



LETICIA BIZARRE

Modelagem de forças de contato não lineares em mancais de elementos rolantes de contato angular

12/2015

**CAMPINAS
2015**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

LETICIA BIZARRE

**Modelagem de forças de contato não lineares
em mancais de elementos rolantes de contato
angular**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientadora: Prof. Dr. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Coorientador: Dr. Fábio Nonato de Paula

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA
LETÍCIA BIZARRE, E ORIENTADA PELA
PROF^a. DR^a KATIA LUCCHESI CAVALCA DEDINI

Katia Lucchesi Cavalca .
ASSINATURA DA ORIENTADORA

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

B551m Bizarre, Leticia, 1990-
Modelagem de forças de contato não lineares em mancais de elementos
rolantes de contato angular / Leticia Bizarre. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.

Coorientador: Fábio Nonato de Paula.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Mecânica.

1. Rolamento de esferas. 2. Dinâmica. 3. Mecânica do contato. I. Dedini, Katia
Lucchesi Cavalca. II. Nonato, Fábio. III. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Modeling of the nonlinear contact forces in rolling element bearings
with angular contact

Palavras-chave em inglês:

Ball bearing

Dynamics

Mechanics of contact

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestra em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]

Robson Pederiva

Domingos Alves Rade

Data de defesa: 04-02-2015

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INTEGRADOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

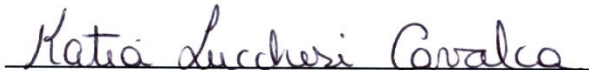
**Modelagem de forças de contato não lineares
em mancais de elementos rolantes de contato
angular**

Autor: Leticia Bizarre


Orientadora: Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Coorientador: Fábio Nonato de Paula

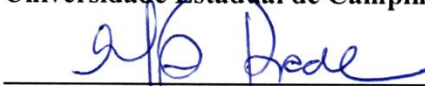
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Prof. Dr. Robson Pederiva
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP



Prof. Dr. Domingos Alves Rade
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Campinas, 4 de Fevereiro de 2015.

Dedico este trabalho à minha família, principalmente aos meus pais Cássia e Márcio e às minhas irmãs Larissa, Lisandra e Lorena. Dedico também ao meu namorado Natan, companheiro durante todo o processo.

Agradecimentos

Aos meus pais, Márcio e Cássia, que mais do que me proporcionar uma infância maravilhosa e vida acadêmica, formaram os fundamentos do meu caráter e me tornaram o que sou hoje. Obrigada por serem a minha referência de tantas maneiras e estarem sempre presentes na minha vida, mesmo separados por tantos quilômetros. Vocês são os meus exemplos, e espero um dia ser pelo menos metade do que vocês são. À minhas irmãs Larissa, Lisandra e Lorena por serem sempre minhas companheiras, e mesmo distantes, estarem sempre torcendo por mim e me dando forças, motivação e carinho.

Ao meu namorado Natan, por durante todo este tempo ter me apoiado e acreditado sempre em mim, pelo conforto nos momentos difíceis e pela divisão dos momentos felizes. Obrigada por me fazer sentir tão amada, nos diversos momentos de nossa vida.

Aos meus familiares de Catanduva, principalmente aos meus avós: José e Esmeralda pelo apoio até os dias de hoje, oração e palavras de conforto, e João e Natalina que sempre me apoiaram na vida acadêmica, mas que perdi neste percurso, e tenho certeza que estarão sempre comigo, e espero estar dando a eles o orgulho que eles merecem, pois foram pessoas maravilhosas e fazem muita falta em minha vida.

Aos amigos que fiz durante estes anos que sempre foram meus companheiros em todos os momentos, sempre ajudando um ao outro e dando consolo nos momentos de dificuldade. Obrigada: Marina, Natália, Anna, Rafael, Bruno, Kevin, Anderson, Mário, Matheus, Felipe, Lucas, Priscila, Guilherme, Marcelo, Marina, André, Gustavo, Renan e Daniela.

À minha professora e orientadora deste trabalho, Katia, por aceitar me orientar, pela paciência, dedicação, incentivo e sabedoria que muito me auxiliou no desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Ao Fábio, por ter me ajudado desde minha introdução ao meu tema de estudo, pela paciência, pelo companheirismo e por todo o apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

À todos os meus colegas de laboratório, que contribuíram diretamente e indiretamente para a conclusão deste trabalho.

À Schaeffler do Brasil pelo apoio financeiro durante todo o desenvolvimento do projeto.

Muito obrigada nunca será suficiente para demonstrar a grandeza do que recebi de vocês. Peço a Deus que os recompense à altura.

E é a Deus que dirijo minha maior gratidão, pois foi ele quem me criou, sempre guiou, colocou estas pessoas incríveis em minha vida, me deu uma família maravilhosa, capacidade, fé e energia para sempre continuar e chegar onde quero, realizando os meus sonhos ao lado das pessoas que amo.

“O que fazemos em vida ecoa pela eternidade.”

Maximus Decimus Meridius

Resumo

Com a necessidade da diminuição do tempo de projeto, a utilização de modelos computacionais para simulação de componentes constitui fase fundamental no projeto preliminar de máquinas e equipamentos e permite avaliar parâmetros de projeto para minimizar testes físicos em protótipos. Dentro deste contexto, o trabalho aqui apresentado segue dando continuidade à modelagem de mancais de elementos rolantes, neste caso esferas, anteriormente desenvolvido para contato puramente radial. O estudo da dinâmica de mancais de elementos rolantes e a compreensão de sua modelagem computacional permitem conhecer sua influência sobre o sistema completo. Será inserido o modelo de lubrificação Elastohidrodinâmica (EHD) no modelo dinâmico do mancal, permitindo obter parâmetros equivalentes de rigidez e amortecimento, para posterior caracterização do mancal, utilizando uma análise no domínio do tempo. Uma vez estimada a distribuição de forças, são calculados parâmetros de carga e lubrificação, bem como a geometria no contato, os quais são utilizados no modelo EHD. Este último contém a solução das equações que descrevem o comportamento da região lubrificada, empregando o método numérico de multi-níveis. Desta forma, calcula-se a pressão no contato e a espessura de filme. Utiliza-se uma aproximação para as forças não lineares na região em que a relação entre força e deformação no contato tem comportamento aproximadamente linear. Nesta região, os parâmetros físicos de rigidez e de amortecimento total do conjunto esferas, pista interna e pista externa são estimados, e também para cada uma das esferas, tendo em consideração a presença do contato angular nas esferas e a aplicação de forças nas direções axial e radial.

Palavras Chave: forças de contato, mancal de esferas, contato angular, lubrificação EHD.

Abstract

Considering the necessity of decrease design time, the use of computer models for simulation of components is an essential phase in the preliminary design of machinery and equipment and allows to evaluate design parameters to minimize physical tests on prototypes. Inside this context, the work presented here follows continuing the modeling of rolling element bearings, in this case balls, previously developed for pure radial contact. The dynamics study of the rolling element bearings and the understanding of their computer modeling allow us to know its influence on the complete system. The model for Elastohydrodynamic lubrication (EHD) is inserted in the dynamic model of the bearing, and this allows to obtain equivalent parameters of stiffness and damping, for further characterization of the bearing using a time domain analysis. After the estimated distribution of forces, lubrication and load parameters are calculated, as well as the geometry of the contact, which are used in EHD model. The latter contains the solution of equations that describe the behavior of lubricated region, using the numerical method of multilevel. Thus, the contact pressure and film thickness are calculated. It is used an approximation to the nonlinear forces in the region where the relation between force and deformation of the contact has approximately linear behavior. In this region, the physical parameters of stiffness and damping of the complete set spheres, inner raceway and outer raceway are estimated, and also, for each sphere is taking into account the presence of the angular contact of the spheres, and the application of forces in both axial and radial directions.

Keywords: contact forces, ball bearings, angular contact, EHD lubrication.

Lista de Ilustrações

Figura 2.1 – Geometria de contato para corpos sólidos (Hamrock, 1976).....	6
Figura 2.2 – Modelo massa-mola-amortecedor para a pista e esfera (Wijnant et al. (1999)).	8
Figura 3.1 – Rolamento de esferas de contato angular.....	13
Figura 3.2 – Área de contato de Hertz (Nonato, 2009)	14
Figura 3.3 – Raios de curvatura no contato entre dois corpos (Radaelli, 2013).....	15
Figura 3.4 – Geometria do rolamento (Radaelli, 2013).....	15
Figura 3.5 – Representação do contato angular e do diâmetro primitivo d_m (Radaelli, 2013).....	16
Figura 3.6 – Distribuição de carregamento em mancais radiais, carga em z (Changsen, 1991)... ..	17
Figura 3.7 – Aplicação de solicitações nas direções axial, z e y, e momentos no eixo y e z (Radaelli, 2013)	17
Figura 3.8 – Mancal de contato angular sujeito a um carregamento axial (Harris, 1991).	19
Figura 3.9 – Posição dos centros dos raios de curvatura (Harris, 1991).	20
Figura 3.10 – Representação das pistas interna, externa e a esfera, com detalhes geométricos na região mostrada (Harris, 1991).....	23
Figura 3.11 – Equilíbrio de forças e momentos para altas rotações (Adaptado de Harris, 1991). ..	24
Figura 3.12 – Exemplos de superfícies de contato não conformes	27
Figura 3.13 – (a) Geometria de dois corpos em contato (Nonato, 2009); (b) Representação da espessura calculada $h(x,y)$	29
Figura 3.14 – Aproximação do filme de óleo por molas e amortecedores.	32
Figura 3.15 – Ilustração das forças normais ao contato entre as pistas e a esfera: (A) sem contato angular, (B) com contato angular.	33
Figura 3.16 – Esquema dos amortecimentos das pistas interna e externa em série para cada esfera e dos amortecimentos totais em cada esfera em paralelo para o mancal.	35
Figura 3.17 – Organograma com a sequência de estudo realizada.....	36
Figura 4.1 – Gráfico da distribuição de carga nas esferas ((a) pista interna, (b) pista externa) para cada tipo de carregamento aplicado ao mancal em baixa carga.	40

Figura 4.2 – Comportamento da força dissipativa para um caso exemplo (Tipo 5).....	42
Figura 4.3 – Comparação entre os parâmetros de força não linear para cada uma das pistas, nas direções radial (a) e axial (b) (baixa carga).	46
Figura 4.4 – Comparação entre os amortecimentos para cada uma das pistas, nas direções radial e axial (baixa carga).	47
Figura 4.5 – Gráfico comparativo entre a força total dinâmica determinada a partir dos parâmetros da força de contato e dos amortecimentos calculados, e a força dinâmica resultante do algoritmo multi-níveis para o caso transiente.....	48
Figura 4.6 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos parâmetros de força não linear –restitutiva).....	49
Figura 4.7 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos amortecimentos – força dissipativa).....	50
Figura 4.8 – Gráfico da distribuição de carga nas esferas ((a) pista interna, (b) pista externa) para cada tipo de carregamento aplicado ao mancal em alta carga.	51
Figura 4.9 – Comparação entre os parâmetros de força não linear para cada uma das pistas, nas direções radial (a) e axial (b) (alta carga).	55
Figura 4.10 – Comparação entre os amortecimentos para cada uma das pistas, nas direções radial e axial (alta carga).....	56
Figura 4.11 – Gráfico comparativo entre a força total dinâmica determinada a partir dos parâmetros da força de contato e dos amortecimentos calculados, e a força dinâmica resultante do algoritmo multi-níveis para o caso transiente.....	57
Figura 4.12 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos parâmetros de força não linear –restitutiva).....	58
Figura 4.13 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos amortecimentos – força dissipativa).....	59

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Valores numéricos de força e velocidade de rotação para as duas intensidades de carga testadas.	37
Tabela 4.2 – Características do mancal estudado 6006	37
Tabela 4.3 – Características e considerações do problema em estudo.	38
Tabela 4.4 – Descrição dos esforços aplicados ao mancal para cada tipo de carregamento testado.	39
Tabela 4.5 – Parâmetros do modelo de força não linear calculados para cada tipo de carregamento nas direções radial e axial do mancal (baixa carga).	42
Tabela 4.6 – Estimativa de amortecimento (N.s/m) para cada condição de carga nas direções radial e axial (baixa carga).....	43
Tabela 4.7 – Parâmetros do modelo de força não linear calculados para cada tipo de carregamento nas direções radial e axial do mancal (alta carga).	52
Tabela 4.8 – Estimativa de amortecimento (N.s/m) para cada condição de carga nas direções radial e axial (alta carga).	53
Tabela 4.9 – Tabelas comparativas entre as forças nominais aplicadas ao mancal e as forças calculadas usando o modelo não linear de força, para baixa e alta carga.....	60

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A - Posição do Centro do Raio de Curvatura	[m]
a - Semieixo Maior da Elipse de Contato	[m]
b - Semieixo Menor da Elipse de Contato	[m]
B - Curvatura Total do Mancal	
C - Amortecimento no Contato	[N.s/m]
C_i - Amortecimento no Contato do Anel Interno	[N.s/m]
C_o - Amortecimento no Contato do Anel Externo	[N.s/m]
C_T - Amortecimento Equivalente entre Anéis	[N.s/m]
D - Diâmetro da esfera	[m]
d_m - Diâmetro Primitivo do Rolamento	[m]
E - Módulo de Elasticidade	[N/m ²]
E' - Módulo de Elasticidade Reduzido	[m ² /N]
f - Razão de Osculação	
F - Força Externa	[N]
F_c - Força Centrípeta	[N]
\mathfrak{F} - Integral Elíptica de Segunda Ordem	
h - Espessura de Filme	[m]
h_0 - Aproximação entre os Corpos	[m]
I - Momentos e Produtos de Inércia	[kg.m ²]
\mathcal{K} - Integral Elíptica de Primeira Ordem	
K_{EHD} - Rigidez do Contato Lubrificado	[N/m ⁿ]
K - Rigidez do Contato Seco / Rigidez de Hertz	[N/m ^{1,5}]
K_T - Rigidez Equivalente do Contato Lubrificado entre Anéis	[N/m ⁿ]
L - Parâmetro Adimensional de Lubrificante Moes	
m - Massa do Elemento em Contato	[kg]

M - Parâmetro Adimensional de Carga Moes	
M - Momento Externo	[N.m]
M_g - Momento Giroscópico	[N.m]
n - Exponente Não Linear de Rigidez no Contato	
n - Rotação	[rpm]
p - Pressão	[N/m ²]
P_d - Folga Diametral	[m]
Q - Carregamento	[N]
r - Raio de Osculação	[m]
R_x - Somatória de Curvaturas em x	[m ⁻¹]
R_y - Somatória de Curvaturas em y	[m ⁻¹]
\mathcal{R} - Raio em Relação ao Centro de Curvatura	[m]
t - Tempo	[s]
u_s - Soma de Velocidades Superficiais	[m ⁻¹]
v - Velocidade Linear	[m/s]
X - Posição do Centro da Esfera	[m]
Z - Número de Elementos no Mancal (Esferas)	

.....

Letras Gregas

α - Índice Pressão-Viscosidade	[m]
α - Ângulo de Contato	[°]
β - Ângulo de Nutação	[°]
Γ - Domínio do Contato	
δ - Deslocamento no Contato	[m]
δ^* - Deformação no Contato Adimensional	
δ_i - Deslocamento no Contato do Anel Interno	[m]
δ_o - Deslocamento no Contato do Anel Externo	[m]
δ_T - Deslocamento Total entre Anéis	[m]
η - Viscosidade	[N.s/m ²]
η_0 - Viscosidade a Pressão Ambiente	[N.s/m ²]

κ - Razão Elíptica do Contato	
ν - Coeficiente de Poisson	
ρ - Densidade	[g/m ³]
ρ - Curvatura	[m ⁻¹]
ρ_0 - Densidade a Pressão Ambiente	[g/m ³]
ψ_j - Posição Angular do Elemento j (Azimuth)	[rad]
ω - Velocidade Angular da Pista	[rad/s]
ω_r - Velocidade Angular da Esfera	[rad/s]
ω_m - Velocidade de Rotação da Esfera em Torno do Eixo do Mocal	[rad/s]
γ - $D \cos(\alpha/d_m)$	

.....

Subscritos

i - Contato da Esfera com a Pista Interna
o - Contato da Esfera com a Pista Externa
j - Posição da Esfera
n - Normal ao Contato
a - Axial
r - Radial
x - Em Relação ao Eixo x
y - Em Relação ao Eixo y
z - Em Relação ao Eixo z

.....

Sobrescrito

0 - Ângulo Nominal

.....

Abreviações

<i>EHD</i> – Elastohidrodinâmico
<i>LM</i> – Levenberg–Marquardt
GDL – Graus de Liberdade

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	xvii
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xxiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 Lubrificação EHD	4
2.2 Dinâmica em mancais	10
3 MODELAGEM TEÓRICA	13
3.1 Modelo Dinâmico	13
3.2 Modelo de Lubrificação	26
3.3 Modelo de força não linear para o mancal lubrificado	31
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
4.1 Resultados em baixa carga	39
4.2 Resultados em alta carga	51
5 CONCLUSÕES	63
5.1 Sugestões para trabalhos futuros	64
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
APENDICE A – Método Numérico de Levenberg - Marquardt	70

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros tipos mais rudimentares de mancais de rolamentos eram utilizados desde as civilizações mais antigas como a egípcia, a grega e a romana para facilitar o transporte de mercadorias, monumentos e para a movimentação de mecanismos que auxiliavam na execução de tarefas do dia-a-dia. Atualmente, após passarem por constantes aperfeiçoamentos, são amplamente utilizados na indústria em geral e para aplicações diversas em equipamentos mecânicos. Seus setores de aplicação estão cada vez em maior expansão no mercado consumidor, tornando extremamente necessário o estudo e os consequentes avanços no projeto e nas aplicações destes mancais, possibilitando melhorar características de desgaste, ruído, sustentação e vida dos mesmos, em suas variadas condições de operação.

Com a necessidade da diminuição do tempo de projeto, a utilização de modelos computacionais para simulação de componentes mecânicos constitui fase fundamental do projeto de máquinas e equipamentos, além de avaliar parâmetros de projeto, minimizando os testes físicos em protótipos.

Observa-se, também, a necessidade de modelar os componentes de sistemas mecânicos considerando o comportamento não linear destes e as interfaces entre os componentes do sistema. Porém, com o aumento da complexidade do sistema, o projeto exige modelagens mais robustas, como é o caso do mancal lubrificado. Desta forma, a solução computacional completa de um modelo numérico deste sistema pode ser onerosa em termos de tempo de processamento e uma caracterização do mancal permite o ajuste de funções não lineares e/ou lineares ao modelo completo, o que otimiza substancialmente os tempos computacionais nas simulações numéricas onde estes componentes são inseridos, como, por exemplo, um sistema de rotores.

O presente trabalho estuda a dinâmica de mancais de elementos rolantes de esferas de contato angular e sua modelagem computacional, que permite conhecer sua influência sobre o sistema completo, e o cálculo dos deslocamentos e forças para cada esfera no contato pista

esfera, levando em conta a lubrificação elastohidrodinâmica (EHD) através da solução por multi-níveis para o contato.

Sua origem remonta aos trabalhos iniciados durante os projetos de iniciação científica de Dalton de Paula Cavalcanti (2000), no qual foram estudadas as pressões e tensões de contato seco pelo modelo de Hertz (Cavalcanti, 1999), com foco na aplicação em mancais de rolamento, seguido pelo projeto de Fabio Nonato de Paula (2006), que levou esta aproximação para aplicação inicial em mancais de rolamento de esferas introduzindo o conceito de lubrificação EHD, inicialmente de forma aproximada. Na sequência deste projeto, percebeu-se a necessidade de resolver numericamente o problema de lubrificação, e consequentemente, encontrar um método numérico que assim o permitisse. Desta forma, foi estudado e implementado o método *Multi-grid*, Multi-níveis, durante o mestrado de Nonato (2009). Em seguida, dando continuidade ao projeto inicial de análise de contato em mancais de elementos rolantes de esferas, o método numérico foi aplicado a um mancal de dimensões comerciais conhecidas, propondo-se uma aproximação não linear para as forças de contato e, consequentemente, para as forças desenvolvidas no mancal sob determinadas condições de carregamento e velocidade de rotação (NONATO, 2013). Destaca-se, neste último, que o estudo teve como foco mancais puramente radiais, ou seja, com movimentos de precessão no plano do mancal, perpendicular ao eixo rotativo, sob carregamento radial.

O trabalho aqui desenvolvido acresce a complexidade geométrica e, consequentemente, dinâmica, expandindo o modelo de lubrificação para um mancal radial de contato angular com 5 GDL (para o anel), sujeito a carregamentos radiais, axiais e momentos. Inicialmente, é realizada uma análise estática do mancal submetido a um carregamento puramente axial e puramente radial, separadamente. Em seguida, ambos os carregamentos são aplicados simultaneamente e, num passo seguinte, também são introduzidos momentos angulares como forças externas. Então, para todas as combinações preestabelecidas, é feito um estudo cinemático, para encontrar as velocidades que caracterizam a força centrípeta e o momento giroscópico, ou seja, o carregamento dinâmico nas esferas num determinado instante a uma determinada velocidade angular do eixo. Nesta etapa, são usadas expressões de equilíbrio de posição e de forças para cada esfera e o equilíbrio de forças no mancal, considerando 5 GDL.

A partir da distribuição de forças em cada esfera, são calculados os parâmetros que caracterizam o contato (Parâmetros adimensionais de Moes). Após a caracterização de cada contato, é solucionado o sistema de equações que modelam a lubrificação EHD, através do algoritmo multi-níveis. Para as simulações realizadas no decorrer da presente pesquisa, foi utilizado o algoritmo desenvolvido durante o trabalho de Nonato (2009), configurando parâmetros de convergência de acordo com o problema em estudo, e mais detalhes sobre o algoritmo podem ser encontrados nos capítulos 3 e 4 de seu trabalho. Desta forma, é obtida a distribuição de pressão e a espessura de filme no contato e, por conseguinte, as forças não lineares atuantes no mesmo. Na sequência, são estimados os parâmetros de caracterização das forças não lineares no contato lubrificado através de uma otimização que utiliza o Método de Levenberg-Marquardt da biblioteca matemática para o Fortran 90. Em uma última fase, são calculados os amortecimentos, por meio de uma linearização, usando os resultados do passo anterior (otimização que calcula os parâmetros da força não linear no contato) e dados resultantes da parte transiente que é resolvida no algoritmo multi-níveis.

Desta forma, observa-se que o modelo de contato EHD é caracterizado e posteriormente inserido no modelo dinâmico do mancal, permitindo obter parâmetros equivalentes de rigidez e amortecimento, assim como a caracterização do mancal no domínio do tempo. O modelo de lubrificação inserido na modelagem dinâmica de um mancal de rolamento com contato angular possui cinco graus de liberdade, complementando, desta forma, os modelos previamente estudados para dois graus de liberdade (translação de um mancal radial no plano).

A caracterização de um mancal lubrificado permite utilizar os parâmetros do modelo em estudos futuros, por exemplo, no campo de análise de falhas, que exige um modelo mais robusto para avaliar a influência dos mancais no sistema completo.

Em resumo, os principais objetivos do presente trabalho consistem em: inserir o modelo de lubrificação EHD como descrito por Nonato (2013) no modelo dinâmico de um rolamento com cinco graus de liberdade e contato angular (Radaelli (2013)); realizar a integração destes dois modelos e comparar os resultados obtidos para as diferentes condições de carga (alta carga e baixa carga), considerando os cinco graus de liberdade e a presença de contato angular, levando em consideração as direções radial e axial do problema.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica sobre os temas abordados no presente trabalho se encontra dividida em duas partes que se relacionam. Porém, para facilitar o entendimento do desenvolvimento dos temas, optou-se por tratar inicialmente do processo de evolução do tema de lubrificação EHD e, em seguida, do desenvolvimento na área de teoria dinâmica para mancais e estudos em contato angular.

2.1 Lubrificação EHD

A base para a teoria de Lubrificação Elastohidrodinâmica tem suas origens nas pesquisas realizadas por Hertz em 1881, que desenvolveu estudos sobre o contato a seco entre dois corpos esféricos, servindo de base inicial para a teoria de contato. Sua teoria é, ainda hoje, suporte para cálculos de área de contato e perfis de pressões no contato seco.

