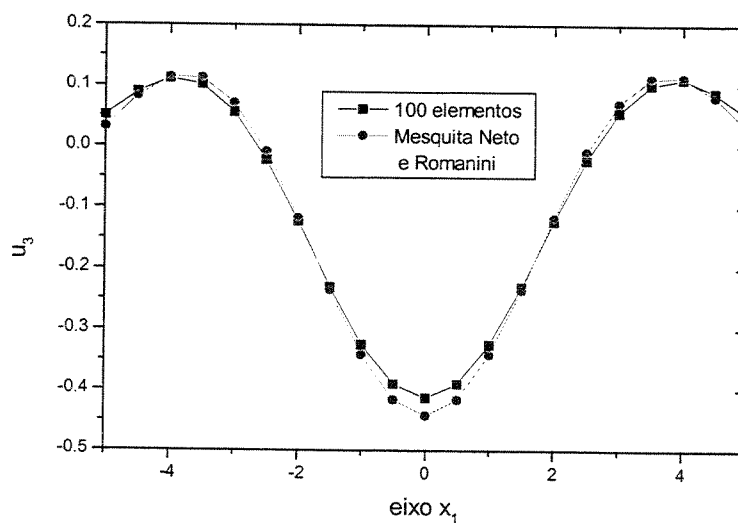
Os Gráficos (4.9a), (4.9b) e (4.9c) mostram os deslocamentos normais u_3 em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 1.0$) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 e também para uma frequência $\omega = 1.0$.

Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

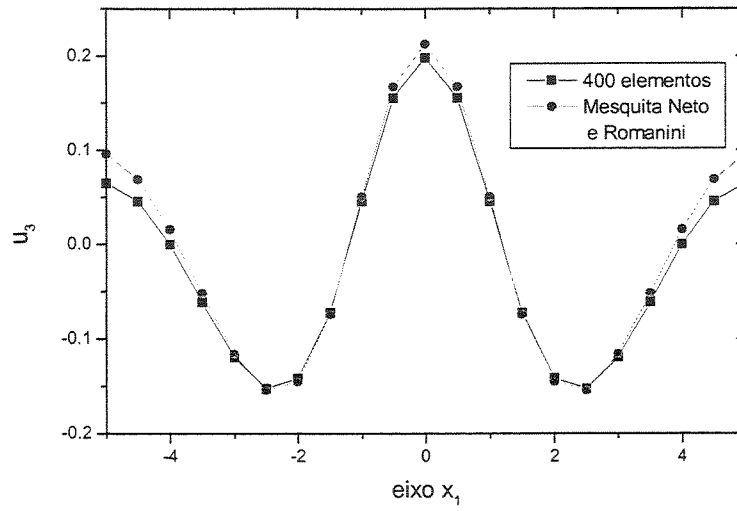
Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

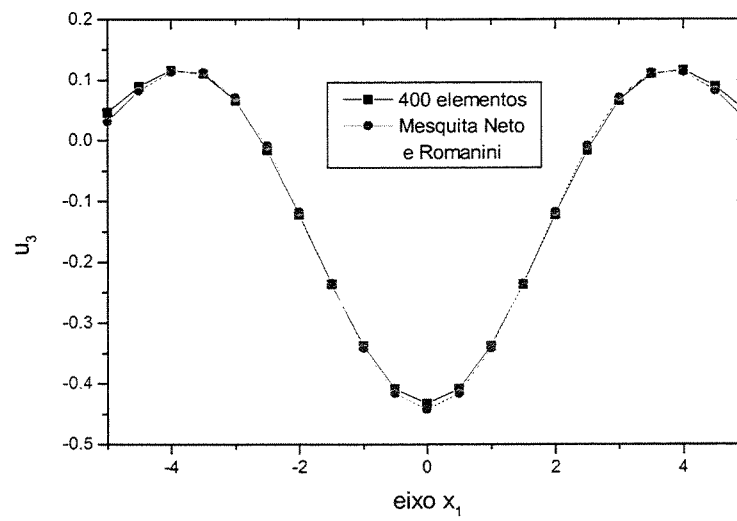
Gráficos (4.9a)

Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

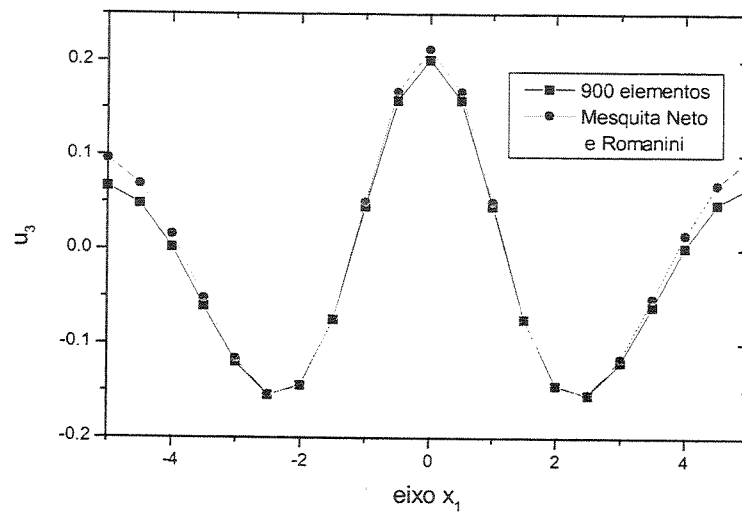
Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

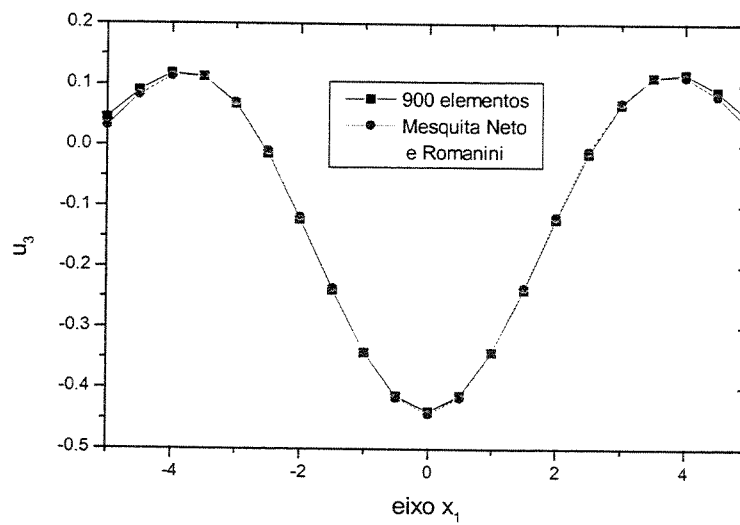
Gráficos (4.9b)

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



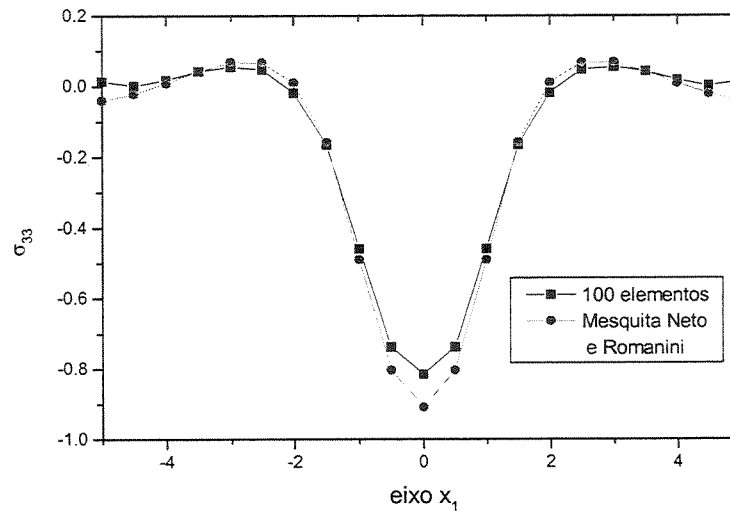
Parte imaginária

Gráficos (4.9c)

Gráficos 4.9 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos do semi-espço.

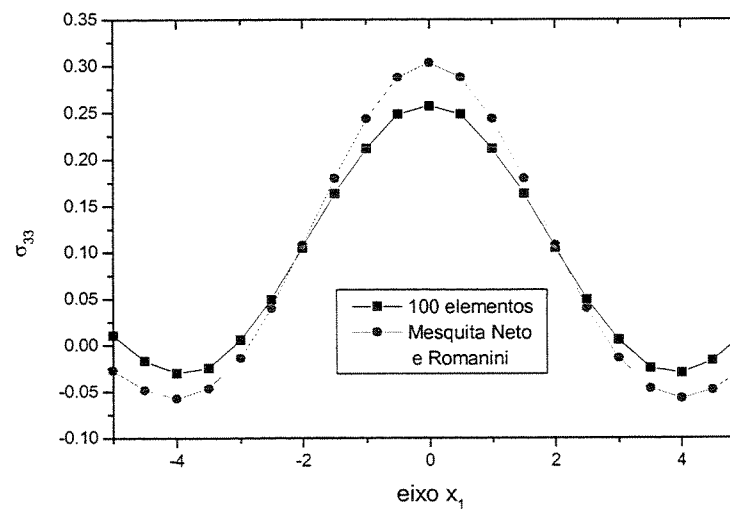
Os Gráficos (4.10a), (4.10b) e (4.10c) mostram as tensões normais σ_{33} em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 1.0$) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para a mesma frequência $\omega = 1.0$.

Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

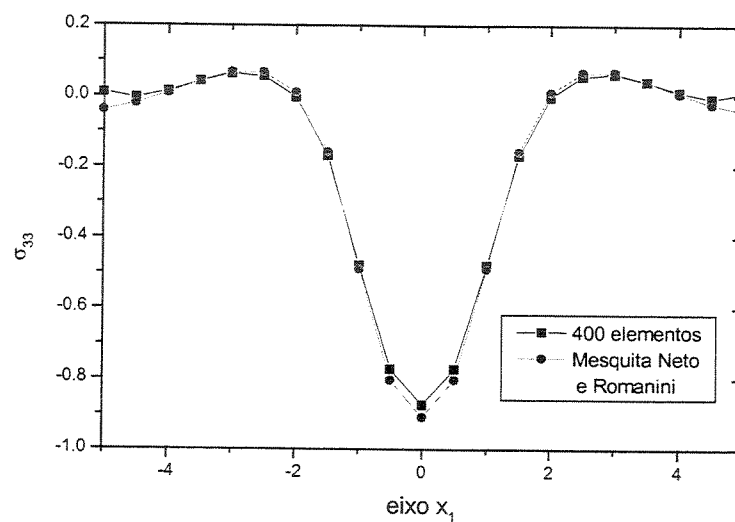
Malha 1 – 100 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

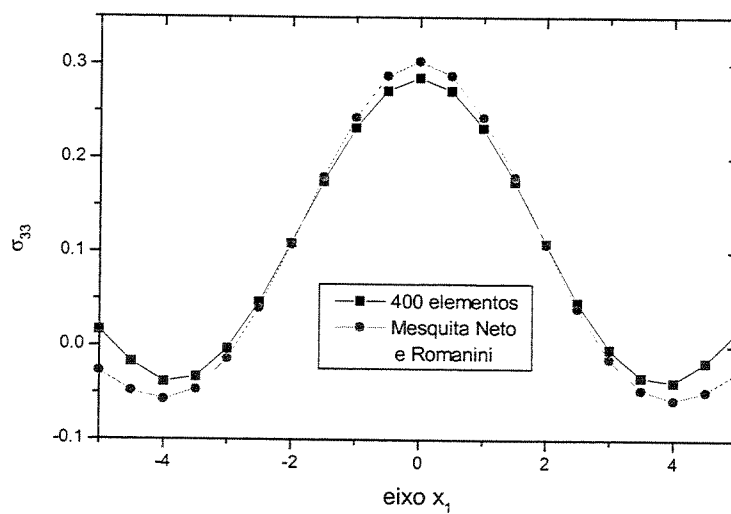
Gráficos 4.10a

Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

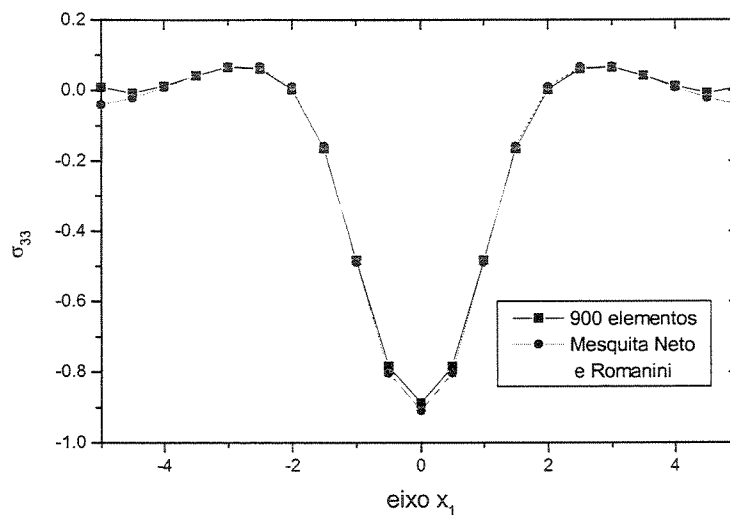
Malha 2 – 400 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

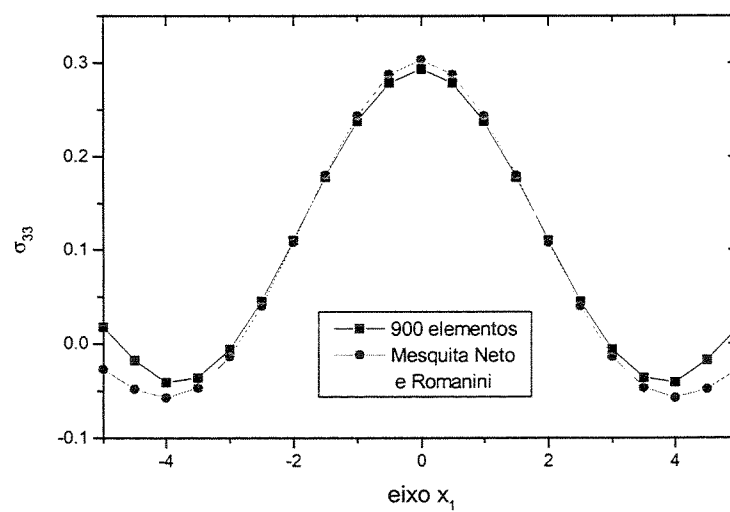
Gráficos 4.10b

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

Gráficos 4.10c

Gráficos 4.10 – Tensões normais σ_{33} em pontos internos do semi-espço.

Vamos ainda calcular para os mesmos pontos internos analisados nos Gráficos (4.9) e (4.10), as outras componentes do vetor deslocamento e do tensor de tensões para a malha 3, que é aquela que possui melhor discretização. Estes resultados estão nos Gráficos (4.11a), (4.11b), (4.11c) e (4.11d).

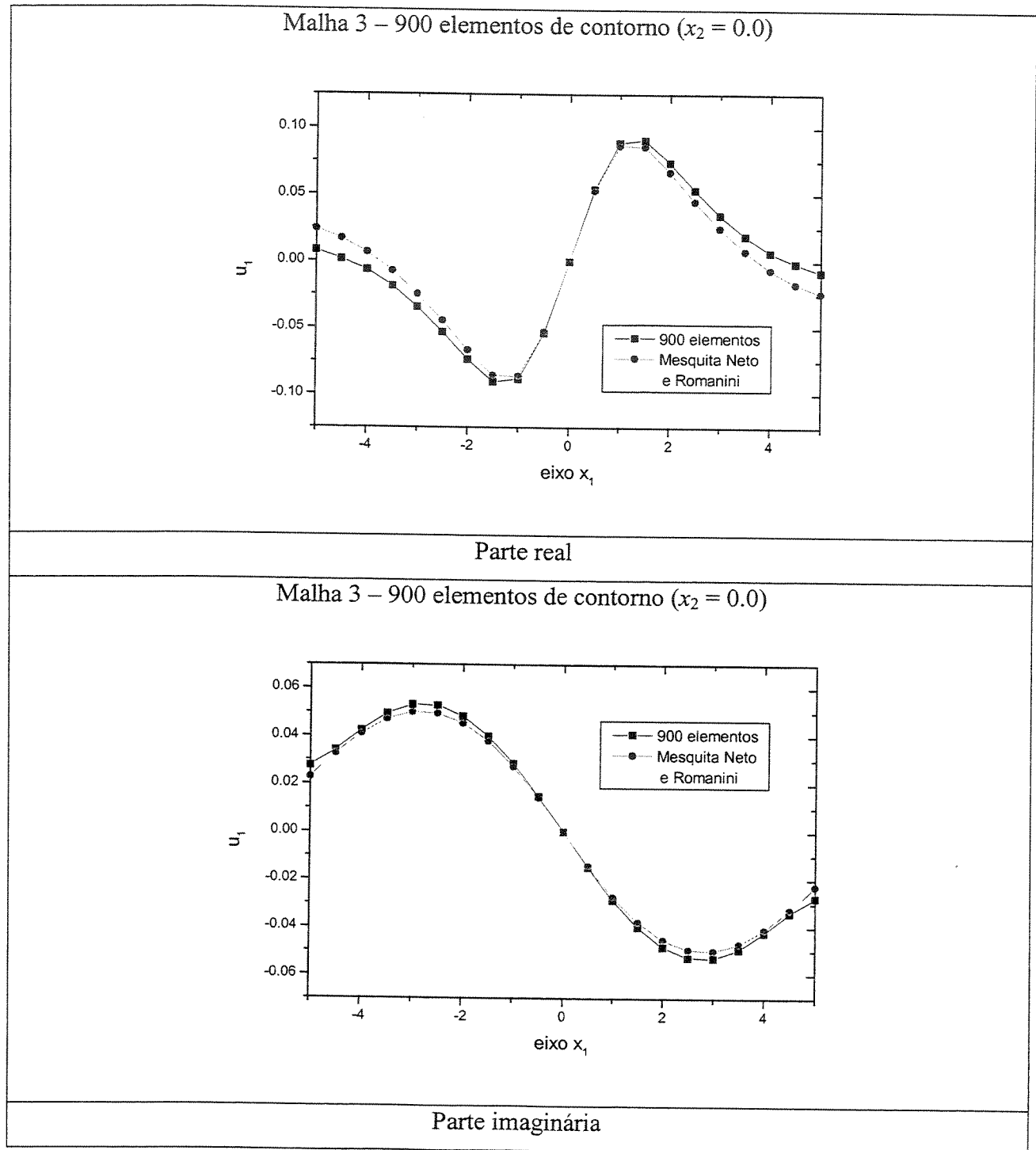
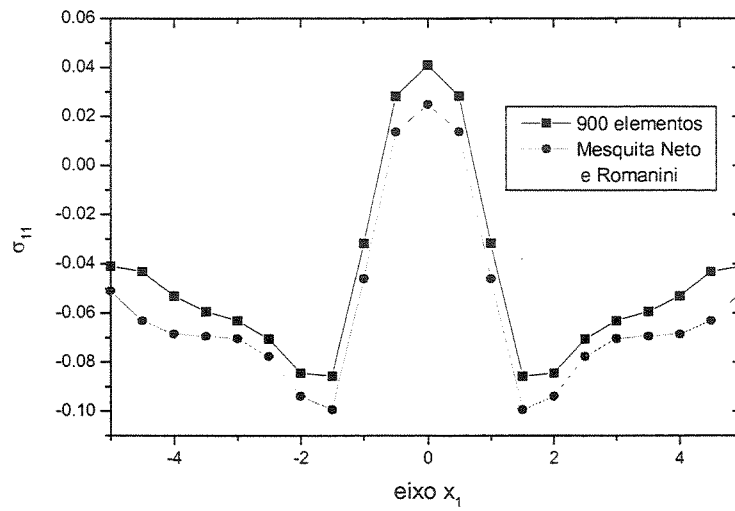


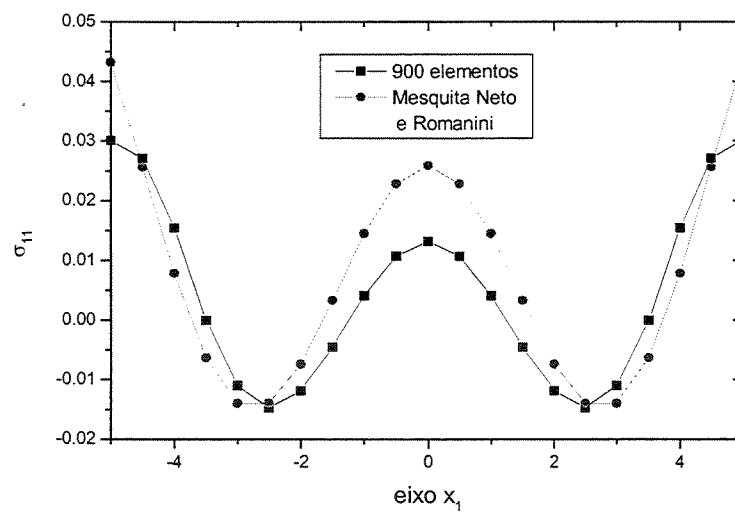
Gráfico 4.11a

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

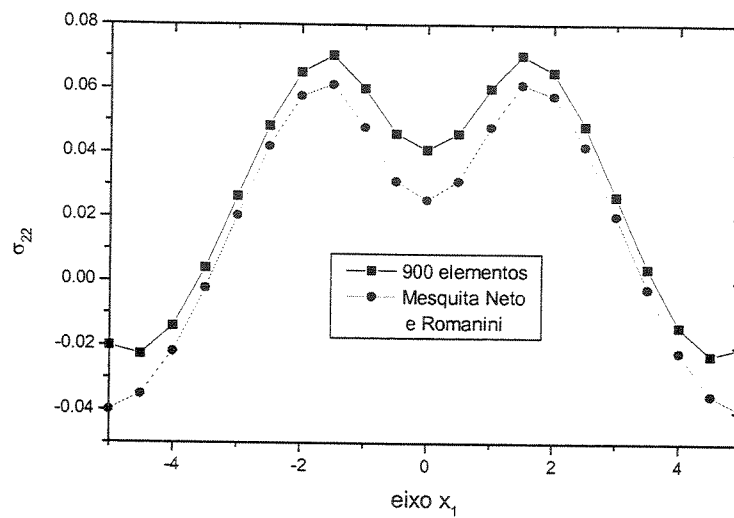
Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

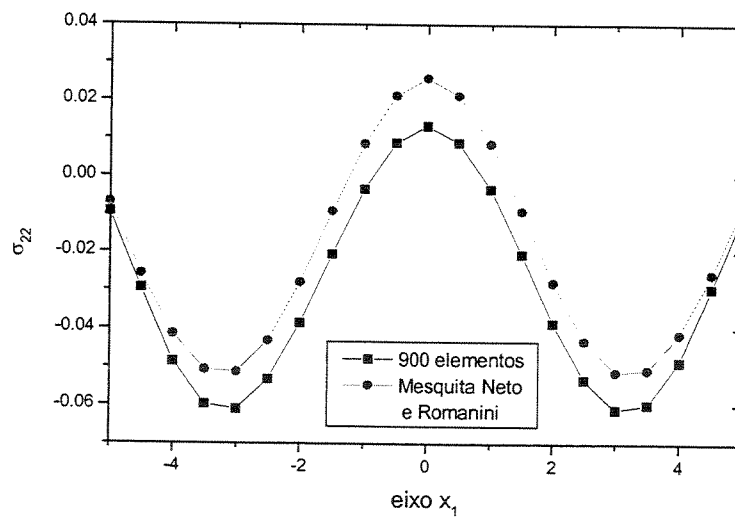
Gráfico 4.11b

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

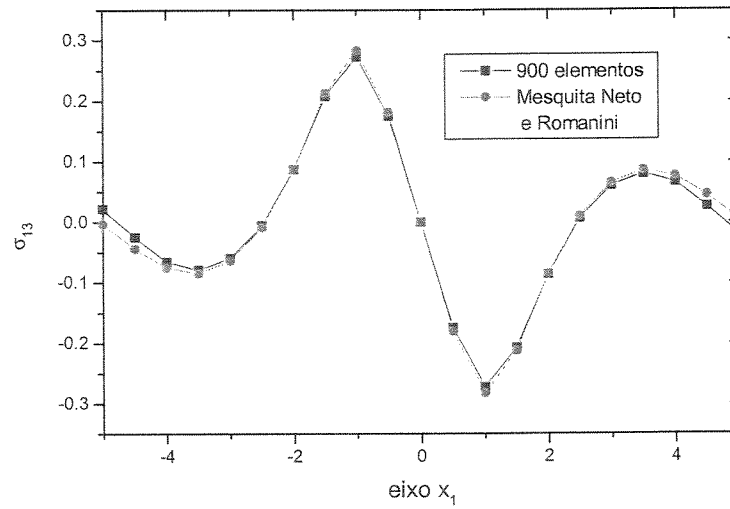
Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

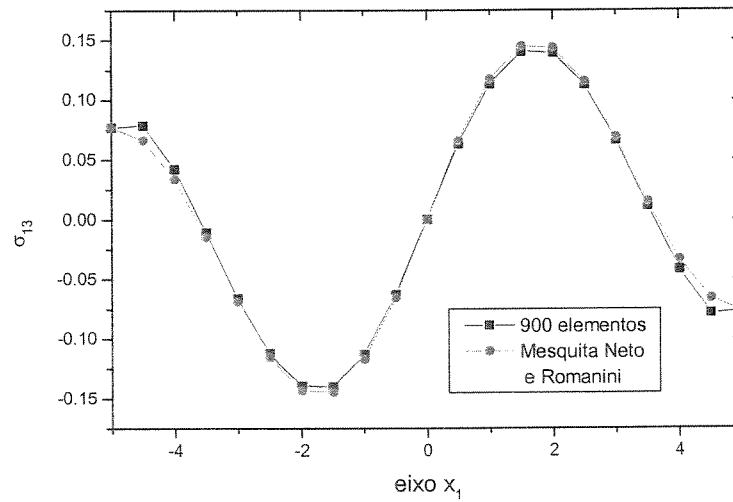
Gráfico 4.11c

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

Gráfico 4.11d

Gráficos 4.11 – Outras componentes do vetor deslocamento e tensor de tensões em ponto internos.

As componentes u_2 do vetor deslocamento e σ_{12} e σ_{23} do tensor de tensões, que não aparecem nos Gráficos (4.11), são iguais a zero.

Finalizando este item, seguem as Figuras (4.4) e (4.5) que representam os quadros de duas animações feitas no Mathematica®, a partir do exemplo analisado com a malha 3, dos deslocamentos superficiais normais u_3 para frequências $\omega = 1.0$ e $\omega = 2.0$, com dezesseis quadros por ciclo cuja sequência de apresentação é de cima para baixo e da esquerda para a direita.

