

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR 15 / 05 / 2009

..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 15 / 05 / 2009



.....  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Análise Dinâmica de Chapas Trincadas com  
Reparos de Material Compósito Utilizando o  
Método dos Elementos de Contorno**

Autor: Martim Mauler Neto  
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

# **Análise Dinâmica de Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito Utilizando o Método de Elementos de Contorno**

Autor: Martim Mauler Neto

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009

S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M443a      Mauler Neto, Martim  
Análise dinâmica de chapas trincadas com reparos de material compósito utilizando o método de elementos de contorno / Martim Mauler Neto. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: Paulo Sollero.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Elementos de Contorno. 2. Materiais Compósitos.  
3. Anisotropia. 4. Mecânica da Fratura. I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic analysis of cracked sheets repaired with composite patches using boundary elements method

Palavras-chave em Inglês: Boundary Elements Method, Composite Materials, Anisotropy, Fracture Mechanics

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Euclides Mesquita Neto, Rogério José Marczak

Data da defesa: 15/05/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL


DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

## **Análise Dinâmica de Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**

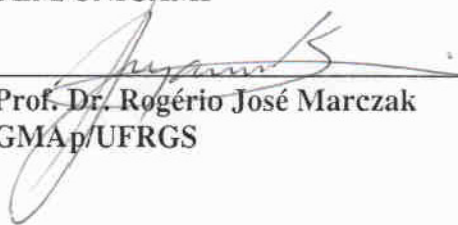
Autor: Martim Mauler Neto

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente  
FEM/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto  
FEM/UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rogério José Marczak  
GMAp/UFRGS

Campinas, 15 de Maio de 2009

**Dedicatória:**

Dedico este trabalho à minha querida companheira, Meire Matayoshi.

## Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

- À minha companheira, Meire. Este trabalho é reflexo do carinho, amor e dedicação, dela para comigo, nesses dois anos de mestrado.
- À minha família em Porto Alegre, pelas palavras de carinho.
- Ao meu orientador, Prof. Paulo Sollero, pelo aprendizado obtido, pelas oportunidades a mim dadas, e pela amizade que guardarei para sempre.
- À Fapesp, pelo apoio financeiro prestado, que tornou possível a realização deste trabalho
- Ao Prof. Éder Albuquerque, pela amizade, pelos conselhos e pelo tempo dedicado a mim durante a execução deste trabalho.
- Ao DMC, pela estrutura e pelo conforto fornecidos ao longo desses dois anos.
- Aos meus colegas, Anderson, Carlos, Marcel, Renan, Rafael, Renanzinho, Alberto, Ricardo, Rafael, Leonardo, Paulo, Fábio, Labaki, Ilson, Flávio, Hairton e Jaime, pelas risadas e pelo companheirismo.

*Few days ago I saw a film where people talked backwards:  
!!!yad ecin a evah ,yas ot repap siht etorw I nehT*

*oteN reluaM mitraM*

## Resumo

MAULER NETO, Martim, *Análise Dinâmica de Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 104 p. Dissertação (Mestrado)

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional para a análise dinâmica de chapas trincadas com reparos de material compósito colados. O método numérico a ser empregado para a modelagem do problema de mecânica da fratura da chapa, é o Método Dual de Elementos de Contorno (DMEC), que permite modelar a chapa em uma única região aplicando uma equação integral de deslocamentos em uma das faces da trinca, e uma equação integral de forças de superfície na outra face da trinca. As forças de corpo devido às massas da chapa e do reparo sob solicitação dinâmica serão modeladas através da técnica do Método de Dupla Reciprocidade de Elementos de Contorno (DRMEC), que permite a utilização de soluções fundamentais da elastoestática para a análise de problemas da elastodinâmica. O acoplamento entre a chapa metálica isotrópica e a chapa de laminado compósito anisotrópico, será modelado pela técnica do DRMEC para a análise de esforços devidos ao cisalhamento no adesivo. A tensão de cisalhamento no adesivo será calculada pela diferença de deslocamentos entre a chapa metálica e o compósito. Os efeitos dinâmicos de intensidade de tensão serão calculados por técnicas baseadas no deslocamento relativo das faces da trinca e por integrais de energia de domínio (EDI).

*Palavras Chave:* Materiais Compósitos, Anisotropia, Mecânica da Fratura, Elementos de Contorno, Integral de Energia de Domínio.



## Abstract

MAULER NETO, Martim, *Dynamic Analysis of Cracked Sheets Repaired with Composite Patches Using Boundary Elements Method*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009. 104 p. Dissertação (Mestrado)

The aim of this paper is to present the formulation and matrix implementation of a dynamic analysis of cracked sheets repaired with adhesively bonded composite patches. The numerical method that is used for modelling the problem of fracture mechanics is the dual boundary elements method (DBEM), which allows the modelling of a cracked sheet in a single region. This method uses a displacement integral equation in one of the sides of the crack surface and a traction integral equation in the other side of the crack surface. The body forces, due to the inertial effects of the sheet and the repair, and the interaction effect between the sheet and the anisotropic patch, are modelled using the dual reciprocity boundary elements method (DRBEM) technique, which allows the use of fundamental solutions from the elastostatics into problems of elastodynamics. The coupling between the isotropic metallic sheet and the anisotropic composite repair is modelled by the DBEM technique, in order to obtain the shear stress distribution in the adhesive layer. The shear stresses in the adhesive layer are obtained by the difference of nodal displacements between the sheet and the repair. The dynamic effects on the stress intensity factors are calculated by techniques based on the relative displacement of the crack faces and energy domain integration (EDI).

*Key Words:* Composite Materials, Anisotropy, Fracture Mechanics, Boundary Element Method, Energy Domain Integral.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Metodologia . . . . .	1
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Elasticidade Bidimensional</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Relações Tensão Deformação . . . . .	7
2.3	Elasticidade Isotrópica . . . . .	9
2.4	Solução Fundamental Isotrópica . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Elasticidade Plana Anisotrópica</b>	<b>12</b>
3.1	Introdução . . . . .	12
3.2	Elasticidade Anisotrópica . . . . .	12
3.3	Funções de Tensão de Airy . . . . .	15
3.4	Equações Constitutivas para um Laminado . . . . .	18
3.5	Laminados Simétricos . . . . .	21
3.6	Soluções Fundamentais Anisotrópicas . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Formulação Integral de Elementos de Contorno</b>	<b>27</b>
4.1	Introdução . . . . .	27
4.2	Método de Elementos de Contorno . . . . .	27
4.3	Elementos de Contorno Contínuos e Descontínuos . . . . .	29
4.4	Equações Integrais para Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito	31
4.5	Método Dual de Elementos de Contorno . . . . .	33
4.6	Método de Dupla Reciprocidade de Elementos de Contorno . . . . .	34
4.7	Tensões Internas . . . . .	38
4.8	Tensões no Contorno . . . . .	39
4.9	Formulação de Contorno Discretizada . . . . .	41
4.10	Considerações Adicionais . . . . .	45
4.11	Implementação Matricial . . . . .	47
4.12	Procedimento de Solução no Domínio do Tempo . . . . .	50

<b>5</b>	<b>Cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão</b>	<b>52</b>
5.1	Introdução . . . . .	52
5.2	Abordagem de Campos de Irwin . . . . .	52
5.3	Modos de Fratura . . . . .	53
5.4	Campos de Tensão em Torno da Trinca . . . . .	54
5.5	Desacoplamento do Tensor de Tensões e Campo de Deslocamentos . . . . .	56
5.6	Crack Tip Opening Displacement . . . . .	57
5.7	Integral $\hat{J}$ . . . . .	59
5.8	Integração por Energia de Domínio . . . . .	60
5.9	Função q Quadrática . . . . .	61
5.10	Isoparametrização e Implementação Computacional . . . . .	62
5.11	Obtenção das Derivadas de Deslocamentos . . . . .	65
5.11.1	Integração das Soluções Fundamentais de Derivadas de Deslocamento e Forças de Superfície . . . . .	66
5.11.2	Derivação Isoparamétrica . . . . .	67
5.12	Obtenção de $K_I$ e $K_{II}$ . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>70</b>
6.1	Introdução . . . . .	70
6.2	Chapa Trincada sem Reparo . . . . .	70
6.2.1	Trinca Central Reta . . . . .	70
6.2.2	Trinca Central Inclinada . . . . .	73
6.3	Chapa com Reforçador Compósito . . . . .	79
6.4	Chapa Trincada com Reparo Compósito . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>86</b>
7.1	Conclusões Finais . . . . .	86
7.2	Propostas para Trabalhos Futuros . . . . .	89

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Metodologia

A presença de trincas em componentes mecânicos ou estruturais submetidos a cargas dinâmicas reduz a resistência mecânica e a resistência a fadiga desses componentes. Isso se deve a alta concentração de tensões na região da ponta da trinca. A mecânica da fratura hoje é um tema muito importante para a indústria aeronáutica, uma vez que neste ramo tem-se a necessidade de projetos com alta confiabilidade, alta resistência e baixo custo. Estruturas aeronáuticas são compostas geralmente por chapas e reforçadores. Uma chapa trincada em uma estrutura aeronáutica é reparada rebitando, aparafusando ou colando um reparo metálico na região da trinca. O uso de rebites e parafusos gera furos na estrutura, que passam a funcionar como potenciais concentradores de tensão (Fig.1.1), aumentando a possibilidade de surgimento de novas trincas.

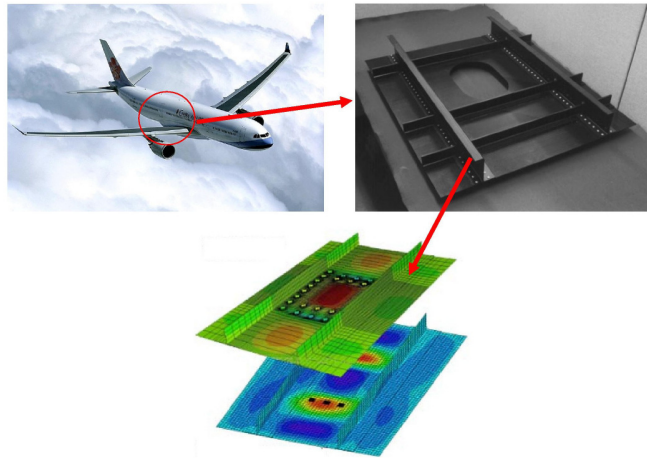


Figura 1.1: Exemplo de reparo parafusado

Os reparos colados (Fig.1.2) já tem sido usados pela industria com sucesso, e considerados uma solução eficiente para este tipo de problema.

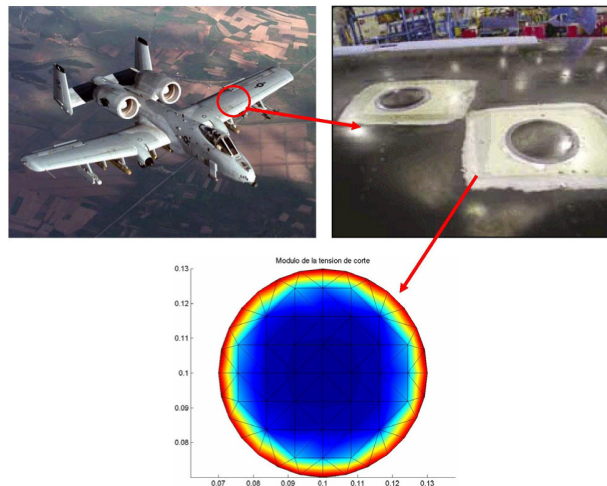


Figura 1.2: Exemplo de reparo colado

O uso de reparos colados também permite o uso de materiais alternativos, como materiais compósitos, que possuem uma relação resistência-peso, muito mais vantajosa. Neste trabalho, o método de elementos de contorno (MEC) é utilizado para analisar a resposta dinâmica de chapas trincadas com reparos de material anisotrópico. A resposta elastoestática deste problema já foi implementada por Useche, Sollero e Aliabadi [37]. Devido a fortes singularidades numéricas inerentes a modelagem de trincas, a formulação convencional do MEC necessita de tratamentos adicionais ao se trabalhar com problemas de mecânica da fratura. Portanto, uma formulação alternativa é necessária para superar este problema. O método dual de elementos de contorno é uma técnica de modelagem no contorno que permite discretizar a trinca numa única região. Esta técnica, descrita e implementada com sucesso por Dirgantara [9], é considerada uma técnica eficiente para simular problemas de mecânica da fratura. A consideração de efeitos de inércia e de acoplamento inserem integrais de domínio nas equações de equilíbrio de contorno do sistema, que devem ser transformadas em integrais de contorno também. O método de dupla reciprocidade de elementos de contorno (DRMEC) tem sido usado com sucesso para superar este tipo de problema, tanto para chapas isotrópicas quando para chapas anisotrópicas. Este método foi mostrado por Kögl e Gaul [21] e Albuquerque, Sollero e Aliabadi [2]. Para se ter uma disponibilidade maior de análises quanto a ciclos de carga dinâmica, um método de solução transiente é adotado. Este procedimento já foi descrito em implementado por Houbolt [14] e Loeffler e Mansur [25]. Entretanto, uma solução no domínio do tempo é geralmente mais cara computacionalmente do que uma solução no domínio da frequência. O software de programação utilizado é o MatLab 7.1. Uma vez que o objetivo do trabalho é a implementação da formulação apresentada, e não o aumento de eficiência de solução computacional, optou-se pelo MatLab por já existem programas relacionados ao assunto anteriores a este na mesma linguagem, e pelo fato do MatLab apresentar uma linguagem de programação mais acessível.

Já haviam programas anteriores, desenvolvidos pelo grupo, que foram utilizados para o trabalho. A implementação do DRMEC, aplicado à análise de efeitos de inércia de chapas isotrópicas, foi implementada por Lourenço [26]. A implementação do DMEC aplicado à chapas isotrópicas também foi implementada por Lourenço [26], porém não foi utilizada em conjunto com o DRMEC.

A formulação de chapas anisotrópicas, bem como o DRMEC aplicado à chapas de materiais anisotrópicos, e a avaliação de valores de fatores de intensidade de tensões através do método

Crack Tip Opening Displacement (CTOD) para materiais anisotrópicos foram implementados por Albuquerque [1].

A solução estática do problema de chapas trincadas com reparos de material compósito, bem como a avaliação de tensões na camada adesiva, foram implementadas por Useche [38].

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O livro editado por Baker, Rose e Jones [4] é uma referência essencial para o estudo de reparos compósitos colados. A obra aborda diversos aspectos envolvidos neste estudo, incluindo a modelagem analítica e numérica, análise experimental, adesivos compósitos, certificação aeronáutica, fadiga, e monitoramento estrutural.

Os primeiros trabalhos que analisaram reparos isotrópicos foram apresentados por Erdogan e Arin [11] e Ratwani [31] nos anos setenta. Esses trabalhos apresentaram o estudo de reparos colados em placas infinitas com trincas. Os autores utilizaram soluções analíticas para a deformação e consideraram a compatibilidade dos deslocamentos entre a placa trincada e o reparo.

Mitchell e Wooley [28] utilizaram o MEF para estudar o reforço de placas induzido pela aplicação de reparos. Eles usaram uma formulação bidimensional de elementos finitos com tensões constantes e acoplaram a placa e o reparo através de nós onde as condições de compatibilidade de deslocamento foram impostas. Os autores analisaram também a presença de uma trinca na placa. Entretanto o trabalho não considerou a singularidade no campo de tensões na ponta da trinca e também não calculou os fatores de intensidade de tensão.

Jones e Callinan [16, 17, 19] usaram o MEF para a análise de placas metálicas reparadas com uma camada de material compósito. Eles desenvolveram uma matriz de rigidez para acoplar a placa, a camada adesiva e o reparo de material compósito. Essa matriz foi acoplada com um modelo do MEF de placa metálica, e na ponta da trinca eles utilizaram elementos singulares especiais.

Young, Cartwright e Rooke [44] modelaram uma chapa trincada e reparo isotrópico usando o MEC. As tensões de cisalhamento na camada adesiva assim como as forças de corpo agindo sobre a chapa e o reparo foram modeladas. Neste trabalho foi empregada uma função de Green especial para modelar domínios com trincas retas, o que limita a aplicação do método. Tarn e Shark [36] Estudaram o problema de placas trincadas reparadas com materiais compósitos colados. Um modelo de mola foi usado para acoplar o modelo de placa trincada com

o modelo do reparo. O reparo foi modelado usando o MEF e a trinca usando o MEC.

Young [43] modelou a força distribuída de interação entre chapa e reparo discretizando a área de contato entre a chapa e o reparo usando células internas numa formulação do MEC.

Salgado [32] usou o método de contorno dual para modelar chapas metálicas trincadas e o método direto dos elementos de contorno para modelar o reparo isotrópico. A força distribuída entre a chapa e o reparo foi modelada utilizando o DRMEC. Esta formulação foi aplicada por Salgado e Aliabadi [33] na análise de chapas metálicas reforçadas com reparos isotrópicos colados. A chapa reforçada foi modelada usando o DRMEC. As tensões de cisalhamento na camada adesiva foram modeladas como forças de corpo.

Lourenço [26] analisou chapas metálicas isotrópicas com reparos adesivos e carregamento no plano usando o DRMEC para modelar as forças de interação entre a placa e o reparo como forças distribuídas. Esta formulação foi estendida por Lourenço et al. [27] para a análise de reparos anisotrópicos como reforço estrutural de chapas metálicas submetidas a carregamento estático no plano da chapa.

O trabalho de Dirgantara e Aliabadi [7] apresentou uma nova formulação mista de elementos de contorno para resolver problemas de deflexão em cascas metálicas isotrópicas considerando deformação de cisalhamento (Formulação de Reissner). Os termos de curvatura da formulação da casca foram rearranjados junto com os termos de forças externas na equação governante. Foi acoplada uma formulação por elementos de contorno para placas considerando a deformação por cisalhamento com uma formulação do MEC para tensão elástica plana, completando assim o modelo de casca metálica com deformação por cisalhamento e deformação elástica no plano.

Nos trabalhos de Wen, Aliabadi e Young [39, 40] foram analisadas cascas metálicas isotrópicas com deformação por cisalhamento utilizando o MEC. Novas equações integrais foram desenvolvidas utilizando o princípio de reciprocidade de Betti, e foram acopladas às formulações de elementos de contorno para placas com deformação por cisalhamento a tensão elástica do plano. Estes autores utilizaram duas técnicas para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno: método direto de elementos de contorno e o DRMEC.

Dirgantara e Aliabadi [8] desenvolveram uma nova formulação para o MEC para análise de cascas metálicas isotrópicas trincadas considerando as deformações devido a esforços cor-tantes. Eles desenvolveram uma equação hiper-singular de contorno usando uma formulação de dupla reciprocidade, aplicando uma equação de força de superfície numa face da trinca e



uma equação de deslocamento na outra face da trinca.

Widagdo e Aliabadi [42] apresentaram uma formulação do MEC para a análise de placas metálicas reparadas por materiais compósitos parafusados. A chapa trincada foi modelada utilizando uma formulação de dupla reciprocidade. Os parafusos foram modelados como molas lineares cujas forças são tratadas como forças pontuais. O reparo foi utilizado utilizando uma formulação do MEC bidimensional para chapas anisotrópicas.

Passalacqua e Pavanello [30] apresentaram uma formulação de MEF para a análise de chapas e cascas isotrópicas reparadas com material compósito colado. A camada adesiva foi modelada utilizando formulações de parâmetros concentrados equivalentes. O objetivo do trabalho era desenvolver métodos de predição numérica do comportamento mecânico de reforços estruturais levando em conta a modelagem de falhas na estrutura original.

Albuquerque e Sollero [1] apresentaram uma formulação de MEC para análise dinâmica de chapas trincadas anisotrópicas. Foram apresentadas, também neste trabalho, as formulações de DRMEC e DMEC para o caso anisotrópico.

Useche e Sollero [38] apresentaram uma formulação de MEC para análise estática de chapas trincadas isotrópicas reparadas com material compósito colado. Os efeitos de acoplamento entre a chapa e o reparo foram modelados através do DRMEC, e a trinca foi modelada através do DMEC. A equação para a modelagem do adesivo foi usada como equação de compatibilidade entre o comportamento mecânico da chapa e do reparo.

Recentemente, Wen, Aliabadi e Young [41] desenvolveram uma formulação do MEC para a análise de painéis metálicos curvos com trincas e reparos isotrópicos colados. O efeito da camada adesiva foi modelado considerando forças distribuídas. Uma formulação integral para a placa com tensão de cisalhamento acoplada por uma formulação integral para tensão plana foi utilizada para determinar momentos fletores e as forças de membrana no reparo adesivo. A análise de propagação de trincas e fadiga em placas com reparos compósitos foi abordada recentemente por métodos analíticos numéricos e experimentais por Lee e Lee [22] e por Jones et al.[18]. Sekine et al. [34] apresentaram um método numérico para modelagem de propagação de trincas em painéis de alumínio com reparo compósito utilizando uma combinação do MEC para a modelagem da placa trincada e MEF para a modelagem do reparo.

## Capítulo 2

# Elasticidade Bidimensional

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma revisão da teoria de elasticidade plana aplicada a materiais isotrópicos. O capítulo se inicia com a definição básica das relações de tensão e deformação para materiais elásticos isotrópicos. Posteriormente, as soluções fundamentais para elasticidade plana isotrópica são estabelecidas.

### 2.2 Relações Tensão Deformação

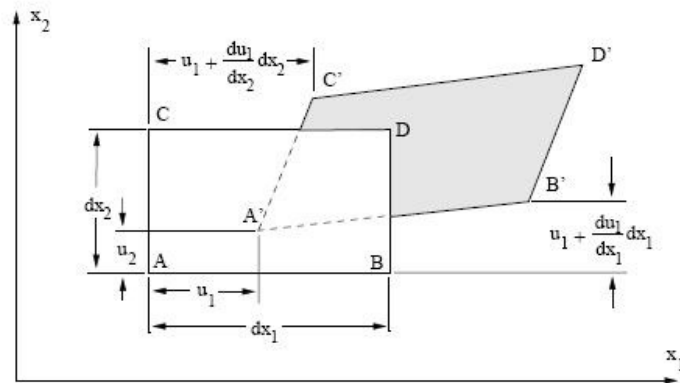


Figura 2.1: Campo de deformações planas

Na elasticidade linear, o vetor de gradientes de deslocamento pode ser considerado de ordem infinitesimal. Desta forma, o tensor de deformações  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  é dado por (Fig.2.1):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde,  $u_\alpha$  são as componentes de deslocamentos nos eixos de coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ .

De forma a se assegurar a unicidade dos campos de deslocamento, quando as componentes do tensor de deformações são definidas, equações de compatibilidade entre as componentes de deslocamento devem ser estabelecidas. No caso da elasticidade bidimensional, essa compatibilidade é definida por [20]:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \right). \tag{2.2}$$

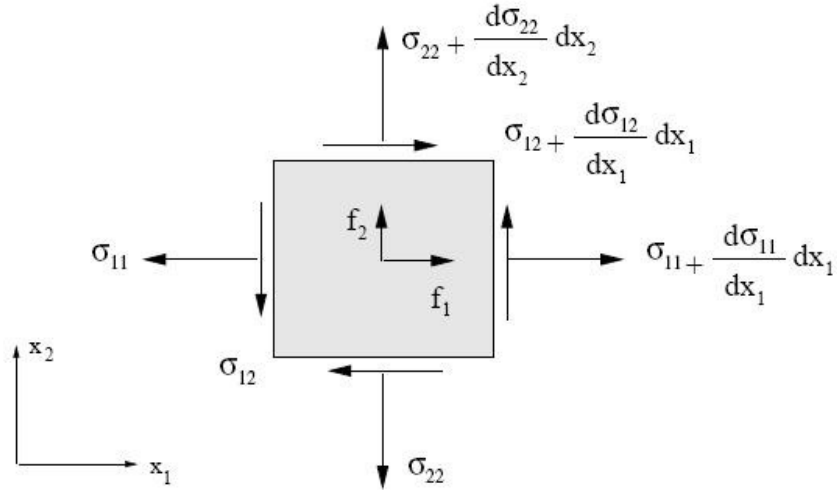


Figura 2.2: Componentes de tensão em elasticidade plana

Considerando a Fig.(2.2), a equação de equilíbrio para um elemento diferencial, em um corpo contínuo, sob estado plano de tensões pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde é avaliada em um domínio  $\Omega$  e deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned}u_\alpha &= \bar{u}_\alpha \text{ em } \Gamma_u \\ t_\alpha &= \bar{t}_\alpha \text{ em } \Gamma_t\end{aligned},\tag{2.4}$$

onde  $\sigma_{\alpha\beta}$  representa o tensor de tensões de Cauchy.  $\Gamma_u$  representa a porção do contorno  $\Gamma$  em que os deslocamentos são impostos.  $\Gamma_t$  representa a porção do contorno  $\Gamma$  em que as forças de superfície são impostas. O vetor de forças de superfície, para uma determinada normal  $n_\beta$  em qualquer ponto do contorno  $\Gamma_t$  é dado por:

$$t_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta.\tag{2.5}$$

## 2.3 Elasticidade Isotrópica

Como discutido anteriormente, um objeto em estado plano de tensão é livre para se deformar fora do plano e todas as componentes de força de superfície fora do plano são iguais a zero. Assim sendo, a relação tensão-deformação para elasticidade plana pode ser escrita por [20]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} \varepsilon_{11} + 2G \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} \varepsilon_{22} + 2G \varepsilon_{22},\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12}$$

onde  $\lambda = 2/(1 - 2\nu)$ ,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material e  $\nu$  é o módulo de

Poisson do material. No estado plano de tensão, a componente de deformação fora do plano é dada por:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{(\lambda + 2G)}\varepsilon_{\alpha\alpha}. \quad (2.7)$$

## 2.4 Solução Fundamental Isotrópica

As equações integrais de elastoestática requerem o conhecimento das soluções de elasticidade correspondentes a um domínio infinito sob um carregamento pontual unitário. Sendo as equações de equilíbrio expressas em função das componentes de deslocamento, as equações de Navier para elasticidade bidimensional são dadas por [5]:

$$\mu \left( \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} \right) u_{\alpha,\alpha\beta} + G u_{\beta,\gamma\gamma} + f_\beta = 0. \quad (2.8)$$

A solução de Kelvin é obtida quando uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto  $i$  na direção do vetor unitário  $e_\beta$ :

$$f_\beta = \Delta^i e_\beta. \quad (2.9)$$

Expressando os termos de deslocamento na forma de vetores de Galerkin,  $\varphi_\alpha$ , obtém-se:

$$u_\alpha = \varphi_{\alpha,\beta\beta} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varphi_{\beta,\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Acopla-se então as eq.(2.10), eq.(2.9) e eq.(2.8), e resolve-se para  $\varphi_\alpha$  a equação:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln \left( \frac{1}{r} \right) e_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

onde,  $\varphi_\alpha$  é a componente  $\alpha$  do vetor de Galerkin, em qualquer ponto do domínio, quando uma carga unitária concentrada é aplicada em um ponto  $i$  com direção  $\beta$ . O deslocamento em qualquer ponto do domínio, relativo à aplicação da carga pontual unitária, é dado por:

$$u_\alpha^* = u_{\beta\alpha}^* e_\beta, \quad (2.12)$$

onde  $u_{\beta\alpha}$  é a componente  $\alpha$  do deslocamento em qualquer ponto do domínio quando uma carga unitária concentrada é aplicada em um ponto  $i$  com direção  $\beta$ . Utilizando a definição dada pela eq.(2.10), a eq.(2.12) pode ser reescrita na forma:

$$u_{\alpha\beta}^* = \varphi_{\alpha\beta,\gamma\gamma} - \frac{1}{2(1-\nu)} \varphi_{\alpha\gamma,\beta\gamma}. \quad (2.13)$$

Substituindo a eq.(2.11) na eq.(2.13), obtém-se a solução fundamental de deslocamentos para elasticidade linear isotrópica para estado plano de tensão, que é dada por [20]:

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu')} \left[ (3-4\nu') \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right], \quad (2.14)$$

onde  $\nu' = \nu/(1+\nu)$ .

De maneira semelhante, a solução fundamental de forças de superfície para elasticidade linear isotrópica para estado plano de tensão é dada por [20]:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu') \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] + (1-2\nu') [n_{\beta} r_{,\alpha} - n_{\alpha} r_{,\beta}] \right]. \quad (2.15)$$

## Capítulo 3

# Elasticidade Plana Anisotrópica

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma revisão da teoria de elasticidade aplicada a materiais anisotrópicos. O capítulo se inicia com a definição básica das relações de tensão e deformação para materiais elásticos anisotrópicos. O tensor de tensões e expressões para componentes de deslocamento são estabelecidas. Um caso específico de relação de tensão deformação para laminados ortotrópicos é apresentado como base para obtenção de relações de tensão deformação generalizada para laminados ortotrópicos. Posteriormente, as soluções fundamentais de deslocamento e forças de superfície para elasticidade plana anisotrópica é apresentada. Este capítulo é baseado nos trabalhos de Albuquerque [1] e Useche [38].

### 3.2 Elasticidade Anisotrópica

Na teoria de elasticidade anisotrópica, a relação de tensão deformação pode ser escrita de forma generalizada como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.1)$$

onde  $C_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de constantes elásticas com 81 componentes. Devido a restrições de simetria e a existência da função de energia de deformação, as seguintes restrições são necessárias:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (3.2)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Estas condições reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como, a direção principal do tensor de tensões não tem necessariamente a mesma direção principal do tensor de deformações, somente 18 das 21 constantes elásticas são independentes [23]. Considerando somente as 21 constantes elásticas, a eq.(3.1) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

De forma alternativa, a eq.(3.1) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (3.4)$$

onde  $S_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem, similar ao tensor  $C_{ijkl}$ , conhecido como tensor de flexibilidade. A eq.(3.4) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

Utilizando a notação tensorial reduzida proposta por Lekhnitskii [23], esta equação pode ser escrita como:



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

e:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

Os termos  $a_{ij}$  da eq.(3.6) podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como [23]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1 & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\ a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\ a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\ a_{22} &= 1/E_2 & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\ a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \eta_{23,3}/G_{23} & a_{25} &= \eta_{32,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\ a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} & a_{33} &= 1/E_3 \\ a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} & a_{35} &= \eta_{31,2}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\ a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} & a_{44} &= 1/G_{23} \\ a_{45} &= \xi_{32,23}/G_{23} = \xi_{23,31}/G_{13} & a_{46} &= \xi_{12,23}/G_{23} = \xi_{23,12}/G_{13} \\ a_{55} &= 1/G_{13} & a_{56} &= \xi_{12,31}/G_{13} = \xi_{31,12}/G_{12} \\ a_{66} &= 1/G_{12} \end{aligned}, \quad (3.9)$$

onde  $E_k$  é o módulo de Young referente ao eixo  $x_k$  e  $G_{ij}$  é o módulo de cisalhamento para o plano definido pelos eixos  $x_i$  e  $x_j$ . As constantes  $\nu_{ij}$  são os coeficientes de Poisson. As constantes  $\eta_{jk,l}$  são denominadas coeficientes de influência mútua de primeira espécie, que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais do material, produzidas por tensões

tangenciais agindo nos planos principais do material [1]. As constantes  $\eta_{l,jk}$  são denominadas coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. As constantes  $\xi_{ij,kl}$  são os coeficientes de Chentsov [1], que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em planos paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ ), qualquer material pode ser expresso utilizando somente 6 constantes independentes. Desta forma, a eq.(3.6) pode ser expressa na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

Substituindo as eq.(2.1) e eq.(3.1) na eq.(2.3), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos:

$$C_{ijkl}u_{k,jl} + p_i = 0, \quad (3.11)$$

onde:

$$p_i = \rho (b_i - \ddot{u}), \quad (3.12)$$

é o termo que contem as forças de corpo.

### 3.3 Funções de Tensão de Airy

Na teoria de elasticidade anisotrópica, o tensor de tensões pode ser escrito na forma de funções de tensão de Airy  $F(x_1, x_2)$  dadas por [23]:

$$\sigma_{11} = F_{,22} + \Upsilon$$

$$\sigma_{22} = F_{,11} + \Upsilon, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{12} = -F_{,21}$$

onde  $\Upsilon$  é uma função potencial dada por:

$$\Upsilon_{,i} = p_i. \quad (3.14)$$

Substituindo a eq.(3.13) na eq.(3.10) e na equação de compatibilidade (2.2), obtém-se a equação diferencial para a função de tensão  $F(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ - (a_{12} + a_{22})\Upsilon_{,11} + (a_{16} + a_{26})\Upsilon_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\Upsilon_{,22} \end{aligned} \quad (3.15)$$

No caso particular onde  $p_i = 0$ , a equação acima pode ser escrita para análise estática como:

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0. \quad (3.16)$$

Definindo o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (3.17)$$

e aplicando este operador na função de tensão  $F(x_1, x_2)$ :

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0, \quad (3.18)$$

e expandindo esta equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} \\ + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} \\ - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} \\ + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

As eq.(3.16) e eq.(3.19) serão iguais se  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  forem raízes da equação:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \quad (3.20)$$

As raízes da eq.(3.20) para qualquer caso são complexas ou imaginárias puras, ocorrendo sempre aos pares  $(\mu_k \text{ e } \bar{\mu}_k)$  [24].

Definindo a variável  $z_k$  como:

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2, \quad (3.21)$$

tem-se que:

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k}. \quad (3.22)$$

Definindo  $F(x_1, x_2)$  como uma função real, tem-se que:

$$F(x_1, x_2) = 2Re [F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (3.23)$$

Introduzindo a notação:

$$\frac{dF(x_1, x_2)}{dz_k} = \Psi_k(z_k), \quad (3.24)$$

e acoplando as eq.(3.23) e eq.(3.13) obtém-se as componentes do tensor de tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2Re [\mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2)] \\ \sigma_{22} &= 2Re [\Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2)] \\ \sigma_{12} &= -2Re [\mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2)], \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde  $\Psi_k^{(1)}$  é a derivada primeira de  $\Psi_k$  em relação à  $z_k$ .

Acoplando a eq.(3.25) à eq.(2.11), e integrando, obtém-se:

$$u_1 = 2Re [q_{11} \Psi_1(z_1) + q_{12} \Psi_2(z_2)] \quad (3.26)$$

$$u_2 = 2Re [q_{21}\Psi_1(z_1) + q_{22}\Psi_2(z_2)],$$

onde:

$$q_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_\beta^2 + a_{12} - a_{16}\mu_\beta \\ a_{12}\mu_\beta + a_{22}/\mu_\beta - a_{26} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

é conhecida como matriz de parâmetros complexos.

Se as condições de contorno forem estabelecidas, a função de tensões dadas pela eq.(3.13) pode ser definida para satisfazer estas condições. Desta forma, os campos de tensões de deslocamentos, dados pelas eq.(3.25) e eq.(3.26), podem ser encontrados.

### 3.4 Equações Constitutivas para um Laminado

A relação tensão deformação de um laminado ortotrópico pode ser definida por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde as componentes  $Q_{ij}$  do tensor de rigidez são dadas por:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sendo o laminado, mostrado na Fig.(3.1), ortotrópico, suas relações constitutivas podem ser caracterizadas por 5 constantes elásticas: Os módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$  nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , o módulo de cisalhamento  $G_{12}$  e o módulo de Poisson  $\nu_{12}$ . A última constante elástica necessária pode ser determinada pela seguinte relação constitutiva:

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2. \quad (3.30)$$

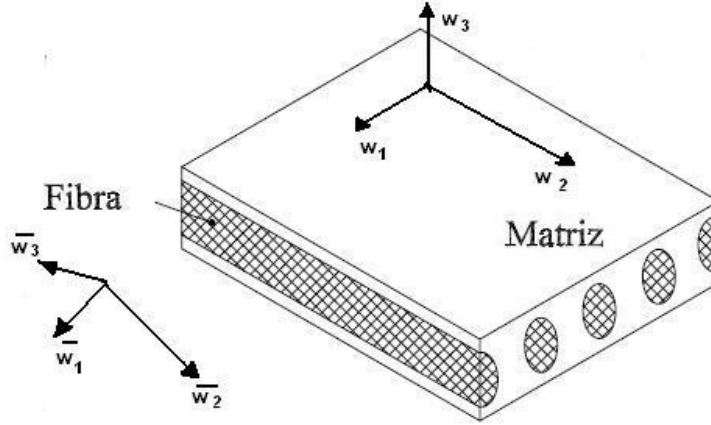


Figura 3.1: Exemplo de laminado ortotrópico

Em muitos casos, os eixos do laminado  $(w_1, w_2)$  não são coincidentes com a direção de suas fibras  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ . Neste caso, a relação constitutiva de cada camada deve sofrer uma transformação para o eixo de referência do laminado (Fig.3.2), e assim a sua relação constitutiva pode ser definida. Esta transformação é realizada multiplicando os tensores de tensões e deformações por uma matriz de transformação:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \mathbf{T} \sigma_{ij} \\ \varepsilon'_{ij} &= \mathbf{T} \varepsilon_{ij},\end{aligned}\tag{3.31}$$

onde  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são os tensores de tensões e deformações referentes ao eixo do laminado. A matriz de transformação  $\mathbf{T}$  é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix},\tag{3.32}$$

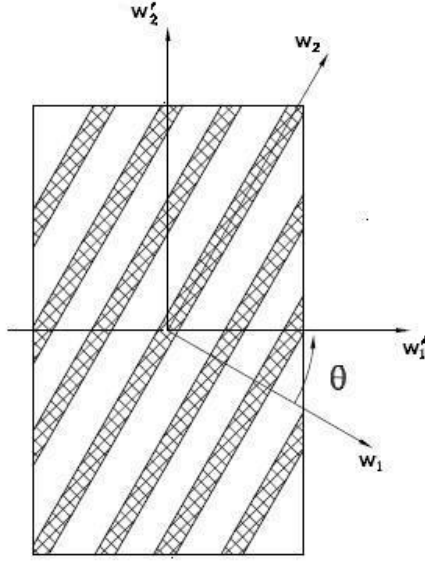


Figura 3.2: Sistema de coordenadas de um laminado

onde  $m = \cos \theta$  e  $n = \sin \theta$ . Logo, a equação constitutiva pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})^T \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

Multiplicando as matrizes nesta equação, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.5 Laminados Simétricos

Laminados simétricos são laminados cujas lâminas são unidas de forma que, para cada lâmina colocada a um dos lados do plano médio do conjunto, haja outra lâmina na posição oposta equivalente, com propriedades idênticas e mesma orientação das fibras (Fig.3.3). Por apresentarem equações constitutivas mais simples e por serem mais facilmente analisados, os laminados simétricos são extensamente utilizados na engenharia.

A existência de um plano médio é uma condição necessária para uma análise bidimensional. Caso contrário, a aplicação de qualquer carregamento em relação ao eixo  $x_3$  geraria flexão da chapa, e conseqüentemente, o aparecimento de deslocamentos fora do plano.

É importante lembrar que, para que a formulação apresentada neste trabalho seja útil ao se tratar laminados simétricos, deve-se considerar que as deformações ao longo de toda espessura do laminado são sempre as mesmas. Ou seja, não há escorregamento entre as camadas do laminado.

As componentes do tensor de tensão de um laminado são obtidas através da integração das componentes de tensor de tensões de cada lâmina ao longo de toda a espessura  $e$  do laminado:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \sigma'_{ij} dx_3, \quad (3.36)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  é o tensor de tensões de cada lâmina e  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões global do laminado. Considerando um laminado de  $N$  lâminas ortotrópicas, as forças atuantes no seu plano médio podem ser obtidas pela substituição da integral contínua da eq.(3.36) por um somatório de integrais, referentes a cada uma das  $N$  lâminas separadamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_l dx_3. \quad (3.37)$$

Substituindo a eq.(3.37) na eq.(3.33), tem-se que:



$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \sum_{l=1}^N \left\{ \int_{h_{l-1}}^{h_l} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} dx_3 \right\}. \quad (3.38)$$

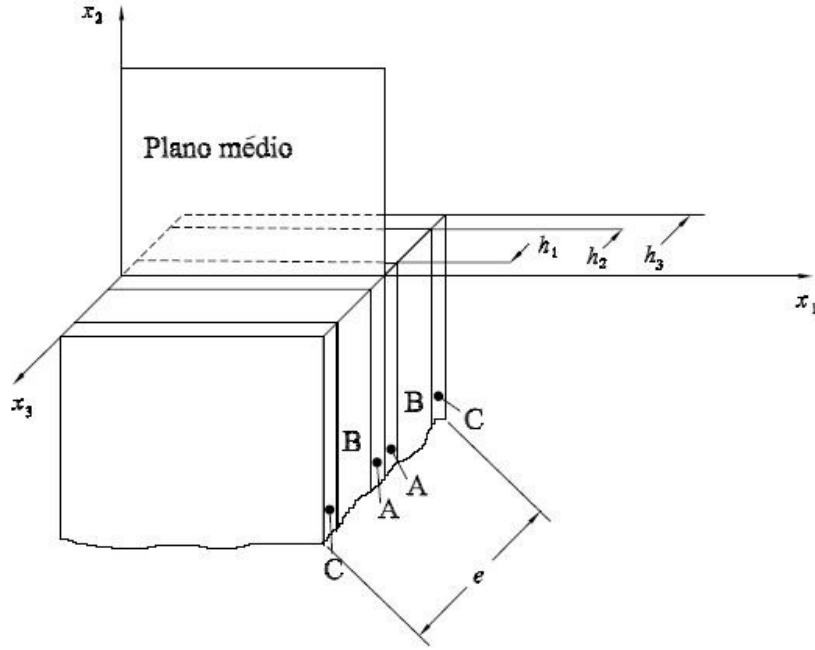


Figura 3.3: Esquema ilustrativo de laminado simétrico

Sendo as deformações  $\varepsilon_{ij}$  e a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{Q}}_{ij}$  constantes ao longo de toda a espessura de cada lâmina, a eq.(3.38) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \left[ \sum_{l=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_l (h_l - h_{l-1}) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} dx_3, \quad (3.39)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{ij} = \frac{1}{e} \left[ \sum_{l=1}^N \mathbf{Q}_l (h_l - h_{l-1}) \right], \quad (3.40)$$

que é equivalente a matriz de rigidez global do laminado.

O tensor de flexibilidade do laminado é dado pelo inverso do tensor de rigidez, ou seja:

$$[a_{ij}]_L = \mathbf{Q}_L^{-1}. \quad (3.41)$$

Em muitos casos, é necessário transformar o tensor  $\mathbf{Q}$  e o tensor  $[a_{ij}]$  de um sistema de coordenadas para outro. Neste caso, uma transformação similar à aplicada na eq.(3.34) é usada:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^4 \theta + 2(2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a_{22} \sin^4 \theta \\ &\quad + (a_{16} \cos^2 \theta + a_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^4 \theta + 2(2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a_{22} \cos^4 \theta \\ &\quad - (a_{16} \cos^2 \theta + a_{26} \sin^2 \theta) \sin 2\theta \\ a'_{12} &= a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (a_{26} - a_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta \\ a'_{66} &= a_{66} + 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2(a_{26} - a_{16}) \sin 2\theta \cos 2\theta, \\ a'_{16} &= \left[ a_{22} \sin^2 \theta - a_{11} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (2a_{12} + a_{66}) \cos 2\theta \right] \sin 2\theta \\ &\quad + a_{16} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) + a_{26} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ a'_{26} &= \left[ a_{22} \cos^2 \theta - a_{11} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (2a_{12} + a_{66}) \cos 2\theta \right] \sin 2\theta \\ &\quad + a_{16} \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a_{26} \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.42)$$

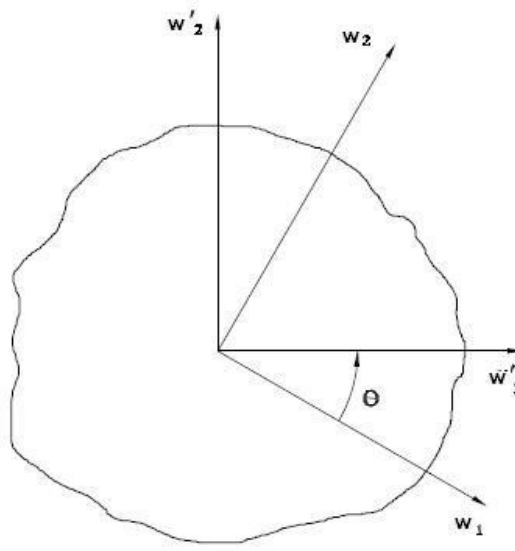


Figura 3.4: Transformação de sistema de coordenadas

onde  $[a'_{ij}]$  representa a matriz de constantes elásticas no sistema de coordenadas  $(w'_1, w'_2)$  e  $[a_{ij}]$  representa a matriz de constantes elásticas no sistema de coordenadas global  $(w_1, w_2)$  (Fig.3.4).

As raízes da equação característica 4.20 podem ser escritas num novo sistema de coordenadas como [24]:

$$\mu'_k = \frac{\mu_k \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}. \quad (3.43)$$

### 3.6 Soluções Fundamentais Anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, considera-se um domínio  $\Omega$  mapeado em um domínio complexo, utilizando as seguintes mudanças de variáveis:

$$z' = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 + \mu'_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu'_2 x'_2 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

e

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

onde  $x'_1$  e  $x'_2$  são coordenadas de pontos fonte e  $x_1$  e  $x_2$  são coordenadas de pontos de campo. Considerando o domínio fechado em torno dos pontos de campo, com forças de superfície definidas pela eq.(2.4) e tensões definidas pelas eq.(3.25), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} t_1 d\Gamma &= 2Re [\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2] = -\delta_{\alpha 1} \\ \int_{\Gamma_t} t_2 d\Gamma &= 2Re [\Psi_1 + \Psi_2] = -\delta_{\alpha 2} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para um ponto carregado na direção  $x_1$ , as funções de tensão de Airy podem ser representadas por:

$$\Psi_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \ln(z - z'), \quad (3.47)$$

e podem ser satisfeitas por qualquer contorno fechado adotado por  $z'$ .

Acoplando as eq.(3.47) e eq.(3.46) e considerando que  $\ln(z - z') = 2\pi i$ , obtém-se duas equações para as constantes desconhecidas  $A_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} A_{\alpha 1} - \bar{A}_{\alpha 1} + A_{\alpha 2} - \bar{A}_{\alpha 2} &= \delta_{\alpha 2} / (2\pi i) \\ \mu_1 A_{\alpha 1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{\alpha 1} + \mu_2 A_{\alpha 2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{\alpha 2} &= -\delta_{\alpha 1} / (2\pi i) . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ainda são necessárias duas outras equações para que se possa obter  $A_{\alpha\beta}$ , e essas equações surgem da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos:

$$[[u_i]] = 0, \quad (3.49)$$

assim sendo:

$$\begin{aligned} q_{11}A_{\alpha 1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{\alpha 1} + q_{12}A_{\alpha 2} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{\alpha 2} &= 0 \\ q_{21}A_{\alpha 1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{\alpha 1} + q_{22}A_{\alpha 2} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{\alpha 2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Agrupando as eq.(3.50) e eq.(3.48), resolvendo o sistema para obter  $A_{\alpha\beta}$  e acoplando o resultado na equação de deslocamentos (3.26), a solução fundamental de deslocamentos para estado plano de tensão anisotrópico é dada por:

$$U_{\alpha\beta} = 2Re \left[ q_{\beta 1}A_{\alpha 1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{\alpha 2}A_{\beta 2} \ln(z_2 - z'_2) \right]. \quad (3.51)$$

De maneira similar, a solução fundamental de forças de superfície para estado plano de tensão anisotrópico é obtida, e é dada por:

$$T_{\alpha\beta} = 2Re \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{\alpha 1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{\beta 1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{\alpha 2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{\beta 2} \right], \quad (3.52)$$

onde:

$$[g_{\beta\alpha}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

e  $n_1$  e  $n_2$  são as componentes do vetor normal externo.