Em 1886, Reynolds publicou o clássico trabalho que foi imprescindível para o desenvolvimento da teoria dos mancais, no qual descreveu a atual teoria de lubrificação, que foi previamente estudada também por Tower, como descrito em Reynolds (1886), em seus experimentos sobre o aumento da pressão em mancais hidrodinâmicos. Barus (1893) complementou o desenvolvimento do tema estudando os efeitos da variação de pressão sobre a viscosidade e, com estes primeiros resultados e estudos, surgiu a Teoria de Lubrificação Elastohidrodinâmica (EHD).

Como descrito em Venner e Lubrecht (2000) as principais diferenças entre a teoria de lubrificação de contato seco de Hertz e a lubrificação EHD são:

1. Na definição do filme de óleo, a deformação dos corpos não é desconsiderada;
2. A viscosidade não é mais independente da pressão, assim como a densidade do fluido lubrificante;

3. A lubrificação hidrodinâmica se caracteriza em superfícies com alto grau de conformidade geométrica, mas a EHD normalmente ocorre em corpos de geometrias não conformes.

Com base na teoria desenvolvida, e aceita até o momento como válida para todas as condições de lubrificação, foram feitos diversos experimentos para análise de lubrificação em elementos de máquinas, e percebeu-se que haviam discrepâncias entre as espessuras de filme medidas e as avaliadas pela teoria hidrodinâmica, como descreveu Martin (1916).

Dowson (1962) modificou as equações de Reynolds a fim de considerar variações nas propriedades do fluido, tais como, densidade e viscosidade ao longo do filme de óleo, obtendo, desta forma, as equações generalizadas de Reynolds que passam a descrever termicamente o fenômeno de lubrificação hidrodinâmica.

Os estudos sobre a discrepância entre medições experimentais e a teoria continuaram na análise de Dowson e Higginson (1966), que apresentaram uma pesquisa inicial para o contato linear e verificaram que não era possível garantir a formação do filme de óleo que sustentaria a pressão do contato, considerando que a teoria estimava valores de espessura de filme de óleo relativamente menores do que a própria rugosidade das peças.

Desta forma, para uma previsão correta do filme de óleo, e consequentes previsões do comportamento do lubrificante em altas pressões, era necessário considerar fatores ainda não contidos da teoria dinâmica dos fluidos, e assim, aplicá-los em diferentes regimes de lubrificação. A Teoria de lubrificação EHD parte do modelo de contato seco de Hertz e considera a elasticidade dos corpos em contato sobre o filme de óleo que os separa. Os principais interesses, nesta fase, eram prever a espessura de lubrificante e entender a influência da rugosidade dos corpos em contato.

O desenvolvimento numérico para a lubrificação EHD começou com as publicações de Hamrock (1976) (Figura 2.1) que utilizava o método de diferenças finitas para a solução dos sistemas de equações que continham a modelagem EHD, considerando o contato pontual e as propriedades do fluido, como a variação da viscosidade. Seus trabalhos dão continuidade ao estudo considerando os efeitos da elipsidade no contato.

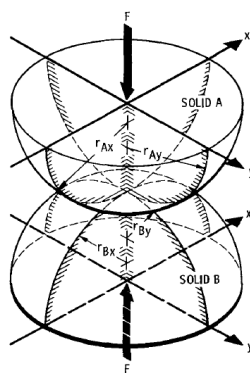


Figura 2.1 – Geometria de contato para corpos sólidos (Hamrock, 1976).

Após este primeiro passo para as soluções computacionais, os esforços se basearam na melhoria dos métodos para aumentar a eficiência dos algoritmos. Lubrecht et al. (1986) propuseram novas técnicas para a solução de equações diferenciais usadas para a lubrificação EHD. O método ficou conhecido como Multi-Grid ou Multi-níveis. Porém, este ainda apresentava grande complexidade no equacionamento de Reynolds e, posteriormente, seria modificado por Venner para a solução do contato utilizando a lubrificação EHD.

Venner, em 1991, realizou modificações no algoritmo de Lubrecht retirando os termos de pressão reduzida, diminuindo a complexidade do mesmo. Responsável por uma série de publicações sobre este assunto, Venner trabalhou com várias malhas de diferentes refinamentos, o que permitiu observar os detalhes do filme com ganho de precisão, melhorando o método de relaxação usado primeiramente por Hamrock (1976). Até o momento, a dimensão das malhas e a quantidade de nós ainda levava a tempos computacionais muito elevados, o que estimulou o estudo das diferentes dimensões de malhas e seus refinamentos. Com as mudanças implementadas por Venner, o método EHD tornou-se mais aplicável no que se refere ao tempo de processamento. Venner e Lubrecht (1994, 1996) apresentaram avanços sobre a consideração de distúrbios no filme de óleo, sobre a influência da velocidade de rotação na espessura da película e sobre o estudo de fluxos de óleo com instabilidades.

A Teoria de Contato de Hertz, descrita por Changsen (1991) trata do surgimento de uma área de contato, aproximada por uma elipse, que suporta a carga de forma parabolóide. Esta área apresenta dimensões muito inferiores às dimensões de curvatura dos corpos, e a razão da elipse é função apenas da geometria. Changsen estuda o carregamento estático e realiza uma descrição

cinemática, encontrando também os carregamentos nos elementos do rolamento. A abordagem é simples e foi descrita também por outros autores como Harris (1991) e Wijnant (1998).

Melhorias no método multi-níveis continuaram a ser obtidas, pois antes a modelagem se focava em filmes finos e superfícies rugosas com possíveis descontinuidades. Ao final da década de 1990, os algoritmos passaram a ter aplicação em sistemas transientes. O filme de óleo passou a ter influência direta no comportamento total do sistema.

Nurgat e Berzins (1996) propuseram diferentes esquemas de relaxação para o método multi-níveis, adaptando o modelo desenvolvido por Venner. Posteriormente, Goodyer (2001) utilizou a adaptação feita por Nurgat e introduziu mudanças no algoritmo no que diz respeito aos ciclos de malhas, otimizando determinados pontos do método. Ainda utilizando o método de Venner, Wang et al. (2001) criaram um método multi-níveis simplificado, aplicando apenas a primeira aproximação de Gauss-Seidel, em contatos elípticos, o que reduziu a complexidade numérica sem perder a precisão.

Em seus estudos, Wijnant (1998) estudou o comportamento do contato com lubrificação EHD sob carga dinâmica e vibracional, propôs uma equação de movimento que representa o contato pista-esfera e, também, que o contato seco possui uma rigidez não linear que precisa ser considerada. Estudou as diferenças entre o contato elíptico e o contato circular para rigidez e amortecimento, concluindo com as análises da influência de vibrações na espessura de filme e nas condições de lubrificação.

Dando continuidade à pesquisa, Wijnant et al. (1999) (Figura 2.2) propuseram a utilização do modelo massa-mola-amortecedor, assim como será desenvolvido no presente trabalho, para representar o contato, bem como um modelo não linear para as forças no mesmo, que pode ser utilizado aumentando a precisão do ajuste dos coeficientes dinâmicos.

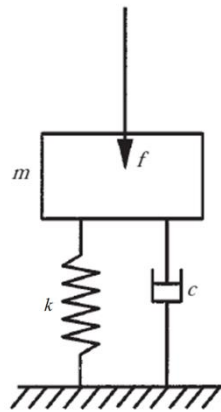


Figura 2.2 – Modelo massa-mola-amortecedor para a pista e esfera (Wijnant et al. (1999)).

Liew et al. (2002) consideraram os efeitos de reações centrífugas nos elementos rolantes, assim como os efeitos na rigidez para rolamentos de contato angular. Trabalharam com modelos de 2 GDL e 5 GDL usando o modelo padrão de Hertz para representar o contato e introduziram coeficientes que representavam o filme de óleo em todos os graus de liberdade.

Usando o modelo proposto por Lim e Singh (1990 a e b), Liew et al. (2005) atualizaram a modelagem incluindo o efeito da variação do tempo, que antes não era considerada na matriz de rigidez, e também passaram a considerar a variação de posição dos elementos rolantes com o tempo.

Spikes (2006) fez uma coletânea histórica sobre o assunto lubrificação EHD mostrando desde outras áreas que se beneficiaram com o estudo da teoria até os períodos de estudo e tudo o que foi desenvolvido até aquele momento no que dizia respeito às soluções matemáticas e considerações na modelagem.

Com o modelo do contato entre as partes móveis dos mancais e com as características dinâmicas do filme de óleo consideradas no mesmo, pode-se estudar o comportamento dos mancais quando expostos a diferentes tipos de solicitação, como por exemplo, a resposta em frequência do mancal quando solicitado com carregamentos harmônicos. Villa et al. (2007) estudaram um sistema de rolamento com rotor, usando 2 GDL, considerando os efeitos de

variação de rigidez, contato de Hertz e folga radial, permitindo o estudo da resposta harmônica do sistema proposto.

Usando as técnicas de modelagem vistas até o momento, muitos autores as empregaram para o estudo de falhas em rolamentos, como a fadiga no contato. Como exemplo cita-se o caso de Sawalhi e Randall (2008) que usaram o modelo de Liew et al. (2002) para o estudo de falhas considerando os efeitos do lubrificante.

Após todos os desenvolvimentos mostrados sobre o tema de lubrificação EHD e suas soluções, chega-se aos estudos de Nonato (2009) e Nonato e Cavalca (2010). Os autores utilizam um modelo não linear para a força de contato e um modelo dinâmico para mancais radiais de elementos rolantes com lubrificação EHD, variante no tempo e usando carregamentos harmônicos e transientes. Nonato (2009) ajustou com polinômios de terceiro grau as respostas obtidas pelo método multi-níveis, de força e deslocamento, mostrando claramente o comportamento não linear da rigidez. Durante o processo, a viscosidade do óleo foi considerada no amortecimento, mostrando bons resultados nas respostas obtidas.

Nonato (2012, a e b) continuou seus estudos utilizando o método multi-níveis para contatos com EHD, avaliando o comportamento do amortecimento linear nos contatos lubrificados dos rolamentos. Sua pesquisa avaliou os efeitos de carga sobre o amortecimento em contatos EHD, e mostrou, por exemplo, a dependência do coeficiente de amortecimento sobre a frequência de excitação adimensional. Outra contribuição foi o estudo dos efeitos de carga sobre a rigidez EHD, examinando a variação de cargas e velocidades ao longo do modelo não linear proposto em seus trabalhos.

Wiegert et al. (2013) fizeram uma simplificação no modelo EHD para contatos não conformes e lineares sob carga dinâmica, dividindo o problema em duas partes distintas: a parte de contato e a parte dinâmica do problema, o que simplificou a modelagem. Para a solução das equações do EHD, utilizou-se um pacote comercial computacional.

2.2 Dinâmica em mancais

No que concerne à teoria dinâmica para mancais de contato angular, um dos primeiros estudos envolvendo mancais de rolamentos mostrou como as cargas se relacionavam com a previsão da vida em fadiga e foi feita por Lundberg e Palmgren (1947, 1952). O livro de Palmgren (1945) apresentou um estudo generalizado dos mancais de rolamento, tendo informações sobre os tipos de mancais, suas configurações, suas aplicações, as forças envolvidas e as relações entre o carregamento e a vida do mancal.

Jones (1960) estabeleceu o critério de pista de controle e fez análises do movimento sem considerar a lubrificação hidrodinâmica e os efeitos do separador, considerando ainda os efeitos giroscópicos agindo nas esferas. Estudou também, em seu trabalho, o cálculo de vida para rolamentos utilizando um somatório de fatores de fadiga.

Tamura e Shimizu (1967) propuseram um modelo dinâmico vibracional para mancais de elementos rolantes, desenvolvendo o equacionamento para esferas em alguns casos especiais e estudando a influência das rigidezes das mesmas, considerando o contato ainda seco de Hertz, a fim de contribuir para a identificação das causas de vibrações na direção do eixo girante.

Sunnersjo (1978) e Fukata et al. (1985) fizeram estudos da dinâmica vibracional dos mancais por meio de experimentos e consideraram os efeitos de não linearidade da rigidez e a dependência do tempo da excitação. Estudaram rotores rígidos suportados por um rolamento de elementos rolantes flexíveis, nos quais os efeitos no sistema eram aproximados como uma massa concentrada no centro do rolamento, considerando dois graus de liberdade.

Já nas pesquisas de Gupta (1979), a interface entre os componentes foi considerada hidrodinâmica. Foi feito o estudo das diversas interações, separador-esfera e pista-separador (caso de lubrificação considerado hidrodinâmico), bem como a modelagem destes componentes. Apresentaram uma nova forma de falha para rolamentos devida à instabilidade da esfera e/ou do separador, uma vez que anteriormente, fadiga era o único motivo apontado para falhas em rolamentos. Gupta et. al. (1981) estudaram diversos lubrificantes de uma classe e o comportamento dos mesmos nos contatos deslizantes. Verificaram também a resposta dinâmica dos mancais de rolamentos, considerando a influência das características do lubrificante.

Os estudos vibracionais aplicavam ou condições de contorno ideais ou descreviam o elemento de rigidez como puramente translacional, o que não explicava como as vibrações podiam ser transmitidas do eixo em rotação para as estruturas conectadas ao mesmo. Em seus trabalhos Lim e Singh (1990a, 1990b, 1991, 1992) fizeram estudos próximos aos de Jones (1960), porém propuseram o uso de uma matriz de rigidez para os elementos rolantes dos mancais, que permitiria analisar a transmissão de vibrações tanto para esferas como para rolos, e assim desenvolveram o algoritmo numérico para descrever essas relações.

Harris (1991) publicou um livro com as principais aplicações e todo o desenvolvimento técnico dos mancais de rolamento. Neste, em especial, desenvolveu o equacionamento de carregamento estático e sua distribuição, bem como fez uma análise dinâmica com todas as forças e momentos envolvidos.

Estudando a dinâmica envolvida no rolamento de esferas, Meeks e Tran (1996) levaram em consideração o material utilizado nos mancais. O modelo proposto permitiria a análise das tensões e deformações dos elementos carregados devidas à pré-carga, carregamentos axiais e radiais e os carregamentos causados pela força centrípeta e momentos giroscópicos. Para o desenvolvimento, utilizaram seis graus de liberdade para análise do separador e desenvolveram as equações em coordenadas polares, o que tornou os cálculos mais simples.

Hagiu (1997) desenvolveu uma análise considerando as características de rigidez e amortecimento para rolamentos com contato angular em altas rotações. Desta forma, pôde estudar a dinâmica destes mancais, que era influenciada pela rigidez elástica do contato de Hertz e pelo amortecimento.

Em 2006, Harris e Kotzalas publicaram um livro que trouxe informações sobre o projeto, aplicações e desempenho dos rolamentos. A publicação apresentava uma análise aprofundada sobre a dinâmica e a cinemática dos rolamentos, trazendo capítulos com todo o detalhamento geométrico dos rolamentos de esferas e também as equações de equilíbrio, momentos giroscópicos e detalhes da rotação da esfera normal ao contato.

Baseado no trabalho de Harris (1991), Carvalho (2010) avaliou a distribuição do carregamento nas esferas para diferentes valores de folga. Usando a modelagem de carga radial

pura e o contato seco de Hertz, estudou a cinemática da esfera, a partir do conceito de pista de controle, introduzido por Jones (1960), e analisando os efeitos da força centrípeta e dos momentos giroscópicos para mancais de contato angular nulo.

Radaelli (2013) deu continuidade ao trabalho de Carvalho (2010) também utilizando a teoria apresentada por Harris (1991), incluindo, porém, em seu equacionamento, a condição de rolamentos de esferas com contato angular não nulo, estudando os efeitos da força centrípeta, dos momentos giroscópicos, dos rolamentos submetidos a carregamentos radiais e axiais e do posicionamento inicial da esfera.

Este trabalho se contextualiza pela abordagem da dinâmica do mancal de esferas de contato angular com 5GDL (Radaelli, 2013) com o modelo numérico de lubrificação elastohidrodinâmica (EHD) desenvolvida por Nonato (2013) para 2 GDL. No trabalho de Nonato (2013), encontra-se a validação de seu modelo, comparando os resultados propostos pela modelagem não linear da força apresentada em Nonato (2010), com os dados obtidos em uma bancada experimental.

O trabalho mais recente de Bizarre (2014) apresenta uma sequência de estudos e a metodologia, seguidas também no presente trabalho, abordando aplicações em baixa e alta carga, bem como o comportamento dos parâmetros de Moes e da força não linear para cada caso de carregamento aplicado ao mancal.

O processo de integração destes modelos envolve a convergência das equações para o equilíbrio de forças e para o equilíbrio de posição da esfera, para cada condição de operação (carga, velocidade), assim como a solução EHD para cada contato e, em seguida, para o mancal, resultando, finalmente, na caracterização das forças de contato e consequente identificação dos parâmetros de rigidez e amortecimento equivalentes no ajuste do modelo de forças.

3 MODELAGEM TEÓRICA

A apresentação da metodologia será dividida em três partes: o desenvolvimento da dinâmica do mancal, a parte da teoria de lubrificação EHD e o modelo de força não linear para a força no contato lubrificado.

3.1 Modelo Dinâmico

A estrutura dos mancais de elementos rolantes é geralmente composta, como mostra a figura 3.1, por anel interno, anel externo, esferas e separador. Dados sobre a geometria deste componente são fundamentais para o desenvolvimento dos equilíbrios estático, dinâmico e para a aplicação da Teoria de Lubrificação EHD, utilizados neste trabalho.

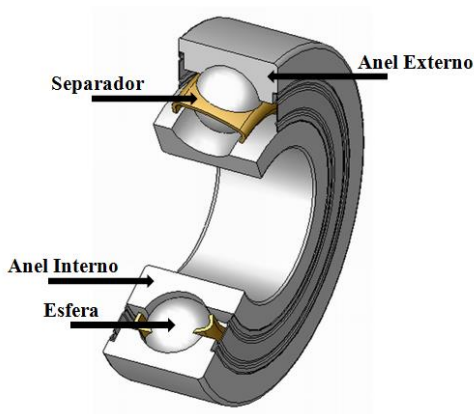


Figura 3.1 – Rolamento de esferas de contato angular.

Para uma primeira aproximação do cálculo da distribuição das forças nos elementos rolantes, será utilizada a Teoria de Contato de Hertz, considerando cinco graus de liberdade possíveis, como foi desenvolvido no trabalho de Radaelli (2013).

O modelo de contato de Hertz prevê uma área de contato elíptica que fornece os parâmetros a e b , como indicados na figura 3.2, e também que a distribuição de carregamentos sobre esta área elíptica tem uma forma parabólica. Utilizando os valores de a e b , pode-se encontrar a razão elíptica da área de contato (b/a).

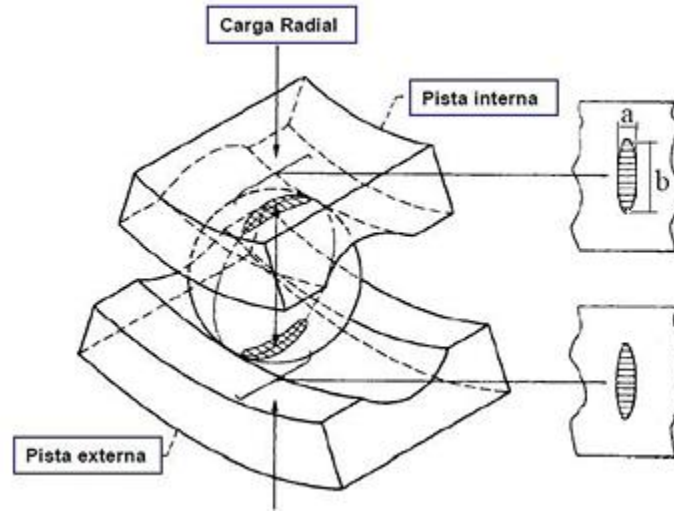


Figura 3.2 – Área de contato de Hertz (Nonato, 2009)

As figuras 3.3, 3.4 e 3.5 mostram a geometria dos corpos em contato (não lubrificado), da qual é possível obter relações para os raios de curvatura do contato entre a pista interna e a esfera:

$$r_{I1} = \frac{1}{2}D, \quad r_{I2} = \frac{1}{2}D, \quad r_{II1} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_m}{\cos\alpha} - D\right), \quad r_{II2} = f_i D, \quad f_i = \frac{r_i}{D}, \quad (1)$$

onde d_m é o diâmetro primitivo do mancal, α é o ângulo de contato, D é o diâmetro da esfera e $r_{i,o}$ é o raio de osculação interna ou externa. Seguindo o mesmo procedimento, é possível encontrar os mesmos parâmetros para a pista externa do mancal:

$$r_{I1} = \frac{1}{2}D, \quad r_{I2} = \frac{1}{2}D, \quad r_{II1} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_m}{\cos\alpha} + D\right), \quad r_{II2} = f_o D, \quad f_o = \frac{r_o}{D} \quad (2)$$

Com os raios de curvatura calculados, define-se a curvatura (ρ), que será usado para o cálculo das rigidezes de contato a partir do valor da curvatura relativa ($F(\rho)$) para ambas as pistas:

$$\rho = \frac{1}{r} \rightarrow F(\rho)_{i,o} = \frac{(\rho_{I1} - \rho_{I2}) + (\rho_{II1} - \rho_{II2})}{\sum \rho} \quad (3)$$

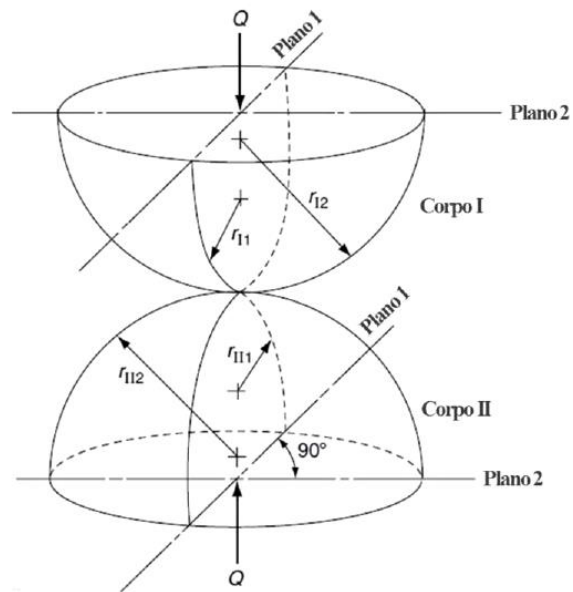


Figura 3.3 – Raios de curvatura no contato entre dois corpos (Radaelli, 2013).

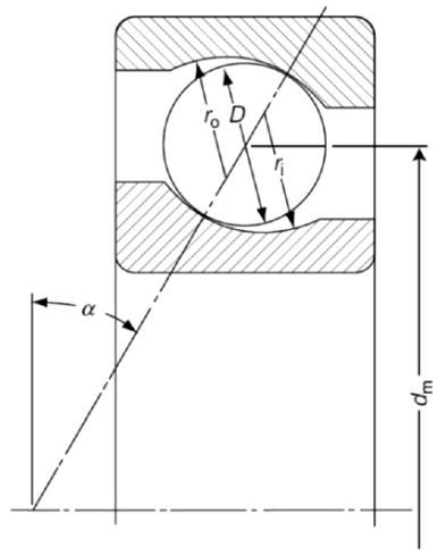


Figura 3.4 – Geometria do rolamento (Radaelli, 2013).

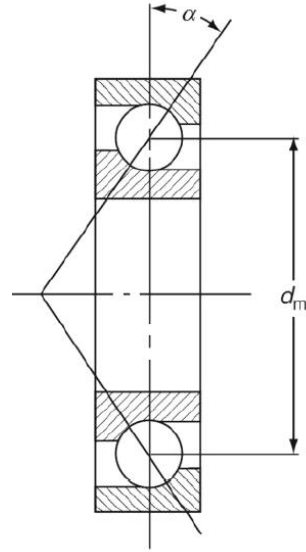


Figura 3.5 – Representação do contato angular e do diâmetro primitivo d_m (Radaelli, 2013).

Utilizando o algoritmo desenvolvido por Radaelli (2013), foi calculada a razão de elipsidade κ (b/a) em função das integrais de elipse de primeira e segunda ordem (\mathcal{K} e \mathfrak{I}), para ambas as pistas (Harris, 1991). Na sequência, é feito um processo iterativo que ao final, permite encontrar o valor da deformação do contato adimensional (δ^*), que será usado para o cálculo da rigidez do contato não lubrificado entre pista e esfera:

$$\delta^{*i,o} = \frac{2\mathcal{K}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\kappa^2 \mathfrak{I}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4)$$

onde \mathcal{K} é a integral de primeira ordem, \mathfrak{I} é a integral de segunda ordem e κ é elipsidade para cada pista (O código computacional desenvolvido por Radaelli (2013) calcula as integrais de primeira e segunda ordem e a elipsidade iterativamente).

