



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

PEDRO GREGO

Dinâmica de um Autotensionador Mecânico Sujeito ao Atrito Seco

CAMPINAS
2015

PEDRO GREGO

Dinâmica de um Autotensionador Mecânico Sujeito ao Atrito Seco

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO(A)
ALUNO PEDRO GREGO E ORIENTADA PELO
PROF. DR ROBSON PEDERIVA

.....
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

**CAMPINAS
2015**

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

G862d Grego, Pedro, 1989-
Dinâmica de um autotensionador mecânico sujeito ao atrito seco / Pedro Grego. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Robson Pederiva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Atrito. 2. Molas. 3. Dinâmica. 4. Duffing, Equações de. I. Pederiva, Robson, 1957-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Dynamics of a belt-tensioner subjected to dry friction

Palavras-chave em inglês:

Friction

Springs

Dynamic

Duffing, Equation

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Robson Pederiva [Orientador]

Auteliano Antunes dos Santos Júnior

Marcelo Becker

Data de defesa: 18-09-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INTEGRADOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Dinâmica de um Autotensionador Mecânico
Sujeito ao Atrito Seco

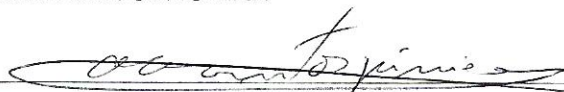
Autor: Pedro Grego

Orientador: Robson Pederiva

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente
DSI/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Junior
DSI/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Marcelo Becker
USP/SÃO CARLOS

Campinas, 18 de Setembro de 2015.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Rogério e Maria Teresa, por todo o sacrifício feito durante suas vidas pelo meu bem, e pelo bem do meu irmão Paulo, que está iniciando seus estudos este ano na UNICAMP. Que este trabalho sirva de inspiração a ele, para que nunca deixe de acreditar no impossível. Mantenha o Status...

Agradecimentos

A Deus, por tudo o que as palavras não podem exprimir.

Aos meus pais e meu irmão Paulo, e pelo indispensável apoio no momento das difíceis decisões que tomei para poder concluir este trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Robson Pederiva, pela orientação e amizade ao longo destes anos, pela paciência nos momentos iniciais, e especialmente pela fraternal acolhida quando manifestei a intenção de retornar.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, por terem aceitado contribuir para o meu crescimento profissional e técnico.

Aos meus colegas da UNICAMP, Henrique, Fábio Dalmazzo, Marcos, Jakerson, Clodoaldo, André, Diego, Marcus Varanis, Fabio Menegatti, Hugo e Vinícius Simionatto pela companhia diária, e pelas construtivas discussões técnicas.

Aos meus colegas profissionais Erich Lindenbach e Rodrigo Reis de Paula, pela valiosa motivação e pelo indispensável aconselhamento.

À KNIJNIK Engenharia Integrada.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante a iniciação científica e o mestrado.

Aos irmãos do Mosteiro de São Bento/SP pelas orações e lições.

Ora et Labora.

Regra de S. Bento

Resumo

GREGO, Pedro. Dinâmica de um Autotensionador Mecânico Sujeito ao Atrito Seco e Rigidez Não-Linear. 2015. 127p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Este trabalho tem como objetivo estudar a dinâmica de um autotensionador mecânico de correias, construído com mola não linear e sujeito ao atrito seco no contato do pino de apoio com o braço articulado. São apresentados os modelos de atrito mais aceitos, e a equação de Duffing é utilizada para modelar o comportamento não-linear da mola. Dois modelos matemáticos de tensionador são apresentados, sendo um considerando que a força externa é exercida pelos tramos adjacentes de correia, e outro considerando a força externa aplicada diretamente no tensionador. As influências do atrito e do pré-tensionamento são investigadas. A forma do fenômeno *stick-slip* também é investigada. É proposta uma modificação no modelo de atrito de Kang, com o objetivo de descrever um coeficiente de atrito assimétrico. A combinação de assimetria no atrito e rigidez não-linear também é investigada. Observa-se que a força normal variante, a assimetria no coeficiente de atrito e a força de pré-tensionamento são capazes de alterar a forma como o fenômeno *stick-slip* se apresenta. Por fim, é proposto um método para mapear o comportamento dinâmico do tensionador. Possíveis ocorrências de instabilidade também são investigadas.

Palavras-chave: Autotensionador, Atrito Seco, Dinâmica

Abstract

GREGO, Pedro. Dynamics of a Belt-Tensioner Subjected to Dry Friction. 2015. 127p. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

This work studies the dynamical behavior of a belt-tensioner pulley, constructed with a nonlinear spring and submitted to dry-friction on the contact of the pin with an articulated arm. Friction models are addressed, and the Duffing's equation is used to model the spring's nonlinear behavior. Two mathematical models of the belt-tensioner is presented, one considering the external force caused by the adjacent belt spans, and other considering the external force applied directly on the tensioner. The influences of friction and pre-load moment are numerically addressed. The stick-slip behavior of the system is also studied. It is proposed a modification on Kang's friction model in order to describe friction asymmetry. The combination of friction asymmetry and nonlinear-spring is addressed. It is seem that the varying normal load, the friction asymmetry and the pre-load moment can change the form that the stick-slip phenomenon occurs. Finally, a method is presented to map the dynamical behavior of the belt-tensioner. Possible instability conditions are investigated.

Keywords: Belt Tensioner, Dry Friction, Dynamics.

Lista de Ilustrações

1.1	Ilustração e esquematização de motor com transmissão por correia. Disponível em www.popularmechanics.com/cars/how-to/maintenance/4311197 Acesso em: Janeiro de 2015	21
1.2	Perfis comuns de correia. Correia Lisa(a), Correia em "V"(b), Correia "poly-V"(c), e Correia Dentada (d)	22
1.3	Esquema de acionamento de componentes por múltiplas correias V ou uma Poly-V	22
1.4	Esquematização das vibrações axiais (a), transversais (b) e rotacionais (b). . . .	23
1.5	Ilustração e esquematização da instalação de um autotensionador em motor. Disponível em www.repairall.com/serpentine-belt Acesso em: Janeiro de 2015 .	24
1.6	Aspectos construtivos do autotensionador.	25
1.7	Mecanismo de tensionamento. Nos momentos em que a correia está tracionada, o tensionador resiste ao movimento. Quando a correia afrouxa, o tensionador restitui o movimento, tensionando-a.	26
2.1	Esquematização do atrito em oposição à velocidade relativa.	33
2.2	Anotações no caderno de Leonardo Da Vinci a respeito do atrito. Disponível em www.artefactanews.blogspot.com.br Acesso em: Janeiro de 2015	34
2.3	Caracterização das regiões de atrito estático e cinético formuladas por Coulomb. .	34
2.4	Regiões de magnitude e sentido do atrito relacionados com a curva de força de atrito em função da velocidade	35
2.5	Modelo de bloco e esteira com ocorrência de <i>Stick-Slip</i>	36
2.6	Curva de deslocamento em função do tempo na presença do fenômeno <i>Stick-Slip</i> com patamares de parada nos extremos do movimento.	37
2.7	<i>Stick-Slip</i> em um sistema excitado harmonicamente, com a fase de <i>Sticking</i> nas regiões 1 e 3, e a fase <i>Slipping</i> na região 2.	38
2.8	Esquematização do aparato experimental para identificação do <i>Stick-Slip</i>	38
2.9	Esquematização do regime de Pré-Sliding.	40
2.10	Curva de Histerese para o caso do pré-deslocamento.	40
2.11	Esquematização da ruptura.	41
2.12	Representação e detalhe do efeito Stribeck.	42
2.13	Esquematização da memória de fricção.	42
2.14	Aproximação da Função Sinal.	45
2.15	Modelagem do atrito viscoso somado ao modelo de Coulomb	46

2.16	Comparação entre as formulações de Coulomb(esquerda) e <i>Sticktion</i> (direita).	47
2.17	Parametrização do modelo de atrito <i>sticktion</i> .	48
2.18	Modelos de Coulomb e Tustin.	49
2.19	Estudo de caso para o modelo de Kang.	52
2.20	Tipos de assimetria no coeficiente de atrito. a) Assimetria Total; b) Assimetria apenas no coeficiente cinético de atrito; c) Assimetria apenas no coeficiente estático de atrito.	53
2.21	Força de atrito como função do deslocamento aplicada ao modelo de Dahl.	55
2.22	Interpretação do atrito como deflexão das cerdas.	56
2.23	Interpretação dos parâmetros do modelo de LuGre.	58
2.24	Curvas de Força de Atrito em função da velocidade para os principais modelos de atrito.	59
3.1	Diagrama de corpo livre do autotensionador.	61
3.2	Comportamentos Linear e Não-Linear das molas.	63
3.3	Esquema de modelagem e diagrama de corpo livre do autotensionador	64
3.4	Simplificação da força externa.	68
3.5	Simplificação da Força Externa na presença de Pré-Tensionamento.	68
3.6	Diagrama de Corpo Livre para pequenos deslocamentos.	69
4.1	Curvas de posição para oito casos de modelo de atrito aplicados à formulação simplificada de tensionador, exibindo os tempos de simulação em segundos.	72
4.2	Curvas de posição para oito casos de modelo de atrito aplicados à formulação completa de tensionador, exibindo os tempos de simulação em segundos.	74
4.3	Curvas de posição para oito casos de modelo de atrito aplicados à formulação simplificada de tensionador, exibindo os tempos de simulação em segundos.	75
4.4	Curvas de Deslocamento e Histerese da formulação simplificada para força normal constante.	76
4.5	Força normal variante, Curvas de Deslocamento e Curva de Histerese da formulação simplificada para força normal variante.	77
4.6	Força normal variante, Curvas de Deslocamento e Curva de Histerese da formulação simplificada para força normal variante na presença de pré-tensionamento.	78
4.7	Força normal variante, Curvas de Deslocamento e Curva de Histerese da formulação simplificada para força normal variante no acréscimo de pré-tensionamento.	80
4.8	Região de <i>Sticking</i> para o caso de força normal constante sem pré-tensionamento.	83
4.9	Região de <i>Sticking</i> para o caso de força normal variante com pré-tensionamento.	83
4.10	Tipos de Rigidez não-linear.	84

4.11	Curvas de rigidez, deslocamento e histerese para a formulação simplificada de autotensionador sem pré-tensionamento. a) Rigidez não-linear $K_2 = 0N$, b) Rigidez não-linear $K_2 = 10N$, b) Rigidez não-linear $K_2 = 40N$	85
4.12	Curvas de rigidez, deslocamento e histerese para a formulação simplificada de autotensionador com pré-tensionamento, considerando-se mola com rigidez não-linearizar do tipo <i>Hardenning</i>	86
4.13	Curvas de atrito e deslocamento para o caso de assimetria total no coeficiente de atrito. Curva A - Coeficiente de atrito simétrico. Curva B - Coeficiente de atrito deslocada para cima. Curva C - Coeficiente de atrito deslocada para baixo. . . .	87
4.14	Curvas de atrito e histerese para o caso de assimetria total no coeficiente de atrito.	88
4.15	Curvas de atrito e deslocamento para assimetria apenas no coeficiente cinético de atrito. Curva A - Assimetria na velocidade positiva. Curva B- Assimetria na velocidade negativa.	88
4.16	Curvas de atrito e histerese para o caso de assimetria apenas no coeficiente cinético de atrito.	89
4.17	Curvas de atrito, deslocamento e velocidade para o caso de assimetria apenas no coeficiente estático de atrito. Curva A - Assimetria em velocidade negativa. Curva B - Assimetria em velocidade positiva.	90
4.18	Curvas de deslocamento e histerese para o caso de assimetria apenas no coeficiente estático de atrito.	91
4.19	Curvas de deslocamento, velocidade e curva de histerese para os casos de rigidez não-linear do tipo hardenning, assimetria apenas no coeficiente cinético, e a combinação dos dois casos.	92
4.20	Curvas de deslocamento, velocidade e curvas de histerese para os casos de rigidez não-linear do tipo hardenning, assimetria apenas no coeficiente estático, e a combinação dos dois casos.	93
4.21	Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador variando-se o coeficiente de atrito. $F_{pt} = 200N$ e $F_0 = 20N$. Configuração Geométrica $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$	94
4.22	Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador variando-se o coeficiente de atrito. Configuração Geométrica $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$	95
4.23	Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador em estudo de caso variando-se o ângulo θ_1 do tramo adjacente, e a amplitude de força externa. Coeficientes $\mu_k = 0.6$ e $\mu_s = 0.7$	96
4.24	Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador em estudo de caso variando-se os coeficientes de atrito e a força de pré-tensionamento. Ângulos adjacentes $\theta_1 = \pi / 4$ e $\theta_2 = \pi / 6$	97

4.25	Quatro possíveis tipos de comportamento dinâmico: Movimento Estável Sem Stick-Slip, Estável com Stick-Slip, Travamento e Instável.	98
4.26	Escolha do Período de Análise	99
4.27	Escolha de quatro períodos no tempo de simulação	100
4.28	Reconfiguração do Tempo de Simulação.	100
4.29	Fluxograma de Classificação de Comportamentos	102
4.30	Mapa de comportamento sobre formulação simplificada, variando-se coeficiente de atrito estático (μ_s), coeficiente de atrito cinético (μ_k) e variando-se razão de frequências (r). Amplitude de Força Externa = 10N. Travamento (\times), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)	103
4.31	Mapa de comportamento sobre formulação simplificada, variando-se coeficiente de atrito estático (μ_s), coeficiente de atrito cinético (μ_k) e variando-se razão de frequências (r). Amplitude de Força Externa = 20N. Travamento (\times), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)	104
4.32	Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação simplificada, comparando-se pré-tensionamento (F_{pt}), amplitude de força externa (F_0) e variando-se razão de frequências (r). Coeficiente $\mu_k = 0.3$. Travamento (\times), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)	105
4.33	Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação simplificada, comparando-se o pré-tensionamento (F_{pt}), amplitude de força externa (F_0) e variando-se razão de frequências (r). Coeficiente $\mu_k = 0.5$. Travamento (\times), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)	106
4.34	Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação completa, comparando-se o pré-tensionamento (F_{pt}), coeficiente de atrito cinético (μ_k) e variando-se razão de frequências (r). Travamento (\times), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)	107
4.35	Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação simplificada, comparando-se os ângulos dos tramos de correia adjacentes θ_1 e θ_2 , e variando-se razão de frequências (r). Travamento (\times), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)	108

Lista de Tabelas

2.1	Dados experimentais apresentados por Coulomb para o crescimento do coeficiente de atrito estático ao longo do tempo entre Carvalho e metal.	39
4.1	Parâmetros Gerais de Simulação para as duas Formulações Matemáticas.	71
4.2	CrITÉrios para Classificação do Comportamento	101

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

C	- Amortecimento genérico. [Nms/rad]
d	- Parâmetro de forma para o modelo de Kang.
f	- Coeficiente de atrito genérico.
F_0	- Amplitude de força externa [N]
F_c	- Coeficiente de atrito cinético para a formulação de dwell time
F_e	- Força de atrito estático no modelo de Dahl [N]
F_{pt}	- Força de pré-tensionamento [N]
F_s	- Coeficiente de atrito estático para a formulação de dwell time
$F_{s,\infty}$	- Máximo coeficiente de atrito estático para a formulação de dwell time
$F_{s,a}$	- Coeficiente de Atrito de Stribeck.
h	- Parâmetro de forma para o modelo de Kang.
I_{eq}	- Momento de inércia equivalente [$Kg.m^2$]
K	- Rigidez Torcional Genérica [Nm/rad]
K_{eq}	- Rigidez Torcional Equivalente [Nm/rad]
K_1	- Rigidez Torcional Linear [Nm/rad]
K_2	- Rigidez não-linear. [Nm/rad^2]
k	- Parâmetro de forma para o modelo de Coulomb
l_t	- Comprimento do braço articulado [m]
m	- Parâmetro empírico de forma para a formulação de dwell time
m_{eff}	- Massa efetiva [Kg]
M	- Massa Genérica [Kg]

M_m	-	Momento causado pela mola torcional [Nm]
M_c	-	Momento causado pelo amortecimento [Nm]
M_g	-	Momento causado pela gravidade [Nm]
M_a	-	Momento causado pelo atrito [Nm]
M_{pt}	-	Momento causado pelo pré-tensionamento [Nm]
N	-	Força Normal Genérica [N]
p	-	Assimetria total no coeficiente de atrito
P_i	-	Pontos de afixação
r	-	Razão de frequências
r_p	-	Raio do Pino de apoio [m]
$r_{i,per}$	-	Componentes perpendiculares do braço do tensionador [m]
$r_{i,par}$	-	Componentes paralelas do braço do tensionador [m]
t	-	Tempo genérico [s]
tp	-	Quantidade total de pontos calculados em um período
T_i	-	Tração nos tramos adjacentes [N]
t_d	-	Tempo de Repouso - <i>Dwell Time</i> [s]
u	-	Velocidade do suporte em Kang [rad/s]
v	-	Velocidade Genérica [rad/s]
v_1	-	Velocidade de transição da região de atrito estático para cinético [rad/s]
v_1	-	Velocidade de início da transição pela origem. [rad/s]
v_s	-	Velocidade de Stribeck. [rad/s]
yt	-	Porcentagem de imobilidade do tensionador em um período.
x	-	Deslocamento Genérico [rad]
z	-	Deflexão média de cerdas microscópicas.

Letras Gregas

α	-	Parâmetro de forma no modelo do modelo de Dahl.
α_g	-	Parâmetro de forma no modelo da região de Stribeck.
δ	-	Parâmetro de forma no modelo da região de Stribeck.
μ	-	Coeficiente de Atrito
μ_k	-	Coeficiente de Atrito Cinético
$\mu_{k,2}$	-	Coeficiente Assimétrico de Atrito Cinético
μ_s	-	Coeficiente de Atrito Estático
$\mu_{s,2}$	-	Coeficiente Assimétrico de Atrito Estático
μ_v	-	Coeficiente de atrito viscoso.
γ	-	Parâmetro empírico de forma para a formulação de dwell time
θ	-	Ângulo de rotação do tensionador [<i>rad</i>]
$\theta_{1,2}$	-	Ângulos auxiliares dos tramos da correia. [<i>rad</i>]
θ_b	-	Ângulos entre a aplicação da força e o braço do tensionador [<i>rad</i>]
$\psi_{1,2}$	-	Ângulos auxiliares [<i>rad</i>]
σ_0	-	Coeficiente de rigidez da curva tensão-deformação em nível microscópico.
σ_1	-	Coeficiente de rigidez das cerdas microscópicas em LuGre.
σ_2	-	Coeficiente de amortecimento das cerdas microscópicas em LuGre
τ	-	Atraso puro na formulação de Armstrong
ω	-	Frequência de Excitação [<i>rad/s</i>]
ω_n	-	Frequência natural [<i>rad/s</i>]

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivos	26
1.2	Organização do Trabalho	27
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
2.1	Autotensionadores e Sistemas de Transmissão por Correias	29
2.2	O Fenômeno do Atrito e suas Características	33
2.2.1	O fenômeno <i>Stick-Slip</i>	36
2.2.2	Tempo de Repouso (<i>Dwell Time</i>)	39
2.2.3	<i>Pre-Sliding</i>	40
2.2.4	Força de Ruptura	41
2.2.5	Efeito Stribeck	41
2.2.6	Atraso de Fricção	42
2.3	Modelos de Atrito	43
2.3.1	Modelo de Coulomb	44
2.3.2	Modelo Viscoso	46
2.3.3	Modelo Sticktion	47
2.3.4	Modelo de Tustin	49
2.3.5	Modelo de Armstrong	50
2.3.6	Modelo de Kang	51
2.3.7	Coeficiente de Atrito Assimétrico	53
2.3.8	Modelo de Dahl	55
2.3.9	Modelo de LuGre	57
2.4	Comentários sobre a Escolha do Modelo de Atrito	58
2.5	Resumo do Capítulo	60

3	MODELAGEM MATEMÁTICA	61
3.1	Modelagem Tensionador-Correia	61
3.1.1	Momento devido à Mola Torcional (M_m)	63
3.1.2	Momento Devido aos Tramos Adjacentes da Correia (M_c)	64
3.1.3	Momento Devido ao Pré-Tensionamento de Instalação (M_{pt})	66
3.1.4	Momento Devido à Força de Atrito (M_a)	66
3.1.5	Equação de Movimento Tensionador-Correia	67
3.2	Modelagem Tensionador sem Correia	67
3.3	Resumo do Capítulo	70
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	71
4.1	Parâmetros Matemáticos de Simulação	71
4.2	Aplicação dos Modelos de Atrito	72
4.3	Os efeitos da Normal Variante e do Pré-Tensionamento	76
4.4	Região de <i>Sticking</i>	81
4.5	Efeito da Rigidez Não-Linear	84
4.6	Efeitos da Assimetria no Coeficiente de Atrito	87
4.7	Rigidez Não Linear em Combinação com Coeficiente de Atrito Assimétrico	92
4.8	Instabilidade no Sistema Não-Linear	94
4.9	Mapas de Comportamento	98
4.9.1	Conceito	98
4.9.2	Escolha do Período de Análise	99
4.9.3	Análise do Período e Classificação do Comportamento	101
4.9.4	Mapas de Comportamento: Formulação Simplificada	102
4.9.5	Mapas de Comportamento: Formulação Completa	106
4.10	Resumo do Capítulo	108
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	109
5.1	Sugestões para os Próximos Trabalhos	112
	Referências	113
	APÊNDICES	119
A	– Implementação dos Modelos de Atrito em Matlab	119
A.1	Modelo de Coulomb	119
A.2	Modelo Viscoso	120
A.3	Modelo Sticktion	121
A.4	Modelo de Tustin	123

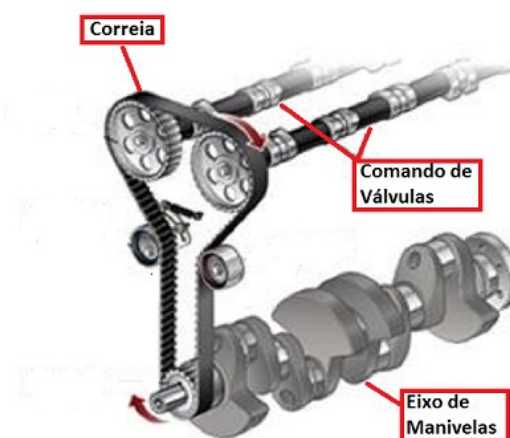
A.5	Modelo de Armstrong	124
A.6	Modelo de Kang	125
A.7	Modelo de Dahl	126
A.8	Modelo de LuGre	127

1 INTRODUÇÃO

Nos motores de combustão interna, a transmissão de potência do eixo de manivelas para o comando de válvulas e outros componentes girantes do motor tem sido feita por correias. A correia é um elemento mecânico de material flexível, normalmente feita de camadas de lonas e borrachas, que podem trabalhar com grandes faixas de força e rotações sem perder sua característica. Além da aplicação automotiva, correias são amplamente utilizadas em outras aplicações, tais como compressores, máquinas industriais ou qualquer outro sistema cuja distância entre os eixos rotativos é grande.



(a) Montagem externa



(b) Esquemática interna

Figura 1.1: Ilustração e esquematização de motor com transmissão por correia. Disponível em www.popularmechanics.com/cars/how-to/maintenance/4311197 Acesso em: Janeiro de 2015

As correias passaram a ser usadas nos anos 1970, em substituição às correntes metálicas, ainda encontradas em alguns automóveis. O uso de correias é vantajoso em relação ao uso de correntes metálicas, pois são mais baratas, produzem menos ruído e possibilitam maiores deformações. Isto é importante para uma boa transmissão do movimento, pois diminui o efeito de eventuais flutuações de torque. Em contrapartida, as correias devem ser trocadas com maior regularidade, quando comparadas com as correntes metálicas que possuem maior vida útil (ZHU E PARKER, 2008).

Existem vários tipos de correias utilizadas em sistemas de transmissão. Os tipos mais comuns são as correias lisas, correias em V, correias em poly-V e correias dentadas, conforme ilustra a Figura 1.2. As correias poly-V são, normalmente, as mais utilizadas neste tipo de aplicação. Estas correias, apesar de terem a espessura pouco maior que as correias lisas, apresentam maior área de contato com as polias que acionam, pois apresentam vários feixes ou estrias que aumentam esta área, garantindo melhor transmissão de potência e menor chance de deslizamento (MARTINS, 2013).

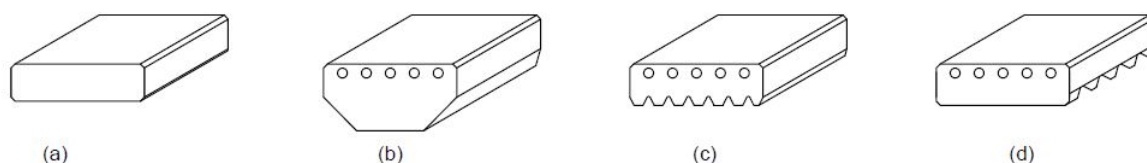


Figura 1.2: Perfis comuns de correia. Correia Lisa(a), Correia em "V"(b), Correia "poly-V"(c), e Correia Dentada (d)

Atualmente uma única correia poly-V é utilizada para o acionamento de vários acessórios automotivos ao mesmo tempo, tais como o alternador, a direção hidráulica, bomba de água e ar condicionado, conforme ilustra a Figura 1.3. Até a sua invenção, estes acessórios eram quase que exclusivamente acionados por várias correias V (SANTOS, 2010).

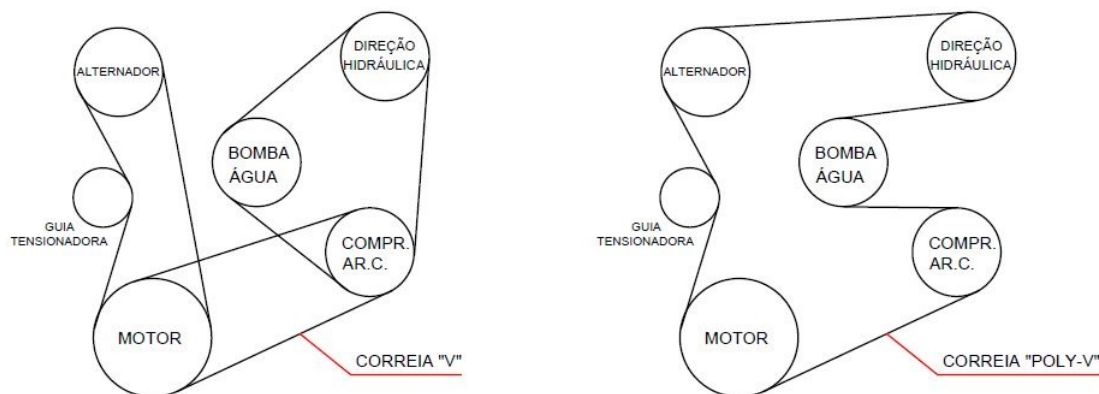


Figura 1.3: Esquema de acionamento de componentes por múltiplas correias V ou uma Poly-V

A transmissão de potência da correia para os elementos girantes do motor se dá por meio do atrito entre as polias e os canais da correia. A tensão aplicada à correia é responsável por pressioná-la contra a polia do elemento girante, fazendo com que, ao iniciar o movimento, a polia movida acompanhe o movimento da correia fazendo o sistema girar. Para que a transmissão de potência seja efetiva, a tensão à qual a correia está submetida deve ser suficientemente alta, a fim de gerar o atrito necessário para girar as polias.

Ao realizar a transmissão da potência em um motor de combustão interna, a correia está sujeita a uma soma de esforços estáticos e dinâmicos. No momento da montagem do sistema, é aplicado um esforço estático que colocará o sistema em seu ponto de equilíbrio de operação. O caráter da combustão fará com que o torque fornecido pelo motor tenha um comportamento dinâmico, que é somado ao esforço estático aplicado na montagem.

Esta flutuação de tensão, e outros fatores como excentricidades nas polias, excitam a correia e fazem com que este elemento esteja sujeito a vibrar. Existem dois tipos de vibração a que a correia pode estar submetida, conforme ilustração da Figura 1.4. O primeiro tipo é chamado de vibração axial e ocorre no sentido do eixo da correia. Esta vibração pode causar perda na transmissão de potência e desacoplamento dos dentes da correia. O segundo tipo é denominado vibração transversal, que é a vibração normal ao sentido do eixo da correia. Esta vibração causa ruído, reduz a vida útil da correia e prejudica o acoplamento dos dentes da correia. O terceiro modo de vibração de uma correia é o chamado modo rotacional, onde a correia gira em torno de seu eixo (NEWARD, 2006).

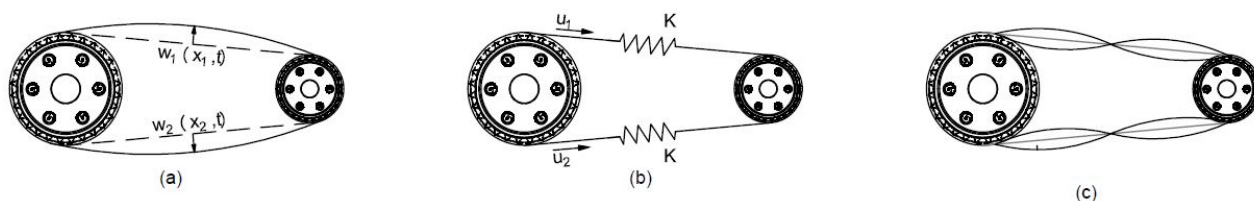


Figura 1.4: Esquematização das vibrações axiais (a), transversais (b) e rotacionais (b).

O funcionamento adequado do sistema de transmissão está relacionado à tensão de operação aplicada na correia. Se a correia for submetida a níveis de tensão abaixo do adequado, ela não será capaz de transmitir adequadamente o torque fornecido pelo motor. Neste caso, força de atrito na interface da correia com a polia será reduzida podendo resultar em deslizamento da correia, aquecimento das polias e perda de sincronismo entre os elementos girantes. Caso os níveis de tensão na correia forem maiores do que o adequado, os elementos girantes poderão sofrer sobrecarga e a correia perderá sua funcionalidade. Portanto, é necessário que a tensão aplicada na correia durante o funcionamento do motor esteja dentro dos limites aceitáveis de projeto.

Outro fator a ser analisado em um sistema de transmissão é a vida útil da correia, que está intimamente ligada às flutuações de tensão a que ela está submetida. Grandes flutuações de tensão podem levar à propagação de trincas e ocasionar a falha da correia por fadiga. Neste sentido, é essencial reduzir as flutuações de tensão nos tramos da correia para prolongar a vida útil do elemento.

Além de influenciar a vida útil da correia e o funcionamento do sistema, a vibração e os ruídos vindos da correia e dos sistemas por ela acionados afetam a percepção dos passageiros quanto ao conforto. É necessário, portanto, assegurar que o ruído provocado pela vibração da correia esteja dentro dos limites aceitáveis de conforto, garantindo boa percepção quanto à qualidade e a confiabilidade (SANTOS, 2010).

Neste contexto, são empregados dispositivos que têm a finalidade de diminuir as flutuações de tensão na correia, prolongando a sua vida útil e reduzindo o ruído decorrente da vibração da correia e dos sistemas por ela acionados. O principal elemento usado para isto é o autotensionador mecânico, ilustrado na Figura 1.5, que é fixo ao bloco do motor e está em contato permanente com a correia.

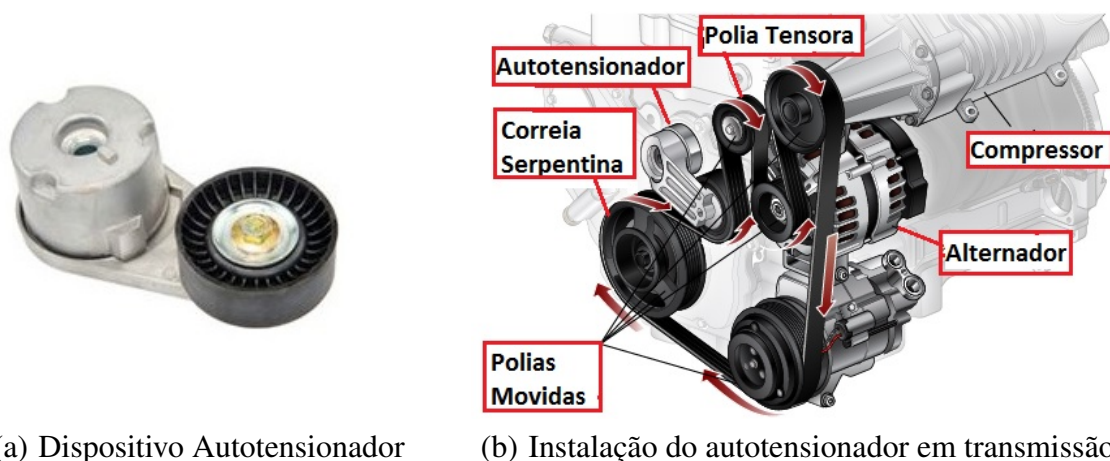


Figura 1.5: Ilustração e esquematização da instalação de um autotensionador em motor. Disponível em www.repairall.com/serpentine-belt Acesso em: Janeiro de 2015

O autotensionador melhora consideravelmente a vida útil de um sistema de transmissão por correia pois compensa automaticamente as variações de tensão na correia conforme as condições de operação se alteram. O dispositivo de autotensionamento reduz também a amplitude de vibração dos tramos da correia, e melhora o desempenho do sistema. As principais funções do autotensionador são (SCHAEFFLER, 2011):

- Manter a correia tensionada garantindo o sincronismo entre as polias.
- Reduzir vibração da correia e consequente ruído.
- Compensar as folgas do sistema.
- Compensar as irregularidades como variação de temperatura e o desgaste da correia.

Quanto ao seu aspecto construtivo, o autotensionador apresenta os seguintes componentes, ilustrados na Figura 1.6:

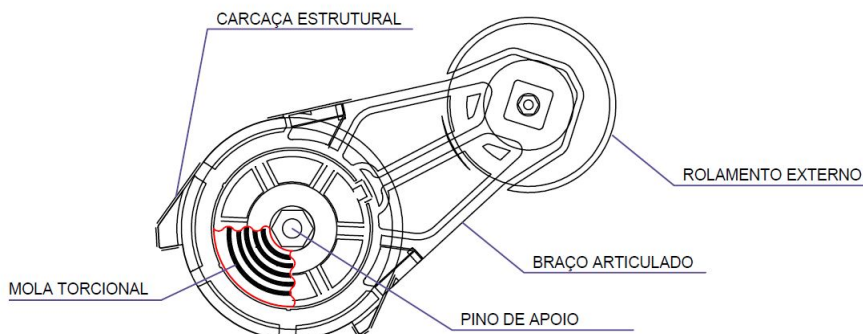


Figura 1.6: Aspectos construtivos do autotensionador.

A *Carcaça Estrutural*, responsável por conferir resistência mecânica aos esforços mecânicos que o autotensionador está submetido. Nesta parte estrutural são montados os demais componentes do dispositivo.

O *Pino de Suporte*, fixado ao bloco do motor e solidário à parte estrutural do autotensionador. O pino é o eixo de rotação do autotensionador, e em geral é vazado para permitir a passagem de um parafuso que fixará a estrutura ao motor. O pino de suporte está submetido ao atrito seco no contato relativo com o braço do autotensionador.

O *Braço Girante*, do autotensionador tem uma das suas extremidades montada junto ao pino de suporte, geralmente estando separados por um elemento lubrificante mecânico ou viscoso. É responsável por realizar o movimento de tensionamento e relaxamento da correia. O contato entre o braço e o pino está sujeito ao atrito seco. O atrito introduz não-linearidade e amortecimento no sistema e é um dos objetos de estudo deste trabalho.

A *Mola Torcional*, responsável por armazenar energia e realizar a restituição do movimento. A mola é instalada com uma extremidade fixada ao corpo do tensionador, e a outra extremidade fixa no braço girante.

As molas podem ser lineares ou não, exibindo rico comportamento dinâmico quando não lineares e submetidas a grandes deslocamentos. Existem soluções construtivas em que uma mola helicoidal convencional é empregada, com o mesmo princípio de funcionamento. O *Rolamento Externo*, montado na outra extremidade do braço girante e responsável por fazer o acoplamento entre o autotensionador e a correia. É montado em permanente contato com a parte de trás da correia, no lado menos tracionado.

O autotensionador pode conter ainda outros elementos geradores de atrito, como buchas metálicas ou pressurização dos componentes, com o intuito de introduzir mais amortecimento no sistema. As soluções construtivas encontradas pelos diversos fabricantes deste componente variam em função da aplicação, mas em praticamente todos os casos tem-se um pino de articulação fixo ao bloco do motor, que suporta um braço articulado com restituição por mola torcional.