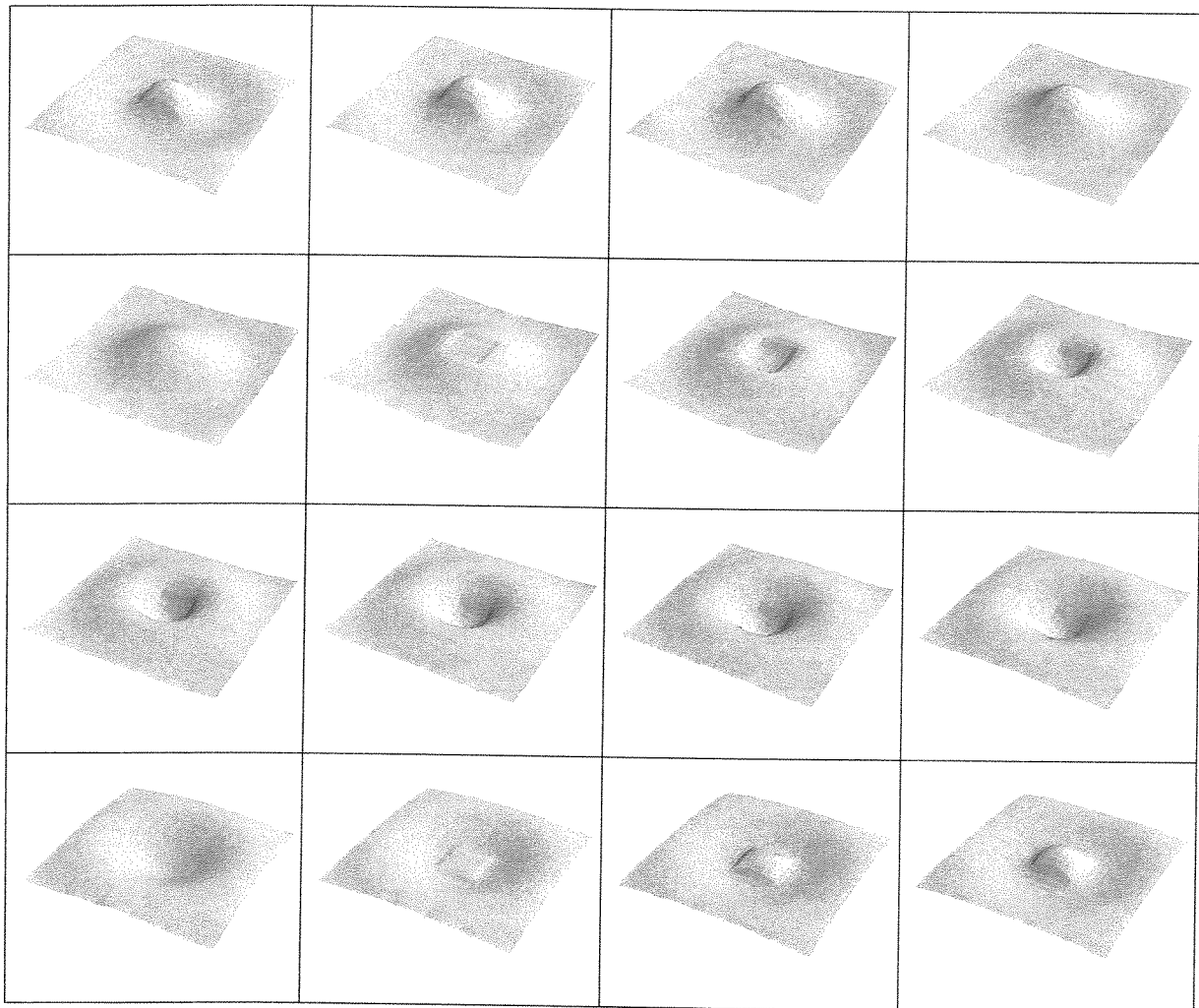


Figura 4.4 – Quadros representando a oscilação da superfície do semi-espço para uma frequência $\omega = 1.0$

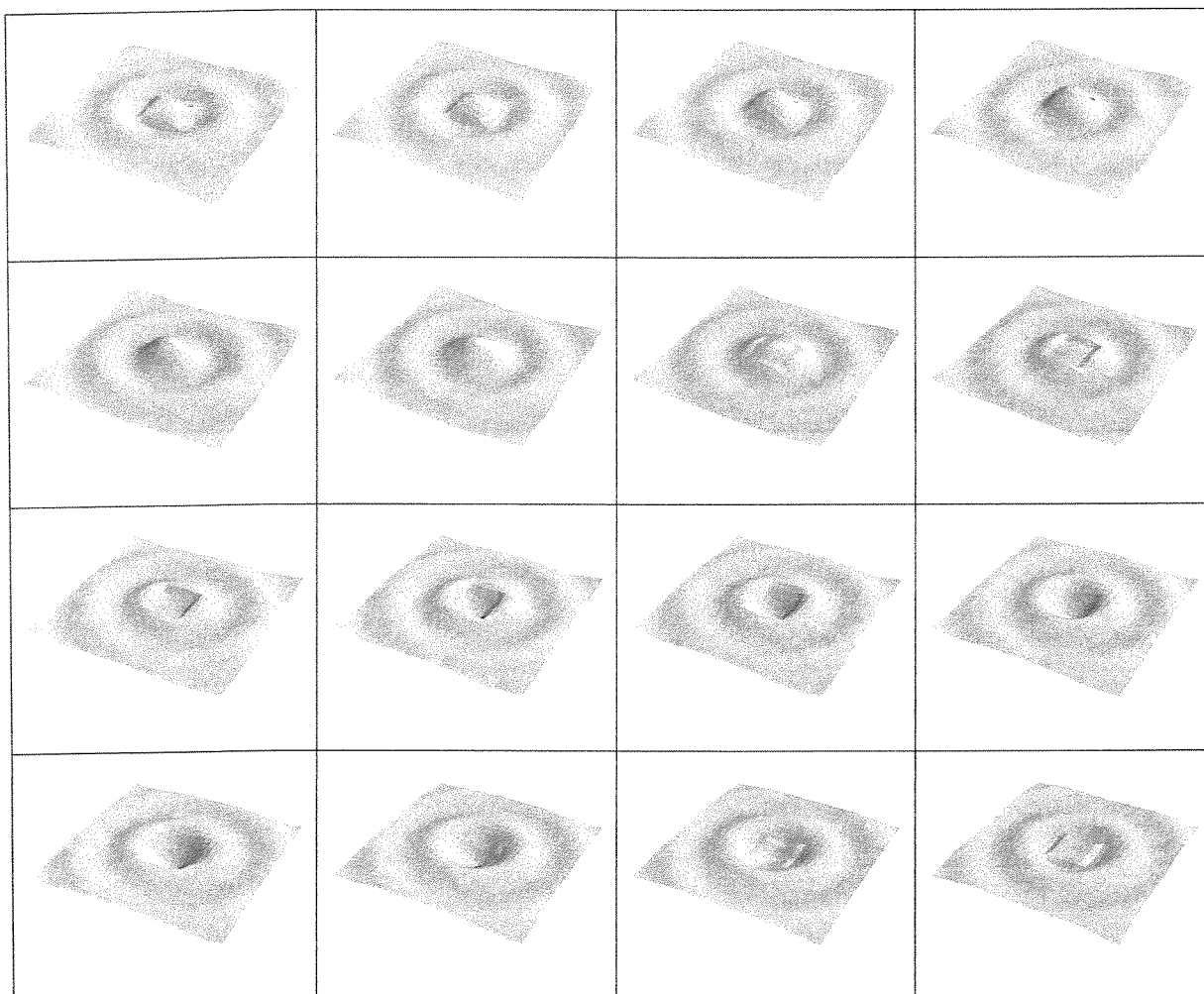


Figura 4.5 – Quadros representando a oscilação da superfície do semi-espço para uma frequência $\omega = 2.0$

Passemos à análise do problema dinâmico, considerando agora um material viscoelástico e utilizando, para este fim, o Princípio da Correspondência já comentado no capítulo 2 (ver item 2.3). Tomemos como fator de amortecimento $\beta = 0.1$. O Gráfico (4.12) mostra os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$. Todos os gráficos utilizados no exemplo viscoelástico utilizam a malha que possui 900 elementos de contorno.

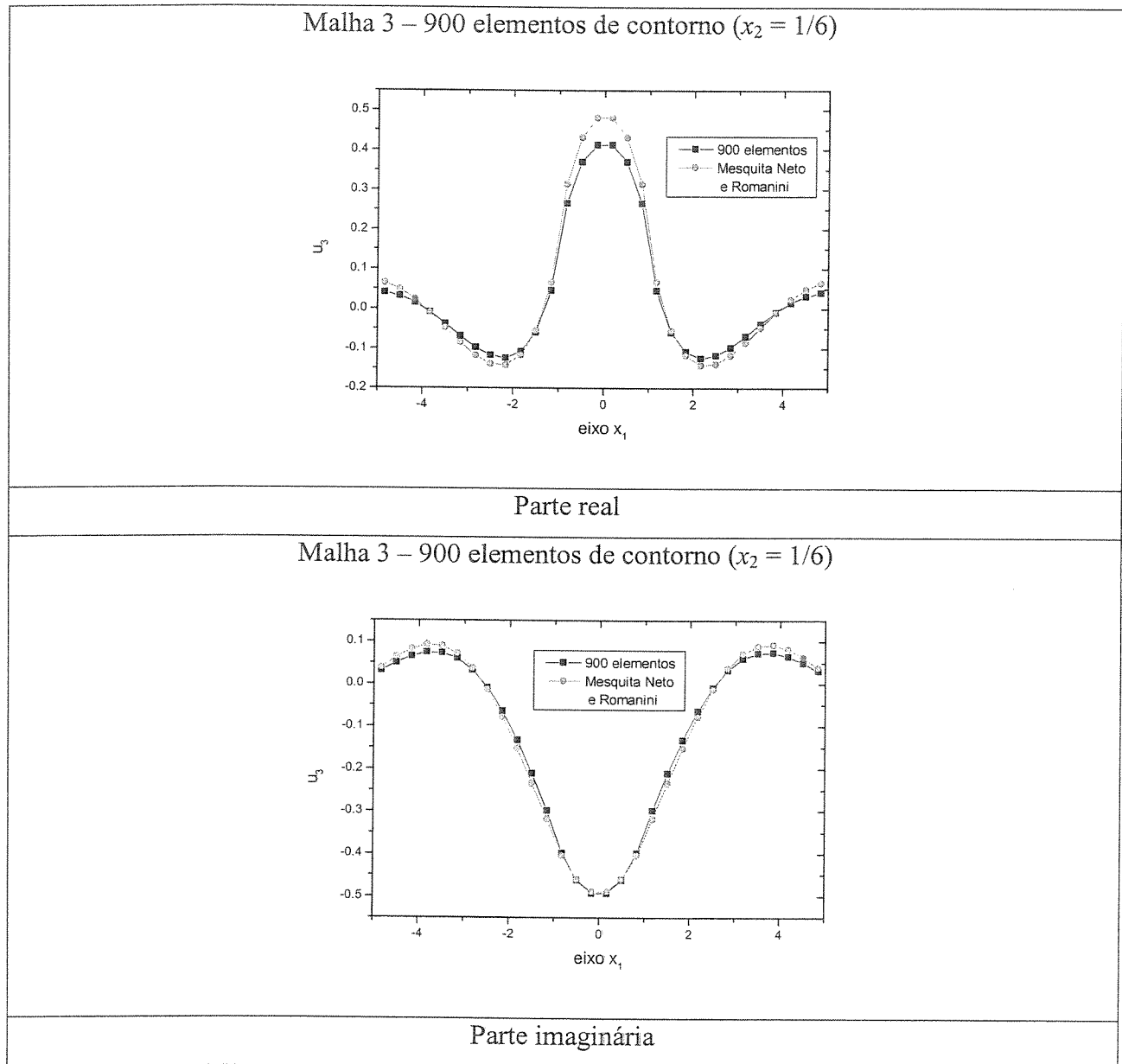


Gráfico 4.12 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço ($\beta = 0,1$).

O Gráfico (4.13) mostra o deslocamento normal u_3 em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 1.0$) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 também para uma frequência $\omega = 1.0$.

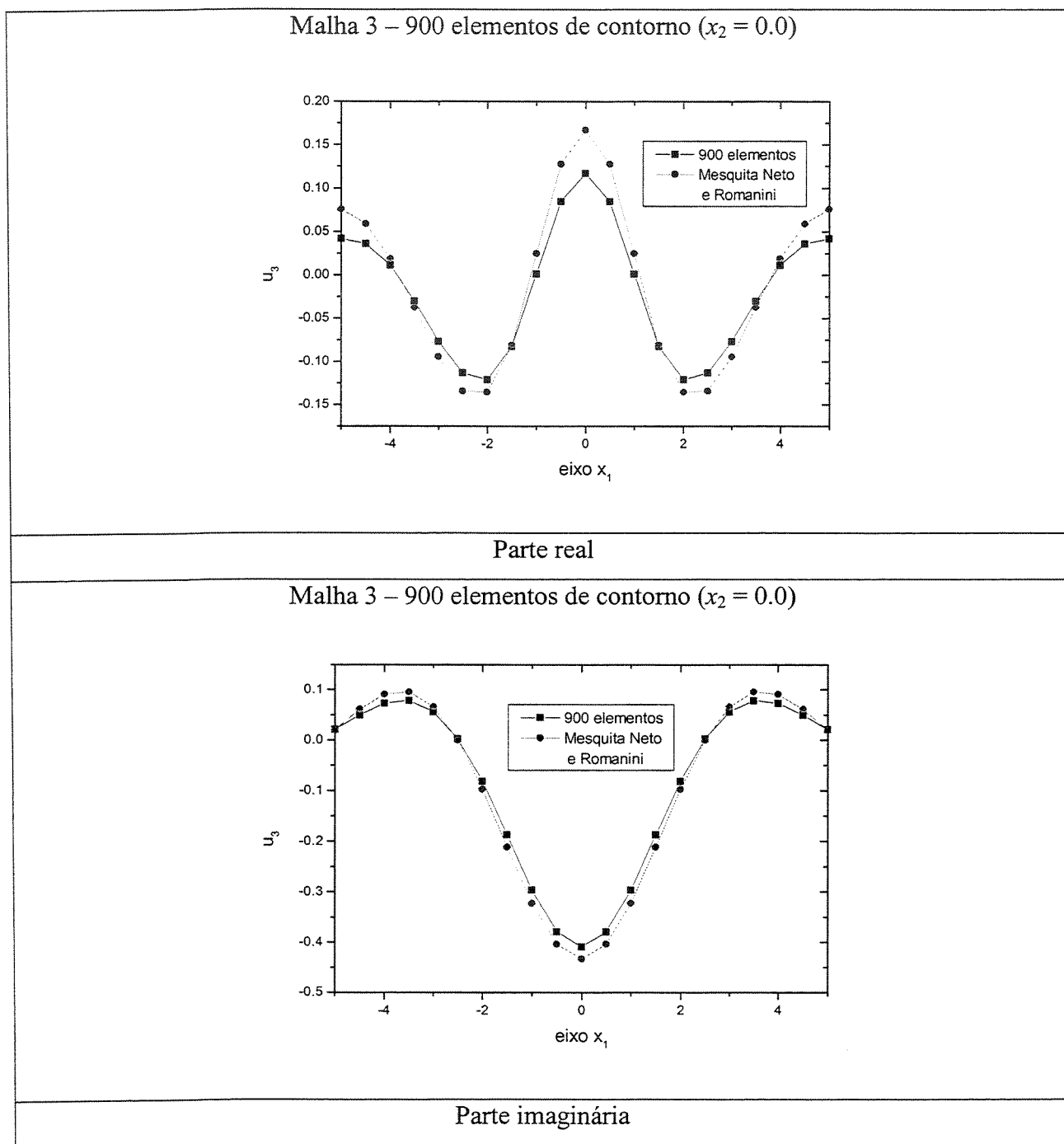


Gráfico 4.13 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos do semi-espço ($\beta = 0,1$).

O Gráfico (4.14) mostra a tensão normal σ_{33} em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 1.0$) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para a mesma frequência $\omega = 1.0$.

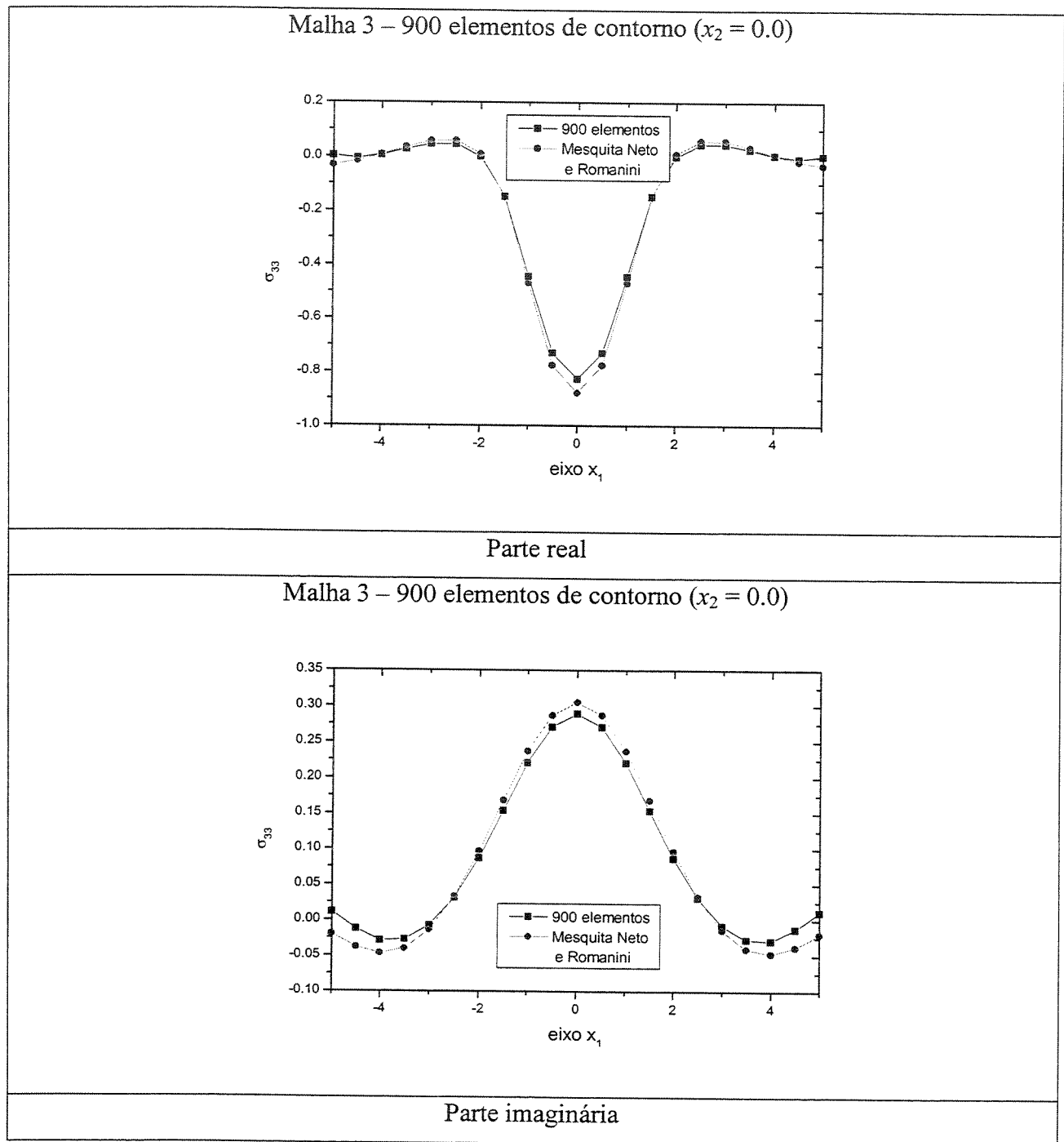


Gráfico 4.14 – Tensões normais σ_{33} em pontos internos do semi-espaço ($\beta = 0,1$).

Vamos ainda calcular para os mesmos pontos internos analisados nos Gráficos (4.13) e (4.14), as outras componentes do vetor deslocamento e do tensor de tensões para a malha 3, que é aquela que possui melhor discretização. Estes resultados estão nos Gráficos (4.15a), (4.15b), (4.15c) e (4.15d).

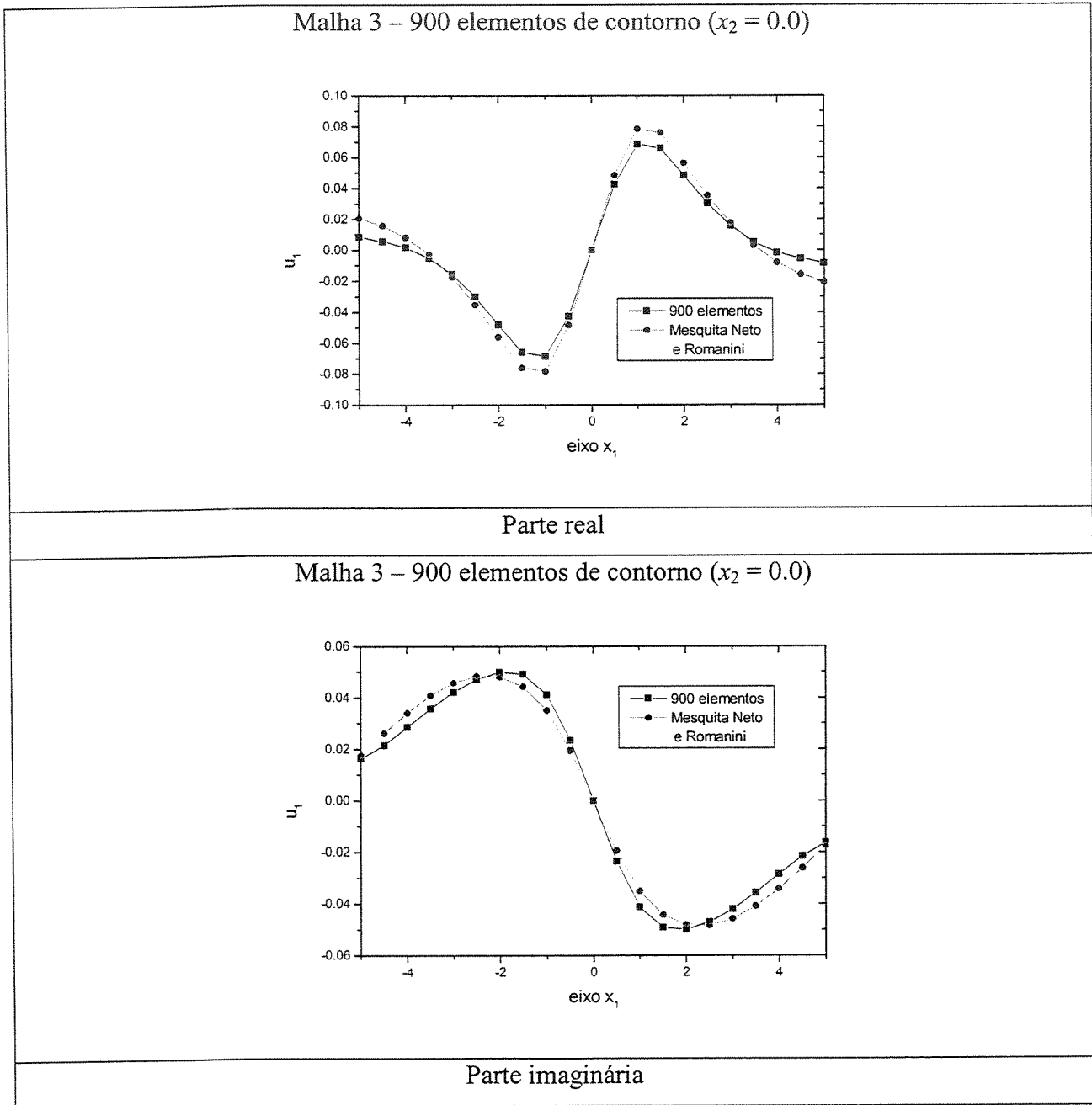
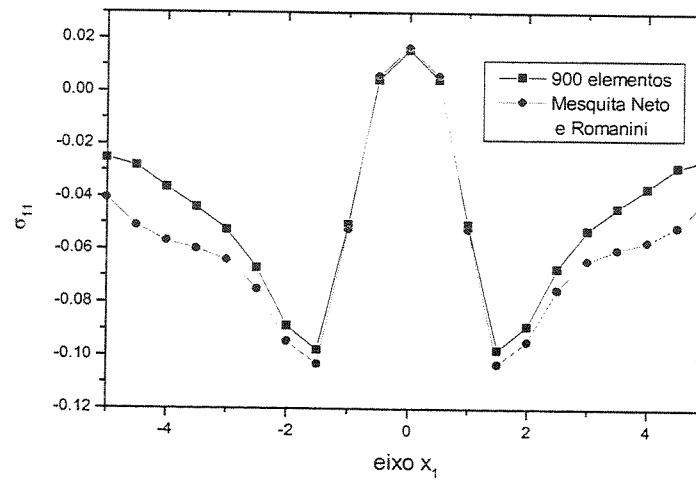


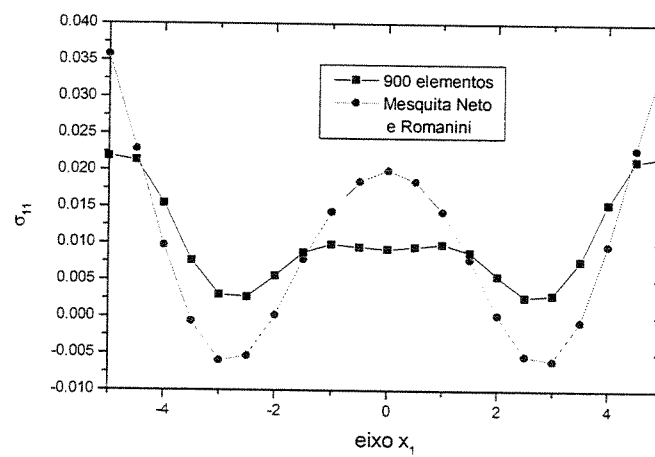
Gráfico 4.15a

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

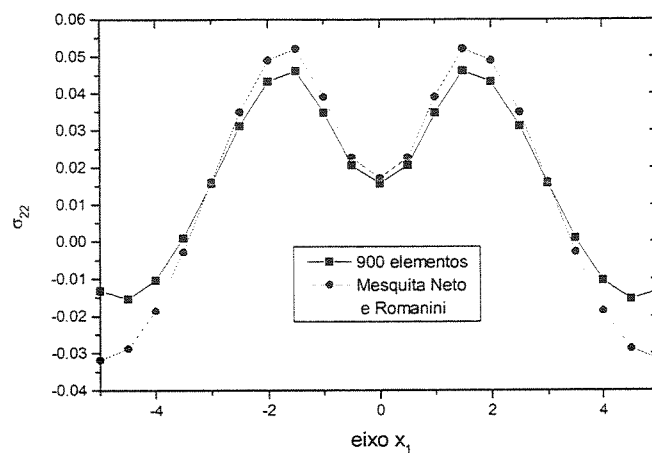
Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

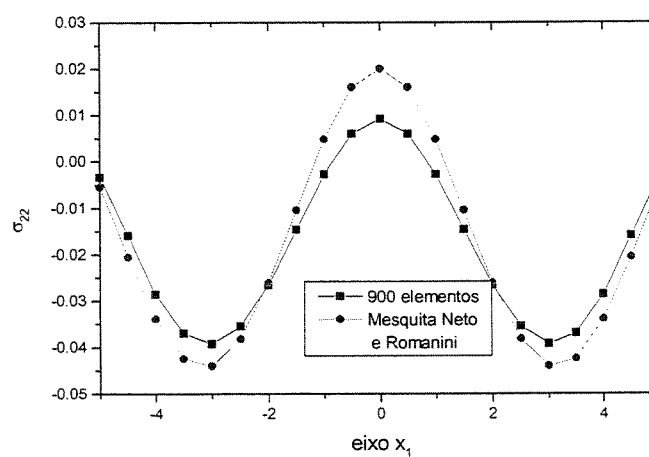
Gráfico 4.15b

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte real

Malha 3 – 900 elementos de contorno ($x_2 = 0.0$)



Parte imaginária

Gráfico 4.15c

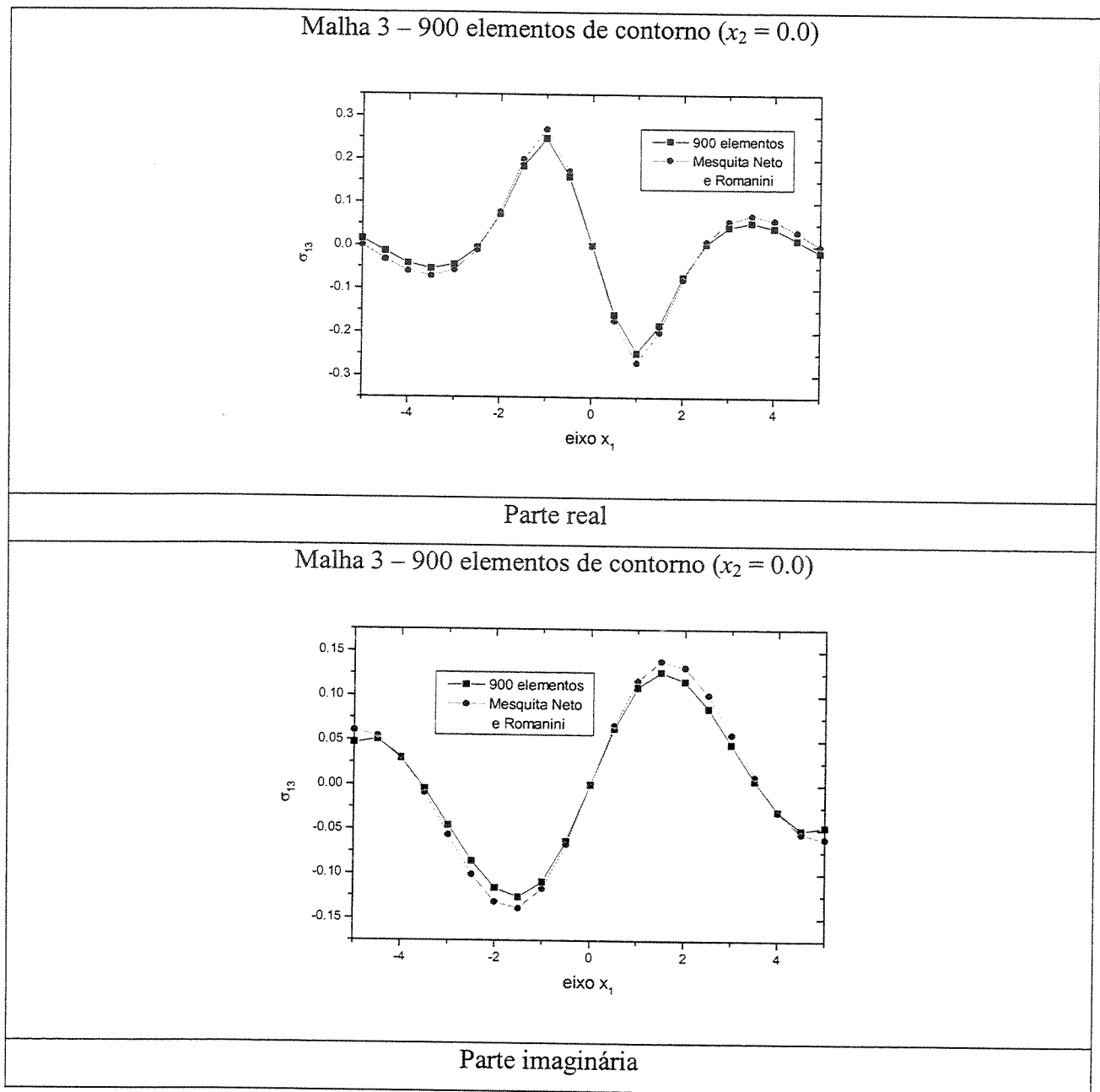


Gráfico 4.15d

Gráficos 4.15 – Outras componentes do vetor deslocamento e tensor de tensões em ponto internos ($\beta = 0,1$).

As componentes u_2 do vetor deslocamento e σ_{12} e σ_{23} do tensor de tensões, que não aparecem nos Gráficos (4.15), são iguais a zero.

O nível de coerência dos resultados obtidos, até então para materiais elásticos, se manteve quando se fez a consideração de materiais viscoelásticos.

Para finalizar a análise dos problemas de semi-espço com um único domínio, vamos ilustrar uma potencialidade das implementações desenvolvidas neste trabalho com um exemplo ilustrativo, sem que haja validação por intermédio de qualquer referência.