Na sequência, efetua-se o equilíbrio estático no rolamento de esferas a fim de obter os deslocamentos nas direções y e z (radial), de acordo com a aplicação do carregamento externo, como pode ser visto nas figuras 3.6 e 3.7.

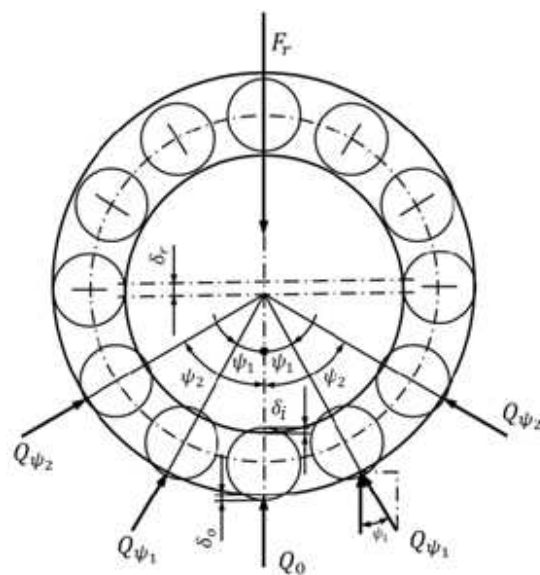


Figura 3.6 – Distribuição de carregamento em mancais radiais, carga em z (Changsen, 1991).

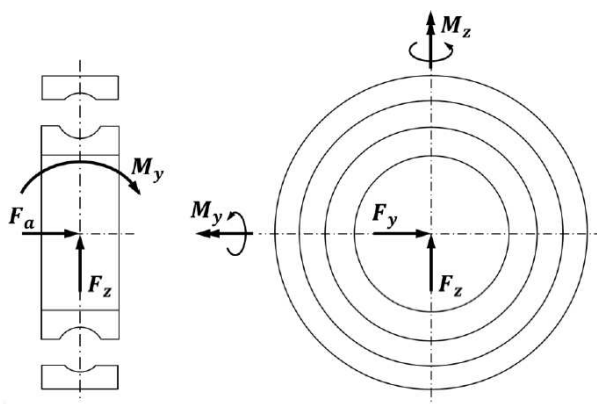


Figura 3.7 – Aplicação de solicitações nas direções axial, z e y, e momentos no eixo y e z (Radaelli, 2013)

O cálculo da distribuição de carregamentos para o caso radial é feito considerando que a força F_r provoca uma distribuição de carregamentos nas esferas, relacionada ao ângulo de posição da esfera (ψ), conhecido como ângulo de azimuth, conforme a figura 3.6 (nesta primeira parte é feito equilíbrio considerando apenas a força radial, ou apenas a força axial).

Sabe-se que a distribuição do carregamento nas esferas é influenciada pela força centrípeta (F_c) e pelo momento giroscópico (M_g) em cada uma das mesmas, que serão abordados na fase seguinte. Por enquanto, os mesmos não serão considerados nos cálculos.

Para a estimativa da distribuição do carregamento nas esferas, é utilizada a expressão que relaciona o carregamento e a deformação, de acordo com Harris (1991):

$$Q = K\delta^n \quad (5)$$

Esta relação é fundamental para este trabalho, pois, como será apresentada posteriormente, esta expressão caracteriza o contato seco. Para o contato lubrificado será desenvolvida uma nova relação entre carregamento e deslocamentos.

A fim de realizar o equilíbrio estático, utilizaram-se as relações apresentadas em Harris (1991) e, posteriormente utilizadas por Radaelli (2013). A partir da equação (4) para deformação no contato e dos raios de curvatura dados pela equação (3), foram calculadas as estimativas iniciais para rigidez no contato de cada esfera com as pistas interna e externa (equação (6a)), e para rigidez equivalente (equação (6b)), considerando folga diametral (P_d) nula na primeira aproximação.

$$K_{i,0} = 2,15 \cdot 10^5 (\sum \rho)^{-\frac{1}{2}} (\delta^{*i,0})^{-\frac{3}{2}} \quad (6a)$$

$$K_n = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{K_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{K_o}\right)^{\frac{1}{n}}} \right]^n \quad (6b)$$

A partir de um deslocamento radial (δ_r) inicialmente arbitrado, calcula-se a extensão angular de esferas carregadas (ψ_l), ou seja, o ângulo a partir do qual o carregamento nas esferas passa a ser nulo. Em seguida, estima-se a distribuição de carga nas esferas pela equação (7a) e, consequentemente, a deformação correspondente (δ_{\max}) para $\psi = 0$, a qual, por sua vez, relaciona-se ao deslocamento radial (δ_r), levando, agora, em consideração a folga diametral (P_d), na equação (7b).

$$\frac{F_r}{ZJ_r(\epsilon, \psi_l)} = Q_{\max} \quad (7a)$$

$$Q_{\max} = K_n \delta_{\max}^n = K_n \delta_{\psi=0}^n = K_n \left(\delta_r - \frac{1}{2} P_d \right)^n, \quad (7b)$$

sendo $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P_d}{2\delta_r} \right)$ e $\psi_1 = \cos^{-1} \left(\frac{P_d}{2\delta_r} \right)$.

Nas equações (7a) e (7b), F_r é a força aplicada, J_r é a integral de carregamento radial, Z é o número de esferas, K_n é a rigidez equivalente, P_d é a folga diametral e δ_r é o deslocamento que deseja-se estimar, correspondente à força aplicada F_r . Desta forma, recalculam-se os parâmetros do contato até a convergência do deslocamento radial para o carregamento externo aplicado.

Uma vez encontrado o deslocamento radial, o próximo passo é realizar o equilíbrio estático na direção axial. Há uma grande diferença entre os dois tipos de carregamento, pois, se o carregamento axial for aplicado exatamente no centro geométrico do mancal, este é igualmente distribuído entre todas as esferas, diferentemente do caso radial.

As figuras 3.8 e 3.9 contêm representações de parâmetros geométricos importantes para o equacionamento do equilíbrio axial. O carregamento axial provoca uma deflexão normal ao contato (δ_n). Com esta deflexão, é possível encontrar o deslocamento axial da pista interna (δ_a). Outro fator importante é a alteração do valor nominal do ângulo de contato sob carregamento, que inicialmente é de α_0 em ambas as pistas, externa e interna, e assume um novo valor α , correspondente a nova posição de equilíbrio sob o carregamento.

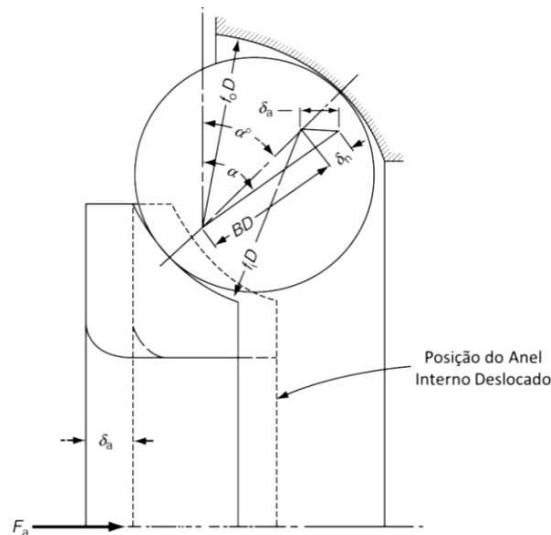


Figura 3.8 – Mancal de contato angular sujeito a um carregamento axial (Harris, 1991).

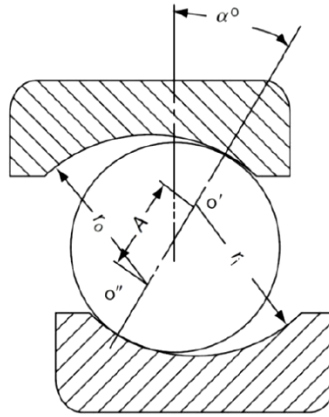


Figura 3.9 – Posição dos centros dos raios de curvatura (Harris, 1991).

Considerando BD igual a $(f_o + f_i - 1)$, ou distância entre os centros de curvatura de osculação das pistas interna e externa, também conhecido como curvatura total do mancal, e sendo f_o igual a $\frac{r_o}{D}$ e f_i igual a $\frac{r_i}{D}$, são realizadas iterações para obter os valores do novo ângulo de contato e, assim, calcular os deslocamentos axiais no mancal e as forças nas esferas, pois dependem do valor de α e de δ_n (que também é dependente de α_0), como mostra a expressão (8).

$$\delta_a = BD \frac{\sin(\alpha - \alpha^0)}{\cos \alpha}, \quad \delta_n = BD \left(\frac{\cos(\alpha^0)}{\cos \alpha} - 1 \right), \quad Q = K_n \delta_n^{1,5} \quad (8)$$

Concluídas as análises estáticas dos carregamentos radial e axial, os valores obtidos para os deslocamentos serão usados como estimativa inicial na análise dinâmica do mesmo.

O passo seguinte é o equacionamento das velocidades principais de rotação do rolamento, essenciais para o estudo dinâmico do mesmo, permitindo calcular as forças centrípetas e os momentos giroscópicos que interferem na condição dinâmica do rolamento, alterando, assim, as condições de lubrificação no mancal.

No trabalho de Radaelli (2013) foram extensivamente desenvolvidas as expressões de velocidade para o rolamento, obtendo relações entre as velocidades angulares das esferas e as velocidades angulares das pistas, como mostra a expressão (9), na qual ω_R é a velocidade angular da esfera, ω é a velocidade angular da pista, γ' é igual a $\frac{D}{d_m \alpha_i}$ e α_0 são os novos valores do ângulo de contato entre a esfera e a pista interna e a pista externa, respectivamente. O ângulo β vem da aplicação do conceito de pista de controle externa, na qual a velocidade angular normal ao

contato é nula, e o sinal da equação está relacionado a qual pista está rotacionando (positiva = pista interna estacionária, negativa = pista externa estacionária). Este ângulo representa o ângulo de nutação da esfera. Também foi definida a velocidade de rotação da esfera em torno do eixo axial x do mancal (ω_m) em relação às velocidades de rotação da pista interna e da pista externa (equações (10) e (11)).

$$\frac{\omega_R}{\omega} = \pm \frac{(\cos\alpha_o + \gamma')(1 - \gamma' \cos\alpha_i)}{\gamma' \cos\beta(1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o))} \quad (9)$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_i} = \frac{(1 - \gamma' \cos\alpha_i)}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \quad (10)$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_o} = \frac{(\cos(\alpha_i - \alpha_o)) + \gamma' \cos\alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)} \quad (11)$$

A equação (10) é válida para o caso em que a pista externa é fixa e a pista interna rotaciona com velocidade angular ω_i e, analogamente, a equação (11), para o caso da pista interna estacionária e a pista externa com velocidade angular ω_o .

Usando as velocidades angulares previamente descritas, são calculadas as forças centrípetas, principalmente para os casos em que o rolamento opera em elevadas rotações e, consequentemente, tais forças não podem ser negligenciadas, segundo expressão (12):

$$F_{cj} = \frac{1}{2} m d_m \omega^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)_j^2, \quad (12)$$

onde m é a massa da esfera, j corresponde a j -ésima esfera do mancal e a expressão $\frac{\omega_m}{\omega}$ pode ser calculada pelas equações (10) ou (11), dependendo de qual pista está rotacionando.

As mesmas velocidades também são empregadas no cálculo do momento giroscópico em cada esfera:

$$M_{gj} = J \left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)_j \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)_j \omega^2 \sin\beta, \quad (13)$$

onde J é igual a $\frac{1}{60} \rho \pi D^5$.

Verificou-se que o momento giroscópico varia linearmente com o valor de $\sin\beta$, ou seja, quanto maior o valor de $\sin\beta$, maior será o momento giroscópico. Nos mancais puramente radiais ($\alpha^0 = 0$ e, portanto, $\alpha_o = 0$) o valor de β é praticamente nulo e, conseqüentemente, não ocorre momento giroscópico significativo no equilíbrio de forças do mancal.

Para o caso de alta rotação do mancal, a força centrípeta e o momento giroscópico tornam-se suficientes para criar um desequilíbrio nas forças de carregamento nas esferas, sendo necessário refazer o equilíbrio de forças no mancal. Para restabelecer o equilíbrio de forças, a esfera se reposiciona entre as pistas interna e externa, de forma a compensar os efeitos da força centrípeta e do momento giroscópico.

A princípio, é necessário o conhecimento da posição angular de cada esfera, como mostra a figura 3.6, na qual as esferas ficam igualmente espaçadas de $\Delta\psi$, que por sua vez, depende do número de esferas. Quando é aplicado um carregamento estático ao mancal, ocorre uma deformação entre a esfera e as pistas interna (δ_i) e externa (δ_o) que geram um aumento na distância entre os centros de curvatura da pista interna e da pista externa (inicialmente BD).

Considerando o mancal em funcionamento (não estático), a força centrípeta irá alterar os ângulos de contato α_i e α_o e, assim, a posição do centro da esfera não estará mais sobre a linha que conecta os centros dos raios de curvatura, como visto na figura 3.10.

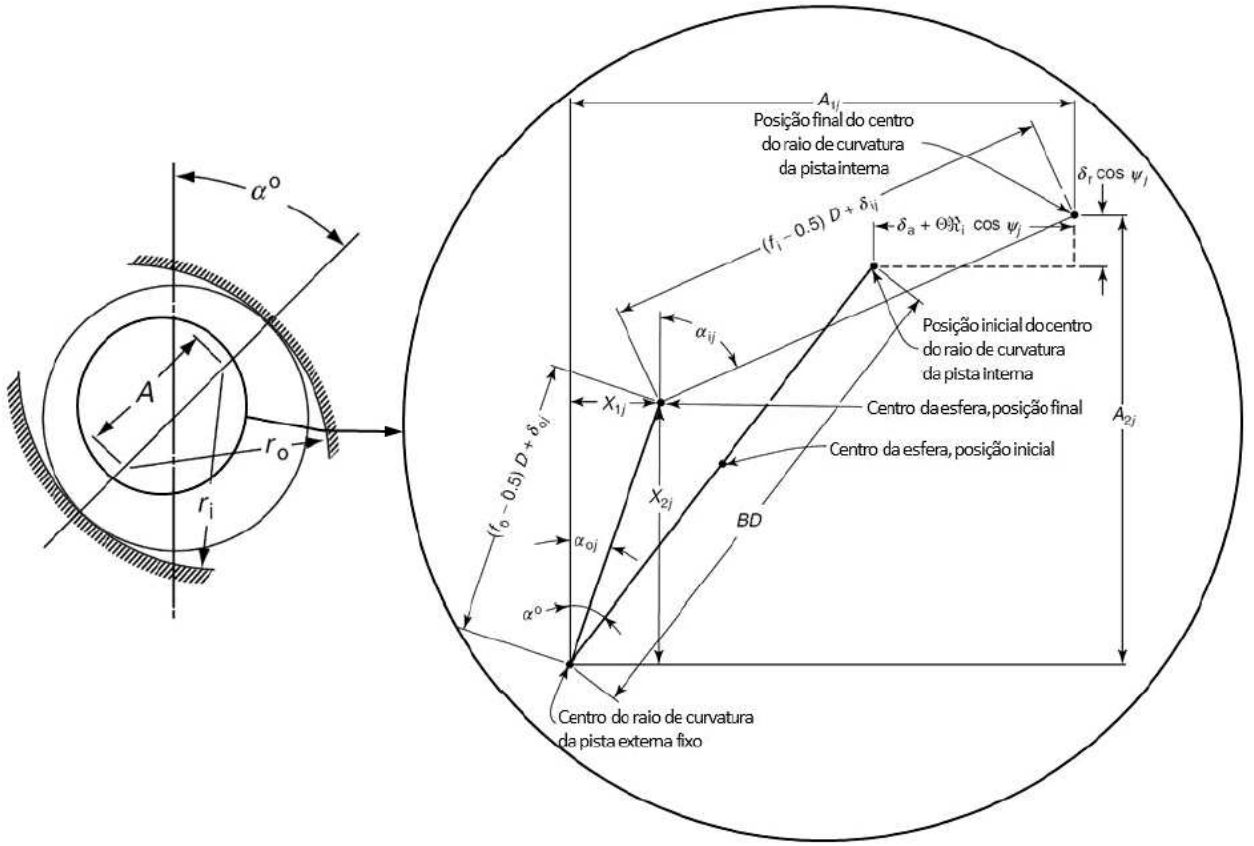


Figura 3.10 – Representação das pistas interna, externa e a esfera, com detalhes geométricos na região mostrada (Harris, 1991).

Considerando a figura 3.10, e definindo duas novas variáveis X_{1j} e X_{2j} para determinar a nova posição do centro da esfera, é possível relacionar os parâmetros geométricos, determinando as expressões do novo equilíbrio de posição da esfera:

$$(A_{ij} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - X_{2j})^2 - [(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}]^2 = 0 \quad (14)$$

$$X_{1j}^2 + X_{2j}^2 - [(f_o - 0,5)D + \delta_{oj}]^2 = 0 \quad (15)$$

O próximo passo é escrever as equações de equilíbrio dinâmico de cada esfera. A figura 3.11 representa as forças que agem na esfera.

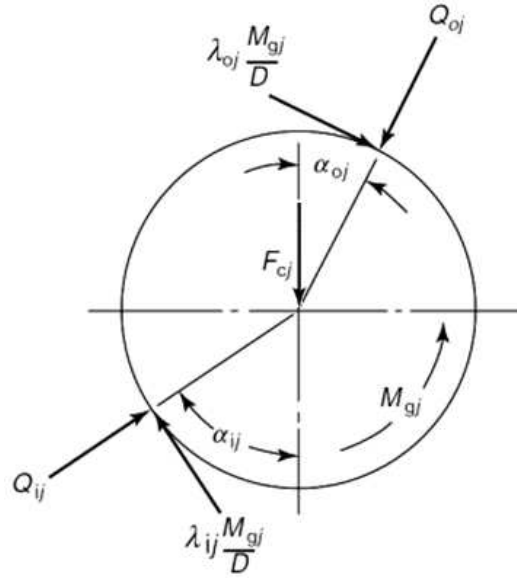


Figura 3.11 – Equilíbrio de forças e momentos para altas rotações (Adaptado de Harris, 1991).

Observa-se, na figura 3.11, a presença dos termos λ_{ij} e λ_{oj} que determinam o quanto o momento giroscópico é resistido pelo contato com a pista interna e externa, respectivamente. As expressões para os carregamentos normais aos contatos (expressões (16) e (17)) e para o equilíbrio de forças na horizontal (18) e na vertical (19) são:

$$Q_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{1,5} \quad (16)$$

$$Q_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{1,5} \quad (17)$$

$$Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{D} (\lambda_{ij} \cos \alpha_{ij} - \lambda_{oj} \cos \alpha_{oj}) = 0 \quad (18)$$

$$Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + \frac{M_{gj}}{D} (\lambda_{ij} \sin \alpha_{ij} - \lambda_{oj} \sin \alpha_{oj}) + F_{cj} = 0 \quad (19)$$

Rearranjando as expressões (16), (17), (18), (19) e aplicando as relações geométricas e os ângulos de contato, são escritas as equações finais para o equilíbrio estático na esfera:

$$\frac{\frac{\lambda_{oj} M_{gj} X_{2j}}{D} - K_{oj} \delta_{oj}^{1,5} X_{1j}}{(f_o - 0,5)D + \delta_{oj}} + \frac{K_{ij} \delta_{ij}^{1,5} (A_{1j} - X_{2j}) - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} (A_{2j} - X_{2j})}{(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{K_{oj}\delta_{oj}^{1,5}X_{2j} + \frac{\lambda_{oj}M_{gj}X_{1j}}{D}}{(f_o - 0,5)D + \delta_{oj}} + \frac{K_{ij}\delta_{ij}^{0,5}(A_{2j} - X_{2j}) + \frac{\lambda_{ij}M_{gj}}{D}(A_{1j} - X_{1j})}{(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}} = 0 \quad (21)$$

Desta forma, resolvem-se as expressões (14), (15), (20) e (21) para obter os valores de X_{1j} , X_{2j} , δ_{ij} e δ_{oj} . Os valores de entrada provem da análise estática precedente, que fornece δ_r e δ_a , e também os valores de δ_{ij} e δ_{oj} , obtidos das relações entre Q_{ij} , Q_{oj} e K_{ij} , K_{oj} .

Utiliza-se o método de Newton Raphson para solucionar o sistema de equações, recalculando, em cada iteração, os ângulos de contato α_i e α_o que, por sua vez, resultam em novos valores de rigidez interna (K_i) e externa (K_o) e, conseqüentemente, da força centrípeta e do momento giroscópico. É importante salientar que todo o equacionamento desenvolvido até o momento também pode ser usado para mancais de esferas sem contato angular, apenas ajustando os valores dos parâmetros.

Radaelli (2013) ainda apresenta o equilíbrio de forças no mancal, que resulta nos valores de δ_a , δ_z , δ_y , M_z e M_y , no qual todos os parâmetros são recalculados em cada iteração, até atingir a convergência em relação à força externa aplicada. Ao final do processo iterativo de convergência pelo Método de Newton Raphson, são obtidas as forças para cada contato entre esferas e pistas, interna e externa, respectivamente, Q_{ij} e Q_{oj} , os quais constituem a estimativa inicial da fase seguinte, que utiliza a teoria EHD de lubrificação.

A figura 3.7 mostra os graus de liberdade considerados no equilíbrio de forças no mancal (δ_y , δ_z , δ_a e θ_z e θ_y), que representam as translações em y, z e x (δ_a), e as rotações em torno dos eixos z e y (θ_z e θ_y), respectivamente.

As equações (22), (23), (24), (25) e (26) mostram o equacionamento para encontrar os valores de δ_a , δ_z , δ_y , M_z e M_y . As equações utilizam parâmetros já apresentados e a distância \mathfrak{R}_i entre o eixo do mancal e o centro do raio de curvatura da pista interna.

$$F_a - \sum_{j=1}^{j=z} \left(\frac{K_{ij}(A_{1j} - X_{1j})\delta_{ij}^{1,5} - \frac{(\lambda_{ij}M_{gj})}{D}(A_{2j} - X_{2j})}{(f_i - 0,5)D + \delta_{ij}} \right) = 0 \quad (22)$$

$$F_z - \sum_{j=1}^{j=z} \left(\frac{K_{ij}(A_{2j}-X_{2j})\delta_{ij}^{1,5} + \frac{(\lambda_{ij}M_{gj})}{D}(A_{1j}-X_{1j})}{(f_i-0,5)D+\delta_{ij}} \right) \cos\psi_j = 0 \quad (23)$$

$$F_y - \sum_{j=1}^{j=z} \left(\frac{K_{ij}(A_{2j}-X_{2j})\delta_{ij}^{1,5} + \frac{(\lambda_{ij}M_{gj})}{D}(A_{1j}-X_{1j})}{(f_i-0,5)D+\delta_{ij}} \right) \sin\psi_j = 0 \quad (24)$$

$$M_y - \sum_{j=1}^{j=z} \left(\frac{(K_{ij}(A_{1j}-X_{1j})\delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij}M_{gj}}{D}(A_{2j}-X_{2j}))}{(f_i-0,5)D+\delta_{ij}} \Re_i + \lambda_{ij}f_iM_{gj} \right) \cos\psi_j = 0 \quad (25)$$

$$M_z - \sum_{j=1}^{j=z} \left(\frac{(K_{ij}(A_{1j}-X_{1j})\delta_{ij}^{1,5} - \frac{\lambda_{ij}M_{gj}}{D}(A_{2j}-X_{2j}))}{(f_i-0,5)D+\delta_{ij}} \Re_i + \lambda_{ij}f_iM_{gj} \right) \sin\psi_j = 0 \quad (26)$$

3.2 Modelo de Lubrificação

Existem diversas teorias sobre regimes de lubrificação, sendo uma delas a de Lubrificação EHD, que será usada no desenvolvimento deste trabalho. Segundo esta teoria, entre corpos rolantes ocorre um contato entre superfícies não conformes, como exemplifica a figura 3.12, as quais apresentam diferentes raios de curvaturas, fazendo com que as superfícies entrem em contato em apenas uma região, que aproxima-se a um ponto ou uma linha. Nesta região, há uma alta pressão no fluido entre estas superfícies, o que provoca um aumento na viscosidade, e uma deformação nesta superfície, proporcional à espessura de filme de óleo entre as mesmas.