## Capítulo 4

# Formulação Integral de Elementos de Contorno

### 4.1 Introdução

Este capítulo trata da teoria e implementação do método de elementos de contorno aplicado à análise de chapas trincadas com reparos de material compósito. Inicialmente uma breve revisão sobre o método de contorno é apresentada. Logo em seguida, são apresentadas as equações integrais que governam o comportamento dinâmico da chapa e do reparo. São apresentadas as teorias do método dual de elementos de contorno (DMEC) e do método de dupla reciprocidade de elementos de contorno (DRMEC). É demonstrada a discretização das equações integrais resultantes em elementos de contorno. Finalmente é apresentada o sistema de equações matriciais que governa o problema a ser resolvido.

### 4.2 Método de Elementos de Contorno

O teorema de Betti determina que o trabalho que forças de superfície  $t_\alpha^1$ , e forças de corpo  $f_\alpha^1$ , aplicadas em um sistema em equilíbrio, exercem nos deslocamentos  $u_\alpha^2$  de um segundo sistema, é igual ao trabalho que um conjunto de forças de superfície  $t_\alpha^2$ , e forças de corpo  $f_\alpha^2$ , aplicadas nesse segundo sistema em equilíbrio, exerce nos deslocamentos  $u_\alpha^1$  do primeiro sistema. Este teorema pode ser descrito na forma [20]:

$$\int_{\Gamma} t_i^1 u_i^2 d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^1 u_i^2 d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^2 u_i^1 d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^2 u_i^1 d\Omega. \quad (4.1)$$

O método de elementos de contorno, no caso da elasticidade, trabalha com a solução de

equações integrais de contorno que descrevem o comportamento mecânico de um determinado sistema. A identidade de Somigliana é uma formulação de integrais de contorno obtida através do teorema de Betti para problemas de elasticidade. Considerando que o segundo sistema é associado a soluções fundamentais e o primeiro sistema é o que deve ser resolvido, a identidade de Somigliana é dada por:

$$\int_{\Gamma} t_{\alpha} U_{\alpha\beta} d\Gamma + \int_{\Omega} f_{\alpha} U_{\alpha\beta} d\Omega = \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta} u_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha} d\Omega, \quad (4.2)$$

onde  $U_{\alpha\beta}$  e  $T_{\alpha\beta}$  são as soluções fundamentais de deslocamento e forças de superfície, dadas pelas eq.(2.14) e eq.(2.15) para elasticidade isotrópica e pelas eq.(3.51) e eq.(3.52) para elasticidade anisotrópica. Fazendo-se uso da propriedade da função delta de Dirac, o último termo da eq.(4.2) desaparece, resultando no sistema:

$$\int_{\Gamma} t_{\alpha} U_{\alpha\beta} d\Gamma + \int_{\Omega} f_{\alpha} U_{\alpha\beta} d\Omega = \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta} u_{\alpha} d\Gamma + c_{\alpha\beta} u_{\alpha}, \quad (4.3)$$

onde  $c_{ij}$  é 1 para pontos no domínio de sistema, zero para pontos externos ao sistema, e 0.5 para pontos no contorno do sistema [20], desde que este contorno seja suave.

A eq.(4.3) é uma equação analítica para análises de problemas de elasticidade que permite somente a avaliação de problemas muito simples. Para problemas complexos, é necessário o uso de métodos numéricos. O método numérico utilizado neste trabalho é o método de elementos de contorno, e consiste em dividir o contorno do sistema em análise em *nelem* elementos de contorno. Desta forma a eq.(4.3) pode ser escrita na forma:

$$c_{\alpha\beta} u_{\alpha} + \sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Gamma_e} T_{\alpha\beta} u_{\alpha} d\Gamma_e = \sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Gamma_e} t_{\alpha} U_{\alpha\beta} d\Gamma_e. \quad (4.4)$$

Aplicando a eq.(4.4) a cada um dos nós do contorno do sistema, obtém-se um sistema de equações algébricas na forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}, \quad (4.5)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  contém as integrais das soluções fundamentais  $U_{\alpha\beta}$  e  $T_{\alpha\beta}$ , e os vetores

$\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  contém os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície, conhecidos ou não. Através de manipulações algébricas, pode-se isolar as variáveis conhecidas em um vetor  $\mathbf{f}$ , de forma que a eq.(4.5) possa ser escrita na forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}, \quad (4.6)$$

onde o vetor  $\mathbf{x}$  contém todas as variáveis desconhecidas no contorno do problema.

### 4.3 Elementos de Contorno Contínuos e Descontínuos

Os vetores de deslocamentos nodais e forças de superfície nodais de um elemento quadrático são dados respectivamente por[20]:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varphi^1 & 0 & \varphi^2 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & \varphi^1 & 0 & \varphi^2 & 0 & \varphi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_2^1 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \varphi^1 & 0 & \varphi^2 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & \varphi^1 & 0 & \varphi^2 & 0 & \varphi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_2^1 \\ t_1^3 \\ t_2^3 \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

onde para elementos quadráticos contínuos (Fig.4.1),  $\varphi^i$  é dado por:

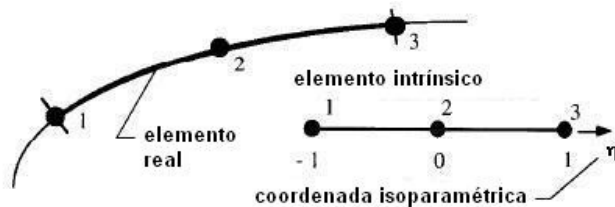


Figura 4.1: Elemento quadrático contínuo



$$\varphi^1 = 0.5\eta(\eta - 1)$$

$$\varphi^2 = 1 - \eta^2 \quad (4.9)$$

$$\varphi^3 = 0.5\eta(\eta + 1),$$

e para elementos quadráticos descontínuos (Fig.4.2) é dado por

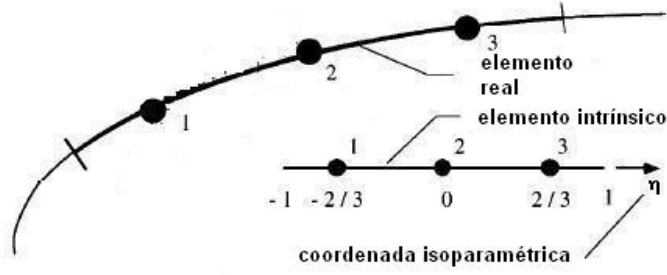


Figura 4.2: Elemento quadrático descontínuo

$$\varphi^1 = \frac{9}{8}\eta\left(\eta - \frac{2}{3}\right)$$

$$\varphi^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{4}{9} - \eta^2\right) \quad (4.10)$$

$$\varphi^3 = \frac{9}{8}\eta\left(\eta + \frac{2}{3}\right).$$

A avaliação da integral de contorno, dada pela eq.(4.4), requer o uso de um Jacobiano dado por:

$$Jac(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \frac{d\Gamma_e}{d\eta}, \quad (4.11)$$

logo,

$$d\Gamma_e = Jac(\eta) d\eta. \quad (4.12)$$

Substituindo a eq.(4.12) na eq.(4.4), pode-se resolver o problema através de integração numérica.

#### 4.4 Equações Integrais para Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito

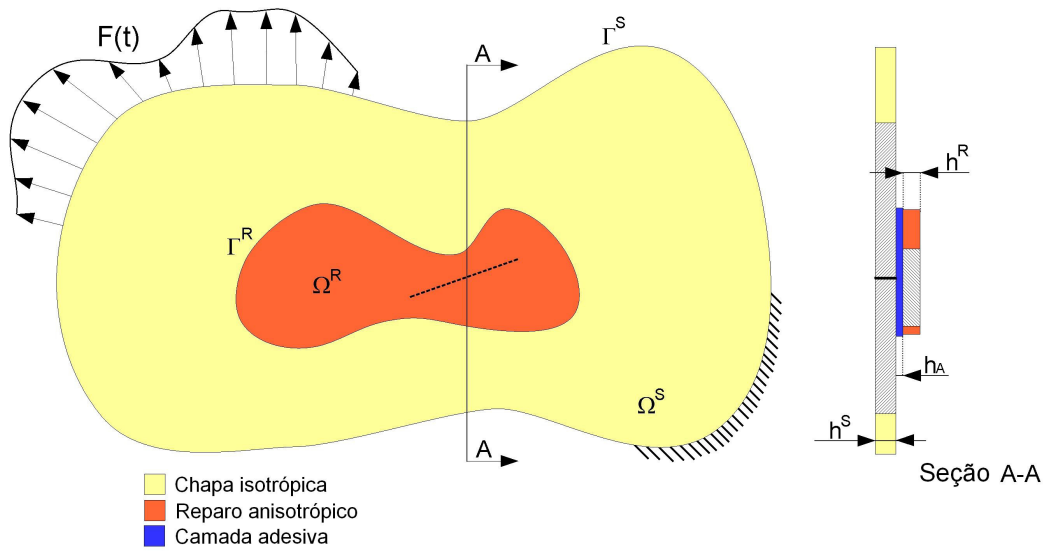


Figura 4.3: Chapa trincada com reparo composto colado

Dada uma chapa trincada reparada com material compósito colado (Fig.4.3), e considerando que ela está submetida a uma carga dinâmica qualquer, adiciona-se um termo para representar os efeitos de inércia de cada componente nas suas respectivas equações de equilíbrio [37]. A equação integral para a chapa ( $S$ ) em um ponto fonte ( $x'$ ) é dada por:

$$\begin{aligned}
c_{ij}^S(x') u_j^S(x') + \int_{\Gamma_S} T_{ij}^S(x', x) u_j^S(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma_S} U_{ij}^S(x', x) t_j^S(x') d\Gamma + \\
\frac{1}{h^S} \int_{\Omega_R} U_{ij}^S(x', x) b_j^S(x') d\Omega &+ \int_{\Omega_S} U_{ij}^S(x', x) \rho \ddot{u}_j^S(x') d\Omega \quad .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

De maneira similar, a equação integral para o reparo ( $R$ ) é dada por:

$$\begin{aligned}
c_{ij}^R(x') u_j^R(x') + \int_{\Gamma_R} T_{ij}^R(x', x) u_j^R(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma_R} U_{ij}^R(x', x) t_j^R(x') d\Gamma + \\
\frac{1}{h^R} \int_{\Omega_R} U_{ij}^R(x', x) b_j^R(x') d\Omega &+ \int_{\Omega_R} U_{ij}^R(x', x) \rho \ddot{u}_j^R(x') d\Omega \quad ,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde  $c_{ij}(x')$  é um coeficiente que depende da posição do ponto fonte ( $x'$ ) em relação ao contorno que está sendo integrado,  $t_j(x')$  e  $u_j(x')$  são forças de superfície e deslocamentos do sistema,  $T_{ij}(x', x)$  e  $U_{ij}(x', x)$  são soluções fundamentais de forças de superfície e deslocamentos,  $h$  e  $\rho$  são respectivamente a espessura e a densidade do material do componente que está sendo considerado. Os primeiros três termos da eq.(4.13) e da eq.(4.14) se referem a formulação clássica da elastoestática, o quarto termo se refere ao acoplamento da chapa e do reparo, e o último termo se refere ao efeito de forças de corpo devido às massas da chapa e do reparo submetidas à carga dinâmica. As reações de cisalhamento no adesivo  $b_j(x')$  serão calculadas através da diferença de deslocamento entre os pontos partilhados pela chapa e o reparo [37]:

$$b_j(x) = \frac{S_A}{h_A} \{u_j^S(x') - u_j^R(x')\} \quad , \tag{4.15}$$

onde  $S_A$  é o módulo de cisalhamento do material do adesivo e  $h_A$  é a espessura da camada do adesivo. É importante lembrar que os índices ( $S$ ) e ( $R$ ) nas eq.(4.13), eq.(4.14) e equações posteriores não implicam em qualquer tipo de somatório, e servem apenas para identificar o componente que está sendo considerado. É importante lembrar que as soluções fundamentais utilizadas são estáticas, sendo feitas modificações na equação de equilíbrio afim de se considerar os efeitos dinâmicos. Outro ponto importante é que, o acoplamento entre a chapa e o reparo não é rígido, sendo inserido na forma de uma força de corpo modificada.

## 4.5 Método Dual de Elementos de Contorno

O DMEC consiste em aplicar uma equação de deslocamentos em um dos lados da trinca e uma equação de forças de superfície no outro lado da trinca. Sendo a chapa o único componente trincado do sistema, este procedimento não será aplicado para o reparo. A equação de deslocamentos é dada pela eq.(4.13). A equação de forças de superfície é obtida através da diferenciação da eq.(4.13) [9], e é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} t_j^S(x') + n_i(x') \int_{\Gamma_S} S_{kij}^S(x', x) u_k^S(x') d\Gamma = n_i(x') \int_{\Gamma_S} D_{kij}^S(x', x) t_k^S(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^S} n_i(x') \int_{\Omega_R} D_{kij}^S(x', x) b_k^S(x') d\Omega + n_i(x') \int_{\Omega_S} D_{kij}^S(x', x) \rho \ddot{u}_k^S(x') d\Omega, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde  $S_{ijk}(x', x)$  e  $D(x', x)$  são combinações lineares das derivadas de  $T_{ij}(x', x)$  e  $U_{ij}(x', x)$  e  $n_i(x')$  é um vetor unitário normal ao contorno em que o ponto fonte se encontra.

A solução fundamental  $D_{kij}(x', x)$  é dada por [26]:

$$D_{kij}(x', x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}]. \quad (4.17)$$

A solução fundamental  $S_{kij}(x', x)$  é dada por [26]:

$$S_{kij}(x', x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} [t_1 + t_2 + t_3 + t_4], \quad (4.18)$$

onde os valores de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$  são dados por:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\ t_2 &= 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \\ t_3 &= (1-2\nu)(n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ t_4 &= -(1-4\nu)n_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Quando  $x' \rightarrow x$ ,  $S_{ijk}(x', x)$  apresenta hipersingularidade  $O(r^{-2})$ , e  $D(x', x)$  exibe forte singularidade  $O(r^{-1})$ , onde  $r(x', x)$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto de integração. A eq.(4.16) é conhecida como equação hipersingular para elasticidade plana, e, junto com a eq.(4.13), constitui a base do DMEC.

## 4.6 Método de Dupla Reciprocidade de Elementos de Contorno

As eq.(4.13) e eq.(4.14) são ambas compostas por integrais de domínio e integrais de contorno. A maneira mais fácil de se tratar integrais de domínio é a discretização do domínio em células e o uso de um método de integração, como por exemplo o método de Gauss. Porém, a discretização e integração direta do domínio faz o que o método de elementos de contorno perca seu maior atrativo, que é a possibilidade de se trabalhar somente com a discretização do contorno. Para se obter uma formulação integral de contorno é necessário transformar todas as integrais de domínio em integrais de contorno. O DRMEC permite aproximar uma integral de domínio por um somatório de integrais de contorno. Aplicar o DRMEC a um problema de chapas trincadas com reparo de material compósito colado, sob efeito de carga dinâmica, consiste em aproximar os efeitos de acoplamento e de inércia das eq.(4.13) e eq.(4.14) por[10]:

$$b_j(x') = \sum_{d=1}^D \alpha_k^d f_{jk}^d(x', x) \quad (4.20)$$

e

$$\rho \ddot{u}_j(x') = \sum_{e=1}^E \beta_k^e q_{jk}^e(x', x) \quad , \quad (4.21)$$

onde  $D$  é o número de pontos fonte espalhados pela chapa e pelo reparo e  $E$  é o número total de pontos fonte do componente que está sendo considerado. Os coeficientes  $\alpha_k^d$  e  $\beta_k^e$  são coeficientes de interpolação e  $f_{jk}^d(x', x)$  e  $q_{jk}^e(x', x)$  são funções de interpolação, inerentes ao DRMEC. Acoplando as eq.(4.20) e eq.(4.21) às equações eq.(4.13) e eq.(4.14), pode-se reescrever a equação de equilíbrio da chapa na forma:

$$c_{ij}^S(x') u_j^S(x') + \int_{\Gamma_S} T_{ij}^S(x', x) u_j^S(x') d\Gamma = \int_{\Gamma_S} U_{ij}^S(x', x) t_j^S(x') d\Gamma +$$

$$\frac{1}{h^S} \sum_{d=1}^D \alpha_k^d \int_{\Omega_R} U_{ij}^S(x^d, x) f_{jk}^{dS}(x', x) d\Omega + \sum_{e=1}^E \beta_k^e \int_{\Omega_S} U_{ij}^S(x^e, x) q_{jk}^{eS}(x', x) d\Omega, \quad (4.22)$$

e a equação de equilíbrio do reparo na forma:

$$\begin{aligned} c_{ij}^R(x') u_j^R(x') + \int_{\Gamma_R} T_{ij}^R(x', x) u_j^R(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma_R} U_{ij}^R(x', x) t_j^R(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^R} \sum_{d=1}^D \alpha_k^d \int_{\Omega_R} U_{ij}^R(x^d, x) f_{jk}^{dR}(x', x) d\Omega &+ \sum_{e=1}^E \beta_k^e \int_{\Omega_R} U_{ij}^R(x^e, x) q_{jk}^{eR}(x', x) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aplicando o mesmo procedimento de transformação de integrais de domínio em integrais de contorno, utilizado para se obter os primeiros termos das eq.(4.13) e eq.(4.14), a equação de equilíbrio da chapa pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} c_{ij}^S(x') u_j^S(x') + \int_{\Gamma_S} T_{ij}^S(x', x) u_j^S(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma_S} U_{ij}^S(x', x) t_j^S(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^S} \sum_{d=1}^D \alpha_k^d \left[ c_{ij}^S(x^d) \hat{u}_{kj}^{dS}(x^d) + \int_{\Gamma_R} U_{ij}^S(x^d, x) \hat{t}_{kj}^{dS}(x^d) d\Gamma - \int_{\Gamma_R} T_{ij}^S(x^d, x) \hat{u}_{kj}^{dS}(x^d) d\Gamma \right] & \\ + \sum_{e=1}^E \beta_k^e \left[ c_{ij}^S(x^e) \hat{u}_{kj}^{eS}(x^e) + \int_{\Gamma_S} U_{ij}^S(x^e, x) \hat{t}_{kj}^{eS}(x^e) d\Gamma - \int_{\Gamma_S} T_{ij}^S(x^e, x) \hat{u}_{kj}^{eS}(x^e) d\Gamma \right] &, \end{aligned} \quad (4.24)$$

e a equação de equilíbrio do reparo na forma:

$$\begin{aligned} c_{ij}^R(x') u_j^R(x') + \int_{\Gamma_R} T_{ij}^R(x', x) u_j^R(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma_R} U_{ij}^R(x', x) t_j^R(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^R} \sum_{d=1}^D \alpha_k^d \left[ c_{ij}^R(x^d) \hat{u}_{kj}^{dR}(x^d) + \int_{\Gamma_R} U_{ij}^R(x^d, x) \hat{t}_{kj}^{dR}(x^d) d\Gamma - \int_{\Gamma_R} T_{ij}^R(x^d, x) \hat{u}_{kj}^{dR}(x^d) d\Gamma \right] & \\ + \sum_{e=1}^E \beta_k^e \left[ c_{ij}^R(x^e) \hat{u}_{kj}^{eR}(x^e) + \int_{\Gamma_R} U_{ij}^R(x^e, x) \hat{t}_{kj}^{eR}(x^e) d\Gamma - \int_{\Gamma_R} T_{ij}^R(x^e, x) \hat{u}_{kj}^{eR}(x^e) d\Gamma \right] &. \end{aligned} \quad (4.25)$$

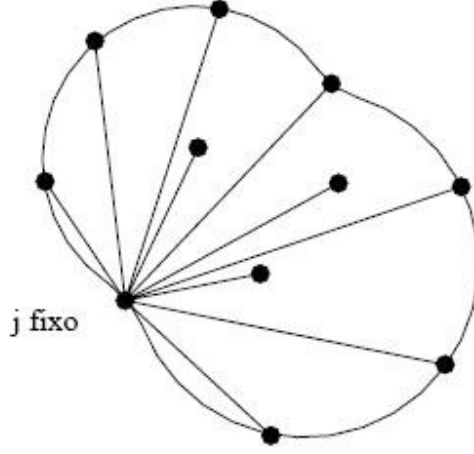


Figura 4.4: Representação das distâncias a serem calculadas pelas funções  $f$  e  $q$

As funções de interpolação  $f_{jk}^d(x^d, x)$  e  $q_{jk}^d(x^d, x)$  para a chapa isotrópica, são dadas por[10]:

$$f_{jk}^d(x^d, x) = (1 - r) \delta_{jk} \quad (4.26)$$

e

$$q_{jk}^e(x^e, x) = (1 - r) \delta_{jk} \quad . \quad (4.27)$$

Para o reparo anisotrópico, as mesmas funções de interpolação são dadas por [1]:

$$f_{jk}^d(x^d, x) = C_{jilm} [c r (r_{,m} r_{,i} \delta_{lk} + \delta_{im} \delta_{lk})] \quad (4.28)$$

e

$$q_{jk}^e(x^e, x) = C_{jilm} [c r (r_{,m} r_{,i} \delta_{lk} + \delta_{im} \delta_{lk})] \quad , \quad (4.29)$$

onde  $C_{jilm}$  é o tensor de constantes elásticas da equação de equilíbrio do reparo. A constante  $c$  é escolhida arbitrariamente após adotadas soluções particulares de deslocamentos  $\hat{u}_{kj}(x')$  [1].

As soluções particulares de deslocamento  $\hat{u}_{kj}$  e forças de superfície  $\hat{t}_{kj}$  para o caso isotrópico são dadas por:

$$\hat{u}_{kj} = \frac{1}{G} \left\{ \left[ \frac{1-2\nu}{5-4\nu} + \frac{r}{30(1-\nu)} \right] r^2 r_{,k} r_{,j} - \frac{9-10\nu}{90(1-\nu)} \delta_{kj} r^3 \right\} \quad (4.30)$$

e

$$\hat{t}_{kj} = \{s_1 + s_2 + s_3\} n_i \quad (4.31)$$

onde os termos  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  são dados por:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2\nu}{1-2\nu} (3Ar + 4Br^2 + 3Dr^2) r_{,j} \delta_{ki} \\ s_2 &= \left[ 2(Ar + Br^2) r_{,j} \delta_{ki} + (Ar + Br^2 + 3Dr^2) (r_{,k} \delta_{ji} + r_{,i} \delta_{kj}) \right] \\ s_3 &= 2Br^2 r_{,k} r_{,j} r_{,i} \end{aligned} \quad (4.32)$$

e as variáveis  $A$ ,  $B$  e  $D$  são dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-2\nu}{5-4\nu} \\ B &= \frac{1}{30(1-\nu)} \\ D &= \frac{10\nu-9}{90(1-\nu)}. \end{aligned}$$

Para o caso anisotrópico, as soluções particulares de deslocamento  $\hat{u}_{kj}$  e forças de superfície  $\hat{t}_{kj}$  são dadas resolvendo as equações:

$$\begin{aligned} f_{jk}^d &= C_{jilm} \hat{u}_{lk,im}^d \\ q_{jk}^e &= C_{jilm} \hat{u}_{lk,im}^e \\ \hat{t}_{kj} &= \sigma_{kjm} n_m \end{aligned} \quad (4.33)$$



onde  $\sigma_{kjm}$  é dado por:

$$\sigma_{kjm} = C_{kmrs} \left[ c \frac{3r^2}{2} (r_{,s} \delta_{jr} + r_{,r} \delta_{js}) \right] . \quad (4.34)$$

É importante lembrar que as soluções particulares de deslocamento  $\hat{u}_{kj}$  e forças de superfície  $\hat{t}_{kj}$  são obtidas, tanto para o caso isotrópico quanto para o caso anisotrópico, através das funções de interpolação  $f_{jk}^d$  e  $q_{jk}^e$ . Logo, o uso de funções de interpolação diferentes resultam em soluções particulares de deslocamento e forças de superfície diferentes.