O exemplo analisa a propagação de ondas no semi-espço proveniente de uma região sujeita a um carregamento periódico harmônico, de frequência angular $\omega = 1.0$, mas agora com a presença de uma trincheira para se tentar diminuir a amplitude vibratória propagante. A Figura (4.6) mostra a malha utilizada na análise e suas características

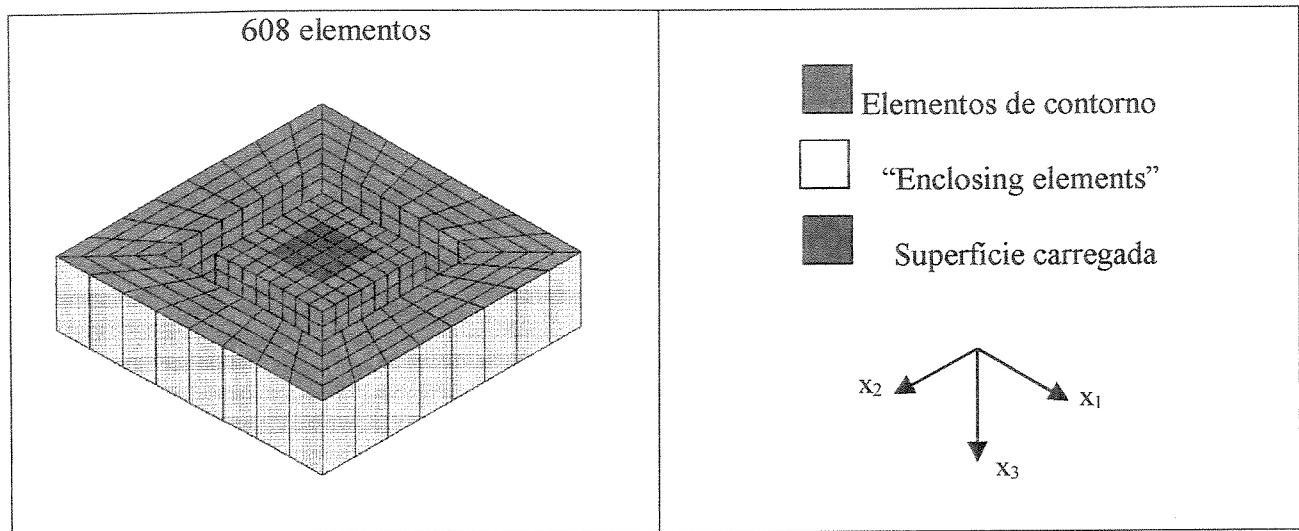
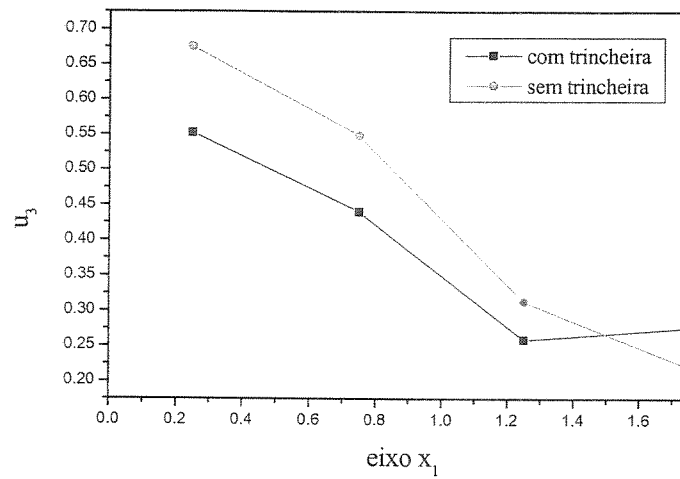


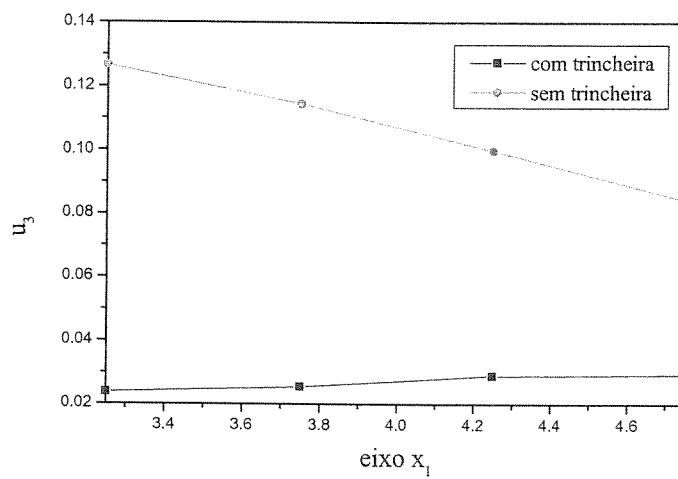
Figura 4.6 – Malha utilizada na discretização do semi-espço com trincheira.

Os Gráficos (4.16) mostram os módulos dos deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 . Estes valores são medidos, a partir da região carregada, antes e depois da trincheira.

Os Gráficos (4.17) mostram os módulos dos deslocamentos u_1 para o mesmo exemplo.

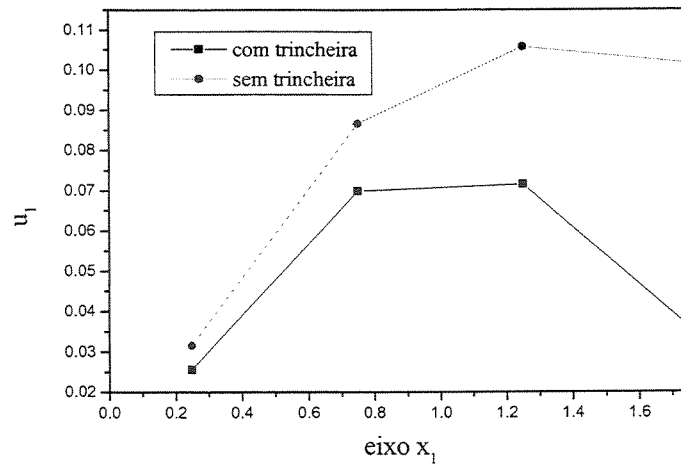


Antes da trincheira

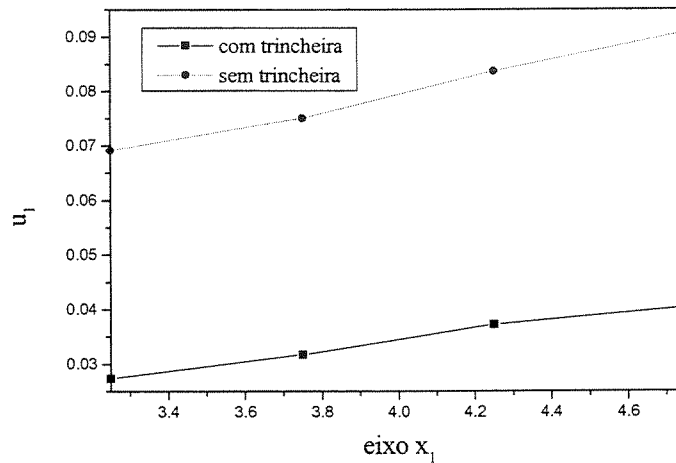


Depois da trincheira

Gráficos 4.16 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaco (com trincheira).



Antes da trincheira



Depois da trincheira

Gráficos 4.17 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço (com trincheira).

Excetuando esta última simulação, com base nos resultados obtidos, daremos continuidade ao trabalho com outros exemplos, partindo do pressuposto de que os problemas de semi-espço, estático e dinâmico implementados neste trabalho estão corretos.

Vamos passar agora à análise dos mesmos itens já estudados neste capítulo, porém dividindo agora os domínios em sub-regiões.

4.5 Exemplo Elastostático com Domínios Limitados – Sub-regiões

O exemplo citado neste item trata de uma barra fixa-livre com área da seção transversal quadrada e constante de lado unitário, sendo que a relação entre o comprimento e o lado da área da seção é 12:1, exatamente como foi feito no item 4.1. Entretanto esta barra agora é dividida em regiões, possibilitando a consideração de múltiplos materiais para o mesmo domínio. Neste exemplo a barra é dividida em duas partes iguais segundo um corte transversal e quatro malhas distintas são analisadas conforme mostra a Figura (4.7).

A extremidade livre da barra é submetida a um carregamento normal de tração uniformemente distribuído $t_1 = \sigma_{11} = 1$. Vamos admitir que as duas sub-regiões são constituídas do mesmo material, o que torna a barra homogênea e com resultado analítico 1D conhecido, dado pela Equação (4.1) já utilizada.

Como foi feito em todos os exemplos anteriores, vamos investigar a convergência do resultado em função da discretização das malhas. Os elementos de contorno utilizados na discretização são constantes e o número de pontos de Gauss utilizado na integração dos núcleos é mantido fixo e igual a oito. Todos os resultados analisados são normalizados em função dos valores analíticos 1D.

As malhas utilizadas são mostradas na Figura (4.7), que traz também o número de elementos contidos em cada uma. Convém salientar que para todas as malhas, tanto a interface como as duas superfícies paralelas a ela, que são as extremidades fixa e livre da barra, possuem 16 elementos (4x4).

A Tabela (4.7) mostra o deslocamento normal médio u_1 na interface ($x_1 = 6,0$) e na superfície livre ($x_1 = 12,0$).

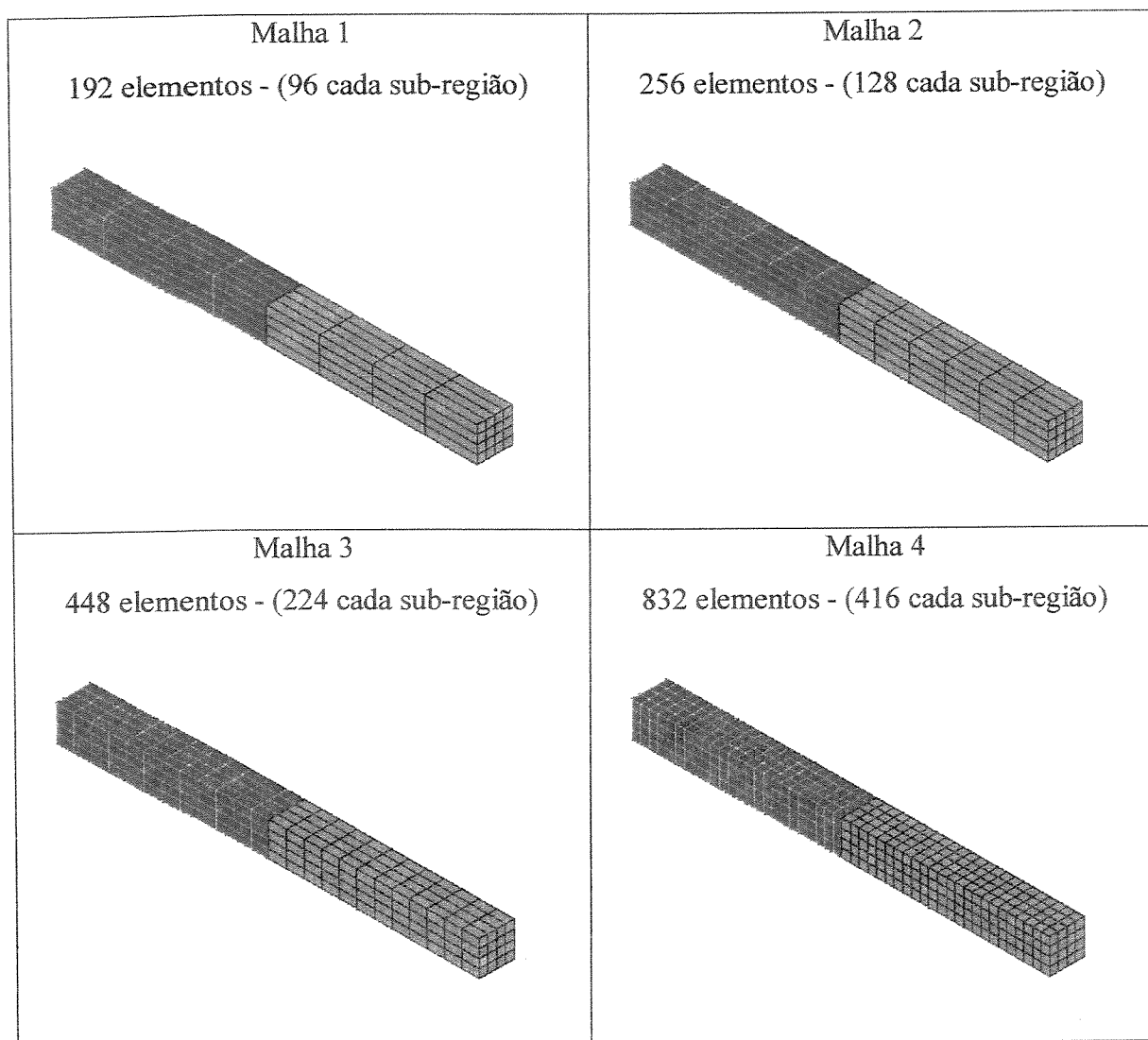


Figura 4.7 – Representação da barra dividida em duas sub-regiões com suas respectivas malhas.

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
$u_1 (x_1 = 6,0)$	1,000	0,799	0,901	0,979	0,999
Erro relativo		20,1 %	9,9 %	2,1 %	0,1 %
$u_1 (x_1 = 12,0)$	1,000	0,802	0,903	0,980	1,001
Erro relativo		19,8 %	9,7 %	2,0 %	0,1 %

Tabela 4.7 - Comparação entre o deslocamento normal médio em duas superfícies de uma barra tratada com duas sub-regiões para diferentes malhas.

A Tabela (4.8) mostra a força de superfície média, que já sabemos ter valor unitário, na interface ($x_1 = 6,0$) e na superfície engastada ($x_1 = 0,0$) .

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
$t_1 (x_1 = 6,0)$	1,000	1,014	1,009	1,001	1,000
Erro relativo		1,4 %	0,9 %	0,1 %	0,0 %
$t_1 (x_1 = 0,0)$	1,000	1,014	1,002	0,993	0,995
Erro relativo		1,4 %	0,2 %	0,7 %	0,5 %

Tabela 4.8 - Comparação entre a força de superfície média em superfícies de uma barra tratada com duas sub-regiões para diferentes malhas.

Finalmente, a Tabela 4.9 traz os deslocamentos e as tensões normais em pontos internos das duas sub-regiões, sendo que na primeira o ponto analisado tem coordenadas (3,0;0,5;0,5) e na segunda (9,0;0,5;0,5).

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
$u_1 (x_1 = 3,0)$	1,000	0,800	0,901	0,977	0,996
Erro relativo		20,0 %	9,9 %	2,3 %	0,4 %
$\sigma_{11} (x_1 = 3,0)$	1,000	0,988	0,905	0,916	0,990
Erro relativo		1,2 %	9,5 %	8,4 %	1,0 %
$u_1 (x_1 = 9,0)$	1,000	0,800	0,902	0,979	1,000
Erro relativo		20,0 %	9,8 %	2,1 %	0,0 %
$\sigma_{11} (x_1 = 9,0)$	1,000	0,991	0,906	0,915	0,989
Erro relativo		0,9 %	9,4 %	8,5 %	1,1 %

Tabela 4.9 - Comparação entre os deslocamentos e tensões normais em pontos internos de uma barra tratada com duas sub-regiões para diferentes malhas.

Outra vez mais, pela análise dos resultados, podemos concluir que o algoritmo e a implementação utilizados para o tratamento de sub-regiões estão corretos, o que nos possibilita prosseguir e aplicá-lo à análise dinâmica estacionária.

4.6 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Limitados – Sub-regiões

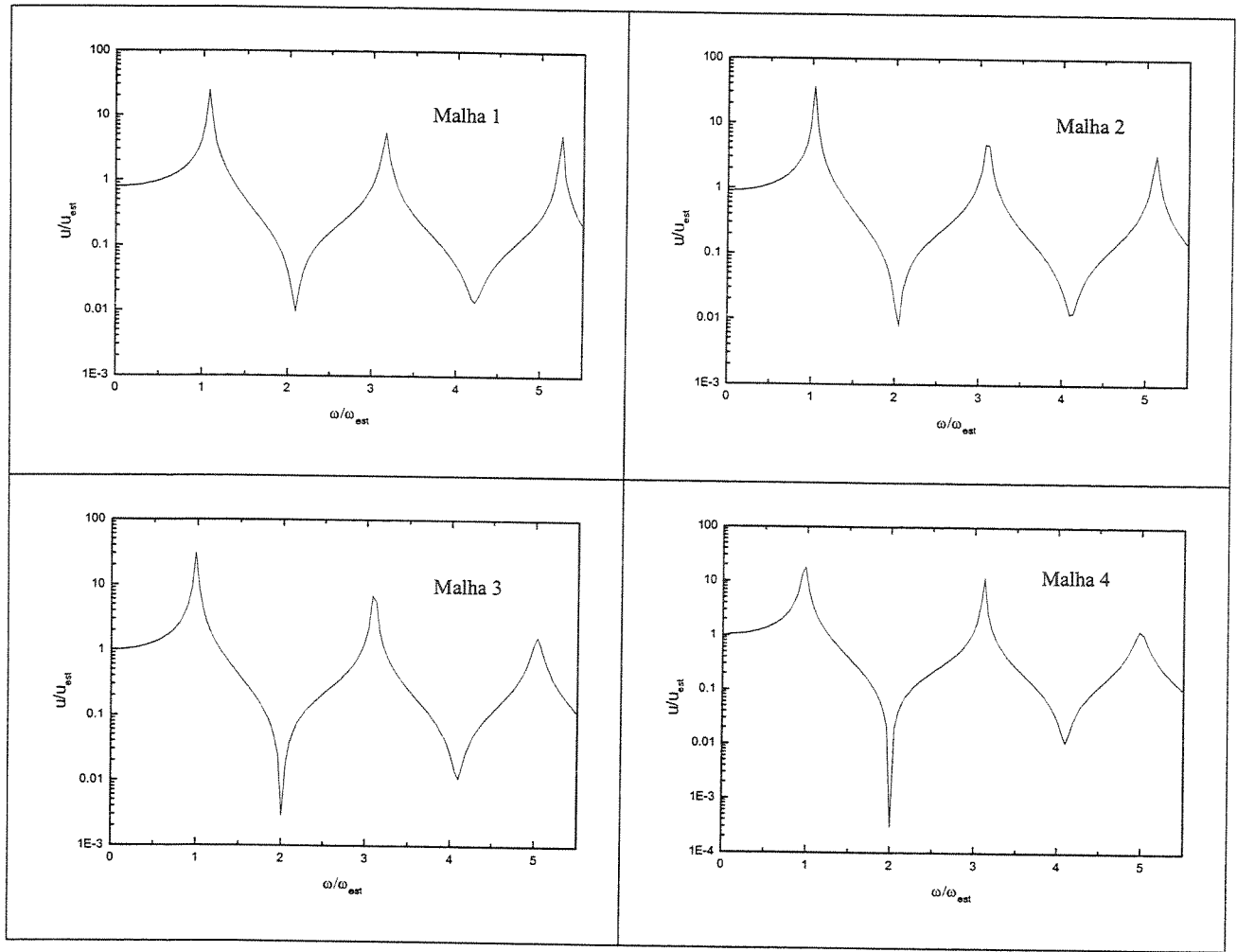
Como última análise de domínios limitados, este exemplo tem as mesmas características daquele citado no item 4.5 diferindo apenas no fato de que o carregamento agora é periódico harmônico. As malhas utilizadas também são as mesmas.

Os resultados obtidos têm como base de comparação o cálculo analítico 1D já existente na literatura e se dará a partir do cálculo das frequências naturais dadas pela Equação 4.2. A análise destas frequências segue exatamente os mesmos passos daquela feita no item 4.2.

Desta forma, vamos construir a FRF da estrutura para as várias malhas apresentadas na Figura (4.7). Os Gráficos (4.18) trazem estas FRF's, enquanto a Tabela (4.10) mostra os valores discretos das três primeira frequências naturais calculadas numericamente.

	Analítico	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
ω_1	1,000	1,069	1,024	0,980	0,980
Erro relativo		6,9 %	2,4 %	2,0 %	2,0 %
ω_2	3,000	3,156	3,067	3,067	3,112
Erro relativo		5,2 %	2,2 %	2,2 %	3,7 %
ω_3	5,000	5,243	5,110	5,021	4,977
Erro relativo		4,86 %	2,2 %	0,4 %	2,3 %

Tabela 4.10 – Comparação entre as frequências naturais numéricas e analíticas para diferentes malhas: duas sub-regiões.



Gráficos 4.18 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento normal u_1 do ponto de coordenadas (12,0; 0,375; 0,375) para diferentes malhas: duas sub-regiões.

Pela análise dos Gráficos (4.18) e da Tabela (4.10), notamos que o aumento da discretização faz diminuir o erro relativo das freqüências naturais, além do fato de que, para um valor de freqüência próximo a zero, o valor do deslocamento se aproxima do valor estático. Com estes resultados, passemos à validação dos exemplos com domínios ilimitados.

4.7 Exemplo Elastostático com Domínios Ilimitados – Sub-regiões

Da mesma forma que foi feito no estudo de domínios ilimitados com uma única região, vamos investigar a convergência do resultado numérico em função das malhas utilizadas para discretização do semi-espço. Estas malhas estão representadas na Figura (4.8) e suas características, expressas na Tabela (4.11).

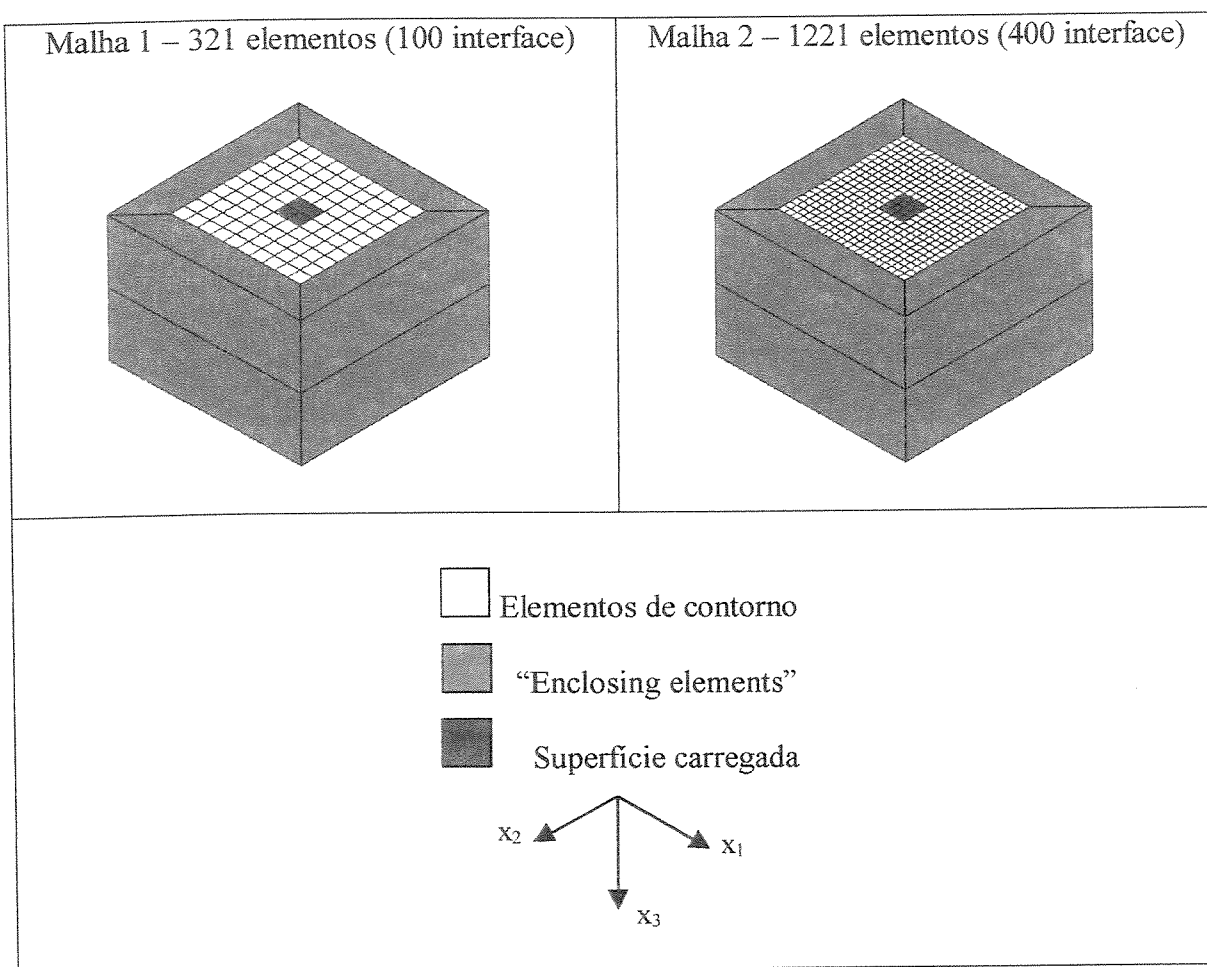


Figura 4.8 – Malhas utilizadas na discretização do semi-espço com duas sub-regiões.

	Malha 1	Malha 2
n° de elementos de contorno	300	1200
n° de “enclosing elements”	21	21
n° total de elementos	321	1221
n° de elementos na interface	100	400
Dimensões	$-5 \leq x_1 \leq +5$ $-5 \leq x_2 \leq +5$ $0 \leq x_3 \leq +10$	$-5 \leq x_1 \leq +5$ $-5 \leq x_2 \leq +5$ $0 \leq x_3 \leq +10$

Tabela 4.11 – Característica das malhas utilizadas na discretização do semi-espço com duas sub-regiões.

O sistema de coordenadas é colocado no centro das malhas de tal forma que elas sempre possuem simetria tanto no eixo x_1 quanto no x_2 . Estas malhas utilizam elementos constantes, possuindo uma superfície carregada cujas dimensões são $2a = 2b$, ver Figura (3.1a), onde $a = b = 1$. Um carregamento unitário é aplicado na forma de força de superfície $t_3 = 1$, e como a área carregada é sempre a mesma, podemos perceber que a malha 1 possui quatro elementos carregados e a malha 2 possui dezesseis. A integração dos núcleos é feita com oito pontos de Gauss.

Vamos admitir também que as duas sub-regiões são constituídas do mesmo material, o que torna o semi-espço homogêneo. Desta forma, os resultados numéricos obtidos são comparados com o mesmo programa computacional implementado através da Função de Green de Semi-Espço 3D dinâmico desenvolvido por Romanini e Mesquita Neto [1999] para uma única região e para um valor de frequência próximo a zero (na verdade é tomado o valor $\omega = 0,01$).

Inicialmente vamos fazer uma comparação entre o programa utilizado no item 4.3 (problema estático com uma sub-região) e este programa, para constatar que a introdução do conceito de sub-estruturação do domínio está correta. Os Gráficos (4.19a) e (4.19b) mostram os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 .