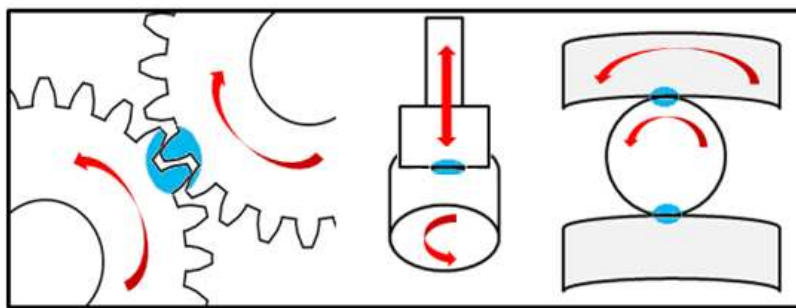


Figura 3.12 – Exemplos de superfícies de contato não conformes

Como descrito em Venner (2000), as principais diferenças entre a teoria de lubrificação hidrodinâmica (HD) e a teoria de lubrificação EHD são:

- Na definição do filme de óleo, a deformação dos corpos não é desconsiderada;
- A viscosidade não é mais independente da pressão, assim como a densidade do lubrificante;
- A lubrificação HD se caracteriza em superfícies com alto grau de conformidade geométrica, mas a EHD normalmente ocorre em corpos de geometrias não conforme.

Em seu trabalho, Venner (2000) também resume de uma forma simplificada as equações necessárias para descrever o problema EHD:

1. A equação de Reynolds descreve o fluxo do fluido Newtoniano dentro do estreito intervalo entre a esfera e a pista e a condição do estado de cavitação descreve que a pressão deve permanecer positiva.
2. A equação da deformação elástica descreve a geometria deformada do espaço onde se localiza o lubrificante.
3. A relação viscosidade-pressão fornece a viscosidade em função da pressão.
4. A relação densidade-pressão fornece a densidade em função da pressão
5. A equação do equilíbrio de forças fornece a integral da pressão ao longo do filme que deve equilibrar a força aplicada.

Utilizando, portanto, esta sequência de expressões que modelam o problema EHD, assim como fez Nonato (2009) em seu trabalho, é possível representar a expressão de Reynolds (1886), obtida a partir da equação de Navier-Stokes, e utilizar as dimensões x e y (Figura 3.13 (b)),

considerando que as variações na direção z são muito inferiores comparadas às variações em x e y. Fazendo ainda simplificações adicionais, considerando que a velocidade média u_m ($u_m=(u_1+u_2)/2$) que está alinhada na direção x é constante, e que as relações densidade-pressão podem ser negligenciadas pois não ultrapassam a faixa de 30% (Venner (2000)) quando comparadas às variações de até 5 ordens de grandezas da viscosidade, usando, desta forma, um valor de densidade relativa. A equação de Reynolds simplificada é mostrada na expressão (27):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

É possível identificar, na expressão (27), os primeiros dois termos que descrevem o fluxo devido ao gradiente de pressão, chamados termos de fluxo de Poiseuille. O terceiro termo contém informações sobre o fluxo devido a velocidade média entre as superfícies, chamado termo de Couette, e por fim, o último termo, chamado termo de Squeeze, se refere à variação de espessura com o tempo.

Relações entre viscosidade-pressão e densidade-pressão podem ser obtidas das expressões propostas por Roelands ou Barus (1893), no caso da viscosidade, e da equação de Dowson e Higginson (1966), no caso da densidade, como apresentado em Venner (2000).

O passo seguinte é determinar as expressões para o balanço de forças e para a espessura de filme. Considerando as direções em x e y da modelagem do filme de óleo e as condições:

- A deformação é linear elástica e os dois corpos possuem propriedades uniformes e isotrópicas;
- As dimensões do contato, garantidas pela hipótese supracitada, são muito menores que as dimensões dos corpos, possibilitando a aproximação dos mesmos por dois corpos semi-infinitos.

Equaciona-se a espessura de filme usando os valores de curvatura R_x e R_y , h_0 que é a aproximação de corpo rígido e o módulo de elasticidade reduzido E' (Equação 28). A equação (29) e a figura 3.13 representam a equação usada para o cálculo da espessura, as curvaturas dos corpos em contato e a representação da espessura de filme calculada, respectivamente.

$$E' = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (28)$$

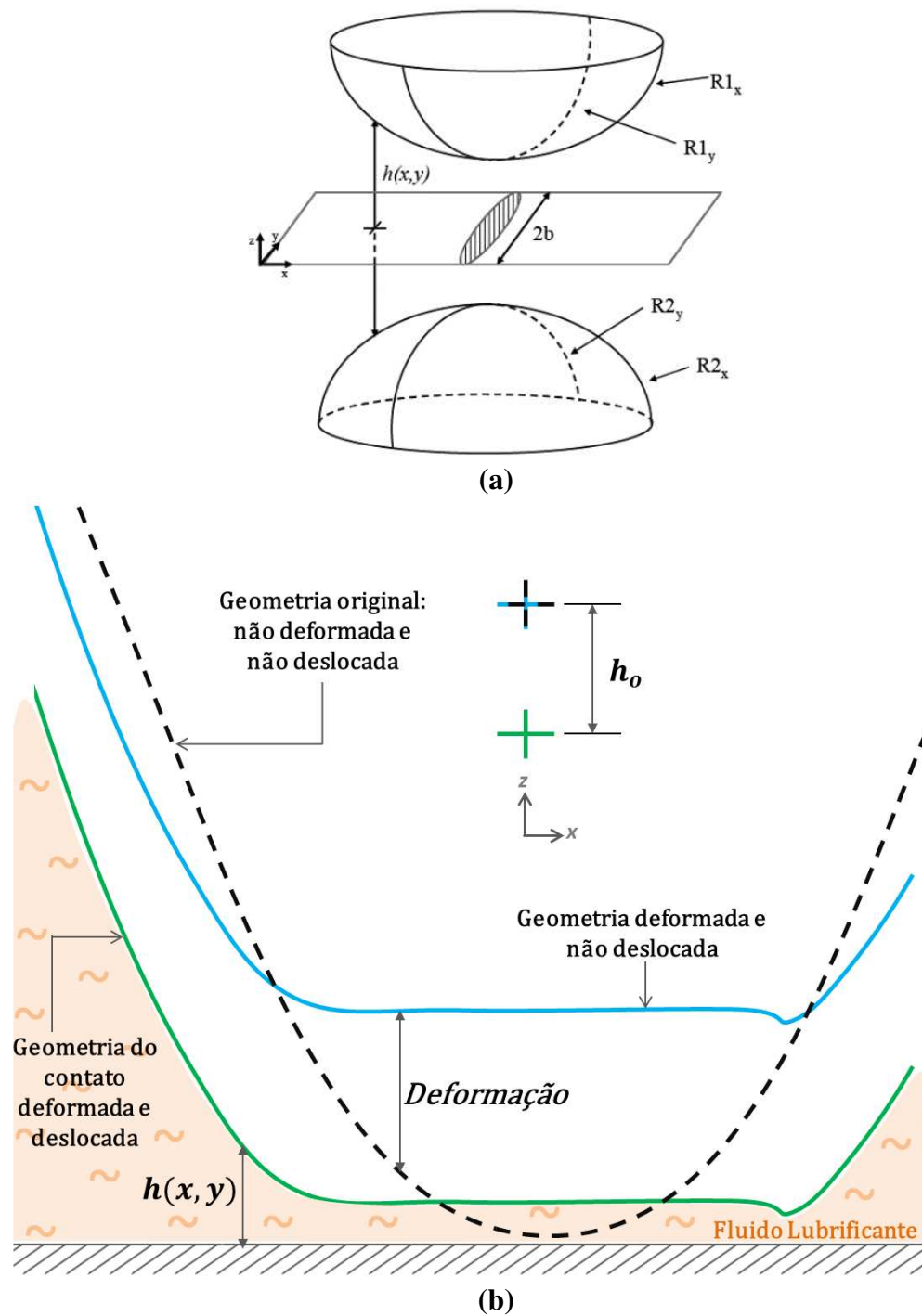


Figura 3.13 – (a) Geometria de dois corpos em contato (Nonato, 2009); (b) Representação da espessura calculada $h(x,y)$.

$$h(x,y) = \underbrace{h_o}_{\text{Espessura total de filme a ser utilizada na equação de Reynolds}} + \underbrace{\frac{x^2}{2R_x}}_{\text{Aproximação entre corpos não deformados}} + \underbrace{\frac{y^2}{2R_y}}_{\text{Variação de } h_0 \text{ na área de contato devido à geometria dos corpos}} + \underbrace{\frac{2}{\pi E'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x',y') dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dy'}_{\text{Deformação elástica no contato (Hertz)}} \quad (29)$$

Com a espessura de filme modelada, ainda é preciso expressar o balanço de forças. Para o problema bidimensional a integral da distribuição de pressão obtida da equação de Reynolds deve balancear a carga externa aplicada w , para assim, obter um equilíbrio das forças:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x',y') dx' dy' \quad (30)$$

A simulação numérica permite três abordagens de carregamento, a saber, caso estático, no qual $t = 0$ e a velocidade é constante assim como a força; caso transiente, que consiste numa perturbação em torno do equilíbrio estático normal ao contato; e caso harmônico, no qual, partindo do equilíbrio estático, é aplicada uma força senoidal com amplitude proporcional à força constante no contato e frequência conhecida. Neste trabalho, são apresentados os resultados obtidos para o caso transiente (Nonato (2010)) em torno do equilíbrio estático. Para este caso, a expressão (31) representa a equação de movimento a ser resolvida em paralelo ao algoritmo multi-níveis para o problema EHD, na qual Ω_n é a frequência natural adimensionalizada, h_o é a aproximação entre corpos adimensionalizada e $p(x,y,t)$ é a pressão, também adimensionalizada.

$$\frac{1}{\Omega_n^2} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,t) dx dy = 1 \quad (31)$$

Para a caracterização de cada contato, os parâmetros adimensionais de Moes (carga (M) e lubrificante (L)) foram utilizados (Venner, 2000), os quais são descritos nas equações (32) e (33). Observa-se a dependência de M (carga) como carregamento (w), assim como de L (lubrificante) com o índice pressão-viscosidade (α).

$$M = \frac{w}{E R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_s}{E R_x} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (32)$$

$$L = \alpha E' \left(\frac{\eta_0 u_s}{E' R_x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (33)$$

Usando as expressões desenvolvidas até o momento, é utilizado o algoritmo de multi-níveis (Nonato, 2009) para solucionar o sistema de equações para cada ponto do domínio discretizado, obtendo-se, finalmente, valores para a distribuição de pressão, espessura de filme, forças e deformações no contato. Desta forma, prossegue-se, agora, com o foco principal deste trabalho, o modelo de 5 graus de liberdade do mancal, dentro da modelagem de lubrificação EHD.

3.3 Modelo de força não linear para o mancal lubrificado

Na continuidade deste trabalho, são obtidos os parâmetros do modelo de força de contato para o rolamento de esferas, considerando a lubrificação EHD: $K_{i,o}$, $d_{i,o}$ e $\Delta F_{i,o}$ como mostra a equação (34) (Nonato, 2013). É possível observar a diferença entre a equação (34) e a equação (5) para a força de contato de Hertz.

O parâmetro $K_{i,o}$ é a rigidez do contato lubrificado, respectivamente, para as pistas interna e externa, $d_{i,o}$ é um expoente não linear para as pistas e $\Delta F_{i,o}$ é a força residual para quando a aproximação entre os corpos for nula. A figura 3.14 mostra a aproximação do filme de óleo por molas e amortecedores, representando as forças no contato com as pistas interna e externa.

$$F_{i,o} = K_{i,o} * \delta_{i,o}^{d_{i,o}} + \Delta F_{i,o} \quad (34)$$

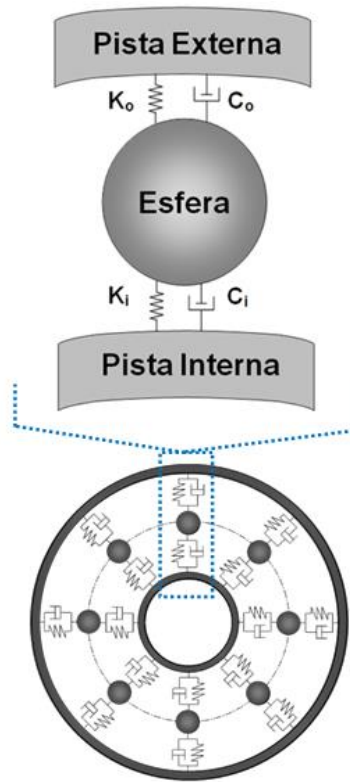


Figura 3.14 - Aproximação do filme de óleo por molas e amortecedores.

Para aplicação do código, desenvolvido em Fortran 90, é utilizado um conjunto de dados conhecidos para força (F) e deslocamentos (δ) para a pista interna e externa (equilíbrio estático), obedecendo à região de linearidade em que $F = F_i = F_o$ (i: interno e o: externo), obtidos da solução EHD por multi-níveis. O algoritmo utiliza este conjunto de dados e a equação (34) para obter os parâmetros K , d e ΔF .

Os casos de carregamento estudados com a aplicação de contato angular consideram que cada esfera terá um ângulo de contato com as pistas interna e externa, e a força de contato e os deslocamentos, por consequência, precisarão ser decompostos para obter as forças nas direções radial e axial, como mostra a figura 3.15. Desta forma, calculam-se os parâmetros de força para a direção radial, para a direção axial e os totais, considerando cada uma das pistas.

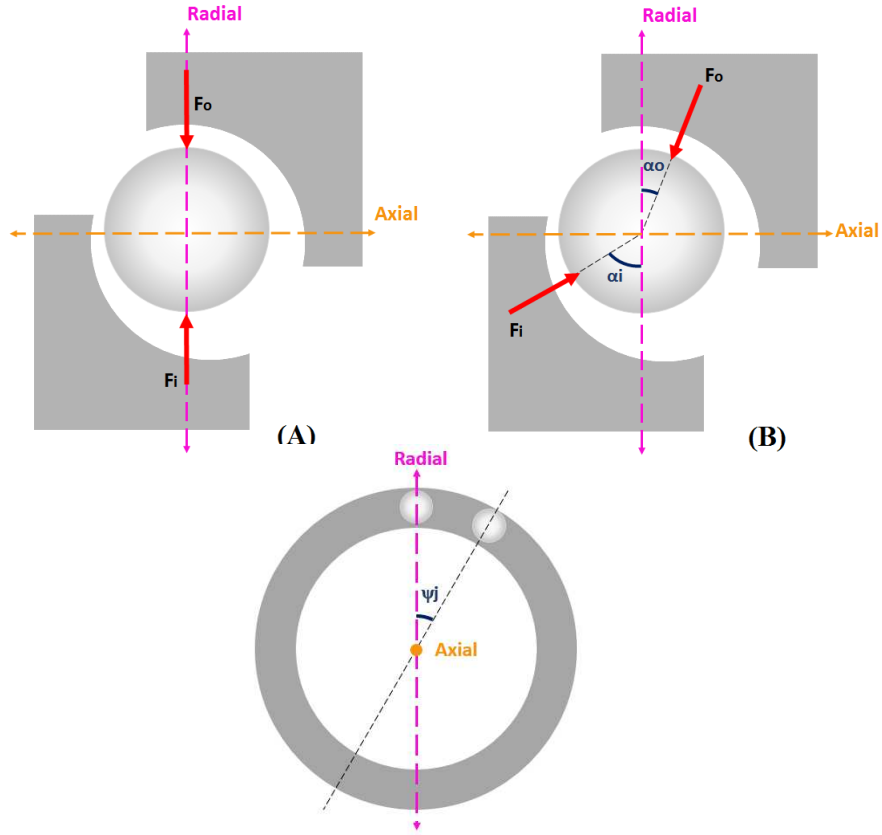


Figura 3.15 – Ilustração das forças normais ao contato entre as pistas e a esfera: (A) sem contato angular, (B) com contato angular.

Com os dados de K , d e ΔF para as pistas externa e interna, nas direções radial e axial, utiliza-se a equação (36) para obter a deformação total em cada uma das direções:

$$\delta_{T, \text{Radial/Axial}} = \delta_{i, \text{Radial/Axial}} + \delta_{o, \text{Radial/Axial}} \quad (35)$$

$$\delta_{T, \text{Radial/Axial}} = \left(\frac{F_i - \Delta F_i}{K_i} \right)^{\frac{1}{d_i}} + \left(\frac{F_o - \Delta F_o}{K_o} \right)^{\frac{1}{d_o}} \quad (36)$$

$$\delta_{T, \text{Radial/Axial}} \cong \left(\frac{F_T - \Delta F_T}{K_T} \right)^{\frac{1}{d_T}} \quad (37)$$

A partir da equação (37), os parâmetros totais para as direções radial e axial são calculados, usando os dados das pistas interna e externa, a partir da expressão (34).

Para a solução das equações com os parâmetros de força, tanto para cada uma das pistas, quanto para os totais, foi utilizada, inicialmente, a biblioteca matemática do Fortran (Visual Numerics, 2003), que permite a solução de sistemas de equações não lineares, sendo necessário novamente arbitrar um valor inicial por se tratar do Método de Newton. Neste caso, a convergência é fortemente dependente do valor inicial, principalmente o valor de ΔF .

Desta forma, com a dependência da convergência com a estimativa inicial, foi aplicado um algoritmo de otimização, também presente na biblioteca matemática do Fortran, que baseia-se no método de Levenberg-Marquardt (Apêndice A). Esta otimização mostrou menor dependência da estimativa inicial (permitindo diferentes valores iniciais arbitrados, que antes não eram possíveis e se restringiam àqueles que fossem praticamente a resposta buscada) para todos os parâmetros estudados, sendo adotado como método de solução do presente trabalho.

Na sequência, condições iniciais não nulas são aplicadas à esfera, normal à área de contato, e uma análise transiente, como introduziu Wijnant (1998), fornece dados de velocidade e força dinâmica que permitem estudar os efeitos dissipativos relacionados ao coeficiente de amortecimento. Assim, utilizando os resultados obtidos para os coeficientes de rigidez, associados à força dinâmica da análise transiente, e utilizando as equações (38) e (39), é possível obter os coeficientes de amortecimento nas pistas interna e externa, e total, para as direções radial/axial. Para obter os parâmetros de amortecimento, foi utilizado o método de mínimos quadrados.

$$F_{\text{dinâmica}} = F_{\text{restitutiva}} + F_{\text{dissipativa}} \quad (38)$$

$$F_{\text{dinâmica}} = (K_{i,o} \delta^{d_{i,o}} + \Delta F_{i,o}) + C_{i,o} \dot{\delta} \quad (39)$$

Observa-se que, no equacionamento desenvolvido, é necessário decompor as forças (dinâmica, estática) através dos ângulos de contato com a pista interna (α_i) e pista externa (α_o), e da mesma forma, decompor os dados de deslocamento e velocidade, fornecidos pelo algoritmo EHD, obtendo-se, assim, as forças, deslocamentos e velocidades para cada uma das pistas nas duas direções de estudo (radial e axial).

Considerando os casos de carregamento com contato angular, e que cada esfera terá ângulos de contato diferentes com a pista interna e com a pista externa, foram obtidos amortecimentos para cada uma das pistas, em cada uma das direções, para cada uma das esferas. Consequentemente, para calcular a amortecimento total do mancal para cada uma das direções (radial/axial) é preciso considerar que os amortecimentos das esferas estão em paralelo entre si (figura 3.16) e efetuar a soma de cada um destes amortecimentos, obtendo-se assim, o amortecimento equivalente para o mancal. Observa-se que os amortecimentos das pistas interna e externa se encontram em série (para cada esfera), enquanto que os amortecimentos totais das esferas se encontram em paralelo (para o mancal).

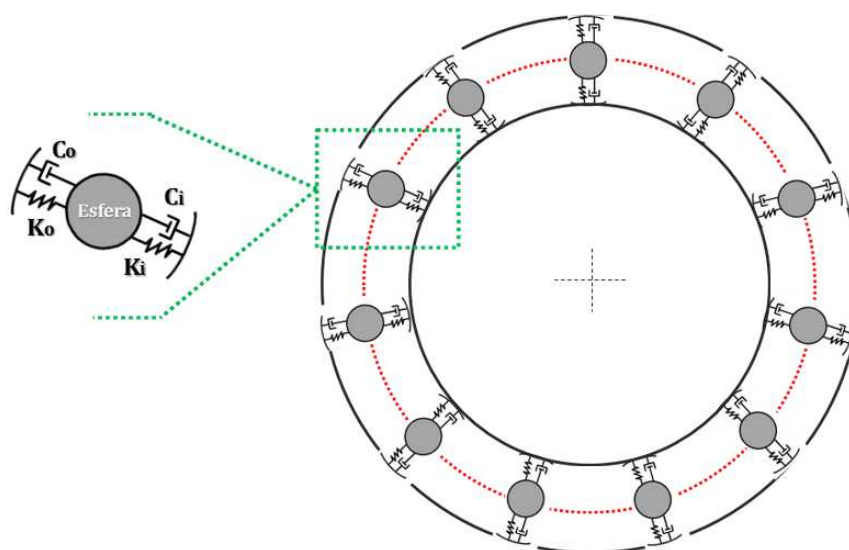


Figura 3.16 – Esquema dos amortecimentos das pistas interna e externa em série para cada esfera e dos amortecimentos totais em cada esfera em paralelo para o mancal.

A figura 3.17 apresenta um organograma da sequência de análise do presente trabalho, relacionando as áreas de estudo e os dados obtidos em cada uma delas.

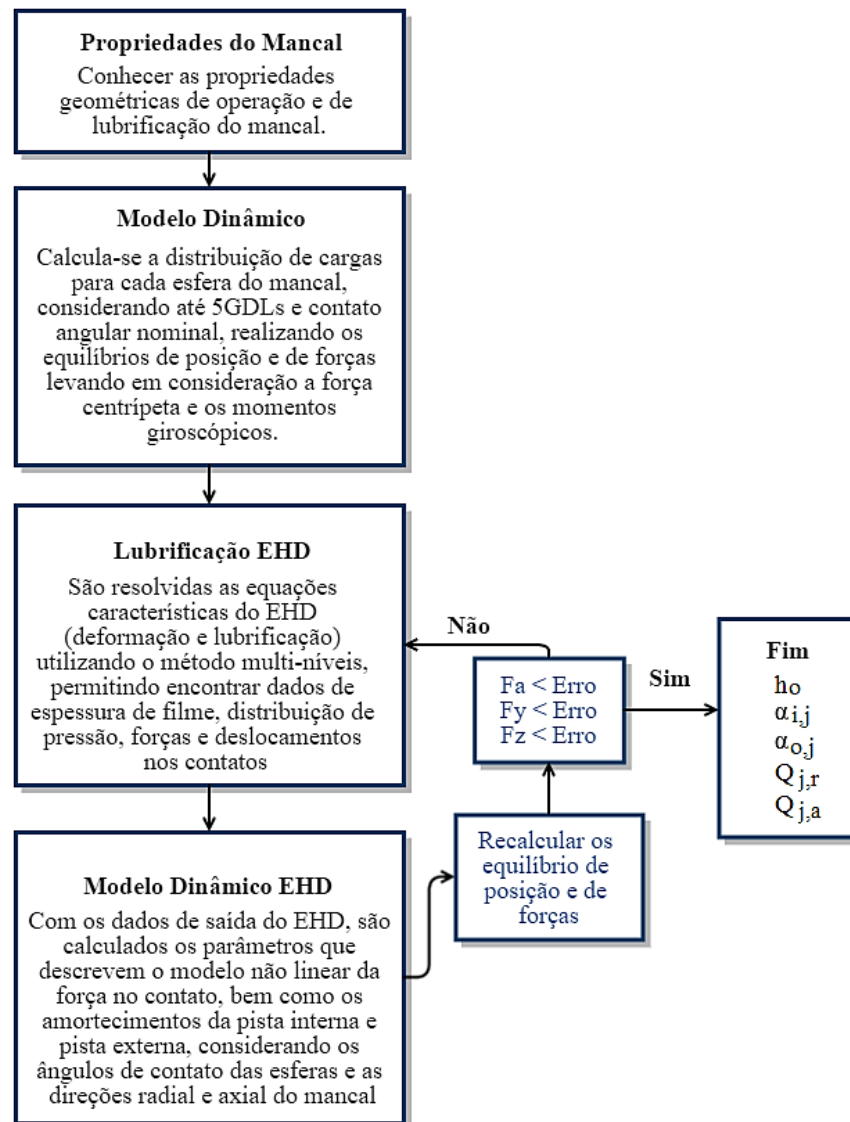


Figura 3.17 – Organograma com a sequência de estudo realizada.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Utilizando a modelagem apresentada no capítulo anterior, foram testados cinco casos diferentes de aplicação de esforços ao mancal (considerando dois níveis de carregamento: baixa e alta carga) desenvolvendo todo o procedimento esquematizado pela figura 3.17. A direção z vertical é a indicada pela figura 3.7 e x representa a direção axial, ou seja, na aplicação de forças será usado o mesmo referencial adotado por Radaelli (2013). A tabela 4.1 contém os valores de força e velocidade de rotação, para os casos em alta e baixa carga.