Outra alternativa também usada é o autotensionador hidráulico. Nesta solução a mola do tensionador fica na câmara de um pistão imerso em óleo ou fluido. Ao se movimentar, o pistão faz com que o fluido saia da câmara, produzindo o efeito de um amortecimento viscoso (MARTINS, 2013).

O mecanismo de tensionamento funciona da seguinte forma: Nos momentos em que a correia é tracionada, a mola do tensionador resiste a esse movimento e impede que a correia oscile em grandes amplitudes. Já quando a correia está menos tracionada, a mola torcional restitui o movimento e impede que a correia fique frouxa, mantendo assim a boa transmissão de potência. A Figura 1.7 ilustra o funcionamento do mecanismo de tensionamento.



Figura 1.7: Mecanismo de tensionamento. Nos momentos em que a correia está tracionada, o tensionador resiste ao movimento. Quando a correia afrouxa, o tensionador restitui o movimento, tensionando-a.

A presença do atrito seco no eixo de rotação do autotensionador introduz uma não-linearidade no sistema, que passa exercer forte influência em seu comportamento dinâmico. O comportamento dinâmico do autotensionador, a influência do atrito seco e as possíveis regiões de instabilidade deste sistema são o objeto de estudo deste trabalho.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral estudar a dinâmica de um autotensionador mecânico sujeito ao atrito seco no movimento relativo entre o braço articulado e o pino de apoio. Como objetivos específicos do trabalho, citam-se:

- Investigar a influência do atrito seco no comportamento dinâmico do autotensionador.
- Identificar qual o modelo de atrito mais adequado para a presente aplicação.
- Verificar regiões de travamento e ocorrência do *Stick-Slip*.
- Modelar matematicamente um coeficiente de atrito assimétrico em relação à velocidade, e investigar suas influências.
- Compreender o efeito gerado pelo pré tensionamento e pela força normal.
- Buscar possíveis regiões de instabilidade dinâmica.

1.2 Organização do Trabalho

O trabalho é dividido em 5 capítulos nos quais são apresentados a revisão bibliográfica, os fundamentos teóricos, a modelagem matemática, os resultados e as conclusões. O trabalho contém ainda um anexo com a implementação computacional dos modelos de atrito. A seguir, faz-se uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 2 - Apresenta a revisão bibliográfica associada aos temas de atrito e dinâmica de autotensionadores. O fenômeno do atrito é apresentado através de um breve histórico, e são discutidas suas principais características. São apresentados os modelos de atrito existente e é feita uma breve discussão a respeito do uso destes modelos. São apresentados os trabalhos mais recentes que lidaram com autotensionadores, e o fenômeno *Stick-Slip* é caracterizado.

Capítulo 3 - Tomando-se como base os aspectos construtivos do autotensionador apresentados na introdução, é feita a modelagem matemática do problema. São modelados a Força Externa, a Força Normal, a Força de Atrito. São apresentados dois modelos de tensionador, sendo um completo envolvendo os tramos de correia adjacentes, e outro simplificado contando apenas com o tensionador sujeito a uma força genérica.

Capítulo 4 - São apresentados os resultados e discussões do trabalho, discutindo principalmente a dinâmica do autotensionador. A presença do *Stick-Slip* é discutida, assim como os efeitos do pré-tensionamento e da normal variante. Com a finalidade de melhor observar alguns fenômenos, é apresentado o conceito de região de *Sticking*. Discutem-se os efeitos do coeficiente de atrito assimétrico. São feitas simulações combinando rigidez não-linear e coeficiente de atrito assimétrico. Algumas regiões de instabilidade são identificadas e discutidas. Por fim, são apresentados os mapas de comportamento e é feita uma breve discussão sobre o tema.

Capítulo 5 - Onde são apresentadas as conclusões e as sugestões para os trabalhos futuros.

No apêndice A encontram-se os algoritmos para implementação computacional em MATLAB dos modelos de atrito utilizados neste trabalho. No início e no fim de cada capítulo é feito uma introdução e um resumo do capítulo visando uma maior compreensão do leitor.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse capítulo, apresenta-se o conceito de atrito através de um breve histórico de seu estudo e suas principais características. Apresentam-se os principais modelos de atrito existentes e são feitas considerações sobre a escolha do modelo de atrito a ser utilizado. Apresentam-se ainda os trabalhos anteriores relacionados ao emprego de autotensionadores. Descreve-se o fenômeno *Stick-Slip* e é feita uma revisão bibliográfica do estudo de autotensionadores.

2.1 Autotensionadores e Sistemas de Transmissão por Correias

A dinâmica de um sistema de transmissão por correia com o autotensionador acoplado tem sido extensivamente estudada, porém poucos trabalhos são dedicados ao estudo individual do comportamento dinâmico de um autotensionador. Ao longo dos últimos anos, outros estudos foram feitos com o objetivo de modelar satisfatoriamente sistemas vibratórios sujeitos ao atrito seco e alguns deles investigam a influência do atrito do autotensionador na dinâmica dos tramos de correia acoplados ao autotensionador.

Ulsoy *e colaboradores* (1985) apresentaram o primeiro trabalho considerando um sistema de transmissão por correia com a presença do autotensionador, e modelaram os tramos como cordas com vibração transversal e longitudinal. Descreveram diversos mecanismos que causam instabilidade nos sistemas com correia, especificando instabilidades do tipo Mathieu devido a excitações paramétricas.

Um estudo mais completo do sistema de transmissão por correia foi feito por Beikmann (1997). Seu estudo mostra a existência de um acoplamento linear entre as vibrações rotacionais e transversais nos tramos adjacentes ao tensionador. Através de uma análise não-linear, observou a excitação paramétrica de um modo de vibração transversal dominante (MARTINS, 2013).

Neward (2006) utilizou a formulação de Beikman para fazer um estudo do acoplamento do autotensionador ao sistema. O autor investigou a importância de se modelar o conjunto correia e tensionador como um sistema acoplado, e explorou a capacidade de cada um dos modelos de identificar rapidamente mudanças no sistema.

Martins (2013) estudou um sistema de transmissão por correia serpentina e autotensionador através de um modelo matemático não-linear. Uma de suas conclusões é que o fenômeno *Stick-Slip* é indesejável, pois sua composição em frequências pode excitar parametricamente o sistema, gerando instabilidades. Paralelamente, utilizou técnicas de análise modal para identificação de parâmetros em função da velocidade.

Na literatura é possível encontrar alguns trabalhos exploraram a dinâmica de um sistema massa mola, com um grau de liberdade, sujeito ao atrito seco. Estes trabalhos têm grande importância, pois podem ter sua formulação matemática adaptada para modelar o autotensionador.

Den Hartog (1930) apresentou um trabalho pioneiro que serviu de base para posteriores desenvolvimentos na dinâmica de problemas envolvendo o atrito. Foi considerado um sistema simplificado de um grau de liberdade, contendo um sistema massa-mola com atrito no contato deslizante. O trabalho desenvolveu a solução analítica exata para a resposta temporal do sistema excitado harmonicamente, considerando que os coeficientes estático e cinético possuem o mesmo valor.

Mais de cinco décadas depois, Shaw (1986) aprimorou a teoria considerando o coeficiente estático diferente do coeficiente cinético. O trabalho desenvolveu ainda estudos sobre a estabilidade desta aplicação, fazendo uso da teoria de bifurcações e mapas de Poincaré.

Csernak e Stepan (2006) realizaram um importante trabalho, que investigou a dinâmica de um oscilador massa-mola na presença do atrito. O trabalho foi uma continuação do estudo feito por Shaw (1986) e analisou o problema principalmente na condição de deslizamento puro. Uma das considerações feitas pelo trabalho é a força normal constante, o que não se aplica para o caso do autotensionador.

Kang (2009) investigou a influência do atrito seco na estabilidade de um sistema massa mola auto-excitado pelo contato com uma esteira rolante. Além de investigar a dinâmica desta aplicação, Kang contribuiu com o desenvolvimento de um dos modelos de atrito aplicados neste trabalho.

Recentemente Licsko e Csernak (2012) investigaram a existência do comportamento caótico em um sistema massa mola, de um grau de liberdade e sujeito ao atrito seco. Uma das conclusões do estudo é que nos casos em que o coeficiente de atrito estático supera em mais de dez vezes o coeficiente de atrito cinético, pode-se esperar a existência do comportamento caótico.

Outros autores exploraram apenas o comportamento dinâmico do tensionador ou à modelagem de atrito envolvida.

Lovas *e colaboradores* (2006) fizeram uma comparação dos comportamentos dinâmicos de autotensionadores sujeitos ao atrito seco e ao atrito viscoso e trouxeram grande contribuição para a modelagem matemática de um autotensionador. No seu estudo, a força externa é modelada como dependente das trações nos tramos adjacentes da correia e o termo de excitação externa é considerado como dependente do ângulo entre as correias.

Um dos mais atuais campos de pesquisa considera a integração do autotensionador como um atuador em um sistema de controle que com base na tensão das correias aplica o tensionamento mais adequado para aumentar a vida útil da correia. Um importante estudo neste sentido foi realizado por Chen e Zhang (2006). Neste estudo o autotensionador é modelado como um atuador e os critérios de Lyapunov são utilizados para definir as regiões de estabilidade do sistema.

Manin *e colaboradores* (2007) fizeram uma comparação entre a eficácia de um autotensionador com atrito seco, com a utilização de um autotensionador hidráulico e exploraram a influência de cada um na transmissão de potência para as polias.

Chatelet *e colaboradores* (2007) fizeram o estudo das curvas de histerese de um autotensionador sujeito a força normal constante, aplicando modelos dinâmicos de atrito, e descreveram um método para a escolha do modelo de atrito a ser utilizado.

Gouvea (2008) explorou o comportamento dinâmico do autotensionador sujeito ao atrito seco no pino de apoio, e observou a existência do fenômeno *Stick-Slip* nos extremos do deslocamento. O fenômeno *Stick-Slip* ocorre toda vez que há um equilíbrio entre as forças excitadora e de atrito, fazendo com que o deslocamento permaneça constante por alguns momentos. Esta modelagem mostrou-se satisfatória para investigar o efeito do atrito, e serviu de base para trabalhos posteriores.

Palumbo (2009) deu continuidade ao trabalho de Gouvea e investigou a influência dos demais parâmetros como a razão de amortecimento, amplitude da força de atrito e amplitude da força externa, na dinâmica do autotensionador. Introduziu também o conceito de força de atrito assimétrica, na qual a força de atrito seria maior para velocidades negativas e menor para velocidades positivas, e fez simulações numéricas sob esta condição considerando a força normal constante.

Outro fato interessante verificado neste trabalho foi que a oscilação não tinha ponto de equilíbrio centrado em zero e, portanto, a oscilação também tinha caráter assimétrico. Foi verificado experimentalmente que a subida da curva de histerese não é completamente suave. Possui uma acentuada curvatura que levantou a suspeita de que a rigidez era não-linear, um comportamento que não havia sido considerado nos modelos até então.

Em sequência a este trabalho, Garcia (2009) obteve dados experimentais para as curvas de deslocamento e histerese de um autotensionador e verificou que experimentalmente o Stick-Slip ocorria assimetricamente nos extremos do movimento. No extremo superior, o período em que o deslocamento permanecia constante era maior do que no extremo inferior, e isto pôde ser observado também nos gráficos de histerese.

Duan e Singh (2009) conduziram o primeiro estudo de um autotensionador sujeito a carga normal variante. Este trabalho teve foco na resposta em frequência do sistema, fazendo uso do Método do Balanceamento Harmônico (*HBM*). A investigação foi estendida para um problema com dois graus de liberdade, porém limitou-se ao estudo no domínio da frequência.

Mais recentemente, Butikov (2014) realizou um importante estudo considerando o efeito do atrito em um pêndulo com mola. Foi estudado o comportamento do sistema nas suas frequências harmônicas e sobretudo na região de ressonância. O estudo, porém, considera força normal constante, o que é uma simplificação.

Por fim, uma explicação técnica bem detalhada do funcionamento e da instalação de autotensionadores pode ser encontrada em Metrik (2014). Neste catálogo, o fabricante especifica as funções do autotensionador e aplicações envolvidas em seu funcionamento, constituindo rica fonte de consulta para instrução.

2.2 O Fenômeno do Atrito e suas Características

O atrito é a força de reação tangencial entre duas superfícies em contato. Fisicamente estas forças de reação são resultado de muitos diferentes mecanismos que dependem da topologia e geometria do contato, das propriedades dos materiais envolvidos, do volume e da superfície dos corpos, da velocidade relativa entre os corpos e do regime de lubrificação (PAZDERA, 2005).

O fenômeno do atrito está presente em inúmeras aplicações de engenharia, e exerce grande influência na dinâmica dos sistemas. Trata-se de um fenômeno inevitável, altamente não-linear e que ocorre em todo o tipo de sistema mecânico. Essencialmente o atrito é uma força dissipativa que possui a mesma direção do movimento, e sentido oposto à velocidade, conforme ilustra o diagrama da Figura 2.1.

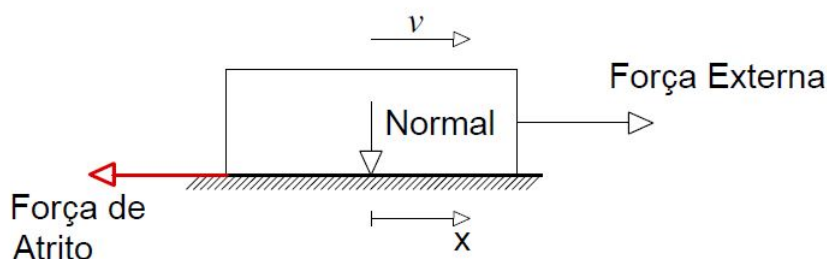


Figura 2.1: Esquematização do atrito em oposição à velocidade relativa.

O termo em inglês *friction* e o correspondente em português "fricção" têm origem no verbo *fricare* do Latim, traduzido como grudar. A curiosidade em estudar o fenômeno do atrito inspirou muitos pesquisadores ao longo de vários séculos e embora o fenômeno do atrito ainda seja amplamente estudado, ainda não foi possível alcançar o total entendimento do seu funcionamento.

A primeira tentativa documentada de modelar o atrito é atribuída a Leonardo Da Vinci. Leonardo teria sido o primeiro a notar que a força de atrito é diretamente proporcional à carga normal aplicada ao corpo, que a força de atrito é independente da área de contato e que o atrito depende do material das superfícies envolvidas. É interessante destacar que Leonardo chegou a estas conclusões quase trezentos anos antes de o cientista inglês Isaac Newton definir o que é força (PIATKOWSKI, 2014).

Leonardo nunca tornou público esse conhecimento, mas deixou-o registrado em suas anotações pessoais, com os desenhos ilustrados na Figura 2.2. A falta de divulgação levou o cientista francês Guillaume Amontons (1663-1705) a chegar, em 1699, nas mesmas conclusões de da Vinci (SUETTI, 2009).

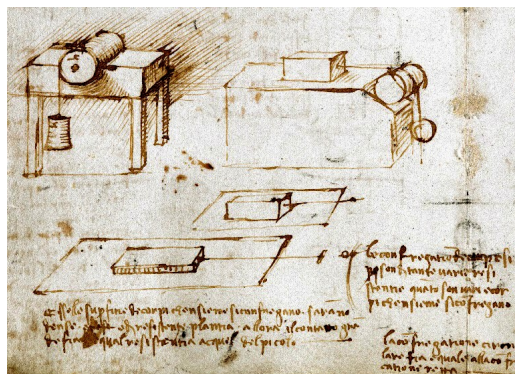


Figura 2.2: Anotações no caderno de Leonardo Da Vinci a respeito do atrito. Disponível em www.artefactanews.blogspot.com.br Acesso em: Janeiro de 2015

Anos mais tarde, o cientista suíço Leonhard Euler realizou vários estudos, e chegou à conclusão de que o atrito durante o regime de deslizamento deveria ser menor do que na iminência do deslizamento. Euler sugeriu que para todos os casos a força de atrito no regime de deslizamento deveria ser em torno da metade da força de atrito observada na iminência do deslizamento (MARTINS *e colaboradores*, 1990). Pouco tempo depois, o cientista inglês Charles Coulomb também colaborou fazendo uma distinção mais clara entre as regiões de atrito estático, descrita pelo coeficiente μ_s , e o atrito cinético μ_k , representados na Figura 2.3.

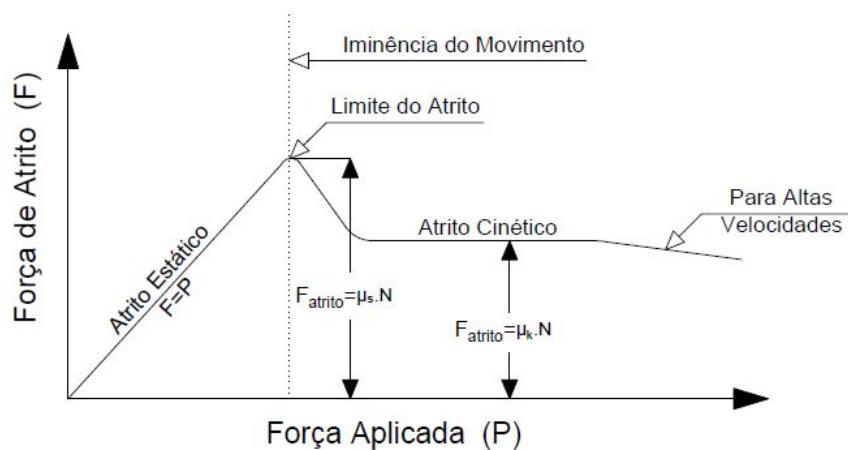


Figura 2.3: Caracterização das regiões de atrito estático e cinético formuladas por Coulomb.

Em uma de suas contribuições mais relevantes, caracterizou a região em que um corpo está na iminência do movimento com o coeficiente de atrito estático, e os momentos em que o corpo está em deslizamento com o coeficiente de atrito cinético. Realizou ainda vários experimentos buscando caracterizar os coeficientes de atrito para diversos materiais.

Coulomb foi o primeiro a formular uma expressão matemática que tentou modelar o atrito. Ele expressou o atrito como uma força de magnitude proporcional à força normal, e sentido oposto ao da velocidade relativa do corpo, conforme ilustra a Figura 2.4. Quando um corpo se move com velocidade relativa negativa, como ilustra a região 1 da Figura, a força de atrito assume valores positivos. Quando o corpo se move com velocidade relativa positiva, a força de atrito se opõe a este movimento e assume valores negativos, como mostra a região 3. A fronteira de transição entre velocidade positiva e negativa é representada pela região 2. A expressão proposta ficou conhecida como modelo de Coulomb, e ainda é uma das mais utilizadas devido à sua simplicidade e praticidade.

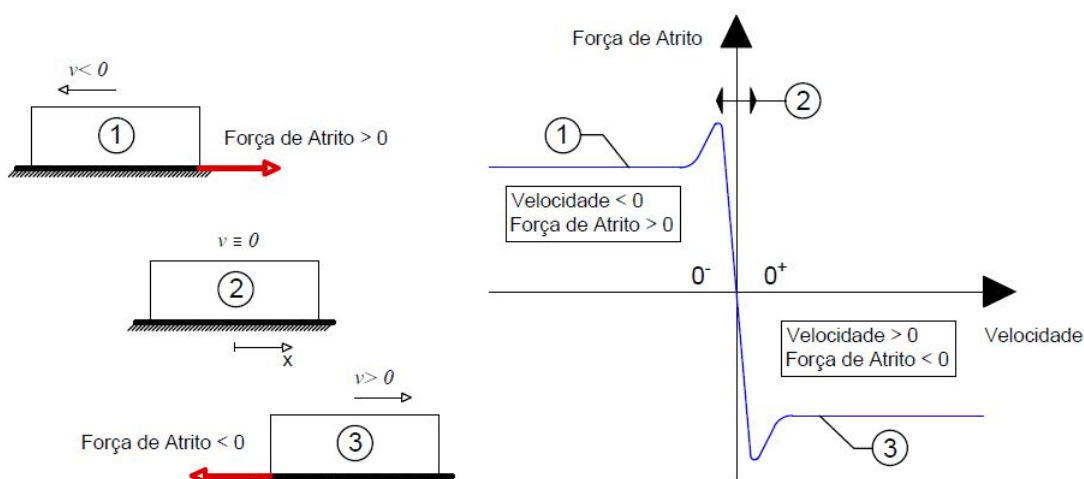


Figura 2.4: Regiões de magnitude e sentido do atrito relacionados com a curva de força de atrito em função da velocidade

Além de formular o primeiro modelo de atrito, Coulomb foi o primeiro a fazer referência ao fato de que o coeficiente de atrito estático aumenta com relação ao tempo em que as partes permanecem em contato estacionário antes do início do deslizamento, o chamado tempo de repouso, ou *dwell time*. Após as contribuições feitas por Coulomb, vários pesquisadores investigaram o tema ao longo dos anos. Porém o atrito continua sendo um fenômeno que não é completamente compreendido, sobretudo devido às dificuldades de modelagem dos fenômenos ocorridos próximos à velocidade nula.

Em algumas aplicações o atrito é um fenômeno desejado, por aumentar a estabilidade e introduzir amortecimento, mas por outro lado, o desgaste excessivo pode reduzir a performance e gerar aquecimentos indesejados. Uma vez que o atrito exerce forte influência na performance e no comportamento dos sistemas mecânicos, é de fundamental importância representar e prever corretamente os fenômenos relacionados ao atrito em todas as simulações e análises (MUVENGEI, 2012).

2.2.1 O fenômeno *Stick-Slip*

Stick-Slip é o nome dado a um fenômeno ocorrido no contato entre as superfícies de corpos que se deslocam com velocidade relativa na presença de atrito seco. Pode ocorrer tanto em movimentos rotacionais quanto em movimentos translacionais, e é um fenômeno cujo estudo é de grande importância no projeto de máquinas.

Existem duas formas de caracterizar a ocorrência do *stick-slip*. A primeira, e mais estudada forma, é o caso das oscilações auto-induzidas pelo atrito. O fenômeno pode ser explicado através da análise dinâmica de um sistema massa-mola simples, apoiado a uma esteira com velocidade relativa, conforme ilustra a Figura 2.5.

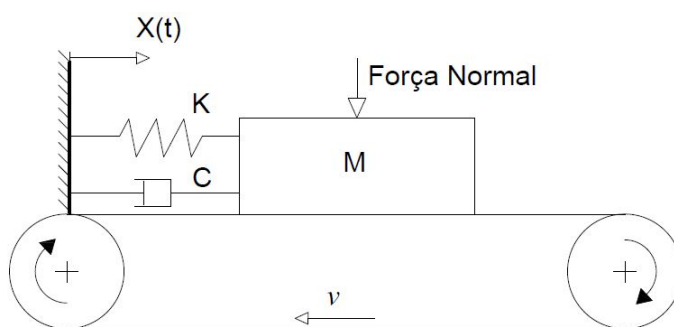


Figura 2.5: Modelo de bloco e esteira com ocorrência de *Stick-Slip*

Em um primeiro momento a esteira está em repouso e o peso do bloco fará com que haja uma força de atrito estático necessária para fazer o bloco se mover. No momento em que a esteira inicia o movimento, a força de atrito aplicada no sistema fará com que o bloco se mova, alongando a mola, até que a força de atrito no contato entre a esteira e o bloco seja igual à força elástica da mola.

Quando a força elástica da mola se iguala à força de atrito no contato, a resultante nula das forças faz com que o bloco pare o seu movimento e mantenha-se com posição constante em relação à esteira. Esta região é denominada *Sticking*, ou região de parada.

Após este momento em que o bloco apresenta o pico de sua oscilação, a força elástica da mola torna-se maior do que a força de atrito no contato, e o bloco é puxado para trás. Esta fase em ocorre o movimento de deslizamento é chamada região de *Slipping*, ou fase de deslizamento. A massa é acelerada até que a força elástica se iguale à força instantânea de atrito. Ao atingir o extremo esquerdo do movimento descrito na Figura 2.5, o ciclo se reinicia com o aumento do atrito entre as partes no contato.

O fenômeno *Stick-Slip* possui um comportamento bem característico nas curvas de deslocamento do bloco em função do tempo. Nestes gráficos, representados pela Figura 2.6, é possível observar a existência de patamares nos extremos do movimento oscilatório, onde a posição se mantém constante durante um certo período de tempo. Estes patamares ocorrem pois nestas regiões a força elástica não consegue superar a força de atrito, fazendo com que o corpo permaneça parado até que o atrito seja superado.

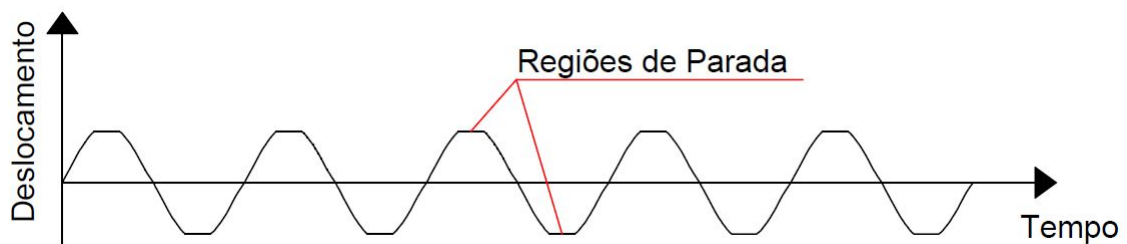


Figura 2.6: Curva de deslocamento em função do tempo na presença do fenômeno *Stick-Slip* com patamares de parada nos extremos do movimento.

A segunda forma de caracterizar a ocorrência do *Stick-Slip*, e que é mais próxima do modelo utilizado neste estudo, é o caso de sistemas com excitação externa. Neste caso, a oscilação não é auto-induzida pelo atrito, mas é modificada pela presença deste fenômeno através da ocorrência de *Stick-Slip*. O exemplo mais simples desta ocorrência é o de um sistema massa mola excitado harmonicamente, e apoiado em superfície estacionária com atrito seco, ilustrado pela Figura 2.7.

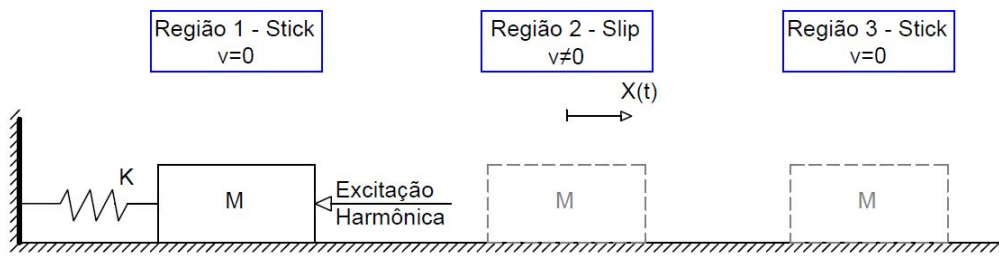


Figura 2.7: *Stick-Slip* em um sistema excitado harmonicamente, com a fase de *Sticking* nas regiões 1 e 3, e a fase *Slipping* na região 2.

Na Figura 2.7, as regiões 1 e 3 representam os extremos do movimento, onde as forças externas não são suficientes para vencer o atrito, fazendo com que o bloco permaneça em repouso. A região 2, localizada no intermédio dos extremos, ilustra a região de *Slipping*, onde as forças externas são superiores ao atrito.

O termo *Stick-Slip* foi criado por Bowden e Leben (1940), na Universidade de Cambridge, no experimento ilustrado pela Figura 2.8. Neste aparato, um movimento uniforme era aplicado à superfície P, em contato com a superfície Q, que gerava uma deflexão em torno do eixo WW do braço de apoio, e o valor desta deflexão era usado para calcular o atrito (FRANCESCHINI, 2014).

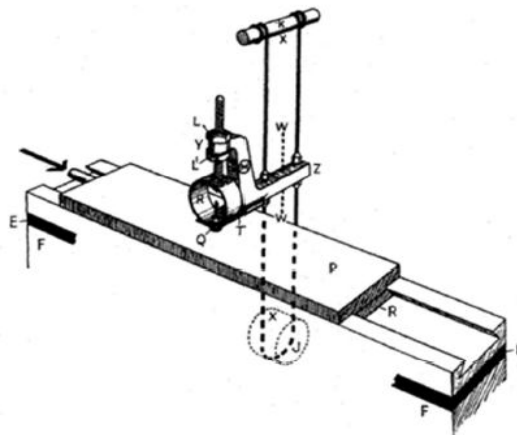


Figura 2.8: Esquematização do aparato experimental para identificação do *Stick-Slip*.

O *Stick-Slip* é geralmente indesejado em aplicações onde se buscam movimentos precisos e controle de posição, como é o caso de juntas robóticas. Existem três métodos para mitigar o *Stick-Slip* quando este é indesejado. Os dois primeiros são a introdução de amortecimento externo e a aplicação de um lubrificante no contato com atrito. O terceiro meio de se mitigar o *stick-slip* é aumentar a rigidez do sistema (RABINOWICZ, 1957).

2.2.2 Tempo de Repouso (*Dwell Time*)

Desde o século XVIII, era de conhecimento da comunidade científica que o coeficiente de atrito estático aumenta com o tempo em que as partes do contato atritivo permanecem em repouso entre si. Este tempo de imobilidade entre as partes é denominado tempo de repouso, ou *Dwell Time*, representado por t_d . (Armstrong-Helouvry, 1993) Este aumento pode ser explicado pelo aumento da área real de contato entre as superfícies com o passar do tempo (SUETTI, 2009).

Coulomb foi provavelmente o primeiro a observar a influência do tempo de repouso ao observar que o coeficiente de atrito estático (μ_s) entre um pedaço de carvalho e uma barra metálica aumentavam em 140% após um tempo de repouso de quatro dias, e resumiu os dados na Tabela 2.1 (PERSON, 2000).

Tabela 2.1: Dados experimentais apresentados por Coulomb para o crescimento do coeficiente de atrito estático ao longo do tempo entre Carvalho e metal.

Tempo de Repouso (min.)	μ_s (unid. arbitrárias não normalizadas)
0	5,02
2	7,90
4	8,66
9	9,25
26	10,36
60	11,86
960	15,35

Anos mais tarde, Kato *e colaboradores* (1972) propuseram um modelo analítico para descrever a dependência do atrito estático em função do tempo de repouso, descrito pela equação 2.1

$$F_s(t) = F_{s,\infty} - (F_{s,\infty} - F_c) e^{-\gamma \cdot (t_d)^m}, \quad (2.1)$$

onde $F_{s,\infty}$ é o valor máximo assumido pelo coeficiente de atrito estático ao longo do repouso, F_c é o coeficiente de atrito de Coulomb no momento da parada, e γ e m são parâmetros empíricos. Kato *e colaboradores* (1972) analisaram contatos conformes e obtiveram valores de γ entre 0.04 e 0.64, e valores de m entre 0,36 e 0,67.

2.2.3 Pre-Sliding

No estudo de sistemas com atrito, é comum assumir que não há movimento enquanto a força de atrito estático não tiver sido superada, isto é, se não há movimento não há deslizamento. Entretanto, experimentos realizados por Dahl (1968) concluíram que mesmo que não haja deslocamento macroscópico, existem pequenos deslocamentos no contato entre as superfícies, que se comporta como um elemento elástico, conforme ilustra a Figura 2.9.

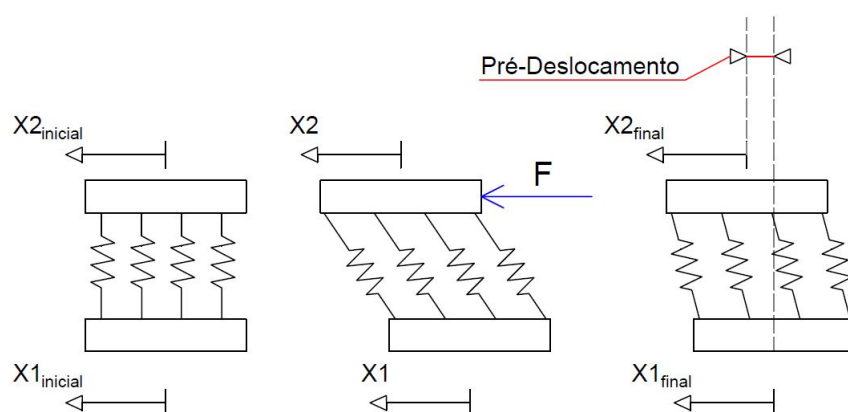


Figura 2.9: Esquematização do regime de Pré-Sliding.

Ainda no regime de atrito estático, verifica-se que após o descarregamento de uma força aplicada, parte do deslocamento sofrido não é recuperado, evidenciando assim uma deformação sofrida em nível microscópico. Este comportamento é ilustrado pela Figura 2.10, onde as linhas em tracejado representam a recuperação elástica das rugosidades da interface (Pereira, 2013).

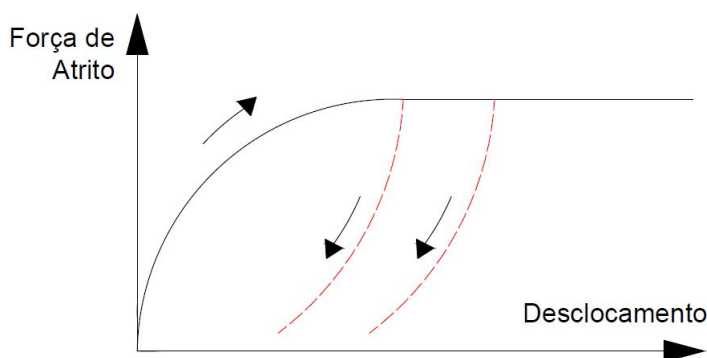


Figura 2.10: Curva de Histerese para o caso do pré-deslocamento.

Apesar de nesta fase o movimento ainda não ter iniciado, existe já um deslocamento microscópico permanente. Este fenômeno de deslocamento microscópico é referido na literatura como *pre-sliding*. O fenômeno *pre-sliding* é muito importante para as aplicações onde existe grande necessidade de precisão (ARMSTRONG-HELOUVRY e colaboradores, 1994).

2.2.4 Força de Ruptura

A força de atrito estático corresponde à força desenvolvida na interface de contato, quando ainda não foram quebradas as "ligações" elásticas existentes entre as rugosidades das superfícies. A força de ruptura corresponde à força necessária para ultrapassar o atrito estático, ou seja, para que as "ligações" entre as superfícies se quebrem, dando início ao deslizamento, conforme ilustra a Figura 2.11.

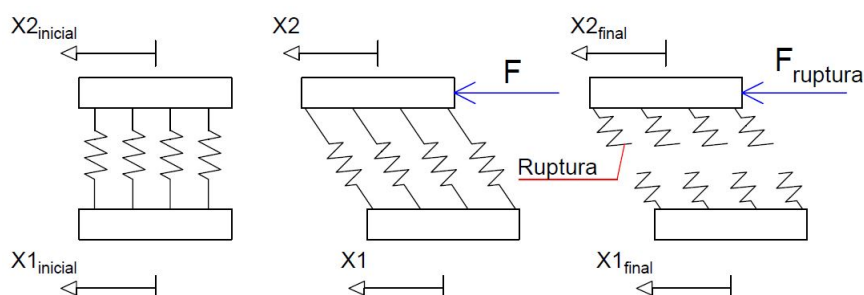


Figura 2.11: Esquemática da ruptura.

A força de ruptura, cujo comportamento característico é expresso na figura acima, ocorre tipicamente a pequenos deslocamentos. Rabinowicz (1951) sugere que em contatos metálicos, a força de ruptura se dá quando os micro deslocamentos sejam da ordem de 2 a 5 micra.

2.2.5 Efeito Stribeck

A curva da força de atrito em função da velocidade, tomada para valores baixos de velocidade, é denominada curva de Stribeck, em homenagem ao engenheiro alemão Richard Stribeck, que estudou a transição não linear entre os regimes estático e cinético. Em particular, o decaimento da força de atrito a baixas velocidades é chamado *Efeito Stribeck*. O efeito Stribeck é caracterizado por uma inclinação negativa na curva de atrito versus velocidade, conforme ilustra a Figura 2.12.

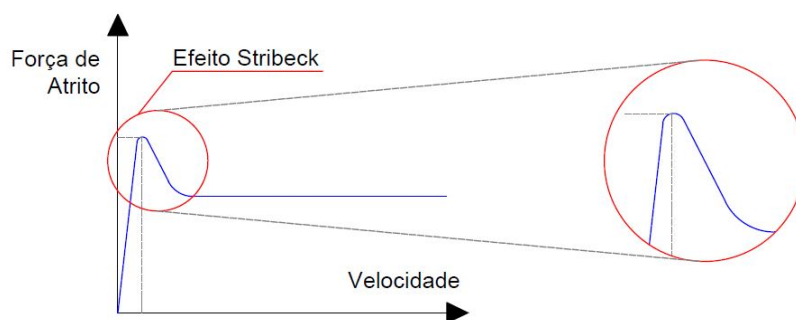


Figura 2.12: Representação e detalhe do efeito Stribeck.