## 4.7 Tensões Internas

Dada a equação integral que define o tensor de tensões em qualquer ponto do domínio da chapa [29]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x') + \int_{\Gamma} S_{kij}(x', x) u_k(x') d\Gamma &= (x') \int_{\Gamma} D_{kij}(x', x) t_k(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^S} (x') \int_{\Omega_R} D_{kij}(x', x) b_k(x') d\Omega &+ (x') \int_{\Omega_S} D_{kij}(x', x) \rho \ddot{u}_k(x') d\Omega . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Através do uso do DRMEC, pode-se determinar a distribuição de tensões no domínio da chapa através da equação:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x') + \int_{\Gamma} S_{kij}(x', x) u_k(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma} D_{kij}(x', x) t_k(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^S} \sum_{d=1}^D \alpha_l^d \left[ \sigma_{lij}(x^d) + \int_{\Gamma_R} D_{kij}(x^d, x) \hat{t}_{kj}^d(x^d) d\Gamma - \int_{\Gamma_R} S_{kij}(x^d, x) \hat{u}_{kj}^d(x^d) d\Gamma \right] &+ \\ \sum_{e=1}^E \beta_k^e \left[ \sigma_{lij} + \int_{\Gamma_S} D_{kij}(x^e, x) \hat{t}_{kj}^e(x^e) d\Gamma - \int_{\Gamma_S} S_{kij}(x^e, x) \hat{u}_{kj}^e(x^e) d\Gamma \right] &, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde, para a chapa isotrópica e para as funções de interpolação  $f$  e  $q$  descritas acima,  $\sigma_{lij}$  é dado por:

$$\sigma_{lij} = \frac{2(1-2\nu)}{5-4\nu} X r + \frac{1}{15(1-\nu)} Y r^2, \quad (4.37)$$

onde o termo X é dado por:

$$X = \left[ \frac{1+\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} r_{,l} + \frac{1}{2} (\delta_{li} r_{,j} + \delta_{lj} r_{,i}) \right], \quad (4.38)$$

e o termo Y é dado por:

$$Y = [(4-5\nu) (\delta_{li} r_{,j} + \delta_{lj} r_{,i}) - (1-5\nu) \delta_{ij} r_{,l} - r_{,l} r_{,i} r_{,j}]. \quad (4.39)$$

## 4.8 Tensões no Contorno

Considerando um nó pertencente a um determinado contorno, em que as direções dos vetores tangencial e normal coincidem com um sistema de referência local  $x'_1$  e  $x'_2$ , e que o sistema de coordenadas  $x'_1$  e  $x'_2$  encontra-se rotacionado em relação ao eixo de referência global  $x_1$  e  $x_2$  (Fig.4.5), pode-se escrever os valores de deslocamento e forças de superfície atuantes nesse ponto na forma [1]:

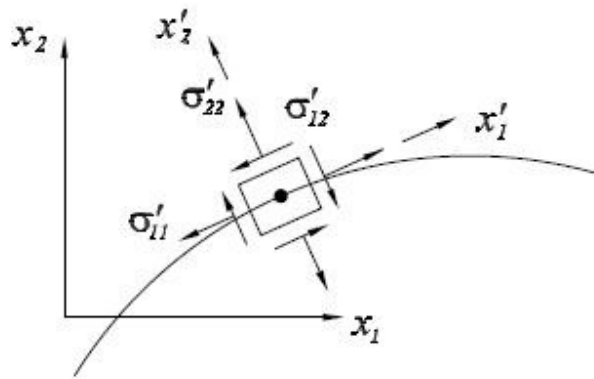


Figura 4.5: Tensões no contorno

$$u'_i = l_{ij} u_j \quad (4.40)$$

$$t'_i = l_{ij} t_j,$$

onde  $l_{ij}$  são cossenos diretores, e pode-se escrever o valor de duas componentes do tensor de tensões na forma:

$$\sigma'_{12} = t'_1 \quad (4.41)$$

$$\sigma'_{22} = t'_2.$$

Pode-se calcular o valor da componente do tensor de deformações  $\varepsilon'_{ij}$  na forma:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} (u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1}, \quad (4.42)$$

onde:

$$u'_{1,1} = \frac{du_1^1}{dx_1'} = \frac{du_1^1}{d\eta} \frac{d\eta}{dx_1'}. \quad (4.43)$$

Considerando um determinado trecho do contorno em análise, e fazendo-o  $\rightarrow 0$ , o comprimento infinitesimal de arco resultante  $ds$  pode ser escrito na forma:

$$ds = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2} = \sqrt{\left(\frac{dx_1'}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2'}{d\eta}\right)^2} d\eta. \quad (4.44)$$

Acoplando as eq.(4.44) e eq.(4.43), pode-se escrever:

$$\varepsilon'_{1,1} = \frac{du_1^1}{d\eta} \frac{d\eta}{ds}, \quad (4.45)$$

onde:

$$u_1 = \sum_{i=1}^3 \varphi^i u_1^i \quad (4.46)$$

e

$$\frac{du_1}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi^i}{d\eta} u_1^i, \quad (4.47)$$

onde  $\varphi$  são funções de forma. Pode-se então escrever a componente do tensor de deformações  $\varepsilon'_{ij}$  na forma:

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi^i}{d\eta} u_1^i. \quad (4.48)$$

Considerando a relação tensão deformação dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}' \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.49)$$

onde  $\mathbf{C}'$  é a matriz de relações constitutivas para o caso isotrópico no sistema de coordenadas  $x'_1$  e  $x'_2$ . Como a eq.(4.49) é um sistema linear de três incógnitas ( $\sigma'_{11}$ ,  $\varepsilon'_{22}$  e  $\varepsilon'_{12}$ ) e três valores conhecidos ( $\varepsilon'_{11}$ ,  $\sigma'_{22}$  e  $\sigma'_{22}$ ), esta pode ser facilmente resolvida. Uma vez resolvida a eq.(4.49), os tensores de tensões e deformações no sistema de coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  podem ser escritos na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.50)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.51)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a inversa da matriz de transformação de coordenadas.

## 4.9 Formulação de Contorno Discretizada

Para se obter a resposta elastodinâmica do sistema, os contornos da chapa e do reparo são divididos em elementos de contorno. Para modelar o contorno da chapa, são utiliza-

dos elementos quadráticos descontínuos, e para modelar o reparo, são utilizados elementos quadráticos contínuos. Por conveniência, quatro vetores de dimensão  $(2 \times E)$  são criados:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} u^{(i)} \quad ; \quad \hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varphi} \hat{u}^{(i)} \quad ; \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\varphi} t^{(i)} \quad ; \quad \hat{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\varphi} \hat{t}^{(i)} \quad , \quad (4.52)$$

onde  $\boldsymbol{\varphi}$  é um vetor de funções de forma quadráticas,  $\mathbf{u} (2 \times E)$  e  $\mathbf{t} (2 \times E)$  são vetores de deslocamentos e forças de superfície nodais do sistema, e  $\hat{\mathbf{u}} (2 \times E)$  e  $\hat{\mathbf{t}} (2 \times E)$  são vetores de soluções nodais particulares de deslocamentos e forças de superfície do sistema. Agrupando a eq.(4.52) com as eq.(4.24) e eq.(4.25), a equação de equilíbrio para a chapa pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & c_l^S \mathbf{u}_l^S + \sum_{j=1}^{Nelem_S} \left( \int_{\Gamma_{S_j}} T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \mathbf{u}_l^S = \sum_{j=1}^{Nelem_S} \left( \int_{\Gamma_{S_j}} U \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \mathbf{t}_l^S + \\ & \frac{1}{h^S} \sum_{d=1}^D \left[ c_l^S \hat{\mathbf{u}}_l^S + \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_j^{dS} - \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} U \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{t}}_j^{dS} \right] \boldsymbol{\alpha}_d^S \quad (4.53) \\ & \sum_{e=1}^E \left[ c_l^S \hat{\mathbf{u}}_l^S + \sum_{j=1}^{Nelem_S} \left( \int_{\Gamma_{S_j}} T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_j^{eS} - \sum_{j=1}^{Nelem_S} \left( \int_{\Gamma_{S_j}} U \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{t}}_j^{eS} \right] \boldsymbol{\beta}_e^S \quad , \end{aligned}$$

e a equação de equilíbrio do reparo pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & c_l^R \mathbf{u}_l^R + \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \mathbf{u}_l^R = \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} U \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \mathbf{t}_l^R + \\ & \frac{1}{h^R} \sum_{d=1}^D \left[ c_l^R \hat{\mathbf{u}}_l^R + \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_j^{dR} - \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} U \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{t}}_j^{dR} \right] \boldsymbol{\alpha}_d^R \quad (4.54) \\ & \sum_{e=1}^E \left[ c_l^R \hat{\mathbf{u}}_l^R + \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_j^{eR} - \sum_{j=1}^{Nelem_R} \left( \int_{\Gamma_{R_j}} U \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{t}}_j^{eR} \right] \boldsymbol{\beta}_e^R \quad . \end{aligned}$$

Chamando

$$\int_{\Gamma_j} U \varphi d\Gamma = \mathbf{G} \quad (4.55)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} T \varphi d\Gamma = \mathbf{H} \quad , \quad (4.56)$$

a equação de equilíbrio para a chapa pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}_{lj}^S \mathbf{u}_j^S = \mathbf{G}_{lj}^S \mathbf{t}_j^S + \frac{1}{h^S} \sum_{d=1}^D [\underline{\mathbf{H}}_{lj}^S \mathbf{u}_j^{dS} - \underline{\mathbf{G}}_{lj}^S \mathbf{t}_j^{dS}] \boldsymbol{\alpha}_d^S + \sum_{e=1}^E [\mathbf{H}_{lj}^S \mathbf{u}_j^{eS} - \mathbf{G}_{lj}^S \mathbf{t}_j^{eS}] \boldsymbol{\beta}_e^S \quad . \quad (4.57)$$

De forma similar, a equação de equilíbrio para o reparo pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}_{lj}^R \mathbf{u}_j^R = \mathbf{G}_{lj}^R \mathbf{t}_j^R + \frac{1}{h^R} \sum_{d=1}^D [\underline{\mathbf{H}}_{lj}^R \mathbf{u}_j^{dR} - \underline{\mathbf{G}}_{lj}^R \mathbf{t}_j^{dR}] \boldsymbol{\alpha}_d^R + \sum_{e=1}^E [\mathbf{H}_{lj}^R \mathbf{u}_j^{eR} - \mathbf{G}_{lj}^R \mathbf{t}_j^{eR}] \boldsymbol{\beta}_e^R \quad . \quad (4.58)$$

$\underline{\mathbf{H}}$  e  $\underline{\mathbf{G}}$  são similares a  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , porém obtidas pela integração no contorno do reparo. Os  $D$  vetores  $\boldsymbol{\alpha}_d$  ( $2 \times 1$ ) e os  $E$  vetores  $\boldsymbol{\beta}_e$  ( $2 \times 1$ ) podem ser acoplados em dois vetores  $\boldsymbol{\alpha}$  ( $2D \times 1$ ) e  $\boldsymbol{\beta}$  ( $2E \times 1$ ). Logo, as eq.(4.20) e eq.(4.21) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.59)$$

e

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta} \quad , \quad (4.60)$$

onde  $\mathbf{b}$  contém as reações de cisalhamento do adesivo para os pontos fonte compartilhados pela chapa e pelo reparo e  $\mathbf{p}$  contém as forças de corpo do componente para cada um de seus pontos fonte. A matriz  $\mathbf{F}$  contém os valores das função  $f_j^d(x', x)$  para os pontos fonte partilhados pela chapa e pelo reparo. De forma similar, a matriz  $\mathbf{Q}$  contém os valores da função  $q_j^e(x', x)$  para os pontos fonte de cada componente. A forma matricial para as equações de equilíbrio dos componentes são obtidas agrupando as eq.(4.59) e eq.(4.60) com as eq.(4.57) e eq.(4.58). Para os pontos fonte no contorno da chapa, ela pode ser escrita como:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^S \mathbf{u}_{\Gamma}^S - \mathbf{G}_{\Gamma}^S \mathbf{t}_{\Gamma}^S = \mathbf{A}_{\Gamma}^S \boldsymbol{\alpha}_{\Gamma}^S - \mathbf{B}_{\Gamma}^S \mathbf{p}_{\Gamma}^S \quad , \quad (4.61)$$

e para os pontos fonte no domínio da chapa pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}_\Omega^S - \mathbf{H}_\Omega^S \mathbf{u}_\Omega^S = \mathbf{A}_\Omega^S \boldsymbol{\alpha}_\Omega^S - \mathbf{B}_\Omega^S \mathbf{p}_\Omega^S . \quad (4.62)$$

De forma similar, para os pontos fonte no contorno do reparo, a forma matricial das equações de equilíbrio do sistema é dada por:

$$\mathbf{H}_\Gamma^R \mathbf{u}_\Gamma^R - \mathbf{G}_\Gamma^R \mathbf{t}_\Gamma^R = \mathbf{A}_\Gamma^R \boldsymbol{\alpha}_\Gamma^R - \mathbf{B}_\Gamma^R \mathbf{p}_\Gamma^R , \quad (4.63)$$

e para os pontos fonte no domínio do reparo é dada por:

$$\mathbf{u}_\Omega^R - \mathbf{H}_\Omega^R \mathbf{u}_\Omega^R = \mathbf{A}_\Omega^R \boldsymbol{\alpha}_\Omega^R - \mathbf{B}_\Omega^R \mathbf{p}_\Omega^R . \quad (4.64)$$

$\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são dadas por:

$$\mathbf{A} = \left[ \underline{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{U}}_D - \underline{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{T}}_D \right] \mathbf{F}^{-1} , \quad (4.65)$$

e

$$\mathbf{B} = \left[ \underline{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{U}}_E - \underline{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{T}}_E \right] \mathbf{Q}^{-1} . \quad (4.66)$$

$\hat{\mathbf{T}}$  e  $\hat{\mathbf{U}}$  são matrizes de soluções particulares de forças de superfícies e deslocamentos. Fazendo uso do DRMEC e da relação dada pela eq.(4.15) é possível reescrever o termo responsável pela interação chapa-reparo como:

$$\mathbf{u}_\Omega^S - \mathbf{u}^R = \frac{h_A}{S_A} \mathbf{F}^S \boldsymbol{\alpha}^S \quad \text{and} \quad \mathbf{u}^R - \mathbf{u}_\Omega^S = \frac{h_A}{S_A} \mathbf{F}^R \boldsymbol{\alpha}^R . \quad (4.67)$$

Finalmente, agrupando as equações da chapa e do reparo e utilizando a técnica de integração DRMEC, o sistema de equações que governa o problema é dada por:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{H} - \mathbf{A})^S & \mathbf{A}^S \\ \mathbf{A}^R & (\mathbf{H} - \mathbf{A})^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^S \\ \mathbf{u}^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}^S \mathbf{t}^S + \mathbf{B}^S \mathbf{p}^S \\ \mathbf{B}^R \mathbf{p}^R \end{Bmatrix} . \quad (4.68)$$

## 4.10 Considerações Adicionais

Dois fatores devem ser levados em consideração quanto ao uso conjugado do DMEC e do DRMEC. O primeiro deles é que, a aplicação do DRMEC na trinca modelada através do DMEC gera problemas de singularidade. Mais especificamente, as matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Q}$  não são inversíveis. Para se superar este problema, não se aplica o DRMEC à trinca [38, 1], porém deve-se adicionar pontos fonte próximos a região da trinca para se avaliar os efeitos de inércia e de acoplamento. Uma vez que é colocado um ponto fonte próximo a trinca (Fig.4.6), de forma a se conseguir bons resultados, deve-se garantir que [1]:

$$d \geq \frac{L}{2}. \quad (4.69)$$

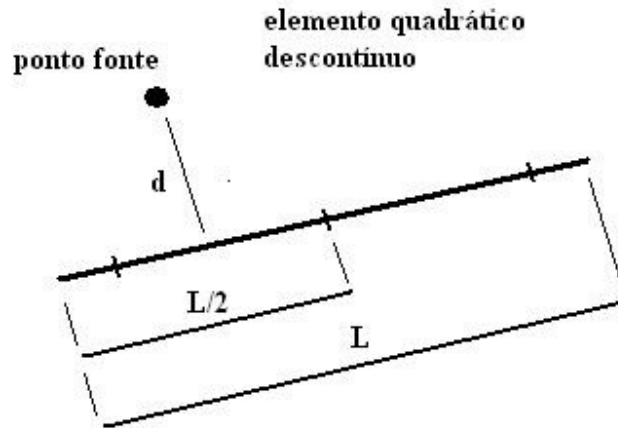


Figura 4.6: Esquema ilustrativo de aplicação de ponto fonte próximo a um elemento de trinca.

O outro ponto a ser levado em consideração é que, considerando as soluções fundamentais de deslocamentos para os casos isotrópico e anisotrópico, dadas por:

$$U^{iso} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

e

$$U^{aniso} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.71)$$



ambas, quando se considera um caso particular de quasi-isotropia no caso anisotrópico, deveriam ser iguais. Porém tem-se que:

$$U_{11}^{iso} \neq U_{11}^{aniso}$$

$$U_{12}^{iso} \cong U_{12}^{aniso}$$

$$U_{21}^{iso} \cong U_{21}^{aniso} \tag{4.72}$$

$$U_{22}^{iso} \cong U_{22}^{aniso}.$$

Isso significa que, a solução fundamental anisotrópica não se reduz à solução fundamental isotrópica quando o caso particular de quasi-isotropia é considerado. A desigualdade do termo da solução fundamental de deslocamentos  $U_{11}$  entre os casos de isotropia e quasi-isotropia faz com que não seja possível aplicar o DMEC e o DRMEC combinados com a solução fundamental de deslocamentos isotrópica. Para superar este problema, pode-se substituir a eq.(2.14) pela eq.(3.51), para o caso particular de quasi-isotropia, ao se montar a matriz  $\mathbf{G}$ .

## 4.11 Implementação Matricial

Após feita a discretização das equações de equilíbrio, a configuração da forma matricial da chapa é obtida acoplando as eq.(4.61) e eq.(4.62) como mostrado na Fig.(4.7)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{\Gamma\Gamma_s} & \text{Null}_{\Gamma_s\Omega_s} \\ H_{\Omega_s\Gamma_s} & I_{\Omega_s\Omega_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\Gamma_s} \\ u_{\Omega_s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{\Gamma\Gamma_s} \\ G_{\Omega_s\Gamma_s} \end{bmatrix} t_{\Gamma_s} = \\
 & \quad H (2E \times 2E) \quad u (2E \times 1) \quad G (2E \times 2\Gamma_s) \quad t (2\Gamma_s \times 1) = \\
 & \left[ \begin{bmatrix} H_{\Gamma\Gamma_R} & \text{Null}_{\Gamma_s\Omega_R} \\ H_{\Omega_s\Gamma_R} & \text{Null}_{\Omega_s\Omega_R} \\ H_{\Omega_R\Gamma_R} & I_{\Omega_R\Omega_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{\Gamma\Gamma_R} \\ G_{\Omega_s\Gamma_R} \\ G_{\Omega_R\Gamma_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}^{-1} \\ \Delta u \end{bmatrix} \right] \frac{G_A}{h_A} + \\
 & \quad H (2E \times 2D) \quad \hat{U} (2D \times 2D) \quad \hat{T} (2D \times 2D) \quad F (2D \times 2D) \quad \Delta u (2D \times 1) \\
 & \left[ \begin{bmatrix} H_{\Gamma\Gamma_s} & \text{Null}_{\Gamma_s\Omega_s} \\ H_{\Omega_s\Gamma_s} & I_{\Omega_s\Omega_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{\Gamma\Gamma_s} \\ G_{\Omega_s\Gamma_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} \\ p \end{bmatrix} \right] \\
 & \quad H (2E \times 2E) \quad \hat{U} (2E \times 2E) \quad G (2E \times 2\Gamma_s) \quad \hat{T} (2E \times 2E) \quad Q (2E \times 2E) \quad p (2E \times 1)
 \end{aligned}$$

Figura 4.7: Equação matricial de equilíbrio da chapa para análise dinâmica

De forma similar, a configuração da forma matricial do reparo é obtida acoplando as eq.(4.63) e eq.(4.64) como mostrado na Fig.(4.8)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|c|cc}
\begin{array}{cc} H_{\Gamma\Gamma} & \text{Null}_{\Gamma\Omega} \\ H_{\Omega\Gamma} & I_{\Omega\Omega} \end{array} & \begin{array}{c} u_{\Gamma} \\ u_{\Omega} \end{array} & - & \begin{array}{cc} G_{\Gamma\Gamma} & t_{\Gamma} \\ G_{\Omega\Gamma} & \end{array} & t_{\Gamma} (2\Gamma \times 1) \\
H (2D \times 2D) & u (2D \times 1) & & G (2D \times 2\Gamma) & \\
\end{array} \\
= \\
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{cc|c|cc}
\begin{array}{cc} H_{\Gamma\Gamma} & \text{Null}_{\Gamma\Omega} \\ H_{\Omega\Gamma} & I_{\Omega\Omega} \end{array} & \hat{U} & - & \begin{array}{cc} G_{\Gamma\Gamma} & \\ G_{\Omega\Gamma} & \end{array} & \hat{T} \\
H (2D \times 2D) & \hat{U} (2D \times 2D) & & G (2D \times 2\Gamma) & \hat{T} (2D \times 2D)
\end{array} \right] \frac{G_A}{h_A} \begin{array}{cc} F^{-1} & -\Delta u \\ F (2D \times 2D) & \Delta u (2D \times 1) \end{array} + \\
\left[ \begin{array}{cc|c|cc}
\begin{array}{cc} H_{\Gamma\Gamma} & \text{Null}_{\Gamma\Omega} \\ H_{\Omega\Gamma} & I_{\Omega\Omega} \end{array} & \hat{U} & - & \begin{array}{cc} G_{\Gamma\Gamma} & \\ G_{\Omega\Gamma} & \end{array} & \hat{T} \\
H (2D \times 2D) & \hat{U} (2D \times 2D) & & G (2D \times 2\Gamma) & \hat{T} (2D \times 2D)
\end{array} \right] \begin{array}{cc} Q^{-1} & p \\ F (2D \times 2D) & p (2D \times 1) \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Figura 4.8: Equação matricial de equilíbrio do reparo para análise dinâmica

Os índices  $\Gamma\Gamma$ ,  $\Omega\Gamma$ ,  $\Gamma\Omega$  e  $\Omega\Omega$  indicam a posição do ponto fonte em análise e seu local de integração. O símbolo a esquerda se refere a localização do ponto fonte, e o símbolo a direita se refere ao contorno em que ele está sendo integrado. Os índices  $\Omega_{S-D}\Gamma_R$  e  $\Omega_D\Gamma_R$  se referem a pontos fonte no domínio da chapa respectivamente não partilhados e partilhados pelo reparo, integrados no contorno do reparo.

Os sub-índices  $S$  e  $R$  se referem a que componente pertence o contorno ou domínio em análise. Por exemplo, considerando o índice  $\Gamma_S\Gamma_R$ , lê-se, pontos fonte presentes no contorno da chapa e integrados no contorno do reparo.