É importante citar que nos testes desenvolvidos em baixa carga (Bizarre, 2014), foram obtidos valores de deslocamento negativos para algumas esferas, mostrando que estas não se encontravam em regime de lubrificação EHD. Sendo assim, as mesmas não foram utilizadas na caracterização do mancal. Desta forma, para continuidade dos testes da modelagem, foram aplicados valores elevados de carga e de rotação para que o modelo melhor representasse as aplicações reais destes componentes.

A definição dos níveis de carga foi baseada, para os casos em baixa carga, no trabalho de Nonato (2009), permitindo comparar os resultados obtidos, enquanto que, em alta carga, foi utilizado o manual do fabricante do rolamento em estudo (dados característicos na tabela 4.2) de acordo com os parâmetros de vida, carga e rotação.

Tabela 4.1 – Valores numéricos de força e velocidade de rotação para as duas intensidades de carga testadas.

<i>Força em baixa carga</i>	<i>Força em alta carga</i>
<i>15 N</i>	<i>1000 N</i>
<i>Rotação em baixa carga</i>	<i>Rotação em alta carga</i>
<i>600 rpm</i>	<i>5000 rpm</i>

Tabela 4.2 – Características do mancal estudado 6006

<i>Número de esferas</i>	<i>11</i>
<i>Diâmetro da esfera</i>	<i>7 mm</i>
<i>Diâmetro primitivo</i>	<i>42,5 mm</i>
<i>Osculação da pista interna</i>	<i>102 %</i>

<i>Osculação da pista externa</i>	<i>108 %</i>
<i>Folga radial</i>	<i>0 mm</i>

As simulações realizadas para a solução do equacionamento da lubrificação EHD utilizaram dados sobre: o lubrificante, a convergência do algoritmo multi-níveis e o tipo de ciclo testado. Assim, as mesmas informações contidas no trabalho de Nonato (2009) foram aqui aplicadas e os principais parâmetros alterados foram os fatores de relaxação (Jacobi e Gauss) que influenciam na convergência da solução. A tabela 4.3 traz os valores adotados para as propriedades do mancal, lubrificante e algoritmo multi-níveis. Nota-se que, para o tipo de ciclo, o indicador 2 significa que foram analisados carregamentos estático e transiente.

Tabela 4.3 – Características e considerações do problema em estudo.

<i>Lubrificação</i>	
<i>Índice Pressão-Viscosidade [1/Pa]</i>	<i>1,48 10⁻⁸</i>
<i>Viscosidade dinâmica [Pa.s]</i>	<i>0,01790</i>
<i>Convergência do método multi-níveis (adimensionais)</i>	
<i>Tamanho da malha</i>	<i>1</i>
<i>Fator de relaxação</i>	<i>0,05</i>
<i>Número de pontos da malha quadrada</i>	<i>16</i>
<i>Erro para as malhas mais grosseiras</i>	<i>0,001</i>
<i>Erro para as malhas mais finas</i>	<i>0,00001</i>
<i>Parâmetros do método multi-níveis (adimensionais)</i>	
<i>Máximo nível</i>	<i>5</i>
<i>Nível inicial</i>	<i>3</i>
<i>Número de ciclos</i>	<i>4</i>
<i>Tipo de ciclo (V(1) ou W(2))</i>	<i>2</i>
<i>Fator da relaxação por Jacobi</i>	<i>0,25</i>
<i>Fator da relaxação por Gauss</i>	<i>0,35</i>
<i>Parâmetros vibracionais (adimensionais)</i>	
<i>Tipo de ciclo(estático(0), harmônico(1) ou transiente(2))</i>	<i>2</i>
<i>Tempo final</i>	<i>2,5</i>

<i>Frequência natural</i>	<i>5,13</i>
<i>Condição inicial de deslocamento para o transiente</i>	<i>0,9</i>

Cinco tipos de carregamentos foram simulados para os dois níveis de carga definidos, como apresentado na tabela 4.4, que associam diferentes direções de aplicação das forças, presença ou não de contato angular e deslocamentos angulares. O Tipo 1 é o caso radial puro sem contato angular, enquanto que, o Tipo 5 é o caso que considera 5GDL e o contato angular.

Tabela 4.4 – Descrição dos esforços aplicados ao mancal para cada tipo de carregamento testado.

	F_z [N]	F_y [N]	F_a [N]	θ_z [°]	θ_y [°]	α [°]	
Tipo 1	X						F_z - Força radial na direção z
Tipo 2	X					X	F_y - Força radial na direção y
Tipo 3			X			X	F_a - Força na direção axial do mancal
Tipo 4	X		X			X	θ_z - Deslocamento angular (eixo z)
Tipo 5	X	X	X	X	X	X	θ_y - Deslocamento angular (eixo y)
							α - Ângulo de contato nominal

Os diferentes casos de aplicação buscam verificar se a modelagem EHD proposta por Nonato (2013) é válida para o estudo considerando cinco graus de liberdade e permite avaliar o comportamento dos parâmetros envolvidos na caracterização. O caso com aplicação de força apenas na direção z será comparado ao modelo radial sem contato angular (Nonato, 2013) e, a seguir, considerando também a presença de um contato angular nominal nas esferas. Posteriormente, serão comparados os casos com a presença de uma força axial aplicada e, finalmente, as diversas combinações para estes carregamentos.

Na sequência, os resultados para os casos em baixa e alta carga serão apresentados separadamente.

4.1 Resultados em baixa carga

A exposição dos resultados seguirá a metodologia presente na figura 3.17, iniciando com a distribuição de carregamento no mancal, em seguida, com os parâmetros calculados para a força

de contato não linear e para o amortecimento, e por fim, uma análise do comportamento e capacidade de carga do mancal caracterizado por estes parâmetros.

Inicialmente, será apresentada a distribuição de carregamento no mancal, mostrando a carga para cada esfera (pista interna e pista externa) e permitindo observar o comportamento desta para cada tipo de carga aplicada no caso de baixa carga (15 N e 600 rpm). Na figura 4.1, os gráficos contém esta distribuição, sendo a primeira esfera (posicionada no ponto indicado por zero) aquela que fica no sentido oposto à aplicação de carga na direção z. Por este motivo, esta esfera se apresenta mais carregada na maioria dos casos. É possível notar a influência do contato angular na distribuição de carga, e também da força aplicada na direção y e dos deslocamentos angulares em torno dos eixos (z, y).

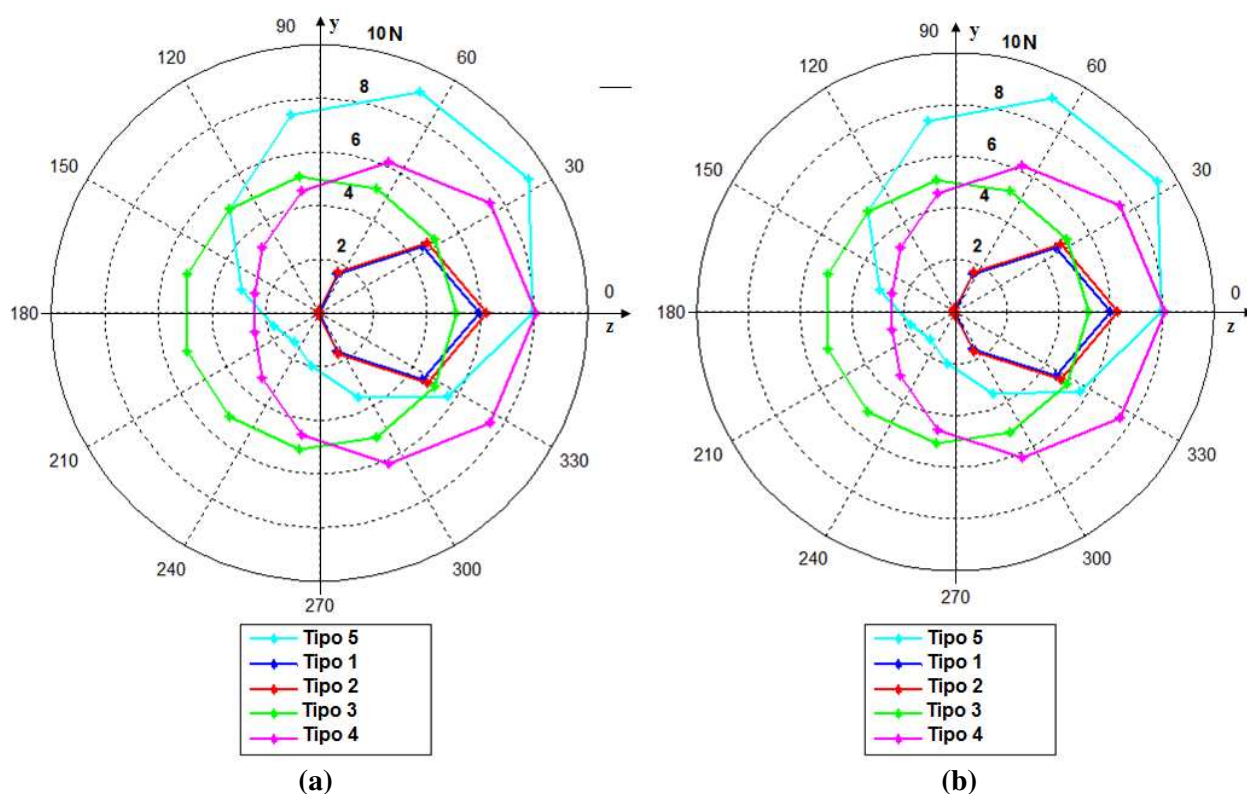


Figura 4.1 – Gráfico da distribuição de carga nas esferas ((a) pista interna, (b) pista externa) para cada tipo de carregamento aplicado ao mancal em baixa carga.

Utilizando esta distribuição de carga nas esferas, cada contato com as pistas foi caracterizado a partir do cálculo dos parâmetros de Moes (equações 32 e 33) e da razão elíptica no contato. Em

seguida, foi simulado o algoritmo multi-níveis que soluciona o sistema de equações para a lubrificação EHD. Este algoritmo calcula, preliminarmente, um caso estático, do qual são obtidos deslocamentos e forças, usados para calcular por meio da otimização (Levenberg-Marquardt) os parâmetros do modelo proposto para força não linear de contato (K , d , ΔF). Uma segunda fase é simulada considerando a resposta transiente e, a partir deste, são obtidos os amortecimentos, usando, neste caso, dados de força dinâmica total, deslocamentos, velocidades e os parâmetros obtidos no passo anterior.

A tabela 4.5 contém os parâmetros da força não linear no contato, caracterizada para os cinco tipos de carregamentos do caso em baixa carga (rigidez (K), expoente (d) e offset de força (ΔF)). A tabela se divide em: cinco tipos de carregamento, direções radial e axial (como mostrado na figura 3.16) e em caracterização para pistas interna, externa e parâmetro total. Da mesma forma, a tabela 4.6 apresenta os resultados para os amortecimentos no contato.

Para o ajuste dos amortecimentos é interessante observar que, para os casos sem contato angular, quando plotados os dados de força dissipativa pela velocidade, eram obtidas curvas sobrepostas (Nonato, 2013). Porém, quando considerada a presença do contato angular, para cada contato da esfera com as pistas foi obtida uma curva de histerese, ou seja, foram obtidas onze curvas de histerese, conforme figura 4.2. Desta forma, por meio de uma linearização, foi ajustado um amortecimento por esfera em cada pista, e com estes, calculado o amortecimento total.

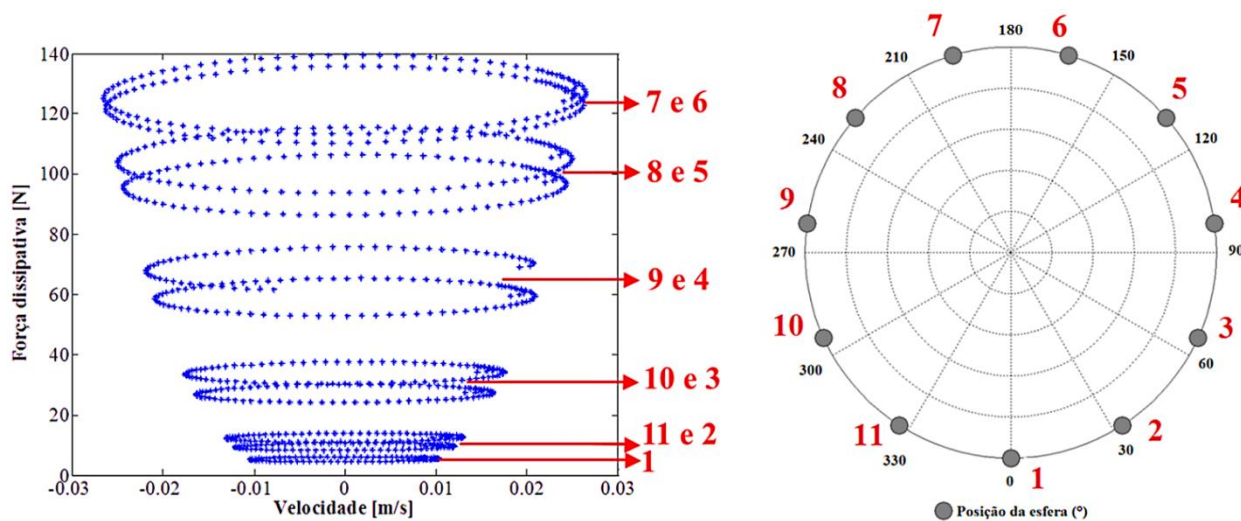


Figura 4.2 – Comportamento da força dissipativa para um caso exemplo (Tipo 5).

Tabela 4.5 – Parâmetros do modelo de força não linear calculados para cada tipo de carregamento nas direções radial e axial do mancal (baixa carga).

Tipo 1				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	1197540264,53	1,30	1,02
	<i>Interno</i>	755475242,36	1,24	1,16
	<i>Total</i>	411512996,12	1,27	1,08
Axial	<i>Externo</i>	0,00	0,00	0,00
	<i>Interno</i>	0,00	0,00	0,00
	<i>Total</i>	0,00	0,00	0,00
Tipo 2				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	1316961942,44	1,30	1,02
	<i>Interno</i>	831663470,56	1,25	1,17
	<i>Total</i>	1864413646,62	1,38	1,16
Axial	<i>Externo</i>	2005989522,68	1,30	0,27
	<i>Interno</i>	998787470,28	1,24	0,35
	<i>Total</i>	582519974,01	1,27	0,30
Tipo 3				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	4019765928,08	1,38	1,28
	<i>Interno</i>	3736622647,18	1,35	1,52
	<i>Total</i>	1516349090,46	1,37	1,38

<i>Axial</i>	<i>Externo</i>	129509459,76	1,13	0,14
	<i>Interno</i>	130234247,26	1,11	0,23
	<i>Total</i>	752533250,02	1,29	0,33
Tipo 4				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
<i>Radial</i>	<i>Externo</i>	2749452352,7453	1,35	1,14
	<i>Interno</i>	2138504841,3397	1,31	1,32
	<i>Total</i>	989606547,2062	1,34	1,21
<i>Axial</i>	<i>Externo</i>	4326962423,0844	1,35	0,31
	<i>Interno</i>	3372272052,2782	1,32	0,37
	<i>Total</i>	1529248067,9628	1,34	0,34
Tipo 5				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
<i>Radial</i>	<i>Externo</i>	2193217237,89	1,34	1,07
	<i>Interno</i>	1554815871,46	1,29	1,24
	<i>Total</i>	770391063,89	1,32	1,13
<i>Axial</i>	<i>Externo</i>	3206074111,63	1,33	0,29
	<i>Interno</i>	2289609291,82	1,29	0,34
	<i>Total</i>	1173786335,67	1,32	0,31

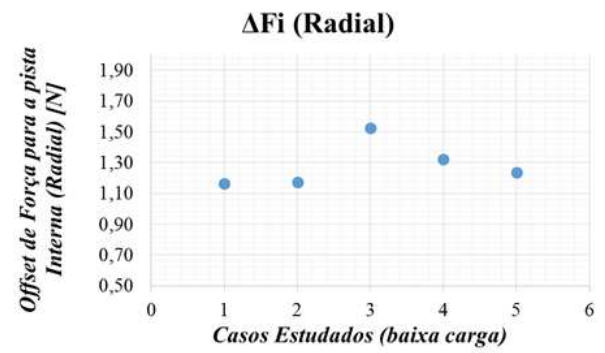
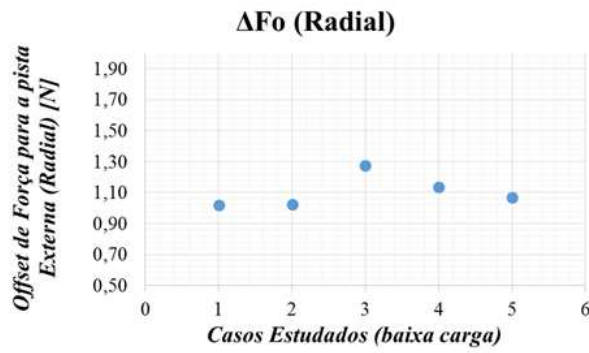
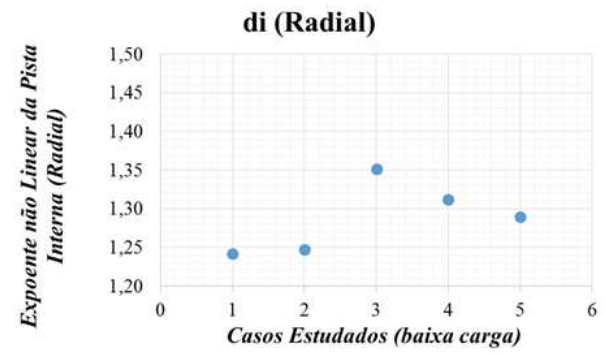
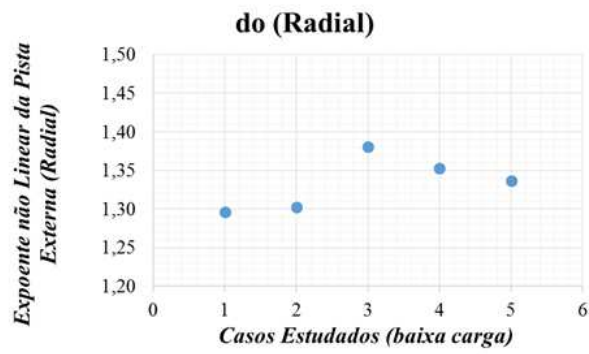
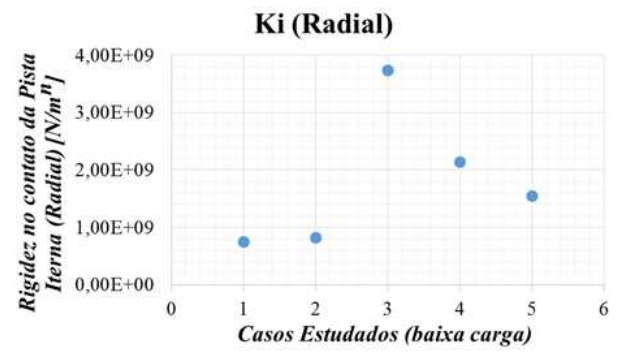
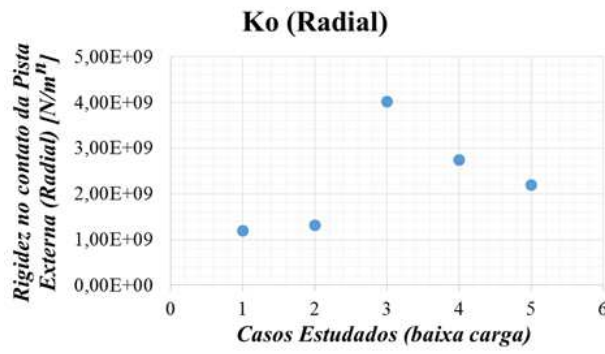
Tabela 4.6 – Estimativa de amortecimento (N.s/m) para cada condição de carga nas direções radial e axial (baixa carga).

Tipo 1					
Radial	Ci	222,68	Axial	Ci	0,00
	Co	190,82		Co	0,00
	Ct	102,76		Ct	0,00
Tipo 2					
Radial	Ci	183,85	Axial	Ci	183,83
	Co	161,74		Co	162,43
	Ct	86,05		Ct	86,23
Tipo 3					
Radial	Ci	425,74	Axial	Ci	430,59
	Co	364,11		Co	370,31
	Ct	196,26		Ct	199,09
Tipo 4					
Radial	Ci	227,64	Axial	Ci	227,66
	Co	195,74		Co	195,74
	Ct	105,24		Ct	105,25
Tipo 5					

<i>Radial</i>	<i>Ci</i>	376,87	<i>Axial</i>	<i>Ci</i>	376,91
	<i>Co</i>	325,34		<i>Co</i>	325,56
	<i>Ct</i>	174,61		<i>Ct</i>	174,68

Buscando uma melhor comparação entre os casos, as figuras 4.3 e 4.4 contêm gráficos para cada parâmetro apresentado nas duas tabelas anteriores, permitindo avaliar o comportamento destes com as diferentes condições de carga.

Para fins de comparação entre baixa e alta carga, foi simulado apenas o primeiro ciclo de iteração para os equilíbrios de posição e de forças. Assim sendo, observa-se que o modelo proposto, apesar da convergência satisfatória, ainda demanda por um maior número de iterações no *loop* de equilíbrio da Figura 3.17. O *loop* de convergência para o modelo de lubrificação EHD, por sua vez, percorre todas as iterações necessárias até a convergência final da espessura de filme, fato este que pode onerar o processo de forma significativa em termos de custo computacional.



(a)

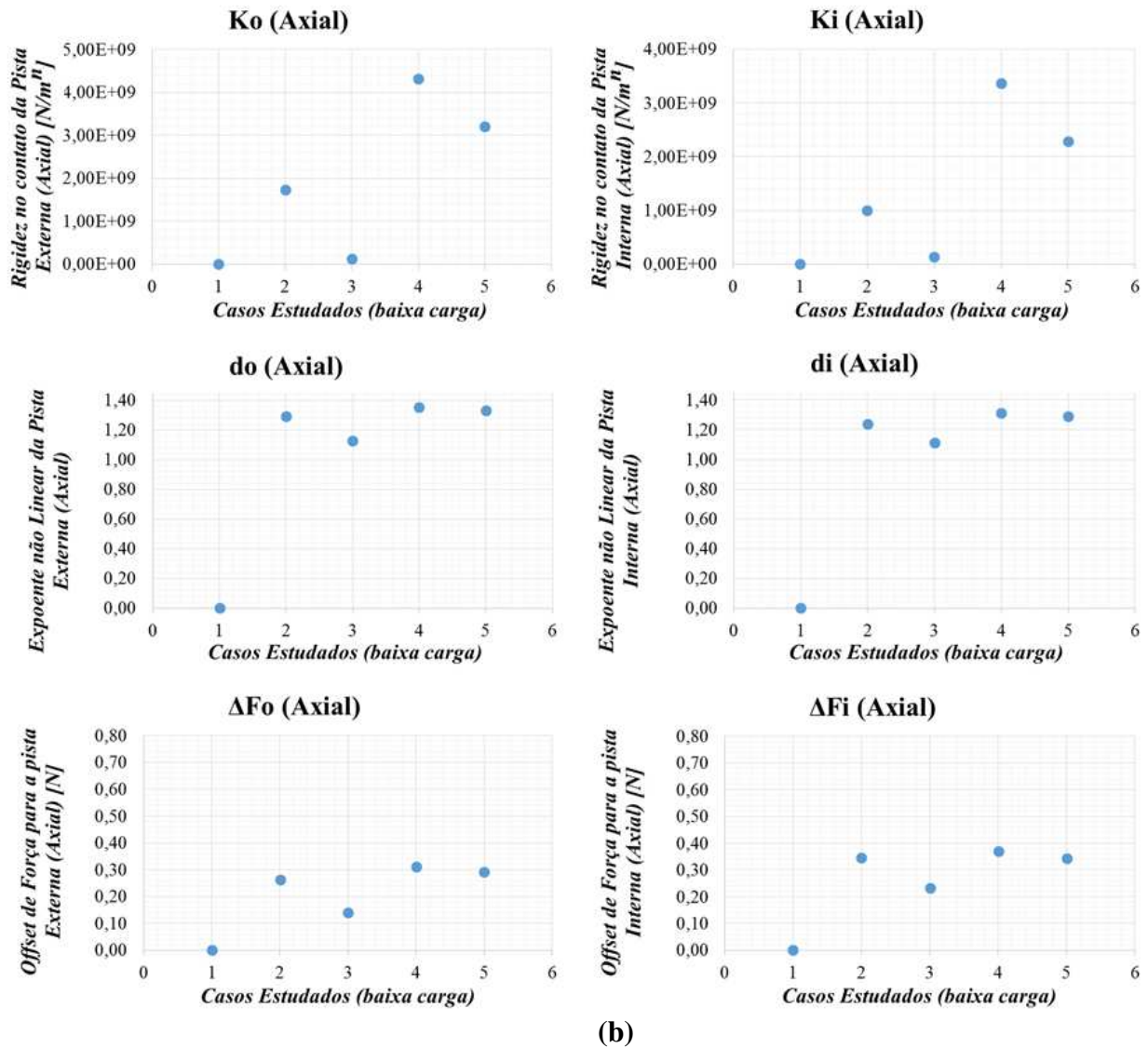


Figura 4.3 – Comparação entre os parâmetros de força não linear para cada uma das pistas, nas direções radial (a) e axial (b) (baixa carga).