Por sua vez, o efeito Stribeck tem importante contribuição para o surgimento do *stick-slip*. Al Bender e De Moerlooze (2010) sustentam que apesar de o efeito ser predominante em contatos lubrificados, o comportamento é análogo para contatos não lubrificados, o que justifica a utilização do mesmo nome na descrição do fenômeno.

2.2.6 Atraso de Fricção

A curva de Stribeck na Figura 2.12 exibe a dependência da força de atrito em relação à velocidade. Caso haja alguma mudança na velocidade, presume-se que haverá simultaneamente uma mudança no valor da força de atrito. Entretanto, estudos feitos por Rabinowicz (1957) sugerem que quando a velocidade muda, o atrito não muda instantaneamente, mas se ajusta à sua nova condição após um certo período de tempo. Há portanto um atraso entre a variação da velocidade e a variação da força de atrito, conforme ilustra a Figura 2.13.

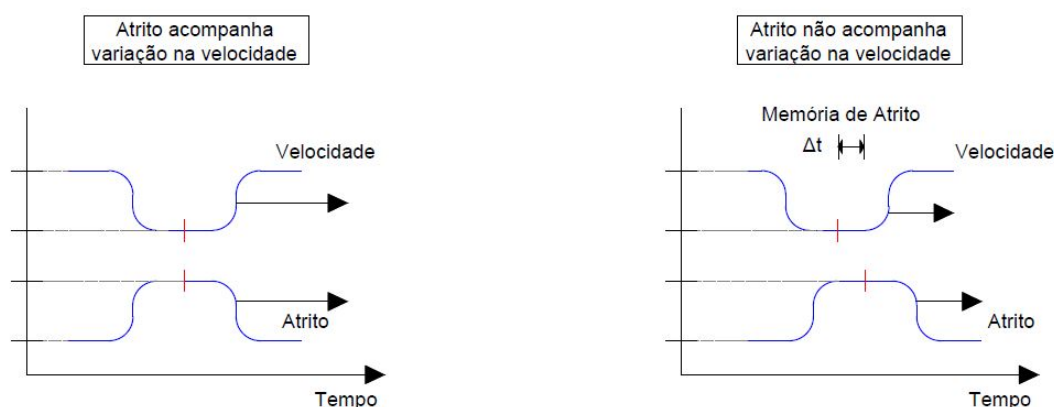


Figura 2.13: Esquematisação da memória de fricção.

O fenômeno ganha o sentido de histerese, à medida que o caminho de ida é diferente do caminho de volta, como se o sistema armazenasse uma "memória" de como ele deve se comportar na ida, e como se comportar na volta. Este comportamento é observado no atrito quando em pequenos deslocamentos, existindo uma diferença entre os caminhos de ida e volta para uma curva do coeficiente de atrito em função da velocidade

2.3 Modelos de Atrito

Ao longo dos últimos anos foram propostas várias formas de modelar matematicamente o atrito. A grande dificuldade encontrada na modelagem do atrito é a complexidade do fenômeno em baixas velocidades e, em particular, a modelagem do fenômeno *Stick-Slip*. Em geral, os modelos existentes podem ser divididos em duas categorias: Modelos Estáticos e Modelos Dinâmicos (PIEDBOUF E CARUFEL, 2000).

Modelos estáticos são aqueles que representam o coeficiente de atrito como função exclusivamente da velocidade. Os modelos estáticos são mapas entre força de atrito e velocidade. Para cada valor de velocidade é associado um valor de força de atrito, sem considerar a influência de outras variáveis e sem descrever fenômenos como pré-deslizamento e atraso de fricção. São geralmente modelos com formulação matemática simples, que demandam baixo custo computacional e usados para observar os efeitos macroscópicos do atrito.

Os principais modelos estáticos de atrito estão listados abaixo:

Modelos Estáticos de Atrito	{	Modelo de Coulomb (1752)
		Modelo de Atrito Viscoso
		Modelo Sticktion
		Modelo de Tustin (1940)
		Modelo de Armstrong (1994)
		Modelo de Kang (2009)

Para boa parte das aplicações, os modelos estáticos são adequados por descreverem suficientemente bem os efeitos do atrito. Entretanto, quando submetidos a aplicações com alta precisão e baixa velocidade apresentam um desempenho insatisfatório, pois não descrevem fenômenos que acontecem nas baixas velocidades e reversões de movimento (GEFFEN, 2009).

Para modelar os efeitos não capturados pelos modelos estáticos, tais como o pré-deslocamento e a memória de fricção, foram desenvolvidos os modelos dinâmicos de atrito, também chamados de modelos de estado. A idéia central dos modelos dinâmicos é decompor a expressão do atrito em duas ou mais expressões, através da introdução de variáveis de estado. Os principais modelos dinâmicos estão listados abaixo:

$$\text{Modelos Dinâmicos de Atrito} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modelo de Dahl (1968)} \\ \text{Modelo de LuGre (1995)} \\ \text{Modelo de Leuven (2000)} \end{array} \right.$$

A maior desvantagem dos modelos dinâmicos de atrito é o alto custo computacional que suas complicadas expressões demandam. São geralmente modelos com formulação matemática mais complexa que os modelos estáticos, e usados para aplicações em que os efeitos microscópicos do atrito são relevantes. Os modelos dinâmicos são muito usados em sistemas de controle e mecanismos para compensação de atrito em juntas robóticas (Piatkowski, 2014).

2.3.1 Modelo de Coulomb

A forma mais simples de se modelar o atrito é através do Modelo de Coulomb, cuja idéia principal é a de que o atrito se opõe ao movimento, possui magnitude proporcional à força normal e independe da velocidade. A formulação básica do modelo de Coulomb é descrita pela equação:

$$F_{\text{atrito}} = -\mu_k \cdot N \cdot \text{sign}(v), \quad (2.2)$$

onde μ_k é o coeficiente de atrito cinético, N é a força normal no contato e v é a velocidade relativa entre as superfícies.

O modelo de Coulomb fornece uma descrição satisfatória em um grande número de aplicações de engenharia e continua sendo uma das formulações mais usadas. Entretanto, é deficiente por ser uma função descontínua na transição pela velocidade nula, e por não modelar a transição entre atrito cinético e estático (SANCA, 2006).

O fato de a função ser descontínua e não estar definida na origem pode ocasionar problemas de integração em simulações numéricas. Para evitar problemas relacionados à descontinuidade da função, é possível aproximar o modelo de Coulomb por uma função envolvendo o termo tangente hiperbólica, que fornece uma curva contínua na transição pela origem.

$$F_{atrito} = -\mu_k \cdot N \cdot \text{sign}(v) \cong -\mu_k \cdot N \cdot \tanh(k \cdot v), \quad (2.3)$$

onde k é um valor suficientemente grande para aproximar satisfatoriamente as duas funções. A Figura 2.14 ilustra que quanto maior o valor de k utilizado, mais satisfatória será a aproximação.

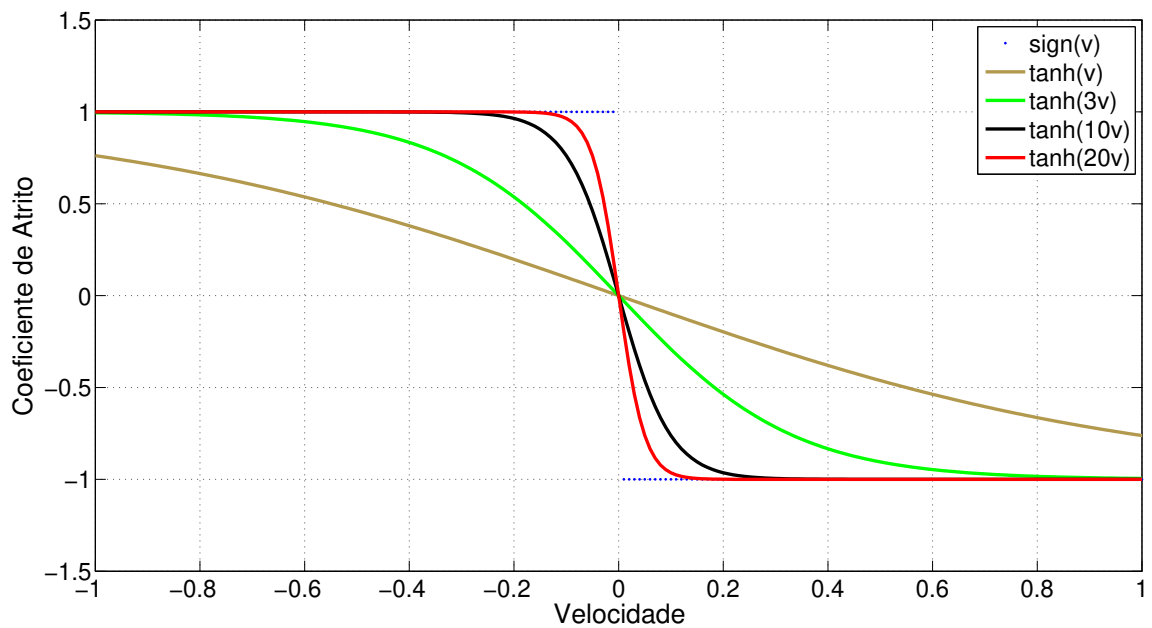


Figura 2.14: Aproximação da Função Sinal.

2.3.2 Modelo Viscoso

O desenvolvimento da teoria hidrodinâmica permitiu a criação de modelos para o atrito causado pelo contato com lubrificantes, o chamado *Atrito Viscoso*, normalmente descrito como:

$$F_{atrito} = \mu_v \cdot v, \quad (2.4)$$

Onde μ_v é o coeficiente de atrito viscoso. O atrito viscoso é frequentemente combinado com o atrito de Coulomb através do sistema de equações 2.5

$$F_{atrito} = \begin{cases} \mu_k N + \mu_v \cdot | - v | & \text{se } v < 0 \\ -\mu_k N - \mu_v \cdot | v | & \text{se } v > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

A Figura 2.15 ilustra a curva característica do atrito viscoso, em adição ao modelo de Coulomb.

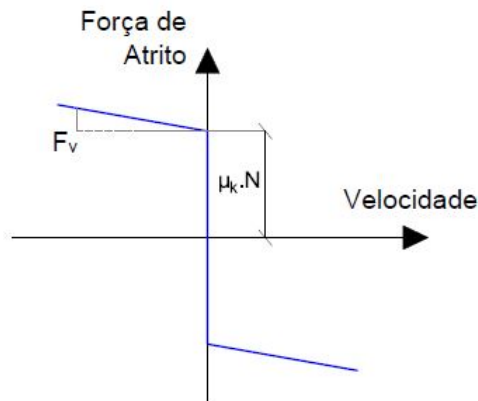


Figura 2.15: Modelagem do atrito viscoso somado ao modelo de Coulomb

A grande deficiência deste modelo é não representar o efeito *Stribeck*, ilustrado na Figura 2.12. Alguns modelos mais recentes suprem esta deficiência, possibilitando parametrizar a região do efeito *Stribeck* (OLSSON e colaboradores, 1997).

2.3.3 Modelo Sticktion

Sticktion é o nome usado para se referir à força de atrito estático à qual o corpo está sujeito na iminência do movimento. O nome é uma composição das palavras *Static* e *Friction*, e é uma tentativa de aprimorar a descrição do atrito feita no modelo de Coulomb, que não representa a transição entre as regiões de atrito estático e cinético. A Figura 2.16 compara o modelo de Coulomb com a formulação *Sticktion*.

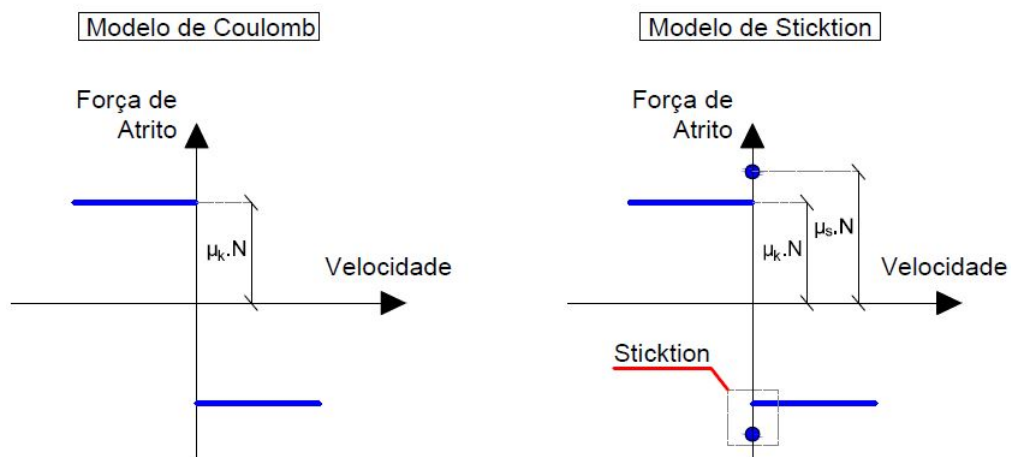


Figura 2.16: Comparação entre as formulações de Coulomb(esquerda) e *Sticktion*(direita).

A formulação matemática para o modelo *Sticktion* segue o sistema de equações 2.6, onde μ_s é o coeficiente de atrito estático e μ_k o coeficiente de atrito cinético. Seja um corpo sujeito ao atrito seco e a uma força externa (F_{ext}):

$$F_{atrito} = \begin{cases} -\mu_k N \text{sign}(v) & \text{se } v \neq 0 \\ F_{externa} & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_{externa}| < \mu_s N \\ \mu_s N \text{sign}(F_{externa}) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_{externa}| \geq \mu_s N \end{cases} \quad (2.6)$$

Frequentemente é feita uma adaptação ao modelo visando facilitar a implementação computacional. A idéia central é separar a curva de atrito em cinco regiões conforme ilustra a Figura 2.17, e atribuir uma função matemática a cada região. É assumido o valor de $v1$ como a velocidade de transição do atrito cinético para estático, e a variável $v2$ como sendo a velocidade em que tem início a transição pela origem.

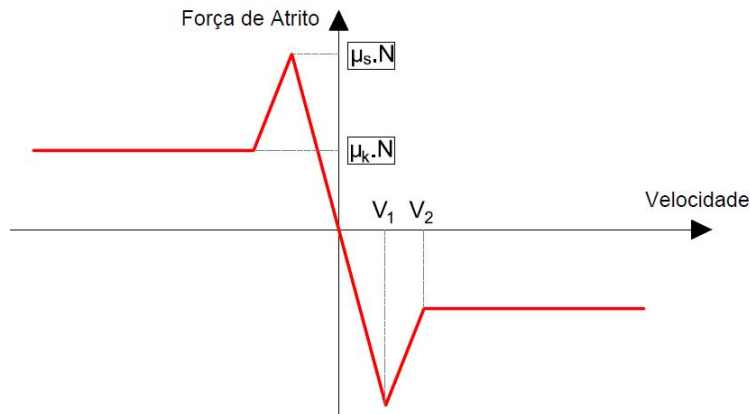


Figura 2.17: Parametrização do modelo de atrito sticktion.

O modelo matemático que parametriza a curva acima é composto de cinco funções, conforme o sistema de equações 2.7.

$$F_{atrito} = \begin{cases} \mu_k N & \text{se } v < -v_2 \\ \left[\left(\frac{\mu_s - \mu_k}{v_1 - v_2} \right) v + \left(\mu_k + v_1 \frac{\mu_s - \mu_k}{v_1 - v_2} \right) \right] N & \text{se } -v_2 < v < -v_1 \\ -(\mu_s \cdot v \cdot N) / (v_1) & \text{se } |v| < v_1 \\ \left[\left(\frac{\mu_k - \mu_s}{v_1 - v_2} \right) (-v) - \left(\mu_k + v_1 \frac{\mu_s - \mu_k}{v_1 - v_2} \right) \right] N & \text{se } v_1 < v < v_2 \\ -\mu_k N & \text{se } v > v_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

A grande vantagem desta formulação é a possibilidade de parametrizar o atrito, e estudar isoladamente os efeitos relacionados à transição entre regimes e à transição de velocidades. A desvantagem do modelo de *Sticktion* é o fato de ser uma aproximação linear para as regiões próximas da velocidade nula, onde o comportamento é não-linear. A quantidade de equações pode tornar o modelo muito lento computacionalmente e suscetível a problemas numéricos.

O modelo *Sticktion* é o último dos chamados "Modelos Clássicos", também compostos pelo atrito viscoso e pelo modelo de Coulomb. Estes modelos são conhecidos pela facilidade de suas expressões e pelo uso em aplicações que não demandam uma caracterização mais completa do atrito.

2.3.4 Modelo de Tustin

Algumas características não-lineares do atrito, como a transição para o atrito estático e o efeito *Stribeck*, não são descritas pelo modelo de Coulomb. Embora o Modelo *Sticktion* seja capaz de representar a transição, a sua expressão matemática é composta pela união de várias funções definidas por partes, o que o torna pouco prático e puramente linear na transição do atrito cinético para estático.

Tustin (1947) propôs uma modificação ao modelo de Coulomb, permitindo modelar o regime de transição em uma curva contínua. O modelo de Tustin inclui o conceito de velocidade de *Stribeck*, representado por v_s e é descrito pela equação 2.8. A velocidade de Stribeck é a velocidade em que ocorre a transição entre o atrito estático e o atrito cinético.

$$F_{atrito} = N (\mu_s - \mu_k [1 - g(v)]) \operatorname{sign}(v), \quad (2.8)$$

onde $g(v) = e^{\frac{-|v|}{v_s}}$

A Figura 2.18 compara o modelo de Tustin com o modelo de Coulomb, evidenciando a capacidade de representar a transição entre o regime cinético e o estático. Trata-se de um modelo de fácil implementação computacional e que modela satisfatoriamente o atrito.

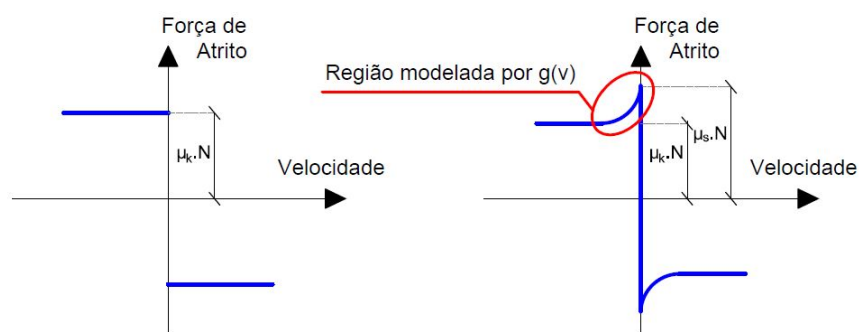


Figura 2.18: Modelos de Coulomb e Tustin.

Além de Tustin, outros pesquisadores propuseram diferentes expressões a serem usadas como $g(v)$ para a modelagem da transição. As descrições típicas para $g(v)$ são:

(i) Exponencial (TUSTIN, 1947)

$$g(v) = e^{\frac{-|v|}{v_s}}, \quad (2.9)$$

(ii) Exponencial Generalizada (BO E PAVELESCU, 1982)

$$g(v) = e^{-\alpha_g |v|^\delta}, \quad (2.10)$$

(iii) Laurentiana (HESS E A., 1990)

$$g(v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_s}\right)^2}, \quad (2.11)$$

(iv) Gaussiana (ARMSTRONG-HELOUVRY *e colaboradores*, 1991)

$$g(v) = e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2}, \quad (2.12)$$

2.3.5 Modelo de Armstrong

Armstrong-Helouvry *e colaboradores* (1994) fizeram uma detalhada revisão bibliográfica dos modelos de atrito existentes e propuseram um novo modelo com um grande número de parâmetros contemplados em sua formulação. A sua expressão matemática introduz dependência temporal para o atrito estático e considera o efeito *Stribeck*.

Este modelo inova por incluir em sua formulação o tempo de repouso (*Dwell Time*). É composto por dois submodelos: um para o travamento (*Stick*) e outro para o escorregamento (*Slip*). Quando o movimento encontra-se na região de *Sticking*, o atrito é descrito pela equação 2.13, baseada no modelo de mola linear.

$$F_{atrito} = -\sigma_0 x, \quad (2.13)$$

Onde σ_0 representa a rigidez tangencial do contato relativo entre os corpos, e x é o deslocamento de pré-deslizamento. Quando ocorre a passagem para a região de *Slip*, o atrito é descrito pelo submodelo da equação 2.14

$$F_{atrito}(v,t) = \left(F_c + \mu_v |v| + F_s(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + (v(t - \tau_1)/v_s)^2} \right) \text{sign}(v), \quad (2.14)$$

sendo os parâmetros F_s e F_c definidos como

$$F_s(t) = F_{s,\infty} - (F_{s,\infty} - F_c) e^{-\gamma \cdot t d^m}, \quad F_c = N \mu_k \quad (2.15)$$

Nas equações em 2.15, v_s é a velocidade de *Stribeck*, F_c representa o atrito de Coulomb e $F_{s,\infty}$ representa a força de atrito estático em regime estacionário. F_c é a força de Coulomb, ou a força de atrito cinético, e t_d é o tempo de imobilidade entre as partes atritantes. F_v é o coeficiente de atrito viscoso, e τ_1 é o atraso puro, ou tempo morto da velocidade. O modelo de Armstrong é também conhecido como o modelo dos sete parâmetros, e é um dos mais completos modelos estáticos de atrito. Uma vez que o modelo é composto de duas expressões, uma para *Sticking* e outra para *Slip*, é necessário um critério de velocidade para determinar quando é feita a mudança de um sub-modelo para o outro, o que exigiria um oitavo parâmetro.

2.3.6 Modelo de Kang

Kang (2009) propôs um modelo cuja expressão é uma função contínua, e que permite parametrizar a transição entre o regime cinético e estático. A grande vantagem do modelo de Kang é permitir que a região próxima à velocidade nula seja representada de forma contínua.

Seja um contato relativo entre corpos, onde u é a velocidade de um dos corpos e V a velocidade do outro, a expressão desenvolvida por Kang para o coeficiente de atrito é definida por:

$$f = \text{sign}(u - V) (1 - e^{-d|u-V|}) \{ \mu_k - (\mu_k - \mu_s) e^{-h|u-V|} \}, \quad (2.16)$$

onde μ_k é o coeficiente de atrito cinético, μ_s é o coeficiente de atrito estático, h determina a inclinação negativa na região de deslizamento e d controla a inclinação positiva próxima à velocidade nula. A variação dos parâmetros da equação 2.16 permite modelar o atrito de várias formas, conforme ilustra a Figura 2.19.

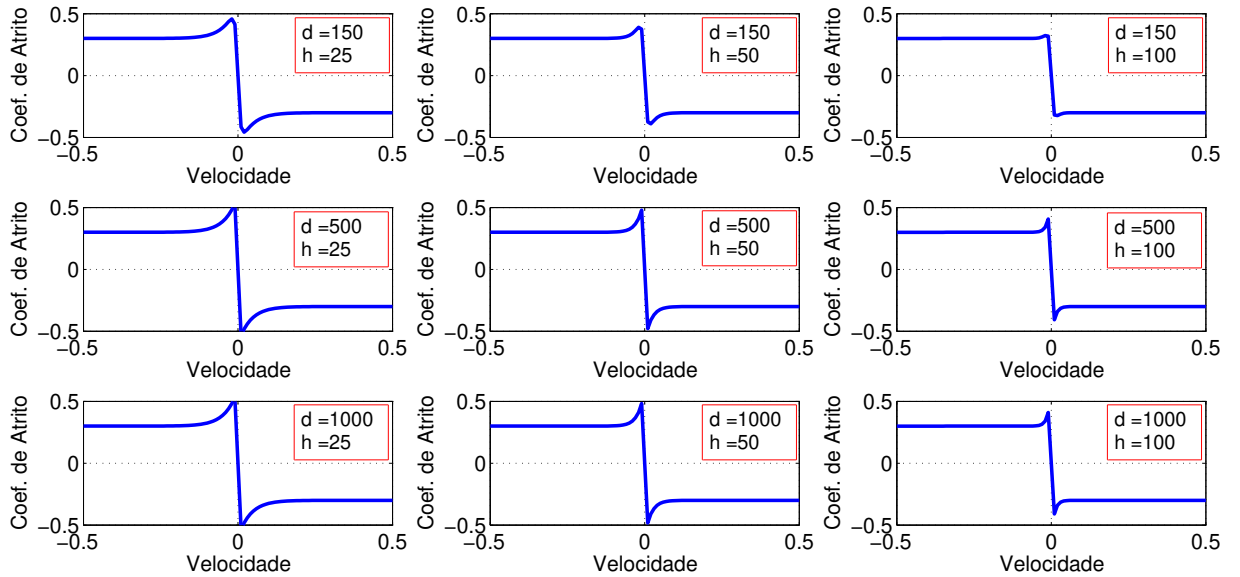


Figura 2.19: Estudo de caso para o modelo de Kang.

O modelo de Kang é um dos mais recentes modelos estáticos de atrito. A facilidade de implementação, e a flexibilidade para modelar a curva de atrito fazem com que seja uma solução extremamente útil e versátil. A maior deficiência do modelo de Kang é o fato de nem sempre a curva de Stribeck atingir o valor máximo do atrito. Para alguns valores de d e h , o coeficiente de atrito cinético é corretamente modelado, porém o valor de atrito estático não é atingido.

2.3.7 Coeficiente de Atrito Assimétrico

Um importante fenômeno nos sistemas com a presença de atrito é a assimetria no coeficiente de atrito, fazendo com que a força atritiva possua magnitudes diferentes para as velocidades positiva e negativa. É o caso, por exemplo, de pastilhas de freio e outros materiais que estão sujeitos a um maior "desgaste" das fibras superficiais em apenas um dos sentidos do movimento.

O coeficiente de atrito é assimétrico, portanto, o valor absoluto da força de atrito para velocidades positivas é diferente daqueles encontrados para velocidades negativas. Existem três tipos de assimetria no coeficiente de atrito: Assimetria Total, quando a toda a curva de atrito é deslocada para cima ou para baixo; Assimetria no Coeficiente Cinético, quando os coeficientes estáticos são mantidos simétricos e os coeficientes cinéticos assimétricos; e Assimetria no Coeficiente estático.

A Figura 2.20 ilustra os três tipos de assimetria existentes.

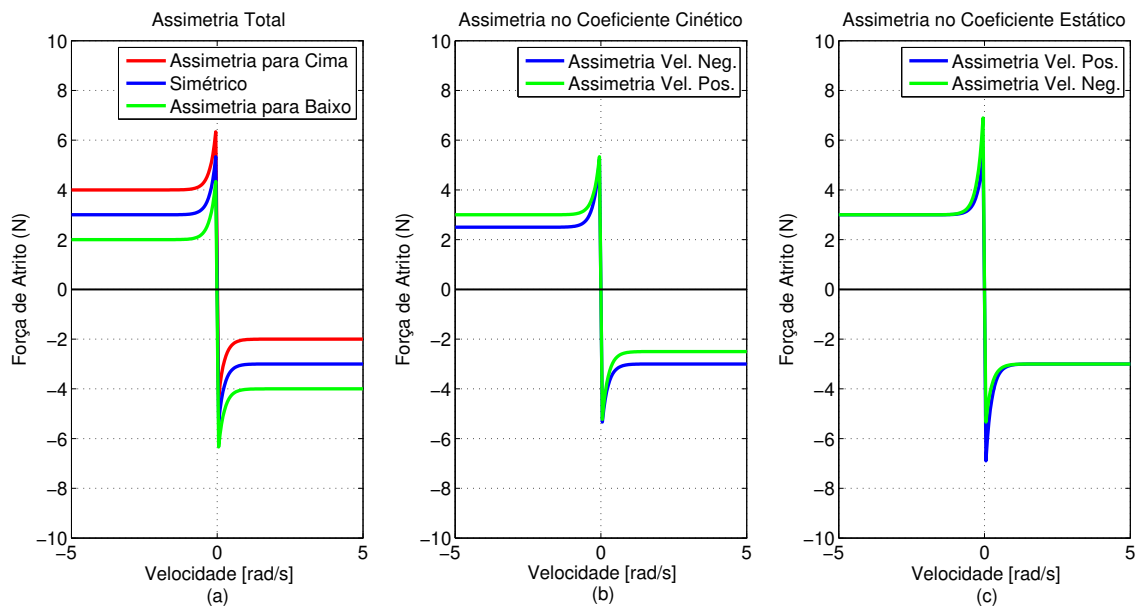


Figura 2.20: Tipos de assimetria no coeficiente de atrito. a) Assimetria Total; b) Assimetria apenas no coeficiente cinético de atrito; c) Assimetria apenas no coeficiente estático de atrito.

A expressão matemática original de Kang pode ser modificada pela adição de uma constante p , com o objetivo de deslocar completamente a curva de atrito para cima ou para baixo, conforme ilustra a Figura 2.20a. A curva de atrito para o caso de assimetria total torna-se portanto:

$$\mu = N \cdot \text{sign}(u - V) (1 - e^{-d|u-V|}) \{ \mu_k - (\mu_k - \mu_s) e^{-h|u-V|} \} \pm p, \quad (2.17)$$

Para o segundo caso de assimetria no atrito, ilustrado na Figura 2.20b, em que apenas o coeficiente cinético apresenta valores distintos para velocidades positivas e negativas, a expressão original de Kang pode ser desmembrada em duas equações, uma para velocidades negativas e a outra para velocidades positivas, conforme o conjunto de equações 2.18. Para introduzir a assimetria, o coeficiente cinético em uma das equações é alterado de μ_k para $\mu_{k,2}$, fazendo com que o módulo da força de atrito cinética nas velocidades positivas seja diferente do assumido em velocidades negativas:

$$\mu(V) = \begin{cases} - (1 - e^{-d|u-V|}) \{ \mu_k - (\mu_k - \mu_s) e^{-h|u-V|} \} & \text{se } V \geq 0 \\ (1 - e^{-d|u-V|}) \{ \mu_{k,2} - (\mu_{k,2} - \mu_s) e^{-h|u-V|} \} & \text{se } V < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

O último caso de atrito assimétrico, ilustrado na Figura 2.20c, trata da assimetria apenas no coeficiente estático de atrito, mantendo o coeficiente cinético inalterado. Analogamente ao caso anterior, a equação original de Kang é desmembrada em duas, porém a alteração se dá no coeficiente estático de uma das equações, que passa a assumir valor $\mu_{s,2}$, provocando assimetria apenas na região próxima à transição.

A curva de atrito para o caso de assimetria no coeficiente estático torna-se, portanto:

$$\mu(V) = \begin{cases} - (1 - e^{-d|u-V|}) \{ \mu_k - (\mu_k - \mu_s) e^{-h|u-V|} \} & \text{se } V \geq 0 \\ (1 - e^{-d|u-V|}) \{ \mu_k - (\mu_k - \mu_{s,2}) e^{-h|u-V|} \} & \text{se } V < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

2.3.8 Modelo de Dahl

O mais simples dos modelos dinâmicos foi desenvolvido por Dahl (1968) com o propósito de simular a compensação adaptativa de atrito em um experimento feito com esferas de rolamento. Dahl propôs um modelo que reúne a característica do atrito de Coulomb com o comportamento dinâmico do pré-deslizamento (Casanova, 2007).

O ponto de partida para o modelo de Dahl é a curva ilustrada pela Figura 2.21. Quando o contato é submetido a uma tensão tangencial, a força de atrito cresce gradualmente até que haja a ruptura. Dahl modelou a curva como uma equação diferencial, considerando o atrito como função do deslocamento.

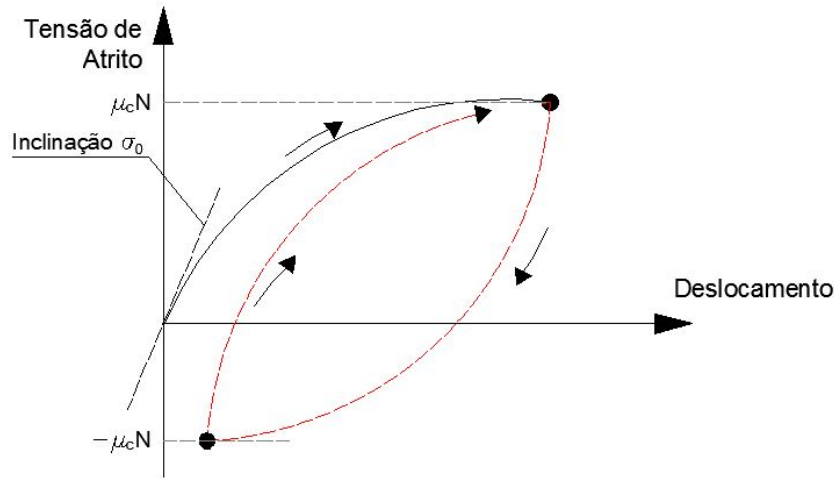


Figura 2.21: Força de atrito como função do deslocamento aplicada ao modelo de Dahl.

Seja x o deslocamento e F_e a força de atrito estático, o modelo de Dahl tem a seguinte forma

$$\frac{dF_{\text{atrito}}}{dx} = \sigma_0 \left[1 - \frac{F_{\text{atrito}}}{F_e} \text{sign}(v) \right]^\alpha, \quad (2.20)$$

onde σ_0 é o coeficiente de rigidez da curva e α é um parâmetro de forma comumente considerado como unitário. Caso o parâmetro de forma adotado seja maior do que a unidade, a curva tensão-deformação terá um aspecto mais inclinado. Para o caso em que α é unitário, a expressão 2.20 se reduz a:

$$\frac{dF_{atrito}}{dx} = \sigma_0 \left(v - \frac{F_{atrito}}{F_e} v \right) \quad (2.21)$$

Considerando a expressão generalizada da equação 2.20, a transformação para o domínio do tempo é feita conforme a expressão:

$$\frac{dF_{atrito}}{dt} = \frac{dF_{atrito}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF_{atrito}}{dx} v = \sigma_0 \left[1 - \frac{F_{atrito}}{F_e} \text{sign}(v) \right]^\alpha v, \quad (2.22)$$

Do ponto de vista microscópico, duas superfícies irregulares fazem contato através de um número de asperezas, modeladas como hastes elásticas. A contribuição de cada haste para o atrito é assumida como proporcional à tensão de flexão em cada haste. Quando a tensão tangencial atinge um determinado valor, a união entre as hastes é quebrada. Dessa forma, antes do rompimento das hastes a força de atrito não é relacionada somente à velocidade, mas também está relacionada com a posição (Casanova, 2007).

Através desta análise microscópica, Dahl introduz a variável de estado z , ilustrada na Figura 2.22, que é interpretada como a deflexão média das hastes submetidas à tensão tangencial. A variável z representa um estado interno e não é mensurável.

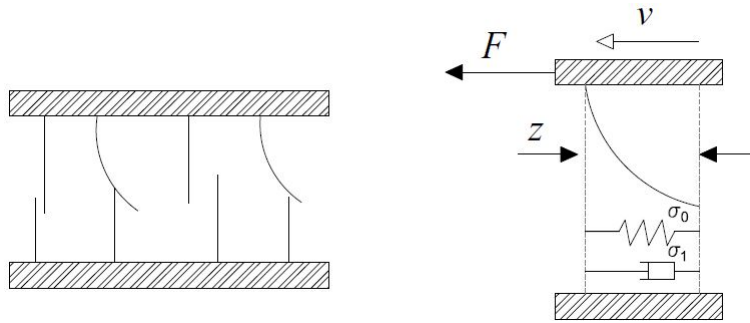


Figura 2.22: Interpretação do atrito como deflexão das cerdas.

Ao introduzir a variável de estado, a expressão original da equação 2.22 pode ser decomposta em duas outras expressões acopladas, conforme representação no sistema de equações 2.23, que permitem a implementação computacional do modelo, apresentada no apêndice A.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \frac{\sigma_0 |v|}{F_e} \\ F_{atrito} &= \sigma_0 z \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde σ_0 , que é o coeficiente de rigidez da curva, pode ser interpretado como a rigidez das hastes, e a força de atrito é entendida como o produto desta rigidez pela deflexão z das hastes. Trata-se de uma generalização do atrito de Coulomb no plano dos modelos dinâmicos. O modelo de Dahl não captura os efeitos *Stribeck* e *Sticktion*, o que foi motivo para recentes extensões do modelo (SANCA, 2006).