Malha 1 – 100 elementos na interface ($x_2 = 1/2$)

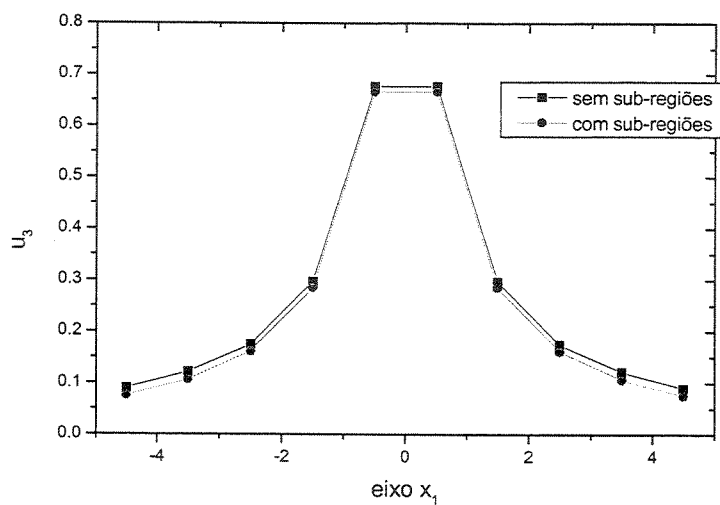


Gráfico 4.19a

Malha 2 – 400 elementos na interface ($x_2 = 1/2$)

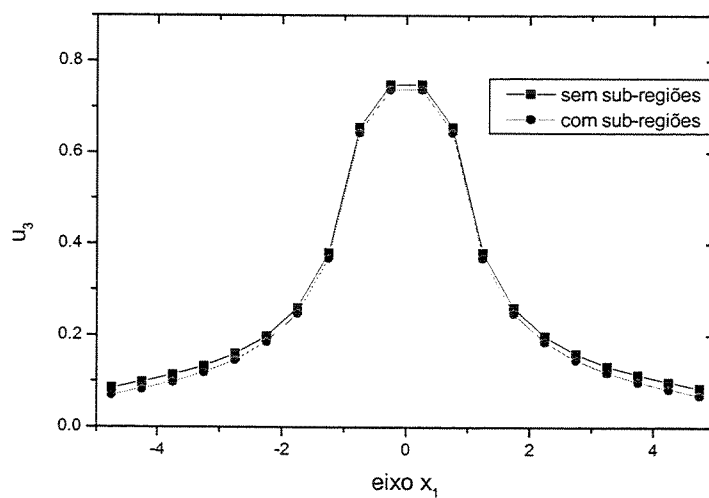
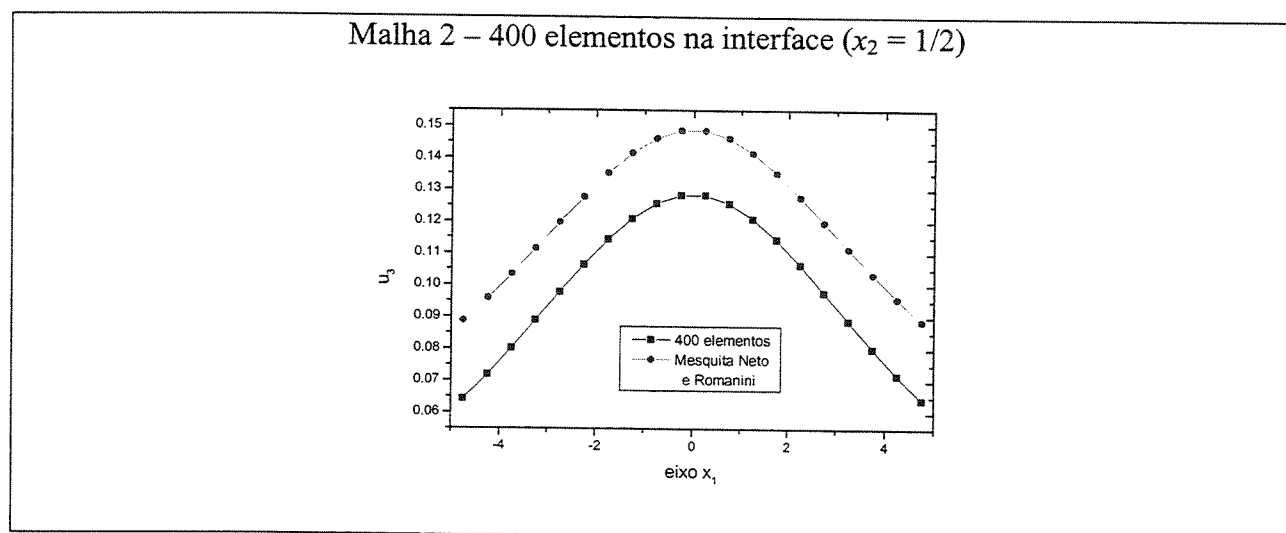
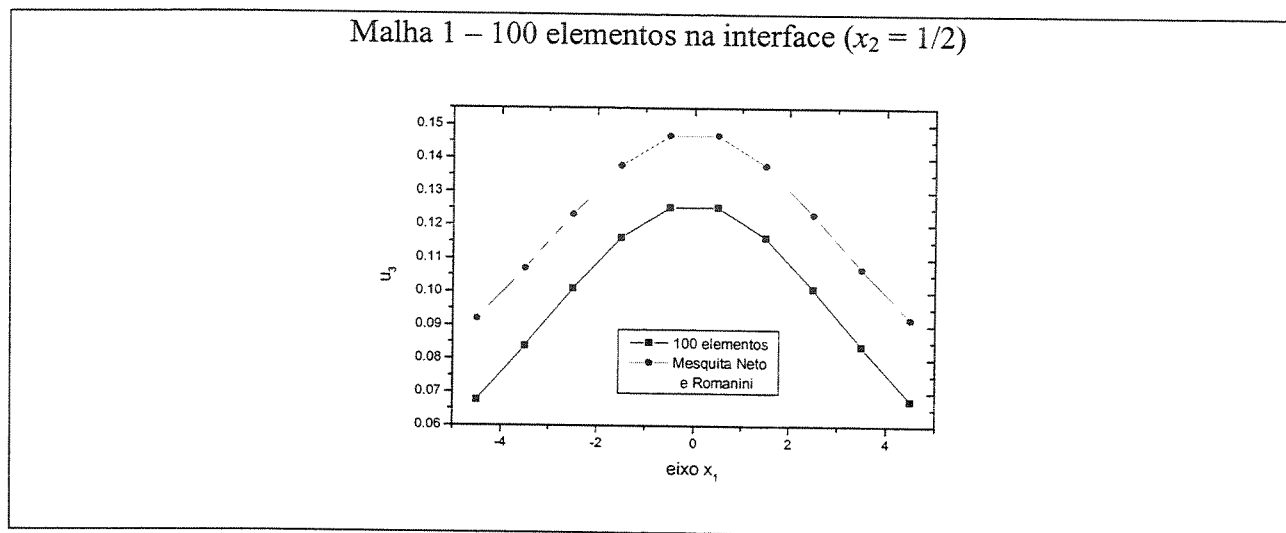


Gráfico 4.19b

Gráficos 4.19 - Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaco. Comparação entre o problema com e sem sub-regiões.

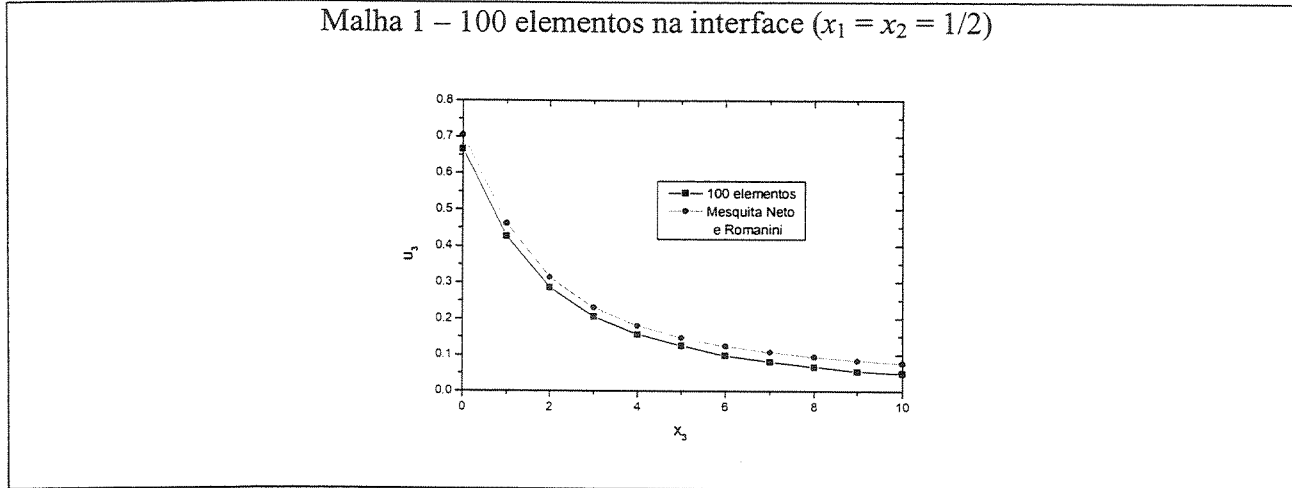
Como o problema estático sem sub-regiões já foi comparado com Mesquita Neto e Romanini [1999] no item 4.3 apresentando bons resultados, a análise dos Gráficos (4.19) dispensa uma comparação dos deslocamentos superficiais normais entre o problema de sub-regiões e Mesquita Neto e Romanini [1999].

Os Gráficos (4.20a) e (4.20b) mostram os deslocamentos normais u_3 na interface das duas sub-regiões ($x_3 = 5.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 .



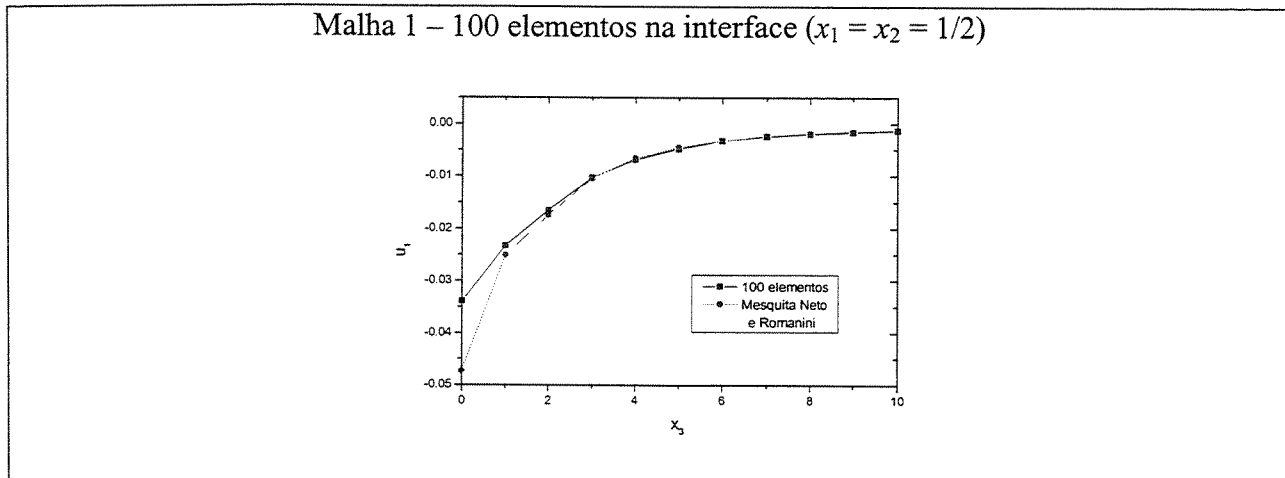
Gráficos 4.20 – Deslocamentos normais u_3 em pontos na interface das sub-regiões.

Os resultados obtidos nos Gráficos (4.20) são explicados pela análise dos deslocamentos normais u_3 medidos ao longo de x_3 com $x_1 = x_2 = 0.5$ como mostra o Gráfico (4.21). A diferença entre os valores se mantêm razoavelmente constante e existe continuidade na componente do deslocamento na direção medida, o que demonstra que o acoplamento entre as duas sub-regiões está sendo feito corretamente.



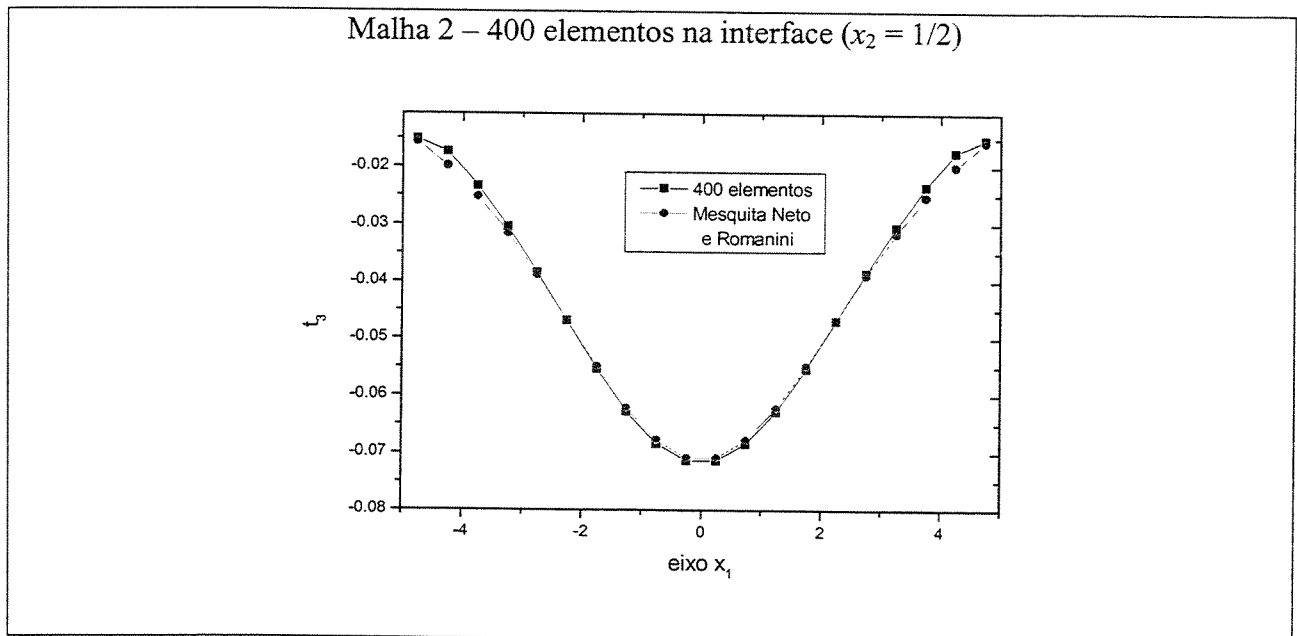
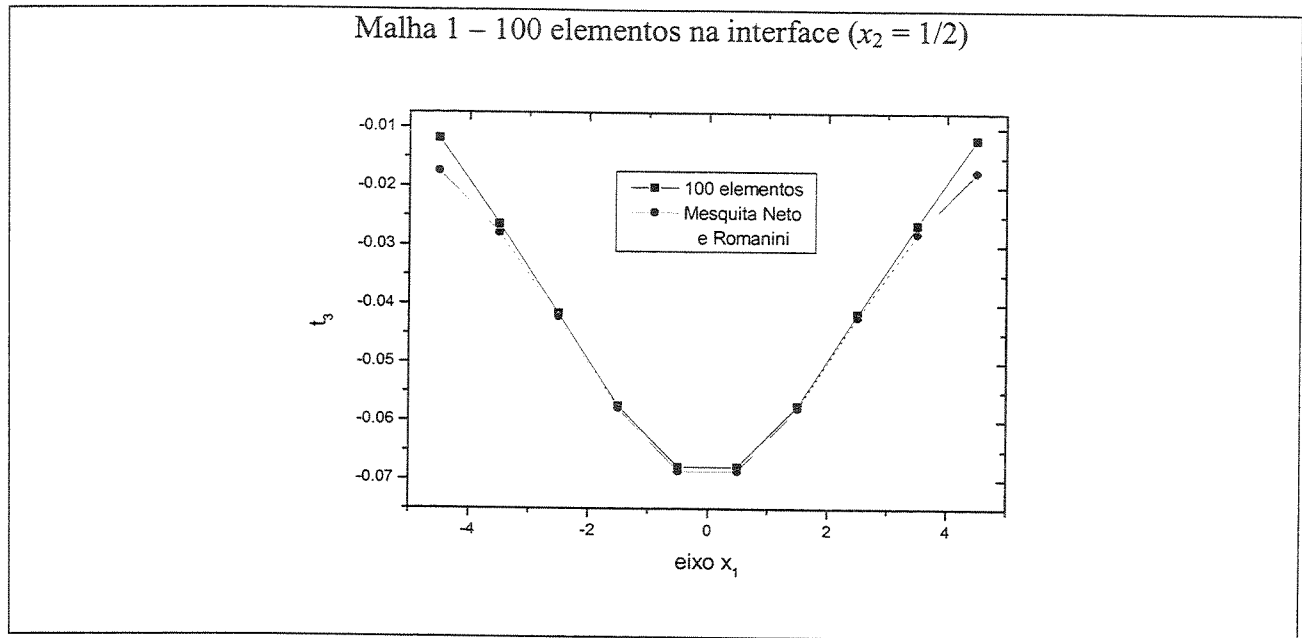
Gráficos 4.21 – Deslocamentos normais u_3 medidos ao longo da profundidade do semi-espaco nas duas sub-regiões.

O Gráfico (4.22) mostra a mesma análise feita no Gráfico (4.21), porém a componente u_1 do deslocamento é verificada. Aqui também ocorre continuidade entre as duas sub-regiões.



Gráficos 4.22 – Deslocamentos u_1 medidos ao longo da profundidade do semi-espaco nas duas sub-regiões.

Os Gráficos (4.23a) e (4.23b) mostram as forças de superfície t_3 , ou tensões normais σ_{33} , na interface das duas sub-regiões ($x_3 = 5.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 .



Gráficos 4.23 – Forças de superfície normais t_3 em pontos na interface das sub-regiões.

Pela análise dos resultados, vamos considerar que a implementação do problema estático ilimitado com sub-regiões se mostrou eficiente.

Como os exemplos estão se tornando mais complexos, talvez uma malha mais discretizada serviria para uma análise mais apurada da convergência dos resultados, porém isto não foi conseguido com a plataforma de programação utilizada neste trabalho.

Outra sugestão que cabe para tentar melhorar os resultados, seria utilizar elementos lineares ou quadráticos

Utilizando o conceito de sub-regiões, vamos tentar simular a interação entre o solo e a fundação, tratando cada uma das partes como sub-domínio de um mesmo problema. A fundação é tratada como um domínio limitado, ao passo que o solo, como ilimitado.

A malha utilizada para simular este exemplo é mostrada na Figura (4.9). Um carregamento unitário $t_3 = 1$, uniformemente distribuído, é aplicado em toda a superfície superior da fundação para a análise de um problema estático cujo resultado é conhecido.

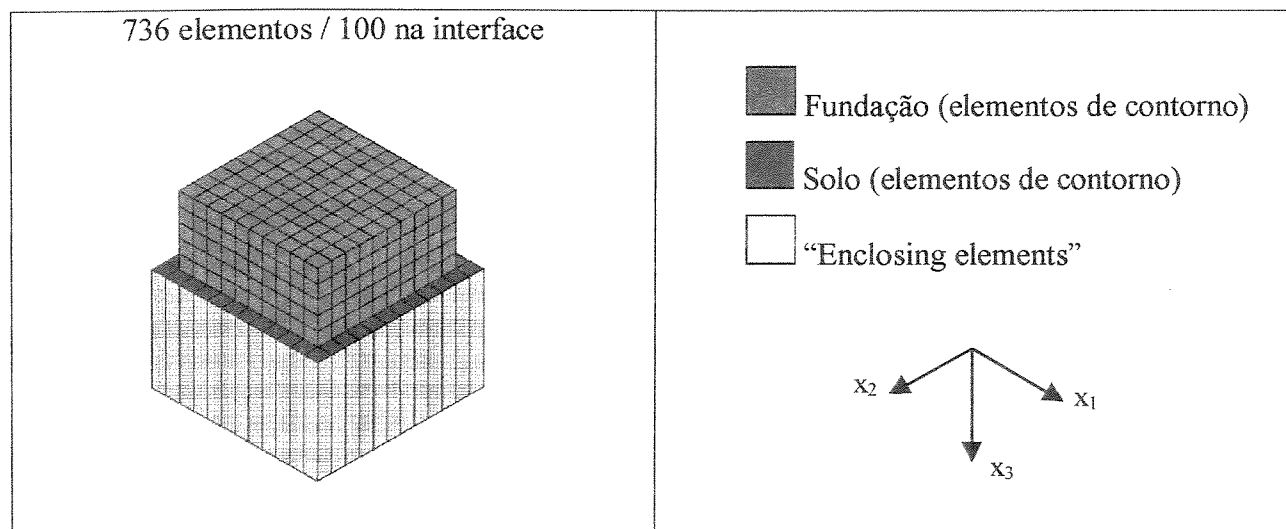
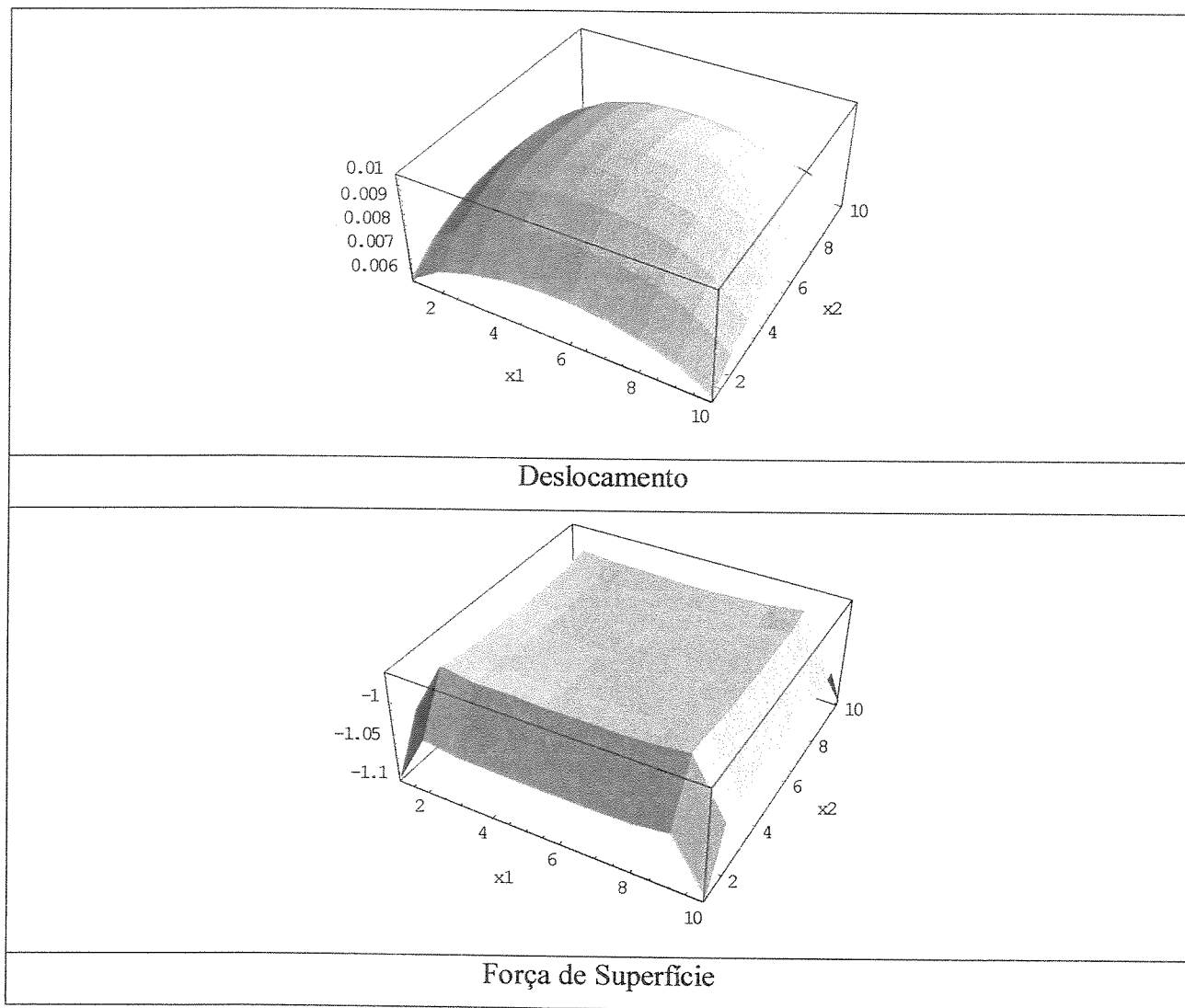


Figura 4.9 – Malha utilizada na discretização solo-estrutura.

O Gráfico (4.24) mostra os perfis de deslocamento normal u_3 e força de superfície t_3 na interface da fundação, considerando-a flexível e apoiada sem escorregamento sobre o solo. Para isto adotou-se o Módulo de Elasticidade Transversal da fundação 100 vezes menor que o do solo

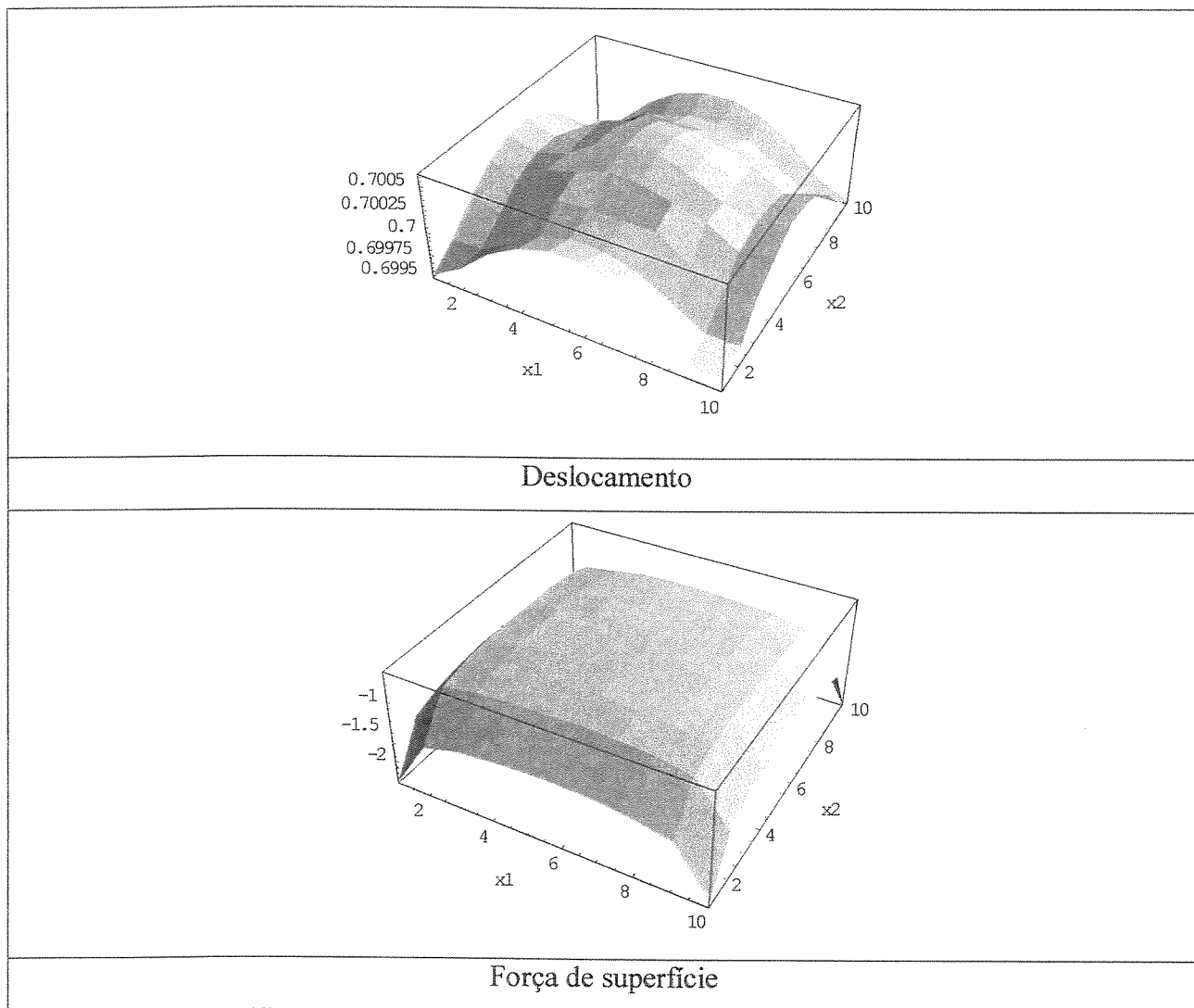
($G_{solo} = 100 G_{fundação}$). As orientações x_1 e x_2 representam os números de elementos utilizados por direção.



Gráficos 4.24 – Perfis de deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – fundação flexível.

Devido à relação entre os G 's, este modelo pode ser comparado a em carregamento aplicado “diretamente” no solo, ou seja, na interface o deslocamento normal deve ir aumentando das bordas para o centro e a força de superfície deve ser constante de valor unitário.

O Gráfico (4.25) mostra os perfis de deslocamento normal u_3 e força de superfície t_3 na interface da fundação, considerando-a rígida e apoiada sem escorregamento sobre o solo. Para isto adotou-se o Módulo de Elasticidade Transversal da fundação 100 vezes maior que o do solo ($G_{fundação} = 100 G_{solo}$).



Gráficos 4.25 - Perfil do deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – fundação rígida.

Devido à relação entre os G 's neste modelo, a fundação pode ser comparada a um corpo rígido, ou seja, na interface o deslocamento normal ter valor constante e a força de superfície

deve ir diminuindo das bordas para o centro, o solo sempre sob compressão, com uma variação grande perto destas bordas.

Em vista destes resultados e considerando-os bastante razoáveis, passemos para a análise do problema dinâmico estacionário ilimitado também com divisão do domínio em sub-regiões.

4.8 Exemplo Elastodinâmico Estacionário com Domínios Ilimitados – Sub-regiões

Este exemplo tem as mesmas características daquele citado no item 4.7, diferindo apenas no fato de que o carregamento agora é periódico harmônico. A análise é feita apenas para a malha 1 do exemplo anterior que possui 321 elementos, já que não foi possível executar o programa com a malha 2, na plataforma utilizada para o trabalho.

Os resultados obtidos são comparados com o mesmo programa computacional implementado através da Função de Green de Semi-Espaço 3D dinâmico, desenvolvido por Romanini e Mesquita Neto [1999], já utilizado na análise estática.

Inicialmente vamos fazer uma comparação entre o programa utilizado no item 4.7 (problema estático com sub-regiões) e este programa, com uma frequência próxima de zero ($\omega = 0.01$). O Gráfico (4.26) mostra os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 .