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  para chapa, dadas pelas eq.(4.65) e eq.(4.66) respectivamente, são mostradas nas Fig.(4.9) e Fig.(4.10)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{H}_{\Gamma\Gamma_R} & \text{Null}_{\Gamma_S\Omega_R} \\ \mathbf{H}_{\Omega_S\Gamma_R} & \text{Null}_{\Omega_S\Omega_R} \\ \mathbf{H}_{\Omega_D\Gamma_R} & \mathbf{I}_{\Omega_D\Omega_R} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{U}} (2D \times 2D) \end{array} & - & \begin{array}{c} \mathbf{G}_{\Gamma\Gamma_R} \\ \mathbf{G}_{\Omega_S\Gamma_R} \\ \mathbf{G}_{\Omega_D\Gamma_R} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{T}} (2D \times 2D) \end{array} \end{array} \right]$$

$\mathbf{H} (2E \times 2D)$ 
 $\mathbf{G} (2E \times 2\Gamma)$

Figura 4.9: Matriz A da equação de equilíbrio dinâmico da chapa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{H}_{\Gamma\Gamma_S} & \text{Null}_{\Gamma_S\Omega_S} \\ \mathbf{H}_{\Omega_S\Gamma_S} & \mathbf{I}_{\Omega_S\Omega_S} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{U}} (2E \times 2E) \end{array} & - & \begin{array}{c} \mathbf{G}_{\Gamma\Gamma_S} \\ \mathbf{G}_{\Omega_S\Gamma_S} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{T}} (2E \times 2E) \end{array} \end{array} \right]$$

$\mathbf{H} (2E \times 2E)$ 
 $\mathbf{G} (2E \times 2\Gamma_S)$

Figura 4.10: Matriz B da equação de equilíbrio dinâmico da chapa

Para o reparo, as matrizes A e B são idênticas e são mostradas na Fig.(4.11)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{H}_{\Gamma_R\Gamma_R} & \text{Null}_{\Gamma_R\Omega_R} \\ \mathbf{H}_{\Omega_R\Gamma_R} & \mathbf{I}_{\Omega_R\Omega_R} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{U}} (2D \times 2D) \end{array} & - & \begin{array}{c} \mathbf{G}_{\Gamma_R\Gamma_R} \\ \mathbf{G}_{\Omega_R\Gamma_R} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{T}} (2D \times 2D) \end{array} \end{array} \right]$$

$\mathbf{H} (2D \times 2D)$ 
 $\mathbf{G} (2D \times 2\Gamma_R)$

Figura 4.11: Matrizes A e B da equação de equilíbrio dinâmico do reparo

Toma-se como exemplo um caso simplificado mostrado na Fig.(4.12), onde os pontos fonte 1, 2, 3, e 4 pertencem ao contorno da chapa, os pontos fonte 9, 10, 11, 12 pertencem ao contorno

do reparo, e o ponto fonte 13 pertence ao domínio do reparo. Para este caso, o número de pontos fonte partilhados pela chapa e o reparo ( $D$ ) é 5. O numero total de pontos fonte ( $E$ ) da chapa é 13, e do reparo é 5. Pode-se então dimensionar as equações matriciais mostradas nas Fig.(5.1) e Fig.(5.2) e as matrizes A, B, H e G que compõem a eq.(4.68).

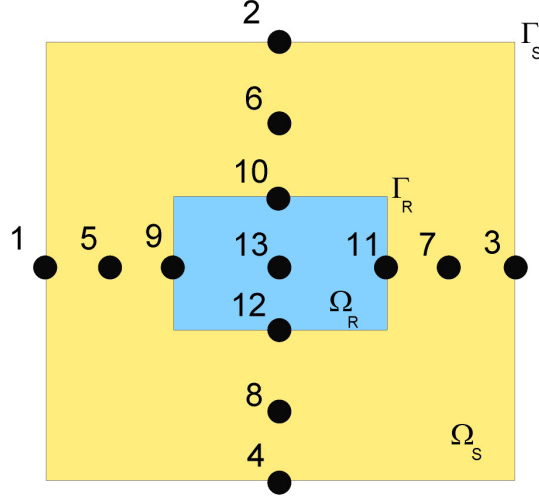


Figura 4.12: Exemplo simplificado de chapa com reparo

## 4.12 Procedimento de Solução no Domínio do Tempo

Para resolver o problema mostrado na eq (4.68), um procedimento de solução transiente, proposto por Houbolt [14], é utilizado. Considerando que os efeitos de inércia dos componentes são devidos a um campo de aceleração dado por:

$$\mathbf{p} = \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta} \quad , \quad (4.73)$$

a eq.(4.68) pode ser reescrita para um instante de tempo  $\tau + \Delta\tau$  como:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{H} - \mathbf{A})^S & \mathbf{A}^S \\ \mathbf{A}^R & (\mathbf{H} - \mathbf{A})^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\tau+\Delta\tau}^S \\ \mathbf{u}_{\tau+\Delta\tau}^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}^S \mathbf{t}_{\tau+\Delta\tau}^S + \mathbf{B}^S \rho^S \ddot{\mathbf{u}}_{\tau+\Delta\tau}^S \\ \mathbf{B}^R \rho^R \ddot{\mathbf{u}}_{\tau+\Delta\tau}^R \end{Bmatrix} \quad . \quad (4.74)$$

De forma a se proceder com a integração no domínio do tempo, o intervalo de tempo  $\tau$  é

dividido em  $N$  espaços de tempo, onde:

$$\tau = N\Delta\tau \quad . \quad (4.75)$$

Assumindo que os resultados da eq.(4.74) são conhecidos nos instantes de tempo  $\tau = 0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots$ , a aceleração no instante  $\tau + \Delta\tau$  é aproximada pela expressão [14]:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau^2} \left( 2\mathbf{u}_{\tau+\Delta\tau} - 5\mathbf{u}_{\tau} + 4\mathbf{u}_{\tau-\Delta\tau} - \mathbf{u}_{\tau-2\Delta\tau} \right) \quad . \quad (4.76)$$

Agrupando eq.(4.74) e eq.(4.76), o sistema de equações que governa o problema pode ser reescrito como:

$$\left[ \begin{array}{cc} [(\mathbf{H} - \mathbf{A})^S - \rho^S \frac{2}{\Delta\tau^2} \mathbf{B}^S] & \mathbf{A}^S \\ \mathbf{A}^R & [(\mathbf{H} - \mathbf{A})^R - \rho^R \frac{2}{\Delta\tau^2} \mathbf{B}^R] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_{\tau+\Delta\tau}^S \\ \mathbf{u}_{\tau+\Delta\tau}^R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}^S \mathbf{t}_{\tau+\Delta\tau}^S + \mathbf{B}^S \rho^S \frac{1}{\Delta\tau^2} \left( -5\mathbf{u}_{\tau}^S + 4\mathbf{u}_{\tau-\Delta\tau}^S - \mathbf{u}_{\tau-2\Delta\tau}^S \right) \\ \mathbf{B}^R \rho^R \frac{1}{\Delta\tau^2} \left( -5\mathbf{u}_{\tau}^R + 4\mathbf{u}_{\tau-\Delta\tau}^R - \mathbf{u}_{\tau-2\Delta\tau}^R \right) \end{array} \right\} \quad , \quad (4.77)$$

e deve ser resolvido para os  $N$  instantes de tempo  $\Delta\tau$ . É importante lembrar que para cada um dos instantes de tempo  $\Delta\tau$ , o valor de  $\mathbf{t}_{\tau+\Delta\tau}$  é conhecido, já que os valores da carga dinâmica aplicada para cada um dos instantes de tempo são dados do problema.

## Capítulo 5

# Cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão

### 5.1 Introdução

Este capítulo trata da análise de fatores de intensidade de tensão dinâmicos de chapas trincadas reparadas com material compósito colado. Inicialmente é feita uma revisão da teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Posteriormente, descreve-se os métodos de avaliação de Fatores de Intensidade de Tensão Dinâmicos utilizados no trabalho.

### 5.2 Abordagem de Campos de Irwin

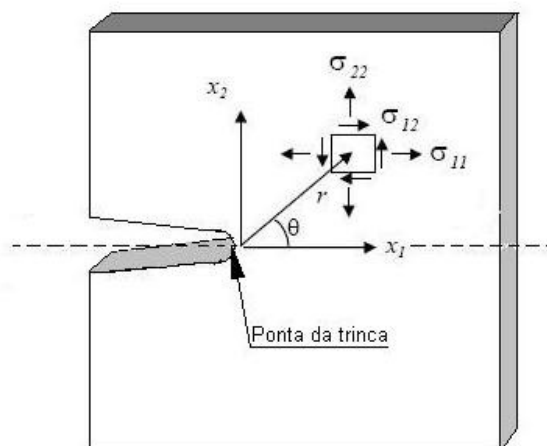


Figura 5.1: Campo de tensões em torno da trinca.

Considerando uma chapa trincada isotrópica carregada sob estado plano de tensão (Fig.5.1), o campo de tensões ao redor da trinca pode ser descrito na forma[15]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(r, \theta) + \text{outros termos}, \quad (5.1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões do material a uma distância  $r$  da ponta da trinca,  $K$  é o fator de intensidade de tensão e  $f_{ij}$  são funções trigonométricas conhecidas. Quando,  $r \rightarrow 0$ , o primeiro termo da equação passa a ser muito mais substancial que os termos seguintes da equação, podendo assim serem desprezados.

### 5.3 Modos de Fratura

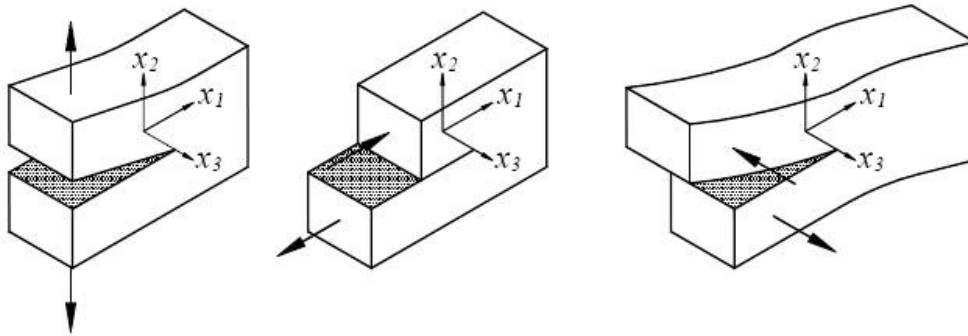


Figura 5.2: Modos de Fratura.

Modos de fratura são determinados através do deslocamento relativo das faces da trinca (Fig.5.2). Em estado plano de tensão, existem apenas dois modos de fratura (I e II). O Fator de intensidade de tensão, mostrado na eq.(5.1), pode ser decomposto de acordo com o modo de fratura associado a ele. Desta forma,  $K_I$  corresponde ao fator de intensidade de tensão relacionado ao modo de fratura I e  $K_{II}$  corresponde ao fator de intensidade de tensão relacionado ao modo de fratura II.



## 5.4 Campos de Tensão em Torno da Trinca

Assumindo para  $r$ , valores próximos de zero, de forma a se considerar somente o primeiro termo da eq.(5.1), e considerando que o eixo de coordenadas  $x_1$  é paralelo à face da trinca e que o eixo de coordenadas  $x_2$  é perpendicular à face da trinca, o campo de tensões próximo a ponta da trinca é dado por [15]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned} \quad (5.2)$$

O campo de deslocamentos, para o mesmo caso, é dado por:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_2 &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),\end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material e  $\nu$  é o módulo de Poisson do material. O tensor de tensões nas proximidades da trinca pode ser dividido na forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}, \quad (5.4)$$

assim sendo,  $\sigma_{ij}^I$  é dado por:

$$\sigma_{11}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{22}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5.5)$$

$$\sigma_{12}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

e  $\sigma_{ij}^{II}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{II} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22}^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad . \\ \sigma_{12}^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

De forma similar, o campo de deslocamentos em torno da trinca pode ser dividido na forma:

$$u_i = u_i^I + u_i^{II}, \quad (5.7)$$

onde  $u_{ij}^I$  é dado por:

$$\begin{aligned} u_1^I &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_2^I &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

e  $u_{ij}^{II}$  é dado por:

$$\begin{aligned} u_1^{II} &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_2^{II} &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 5.5 Desacoplamento do Tensor de Tensões e Campo de Deslocamentos

Uma vez que deseja-se obter os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ , deve-se realizar o desacoplamento do campo de deslocamentos e do tensor de tensões em volta da trinca. Considerando que o tensor de tensões e o campo de deslocamentos encontram-se no mesmo sistema de referência da trinca e que estes podem ser divididos em suas componentes simétricas e anti-simétricas (Fig.5.3), tem-se que as componentes simétricas,  $u_i$ , e anti-simétricas,  $u'_i$ , do campo de deslocamentos são dadas por [30]:

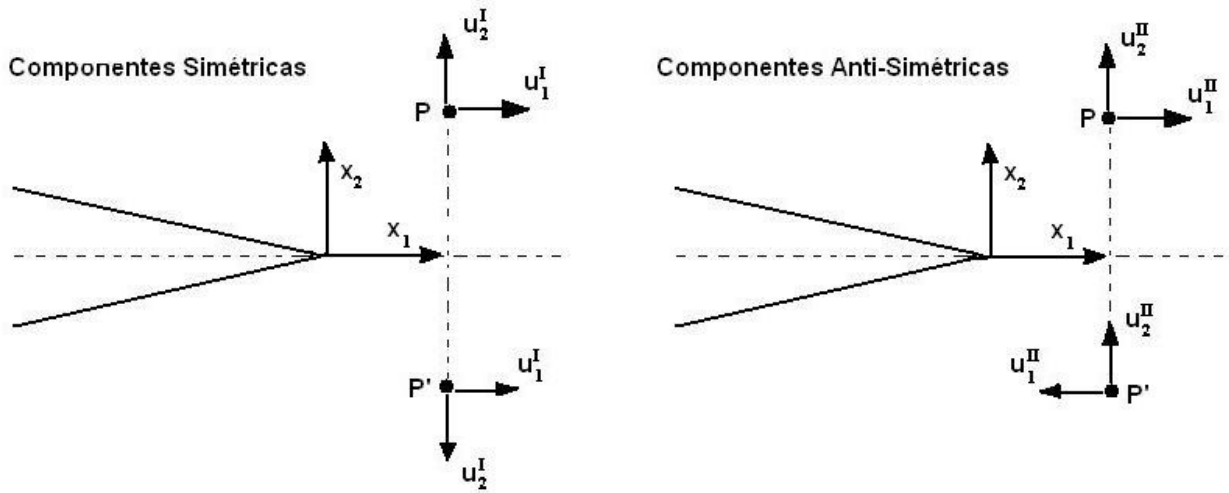


Figura 5.3: Desacoplamento do campo de deslocamentos.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^I + u_1^{II} \\ u_2^I + u_2^{II} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^I - u_1^{II} \\ -u_2^I + u_2^{II} \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Acoplando os termos simétricos e anti-simétricos da eq.(5.10), tem-se que o campo de deslocamentos desacoplado é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u'_1 \\ -u'_2 + u_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -u_1^1 + u_1 \\ u_2 + u'_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.11)$$

De forma similar, as componentes simétricas,  $\sigma_{ij}$ , e anti-simétricas,  $\sigma'_{ij}$ , do tensor de tensões, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I + \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^I + \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^I + \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I - \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^I - \sigma_{22}^{II} \\ -\sigma_{12}^I + \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix}, \quad (5.12)$$

e o tensor de tensões desacoplado é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} + \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} + \sigma'_{12} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} - \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} - \sigma'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (5.13)$$

## 5.6 Crack Tip Opening Displacement

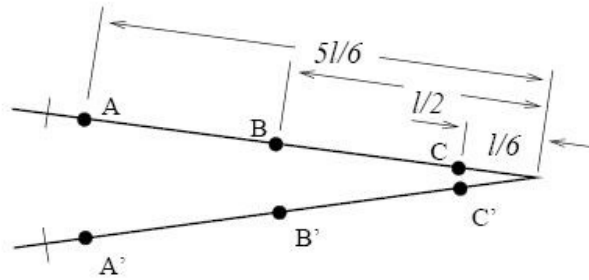


Figura 5.4: Elementos da ponta da trinca.

Considerando um campo de deslocamentos conhecido ao redor da trinca, tendo as relações entre os fatores de intensidade de tensão e deslocamentos dadas pelas eq.(5.8) e eq.(5.9), e fazendo  $\theta \rightarrow \pi$ , obtém-se  $K_I$  na forma [12, 38]:

$$K_I = (u_2 - u'_2) \frac{G}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}}, \quad (5.14)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade do material,  $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  para estado plano de

tensão e  $k = (3 - 4\nu)$  para estado plano de deformação, e  $(u_i - u'_i)$  é a diferença de deslocamento entre pontos coincidentes da face da trinca. De maneira similar, obtém-se  $K_{II}$  na forma:

$$K_{II} = (u_1 - u'_1) \frac{G}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}}. \quad (5.15)$$

Utilizando como referência para cálculo de fatores de intensidade de tensão, o nó central dos elementos na ponta da trinca (Fig.5.4),  $K_I$  e  $K_{II}$  são dados por:

$$K_I^{BB'} = (u_2^B - u_2^{B'}) \frac{G}{k+1} 2\sqrt{\frac{\pi}{l}}, \quad (5.16)$$

e

$$K_{II}^{BB'} = (u_1^B - u_1^{B'}) \frac{G}{k+1} 2\sqrt{\frac{\pi}{l}}. \quad (5.17)$$

Uma forma alternativa de cálculo para fatores de intensidade de tensão consiste na interpolação de resultados obtidos nos nós  $BB'$  e  $CC'$ , onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são dados por:

$$K_I^{BB'CC'} = \left(4(u_2^B - u_2^{B'}) + u_2^C - u_2^{C'}\right) \frac{G}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}}, \quad (5.18)$$

e

$$K_{II}^{BB'CC'} = \left(4(u_1^B - u_1^{B'}) + u_1^C - u_1^{C'}\right) \frac{G}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}}. \quad (5.19)$$

## 5.7 Integral $\hat{J}$

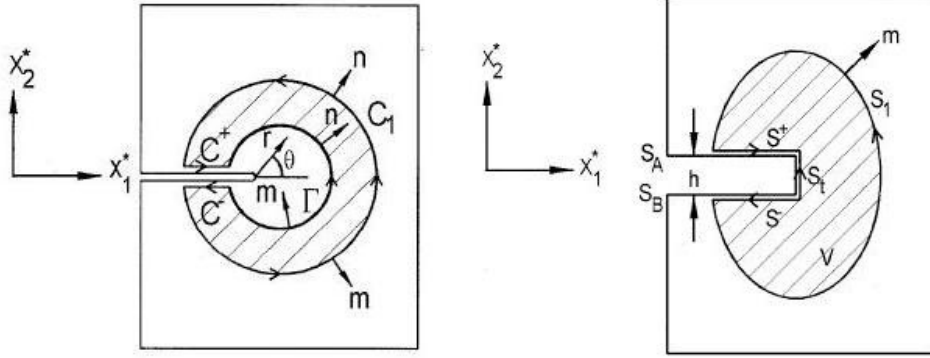


Figura 5.5: Limites de Integração para Integral J [6].

A Mecânica da Fratura Linear Elástica só é válida quando a deformação não linear do material é confinada em uma pequena região ao redor da ponta da trinca. Em muitas situações é inviável caracterizar o comportamento da fratura através da MFLE, assim sendo, um conceito alternativo deve ser aplicado. A Mecânica da Fratura Elasto Plástica aplica-se em várias dessas situações. Dentre os parâmetros mais utilizados se encontram o CTOD (Crack tip opening displacement), a Integral J e a Integração por Energia de Domínio (EDI). Esses parâmetros descrevem condições da trinca para materiais elastoplásticos e podem ser utilizados como critério de falha. Dado o exemplo simplificado pela Fig.(5.5), a taxa de alívio de energia potencial armazenada no sistema por unidade de trinca, sem considerar forças de corpo atuando nas proximidades da ponta da trinca, é dada por [6, 35]:

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( w \delta_{ik} - \sigma_{ij}^* u_{j,k}^* \right) n_i dC \quad , \quad (5.20)$$

onde  $w$  é dado por:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (5.21)$$

e corresponde a energia de deformação por unidade de área.  $\sigma_{ij}^*$  e  $u_{j,1}^*$  são respectivamente as

componentes cartesianas de tensão e deslocamento no sistema local  $x^*$  e  $dC$  é o diferencial do arco de integração dado pela Fig.(5.5). Uma vez que se consideram as forças de corpo atuando nas proximidades da ponta da trinca, termos devem ser adicionado a eq.(5.20). Desta forma, a integral  $J$  para o caso de uma chapa trincada com reparo de material compósito é dada por [13]:

$$\hat{J} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma} (w\delta_{ik} - \sigma_{ij}^* u_{j,k}^*) n_i dC + \int_V \rho \ddot{u}_i^* u_{i,k}^* dV + \frac{1}{h_S} \int_V b_i^* u_{i,k}^* dV \right), \quad (5.22)$$

onde  $h_S$  é a espessura da chapa,  $b_i^*$  são as forças de corpo atuantes nas proximidades da trinca referentes ao acoplamento entre chapa e reparo e  $\rho \ddot{u}_i^*$  são as forças de corpo atuantes nas proximidades da trinca referentes às forças de inércia da chapa.

## 5.8 Integração por Energia de Domínio

Considerado que  $\delta l$  é o avanço da trinca na direção normal a face da trinca  $S_t$ , a energia potencial liberada em um segmento de avanço da trinca é dada por:

$$-\delta\pi = J\Delta a, \quad (5.23)$$

onde  $\Delta a l_k$  é o avanço da trinca na direção  $x_k^*$ .

Fazendo com que  $h \rightarrow 0$ , temos as superfícies  $S_a$  e  $S_b$  com normais  $m_k$  ao longo de  $x_2^*$  e  $S_t$  com normal  $m_k$  ao longo de  $x_1^*$ . Assim sendo,  $\delta l$  é dado por:

$$\Delta a l_k m_k = \delta l. \quad (5.24)$$

Restringindo  $l_k$  a permanecer no plano  $S_t$  e a ser função de  $x_1^*$ , tem-se que:

$$J\Delta a = \Delta a \int_{S_t} (\sigma_{ij}^* u_{j,k}^* - w\delta_{ki}) l_k m_i dS. \quad (5.25)$$

Para desenvolver uma integral de domínio, primeiro se leva em consideração a área  $S$  formada pelas superfícies  $S^+$ ,  $S^-$ ,  $S_t$  e  $S_1$ . Depois, leva-se em consideração a função:

$$q_k = l_k \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \quad q_k = 0 \quad \text{em } S_1, \quad (5.26)$$

e levando em consideração também que  $q_k$  é suficientemente suave na área  $S$ . Usando a eq.(5.26), pode-se reescrever a eq.(5.25). na forma:

$$J = \int_S \left( \sigma_{ij}^* u_{j,k}^* - w \delta_{ki} \right) m_i q_k dS - \int_{S^+ + S^-} \sigma_{2j}^* u_{j,k}^* m_2 q_k dS. \quad (5.27)$$

Para se chegar à eq.(5.27), leva-se em consideração que  $m_1 = 0$  e que  $m_2 = \pm 1$  nas faces da trinca. Nota-se também que  $q_2 = l_2 = 0$  em todo o sistema. Na ausência de forças de superfície nas faces da trinca, o último termo da eq.(5.27) desaparece. Aplicando o teorema da divergência de Green para contornos fechados, O valor da taxa de alívio de energia potencial armazenada no sistema por unidade de trinca (J) é dada por:

$$J = \int_V \left( \sigma_{ij}^* u_{j,k}^* - w \delta_{ki} \right) q_{k,i} dV. \quad (5.28)$$

É importante perceber que a integração realizada na eq.(5.28) não depende de caminhos de integração, logo, qualquer área pode ser escolhida para avaliar J. Levando em consideração os efeitos de forças de inércia e de acoplamento entre chapa e reparo, a eq.(5.28) recebe o acréscimo de dois termos sendo escrita na forma:

$$\hat{J}_{EDI} = \int_V \left( \sigma_{ij}^* u_{j,k}^* - w \delta_{ki} \right) q_{k,i} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i^* u_{i,k}^* dV + \frac{1}{h_S} \int_V b_i^* u_{i,k}^* dV. \quad (5.29)$$

Como pode-se perceber, as eq.(5.22) e eq.(5.29) são equivalentes, sendo que a diferença entre as duas é dada pelo o modo de integração do primeiro termo.

## 5.9 Função q Quadrática

A função auxiliar  $q_k$  é introduzida de forma a se modelar o avanço virtual da trinca. Como o avanço virtual da trinca pode adotar forma, a única restrição para a função  $q_k$  é que ela seja suficientemente suave no domínio de integração  $V$ , uma vez que é necessária a sua diferenciação. Uma forma de  $q_k$ , que tem sido utilizada com sucesso, é dada por [6]:



$$q_k(x^*) = \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (5.30)$$

onde  $r$  é a distância da ponta da trinca no plano  $x_1^* - x_2^*$  como mostrado na Fig.(5.5), e  $r_0$  é o raio da área de integração.