2.3.9 Modelo de LuGre

Canudas de Wit *e colaboradores* (1995) propuseram uma extensão ao modelo de Dahl que ficou conhecida como Modelo de LuGre, em referência às universidades de Lund(Suécia) e Grenóble(França) onde este modelo foi desenvolvido. Este modelo tornou-se muito popular para aplicações em controle e compensação de atrito, sendo amplamente utilizado em identificação de sistemas e controle adaptativo (Lampaert *e colaboradores*, 2002).

O modelo de Lugre parte do mesmo princípio da deflexão média das hastes utilizado por Dahl, através da introdução da variável de estado z . Em comparação ao modelo de Dahl, o modelo de LuGre permite a modelagem da força de ruptura e do efeito Stribeck, além de incluir variáveis que permitem a modelagem de efeitos viscosos.

O modelo de LuGre é descrito pelo sistema de equações 2.24:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \\ g(v) &= \alpha_0 + \alpha_1 e^{\left(-\frac{v}{v_s}\right)^2} \\ F_{atrito} &= \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v\end{aligned}\tag{2.24}$$

onde σ_0 e σ_1 podem ser compreendidos respectivamente como a rigidez e o amortecimento das cerdas. O parâmetro σ_2 é entendido como o atrito viscoso, predominante em contatos lubrificados com altas velocidades relativas. A Figura 2.23 ilustra a forma gráfica do modelo, e a interpretação de cada um dos parâmetros envolvidos.

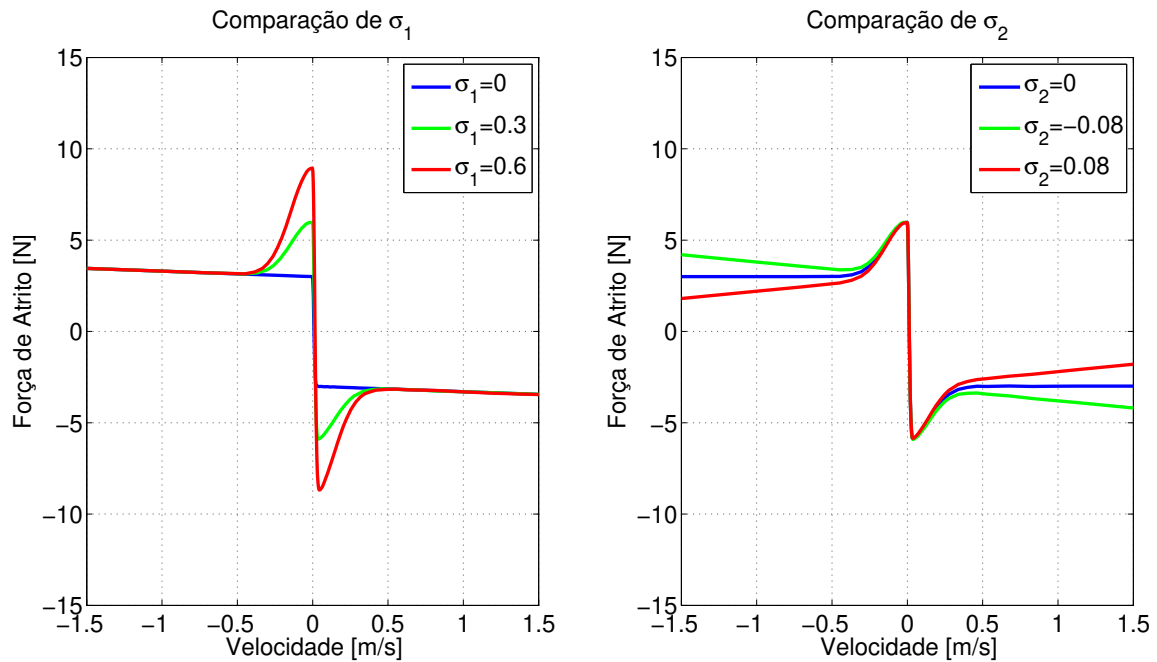


Figura 2.23: Interpretação dos parâmetros do modelo de LuGre.

O modelo de LuGre acrescenta a função $g(v)$, que é responsável por modelar o efeito *Stribeck* e a transição entre os regimes estático e cinético, e que segue a formulação Gaussiana apresentada na equação 2.12. Trata-se de uma função positiva dependente das propriedades do material e da velocidade de *Stribeck* (Gomes e colaboradores, 2010).

O modelo de LuGre é bastante rico pois possibilita a modelagem das transições Stick-Slip, a variação da força de ruptura, a memória do atrito, os efeitos histeréticos e a curva de *Stribeck*. Trata-se de um modelo com grande aceitação na literatura, sobretudo em projetos de compensação de atrito (Wojewoda e colaboradores, 2007).

2.4 Comentários sobre a Escolha do Modelo de Atrito

O fato de um modelo ser mais atual ou mais completo não necessariamente significa que é o mais adequado para qualquer aplicação. Embora os modelos dinâmicos sejam os mais sofisticados, os fenômenos neles descritos podem não ser objeto de interesse em determinada pesquisa, ou o custo computacional envolvido pode ser muito discrepante em relação ao que determinada aplicação normalmente demandaria.

Modelos estáticos de atrito são mais indicados para casos em que a velocidade relativa entre os corpos é significativa, e com um baixo número de transições entre os regimes cinético e estático, especialmente quando estas transições ocorrem de maneira rápida.

Modelos dinâmicos de atrito são mais apropriados para aplicações que demandam alto nível de precisão e baixa velocidade, como por exemplo juntas robóticas, compensação de atrito e outros servomecanismos. A implementação dos modelos dinâmicos requer uma estimativa prévia dos parâmetros envolvidos, que deve ser levada em conta no projeto.

Portanto, o modelo de atrito mais adequado deve ser escolhido de acordo com a aplicação que se deseja modelar. Devem ser analisados o nível de detalhamento desejado, custo computacional envolvido, e então optar por um modelo. Um exemplo disto é a decisão entre usar o modelo de Coulomb ou o modelo de Dahl.

A Figura 2.24 ilustra a curva da força de atrito em função da velocidade, para todos os modelos de atrito previamente discutidos. Nesta figura é feito um estudo comparativo entre todos os modelos, admitindo-se coeficiente estático de atrito $\mu_s = 0,6$, coeficiente cinético de atrito $\mu_k = 0,3$ e força normal igual a 10 N.

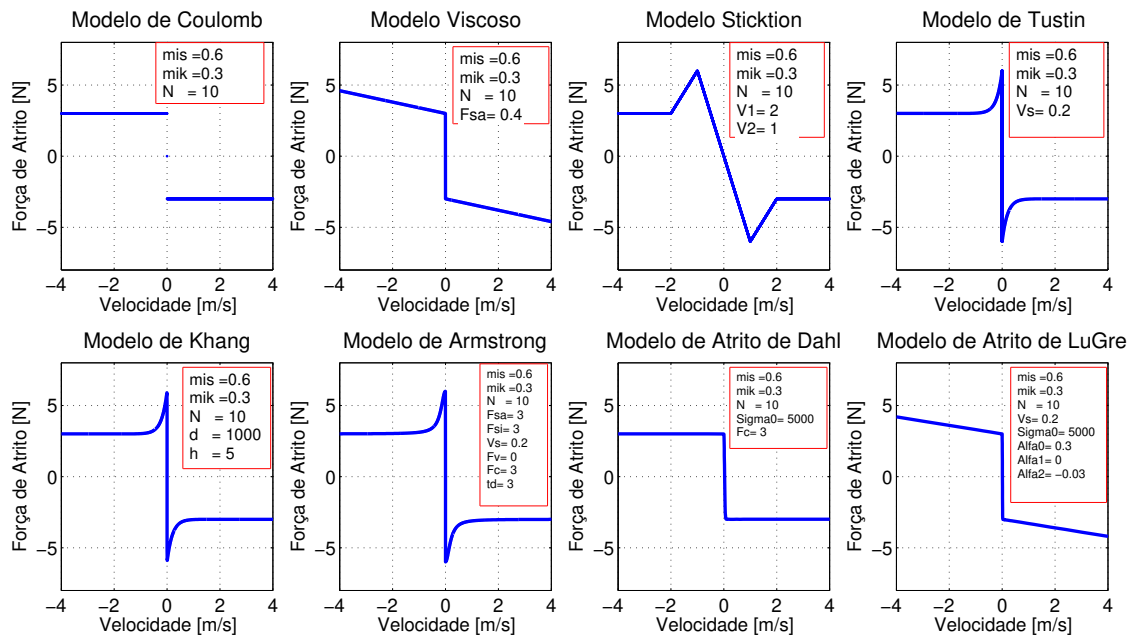


Figura 2.24: Curvas de Força de Atrito em função da velocidade para os principais modelos de atrito.

Nota-se que para o caso em que deseja-se modelar simplificadaamente o atrito, e observar apenas os seus efeitos macroscópicos, os modelos de Coulomb e Dahl exibem características semelhantes. Neste caso, o alto custo computacional requerido pelo modelo de Dahl faz com que a formulação de Coulomb seja mais apropriada para esta aplicação. Porém, se a mesma aplicação requer uma melhor descrição dos fenômenos ocorridos próximos à velocidade nula, sem preocupações com o tempo de simulação, o modelo de Dahl é o que atinge os resultados desejados.

O mesmo pode ser dito sobre os modelos de Kang e de LuGre. Embora ambos representem satisfatoriamente a transição macroscópica entre os regimes estático e cinético, o custo computacional envolvido ao modelo de LuGre é muito maior do que os modelos de Tustin ou Kang.

Outro exemplo é o uso do modelo de Armstrong. Embora a sua formulação contemple mais parâmetros do que os outros modelos estáticos, o grande número de parâmetros pode ser desnecessário, caso sejam relevantes apenas os efeitos macroscópicos do atrito. A complexidade da sua formulação pode fazer com que um modelo mais simples atenda à necessidade da modelagem, sem a necessidade de um critério de chaveamento entre os submodelos. A escolha correta do modelo de atrito é, portanto, parte importante da modelagem de um sistema dinâmico (SANCA, 2006).

2.5 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados o fenômeno do atrito e suas principais características. Foi feita uma revisão dos principais modelos de atrito usados em simulações numéricas e comentou-se sobre a escolha do modelo mais adequado. O fenômeno do *Stick-Slip* é explicado e esquematizado. Estes conceitos servirão como base para descrever e explicar o comportamento dinâmico do autotensionador. No próximo capítulo tais conceitos serão empregados para modelar matematicamente o autotensionador.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresenta-se a modelagem matemática do autotensionador. Descreve-se como são modeladas as forças externas, a força normal descarregada no pino e a aplicação dos modelos de atrito. Existem duas formas de modelar o problema do autotensionador. A primeira forma, mais completa, considera um autotensionador sujeito a uma força externa exercida pelos dois tramos adjacentes da correia. A segunda forma, mais simplificada, é uma aproximação linear e considera a força externa como uma componente harmônica simples, exercida diretamente no tensionador.

3.1 Modelagem Tensionador-Correia

Do ponto de vista matemático, o autotensionador pode ser modelado como um sistema de um grau de liberdade, descrito pelo ângulo θ_t de rotação em torno do pino. Um diagrama de corpo livre o autotensionador pode ser representado pela Figura 3.1.

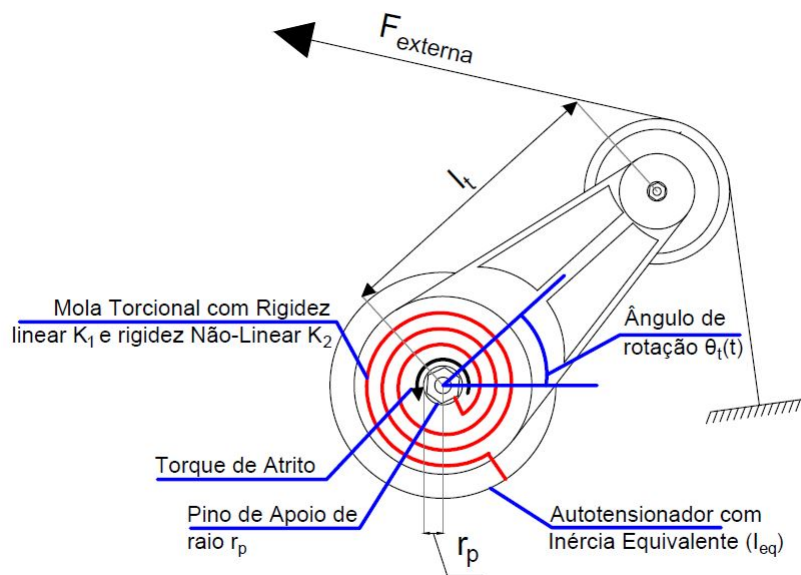


Figura 3.1: Diagrama de corpo livre do autotensionador.

O autotensionador possui inércia equivalente denotada por I_{eq} . O pino de apoio possui raio r_p e o braço do tensionador tem comprimento l_t . A mola torcional pode ser modelada como um elemento não-linear, em que K_1 representa a componente linear, e K_2 indica uma não linearidade.

O ponto de partida para a modelagem é a segunda lei de Newton para sistemas girantes:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t = \sum \text{Momentos}, \quad (3.1)$$

Com referência à figura 3.1, o autotensionador está sujeito a momentos causados pela mola torcional (M_m), pela tensão nos tramos da correia (M_c), pela gravidade (M_g), pelo amortecimento viscoso, caso considerado (M_d), pelo atrito (M_a) e pelo pré-tensionamento (M_{pt}). A depender da velocidade relativa, o momento devido ao atrito pode assumir valores positivos (para velocidade relativa negativa) ou negativos (para velocidade relativa positiva). Desenvolvendo a equação 3.1, tem-se:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t = -M_m + M_c + M_g - M_d \pm M_a + M_{pt}, \quad (3.2)$$

O momento de inércia do autotensionador é considerado como:

$$I_{eq} = m_{eq}l_t^2, \quad (3.3)$$

onde as constantes m_{eq} e l_t são respectivamente a massa equivalente do dispositivo e o comprimento do braço de alavanca. O momento causado pelo amortecimento é dado pelo produto do coeficiente de atrito viscoso C pela velocidade angular $\dot{\theta}$, porém nesta aplicação em que não há contato lubrificado e o amortecimento se dá por atrito seco, este termo pode ser desprezado. Nas ocasiões em que o efeito da gravidade é significativo, o momento causado pode ser descrito pela equação 3.4

$$M_g = m_{eq} \cdot l_t^2 \cdot g \cdot \cos(\theta_t), \quad (3.4)$$

Ulsoy e colaboradores (1985) entretanto, sugerem que para o caso de autotensionadores utilizados em aplicações automotivas este efeito é desprezível. A seguir são desenvolvidas as expressões matemáticas de cada um dos momentos envolvidos.

3.1.1 Momento devido à Mola Torcional (M_m)

Uma mola é dita não linear quando ela não apresenta deslocamentos diretamente proporcionais às cargas a que é submetida. As molas não lineares podem assumir dois tipos de comportamento quando submetidas a cargas. No primeiro caso, quanto maior a carga aplicada, mais resistência a mola oferece ao deslocamento, sendo portanto necessária uma grande carga para realizar um pequeno deslocamento. Estas são chamadas “Molas Rígidas” (*Hardenning*) e estão representadas na curva do gráfico da Figura 3.2.

O segundo comportamento possível é o inverso do que ocorre nas molas duras, ou seja, quanto maior a carga aplicada, menos resistência a mola oferece ao deslocamento. Estas são chamadas “Molas Suaves” (*Softenning*).



Figura 3.2: Comportamentos Linear e Não-Linear das molas.

Em geral as molas não-lineares são modeladas pela soma de um termo linear de restituição, com um termo com restituição cúbica, conforme descreve a equação 3.5. Para os casos em que o termo não-linear é positivo, modela-se uma mola dura. As molas macias são modeladas quando o termo não-linear é negativo.

$$M_m = K_1\theta_t \pm K_2\theta_t^3, \quad (3.5)$$

Embora boa parte das molas torcionais encontradas em autotensionadores apresente caráter não-linear, a faixa de funcionamento do dispositivo se restringe a deslocamentos angulares muito pequenos, o que permite a linearização.

3.1.2 Momento Devido aos Tramos Adjacentes da Correia (M_c)

A força externa atuante no autotensionador é exclusivamente proporcionada pelo esforço dos tramos adjacentes no braço articulado. A uma determinada rotação, nos momentos em que a combustão do motor imprime maiores torques, a correia é solicitada a maiores trações e se estica, pressionando o tensionador. Nos momentos em que a correia perde tração, o tensionador está sujeito a uma força externa menor, e retorna para sua posição. Este movimento se repete durante o funcionamento do sistema de transmissão.

Para o caso em que a modelagem é feita considerando-se a correia adjacente, o cálculo do momento (M_c) aplicado pela força externa com relação ao pino de apoio (P_3) é feito através da decomposição vetorial nas componentes paralela e perpendicular impostas ao tensionador, conforme ilustra a Figura 3.3. Os ângulos θ_1 e θ_2 descrevem o posicionamento das correias em relação ao plano do tensionador, e as variáveis $T_1(t)$ e $T_2(t)$ representam a tensão instantânea em cada um dos tramos adjacentes da correia.

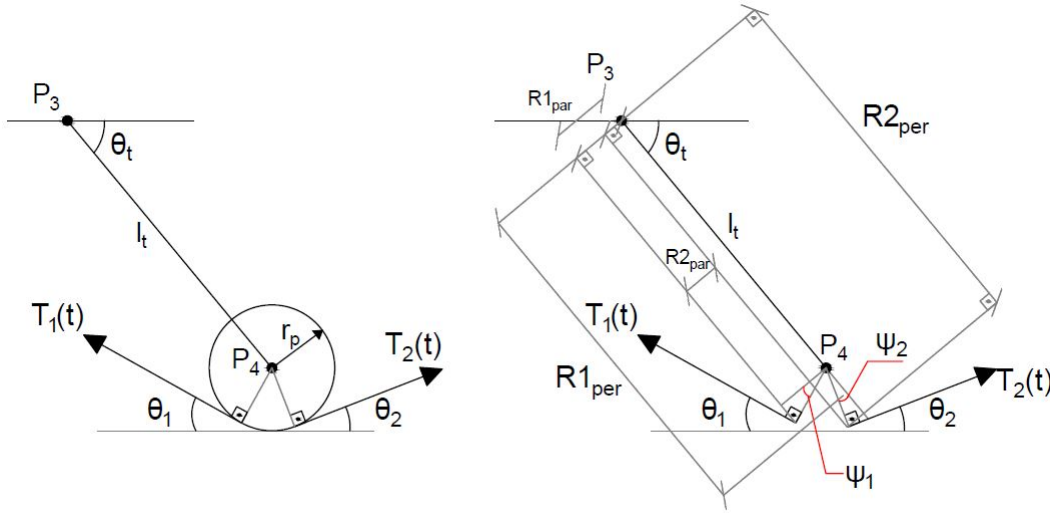


Figura 3.3: Esquema de modelagem e diagrama de corpo livre do autotensionador

A decomposição de forças provenientes da correia é exibida na figura 3.3, e permite a modelagem do momento exercido da seguinte forma:

$$M_c = F_{1per}r_{1per} + F_{1par}r_{1par} + F_{2per}r_{2per} + F_{2par}r_{2par}, \quad (3.6)$$

As componentes da equação 3.6 são obtidas de acordo com a decomposição na Figura 3.3, e são definidas como:

$$\begin{aligned}
 r_{1per} &= l_t + r_1 \text{sen}(\psi_1) & r_{1par} &= r_1 \cos(\psi_1) \\
 r_{2per} &= r_1 \cos(\psi_2) + l_t & r_{2par} &= r_1 \text{sen}(\psi_2) \\
 r_{2per} &= r_1 \cos(\psi_2) + l_t & r_{2par} &= r_1 \text{sen}(\psi_2) \\
 F_{1per} &= T_1 \text{sen}(\psi_1) & F_{1par} &= T_1 \cos(\psi_1)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Os ângulos ψ_1 e ψ_2 , definidos na Figura 3.3 são dados por:

$$\psi_1 = \theta_t - \theta_1 \tag{3.8}$$

$$\psi_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_t - \theta_2 \tag{3.9}$$

Admitindo-se que o momento de inércia do rolamento do autotensionador em relação seu centro (P_4) é desprezível, pode-se considerar que as tensões nos tramos adjacentes são iguais. Assumindo $T_1(t) = T_2(t) = F_{ext}(\omega, t)$, e substituindo as equações 3.7, 3.8 e 3.9 em 3.6, tem-se que o momento causado pela força externa é:

$$M_c = F_{ext}(\omega, t) \cdot l_t (\text{sen}(\theta_t - \theta_1) - \text{sen}(\theta_t + \theta_2)), \tag{3.10}$$

Introduzindo o termo angular $S(\theta_t)$, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$M_c = F_{ext}(w, t) \cdot l_t \cdot S(\theta_t, \theta_1, \theta_2), \tag{3.11}$$

A expressão 3.11 representa o momento flutuante causado pela força externa das correias adjacentes, sem a inclusão do termo de pré-tensionamento. Embora os termos θ_1 e θ_2 sejam variantes no tempo, adota-se a simplificação de considera-los como constantes, em razão dos seus pequenos deslocamentos.

3.1.3 Momento Devido ao Pré-Tensionamento de Instalação (M_{pt})

Durante a instalação do autotensionador, é aplicada na correia uma força de pré-tensionamento (F_{pt}), com a finalidade de garantir a funcionalidade dos componentes e a transmissão adequada de potência. Esta componente de pré-tensionamento é muito significativa na prática e contribui mais do que a componente flutuante M_c no que diz respeito à tração instantânea da correia.

O momento devido ao pré-tensionamento é considerado como sendo o produto da força F_{pt} pelo comprimento do braço l_t do tensionador. A soma do momento causado pelos tramos da correia com o momento devido ao pré-tensionamento de instalação, descrita pela Equação 3.13, corresponde ao momento das forças externas atuantes no sistema.

$$M_{pt} = F_{pt}l_t, \quad (3.12)$$

$$M_{fext} = F_{ext}(\omega, t).l_t.S(\theta_t) + F_{pt}l_t = [F_{ext}(\omega, t).S(\theta_t, \theta_1, \theta_2) + F_{pt}]l_t, \quad (3.13)$$

A componente F_{ext} , que representa a tensão flutuante na correia, possui seu caráter oscilatório originado em várias circunstâncias, tais como a combustão, as falhas em tolerâncias dimensionais das polias e eventuais folgas no sistema. Sua modelagem pode ser feita através de uma senoide simples com amplitude F_0 , representando o caráter harmônico da flutuação, conforme ilustra a Equação 3.14.

$$F_{ext} = F_0.\text{sen}(\omega, t) \quad (3.14)$$

3.1.4 Momento Devido à Força de Atrito (M_a)

Analogamente à força externa, o momento de atrito se dá pelo torque calculado entre a força de atrito (F_a) e o raio do pino de apoio (r_p), onde se dá o contato com o braço articulado. A modelagem do momento de atrito na equação 3.15 é feita de acordo com a aplicação desejada, e utiliza os conceitos apresentados no Capítulo 2 para compor a expressão matemática.

$$M_a = F_a.r_p = \mu(\dot{\theta}).N(\omega, t).r_p, \quad (3.15)$$

Nesta formulação, o coeficiente de atrito μ é extraído dos modelos de atrito apresentados.

A força normal descarregada no pino é considerada não como uma constante, mas como um carregamento variável e proporcional à magnitude da força externa aplicada e dependente das variáveis ω , t e θ_t .

$$N(\omega, t, \theta_t) = F_{ext}(\omega, t) \cdot S(\theta_t, \theta_1, \theta_2) + F_{pt}, \quad (3.16)$$

3.1.5 Equação de Movimento Tensionador-Correia

As expressões dos momentos externos aplicados nas secções anteriores permitem escrever a equação de movimento completa para o autotensionador. Substituindo-se as Equações 3.5, 3.11, 3.12 e 3.15 na Equação 3.2, tem-se a seguinte equação de movimento:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t = -K_1\theta_t \pm K_2\theta_t^3 + F_{ext}(w, t) \cdot l_t \cdot S(\theta_t, \theta_1, \theta_2) + m_{eff} \cdot l_t^2 \cdot g \cdot \cos(\theta_t) - C\dot{\theta}_t + \mu(\dot{\theta}) \cdot N(t) \cdot r_p + F_{pt} \cdot l_t \quad (3.17)$$

Desprezando o amortecimento viscoso e o momento causado pela gravidade, e rearranjando os termos da equação, tem-se:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t + K_1\theta_t \pm K_2\theta_t^3 = F_{ext}(w, t) \cdot l_t \cdot S(\theta_t, \theta_1, \theta_2) + F_{pt} \cdot l_t + \mu(\dot{\theta}) \cdot N(t) \cdot r_p \quad (3.18)$$

Incluindo-se o termo de normal variante da equação 3.18, tem-se:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t + K_1\theta_t \pm K_2\theta_t^3 = F_{ext}(w, t) \cdot l_t \cdot S(\theta_t, \theta_1, \theta_2) + F_{pt} \cdot l_t + \mu(\dot{\theta}) \cdot [F_{ext}(w, t) \cdot S(\theta_t) + F_{pt}] \cdot r_p \quad (3.19)$$

Rearranjando os termos e simplificando, a equação de movimento final para o caso tensionador-correia assume a seguinte forma:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t + K_1\theta_t \pm K_2\theta_t^3 = [F_{ext}(w, t) \cdot S(\theta_t) + F_{pt}] [l_t + r_p \cdot \mu(\dot{\theta})] \quad (3.20)$$

3.2 Modelagem Tensionador sem Correia

Nas aplicações onde se deseja uma aproximação mais simples, e quando deseja-se investigar o efeito genérico da força externa e outros parâmetros, como é o caso deste estudo, o modelo da Figura 3.3 pode ser simplificado considerando-se que o tensionador é excitado harmonicamente por uma força externa, modelada como uma senóide.

A correia é um elemento que funciona sempre em tração e nunca em compressão. Considerando-se o caso em que a correia está apenas apoiada encima do autotensionador, a força externa aproximada é uma senoide de caráter flutuante, conforme ilustra a Figura 3.4. Nesta condição, a força varia entre zero e o dobro da amplitude.

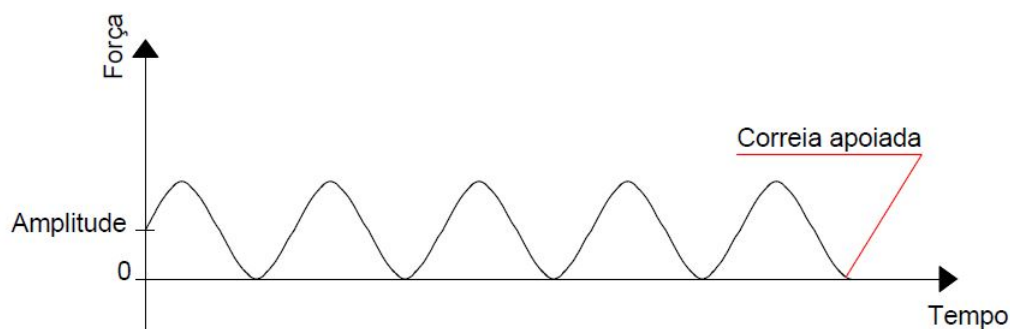


Figura 3.4: Simplificação da força externa.

Com a introdução do pré-tensionamento no momento da instalação, é adicionado um momento ao conjunto, deslocando a curva da Figura 3.4 para cima, conforme ilustra a Figura 3.5. Neste caso a posição de equilíbrio será deslocada pela pré-carga, e a força externa terá duas componentes, sendo uma componente estática devida ao pré-tensionamento, e uma componente dinâmica devido à correia.

Na prática é observado que o pré-tensionamento predomina sobre a componente flutuante como meio de manter a correia tracionada. No caso real, é colocado um pré-tensionamento significativo e a amplitude de flutuação permanece baixa, fazendo com que o tensionador oscile em uma baixa amplitude de deslocamento angular.

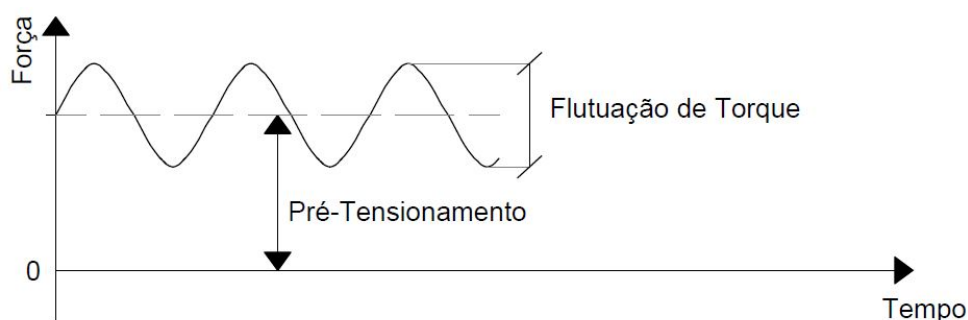


Figura 3.5: Simplificação da Força Externa na presença de Pré-Tensionamento.

A modelagem matemática para este caso simplificado é análoga à Equação 3.2, sendo composta pelos momentos exercidos pela força de atrito (M_a), pela mola (M_m) e pela força externa (M_{fext}):

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t = -M_m + M_{fext} + M_a \quad (3.21)$$

O momento exercido pela força externa é representado pela soma do momento de pré-tensionamento e o produto da componente harmônica pelo braço do tensionador:

$$M_{fext} = F_0 \sin(\omega, t) l_t \cos(\theta_b) + M_{pt}, \quad (3.22)$$

onde θ_b é o ângulo entre a aplicação da força e o braço do tensionador.

Uma vez que os deslocamentos são considerados muito pequenos, a componente $\cos(\theta)$ está sempre próxima da unidade. Admite-se, portanto, a hipótese de que a força externa é sempre perpendicular ao braço do tensionador. O momento causado pelo pré tensionamento M_{pt} é desenvolvido em função da força de pré-tensionamento e após rearranjo, o momento causado pela força externa é modelado como:

$$M_{fext} = [F_0 \sin(\omega, t) + F_{pt}] l_t, \quad (3.23)$$

Considerando-se que a faixa de oscilação é muito pequena e a não-linearidade da mola torna-se desprezível, pode ser considerado um modelo linear de rigidez. O diagrama de corpo livre para o caso simplificado assume, portanto, a forma linear ilustrada na Figura 3.6 abaixo:

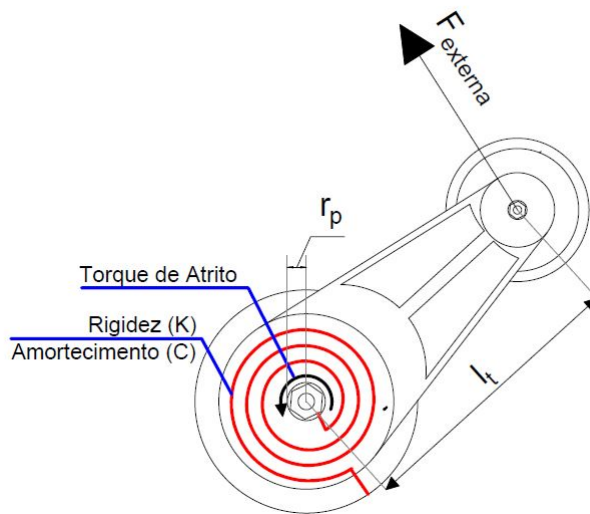


Figura 3.6: Diagrama de Corpo Livre para pequenos deslocamentos.

Substituindo-se as Equações 3.5, 3.15 e 3.23 em 3.21, tem-se:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t + K_1\theta_t = [F_0\text{sen}(\omega t) + F_{pt}]l_t + \mu(\dot{\theta}).N(t).r_p \quad (3.24)$$

Adotando-se que a força normal possui caráter variante e é uma reação da força externa, o rearranjo dos termos leva à equação final para o caso simplificado:

$$I_{eq}\ddot{\theta}_t + K_1\theta_t = [F_0\text{sen}(\omega t) + F_{pt}][l_t + \mu(\dot{\theta}).r_p] \quad (3.25)$$

Uma vez que este modelo é formulado para pequenos deslocamentos, adota-se a simplificação de considerar a frequência natural igual ao caso linear. Este modelo simplificado é muito útil quando deseja-se investigar a influência de fenômenos isolados, pois requer um custo computacional mais baixo em relação ao modelo que contempla a correia adjacente. O fato de nos casos reais o pré-tensionamento ser maior do que a força flutuante faz com que o tensionador tenha deslocamentos angulares pequenos, possibilitando esta simplificação.

3.3 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foi apresentada a modelagem matemática do autotensionador. Foi desenvolvida a equação de movimento em um grau de liberdade, e foram apresentadas as expressões dos momentos impostos pela mola, pela correia, pelo amortecimento e pelo atrito. Foram apresentados dois modelos de autotensionador, sendo um completo envolvendo os tramos adjacentes da correia, e outro considerando-se a força externa aplicada diretamente no tensionador.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesse capítulo, abordam-se os resultados e as discussões obtidos em simulações numéricas das equações de movimento. Discute-se a ocorrência do *Stick-Slip* e as influências do pré-tensionamento e da força normal variante. São investigados os efeitos da assimetria no coeficiente de atrito proposta no Capítulo 2 deste trabalho. Apresenta-se o conceito matemático de região de *Sticking* e um método é proposto para mapear o comportamento dinâmico do tensionador. Por fim, é discutida a existência de instabilidades.

4.1 Parâmetros Matemáticos de Simulação

As expressões matemáticas desenvolvidas no Capítulo anterior foram implementadas no software de cálculo numérico MATLAB®2013, e todos os resultados são exibidos neste capítulo. A Tabela 4.1 mostra os parâmetros do tensionador utilizados nas simulações, bem como os modelos de atrito utilizados. São usados dados qualitativos para apresentar e estudar fenômenos, e dados reais para verificar a existência dos fenômenos estudados em um tensionador real. Para as simulações que envolvem variação de parâmetros, as alterações nos valores são oportunamente identificadas.

Tabela 4.1: Parâmetros Gerais de Simulação para as duas Formulações Matemáticas.

Parâmetro	Dados Qualitativos	Dados Reais
Momento de Inércia (I_{eq})	10 $Kg.m^2$	0,001 $Kg.m^2$
Rigidez Linear (K_1)	10 $N.m/rad$	10 $N.m/rad$
Rigidez Não-Linear (K_2)	10 $N.m/rad$	1 $N.m/rad$
Amplitude de Força (F_0)	10 N	1-30 N
Braço do Tensionador (l_t)	1 m	0,1 m
Raio do pino (r_p)	1 m	0,01 m
Força de Pré-Tensionamento (F_{pt})	10 N	100-400 N
Ângulo (θ_1)	—	$\pi/4$
Ângulo (θ_2)	—	$\pi/6$
Razão de Frequências (r)	0,4	0,4
Coeficiente de Atrito Estático (μ_s)	0,3	0,3-2,0
Coeficiente de Atrito Cinético (μ_k)	0,5	0,6-2,2
Coeficiente de Assimétrico Atrito Cinético ($\mu_{k,2}$)	0,5	0,5-2,0

4.2 Aplicação dos Modelos de Atrito

Não existe uma regra geral para indicar qual o melhor modelo de atrito. Cada caso comporta um melhor modelo para a aplicação desejada. A escolha de um modelo de atrito, portanto, deve ser feita considerando-se a particularidade de cada caso. Dada a grande quantidade de modelos de atrito, apresentados no Capítulo 2, é necessário fazer a escolha de qual modelo melhor se aplica ao presente caso. Para fins de simulações numéricas, os critérios adotados neste estudo para a escolha do modelo de atrito são: a boa descrição dos fenômenos estudados, o custo computacional e a transição do regime transiente para permanente.

Inicialmente são analisados os modelos de atrito aplicados ao caso simplificado do autotensionador da Equação 3.20. A Figura 4.1 exibe o resultado de uma simulação utilizando os dados qualitativos, com as curvas de posição para os oito modelos de atrito apresentados. São exibidos também, a título de referência, os tempos de simulação em segundos gastos em cada um dos modelos. Os dados gerais empregados são os dados qualitativos apresentados na Tabela 4.1, com pré-tensionamento de $15N$. Nesta condição, espera-se que o patamar de parada da região *Sticking* seja bem definido.