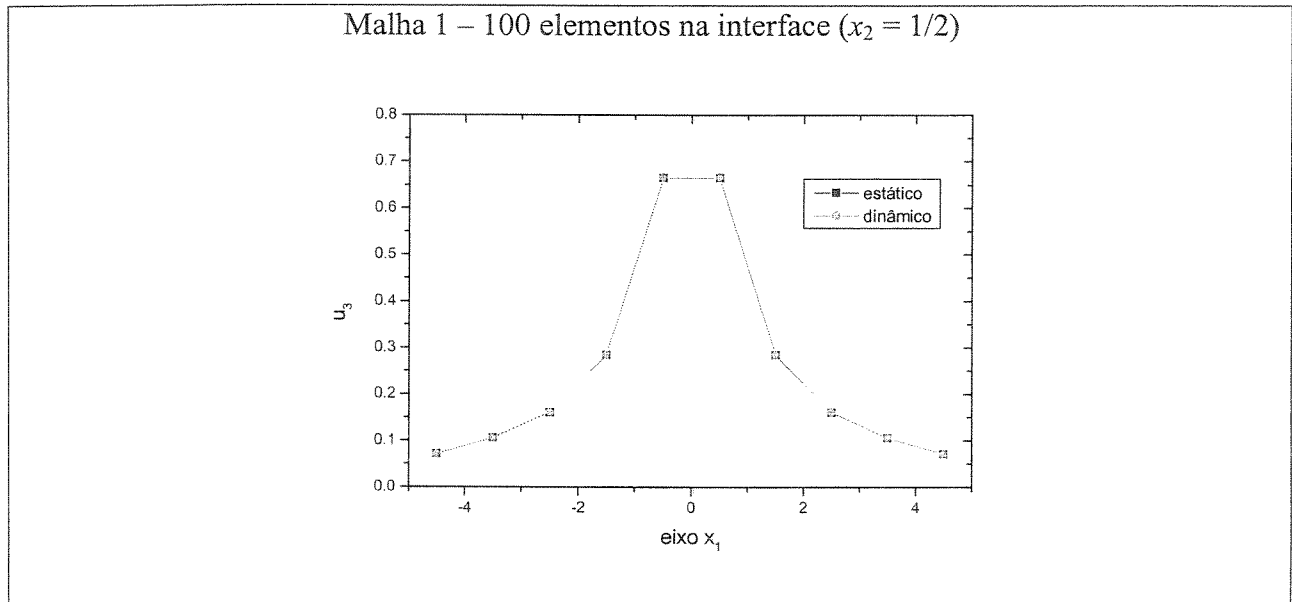
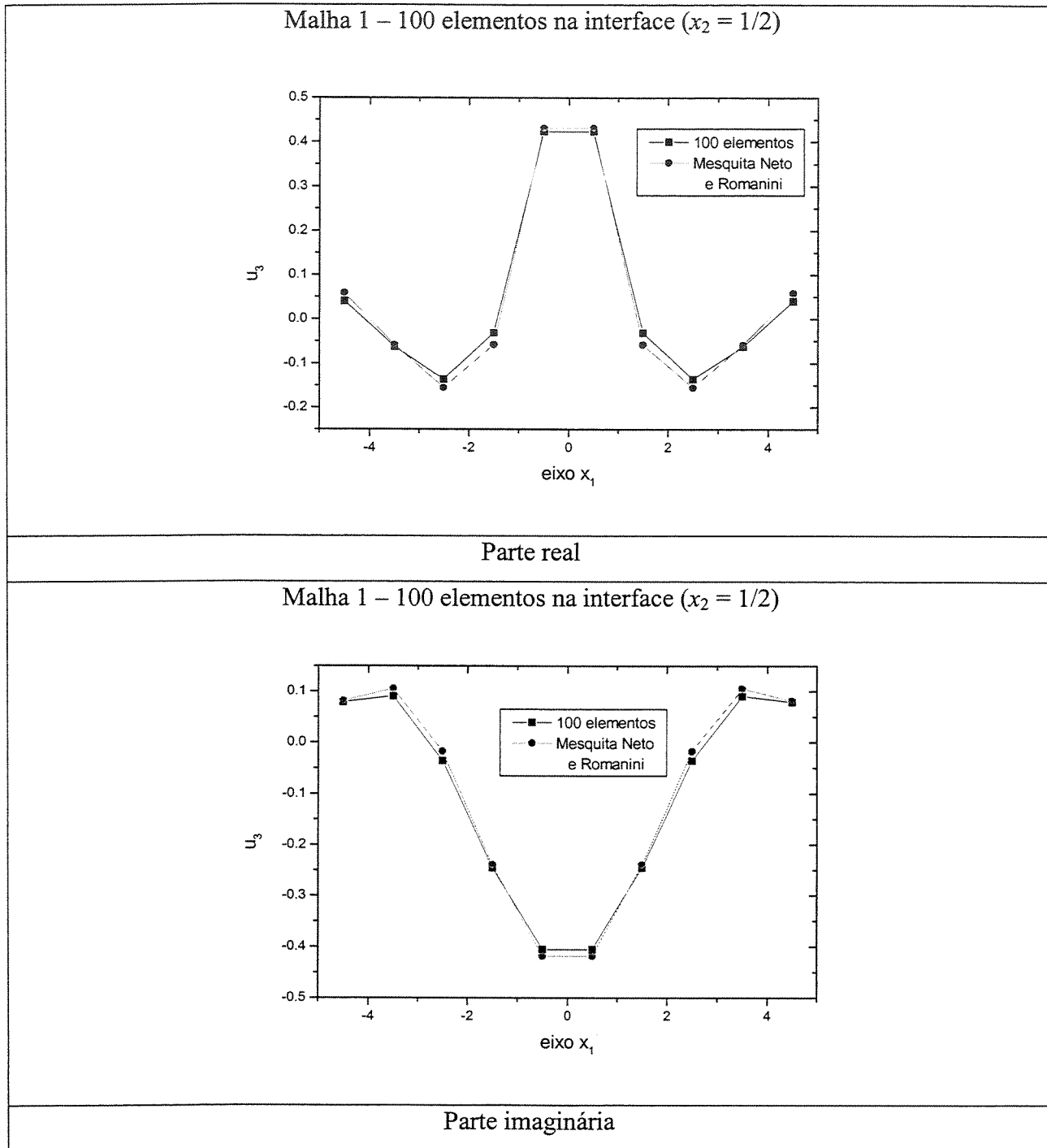


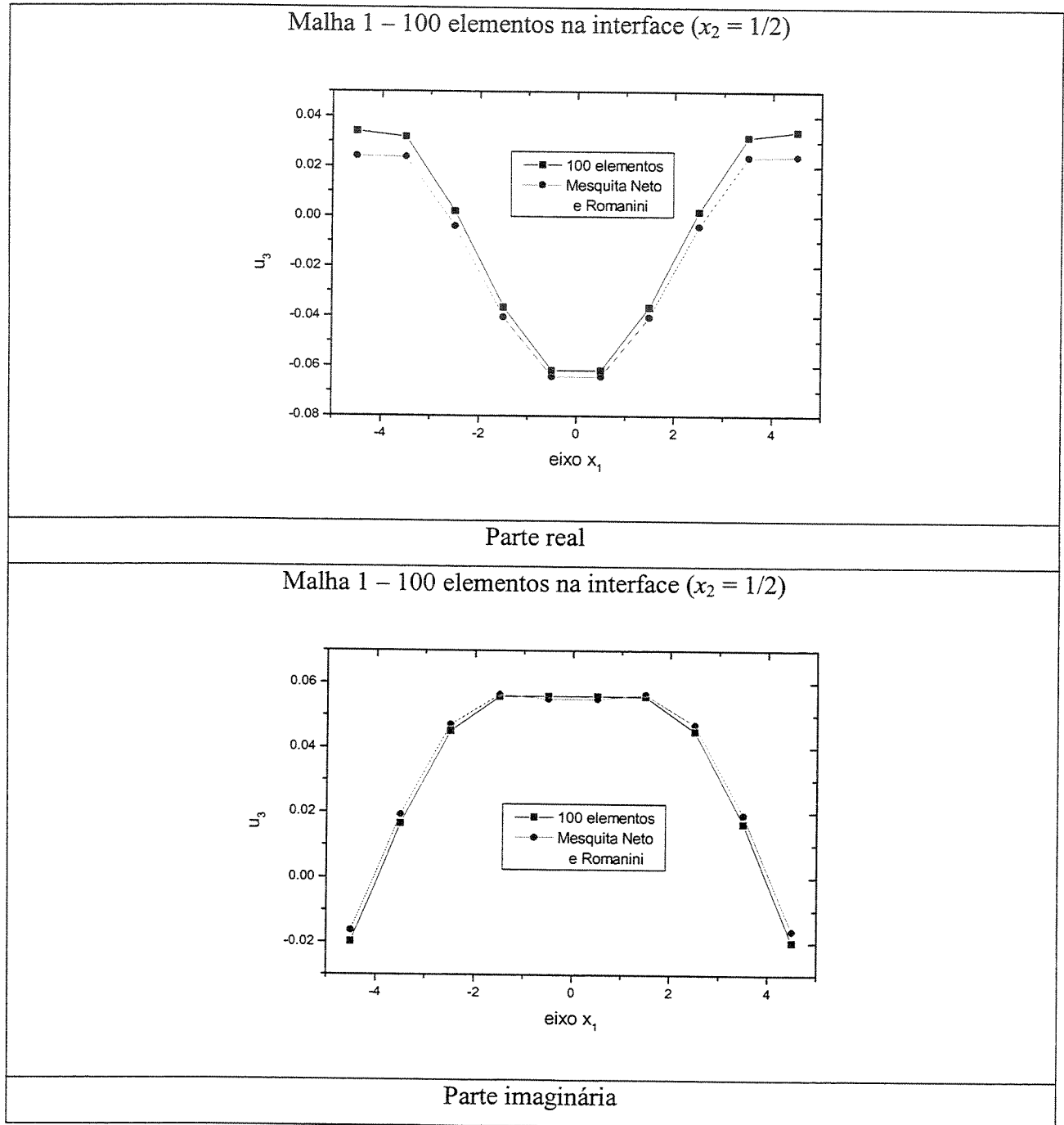
Gráfico 4.26 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espaco. Comparação entre o problema estático e quase-estático.

Em seguida, passemos à análise efetiva do problema dinâmico com os Gráficos (4.27) que mostram os deslocamentos normais u_3 na superfície ($x_3 = 0.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$.



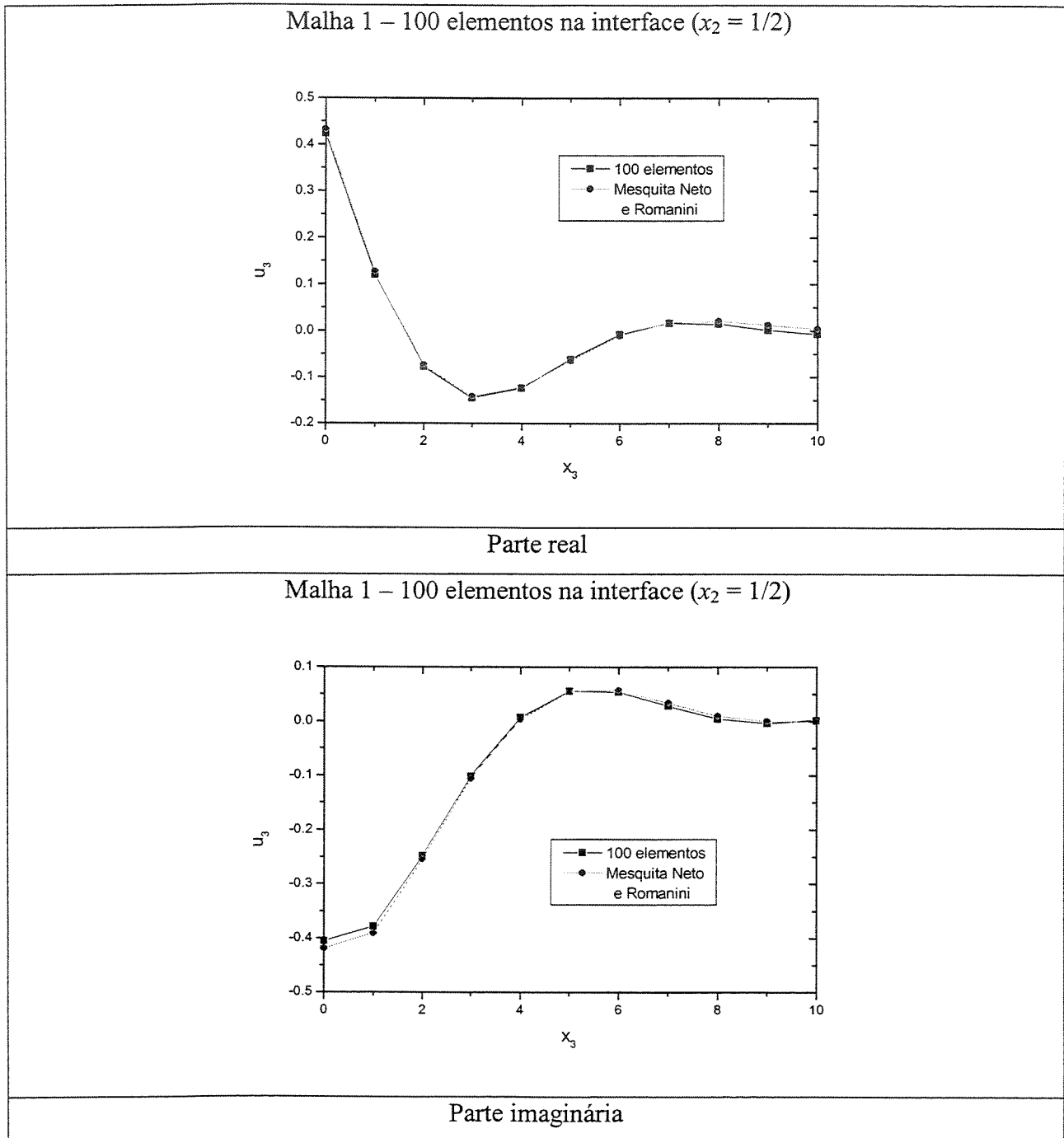
Gráficos 4.27 – Deslocamentos normais u_3 na superfície do semi-espço.

Os Gráficos (4.28) mostram os deslocamentos normais u_3 na interface das duas sub-regiões ($x_3 = 5.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$.

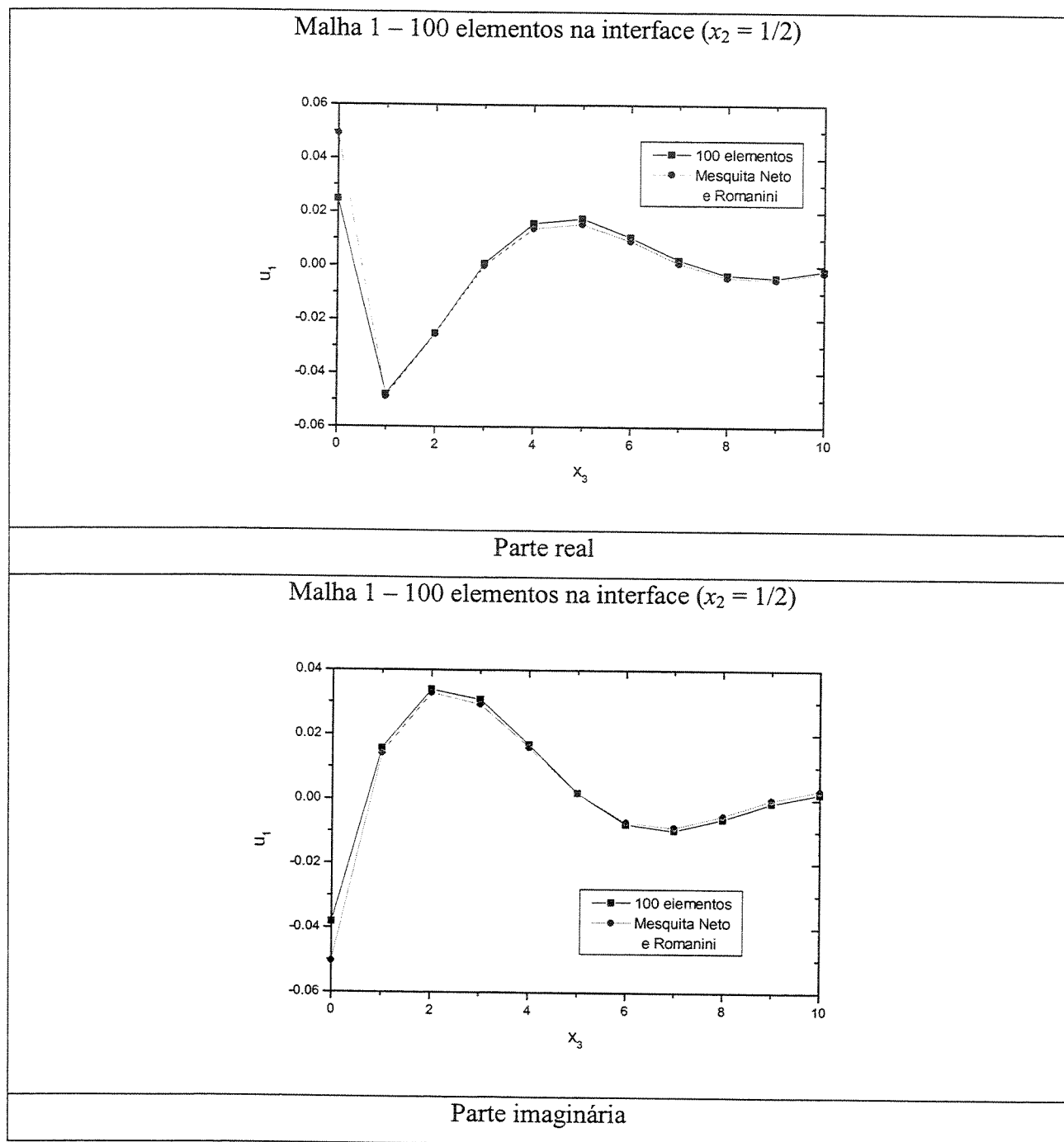


Gráficos 4.28 – Deslocamentos normais u_3 em pontos na interface das sub-regiões.

Para verificar a continuidade nos deslocamentos ao longo das duas sub-regiões, os Gráficos (4.29) e (4.30) são mostrados em seguida.

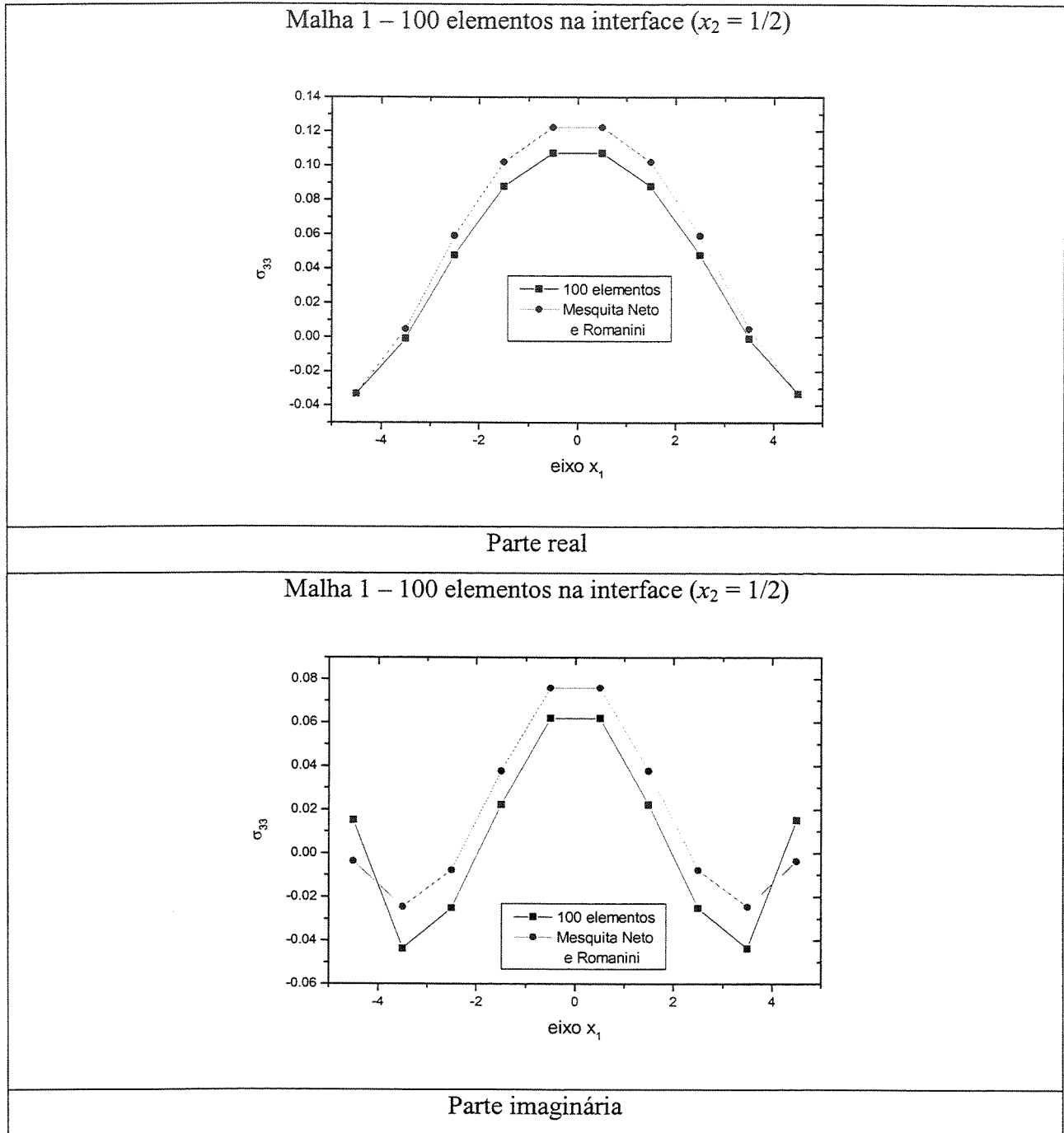


Gráficos 4.29 – Deslocamentos normais u_3 medidos ao longo da profundidade do semi-espaco nas duas sub-regiões.



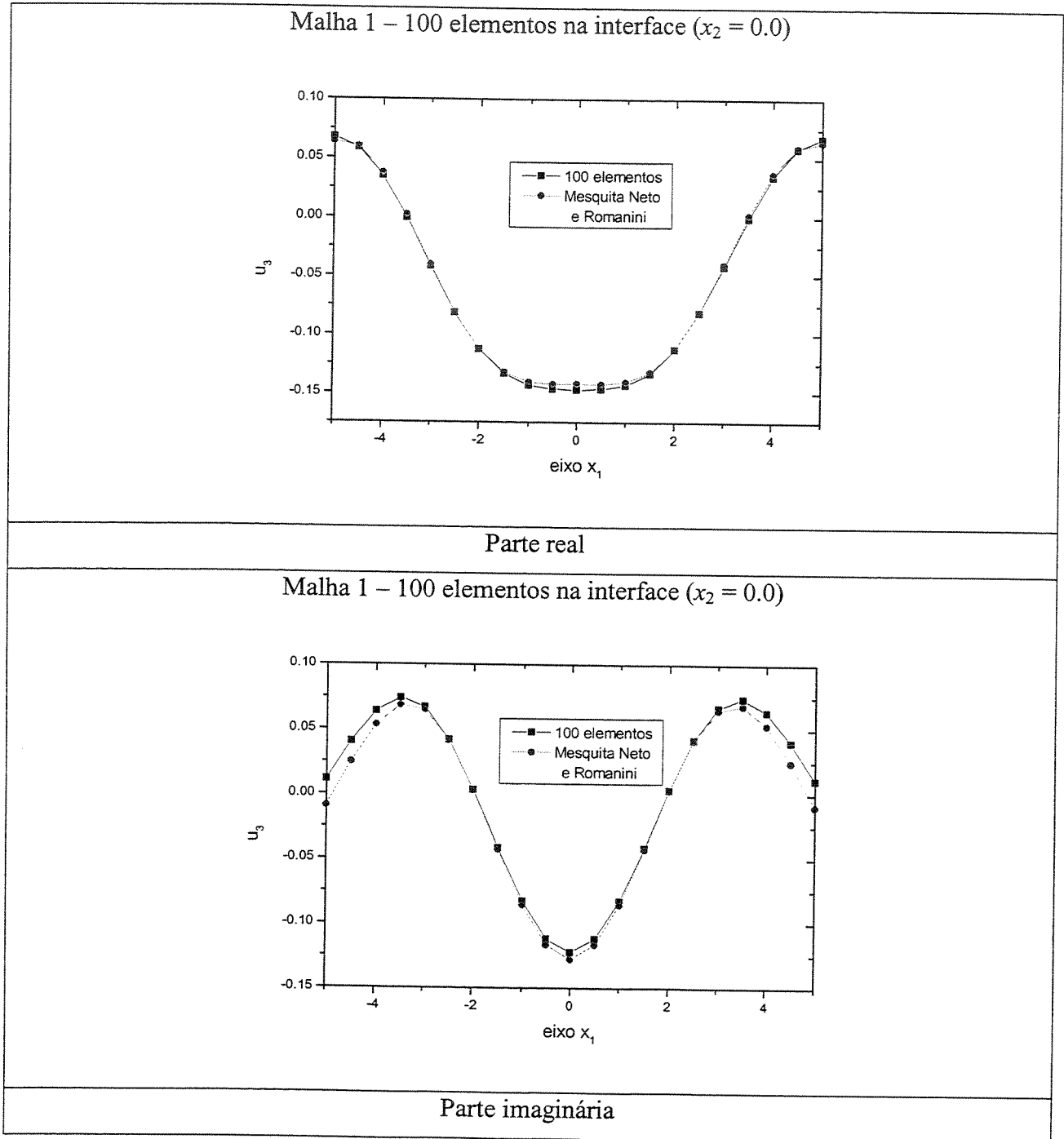
Gráficos 4.30 – Deslocamentos normais u_1 medidos ao longo da profundidade do semi-espço nas duas sub-regiões.

Os Gráficos (4.31) mostram as tensões normais σ_{33} na interface das duas sub-regiões ($x_3 = 5.0$) para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$.



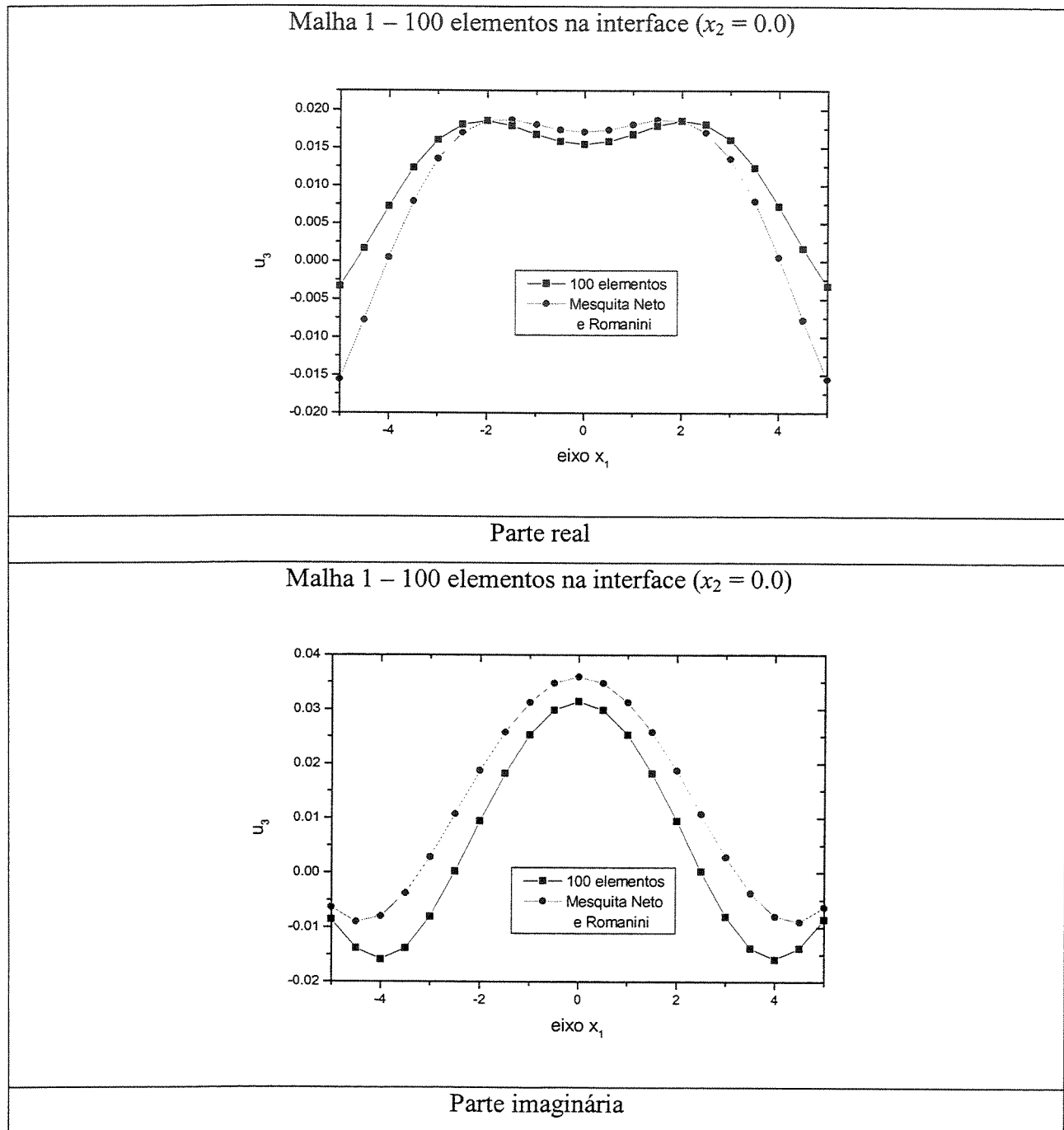
Gráficos 4.31 – Tensões normais σ_{33} em pontos na interface das sub-regiões.

Os Gráficos (4.32) mostram os deslocamentos normais u_3 em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 3.0 \rightarrow 1^{\text{a}}$ sub-região) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$.



Gráficos 4.32 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos da 1ª sub-região.

Os Gráficos (4.33) mostram os deslocamentos normais u_3 em pontos internos para uma profundidade fixa ($x_3 = 7.0 \rightarrow 2^{\text{a}}$ sub-região) e para um valor de x_2 constante, tomados ao longo do eixo x_1 para uma frequência $\omega = 1.0$.