## 5.10 Isoparametrização e Implementação Computacional

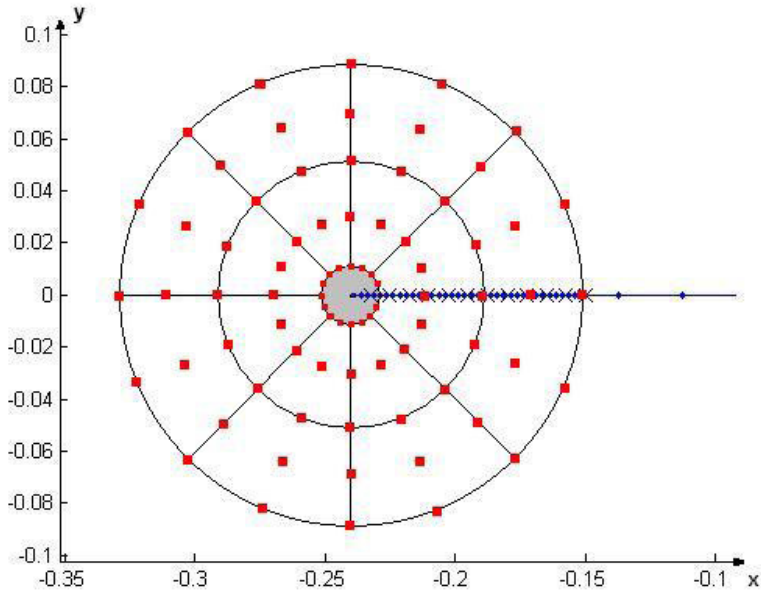


Figura 5.6: Distribuição de células na ponta da trinca.

Uma vez em posse da eq.(5.29), deve-se realizar a integral de área ao redor da ponta da trinca afim de se obter o valor de  $\bar{J}_{EDI}$ . Uma alternativa é a isoparametrização das células criadas ao redor da ponta da trinca em elementos biquadráticos (Fig.5.6), podendo assim satisfazer a condição de derivação de  $q_k$ . Neste trabalho é utilizado um conjunto de elementos isoparamétricos biquadráticos de 9 nós (Fig.5.7), através dos quais, as componentes de tensão, deformação, deslocamento e suas derivadas são aproximadas por produtos das funções de interpolação  $\Phi_i$  e os valores nodais de  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$  e  $\partial u_i / \partial x_j$ .

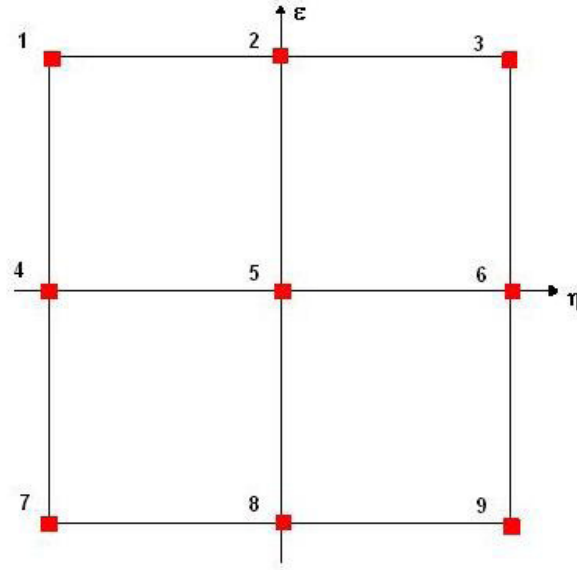


Figura 5.7: Elemento isoparamétrico bi-quadrático.

Sabendo que os valores de  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $\partial u_i / \partial x_j$  e  $q_k$  são conhecidos para todos os 9 nós de cada célula, o valor dessas variáveis pode ser determinado em qualquer ponto de qualquer célula.  $q_k$  em qualquer lugar do domínio de uma célula é da do por:

$$q_k = \sum_{i=1}^{NCells} \Phi_i Q_i^k, \quad (5.31)$$

onde  $\Phi_i$  são as funções de interpolação dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 0.25 * (\varepsilon - 1) \varepsilon (\eta + 1) \eta \\ \Phi_2 &= 0.5 * (\varepsilon - 1) (\varepsilon + 1) (\eta + 1) \eta \\ \Phi_3 &= 0.25 * (\varepsilon + 1) \varepsilon (\eta + 1) \eta \\ \Phi_4 &= 0.5 * (\varepsilon - 1) \varepsilon (\eta - 1) (\eta + 1) \\ \Phi_5 &= (\varepsilon - 1) (\varepsilon + 1) (\eta - 1) (\eta + 1) \\ \Phi_6 &= 0.5 * (\varepsilon + 1) \varepsilon (\eta - 1) (\eta + 1) \\ \Phi_7 &= 0.25 * (\varepsilon - 1) \varepsilon (\eta - 1) \eta \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\Phi_8 = 0.5 * (\varepsilon - 1) (\varepsilon + 1) (\eta - 1) \eta$$

$$\Phi_9 = 0.25 * (\varepsilon + 1) \varepsilon (\eta - 1) \eta$$

e  $Q_i^k$  são os valores de  $q_k$  em cada um dos nós da célula em análise. Como dito anteriormente,  $Q_i^k = 0$  se o  $i$ -ésimo nó pertencer ao contorno do domínio discretizado,  $Q_i^k = 1$  na ponta da trinca, e os valores intermediários devem ser interpolados pela eq.(5.30). Além disso, como a propagação virtual da trinca é restrita a direção da normal de sua face frontal  $S_t$ , os termos  $Q_i^2$  e  $Q_i^3$  desaparecem, logo:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{N_{Cells}} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right). \quad (5.33)$$

As derivadas das funções de interpolação  $\partial \Phi / \partial \varepsilon$  e  $\partial \Phi / \partial \eta$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon} &= 0.25 * (2\varepsilon - 1) (\eta + 1) \eta \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varepsilon} &= \varepsilon (\eta + 1) \eta \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varepsilon} &= 0.25 * (2\varepsilon + 1) (\eta + 1) \eta \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varepsilon} &= 0.5 * (2\varepsilon - 1) (\eta - 1) (\eta + 1) \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varepsilon} &= 2\varepsilon (\eta - 1) (\eta + 1) \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varepsilon} &= 0.5 * (2\varepsilon + 1) (\eta - 1) (\eta + 1) \\ \frac{\partial \Phi_7}{\partial \varepsilon} &= 0.25 * (2\varepsilon - 1) (\eta - 1) \eta \\ \frac{\partial \Phi_8}{\partial \varepsilon} &= \varepsilon (\eta - 1) \eta \\ \frac{\partial \Phi_9}{\partial \varepsilon} &= 0.25 * (2\varepsilon + 1) (\eta - 1) \eta \quad , \end{aligned} \quad (5.34)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} &= 0.25 * (\varepsilon - 1) \varepsilon (2\eta + 1) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} &= 0.5 * (\varepsilon - 1) (\varepsilon + 1) (2\eta + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} &= 0.25 * (\varepsilon + 1) \varepsilon (2\eta + 1) \\
\frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} &= (\varepsilon - 1) \varepsilon \eta \\
\frac{\partial \Phi_5}{\partial \eta} &= 2 (\varepsilon - 1) (\varepsilon + 1) \eta \\
\frac{\partial \Phi_6}{\partial \eta} &= (\varepsilon + 1) \varepsilon \eta \\
\frac{\partial \Phi_7}{\partial \eta} &= 0.25 * (\varepsilon - 1) \varepsilon (2\eta - 1) \\
\frac{\partial \Phi_8}{\partial \eta} &= 0.5 * (\varepsilon - 1) (\varepsilon + 1) (2\eta - 1) \\
\frac{\partial \Phi_9}{\partial \eta} &= 0.25 * (\varepsilon + 1) \varepsilon (2\eta - 1) \quad .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Fazendo-se uso da integração Gaussiana, o formato discretizando da eq.(5.29) é dado por:

$$\hat{J}_{EDI} = \sum_{NCells} \sum_{p=1}^m \left\{ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \rho \ddot{u}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \frac{1}{h_S} b_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right\} \det(Jac)_p W_p, \tag{5.36}$$

onde  $W_p$  são os pesos de integração,  $m$  é o número de pontos de Gauss utilizados por célula e  $Jac$  é a matriz Jacobiana resultante da isoparametrização das células, dada por:

$$Jac = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \varepsilon & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \varepsilon & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}. \tag{5.37}$$

## 5.11 Obtenção das Derivadas de Deslocamentos

Existem duas maneiras de se obter os termos  $\partial u_i / \partial x_j$  da eq.(5.36). Uma das formas possíveis é através da derivação isoparamétrica dos deslocamentos, e a outra é através da integração das soluções fundamentais de derivadas de deslocamentos e forças de superfície no contorno do chapa.

### 5.11.1 Integração das Soluções Fundamentais de Derivadas de Deslocamento e Forças de Superfície

Dada a equação integral que governa o comportamento da chapa trincada reparada com material compósito [26]:

$$c_{ij}^S(x') u_j^S(x') + \int_{\Gamma_S} T_{ij}^S(x', x) u_j^S(x') d\Gamma = \int_{\Gamma_S} U_{ij}^S(x', x) t_j^S(x') d\Gamma + \frac{1}{h^S} \int_{\Omega_R} U_{ij}^S(x', x) b_j^S(x') d\Omega + \int_{\Omega_S} U_{ij}^S(x', x) \rho \ddot{u}_j^S(x') d\Omega, \quad (5.38)$$

a derivada de deslocamentos em relação a um ponto interno da chapa, partilhado pelo reparo, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u_j^S}{\partial x_k}(x') + \int_{\Gamma_S} T_{ij,k}^S(x', x) u_j^S(x') d\Gamma = \int_{\Gamma_S} U_{ij,k}^S(x', x) t_j^S(x') d\Gamma + \frac{1}{h^S} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Omega_R} U_{ij}^S(x', x) b_j^S(x') d\Omega + \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Omega_S} U_{ij}^S(x', x) \rho \ddot{u}_j^S(x') d\Omega. \quad (5.39)$$

Aplicando o método da dupla reciprocidade, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j^S}{\partial x_k}(x') + \int_{\Gamma_S} T_{ij,k}^S(x', x) u_j^S(x') d\Gamma &= \int_{\Gamma_S} U_{ij,k}^S(x', x) t_j^S(x') d\Gamma + \\ \frac{1}{h^S} \sum_{d=1}^D \alpha_l^{dR} \left\{ \bar{\varepsilon}_{lij}^d + \int_{\Gamma_R} T_{ij,k}^S(x', x) \hat{u}_{lj}^{dS}(x') d\Gamma - \int_{\Gamma_R} U_{ij,k}^S(x', x) \hat{t}_{lj}^{dS}(x') d\Gamma \right\} &+ \\ \sum_{e=1}^E \alpha_l^{eS} \left\{ \bar{\varepsilon}_{lij}^e + \int_{\Gamma_S} T_{ij,k}^S(x', x) \hat{u}_{lj}^{eS}(x') d\Gamma - \int_{\Gamma_S} U_{ij,k}^S(x', x) \hat{t}_{lj}^{eS}(x') d\Gamma \right\}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde  $U_{ij,k}$  é dado por:

$$U_{ij,k} = -\frac{1}{8G\pi(1-\nu)r} \{ \delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - [(3-4\nu) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \}, \quad (5.41)$$

$T_{ij,k}$  é dado por:

$$T_{ij,k} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - ((1-2\nu)\delta_{ij} + 4r_{,i}r_{,j})r_{,k}] + \right. \\ \left. n_k [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}2r_{,j}] + (1-2\nu)(\delta_{jk}n_i - \delta_{ik}n_j) - \right. \\ \left. 2(1-2\nu)r_{,k}(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\}, \quad (5.42)$$

e  $\bar{\varepsilon}_{lij}$  é dado por [29]::

$$\bar{\varepsilon}_{lij}^m = \frac{1-2\nu}{(5-4\nu)G} \left[ \delta_{ij}r_{,j} + \frac{1}{2}(\delta_{li}r_{,j} + \delta_{lj}r_{,i}) \right] r + \\ \frac{1}{30(1-\nu)G} [(4-5\nu)(\delta_{li}r_{,j} + \delta_{lj}r_{,i}) - \delta_{ij}r_{,l} - r_{,l}r_{,i}r_{,j}] r^2. \quad (5.43)$$

As variáveis  $\alpha_l^{mR}$  e  $\alpha_l^{mS}$ , são constantes de interpolação provenientes da aplicação do método de dupla reciprocidade, dadas pelas eq.(4.20) e eq.(4.21).

### 5.11.2 Derivação Isoparamétrica

Tendo conhecido o campo de deslocamento  $u_j$  em cada um dos nós que compõem as células de integração da integral  $\bar{J}_{EDI}$ , e criando a variável:

$$\mathbf{B}_{iso} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_7}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_8}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \Phi_9}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_5}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_6}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_7}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_8}{\partial \eta} & \frac{\partial \Phi_9}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

pode-se obter as derivadas direcionais de deslocamento através do produto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{iso} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \\ u_1^3 & u_2^3 \\ u_1^4 & u_2^4 \\ u_1^5 & u_2^5 \\ u_1^6 & u_2^6 \\ u_1^7 & u_2^7 \\ u_1^8 & u_2^8 \\ u_1^9 & u_2^9 \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

onde  $u^k$  é o valor de deslocamento no  $k$ -ésimo nó na célula em análise.

## 5.12 Obtenção de $K_I$ e $K_{II}$

Tendo que, para elasticidade plana,  $J_{EDI}$  pode ser escrito na forma:

$$\hat{J}_{EDI} = \frac{\eta K_I^2}{E} + \frac{\eta K_{II}^2}{E}, \quad (5.46)$$

onde  $\eta = 1$  para estado plano de tensão e  $\eta = 1 - \nu^2$  para estado plano de deformação, pode-se dizer que  $J_{EDI}$  pode ser dividido em duas componentes na forma:

$$\hat{J}_{EDI} = \hat{J}_{EDI}^I + \hat{J}_{EDI}^{II}, \quad (5.47)$$

onde  $\hat{J}_{EDI}^I$  é a componente de  $\hat{J}_{EDI}$  relacionada ao modo I de fratura e  $\hat{J}_{EDI}^{II}$  é a componente de  $\hat{J}_{EDI}$  relacionada ao modo II de fratura. Estes dois termos podem ser escritos na forma:

$$\hat{J}_{EDI}^I = \int_V \left( \sigma_{ij}^{*I} u_{j,k}^{*I} - w^I \delta_{ki} \right) q_{k,i} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i^{*I} u_{i,k}^{*I} dV + \frac{1}{h_S} \int_V b_i^{*I} u_{i,k}^{*I} dV$$

$$\hat{J}_{EDI}^{II} = \int_V \left( \sigma_{ij}^{*II} u_{j,k}^{*II} - w^{II} \delta_{ki} \right) q_{k,i} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i^{*II} u_{i,k}^{*II} dV + \frac{1}{h_S} \int_V b_i^{*II} u_{i,k}^{*II} dV. \quad (5.48)$$

Assim sendo, acoplando as eq.(5.48) e eq.(5.47), os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  podem ser obtidos na forma [12]:

$$K_I = \sqrt{\frac{8G}{k+1}} \hat{J}_{EDI}^I$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{8G}{k+1}} \hat{J}_{EDI}^{II}, \quad (5.49)$$

onde  $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  para estado plano de tensão e  $k = (3 - 4\nu)$  para estado plano de deformação.



# Capítulo 6

## Resultados e Discussões

### 6.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados obtidos através da formulação apresentada neste trabalho. Inicialmente é abordado o caso de uma chapa com trinca central reta sob carga dinâmica, em que é feita uma análise das diferentes formas de se avaliar a Integração de Energia de Domínio (EDI). É abordado um caso de chapa com trinca inclinada central sob carga dinâmica, em que é feita uma análise sobre a influência do número de células e de comprimento de trinca integrado. É abordado um caso de chapa isotrópica com reforçador compósito, em que é feita uma análise sobre a influência das propriedades do adesivo sobre o comportamento dinâmico da chapa. Por último é abordado um caso de chapa com trinca central reparada com material compósito sob carga dinâmica.

### 6.2 Chapa Trincada sem Reparo

#### 6.2.1 Trinca Central Reta

Uma chapa isotrópica trincada retangular é analisada sem o uso de reparo de material compósito (Fig.6.1). A chapa é submetida a uma carga dinâmica que passa a atuar no instante de tempo  $\tau = 0$  e permanece constante após a contagem. É utilizado o método dual de elementos de contorno para simulação da trinca e o método de dupla reciprocidade de elementos de contorno para simulação dos efeitos de inércia. A determinação dos fatores de intensidade de tensão é feita utilizando a integral de energia de domínio (EDI) e o crack tip opening displacement (CTOD). A solução realizada no domínio do tempo é feita através do método de Houbolt utilizando um time step de  $\tau = 0,2\mu s$  e 75 instantes de tempo. A discretização

da chapa é feita utilizando 24 elementos quadráticos descontínuos para a discretização do contorno, e 56 elementos para discretização da trinca. A distribuição dos elementos na trinca é feita colocando 24 elementos para discretização de cada ponta da trinca, e 8 elementos para o resto do comprimento da trinca que não é utilizado na aplicação da EDI.

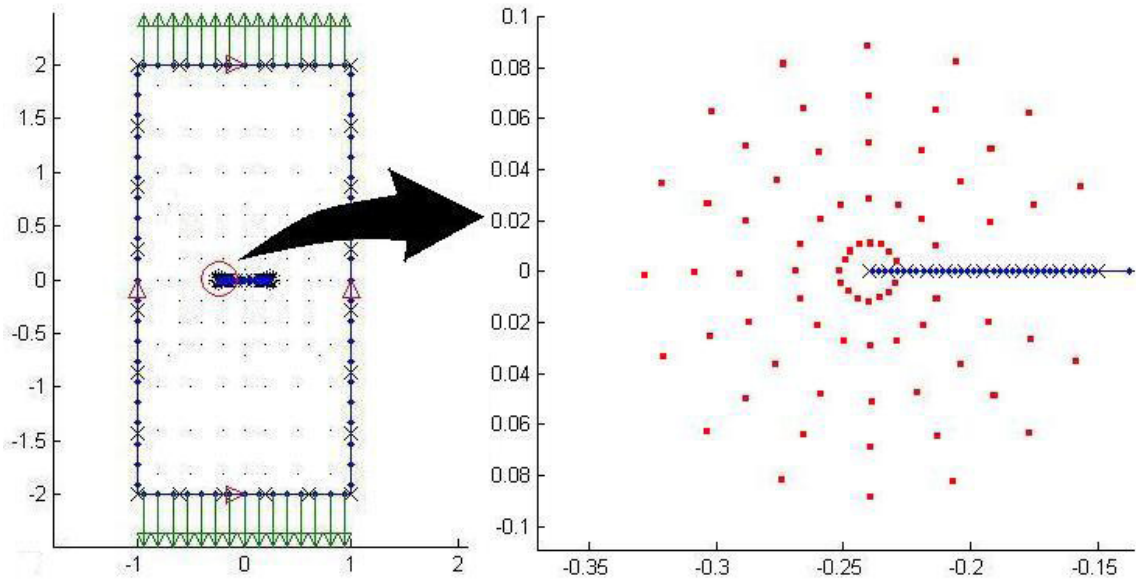


Figura 6.1: Chapa com trinca central.

São utilizados 75 nós internos em cada extremidade da trinca para avaliação da EDI, e 96 nós internos distribuídos pelo resto do domínio da chapa, sendo que, para a análise dos efeitos de inércia atuantes na chapa são utilizados todos os 246 nós internos. Para a análise da EDI dois casos são analisados. O primeiro utilizando os termos  $\partial u_i / \partial x_j$  da eq.(5.36) obtidos através da derivada isoparamétrica dos deslocamentos dos nós na ponta da trinca. O segundo caso analisado é utilizando a integração das soluções fundamentais de derivada de deslocamento. São utilizadas 24 células isoparamétricas em cada ponta da trinca, compostas respectivamente por 75 nós de domínio e 10 nós do contorno da trinca. Os resultados de fatores de intensidade de tensão  $KI/K0$  para o primeiro caso são dados pela Fig.(6.2) e os fatores de intensidade de tensão  $KI/K0$  para o segundo caso são dados pela Fig.(6.3).

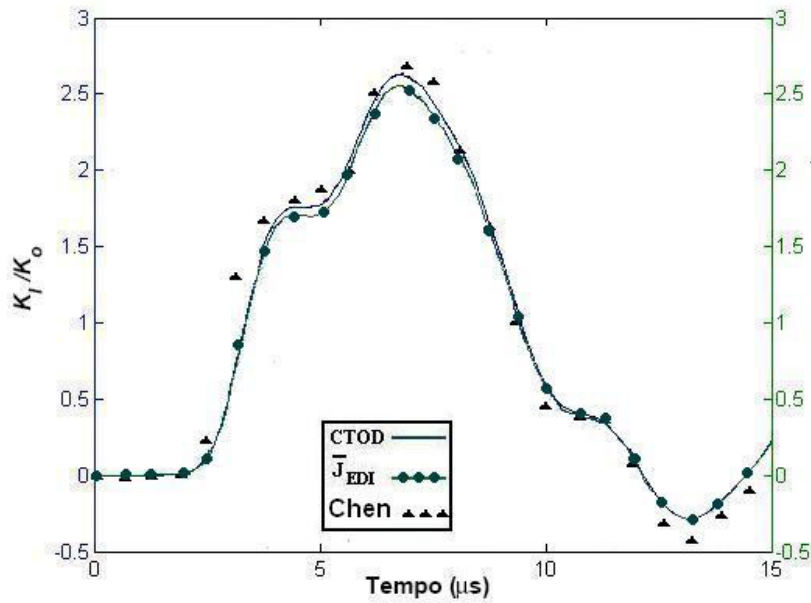


Figura 6.2:  $K_I/K_0$  chapa com trinca central, utilizando isoparametrização das derivadas de deslocamento.

O tempo de análise para o primeiro caso, foi de 295 segundos, enquanto para o segundo caso foi de 313 segundos. É possível perceber que os resultados do segundo caso apresentam pequenas interferências na curva. Essas interferências são decorrentes de lixo numérico absorvido pela computação das derivadas direcionais de deslocamento  $\partial u_i / \partial x_j$ , uma vez que a ordem de grandeza delas é muito pequena. No primeiro caso, esses termos são obtidos diretamente dos resultados de deslocamento, eliminando assim o risco de absorção de lixo numérico durante o processo de computação. Outro fator a ser levado em consideração é a diferença de tempo de computação. Utilizando-se a derivada isoparamétrica dos termos de deslocamento, elimina-se a computação desnecessária da equação integral dada pela eq.(5.40), que é a equação integral mais cara computacionalmente a ser discretizada.

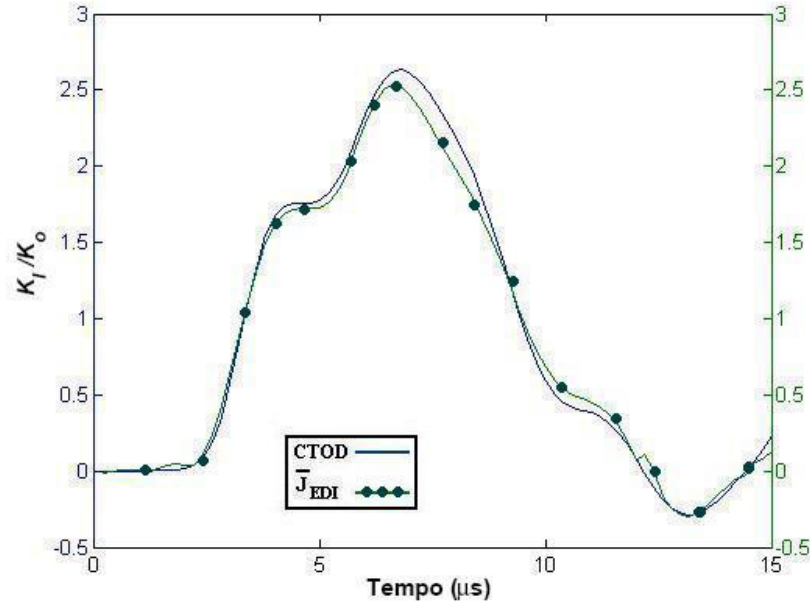


Figura 6.3:  $K_I/K_0$  chapa com trinca central, utilizando integração das soluções fundamentais de derivadas de deslocamento e forças de superfície.