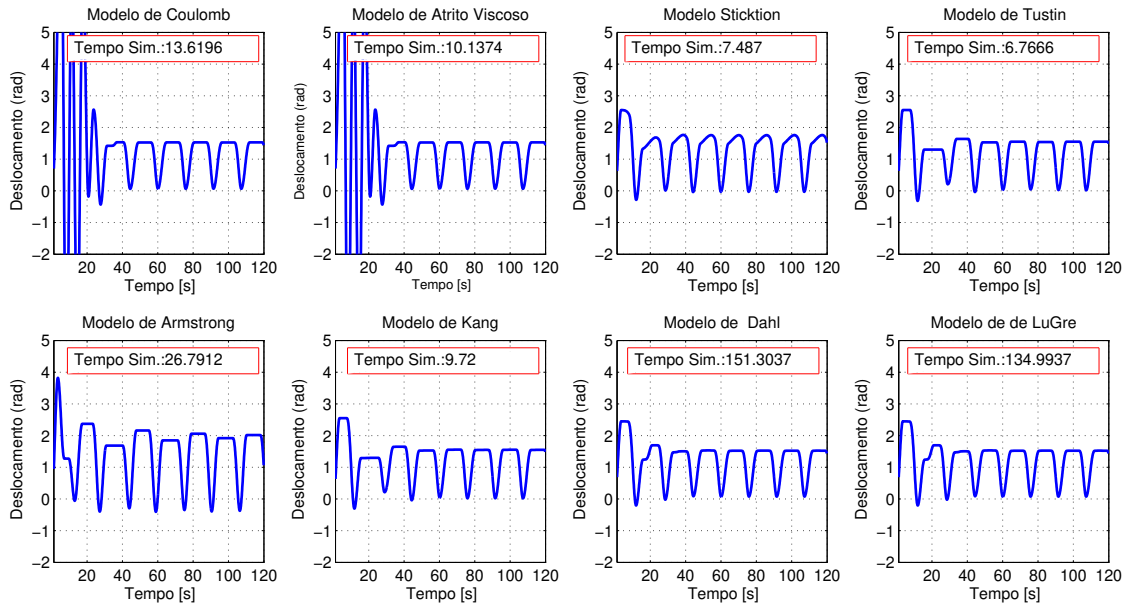


Figura 4.1: Curvas de posição para oito casos de modelo de atrito aplicados à formulação simplificada de tensionador, exibindo os tempos de simulação em segundos.

A análise da Figura 4.1 e os critérios de seleção apresentados permitem apontar alguns modelos de atrito que seriam mais apropriados para o presente caso. Inicialmente, nota-se que todos os modelos, à exceção do modelo *Sticktion*, descrevem suficientemente bem o fenômeno *stick-slip*. O modelo de Armstrong, embora descreva corretamente a região de *Sticking*, possui uma formulação mais complexa, e a sua resposta apresenta inconsistências na amplitude, que se altera a cada período.

Os modelos de Dahl e LuGre, muito embora sejam modelos sofisticados e recentes, não apresentam nenhuma descrição mais relevante do que aquelas observadas nos modelos estáticos de atrito. Isto se deve ao fato de o problema analisado ser uma aplicação macroscópica, sem a necessidade de se investigar os efeitos potencialmente descritos por estes modelos. Além disto, a sua formulação diferencial implícita faz com que os tempos de simulação gastos nestes dois modelos dinâmicos sejam muito superiores aos demais modelos de atrito, o que dificulta a sua utilização neste caso.

Para fins de estudo do regime permanente, os modelos de Coulomb e Viscoso, embora descrevam corretamente a região de *Sticking*, possuem uma região transiente muito extensa, e demoram a atingir o regime permanente, quanto maior for a força de pré-tensionamento. Uma vez que o modelo viscoso é mais apropriado para contatos lubrificados, e que o presente estudo considera um tensionador sem amortecimento viscoso, sua formulação não será aplicada aqui.

Este modelo, porém, pode vir a encontrar utilidade em modelo de tensionador com lubrificação no contato do braço articulado com o pino. Cabe notar que o modelo de Coulomb, que em tese é o mais simples, requer um tempo de simulação maior do que os modelos *Sticktion*, Tustin e Kang. Isto ocorre porque estes últimos apresentam uma formulação matemática contínua, enquanto que modelo de Coulomb que possui uma condicional em sua formulação.

Esta análise com valores qualitativos tende a apontar os modelos de Tustin e Kang como sendo os mais apropriados para a presente aplicação, uma vez que descrevem suficientemente bem os fenômenos a serem analisados. Com a finalidade de verificar esta hipótese, um outro grupo de simulações é feito para a formulação completa do tensionador, descrita pela Equação 3.20, considerando-se os valores reais(quantitativos) da Tabela 4.1. A Figura 4.2 exhibe os resultados desta simulação para os mesmos oito modelos de atrito.

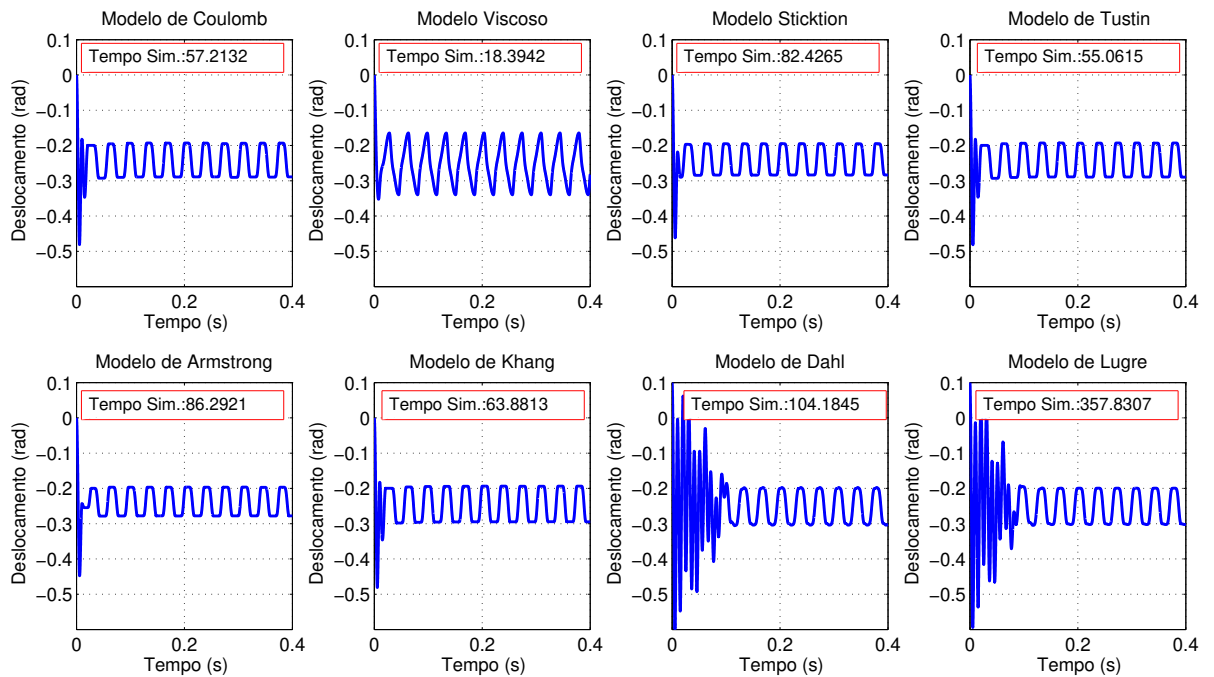


Figura 4.2: Curvas de posição para oito casos de modelo de atrito aplicados à formulação completa de tensionador, exibindo os tempos de simulação em segundos.

A análise da Figura 4.2 permite confirmar algumas das hipóteses levantadas no estudo qualitativo feito anteriormente. Com a introdução do modelo não-linear, os tempos de integração demandados pelos modelos dinâmicos de Dahl e LuGre crescem exorbitantemente, e os fenômenos por eles descritos não divergem dos descritos pelos modelos estáticos. Isto dificulta a aplicação destes modelos neste caso. O modelo de Armstrong, embora completo, demandou um tempo de simulação maior do que os outros modelos estáticos, e portanto pode ser descartado em detrimento de outros que descrevem os mesmos fenômenos em menor tempo.

Os resultados da simulação para o caso quantitativo utilizando-se o modelo completo de autotensionador confirmam, portanto, a hipótese de que para o caso analisado neste estudo, os modelos mais adequados são o modelo de Tustin e o modelo de Kang. Paralelamente a estes, aceita-se o uso do modelo de Coulomb, que por sua formulação simplificada e de fácil implementação, pode ser útil em todas as análises.

Analisando-se agora apenas a aplicação dos modelos de Tustin e Kang, pode-se delinear uma regra geral para determinar qual dos dois modelos utilizar. Os parâmetros d e h do modelo de Kang são responsáveis, respectivamente, por controlar a inclinação da curva na transição do regime estático para o dinâmico e a inclinação da curva no cruzamento pela velocidade nula. O modelo de Kang não permite parametrizar, portanto, o valor exato da velocidade de Stribeck (v_s) a partir da qual se dará a transição entre os regimes estático e dinâmico. Esta parametrização é possível apenas no modelo de Tustin, que possui a velocidade de Stribeck diretamente em sua formulação.

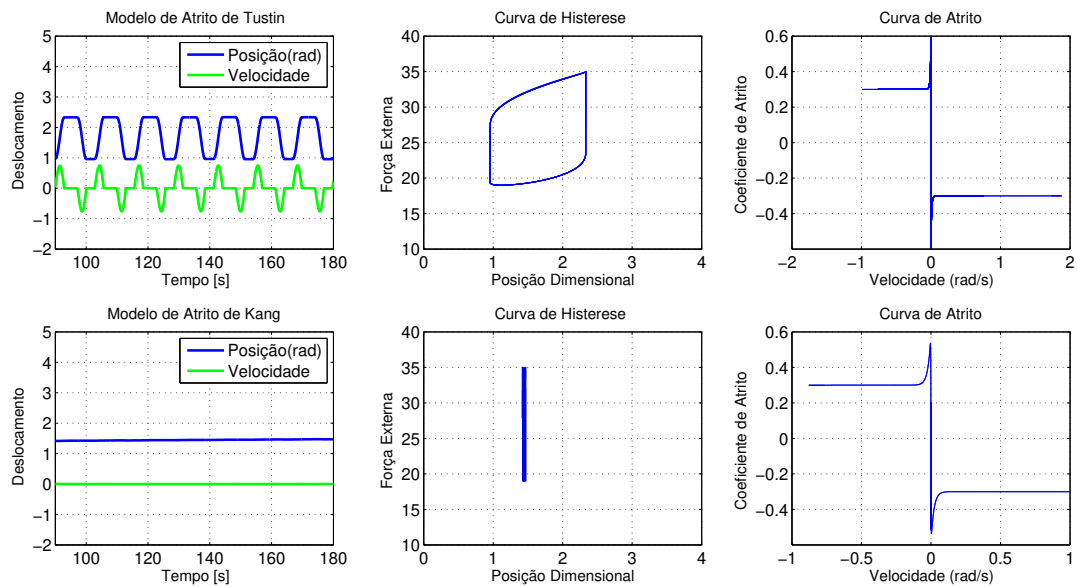


Figura 4.3: Curvas de posição para oito casos de modelo de atrito aplicados à formulação simplificada de tensionador, exibindo os tempos de simulação em segundos.

Portanto, o modelo de Kang sofre certa limitação para descrever a transição do regime estático para o cinético, quando esta transição se dá a velocidades extremamente baixas. O modelo de Tustin não encontra esta simulação, e permite modelar regiões de transição estático-cinético a velocidades muito mais baixas do que o modelo de Kang permite. A consequência direta disto é uma divergência de resultados entre os dois modelos, quando as velocidades simuladas encontram-se abaixo do mínimo valor possível que pode ser descrito pelo modelo de Kang. Neste caso, o modelo de Kang fornecerá um coeficiente de atrito maior do que o modelo de Tustin, como ocorre na Figura 4.3, onde o modelo de Kang fornece uma força de atrito maior que a de Tustin, sendo capaz de indicar travamento.

4.3 Os efeitos da Normal Variante e do Pré-Tensionamento

Conforme demonstrado matematicamente no Capítulo 3, a força normal à qual o pino de apoio está sujeito é diretamente relacionada com o caráter da força externa aplicada sobre o tensionador. Quando comparados os modelos com normal constante e normal variante, verifica-se uma alteração no caráter do *stick-slip*, que passa a apresentar tempos de parada maiores em um dos extremos do movimento. A Figura 4.4 ilustra os resultados de uma simulação com o modelo simplificado de tensionador da Equação 3.25, considerando-se a hipótese de força normal constante.

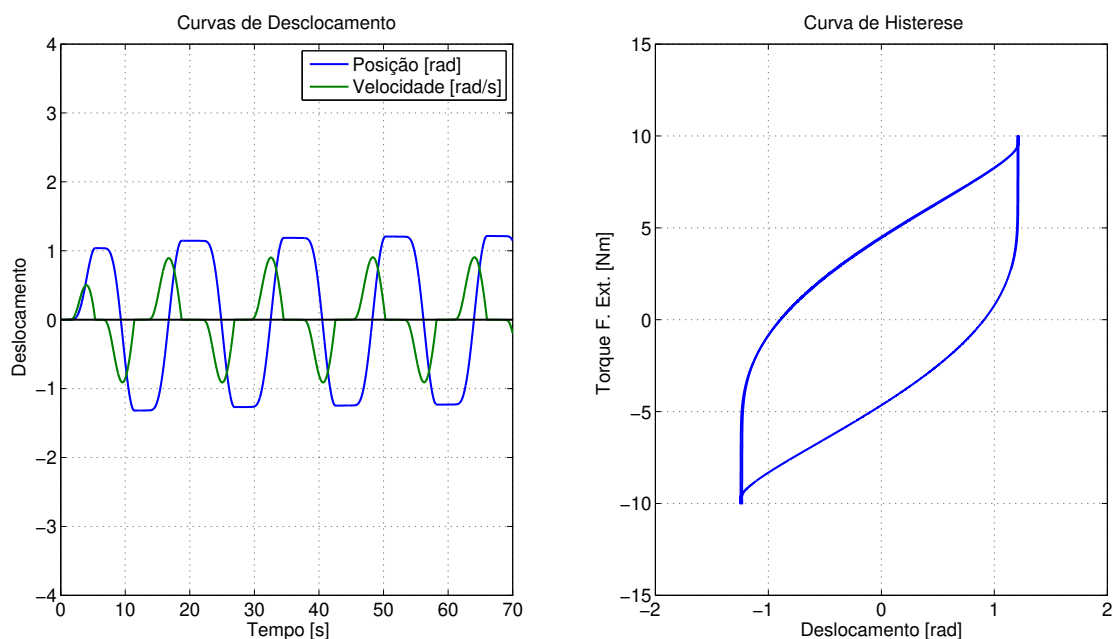


Figura 4.4: Curvas de Deslocamento e Histerese da formulação simplificada para força normal constante.

A análise da figura permite observar que quando a força normal é considerada constante, os tempos de parada da região *sticking* nos dois extremos do movimento são exatamente os mesmos, fazendo com que o *stick-slip* tenha forma simétrica em relação ao eixo das abcissas. Este comportamento pode ser observado também na curva de histerese, que possui tempos de parada iguais nos extremos laterais, e é simétrica em relação ao eixo das ordenadas. Isto ocorre porque sendo a força normal constante, a força de atrito possui os seus valores máximo e mínimo com magnitudes iguais.

A mesma análise pode ser agora feita considerando-se força normal variável. Esta condição simula o caso em que a correia está apenas apoiada no autotensionador e a força externa exercida assume valores flutuantes que variam de zero até um valor máximo. A Figura 4.5 exibe o caráter flutuante da força normal simulada, bem como as curvas de deslocamento e histerese para este caso.

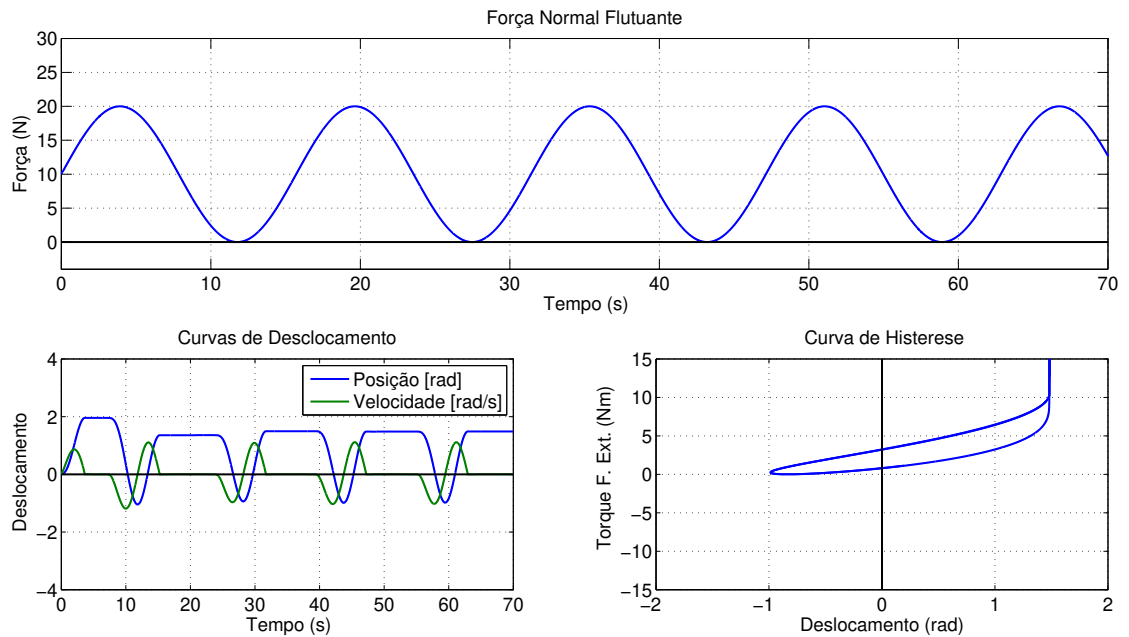


Figura 4.5: Força normal variante, Curvas de Deslocamento e Curva de Histerese da formulação simplificada para força normal variante.

Três alterações importantes podem ser notadas quando adotada a hipótese de força normal variável. Primeiramente, o ponto de equilíbrio considerado é alterado em função do pré-tensionamento, fazendo com que as curvas de deslocamento e velocidade não mais sejam simétricas em relação ao eixo das abscissas. O mesmo é observado na curva de histerese, que é deslocada em relação ao eixo das ordenadas.

Segundo, a forma do *stick-slip* é alterada, fazendo com que seja observada uma região de parada apenas em um dos extremos do movimento. Isto ocorre devido ao caráter flutuante da força normal, que pode assumir valores nulos em determinados momentos, simulando uma correia apenas apoiada no tensionador, sem aplicação de força. Nos momentos em que a força normal é nula, a força de atrito também é nula, e portanto, não há resistência por parte do atrito. Isto faz com que o extremo inferior do movimento não possua a região de *sticking*.

Finalmente, estas duas alterações também são observáveis na curva de histerese, que perde o seu caráter simétrico em relação ao eixo das ordenadas, sofrendo um leve deslocamento lateral. Observa-se ainda na mesma curva as alterações na forma do fenômeno *stick-slip* comentadas anteriormente, com diferenças nos tempos de parada entre os extremos do movimento. O extremo esquerdo da curva de histerese não exibe região de parada, enquanto o extremo oposto concentra toda a região de *sticking* observada na curva de deslocamento.

O mesmo estudo qualitativo é feito agora considerando-se a existência de uma componente constante na força externa simulando o pré-tensionamento. A Figura 4.6 mostra o resultado de simulações feitas no modelo simplificado da equação 3.25, considerando-se a hipótese em que a força normal é acompanhada do pré-tensionamento. Neste caso a força normal possui duas componentes: uma estática decorrente do pré-tensionamento, e outra flutuante decorrente da flutuação de torque na correia.

Este caso simula a condição em que o autotensionador já está instalado em um sistema de transmissão devidamente tracionado e em equilíbrio e é submetido às flutuações de tensão da correia em operação. Os gráficos abaixo apresentados foram resultado de simulação considerando-se os parâmetros qualitativos da Tabela 4.1, porém com força de pré-tensionamento de 20N. O modelo de atrito adotado neste caso é o Modelo de Tustin.

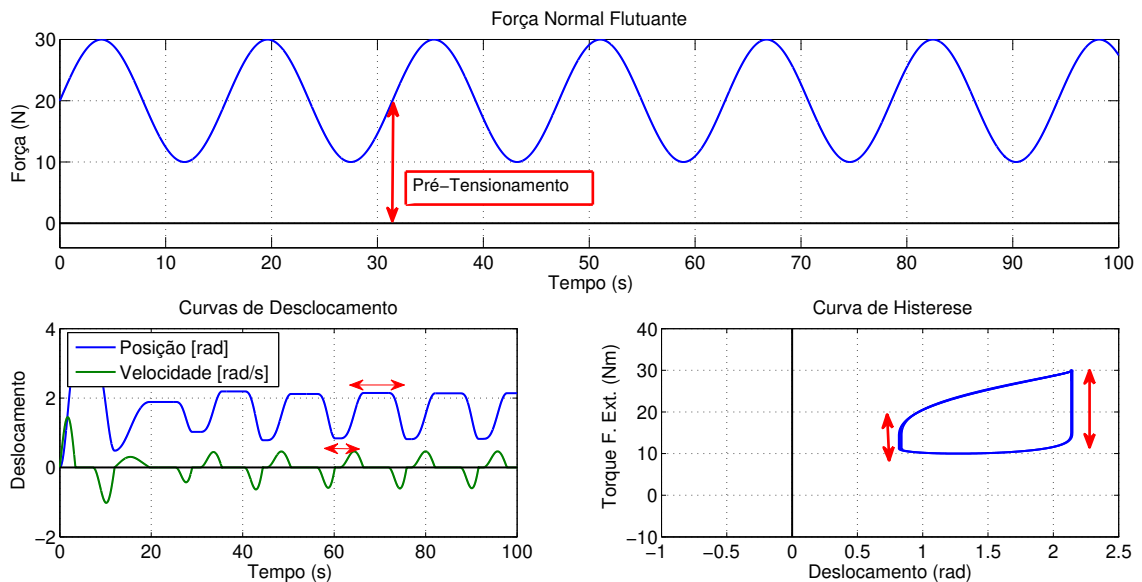


Figura 4.6: Força normal variante, Curvas de Deslocamento e Curva de Histerese da formulação simplificada para força normal variante na presença de pré-tensionamento.

Analisando a Figura 4.6, observam-se as mesmas alterações no ponto de equilíbrio e na forma do *stick-slip* observadas no caso em que não há componente constante na força. Entretanto, é possível notar que os dois extremos da curva de deslocamento passam a ter regiões de *sticking*, e não apenas o extremo superior como no caso anterior. Nota-se ainda que os tempos de parada em cada um dos extremos são diferentes, de forma que o tensionador permaneça mais tempo parado em um dos extremos do que em outro.

A análise da curva de histerese permite observar facilmente as alterações ocorridas com a introdução de pré-tensionamento, através da observação do seu deslocamento e sua deformação. Estas características refletem na curva de histerese, respectivamente, a mudança no ponto de equilíbrio e a alteração na forma como se apresenta o *stick-slip*. Nota-se que com a introdução de pré-tensionamento, a curva de histerese, além de possuir extremidades laterais com tamanhos diferentes, é deslocada mais ainda do ponto inicial de equilíbrio no eixo das ordenadas.

O pré-tensionamento e a força normal variante contribuem, portanto, para que a forma com que se apresenta o fenômeno *stick-slip* seja modificada, apresentando regiões de *sticking* com tempos de parada diferentes em cada lado do movimento. Contribuem também para a modificação do ponto de equilíbrio e alteração da característica da curva de histerese. Isto ocorre devido ao caráter variante e harmônico da força normal simulada.

A flutuação da normal descarregada no pino de apoio faz com que a força de atrito tenha os seus valores máximo e mínimo com valores absolutos diferentes, ao contrário do que ocorre no caso de força normal constante. Consequentemente, a força de atrito também terá valores máximo e mínimo com magnitudes diferentes. Esta diferença nos valores máximo e mínimo do atrito confere maior resistência em um extremo do movimento, e menor resistência em outro, alterando a característica do *Stick-Slip*. Isto é o que ocasiona os diferentes tempos de parada observados na Figura 4.6.

Um estudo semelhante pode ser feito variando-se os valores de pré-tensionamento, a fim de verificar o desenvolvimento dos fenômenos acima descritos. A Figura 4.7 exibe as curvas de força normal, deslocamento e histerese resultantes da simulação com dados qualitativos feita para três valores de pré-tensionamento e coeficiente de atrito cinético de $\mu_k = 0,5$. Os dados da Tabela 4.1 são utilizados para todos os outros parâmetros. Novamente o modelo de Tustin é utilizado e espera-se observar acentuadamente os mesmos fenômenos descritos na simulação anterior.

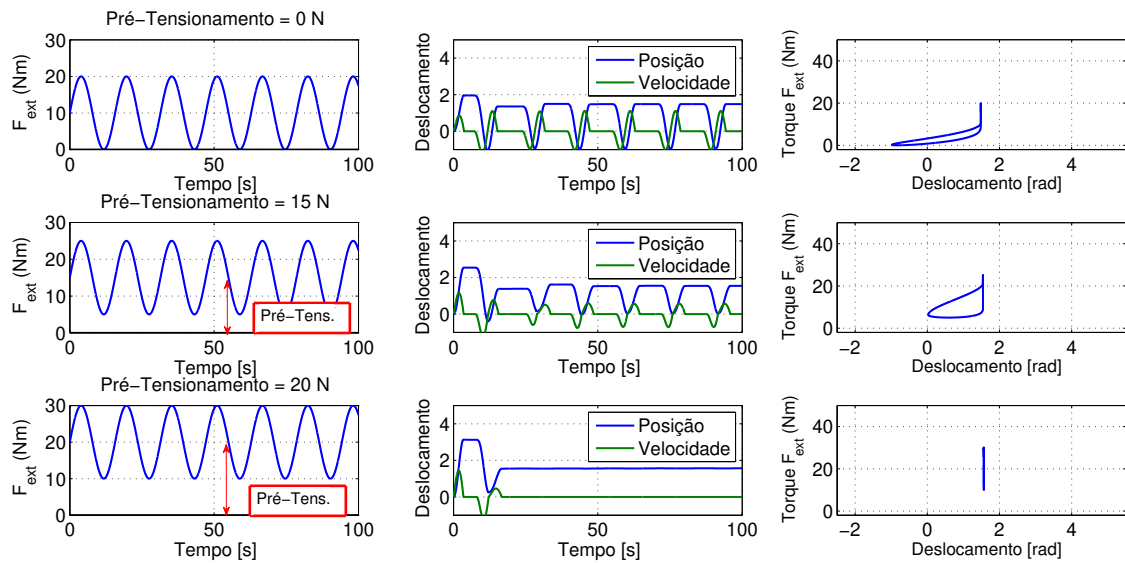


Figura 4.7: Força normal variante, Curvas de Deslocamento e Curva de Histerese da formulação simplificada para força normal variante no acréscimo de pré-tensionamento.

A análise da Figura 4.7 permite investigar a influência do pré-tensionamento conforme seu valor é aumentado. Primeiramente, na ausência de pré-tensionamento, observam-se os resultados obtidos e explicados nesta seção, com ocorrência de *sticking* em apenas um dos extremos do movimento. Conforme o pré-tensionamento aumenta e atinge o valor de 15 N , os dois extremos do movimento passam a ter o comportamento *sticking*, porém com tempos de parada diferentes, como evidenciado pelo gráfico de histerese.

À medida em que o pré-tensionamento é incrementado para o valor de 20 N , a força normal descarregada no pino de apoio aumenta e a força de atrito torna-se tão grande que a força externa não consegue sobrepor o atrito. Como consequência, o tensionador trava e mantém-se na mesma posição independentemente da atuação da força externa. Isto pode ser visto na curva de histerese, que apresenta variações no torque da força externa, sem contudo, apresentar variação no deslocamento.

Portanto, o pré-tensionamento contribui para a diferença nos tempos de parada observados nos extremos do movimento e para o incremento da força de atrito. Valores altos de pré-tensionamento tornam o atrito estático tão grande que a força flutuante não consegue sobrepujar o atrito, ocasionando travamento.

4.4 Região de *Sticking*

Uma maneira interessante de se estudar a forma do *Stick-Slip* é através da delimitação da chamada Região de *Sticking*. É a região onde espera-se que ocorram as transições entre o movimento puramente deslizante e o movimento *Stick-Slip*. Esta análise torna-se importante quando deseja-se visualizar as condições em que o *Stick-Slip* deve ser observado. O ponto de partida para esta análise é a equação genérica de um autotensionador sujeito ao atrito seco com mola linear, descrita da seguinte forma:

$$I\ddot{\theta}_t + K_1\theta_t + f(\dot{\theta}_t).r_p = F_{externa}.l_t \quad (4.1)$$

Sendo μ_k e μ_s respectivamente os coeficientes cinético e estático e N a reação normal, a força de atrito genérica dada pela função $f(\dot{\theta}_t)$ é definida como:

$$f(\dot{\theta}_t) = \begin{cases} \mu_k N & \text{se } v > 0 \\ \mu_s N & \text{se } v = 0^+ \\ |f| < \mu_s N & \text{se } v = 0, \\ -\mu_s N & \text{se } v = 0^- \\ -\mu_k N & \text{se } v < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Onde 0^+ e 0^- são os valores da velocidade tomados no limite pela direita e pela esquerda, respectivamente. Quando o tensionador possui velocidade nula, f assume valores entre $-\mu_s N$ e $\mu_s N$. A solução para o caso livre da equação 4.1 é bem conhecida. A amplitude de vibração decai de forma linear até que a força elástica não consegue sobrepor o atrito em determinada transição. O tensionador permaneceria em repouso naquele ponto indefinidamente, na situação de *Sticking* permanente.

Hong (2000) propõe que os limites da região de *Sticking* são dados sob a condição de:

$$\ddot{\theta}_t^+ . \ddot{\theta}_t^- = 0 \quad (4.3)$$

Para o caso forçado da Equação 4.1, tem-se:

$$\left(-\frac{K_1\theta_t}{I} - \frac{N\cdot\mu_s r_p}{I} + \frac{F_{externa}l_t}{I}\right) \left(-\frac{K_1\theta_t}{I} + \frac{N\cdot\mu_s r_p}{I} + \frac{F_{externa}l_t}{I}\right) = 0 \quad (4.4)$$

Para que a equação 4.4 seja satisfeita, um dos termos entre parênteses deve ser nulo. A fronteira da região de *Sticking* $z_s(\theta_t, t)$ portanto, pode ser escrita como:

$$|z_s(\theta_t, t)| = \left|\theta_t - \frac{F_{externa}l_t}{K_1}\right| = \frac{N\cdot\mu_s r_p}{K_1} \quad (4.5)$$

Objetivamente, os limites superior e inferior da região de *Sticking* podem ser derivados da Equação 4.5, através do seu desmembramento. Assim sendo, o limite superior da região de *Sticking* é definido por:

$$z_s(x, t) = \frac{l_t}{K_1} F_{externa} + \frac{r_p}{K_1} N \mu_s \quad (4.6)$$

E o limite inferior é dado por:

$$z_i(x, t) = \frac{l_t}{K_1} F_{externa} - \frac{r_p}{K_1} N \mu_s \quad (4.7)$$

A Figura 4.8 ilustra os resultados da simulação numérica de um modelo simplificado de tensionador, utilizando-se os parâmetros da Tabela 4.1, com os limites superior e inferior da região de *Sticking*. A simulação é feita utilizando-se o modelo de Tustin, e admitindo-se a hipótese de força normal constante. Observa-se que as duas fronteiras da região de *Sticking* são simétricas, fazendo com que os tempos de parada do *Stick-Slip* também sejam simétricos nos dois extremos do movimento.

Sempre que o movimento adentra na região de *sticking*, o corpo passa a desacelerar até o seu repouso durante o período de *Sticking*. Após adquirir certa velocidade e entrar em movimento, o corpo sai da região de *Sticking* finalizando o seu ciclo.

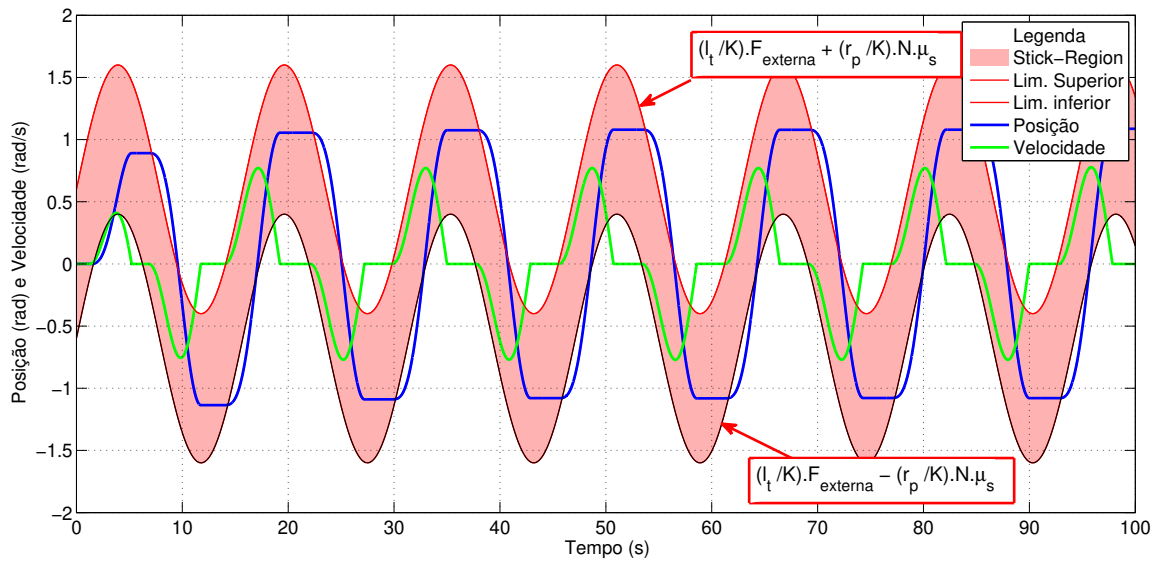


Figura 4.8: Região de *Sticking* para o caso de força normal constante sem pré-tensionamento.

Analogamente, a mesma região pode ser delimitada considerando-se força normal variante com pré-tensionamento. A Figura 4.9 ilustra a região de *Sticking* para este caso. Observa-se que as duas fronteiras da região de *Sticking* não são mais simétricas, fazendo com que os patamares de parada do *Stick-Slip* também não sejam simétricos nos dois extremos do movimento, a região de parada maior em um dos extremos.

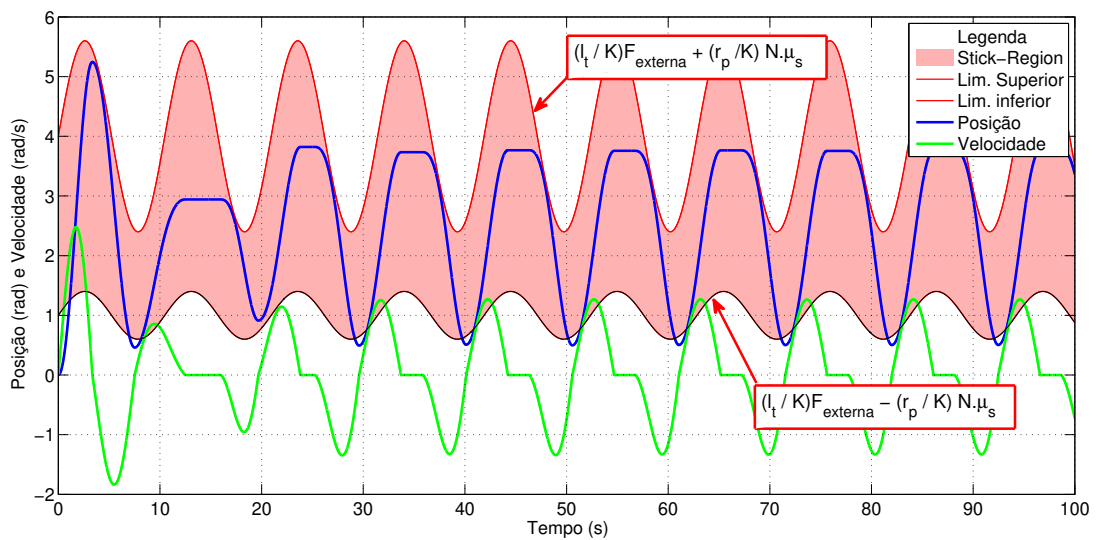


Figura 4.9: Região de *Sticking* para o caso de força normal variante com pré-tensionamento.