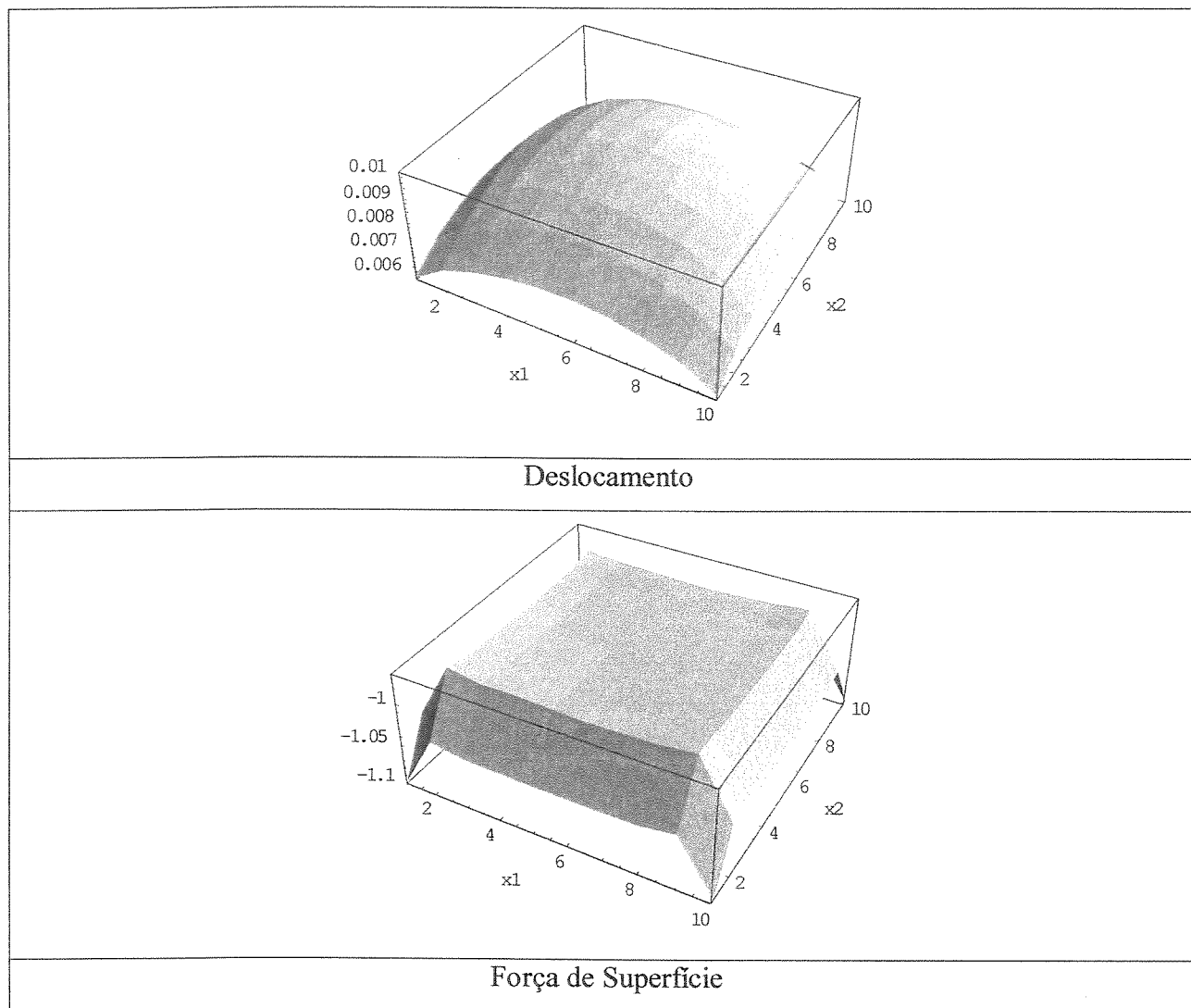


Gráficos 4.33 – Deslocamentos normais u_3 em pontos internos da 2^a sub-região.

Os resultados obtidos se mostraram bastante satisfatórios com alguns desvios (tensões normais na interface e deslocamentos normais em pontos internos na 2ª sub-região por exemplo). Como sugerido no item 4.7 para tentar melhorar estes resultados discrepantes, uma melhor discretização na malha ou a utilização de elementos lineares ou quadráticos seria um investimento necessário.

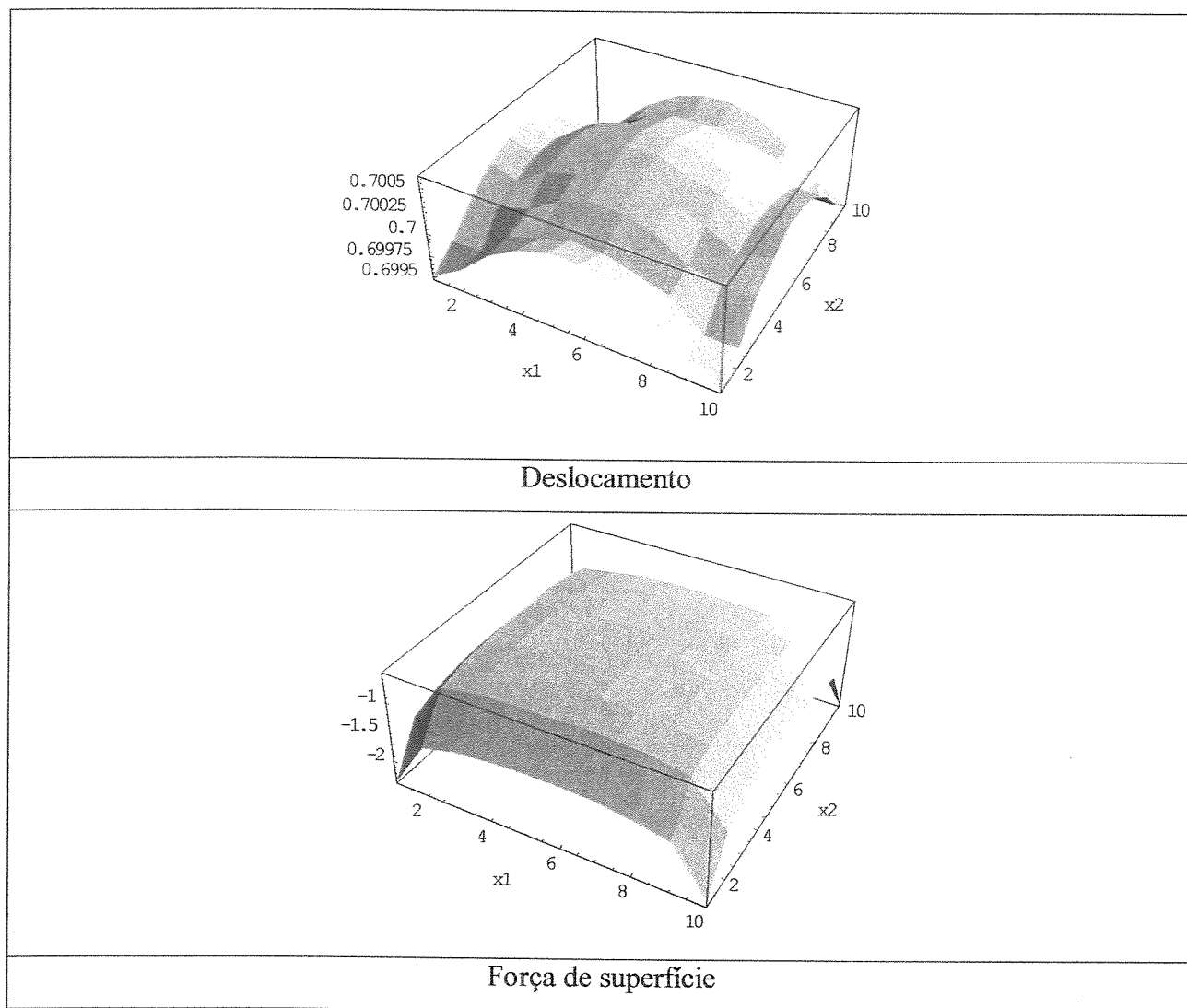
Vamos simular agora a interação dinâmica entre o solo e a fundação. A malha utilizada para simular este exemplo é a mesma mostrada na Figura (4.9). Um carregamento unitário $t_3 = 1$ periódico harmônico, uniformemente distribuído, é aplicado em toda a superfície superior da fundação sob uma frequência de excitação $\omega = 0.01$, tornando o problema quase-estático. Os resultados aqui obtidos devem ser semelhantes àqueles obtidos na simulação do problema estático, fato que pode ser comprovado pela análise dos Gráficos (4.34) e (4.35).

O Gráfico (4.34) mostra os perfis de deslocamento normal u_3 e força de superfície t_3 na interface da fundação, considerando-a flexível e apoiada sem escorregamento sobre o solo. Para isto adotou-se o Módulo de Elasticidade Transversal da fundação 100 vezes menor que o do solo ($G_{solo} = 100 G_{fundação}$).



Gráficos 4.34 – Perfis de deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – fundação flexível.

O Gráfico (4.35) mostra os perfis de deslocamento normal u_3 e força de superfície t_3 na interface da fundação, considerando-a rígida e apoiada sem escorregamento sobre o solo. Para isto adotou-se o Módulo de Elasticidade Transversal da fundação 100 vezes maior que o do solo ($G_{fundação} = 100 G_{solo}$).

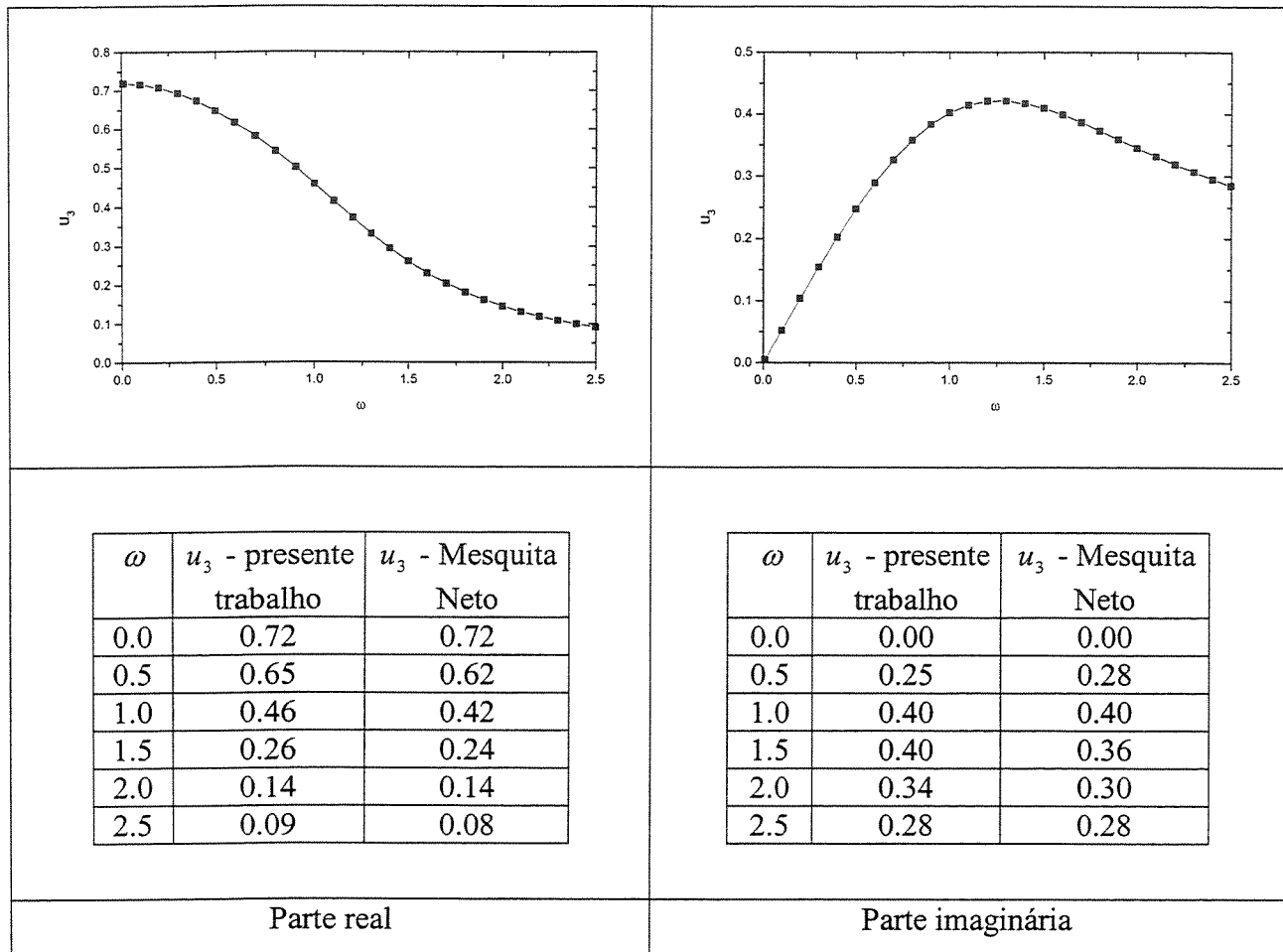


Gráficos 4.35 - Perfil do deslocamento u_3 e força de superfície t_3 na interface – fundação rígida.

Para finalizar este item, é apresentado um estudo dos deslocamentos lineares da fundação em função da frequência de excitação, para alguns carregamentos particulares. A malha utilizada é a mesma da Figura (4.9) e os resultados aqui obtidos são comparados com aqueles mostrados por Mesquita Neto em 1989 na sua tese de doutorado.

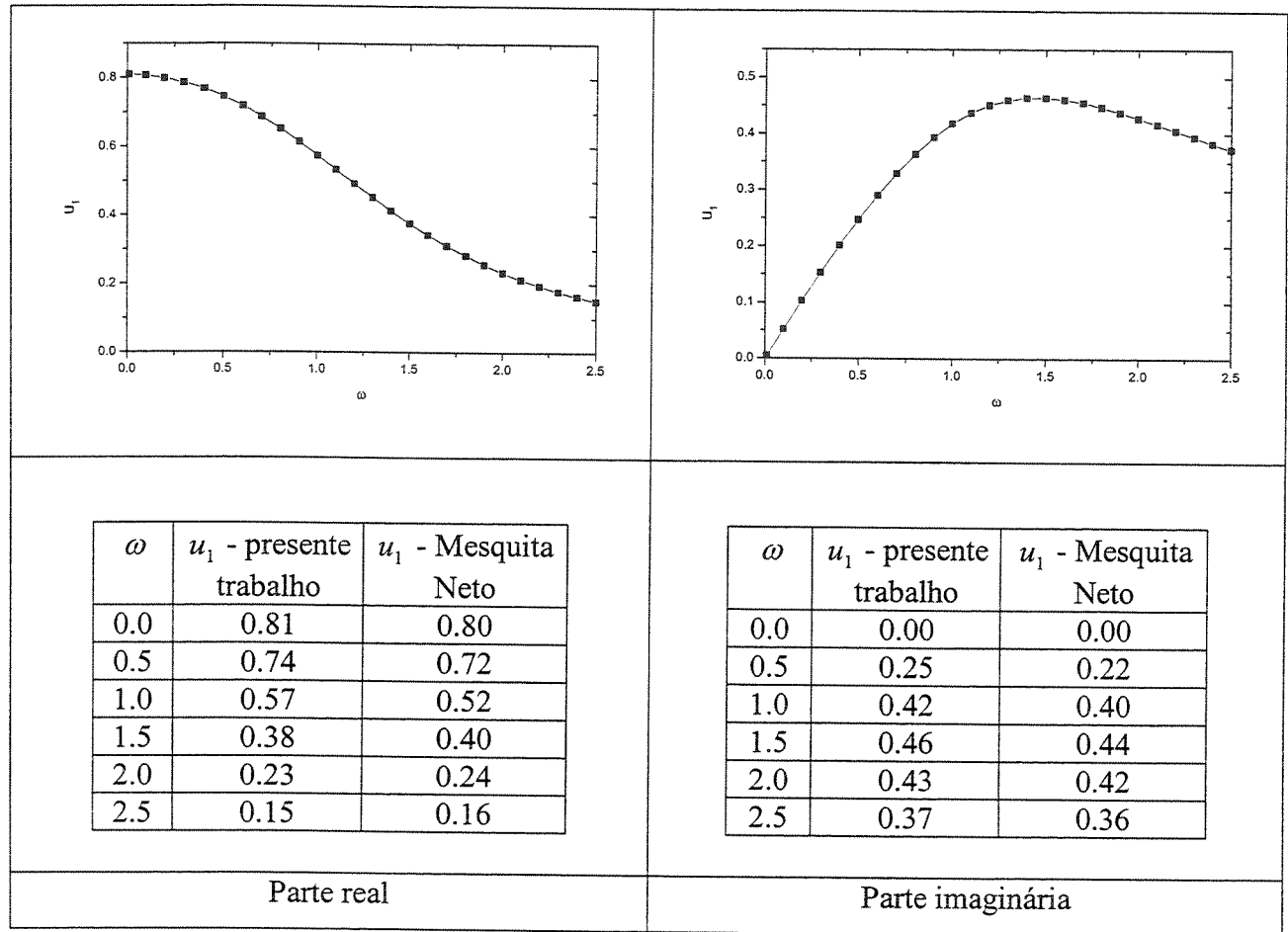
Vamos considerar uma força harmônica e unitária F_3 aplicada na superfície da fundação rígida e verificar o deslocamento normal u_3 num ponto qualquer da estrutura. Vale lembrar que devido ao fato da fundação ser rígida, o deslocamento é constante em qualquer ponto da estrutura.

Os Gráfico 4.36 traz estes resultados e uma tabela anexa com alguns resultados obtidos por Mesquita Neto [1989].



Gráficos 4.36 – Deslocamento u_3 em função da frequência de excitação para uma força F_3 harmônica e unitária.

Em seguida vamos analisar o deslocamento u_1 quando uma força harmônica e unitária F_1 é aplicada à estrutura. É útil frisar que um resultado simétrico, como era esperado, foi obtido quanto ao deslocamento u_2 medido a partir da aplicação de uma força F_2 .



Gráficos 4.37 – Deslocamento u_1 em função da frequência de excitação para uma força F_1 harmônica e unitária.

Em vista de todos os resultados obtidos neste capítulo, vamos admitir que uma ferramenta computacional que pudesse representar um modelo para análise numérica de interação dinâmica solo-estrutura foi desenvolvida com resultados bastante razoáveis, finalizando assim este capítulo.

CAPÍTULO 5

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO **APLICADO A DOMÍNIOS ILIMITADOS AXI-SIMÉTRICOS**

Geometrias axi-simétricas, ou corpos de revolução, são formados pela rotação de 360° de um plano sobre um eixo dado, chamado eixo de simetria rotacional. Em coordenadas cilíndricas, o eixo z é o eixo de simetria, enquanto r e θ são as direções radial e angular respectivamente (ver Figura 5.1).

Há vários problemas em mecânica dos sólidos que apresentam este tipo de geometria e muito freqüentemente esta mesma particularidade também ocorre nas condições de carregamento. Este é o caso considerado neste trabalho, ou seja, a existência da simetria axial tanto na geometria quanto no carregamento.

Tais problemas podem ser completamente representados analisando-se qualquer plano que passa pelo eixo de simetria rotacional, isto é, o plano rz . Desta maneira, as dimensões do problema são reduzidas de três para duas: radial e axial. Os valores das grandezas ao longo de θ são constantes. O desenvolvimento do MEC axi-simétrico é feito a partir da solução fundamental tridimensional e posterior integração sobre θ como mostra Becker [1992].

5.1 Formulação Elastostática Axi-simétrica

Inicialmente vamos definir o sistema de coordenadas axi-simétricas. Há três direções (chamadas cilíndricas): radial (r), axial (z) e angular (θ). Para que possamos diminuir uma

dimensão, a solução fundamental tridimensional é transformada de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) para cilíndricas (r, θ, z) e então integrada analiticamente em relação a θ , para que tenhamos núcleos e funções com componentes apenas radial e axial.

A Figura (5.1) representa um problema com um domínio axi-simétrico arbitrário, sendo o ponto fonte ξ de coordenadas $(R(\xi), \theta(\xi), Z(\xi))$ e o ponto de campo x de coordenadas $(r(x), \theta(x), z(x))$. As letras maiúsculas indicam as coordenadas relativas ao ponto fonte, enquanto as minúsculas, relativas ao ponto campo.

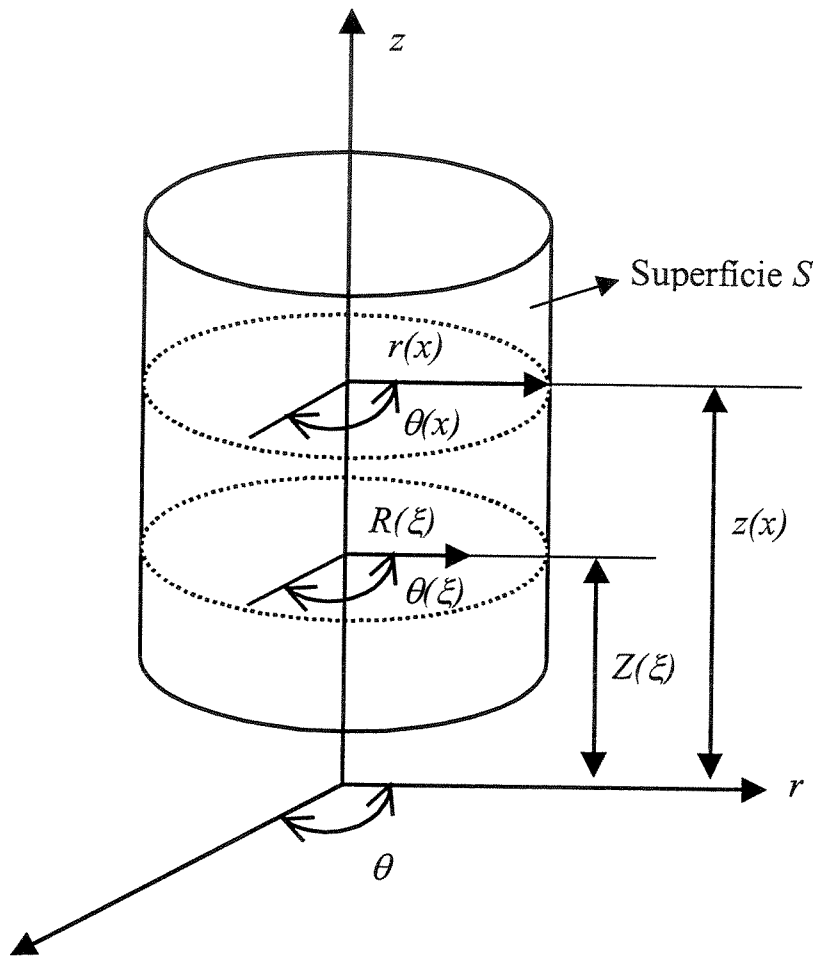


Figura 5.1 - Representação de um domínio axi-simétrico.

A Equação Integral de Contorno tridimensional para problemas elastostáticos (1.26) pode ser transformada em uma Equação Integral de Contorno axi-simétrica através da transformação

de coordenadas já mencionada (ver Figura 5.2), acarretando uma mudança na integral de superfície dS para uma integral de linha $d\Gamma$ usando a seguinte relação:

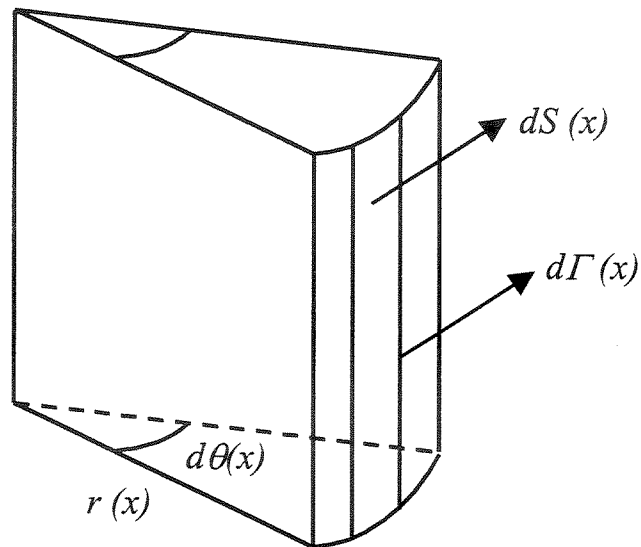


Figura 5.2 – Transformação de coordenadas cartesianas em cilíndricas para representação de uma superfície.

$$dS(x) = r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) \quad (5.1)$$

Os vetores de deslocamento e força de superfície em ξ e x podem ser calculados nas direções radial e axial como segue:

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= u_r(\xi) \cos \theta(\xi); & u_2(\xi) &= u_r(\xi) \sin \theta(\xi); & u_3(\xi) &= u_z(\xi) \\ t_1(\xi) &= t_r(\xi) \cos \theta(\xi); & t_2(\xi) &= t_r(\xi) \sin \theta(\xi); & t_3(\xi) &= t_z(\xi) \\ u_1(x) &= u_r(x) \cos \theta(x); & u_2(x) &= u_r(x) \sin \theta(x); & u_3(x) &= u_z(x) \\ t_1(x) &= t_r(x) \cos \theta(x); & t_2(x) &= t_r(x) \sin \theta(x); & t_3(x) &= t_z(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Admitindo $\theta(\xi) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 u_1(\xi) &= u_r(\xi); & u_2(\xi) &= 0; & u_3(\xi) &= u_z(\xi) \\
 t_1(\xi) &= t_r(\xi); & t_2(\xi) &= 0; & t_3(\xi) &= t_z(\xi) \\
 u_1(x) &= u_r(x) \cos \theta(x); & u_2(x) &= u_r(x) \sin \theta(x); & u_3(x) &= u_z(x) \\
 t_1(x) &= t_r(x) \cos \theta(x); & t_2(x) &= t_r(x) \sin \theta(x); & t_3(x) &= t_z(x)
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

A Equação Integral de Contorno tridimensional (1.26), escrita em coordenadas cartesianas e sem as forças de corpo, pode ser representada de forma mais explícita como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \\ u_3(\xi) \end{bmatrix} + \int_S \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi, x) & t_{12}^*(\xi, x) & t_{13}^*(\xi, x) \\ t_{21}^*(\xi, x) & t_{22}^*(\xi, x) & t_{23}^*(\xi, x) \\ t_{31}^*(\xi, x) & t_{32}^*(\xi, x) & t_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix} dS(x) = \\
 = \int_S \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi, x) & u_{12}^*(\xi, x) & u_{13}^*(\xi, x) \\ u_{21}^*(\xi, x) & u_{22}^*(\xi, x) & u_{23}^*(\xi, x) \\ u_{31}^*(\xi, x) & u_{32}^*(\xi, x) & u_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} dS(x)
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Mas a mesma equação escrita em coordenadas cilíndricas se torna:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ 0 \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} + \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi, x) & t_{12}^*(\xi, x) & t_{13}^*(\xi, x) \\ t_{21}^*(\xi, x) & t_{22}^*(\xi, x) & t_{23}^*(\xi, x) \\ t_{31}^*(\xi, x) & t_{32}^*(\xi, x) & t_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \cos \theta(x) \\ u_r(x) \sin \theta(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} \right\} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) = \\
& = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi, x) & u_{12}^*(\xi, x) & u_{13}^*(\xi, x) \\ u_{21}^*(\xi, x) & u_{22}^*(\xi, x) & u_{23}^*(\xi, x) \\ u_{31}^*(\xi, x) & u_{32}^*(\xi, x) & u_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \cos \theta(x) \\ t_r(x) \sin \theta(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} \right\} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ 0 \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} + \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) & t_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{13}^*(\xi, x) \\ t_{21}^*(\xi, x) \cos \theta(x) & t_{22}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{23}^*(\xi, x) \\ t_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) & t_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) = \\
& = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) & u_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{13}^*(\xi, x) \\ u_{21}^*(\xi, x) \cos \theta(x) & u_{22}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{23}^*(\xi, x) \\ u_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) & u_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Percebendo que as componentes $u_r(x)$ e $t_r(x)$ aparecem nas duas primeiras linhas de seus respectivos vetores, ainda podemos escrever :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ 0 \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} + \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{13}^*(\xi, x) \\ t_{21}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{22}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{23}^*(\xi, x) \\ t_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) = \\
& = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{13}^*(\xi, x) \\ u_{21}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{22}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{23}^*(\xi, x) \\ u_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) \\
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Devido ao fato de numa geometria axi-simétrica o problema no plano rz ser desacoplado do problema em θ , ou seja, o seu tratamento é bidimensional, podemos representar completamente um problema axi-simétrico reescrevendo a Equação (5.7) como:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} + \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{13}^*(\xi, x) \\ t_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & t_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) = \\
& = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{13}^*(\xi, x) \\ u_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x) & u_{33}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\theta(x) d\Gamma(x) \\
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Chamando

$$t_{rr}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [t_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x)] d\theta(x) \tag{5.9a}$$

$$t_{rz}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_{13}^*(\xi, x) d\theta(x) \tag{5.9b}$$

$$t_{zr}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [t_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + t_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x)] d\theta(x) \tag{5.9c}$$

$$t_{zz}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_{33}^*(\xi, x) d\theta(x) \tag{5.9d}$$

e

$$u_{rr}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{11}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{12}^*(\xi, x) \sin \theta(x)] d\theta(x) \quad (5.10a)$$

$$u_{rz}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{13}^*(\xi, x) d\theta(x) \quad (5.10b)$$

$$u_{zr}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{31}^*(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{32}^*(\xi, x) \sin \theta(x)] d\theta(x) \quad (5.10c)$$

$$u_{zz}^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{33}^*(\xi, x) d\theta(x) \quad (5.10d)$$

Podemos reescrever a Equação (5.8), nas coordenadas r e z como segue:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} + 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} t_{rr}^*(\xi, x) & t_{rz}^*(\xi, x) \\ t_{zr}^*(\xi, x) & t_{zz}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\Gamma(x) = \\ & = 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{rr}^*(\xi, x) & u_{rz}^*(\xi, x) \\ u_{zr}^*(\xi, x) & u_{zz}^*(\xi, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

NÚCLEOS ELASTOSTÁTICOS AXI-SIMÉTRICOS

O núcleo de deslocamentos da formulação tridimensional elastostática, citado anteriormente como tensor de Stokes e que representa a chamada Solução Fundamental, pode ser expresso, como já o foi na Equação (1.18), assim:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{1}{r(\xi, x)} \right] \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_i} \frac{\partial r(\xi, x)}{\partial x_j} \right] \quad (5.12)$$

Esse núcleo tridimensional foi transformado de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) para cilíndricas (r, θ, z) , como mostrado no conjunto de Equações (5.10). Substituindo-se agora a Equação (1.28) em (5.10), obtemos o conjunto de Equações (5.13), cujas demonstrações encontram-se no Apêndice A.

$$u_{rr}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right] + \left[\frac{(R_\xi - r_x)^2(1-2\cos^2 \alpha) - 4R_\xi r_x \cos^4 \alpha}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] \right\} d\alpha \quad (5.13a)$$

$$u_{rz}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{(R_\xi - r_x + 2r_x \cos^2 \alpha)(Z_\xi - z_x)}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha \quad (5.13b)$$

$$u_{zr}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{(R_\xi - r_x - 2R_\xi \cos^2 \alpha)(Z_\xi - z_x)}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha \quad (5.13c)$$

$$u_{zz} = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{3-4\nu}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{(Z_\xi - z_r)^2}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha \quad (5.13d)$$

É conveniente comentar que as componentes do núcleo de deslocamentos apresentadas acima não são integrais em relação a $\theta(x)$ como nos sugere o conjunto de Equações (5.10). Isto ocorre porque houve uma outra transformação de coordenadas (a orientação angular θ do ponto de campo x do sistema de coordenadas cilíndricas foi substituída por $\theta(x) = \pi - 2\alpha$). Este artifício facilitará o tratamento numérico destas integrais como será visto mais adiante.