A normalização do fator de intensidade de tensão é feita através de  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ , onde  $a$ , para o caso analisado é dado pela metade do comprimento da trinca, e  $\sigma_0$  é a tensão aplicada nas extremidades da chapa.

### 6.2.2 Trinca Central Inclinada

Uma chapa isotrópica com uma trinca inclinada é analisada sem uso de reparo de material compósito (Fig.6.4). A chapa é submetida a uma carga dinâmica que passa a atuar no instante de tempo  $\tau = 0$  e permanece constante após a contagem. Assim como no caso da trinca central reta, o método dual de elementos de contorno é utilizado para simular a trinca, e o método de dupla reciprocidade de elementos de contorno é utilizado para simulação dos efeitos de inércia sobre a chapa. Os métodos de obtenção de fatores de intensidade de tensão são o CTOD e a EDI. Neste caso, apenas a derivação isoparamétrica é utilizada para obtenção dos termos de derivada direcional de deslocamento  $\partial u_i / \partial x_j$ . A solução no domínio do tempo é feita através do método de Houbolt, com espaço de tempo  $\tau = 0,2 \mu s$  e 100 instantes de tempo.

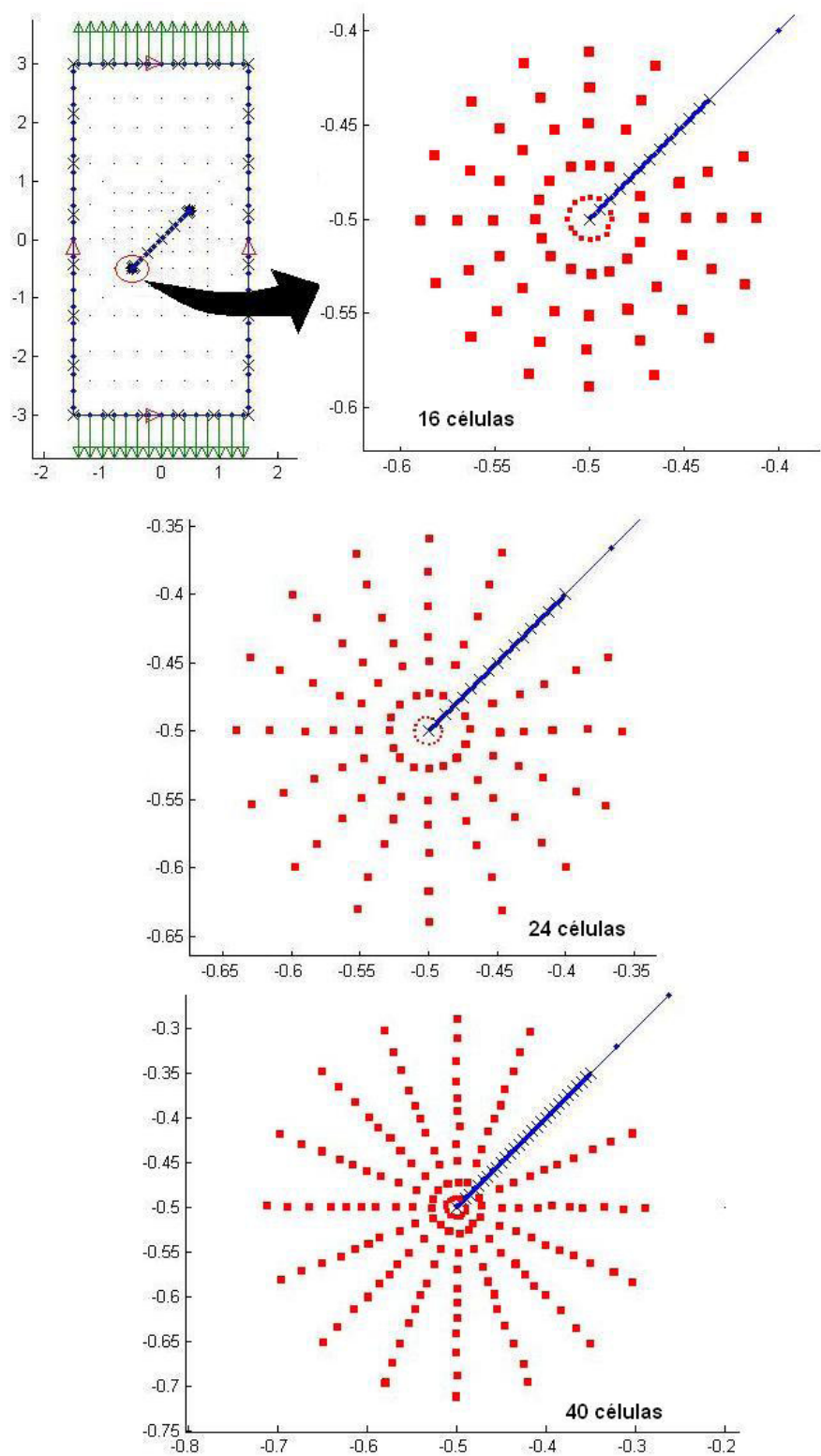


Figura 6.4: Chapa com trinca inclinada.

A discretização da chapa é feita de maneira similar ao da chapa com trinca reta, utilizando 24 elementos quadráticos descontínuos para a discretização do contorno, e 56 elementos quadráticos descontínuos para discretização da trinca. A distribuição dos elementos na trinca é feita colocando 24 elementos para discretização de cada ponta da trinca, e 8 elementos para o resto do comprimento da trinca que não é utilizado na aplicação da EDI. São utilizados 75 nós internos em cada extremidade da trinca para avaliação da EDI e 94 nós internos distribuídos pelo resto do domínio da chapa, sendo que, para a análise dos efeitos de inércia atuantes na chapa são utilizados todos os 244 nós internos. Para este caso, os resultados de  $KI/K_0$  são dados pela Fig.(6.5) e os resultados de  $KII/K_0$  são dados pela Fig.(6.6)

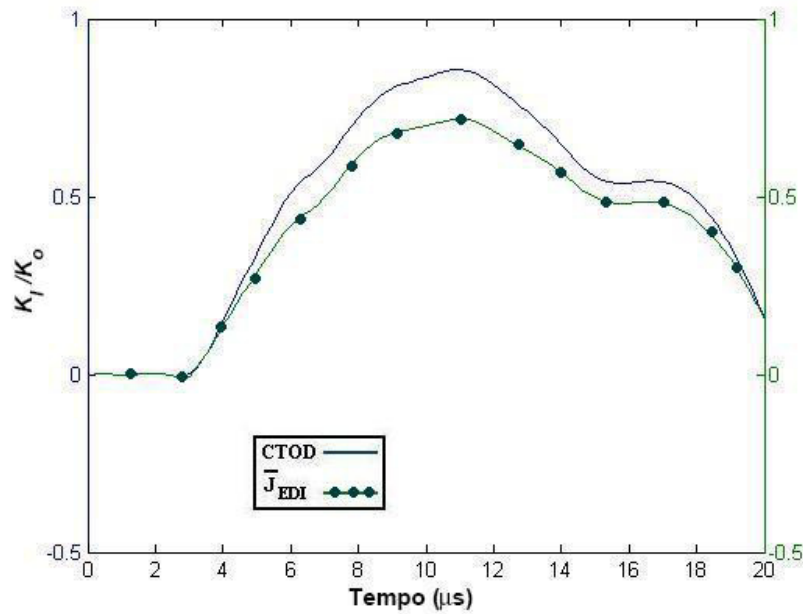


Figura 6.5:  $KI/K_0$  chapa com trinca central inclinada, utilizando isoparametrização das derivadas de deslocamento e 16 células.

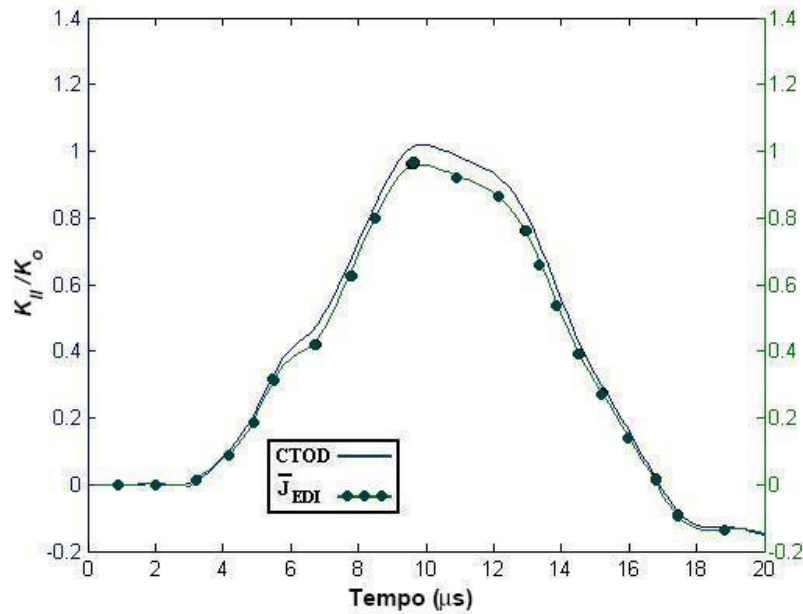


Figura 6.6:  $K_{II}/K_0$  chapa com trinca central inclinada, utilizando isoparametrização das derivadas de deslocamento e 16 células.

O erro relativo máximo para  $KI/K_0$  foi de 22,5% para um tempo de análise de 425 segundos. De forma a se verificar a influência do número de células e de comprimento de trinca utilizado na avaliação da EDI, um segundo caso foi testado. A discretização foi feita de maneira semelhante, porém, utilizando desta vez 72 elementos quadráticos descontínuos para discretização da trinca, sendo 32 elementos utilizados para discretização de cada ponta da trinca, e 8 elementos para o resto do comprimento da trinca que não é utilizado na aplicação da EDI. São utilizados 105 nós internos em cada extremidade da trinca para avaliação da EDI e 94 nós internos distribuídos pelo resto do domínio da chapa, sendo que, para a análise dos efeitos de inércia atuantes na chapa são utilizados todos os 304 nós internos. Para este caso, os resultados de  $KI/K_0$  são dados pela Fig.(6.7) e os resultados de  $KII/K_0$  são dados pela Fig.(6.8)

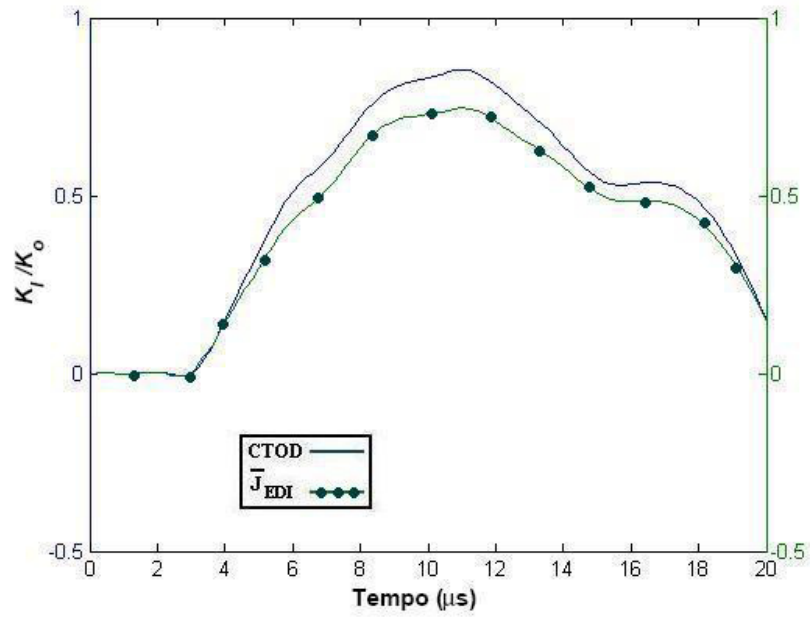


Figura 6.7:  $K_I/K_0$  chapa com trinca central inclinada, utilizando isoparametrização das derivadas de deslocamento e 24 células.

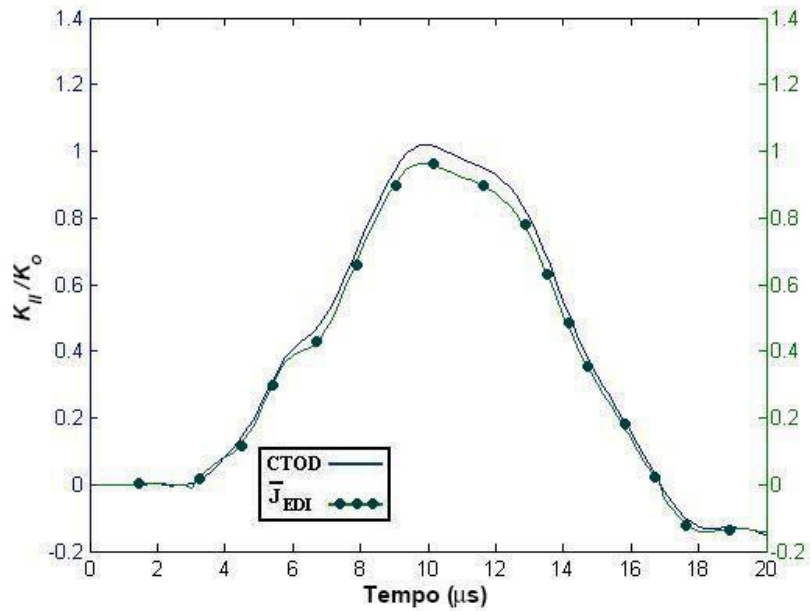


Figura 6.8:  $K_{II}/K_0$  chapa com trinca central inclinada, utilizando isoparametrização das derivadas de deslocamento e 24 células.



O erro relativo máximo para  $KI/K_0$  foi de 13,4% para um tempo de análise de 473 segundos. Um terceiro caso foi analisado, utilizando desta vez 165 nós internos para avaliação da EDI em cada ponta da trinca, gerando assim, 40 células de integração para cada ponta da trinca, e aumentando a discretização de cada ponta da trinca para 60 elementos. Para este caso, os resultados de  $KI/K_0$  são dados pela Fig.(6.9).

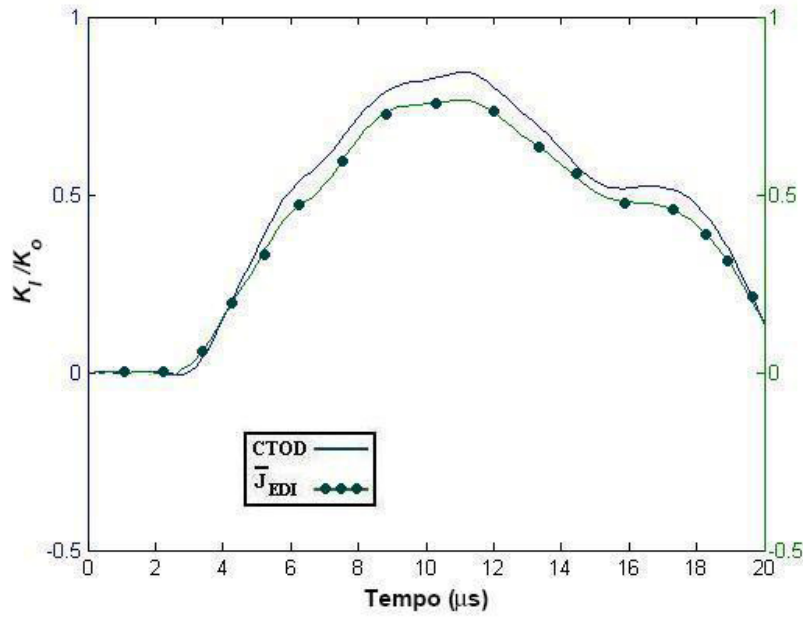


Figura 6.9:  $KII/K_0$  chapa com trinca central inclinada, utilizando isoparametrização das derivadas de deslocamento e 40 células.

O erro relativo máximo deste caso para  $KI/K_0$  foi de 9,7% para um tempo de análise de 574 segundos. Os resultados de EDI deveriam ser iguais para os três casos, porém para que isso aconteça, deve-se satisfazer a condição dada pela eq.(6.20), o que significa que o raio interno da área de integração deve tender à 0. Uma vez que, para essa formulação, se utiliza elementos quadriláteros bilineares, não é apropriado colapsar três nós em um único ponto, logo esta condição não é satisfeita. Uma forma de se contornar o problema é tentar tornar o raio interno da área de integração  $r_{interno}$  o menor possível em relação a área de integração, ou seja:

$$\Theta = \frac{r_{interno}}{r_{externo}} \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

n° de células	$\Theta$	erro relativo (%)	tempo de computação (seg)
16	0,1167	22,5	425
24	0,0857	13,4	473
40	0,0502	9,7	574

Tabela 6.1: Erro relativo da avaliação de EDI em relação a  $\Theta$

onde  $\Theta$  é a relação entre o raio interno e exterior da área de integração. A relação entre  $\Theta$  e o erro relativo de  $KI/K0$  entre o método da EDI e o método de CTOD é dado pela tabela(6.1). A comparação entre valores de  $\Theta$  e o erro relativo de  $KII/K0$  para os três casos não é abordada nesta discussão, uma vez que a variação entre eles é desprezível.

### 6.3 Chapa com Reforçador Compósito

Uma chapa de aço isotrópica com reforçador compósito sob carregamento dinâmico é analisada (Fig.6.10). As dimensões da chapa são  $200mm$  de largura e  $400mm$  de altura. As dimensões do reforçador são  $140mm$  de largura e  $140mm$  de altura, localizado no centro da chapa. A chapa é submetida a uma carga dinâmica de  $100MPa$ , que passa a atuar no instante de tempo  $\tau = 0$  e permanece constante após a contagem. O módulo de elasticidade da chapa é de  $E = 220GPa$ , o módulo de Poisson é  $\nu = 0,3$ , a espessura é  $h_s = 1mm$  e densidade é de  $\rho_s = 5000Kg/m^3$ . Os módulos de elasticidade do reforçador são  $E_1 = 220GPa$  e  $E_2 = 430GPa$ , o módulo de cisalhamento é  $G = 77, GPa$ , o módulo de Poisson é  $\nu_r = 0,4286$ , a espessura é  $h_r = 1mm$  e densidade é de  $\rho_r = 5000Kg/m^3$ . O método da dupla reciprocidade de elementos de contorno é utilizado tanto para simular os efeitos de inércia da chapa e do reforçador quanto para simular a interação entre chapa e reforçador. A solução realizada no domínio do tempo é feita através do método de Houbolt utilizando um time step de  $\tau = 0,2\mu s$  e 75 instantes de tempo.

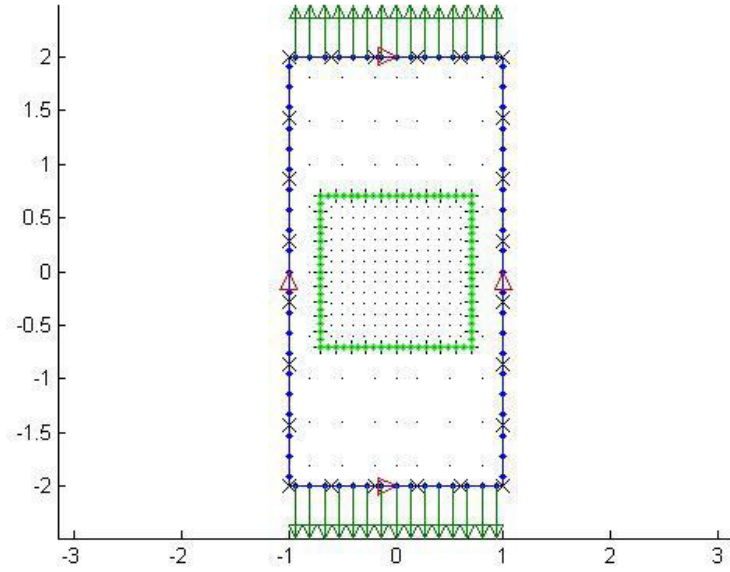


Figura 6.10: Chapa com reforçador.

A discretização da chapa é feita utilizando 24 elementos quadráticos descontínuos para a discretização do seu contorno e a discretização do reforçador é feita utilizando 40 elementos quadráticos contínuos para discretização de seu contorno. São utilizados 139 nós internos ao reforçador para avaliação dos efeitos de inércia atuantes sobre ele e da interação entre chapa e reforçador. São utilizados também 48 nós internos à chapa, não compartilhados ao reforçador, que em conjunto com os outros 139 nós, são utilizados para avaliar os efeitos de inércia atuantes sobre a chapa. Sendo a tensão de cisalhamento atuante no adesivo dada por:

$$b = \frac{G_A}{h_A} \{u^S - u^R\} \quad , \quad (6.2)$$

onde  $b$  é a tensão cisalhante atuante na camada adesiva,  $G_A$  é o módulo de elasticidade transversal da camada adesiva, e  $h_A$  é a espessura da camada adesiva, pode-se assumir que o comportamento dinâmico da chapa com reforçador compósito varia de acordo com a variável  $\Lambda = G_A/h_A$ .

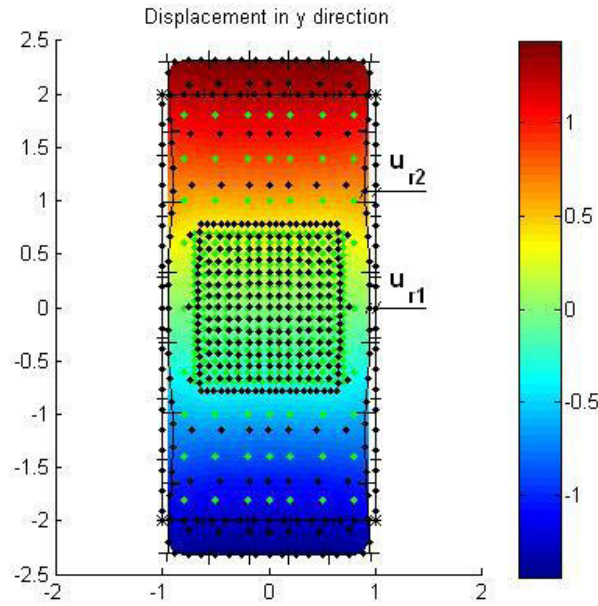


Figura 6.11: Distorção relativa da chapa.

Fazendo a análise para 4 casos, onde respectivamente  $\Lambda = 0$ ,  $\Lambda = 5,50MPa/mm$ ,  $\Lambda = 55MPa/mm$  e  $\Lambda = 550MPa/mm$ , e considerando que a distorção relativa da chapa, mostrada na Fig.(6.11), é dada por:

$$\Xi = (u_{r2} - u_{r1}) / u_{r1}, \quad (6.3)$$

o deslocamento dinâmico máximo da extremidade superior da chapa e sua distorção relativa são dados pela tabela(6.2). Um outro comportamento que varia com a variável  $\Lambda$ , é a distribuição de tensões ao longo da camada adesiva (Fig.6.12). É possível perceber que a medida que se aumenta  $\Lambda$ , a rigidez da junção aumenta e as tensões tendem a se concentrar nas bordas do reforçador.