A delimitação da região de *Sticking* é uma ferramenta que contribui para uma melhor visualização do comportamento do fenômeno *Stick-Slip*, permitindo prever dentro de qual região os patamares de parada devem ocorrer. Isto permite observar por quê ocorrem paradas com tempos diferentes nos extremos do movimento, ou por quê o tensionador não para em um dos extremos.

4.5 Efeito da Rigidez Não-Linear

O efeito da rigidez não-linear em um sistema com atrito é agora estudado através do modelo exposto na Equação 3.20. Existem três tipos de rigidez, levando-se em conta a linearidade da mola.

O caso mais simples é o de rigidez linear, quando a mola obedece à Lei de Hooke. O segundo caso é o de rigidez não-linear com comportamento *Hardenning*, quando a força elástica cresce exponencialmente com o incremento de deslocamento. O terceiro comportamento é o não-linear *Softening*, quando a força elástica decresce à medida que a mola sofre um deslocamento.

A Figura 4.10 mostra os três tipos de rigidez. Para a aplicação do autotensionador, o modelo de rigidez *Softening* é descartado, pois não se encontram soluções construtivas de autotensionador que utilizam molas deste tipo. Isto acontece porque uma rigidez *Softening* pode facilmente induzir o tensionador a um comportamento instável. Neste estudo, portanto, são estudados apenas os resultados para a rigidez linear e a rigidez *Hardenning*.

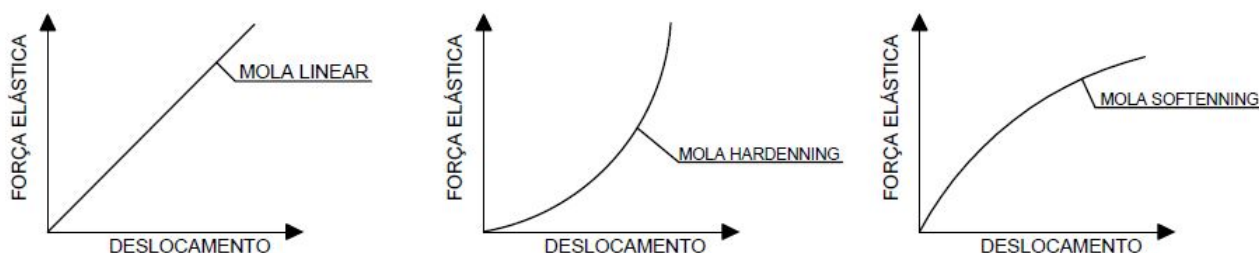


Figura 4.10: Tipos de Rigidez não-linear.

A Figura 4.11 exibe os resultados de uma simulação considerando-se rigidez não linear do tipo *hardenning*, para a formulação simplificada do tensionador e pequenos deslocamentos. São utilizados os parâmetros da Tabela 4.1 e devido à restrição a pequenos deslocamentos, o modelo de atrito utilizado é o modelo de Tustin, que permite aproximar tanto quanto se queira a velocidade de Stibek da origem. Nesta simulação não são consideradas forças de pré-tensionamento.

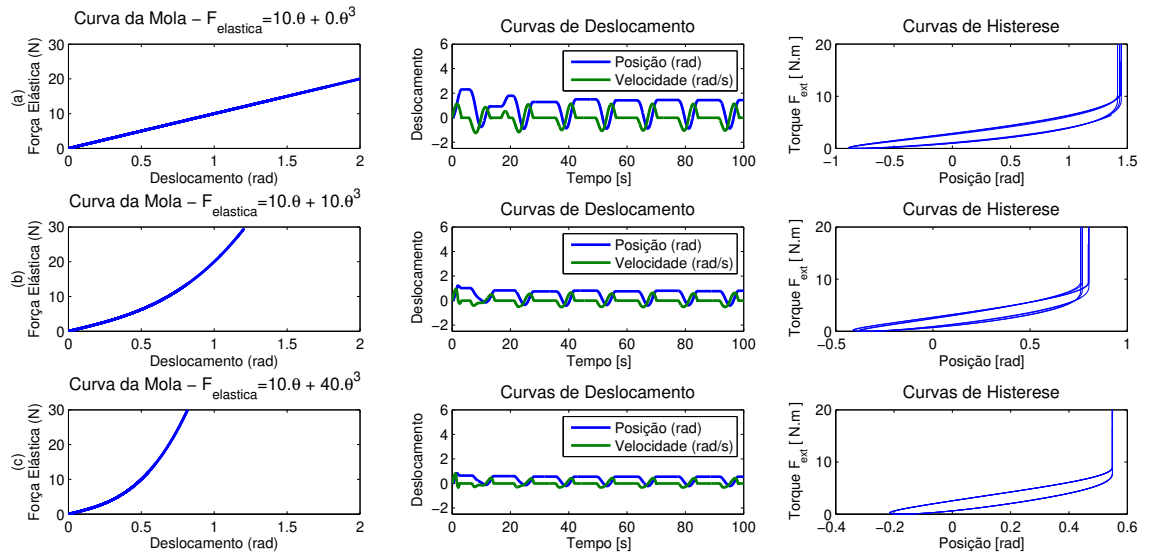


Figura 4.11: Curvas de rigidez, deslocamento e histerese para a formulação simplificada de autotensionador sem pré-tensionamento. a) Rigidez não-linear $K_2 = 0N$, b) Rigidez não-linear $K_2 = 10N$, b) Rigidez não-linear $K_2 = 40N$.

Observando-se os resultados para esta simulação, podem ser apontadas duas conclusões. Primeiramente, percebe-se que a presença de uma rigidez não-linear do tipo *hardenning* exerce considerável influência na redução da amplitude do movimento. Percebe-se ainda que os patamares característicos da região de *sticking* sofrem um pequeno incremento, registrando aumento do tempo de parada com o incremento da rigidez.

À medida que a não-linearidade da mola cresce, a faixa de deslocamento do tensionador é reduzida, alterando a característica do *stick-slip*. Estas conclusões são facilmente observáveis nas curvas de histerese, que tem a sua largura reduzida com o aumento da rigidez não-linear e tem seu extremo lateral direito aumentado.

O mesmo estudo é agora feito para um modelo com a presença de pré-tensionamento e os resultados são exibidos na Figura 4.12 abaixo. São utilizados os valores qualitativos da Tabela 4.1. A mesma redução na amplitude do movimento é observada. A alteração no caráter do *stick-slip* é agora mais evidente. Observa-se que à medida que a rigidez não-linear é incrementada, o autotensionador permanece mais tempo parado na região de *sticking*, nos dois extremos do movimento.

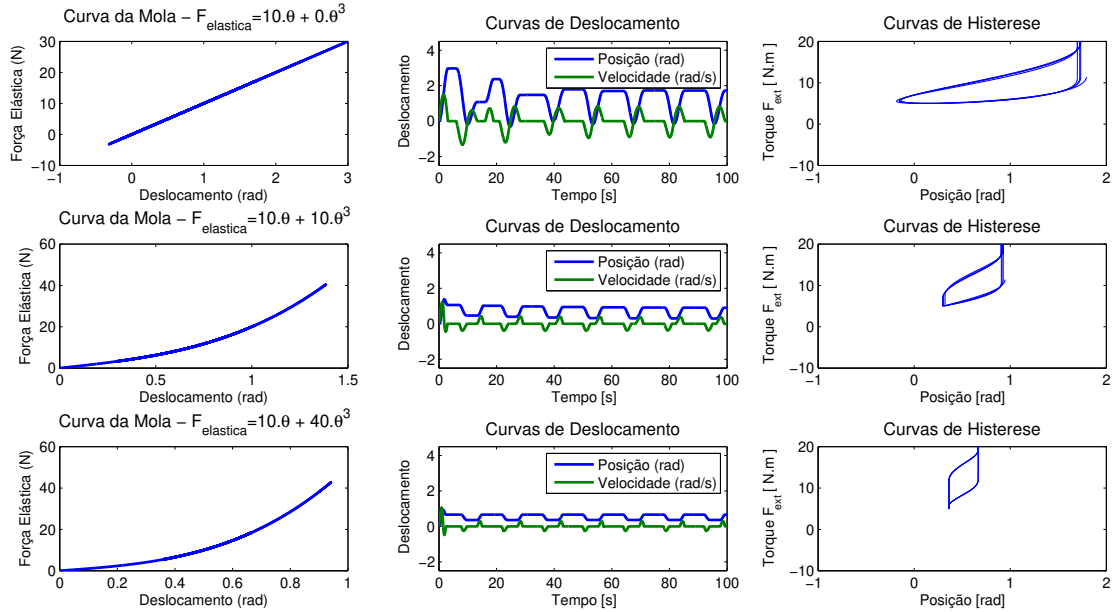


Figura 4.12: Curvas de rigidez, deslocamento e histerese para a formulação simplificada de autotensionador com pré-tensionamento, considerando-se mola com rigidez não-linear do tipo *Hardenning*.

Inicialmente o extremo inferior do movimento apresenta tempos de parada menores que o extremo superior, isto devido ao efeito do pré-tensionamento descrito na seção 4.3. Entretanto, à medida que a rigidez não linear aumenta o tempo de parada no extremo inferior aumenta, e os patamares de *sticking* tendem a tornarem-se iguais. O aumento da rigidez não-linear contribui, portanto, para a alteração nos patamares de parada do movimento.

As curvas de histerese descrevem muito bem este fenômeno, ao tornarem-se quase simétricas à medida que a rigidez não linear cresce. Portanto, o aumento da rigidez não-linear acaba por anular o efeito do pré-tensionamento.

4.6 Efeitos da Assimetria no Coeficiente de Atrito

Conforme a apresentação feita no Capítulo 2, existem três possibilidades de assimetria no coeficiente de atrito. Primeiramente o caso de assimetria total, em que toda a curva de atrito é deslocada para cima ou para baixo. Em segundo lugar, a assimetria no coeficiente cinético de atrito, quando este coeficiente apresenta valores distintos para velocidades positivas e negativas. O terceiro e último caso é análogo ao anterior, porém com distinção apenas no coeficiente estático de atrito. Com a finalidade de isolar apenas o efeito da assimetria no coeficiente de atrito, o modelo simplificado e linear da Equação 3.25 é utilizado, considerando-se o termo $\mu(\dot{\theta})$ assimétrico. A Figura 4.13 mostra os resultados obtidos nas curvas de deslocamento e velocidade, para o caso de assimetria total.

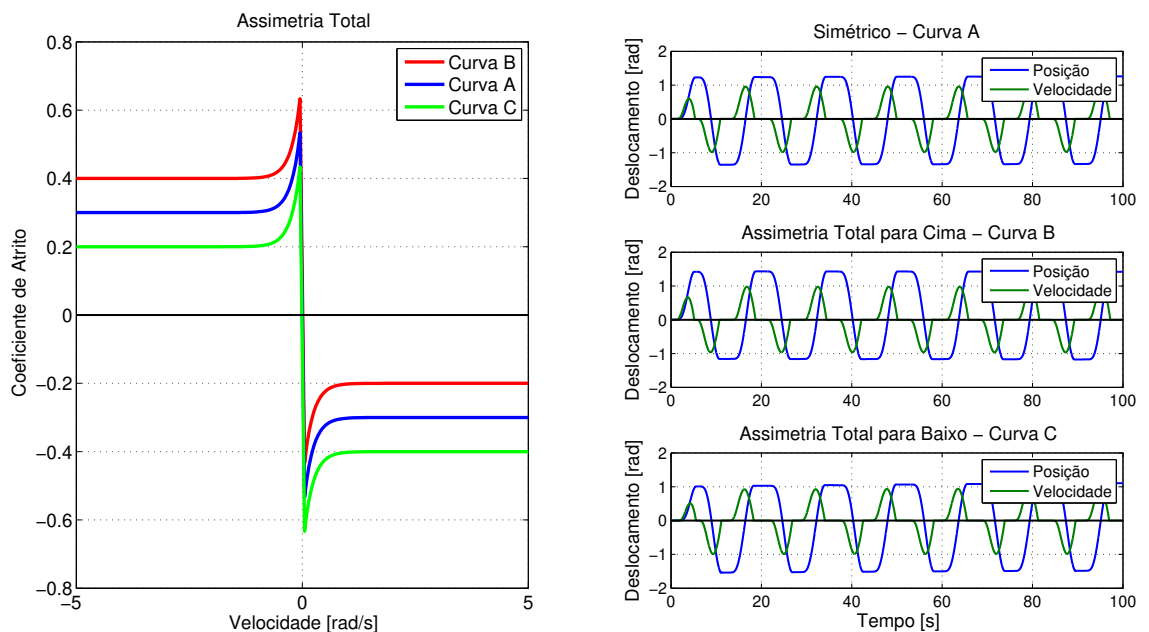


Figura 4.13: Curvas de atrito e deslocamento para o caso de assimetria total no coeficiente de atrito. Curva A - Coeficiente de atrito simétrico. Curva B - Coeficiente de atrito deslocada para cima. Curva C - Coeficiente de atrito deslocada para baixo.

Observa-se que a principal consequência do deslocamento total da curva de atrito é um igual deslocamento do ponto de equilíbrio nas curvas de deslocamento e velocidade. O comportamento do fenômeno *stick-slip* não é alterado e os patamares em ambos os extremos do movimento permanecem com o mesmo tempo de parada. A Figura 4.14 mostra a relação das curvas de deslocamento com a curva de histerese.

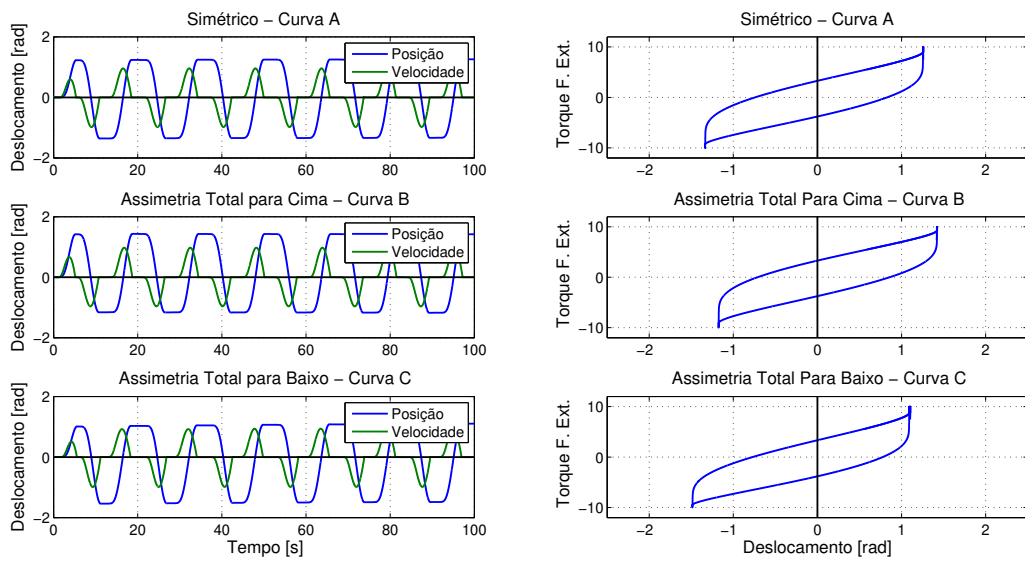


Figura 4.14: Curvas de atrito e histerese para o caso de assimetria total no coeficiente de atrito.

Observa-se que a forma do *stick-slip* na curva de histerese, representado nos extremos laterais, permanece inalterado. Toda alteração restringe-se ao deslocamento lateral referente ao ponto de equilíbrio, como observado nas respectivas curvas de deslocamento. A Figura 4.15 mostra a mesma simulação, porém considerando-se o caso de assimetria apenas no coeficiente cinético.

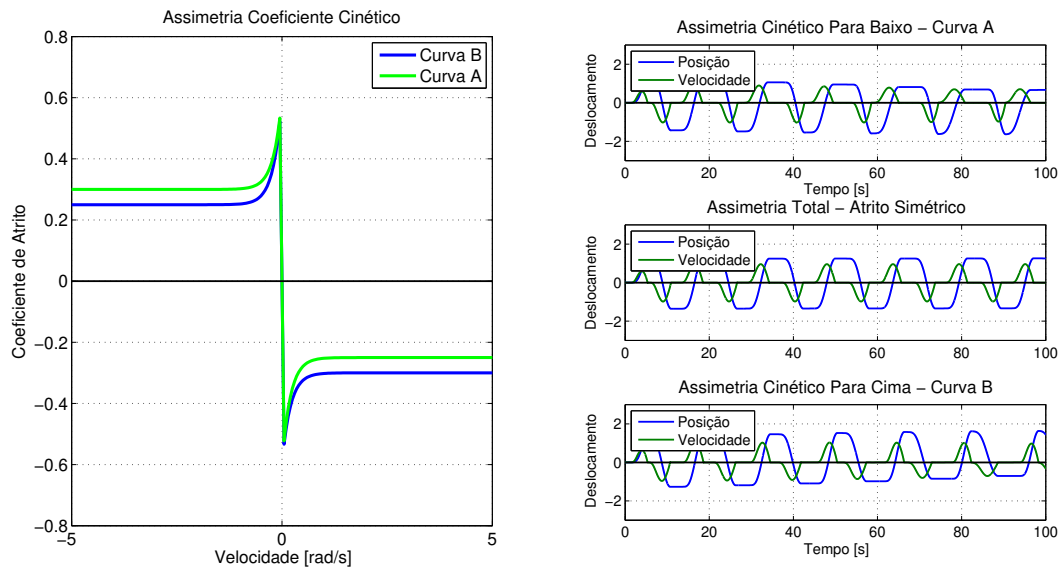


Figura 4.15: Curvas de atrito e deslocamento para assimetria apenas no coeficiente cinético de atrito. Curva A - Assimetria na velocidade positiva. Curva B - Assimetria na velocidade negativa.

Observa-se que, além da alteração no ponto de equilíbrio, o comportamento *stick-slip* também é alterado, apresentando patamares com tempos diferentes de parada. É possível notar que quando o atrito é assimétrico nas velocidades negativas, a curva de deslocamento apresenta maior tempo de parada no extremo superior, ao passo que para atrito assimétrico nas velocidades positivas, um maior tempo de parada é observado no extremo inferior.

Este comportamento se reflete na curva de histerese exibida na Figura 4.16. A curva de histerese deixa de ser simétrica e passa a exibir uma parada maior em um dos extremos do movimento, a depender do modo como a assimetria se apresenta. O aumento em um dos lados da curva de histerese ilustra a necessidade de o torque exercido pela força externa aumentar até sobrepujar a força de resistência oferecida pelo atrito. Enquanto esta força não é vencida, o tensionador permanece em repouso, conforme pode-se observar nos extremos laterais das curvas de histerese.

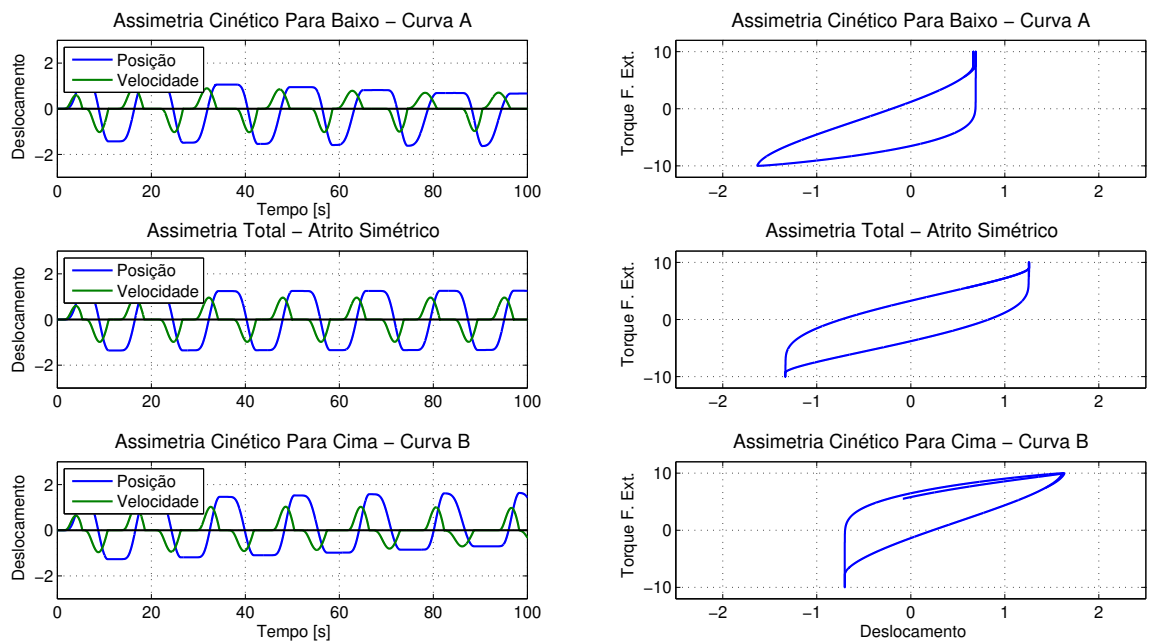


Figura 4.16: Curvas de atrito e histerese para o caso de assimetria apenas no coeficiente cinético de atrito.

Outro fenômeno observado é o deslocamento do ponto de equilíbrio da curva de deslocamento. Com a introdução de assimetria no atrito, o movimento encontra maior resistência para se deslocar em um dos sentidos, fazendo com que a amplitude seja diminuída no sentido em que o coeficiente de atrito cinético é maior. Isto é facilmente observável nas curvas de histerese, que sofrem um deslocamento lateral nos casos em que há assimetria no coeficiente de atrito.

No terceiro caso de assimetria, o coeficiente de atrito cinético é mantido constante, e apenas o coeficiente estático apresenta distinções com relação ao sentido do movimento. Quando considerado o caso de assimetria apenas no coeficiente estático, um comportamento semelhante ao de assimetria cinética é observado, conforme ilustra a Figura 4.17. Neste caso, as mesmas alterações no ponto de equilíbrio e na característica do *stick-slip* são observadas, porém de forma mais acentuada do que no caso de assimetria apenas no coeficiente cinético.

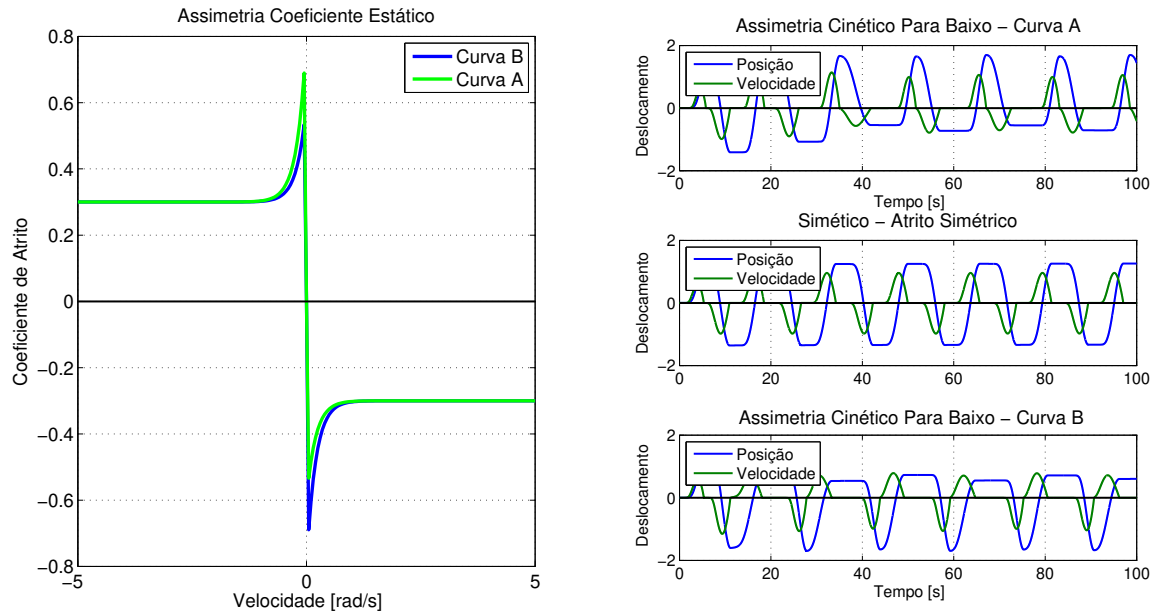


Figura 4.17: Curvas de atrito, deslocamento e velocidade para o caso de assimetria apenas no coeficiente estático de atrito. Curva A - Assimetria em velocidade negativa. Curva B - Assimetria em velocidade positiva.

Nota-se que a alteração no ponto de equilíbrio é mais representativa no caso de assimetria apenas no coeficiente estático e que os patamares de *sticking* possuem maior diferença entre os tempos de parada. É interessante observar pela curva de deslocamento da curva A, que o movimento inicia-se simétrico, e durante o regime transiente o ponto de equilíbrio desloca-se continuamente até atingir o regime permanente.

As alterações no ponto de equilíbrio e na forma do *stick-slip* podem ser observadas ainda nas respectivas curvas de histerese ilustradas na Figura 4.18. Observa-se que a curva de histerese é perfeitamente simétrica na ausência de assimetria e que, para o caso assimétrico os extremos laterais apresentam diferentes tempos de parada, dependendo do caráter assimétrico do atrito.

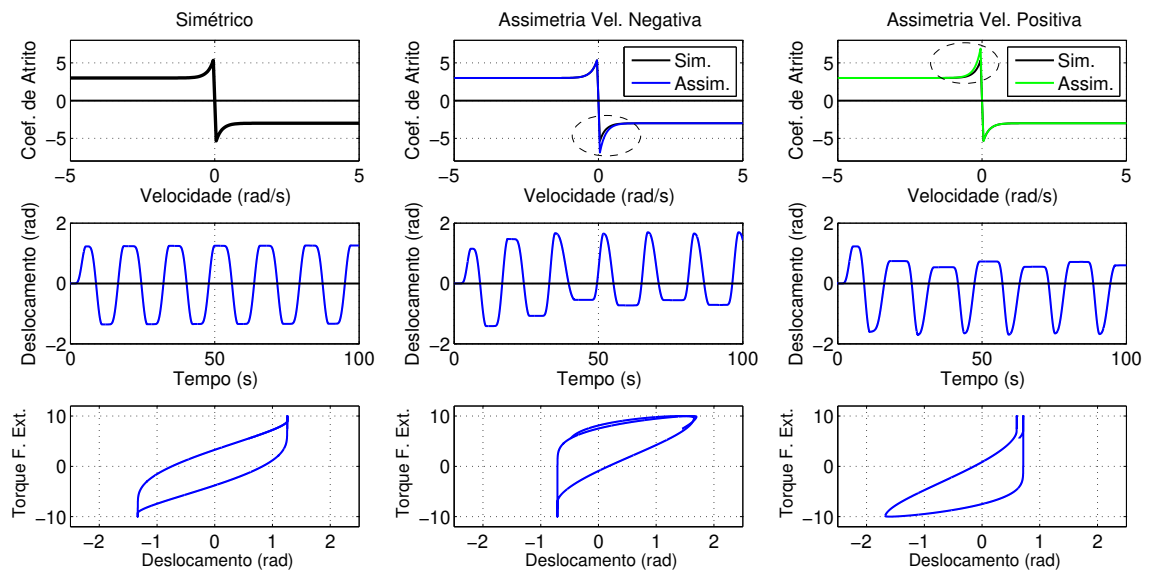


Figura 4.18: Curvas de deslocamento e histerese para o caso de assimetria apenas no coeficiente estático de atrito.

O fato de os patamares de parada no caso de assimetria no coeficiente estático serem maiores do que no caso anterior está intimamente ligado à maior resistência exercida pela força de atrito. Uma vez que o coeficiente de atrito estático é naturalmente maior, o torque necessário para vencer o atrito neste caso é maior do que no caso de assimetria apenas cinética. Esta maior resistência oferecida pelo atrito estático faz com que os patamares neste caso de assimetria sejam maiores.

Portanto um coeficiente de atrito assimétrico faz com que dois fenômenos importantes aconteçam: O deslocamento do ponto de equilíbrio e a alteração no padrão da fase *sticking* do movimento. É interessante observar que os efeitos causados pela introdução de um coeficiente de atrito assimétrico são muito semelhantes aos causados pela força normal variante na presença de pré-tensionamento.

Estas constatações encontram ampla utilidade em aplicações onde o contato superficial entre dois corpos tende a modelar a característica da superfície de forma diferente nos dois sentidos do movimento. É o caso, por exemplo, de pastilhas e discos de freio, que devido ao seu regime de trabalho, podem modelar a superfície de contato atribuindo coeficientes e atrito diferentes, a depender do sentido do movimento.

4.7 Rigidez Não Linear em Combinação com Coeficiente de Atrito Assimétrico

Os efeitos da rigidez não-linear e da assimetria no coeficiente de atrito, investigados respectivamente nas secções 4.5 e 4.6, são agora combinados em um modelo simplificado de auto-tensionador, com a finalidade de estudar o comportamento deste dispositivo quando submetido a esta combinação de fatores. As combinações de assimetrias estática e cinética com rigidez do tipo *hardening* são apresentadas nas Figuras 4.19 e 4.20 abaixo.

As simulações feitas neste estudo consideram os dados qualitativos apresentados na Tabela 4.1, porém com força de pré-tensionamento de $15N$. Os modelos de atrito utilizados nestas simulações são os modelos de Kang modificados para acomodar as assimetrias, descritos pelas Equações 2.18 e 2.19. A Figura 4.19 exibe os resultados de uma simulação considerando-se rigidez não-linear do tipo *hardening*, assimetria no coeficiente de atrito cinético e a combinação dos dois casos.

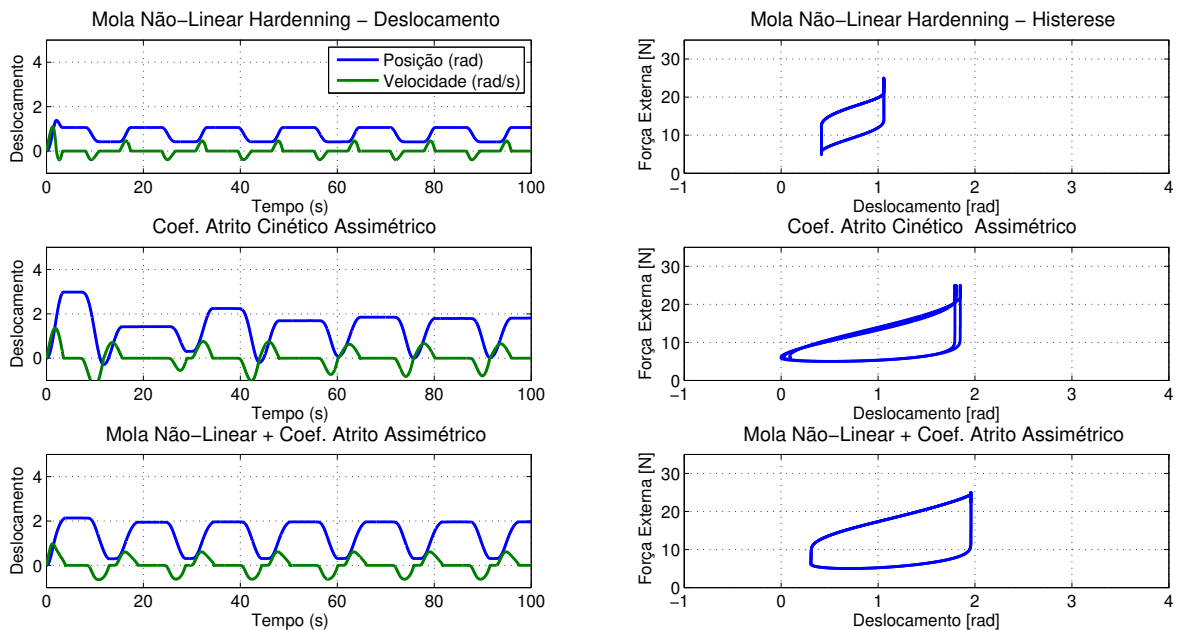


Figura 4.19: Curvas de deslocamento, velocidade e curva de histerese para os casos de rigidez não-linear do tipo *hardening*, assimetria apenas no coeficiente cinético, e a combinação dos dois casos.

A análise da combinação de assimetria e rigidez não linear permite observar certa sobreposição dos efeitos isolados. A presença da rigidez *hardening* faz com que, apesar da presença de pré-tensionamento, os tempos de parada nos extremos do movimento sejam próximos, e o fenômeno *stick-slip* seja bem definido. O aumento na rigidez faz ainda com que a amplitude

do movimentos seja significativamente diminuída. Por sua vez, a assimetria no coeficiente de atrito desloca o ponto de equilíbrio e aumenta o tempo de parada no extremo superior da curva de deslocamento.

A combinação destes dois fatores gera uma sobreposição da redução na amplitude, da definição dos patamares de parada e do aumento do tempo de parada como consequência da maior resistência proporcionada pelo atrito. A curva de deslocamento resultante da combinação de fatores apresenta patamares de parada bem definidos e tempos de parada diferentes nos extremos do movimento.

Estes fenômenos são bem observáveis nas curvas de histerese de cada caso. Observa-se que a curva para resultante da combinação dos dois fenômenos agrupa as principais características de cada um dos dois casos anteriores. As regiões laterais de *sticking* passam a ser mais definidas e maiores, assemelhando-se muito ao caso de normal variante com pré-tensionamento.

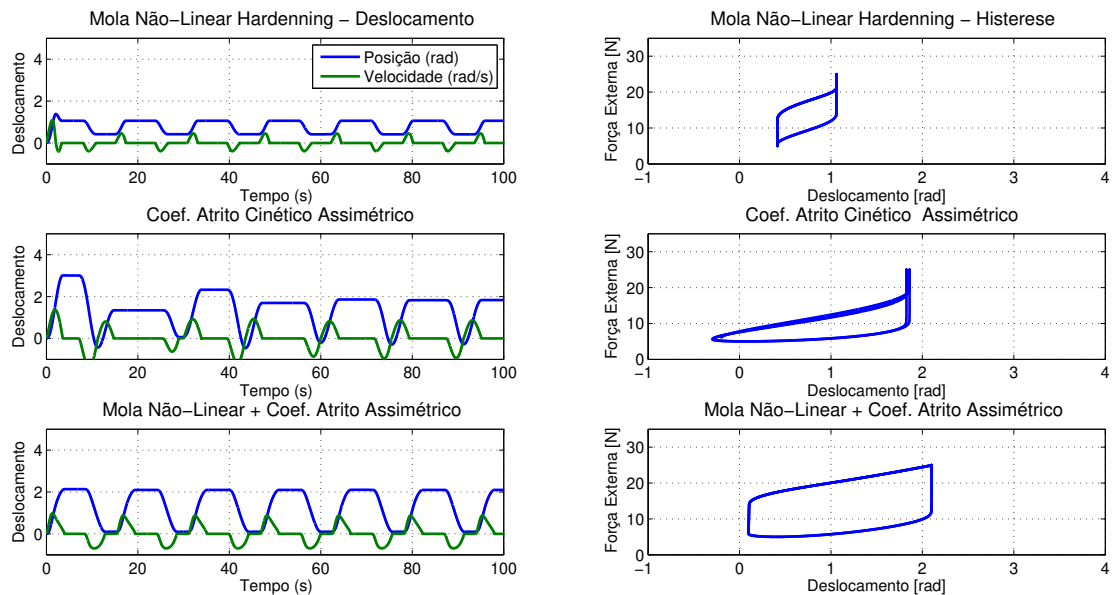


Figura 4.20: Curvas de deslocamento, velocidade e curvas de histerese para os casos de rigidez não-linear do tipo hardenning, assimetria apenas no coeficiente estático, e a combinação dos dois casos.

4.8 Instabilidade no Sistema Não-Linear

Sistemas não-lineares como este apresentam um rico comportamento dinâmico. Esta riqueza de fenômenos se deve muito à presença do atrito seco, que é uma fonte de não linearidade, juntamente com os ângulos auxiliares da correia. Um dos fenômenos de interesse na formulação não-linear é o crescimento de instabilidades. Esta seção pretende investigar a existência de instabilidades causadas pelo atrito ou pelo termo não-linear da correia adjacente, no sistema descrito pela Equação 3.20. Os parâmetros utilizados na simulação são os dados quantitativos exibidos na Tabela 4.1 A rigidez não-linear é desconsiderada, para que os efeitos de instabilidade observados restrinjam-se apenas às não linearidades do atrito e dos ângulos adjacentes.