Embora todas as passagens envolvendo as transformações do conjunto de Equações (5.10) no conjunto de Equações (5.13) estejam no Apêndice A, é interessante deixar explícitas nessa parte do texto algumas variáveis introduzidas nesta última transformação, que são:

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \quad (5.14a)$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2} \quad (5.14b)$$

$$m = \frac{2(R(\xi) r(x))^{\frac{1}{2}}}{C} \quad (5.14c)$$

Analisando as variáveis acima e o conjunto de Equações (5.13), notamos que as componentes do núcleo de deslocamentos ainda apresentam singularidade e não podem ser integradas pelo Método da Quadratura Gaussiana Padrão; por isto, lança-se mão de um artifício, que é a transformação das integrais destes núcleos em integrais elípticas do primeiro e segundo tipos, representadas por $K\left(m, \pi/2\right)$ e $E\left(m, \pi/2\right)$, respectivamente, como mostra o Apêndice B.

Com isto, as integrais que contêm o parâmetro $(1 - m^2 \sin^2 \alpha)$ podem ser transformadas nas integrais elípticas acima citadas. Desta forma, as componentes do núcleo de deslocamentos são expressas como seguem, e as demonstrações destas transformações encontram-se no Apêndice C.

$$u_{rr}(\xi, x) = \frac{A}{R(\xi) r(x) C} \left\{ \left[3 - 4\nu + \left[R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) + \right. \\ \left. + \left[-C^2(3 - 4\nu) - \frac{(Z(\xi) - z(x))^2 [R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2]}{D} \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\} \quad (5.15a)$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{A(Z(\xi) - z(x))}{R(\xi) C} \left\{ K\left(m, \pi/2\right) - \frac{r(x)^2 - R(\xi)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\} \quad (5.15b)$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \frac{A(Z(\xi) - z(x))}{r(x) C} \left\{ -K\left(m, \pi/2\right) + \frac{R(\xi)^2 - r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\} \quad (5.15c)$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \frac{2A}{C} \left\{ (3 - 4\nu) K\left(m, \pi/2\right) + \frac{(Z(\xi) - z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\} \quad (5.15d)$$

com A , C e m já definidos anteriormente em (5.14) e

$$D = (R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \quad (5.16)$$

Os núcleo de forças de superfície pode também ser calculado a partir dos núcleos tridimensionais. Entretanto, devido à complexidade destes últimos, é necessário uma considerável manipulação algébrica antes que ele possa ser expresso na forma de integrais elípticas. Uma aproximação mais fácil se consegue usando as relações cinemáticas deformação-deslocamento e as equações constitutivas para expressá-lo diretamente em termos do núcleo de deslocamentos já calculado. Com isto, as componentes deste núcleo axi-simétrico podem ser escritas como segue:

$$t_{rr}(\xi, x) = 2\mu [t_1 n_r + t_2 n_z] \quad (5.17a)$$

$$t_{rz}(\xi, x) = 2\mu [t_3 n_r + t_4 n_z] \quad (5.17b)$$

$$t_{zr}(\xi, x) = 2\mu [t_5 n_r + t_6 n_z] \quad (5.17c)$$

$$t_{zz}(\xi, x) = 2\mu [t_7 n_r + t_8 n_z] \quad (5.17d)$$

O Apêndice D mostra estes núcleos especificando as variáveis t_1, t_2, \dots, t_8 .

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

As integrais elípticas podem ser expressas como séries de termos com singularidade logarítmica (ver Apêndice C). Desta forma, uma análise mais detalhada dos núcleos nos mostra que, quando houver o comportamento singular nas suas integrações, a ordem da singularidade é

$O(\ln(1/r))$ e $O(1/r)$ para os núcleos de deslocamento e força de superfície respectivamente. Isto torna possível a integração dos termos diagonais do núcleo de deslocamentos pela Quadratura Gaussiana Logarítmica [Stroud e Secrest 1966], cuja fórmula é dada em termos das coordenadas normalizadas η como mostra a Equação (5.18).

$$\int_{\eta_1=0}^{\eta_2=1} f(\eta) \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d\eta \cong \sum_{gl=1}^N w_{gl} f(\eta_{gl}) \quad (5.18)$$

onde N é o número de pontos de integração, η_{gl} e w_{gl} são as coordenadas gaussianas logarítmicas e os fatores ponderadores (pesos) associados, respectivamente.

O mesmo esquema de integração não pode ser usado para os termos diagonais do núcleo de forças de superfície, mas, aqui também, lança-se mão da consideração do movimento de corpo rígido como já discutido no Capítulo 1.

Porém, na formulação axi-simétrica, não é possível considerar o movimento de corpo rígido na direção radial, pois qualquer movimento nesta direção resultará em forças de superfície diferentes de zero. Assim, a melhor maneira de lidar com este problema é usar o movimento de corpo rígido somente na direção axial e uma outra condição na direção radial.

Se considerarmos que o sistema de equações $[H]\{u\} = [G]\{t\}$, mostrado na Equação (1.35), pode ser escrito para um problema axi-simétrico como:

$$\begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{zr} & H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{zr} & G_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix}_i \quad (5.19)$$

podemos admitir então um deslocamento unitário $u_z = 1$, tendo como consequência uma força de superfície nula $t_z = 0$.

Com isto, nas sub-matrizes de $[H]$, os coeficientes da direção z , H_{rz} e H_{zz} , podem ser escritos como segue:

$$\begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \quad \text{com } i=1,2,3,\dots,p \quad (5.20)$$

onde p é o número total de pontos nodais.

Os únicos coeficientes que ainda não foram calculados são os H_{rr} e H_{zz} da diagonal, que podem ser expressos em termos dos outros coeficientes como temos abaixo:

$$\begin{bmatrix} H_{rr} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} \begin{bmatrix} u_z \\ u_r \end{bmatrix}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^p \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{rz} & H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}_j + \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{rz} & G_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} t_r \\ t_z \end{bmatrix}_j$$

com $i=1,2,3,\dots,p$ (5.21)

onde p é o número total de pontos nodais.

Fixando as forças de superfície nas direções r e z e calculando os valores correspondentes dos deslocamentos, o lado direito da Equação (5.21) pode ser determinado. Qualquer conjunto de condições de forças de superfície pode ser usado desde que seja aplicado em qualquer geometria.

Vamos escolher o seguinte conjunto de condições de tensões.

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 1 ; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (5.22)$$

Estas condições de tensões são equivalentes às tensões planas nos problemas bidimensionais. Usando a Fórmula de Cauchy (relação tensão - força de superfície) e as Equações Constitutivas (Lei de Hooke), a seguinte correspondência entre forças de superfície e deslocamentos pode ser determinada.

$$\begin{aligned} t_r &= n_r ; & t_z &= 0 \\ u_r &= \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r ; & u_z &= \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \end{aligned} \quad (5.23)$$

Substituindo essas forças de superfície e deslocamentos na Equação (5.21), os termos diagonais da matriz $[H]$ na direção radial, H_{rr} e H_{zz} podem ser explicitamente calculados como segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{rr} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \\ \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \end{bmatrix}_i &= - \begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} \begin{bmatrix} \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \\ \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \end{bmatrix}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^p \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{rz} & H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \\ \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \end{bmatrix}_j \\ &+ \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{rz} & G_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} n_r \\ 0 \end{bmatrix}_j \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, p$ (5.24)

onde r e z são as coordenadas do nó.

Convém comentar que se o ponto fonte ξ estiver no eixo z , u_r se torna zero e isto torna impossível o cálculo dos termos da diagonal na Equação (5.24). Entretanto, neste caso não há necessidade de fazer este cálculo porque o deslocamento radial no eixo z deve ser zero para qualquer problema axi-simétrico; portanto, não é necessário incluir estas equações particulares no sistema de equações global.

5.2 Formulação Elastodinâmica Estacionária Axi-simétrica

Igualmente ao que foi feito na formulação do MEC para problemas dinâmicos estacionários tridimensionais em coordenadas retangulares (Capítulo 2), a maneira de se tratar a singularidade dos núcleos de forças de superfície para os mesmos problemas em coordenadas cilíndricas também passa pelo artifício conhecido como regularização da integral singular. Para demonstrar este procedimento usaremos a seguinte convenção de índices:

- $3D$ = problema tridimensional (coordenadas cartesianas);
- AXI = problema axi-simétrico (coordenadas cilíndricas);
- EST = problema estático;
- DIN = problema dinâmico.

A equação (2.8) pode ser representada agora, com estas novas convenções, para o problema dinâmico tridimensional como:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} u_j(x, \omega) dS(x) = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} t_j(x, \omega) dS(x) \quad (5.25)$$

Somando e subtraindo o problema estático tridimensional ao problema dinâmico, temos:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} u_j(x, \omega) dS(x) + \\ \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)} u_j(x, \omega) dS(x) - \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)} u_j(x, \omega) dS(x) = \\ = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} t_j(x, \omega) dS(x) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ou de forma mais concisa:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_S [t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} - t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)}] u_j(x, \omega) dS(x) + \\ \int_S t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)} u_j(x, \omega) dS(x) = \\ = \int_S u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} t_j(x, \omega) dS(x) \end{aligned} \quad (5.27)$$

que quando transformado num problema axi-simétrico, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_\Gamma \int_0^{2\pi} [t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} - t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)}] u_j(x, \omega) d\theta d\Gamma(x) + \\ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)} u_j(x, \omega) d\theta d\Gamma(x) = \\ = \int_\Gamma \int_0^{2\pi} u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} t_j(x, \omega) d\theta d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (5.28)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_j(\xi, \omega) + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} [t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, DIN)} - t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(3D, EST)}] u_j(x, \omega) d\theta d\Gamma(x) + \\
\int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(AXI, EST)} u_j(x, \omega) d\Gamma(x) = \\
= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(AXI, DIN)} t_j(x, \omega) d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

A integral da diferença dos núcleos dinâmico e estático na Equação (5.29), não apresenta singularidade quando executada da maneira expressa acima porque ela possui a mesma ordem de singularidade nos dois problemas ($1/r^2$ para a força de superfície), e, com isto, tal integral pode ser resolvida pela fórmula padrão de Quadratura Gaussiana. Já as integrais dos núcleos estáticos axi-simétricos foram anteriormente resolvidas no item 5.1. Com isto, é possível fazer as três integrais de (5.29).

5.3 Formulação Elastodinâmica Estacionária Axi-simétrica Aplicada a Domínios Ilimitados

Todas as considerações feitas na formulação do MEC aplicado a domínios ilimitados no Capítulo 3 valem neste item e também aqui, devido à impossibilidade de se aplicar diretamente o artifício do movimento de corpo rígido para calcular as integrais singulares do núcleo $t_{ij}^*(\xi, x, \omega)_{(AXI, EST)}$, o semi-espço é arbitrariamente estendido por um número de “Enclosing Elements” (EE), criando deste modo um contorno fictício fechado para que, agora sim, possa ser aplicado o referido artifício. Isto é mostrado na Figura (5.3).

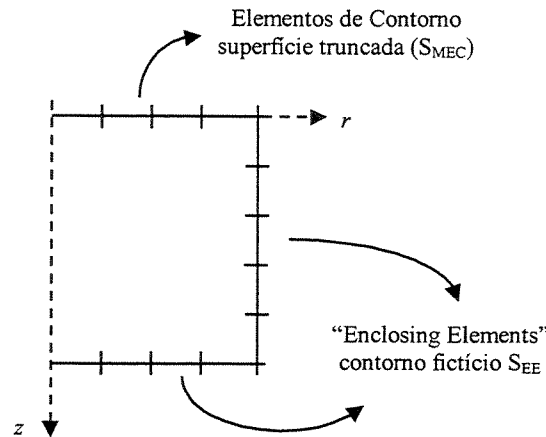
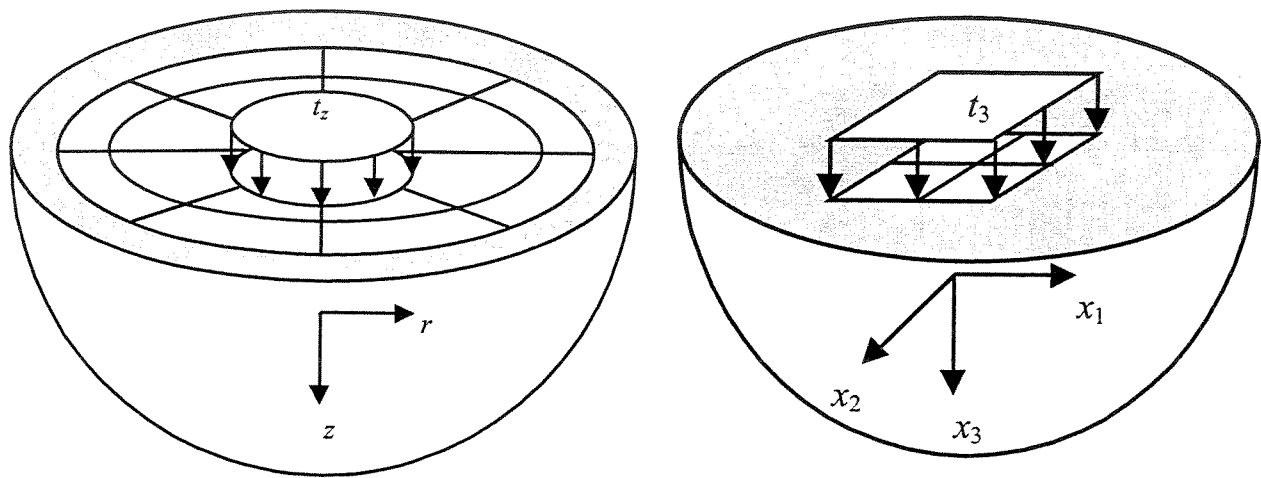


Figura 5.3 – Superfície truncada e contorno fictício axi-simétricos.

5.4 Exemplos Elastodinâmicos Estacionários Axi-simétricos Aplicados a Domínios Ilimitados

Para tentar validar o programa computacional desenvolvido neste trabalho que simula problemas com simetria axial tanto na geometria escolhida para trincar a malha do semi-espço como no carregamento, faremos a comparação deste com outro análogo que utiliza o mesmo programa computacional implementado através da Função de Green de Semi-Espço 3D dinâmico desenvolvido por Romanini e Mesquita Neto [1999] já utilizado no Capítulo 4. As Figuras (5.4) mostram como são feitas as duas simulações.



Figuras 5.4 a e b – Problema axi-simétrico e outro análogo em coordenadas cartesianas.

Em ambas as simulações foram tomadas áreas iguais para as superfícies carregadas; na geometria axi-simétrica, esta área possui raio unitário. O carregamento é normal à superfície e também tem valor unitário $t_z = t_3 = 1$. Na simulação feita via MEC, foi utilizada uma malha com 80 elementos de contorno constantes e 15 “Enclosing Elements”.

O Gráfico (5.1) mostra os deslocamentos normais $u_z = u_3$ calculados na superfície do semi-espço ($z = x_3 = 0,0$) e tomados ao longo dos eixos radial r (no caso axi-simétrico) ou $x_1 = 0,0$ (no caso 3D em coordenadas retangulares).

O Gráfico (5.2) mostra os deslocamentos normais $u_z = u_3$ calculados em pontos internos tomados ao longo do eixo $z = x_3$ na origem dos sistemas de coordenadas axi-simétrico ($r = 0,0$) e 3D retangular ($x_1 = x_2 = 0,0$).

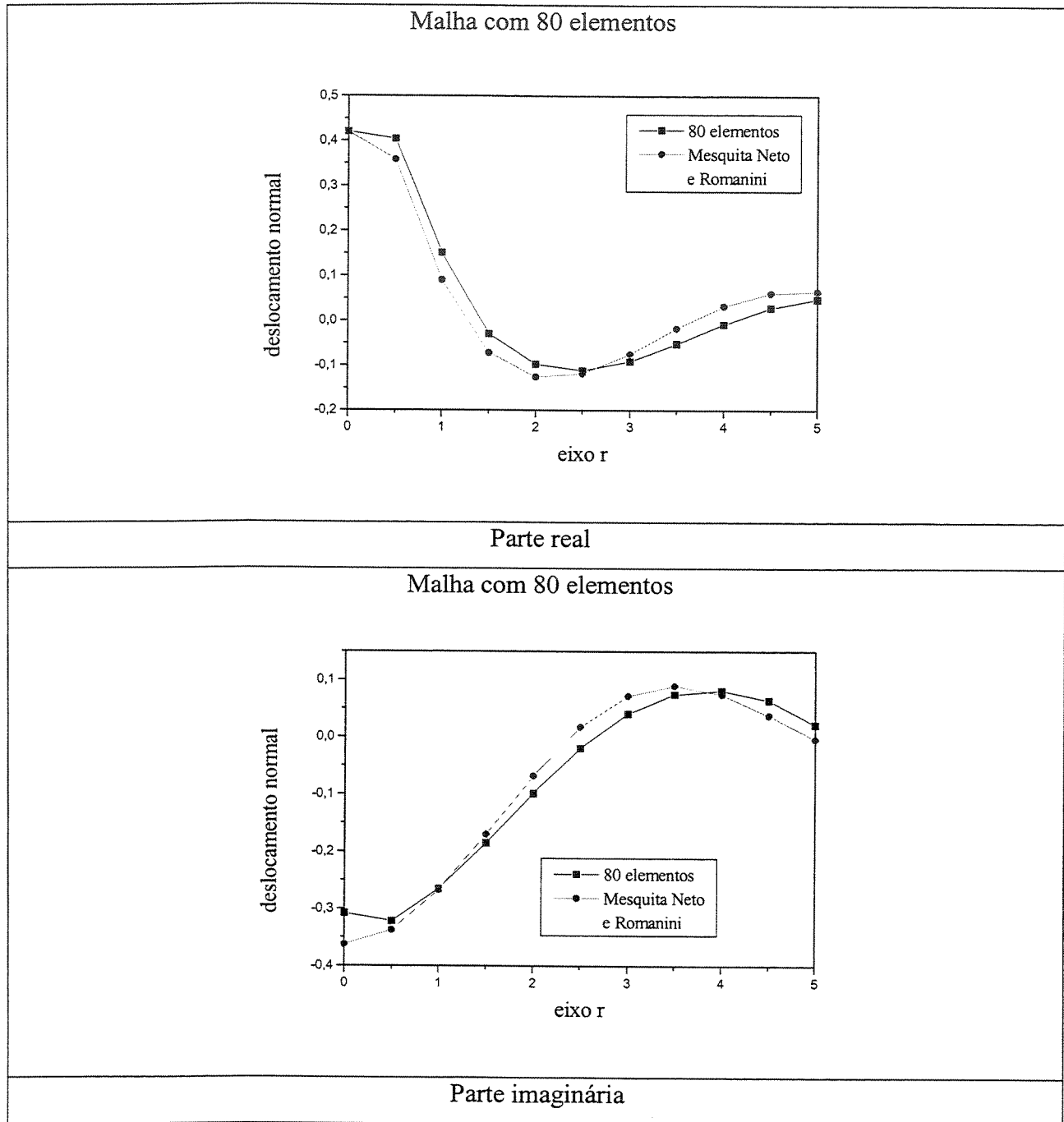


Gráfico 5.1 – Deslocamento normal $u_z = u_3$ na superfície do semi-espço.

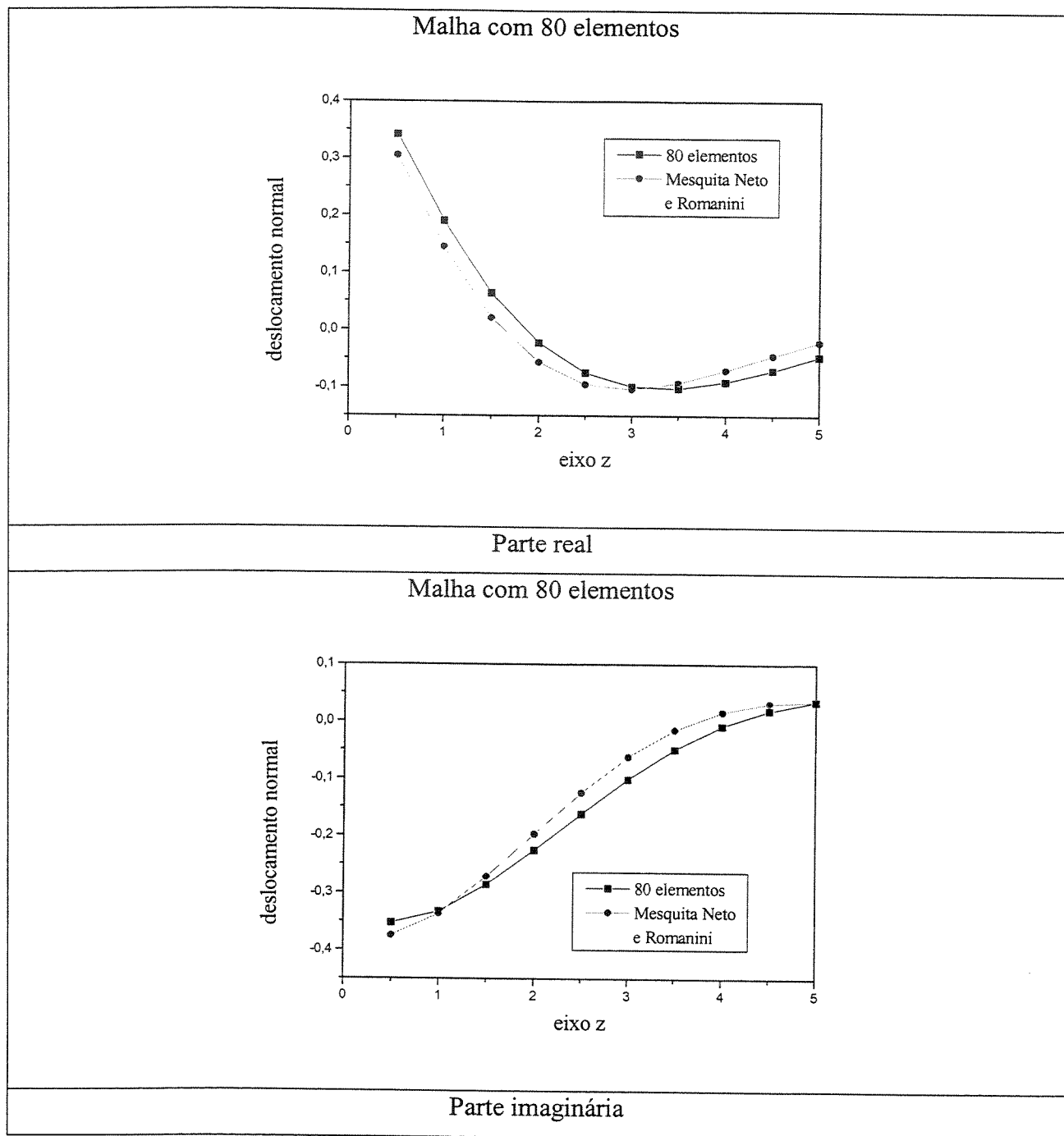


Gráfico 5.2 – Deslocamento normal $u_z = u_3$ em pontos internos do semi-espço.

Embora a comparação dos deslocamentos calculados pela implementação do MEC tenha sido feita apenas com um problema análogo, os resultados obtidos aqui são satisfatórios, indicando que esta modelagem pode ser levada adiante e comparada com um problema idêntico.

A implementação para tensões em pontos internos e a divisão do domínio em sub-regiões não foram feitas até este estágio do trabalho.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O que se pretendeu neste trabalho foi criar uma ferramenta computacional baseada no MEC, bastante genérica e que pudesse simular, além da propagação de ondas no semi-espço, a interação dinâmica solo-estrutura. Estes dois meios (solo e estrutura) foram tratados como duas sub-regiões de um mesmo domínio, e em consequência disso, é possível também dividir o solo em sub-regiões para simular sub-camadas.

Para que tratássemos, na formulação e implementação do MEC, de problemas dinâmicos no semi-espço, percebeu-se que eram necessários alguns passos anteriores: formulação e implementação do MEC para problemas elastostáticos em meios limitados; formulação e implementação do MEC para problemas elastodinâmicos também em meios limitados; formulação e implementação do MEC para problemas elastostáticos em meios ilimitados (semi-espço) e finalmente formulação e implementação do MEC para problemas elastodinâmicos em meios ilimitados, este sim representando a interação dinâmica solo-estrutura.

No decorrer deste passos, três artifícios se destacaram e foram primordiais para a implementação do MEC: consideração do movimento de corpo rígido utilizado para o cálculo dos blocos diagonais da matriz H , regularização da integral singular utilizada para a solução de problemas dinâmicos também com a finalidade de calcular os blocos diagonais da matriz H e finalmente os “Enclosing Elements” que permitiram a aplicação do movimento de corpo rígido para o tratamento de domínios ilimitados.

Fazendo uma discussão final sobre os programas desenvolvidos neste trabalho, iniciemos por aquele que trata do problema elastostático aplicado a domínios limitados, cuja validação foi

feita através de um exemplo de uma barra fixa-livre e apresentou resultados, tanto em deslocamentos como em forças de superfície ou tensões, que convergiam para o valor analítico à medida que o modelo era melhorado através de uma discretização maior da malha de elementos de contorno. Já a validação do mesmo exemplo para problemas dinâmicos estacionários se deu não só de maneira quantitativa, através do cálculo das três primeiras frequências naturais da estrutura, como também de maneira qualitativa, através da representação esquemática dos três primeiros modos de vibrar da barra.

Na validação do programa utilizado para o problema elastostático aplicado a domínios ilimitados, percebeu-se bons resultados através da convergência dos valores de deslocamento e tensões à medida que as malhas eram refinadas. A comparação foi feita com outro programa computacional implementado por Mesquita Neto e Romanini [1999], que foi desenvolvido para problemas elastodinâmicos, mas, como já foi citado, esta comparação foi feita tomando-se frequência próxima a zero.

Uma qualidade semelhante à anterior foi obtida nos resultados do problema elastodinâmico aplicado a domínios ilimitados. Convém ressaltar aqui que alguns resultados obtidos neste tópico apresentaram uma tendência de convergência mas talvez poderiam ainda ser melhorados com uma discretização da malha ainda mais refinada. Ocorreu, entretanto, que o ambiente de desenvolvimento destes programas os executa até um número de elementos que se aproxima daqueles utilizados pelas maiores malhas mostradas neste trabalho; desta forma, com esta ferramenta, não foi possível utilizar malhas mais refinadas.

Em seguida, na análise do problema de sub-regiões, para validar a implementação do algoritmo, iniciou-se pelo problema estático de domínio fechado e posteriormente o dinâmico, representados por uma barra fixa-livre. Os resultados mostraram convergência, em relação a um analítico semelhante, à medida que malhas mais discretizadas eram usadas. Uma vez que estas implementações tenham funcionado, partiu-se para a análise do problema estático ilimitado que nos mostrou resultados de boa qualidade nos exemplos utilizados, qualidade esta que se manteve para o problema dinâmico ilimitado. Volta-se a frisar que, para o tipo de elemento adotado, malhas mais discretizadas poderiam ser analisadas.

Sem perder de vista que a idéia inicial era a montagem de uma ferramenta computacional que analisasse a interação dinâmica solo-estrutura através de sub-regiões pelo MEC, pode-se dizer que o objetivo foi alcançado, mas o cálculo de algumas grandezas ainda deve ser

melhorado, principalmente em sub-regiões, deste modo, a implementação do mesmo programa com elementos lineares ou quadráticos seria o primeiro passo a ser dado para torná-lo mais eficiente.

A construção de um pré-processador também se torna relevante pois, como foi visto, em problemas 3D já se começa a análise com um número de elementos razoavelmente grande, o que torna quase inviável a construção manual dos arquivos de entrada. Todas as malhas utilizadas aqui foram construídas com auxílio do Ansys®.

No que diz respeito à implementação axi-simétrica, a validação do programa aqui desenvolvido ainda deve ser feita tomando por base uma técnica que simule exatamente o mesmo tipo de geometria do carregamento e da malha truncada. Sugere-se que o cálculo de tensões em pontos internos e a divisão do domínio em sub-regiões também possam ser acrescentados ao programa posteriormente, acrescentando seus resultados a este trabalho.

Referências Bibliográficas

- Ahmad, S., Banerjee, P. K.; *Multi-Domain BEM for Two-Dimensional Problems of Elastodynamics*, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 26, pp. 891-911, 1988.
- Almeida Barros, P. L.; *Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-estrutura*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, Tese (Doutorado).
- Anzou, L. A.; *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a equação de Helmholtz, visando a modelagem da radiação e dispersão acústica*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, Tese (Mestrado).
- Araújo, F. C., Nishikawa, L. K., Mansur, W. J., *On the Consideration of Enclosing Elements in 3D Elastodynamic Analyses with The BEM and BE/FE Coupled Process*, XVIII CILANCE, Vol. I, pp. 423-431, 1997.
- Banerjee, P. K., Butterfield, R.; *Dynamic Behaviour of Foundations and Buried Structures*, Developments in Soil Mechanics and Foundation Engineering – 3, Elsevier Applied Science Publishers LTD, 1987
- Barros, R. M.; *Funções de Green e de Influência para Meios Visco-Elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Frequência*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001, Tese (Doutorado).
- Becker, A. A.; *The Boundary Element Method in Engineering - A complete course*, McGraw-Hill Book Company, 1992.
- Beer, G.; *Programming the Boundary Element Method*, John Wiley & Sons, 2001.
- Bettess, P. ; *Infinite Elements*, Penshaw Press, 1992.
- Beskos, D. E.; *Boundary Element Methods in Dynamic Analysis*, Applied Mechanical Review, Vol. 40, No 1, 1987.
- Beskos, D. E., Karabalis, D. L.; *Dynamic Response of 3D Foundations by Time Domain Boundary Element Method, Final Report Part A*, NSF Grant No CEE-8024725, Department of Civil and Mineral Engineering, University of Minnesota, MN, 1984.