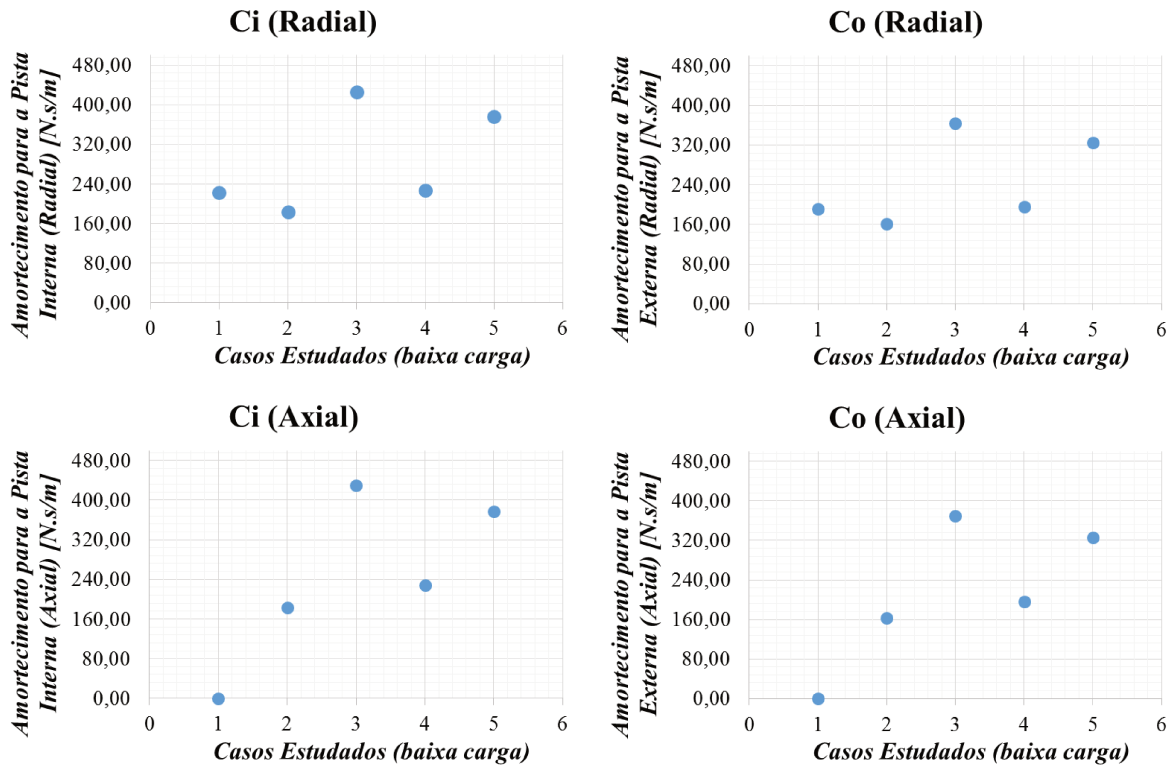


Figura 4.4 – Comparação entre os amortecimentos para cada uma das pistas, nas direções radial e axial (baixa carga).

Baseando-se nas tabelas e gráficos com os parâmetros calculados, observa-se que, em baixa carga, considerando as duas direções do mancal, o caso mais rígido, na direção radial, é o que contém apenas aplicação de força axial (tipo 3), como encontrado no trabalho de Bizarre (2014) e que para a direção axial, o contrário ocorre, sendo a carga de tipo 3 a que fornece menores valores de rigidezes. O mesmo comportamento ocorre para o offset de força ΔF e para o expoente d . Observa-se também que, para o Tipo 1 de carga, os parâmetros na direção axial são nulos, pois a força de contato, deslocamentos e velocidades se encontram integralmente na direção radial.

Com os parâmetros mostrados nas tabelas 4.5 e 4.6 foi possível calcular a força dinâmica total (utilizando a equação 32) e, desta forma, comparar com os resultados de força obtidos da simulação do caso transiente do multi-níveis (EHD). A figura 4.5 contém os gráficos que comparam os resultados e permitem visualizar, para o caso de baixa carga, uma diferença de 15% a 20% para algumas faixas de pontos plotados. O caso mostrado na figura 4.5 foi o de Tipo 2 de

carga radial com contato angular, sendo que para os demais casos o mesmo comportamento foi observado.

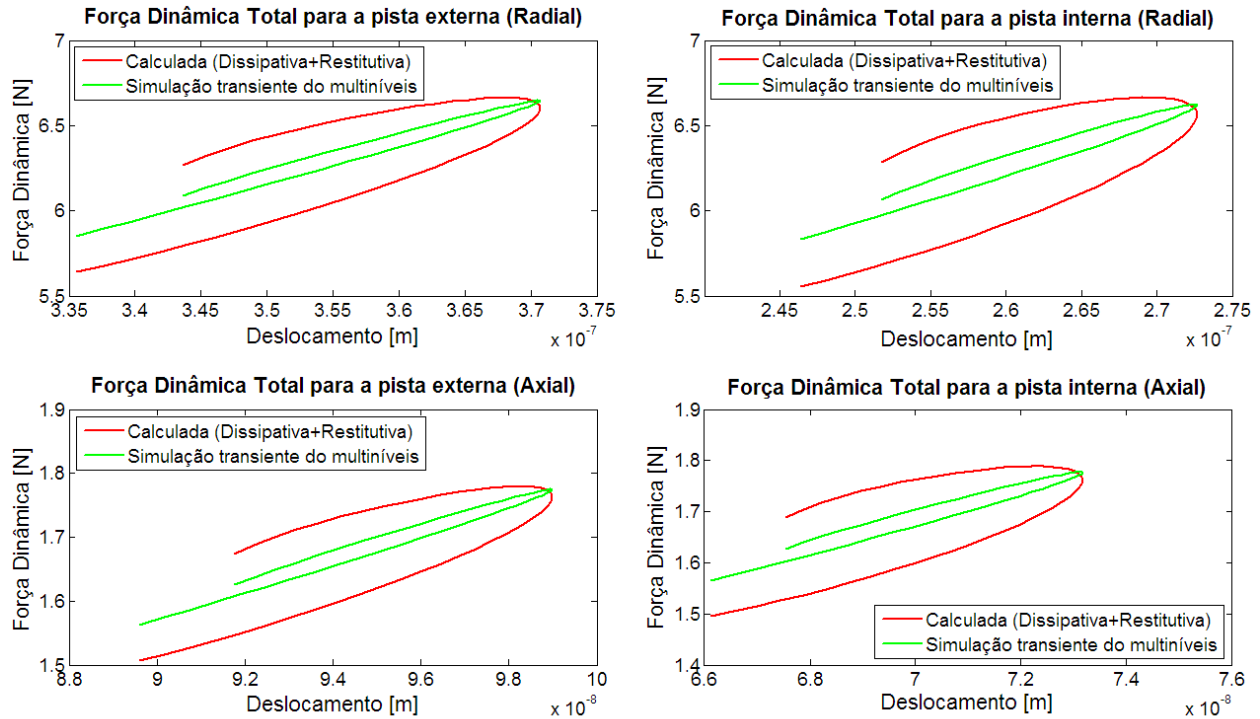


Figura 4.5 – Gráfico comparativo entre a força total dinâmica determinada a partir dos parâmetros da força de contato e dos amortecimentos calculados, e a força dinâmica resultante do algoritmo multi-níveis para o caso transiente.

As figuras 4.6 e 4.7 contém uma análise de capacidade de carga do mancal, considerando a caracterização realizada em baixa carga. Os gráficos da figura 4.6 apresentam o comportamento da força no mancal para um intervalo de deslocamento no contato ($0 \text{ m} - 10^{-6} \text{ m}$).

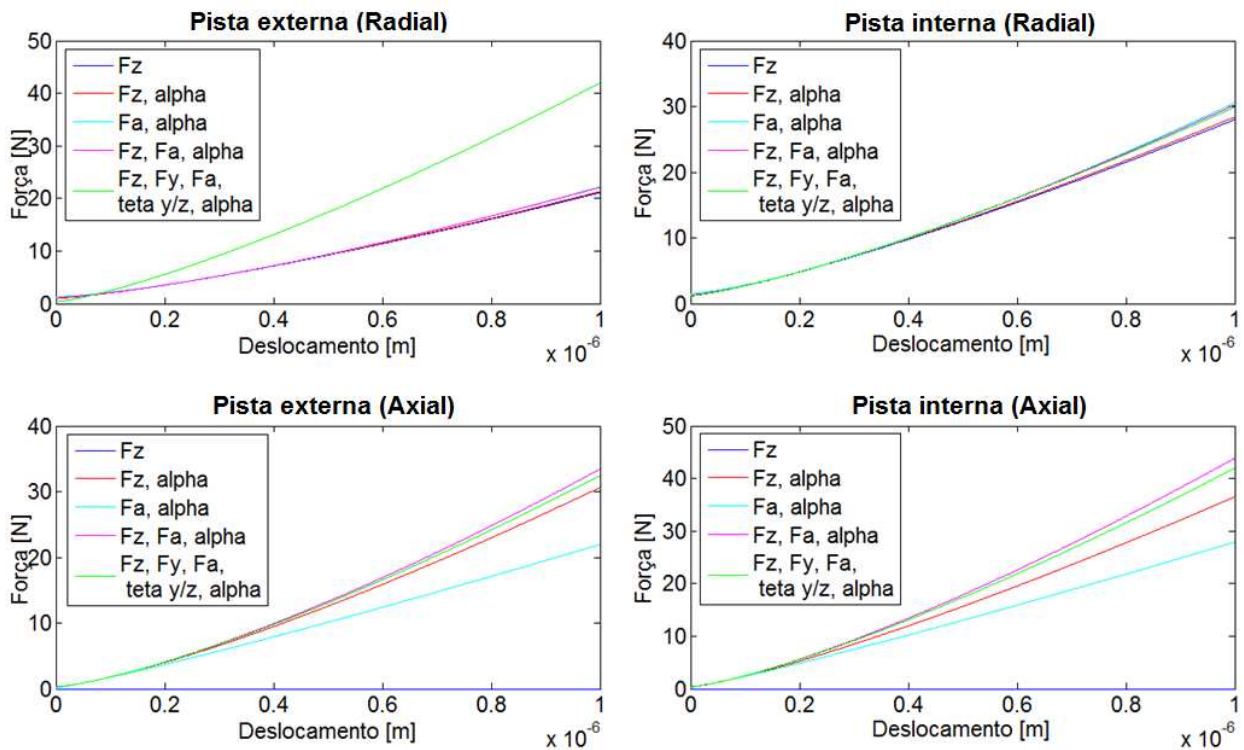


Figura 4.6 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos parâmetros de força não linear –restitutiva).

Na figura 4.6, observa-se que, para pequenos deslocamentos ($0 \text{ m} - 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$), o comportamento das curvas é praticamente o mesmo, mostrando uma menor sensibilidade às alterações de carga. É possível notar, também, que na direção radial, para a pista interna, as variações entre as curvas são mínimas, enquanto que, para a pista externa, a principal diferença ocorre para o caso com 5GDL, enquanto os demais tendem ao mesmo comportamento. Para a direção axial, o comportamento de ambas as pistas é praticamente o mesmo, evidenciando que a principal variação é obtida para o caso com carregamento axial puro.

Assim como para a força restitutiva, foram testados os amortecimentos obtidos, através de curvas da força dissipativa pela velocidade. Os gráficos da figura 4.7 foram obtidos com uma faixa de velocidades de $0 \text{ m/s} - 10^{-2} \text{ m/s}$, baseando-se nos resultados de velocidade fornecidos pela solução da lubrificação EHD) e permitem notar uma maior sensibilidade do modelo para as diferentes condições de carga aplicadas.

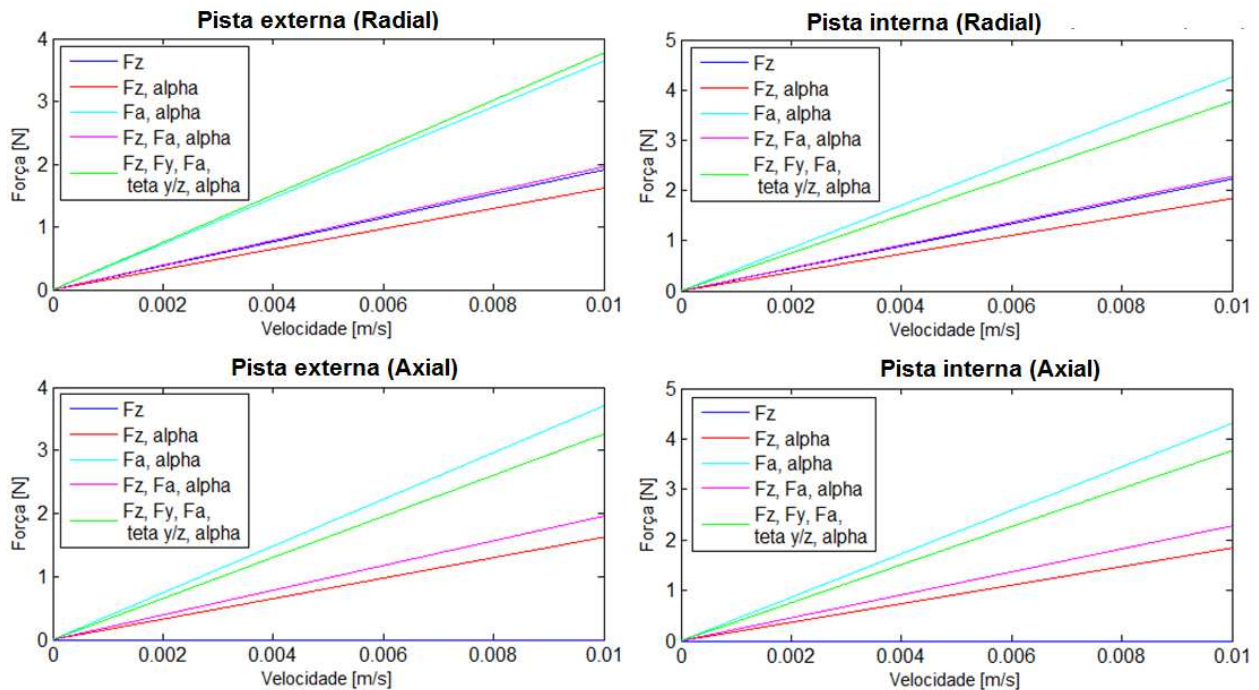


Figura 4.7 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos amortecimentos – força dissipativa).

A partir dos gráficos da figura 4.7, percebe-se que, para ambas as direções e ambas as pistas, o comportamento do conjunto de retas é similar. Para os casos de força axial pura (Tipo 3) e 5GDL (Tipo 5), os valores de força calculados são maiores, quando comparados aos casos com força radial pura (Tipo 1) e força radial com força axial (Tipo 4). Para o conjunto de retas de cada gráfico, é observada uma maior variação entre os casos de carregamento, quando comparado aos gráficos de força restitutiva (figura 4.6), revelando uma maior influência da condição de carregamento na força dissipativa.

A seguir, os mesmos resultados serão apresentados para as simulações em alta carga, permitindo uma comparação entre ambas as aplicações e a consequente observação do comportamento do modelo nestes dois casos.

4.2 Resultados em alta carga

Os resultados obtidos para as simulações em alta carga serão apresentados a seguir, na mesma sequência da seção anterior. É possível observar na figura 4.8 a distribuição de carga para cada uma das esferas nos contatos com as pistas interna e externa.

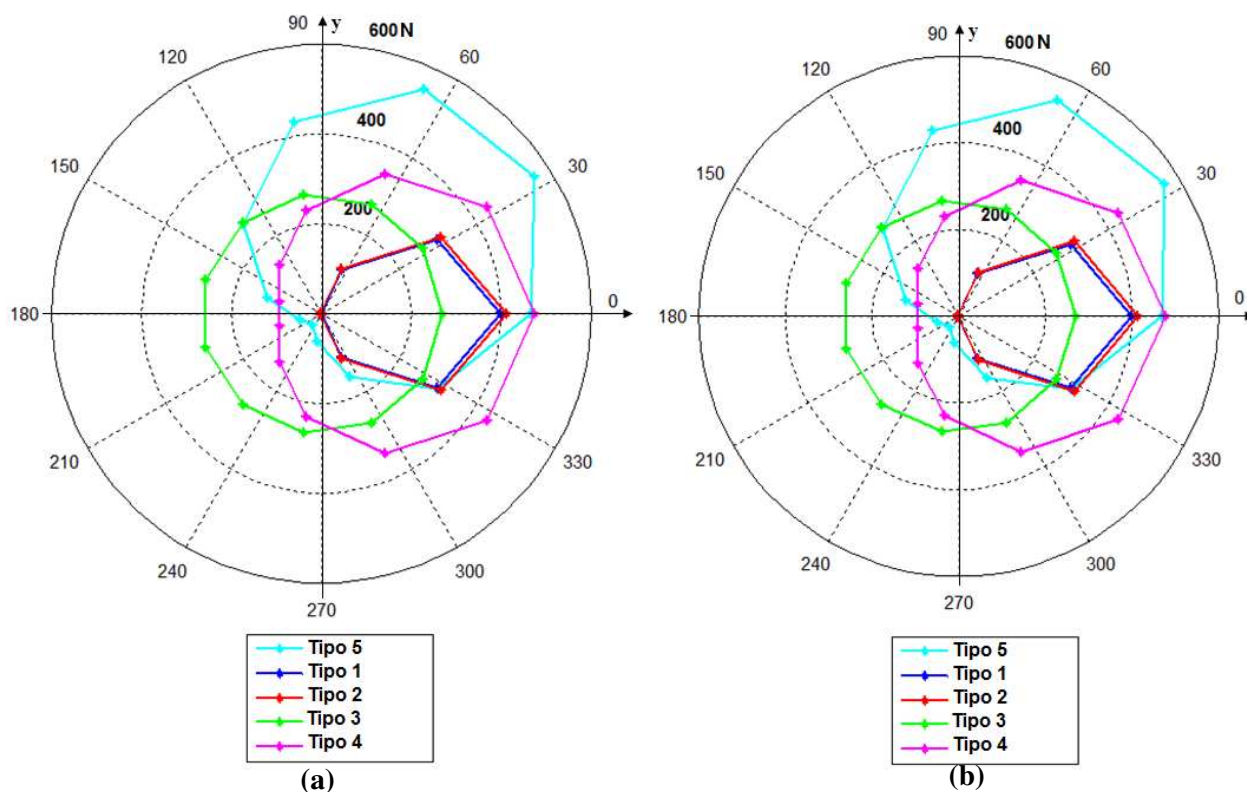


Figura 4.8 – Gráfico da distribuição de carga nas esferas ((a) pista interna, (b) pista externa) para cada tipo de carregamento aplicado ao mancal em alta carga.

A partir do gráfico da figura 4.8, nota-se que o comportamento da distribuição é o mesmo dos casos em baixa carga, dadas as devidas proporções em relação à intensidade das forças.

Baseando-se nesta distribuição, assim como mostrado para baixa carga, são caracterizados os contatos e, em seguida, é simulado o algoritmo multi-níveis do EHD. Com os resultados desta etapa, são calculados os parâmetros da força não linear (equação 34) e os amortecimentos, como mostram as tabelas 4.7 e 4.8.

Tabela 4.7 – Parâmetros do modelo de força não linear calculados para cada tipo de carregamento nas direções radial e axial do mancal (alta carga).

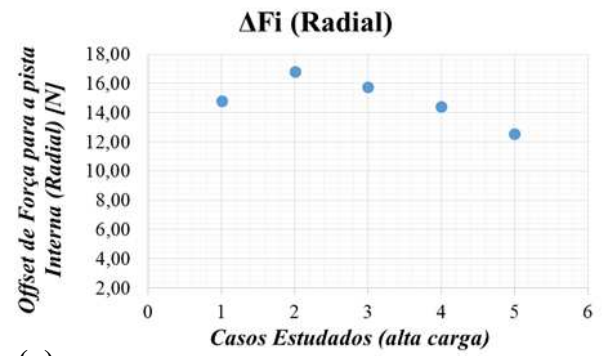
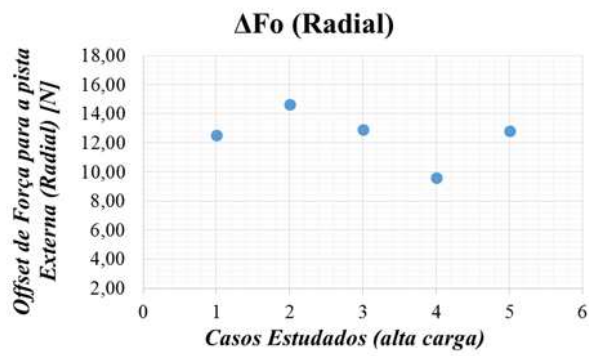
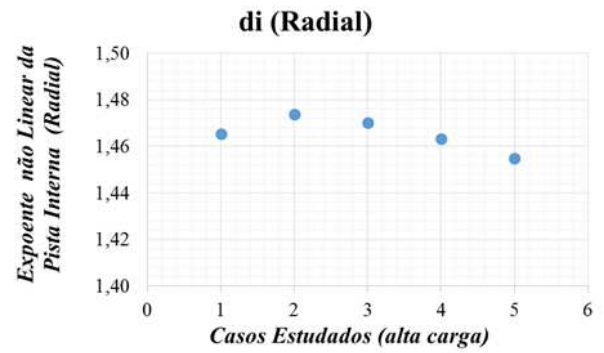
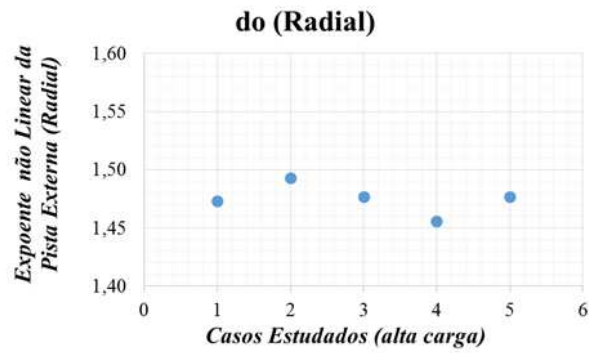
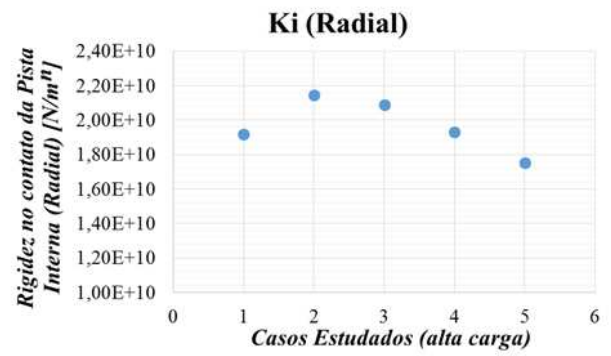
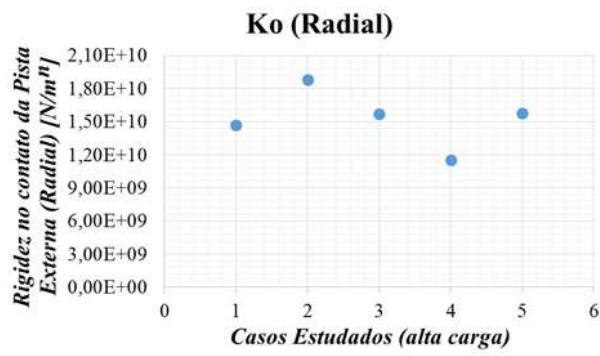
Tipo 1				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	14700253836,91	1,47	12,51
	<i>Interno</i>	19166358860,57	1,47	14,78
	<i>Total</i>	5972451311,00	1,47	12,68
Axial	<i>Externo</i>	0,00	0,00	0,00
	<i>Interno</i>	0,00	0,00	0,00
	<i>Total</i>	0,00	0,00	0,00
Tipo 2				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	18817097188,41	1,49	14,61
	<i>Interno</i>	21458468720,99	1,47	16,79
	<i>Total</i>	7198779849,17	1,49	14,60
Axial	<i>Externo</i>	19608694386,62	1,45	3,11
	<i>Interno</i>	40117774139,89	1,47	3,76
	<i>Total</i>	8590002063,30	1,45	3,89
Tipo 3				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	15710259352,64	1,4765	12,91
	<i>Interno</i>	20901067029,24	1,4702	15,75
	<i>Total</i>	6467210926,37	1,4738	14,12
Axial	<i>Externo</i>	25641066064,83	1,4765	4,62
	<i>Interno</i>	33764118983,66	1,4702	5,68
	<i>Total</i>	10554208012,42	1,4737	5,09
Tipo 4				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	11530440098,27	1,46	9,62
	<i>Interno</i>	19287682050,69	1,46	14,42
	<i>Total</i>	5561450516,15	1,46	10,89
Axial	<i>Externo</i>	28345562146,69	1,48	4,45
	<i>Interno</i>	37407053402,26	1,48	5,25
	<i>Total</i>	7686403777,29	1,45	4,62
Tipo 5				
<i>Sentido no contato</i>		<i>K [N/m^d]</i>	<i>d</i>	<i>ΔF [N]</i>
Radial	<i>Externo</i>	15741579672,57	1,48	12,81
	<i>Interno</i>	17504662392,09	1,46	12,55
	<i>Total</i>	6254642288,34	1,47	11,85
Axial	<i>Externo</i>	18088643784,43	1,45	2,33

	<i>Interno</i>	33815807081,07	1,47	4,66
	<i>Total</i>	6356592774,84	1,43	3,38

Tabela 4.8 – Estimativa de amortecimento (N.s/m) para cada condição de carga nas direções radial e axial (alta carga).