Primeiramente são analisadas na Figura 4.21 as curvas de deslocamento utilizando-se os parâmetros reais de um sistema tensionador-correia. Observa-se que nas condições operacionais, a amplitude de vibração do tensionador é bastante baixa, da ordem de 0,2 radianos. Isto ocorre devido ao fato de a força de pré-tensionamento ser muito maior do que a amplitude de força externa. Observa-se ainda que, com o aumento do coeficiente de atrito esta amplitude cai e o movimento trava, porém não são observadas instabilidades nesta condição.

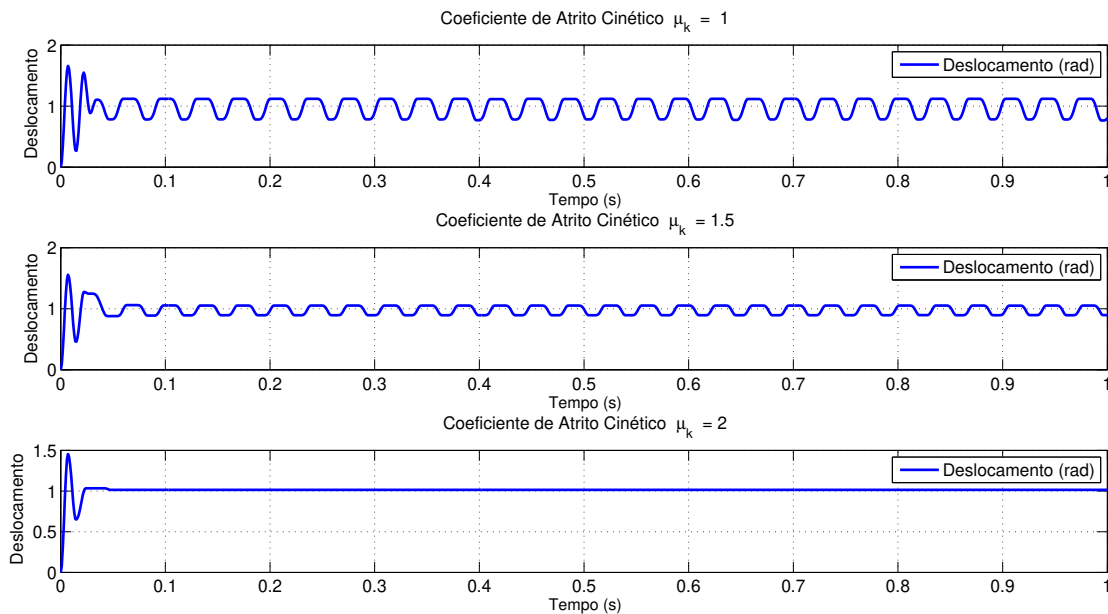


Figura 4.21: Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador variando-se o coeficiente de atrito. $F_{pt} = 200N$ e $F_0 = 20N$. Configuração Geométrica $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

Nas condições operacionais, portanto, não são observadas instabilidades. Entretanto, à medida que alguns parâmetros como pré-tensionamento e coeficiente estático de atrito são variados, pode-se observar o crescimento de instabilidade no caso em que há a presença de atrito.

A Figura 4.22 mostra uma interessante análise feita considerando-se $F = 1N$, e $F_{pt} = 200N$, variando-se os coeficientes de atrito estático e cinético. O modelo de atrito utilizado é o modelo de Kang. Observa-se que na ausência de atrito o movimento possui um sutil aumento de amplitude ao longo do tempo. Com o acréscimo do atrito seco, a amplitude do deslocamento passa a crescer continuamente, levando à hipótese de que o atrito seco pode causar certa instabilidade neste sistema.

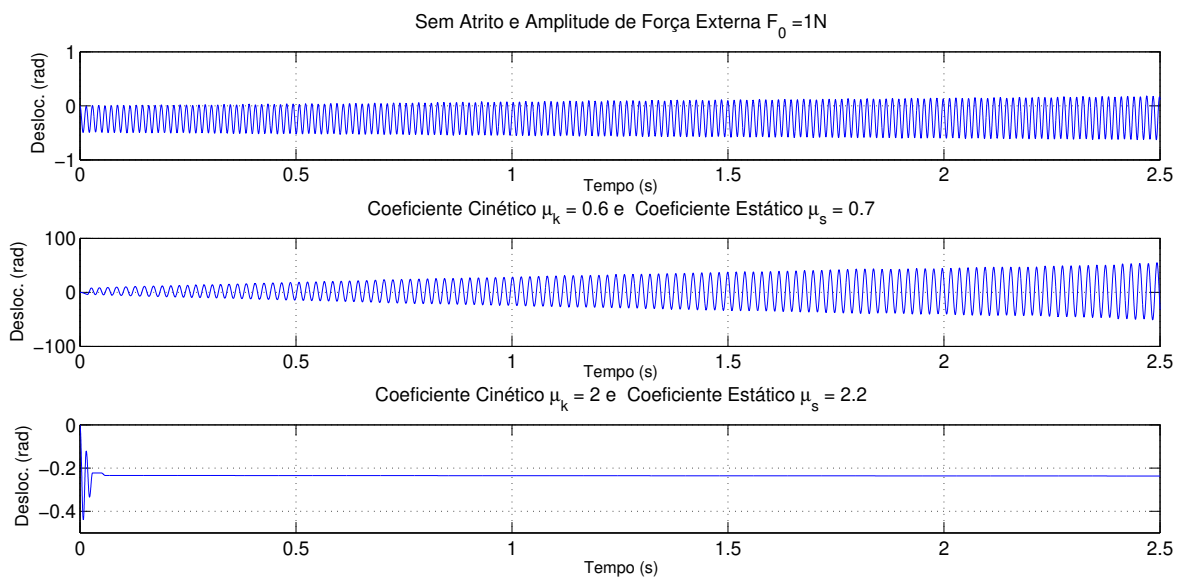


Figura 4.22: Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador variando-se o coeficiente de atrito. Configuração Geométrica $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

Observando-se a Figura 4.22, nota-se que a partir de determinado valor do coeficiente de atrito, a instabilidade deixa de existir e o movimento trava. Isto mostra que possivelmente há uma faixa de valores para os coeficientes de atrito em que os efeitos do atrito, somados à não-linearidade das correias adjacentes, pode levar à instabilidade. Esta instabilidade pode, portanto, ocorrer tanto devido ao atrito quanto devido à combinação de valores de ângulos no termo não-linear das correias adjacentes (S).

Outra análise interessante pode ser feita variando-se a configuração geométrica das correias adjacentes, a fim de verificar o crescimento de instabilidades em razão da não-linearidade dos ângulos dos tramos. A Figura 4.23 mostra os resultados da simulação feita variando o ângulo θ_1 do tramo adjacente. São mantidos constantes os coeficientes de atrito, e é variada a amplitude de força externa.

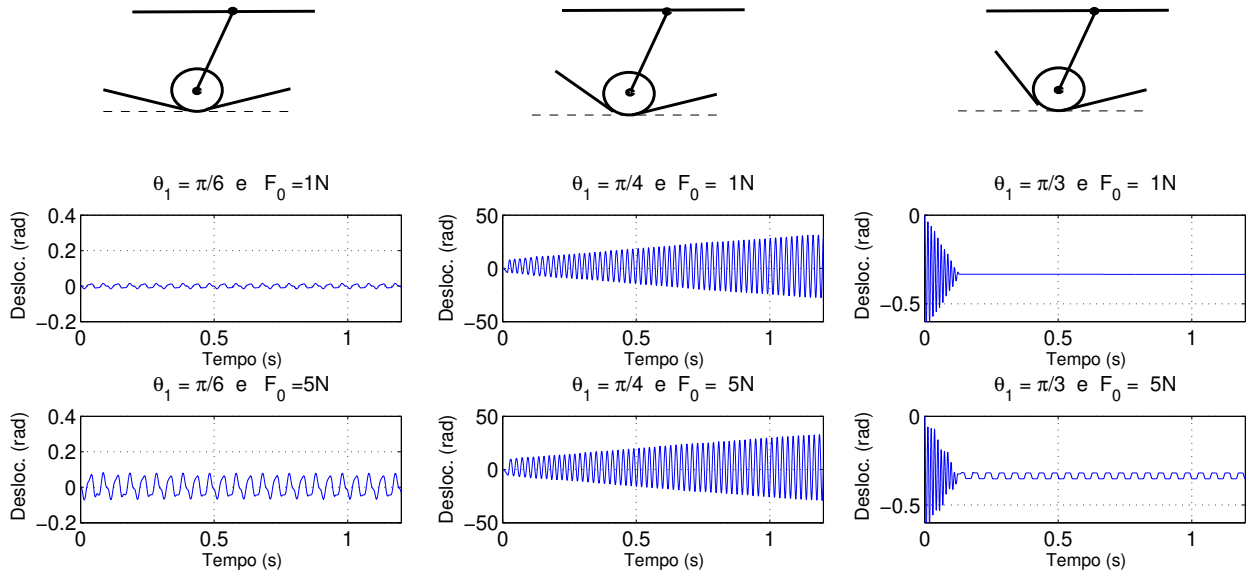


Figura 4.23: Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador em estudo de caso variando-se o ângulo θ_1 do tramo adjacente, e a amplitude de força externa. Coeficientes $\mu_k = 0.6$ e $\mu_s = 0.7$.

Observa-se que a configuração geométrica do tramo adjacente é fundamental na identificação de instabilidades. Nota-se que o crescimento de instabilidade é favorecido quando o ângulo adjacente θ_1 encontra-se em $\pi/4$ e que o movimento mantém-se estável nos demais ângulos simulados. Para θ_1 igual a $\pi/6$ e $\pi/3$ o movimento ou trava, ou mantém-se em uma oscilação regular, porém sem instabilizar.

Isto evidencia portanto, que o crescimento de instabilidades, além de relacionado com o atrito, está relacionado também com a configuração geométrica dos tramos adjacentes. Observa-se portanto uma faixa de ângulos do tramo adjacente em que observa-se instabilidade. À medida que este ângulo aumenta, as instabilidades deixam de ser observadas.

Outra análise pode ser feita em vias de investigar a relação entre a força de pré-tensionamento, o coeficiente de atrito e o crescimento de instabilidades. A Figura 4.24 exibe um estudo de caso variando-se estes parâmetros. Para esta simulação adota-se a condição geométrica em que foi observado o crescimento de instabilidade no caso anterior, qual seja $\theta_1 = \pi/4$

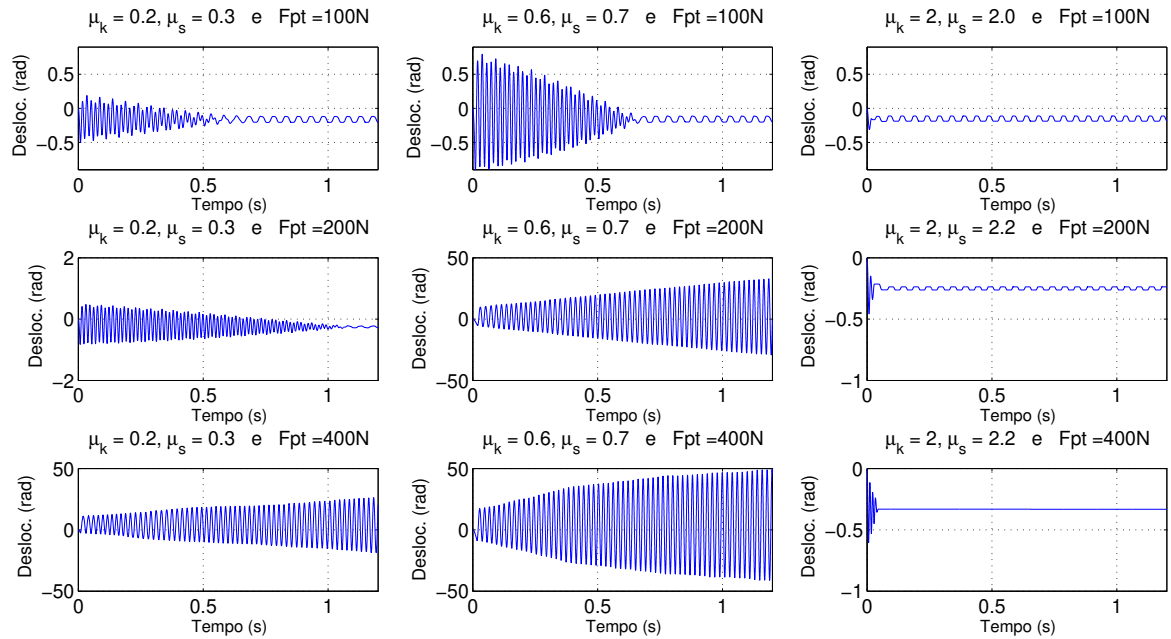


Figura 4.24: Curvas de deslocamento para a formulação completa de tensionador em estudo de caso variando-se os coeficientes de atrito e a força de pré-tensionamento. Ângulos adjacentes $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = \pi/6$.

A Figura 4.24 permite notar que neste estudo de caso o crescimento de instabilidades ocorre principalmente para baixos coeficientes de atrito e altos valores de pré-tensionamento. À medida que a força de pré-tensionamento é aumentada, observa-se um comportamento instável nos coeficientes de atrito mais baixos, tendendo à estabilização conforme o coeficiente de atrito cresce. A força de pré-tensionamento em combinação com o coeficiente de atrito possui, portanto, grande importância na geração de instabilidade.

4.9 Mapas de Comportamento

Uma forma interessante de se analisar o comportamento dinâmico de um corpo é através dos mapas de comportamento, propostos neste trabalho. Este método foi baseado em alguns resultados obtidos por (HONG, 2000). Esta seção apresenta o método desenvolvido para mapear numericamente o comportamento dinâmico de um autotensionador, e identificar suas tendências de comportamento. Posteriormente, apresenta os mapas de comportamento resultantes deste método.

4.9.1 Conceito

A ideia central de um mapa de comportamento é analisar numericamente as curvas de deslocamento e velocidade do autotensionador, e classificar aquela combinação de parâmetros simulados em um tipo característico de movimento. Os quatro possíveis comportamentos dinâmicos considerados neste estudo são: Movimento Estável sem *stick-slip*, Estável com *stick-slip*, Travamento e Instável. A Figura 4.25 ilustra os quatro possíveis comportamento utilizados para a confecção dos mapas.

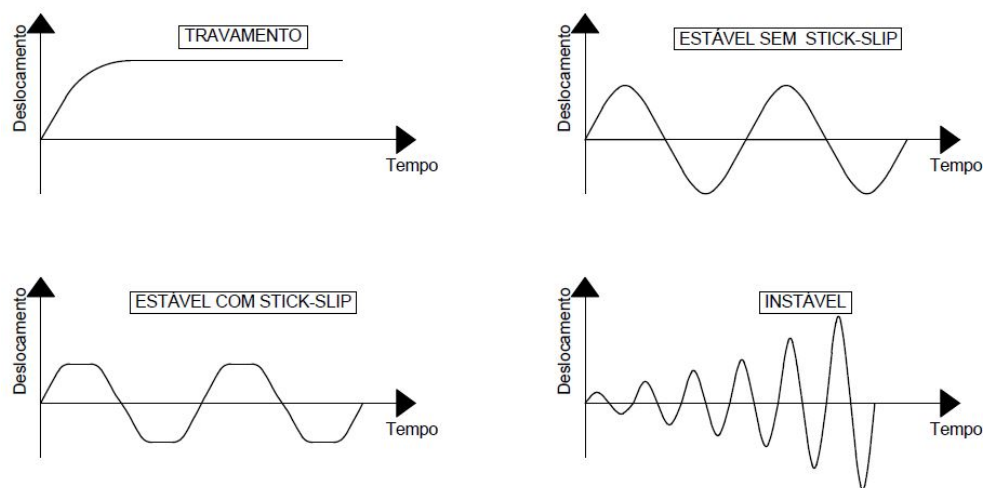


Figura 4.25: Quatro possíveis tipos de comportamento dinâmico: Movimento Estável Sem Stick-Slip, Estável com Stick-Slip, Travamento e Instável.

4.9.2 Escolha do Período de Análise

O objetivo deste mapeamento é mostrar as tendências de comportamento conforme parâmetros fundamentais são variados. Para classificar qual dos quatro possíveis comportamentos uma determinada combinação de parâmetros gera, parte-se da análise dos valores de deslocamento e velocidade em um período específico. À exceção do caso de instabilidade, é necessário que o período de análise escolhido esteja necessariamente no regime permanente, conforme ilustra a Figura 4.26.

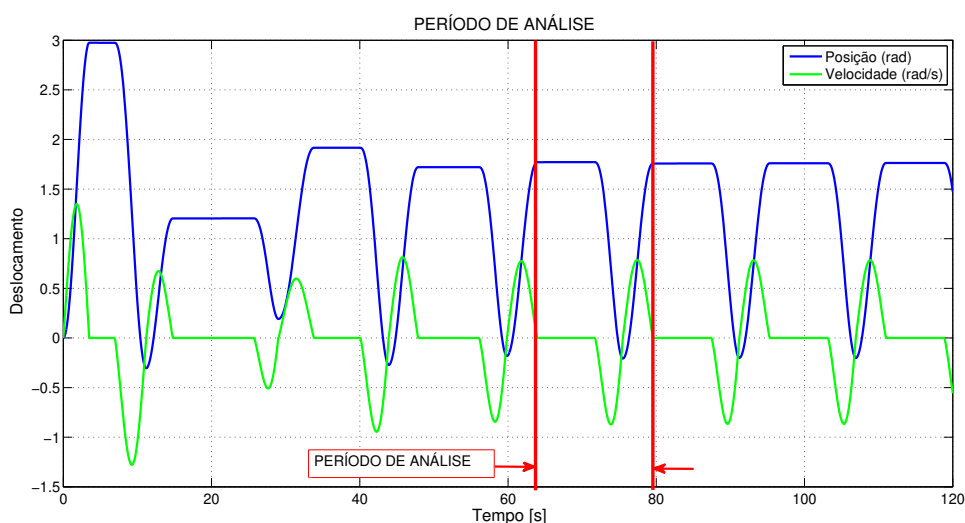


Figura 4.26: Escolha do Período de Análise

Uma vez que o mapeamento se baseia na análise de um período em regime permanente, é necessário escolher convenientemente este período, para que efeitos transientes não influam nesta análise. Partindo-se de uma curva de deslocamento e velocidade em função do tempo, escolhe-se quatro períodos, situados respectivamente a 20, 40, 60 e 80 por cento do tempo de simulação, conforme ilustrado na Figura 4.27.

A escolha de qual período será analisado é feita através da comparação dos valores RMS de deslocamento entre esses períodos. Para cada um dos quatro períodos, é calculado o valor RMS de deslocamento. Em seguida, o valor de cada período é comparado com o valor do período seguinte. Quanto mais próxima da unidade é esta relação, mais próximo do regime permanente aquele período está. O período analisado será, portanto, aquele que apresentar o valor RMS de seu deslocamento igual aos períodos anteriores. Assegura-se assim que a análise será feita para o regime permanente.

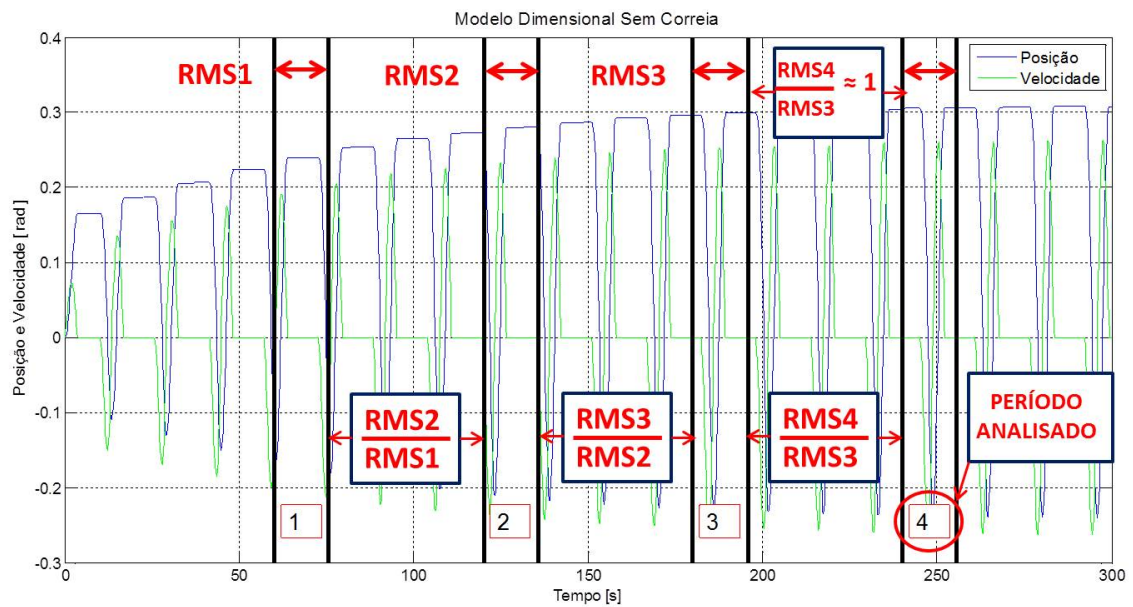


Figura 4.27: Escolha de quatro períodos no tempo de simulação

Caso a relação entre os valores RMS seja sempre crescente, trata-se de uma provável região de instabilidade ou de regime transiente. Neste caso, repete-se o estudo para um tempo maior de simulação, a fim de confirmar qual dos comportamentos esta combinação de parâmetros configura, conforme ilustra o caso da Figura 4.28.

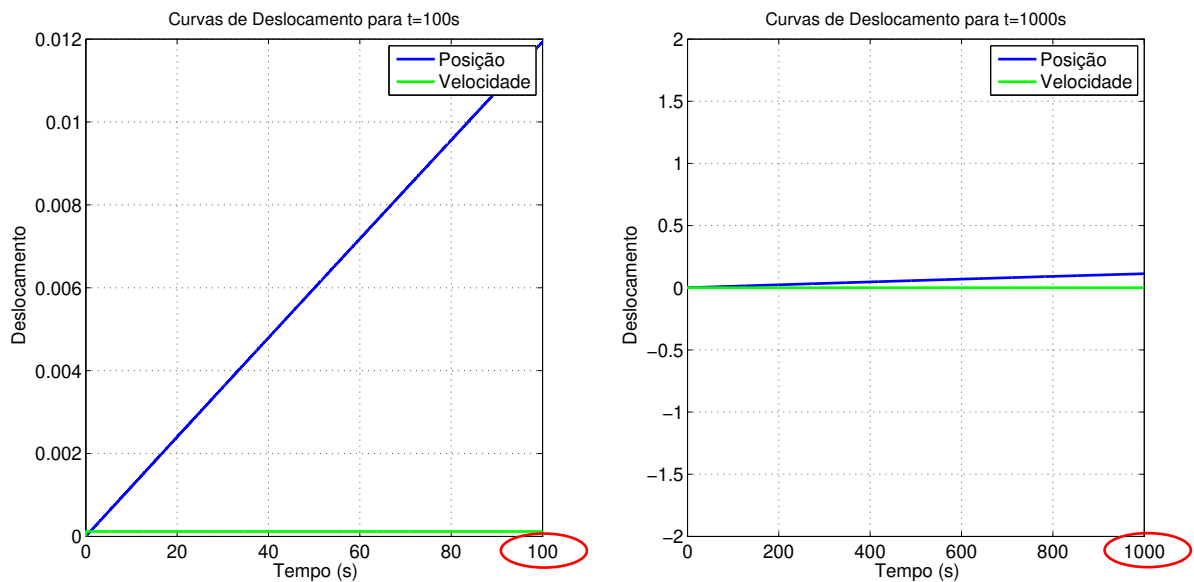


Figura 4.28: Reconfiguração do Tempo de Simulação.

4.9.3 Análise do Período e Classificação do Comportamento

Uma vez que o período analisado tenha sido convenientemente selecionado, inicia-se a análise deste período. Os dados de posição e velocidade neste período são armazenados e toda a análise se faz a partir do tratamento destes dados. Duas quantidades são encontradas a partir destes dados: a porcentagem yt do tempo em que o tensionador permanece imóvel, e a quantidade yv em que a velocidade troca de sinal no mesmo período. Seja v_0 a quantidade de pontos do período simulado em que a velocidade é nula, e tp é a quantidade total de pontos simulados naquele período, define-se yt como:

$$yt = \frac{v_0}{tp}, \quad (4.8)$$

Cada um dos possíveis comportamentos possuem as seguintes características numéricas:

- Na hipótese de travamento, a força de atrito não é superada pelas forças externas e o tensionador permanece imóvel. Nesta condição, é de se supor que a quase totalidade dos valores de velocidade no período analisado seja próxima de zero.
- Os períodos em que se verifica a condição de *stick-slip* são caracterizados por possuírem apenas uma parte do período com velocidade nula.
- A condição de instabilidade é caracterizada por possuir valores RMS de deslocamento crescentes, conforme descrito previamente.
- A condição Estável Sem Stick-Slip não possuiu valores significativos de pontos com velocidade nula em um período, e possui em um período três trocas no sinal da velocidade.

Com base nestas características, é proposto o seguinte critério numérico para classificação dos comportamentos, de acordo com a Tabela 4.2 abaixo.

Tabela 4.2: Critérios para Classificação do Comportamento

Instável	Valores RMS crescentes
Travamento	Porcentagem $yt > 0.95$
Estável com Stick-Slip	Porcentagem $yt > 0.1$ e < 0.95
Estável Sem Stick-Slip	Porcentagem $yt < 0.1$ e $yv = 3$

Numericamente a classificação do movimento nos quatro tipos de comportamento possíveis segue o fluxograma da Figura 4.29.

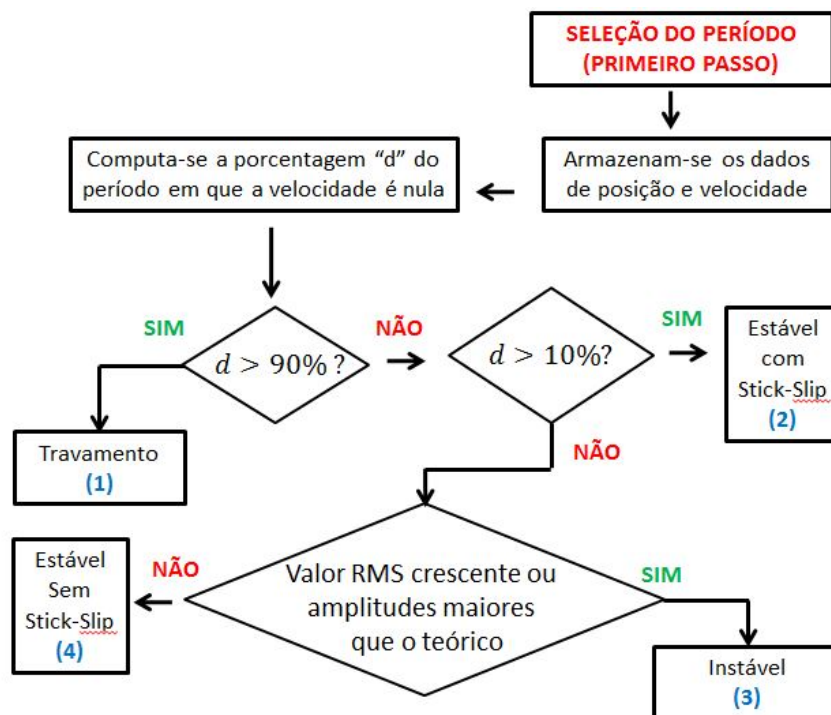


Figura 4.29: Fluxograma de Classificação de Comportamentos

4.9.4 Mapas de Comportamento: Formulação Simplificada

O método exposto na seção anterior pode ser aplicado às equações de movimento do autotensionador a fim de mapear o seu comportamento dinâmico, classificando-o em uma das quatro possibilidades previamente apresentadas. Tendo classificado o comportamento relativo àquela combinação de parâmetros, os mapas são apresentados exibindo as regiões de travamento (\times), Stick-Slip ($+$), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square).

Dois tipos de análise podem ser feitas, sendo uma considerando a modelagem simplificada e linear da equação 3.25, e a outra considerando-se a formulação completa da equação 3.20. Com o intuito de identificar as tendências de movimento, todos os mapas são gerados através dos parâmetros qualitativos apresentados na Tabela 4.1.

A primeira análise apresentada é um estudo qualitativo feito sobre a equação simplificada e linear do tensionador, dada pela relação 3.25. A Figura 4.30 apresenta o mapeamento do tensionador variando-se qualitativamente os parâmetros coeficiente cinético (μ_k), coeficiente estático (μ_s) e razão de frequências (r). Os demais parâmetros simulados seguem a Tabela 4.1.

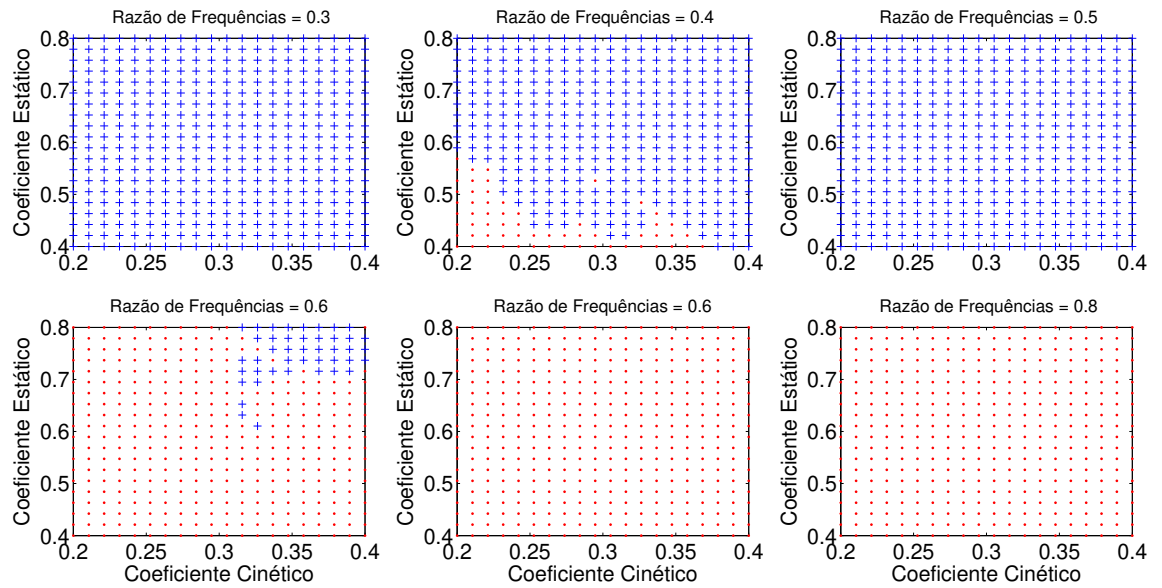


Figura 4.30: Mapa de comportamento sobre formulação simplificada, variando-se coeficiente de atrito estático (μ_s), coeficiente de atrito cinético (μ_k) e variando-se razão de frequências (r). Amplitude de Força Externa = 10N. Travamento (\times), Stick-Slip($+$), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)

A Figura 4.30 mostra uma interessante tendência no comportamento do tensionador. É possível notar que para razões de frequência menores que 0.5, ocorre a predominância do comportamento com *stick-slip* nesta combinação de parâmetros. Embora algumas regiões nas razões 0.4 e 0.6 sejam divergentes do resto do mapa, a mesma conclusão quanto à tendência do movimento pode ser extraída. Para verificar a extensão desta conclusão a determinada variação de parâmetros, a força externa é dobrada para (20N), e o resultado é exibido pela Figura 4.31.

Ao aumentar a amplitude de força externa atuante, a mesma tendência de extinção do *stick-slip* a partir da razão de frequências 0.5 é observada, conforme ilustra a Figura 4.31. Nota-se que as divergências pontuais observadas na Figura 4.30 são mitigadas, e a transição entre os comportamentos com *stick-slip* e sem *stick-slip* é melhor observada. À medida que a razão de frequências é incrementada, a velocidade de transição é maior, fazendo com que o movimento permaneça mais tempo na região de atrito cinético do que na região de atrito estático, que possui coeficiente de atrito maior.

Conforme a razão de frequências sobe, o tempo que o tensionador permanece na região de transição diminui, resultando na mitigação do *stick-slip*. Interessante é notar que a transição de puro *stick-slip* para puro *slip* em todas as variações de parâmetros se deu à razão de frequências igual a 0.5, e que o aumento da amplitude de força externa torna esta transição mais bem definida, reduzindo divergências pontuais.

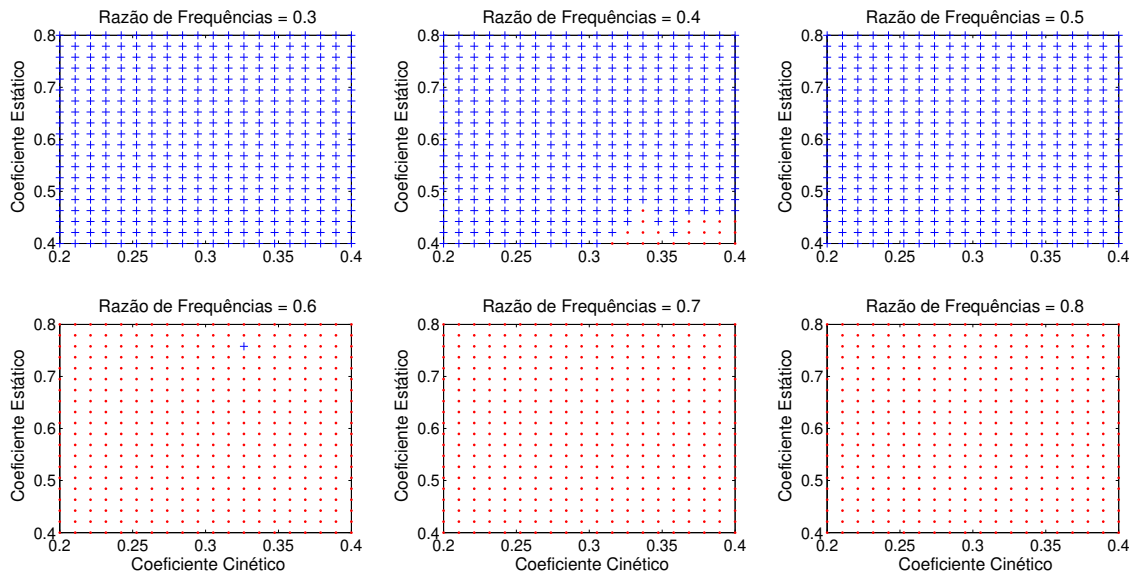


Figura 4.31: Mapa de comportamento sobre formulação simplificada, variando-se coeficiente de atrito estático (μ_s), coeficiente de atrito cinético (μ_k) e variando-se razão de frequências (r). Amplitude de Força Externa = 20N. Travamento (x), Stick-Slip(+), Sem Stick-Slip (•) e Instável (□)

Uma terceira análise pode ser feita comparando-se os valores de pré-tensionamento (F_{pt}) e amplitude de força externa (F_0), variando-se a razão de frequências. O resultado desta variação de parâmetros é exibido na Figura 4.32. Aqui notam-se os dois efeitos observados nos últimos dois casos simulados. A força normal variante é considerada como uma reação à força externa, que é composta de uma componente estática e uma componente flutuante. Para valores muito altos de pré-tensionamento e valores muito baixos de amplitude de força externa, o torque de atrito é alto como resultado da componente estática de pré-tensionamento.

À medida que a razão de frequências é incrementada, observa-se que as regiões onde há predomínio do comportamento *stick-slip* passam a ceder lugar para um comportamento puramente *slip*. Esta mudança de comportamento tem início preferencialmente em valores baixos de pré-tensionamento, e amplitudes altas de força externa.

Isto porque nesta condição a força de atrito, que é majoritariamente determinada pelo pré-tensionamento, é menor do que o torque exercido pela força externa. Nota-se ainda que à medida que a razão de frequências é incrementada, a região de ocorrência de *stick-slip* se limita a uma faixa intermediária entre o travamento e o movimento puramente *slip*.

Da mesma forma que na Figura 4.31, a existência de *stick-slip* passa a ser mitigada conforme a razão de frequências aumenta, especialmente após cruzar o valor de razão de frequências igual a 0.5.