- Beskos, D. E., Spyrakos, C. C.; *Dynamic Response of Strip Foundations by the Time Domain BEM-FEM Method, Final Report Part B*, NSF Grant No CEE-8024725, Department of Civil and Mineral Engineering, University of Minnesota, MN, 1984.
- Brebbia, C. A. ; *The Boundary Element Method for Engineers*, Computacional Mechanics Publication, 1978.
- Brebbia, C. A., Dominguez, J.; *Boundary Elements – An Introductory Course*, Computacional Mechanics Publication, 1989.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C.; *Boundary Element Techniques*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1984.
- Dominguez, J.; *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*, Report no R78-20, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA, 1978.
- Dominguez, J.; *Response of Embedded Foundations to Travelling Waves*, Report no R78-24, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA, 1978.
- Dominguez, J.; *Boundary Elements in Dynamics*, Computacional Mechanics Publications, 1993.
- Eringen, A. C., Suhubi, E. S.; *Elastodynamics – Linear Theory*, vol. 1 e 2, Academic Press, 1975.
- Findley, W. N., Lai, J. S.; Onaran, K.; *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, Dover Publications, 1989.
- Gazetas, G.; *Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2, pp. 2-42, 1983.
- Gomez-Lera, M. S., Alarcon, E., Dominguez, J.; *On the Use of a 3-D Fundamental Solution for Axisymmetric Steady-State Dynamic Problems*, Boundary Elements VII, pp. 6-127-136, 1985.
- Graff, K. F.; *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, 1975.
- Hartmann, F.; *Introduction to Boundary Elements – Theory and Applications* , Springer-Verlag, 1989.
- Hirose, S.; *A Study on Direct and Inverse Scattering Problems of Elastic Waves*, Ph.D. Thesis, Kyoto University, Kyoto, Japan, 1987.
- Karabalis, D. L., Beskos, D. E.; *Dynamic Response of 3D Rigid Surface Foundations by the Time Domain Boundary Element Method*, Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol 12, pp 73-93, 1984.
- Lachat, J. C.; *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatic*, Ph. D. Thesis, University of Southampton, U. K, 1975.

- Kane, J. H.; *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*, Prentice Hall, 1994.
- Kreyszig, E.; *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1988.
- Manolis, G. D., Beskos, D. E.; *Boundary Element Method in Elastodynamics*, Unwin-Hyman, London, 1988.
- Manolis, G. D., Davies, T. G.; *Boundary Element Technique in Geomechanics*, Comput. Mech. Publ., Southampton & Elsevier Appl. Sci., London, 1993.
- Mesquita Neto, E.; *Zur Dynamischen Wechselwirkung von Fundamenten auf dem Viskoelastischen Halbraun*, Hannover, 1989, Tese (Doutorado).
- Mesquita Neto, E., Pontes Jr., B. R.; *Complete Compliance Matrices for the Dynamic Foundation-soil-foundation Interaction: a Critical Review of the BEM Potentialities*, Proc. 14 BEM (Int. Conf. BEM), Vol. 2, pp.193-205, Seville – Spain, 1992.
- Mesquita Neto, E.; Pontes Jr., B. R.; Sousa, E. A. C.; *Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. Part. I: Formulation*, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, RBCM, vol. XVI, nº 2, pp. 143-158, 1994.
- Mesquita Neto, E.; Pontes Jr., B. R.; Sousa, E. A. C.; *Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. Part. I: Validation and applications*, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, RBCM, vol. XVI, nº 2, pp. 159-176, 1994.
- Pontes Jr., B. R.; *Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais com o Solo*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992, Tese (Mestrado).
- Popov, E. P.; *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Edgard Blücher, 1978.
- Richart Jr., F.E., Hall Jr., J.R., Woods, R.D.; *Vibrations on Soils and Foundations*, Prentice Hall, 1970.
- Richter, C.; *A Green's Function Time-domain BEM of Elastodynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton U.K. and Boston USA, 1997.
- Romanini, E.; Mesquita Neto, E.; *Um programa para Síntese de Funções de Green e Influência para Semi-espacos Viscoelásticos Tridimensionais*, Relatório de Pesquisa, DMC/FEM/UNICAMP, 1999.
- Shames, I. H.; *Introduction to Solid Mechanics*, Second Edition, Prentice Hall, 1989.

- Spyrakos, C. C., Beskos, D. E.; *Dynamic Response of Rigid Strip Foundations by Time Domain Boundary Element Method*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp 1547-1565, 1986.
- Stroud, A. H., Secrest, D. ; *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, 1966.
- Telles, J. C. F.; *A Self Adaptative Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 959-973, 1987.
- Zavala, P. A. G.; *Análise Vibro-Acústica Utilizando o Método de Elementos Finitos com Mapeamento Dirichlet-to-Newmann (DtN)*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, Tese (Mestrado).
- Zienkiewicz, O. C.; Morgan, K. ; *Finite Element and Aproximations*, Wiley, 1983.

APÊNDICE A

Núcleos elastostáticos axisimétricos de deslocamento expressos em coordenadas cilíndricas referenciados no Capítulo 5.

Neste apêndice, estes núcleos são expressos fazendo-se a substituição dos núcleos tridimensionais, mostrando-se os passos envolvidos.

$$u_{rr}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{11}(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{12}(\xi, x) \sin \theta(x)] d\theta(x)$$

$$\begin{aligned} u_{rr}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} & \left\{ \left[\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \right] \left[\frac{1}{[(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2]^{3/2}} \right] \right. \\ & \left[(3-4\nu) + \frac{(x_1(x) - X_1(\xi))^2}{(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2} \right] \cos \theta(x) \right] + \\ & + \left[\left[\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \right] \left[\frac{1}{[(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2]^{3/2}} \right] \right. \\ & \left. \left[\frac{(x_1(x) - X_1(\xi))(x_2(x) - X_2(\xi))}{(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2} \right] \sin \theta(x) \right] \left. \right\} d\theta(x) \end{aligned}$$

Fazendo a transformação $\theta(x) = \pi - 2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi) = R(\xi) \cos \theta(\xi) = R(\xi); \quad X_2(\xi) = R(\xi) \sin \theta(\xi) = 0; \quad X_3(\xi) = Z(\xi)$$

$$x_1(x) = r(x) \cos \theta(x); \quad x_2(x) = r(x) \sin \theta(x); \quad x_3(x) = x_3(x)$$

temos:

$$u_{rr}(\xi, x) = \left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu (1-\nu)} \right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{3-4\nu}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \cos(\pi-2\alpha) + \right.$$

$$+ \left[\frac{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \cos(\pi-2\alpha) +$$

$$\left. + \left[\frac{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))(r(x)\sin(\pi-2\alpha))}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \sin(\pi-2\alpha) \right\} d\alpha$$

Considerando agora as identidades

$$\cos(\pi-2\alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \quad \text{e}$$

$$\sin(\pi-2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{podemos escrever:}$$

$$u_{rr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] +$$

$$\left. + \left[\frac{(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))(r(x)2 \sin \alpha \cos \alpha)(2 \sin \alpha \cos \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

lembrando que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ temos:

$$u_{rr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right. \\
+ \left[\frac{(r(x) (1-2\cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 (1-2\cos^2 \alpha)}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \\
\left. + \left[\frac{(r(x) (1-2\cos^2 \alpha) - R(\xi)) (4r(x) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

$$u_{rr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right. \\
+ \left[\frac{(r(x) - 2r(x) \cos^2 \alpha - R(\xi))}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \\
\left. + \left[\frac{(r(x) - 2r(x) \cos^2 \alpha - R(\xi)) (1-2\cos^2 \alpha) + 4r(x) \cos^2 \alpha - 4r(x) \cos^4 \alpha}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

agrupando agora os dois últimos termos do integrando, resulta

$$u_{rr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right. \\
\left. + \left[\frac{(r(x) - 2r(x) \cos^2 \alpha - R(\xi)) (r(x) + 2r(x) \cos^2 \alpha - R(\xi))}{\left[\left(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi) \right)^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

$$u_r(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{1/2}} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(R(\xi) - r(x))^2(1-2\cos^2 \alpha) - 4R(\xi) r(x) \cos^4 \alpha}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

manipulando o termo

$$(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2$$

concluimos que ele é igual a

$$(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 - 4r(x)R(\xi)\sin^2 \alpha$$

Fazendo

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)}$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2}$$

$$m = \frac{2(R(\xi) r(x))^{1/2}}{C}$$

temos por enquanto:

$$\begin{aligned}
u_{rr}(\xi, x) &= \\
&= 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2\alpha)}{C(1-m^2\sin^2\alpha)^{1/2}} \right] + \left[\frac{(R(\xi)-r(x))^2(1-2\cos^2\alpha)-4R(\xi)r(x)\cos^4\alpha}{C^3(1-m^2\sin^2\alpha)^{3/2}} \right] \right\} d\alpha
\end{aligned}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{13}(\xi, x) d\theta(x)]$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \right] \right. \\ \left[\frac{1}{\left[(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2 \right]^{1/2}} \right] \\ \left[\frac{(x_1(x) - X_1(\xi))(x_3(x) - X_3(\xi))}{(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2} \right] \Big\} d\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x) = \pi - 2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi) = R(\xi) \cos \theta(\xi) = R(\xi); \quad X_2(\xi) = R(\xi) \sin \theta(\xi) = 0; \quad X_3(\xi) = Z(\xi)$$

$$x_1(x) = r(x) \cos \theta(x); \quad x_2(x) = r(x) \sin \theta(x); \quad x_3(x) = x_3(x)$$

temos:

$$u_{rz}(\xi, x) = \left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu(1-\nu)} \right] \\ \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{\left[(r(x) \cos(\pi - 2\alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) \sin(\pi - 2\alpha))^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{1/2}} \right] \right. \\ \left[\frac{(r(x) \cos(\pi - 2\alpha) - R(\xi))(z(x) - Z(\xi))}{(r(x) \cos(\pi - 2\alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) \sin(\pi - 2\alpha))^2 + (z(x) - Z(\xi))^2} \right] \Big\} d\alpha$$

Considerando agora as identidades

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \quad \text{e}$$

$$\sin(\pi - 2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{podemos escrever:}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{\left[(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R_p)(z(x) - Z_p)}{\left[(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

lembrando que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ temos:

$$u_{rz}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{(r(x) (1 - 2 \cos^2 \alpha) - R(\xi))(z(x) - Z(\xi))}{\left[(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right\} d\alpha$$

manipulando o termo

$$(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2$$

concluimos que ele é igual a

$$(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 - 4r(x)R(\xi) \sin^2 \alpha$$

Fazendo

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1 - \nu)}$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$m = \frac{2(R(\xi) r(x))^{\frac{1}{2}}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{rz}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{(R(\xi) - r(x) + 2r(x) \cos^2 \alpha)(Z(\xi) - z(x))}{C^3 (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\alpha$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{31}(\xi, x) \cos \theta(x) + u_{32}(\xi, x) \sin \theta(x)] d\theta(x)$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left[\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \right] \left[\frac{1}{[(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2]^{3/2}} \right] \right. \right. \\ \left. \left[\frac{(x_3(x) - X_3(\xi))(x_1(x) - X_1(\xi))}{(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2} \right] \right] \cos \theta(x) + \\ + \left[\left[\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \right] \left[\frac{1}{[(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{(x_3(x) - X_3(\xi))(x_2(x) - X_2(\xi))}{(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2} \right] \right] \sin \theta(x) \right\} d\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x) = \pi - 2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi) = R(\xi) \cos \theta(\xi) = R(\xi); \quad X_2(\xi) = R(\xi) \sin \theta(\xi) = 0; \quad X_3(\xi) = Z(\xi)$$

$$x_1(x) = r(x) \cos \theta(x); \quad x_2(x) = r(x) \sin \theta(x); \quad x_3(x) = x_3(x)$$

temos:

$$u_{zr}(\xi, x) = \left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu (1-\nu)} \right] \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{(z(x)-Z(\xi))(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))}{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2} \right] \cos(\pi-2\alpha) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{(z(x)-Z(\xi))(r(x)\sin(\pi-2\alpha))}{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2 + (r(x)\sin(\pi-2\alpha))^2 + (z(x)-Z(\xi))^2} \right] \right\} d\alpha$$

Considerando agora as identidades

$$\cos(\pi-2\alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \quad \text{e}$$

$$\sin(\pi-2\alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha \quad \text{podemos escrever:}$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2\mu (1-\nu)} \right] \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(z(x)-Z(\xi))(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(z(x)-Z(\xi))(r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)(2\sin \alpha \cos \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x)-Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

lembrando que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ temos:

$$u_{zr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(z(x) - Z(\xi))(r(x) - 2r(x)\cos^2 \alpha - R(\xi))(1 - 2\cos^2 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(z(x) - Z(\xi))(4r(x))(\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \frac{(z(x) - Z(\xi))(r(x) - R(\xi) + 2R(\xi)\cos^2 \alpha)}{\left[(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right\} d\alpha$$

manipulando o termo

$$(r(x)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x)2\sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2$$

concluimos que ele é igual a

$$(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 - 4r(x)R(\xi)\sin^2 \alpha$$

Fazendo

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)}$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2}$$

$$m = \frac{2(R(\xi) r(c))^{\frac{1}{2}}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{zr}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{(R(\xi) - r(x) - 2R(\xi) \cos^2 \alpha)(Z(\xi) - z(x))}{C^3 (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{33}(\xi, x) d\theta(x)]$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \right] \left[\frac{1}{[(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[(3-4\nu) + \frac{(x_3(x) - X_3(\xi))^2}{(x_1(x) - X_1(\xi))^2 + (x_2(x) - X_2(\xi))^2 + (x_3(x) - X_3(\xi))^2} \right] \right\} d\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x) = \pi - 2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi) = R(\xi) \cos \theta(\xi) = R(\xi); \quad X_2(\xi) = R(\xi) \sin \theta(\xi) = 0; \quad X_3(\xi) = Z(\xi)$$

$$x_1(x) = r(x) \cos \theta(x); \quad x_2(x) = r(x) \sin \theta(x); \quad x_3(x) = x_3(x)$$

temos:

$$u_{zz}(\xi, x) = \left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu(1-\nu)} \right] \\ \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{[(r(x) \cos(\pi - 2\alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) \sin(\pi - 2\alpha))^2 + (z(x) - Z(\xi))^2]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[(3-4\nu) + \frac{(z(x) - Z(\xi))^2}{(r(x) \cos(\pi - 2\alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) \sin(\pi - 2\alpha))^2 + (z(x) - Z(\xi))^2} \right] \right\} d\alpha$$

Considerando agora as identidades

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \quad \text{e}$$

$$\sin(\pi - 2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{podemos escrever:}$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{\left[(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right. \\ \left. \left[(3-4\nu) + \frac{(z(x) - Z(\xi))^2}{(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2} \right] \right\} d\alpha$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \left[\frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)}{\left[(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(z(x) - Z(\xi))^2}{\left[(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2 \right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

manipulando o termo

$$(r(x) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - R(\xi))^2 + (r(x) 2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (z(x) - Z(\xi))^2$$

concluimos que ele é igual a

$$(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 - 4r(x) R(\xi) \sin^2 \alpha$$

Fazendo

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)}$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2}$$

$$m = \frac{2(R(\xi) r(x))^{1/2}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{zz} = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{3-4\nu}{C (1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{(Z(\xi) - z(x))^2}{C^3 (1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha$$

APÊNDICE B

Integrais elípticas do primeiro e segundo tipos referenciadas no Capítulo 5. Estas integrais elípticas que aparecem nos núcleos axisimétricos são escritas nas formas:

$$K\left(m, \pi/2\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \quad (\text{B.1})$$

$$E\left(m, \pi/2\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (\text{B.2})$$

onde m é chamado módulo, $K\left(m, \pi/2\right)$ e $E\left(m, \pi/2\right)$ são as integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipos respectivamente.

As integrais elípticas podem ser escritas em formas de séries como seguem abaixo:

$$K\left(m, \pi/2\right) = \ln 4 + \sum_{i=1}^n a_i (1-m^2)^i + \ln\left(\frac{1}{1-m^2}\right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n b_i (1-m^2)^i \right] \quad (\text{B.3})$$

$$E\left(m, \pi/2\right) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i (1-m^2)^i + \ln\left(\frac{1}{1-m^2}\right) \left[\sum_{i=1}^n d_i (1-m^2)^i \right] \quad (\text{B.4})$$

onde n é o número de coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i usados nas aproximações. Para o propósito deste estudo, será usado $n = 5$ onde a média de erro é estimada em $10^{-8} \%$ [Becker 1992].

Os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i necessários para estas equações foram calculados como:

$$a_1 = 0.096578619622$$

$$a_2 = 0.031559431627$$

$$a_3 = 0.023761224857$$

$$a_4 = 0.025962888452$$

$$a_5 = 0.0066398011146$$

$$b_1 = 0.12499929597$$

$$b_2 = 0.070148757782$$

$$b_3 = 0.044983875539$$

$$b_4 = 0.018751660276$$

$$b_5 = 0.0018472341632$$

$$c_1 = 0.44315287472$$

$$c_2 = 0.057566998484$$

$$c_3 = 0.031761145524$$

$$c_4 = 0.030662347457$$

$$c_5 = 0.0076529606032$$

$$d_1 = 0.24999920273$$

$$d_2 = 0.093564907830$$

$$d_3 = 0.054260524448$$

$$d_4 = 0.021836021169$$

$$d_5 = 0.0021247918284$$

Algumas integrais relevantes na formulação axisimétrica envolvendo $\cos \alpha$ podem ser transformadas em integrais elípticas como seguem:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha = \frac{1}{m^2} \left[E\left(m, \pi/2\right) - (1-m^2) K\left(m, \pi/2\right) \right] \quad (\text{B5})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha = \frac{1}{1-m^2} E\left(m, \pi/2\right) \quad (\text{B6})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha = \frac{1}{m^2} \left[K\left(m, \pi/2\right) - E\left(m, \pi/2\right) \right] \quad (\text{B7})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha = \frac{1}{m^2} \left[(2-m^2) E\left(m, \pi/2\right) - 2(1-m^2) K\left(m, \pi/2\right) \right] \quad (\text{B8})$$

APÊNDICE C

Núcleos elastostáticos axisimétricos de deslocamento expressos em função das integrais elípticas referenciados no Capítulo 5.

Este apêndice contém as passagens para sair da representação dos núcleos como estão no apêndice A e representá-los em função das integrais elípticas.

$$u_{rr}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right] + \left[\frac{(R(\xi)-r(x))^2(1-2\cos^2 \alpha) - 4R(\xi)r(x)\cos^4 \alpha}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

$$\begin{aligned} u_{rr}(\xi, x) = 2A & \left\{ \frac{(3-4\nu)}{C} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha - 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha \right] + \right. \\ & + \frac{(R(\xi)-r(x))^2}{C^3} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha - 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha \right] + \\ & \left. \frac{4R(\xi)r(x)}{C^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \alpha}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{rr}(\xi, x) = 2A & \left\{ \frac{(3-4\nu)}{C} \left[K\left(m, \pi/2\right) - \frac{2}{m^2} \left[E\left(m, \pi/2\right) - (1-m^2) K\left(m, \pi/2\right) \right] \right] + \right. \\ & + \frac{(R(\xi)-r(x))^2}{C^3} \left[\frac{1}{1-m^2} E\left(m, \pi/2\right) - \frac{2}{m^2} \left[K\left(m, \pi/2\right) - E\left(m, \pi/2\right) \right] \right] + \\ & \left. \frac{4R(\xi)r(x)}{C^3 m^4} \left[(2-m^2) E\left(m, \pi/2\right) - 2(1-m^2) K\left(m, \pi/2\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$u_{rr}(\xi, x) = \frac{2A}{C} \left\{ \left[3 - 4\nu + \frac{2(3-4\nu)(1-m^2)}{m^2} - \frac{2(R_p - r_\varrho)^2}{C^2 m^2} + \frac{8R(\xi)r(x)(1-m^2)}{C^2 m^4} \right] K\left(m, \pi/2\right) + \right. \\ \left. + \left[-\frac{2(3-4\nu)}{m^2} + \frac{(R(\xi)-r(x))^2}{C^2(1-m^2)} + \frac{2(R(\xi)-r(x))^2}{C^2 m^2} - \frac{4R(\xi)r(x)(2-m^2)}{C^2 m^4} \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

após algumas manipulações matemáticas, concluímos que:

$$1-m^2 = \frac{(R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2}{C^2}$$

$$\frac{1-m^2}{m^2} = \frac{(R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2}{4R(\xi)r(x)}$$

$$\frac{1-m^2}{m^4} = \frac{[(R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2]C^2}{16R(\xi)^2 + r(x)^2}$$

$$\frac{2-m^2}{m^4} = \frac{(R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi)-z(x)))C^2}{8R(\xi)^2 r(x)^2}$$

e fazendo $D = (R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2$

temos que:

$$\begin{aligned}
u_{rr}(\xi, x) = & \frac{2A}{C} \left\{ \left[3 - 4\nu + \frac{2(3 - 4\nu) \left[(R(\xi) - r(x))^2 - (Z(\xi) - z(\xi, x))^2 \right]}{2R_p r_Q} - \frac{(R(\xi) - r(x))^2}{2R(\xi) r(x)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{2R(\xi) r(x)} \right] K\left(m, \pi/2\right) + \right. \\
& \left[-\frac{(3 - 4\nu) C^2}{2R(\xi) r(x)} + \frac{(R(\xi) - r(x))^2}{D} + \frac{(R(\xi) - r(x))^2}{2R(\xi) r(x)} + \right. \\
& \left. \left. \frac{R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{2R(\xi) r(x)} \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{rr}(\xi, x) = & \frac{A}{R(\xi) r(x) C} \left\{ \left[3 - 4\nu + \left[R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) + \right. \\
& \left. + \left[-(3 - 4\nu) C^2 + \frac{2R(\xi) r(x) (R(\xi) - r(x))^2}{D} - 2R(\xi) r(x) - (Z(\xi) - z(x))^2 \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{rr}(\xi, x) = & \frac{A}{R(\xi) r(x) C} \left\{ \left[3 - 4\nu + \left[R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) + \right. \\
& \left. + \left[-C^2(3 - 4\nu) - \frac{(Z(\xi) - z(x))^2 \left[R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]}{D} \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{(R(\xi) - r(x) + 2r(x)\cos^2 \alpha)(Z(\xi) - z(x))}{C^3(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ R(\xi) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha - r(x) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha + \right. \\ \left. + 2r(x) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha \right\}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{R(\xi)}{1 - m^2} E\left(m, \pi/2\right) - \frac{r(x)}{1 - m^2} E\left(m, \pi/2\right) + \frac{2r(x)}{m^2} \left[K\left(m, \pi/2\right) - E\left(m, \pi/2\right) \right] \right\}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{2r(x)}{m^2} K\left(m, \pi/2\right) + \left(\frac{R(\xi)r(x)}{1 - m^2} - \frac{2r(x)}{m^2} \right) E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

lembrando que:

$$1 - m^2 = \frac{(R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{C^2}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{C^2}{2R(\xi)} \left[K\left(m, \pi/2\right) + \left(\frac{(R(\xi) - r(x))2R(\xi)}{C^2 - 4R(\xi)r(x)} - 1 \right) E\left(m, \pi/2\right) \right] \right\}$$

e fazendo $D = (R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2$ temos que:

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{C^2}{2R(\xi)} \left[K\left(m, \pi/2\right) - \left(\frac{r(x)^2 - R(\xi)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} \right) E\left(m, \pi/2\right) \right] \right\}$$

$$u_z(\xi, x) = \frac{A(Z(\xi) - z(x))}{R(\xi) C} \left\{ K\left(m, \pi/2\right) - \frac{r(x)^2 - R(\xi)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

$$u_{zr}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{(R(\xi) - r(x) - 2R(\xi) \cos^2 \alpha)(Z(\xi) - z(x))}{C^3 (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \frac{2A (Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ R(\xi) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha - r(x) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha + \right. \\ \left. - 2R(\xi) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{(1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha \right\}$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \frac{2A (Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{R(\xi)}{1 - m^2} E\left(m, \pi/2\right) - \frac{r(x)}{1 - m^2} E\left(m, \pi/2\right) - \frac{2R(\xi)}{m^2} \left[K\left(m, \pi/2\right) - E\left(m, \pi/2\right) \right] \right\}$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \frac{2A (Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{-2R(\xi)}{m^2} K\left(m, \pi/2\right) + \left[\frac{R(\xi) - r(x)}{1 - m^2} + \frac{2R(\xi)}{m^2} \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

lembrando que:

$$1 - m^2 = \frac{(R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{C^2}$$

$$u_{zr}(\xi, x) = \frac{2A (Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{C^2}{2r(x)} \left[-K\left(m, \pi/2\right) + \left(\frac{2R(\xi)r(x) - 2r(x)^2}{C^2 - 4R(\xi)r(x)} + 1 \right) E\left(m, \pi/2\right) \right] \right\}$$

e fazendo $D = (R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2$

temos que:

$$u_{_x}(\xi, x) = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{C^3} \left\{ \frac{C^2}{2r(x)} \left[-K\left(m, \pi/2\right) + \left(\frac{R(\xi)^2 - r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} \right) E\left(m, \pi/2\right) \right] \right\}$$

$$u_{_x}(\xi, x) = \frac{A(Z(\xi) - z(x))}{r(x) C} \left\{ -K\left(m, \pi/2\right) + \frac{R(\xi)^2 - r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

$$u_{zz}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{3-4\nu}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right\} d\alpha$$

$$u_{zz}(\xi, x) = 2A \left\{ \frac{3-4\nu}{C} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha + \frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C^3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} d\alpha \right\}$$

$$u_{zz}(\xi, x) = 2A \left\{ \frac{3-4\nu}{C} K\left(m, \pi/2\right) + \frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C^3} \frac{1}{1-m^2} E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

lembrando que:

$$1-m^2 = \frac{(R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2}{C^2}$$

$$u_{zz} = 2A \left\{ \frac{3-4\nu}{C} K\left(m, \pi/2\right) + \frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C \left[(R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2 \right]} E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

e fazendo $D = (R(\xi)-r(x))^2 + (Z(\xi)-z(x))^2$ temos que:

$$u_{zz}(\xi, x) = 2A \left\{ \frac{3-4\nu}{C} K\left(m, \pi/2\right) + \frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{CD} E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

$$u_{zz}(\xi, x) = \frac{2A}{C} \left\{ (3-4\nu) K\left(m, \pi/2\right) + \frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\}$$

APÊNDICE D

Núcleos elastostáticos axisimétricos de forças de superfície referenciados no Capítulo 5. Aqui estes núcleos também são escritos em função das integrais elípticas.

$$t_{rr}(\xi, x) = 2\mu [t_1 n_r + t_2 n_z]$$

$$t_{rz}(\xi, x) = 2\mu [t_3 n_r + t_4 n_z]$$

$$t_{zr}(\xi, x) = 2\mu [t_5 n_r + t_6 n_z]$$

$$t_{zz}(\xi, x) = 2\mu [t_7 n_r + t_8 n_z]$$

onde:

$$t_1 = \frac{A}{R(\xi) r(x)^2} \left[2\nu M - \frac{3}{2} N + \frac{BF(Z(\xi) - z(x))^2}{2DC^2} \right] K\left(m, \pi/2\right) +$$

$$\frac{A}{R(\xi) r(x)^2} \left\{ \frac{-2\nu}{D} [R(\xi)^2 S + (Z(\xi) - z(x))^2 V + r(x)^4] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{D} [R(\xi)^2 F + (Z(\xi) - z(x))^2 M] - \frac{2B^2 F}{D^2 C^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right\} E\left(m, \pi/2\right)$$

$$t_2 = \frac{A(Z(\xi) - z(x))}{R(\xi) r(x) CD} \left[D(2\nu - 3) + \frac{B}{C^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) +$$

$$\frac{A(Z(\xi) - z(x))}{R(\xi) r(x) CD} \left[3(Z(\xi) - z(x))^2 - B(2\nu - 3) - \frac{4B}{DC^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] E\left(m, \pi/2\right)$$

$$t_3 = t_2$$

$$t_4 = \frac{A}{R(\xi) CD} \left[-D(1 - 2\nu) + \frac{H}{C^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) +$$

$$\frac{A}{R(\xi) CD} \left[-(Z(\xi) - z(x))^2 + H(1 - 2\nu) - \frac{8FR(\xi)^2}{DC^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] E\left(m, \pi/2\right)$$

$$t_5 = \frac{A(Z(\xi) - z(x))}{CD} \left[\frac{D}{r(x)^2} + \frac{2}{C^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) +$$

$$\frac{A(Z(\xi) - z(x))}{CD} \left[4(1 + \nu) - \frac{B}{r(x)^2} - \frac{8B}{DC^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] E\left(m, \pi/2\right)$$

$$t_6 = \frac{A}{r(x)CD} \left[-D(1 - 2\nu) - \frac{F}{C^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) +$$

$$\frac{A(Z(\xi) - z(x))}{r(x)CD} \left[-3(Z(\xi) - z(x))^2 + F(1 - 2\nu) - \frac{4BF}{DC^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] E\left(m, \pi/2\right)$$

$$t_7 = t_6$$

$$t_8 = \frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{CD} \left[\frac{-1}{C^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) +$$

$$\frac{2A(Z(\xi) - z(x))}{CD} \left[(1 - 2\nu) + \frac{4B}{DC^2} (Z(\xi) - z(x))^2 \right] E\left(m, \pi/2\right)$$

As constantes A , B , C , D , F , H , M , N , S e V são definidas como seguem:

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1 - \nu)}$$

$$B = R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2}$$

$$D = (R(\xi) - r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2$$

$$F = R(\xi)^2 - r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2$$

$$H = r(x)^2 - R(\xi)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2$$

$$M = 2R(\xi)^2 + r(x)^2 + 2(Z(\xi) - z(x))^2$$

$$N = 2R(\xi)^2 + 3(Z(\xi) - z(x))^2$$

$$S = 2R(\xi)^2 - 3r(x)^2 + 4(Z(\xi) - z(x))^2$$

$$V = 3r(x)^2 + 2(Z(\xi) - z(x))^2$$