Tipo 1					
Radial	Ci	35,65	Axial	Ci	0,00
	Co	29,69		Co	0,00
	Ct	16,20		Ct	0,00
Tipo 2					
Radial	Ci	63,95	Axial	Ci	33,86
	Co	48,55		Co	61,49
	Ct	27,60		Ct	21,84
Tipo 3					
Radial	Ci	129,49	Axial	Ci	129,49
	Co	105,82		Co	105,82
	Ct	58,23		Ct	58,23
Tipo 4					
Radial	Ci	130,74	Axial	Ci	127,79
	Co	134,64		Co	104,34
	Ct	66,33		Ct	57,44
Tipo 5					
Radial	Ci	132,61	Axial	Ci	130,07
	Co	132,49		Co	127,36
	Ct	66,27		Ct	65,04

Utilizando as tabelas 4.7 e 4.8, foram obtidas as figuras 4.9 e 4.10, que permitem uma melhor comparação dos resultados para cada tipo de carregamento aplicado ao mancal em alta carga.



(a)

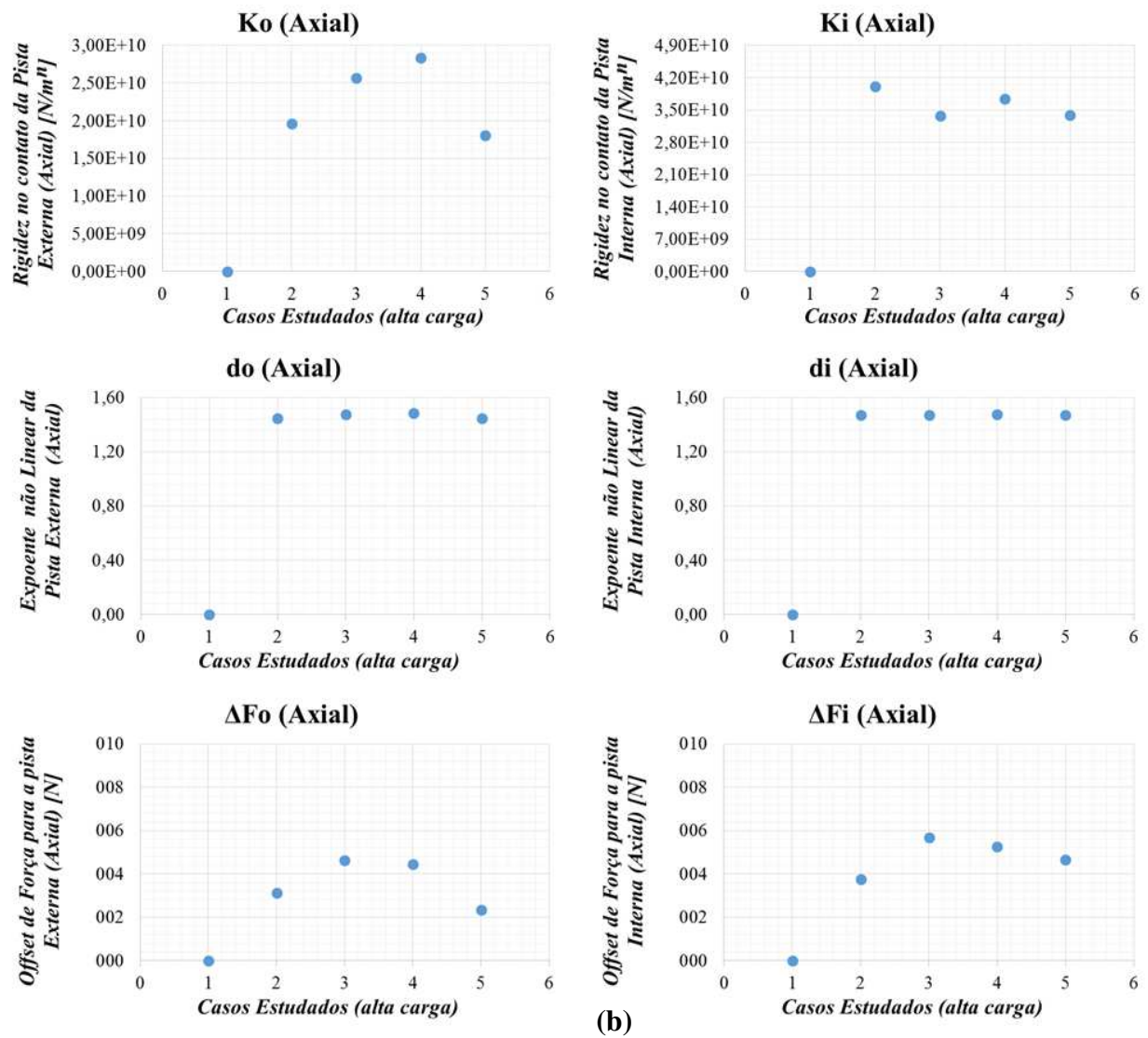


Figura 4.9 – Comparação entre os parâmetros de força não linear para cada uma das pistas, nas direções radial (a) e axial (b) (alta carga).

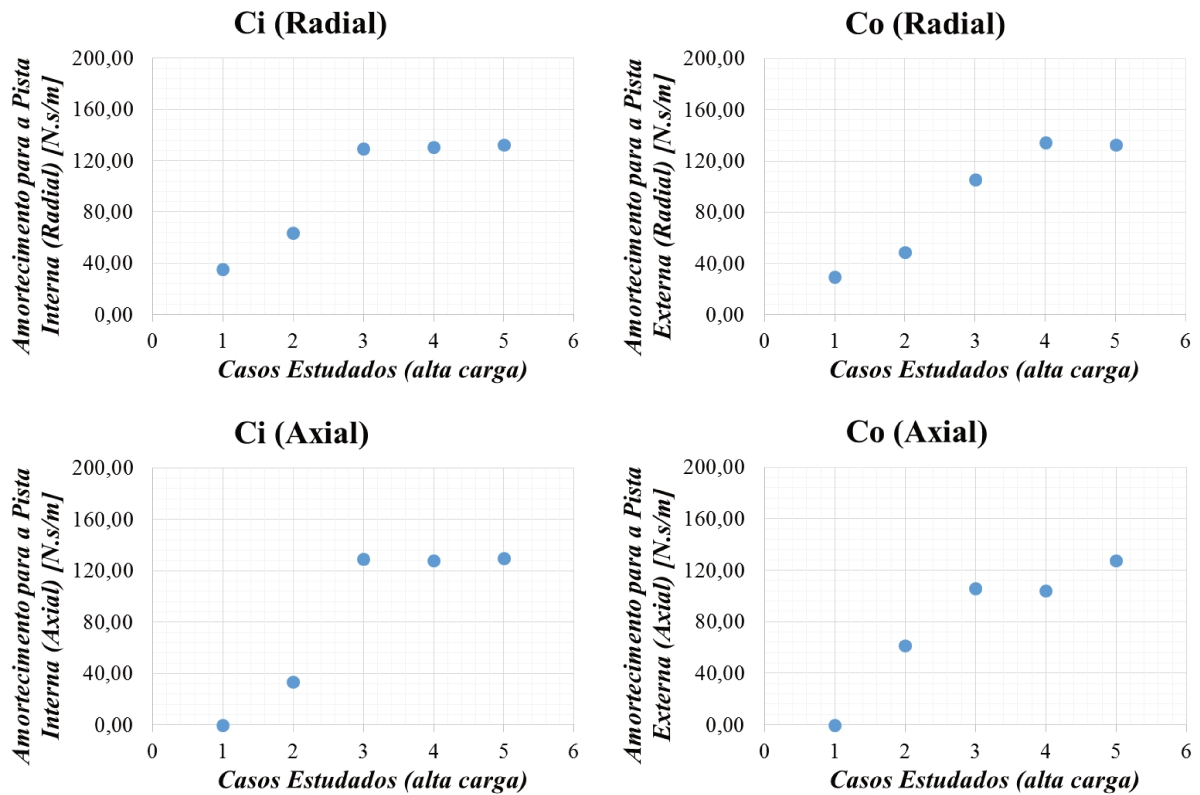


Figura 4.10 – Comparação entre os amortecimentos para cada uma das pistas, nas direções radial e axial (alta carga).

A partir das tabelas 4.7 e 4.8 e das figuras 4.9 e 4.10, nota-se que os parâmetros não seguem a mesma tendência do mancal em baixa carga. Por exemplo, o Tipo 3 não mais é o caso extremo como antes em baixa carga (mais rígido na direção radial e menos rígido na direção axial) e as variações dos parâmetros d e ΔF são mais sutis, mostrando que o maior carregamento resulta em menores variações entre os parâmetros de força para as diferentes condições de carregamento. Considerando os resultados para o amortecimento, observa-se que os valores obtidos em alta carga são menores que aqueles obtidos em baixa carga, evidenciando que, devido ao elevado carregamento no contato, a característica dissipativa do lubrificante é menos expressiva, pois o filme de óleo se encontra mais rígido.

Tendo conhecimento dos parâmetros apresentados anteriormente, é possível comparar a força total dinâmica resultante da simulação transiente para o EHD, com a força dinâmica calculada através da soma da força restitutiva com a força dissipativa, a partir dos parâmetros das tabelas 4.7 e 4.8.

Os gráficos da figura 4.11 ilustram o comportamento destas forças para o caso de carregamento tipo 2 (radial com contato angular), assim como foi mostrado para os carregamentos em baixa carga (o mesmo comportamento foi encontrado para as demais condições de carga em alta carga). Para os casos em alta carga, a diferença máxima obtida entre as duas curvas foi de aproximadamente 0,7%, revelando uma boa concordância do modelo proposto ajustado com a simulação por multi-níveis. Os casos de alta carga apresentam melhor concordância que os casos já apresentados em baixa carga. Desta forma, fica evidente a importância do conhecimento sobre o tipo de carga que será aplicada ao mancal, pois, dependendo do nível de carregamento, e do tipo de carga aplicada, é necessário realizar uma caracterização que melhor represente cada caso.

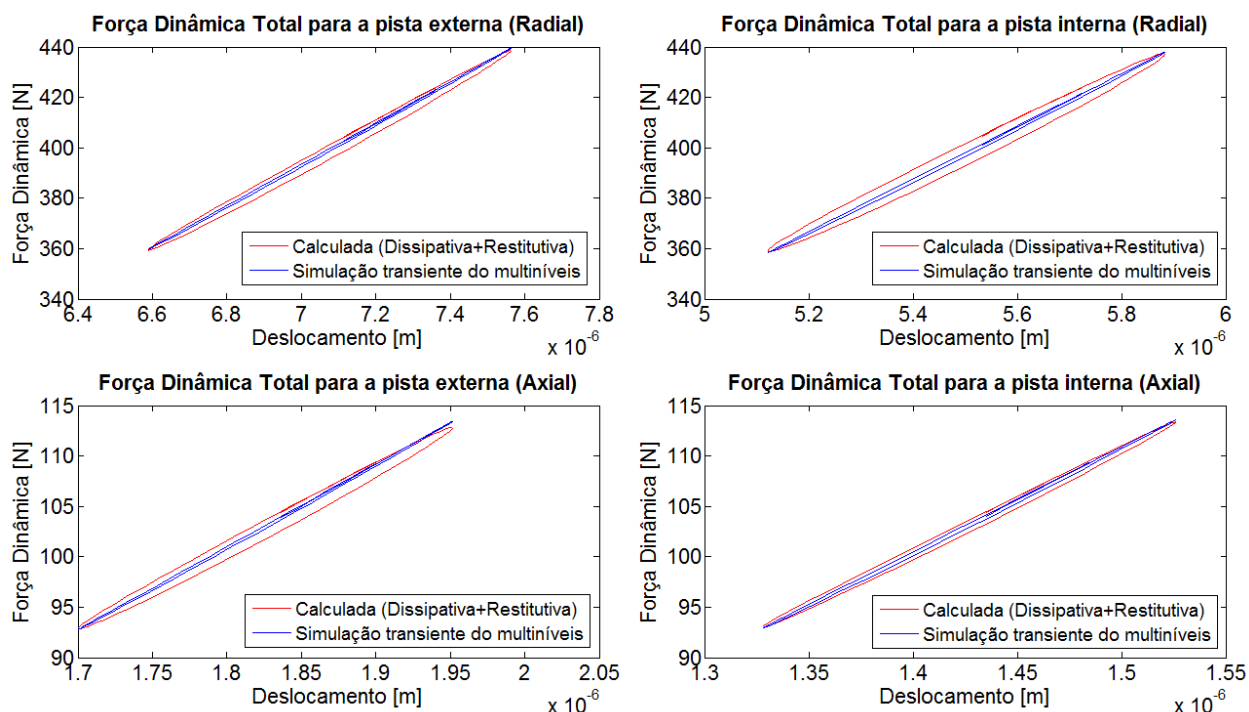


Figura 4.11 – Gráfico comparativo entre a força total dinâmica determinada a partir dos parâmetros da força de contato e dos amortecimentos calculados, e a força dinâmica resultante do algoritmo multi-níveis para o caso transiente.

Para melhor avaliar o comportamento das forças dissipativa e restitutiva no contato, é apresentada, nos resultados a seguir, a análise de capacidade de carga para alta carga. Assim como para baixa carga, foi escolhido um intervalo de deslocamentos ($0 \text{ m} - 10^{-6} \text{ m}$) e de velocidades ($0 \text{ m/s} - 10^{-2} \text{ m/s}$) e aplicou-se ao mancal, verificando o comportamento das forças

restitutiva e dissipativa. A figura 4.12 apresenta, para as pistas interna e externa, nas direções radial e axial, os resultados de força restitutiva, enquanto que, na figura 4.13, observam-se os resultados para a força dissipativa.

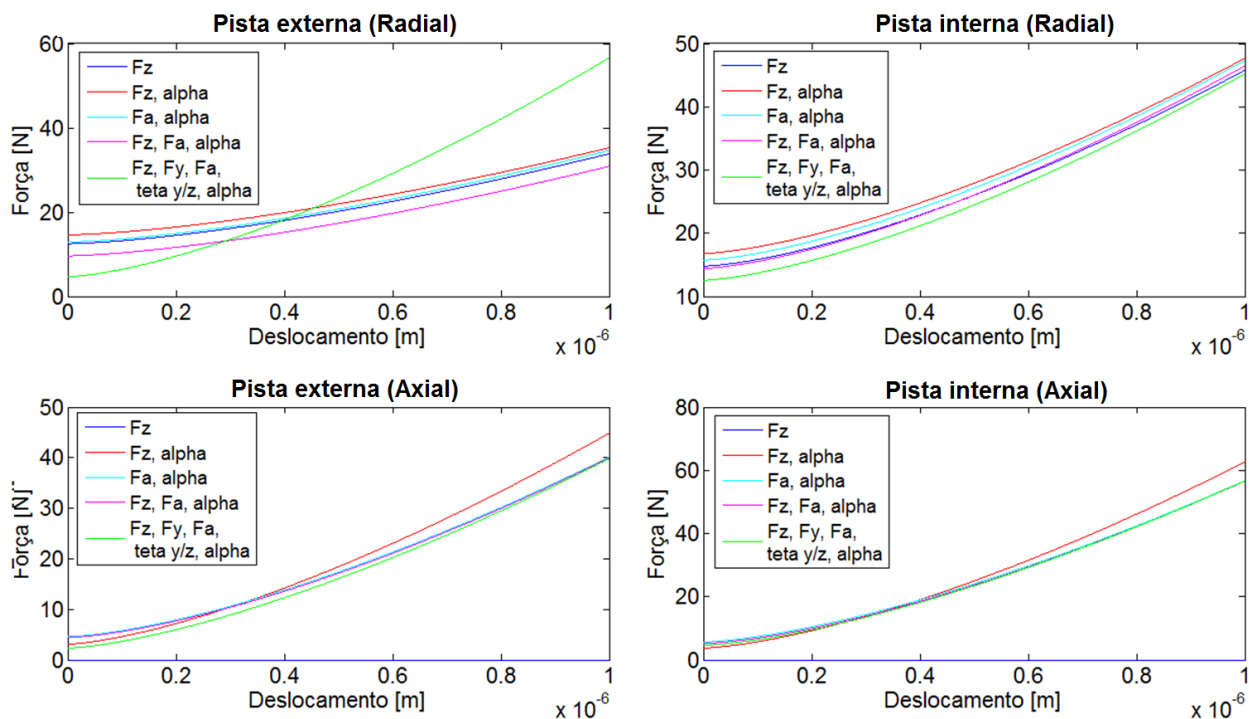


Figura 4.12 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos parâmetros de força não linear – restitutiva).

Verifica-se da figura 4.12 para capacidade de carga, que o comportamento das curvas se altera mesmo para o início dos intervalos de análise, com pequenos deslocamentos, e que as variações entre as curvas são mais significativas do que em baixa carga, mostrando uma maior sensibilidade do modelo neste caso, principalmente na direção radial. Assim como nos casos em baixa carga, percebe-se a diferença entre os carregamentos de Tipos 1, 2, 3 e 4 do carregamento de Tipo 5 (5GDL) na pista externa, para as forças de contato na direção radial, reforçando a importância de considerar na modelagem os diferentes tipos de solicitações aplicadas ao mancal.

Considerando os gráficos da figura 4.13, é possível notar que, para a pista interna em ambas as direções (radial e axial), o comportamento das curvas é semelhante, sendo os casos com a aplicação de força radial pura (Tipo 1) e força radial com contato angular (Tipo 2) aqueles que apresentam maiores diferenças de comportamento em relação aos demais (que se mantém em

uma faixa de valores próximos). Portanto, observa-se que, para a pista externa, as diferentes condições de carregamento apresentam maior influência na resposta da força dissipativa, enquanto para a pista interna o mesmo ocorre apenas para os casos sem a aplicação de força axial.

Após apresentados os resultados para os parâmetros de força não linear no contato e dos testes de capacidades de carga, realizou-se uma etapa final que consiste em testar o modelo e verificar a necessidade de uma nova iteração que recalcule a dinâmica do mancal, simule novamente o algoritmo multi-níveis que soluciona o equacionamento EHD e refaça a otimização, permitindo encontrar novos parâmetros de força e amortecimentos.

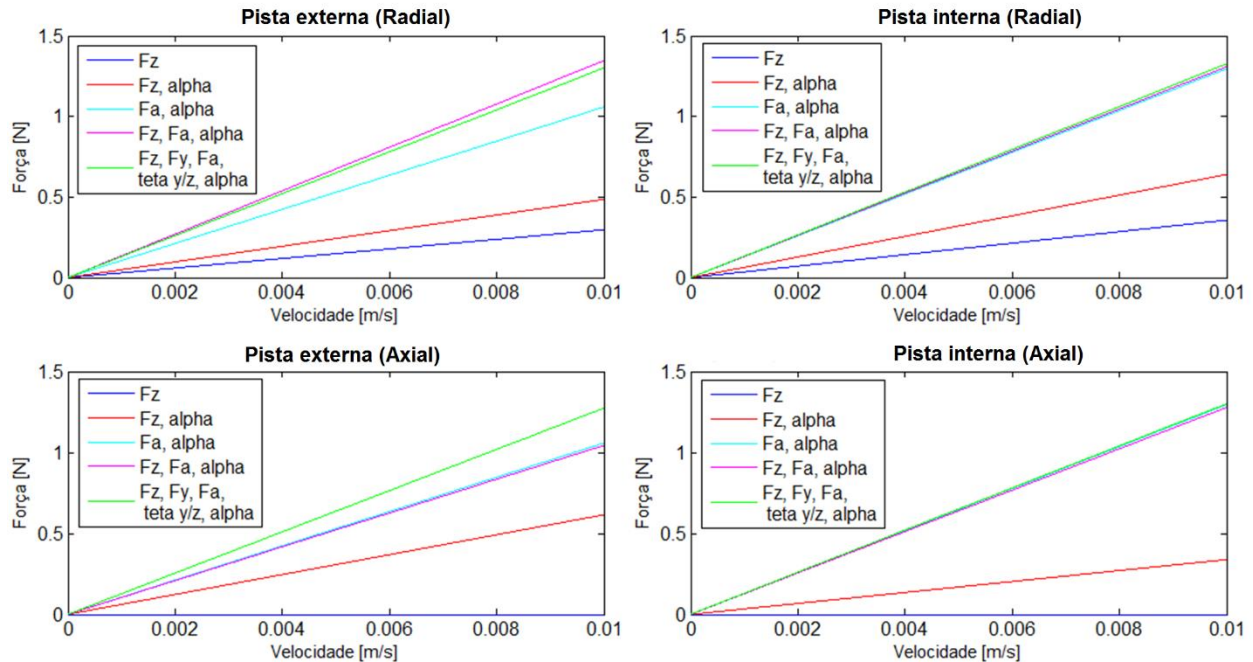


Figura 4.13 – Gráficos para análise de capacidade de carga do mancal (teste dos amortecimentos – força dissipativa).

Para realizar os testes, os valores de carregamento resultantes em cada esfera, para as direções axial e radial foram determinados, e as forças resultantes em cada direção, recalculadas e comparadas com os valores nominais de carga aplicada ao mancal. As equações 22, 23 e 24 foram utilizadas para o cálculo das forças em cada direção, para os Tipos: 1 (puramente radial), 3 (puramente axial) e 4 (radial e axial). Estes três tipos de carregamento foram escolhidos devido a facilidade de comparação entre as forças que foram aplicadas ao mancal com as novas forças

calculadas a partir do modelo proposto em Nonato (2013). A tabela 4.9 contém os resultados das forças, calculadas na primeira iteração de equilíbrio, e comparadas às forças nominais para baixa e alta carga, utilizando os 3 tipos de carregamento já citados.