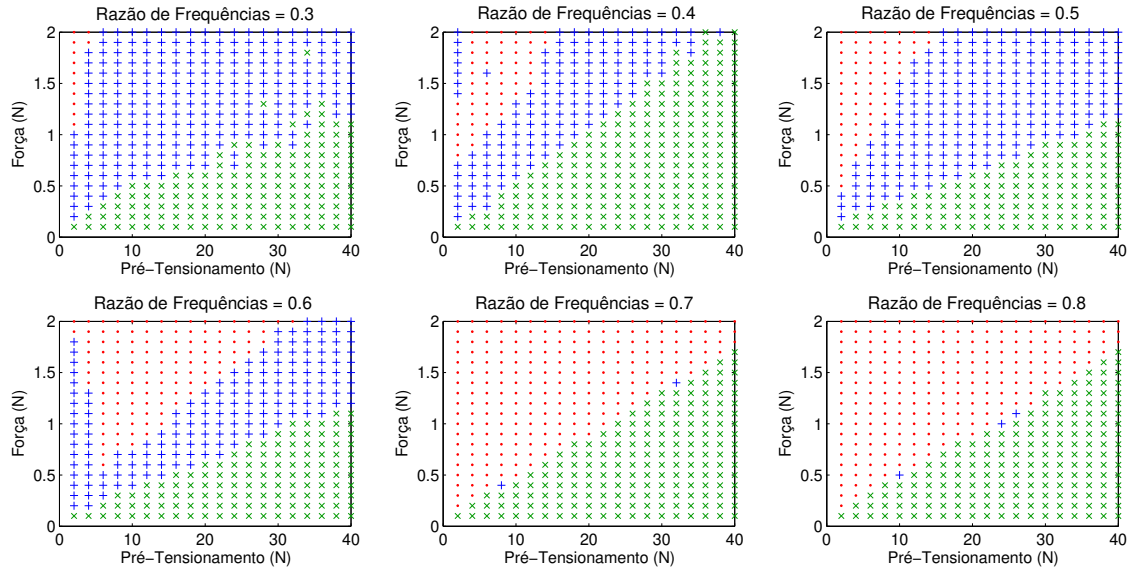


Figura 4.32: Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação simplificada, comparando-se pré-tensionamento (F_{pt}), amplitude de força externa (F_0) e variando-se razão de frequências (r). Coeficiente $\mu_k = 0.3$. Travamento (\times), Stick-Slip($+$), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)

A mesma análise pode ser feita para um coeficiente de atrito cinético maior, conforme ilustra a Figura 4.33. Neste caso, as mesmas tendências são observadas, porém é mais notável a transição do comportamento *stick-slip* para o comportamento puramente *slip* a partir da razão de frequências maior do que 0.5.

Esta análise mostra, portanto, que com o aumento do coeficiente de atrito a transição para o movimento puramente *slipping* é mais clara e abrupta em torno da razão de frequências igual a 0.5. É oportuno observar que nos dois casos em que o pré-tensionamento foi comparado com a amplitude de força externa, a região de travamento obedece a uma fronteira linear.

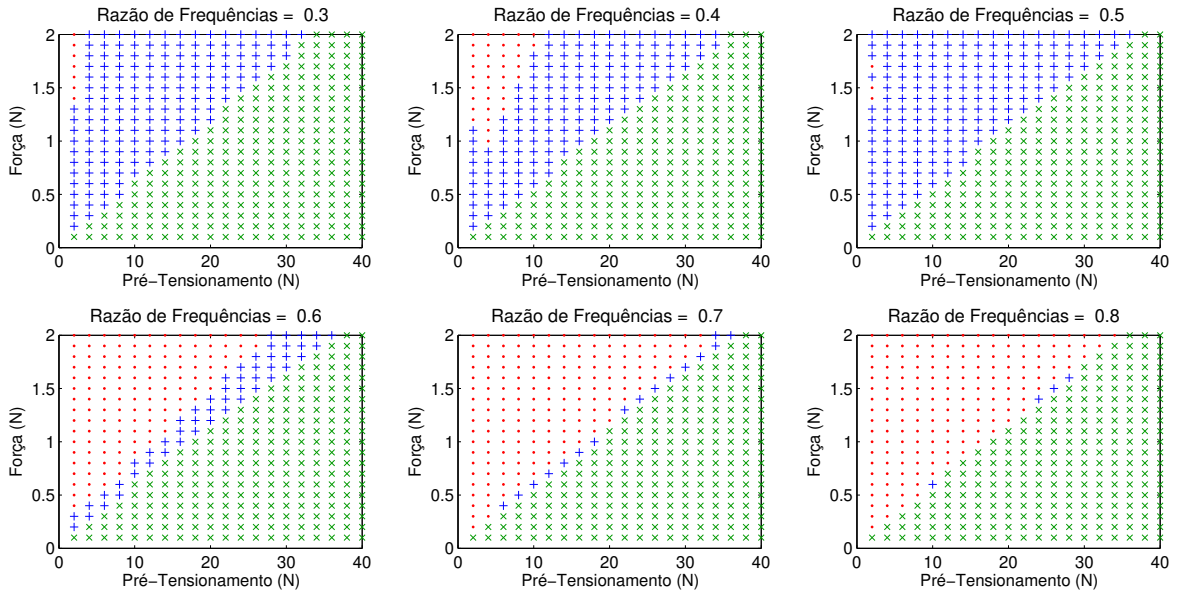


Figura 4.33: Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação simplificada, comparando-se o pré-tensionamento (F_{pt}), amplitude de força externa (F_0) e variando-se razão de frequências (r). Coeficiente $\mu_k = 0.5$. Travamento (\times), Stick-Slip($+$), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)

4.9.5 Mapas de Comportamento: Formulação Completa

A classificação de comportamentos segundo o método proposto na secção 4.9 pode ser agora aplicada à formulação completa de tensionador da equação 3.20, que envolve a geometria dos tramos adjacentes. Os dados constantes são os da Tabela 4.1. Duas análises são feitas, com o intuito de verificar os resultados obtidos na secção 4.8.

A primeira análise, exibida pela Figura 4.34, exibe uma comparação entre o coeficiente de atrito cinético e o pré-tensionamento, variando-se a razão de frequência. É interessante notar a tendência de serem observados comportamentos instáveis para valores baixos de atrito e valores altos de pré-tensionamento. Nestes casos, o comportamento instável se manteve majoritariamente abaixo do coeficiente de atrito de 1,2, e acima do pré-tensionamento de 200N.

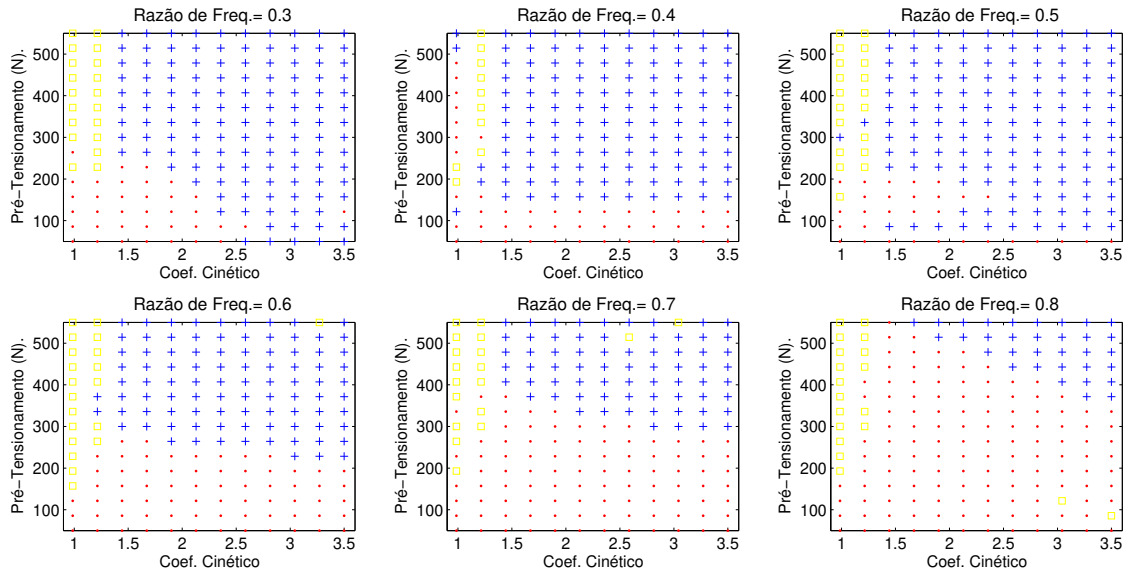


Figura 4.34: Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação completa, comparando-se o pré-tensionamento (F_{pt}), coeficiente de atrito cinético (μ_k) e variando-se razão de frequências (r). Travamento (\times), Stick-Slip($+$), Sem Stick-Slip(\bullet) e Instável (\square)

O comportamento stick-slip foi observado para valores altos de pré-tensionamento e coeficiente de atrito, e o comportamento puramente *slipping* foi observado para valores baixos das duas grandezas. Nesta comparação, a transição das regiões com stick-slip para comportamento puramente *slipping* também foi observada com o aumento da razão de frequências, porém esta transição não se deu de forma abrupta após razão de frequências igual a 0.5.

A segunda análise, exibida pela Figura 4.35, exibe uma comparação entre as geometrias dos ângulos das correias adjacentes, variando-se a razão de frequência. Para as razões de frequências de 0,3 e 0,4 é observada uma faixa intermediária de valores do ângulo θ_1 em que a instabilidade é observada. Paralelamente a esta região, são observadas instabilidades para combinações que envolvam os valores mais altos das duas grandezas.

O aumento da razão de frequências tende a ampliar a região em que instabilidades são observadas, que passa a crescer sobretudo após razão de frequências igual a 0.6. Neste estudo, a transição das regiões com comportamento stick-slip para puramente *slipping* na razão de frequências igual a 0.5 foi melhor observado.

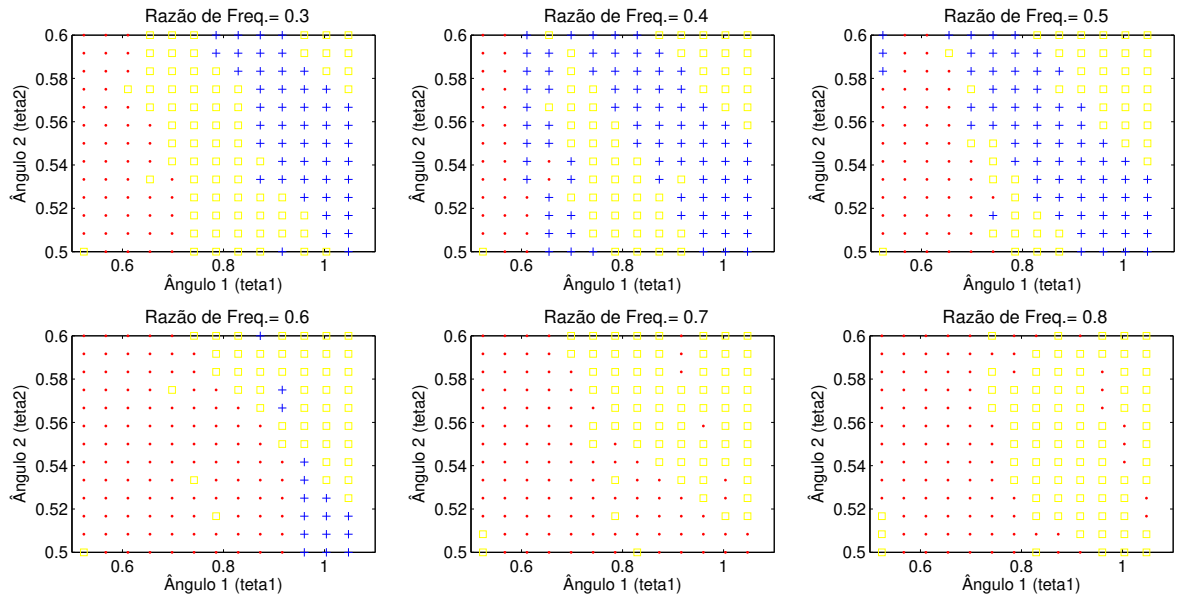


Figura 4.35: Mapa de comportamento do tensionador sobre formulação simplificada, comparando-se os ângulos dos tramos de correia adjacentes θ_1 e θ_2 , e variando-se razão de frequências (r). Travamento (\times), Stick-Slip($+$), Sem Stick-Slip (\bullet) e Instável (\square)

4.10 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados numéricos relacionados à modelagem matemática de um autotensionador sujeito à força de atrito. Os parâmetros de simulação foram apresentados, e os efeitos de uma força normal variante, até então não estudados, foram apresentados em concordância com pré-tensionamento. Em seguida, a região de Sticking foi matematicamente delimitada e graficamente ilustrada.

Foram estudados os efeitos da rigidez não-linear, da assimetria no coeficiente de atrito, e a conjugação destas duas características. Foi apresentado o conceito de mapa de comportamento, e a dinâmica do tensionador foi mapeada e classificada de acordo com os critérios apresentados. Por fim, analisou-se a instabilidade do tensionador no caso da formulação completa, e alguma discussão sobre a dinâmica do tensionador foi feita.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O estudo do comportamento dinâmico de um autotensionador de correias sujeito ao atrito seco e à rigidez não-linear foi realizado no presente estudo através de modelos numéricos e simulações computacionais.

Foi apresentado um breve histórico dos estudos envolvendo atrito seco, bem como alguns dos seus fenômenos característicos. Foram apresentados os modelos de atrito mais bem aceitos, separados de acordo com a divisão mais comum na literatura, entre modelos estáticos e modelos dinâmicos. Especialmente para o modelo de Kang foi proposta uma modificação a fim de descrever um coeficiente de atrito assimétrico em relação à velocidade.

Foi considerado um autotensionador mecânico composto por um pino de apoio, uma mola torsional não-linear, um braço de apoio e atrito seco no contato do pino com o braço. Foi apresentado um modelo matemático contemplando a geometria das correias adjacentes, e outro modelo simplificado considerando-se apenas um autotensionador sujeito a força externa. A força normal descarregada no pino de apoio foi modelada como sendo dependente da força externa, e portanto a força normal é assumida não como constante, mas variante.

Concluiu-se através de um estudo de caso que os modelos de atrito mais adequados para o presente problema são os modelos de Tustin e Kang. Isto porque descreveram satisfatoriamente os fenômenos desejados, apresentando os menores tempos de simulação. Paralelamente a estes dois, aceitou-se também o modelo simplificado de Coulomb, por também figurar entre os menores tempos de simulação, e por ser de fácil implementação computacional.

Analisando-se os efeitos da força normal variante e do pré-tensionamento, verificou-se que estas duas características contribuem para que a forma como se apresenta o *stick-slip* seja modificada, apresentando regiões de *sticking* com tempos de parada diferentes em cada lado do movimento. Contribuem também para a modificação do ponto de equilíbrio, e alteração da forma da curva de histerese.

Foi feito um estudo com a finalidade de delimitar a chamada região de *sticking*, que é a região onde espera-se que ocorram as transições entre o movimento puramente *slipping* e o movimento *stick-slip*. A delimitação desta região permitiu entender por quê os patamares de *sticking* apresentam tempos de parada diferentes quando a força normal é considerada variante.

Analisando-se os efeitos da rigidez não-linear, verificou-se que quando a rigidez não-linear é positiva, os patamares das regiões de *sticking* tornam-se mais definidos, tendendo a exibir tempos de parada iguais quanto maior for a rigidez não-linear.

Uma particularidade deste trabalho foi a proposição da quebra de um modelo de atrito em duas expressões, a fim de modelar uma curva de atrito assimétrica em relação à velocidade relativa. Foram propostos três tipos de assimetria no coeficiente e atrito: assimetria total, assimetria cinética e assimetria estática. Verificou-se que no caso de assimetria total, o único efeito observado foi a alteração do ponto de equilíbrio na curva de deslocamento. Já para os casos de assimetria cinética e estática, verificou-se também uma alteração na característica dos patamares de parada, que passaram a apresentar tempos de parada diferentes, além do já citado deslocamento do ponto de equilíbrio.

Os modelos de rigidez não-linear e de assimetria no coeficiente de atrito foram considerados em uma mesma simulação a fim de verificar o resultado da combinação destes fatores em um caso de força normal variante. Verificou-se que a combinação destes dois fatores gera uma sobreposição da redução na amplitude, da definição das regiões de *sticking* e do aumento do tempo de parada como consequência da maior resistência proporcionada pelo atrito.

A curva de deslocamento resultante da combinação de fatores apresentou regiões de *sticking* bem definidas, e tempos de parada diferentes nos extremos do movimento. Os efeitos causados pela assimetria no coeficiente de atrito foram bem semelhantes aos observados em decorrência da normal variante com pré-tensionamento.

Foram realizados alguns estudos sobre a estabilidade de um sistema com atrito seco e com a não-linearidade das correias adjacentes. Observou-se primeiramente que a combinação de atrito com os termos não-lineares da formulação completa pode gerar instabilidades no sistema. Observou-se que em determinadas condições, o aumento do coeficiente de atrito pode servir como causa para o crescimento de instabilidades que ganham intensidade conforme a amplitude de força externa é aumentada.

Outra particularidade deste trabalho foi a proposição dos chamados "mapas de comportamento". Através da análise de um período, foi possível analisar o movimento para várias combinações de parâmetros, a fim de se mapear a dinâmica do tensionador nos quatro tipos de comportamento possíveis. Foi proposto um método para escolha e classificação de um período, tomando-se como base os valores de velocidade, e a quantidade de trocas no sinal da velocidade, naquele período.

A análise comparativa entre os coeficientes estático e cinético de atrito, variando-se a razão de frequências, mostrou uma clara e abrupta transição do regime *stick-slip* para o regime puramente *slip* assim que a razão de frequências supera o valor de 0.5. O mesmo comportamento foi observado com o aumento da força externa. Observou-se, portanto, que o aumento da razão de frequências mitiga o *stick-slip*, e esta mitigação tende a ocorrer próximo da razão de frequências igual a 0.5.

Esta mesma região de transição na razão de frequências de 0.5 foi observada quando comparados os valores de Pré-Tensionamento com amplitude de força externa. Esta tendência foi, portanto, observada em todos os estudos de caso em que a razão de frequências foi variada. Notou-se ainda que com o aumento do coeficiente de atrito, esta transição para o movimento puramente *slipping* se deu de forma mais clara. Por fim, em todos os casos simulados em que o travamento foi observado, a região de travamento esteve limitada a uma transição linear, sempre nos limites de uma transição reta.

Verificou-se ainda que o modelo simplificado de tensionador não foi capaz de exibir qualquer instabilidade. Apenas na formulação completa, que considera a geometria dos tramos adjacentes, foi observado o crescimento instável. Foram observadas instabilidades para valores baixos de coeficiente de atrito em combinação com valores altos de pré-tensionamento, e também foram observados crescimentos de amplitude em certas combinações dos ângulos das correias adjacentes.

5.1 Sugestões para os Próximos Trabalhos

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar

- Verificação experimental dos fenômenos estudados, em particular a previsão de que todo o *Stick-Slip* tende a ser mitigado a partir da razão de frequências igual a 0.5.
- Aumentar a dimensão do problema, caracterizando as correias adjacentes como elementos elásticos com os respectivos graus de liberdade.
- Aprofundar o tratamento não-linear do problema, especialmente verificando o comportamento da frequência natural neste problema.

Referências

AL BENDER, F. e DE MOERLOOZE, K. Characterization and modelling of friction and wear an overview. **Sustainable Construction and Design**, 2010.

ARMSTRONG-HELOUVRY, B. Stick slip and control in low-speed motion. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 38, 1483–1495, 1993.

ARMSTRONG-HELOUVRY, B.; DUPONT, P. e CANUDAS DE WIT, C. **Control of Machines with Friction**, v. 128. Springer US, 1991.

ARMSTRONG-HELOUVRY, B.; DUPONT, P. e CANUDAS DE WIT, C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. **Automatica**, v. 30, 1083–1138, 1994.

BEIKMANN, Randall S. **Static and Dynamic Behaviour of Serpentine Belt Drive Systems Theory and Experiment**. 1997. Tese (Doutorado). The university of Michigan.

BO, L. e PAVELESCU, D. The friction speed relation and its influence on the critical velocity of stick slip motion. **Wear**, v. 82, 277–289, 1982.

BOWDEN, F. e LEBEN, L. Procedures of the royal society. v. 239, 1940.

BUTIKOV, E. Spring pendulum with dry friction and viscous damping. **Commun Nonlinear Sci Number Simulations**, v. 20, 298–315, 2014.

CANUDAS DE WIT, C.; OLSSON, H.; ASTROM, K. e LISCHINSKY, P. A new model for control of systems with friction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40(3), 419–425, 1995.

CASANOVA, C. C. **Modelagem e compensação de atrito em robôs manipuladores com**

flexibilidades nas juntas, Identificação, análise e resultados experimentais. 2007. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

CHATELET, E.; MICHON, G.; MANIN, L. e JACQET, G. An analysis of the modified dahl and massing models application to a belt tensioner. **Journal of Sound and Vibration**, v. 302, 841–864, 2007.

CHEN, L.Q. e ZHANG, W. Adaptative vibration reduction of an axially moving string via tensioner. **Journal of Mechanical Sciences**, v. 48, 1409–1415, 2006.

CSERNAK, G. e STEPAN, G. On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator. **Journal of Sound and Vibration**, v. 295, 649–658, 2006.

DAHL, P. A solid friction model. Relatório técnico, The Aerospace Corporation, El Segundo, CA, 1968.

DEN HARTOG, J. Forced vibrations with combined viscous and coulomb damping. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 53, 107–115, 1930.

DUAN, C. e SINGH, R. Forced vibrations of a torsional oscillator with coulomb friction under a periodically varying normal load. **Journal of Sound and vibration**, v. 325, 499–506, 2009.

FRANCESCHINI, J. **Avaliação do Fenômeno de Stick-Slip em Materiais de Fricção com Utilização de um Tribômetro.** 2014. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GARCIA, U. **Estudo de Vibrações em Auto-tensionador de Transmissão por correias.** 2009. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GEFFEN, V.V. A study of friction models and friction compensation. Relatório técnico, Technische Universiteit Eindhoven, 2009.

GOMES, S.; ZEILMANN, A.; TERRES, M.; SOARES, L. e GOMES, S. Controle baseado em estrutura variavel aplicado em atuadores roboticos. **Associacion Argentina de Mecanica Computacional**, v. 29, 2345–2364, 2010.

GOUVEA, H. Modelagem dinâmica de um autotensionador mecânico de correias, 2008. Trabalho de Graduação, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.

HESS, D. e A., S. Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities. **Journal of Tribology**, v. 112, 147–152, 1990.

HONG, H-K, L.C.S. Coulomb friction oscillator: Modelling and responses to harmonic loads and base excitations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 229, 1171–1192, 2000.

KANG, J E KROUSGRILL, C.E.S.F. Oscillation pattern of stickslip vibrations. **International Journal of Nonlinear Mechanics**, v. 44, 820–828, 2009.

KATO, S.; YAMAGUCHI, Y. e MATSUBAYASHI, T. Some considerations of characteristics of static friction of machine tool slideway. **Journal of Lubrication Theory**, v. 93, 234–247, 1972.

LAMPAERT, V.; SWEVERS, J. e AL BENDER, F. Experimental comparisson of different friction models for acurate low-velocity tracking. **Proceedings of the 10th Mediterranean Conference of Control and Automation**, 2002.

LICSKO, G. e CSERNAK, G. Chaos and transient chaos ina simple oscillator with coulomb friction law. **IEEE international Conference on Nonlinear Science and Complexity**, 2012.

LOVAS, L.; PLAY, D. e MARIALIGETTI, J. Study of timing belt tensioner behaviour. **The 2nd international conference of Power Transmissions**, 2006.

MANIN, L.; MICHON, G.; REMOND, D. e DUFOUR, R. From transmission error measurement to pulley belt slip determination in serpentine belt drives influence of tensioner and belt characteristics. **Mechanism and Machine Theory**, v. 44, 813–821, 2007.

MARTINS, D.R. **Análise Dinâmica Não Linear de Sistema de Transmissão por Correia**. 2013. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MARTINS, J.; ODEN, J. e SIMOES, F. A study of static and kinetic friction. Relatório técnico, Centro de Mecânica e Engenharia Estruturais, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1990.

METRIK. Multi v-belt drive components. Relatório técnico, 2014.

MUVENGEL, O E KIHU, J.E.I.B. Computational implementation of lugre friction law in a revolute joint with clearance. **Proceedings of the 2012 Mechanical Engineering Conference on Suitable Research and Innovation**, v. 4, 2012.

NEWARD, R. **Analysis of tensioner induced coupling in serpentine belt drive systems**. 2006. Dissertação (Mestrado). Department of Mechanical Engineering, Rochester Institute of Technology, Rochester.

OLSSON, H.; ASTROM, K.; CANUDAS DE WIT, C.; GAFERT, M. e LISCHINSKY, P. Friction models and friction compensation. Relatório técnico, Lund Institute of Technology, 1997.

PALUMBO, B. Modelagem dinâmica de um autotensionador mecânico de correias, 2009. Trabalho de Graduação - Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.

PAZDERA, I. **Friction Models in Servodrivers**. 2005. Tese (Doutorado). Brno University of technology, Brno.

PEREIRA, P.R.O.B. **Modelação da Força de Atrito de um Servomecanismo Pneumático utilizando o Modelo de LuGre**. 2013. Dissertação (Mestrado). Universidade do Porto.

PERSON, B. **Sliding Friction - physical Principles and Applications - Second Edition**. Springer, Julich, Germany, 2000.

PIATKOWSKI, T. Dahl and lugre dynamic friction models - the analysis of selected properties. **Mechanism and Machine Theory**, v. 73, 91–100, 2014.

PIEDBOUF, J. e CARUFEL, J. Friction and stick slip in robots simulation and experimentation. **Multibody System Dynamics**, v. 4, 341–354, 2000.

RABINOWICZ, E. The nature of static and kinetic coefficients of friction. **Journal of Applied Physics**, v. 22, 1373–1379, 1951.

RABINOWICZ, E. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. **IOP Science**, pp. 668–675, 1957.

SANCA, Armando. **Controle com Compensação de Atrito para Estruturas de Base Móveis de Robôs Manipuladores**. 2006. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Bahia - UFBA.

SANTOS, B. S. B. **Análise Dinamica de Transmissoes por correia serpentina e Autotensionador**. 2010. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SCHAEFFLER, B.L. Sistemas de correia - circuito primario(pbd) e circuito acessorio (fead). Relatório técnico, 2011.

SHAW, S. On the dynamic response of a system with dry friction. **Journal of Sound and Vibration**, v. 108, 305–325, 1986.

SUETTI, A.G.L. **Estudo do fenômeno Stick Slip aplicado as vibrações de freios automotivos**. 2009. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TUSTIN, A. The effects of backlash and of speed dependent friction on the stability of closedcycle. **J. Instr. Elect. Eng.**, v. 94, 143–151, 1947.

ULSOY, A.; WHITESELL, J. e HOOVEN, M. Design of belt-tensioner systems for dynamic stability. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, v. 107, 282–290, 1985.

WOJEWODA, J.; STEFANSKI, A.; WIERCIGROGH, M. e KAPITANIAK, T. Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, v. 366, 747–765, 2007.

ZHU, F. e PARKER, R. Influence of tensioner dry friction on the vibration of belt drives with belt bending stiffness. **Journal of Sound and Vibration**, v. 130, 2008.

APÊNDICE A – Implementação dos Modelos de Atrito em Matlab

A.1 Modelo de Coulomb

```

1  function ...
    xp=System_Coulomb(t,y,K,K2,I,C,wn,r,F,gama,rm,rp,mik,mis,p,wb,tf)
2
3
4  %% External Force Definition
5
6  External_Force=F.*sin(wn.*r.*t)+gama;           % External Force
7  % Normal_Load=F;                               % Normal Load (Constant)
8  Normal_Load=External_Force;                     % Normal Load (Varying)
9
10 %% Friction Force Definition
11
12 mi_coulomb=-mik.*tanh(10000*y(2,1))+p*mik;       % Friction Coefficient
13 Fat=Normal_Load.*mi_coulomb;                     % Friction Force
14
15
16 %% System of Equations Assembly
17
18 As=[ 0 1
19      -K./I-K2/I*y(1,1)^2  -C./I];
20
21 E = [0
22      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I];
23
24 y=[y(1,1)
25     y(2,1)];
26
27 xp = As*y+E;
28
29 waitbar(t/tf,wb);

```

A.2 Modelo Viscoso

```

1  function xp=Viscous(t,y,K,K2,I,C,wn,r,F,gama,rm,rp,Cv,Fc,mik,mis,p,wb,tf)
2
3
4  %% External Force Definition
5
6  External_Force=F.*sin(wn.*r.*t)+gama;           % External Force
7  % Normal_Load=F;                               % Normal Load (Constant)
8  Normal_Load=External_Force;                     % Normal Load (Varying)
9
10 %% Friction Force Definition
11
12
13 Fat=-External_Force.*mik.*tanh(10000*y(2,1))-Cv.*(y(2,1));
14
15 %% System of Equations Assembly
16
17 As=[ 0      1
18      -K./I   -C./I];
19
20 E = [0
21      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I];
22
23 y=[y(1,1)
24     y(2,1)];
25
26 xp = As*y+E;
27
28 waitbar(t/tf,wb);
29
30 %
31 %
32 %
33 %

```

A.3 Modelo Sticktion

```

1  function ...
    xp=Sistema_Sticktion(t,y,K,K2,I,C,wn,r,F,k,rm,rp,mik,mis,v1,v2,p,wb,tf)
2
3
4
5  %% External Force Definition
6
7  External_Force=Fext(t,wn,r,F,k);    % Varying Normal Load
8  % Normal_Load=F;                    % Constant Normal Load
9  Normal_Load=External_Force;        % Varying Normal Load
10
11 %% Friction Force Definition
12
13 %
14 %
15 %
16
17 Fat=Fat_Sticktion2(y(2,1),Normal_Load,mis,mik,v2,v1,p)
18
19 %% Equations Assembly
20
21 As=[    0        1
22       -K./I      -C./I];
23
24 E = [0
25       rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I];
26
27 y=[y(1,1)
28     y(2,1)];
29
30 xp = As*y+E;
31
32 waitbar(t/tf,wb);
33
34 %
35 %
36 %
37 -----
38
39
40 function s=Fat_Sticktion2(v,N,mis,mik,v2,v1,p)

```

```

41
42 b1=mik+v1*((mis-mik)/(v1-v2));
43 b2=mik+v1*((mis-mik)/(v1-v2));
44
45 %% Section 1 Velocity < -V1
46 if v<-v1
47     s=N*mik+N*p*mik;
48 end
49
50 %% Section 2 Velocity >-V1 e <-V2
51 if v>-v1 & v<=-v2
52     s=N*(((mis-mik)/(v1-v2))*v+b1)+N*p*mik;
53 end
54
55
56 %% Section 3 Transition
57 if v>-v2&v<v2
58     s=(-mis/v2*v)*N+N*p*mik;
59
60 end
61
62 %% Section 4 Velocity <V1 e >V2
63 if v<v1 & v>=v2
64     s=N*(((mik-mis)/(v1-v2))*(-v)-b2)+N*p*mik;
65 end
66
67 %% Section 5 Velocity >V1
68 if v>v1
69     s=-N*mik+N*p*mik;
70 end
71
72
73 end
74 %
75 %
76 %
77 %

```

A.4 Modelo de Tustin

```

1
2  function ...
    xp=Tustin(t,y,K,K2,I,C,wn,r,F,k,rm,rp,mik,mis,vs_tustin,p,gama,wb,tf)
3
4
5  %% External Force Definition
6
7  External_Force=F.*sin(wn.*r.*t)+gama;           % External Force
8  % Normal_Load=F;                               % Normal Load (Constant)
9  Normal_Load=External_Force;                     % Normal Load (Varying)
10
11
12  %% Friction Force Definition
13
14  mi=mik.*(1+((mis-mik)./mik).*exp(-abs(y(2,1))./vs_tustin)).*tanh(10000*y(2,1));
15  Fat=-Normal_Load*mi;
16
17
18  %% System of Equations Assembly
19
20  As=[ 0      1
21      -K./I-K2/I*y(1,1)^2      -C./I];
22
23  E = [0
24      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I];
25
26  y=[y(1,1)
27      y(2,1)];
28
29  xp = As*y+E;
30
31
32  waitbar(t/tf,wb);

```

A.5 Modelo de Armstrong

```

1  function xp=Sistema_Armstrong(t,y,K,I,C,wn,r,F,k,rm,rp,mik,mis,...
2  vs_armstrong,Fsa,td,gama,Fv_armstrong,wb,tf)
3
4
5  %% External Force Definition
6
7  External_Force=Fext(t,wn,r,F,k);    % Varying Normal Load
8  % Normal_Load=F;                    % Constant Normal Load
9  Normal_Load=External_Force;        % Varying Normal Load
10
11 %% Dfriction Force Definition
12
13
14 Fc_armstrong=-mik.*tanh(100000*y(2,1));
15 Fc_armstrong=-External_Force.*mik.*tanh(100000*y(2,1));
16 Fs_armstrong=-External_Force.*mis.*tanh(100000*y(2,1));
17
18
19 Fs_armstrong=Fsa+(mik-Fsa).*(td./(td+gama));
20
21 Fat=-Normal_Load.*(Fc_armstrong+Fv_armstrong.*abs(y(2,1))+...
22 Fs_armstrong.*(1./(1+((y(2,1).*1)./vs_armstrong).^2)).*tanh(100000*y(2,1));
23
24
25 %% Equations Assembly
26
27 As=[    0        1
28      -K./I      -C./I];
29
30 E = [0
31      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I];
32
33 y=[y(1,1)
34     y(2,1)];
35
36 xp = As*y+E;
37
38 waitbar(t/tf,wb);

```

A.6 Modelo de Khang

```

1
2 function ...
    xp=Sistema_Khang(t,y,K,K2,I,C,wn,r,F,k,rm,rp,d,h,mik,mis,p,gama,wb,tf)
3
4
5 %% External Force Definition
6
7 External_Force=Fext(t,wn,r,F,k,gama);      % Varying Normal Load
8 % Forca_Normal=F;                          % Constant Normal Load
9 Forca_Normal=External_Force;               % Varying Normal Load
10
11 %% friction Force Definition
12
13 mi=sign(-y(2,1)).*(1-exp(-d.*abs(-y(2,1)))).* ...
14 (mik-(mik-mis).*exp(-h.*abs(-y(2,1))))+p;
15 Fat=Forca_Normal.*mi;
16
17 %% Equations Assembly
18
19 As=[ 0 1
20      -K./I-K2/I*y(2,1)^3 -C./I];
21
22 E = [0
23      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I];
24
25 y=[y(1,1)
26     y(2,1)];
27
28 xp = As*y+E;
29
30 waitbar(t/tf,wb);
31 %
32 %
33 %

```

A.7 Modelo de Dahl

```

1  function xp=Sistema_Dahl(t,y,K,I,C,wn,r,F,k,rm,rp,mik,sigma0_dahl,wb,tf)
2  %% External Force Definition
3
4  External_Force=Fext(t,wn,r,F,k);
5  Fc=External_Force.*mik;
6
7  %% friction Force Definition
8
9
10 Fat=-sigma0_dahl.*y(3,1);
11
12 %% Equations Assembly
13
14 As=[    0        1        0
15      -K./I      -C./I      0
16          0        0      -sigma0_dahl./Fc.*abs(y(2,1))];
17
18 E = [0
19      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I
20      y(2,1)];
21
22 y=[y(1,1)
23     y(2,1)
24     y(3,1)];
25
26 xp = As*y+E;
27
28 waitbar(t/tf,wb);
29 %
30 %
31 %
32 %
33 %

```

A.8 Modelo de LuGre

```

1  function ...
    xp=Sistema_LuGre(t,y,KI,C,wn,r,F,k,rm,rp,mik,mis,sigma0_lugre,...
2  alfa1,alfa2,vs_lugre,wb,tf)
3  %% External Force Definition
4
5  % External_Force=Fext(t,wn,r,F,k);
6  % Fc=F.*mik;
7  % Fs=F.*mis;
8
9  External_Force=Fext(t,wn,r,F,k);
10 Fc=Fext(t,wn,r,F,k).*mik;
11 Fs=Fext(t,wn,r,F,k).*mis;
12
13 %% Friction Force Definition
14
15 g=Fc+(Fs-Fc).*exp(-(y(2,1)./vs_lugre).^2);
16 dz=y(2,1)-sigma0_lugre.*y(3,1).*abs(y(2,1))./g;
17 Fat=-(sigma0_lugre.*y(3,1)+alfa1.*dz+alfa2.*y(2,1));
18
19 %% Equations Assembly
20
21 As=[ 0      1      0
22      -K./I    -C./I    0
23      0      0    -sigma0_lugre./g.*abs(y(2,1))];
24
25 E = [0
26      rm.*External_Force./I+rp.*Fat./I
27      y(2,1)];
28
29 y=[y(1,1)
30     y(2,1)
31     y(3,1)];
32
33 xp = As*y+E;
34
35 waitbar(t/tf,wb);

```