$\Lambda(MPa/mm)$	$Deslocamento\ max.(10^{-4}mm)$	$\Xi(\%)$
0	1,6807	0
5,5	1,578	1,343
55	1,430	4,926
550	1,363	5,968

Tabela 6.2: Valores de deslocamento e distorção para diferentes  $\Lambda$

$\Lambda(MPa/mm)$	reforço din. ( $10^{-4}mm$ )	reforço sta. ( $10^{-4}mm$ )	Erro relativo (%)
5,5	1,578	1,573	0.31
55	1,430	1,426	0.21
550	1,363	1,303	4,4

Tabela 6.3: Deslocamento máximo da extremidade superior da chapa com ou sem efeitos de inércia atuando sobre o reforçador.

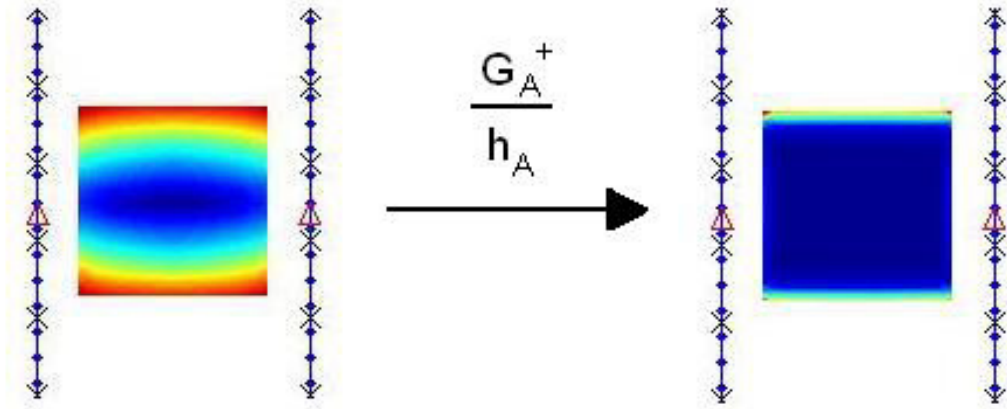


Figura 6.12: Distribuição de tensões no adesivo.

Considerando a eq. (4.14), e fazendo a mesma avaliação dos deslocamentos dinâmicos máximos da extremidade superior chapa, sem considerar os efeitos de inércia atuantes do reforçador, percebe-se que os efeitos de inércia atuantes no reforçador não influenciam o comportamento dinâmico da chapa de maneira significativa se  $\Lambda$  for relativamente pequeno, como se pode ver na tabela (6.3).

## 6.4 Chapa Trincada com Reparo Compósito

Uma chapa de aço isotrópica trincada com reparo compósito sob carregamento dinâmico é analisada (Fig.6.13). As dimensões da chapa são  $200mm$  de largura e  $400mm$  de altura. A trinca é localizada no centro da chapa, com dimensão  $2a = 48mm$ . As dimensões do reparo são  $140mm$  de largura e  $140mm$  de altura, localizado no centro da chapa. A chapa é submetida a uma carga dinâmica de  $100MPa$ , que passa a atuar no instante de tempo  $\tau = 0$  e permanece constante após a contagem. O módulo de elasticidade da chapa é de  $E = 220GPa$ , o módulo de Poisson é  $\nu = 0,3$ , a espessura é  $h_s = 1mm$  e densidade é de  $\rho_s = 5000Kg/m^3$ . Os módulos de elasticidade do reforçador são  $E_1 = 220GPa$  e  $E_2 = 430GPa$ , o módulo de cisalhamento é  $G = 77, GPa$ , o módulo de Poisson é  $\nu_r = 0,4286$ , a espessura é  $h_r = 1mm$  e densidade é de  $\rho_r = 5000Kg/m^3$ . O método dual de elementos de contorno é utilizado para simular a trinca, e método da dupla reciprocidade de elementos de contorno é utilizado, tanto para simular os efeitos de inércia da chapa e do reforçador, quanto para simular a interação entre chapa e reforçador. A solução realizada no domínio do tempo é feita através do método de Houbolt, utilizando um time step de  $\tau = 2\mu s$  e 6 instantes de tempo.

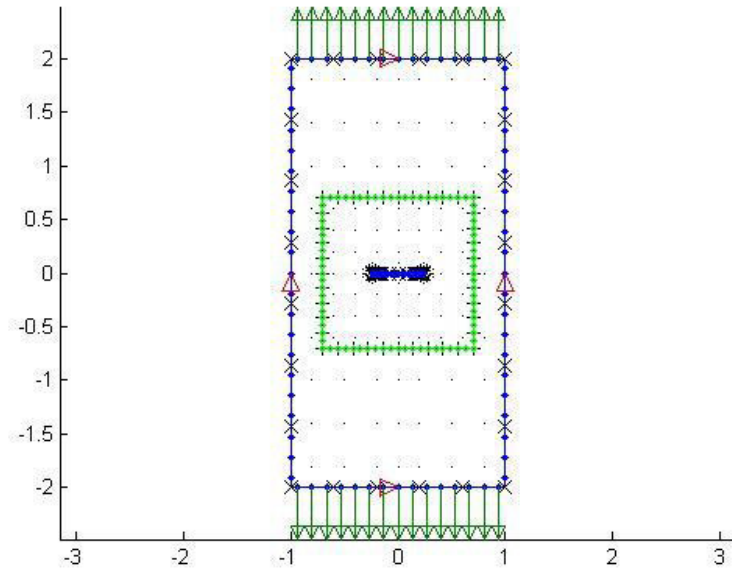


Figura 6.13: Chapa com trinca central e reparo compósito.

A discretização da chapa e da trinca é semelhante ao do caso de chapa com trinca reta sem reparo, bem como a distribuição de nós e células utilizados na avaliação da EDI e dos nós

internos para avaliação dos efeitos de inércia e interação entre chapa e reparo.

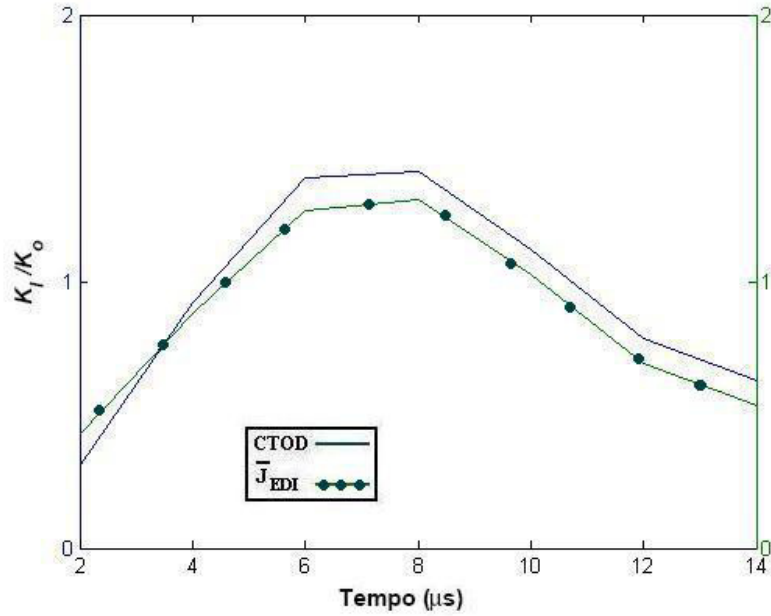


Figura 6.14:  $K_I/K_0$  chapa com trinca central e reparo compósito utilizando 24 células.

A relação  $\Lambda = 22(MPa/mm)$  é utilizada para este caso, e os resultados de fatores de intensidade de tensão dinâmicos  $K_I$  utilizando os métodos de CTOD e EDI são dados pela Fig(6.14). É possível observar que as tensões atuantes na camada adesiva desta vez se concentram ao longo da borda do reparo e da trinca, como se pode ver na Fig.(6.15).

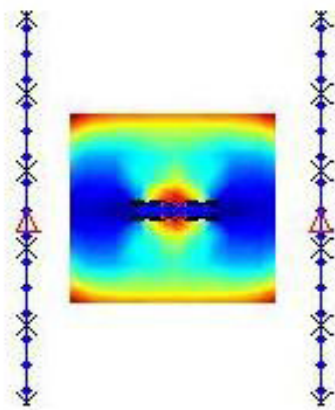


Figura 6.15: Distribuições de tensões na camada adesiva.

O motivo de se utilizar espaços de tempo consideravelmente maiores para este caso, é a pouca compatibilidade entre o método dual de elementos de contorno e o método de dupla reciprocidade de elementos de contorno. Como discutido anteriormente, trincas simuladas através do método dual de elementos de contorno apresentam muita sensibilidade a acelerações espúrias decorrentes da aplicação método de Houbolt e a problemas de mal condicionamento decorrentes da diferença de ordem de grandeza dos termos referentes a chapa e dos termos referentes ao acoplamento entre chapa e reparo. No caso da análise de efeitos de inércia, este problema pode ser superado aplicando a formulação anisotrópica à chapa, utilizando o caso particular isotrópico. Porém, o mesmo procedimento não pode ser aplicado com sucesso no caso da análise de efeitos de acoplamento entre chapa e reparo.



# Capítulo 7

## Conclusões

### 7.1 Conclusões Finais

Foi apresentado neste trabalho, uma formulação de elementos de contorno para análise de chapas isotrópicas trincadas com reparos de material compósito colado.

Foi apresentada uma revisão da teoria da elasticidade plana para chapas isotrópicas, bem como a obtenção das soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície para este caso.

Foi apresentada uma revisão da teoria de elasticidade plana para chapas anisotrópicas. A teoria de laminados simétricos foi utilizada afim de se obter as equações de propriedades elásticas equivalentes a partir de cada lâmina ortotrópica pertencente ao laminado simétrico. A partir dessas equações, foram apresentadas as soluções fundamentais de deslocamento e forças de superfície para chapas anisotrópicas.

Foi apresentada a equação integral de contorno que governa o comportamento dinâmico da chapa trincada com reparo de material compósito. Foi apresentada também uma breve revisão do método de elementos de contorno. As equações que governam o comportamento dinâmico da chapa e do reparo foram obtidas através da teoria da elastoestática, sofrendo adição dos termos de inércia.

Foi apresentado o método dual de elementos de contorno (DMEC), utilizado para o modelagem da trinca. Foi apresentado também o método de dupla reciprocidade de elementos de contorno (DRMEC), utilizado para o modelagem dos efeitos de inércia da chapa isotrópica e do reparo anisotrópico. O método de dupla reciprocidade de elementos de contorno se mostrou eficaz para modelar problemas de forças de corpo, porém existem restrições quanto ao seu uso combinado com o método dual de elementos de contorno. No caso da modelagem

de efeitos de inércia, a solução fundamental de deslocamentos da elasticidade plana isotrópica não é adequada para ser usada com a combinação DMEC e DRMEC. Este problema pôde ser superado modelando a chapa trincada através da solução fundamental de deslocamentos da elasticidade plana anisotrópica para o caso particular de quase-isotropia ( $E_1 \cong E_2$ ). No caso da modelagem dos efeitos de acoplamento entre chapa e reparo, mesmo fazendo-se uso das soluções fundamentais de deslocamento anisotrópicas, a trinca mostrou-se muito sensível a variações da relação  $\Lambda$  e a variações de passos de tempo. Isso torna o método apresentado somente aplicável a problemas com baixa relação  $\Lambda$  e a valores de passo de tempo relativamente altos.

Para os casos em que se fez a análise de trincas combinadas com o DRMEC, não considera-se os efeitos de forças de corpo atuando sobre a trinca, uma vez que a aplicação do DRMEC sobre pontos coincidentes da trinca gera problemas de singularidade. Outro ponto a ser considerado é que, pelo fato da trinca não ser modelada sob o efeito de forças de corpo, necessita-se utilizar mais nós internos próximos a trinca, sendo assim, a discretização da trinca deve ser feita levando-se em consideração a proximidade dos nós.

Através do DRMEC, foi mostrada a transformação das integrais de domínio em um somatório de contorno, bem como a discretização das equações integrais de contorno resultantes em elementos de contorno.

Um método de solução no domínio do tempo (Método de Houbolt) foi apresentado. Este método possui um amortecimento numérico inerente a ele, que pode ser reduzindo diminuindo-se o passo de tempo utilizado. Porém, reduzindo excessivamente os espaços de tempo, instabilidades tendem a surgir, principalmente para o caso de trincas combinadas com reparo. Foi apresentado também o sistema de matrizes a ser resolvido a cada instante de tempo, resultante da aplicação do método de Houbolt.

Dois métodos de avaliação de fatores de intensidade de tensão foram apresentados. Foi apresentada a formulação do método Crack Tip Opening Displacement (CTOD), que avalia a diferença de deslocamento de um ou mais pontos coincidentes da trinca. Foi apresentada também a formulação do método de integral de energia de domínio (EDI), que avalia a energia de deformação presente na região próxima a ponta da trinca e é obtida através da integral  $\hat{J}$ . O método de CTOD é o mais simples de se implementar computacionalmente, e apresenta resultados bastante satisfatórios, mesmo utilizando apenas um par de nós coincidentes, sem a necessidade de se considerar efeitos de inércia e acoplamento em sua formulação. O método

de EDI apresenta resultados bastante satisfatórios para os casos analisados, e permite futuramente a implementação de efeitos de plasticidade e propagação de trinca.

Uma desvantagem do método de EDI é que, pelo fato de ser uma integral de área, cria-se a necessidade de se criar pontos de análise muito próximos a a ponta da trinca, e conseqüentemente exige um refino muito maior da trinca perto da região de análise. Outro problema inerente a aplicação da EDI utilizando elementos isoparamétricos biquadráticos, é a criação uma zona não integrável de raio maior que zero na ponta da trinca, fazendo que a condição dada pela eq.(5.22) não seja cumprida. Para se superar esse problema, define-se o raio externo a área de integração, de forma que o raio interno seja desprezível.

Um ponto importante a ser ressaltado é que, os termos referentes a inércia e acoplamento da EDI são muito pequenos, e isso se deve ao fato de serem usados no primeiro termo da equação, valores de tensão, deformação e derivadas de deslocamento obtidos através de formulação dinâmica. Isso cria uma vantagem para o uso da integral  $\hat{J}$ , que por não ser uma integral de área, não cria a necessidade pontos de avaliação muito próximos a ponta da trinca, e conseqüentemente reduz o custo computacional da análise. Outra vantagem é que, pelo fato dos termos de inércia e de acoplamento da integral  $\hat{J}$ , também partilhados pela EDI, não possuírem a função de integração quadrática  $q$ , não há a necessidade de se utilizar elementos biquadráticos, podendo-se utilizar então elementos bilineares.

Uma vantagem importante do método da EDI em relação a integral  $\hat{J}$ , é que, fazendo-se uso de células isoparamétricas biquadráticas, pode-se obter mais facilmente, e com maior precisão, os valores das derivadas direcionais de deslocamento da equação através da derivação isoparamétrica dos valores de deslocamento dos nós de análise. Uma vez que a ordem de grandeza desses valores de derivadas direcionais de deslocamento podem vir a ser muito pequenos, os valores de fatores de intensidade de tensão obtidos através da integração podem apresentar ruído numérico. Fazendo a derivação isoparamétrica dos valores de deslocamento se garante que os ruídos são inexistentes. Outra vantagem é que elimina-se a necessidade da avaliação da equação integral de deformações, dada pela eq.(5.40), que é a mais cara computacionalmente das equações integrais apresentadas neste trabalho.

Para o caso da formulação da integral  $\hat{J}$ , e para o caso da EDI, foram apresentados os procedimentos de obtenção dos fatores de intensidade de tensão  $KI$  e  $KII$ , bem como os procedimentos de desacoplamento das variáveis utilizadas nas integrações.

Foi apresentado um caso de chapa com trinca central reta sem reparo e um caso de chapa

com trinca central inclinada sem reparo. Também foi apresentado um caso de chapa sem trinca com reforçador compósito colado. Por último, foi apresentado um caso de chapa com trinca central reta e reparo compósito colado.

## 7.2 Propostas para Trabalhos Futuros

Ficam como sugestões para trabalhos futuros:

- Implementação dos efeitos de flexão da chapa devido a diferença de posição fora do plano entre a chapa e o reparo.
- Análise por meio alternativo do problema apresentado, de forma que se elimine a sensibilidade da trinca a forças de corpo presente na aplicação do DRBEM.
- Verificação da possibilidade da aplicação do DRBEM aos nós da trinca por meios alternativos.
- Implementação de formulação mais elaborada para o acoplamento entre a chapa e o reparo, considerando não linearidade e tensões normais atuantes no adesivo.
- Implementação de efeitos de plasticidade na ponta da trinca na equação da EDI.
- Implementação de análises de propagação de trinca combinada com a aplicação do reparo.

# Referências Bibliográficas

- [1] Albuquerque, E. L. “Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópicos Usando o Método de Elementos de Contorno”. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001, 165 p. Tese (Doutorado)
- [2] Albuquerque, E. L., Sollero, P. and Aliabadi, M. H. “The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials”, *Int. Journal of Solids and Structures*, 39; 1405-1422 (2002)
- [3] Aliabadi, M. H. “The boundary element method - Applications in solid structures”, vol.II, Wiley, 2002
- [4] Baker, A., Rose, F., e Jones, F. (eds), *Advances in Composite Repair of Metallic Aircraft Structures*, V.1 e V.2, Elsevier, Amsterdam, 2002.
- [5] Brebbia, C. A. and Dominguez J. “Boundary Element - An Introductory Course”. Computational Mechanics Publications, 2a ed. Southampton (1989).
- [6] Cisilino, A. P. and Ortiz, J. “Boundary element analysis of three-dimensional mixed-mode cracks via the interaction integral.” *Computational Methods Applied in Mechanical Engineering*, 194:935-956 (2005)
- [7] Dirgantara, T., Aliabadi, M. H., “ A new boundary element formulation for shear deformable shells analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:1257-1275, 1999.
- [8] Dirgantara, T., Aliabadi, M. H., “ Dual boundary formulation for fracture mechanics analysis of shear deformable shells”, *International Journal of Solids and Structures*, 38:7769-7800, 2001.

- [9] Dirgantara, T. "Boundary element analysis of cracks in shear deformable plates and shells", Topics in Engineering, V.43, Southampton, WTI Press. 2002.
- [10] Dominguez J. "Boundary Elements in Dynamics". Computational Mechanics Publications, 2a ed. Southampton (1993).
- [11] Erdogan, F., e Arin, K., "A sandwich plate with a part-through and debonding crack", Engineering Fracture Mechanics, 4:449-458, 1972.
- [12] Fedelinski, P. and Aliabadi, M. H. "The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics." Engineering Analysis with Boundary Elements, 12:203-210 (1993)
- [13] Fedelinski, P., Aliabadi, M. H. and Rooke, D. P. "The dual boundary element method:  $\hat{J}$ -integral for dynamic stress intensity factors." International Journal of Fracture, 65:369-381 (1994)
- [14] Houbolt, J. C. "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft", Journal of Aeronautical and Science, 17:540-550 (1950)
- [15] Irwin, G. R. "Fracture", Encyclopedia of Physics, (Ed. S. Flugge), vol. VI, Springer-Verlag, 1958
- [16] Jones, R., Callinan, R. J., "On the use of special crack tip elements in cracked elastic sheets", International Journal of Fracture, 3:51-64, 1977.
- [17] Jones, R., Callinan, R. J., "Finite element analysis of patched cracks", Journal of Structural Mechanics, 7:107-130, 1979.
- [18] Jones, R., Barter, S., Molent, L., Pitt, S., "Crack patching: an experimental evaluation of fatigue crack growth", composite Structures, 67:229-238, 2005.
- [19] Jones, R., Callinan, R. J., "A design study in crack patching", Fibre Science and Technology, 14:99-111, 1981.
- [20] Kane, J. A. "Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics". Prentice Hall, New Jersey (1994).
- [21] Kögl, M. and Gaul, L. "A boundary element method for transient piezoelectric analysis." Engn. Anal. With Boundary Elements, 24:591-598 (2000)

- [22] Lee, W. Y., Lee, J. J., “ Fatigue behavior of composite patch repaired aluminium plate”, Journal of Composite Materials, 39:1449-1463, 2005.
- [23] Lekhnitskii, S. G. “Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body”. Holden-Day, San Francisco (1963).
- [24] Lekhnitskii, S. G. “Anisotropic Plates”. Gordon and Breach, New York (1968).
- [25] Loeffler, C. and Mansur, W. J. “Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems.” In Brebbia and W. S. Venturini, editors, Boundary Element Techniques: Applications in stress analysis and heat transfer, 105-122, Computational Mechanics Publications, Southampton. (1987)
- [26] Lourenço, F. A. “Análise de Reparos de Trinca Através do Método dos Elementos de Contorno”. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2000, 90 p. Dissertação (Mestrado)
- [27] Lourenço, F. A., Aguirre, F., Albuquerque, E. L., Sollero, P. “Boundary element analysis of panels reinforced by adhesives plates”, Proc, COBEM 2003, CD-ROM, São Paulo, Brazil, 2003
- [28] Mitchell, R., Wooley, R. M., Chwiruth, D. J., “Analysis of Composite reinforced cutouts and cracks”, AIAA Journal, 17:744-749, 1975.
- [29] Partridge, P. W., Brebbia, C. A. and Wrobel L. C. “The Dual Reciprocity Boundary Element Method”. Computational Mechanics Publications. Southampton (1991).
- [30] Passalacqua, R. L. “Análise de Reparos Estruturais Compósitos Colados Usando o Método de Elementos Finitos”. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2009, 139 p. Dissertação (Mestrado)
- [31] Ratawani, M., N., “Analysis of cracked adhesively bonded laminate structures”, AIAA Journal, 17:988-994, 1979.
- [32] Salgado, N. E., Aliabadi, M. H., “ Dual reciprocity method for the analysis of adhesively patched sheets”, Communications in Numerical Methods in Engineering, 13:397-405, 1997.

- [33] Salgado, N. E., Aliabadi, M. H., “ The boundary element analysis of cracked stiffened sheets reinforced by adhesively bonded patches”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:195-207, 1998.
- [34] Sekine, H., Yan, B., Yasuho, T., “ Numerical simulation study of fatigue crack growth behavior of cracked aluminium panels repaired with FRP composite patch using combined BEM/FEM”, *Engineering Fracture Mechanics*, 42:2549-2563, 2005.
- [35] Shih, C. F., Moran, B. and Nakamura, T. “Energy Release Rate along a three dimensional crack front in a thermally stressed body.” *International Journal of Fracture Mechanics*, 30:79-102 (1986)
- [36] Tarn, J. G., Shek, K. L., “Analysis of cracked plates with a bonded patch”, *Engineering Fracture Mechanics*, 40:1055-1065, 1991.
- [37] Useche, J., Sollero P. and Albuquerque, E. L. “Boundary element analysis of cracked sheets repaired with adhesively bonded anisotropic patches”, *BeTeq: International Conf. On Boundary Element Techniques* (M. H. Aliabadi (ed.)), Paris, (2006).
- [38] Useche, J. “Análise pelo Método de Elementos de Contorno de Placas de Reissner Trincadas e Reparadas com Material Compósito”. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2007, 165 p. Tese (Doutorado)
- [39] Wen, P., Aliabadi, M. H., Young, A., “ Application of dual reciprocity method tp plates and shells”, *Enginnering Analysis with Boundary Elements*, 24:583-590, 2000.
- [40] Wen, P., Aliabadi, M. H., Young, A., “ Plane stress and plate bending coupling in BEM analysis of shallow shells”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1107-1125, 2000.
- [41] Wen, P., Aliabadi, M. H., Young, A., “ Boundary element analysis of curved panels with adhesively bonded patches”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:43-61, 2003.
- [42] Widagdo, D., Aliabadi, M. H., “ Boundary element analysis of cracked panels repaired by mechanically fastened composite patches”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25:339-345, 2001.



- [43] Young, A., “ Influence of tapering on the stresses in repair patches”, Proceedings of the 3th International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Owen, D. R. J., e Luxmoore, A. R. (eds), 741-752, San Antonio, EUA 1987.
- [44] Young, A., Cartwright, D. J., Rooke, D. P., “ The boundary element method for analysing repairs paletes on cracked finite sheets”, Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Owen, D. R. J., e Luxmoore, A. R. (eds), 463-479, San Antonio, EUA 1998.