Tabela 4.9 – Tabelas comparativas entre as forças nominais aplicadas ao mancal e as forças calculadas usando o modelo não linear de força, para baixa e alta carga.

Baixa Carga		
Tipo 1		
Força nominal aplicada [N]		
F_z	F_y	F_a
15	0	0
Força calculada usando os parâmetros obtidos da primeira simulação EHD [N]		
F_z	F_y	F_a
22,39	0,07	0
Tipo 3		
Força nominal aplicada [N]		
F_z	F_y	F_a
0	0	15
Força calculada usando os parâmetros obtidos da primeira simulação EHD [N]		
F_z	F_y	F_a
-1,38E-09	4,04E-10	23,75
Tipo 4		
Força nominal aplicada [N]		
F_z	F_y	F_a
15	0	15
Força calculada usando os parâmetros obtidos da primeira simulação EHD [N]		
F_z	F_y	F_a
16,58710662	4,73756E-07	22,75
Alta carga		
Tipo 1		
Força nominal aplicada [N]		
F_z	F_y	F_a
1000	0	0
Força calculada usando os parâmetros obtidos da primeira simulação EHD [N]		
F_z	F_y	F_a
1032,71	-18,00	0
Tipo 3		
Força nominal aplicada [N]		
F_z	F_y	F_a
0	0	1000
Força calculada usando os parâmetros obtidos da primeira simulação EHD [N]		
F_z	F_y	F_a
-4,59E-08	1,35E-08	1054,9
Tipo 4		
Força nominal aplicada [N]		
F_z	F_y	F_a
1000	0	1000
Força calculada usando os parâmetros obtidos da primeira simulação EHD [N]		
F_z	F_y	F_a
980,79	4,13	1052,58

Com base na tabela 4.9, são avaliados os resultados obtidos pela primeira simulação EHD realizada e os parâmetros para a força não linear que foram ajustados pela otimização. Para os

casos em baixa carga, dois valores de carga foram utilizados: 15N e 0N. Nota-se que, para as direções com 0N os valores recalculados ficaram próximos do valor nominal, enquanto que os valores que foram recalculados para as direções com 15N mostraram, em média, um valor de 21,4N.

Desta forma, conclui-se que novas iterações de todo o processo, refazendo os equilíbrios da esfera e do mancal e recalculando a distribuição de carga em cada esfera para posterior caracterização de cada contato seriam necessárias. A partir da segunda iteração, vale destacar que não mais seria usado o modelo de contato de Hertz para os cálculos da dinâmica do mancal, mas sim, o modelo não linear de força de contato, e também, os parâmetros resultantes da primeira iteração como entrada.

Na sequência, as equações de lubrificação EHD usando o algoritmo multi-níveis devem ser novamente resolvidas e, em uma última etapa, seriam calculados os parâmetros da força não linear e amortecimentos. Ao fim do processo, os valores obtidos devem apresentar uma convergência cada vez melhor para os valores nominais.

Este fato corrobora os resultados encontrados na figura 4.5, onde o ciclo de histerese da força dinâmica para baixa carga, calculado a partir do modelo ajustado de força não linear, distancia-se de cerca de 15% do ciclo de histerese obtido pela solução numérica completa por multi-níveis.

Porém, para o mancal utilizado (6006), casos de alta carga são mais comuns em sua aplicação, tornando os resultados do teste em alta carga mais relevantes para aplicações reais.

Observa-se que, em alta carga, para as direções com aplicação de 0N, foi obtida convergência praticamente na primeira iteração do equilíbrio, sendo que para as direções com aplicação de 1000N, os valores ficaram em torno de uma média de 1030,2N, ou seja, com uma convergência também aceitável neste caso. Assim, verifica-se que, para alta carga, os resultados se mostraram mais coerentes em relação à carga nominal aplicada, com pequenas diferenças na faixa de 3%, demonstrando que a convergência em alta carga foi mais eficiente.

Desta forma, verifica-se a validade do modelo utilizado para os casos mais típicos de aplicação do mancal em análise (alta carga) e também a necessidade de melhorar a convergência dos resultados obtidos para os testes em baixa carga.

5 CONCLUSÕES

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi possível inserir a modelagem dinâmica do mancal que considera cinco graus de liberdade no modelo de lubrificação EHD que, no estudo desenvolvido por Nonato (2013), utilizava o modelo de Hertz para contato seco, considerando apenas forças radiais para calcular a distribuição de forças nas esferas. Com esta nova consideração no modelo, estudou-se o comportamento dos parâmetros ajustados (K , d e ΔF) a partir dos resultados da simulação EHD e concluiu-se que as modificações geradas pelo carregamento em contato angular afetam diretamente estes parâmetros.

Conclui-se que, o modelo proposto por Nonato (2013) é promissor considerando os testes realizados para o caso com cinco graus de liberdade, sendo possível o cálculo dos coeficientes K , d e ΔF , bem como a obtenção dos amortecimentos, verificando, assim, o equacionamento não linear para a relação entre forças e deslocamentos. Como pode ser observado pelos gráficos de forças do capítulo 4, o modelo não linear se comporta de maneira coerente de acordo com o tipo de solicitação do mancal.

Observou-se que, considerando os casos em baixa carga, nos testes de capacidade de carga ($0 \text{ m} - 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$), as curvas de força restitutiva mostraram um comportamento semelhante e praticamente ficaram sobrepostas. Já no caso em alta carga, por sua vez, as curvas não apresentam este comportamento, mostrando variações em toda a faixa de teste, principalmente na direção radial, evidenciando que os casos de ajuste para cargas mais elevadas apresentam maior sensibilidade ao tipo de carregamento aplicado.

Outra conclusão importante é a relevância da consideração do ângulo de contato entre a esfera e as pistas, como ilustrou o gráfico da figura 4.2 (com uma curva de histerese por esfera), mostrando que como cada esfera possui um ângulo de contato, é necessário calcular um amortecimento para cada uma delas, ajustando uma reta por curva mostrada, e ao final, calcular o amortecimento total. Ainda considerando os resultados de amortecimento, foi possível observar que, para o mancal carregado em alta carga, o filme de lubrificante se apresenta mais comprimido, gerando uma maior expressão da característica de rigidez e menor característica dissipativa do comportamento do filme de óleo.

Conclui-se também que, a partir dos testes feitos com os parâmetros da força não linear no contato, recalculando a distribuição de forças e comparando com as forças nominais de entrada, o modelo praticamente convergiu na primeira iteração de equilíbrio para os casos em alta carga, que representam as aplicações típicas do tipo de mancal estudado, estando mais próximos da realidade de aplicação, enquanto que para os casos em baixa carga, mostrou-se necessário realizar mais iterações e testar a convergência novamente.

Por fim, conclui-se que é fundamental o conhecimento das condições de operação do mancal, pois, como se apresentam os resultados, para cada nível de carga e tipo de carregamento usado, são obtidos diferentes tendências para os parâmetros do modelo não linear, mostrando a necessidade de diferentes caracterizações, para assim, melhor representar o mancal em operação que deseja-se estudar.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Propõem-se como futuros trabalhos, os seguintes passos:

- Refazer, para o caso em baixa carga, os equilíbrios estáticos desenvolvidos no algoritmo de Radaelli (2013), recalculando a distribuição de forças e refazer todo procedimento apresentado, considerando a distribuição de carregamentos nas esferas através do modelo não linear de força com os parâmetros estimados no presente trabalho.
- Considerar diferentes valores iniciais de posições das esferas no cálculo da dinâmica do mancal e incluir valores de folga.
- Testar variações das combinações possíveis de carga e diferentes valores de força e rotação.
- Concepção de um banco de testes para avaliação experimental do modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARUS, C. Isothermals, Isotropics, and Isometrics Relative to Viscosity. **Am. J. Sci.**, v. 45, p. 87-96, 1893.

BIZARRE, L.; CAVALCA, K. L. **Modelagem das Forças de Contato não Lineares em Mancais de Elementos Rolantes de Contato Angular**. Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), p. 1-11, Uberlândia, Brasil, 2014.

CARVALHO, R.V. **Análise Dinâmica de Rolamentos de Esfera**. 2010. Dissertação de Mestrado Acadêmico – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CAVALCANTI, D.; CAVALCA, K. Roller Bearing Design Optimization Applying Hertz Contact Theory, **SAE Technical Paper 1999-01-3036**, 1999.

CHANGSEN, W. **Analysis of Rolling Element Bearings**, London: Mechanical Engineering Publications LTD, 1991.

DOWSON, D.A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 4, n. 2, p. 159-170, 1962.

DOWSON, D.; HIGGINSON, G. R. **Elasto-hydrodynamic Lubrication; The Fundamentals of Roller and Gear lubrication**. Pergamon Press, Oxford, p.1-235, 1966.

FUKATA, S.; GAD, E. H.; KONDOU, T.; AYABE, T.; TAMURA, H. On the Radial Vibration of Ball Bearings, **The Japan Society of Mechanical Engineers**, v.28, p. 899-904, 1985.

GOODYER, C. E. **Adaptive Numerical Methods for Elastohydrodynamic Lubrication**. 2001. 179p. Tese (Doutorado), Leeds, University of Leeds, Inglaterra.

GUPTA, P.K. Dynamics of rolling element bearings part III: Ball bearing analysis & part IV: Ball bearing results. **ASME Journal of Lubrication Technology**, v.101, p. 311-326. 1979.

GUPTA, P. K.; FLAMAND, L.; BERTHE, D.; GODET, M. On the Traction Behaviour of Several Lubrificants, **Trans. ASME Journal of Lubrification Technology**, v. 103, p. 55-64, 1981.

HAGIU, G.D. **Dynamic characteristics of high speed angular contact ball bearings**. Wear. v. 211. p. 22-29. 1997.

HAMROCK, BERNARD. J. **Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts**, 1976, 256 p. Tese (Doutorado). Leeds, Inglaterra: Leeds University.

HARRIS, T.A. **Rolling Bearing Analysis**, John Wiley & Sons, New York, 1991, 1013p.

HARRIS, T.A.; KOTZALAS M.N. **Advanced Concepts of Bearing Technology**. 5a ed., Florida-USA: CRC Press, 2006. 342p.

HERTZ, H. On the Contact of Elastic Solids, **Miscellaneous Papers**, New York : Macmillan, p. 146, 1881.

JONES, A.B. A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearing under Arbitrary Load and Speed Conditions, **Journal of Basic Engineering**, Trans. ASME, v.82, 1960.

LIEW, A.; FENG, N.; HAHN E. J. Transient Rotordynamic Modeling of Rolling Element Bearing Systems, **J. of Eng. for Gas Turbines and Power**, v. 124, p. 984-991, 2002.

LIEW, H. V.; LIM, TEIK C. Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics, **Journal of Sound and Vibration**, v. 283, p.1163-1179, 2005.

LIM, T.C.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part I: Bearing stiffness formulation, **Journal of Sound and Vibration**, v. 139, p. 179-199, 1990a.

LIM, T.C.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part II: System Studies, **Journal of Sound and Vibration**, v. 139, p. 201-225, 1990b.

LIM, T.C.; Singh, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part III: Geared Rotor, **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, p. 31-54, 1991.

LIM, T.C.; Singh, R. Vibration transmission through rolling element bearings, part IV: Statistical Energy Analysis, **Journal of Sound and Vibration**, v. 153, p. 37-50, 1992.

LUBRECHT, A. A.; TEN NAPEL, W. E.; BOSMA, R. Multigrid of Solution for Two- Dimension Elastohydrodynamically Lubricated Point Contact Calculations, Trans. ASME, **J. Tribology**, v. 108, p. 551-556, 1986.

LUNDBERG, G.; PALMGREN, A. Dynamic Capacity of Rolling Bearings, ActaPolytech. Scand., **Mech. Eng. Ser.**, v.1, p. 1–52, 1947.

LUNDBERG, G.; PALMGREN, A. **Dynamic Capacity of Rolling Bearings**, ActaPolytechnica Mechanical Engineering Series, .v. 1, nº 3. 1947 e v. 2, nº 4. 1952.

MARTIN, H. M. Lubrication of Gear Teeth, **Engineering**, Londres, v. 102, p. 119-121, 1916.

MARQUARDT, D. W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 431-441, 1963.

MEEKS, C. R.; TRAN, L. Ball bearing dynamic analysis using computer methods-part I: Analysis, **ASME Journal of Tribology**, v. 118, p.52-58, 1996.

NONATO F. **Modelo dinâmico para o contato em mancais de elementos rolantes sujeitos à lubrificação elastohidrodinâmica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

NONATO, F.; CAVALCA, K. On the non-linear dynamic behavior of elastohydrodynamic lubricated point contact, **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, p. 4656-4671, 2010.

NONATO F.; CAVALCA, K. Local Linear Approximation for the Stiffness Characteristics of Elastohydrodynamic Point Contact. In:10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 513-523, 2012a.

NONATO, F.; CAVALCA, K. Investigation on the Damping Characteristics of Elastohydrodynamic Lubricated Point Contacts under Dynamic Loading. In:10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 503-512, 2012b.

NONATO, F. **Modelo Dinâmico para Mancais de Elementos Rolantes Radiais de Esferas Considerando os Efeitos da Lubrificação Elastohidrodinâmica**, 2013. Tese (Doutorado), Univesidade Estadual de Campinas, Campinas.

NONATO, F.; CAVALCA, K. An approach for including the stiffness and damping of elastohydrodynamic point contacts in deep groove ball bearing equilibrium models, **Journal of Sound and Vibration**, v.333, p. 6960-6978, 2014.

NURGAT, E.; BERZINS, M. MultigridMethods for EHL Problems. Seventh Cooper Mountain Conference on Multigrid Methods, v.2, p. 623-636, 1996.

PALMGREN, A. **Ball and Roller Bearing Engineering**. Philadelphia: PA, 1945. 270p.

RADAEELLI, G. Z. **Determinação do Carregamento Dinâmico em Mancais de Esfera de Contato Angular**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

REYNOLDS, O. On the Theory of Lubrication and its application to M. Beauchamps Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, **Phil. Trans. Roy. Soc.** A 177, p. 157-234, 1886.

SAWALHI, N.; RANDALL, R.B. Simulating gear and bearing interactions in the presence of faults: Part I. The combined gear bearing dynamic model and the simulation of localised bearing faults, **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 22, p. 924-1951, 2008.

SILVA, L. C. **Método robusto para a calibração de câmeras em estereofotogrametria**, UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

SPIKES, H. A. Sixty Years of EHL, **Lubrication Science**, v. 18, p. 265-291, 2006.

SUNNERSJO, C. S. Varying Compliance Vibrations of Rolling Bearings, **Journal of Sound and Vibrations**, v. 58, p. 363-373, 1978.

TAMURA, H.; SHIMIZU, H. Vibration of Rotor Based on Ball Bearing (2nd Report, Static Stiffness of Ball Bearing Containing a Small Number of Balls), **The Japan Society of Mechanical Engineers**, v. 10, p. 763-775, 1967.

VENNER, C. H. **Multilevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems**. Tese (Doutorado) – Twente University, Netherlands, 1991.

VENNER, C. H.; LUBRECHT, A. A Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding, **ASME Journal of Tribology**, v. 116, p. 751-761, 1994.

VENNER, C.H.; BOS, J. Effects of lubricant compressibility on the film thickness in EHL line and circular contacts, **Wear**, v. 173, p. 151-165, 1994.

VENNER, C. H.; LUBRECHT, A. A. Numerical Analysis of the Influence of Waviness on the Film Thickness of a Circular EHL Contact, **ASME Journal of Tribology**, v. 118, p. 153-161, 1996.

VENNER, C. H.; LUBRECHT, A. A. Multilevel Methods in Lubrication, Netherlands : Elsevier, **Tribology Series**, vol 37, 2000, 400p.

VILLA, C.V.S.; SINOUE, J.; THOUVEREZ, F. Investigation of a Rotor- Bearing System with Bearing Clearances and Hertz Contact by Using a Harmonic Balance Method, **J. of the Braz. Soc. Of Mech. Sci. & Eng.**, v. 29, n°.1, p. 14-20, 2007.

Visual Numerics, Inc. **IMSL Fortran Library User's Guide: MATH/LIBRARY Special Functions**. Visual Numerics, 2003, 272p.

WANG, J.; QU, S.; YANG, P. Simplified multigrid technique for the numerical solution to the steady-state and transient EHL line contacts and the arbitrary entrainment EHL point contacts, **Tribology International**, v. 34, p. 191-202, 2001.

WIEGERT, B. HETZLER, H.; SEEMANN, W. A simplified elastohydrodynamic contact model capturing the nonlinear vibration behaviour, **Tribology International**, v. 59, p.79-8, 2013.

WIJNANT, Y. H.; WENSING, J.A.; VANNIJEN, G.C. The Influence of Lubrication on the Dynamic Behaviour of Ball Bearings, **J. Sound and Vibration**, v. 222, (4), p. 579-596, 1999.

WIJNANT, Y. H. **Contact Dynamics in the field of Elastohydrodynamic Lubrication**, 1998, 179 p. Tese (Doutorado), Enschede, the Netherlands: University of Twente.

APENDICE A – Método Numérico de Levenberg - Marquardt

O ajuste de curvas e estimativa de seus parâmetros são etapas importantes do estudo experimental e estatístico da engenharia. O algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM) busca numericamente os parâmetros que ajustam, pelo método dos mínimos quadrados, uma dada função genérica (em geral não linear) a um determinado conjunto de pontos (Marquardt, 1963).

O método dos mínimos quadrados busca um vetor x de parâmetros característicos que minimize a expressão:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(x))^2 = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} f(x)^T f(x) \quad (\text{A.1})$$

Sendo as funções $f_i: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, m$ com $m \geq n$. No caso em que os métodos são aplicados ao ajuste de um modelo matemático (y) através de m pontos experimentais:

$$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_m, y_m)$$

o objetivo é minimizar $\|f(x)\|$, ou equivalente, para encontrar x^* (vetor de parâmetros da função) que resulte no mínimo local para $F(x)$.

A razão para se minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, ao invés da soma dos resíduos, deve-se ao fato de que a função módulo não é diferenciável na origem, e serão usadas derivadas para solucionar os problemas de mínimos quadrados não-lineares. Considerando como exemplo o caso do presente trabalho, pela equação (31):

$$M(x, \delta) = X_1 \delta^{X_2} + X_3 \quad (\text{A.2})$$

$$\text{sendo } y = M(x, \delta), t = \delta, X_1 = K, X_2 = de, X_3 = \Delta F,$$

assume-se que existe um x^+ tal que $y_i = M(x^+, \delta_i) + \varepsilon_i$, onde $\{\varepsilon_i\}$ são os erros de medida. Desta forma, para qualquer escolha de x é possível encontrar os valores dos resíduos da forma:

$$f_i(x) = y_i - M(x, \delta_i) = y_i - (X_1 \delta_i^{X_2} + X_3), \text{ com } i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.3})$$

Percebe-se, pela equação (A.3), que o modelo é dependente dos parâmetros $x=[X_1, X_2, X_3]^T$, assim, o objetivo do problema seria encontrar $x^*=[X_1^*, X_2^*, X_3^*]^T$, onde X_1^*, X_2^*, X_3^* são valores que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos, o que leva a encontrar a melhor curva que se ajusta aos pontos fornecidos.

Para a solução do problema de mínimos quadrados não-lineares, existem diversas opções de métodos numéricos. No presente trabalho, foi implementado o método de Levenberg-Marquardt, que consiste em um aperfeiçoamento do método de Gauss-Newton que, por sua vez, é uma variante do método de Newton.

O método de Levenberg-Marquardt é iterativo, assim como o método de Newton. Isto significa que, a partir de um ponto inicial x_0 , o método produz uma série de vetores x_1, x_2, \dots , que devem convergir para x^* , um mínimo local para a função de entrada a ser ajustada.

Inicialmente, será mostrado o método de Gauss-Newton e, posteriormente, a alteração que é introduzida pelo método de Levenberg-Marquardt. O método de Gauss-Newton se baseia na aproximação para os valores das componentes de f em uma vizinhança de x . Da expansão em série de Taylor percebe-se que:

$$f(x + h) \equiv f(x) + J(x)h \quad (\text{A.4})$$

onde $J \in R^{m \times n}$ é a matriz Jacobina, isto é, uma matriz que contém as derivadas parciais de primeira ordem de cada componente da função f , dada pela expressão (A.5).

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (\text{A.5})$$

As derivadas parciais de segunda ordem, por sua vez, formam a matriz hessiana H , dada pela equação (A.6), que é aplicada no caso do método de Newton (no método de Gauss-Newton é utilizada somente a matriz Jacobiana).

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (\text{A.6})$$

A convergência pode ser verificada pelo progresso, a cada iteração, do valor de f . Pode-se considerar a convergência atingida quando f não reduz seu valor após certo número de iterações. Todavia, pode não haver garantias que o mínimo global tenha sido alcançado. A velocidade de convergência é, em geral, associada ao número de iterações necessário para se obter a convergência ou, mais precisamente, ao número de verificações do valor de f .

Considerando ainda a expansão de Taylor, e que os termos de segunda, terceira ordens e superiores são considerados desprezíveis, a equação fica simplificada da seguinte forma, considerando x_l a l -ésima estimativa de F :

$$\nabla F(x) \approx g^{(l)} + H^{(l)}(x^{(l+1)} - x^{(l)}) \quad (\text{A.7})$$

Considerando ∇F tendendo a zero, obtém-se:

$$H^{(l)}(x^{(l+1)} - x^{(l)}) = -g^{(l)} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo, na expressão (A.8), as equações (A.9) e (A.10), obtém-se a expressão utilizada durante a metodologia de Newton.

$$H = 2(J^T J + \sum_{i=1}^N f_i(\nabla^2 f_i)) \text{ e } g = 2J^T f \quad (\text{A.9})$$

$$B = \sum_{i=1}^N f_i(\nabla^2 f_i) \quad (\text{A.10})$$

A principal limitação do método de Newton-Raphson, ou simplesmente método de Newton, envolve J , a matriz jacobiana. A matriz $J^T J$, que precisa ser invertida a cada iteração, pode apresentar problemas de mal condicionamento, o que pode conduzir a resultados divergentes, e até mesmo à singularidade de $J^T J$. Portanto, é essencial adotar uma estratégia alternativa quando ocorre um mal condicionamento extremo. Uma aproximação comumente utilizada é o método de

Levenberg–Marquardt (Marquardt, 1963) e (Silva, 2003), no qual, modifica-se a matriz que será invertida de forma a evitar o mal condicionamento, fazendo-se $B = \mu I$ na equação (A.10) ($\mu > 0$ e I é a matriz identidade), resultando na equação (A.11).

$$(J^T J + \mu I)^{(l)} u^{(l)} = -(J^T)^{(l)} f^{(l)} \quad (\text{A.11})$$

Esta modificação altera apenas as componentes a_{ii} da diagonal principal de $J^T J$, resultando em componentes modificadas a'_{ii} de forma que $a'_{ii} = a_{ii}(1 + \mu)$.

Algoritmo Levenberg-Marquardt

Escolher uma estimativa inicial $x^{(0)}$ e dois critérios de parada ε_1 e ε_2 . Então, são calculados os valores de $J^{(0)}, f^{(0)}$ e $g^{(0)}$. Se o valor $\|f^{(0)}\| \leq \varepsilon_1$ ou $\|g^{(0)}\| \leq \varepsilon_2$, então, o algoritmo é finalizado, senão, fazer $l = 0$ e avançar para o segundo passo.

Calcular $J^{(l)} u^{(l)} = -f^{(l)}$. Se $J^{(l)}$ for singular, então, calcular $(J^T J)^{(l)}, \tau = \text{tr}(J^T J)^{(l)}$ e $(J^T J + \mu I)^{(l)}$. Calcular $(J^T J + \mu I)^{(l)} u^{(l)} = -f^{(l)}$.

Realizar uma busca ao longo da direção $u^{(k)}$ de forma a determinar um passo α_l satisfazendo à regra de Armijo (Silva, 2003)

$$\text{Calcular } x^{(l+1)} = x^{(l)} + \alpha_l u^{(l)}$$

Calcular $f^{(l+1)}$. Se $\|f^{(l+1)}\| \leq \varepsilon_1$, então, terminar o algoritmo; senão calcular $J^{(l+1)}$ e $g^{(l)}$. Se $\|g^{(l+1)}\| \leq \varepsilon_2$, então, terminar o algoritmo; senão fazer $l = l + 1$ e voltar para o passo 2.

Quadro A.1 – Algoritmo de Levenberg-Marquardt